MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

SZÁMÍTÁSTECHNIKAI KÖZPONTJA

KÖZLEMÉNYEK

2.

1967. április

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
Számítástechnikai Központja

K Ö Z L E M É N Y E K

2.

Budapest, 1967.
április

Felelős szerkesztő:
Szelezsán János

Szerkesztőbizottság:
Arató Mátyás
Dancs István
Frey Tamás
Gergely József
Kovács Győző

A cikkek lektorai:
Gergely Ervin
Kósa András
Mogyoródi József
Nemetz Tibor
Peller József
Veidinger László

Felelős kiadó:
Frey Tamás igazgató

Technikai szerkesztő:
Hartmann Katalin

MTA Számitástechnikai Központ
Budapest, I. Uri u. 49.

Egy sorbanállási feladat megoldása

Gergely József

I. A feladat megfogalmazása

Az [1] /és néhány azt megelőző/ cikkben Gaver a következő sorbanállási feladatot vizsgálja: Egy kiszolgáló berendezéshez kétféle áramlat érkezik (A és B tipusu). A kiszolgálási idők T_1 és T_2 függetlenek és különkülön azonos eloszlásuak $B_1(t)$ és $B_2(t)$ eloszlásfüggvényekkel. Ha a készülék egy A tipusu után B tipusut szolgál ki, vagy forditva, szükség van egy T_{12} ill. T_{21} átkapcsolási időre. T_{12} és T_{21} függetlenek és külön-külön azonos $C_{12}(t)$ ill. $C_{21}(t)$ eloszlásuak. Az érkezés a_1 ill. a_2 intenzitásu Poisson folyamat. Az érkezési, kiszolgálási és átkapcsolási idők egymástól függetlenek.

A feladatot Gaver a következő esetekre oldotta meg:

1./ Kiszolgálás érkezési sorrendben történik.

2./ B-nek elsőbbsége van A-val szemben. Itt különböző prioritási eseteket vizsgál (pl. az elsőbbség csak a kiszolgálások befejezése után érvényesül; B megszüntetheti A kiszolgálását, majd B kiszolgálásának befejezése után A kiszolgálása folytatódik, vagy ujrakezdődik stb.).

A rendszerben lejátszódó folyamat erősen függ az üres rendszer esetén követett stratégiától. Ezzel kapcsolatban Gaver vizsgálta a következő eseteket:

a/ Ha a kiszolgálás B tipusuval fejeződött be és nincs a rendszerben se A se B tipusu, akkor megkezdődik a készülék átkapcsolása A-ra (feltételezi, hogy $a_1 > a_2$).

b/ Ha egy kiszolgálás után a rendszer üresen marad, csak egy érkezés után kezdi meg az átkapcsolást, ha szükség van arra.

Az alábbiakban a következő esetet vizsgáljuk:

Alkossanak külön sort az A és a B tipusuak. Ha a készülék A tipusuakat szolgált ki, akkor csak abban az esetben kapcsol át B-re, ha nincs A tipusu sorbanálló és a B sorban legalább n_2, ill. B-ről A-ra, ha az A sorban legalább n_1 várakozó van ($n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 1$). Az általunk vizsgált rendszer akkor előnyös, ha az átkapcsolási idők a kiszolgálási időhöz viszonyitva nagyok.

Tegyük fel, hogy léteznek a szereplő eloszlások momentumai.

II. Az egyenletek felállitása

Jellemezze a kiszolgálási rendszer egy kiszolgálás befejezése utáni állapotát az (i, k_1, k_2) számhármas, ahol $i = 1$, ha az utolsó befejeződött kiszolgálás egy A tipusu egység kiszolgálása volt és $i = 2$, ha B tipusu, és a kiszolgálás befejezése után az A sorban k_1, a B sorban k_2 egység maradt.

Jelöljük $p_{i, k_1, k_2, N}$ -el annak valószinüségét, hogy az N.-ik kiszolgálás után a rendszer állapota (i, k_1, k_2).

Bevezetjük a következő függvényeket:

$$P_{i,N}(z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2 \geq 0} p_{i,k_1,k_2,N} \, z_1^{k_1} z_2^{k_2} \qquad /1/$$

$$\beta_i(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dB_i(t) \, ; \qquad \gamma_{ij}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dC_{ij}(t) \qquad /2/$$

ahol

$$i = 1,2 \, ; \quad j = 1,2 \, ; \quad i \neq j$$
$$0 \leq z_1 \leq 1 \quad 0 \leq z_2 \leq 1 \quad 0 \leq z \qquad /3/$$

Bebizonyitjuk, hogy az /1/, /2/ és /3/-al definiált függvények kielégitik a következő egyenleteket ($i=1$; $j=2$, vagy $i=2$, $j=1$):

$$z_i P_{i,N+1}(z_1, z_2) = \Big\{ P_{i,N}(z_1, z_2) - P_{i,N}(0, z_2) +$$

$$+ \frac{a_i}{a_1+a_2} z_i \sum_{k_j=0}^{n_j-1} \Big[q_{i,k_{2N}} z_j^{k_j} \sum_{l=0}^{n_j-k_j-1} \left(\frac{a_j}{a_1+a_2}\right)^l + \Big[P_{j,N}(z_1, 0) - \qquad /4/$$

$$- \sum_{k_1=0}^{n_i-1} \Big\{ q_{j,k_1,N} z_i^{k_i} \Big[1 - \left(\frac{a_i}{a_1+a_2} z_i\right)^{n_i-k_i} \Big] \Big\} \Big] \gamma_{ji}(a_1+a_2-a_1 z_1 - a_2 z_2) \Big\} \beta_i(a_1+a_2-a_1 z_1 - a_2 z_2)$$

ahol

$$q_{1,k_2,N} = p_{1,0,k_2,N} \quad \text{és} \quad q_{2,k_1,N} = p_{2,k_1,0,N}$$

Bizonyitás: Bevezetjük a következő kiegészitő eseményeket /lásd [2] /. Legyenek a kiszolgáló rendszerbe érkező egységek pirosak és kékek. Legyen z_1 ill. z_2 annak valószinüsége, hogy egy A ill. B sorba érkező egység piros, akkor $p_{i,k_1,k_2,N} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ annak valószinüségét adja meg, hogy az N.-ik kiszolgálás befejezése után a rendszer állapota (i, k_1, k_2) és a rendszerben maradó minden egység piros. Az /1/-el definiált $P_{i,N}(z_1, z_2)$ értelmezhető, mint a következő esemény valószinüsége: az N.-ik kiszolgálás után a rendszerben nincs kék egység, az N.-ik kiszolgált egység A tipusu volt, ha i = 1 és B tipusu, ha i = 2.

Kiszámoljuk annak valószinüségét, hogy egy egység kiszolgálási ideje (T_1 vagy T_2), valamint az átkapcsolási idők (T_{12} vagy T_{21}) alatt kék egység nem érkezik a rendszerbe. A kiszolgálási időkre vonatkozóan ezek a valószinüségek i = 1, vagy i = 2-re /az érkezések Poisson eloszlás szerint történnek/:

$$\sum_{k_1,k_2\geq 0} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \int_0^\infty \frac{(a_1 t)^{k_1}}{k_1!} e^{-a_1 t} \cdot \frac{(a_2 t)^{k_2}}{k_2!} e^{-a_2 t} \, dB_i(t) =$$

$$= \beta_i(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$$

Az átkapcsolási időkre vonatkozóan hasonló felirásból következően i = 1, j = 2 ill. i = 2, j = 1-re:

$$\gamma_{ij}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$$

A /4/ egyenlet i = 1, j = 2-re annak valószinüségét adja meg, hogy az N+1.-ik kiszolgált egység A tipusu és piros, és a kiszolgálásának befejezése után a rendszerben nem maradt kék egység. Teljesen hasonlóan i = 2, j = 1 esetén.

III. Ergodicitás bizonyitása

Jelöljük a kiszolgálási és átkapcsolási idők várható értékét β_{i1} ill. γ_1^{ij} -vel, vagyis i=1,2; j=1,2; i≠j-re

$$\beta_{i1}=\int_0^\infty t\, dB_i(t) \ ; \quad \gamma_1^{ij}=\int_0^\infty t\, dC_{ij}(t)$$

Bebizonyitjuk a következő állitást: Ha

$$a_1\beta_{11}+a_2\beta_{21}<1 \qquad /5/$$

akkor a kiszolgálási rendszer (i, k_1, k_2) állapotai ergodikusak.

Bizonyitás: Rendezzük a rendszer állapotait olyan sorrendben, hogy először szerepeljen minden olyan állapot, melyre $k_1 \leq n_1$, $k_2 \leq n_2$ és azután a többi állapot. Jelölje $s = s(i, k_1, k_2)$ az ilymódon elrendezett (i, k_1, k_2) állapot sorszámát, és legyen

$$S_0 = \max_{k_1\leq n_1;\, k_2\leq n_2} s(i,k_1,k_2)$$

A rendszer állapotai Markov láncot alkotnak. Jelöljük a t sorszámu állapotból az s sorszámba való átmenet valószinüségét q_{st} -vel, valamint y_s-el azt a közepes időt, ami szükséges az s.-ik állapotból kiindulva a kiszolgálás befejezéséig, feltéve, hogy közben ujabb érkezés nem történik.

Igy

$$y_s=\begin{cases} k_i\beta_{i1}+\gamma_1^{ij}+k_j\beta_{j1} & ha\ k_j\geq n_j \\ k_i\beta_{i1} & ha\ k_j<n_j \end{cases} \qquad /6/$$

Rögzitsünk egy s-et, akkor a $\sum_t q_{st}y_t$ jelenti egy kiszolgálás befejezése utáni állapotból a kiszolgálás befejezéséig eltelt közepes időt, feltéve, hogy közben uj érkezés nincs. Ha $s\leq s_0$, akkor

$$\sum_t q_{st}y_t<\infty \qquad /7/$$

tekintve, hogy véges összegről van szó. Egyébként a $\sum_t q_{st}y_s$ kiszámitásánál a következő eseteket különböztetjük meg:

a/ $k_i>0$, $k_j\geq n_j$ akkor /6/-ból $y_s-k_i\beta_{i1}+\gamma_1^{ij}+k_j\beta_{j1}$

és

$$\sum_t q_{st}y_t=(k_i-1)\beta_{i1}+a_i\beta_{i1}\beta_{j1}+\gamma_1^{ij}+k_j\beta_{j1}+a_j\beta_{i1}\beta_{j1}=$$

$$=y_s-\beta_{i1}(1-a_i\beta_{i1}-a_j\beta_{j1})=y_s-\varepsilon_1 \qquad /8/$$

b/ $k_i>0$, $k_j<n_j$, akkor /6/-ból $y_s=k_i\beta_{i1}$ és igy

$$\sum_t q_{st}y_t=(k_i-1)\beta_{i1}+a_i\beta_{i1}\beta_{i1}=$$

$$=y_s-\beta_{i1}(1-a_i\beta_{i1})=y_s-\varepsilon_2 \qquad /9/$$

c/ $k_i=0$, $k_j \geq n_j$, akkor /6/-ból $y_s=\gamma_1^{ij}+k_j\beta_{j1}$

és igy

$$\begin{aligned}\sum_t q_{st}y_t &= (k_j-1)\beta_{j1}+(\gamma_1^{ij}+\beta_{j1})a_j\beta_{j1} = \\ &= y_s-(\beta_{j1}+\gamma_1^{ij})(1-a_j\beta_{j1}) = y_s-\varepsilon_3\end{aligned} \qquad /10/$$

(A $k_i=0$, $k_j<n_j$ esetben $s \leq s_0$, melyre teljesül /7/.)

Az /5/ feltevés miatt /8/, /9/ és /10/-ben szereplő

$$\varepsilon_1 = \beta_{i1}(1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}) > 0$$

$$\varepsilon_2 = \beta_{i1}(1-a_i\beta_{i1}) > 0$$

$$\varepsilon_3 = (\beta_{j1}+\gamma_1^{ij})(1-a_j\beta_{j1}) > 0$$

Másrészt minthogy az $s \leq s_0$ végesszámu esetben teljesül /7/, ezért alkalmazható [2] 45. §-nak 2. következménye, amely szerint a vizsgált Markov lánc állapotai ergodikusak.

Az ergodicitás következtében léteznek a

$$p_{i,k_1,k_2} = \lim_{N\to\infty} p_{i,k_1,k_2,N} \qquad /11/$$

$$P_i(z_1,z_2) = \lim_{N\to\infty} P_{i,N}(z_1,z_2) = \sum_{k_1,k_2\geq 0} p_{i,k_1,k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \qquad /12/$$

határértékek. Terjesszük ki /12/ érvényességét a

$$|z_1| \leq 1; \quad |z_2| \leq 1 \tag{/13/}$$

komplex tartományra, akkor itt $P_i(z_1, z_2)$ mint két változós generátorfüggvény analitikus lesz. Másrészt /2/-ben legyen z olyan komplex szám, amelyre $Re\, z \geq 0$. Igy a $Re\, z \geq 0$ komplex félsikon /2/ a $B_i(t)$ és $C_{ij}(t)$ eloszlás függvények Laplace-Stieltjes transzformáltjait definiálja.

Végezzük el a /11/ és /12/ határ-átmenetet, valamint a szereplő függvények értelmezésének kiterjesztését (/13/-ra ill. $Re\, z \geq 0$ -ra/, akkor /4/-ből ($i=1,2$; $j=1,2$; $i \neq j$-re) a következő egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned} z_i P_i(z_1, z_2) = \Big\{ & P_i(z_1, z_2) - P_i(0, z_2) + \\ & + \frac{a_i}{a_1 + a_2} z_i \sum_{k_j=0}^{n_j-1} \Big[q_{i,k_2} z_j^{k_j} \sum_{l=0}^{n_j-k_j-1} \Big(\frac{a_j}{a_1+a_2} \Big)^l + \Big[P_j(z_1, 0) - \\ & - \sum_{k_i=0}^{n_i-1} \Big\{ q_{j,k_1} z_i^{k_i} \Big[1 - \Big(\frac{a_i}{a_1+a_2} z_i \Big)^{n_i-k_i} \Big] \Big\} \Big] \gamma_{ji}(a_1+a_2-a_1 z_1 - a_2 z_2) \Big\} \beta_i(a_1+a_2-a_1 z_1 - a_2 z_2) \end{aligned} \tag{/14/}$$

ahol

$$q_{1,k_2} = p_{1,0,k_2} \quad \text{és} \quad q_{2,k_1} = p_{2,k_1,0}$$

IV. Optimalizálási probléma

A tárgyalt problémával kapcsolatban a következő feladat állitható fel: Ha ismerjük az a_1, a_2 intenzitásokat, valamint a kiszolgálási és átkapcsolási idők eloszlásfüggvényeit ($B_1(t)$, $B_2(t)$, $C_{12}(t)$, $C_{21}(t)$), hogyan kell megválasztani az n_1 és n_2 számokat ahhoz, hogy a kiszolgáló rendszerünk a leghatékonyabb, vagyis hogy a várakozó egységek várakozási ideje vagy a várakozó sorok hossza minimális legyen. Az utóbbit például kiszámolhatjuk a $P_1(z_1, z_2)$ és $P_2(z_1, z_2)$ függvények z_1 és z_2 szerinti parciálisainak $z_1=1$, $z_2=1$ helyen kapott értékei segitségével. Azonban ehhez a /14/ egyenletből meg kellene határozni az emlitett függvényeket vagy parciálisaikat.

A /14/ egyenlet nagyon bonyolult, ahhoz hogy az itt felvetett kérdés megoldásához szükséges mennyiségeket kiszámitsuk, vagy azoknak n_1 és n_2-től való függését megállapitsuk. Igy a rendszernek az n_1 és n_2 paraméterek szerinti optimalizálási kérdésével nem foglalkozunk.

A továbbiakban a /14/ egyenlet egy speciális esetének megoldásával foglalkozunk. Legyen $n_1=1$, $n_2=1$, akkor

$i=1$, $j=2$ és $i=2$, $j=1$-re /14/-ből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$z_1 P_1(z_1,z_2) = \Big\{ P_1(z_1,z_2) - P_1(0,z_2) + \frac{a_1}{a_1+a_2} p_{1,0,0} z_1 +$$

$$+\Big[P_2(z_1,0) - p_{2,0,0}\Big(1-\frac{a_1}{a_1+a_2} z_1\Big)\Big] \gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)\Big\} \beta_1(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2) \quad /15/$$

$$z_2 P_2(z_1,z_2) = \Big\{ P_2(z_1,z_2) - P_2(z_1,0) + \frac{a_2}{a_1+a_2} z_2 p_{2,0,0} +$$

$$+\Big[P_1(0,z_2) - p_{1,0,0}\Big(1-\frac{a_2}{a_1+a_2} z_2\Big)\Big] \gamma_{12}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)\Big\} \beta_2(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2) \quad /16/$$

V. Az $n_1=n_2$ speciális eset megoldása

Helyettesitsünk a /15/ egyenletbe $z_1=1$, $z_2=1$-et:

$$P_1(1,1) = \Big\{ P_1(1,1) - P_1(0,1) + \frac{a_1}{a_1+a_2} p_{1,0,0} +$$

$$+\Big[P_2(1,0) - P_2\Big(1-\frac{a_2}{a_1+a_2}\Big)\Big]\gamma_{21}(0)\Big\}\beta_1(0) \quad /17/$$

$P_1(1,1)$ annak valószinüségét adja meg, hogy egy kiszolgálás éppen A tipusu egység kiszolgálása volt, ami $\frac{a_1}{a_1+a_2}$. Helyettesitsünk /17/-be

$$P_1(1,1) = \frac{a_1}{a_1+a_2}, \quad \gamma_{21}(0) = \beta_1(0) = 1, \quad 1-\frac{a_1}{a_1+a_2} = \frac{a_2}{a_1+a_2}$$

értéket kapjuk:

$$P_1(0,1)-P_2(1,0)=\frac{a_1}{a_1+a_2}p_{1,0,0}-\frac{a_2}{a_1+a_2}p_{2,0,0} \qquad /18/$$

/Megjegyezzük, hogy /16/-ból kiindulva ugyanerre az eredményre jutottunk volna./

Helyettesitsünk /15/-be $z_1=1$, $z_2=0$-t, /16/-ba $z_1=0$, $z_2=1$-et, a kapott egyenlőségeket a következő alakra hozhatjuk:

$$P_1(1,0)\left[1-\frac{1}{\beta_1(a_2)}\right]+P_2(1,0)\gamma_{21}(a_2)=\frac{a_2}{a_1+a_2}\left[p_{1,0,0}+p_{2,0,0}\gamma_{21}(a_2)\right] \qquad /19/$$

$$P_1(0,1)\gamma_{12}(a_1)+P_2(0,1)\left[1-\frac{1}{\beta_2(a_1)}\right]=\frac{a_1}{a_1+a_2}\left[p_{2,0,0}+p_{1,0,0}\gamma_{12}(a_1)\right] \qquad /20/$$

Differenciáljuk /15/ és /16/-ot z_1 szerint és helyettesitsük $z_1=z_2=1$-et, használva a várható értékekre III-ban bevezetett $\beta_{11}, \beta_{21}, \gamma_1^{12}$, és γ_1^{21} jelöléseket, /15/-ből kapjuk:

$$P_2^{(z_1)}(1,0)=P_1(0,1)a_1\beta_{11}-P_2(1,0)a_1[\beta_{11}+\gamma_1^{21}]-p_{1,0,0}\frac{a_1}{a_1+a_2}[1+a_1\beta_{11}]-$$
$$-p_{2,0,0}\left[\frac{a_1}{a_1+a_2}(1-a_2[\beta_{11}+\gamma_1^{21}])\right]+\frac{a_1}{a_1+a_2}(1-a_1\beta_{11}) \qquad /21/$$

$$P_2^{(z_1)}(1,0)=P_1(0,1)a_1[\gamma_1^{12}+\beta_{21}]-P_2(1,0)a_1\beta_{21}-p_{1,0,0}\frac{a_1}{a_1+a_2}a_1[\gamma_1^{12}+\beta_{21}]+$$
$$+p_{2,0,0}\frac{a_2}{a_1+a_2}a_1\beta_{21}+\frac{a_1a_2}{a_1+a_2}\beta_{21} \qquad /22/$$

/21/ és /22/ jobboldalait egyenlővé téve és rendezve, /18/ felhasználásával a következő egyenlethez jutunk:

$$P_1(0,1)\gamma_1^{12}+P_2(1,0)\gamma_1^{21}=\frac{1}{a_1+a_2}\left[1-a_1\beta_{11}-a_2\beta_{21}-(1-\gamma_1^{12})p_{1,0,0}-(1-a_2\gamma_1^{21})p_{2,0,0}\right] \qquad /23/$$

A /18/, /19/, /20/ és /23/ egyenletek $P_1(0,1)$, $P_1(1,0)$, $P_2(0,1)$ a $P_2(1,0)$ mennyiségekre vonatkozóan egy lineáris egyenletrendszert adnak. Ha egyenletrendszer determinánsa

$$\left[1-\frac{1}{\beta_1(a_2)}\right]\left[1-\frac{1}{\beta_2(a_1)}\right]\left[\gamma_1^{21}+\gamma_1^{12}\right] \qquad /24/$$

0-tól különböző (azaz $\beta_1(a_2)\neq 1$, $\beta_2(a_1)\neq 1$ és $\gamma_1^{21}+\gamma_1^{12}\neq 0$) a $P_1(0,1)$, $P_1(1,0)$ és $P_2(1,0)$ mennyiségek kifejezhetők $P_{1,0,0}$ és $P_{2,0,0}$ lineáris kombinációjaként, ahol az együtthatók az ismert β_1, β_2, γ_{21} és γ_{12} függvények momentumait vagy helyettesitési értékeit tartalmazzák. Fejezzük ki /15/-ből a $P_1(z_1,z_2)$ függvényt. A kifejezés nevezőjébe az

$$1-\frac{z_1}{\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)} \qquad /25/$$

függvény kerül. Tekintsük azon z_1 és z_2 helyeket ahol /25/ azonosan 0. Használjuk a $z_1=z$ jelölést és legyen $z_2=f(z)$, melyre teljesül a

$$\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1-a_2f(z))-z\equiv 0 \qquad /26/$$

azonosság, vagyis β_1 definiciója szerint

$$\int_0^\infty e^{-[a_1+a_2-a_1z_1-a_2f(z)]t}\, dB_1(t) \equiv z \qquad /27/$$

/27/-et z szerint differenciálva a $z=1$ helyen, majd rendszerezve kapjuk az

$$f'(1) = \frac{1-a_1\beta_{11}}{a_2\beta_{11}} > 0 \qquad /28/$$

egyenlőtlenséget, amiből következik, hogy $z=1$ bizonyos környezetében $|f(z)| < 1$. Minthogy $P_1(z_1,z_2)$ analitikus a /13/ tartományon, a /15/-ből kifejezett $P_1(z_1,z_2)$ számlálójának is azonos 0-nak kell lenni a $z_1=z$, $z_2=f(z)$ helyen azaz fenn kell állni a

$$P_1(0,f(z)) - P_2(z,0)\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2f(z)) +$$
$$+p_{2,0,0}\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}z\right)\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2f(z)) - \frac{a_1}{a_1+a_2}p_{1,0,0} \equiv 0 \qquad /29/$$

azonosságnak. Hasonló megoldásból /16/-ból kiindulva a

$$\beta_2(a_1+a_2-a_1g(z)-a_2z) - z \equiv 0 \qquad /30/$$

azonossággal definiált $g(z)$ függvényre teljesül a

$$g'(1) = \frac{1-a_2\beta_{21}}{a_1\beta_{21}} > 0$$

egyenlőtlenség és /29/-hez hasonlóan érvényes a

$$P_2(g(z),0) - P_1(0,z)\gamma_{12}(a_1+a_2-a_1g(z)-a_2z) +$$
$$+p_{1,0,0}\left(1-\frac{a_2}{a_1+a_2}z\right)\gamma_{12}(a_1+a_2-a_1g(z)-a_2z) - \frac{a_2}{a_1+a_2}p_{2,0,0} \equiv 0 \qquad /31/$$

azonosság. (/29/ és /31/-be $z=1$-et helyettesitve egyaránt a /18/ egyenlethez jutunk.)

Differenciáljuk most a /29/ és /31/ azonosságokat és helyettesitjük $z=1$-et. Jelöljük a $P_1(0,z)$ és $P_2(z,0)$ függvények n-edik differenciálhányadosait $P_1^{(n)}(0,z)$ és $P_2^{(n)}(z,0)$-al, akkor /29/ és /31/-ből kifejezhetők $P_1^{(1)}(0,1)$ és $P_2^{(1)}(1,0)$ mint $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$, $P_{1,0,0}$ és $P_{2,0,0}$ lineáris kombinációi és ismert függvények jellemző adatai. A /29/ és /31/ második differenciálhányadosából pedig $P_1^{(2)}(0,1)$ és $P_2^{(2)}(1,0)$ fejezhető ki lineárisan $P_1^{(1)}(0,1)$, $P_2^{(1)}(1,0)$-al, valamint a felsorolt mennyiségekkel, és igy tovább $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ az alacsonyabb deriváltak és a felsorolt mennyiségek segitségével. $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ kiszámolásához alapul szolgáló /29/ és /31/-ből kapott egyenletrendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} f'(1)^n & -1 \\ -1 & g'(1)^n \end{vmatrix} = f'(1)^n g'(1)^n - 1 = \left[\frac{1-a_1\beta_{11}}{a_2\beta_{11}} \cdot \frac{1-a_2\beta_{21}}{a_2\beta_{21}} \right]^n - 1 > 0$$

A /29/ és /31/-ből kapott $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ számok segitségével épitsük fel a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_1^{(k)}(0,1)}{k!}(z-1)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_2^{(k)}(1,0)}{k!}(z-1)^k \qquad /32/$$

hatványsorokat ezek éppen a P_1 (0,z) és a P_2 (z,0) függvények z=1-hez tartozó hatványsorai. Helyettesitsünk /32/-be z=0-t kapjuk:

$$P_1(0,0)=p_{1,0,0}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{P_1^{(k)}(0,1)}{k!}\ ;\ P_2(0,0)=p_{2,0,0}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{P_2^{(k)}(1,0)}{k!} \qquad /33/$$

Minthogy $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ a $P_1^{(k)}(0,1)$, $P_2^{(k)}(1,0)$, $k=0,1,2,\dots,n-1$, $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ lineáris kifejezései, ezért /33/ jobboldalán $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ lineáris kifejezései állnak, és ezek /23/ miatt inhomogének. Igy /33/ egyértelmüen meghatározza a $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ valószinüségeket. A $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ ismeretében /18/, /19/, /20/ és /23/-ból megkaphatjuk $P_1(0,1)$, $P_1(1,0)$, $P_2(1,0)$ és $P_2(o,1)$ értékeit, majd /32/ hatványsorait n-szer differenciálva és z=0-at helyettesitve kapjuk a $p_{1,0,n}$ és $p_{2,n,0}$ valószinüségeket.

A $\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$, $\beta_2(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$, $\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$ és $\gamma_{12}(a_1+a_2-a_1z_1-a_2z_2)$ függvények analitikusak a /13/ tartományban és igy ott előállithatók hatványsorokkal. Helyettesitsük a /15/ egyenletbe z_2=0-t és legyen a $\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1)$; $\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1)$; $\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1)$ függvények z_1=0-hoz tartozó z_1 szerinti sorelőállitásai

$$\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k} z_1^{k_1}$$

$$\beta_1(a_1+a_2-a_1z_1)\gamma_{21}(a_1+a_2-a_1z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{1,k} z_1^{k_1} \qquad /34/$$

/34/-et /15/-be helyettesitve és /12/-t felhasználva $z_2=0$ mellett a következő egyenletet kapjuk:

$$z_1 \sum_{i=0}^{\infty} p_{1,i,0} z_1^i = \left[\sum_{i=0}^{\infty} p_{1,i,0} z_1^i - p_{1,0,0}\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}z_1\right)\right]\sum_{k=0}^{\infty} b_{1,k} z_1^k +$$
$$+\left[\sum_{i=0}^{\infty} p_{2,i,0} z_1^i - p_{2,0,0}\left(1-\frac{a_1}{a_1+a_2}z_1\right)\right]\sum_{k=0}^{\infty} d_{1,k} z_1^k \qquad /35/$$

/35/ bal és jobboldalán a z_1^k együtthatóit egyenlővé téve, a kapott egyenletek a következőképpen rendezhetők:

$$p_{1,k,0} b_{1,0} = p_{1,k-1,0} + p_{1,0,0}\left(b_{1,k} - \frac{a_1}{a_1+a_2} b_{1,k-1}\right) -$$
$$- \sum_{i=0}^{k-1} p_{1,i,0} b_{1,k-i} + p_{2,0,0}\left(d_{1,k} - \frac{a_1}{a_1+a_2} d_{1,k-1}\right) + \sum_{i=0}^{k} p_{2,i,0} d_{1,k-i} \qquad /36/$$

Minthogy a $p_{2,k,0}$ valószinüségeket az előzőek alapján ismertnek tételezhetjük fel, a $p_{1,k,0}$ valószinüségeket /36/-ból k=1,2,...-ra egymásutáni helyettesitésekkel nyerhetjük.

Hasonló meggondolásokkal a /16/-ból kiindulva a /36/-nak megfelelő

$$p_{2,0,k} b_{2,0} = p_{2,0,k-1} + p_{2,0,0}\left(b_{2,k} - \frac{a_2}{a_1+a_2} b_{2,k-1}\right) -$$
$$- \sum_{i=0}^{k-1} p_{2,0,i} b_{2,k-i} + p_{1,0,0}\left(d_{2,k} - \frac{a_2}{a_1+a_2} d_{2,k-1}\right) + \sum_{i=0}^{k} p_{1,0,i} d_{2,k-i} \qquad /37/$$

egyenlethez juthatunk, ahol $b_{2,k}$ és $d_{2,k}$ a $\beta_2(a_1+a_2-a_2z_2)$ és $\beta_2(a_1+a_2-a_2z_2)\cdot\gamma_{21}(a_1+a_2-a_2z_2)$ függvények z_2 szerinti sorfejtésben az együtthatók. /37/-ből a $p_{2,0,k}$ valószinüségek nyerhetők szukcesszív helyettesitésekkel.

Vezessük be a következő jelöléseket, legyen

$$
\begin{aligned}
m_{1,i}^{1} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{1,i,k} & \qquad m_{1,i}^{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{1,k,i} \\
m_{2,i}^{1} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{2,i,k} & \qquad m_{2,i}^{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{2,k,i}
\end{aligned}
\qquad /38/
$$

Az eddigiek alapján ismerjük a

$$
P_1(0,1)=m_{1,0}^{1}\ ;\ P_1(1,0)=m_{1,0}^{2}\ ;\ P_2(0,1)=m_{2,0}^{1}\ ;\ P_2(1,0)=m_{2,0}^{2} \qquad /39/
$$

mennyiségeket.

Helyettesitsünk /15/-be $z_2=1$-et és irjuk fel az egyenlőség mindkét oldalának z_1 szerinti, majd $z_1=1$-et és irjuk fel a z_2 szerinti hatványsorát. A kapott egyenlőségekből z_1^k ill. z_2^k hatványok együtthatóit összehasonlitva kapjuk:

$$
\begin{aligned}
m_{1,k}^{1} b_{3,0} &= m_{1,k-1}^{1} + m_{1,0}^{1} b_{3,k} - \frac{a_1}{a_1+a_2} p_{1,0,0} b_{3,k-1} - \\
&- \sum_{i=0}^{k-1} m_{1,i}^{1} b_{3,k-i} + p_{2,0,0} d_{3,k} - \frac{a_1}{a_1+a_2} p_{2,0,0} d_{3,k-1} - \sum_{i=0}^{k} p_{2,i,0} d_{3,k-i}
\end{aligned}
\qquad /40/
$$

$$m^2_{1,k}(1-b_{4,0})=\frac{a_1}{a_1+a_2}p_{1,0,0}b_{4,k}+\sum_{i=0}^{k-1}m^2_{1,i}(b_{4,k-i}-1)-$$
$$-p_{2,0,0}\frac{a_2}{a_1+a_2}d_{4,k}-\sum_{i=0}^{k}p_{1,0,i}\,b_{4,k-i} \qquad /41/$$

ahol $b_{3,k}$, $b_{4,k}$, $d_{3,k}$ és $d_{4,k}$ rendre a $\beta_1(a_1-a_1z_1)$ $\beta_2(a_2-a_2z_2)$; $\beta_1(a_1-a_1z_1)\gamma_{21}(a_1-a_1z_1)$ és a $\beta_2(a_2-a_2z_2)\gamma_{12}(a_2-a_2z_2)$ függvények hatványsorában szereplő együtthatók. /Megjegyezzük, hogy /41/ k=0-ra a /19/ egyenletet adja./

/40/ és /41/-be rendre k=1,2,... helyettesitésével a jobboldalon ismert mennyiségek szerepelnek, igy kapjuk az $m^1_{1,k}$, $m^2_{1,k}$ értékeit.

Hasonló meggondolásokkal a /16/-ból kiindulva a /40/ és /41/-el analóg egyenleteket nyerhetünk, amelyekből $m^1_{2,k}$, $m^2_{2,k}$, k=1,2,... számolhatók.

VI. Az eredmények értelmezése

Megjegyzések az egyenletek megoldásával kapcsolatban.

Az egyenletekben szereplő mennyiségek a vizsgált kiszolgáló rendszer egy-egy kiszolgálás utáni állapotának valószinüségeit adják. Igy a $p_{1,a,k}$; $p_{1,k,0}$; $p_{2,0,k}$ ill. $p_{2,k,0}$ jelenti annak valószinüségét, hogy a befejezett kiszolgálás A ill. B tipusu egység kiszolgálása volt és utána az A ill. B tipusu sorban éppen k egység, mig a másik sor üresen maradt. Ennek megfelelően $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ az A vagy B tipusu egység kiszolgálása utáni üres rendszer valószinüsége. A /38/ definició szerint $m^1_{1,i}$ annak a valószinüségét jelenti, hogy egy A tipusu egység kiszolgálásának befejezése után az A sorban i várakozó marad, függetlenül attól, hogy a B sorban milyen a sor állapota. Hasonlóan értelmezhetők az $m^2_{1,i}$, $m^1_{2,i}$ és az $m^2_{2,i}$ mennyiségek. Ennek speciális eseteként kapjuk /39/-ben szereplő mennyiségek valószinüségi jelentését.

Azoknak az egyenleteknek a felirása, amelyek /29/ és /31/-ből kiindulva adódnak a $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ mennyiségek meghatározására, általános esetben nagyon bonyolultak, konkrét $\beta_1, \beta_2, \gamma_{21}$ és γ_{12} esetén azonban könnyen keresztülvitelezhetők. Bizonyos esetben a /33/ jobboldalai is zár alakban felirhatók és akkor könnyen megoldhatók $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ -ra és /32/-ből is egyszerüen nyerhetők a $p_{1,0,k}$ és $p_{2,k,0}$ valószinüségek.

Ha viszont a /29/ és /31/-ből csak numerikusan számolhatók ki a $P_1^{(n)}(0,1)$ és $P_2^{(n)}(1,0)$ mennyiségek, akkor /33/ jobboldalai is numerikus sort jelentenek. Ebben az esetben valamilyen $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ -ra becsült értékből kiindulva kiszámoljuk a /33/ jobboldalait és hasonlitjuk a baloldalakhoz, majd a kétoldali eltérések különbségének megfelelően korrigáljuk $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ -at mindaddig, mig a /33/-ban egyenlőséget nem kapunk. Ez elvégezhető a következőképpen: /33/ egyenletek jobboldalai a $p_{1,0,0}$, $p_{2,0,0}$ valószinüségek inhomogén lineáris függvényei, vagyis $A p_{1,0,0} + B p_{2,0,0} + C$ ill. $\alpha p_{1,0,0} + \beta p_{2,0,0} + \gamma$ alakuak.

Kiindulásul válasszuk $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ -at rendre az x_1, y_1 ; x_2, y_2 és x_3, y_3 számpároknak. A /33/ jobboldalán kapott $A x_i + B y_i + C$ és $\alpha x_i + \beta y_i + \gamma$ (i=1,2,3) értékből A, B, C, α, β és γ kiszámolhatók, amiből aztán könnyen adódik a $p_{1,0,0}$ és $p_{2,0,0}$ megoldás.

Ha a megoldás folyamán felhasznált egyenletekben szereplő függvények analitikusan nem kezelhetők, akkor a numerikus megoldásuknál szereplő mennyiségek csak bizonyos pontosságig számolhatók és az értékek végtelen rendszerei és végtelen sorai helyett véges számu értékrendszerrel és véges összeggel dolgozhatunk. Ezeknek a számát is a kivánt pontosság szabja meg.

A számolás pontosságának ellenőrzésére felhasználjuk a

$$\sum_{i=0}^{\infty} m_{1,i}^{1} = \sum_{i=0}^{\infty} m_{1,i}^{2} = \frac{a_1}{a_1+a_2} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{\infty} m_{2,i}^{1} = \sum_{i=0}^{\infty} m_{2,i}^{2} = \frac{a_2}{a_1+a_2}$$

egyenleteket.

Irodalom:

[1] P.Gaver: Competitive queueing: idleness probabilities under Priority disciplines, J.R. statist. Soc B, 25, No.2. 489-499, 1963.

[2] G.P. Klimov: Sztochaszticseszkie szisztemü obszluzsiványija, Moszkva, Izdatyelsztvo, Nauka, 1966.

Summary

Two kinds of Poisson flows arrive to a device of service. The device must switch over when beginning with the service of the second type after having served the first type. Times of switching over and service are independent and may be arbitrarily distributed. The paper proves the ergodicity of the Markov chain characteristic of the system, gives an equation for the generator function of the state probabilities and solves them in a special case. It raises also the question of the optimalization of the rule of switching over.

Egy ortogonális latin négyzetekkel kapcsolatos problémáról

Knuth Előd

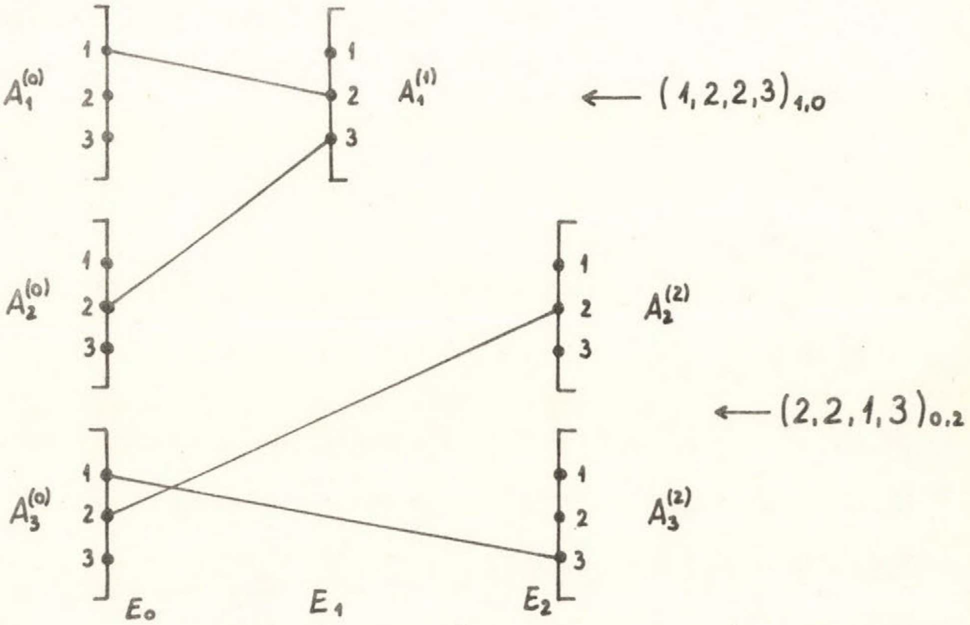
I. Az alapprobléma

Telefonközpontok tervezésénél merült fel a következő probléma:

Adva van $l+1$ db. "egység" - jelölje ezeket $E_o, \dots E_l$. Minden egységen belül n db "alegység" - jelölje ezeket $A_i^{(k)}$ $k=0,\dots$; $i=1,\dots m$. Az egyes alegységek pedig n db. (1-től n-ig sorszámozott) csatlakozási pontot tartalmaznak.

Bizonyos csatlakozási pontok között összeköttetést létesitünk. Ha valamelyik összekötés egy k-sorszámu csatlakozási pontot egy j-sorszámuval köt össze, nevezzük (k,j) összekötésnek. A továbbiakban minden összekötés egyik (és csak egyik) végpontja E_o-hoz fog tartozni, ezért feltehetjük, hogy (k,j) rendezett pár és első eleme az E_o-beli alegység csatlakozási pontjának sorszáma.

Ha az E_o, E_s egységek közti (k_1, j_1), (k_2, j_2) összekötések egy-egy végpontja E_o-ban ill. E_s-ben egy alegységbe esik, akkor nevezzük ezt $(k_1, j_1, k_2, j_2)_{o,s}$ ill. $(k_1, j_1, k_2, j_2)_{s,o}$ összekötéspárnak:



$(k_1, j_1, k_2, j_2)_{u,v}$ és $(k_2, j_2, k_1, j_1)_{u,v}$ között nyilvánvalóan nem teszünk különbséget.

A feladat ezekután a következő:

Konstruálandó az összeköttéseknek egy rendszere, mely kielégiti az alábbi feltételeket:

1/ E_o minden alegysége E_s minden alegységével össze van kötve egyszeresen $(s=1,2,\ldots l)$, ezen kivül más összeköttések nincsenek.

Ez a feltétel az összeköttések rendszerének egy egyszerü és szemléletes ábrázolására nyujt lehetőséget:

Készitsünk egy $n \times n$-es négyzet alaku táblázatot, és p-edik sorának r-edik helyére irjuk be az $A_p^{(o)}$, $A_r^{(s)}$ alegységek összekötésének fent definiált (k,j) számpárját. Az 1/ feltétel szerint ekkor a négyzet minden helyére pontosan egy számpár kerül.

Ezt a táblázatot s minden megengedett értékére elkészithetjük. Az összekötések teljes rendszerét igy egy rendezett párokat tartalmazó $n \times nl$-es (azaz l négyzetből álló) mátrixszal reprezentálhatjuk.

2/ Minden csatlakozópontból indul ki összekötés, és minden alegységből minden lehetséges sorszámhoz megy legalább egy összekötés.

Eddigiekből következik, hogy E_o minden csatlakozópontjából pontosan l db összekötés indul ki - minden egységhez egy - E_s, $s \neq o$, csatlakozópontjaiból pedig mindig csak egyetlen. Továbbá E_o minden alegységéből minden lehetséges sorszámhoz l db összekötés megy, - minden egységhez pontosan egy - E_s, $s \neq o$, alegységeiből pedig minden lehetséges sorszámhoz egyetlen összekötés megy.

A fent definiált mátrixra ez azt jelenti, hogy annak minden négyzetében minden sorban és minden oszlopban, a beirt számpár bármelyik elemében az 1,2,...n számok egy permutációja szerepel. Másszóval a mátrix minden négyzete a beirt számpár mindkét elemében latin négyzet.

3/ Ha (k_1, j_1) és (k_2, j_2) az E_o egységet ugyanazon egységgel kötik össze, akkor $(k_1, j_1) \neq (k_2, j_2)$.

Ez a feltétel biztositja, hogy bármely összekötés egyértelmüen meghatározza az általa összekötött alegységeket. /Az adott egységeken belül./

Nyilvánvaló, hogy igy a matrix minden négyzete minden lehetséges számpárt tartalmazni fog, mégpedig pontosan egyszer. Másszóval a matrix minden négyzete ortogonális latin-négyzet.

4/ Ugyanazon k_1, j_1, k_2, j_2 értékekhez nem létezik két $(k_1, j_1, k_2, j_2)_{u,v}$ összekötéspár, még különböző u, v értékek mellett sem.

Ez a feltétel nyilvánvalóan azt biztositja, hogy bármely összekötéspár egyértelmüen meghatározza az összekötéseiben szereplő alegységeket, és még az ezeket tartalmazó egységeket is.

Definició szerint egy összekötéspár összekötéseit jellemző számpárok az s-edik négyzetben $(k_1, j_1, k_2, j_2)_{s,o}$

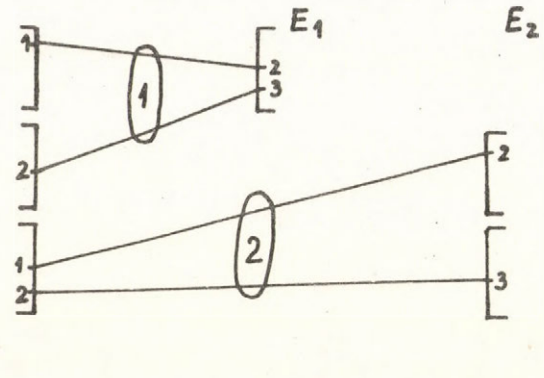
esetén egy sorba $(k_1, j_2, k_2, j_2)_{o,s}$ esetén pedig egy oszlopba kerülnek. Nevezzük a négyzetek sorait és oszlopait közös néven vonalaknak. Mátrixunkra a 4/ feltétel ekkor nyilvánvalóan azt jelenti, hogy nincs két egyvonalba eső számpárja. /Ld. pl. az utolsó oldalon szereplő példákat./

Világos másrészt, hogy minden, az itt leirt tulajdonságokkal rendelkező matrix egyértelmüen meghatározza az összekötéseknek egy az 1/ - 4/ feltételeket kielégitő rendszerét.

II. További kérdések

Gyakorlatban a 4/ feltétel csak ritkán elégithető ki. A probléma ezért a 4/ feltétel bizonyos gyengitései mellett is vizsgálandó.

a/ Megengedjük, hogy legyen két olyan összekötés pár, amelyben k_1, j_1, k_2, j_2 azonos, ha az egyiknél $u = 0$, a másiknál pedig $v = 0$ (2. ábra).



Ortogonális latin négyzetekre való átfogalmazásunkban ez azt jelenti, hogy soroknak csak sorokkal, oszlopoknak csak oszlopokkal kell kielégiteni a korábban mondott feltételt.

b/ Tovább gyengithetjük a 4/ feltételt, ha csak azt követeljük, hogy ne legyen két olyan összekötéspár, melyben k_1, j_1, k_2, j_2 megegyezik és mindkettőnél $v = 0$.

Másszóval két összekötéspár csatlakozópont-sorszámai csak akkor nem lehetnek azonosak, ha mindkettő az E_0 egységből indul ki. /Pl. a 2. ábrán az 1 összekötéspár./

/Megjegyzés: annak ellenére, hogy b/ esetén látszólag sokkal gyengébb feltételt kell kielégiteni, az eddigi eredmények alapján valószinünek látjuk, hogy nem jelent komolyabb könnyitést a/-hoz képest./

III. Néhány a problémával kapcsolatos megjegyzés

Mindezek után a következő problémákat vethetjük fel:

I. Adott n és l -hez konstruálandó l db nxn-es ortogonális latin négyzet úgy, hogy semelyik két különböző vonalnak ne legyen egynél több közös eleme.

II. Az előbbi, de csak azt követeljük meg, hogy két sornak vagy két oszlopnak ne legyen egynél több közös eleme.

III. Csak azt követeljük meg, hogy két oszlopnak ne legyen egynél több közös eleme.

Meg fogjuk mutatni, hogy

A/ Az I. feltétel esetén l legfeljebb $\left[\frac{n-1}{2}\right]$, a II. III. feltételek esetén pedig legfeljebb n-1 lehet.

B/ Amennyiben n primszám, ez a határ mindig el is érhető, pl. a következő konstrukciókkal:

I. esetén: $\boxed{a_{ik}^{(j)}=\left(i+k,\ 2ji+(2j-1)k\right)}\ (\mathrm{mod}\ p)$

ahol $a_{ik}^{(j)}$ a j-edik négyzet i-edik sorának k-adik helyére irt elempárt jelenti. /A zárójelbe irt számok moduló p értendők/.

II. és III. esetén pedig:

$$\boxed{a_{ik}^{(j)}=\left(i+k,\ ji+(p-j)k\right)}\ (\mathrm{mod}\ p)$$

$(n=p)$

IV. A kimondott állitások bizonyitása

A/ Tekintsük pl. az (1,1) elemet. Ez minden négyzetben pontosan egyszer fordul elő. Minden alkalommal n-1 elemmel van egy sorban és n-1-el egy oszlopban. Az I. feltétel esetén ezen $2l(n-1)$ elem között azonosak nem szerepelhetnek. Számuk igy legfeljebb azon elemek száma, amelyek az (1,1) elemmel egyáltalán egy sorba vagy oszlopba kerülhetnek. Ezek száma $(n-1)^2$ (azon elemek, melyek az 1 számot nem tartalmazzák.) Az I. feltétel esetén tehát:

$$2l(n-1) \leq (n-1)^2 \qquad \text{azaz} \qquad l \leq \frac{n-1}{2}$$

és ha feltesszük, hogy l egész szám, akkor

$$l \leq \left[\frac{n-1}{2}\right] \qquad \text{-t nyerjük.}$$

A III. feltétel esetén csak az (1,1)-el egy oszlopba eső elemek jönnek számitásba. Ezek száma (n-1). Igy

$$l(n-1) \leq (n-1)^2 \qquad \text{tehát} \qquad l \leq n-1$$

Tekintettel arra, hogy a II. feltétel a III. feltételt magában foglalja, az előbb mondottak erre az esetre is vonatkoznak.

B/ Megmutatjuk, hogy n = primszám esetén a bemutatott konstrukciók valóban kielégitik az előirt feltételeket.

Tekintettel arra, hogy mindegyik konstrukció

$b_{ij} = (i+j,\ ui+vj)$ alaku,

ahol $0 \not\equiv U \not\equiv V \not\equiv 0$ (mod p), először megmutatjuk, hogy $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{p}$ ortogonális latin négyzet.

Triviális, hogy $\{b_{ij}\}_{1}^{p}$ mindkét indexében latin négyzet, azt kell csak belátni, hogy $b_{i_1 j_1} = b_{i_2 j_2}$ esetén $i_1 \equiv i_2,\ j_1 \equiv j_2$.

Ezt pedig egyszerü számolással nyerhetjük:

ha

$$\begin{aligned} i_1 + j_1 &\equiv i_2 + j_2 \\ ui_1 + vj_1 &\equiv ui_2 + vj_2 \end{aligned} \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

akkor

$$i_1 - i_2 \equiv j_2 - j_1$$

$$u(i_1 - i_2) + v(j_1 - j_2) \equiv 0\ ,\quad \text{így}\quad (u-v)(i_1 - i_2) \equiv 0$$

tekintettel arra, hogy $u \not\equiv v\ (\mathrm{mod}\ p)$ ebből $i_1 \equiv i_2$ adódik. Tekintsük most az I. feltételhez tartozó konstrukciót:

$$a_{ij}^{k} \equiv (i+j,\ 2ki + (2k-1)j) \qquad \mathrm{mod}\ p$$

Tegyük fel, hogy $a^{k_1}_{i_1 j_1} = a^{k_2}_{i_2 j_2}$ ahol $k_1 \neq k_2$

Vezessük be az alábbi rövid jelöléseket:

$$A_1 = \{a^{k_1}_{i j_1}\}_{i \neq i_1} \qquad A_2 = \{a^{k_1}_{i_1 j}\}_{j \neq j_1}$$

$$B_1 = \{a^{k_2}_{i j_2}\}_{i \neq i_2} \qquad B_2 = \{a^{k_2}_{i_2 j}\}_{j \neq j_2}$$

Ekkor az I. feltétel nyilvánvalóan a következővel ekvivalens:

$$(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = \phi$$

Szimmetria okokból ehhez elegendő belátni, hogy

a/ $A_1 \cap B_1 = \phi$

és b/ $A_1 \cap B_2 = \phi$ teljesülnek.

a/ Tegyük fel, hogy léteznek olyan i_3, i_4 indexek, melyekre

$$i_3 \neq i_1 \,, \quad i_4 \neq i_2 \quad (\mathrm{mod}\, p) \text{ és } a^{k_1}_{i_3 j_1} = a^{k_2}_{i_4 j_2}$$

A definició szerint ekkor:

$$\left.\begin{aligned} i_1 + j_1 &\equiv i_2 + j_2 \\ 2k_1 i_1 + (2k_1 - 1) j_1 &\equiv 2k_2 i_2 + (2k_2 - 1) j_2 \\ i_3 + j_1 &\equiv i_4 + j_2 \\ 2k_1 i_3 + (2k_1 - 1) j_1 &\equiv 2k_2 i_4 + (2k_2 - 1) j_2 \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\, p)$$

Ezekből átrendezésekkel a következő kongruenciát nyerhetjük:

$$2(k_1 - k_2)(i_1 - i_3) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p)$$

Ez pedig feltételeink és p prim volta miatt lehetetlen.

b/ Tegyük fel, hogy léteznek olyan i_3, j_3 indexek, melyekre $i_3 \not\equiv i_1$, $j_3 \not\equiv j_1$ $(\bmod p)$ és $a_{i_3 j_1}^{k_1} = a_{i_2 j_3}^{k_2}$

Ekkor

$$\left.\begin{aligned} i_1 + j_1 &\equiv i_2 + j_2 \\ 2k_1 i_1 + (2k_1 - 1) j_1 &\equiv 2k_2 i_2 + (2k_2 - 1) j_2 \\ i_3 + j_1 &\equiv i_2 + j_3 \\ 2k_1 i_3 + (2k_1 - 1) j_1 &\equiv 2k_2 i_2 + (2k_2 - 1) j_3 \end{aligned}\right\} \quad (\bmod p)$$

Ebből a következő nyerhető:

$$[2(k_1 - k_2) + 1](i_1 - i_3) \equiv 0 \quad (\bmod p)$$

Tekintettel arra, hogy $i_1 \not\equiv i_3$ és $1 \leq k_1, k_2 \leq \frac{p-1}{2}$ ez lehetetlen.

Tekintsük most a II. feltételhez tartozó konstrukciót:

$$a_{ij}^{k} \equiv (i + j,\ ki + (p - k) j) \quad (\bmod p)$$

Tegyük fel most is, hogy $a_{i_1 j_1}^{k_1} = a_{i_2 j_2}^{k_2}$ ahol $k_1 \not\equiv k_2$

Előbbi jelöléseinkkel most a következőt kell belátni:

$$(A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) = \phi$$

A szimmetria miatt elég $A_1 \cap B_1 = \Phi$ -t bebizonyitani. Tegyük fel, hogy léteznek olyan i_3, i_4 indexek, melyekre $i_1 \not\equiv i_3$, $i_2 \not\equiv i_4 \pmod p$ és $a_{i_3 j_1}^{k_1} = a_{i_4 j_2}^{k_2}$

Definiciónk szerint ekkor:

$$\left.\begin{aligned} i_1 + j_1 &\equiv i_2 + j_2 \\ k_1 i_1 + (p-k_1) j_1 &\equiv k_2 i_2 + (p-k_2) j_2 \\ i_3 + j_1 &\equiv i_4 + j_2 \\ k_1 i_3 + (p-k_1) j_1 &\equiv k_2 i_4 + (p-k_2) j_2 \end{aligned}\right\} \pmod p$$

Az előbbiekhez hasonlóan ebből azonban $(k_1 - k_2)(i_1 - i_3) = 0$ következne, ami lehetetlen.

Ezzel azt is beláttuk, hogy e konstrukció a III. feltételt is kielégiti, hiszen az ennél gyengébb kikötéseket tartalmaz.

V. Néhány példa:

n = 7-re az I. sz. feltétel mellett:

11	22	33	44	55	66	77
23	34	45	56	67	71	12
35	46	57	61	72	13	24
47	51	62	73	14	25	26
52	63	74	15	26	37	41
64	75	16	27	31	42	53
76	17	21	32	43	54	65

11	24	37	43	56	62	75
25	31	44	57	63	76	12
32	45	51	64	77	13	26
46	52	65	71	14	27	33
53	66	72	15	21	34	47
67	73	16	22	35	41	54
74	17	23	36	42	55	61

11	26	34	42	57	65	73
27	35	43	51	66	74	12
36	44	52	67	75	13	21
45	53	61	76	14	22	37
54	62	77	15	23	31	46
63	71	16	24	32	47	55
72	17	25	33	41	56	64

n=5-re a II. feltétellel:

11	22	33	44	55
25	31	42	53	14
34	45	51	12	23
43	54	15	21	32
52	13	24	35	41

11	23	35	42	54
24	31	43	55	12
32	44	51	13	25
45	52	14	21	33
53	15	22	34	41

11	24	32	45	53
23	31	44	52	15
35	43	51	14	22
42	55	13	21	34
54	12	25	33	41

11	25	34	43	52
22	31	45	54	13
33	42	51	15	24
44	53	12	21	35
55	14	23	32	41

Irodalom:

[1] R.C. Bose and S.S. Shrikande: On the falsity of Euler's conjecture about the non existence. of two orthogonal Latin squeres of order 4k+2 Proc. Mat. Acad. Sci. USA. 1959. p. 734.

[2] R.C.Bose and S.S. shrikande: Mutually orthogonal Latin squares. Transactions of the Amer. Math. Soc. 1960. p.191.

[3] D.M.Johson, A.L.Dulmage, N.S.Mendelsohn: Orthomorhism of groups and orthogonal Latin squares. Canadian Journ. of.Math. 1961. p.356.

[4] E.T.Parker: Ortogonal latin squares. Proc.Mat.Acad.Sci.USA. 1959. p. 859.

[5] J.Singer: A class of groups associated with Latin squares. Amer.Math.Monthly.1960.p.235.

[6] K.Yamamoto: Generation principles of Latin squares. Rep.Stat.Appl.Res.Union.Sap.Sci.Eng.1961.p.73.

[7] R.C.Bose, I.M.Chakravarti; D.E.Knuth: On methods of constructing sets of mutually orthogonal Latin squares using a computer I-II. Technometics 1960. p. 507.1961.p.111.

S u m m a r y

On a problem of orthogonal Latin squares.

The paper translates a problem concerning the design of telephone exchanges into the language of orthogonal Latin squares. In general, inequalities are deduced for the problem, on the other hand a construction process is given in certain special cases /in case of prime order/.

Polinomfelbontás Hurwitz- és antihurwitz komponensre

Frey Tamás

Szürők tervezése során merül fel a következő feladat: az

$$R(p)=p^{4n}+r_{4n-2}p^{4n-2}+r_{4n-4}p^{4n-4}+\ldots+r_4p^4+r_2p_2+r_0 \qquad (1)$$

valós együtthatós polinomot (az $r_0 \geqq 0$ feltétel mellett) fel kell bontani egy un. Hurwitz-polinom és egy un. anti hurwitz-polinom szorzatára. Az /1/ alatti egyenletnek ugyanis a $p_0=\alpha_0+i\beta_0$ zérushellyel együtt a $\bar{p}_0=\alpha_0-i\beta_0$ is zérushelye, hiszen R valós együtthatós, továbbá $-p_0=-\alpha_0-i\beta_0$ és $-\bar{p}_0=-\alpha_0+i\beta_0$ is zérushelye, hiszen R páros függvény. /1/ gyökei tehát négyes csoportokat alkotnak. A negativ valós részü gyökpárokhoz tartozó gyöktényezők szorzatát nevezzük mármost az /1/-hez tartozó Hurwitz-polinomnak, a pozitiv valós részüekhez tartozó gyöktényezők szorzatát viszont anti hurwitz-polinomnak. Amennyiben /1/-nek "tiszta" imaginárius zérushelyei is vannak, ugy ezek - a fentiek alapján - páros multiplicitásu zérushelyek. Ilyenkor "megfelezve" csatoljuk a gyöktényezőket a* $A(p)$ antihurwitz-polinomtényezőhöz. H(p) konjugált gyökpárjaihoz tartozó gyöktényezők szorzatai nemnegativ együtthatós másodfoku polinomok; igy H(p) is nemnegativ együtt-

* H(p) Hurwitz ill.

hatós. A(p) zérushelyei viszont -1-szeresei H(p) megfelelő zérushelyeinek, és igy H és A páros fokszámu tagjainak együtthatói megegyeznek A(p) megfelelő együtthatóival, a páratlan fokszámu tagok koefficiensei viszont egymás (-1)-szeresei. Igy

$$H(p)=p^{2n}+a_{2n-1}p^{2n-1}+a_{2n-2}p^{2n-2}+\ldots+a_2p^2+a_1p+a_0 \qquad (2)$$

($a_i \geq 0$) és

$$A(p)=p^{2n}-a_{2n-1}p^{2n-1}+a_{2n-2}p^{2n-2}-+\ldots\ldots+a_2p^2-a_1p+a_0 \qquad (3)$$

Minthogy pedig H(p) A(p) = R(p) érvényes, azért $r_0=a_0^2$ ami indokolja az $r_0 \geq 0$ feltételt.

H(p) ill. A(p) meghatározható - numerikusan - természetesen R zérushelyeinek ismeretében is, de az n nagyobb értékeinél óriási numerikus munkát igényel, különösen, ha H-ra nagy pontossággal van szükségünk. Ezért érthető az a törekvés, hogy R zérushelyeinek konkrét megállapitása nélkül adjuk meg A ill. H alakját. Uzsoky M. [1] dolgozott ki először egy ilyen iterációs módszert H közvetlen megállapitására, amely azon a megfigyelésen alapul, hogy H és A összeszorzásakor a Graeffe-algoritmust hajtjuk végre. H meghatározásakor tehát ennek inverzét kellene végrehajtani; ennek közelitése történik Uzsoky algoritmusa szerint.

A módszer azonban viszonylag lassan konvergál, különösen, ha a gyöknégyesek közel azonos abszolut értéküek és arcusuk is közel fekszik, továbbá nagy pontosságra van szükség. A Newton-Raphson-féle módszer elég jó kezdő közelités ismeretében kitünően használható, ilyennel azonban ritkán rendelkezünk. A [2]-ben ismertetett módszer azonban itt is jól beválik a kezdő intervallumon.

Jelöljön tehát $P(p)$ egy olyan 4n-edfoku polinomot, amelynek felbontását ismerjük. R gyakran ugy van megadva, mint egy $H_1(p)$ Hurwitz- és hozzátartozó $A_1(p)$ antihurwitz-polinom szorzata és egy $P_1(p)$ perturbáló polinom összege; ilyenkor P választható a $H_1 \cdot A_1$ szorzattal egyenlőnek. Egyébként pedig $P(p)$-t választhatjuk pl. a $H_1(p) = p_1^{2n} + p^{2n-1} + \ldots + p + \sqrt{r_0}$ és az $A_1(p) = p^{2n} - p^{2n-1} \pm \ldots - p + \sqrt{r_0}$ polinom szorzataként. Mármost a

$$H(t,p) = p^{2n} + a_{2n-1}(t)p^{2n-1} + a_{2n-2}(t)p^{2n-2} \pm \ldots + a_2(t)p^2 + a_1(t)p + a_0(t) \tag{4}$$

ill.

$$A(t,p) = p^{2n} - a_{2n-1}(t)p^{2n-1} \pm \ldots + a_2(t)p^2 - a_1(t)p + a_0(t) \tag{5}$$

jelöléssel legyen

$$H(t,p)\cdot A(t,p) = P(p) + 2t\big(R(p) - P(p)\big) \tag{6}$$

azaz

$$\frac{\partial H}{\partial t}A + H\frac{\partial A}{\partial t} = 2\big(R(p) - P(p)\big) \tag{7}$$

ahol a /7/ differenciálegyenletet a $H(o,p) = H_1(p)$ $A(o,p) = A_1(p)$ választás mellett a $0 \leq t \leq 1/2$ szakaszon kell numerikusan integrálni. Igy $H(1/2,p)$ ill. $A(1/2,p)$ megadja $R(p)$ nevezett felbontását. Jelöljük $\underline{\underline{a}}^*(t)$-vel a /4/ koefficienseiből alkotott sorvektort, azaz

$$\underline{\underline{a}}^*(t) = \big(a_{2n-1}(t),\ a_{2n-2}(t),\ \dots\dots,\ a_2(t),\ a_1(t),\ a_0(t)\big) \tag{8}$$

Ekkor /7/ részletes alakja

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{a}})\frac{d\underline{\underline{a}}}{dt} = \underline{\underline{\Delta}}(p)\ ,\ \text{azaz}\ \frac{d\underline{\underline{a}}}{dt} = \underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{\underline{a}})\cdot\underline{\underline{\Delta}}(p) \tag{9}$$

ahol $\underline{\underline{\Delta}}^*(p)$ az $(R(p) - P(p))$ koefficienseiből /8/ mintájára alkotott sorvektor, $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{a}})$ pedig a következő mátrix:

$$
\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{a}}) = \begin{bmatrix}
-a_{2n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
-a_{2n-3} & a_{2n-2} & -a_{2n-1} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
-a_{2n-5} & a_{2n-4} & -a_{2n-3} & a_{2n-2} & -a_{2n-1} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & \\
-a_1 & a_2 & -a_3 & a_4 & -a_5 & \dots & \dots & \dots & -a_{2n-1} & 1 \\
0 & a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 & \dots & \dots & \dots & -a_{2n-3} & a_{2n-2} \\
0 & 0 & 0 & a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{2n-5} & a_{2n-4} \\
 & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0
\end{bmatrix}
$$

Minthogy azonban $\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{\underline{a}})$ kiszámitása, resp. az

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{a}}) \cdot \underline{\underline{\Delta a}} = \underline{\underline{\Delta}}(p) \cdot \Delta t$$

egyenlet megoldása változó $\underline{\underline{a}}$ mellett elég sok numerikus munkát igényel, célszerüen az alábbi módon járunk el: /9/ numerikus integrálását változó lépésközü Runge-Kutta formulával végezzük (különösen ajánlható itt a [3]-ban szereplő harmadfoku, egypontos eljárás), első lépésben olyan hibakorláttal, hogy $a_0(1/2)$ relativ hibája 1 % körül legyen ($a_0(1/2)$ pontos értéke ismert: $\sqrt{r_0}$). Az igy kapott $\hat{H}^{(1)}(1/2, p)$ -ből és $\hat{A}^{(1)}(1/2, p)$ -ből egy uj $\hat{P}^{(1)}(p)$ könnyen konstruálható. Ezután ujra és ujra elvégzünk egy numerikus integrálást, mindig a megelőző hibakorlát 1 %-ával. Igy kapjuk rendre a $\hat{H}^{(2)}(1/2,p)$, $\hat{H}^{(3)}(1/2,p)$, ... stb. közelitéseket. Ezt mindaddig folytatjuk, amig az

$$\frac{\left\| \hat{\underline{\underline{A}}}^{(k)^{-1}}(\underline{a}(1/2)) - \hat{\underline{\underline{A}}}^{(k)^{-1}}(\underline{a}(0)) \right\|}{\left\| \hat{\underline{\underline{A}}}^{(k)^{-1}}(\underline{a}(1/2)) \right\| + \left\| \hat{\underline{\underline{A}}}^{(k)^{-1}}(\underline{a}(0)) \right\|} \leq \vartheta \qquad \left(\vartheta \sim \frac{1}{2000} \right) \qquad (12)$$

egyenlőtlenség nem teljesül. A továbbiakban célszerü az un. módositott Newton-iterációval folytatni az eljárást, minthogy $\underline{\underline{A}}^{-1}$ nehezen, P azonban könnyen számitható, és egy-egy lépés kb. 4 uj decimális jegyet pontosit $\underline{a}$ mindegyik komponensében. A továbbiakban tehát az

$$\Delta \hat{\underline{a}}^{(r)} = \underline{\underline{A}}^{(k)^{-1}}(\underline{a}(1/2)) \cdot \underline{\underline{\Delta}}^{(r)}(p) \cdot \frac{1}{2} \, , \; (r = k+1, k+2, \ldots) \qquad (13)$$

képlet alapján folytatjuk az iterációt, mindaddig, amig a kivánt pontosságot el nem érjük.

Megemlitjük, hogy /13/ különösen akkor használható előnyösen, ha R gyöknégyesei közel fekszenek, mert ekkor R megközelitése során $\underline{\underline{A}}^{(s)}$ egyre rosszabbul kondicionált mátrixszá válik, és igy $\underline{\underline{A}}^{(s)-1}$ számitása egyre nehezebb lesz.

Irodalom:

[1] Uzsoky M.: Kandidátusi értekezés /megirás alatt/.

[2] Frey T.: Egyenletek megoldása szakaszonkénti perturbációval. MTA SzK Közlemények 1. 1966.

[3] Frey T.: Egyenletek megoldása szakaszonkénti perturbációval II. MTA SzK Közlemények 2. 1967.

S u m m a r y

Decomposition of polynomials into Hurwitz and anti-Hurwitz components.

The paper describes such an algorithm of the Newton-Raphson method transformed into a differential equation system with the help of a continuous parameter which yields directly the decomposition of a suitable polynomial into Hurwitz and anti-Hurwitz components.

Egy biztonságos programfuttatásra vonatkozó minimalizálási feladatról

Pergel József

Ha valamely számológép müködése nem teljesen megbizható, azaz időnként előforduló véletlen hibák elrontják a programot és hibás eredményeket szolgáltatnak, felmerül a probléma, hogyan lehet biztonságosabbá tenni a program hibátlan lefutását. Erre egyik módszer az, hogy a program pillanatnyi állapotait időről-időre külső memórián (dobon, mágnesszalagon) tároljuk és ha észrevesszük, hogy a gép hibázott, a legutoljára tárolt állapotot visszük be a gyorsmemóriákba, és innen folytatjuk. A program bizonyos állapotaiban kontroll lehetőség áll rendelkezésünkre a hibázás ellenőrzésére. Pl. ha a számitott adatok között összefüggés áll fenn, ellenőrizhetjük, hogy ez az összefüggés fennáll-e még vagy sem. Ha nem áll fenn, a gép hibázott.

Ilymódon feltesszük, hogy a program futása jól meghatározott részekre bomlik, melyeknek végén adódnak a kontrollálható eredmények. Feltesszük, hogy az egyes részek lefutási idői ξ_i-vel jelölt valószinüségi változók, függetlenek azonos $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

A gép hibázásairól feltesszük, hogy egy λ paraméterü

Poisson folyamat irja le őket. Vagyis, egy-egy hibázás egy pillanat alatt lejátszódó folyamat, és két egymást követő hibázás közben eltelt idők független exponenciális eloszlásu valószinüségi változók λ paraméterrel.

Feltesszük, hogy a hibázások nem változtatják meg az egyes részek lefutási idejét, csak az eredményeket. Ha a program irányitó része kicsi az egész program lefutásához viszonyitva, akkor ez a feltevés nem jelent tul nagy megszoritást.

A külső memóriákhoz való fordulás kontroll szummázással történik, igy feltételezhető, hogy biztonságos. Külső memóriába való kivitel esetén a gyorsmemóriarész blokkolódik, ezért ez idő alatt meghibásodás nem történhet. Ha a kontrollszummák nem egyeznek, az átvitel megismétlődik mindaddig, amig egyezést nem kapunk. Igy az átviteli idő egy valószinüségi változó, melynek eloszlásfüggvényét $G(x)$ jelölje. (Feltesszük, hogy a kiviteli és a beviteli időeloszlása megegyezik.)

A program kontrollálható részeinek lefutási időit jelölje $\xi_1, \xi_2, \dots \dots \xi_n, \dots \dots$. Feltevéseink szerint k ilyen rész lefutása után viszi ki a programot külső memóriába.

Ennek eléréséhez a gépnek nem szabad hibáznia egy $\xi_1 + \dots \dots + \xi_k$ hosszuságu idő alatt. Amennyiben ez nem áll fenn, hanem a j-edik rész lefutása közben hibázott a gép, ezt az $\eta_1 = \xi_1 + \dots \dots + \xi_{j_1}$ időpontban vesszük észre, és az előzőleg tárolt program bevitelével ujra kezdjük a $\xi_1, \dots \dots, \xi_k$ hosszuságu részek futtatását. A következő lépésben kapjuk az $\eta_2 = \xi_1 + \dots \dots + \xi_{j_2}$ majd η_3, stb. változókat. Ha ν az a legkisebb pozitiv egész szám, melyre a ν -edik kisérletnél a gép nem hibázott a megfelelő $\xi_1 + \dots \dots + \xi_k = \vartheta$ hosszuságu időszakaszon, akkor $M(\eta_1 + \dots \dots + \eta_\nu)$ lesz a várható idő két- a külső memóriába való átvitel között. Ha most τ jelenti az ezután következő, s külső memóriába történő átviteli időt, akkor feladatunkat az $\frac{M(\eta_1 + \dots \dots + \eta_\nu + \tau)}{k} = A(k)$ érték minimalizálásával fogalmazzuk, ez ugyanis az egy-egy szakaszra jutó átlagos lefutási idő. Adott F(x) és G(x), valamint λ esetén hogyan kell k értékét választani a fenti várható érték minimalizálására? A feltételezések alapján $\xi_1, \dots \dots, \xi_k, \tau$ függetlenek, és a Poisson folyamat független a ξ_i-ktől.

A feltételes várható érték tulajdonsága szerint

$$M(\eta_1 + \dots \dots + \eta_\nu) = M(M(\eta_1 + \dots \dots + \eta_\nu | \xi_1, \dots \dots \xi_k)) \qquad /1/$$

Foglalkozzunk tehát $M(\eta_1+\ldots\ldots+\eta_\nu|\xi_1,\ldots\ldots,\xi_k)$ meghatározásával. Rögzitett $\xi_1,\ldots\ldots,\xi_k$ esetén az η_i-k függetlenek, tehát alkalmazható a Wald formula.[1/] Ennek alapján

$$M(\eta_1+\ldots\ldots+\eta_\nu|\xi_1,\ldots\ldots,\xi_k)=M(\nu|\xi_1,\ldots,\xi_k)\,M(\eta_i|\xi_1,\ldots,\xi_k) \qquad /2/$$

Számitsuk ki $M(\eta_i|\xi_1,\ldots,\xi_k)$ értékét. Legyen p_j annak a feltételes valószinüsége, rögzitett $\xi_1,\ldots,\xi_k$ értékek mellett, hogy

$$\eta_i=\xi_1+\ldots+\xi_j$$

Akkor

$$M(\eta_i|\xi_1,\ldots,\xi_k)=\xi_1p_1+(\xi_1+\xi_2)p_2+\ldots\ldots+(\xi_1+\ldots+\xi_k)p_k \qquad /3/$$

Továbbá, mivel $1\leq j<k$-ra

$$p_j=e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{j-1})}\cdot(1-e^{-\lambda\xi_j})\ ;\quad \text{és}\quad p_k=e^{-\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{k-1})} \qquad /4/$$

1/ A Wald formula a következő: ha $\omega_1,\ldots\ldots,\omega_n\ldots$ független, azonos eloszlásu valószinüségi változók, $M(|\omega_i|)<\infty$, továbbá a pozitiv egészértékeket felvevő μ változó olyan, hogy a $\mu=n$ esemény független az $\omega_n,\omega_{n+1},\ldots$ változóktól, és $M(\mu)<\infty$ akkor

$$M(\omega_1+\ldots+\omega_\mu)=M(\mu)\cdot M(\omega)$$

Lásd. Lehmann [1] /119. old./

kapjuk

$$
\begin{aligned}
M(\eta_i|\xi_1,\dots,\xi_k) &= \xi_1(1-e^{-\lambda\xi_1}) + (\xi_1+\xi_2)(e^{-\lambda\xi_1}-e^{-\lambda(\xi_1+\xi_2)}) + \dots\dots + \\
&\quad +(\xi_1+\dots+\xi_j)(e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{j-1})}-e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_j)}) + \dots\dots + (\xi_1+\dots+\xi_k)\,e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})} = \\
&= \xi_1(1-e^{-\lambda\xi_1}+e^{-\lambda\xi_1}-e^{-\lambda(\xi_1+\xi_2)}+-\dots\dots-e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})}+e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})})+ \\
&\quad +\xi_2(e^{-\lambda\xi_1}-e^{-\lambda(\xi_1+\xi_2)}+e^{-\lambda(\xi_1+\xi_2)}-+\dots\dots-e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})}+e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})})+ \\
&\quad +\dots+\xi_j(e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{j-1})}-+\dots\dots-e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})}+e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})})+\xi_k e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})} = \\
&= \xi_1+e^{-\lambda\xi_1}\xi_2+\dots+e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{j-1})}\xi_j+\dots+e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_{k-1})}\xi_k
\end{aligned}
\qquad /5/
$$

Határozzuk meg most $M(\nu|\xi_2,\dots,\xi_k)$ -t.

Annak valószinüsége, hogy rögzitett $\xi_1,\dots\dots,\xi_k$ értékek mellett egy adott próbálkozásnál nem történik hibázás a $\xi_1+\dots+\xi_k$ hosszuságu időszakaszban, legyen α . Nyilván $\alpha = e^{-\lambda(\xi_1+\dots+\xi_k)}$ és innen

$$
M(\nu|\xi_1,\dots,\xi_k)=\sum_{k=1}^{\infty} k(1-\alpha)^{k-1}\alpha = \frac{1}{\alpha} = e^{\lambda(\xi_1+\dots+\xi_k)} \qquad /6/
$$

Tehát

$$
M(\eta_1+\dots+\eta_\nu|\xi_1,\dots,\xi_k)=\xi_1 e^{\lambda(\xi_1+\dots+\xi_k)}+\dots+\xi_k e^{\lambda\xi_k} \qquad /7/
$$

Képezzük most a várható értéket $\xi_1, \cdots \cdots, \xi_k$ szerint

$$M(\eta_1 + \ldots + \eta_\nu) = M(\xi_1 e^{\lambda(\xi_1 + \ldots + \xi_k)}) + M(\xi_2 e^{\lambda(\xi_2 + \ldots + \xi_k)}) + \ldots\ldots + M(\xi_k e^{\lambda \xi_k}) =$$
$$= M(e^{\lambda\xi})^{k-1} M(\xi e^{\lambda\xi}) + \ldots + M(e^{\lambda\xi})^{j-1} M(\xi e^{\lambda\xi}) + \ldots + M(\xi e^{\lambda\xi}) \qquad /8/$$

Itt fel kell tennünk, hogy

$$M(\xi e^{\lambda\xi}) = \int_0^\infty x e^{\lambda x} dF(x) < \infty \qquad /9/$$

A /9/ feltétel mellett vezessük be a következő jelöléseket:

$$\int_0^\infty x e^{\lambda x} dF(x) = a \,; \int_0^\infty e^{\lambda x} dF(x) = b \;; \int_0^\infty x \, dF(x) = c \qquad /10/$$

Ezen jelölések mellett /8/-ra kapjuk

$$a \frac{b^k - 1}{b - 1} \qquad /11/$$

Ha még az $M(\tau) = \int_0^\infty x \, dG(x) = d$ jelölést is bevezetjük (feltételezve, hogy $d < \infty$) $A(k)$ -ra nyerjük

$$\frac{a \frac{b^k - 1}{b - 1} + d}{k} \qquad /12/$$

/12/-t kell tehát minimalizálnunk, ahol k=1,2,...

Vezessük most be a $d - \frac{a}{b-1} = d_1$ jelölést, akkor /12/

$$\frac{(b-1)^{-1} a b^k + d_1}{k} \qquad /13/$$

alakba irható. Tekintsük most a /13/ függvényt minden $k > 0$ esetén A deriváltja k szerint

$$\frac{(b-1)^{-1} a b^k (k \cdot \lg b - 1) - d_1}{k^2} \qquad /14/$$

$(b-1)^{-1}$ a $b^k(k \lg b-1)$ deriváltja: $k(b-1)^{-1} b^k (\lg b)^2 > 0$ minden $k > 0$-ra. Ha $k=0$ (14) számlálója negativ, $k \to \infty$ esetén tart ∞ -hez, igy /14/ egyetlen $k > 0$-ra lesz nulla, ezen hely előtt negativ, utána pozitiv. Feladat tehát a

$$(b-1)^{-1} a b^k (k \lg b - 1) - d_1 = 0 \qquad /15/$$

egyenlet megoldása.

A $t=k \lg b-1$ helyettesitéssel /15/ átmegy a

$$t e^t = h \qquad /16/$$

alakba, ahol $h = \frac{d_1(b-1)}{a \cdot e}$, e a természetes logaritmus alapszáma.

A /16/ egyenlet megoldása $|h| < \frac{1}{e}$ azaz

$$d \frac{b-1}{a} < 2 \qquad /17/$$

esetén a következő hatványsorral fejezhető ki (vö. Pólya-Szegő)

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} h^n \qquad /18/$$

$e > h > \frac{1}{e}$ esetén a /16/ egyenlet iterációval oldható meg. A következő táblázat néhány h értékre adja meg a megfelelő t értéket. A táblázat URAL-2 tipusu számológéppel készült.

A /16/ egyenlet szerepet játszik az un. "retardált differenciálegyenlet" elméletben; l. ebből a szempontból: Arató M. [1] .

A következőkben még vizsgáljuk meg, hogyan lehet közelitő formulákat kapni a problémára. Először nézzük meg, hogy kis d esetén milyen λ értékekre kell minden programrész után külső memóriához fordulni. Nyilván az

$$\frac{a(1+b(\log b-1))}{b-1} \geqq d \qquad /19/$$

egyenlötlenségnek kell teljesülni. Kis d esetén kis λ várható, és ebben az esetben érvényesek a következő formulák:

$$a = \int_0^{\infty} x e^{\lambda x} dF(x) \sim \int_0^{\infty} x(1+\lambda x)\, dF(x) = c + \lambda(c^2 + \sigma^2) \qquad /20/$$

ahol σ az F(x) eloszlásfüggvényü val. változó szórása

$$b=\int_0^\infty e^{\lambda x}dF(x)\sim\int_0^\infty(1+\lambda x)\,dF(x)=1+c\lambda \qquad /21/$$

/19/ tehát a következő alakot veszi fel

$$\left(c+\lambda(c^2+\sigma^2)\right)\lambda c \geq d \qquad /22/$$

/22/ baloldala $\lambda > 0$ -ra monoton növekvő, tehát /22/ ekvivalens a

$$\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{c^2+\sigma^2}}\left(\sqrt{\frac{d}{c}+\frac{c^2}{4(c^2+\sigma^2)}}-\frac{c}{2\sqrt{c^2+\sigma^2}}\right) \qquad /23/$$

egyenlötlenséggel.

Tekintettel arra, hogy kis d-ket tekintünk, /23/ baloldala közelitőleg egyenlő $\frac{d}{c^2}$ -tel. A

$$\lambda c \geq \frac{d}{c} \qquad /24/$$

egyenlötlenséget kapjuk. Látjuk tehát, hogy /24/ változatlan, ha λ, c, d , ugy változnak, hogy λc és $\frac{d}{c}$ változatlan; a probléma ezen tulajdonsága szemléletesen is könnyen látható.

Foglalkozzunk még k meghatározásával kis λ és d értékek mellett. Ekkor a /16/ egyenletben szereplő h-ra

$$h \sim e^{-1} d\lambda - e^{-1} \qquad /25/$$

Legyen $\lambda = -1 + \eta$ akkor /16/ a következő alaku lesz

$$(-1+\eta)e^{\eta} = d\lambda - 1 \qquad /26/$$

Miután η kicsiny, alkalmazható az $e^{\eta} \sim 1+\eta$ formula, amit /26/-ra alkalmazva kapjuk

$$\eta \sim \sqrt{d \cdot \lambda} \qquad /27/$$

tehát

$$k = \frac{\eta}{\log b} \sim \frac{1}{c}\sqrt{\frac{d}{\lambda}} \qquad /28/$$

Látjuk tehát, hogy k értéke megint csak $\frac{d}{c}$ és $c\lambda$ függvénye. Egyébként azt látjuk /28/-ból, hogy k arányos a gép két meghibásodási időpontja közti átlagos idő négyzetgyökével.

Nehezebb problémának látszik közelitő formulákat találni, ha d és λ nem kicsik c-hez képest.

További vizsgálat tárgyát képezhetné az az eset, amikor a hiba az egyes ξ_i lefutási időket is megváltoztathatja. Az az eset, amikor a hiba a ξ_i-ket csak rövidítheti, nem érdemel külön figyelmet. Az az eset, amikor egy hiba a ξ_i-ket nagyon megnyujthatja, érdekes lehet, mert pl.

olyan problémák is felvetődhetnek, hogy mennyi maximális időt szabad egy-egy résznek futni. Érdekes feladathoz vezethet az az eset is, amikor külső memóriához való fordulás esetén is hibázhat a gép.

Táblázat $t \cdot e^{-t} = h$ megoldására különböző h értékekre

$(-e^{-1} < h < 0)$

-1.00000	-.79359	-.70859	-.64749	-.59809
-.55599	-.51899	-.48579	-.45549	-.42769
-.40179	-.37759	-.35489	-.33339	-.31289
-.29349	-.27489	-.25719	-.24009	-.22369
-.20789	-.19259	-.17779	-.16349	-.14959
-.13619	-.12309	-.11039	-.09799	-.08589
-.07409	-.06259	-.05139	-.04039	-.02969
-.01919	-.00889			

A táblázatban h az $e^{-1} < h < 1$ intervallumban 0,01 lépésközzel halad, az $1 \leq h < 10$ intervallumban 0,1 lépésközzel.

Táblázat $t e^t = h$ megoldására különböző h értékekre

$(0 < h \leq 1)$

.00120	.01100	.02070	.03020	.03960	.04870
.05770	.06660	.07530	.08380	.09230	.10050
.10870	.11670	.12460	.13240	.14010	.14770
.15510	.16250	.16980	.17690	.18400	.19100
.19790	.20470	.21140	.21810	.22460	.23110
.23750	.24390	.25010	.25630	.26240	.26850
.27450	.28040	.28630	.29210	.29790	.30360
.30920	.31480	.32030	.32580	.33120	.33660
.34190	.34710	.35240	.35750	.36270	.36780
.37280	.37780	.38270	.38770	.39250	.39740
.40210	.40690	.41160	.41630	.42090	.42550
.43010	.43460	.43910	.44360	.44800	.45240
.45680	.46110	.46540	.46970	.47390	.47810
.48230	.48650	.49060	.49470	.49870	.50280
.50680	.51080	.51470	.51870	.52260	.52650
.53030	.53410	.53800	.54170	.54550	.54920
.55300	.55670	.56030	.56400		

$1 \leq h \leq 10$

.56760	.60270	.63600	.66750	.69760	.72620
.75360	.77990	.80520	.82950	.85290	.87550
.89740	.91850	.93900	.95890	.97810	.99690
1.01510	1.03290	1.05010	1.06700	1.08340	1.09950
1.11520	1.13050	1.14550	1.16020	1.17450	1.18860
1.20240	1.21590	1.22909	1.24209	1.25489	1.26739
1.27969	1.29179	1.30369	1.31539	1.32689	1.33819
1.34929	1.36029	1.37109	1.38169	1.39219	1.40249
1.41269	1.42269	1.43259	1.44229	1.45189	1.46139
1.47079	1.47999	1.48909	1.49809	1.50699	1.51579
1.52449	1.53309	1.54149	1.54989	1.55819	1.56639
1.57449	1.58249	1.59039	1.59819	1.60589	1.61359

1.62119	1.62869	1.63609	1.64349	1.65069	1.65799
1.66509	1.67209	1.67909	1.68609	1.69289	1.69969
1.70649	1.71319	1.71979	1.72629	1.73279	1.73929

Irodalom:

[1] E.L.Lehmann: Testing Statistical Hypotheses. New York John.Wiley, 1959.

[2] Pólya Gy.-Szegő G.: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I-II., Springer, Berlin, 1925.

[3] Arató M.: Megjegyzések a "késés-függvénnyel" kapcsolatban. MTA Mat.Kut.Int.Közleményei I. /1956/ 217-221.

Summary

About a minimization problem for running a program safely.

In this article we consider the following problem of computation, Random errors may disturb the computation and we get defective result but it is supposed that we can control the results and repeat the computation. If we want to get a method to improve from time to time the defective result we must send the whole program to a drum or to a magnetic tape. It is supposed that we send the program to the tape after k correct results which requires

time, and we begin the computation from the last position on the drum if we have a false result. Let us denote ξ_i the time between two correct results (the ξ_i-s are independent random variables with the same distribution function). We minimize the expected value

$$\frac{M(\eta_1+\eta_2+\dots\dots+\eta_\nu+\tau)}{k}$$

where $\eta_i=\xi_1+\dots+\xi_{\nu_i}$ $(\nu_i<k_0)$ $\eta_\nu=\xi_1+\dots\dots+\xi_k$

i.e. is the last attempt to get k right results.

Néhány ujabb stabilitáselméleti eredményről
/Ajzerman egy sejtésének bizonyitása./

Frey Tamás

1.§. Bevezetés

A modern szabályozástechnika nagy jelentőségüvé tette a differenciálegyenlet-rendszerek megoldásaival kapcsolatos, Ljapunov-értelemben vett stabilitás-vizsgálatokat. A gyakorlati alkalmazások szempontjából különösen fontosnak látszanak Ajzerman vizsgálatai, aki először foglalkozott olyan szabályozókörök stabilitásával, amelyek jelfogókat, ill. diódás kapcsolóelemeket is tartalmaznak. A probléma döntő jelentőségünek mondható a nemlineáris elemeket is tartalmazó szabályozókörök általános elmélete szempontjából, mert a nemlineáris elemek karakterisztikái törtvonallal jól approximálhatók, ez utóbbiak pedig olyan elemekkel realizálhatók, amelyeket kapcsolóelemekből és lineáris karakterisztikáju elemekből épithetünk fel. A legegyszerübb strukturáju - egyetlen kapcsolóelemet, resp. nemlineáris elemet is tartalmazó - szabályozóköröket Ajzerman az alábbi strukturáju differenciálegyenlet-rendszerrel irta le:

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + f(x_k) \qquad /1/$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 2, 3, \ldots\ldots, n)$$

Az $f(x_k)$ függvényről Ajzerman feltette, hogy két lineáris függvénnyel "behatárolható", azaz kielégít egy

$$a_1 x_k \leq f(x_k) \leq a_2 x_k \qquad /2/$$

tipusu egyenlőtlenséget, emellett a Lipschitz-feltételt is /unicitás/, végül azt is, hogy az

$$\dot{x}_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a x_k \quad ; \quad \dot{x}_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 2, \dots, n) \qquad /3/$$

differenciálegyenlet-rendszer $\underline{x} = \underline{0}$ megoldása asszimptotikusan stabilis $t \to \infty$ esetén, hacsak $a \in (A_1, A_2)$ és $[a_1, a_2] \subset (A_1, A_2)$ is teljesül. /L. pl. [1] ./ Ajzerman mármost ugy vélte, hogy a tett feltevések mellett az /1/ alatti rendszer $\underline{x} = \underline{o}$ megoldása is asszimptotikusan stabilis, e sejtést azonban csak n=2 esetén tudta igazolni.

Az alábbiakban mi általános stabilitáselméleti eredményeket ismertetünk, amelyek révén, a sok kapcsolóelemet és nemlineáris részrendszereket is tartalmazó szabályozókörök stabilitására tudunk következtetni. Az Ajzerman által sejtett tétel igazolása - az eredetinél sokkal általánosabb fogalmazásban - az igazolt tételek alapján könnyen adódik.

A 2. §-ban a kitüzött programnak megfelelően a perturbált lineáris rendszerek stabilitásával foglalkozunk. Az igy adódó eredmények alapján Cesari egy stabilitáselméleti tételét (l. pl. [2], [3], ill. [4], ill. ennek Bihari által adott általánositását)is lényegesen élesiteni fogjuk. A 3. §-ban olyan lineáris rendszerekkel foglalkozunk, amelyeknél az együttható mátrixok szakaszonként állandók; az adódó tétel több korrolláriumát ismertetjük. Végül a 4. §-ban - lényegesen általánositott formában - bebizonyitjuk Ajzerman sejtését.

2.§. Perturbált lineáris, ill. majdnem lineáris rendszerek stabilitása.

Jónéhány eredmény ismeretes az

$$\underline{\dot{x}} = \left[\underline{\underline{A}}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\right]\underline{x} \qquad /4/$$

lineáris rendszer megoldásainak asszimptotikus viselkedéséről, ha az

$$\underline{\dot{y}} = \underline{\underline{A}}(t)\,\underline{y} \qquad /5/$$

lineáris rendszer megoldásai ismeretek, és vagy majorálhatók és minorálhatók is egy-egy exponenciális függvénnyel, vagypedig $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t tr\,(A(\tau))d\tau > -\infty$ érvényes. Az alábbiakban egy olyan tételt igazolunk, amelyben a /4/ és /5/

rendszer megoldásainak asszimptotikus összehasonlítása során csak azt tesszük fel, hogy $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ minden véges intervallumon integrálhatók.

<u>1. tétel.</u> Az /5/ egyenlet egy alaprendszerét $\underline{\underline{Y}}(t)$ -vel, /4/-ét pedig $\underline{\underline{X}}(t)$ -vel jelölve, érvényes a két alaprendszer asszimptotikus viselkedését jellemző

$$\|\underline{\underline{X}}^{-1}(t)\,\underline{\underline{Y}}(t)-\underline{\underline{E}}\| \leq \int_{t_0}^{t}\|\underline{\underline{B}}(\tau)\|\,d\tau \cdot \exp\int_{t_0}^{t}\|\underline{\underline{B}}(\tau)\|\,d\tau \qquad /6/$$

ill.

$$\|\underline{\underline{Y}}^{-1}(t)\,\underline{\underline{X}}(t)-\underline{\underline{E}}\| \leq \int_{t_0}^{t}\|\underline{\underline{B}}(\tau)\|\,d\tau \cdot \exp\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|\,d\tau \qquad /7/$$

reláció, ha $\underline{\underline{X}}(t_0)=\underline{\underline{Y}}(t_0)$ teljesül, ahol $\|.\|$ olyan - egyébként tetszőleges - mátrixnormát jelöl, amely invariáns a hasonlósági transzformációra. Ha emellett $\int_{t_0}^{\infty}\|\underline{\underline{B}}(\tau)\|\,d\tau<\infty$ is teljesül, akkor minden $\underline{\underline{Y}}(t)$ -hez található olyan $\underline{\underline{X}}^{(0)}(t)$ alaprendszer is, hogy

$$\|\underline{\underline{X}}^{(0)^{-1}}(t)\,\underline{\underline{Y}}(t)-\underline{\underline{E}}\| \leq 2\cdot\|\underline{\underline{E}}\|\cdot\int_{t}^{\infty}\|\underline{\underline{B}}(\tau)\|\,d\tau \qquad /8/$$

ill.

$$\|\underline{\underline{Y}}^{-1}(t)\,\underline{\underline{X}}^{(0)}(t)-\underline{\underline{E}}\| \leq 2\cdot\|\underline{\underline{E}}\|\int_{t}^{\infty}\|\underline{\underline{B}}(\tau)\|\,d\tau \qquad /9/$$

is teljesül, ha t már elég nagy.

Bizonyitás: Tekintsük a /4/ egyenletnek megfelelő

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\underline{\underline{X}} \qquad /10/$$

mátrixegyenletet. Ekkor (10)-et szukcessziv approximációval és az $\underline{\underline{X}}(t_0) = \underline{\underline{Y}}(t_0)$ kezdeti feltétellel, az

$$\underline{\underline{X}}_{n+1}(t) = \underline{\underline{Y}}(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{Y}}(t)\,\underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)\,\underline{\underline{B}}(\xi)\underline{\underline{X}}_n(\xi)\,d\xi \qquad /11/$$

iterációs sorozat révén lehet - mint az jólismert - megoldani. Tekintsük tehát a következő transzformációt:

$$\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{U}}) = \underline{\underline{Y}}(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{Y}}(t)\,\underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)\,\underline{\underline{B}}(\xi)\,\underline{\underline{U}}(\xi)\,d\xi \qquad /12/$$

és a minden véges intervallumon integrálható n-dimenziós kvadratikus mátrixok terében vezessük be az alábbi pszeudotávolságot /l. pl. [5] /:

$$\varsigma(\underline{\underline{U}},\underline{\underline{V}}) = \|\underline{\underline{Y}}^{-1}(t)\{\underline{\underline{U}}(t) - \underline{\underline{V}}(t)\}\|$$

ahol $\|\ \|$ tetszőleges, olyan mátrixnormát jelöl, amely egyrészt a hasonlósági transzformációra invariáns, másrészt a $\|\underline{\underline{C}}\cdot\underline{\underline{D}}\| \leq \|\underline{\underline{C}}\|\cdot\|\underline{\underline{D}}\|$ relációt is kielégiti. Emellett nyilván $\varsigma \in L$, továbbá $\varsigma_1 \leq \varsigma_2$ azt jelenti, hogy majdnem mindenütt $\varsigma_1(t) \leq \varsigma_2(t)$ érvényes.

Ilymódon

$$\begin{aligned} \varsigma(\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{U}}),\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{V}})) &= \|\underline{\underline{Y}}^{-1}(t)\int_{t_0}^{t}\underline{\underline{Y}}(t)\underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)\underline{\underline{B}}(\xi)\{\underline{\underline{U}}(\xi)-\underline{\underline{V}}(\xi)\}\,d\xi\,\| = \\ &= \|\int_{t_0}^{t}\{\underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)\underline{\underline{B}}(\xi)\underline{\underline{Y}}(\xi)\}\cdot\{\underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)[\underline{\underline{U}}(\xi)-\underline{\underline{V}}(\xi)]\}\,d\xi\,\| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^{t}\|\underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)\underline{\underline{B}}(\xi)\,\underline{\underline{Y}}(\xi)\|\cdot\varsigma(\underline{\underline{U}},\underline{\underline{V}})\,d\xi = \int_{t_0}^{t}\|\underline{\underline{B}}(\xi)\|\,\varsigma(\underline{\underline{U}},\underline{\underline{V}})\,d\xi \end{aligned} \qquad /15/$$

ha $t \geq t_0$. Alkalmazhatjuk tehát az [5] dolgozat 1., 2., ill. 3. tételét, a $P_n \equiv 0$,

$$Q\varsigma = \int_{t_0}^{t} \| \underline{\underline{B}}(\xi) \| \varsigma(\xi)\, d\xi \tag{16}$$

továbbá a $v = \omega_0$, $\sigma_0 = 0$, $\underline{u}_0 = \underline{Y}(t)$ választással. Ekkor

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \tau \leq \varsigma(u_0, u_1) &= \| \underline{\underline{Y}}^{-1}(t) \cdot \{ \underline{\underline{Y}}(t) + \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{Y}}(t) \cdot \underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi) \underline{\underline{B}}(\xi) \underline{\underline{Y}}(\xi) d\xi - \underline{\underline{Y}}(t) \} \| = \\ &= \| \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi) \underline{\underline{B}}(\xi) \underline{\underline{Y}}(\xi) d\xi \| \leq \int_{t_0}^{t} \| \underline{\underline{B}}(\xi) \| d\xi \end{aligned} \tag{17}$$

Emellett σ_∞ a

$$\sigma_\infty = \tau + \int_{t_0}^{t} \| \underline{\underline{B}}(\xi) \| \sigma_\infty(\xi) d\xi \tag{18}$$

egyenletet elégiti ki és igy a Bellman-lemma alapján

$$\sigma_\infty - \sigma_0 = \sigma_\infty \leq \tau \exp \int_{t_0}^{t} \| \underline{\underline{B}}(\xi) \| d\xi \leq \int_{t_0}^{t} \| \underline{\underline{B}}(\xi) \| d\xi \exp \int_{t_0}^{t} \| \underline{\underline{B}}(\xi) \| d\xi \tag{19}$$

Az [5] dolgozat 2. tétele alapján ilymódon $\underline{T}(\underline{U})$ -nak egyetlen fixpontja van, amely /12/ alapján kielégiti az

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{X}} \quad ; \quad \underline{\underline{X}}(t_0) = \underline{\underline{Y}}(t_0)$$

kezdeti-értékfeladatot, továbbá a 3. tétel szerint

$$\varsigma(\underline{\underline{X}}, \underline{\underline{Y}}) = \varsigma(u_\infty, u_0) = \| \underline{\underline{Y}}^{-1}(t) \{ \underline{\underline{X}}(t) - \underline{\underline{Y}}(t) \} \| \leq \sigma_\infty - \sigma_0 \tag{20}$$

azaz /19/ és /20/ alapján tételünk /7/ alatti állitása valóban teljesül.

Ha mármost $\int_{t_0}^{\infty} \| \underline{\underline{B}}(\xi) \| d\xi < \infty$ is teljesül, akkor - amint ez /7/-ből leolvasható - t_0,-t elég nagyra választva,

$\lim_{t\to\infty} \|\underline{\underline{Y}}^{-1}\underline{\underline{X}} - \underline{\underline{E}}\|$ tetszőlegesen kicsivé tehető; ha tehát $t_1 < t_0$ -ban nem az $\underline{\underline{X}}(t_1) = \underline{\underline{Y}}(t_1)$ relációnak megfelelő alaprendszerből indulunk ki, hanem olyan $\underline{\underline{X}}^{(0)}(t)$ -ből, amelyre ezen elég nagy t_0-nál teljesül az $\underline{\underline{X}}^{(0)}(t_0) = \underline{\underline{Y}}(t_0)$ egyenlőség, akkor erre $\lim_{t\to\infty} \|\underline{\underline{Y}}^{-1}\underline{\underline{X}}^{(0)} - \underline{\underline{E}}\|$ tetszőlegesen kicsi. Megfelelő $\underline{\underline{X}}^{(0)}$ alaprendszerre biztositható tehát a $\lim_{t\to\infty} \|\underline{\underline{Y}}^{-1}\underline{\underline{X}}^{(0)} - \underline{\underline{E}}\| = 0$ reláció is. Ezen $\underline{\underline{X}}^{(0)}$ alaprendszer és $\underline{\underline{Y}}^{-1}$ szorzata - a szereplő improprius integrál /20/ szerinti konvergenciája miatt - kielégiti az

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Y}}^{-1}(t)\underline{\underline{X}}^{(0)}(t) &= \underline{\underline{E}} - \int_t^\infty \underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)\underline{\underline{B}}(\xi)\underline{\underline{X}}^{(0)}(\xi)\, d\xi = \\ &= \underline{\underline{E}} - \int_t^\infty \{\underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)\underline{\underline{B}}(\xi)\underline{\underline{Y}}(\xi)\}\{\underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)\underline{\underline{X}}^{(0)}(\xi)\}\, d\xi \end{aligned} \qquad /21/$$

relációt, és igy

$$\begin{aligned} \|\underline{\underline{Y}}^{-1}(t)\underline{\underline{X}}^{(0)}(t) - \underline{\underline{E}}\| &\le \int_t^\infty \|\underline{\underline{B}}(\xi)\| \cdot \|\underline{\underline{Y}}^{-1}(\xi)\underline{\underline{X}}^{(0)}(\xi)\|\, d\xi < \\ &< 2\|\underline{\underline{E}}\| \int_t^\infty \|\underline{\underline{B}}(\xi)\|\, d\xi \end{aligned} \qquad /22/$$

hacsak t már elég nagy, hiszen ekkor $\lim_{t\to\infty} \|\underline{\underline{Y}}^{-1}\underline{\underline{X}}^{(0)} - \underline{\underline{E}}\| = 0$ és igy elég nagy t-re $\|\underline{\underline{Y}}^{-1}\underline{\underline{X}}^{(0)}\| < 2\|\underline{\underline{E}}\|$

Ezzel tételünk /9/ alatti állitását is igazoltuk. A másik két reláció egyszerü szerepcserével, ti. az $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}=\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{C}}-\underline{\underline{B}}$ jelölések bevezetése révén azonnal adódik.

2. tétel. Tekintsük most az előző tétel feltételei mellett az

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{A}}(t)\underline{x} + \underline{\underline{B}}(t)\,\underline{\varphi}(\underline{x}) \qquad /23/$$

differenciálegyenletet, ahol $\underline{\varphi}(\underline{x})$ olyan, $\underline{x}$-ben folytonos és $\|\underline{x}\| > 0$ -ra Lipschitz-feltételt kielégitő függvény, amelyre $\underline{\varphi}(\underline{0}) = 0$, továbbá a szigoruan monoton, folytonos és konkáv $\omega(t)$ -vel, amelyre $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\omega(\xi)}d\xi$ létezik és véges, kielégiti az

$$\omega(t) \le \max_{\|\underline{x}\| \le t} \|\underline{\varphi}(\underline{x})\| \qquad /24/$$

relációt. Ezesetben az $\underline{\underline{X}}(t_0) = \underline{\underline{Y}}(t_0)$ relációt kielégitő alaprendszere a /23/ egyenletnek kielégiti az

$$\|\underline{\underline{Y}}^{-1}(t)\underline{\underline{X}}(t) - \underline{\underline{E}}\| \le \Omega^{-1}\left\{\Omega\left(\int_{t_0}^{t}\|\underline{\underline{B}}(\xi)\|d\xi\right) + \int_{t_0}^{t}\|\underline{\underline{B}}(\xi)\|d\xi\right\} \qquad /25/$$

relációt, ahol

$$\Omega(u) = \int_{0}^{u}\frac{d\xi}{\omega(\xi)} \qquad /26/$$

$\Omega^{-1}(v)$ pedig $\Omega(u)$ inverze.

Ha $\int\limits_{t_0}^{\infty}\|\underline{\underline{B}}(\xi)\|d\xi < \infty$, akkor létezik olyan $\underline{\underline{X}}^{(0)}(t)$ alaprendszer, amelyre

$$\|\underline{\underline{Y}}^{-1}(t)\underline{\underline{X}}^{(0)}(t) - \underline{\underline{E}}\| \to 0, \quad ha \quad t \to \infty \qquad /27/$$

E tétel bizonyitása az előző tétel gondolatmenetét követi, csak az [5] dolgozat 1^{**}, 2^{**} ill. 3^{**} tételét, ill. a Bellmann-lemma Bihari-féle általánositását /l. pl. [6] ill. [7] / kell felhasználnunk.

A kapott eredményt a Cesari-féle asszimptotikus tétel, ill. annak Bihari-féle általánositása, élesitésére használjuk /l. pl. [4] ill. [6] /; az egyszerüség kedvéért a [4] -ben szereplő jelöléseket használjuk. Tekintsük tehát a

$$\dot{\underline{z}} = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{V}}(t))\underline{z} + \underline{\underline{R}}(t)\,\underline{\varphi}(\underline{z}) \qquad /28/$$

differenciálegyenletet, ahol $\underline{\underline{V}}(t) \to \underline{\underline{0}}$, ha $t \to \infty$ továbbá $\operatorname{Var}_{(t_0,\infty)}(\|\underline{\underline{V}}(t)\|) < \infty$ és $\int_{t_0}^{\infty} \|\underline{\underline{R}}(\xi)\| d\xi < \infty$ teljesül. Jelöljük az $\underline{\underline{A}}$ mátrix sajátértékeit λ_k -val, az $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{V}}(t)$ mátrix megfelelő sajátértékeit pedig $\lambda_k(t)$ -vel k=1,2,...,n; a sajátértékek nem szükségkép egyszeresek.

3. tétel. A tett feltevések mellett minden k-hoz található olyan $\underline{z}_k$ megoldása a /28/ egyenletnek, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \underline{z}_k(t) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\xi) d\xi} = \underline{s}_k \qquad /29/$$

ahol $\underline{\underline{A}}\,\underline{s}_k = \lambda_k \underline{s}_k$, azaz $\underline{s}_k$ az $\underline{\underline{A}}$-nak λ_k -hoz tartozó sajátvektora. Ha λ_k többszörös sajátértéke $\underline{\underline{A}}$-nak, akkor $\underline{s}_k^{(2)}$, $\underline{s}_k^{(3)}$ ...... stb. jelölják a megfelelő másod-, harmad-, stb. fővektorokat. Található ekkor minden szóbajövő i-hez olyan $\underline{z}_k^{(i)}$ megoldás is, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{l-1}}\left[\underline{z}_k^{(i)}\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda_k^{(i)}(\xi)\,d\xi\right)-\underline{s}_k^{(i)}\right]=\underline{0} \qquad /30/$$

teljesül.

Bizonyitás: Alapgondolatában követhetjük a Cesari-tétel [4]-ben, ill. általánositásának [7]-ben található bizonyitását. Lényeges eltérés egyfelől az, hogy az 1. tételre támaszkodva elhagyhatjuk az $\underline{\underline{A}}$ sajátértékeinek egyszeres voltával kapcsolatos kikötést, hasonlókép az $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{V}}(t)$-nek a t-től függő sajátértékeivel kapcsolatos megkötéseket; ezért az $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{V}}(t)$ transzformációban szereplő $\underline{\underline{S}}(t)$ mátrix korlátos variációju voltát is [4]-től eltérően kell kimutatnunk. A $\underline{\underline{V}}(t) \to \underline{\underline{0}}$ feltételből következik, hogy $\underline{\underline{A}}$ egyszeres sajátértékeihez egyértelmüen hozzá lehet rendelni t elég nagy értékeinél $\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{V}}(t)$ ugyancsak egyszeres sajátértékeit, amelyek $t \to \infty$ esetén $\underline{\underline{A}}$ megfelelő sajátértékeihez konvergálnak. A többszörös sajátértékeihez viszont még akkor is csak egy sajátvektort és megfelelő számu fővektort rendelünk hozzá, ha a szóbanforgó sajátérték $\underline{\underline{A}}$ minimál polinomjában egyszeres multiplicitásu, mert $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{V}}(t)$ minimálpolinomjában t-től függően változhat a megfelelő sajátérték multiplicitása, sőt t-től függően hasadhat szét, ill. olvadhat össze a megfelelő sajátértékcsoport. Ezért $\underline{\underline{A}}$ -nak az l -szeres multiplicitásu λ_j sajátértékéhez a transzformációs részmàtrixot ugy rendeljük hozzá, hogy a $\underline{\underline{T}}^{(j)}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{(j)^{-1}}$ mátrixnak megfelelő l -dimenziós blokk, $\Lambda^{(j)}$ strukturája

$$\begin{bmatrix} \lambda_j & 0 & 0 \dots & \dots \\ 1 & \lambda_j & 0 \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & 1 & \lambda_j \end{bmatrix}$$

alaku legyen, függetlenül attól, hogy λ_j hányszoros multiplicitásu $\underline{\underline{A}}$ minimálpolinomjában. Ugyanilyen alakban állitjuk elő t valamilyen elég nagy, rögzitett t_0 értékénél $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{V}}(t)$ transzformáltját is, jóllehet a megfelelő $\underline{\underline{S}}^{(j)}(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{V}}(t))\underline{\underline{S}}^{(j)^{-1}}$ l dimenziós hiperblokkja, $\underline{\underline{\Lambda}}^{(j)}(t)$ melynek strukturája eszerint

$$\begin{bmatrix} \lambda_j^{(1)}(t) & 0 & 0 & 0 \dots & \dots \\ 1 & \lambda_j^{(2)}(t) & 0 & 0 \dots & \dots \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & & & 1 & \lambda_j^{(l)}(t) \end{bmatrix}$$

esetleg csupa különböző sajátértéket tartalmaz. Mindenesetre $\underline{\underline{S}}^{(j)}(t)$ megfelelő megválasztása esetén biztositható, hogy $\underline{\underline{V}}(t)$ minden folytonossági pontjában $\underline{\underline{S}}^{(j)}(t)$ is, $\lambda_j^{(r)}(t)$ is folytonos legyen, továbbá a $\underline{\underline{V}}(t) \to \underline{\underline{0}}$ feltétel miatt $\underline{\underline{S}}^{(j)}(t) \to \underline{\underline{T}}^{(j)}$ és $\lambda_j^{(r)}(t) \to \lambda_j$

is teljesüljön. A transzformáció végrehajtása esetén - az $\underline{\underline{S}}^{(j)^{-1}}(t) \cdot \underline{z}(t) = \underline{x}(t)$ változót bevezetve - differenciálegyenletünk az

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{\Lambda}}(t)\,\underline{x} + \frac{d\underline{\underline{S}}}{dt}\,\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{x} + \\ + \underline{\underline{S}}(t)\,\underline{\underline{R}}(t)\,\underline{\underline{S}}^{-1}(t) \cdot \underline{\varphi}(\underline{\underline{S}}^{(j)}(t) \cdot \underline{x}(t)) \qquad /31/$$

egyenletbe megy át. A továbbiakban elsősorban azzal kell foglalkoznunk, hogy hogyan lehet $\underline{\underline{S}}(t)$-t $\underline{\underline{V}}(t)$ szakadási pontjaiban egyértelmüen definiálni, továbbá $\left\| \frac{d\underline{\underline{S}}}{dt} \right\|$ -t $\left\| \frac{d\underline{\underline{V}}}{dt} \right\|$ -vel, resp. $\mathrm{Var}(\|\underline{\underline{S}}(t)\|)$ -t $\mathrm{Var}(\|\underline{\underline{V}}(t)\|)$ -vel becsülni.

Ezekre a kérdésekre a [8] dolgozatban szereplő perturbációs tételek alapján lehet válaszolni. A $\underline{\underline{V}}(t) \to \underline{\underline{0}}$ reláció következtében ugyanis található olyan t_0, hogy [8] 1. tétele, ill. annak a 4. pontban többszörös sajátértékekre vonatkozó általánositása alkalmazható, azaz $t_1 > t_0$ és $t_2 > t_0$ esetben $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{V}}(t_2)$ sajátértékei és saját - ill. fővektorai perturbációval $\underline{\underline{A}}$-ból is, $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{V}}(t_1)$-ből is származtathatók. Igy $\underline{\underline{S}}(t)$ elemei - épp e perturbációs tételek alapján - $\underline{\underline{V}}(t)$ ugráshelyein is egyértelmüen folytathatóak. Emellett az idézett tételek szerint $t > t_0$

esetben érvényes a

$$Var(\|\underline{\underline{s}}(t)\|) \leq \frac{1}{1-q} Var(\|\underline{\underline{V}}(t)\|) \qquad /32/$$

ill. a

$$Var(|\lambda_i^{(j)}(t)|) \leq \frac{1}{1-q_1} Var(\|\underline{\underline{V}}(t)\|) \qquad /33/$$

reláció is, ahol - ha t_0 már elég nagy -

$$0 < q = q(t_0) = q\,(\sup_{t \geq t_0} \|\underline{\underline{V}}(t)\|) < 1$$

és

$$0 < q_1 = q_1(t_0) = q_1\,(\sup_{t \geq t_0} \|\underline{\underline{V}}(t)\|) < 1 \qquad /34/$$

teljesül.

Minthogy emellett t_0 elég nagy értékére $\|\underline{\underline{s}}(t)\| \leq 2\|\underline{\underline{T}}\|$ és $\|\underline{\underline{S}}^{-1}(t)\| \leq 2\|\underline{\underline{T}}^{-1}\|$ is érvényes, azért /31/ jobboldalának második tagjában $\underline{\underline{x}}$ együtthatója kielégiti az 1. tétel feltételeit.

Hasonlókép /31/ jobboldalának harmadik tagjában φ együtthatója is kielégiti a 2. tétel feltételeit, hogy itt $\underline{\varphi}$ argumentumában $\underline{\underline{x}}$ helyett $\underline{\underline{s}}(t)\underline{x}$ szerepel, az nem gátolja a 2. tétel alkalmazhatóságát - amint ezt Bihari [7]-ben igazolta. Alkalmazhatjuk tehát az 1. ill. a 2. tételt. Ilymódon $\underline{\underline{A}}$ egyszeres sajátértékeivel kapcsolatban a /29/ reláció közvetlenül adódik. A /30/ relációt illetően meg kell gondolnunk, hogy az 1. tétel alkalmazása szempontjából alapul választott,

$$\dot{\underline{y}} = \underline{\underline{\Lambda}}(t)\,\underline{y}$$

differenciálegyenlet megfelelő megoldásában aszerint szerepel az $\exp\left\{\int_{t_0}^{t} \lambda_k^{(r)}(\xi)\,d\xi\right\}$ alaku tagok (r=1,2,...,i) lineárkombinációja, ill. ilyenek és t-nek i-nél nem nagyobb hatványainak szorzatai, ahogy $\int_{t_0}^{t} \lambda_k^{(r_1)}(\xi)d\xi \neq \int_{t_0}^{t} \lambda_k^{(r_2)}(\xi)d\xi$ fennáll, ill. sem. /33/-ból azonban azonnal következik, hogy az egyes $\exp\int_{t_0}^{t} \lambda_k^{(r)}(\xi)\,d\xi$ alaku tagok hányadosa két pozitiv korlát közé szorítható minden $t \geq t_0$ -ra, és igy az $\frac{1}{t^i}$ -vel szorzott kifejezés mindegyik lehetséges esetben zérushoz tart. Ezzel a tételt igazoltuk.

Annyit kell megjegyeznünk befejezésül, hogy a többszörös sajátértékekkel kapcsolatos /30/ reláció sokkal pontatlanabbul jellemzi $\underline{z}_k^{(i)}$ asszimptotikus viselkedését, mint /29/- $\underline{z}_k$ -ét, $\underline{z}_k^{(i)}$ nagyságrendi viselkedése azonban csak akkor marad bizonytalan /30/ alapján, ha a $\operatorname{Re}\{\lambda_k^{(i)}(t)\} \longrightarrow 0$ esettel állunk szemben.

3. §. Szakaszonként állandó rekurrens együtthatóju differenciálegyenletek megoldásainak asszimptotikus vizsgálata

Tekintsük először az

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}(t)\,\underline{x} \qquad /35/$$

lineáris differenciálegyenletet, és tegyük fel, hogy az egymáshoz csatlakozó (t_i, t_{i+1}) intervallumokon $(i=0,1,2,\ldots)$ $\underline{\underline{A}}(t)$ felváltva a $\underline{\underline{B}}$ ill. $\underline{\underline{C}}$ mátrixszal egyenlő. Jólismert az a tény, hogy a /35/ egyenlet $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldásának asszimptotikus stabilitását nem biztositja (általános) integrálható $\underline{\underline{A}}(t)$ együtthatómátrix esetén az a követelmény, hogy $\underline{\underline{A}}(t)$ mindegyik sajátértéke minden t-re negativ valós részü. (Egyszerü ellenpélda pl. az $\dot{x}_1 = -ix_1$; $\dot{x}_2 = e^{2i}x_1 - 2x_2$ differenciálegyenletrendszer.) Igazoljuk azonban az alábbi

4. tétel-t: Ha $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ minden sajátértéke negativ valós részü (és $\underline{\underline{A}}(t) = \underline{\underline{B}}$, ha $t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$ ill. $\underline{\underline{A}}(t) = \underline{\underline{C}}$ ha $t \in (t_{2i+1}, t_{2i+2})$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ akkor a /35/ differenciálegyenlet $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldása asszimptotikusan stabil.

Bizonyitás: Tegyük fel először, hogy $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ minimálpolinomjában minden sajátérték egyszeres multiplicitásu.

Jelöljük $\underline{\underline{B}}$ sajátértékeit (esetleges multiplicitásukkal számlálva) β_j -vel (j=1,2,...,n), a hozzájuk tartozó jobboldali sajátvektorokat $\underline{b}_j$ -vel, hasonlóképp $\underline{\underline{C}}$ sajátértékeit ill. sajátvektorait γ_j resp. $\underline{c}_j$ -vel (j=1,2,...,n). A (t_{2i}, t_{2i+1}) intervallumon bontsuk fel $\underline{x}(t)$-t a $\underline{b}_j$-kkel párhuzamos, hasonlóképp a (t_{2i+1}, t_{2i+2}) intervallumon a $\underline{c}_j$-kkel párhuzamos komponensekre:

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \underline{b}_j \qquad (\text{ha } t \in (t_{2i}, t_{2i+1})) \qquad /36/$$

resp.

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \underline{c}_j \qquad (\text{ha } t \in (t_{2i+1}, t_{2i+2}))$$

A megoldásnak az intervallumok határpontjain folytonosan kell átmennie, azaz minden k-ra fenn kell állnia a

$$\underline{x}(t_k - 0) = \underline{x}(t_k + 0) \;; \qquad \sum_{j=1}^{n} \xi_j(t_k)\underline{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(t_k)\underline{c}_j \qquad (k=0,1,\dots) \; /37/$$

relációnak. Minthogy a $\underline{b}_j$ és $\underline{c}_j$ vektorrendszer teljes és független, a $\underline{\xi_j(t_k)}$ -k az $\underline{\eta_j(t_k)}$ lineáris kombinációiként állithatók elő (egy nem szinguláris $\underline{\underline{T}}$ transzformációs mátrix segitségével, a $\underline{\xi}(t_k) = \underline{\underline{T}}\,\underline{\eta}(t_k)$

alakban), és viszont

$$\underline{\eta}(t_k) = \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\xi}(t_k) \qquad /38/$$

Minthogy a $\underline{b}_j$ vektorok $\underline{\underline{B}}$, a $\underline{c}_j$ -k pedig $\underline{\underline{C}}$ sajátvektorai, azért a megfelelő intervallumon $\underline{\xi}$ ill. $\underline{\eta}$ kielégiti a

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\xi}} &= \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}})\underline{\xi} \\ \dot{\underline{\eta}} &= \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{C}})\underline{\eta} \end{aligned} \qquad /39/$$

differenciálegyenletet, ahol $\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}}) = \langle\beta_1 \ldots\ldots \beta_n\rangle$; $\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{C}}) = \langle\gamma_1 \ldots, \gamma_n\rangle$

Ha tehát $t_0 + 0$ -ban, $\underline{x}(t_0) = \xi_{1,0}\underline{b}_1 + \ldots\ldots + \xi_{n0}\underline{b}_n$ azaz a $\underline{\xi}_0 = \underline{\xi}(t_0)$ vektorral van meghatározva, akkor $t \in (t_0+0\ ,\ t_1-0)$ -ban

$$\underline{\xi}(t) = \exp\{(t-t_0)\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}})\}\underline{\xi}_0 \qquad /40/$$

Emellett /38/ szerint

$$\begin{aligned} \underline{\eta}(t_1+0) &= \underline{\underline{T}}^{-1}\underline{\xi}(t_1-0) = \\ &= \underline{\underline{T}}^{-1}\exp\{(t_1-t_0)\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}})\}\underline{\xi}_0 \end{aligned} \qquad /41/$$

Igy tehát $t \in (t_1+0,\ t_2-0)$ -ban

$$\underline{\eta}(t) = \exp\{(t_1-t_0)\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{C}})\}\underline{\underline{T}}^{-1}\cdot\exp\{(t_1-t_0)\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}})\}\underline{\xi}_0 \qquad /42/$$

Általában is $t \in (t_{2i}+0, t_{2i+1}-0)$ esetén

$$\underline{\xi}(t) = \exp\{(t-t_{2i})\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}})\}\underline{\underline{T}} \cdot \exp\{(t_{2i}-t_{2i-1})\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{C}})\}\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \cdot \exp\{(t_{2i-1}-t_{2i-2})\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}})\}\underline{\underline{T}} \cdots \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \exp\{(t_1-t_0)\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}})\}\underline{\xi}_0 \qquad /43/$$

és hasonlóan $t \in (t_{2i+1}+0, t_{2i+2}-0)$ esetén

$$\underline{\eta}(t) = \exp\{(t-t_{2i+1})\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{C}})\}\underline{\underline{T}}^{-1} \cdots \cdots \underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \exp\{(t_1-t_0)\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}})\}\underline{\xi}_0 \qquad /44/$$

$\underline{\underline{T}}^{\frac{1}{2}}$-del jelölve a nemszinguláris $\underline{\underline{T}}$ (pozitiv) négyzetgyökét, $\underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}}$-del pedig ennek reciprokát, bevezetjük a

$$\underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\{(t_{2i+1}-t_{2i})\}\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}})\}\underline{\underline{T}}^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{2i}(\underline{\underline{B}}) \qquad /45/$$

ill.

$$\underline{\underline{T}}^{\frac{1}{2}} \exp\{(t_{2i}-t_{2i-1})\}\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{C}})\}\underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{2i}(\underline{\underline{C}}) \qquad /46/$$

jelöléseket. Ezekkel /43/ ill. /44/ igy irható fel:

$$\underline{\xi}(t) = \exp\{(t-t_{2i})\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}})\}\underline{\underline{T}}^{\frac{1}{2}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{2i}(\underline{\underline{C}}) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{2i-2}(B) \cdot \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{2i-2}(C) \cdots \cdots \underline{\underline{\varepsilon}}_0(\underline{\underline{B}})\underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\xi}_0 \qquad /47/$$

resp.

$$\underline{\eta}(t) = \exp\{(t-t_{2i+1})\underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{C}})\} T^{-\frac{1}{2}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{2i}(\underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{2i}(\underline{\underline{C}}) \cdot \cdot \cdots \cdots \underline{\underline{\varepsilon}}_0(\underline{\underline{B}})\underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}}\underline{\xi}_0 \qquad /48/$$

Tekintsük ármost egy ugyanolyan tulajdonságu mátrixnormát, mint a 2. §-ban, ill. egy vele kompatibilis vektornormát. Ekkor

$$\| \underline{\underline{\varepsilon}}_{2i}(\underline{\underline{B}}) \| = \| \exp(t_{2i+1} - t_{2i}) \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}}) \| \qquad /49/$$

és

$$\| \underline{\underline{\varepsilon}}_{2i}(\underline{\underline{C}}) \| = \| \exp(t_{2i} - t_{2i-1}) \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{C}}) \| \qquad /50/$$

lévén a mátrixnorma invariáns a hasonlósági transzformációra. Ilymódon tehát

$$\begin{aligned} \| \underline{\xi}(t) \| &\leq \| \underline{\underline{T}}^{\frac{1}{2}} \| \cdot \| \underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}} \| \cdot \| \exp[(t - t_{2i}) \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}})] \| \cdot \| \underline{\xi}_0 \| \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{\varrho} \{ \| \underline{\underline{\varepsilon}}_{2\varrho}(\underline{\underline{B}}) \| \cdot \| \underline{\underline{\varepsilon}}_{2\varrho}(\underline{\underline{C}}) \| \} = \qquad /51/ \\ &= \| \underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}} \| \cdot \| \underline{\underline{T}}^{\frac{1}{2}} \| \cdot \| \underline{\xi}_0 \| \cdot \| \exp(t - t_i) \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}}) \| \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{\varrho=1}^{i} \| \exp(t_{2\varrho+1} - t_{2\varrho}) \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}}) \| \cdot \| \exp(t_{2\varrho} - t_{2\varrho-1}) \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{C}}) \| \end{aligned}$$

Hasonlókép

$$\begin{aligned} \| \underline{\eta}(t) \| &\leq \| \underline{\underline{T}}^{-\frac{1}{2}} \|^2 \cdot \| \underline{\xi}_0 \| \cdot \| \exp(t - t_{2i+1}) \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{C}}) \| \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{\varrho=1}^{i} \| \exp(t_{2\varrho} - t_{2\varrho-1}) \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{C}}) \| \cdot \| \exp(t_{2\varrho-1} - t_{2\varrho-2}) \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\underline{B}}) \| \qquad /52/ \end{aligned}$$

és /51/-ből és /52/-ből állitásunk azonnal leolvasható.

Amennyiben $\underline{\underline{B}}$ ill. $\underline{\underline{C}}$ egyes sajátértékei a minimálpolinomban többszörös multiplicitásuak, akkor gondolatmenetünket mindössze annyit kell változtatnunk, hogy a megfelelő fővektorokat használjuk az előállitásban a sajátvektorok helyett, továbbá, hogy ekkor $\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{B}})$, resp. $\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{C}})$ nem diagonálmátrix, hanem Jordan-mátrix. Amennyiben azonban $\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{C}}$ valamennyi sajátértéke negativ valós részü, a tétel következtetése a kevésbé összevont alakból, ti. a /49/ ill. /50/ alatti kifejezések szorzatából is azonnal levonható. Ezzel tételünket igazoltuk.

Könnyen belátható, hogy tételünk, sőt a bizonyitás gondolatmenete átvihető arra az általánosabb esetre is, amikor $\underline{\underline{A}}(t)$ intervallumról intervallumra ismétlődően a $\underline{\underline{B}}_1, \underline{\underline{B}}_2, \dots, \underline{\underline{B}}_k$ sorozat soronkövetkező elemével egyenlő. Mindössze annyit kell változtatni a bizonyitáson, hogy $\underline{\underline{B}}_2$ -ről $\underline{\underline{B}}_3$ -ra áttérve, a transzformációs mátrixot $\underline{\underline{T}}_2 \cdot \underline{\underline{T}}_1^{-1}$ alakban, $\underline{\underline{B}}_3$ -ról $\underline{\underline{B}}_4$ -re áttérve $\underline{\underline{T}}_3 \cdot \underline{\underline{T}}_2^{-1}$ alakban, stb. kell előállitani, végül $\underline{\underline{B}}_k$-ról $\underline{\underline{B}}_1$ -re visszatérve, igy a $\underline{\underline{T}}_1 \cdot \underline{\underline{T}}_k^{-1}$ transzformációs mátrix adódik ($\underline{\underline{T}}_1$ itt azt a mátrixot jelöli, amelyet a $\underline{\underline{B}}_1$ -ről $\underline{\underline{B}}_2$ -re való áttérésnél használunk). Érvényes tehát az

5. tétel. Ha a /35/ differenciálegyenlet $\underline{\underline{A}}(t)$ együttható mátrixa az egymáshoz csatlakozó (t_i, t_{i+1}) intervallumokon rendre a ciklikusan ismétlődő állandókból álló $\underline{\underline{B}}_1, \underline{\underline{B}}_2, \dots \dots \underline{\underline{B}}_k, \underline{\underline{B}}_1, \dots$ sorozat megfelelő elemével egyenlő és e sorozat minden mátrixának mindegyik sajátértéke negativ valós részü, akkor a /35/ egyenlet $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldása asszimptotikusan stabil ($t_i \leq t_{i+1}$).

Megemlitjük végül, hogy - és ez (51)-(52)-ből azonnal leolvasható, - az $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldás Ljapunov-stabilitását, sőt megfelelő kombináció esetén asszimptotikus stabilitását is biztositani tudjuk, ha egyes sajátértékek valós része zérussal egyenlő, sőt - a részintervallumokra vonatkozó megfelelő kikötések mellett - még akkor is, ha egyes sajátértékek pozitiv valós részüek. Igy pl. abban az esetben, amikor a /35/ egyenlet $\underline{\underline{A}}(t)$ együtthatómátrixa periódikus és Riemann-integrálható, elég finom felosztásban szakaszonként állandó mátrix-sorozattal közelitve azonnal belátható a

6. tétel érvényessége: Legyen a /35/ egyenlet $\underline{\underline{A}}(t)$ együtthatómátrixa T periódusu, Riemann-integrálható függvény. Jelöljék ennek t-től függő sajátértékeit a $\lambda_j(t)$

függvények. Amennyiben érvényes a

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sup_{j(\xi)} Re\{\lambda_j(\xi)\}\, d\xi < 0 \qquad /53/$$

reláció, akkor a /35/ egyenlethez tartozó valamennyi karakterisztikus exponens is negativ valós részü, azaz az $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldás asszimptotikusan stabil.

Megemlitjük azt is - és ez is leolvasható 4. tételünk bizonyitásából - hogy $\int_{t_0}^{t_0+T} \sup_j Re\, \lambda_j\, d\xi$ egy felső korlátja a megfelelő karakterisztikus exponens valós részének.

4. §. Ajzerman sejtésének bizonyitása.

Tekintsük az

$$\dot{\underline{x}} = [\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}(\underline{x}) + \underline{\underline{C}}(\underline{x})]\,\underline{x} + \underline{\underline{D}}(\underline{x})\,\underline{\varphi}(\underline{x}) \qquad /54/$$

differenciálegyenletet, ahol $\underline{\underline{A}}$ állandó mátrix, $\underline{\underline{B}}(\underline{x})$ is állandó mindaddig, amig $\underline{x}$ egyik komponense se vált előjelet, ilyen előjelváltozásoknál viszont ugrásszerüen változik, de ugy, hogy a $\underline{\underline{B}}(\underline{x}).\underline{x}$ szorzat Lipschitz-feltételt elégit ki. $\underline{\underline{C}}(\underline{x})$ olyan mátrix, amely $\underline{x}(t) \epsilon L$; $\|\underline{x}\| \leq exp\{-\varepsilon t\}$, $\varepsilon > 0$ feltétel mellett valamely rögzitett t_0 -tól (pl. $t_0 = 0$ - tól) kielégiti a

$$\int_0^t \|\underline{\underline{C}}(\underline{x}(t))\| dt \leq t^{\nu(\varepsilon)}, \quad ahol \quad \nu < 1, \quad ha \quad \varepsilon > 0 \qquad /55/$$

feltételt és hasonló feltétel vonatkozik $\underline{\underline{D}}(\underline{x})$ -re is, azzal az eltéréssel, hogy $\underline{x}(t) \in L$, $\|\underline{x}\| \leq \exp\{-\varepsilon t\}$ mellett legyen

$$\int_0^\infty \|\underline{\underline{D}}(\underline{x}(t))\| dt < \infty \qquad /56/$$

Végül a $\underline{\underline{C}}(\underline{x}) \cdot \underline{x} + \underline{\underline{D}}(\underline{x})\, \underline{\varphi}(\underline{x})$ szorzat elégitsen ki egy

$$\begin{aligned} &\|\underline{\underline{C}}(\underline{x}_2)\, \underline{x}_2 + \underline{\underline{D}}(\underline{x}_2)\, \underline{\varphi}(\underline{x}_2) - \underline{\underline{C}}(\underline{x}_1)\, \underline{x}_1 - \underline{\underline{D}}(\underline{x}_1)\, \underline{\varphi}(\underline{x}_1)\| \leq \\ &\leq k\, \psi(\|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\|) \end{aligned} \qquad /57/$$

tipusu feltételt, ahol ψ folytonos, monoton növő konkáv függvény a $\psi(0) = 0$ feltétellel, amelyre

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{d\xi}{\psi(\xi)} < \infty \qquad /58/$$

továbbá $\underline{\varphi}(\underline{x})$ önmaga is elégitsen ki egy ilyen tipusu feltételt.

Végül feltesszük, hogy $\underline{\underline{C}}$ és $\underline{\underline{D}}$ minden $\underline{x}$-re korlátosak.

Azonnal látható, hogy az /55/-/58/ feltételek mellett /54/ speciális esetként tartalmazza az /1/-/3/ problémát, ha még azt is feltesszük, hogy tetszőleges $\underline{x}(t) \in C$; $\|\underline{x}(t)\| \leq k_1$

mellett az $\underline{\underline{A}}$ és az $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}\,(\underline{x}\,(t)) = \underline{\underline{F}}(t)$ szakaszonként konstans mátrixok minden sajátértéke (minden t-nél) kielégit egy

$$Re\{\lambda_\nu(A)\} \leq -\varepsilon_o\,;\; Re\{\lambda_\nu(t)\} \leq -\varepsilon_o < 0 \quad (\nu = 1,2,\ldots\ldots m) \qquad /59/$$

feltételt. Az is látható, hogy az /55/-/59/ feltételek mellett /54/ sokkal általánosabb, mint /1/-/3/; minden olyan szabályozó rendszer, amely kapcsolóelemeket és lineáris szakaszokkal jól approximálható nemlineáris karakterisztikáju elemeket tartalmaz, leirható a fenti módon, ha "elég folytonos" módon irható le a kapcsolóelemek hatása, és minden linearizált részszakasz egy asszimptotikusan stabil "teljesen" lineáris szabályozórendszerrel ekvivalens. Érvényes e feltételek mellett a

7. tétel. Az /55/-/59/ feltételek mellett az /54/ egyenlet $\underline{x} \equiv \underline{0}$ megoldása asszimptotikusan stabil, ha $\underline{\underline{C}}$ és $\underline{\underline{D}}$ minden $\underline{x}$-re korlátosak.

Bizonyitás: Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az [5] dolgozat pontjában szereplő tétel speciális eseteként azonnal be lehet látni, hogy az /54/ egyenletre alkalmazott szukcessziv approximáció-sorozat minden véges intervallumon az /54/ egyenlet egyetlen fixpontjához konvergál. Mi azonban egy más tipusu szukcessziv approximációt alkalmazunk: kiinduló elemként (az $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ kezdeti feltétel mellett) tekintjük a

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{z} \quad ; \qquad \underline{z}(0) = \underline{x}_0 \qquad /60/$$

kezdeti-érték feladat $\underline{z}(t) = \underline{x}_0(t)$ megoldását. A következő közelitést, $\underline{x}_1(t)$ - t ill. általában $\underline{x}_{n+1}(t)$ - t az $\underline{x}_n(t)$ ismeretében mármost a következő iterációs eljárással hozzuk létre:

$$\underline{x}_{n+1}(t) = \underline{z}(t) + \int_0^t \underline{\underline{Y}}(t-\tau)\Big\{\big\langle \underline{\underline{B}}[\underline{x}_n(\tau)] + \underline{\underline{C}}[\underline{x}_n(\tau)]\big\rangle \underline{x}_{n+1}(\tau) + \underline{\underline{D}}[\underline{x}_n(\tau)]\cdot \underline{\varphi}(\underline{x}_n(\tau))\Big\}\, d\tau \qquad /61/$$

ahol $\underline{\underline{Y}}(t)$ a /60/ egyenlet $\underline{\underline{Y}}(\underline{0}) = \underline{\underline{E}}$ feltételt kielégitő alaprendszere, azaz $\underline{x}_n(t)$ ismeretében $\underline{x}_{n+1}(t)$ az

$$\dot{\underline{x}}_{n+1} = \{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}[\underline{x}_n(t)] + \underline{\underline{C}}[\underline{x}_n(t)]\}\,\underline{x}_{n+1}(t) + \underline{\underline{D}}[\underline{x}_n(t)]\,\underline{\varphi}[\underline{x}_n(t)] \qquad /62/$$

differenciálegyenlet megfelelő kezdeti értékekből induló megoldása. Állitásunk igazolására mármost először is igazoljuk, hogy a létrehozott $\underline{x}_n(t)$ sorozat minden véges intervallumon egyenletesen konvergál az /54/ egyenlet egyértelmüen meghatározott megoldásához, másodszor azt, hogy $x_n(t)$ egy elég nagy és n-től független T korláttól kezdve kielégiti egy $\|\underline{x}_n(t)\| \leq C\cdot\exp\{-\frac{n+1}{2n}\varepsilon_0\cdot t\}$ alaku becslést, és igy határértéke, $\underline{x}(t)$ egy $\|\underline{x}(t)\| \leq C\cdot\exp\{-\frac{1}{2}\varepsilon_0 t\}$ alaku becslést, majd ennek alapján azt is, hogy ilymódon $\underline{x}(t)$ kielégit tetszőleges $0<\varepsilon_0'<\varepsilon_0$ mellett egy $\|\underline{x}(t)\| \leq C_1\exp\{-\varepsilon_0 t\}$ alaku becslést is, amivel állitásunkat teljesen igazoltuk.

Először második állitásunkat igazoljuk, amely $\underline{X}_0(t) = \underline{z}(t)$ -re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy igaznak bizonyult még n = N-re is. Mármost /61/ alapján $\|\underline{X}_{n+1}(t)\|$ -t az alábbi módon becsülhetjük: $X_{n+1}(t)$ egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása, amely a homogén egyenlet megfelelő megoldásából és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásából tevődik össze. A homogén résznek a kezdeti feltételt is kielégitő részét, $\underline{X}_{N+1}^{(h)}(t)$ -t az 1,2, ill. 6. tétel, továbbá $\underline{\underline{C}}$ korlátos voltára tekintettel igy becsülhetjük:

$$\|X_{N+1}^{(h)}(t)\| \leq C\cdot\exp\left\{t^{v\left(\frac{N+1}{2N}\varepsilon_0\right)}\right\}\cdot\left\{\exp(-\varepsilon_0 t)\right\} \qquad /63/$$

ahol C a $\underline{\underline{B}}$ -ben szereplő transzformációktól, $\|\underline{X}_0\|$ - tól és $\underline{\underline{C}}$ korlátjától függő állandó. Minthogy $v(\varepsilon)$ csökkenő függvénye ε -nak, legyen $v_0 = v(\frac{1}{2}\varepsilon_0)$ és T_1 az a korlát, amelytől kezdve

$$exp(t^{v_0})\cdot exp(-\varepsilon_0 t) \leq \frac{1}{2} exp\left\{-\frac{3}{4}\varepsilon_0 t\right\}$$

$t \geq T$ -re érvényes. Ekkor innét

$$\| \underline{X}_{N+1}^{(h)} \| \leq \frac{1}{2}\cdot C \cdot exp\left(-\frac{N+2}{2N+2}\varepsilon_0 t\right) \qquad /64/$$

még inkább teljesül. Az inhomogén részt, $\underline{X}_{N+1}^{(i)}(t)$ -t az

$$\int_0^t \underline{Y}(t-\tau)\cdot \underline{\underline{D}}[\underline{X}_N(\tau)]\cdot \underline{\varphi}[\underline{X}_N(\tau)]\, d\tau$$

alakban tekintjük, és itt $\|\underline{\underline{Y}}(t-\tau)\| \leq C_2 \cdot exp\{-\varepsilon_0(t-\tau)\}$ továbbá $\|\underline{\underline{D}}[\underline{X}_N(\tau)]\| = s_1(\tau)$ egy a $(0,\infty)$ intervallumon korlátos integrállal rendelkező függvény, az $\underline{X}_N(\tau)$ -ra tett feltevések alapján, végül $\|\varphi[X_N(\tau)]\| \leq \|\underline{X}_N(\tau)\|\cdot \log^2\|X_N(\tau)\|$, hacsak τ már elég nagy, pl. nagyobb, mint T_2, hiszen egyébként $\int_0^t \frac{1}{\psi(\tau)}d\tau < \infty$ érvényes lenne. Ilymódon elég nagy t-re, pl. $t \geq T_3$ -ra

$$\begin{aligned} &\left\|\int_0^t \underline{Y}(t-\tau)\cdot \underline{\underline{D}}[\underline{X}_N(\tau)]\cdot \underline{\varphi}[\underline{X}_N(\tau)]\, d\tau \right\| \leq \\ &\leq C_4 e^{-\varepsilon_0 t}\int_0^t e^{\frac{N+1}{2N}\varepsilon_0 \tau}\cdot \frac{s_1(\tau)}{(1+\tau)^2} \leq \qquad /65/ \\ &\leq \frac{1}{2} C \exp\left(-\frac{N+2}{2N+2}\varepsilon_0 t\right), \quad hacsak \ t \geq T_3 \end{aligned}$$

Igy /64/ és /65/ szerint elég nagy $t \geq \max\{T_1, T_3\}$ -ra

$$\| \underline{X}_{N+1}(t) \| \leq C \cdot \exp\left\{-\frac{N+2}{2N+2} \varepsilon_0 t\right\} \qquad /66/$$

teljesül, azaz a teljes indukció szerint /66/ ilyen t-kre minden N-nél érvényes. Ezzel második állitásunkat beláttuk. Mármost eddig igazolt állitásainkból, $\underline{\underline{D}}$ korlátosságából és a /61/ formulából azonnal leolvasható, hogy az $\underline{X}_n(t)$ approximációs sorozat egyenletesen korlátos és egyenletesen eleget tesz egy 1 kitevős Lipschitz-feltételnek (tehát annál inkább egyenlő mértékben folytonos) a $[0, \infty)$ intervallumon. Az Ascoli-lemma értelmében van tehát egy egyenletesen konvergens $\underline{X}_{nk}(t)$ részsorozata itt, amely a folytonos (sőt, Lipschitz-feltételt kielégitő) $\underline{X}^{(1)}(t)$ határfüggvényhez konvergál. Igy /61/ szerint az $\underline{X}_{nk+1}(t)$ részsorozat is egyenletesen konvergál egy $\underline{X}^{(2)}(t)$ függvényhez, ugy hogy $\underline{X}^{(1)}$ és $\underline{X}^{(2)}$ kielégitik az

$$\begin{aligned} \underline{X}^{(2)}(t) = \underline{z}(t) + \int_0^t \underline{\underline{Y}}(t-\tau)\{\langle \underline{\underline{B}}[\underline{X}^{(1)}(\tau)] + \underline{\underline{C}}[\underline{X}^{(1)}(\tau)\rangle \underline{X}^{(2)}(\tau) + \\ + \underline{\underline{D}}[\underline{X}^{(1)}(\tau)] \cdot \underline{\varphi}[\underline{X}^{(1)}(\tau)] \end{aligned} \qquad /67/$$

Ha tehát igazoljuk, hogy a /61/ alatti approximációsorozatra $\| X_{n+1}(t) - X_n(t) \| \to 0$ ha $n \to \infty$, akkor ez /67/-

tel együtt első állitásunk érvényességét is bizonyitja. Mármost

$$\underline{x}_{n+1}(t)-\underline{x}_n(t)=\int_0^t \underline{\underline{Y}}(t-\tau)\{\underline{\underline{B}}[\underline{x}_n(\tau)]\,\underline{x}_{n+1}(\tau)-\underline{\underline{B}}[\underline{x}_{n-1}(\tau)]\,\underline{x}_n(\tau)+$$

$$+\underline{\underline{C}}[\underline{x}_n(\tau)]\,\underline{x}_{n+1}(\tau)-\underline{\underline{C}}[\underline{x}_{n-1}(\tau)]\,\underline{x}_n(\tau)+\underline{\underline{D}}[\underline{x}_n(\tau)\,\underline{\varphi}[\underline{x}_n(\tau)]-$$

$$-\underline{\underline{D}}[\underline{x}_{n-1}(\tau)]\cdot\underline{\varphi}[\underline{x}_{n-1}(\tau)]\,d\tau=$$

$$=\int_0^t \underline{\underline{Y}}(t-\tau)\{\underline{\underline{B}}[x_n(\tau)]\langle\underline{x}_{n+1}(\tau)-\underline{x}_n(\tau)\rangle-\underline{\underline{B}}[x_{n-1}(\tau)]\langle\underline{x}_n(\tau)-\underline{x}_{n-1}(\tau)\rangle+$$

$$+\langle\underline{\underline{B}}[\underline{x}_n(\tau)]\,\underline{x}_n(\tau)-\underline{\underline{B}}[\underline{x}_{n-1}(\tau)]\cdot\underline{x}_{n-1}(\tau)\rangle+\underline{\underline{C}}[\underline{x}_n(\tau)]\langle x_{n+1}(\tau)-x_n(\tau)\rangle-$$

$$-\underline{\underline{C}}[x_{n-1}(\tau)]\cdot\langle\underline{x}_n(\tau)-\underline{x}_{n-1}(\tau)\rangle+\langle\underline{\underline{C}}[\underline{x}_n(\tau)]\,x_n(\tau)-\underline{\underline{C}}[\underline{x}_{n-1}(\tau)]\cdot\underline{x}_{n-1}(\tau)\rangle+$$

$$+\underline{\underline{D}}[\underline{x}_n(\tau)]\,\underline{\varphi}[\underline{x}_n(\tau)]-\underline{\underline{D}}[\underline{x}_{n-1}(\tau)]\,\underline{\varphi}[x_{n-1}(\tau)]\,d\tau$$

Vezessük be itt a $\Delta_{n+1}(t)=\|\underline{x}_{n+1}(t)-\underline{x}_n(t)\|$

jelölést, és vegyük figyelembe a $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ ill. $\underline{\underline{D}}$ -vel kapcsolatos korlátossági, ill. folytonossági modulusbeli kikötéseket B, C ill. D jelöli $\|\underline{\underline{B}}\|$, $\|\underline{\underline{C}}\|$ ill. $\|\underline{\underline{D}}\|$ egy-egy korlátját.

Igy /68/-ból a

$$\Delta_{n+1}(t)\le\int_0^t \exp\{-\varepsilon_0(t-\tau)\}\cdot\{B\,\Delta_{n+1}(\tau)+B\Delta_n(\tau)+$$

$$+L_1\Delta_n(\tau)+C\Delta_{n+1}(\tau)+C\Delta_n(\tau)+K\psi(\Delta_n(\tau))\}\,d\tau$$

egyenlőtlenség adódik, azaz

$$\Delta_{n+1}(t)e^{\varepsilon_0 t} \leq \int_0^t (B+C)e^{\varepsilon_0 \tau}\Delta_{n+1}(\tau)\,d\tau + \int_0^t \{[B+C+L_1]\Delta_n(\tau) + K\Psi[\Delta_n(\tau)]\}e^{\varepsilon_0 t}d\tau \qquad /69/$$

Felhasználva itt a Gronwall-lemmát,

$$\Delta_{n+1}(t) \leq \int_0^t \{\langle B+C+L_1\rangle\Delta_n(\tau) + K\Psi[\Delta_n(\tau)]\}e^{\varepsilon_0 t}d\tau \cdot \exp(B+C-\varepsilon_0)t \qquad /70/$$

adódik. Mármost a szereplő együtthatók pozitivitása és Ψ monotonitása miatt a $\vartheta_n(t)$ függvény minden n-re majorálja $\Delta_n(t)$-t, ha $\vartheta_1(t) \geq \Delta_1(t)$ és a ϑ_n sorozat a

$$\vartheta_{n+1}(t) = \exp(B+C-\varepsilon_0)t \cdot \int_0^t \{\langle B+C+L_1\rangle\vartheta_n(\tau) + K\Psi(\vartheta_n(\tau))e^{\varepsilon_0 t}\}d\tau \qquad /71/$$

egyenletet elégíti ki. /71/ viszont ekvivalens azzal, hogy a

$$\exp\{-(B+C-\varepsilon_0)t\}\cdot[\dot{\xi}-(B+C-\varepsilon_0)\xi] = \{[B+C+L_1]\xi + K\Psi(\xi)\exp\{\varepsilon_0 t\}$$

differenciálegyenlet megoldását keressük meg szukcesszív approximációval, olymódon, hogy azt inhomogén lineáris differenciálegyenletnek tekintjük. Ha itt bevezetjük az $\eta = e^{-(B+C-\varepsilon_0)t}\cdot\xi$ uj változót, akkor differenciálegyenletünk az

$$\dot{\eta} = (B+C+L_1)e^{(B+C)t}\cdot\eta + Ke^{\varepsilon_0 t}\cdot\psi(e^{(B+C-\varepsilon_0)t}\cdot\eta) \qquad /72/$$

differenciálegyenletbe megy át. /72/ szukcessziv approximációval történő megoldása az $\eta_1(t) = e^{-(B+C-\varepsilon_0)t}\cdot\vartheta_1(t)$ választással az $\eta_n(t) = e^{-(B+C-\varepsilon_0)t}\cdot\vartheta_n(t)$ sorozatot szolgáltatja. Mármost $\Delta_1(0) = 0$, igy a ϑ_1, azaz az η_1 függvényt is választhatjuk ugy, hogy $\vartheta_1(0) = 0$ resp. $\eta_1(0) = 0$ érvényes legyen. E kezdeti feltételt azonban /72/-nek csak az $\eta \equiv 0$ megoldása elégiti ki. Tett feltevéseink alapján azonban ekkor a szukcessziv approximációval adódó $\eta_n(t)$ sorozat bármely véges intervallumon egyenletesen e megoldáshoz konvergál /l. pl. [4] ill. [5]/. Igy bármely véges intervallumon $\Delta_n(t)$ is egyenletesen zérushoz konvergál, és ezzel első állitásunkat is igazoltuk. E két állitás együttesen azt mutatja, hogy /54/ megoldása, $\underline{x}(t)$ kielégiti a /66/ relációt. Behelyettesitve ezt az /54/-ben szereplő mátrixokba, /54/ megoldása kielégiti az

$$\dot{\underline{x}} = \{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}[\underline{x}(t)] + \underline{\underline{C}}[\underline{x}(t)]\}\underline{x} + \underline{\underline{D}}[\underline{x}(t)]\underline{\varphi}(\underline{x}) \qquad /73/$$

differenciálegyenletet, és itt

$$\int_0^t \|\underline{\underline{C}}[\underline{x}(\tau)]\|\,d\tau < t^{\nu_0} \ ; \ \int_0^\infty \|D[\underline{x}(\tau)]\|\,d\tau < \infty \qquad /74/$$

teljesül. Ekkor azonban az 1., 2., ill. 6. tétel szerint /73 / megoldása kielégiti t elég nagy értékeire az

$$\|\underline{x}\| \leq \exp(-\varepsilon_0' t)$$

becslést, hacsak $\varepsilon_0' < \varepsilon_0$. Tételünket ezzel igazoltuk. Megemlitjük még, hogy a gondolatmenet lényeges változtatása nélkül igaz marad a tétel akkor is, ha $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ ill. $\underline{\underline{D}}$ megfelelő feltételeket kielégitve t-től is függenek.

Irodalom:

[1] Minorsky: Nonlinear Oscillations. Princeton, 1962.

[2] Cesari, L.: Un nouvo criterio di stabilita per le solutioni delle equazioni differentiali lineari. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 9. 1940.

[3] Cesari, L.: Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ord. Diff. Equ., Springer, 1959.

[4] Coddington E.A.-Levinson N.: Theory of Ord.Diff. Equ. Mc Graw-Hill Book C. 1955.

[5] Frey T.: Über die Konvergenz von Iterationsfolgen mit veränderlichen Operatoren Studia Sc. Math. Ac. Sc. Hung. 1. 1966. /sajtó alatt/

[6] Bihari I.: A generalization of a lemma of Bellmann... Acta Math. Ac. Sc. Hung. VII. 1. 1956.

[7] Bihari I.: Researches of the Boundedness and Stability of the Solutions of non-linear Diff. Equ. Acta Math. Ac. Sc.Hung. VIII. 3-4. 1957.

[8] Frey T.: Einige neue Methoden zur Berechnung von Eigenwerten Aplikace Matematiky 10. 1965.

Summary

On some new results of stability theory.

The paper verifies some new comparative items in order to prove the guess of Aizerman. These assure the asymptotic comparability of the perturbed linear differential equation system and of the unperturbed solution system. Besides, the paper examines the asymptotic behaviour of such differential equation systems with coefficient matrices constant by phases which are no periodical functions of the parameter, but repeat themselves periodically. Supported by the same, a partly weakened, partly sharpenes variety of Aizerman's guess is verified.

Nagy rendszerek üzemeltetésének néhány kérdéséről

Frey Tamás - Tomkó József

Bevezetés

A jelen dolgozat célja olyan matematikai modellek leírása, amelyek segitségével a sok alkatrészből összetett rendszerek /pl. elektronikus számológépek/ üzemeltetésével kapcsolatosan felmerülő problémák aránylag könnyen s hüen tárgyalhatók. A rendszer alkotórészeinek a meghibásodása akadályozza, zavarja a kivánt funkciók elvégzését, s szükségessé válik a meghibásodott alkatrészek kicserélése. Célszerü azonban nemcsak a meghibásodott alkatrészt helyettesiteni ujjal, hanem más, bizonyos erősségü megterheléseket el nem biró alkatrészeket is kicserélni. Igen fontos, az összetett rendszerek üzemeltetésével kapcsolatosan az alábbi kérdésekre válaszolni: - mennyi lesz az egyes meghibásodások közti időtartam várható értéke. A rendszert meghibásodottnak tekintjük, ha nem képes a reá bizott feladatokat elvégezni. Ennek oka lehet, hogy valamelyik alkótórésze elromlott, de előfordulhat, hogy olyan rendszerrel állunk szemben, amelynél még néhány alkatrész kiesése nem feltétlenül jelenti az egész rendszer meghibásodását. Másik kérdés, adott tesztelési /ellenőrzési/ eljárás mellett átlagban hány alkatrész cseréjére kerül sor. Annak érdekében, hogy a rendszer zavartalan müködését bizonyos időszakaszok folyamán ne gyakran akadályozzák a rendszer meghibásodásai, célszerü előre meghatározott időpillanatokban tesztelést hajtani végre. Ez esetben arra kell törekednünk, hogy két előre meghatározott időpillanatban történő tesztelés között ujabb tesztelésre ne kerüljön sor. Nyilvánvaló, hogy az utóbbi esemény bekövetkezési valószinüségét ugy csökkenthetjük, hogy a tesztelésre előre kijelölt időpillanatokat egymáshoz közelebb választjuk meg. Világos az is, hogy ha gyakrabban hajtunk végre tesztelést, akkor az egyes tesztelések során a kicserélésre kerülő alkatrészek átlagos száma kisebb lesz. Azonban a gyakori tesztelések nem előnyösek. Csökkentik a gép /a rendszer/ folytonos müködési idejét, másrészt a tesztelések során kicserélt elemek összszáma növekedhet meg igen erősen. Felmerül bizonyos, az alkatrészek cseréinek költségeit és a rendszer zavartalan müködésének előnyeit szem előtt tartó optimális üzemeltetési terv meghatározása. Sajnos, a probléma analitikus tárgyalása igen nehéz, ezért az emlitett optimális üzemeltetési terv megadása az esetek tulnyomó többségében komoly nehézségekbe ütközik.

Szólnunk kell a továbbiakban a rendszer alkatrészeinek élettartam-eloszlás függvényéről. Ha ezt általánosnak tekintjük, akkor jóformán semmit sem tudunk mondani a felvetett problémákról. Mégcsak a rendszerrel kapcsolatos karakterisztikáknak a szimulációs eljárással történő meghatározása is keresztülvihetetlennek látszik. Ha viszont exponenciálisnak tekintjük az alkatrészek élettartam-eloszlását, akkor nagyon messze kerülünk a valódi körülményektől, nem beszélve arról, hogy ez esetben az exponenciális eloszlás "örökifju" - tulajdonsága következtében értelmetlenné válik a még ép alkatrészek esetleges cseréje. Adódik az a gondolat, hogy az élettartam-eloszlás sürüségfüggvényét

$$f(x)=\sum_{k} c_k f_k(x) \qquad (x\geq 0) \tag{1}$$

alakunak tekintsük, ahol

$$f_{k+1}(x)=\lambda\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda x} \tag{2}$$

k+1-ed rendü Erlang-eloszlás sürüségfüggvénye, az összegezés pedig véges k-ra történik $c_k>0$ és $\sum c_k=1$ kikötés mellett. Itt arra gondoltunk, hogy az

/1/ alaku sürüségfüggvényekkel széles osztálya közelithető megfelelő c_i-k megválasztásával a szóbajöhető valószinüségi eloszlásoknak. Emellett, amint majd látni fogjuk, elég jól utalhatunk az alkatrészeknek olyan jellemzőjére, amelynek alapján meghibásodásuktól függetlenül ujakkal cseréljük ki őket egy esetleges tesztelés során. Az élettartam-eloszlásfüggvény /1/ szerinti választása a következő, hasznos interpretációt teszi lehetővé. Azt, hogy a rendszer egy alkatrésze /1/ tipusu élettartam-sürüségfüggvénnyel rendelkezik, ugy foghatjuk fel, hogy c_k valószinüséggel k-ad rendü Erlang-eloszlást követ az élettartama. Ez utóbbi tényt pedig ugy interpretálhatjuk, hogy az alkatrész k darab elemi alkatrészből - "lámpából"- áll, amelyek mindegyike λ paraméterü exponenciális eloszlásu élettartammal rendelkezik. Másképpen szólva, azt mondhatjuk, hogy a rendszer alkatrészei k fázisban tartózkodhatnak, s mindenegyes fázisban való tartózkodási idejük exponenciális eloszlásu. A fázisokat indexeljük az 1, 2,........ egészekkel, s ha lejárt egy alkatrésznek valamely fázisban való tartózkodási ideje, akkor az indexelésnek megfelelő következő fázisba megy át. Ha az utolsó fázisban való tartózkodási idő is lejárt, akkor az alkatrészt meghibásodottnak tekintjük. Ha az alkatrészt k-lámpából állónak tekintjük, akkor azt mondhatjuk, hogy az alkatrész i-dik fázisban van, ha már i-1 lámpája kiégett. A dolgozatban ezeket az interpretációkat gyakran fogjuk használni.

Mielőtt rátérnénk az emlitett matematikai modellek ismertetésére, szólnunk kell a rendszer alkatrészeinek egymáshoz való viszonyáról is. Az egyszerüség kedvéért mindvégig feltételezni fogjuk, hogy az alkatrészek egymástól függetlenül müködnek, azaz, hogy élettartamaik egymástól független valószinüségi változók. Feltételezzük továbbá, hogy az alkatrészek élettartamai azonos eloszlásuak és hogy az egész rendszert meghibásodottnak tekintjük, ha van legalább egy elromlott alkatrésze. Ezeket a feltételezéseket gyengithetjük, főként az esetben, amikor csak a szimulációs eljárásra támaszkodunk.

Még egy elég erős feltételezéssel fogunk élni, éspedig azzal, hogy egy tesztelés és az alkatrészek esetleges cseréjének idejét elhanyagolhatóan rövidnek, pillanatnyinak tekintjük. Előfordulnak olyan esetek, amikor a hiba felfedezése s annak kijavitása tényleg rövid időt vesz igénybe, s ekkor az előző feltételezésünk jogos.

Viszont sok esetben az emlitett megszoritásunkkal távol esünk a reális körülményektől. Az esetben, amikor a tesztelési időt jelentősnek tekintjük, analitikus eredmények aligha nyerhetők, s a szimulációs eljárás is erősen bonyolódik.

I. Modell

Tekintsünk egy n alkatrészből álló rendszert. Jellemezze az alkatrészek élettartam eloszlását az /1/ alatti sürüségfüggvény. /1/-ben az összegezés menjen 1-től m-ig. Ezt ugy is értelmezhetjük, hogy a $t=0$ pillanatban a rendszer mindenegyes alkatrésze c_k $(1 \leq k \leq m)$ valószinüséggel k-ad rendü Erlang-eloszlásu élettartammal rendelkezik. Az idő mulásával az egyes alkatrészek a kisebb indexü fázisból nagyobb indexü fázisba mennek át, s változik azon alkatrészek száma, amelyek további élettartama közös r-ed $(1 \leq r \leq m)$ rendü Erlang-eloszlást követ. Tetszőleges t pillanatban az alkatrészek élettartamát továbbra is az /1/ alatti sürüségfüggvény jellemzi, de most a c_k-k, t-nek függvényei lesznek. Egy meghibásodási pillanatig általában a magasabb indexü $c_k(t)$ függvények csökkennek, az alacsonyabb indexüek növekszenek, közben mindig $\Sigma c_k(t) = 1$. Egy meghibásodás utáni pillanatban ugrásszerü változás áll be. Egy tesztelés során végbemenő cserék lefolyását az alábbi módon képzeljük el: Azt az alkatrészt, amelynek a tesztelés pillanatától számitott további élettartama r-ed rendü Erlang-eloszlásu - szemléletesen, még r darab jó lámpája van - α_r valószinüséggel kicseréljük. A behelyezett uj alkatrészt $c_k = c_k(o)$ valószinüséggel tekintjük k fázisunak. Igy, a tesztelést követő pillanatban megváltozik az azonos számu lámpákból álló alkatrészek száma s megváltozik annak a valószinüsége, hogy egy véletlenül kiszemelt alkatrész további élettartama r-ed rendü Erlang-eloszlást kövessen. Ha egy t pillanatban végbemenő tesztelést közvetlen megelőző pillanatban, annak a valószinüségét, hogy egy alkatrész r jó lámpát tartalmazzon, $c_r(t-o)$-val jelöljük, akkor a tesztelést követő pillanatban ugyanennek az eseménynek a valószinüségét $c_r(t+o)$-t az alábbi formula szolgáltatja:

$$/3/ \qquad c_r(t+0) = c_r \sum_{i=1}^{m} c_i(t-0)\alpha_i + c_r(t-0)(1-\alpha_r)$$

Vezessük most be a következő valószinüségi vektort

$$\gamma(t) = \{\gamma_1(t),\ \gamma_2(t), \ldots \ldots \gamma_m(t)\}$$

ahol $\gamma_i(t)$ $(i=1,2,\ldots m)$ jelenti azon alkatrészek számát, amelyeknél még i darab lámpa ép. A $\gamma(o)$ vektor $c_1, c_2, \ldots, c_m$ paraméterü polinomiális eloszlásu lesz. Tetszőleges r pillanatban mindegyik alkatrész egyugyanazon $c_k(t)$ valószinüséggel fog k-lámpából állni, de az alkatrészek között a kezdeti pillanatban meglévő kölcsönös függetlenség megbomlik. Egy alkatrész azáltal, hogy meghibásodott, befolyásolja más alkatrészek élettartamát (ugyanis előidézheti azok kicserélését). Intuitive azonban világos, hogy az alkatrészek említett egymásra való kölcsönhatása az alkatrészszám, n növelésével csökken s ezért elég nagy n mellett - s mi általában ezt az esetet tételezzük fel - a $\gamma(t)$ vektor közel $c_i(t)$ $(1 \leq i \leq m)$ paraméterü polinomiális eloszlásunak tekinthető. Továbbá könnyü észrevenni, hogy a $\gamma(t)$ vektor Markov-folyamatot alkot, s emellett ergodikus is, amely most azzal ekvivalens, hogy léteznek a

$$/4/ \qquad \lim_{t \to \infty} c_k(t) = \varrho_k$$

határértékek. A határeloszlás szintén közel polinomiálisnak vehető $\varrho_1, \varrho_2, \dots \dots \varrho_m$ paraméterekkel. Következésképpen, ha mindenegyes $1 \leq i \leq m$ -re $0 < \varrho_i < 1$ akkor a stacionárius üzemeltetés mellett a γ vektor i-dik komponensének, azaz az i darab ép lámpát tartalmazó alkatrészek számának várható értéke

$$M\gamma_i = n\varrho_i$$

szórásnégyzete pedig

$$D^2\gamma_i = n\varrho_i(1-\varrho_i)$$

lesz. Nagy alkatrészszám esetén a γ vektor eloszlása a Moivre-Laplace határeloszlás tétel értelmében m dimenziós normális eloszlással közelithető.

A továbbiakban szükségünk lesz a k-ad rendü Erlang-eloszlás alakjára. Ismételt parciális integrálással kapjuk, hogy

$$F_k(x) = \int_0^x f_k(t)\,dt =$$

/5/

$$= \int_0^x \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}\left(1 + \frac{\lambda x}{1!} + \dots \dots + \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$

A tömörebb irásmód kedvéért célszerü bevezetni az

$E_k(t) = 1 + t + \ldots\ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$ jelölést.

Vizsgáljuk most két tesztelés közti időtartam eloszlástörvényét. Jelöljük $t_1, t_2, \ldots, t_l, \ldots$ az egymás után következő tesztelési időpillanatokat, majd tekintsük a

$$\gamma(l) = \gamma(t_l + 0)$$

vektor sorozatot. $\gamma(l)$ eloszlása közel polinomiális, $c_k^+(l) = c_k(t_l+0)$; $(1 \leq k \leq m)$ paraméterekkel. A $\tau_1 = t_1,\ \tau_2 = t_2 - t_1 \ldots\ldots\ \tau_l = t_l - t_{l-1} \ldots\ldots$ sorozat tagjai független valószinüségi változók s a τ_{l+1} eloszlását az alábbi módon határozhatjuk meg:

Legyenek a $\gamma(l)$ vektor komponensei $n_1, \ldots, n_m$. A $\{\tau_{l+1} < U\}$ esemény m darab egymást kizáró B_k $(1 \leq k \leq m)$ esemény összegeként állitható elő, ahol B_k az az esemény, hogy a rendszernek a $t_l + U$ ideig bekövetkező ujabb meghibásodását olyan n_k darab alkatrész valamelyikének az elromlása idézte elő, amelyek pontosan k ép lámpát tartalmaznak. Egyszerü meggondolásokkal kapjuk, hogy

$$P(B_k) = \int_0^U n_k \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda x} \cdot [1 - F_k(x)]^{n_k - 1} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{m} [1 - F_r(x)]^{n_r}\, dx$$

Innen, /5/ felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{dP}{dx}(\tau_{l+1}<x)=$$

/6/

$$=\sum_{n_1+\ldots+n_m=n}\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!}[c_1^+(l)]^{n_1}\cdots[c_m^+(l)]^{n_m}\cdot\lambda e^{-n\lambda x}\prod_{r=1}^{m}[E_r(\lambda x)]^{n_r}\sum_{i=1}^{m}n_i\frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{1}{E_i(\lambda x)}$$

Ha a stacionárius rezsim esetét tételezzük fel, akkor τ_i-k azonos eloszlásuak lesznek s a $\gamma(l)$ közelitő polinomiális eloszlásának paramétereit a

$$c_i^+=\lim_{l\to\infty}c_i^+(l)\qquad(1\le i\le m)$$

határértékek adják. /6/ formulát felhasználhatjuk a $M\tau$ érték kiszámitásánál. $\lambda x=t$ helyettesités elvégzése után kapjuk, hogy

$$M\tau=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty te^{-nt}\Big\{\sum_{n_1+\ldots+n_m=n}\frac{n!}{n_1!\ldots n_m!}\prod_{r=1}^{m}[c_r^+E_r(t)]^{n_r}\sum_{i=1}^{m}n_i\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\frac{1}{E_i(t)}\Big\}dt$$

A kapcsos zárójelben lévő összeget egyszerübb alakra hozhatjuk, ha benne az $E_r(t)$-ket független változókkal, Z_r-ekkel helyettesitjük. Felcserélve az összegezés sorrendjét, az integrál alatti összeg a következő alakra hozható:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\sum_{n_1+\ldots+n_m=n}\frac{n!}{n_1!\ldots n_m!}n_ic_i^+(c_i^+z_i)^{n_i-1}\prod_{\substack{r=1\\r\ne i}}^{m}(c_r^+z_r)^{n_r}$$

A belső összegről most már könnyü észrevenni, hogy az a $(c_1^+ z_1 + \dots \dots + c_m^+ z_m)^n$ hatvány z_i szerinti parciális deriváltja, azaz

$$n c_i^+ (c_1^+ z_1 + \dots \dots + c_m^+ z_m)^{n-1}$$

Mármost, ha z_i helyébe visszahelyettesitjük E_i-t $M\tau$ -ra az alábbi egyszerübb integrálelőállitást nyerjük:

$$/7/ \qquad M\tau = \frac{n}{\lambda} \int_0^\infty e^{-nt} [c_1^+ E_1(t) + \dots \dots + c_m^+ E_m(t)]^{n-1} \left(\sum_{i=1}^m c_i^+ \frac{t^i}{(i-1)!} \right) dt$$

Becsülve /7/-et a Laplace-módszer alapján, $M\tau$ -ra az

$$/8/ \qquad M\tau \sim \frac{n}{\lambda} \sum_{i=1}^m c_i^+ \frac{i}{[n c_1^+]^{i+1}} \sim \frac{1}{\lambda n c_1^+}$$

asszimptotika adódik. Az eredmény előre várható volt. Ugyanis, általában a rendszer meghibásodását azon alkatrészek valamelyikének az elromlása idézi elő, amelyek már csak egy jó lámpát tartalmaznak. Az ilyen alkatrészek átlagos száma egy tesztelést követő pillanatban $n c_1^+$. Viszont egyetlen hibátlan lámpát tartalmazó $n c_1^+$ darab alkatrészből álló blokk élettartamának átlagos ideje $1/\lambda n c_1^+$. A /8/-as aszimptotikából az a magától értetődő tény is kiolvasható, hogy az $M\tau$ átlagérték növelése céljából a tesztelések során az alkatrészek cseréjét ugy kell megszervezni, hogy a csupán egy hibátlan lámpából álló alkatrészek előfordulási valószinüsége igen csekély legyen. Ezt ugy érhetjük el, hogy az α_1 valószinüséget /egy lámpából álló alkatrésznek a tesztelés során történő kicserélési valószinüségét/ nagynak választjuk.

Tekintsük most egy tesztelés során létrejövő cserék átlagos számát. Feltételezve a stacionárius rezsimet, egy tesztelést megelőző pillanatban átlagosan nc_i^- $\left(c_i = c_i(t_i - 0)\right)$ alkatrész van olyan, amelyik i darab hibátlan lámpából áll. Ezek közül mindegyiket α_i valószinüséggel kicseréljük, tehát egy tesztelés során $nc_i^-\alpha_i$ lesz az i lámpából álló kicserélt alkatrészek átlagos száma. Végeredményben kapjuk, hogy egy tesztelés során kicserélt alkatrészek várható értéke

$$/9/ \qquad n\left(c_1^-\alpha_1 + c_2^-\alpha_2 + \ldots \ldots + c_m^-\alpha_m\right)$$

Az előzőekből látható, hogy a bennünket érdeklő karakterisztikák (/7/, /9/) meghatározásánál döntő szerepet játszanak a c_i^+ ill. c_i^- $(1 \leq i \leq m)$ valószinüségek. Ezeknek analitikus uton történő meghatározása főlöttébb áttekinthetetlen, s következésképpen a kiszámításuknál csak a szimulációs eljárásra (Monte-Carló módszer) támaszkodhatunk. m=2 esetén azonban bizonyos eredmények analitikus uton is nyerhetők. A továbbiakban erre térünk át. A $c_1; c_2$; c_1^+, c_2^+ ill. $c_1^-; c_2^-$ mennyiségeket rendre p, q; p^+, q^+ ill. p^-, q^- $(p=1-q)$ -szal $\alpha_1; \alpha_2$ -t pedig α, β -val fogjuk jelölni. Induljunk ki tehát most abból, hogy a rendszer n alkatrésze közel mindegyik p valószinüséggel áll egy, q valószinüséggel áll két lámpából. Meghatározzuk annak a valószinüségét, hogy az első tesztelést megelőző pillanatban egy alkatrész két lámpából álljon. Ezt a mennyiséget jelöljük $\bar{q}(1)$-gyel. Egy kiszemelt alkatrész a t_1 pillanatban bekövetkező tesztelésnél csak akkor tartalmazhat két hibátlan lámpát, ha a kezdőpillanatban is két lámpából állott, s a t_1 pillanatig nem égett ki ezen két lámpája közül egy sem. Ezen események bekövetkezési valószinüsége $qe^{-\lambda t_1}$. A keresett $\bar{q}(1)$ valószinüséget megkapjuk, ha a $qe^{-\lambda t_1}$ valószinüséget megszorozzuk az $(n-1)$ alkatrészből álló rendszer hibátlan müködési idejének sürüségfüggvényével, s integrálunk 0-tól ∞ -ig. /6/ felhasználásával kapjuk, hogy

$$\bar{q}(1) = q\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}q^i p^{n-1-i}\cdot\lambda e^{-(n-1)\lambda t}(1+\lambda t)^i\left[(n-1-i)+\frac{i\lambda t}{1+\lambda t}\right]dt =$$

$$= q\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda n t}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}q^i p^{n-1-i}\left[(n-1)(1+\lambda t)^i - i(1+\lambda t)^{i-1}\right]dt$$

Véve a $\lambda t = z$ helyettesitést, majd elvégezve az integrál alatti összegezéseket, az alábbi tömörebb alakot nyerjük:

$$\bar{q}(1) = q(n-1)\int_0^\infty e^{-nz}\left[(1+qz)^{n-1} - q(1+qz)^{n-2}\right]dz =$$

$$= q(n-1)\int_0^\infty e^{-nz}(1+qz)^{n-2}(p+qz)\,dz$$

Az utóbbi integrált becsülve a Laplace-féle módszerrel kapjuk, hogy

/10/ $\bar{q}(1) \sim q(n-1)\left(\frac{1}{n} + \frac{q}{(np)^2}\right) \sim q\,\frac{n-1}{n}$

Továbbá $\bar{q}(1) + \bar{p}(1) = 1$ alapján

/11/ $\bar{p}(1) \sim p + \frac{q}{n}$

/10/ ill. /11/-gyel számolva, /3/-at felhasználva, kiszámithatjuk a $p^{+}(1)$ ill. $q^{+}(1)$ mennyiségeket, majd /10/, /11/ és /3/ sorozatos egymásutáni alkalmazásával a $q^{+}(l); p^{+}(l)$ ill. $q^{-}(l); p^{-}(l)$ valószinüségeket rendre meghatározhatjuk. Minthogy a $\gamma(l)=\{\gamma_1(l), \gamma_2(l)\}$ Markov-lánc ergodikus, a

$$(q^{-}, q^{+}; p^{-}, p^{+}) = \lim_{l\to\infty} (q^{-}(l), q^{+}(l); p^{-}(l), p^{+}(l))$$

határértékek létezése biztositott. Ezeknek a határértékeknek az analitikus meghatározása még az m=2 esetben is keresztülvihetetlennek látszik. Konkréten adott p, q ill. α, β mellett azonban számológép segitségével igen könnyen kiszámithatók.

II. Modell

Azt a tényt, hogy rendszerünk alkatrészeinek élettartam eloszlását az /1/ sürüségfüggvény jellemzi, a rendszer üzemeltetésével kapcsolatos kérdések vizsgálatánál még a következőképpen is felfoghatjuk: az alkatrészeket homogéneknek tekintjük, ezen azt értjük, hogy a kezdő pillanatban a rendszerben lévő és a cserékhez raktározott alkatrészek egyszerre mind c_k valószinüséggel k-ad rendü Erlang-eloszlásu élettartammal rendelkeznek.

Miután meghatároztuk a rendszerre vonatkozó bizonyos karakterisztikát K_i -t azon feltevés mellett, hogy az alkatrészek mind i darab lámpából állanak, akkor az /1/ feltételezésünk azt fogja eredményezni, hogy a szóbanforgó karakterisztikánkat a $K = \sum c_i K_i$ összeg alapján kell számitanunk. A továbbiakban tehát most rögzitjük, k-nak vesszük az alkatrészek lámpáinak számát. A kezdő t=o pillanatban a rendszer minden egyes alkatrészét ujnak tekintjük. Olyan pillanatban, amikor valamelyik alkatrésznek az utolsó ép lámpája is kiég, a rendszert meghibásodottnak tekintjük, ujjal cseréljük ki az elromlott alkatrészt, s tesztelést hajtunk végre, melynek következtében még további, el nem romlott alkatrészeket is kicserélünk. Például kiköthetjük, hogy egy tesztelés során ujakkal helyettesitjük az r-nél ($r < k$) kevesebb ép lámpát tartalmazó alkatrészeket. Vagy az előző pontban emlitetthez hasonlóan feltételezhetjük, hogy egy olyan alkatrészt, mely a tesztelés pillanatában i darab lámpából áll, α_i valószinüséggel kerül kicserélésre. Az emlitett első kicserélési elv ennek speciális eseteként tekinthető $\alpha_i = 0$ ($i=r,r+1,\dots m$) és $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \dots = \alpha_{r-1} = 1$ valószinüségek választása mellett. Rendszerünkkel ujból kapcsolatba hozható az előző pontban értelmezett

$$\gamma(t)=\{\gamma_1(t),\ \gamma_2(t),\ \dots\ \dots\ \gamma_k(t)\}$$

valószinüségi vektor, mely ez esetben is ergodikus Markov-folyamatot alkot. Intuitive világos, hogy most is minden egyes alkatrész egyforma valószinüséggel fog egy kiszemelt pillanatban i darab ép lámpát tartalmazni. Ez esetben viszont az alkatrészek között erősebb lesz a kölcsönös függőség, főként akkor, amikor az r a k-hoz képest nem tulságosan kicsiny, illetve, amikor az α_i -k nagy i-kre is számottevőek. Ezért a rendszert leiró $\gamma(t)$ folyamat eloszlásának polinomiálissal való közelitése nem lehet mindig indokolt. A későbbiek során a k=2 és r=1 eset tárgyalásánál erre konkrétabban rá is fogunk mutatni. A $\gamma(t)$ vektor pontos eloszlását leiró

/12/ $$p_{i_1,i_2,\dots i_k}(t)=P\{\gamma_1(t)=i_1,\dots\ \dots\ \gamma_k(t)=i_k\}$$

valószinüségekre felirható egy véges differenciálegyenlet-rendszer, de az tulságosan bonyolult s megoldása reménytelennek látszik. k=2 és r=1 esetben az említett differenciálegyenlet rendszer áttekinthető s megadhatók a /12/ alatti jelentéssel biró stacionárius valószinüségek. Minthogy ez esetben $i_1+i_2=n$, ezért elegendő a $p_{i,n-i}(t)$ helyett a $q_i(t)$ jelölést venni. Egyszerü meggondolások sorozatával belátható, hogy a $q_i(t)$ függvények az alábbi differenciálegyenlet rendszert elégitik ki:

$$/13/ \quad \begin{cases} i \geq 1 \text{ mellett} \\ q_i'(t) = -\lambda n q_i(t) + \lambda(n-i+1)\, q_{i-1}(t) \\ i = 0\text{-ra} \\ q_0'(t) = -\lambda n q_0(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda j q_j(t) \end{cases}$$

/13/-at most $q_0(0)=1$ és $q_i(0)=0 \ (i>0)$ kezdőfeltétel mellett kell tekintenünk. /13/-ból a szokásos uton meghatározhatjuk a

$$/14/ \qquad q_i = \lim_{t\to\infty} q_i(t)$$

határvalószinüségeket. Végeredményben a következő eredményre jutunk:

$$/15/ \qquad q_i = i!\binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i q_0 \qquad (0 \leq i \leq n)$$

hol

$$q_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i} \qquad /16/$$

Megmutatható, hogy a $\sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i$ összeg $n\int_0^\infty e^{-nx}(1+x)^n dx$ integrálalakban állitható elő, melyből a Laplace-féle becslési eljárással nyerjük a

$$q_0 \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \qquad /17/$$

aszimptotikát. Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy ha p(t)-vel jelöljük annak a valószinüségét, hogy a t pillanatban egy kiszemelt alkatrész 2 lámpát tartalmazzon, akkor

$$p(t) = \int_0^t e^{-n\lambda(t-n)}\left[1+\lambda(t-n)\right]^{n-1} dH(n) \qquad /18/$$

hol H(n) a rendszer sorozatos meghibásodásai közti időtartamok /ezeket jelöljük τ_i-kkel/ által értelmezett megujulási folyamat un. átlag vagy felujitási függvénye. Innen adódik, hogy

$$p = \lim_{t\to\infty} p(t) = 1 - \frac{1}{n\int_0^\infty e^{-nz}(1+z)^n dz}$$

Felhasználva az $n\int_0^\infty e^{-nz}(1+z)^n dz \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$ aszimptotikus relációt, nyerjük, hogy

$$q = 1 - p \sim q_0 \sim \sqrt{\frac{2}{n\pi}} \tag{19}$$

Számitsuk most ki az $M\gamma_2$ értéket. Kapjuk, hogy

$$M\gamma_2 = q_0 \sum_{i=0}^{n} i!\binom{n}{i}\frac{i}{n^i} = nq_0 \tag{20}$$

melyről az alábbi egyenlőségsorozat alapján győződhetünk meg:

$$\sum_{i=0}^{m} i\binom{n}{i}\frac{i!}{n^i} = \frac{n!}{n^n}\sum_{i=0}^{n}(n-i)\frac{n^i}{i!} = \frac{n!}{n^n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} n\frac{n^i}{i!} - \sum_{i=0}^{n-1} i\frac{n^i}{i!}\right] =$$

$$= \frac{n!}{n^{n-1}}\left[\sum_{0}^{n-1}\frac{n^i}{i!} - \sum_{0}^{n-2}\frac{n^i}{i!}\right] = n$$

Tekintettel /19/-re, vehetjük, hogy $M\gamma_2 \sim nq$.
Azt mondhatjuk tehát, hogy $M\gamma_2$ ugy képződik /s egyut-

tal $M\gamma_1 \sim np \sim n(1-\sqrt{\frac{2}{n\pi}})$ is/ mintha a $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ vektor közel (n,p) paraméterü binomiális eloszlásu volna. Azonban ez nincs igy, amire már az is rámutat, hogy $D^2(\gamma_2) \sim n(1-\frac{2}{\pi})$ lényegesen eltér $npq \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ -től. Különben is, könnyen látható, hogy a /15/ alatti eloszlás közel sem tekinthető (n,p) paraméterü binomiálisnak. Ez is arra enged következtetni, hogy a II. Modell esetén a $\gamma(t)$ eloszlásának polinomiálissal való helyettesitésénél igen óvatosnak kell lennünk.

Végül megemlitjük még, hogy a tekintett m=2 és r=1 esetben a τ_i-k /a rendszer meghibásodásai közti időtartamok/ függetlenek, azonos eloszlásuak

$$P\{\tau_i \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda n x}(1+\lambda x)^n, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

eloszlás függvénnyel. Az $M\tau$ várható értékre érvényes az $M\tau \sim \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ aszimptotikus reláció. Egy tesztelés során kicserélt alkatrészek várható értékét pedig $M\gamma_2 \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ alapján számithatjuk.

A szimulációs eljárásról

Mint már említettük, a vizsgált rendszer gazdaságos üzemeltetésének megszervezéséhez szükséges karakterisztikák /mint pl. a c_k^-, c_k^+ ; $k=1,2,\dots,m$ valószinüségek/ az esetek tulnyomó többségében nem határozhatók meg analitikus uton. Ezért az un. szimulációs eljáráshoz kell fordulnunk, mely esetünkben lényegében a következőkből áll: - Elektronikus számológépen véletlenszám - generáló program segitségével előállitunk számunkra szükséges eloszlást követő véletlen számokat s ezek segitségével ismét az elektronikus számológépen imitáljuk a rendszerünkkel kapcsolatos $\gamma(t)$ folyamatot. Megfigyelhetjük igen hosszu időtartamra vonatkozó realizációit a $\gamma(t)$ folyamatnak. Minden egyes realizációból nyomon követhetjük a rendszer meghibásodási pillanatait, s emellett minden meghibásodást közvetlen megelőző és követő pillanatban összeszámlálhatjuk azt, hogy hány alkatrész tartalmaz pontosan i darab hibátlan lámpát. Ha ezek speciálisan $n_i^-(l,j)$ ill. $n_i^+(l,j)$ -nek adódnak a j-dik trajektória l-dik meghibásodási pillanatában, akkor

$c_i^-(l)$-t ill. $c_i^+(l)$-t

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} n_i^-(l,j) \qquad \text{ill.} \qquad \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} n_i^+(l,j)$$

(N - a megfigyelt trajektória szám) átlagokkal becsülhetjük. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha más karakterisztikáját akarjuk a rendszernek kiszámitani. Említettük a bevezetésben, hogy célszerü a rendszeren bizonyos előre meghatározott pillanatokban is tesztelést hajtani végre. Az ilyen időpillanatoknak analitikus uton történő megadása igen bonyolult feladatnak látszik. A szimulációs eljárás itt is segitségünkre lehet, bár jellegénél fogva nem elégitheti ki minden igényünket.

Szólni kivánunk végül még néhány megoldatlan problémáról. Amint láttuk, egy alkatrész meghibásodása által létrejövő tesztelés megváltoztathatja más alkatrészek további élettartamát, azaz bizonyos kölcsönhatás áll fenn a rendszer alkotórészei között. Ez többek között azt eredményezi, hogy ha kiválasztunk két alkatrészt, akkor azon események között, hogy az egyik i darab, a másik j darab hibátlan lámpát tartalmaz, függőségi viszony áll fenn. A $\gamma(t)$ vektor csak akkor volna pontosan polinomiális eloszlásunak tekinthető, ha ez a függőség zérus lenne. Kérdés, milyen erős az emlitett függőségi kapcsolat, s milyen mértékben engedi meg a közelitő polinomiális eloszlás használatát. Erre a kérdésre is kaphatunk némi felvilágositást a szimulációs eljárás alapján. A $\gamma(t)$ imitálása által nyert trajektóriákon keresztül az emlitett függőségi kapcsolatot statisztikailag vizsgálhatjuk. Egyenlőre a szerzők csak ezt a módszert ajánlhatják a polinomiális eloszlás használhatóságának eldöntéséhez. Másik probléma a kiinduló c_k és a tesztelések során a cseréket meghatározó α_1 valószinüségek megváltoztatásával kapcsolatos. Mindkét tipusu valószinüségek megadása elég gazdag statisztikai adathalmazt igényel. Ilyenek, nem is szólva ezek kiértékelési eredményeiről, ezideig nem állanak a szerzők rendelkezésére. A c_k valószinüségekkel kapcsolatosan megemlitjük még, hogy ha a mérnöki tapasztalat során egy ujonnan előállitott alkatrész élettartamának eloszlásáról van bizonyos felvilágositásunk, akkor ezeket a valószinüségeket az empirikus eloszlás sürüségfüggvényének /1/ tipusu kifejezéssel történő közelitése során nyerhetjük. Kérdéses ugyan még az, hogy lehetséges-e az emlitett közelités. Ezzel a szerzők egy későbbi dolgozatban szándékoznak majd foglalkozni.

Summary

Author suggests two mathematical models for investigating problems arising at operation of a system consisting of many parts, e.g. of an electronic computer. Author studies the mean-time betwen the faults of the system and also the average number of parts to be changed in the course of individual tests at selecting a density-function of the type

$$f(x) = \sum_{k} c_k \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda x}$$

for the life-span of the parts.

Komplex stacionárius Gauss Markov folyamat "csillapodási" paraméterének becslése és konfidencia intervallumainak megszerkesztese

Arató Mátyás

1. §. A probléma felvetése

A $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ komplex stacionárius Gauss Markov folyamat kielégiti a

$$/1/ \qquad d\zeta(t) \quad -\gamma\zeta(t)\,dt + d\chi(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenletet, ahol

$$\gamma = \lambda - i\omega \quad ; \quad \chi(t) = \varepsilon_1(t) + i\,\varepsilon_2(t)$$

Az $\varepsilon_1(t)$ és $\varepsilon_2(t)$ két független Wiener-folyamat

$$M\, d\varepsilon_1(t) = M\, d\varepsilon_2(t) = 0 \quad ; \quad M(d\varepsilon_1)^2 = M(d\varepsilon_2)^2 = a \cdot dt$$

paraméterekkel. Ezekből a feltevésekből következik, hogy M $\zeta(t) = 0$ és $\zeta(t)$ kovariancia függvénye

$$/2/ \qquad M[\zeta(t)\,\overline{\zeta(t+\tau)}] = \sigma^2 \exp\{-\lambda|\tau| - i\omega\tau\}$$

ahol $\sigma^2 = a/\lambda$. Az a paraméter az ε_1 és ε_2 "fehér zaj" folyamatok intenzitását jellemző paraméter, mig λ a $\zeta(t)$ folyamat "csillapodási" paramétere. A továbbiakban feltesszük, hogy az ω paraméter ismert s csak λ

becslésével foglalkozunk. Az egyszerüség kedvéért legyen $a = 1$, ekkor

$$M\,\xi^2(t) = M\,\eta^2(t) = \frac{1}{2\lambda} \qquad (\text{v.ö } [1])$$

Jelölje L a közönséges Lebesgue mértéket a $\xi(0)$ sikon és W a $\xi(t)-\xi(0)$ növekmények terén a $[0,T]$ intervallumban független komponensü kétdimenziós Wiener-mértéket. Legyen $V = L\times W$ ezen két mérték direkt szorzata. Ha P jelöli a fenti $\xi(t)$ folyamathoz tartozó mértéket a $[0,T]$ intervallumon értelmezett realizációk terén, a P mérték abszolut folytonos lesz V-re nézve s a megfelelő Radon-Nikodym derivált alakjára a következő kifejezést kapjuk.

$$/3/ \qquad \frac{dP}{dV} = \frac{\lambda}{\pi}\exp\left[-\frac{\lambda^2+\omega^2}{2}s_2^2 - \lambda s_1^2 + \lambda T + \omega T r\right]$$

ahol

$$s_1^2 = \frac{1}{2}\left[|\xi(0)|^2 + |\xi(T)|^2\right] \;;\quad s_2^2 = \int_0^T |\xi(t)|^2\,dt \;;\quad r = \frac{1}{T}\int_0^T |\xi(t)|^2\,d\Theta$$

$$/4/ \qquad \xi(t) = |\xi(t)|\cdot e^{i\Theta(t)}$$

A /3/ összefüggésből látható, hogy - ismert ω esetén - $s_1^2 ; s_2^2$ elégséges statisztika rendszer az ismeretlen λ paraméterre. /3/-ból λ maximum likelihood becslésére

$$/5/ \qquad \frac{1}{\lambda} - \lambda s_2^2 - s_1^2 + T = 0$$

adódik, vagy a $\lambda T = K$ jelöléssel

$$/5'/ \qquad K^2 \cdot \frac{s_2^2}{T^2} + K\left(\frac{s_1^2}{T} - 1\right) - 1 = 0$$

Az /5/ egyenlet egyetlen pozitiv megoldása

$$/6/ \qquad \hat{\lambda} = \frac{-(s_1^2 - T) + \sqrt{(s_1^2 - T)^2 + 4 s_2^2}}{2 s_2^2}$$

lesz, s ezt a maximum likelihood becslést használjuk fel a továbbiakban. Könnyü belátni, hogy

$$P_\lambda\{\hat{\lambda} < x\} = P_\lambda\left\{s_2^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}(T - s_1^2) > 0\right\} = P_\lambda\{x^2 s_2^2 + x s_1^2 > Tx + 1\}$$

Bevezetve a $x = \lambda y$ és $\xi = \lambda y s_1^2 + \lambda^2 y^2 s_2^2$ jelölést

$$/7/ \qquad P_\lambda\{\hat{\lambda} < \lambda y\} = P_K\{\xi > Ky + 1\}$$

Szükségünk van tehát a ξ valószinüségi változó eloszlásfüggvényének a meghatározására. Amint [1]-ben megmutattam az s_1^2 ; s_2^2 változók együttes eloszlásának karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{s_1^2, s_2^2}(\alpha_1, \alpha_2) = M\left(e^{i\alpha_1 s_1^2 + i\alpha_2 s_2^2}\right) =$$

$$/8/$$

$$= \frac{4\lambda(\lambda^2 - 2i\alpha_2)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\lambda T - T\sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2}}}{(\lambda - i\alpha_1 + \sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2})^2 - (\lambda - i\alpha_1 - \sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2})^2 \cdot e^{-2T\sqrt{\lambda^2 - 2i\alpha_2}}}$$

alaku, ahonnan látható, hogy λs_1^2 ; $\lambda^2 s_2^2$ karakterisztikus függvénye

$$/8'/ \qquad \frac{4(1-2i\alpha_2)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\kappa-\kappa\sqrt{1-2i\alpha_2}}}{\left(1-i\alpha_1+\sqrt{1-2i\alpha_2}\right)^2-\left(1-i\alpha_1-\sqrt{1-2i\alpha_2}\right)^2\cdot e^{-2T\sqrt{\lambda^2-2i\alpha_2}}}$$

lesz. Ugyanakkor ξ karakterisztikus függvénye

$$/9/ \qquad \varphi_\xi(\alpha)=\frac{4(1-2iy^2\alpha)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\kappa-\kappa\sqrt{1-2iy^2\alpha}}}{\left(1-iy\alpha+\sqrt{1-2iy^2\alpha}\right)^2-\left(1-iy\alpha-\sqrt{1-2iy^2\alpha}\right)^2\cdot e^{-2\kappa\sqrt{1-2iy^2\alpha}}}$$

alaku.

Adott κ (ill. λ) és adott p valószinüségi szint esetén szükségünk van annak az y értéknek a meghatározására, melyre teljesül a

$$P_\lambda\left\{\overset{1}{\lambda}<\lambda y\right\}=p$$

összefüggés. Amennyiben nem sikerül ξ eloszlását explicit alakban megkapnunk, a feladat nagypontosságu közelitő megoldása igen nagy numerikus munkát igényel.

2. §. Közelitések kis és nagy κ értékekre

Lévén mind S_1^2 mind S_2^2 pozitiv valószinüségi változók a $-i\alpha = p$ helyettesitéssel és $\frac{1}{p}$ -vel való szorzással /9/-ből a ξ valószinüségi változó $F_\xi(x)$ eloszlásfüggvényének Laplace transzformáltjára

$$/1/ \quad F^*(p) = \frac{4(1+2y^2p)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\kappa - \kappa\sqrt{1+2y^2p}}}{p\left[(1+yp+\sqrt{1+2y^2p})^2 - (1+yp-\sqrt{1+2y^2p})^2 \cdot e^{-2\kappa\sqrt{1+2y^2p}}\right]}$$

adódik. Mint ismeretes az F és F^* közötti összefüggés

$$/2/ \quad F_\xi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{px} F^*(p)\, dp$$

Az $(1+2y^2p) = s$ helyettesitéssel adódó $G^*(s)$ Laplace-transzformált

$$/3/ \quad G^*(s) = \frac{16y^2 e^{\kappa}\sqrt{s}}{(s-1)\left\{(\sqrt{s}+1)^2(\sqrt{s}+a)^2 \cdot e^{\kappa\sqrt{s}} - (\sqrt{s}-1)^2(\sqrt{s}-a)^2 \cdot e^{-\kappa\sqrt{s}}\right\}}$$

(ahol a=2y-1) G(x) őséképe és $F(x)$ közötti kapcsolat

$$/4/ \quad F(x) = e^{-\frac{x}{2y^2}} \cdot G\left(\frac{x}{2y^2}\right)$$

a./ Az /1.9/ összefüggésből könnyü belátni, hogy

$$\varphi_\xi(\alpha) \to \frac{1}{1-iy\alpha}\,,\quad ha \quad K \to 0$$

azaz ξ egy két szabadságfoku χ^2 -eloszlásu változóhoz tart, ha $K \to 0$. Ugyancsak egyszerü számolással adódik, hogy

$$G^*(s) \to \frac{2y}{(p-1)(p+a)} = G_0^*(s)\,,\quad ha \quad K \to 0$$

és igy

$$G_0(x) = e^x - e^{-(2y-1)x}$$

/2.4/ felhasználásával

$$F_0(x) = e^{-\frac{x}{2y^2}} \cdot G\left(\frac{x}{2y^2}\right) = 1 - e^{-\frac{x}{y}}$$

/1.7/ alapján x kis értékeire

$$/5/ \quad P_\lambda\{\hat{\lambda} < \lambda y\} = P_\kappa\{\xi > \kappa y + 1\} \sim 1 - F_0(\kappa y + 1) = e^{-\kappa + \frac{1}{y}}$$

A /2.5/ összefüggés alapján x=o esetén különböző p valószinüségek mellett y-ra az alábbi értékek adódnak.

$p=P\{\hat{\lambda}>\lambda y\}$	0,001	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,999
y	1000	99,90	39,60	19,52	9,510	0,4352	0,3351	0,2620	0,2165	0,1460

b./ Az /1.9/ összefüggésből a $\frac{\xi}{\sqrt{\kappa}}$ valószinüségi változó karakterisztikus függvényére $\kappa\to\infty$ esetén a következő közelités adódik:

$$\varphi_\xi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}\right)=\frac{4\left(1-2iy^2\frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\kappa-\kappa\sqrt{1-2iy^2\frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}}}}{\left(1-\frac{iy\alpha}{\sqrt{\kappa}}+\sqrt{1-2iy^2\frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}}\right)^2-\left(1-\frac{iy\alpha}{\sqrt{\kappa}}-\sqrt{1-2iy^2\frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}}\right)^2\cdot e^{-2\kappa\sqrt{1-2iy^2\frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}}}}\sim$$

/6/

$$\sim\frac{4\left(1-2iy^2\frac{\alpha}{\sqrt{\kappa}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\kappa-\kappa\left(1-\frac{iy^2\alpha}{\sqrt{\kappa}}+\frac{y^4\alpha^2}{2\kappa}+o\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)}}{\left(2+o\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2-\left(o\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)^2\cdot e^{-2\kappa}}\sim e^{iy^2\alpha\sqrt{\kappa}-\frac{y^4\alpha^2}{2}}\cdot\left(1+o\left(\frac{1}{\kappa}\right)\right)$$

tehát ξ közelitőleg normális eloszlásu $y^2\kappa$ várható értékkel és $y^2\sqrt{\kappa}$ szórással. A /2.6/ összefüggés alapján tehát $\hat{\kappa}$ közelitőleg normális eloszlásu κ várható értékkel és $\sqrt{\kappa}$ szórással, ilymódon a

$$/7/\quad P\{\hat{\kappa}<y\kappa\}=P\{\hat{\kappa}<\kappa+z\sqrt{\kappa}\}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

asszimptotikus összefüggés alapján - adott p szint esetén - y a normális eloszlás z_p kvantilisével a következő kapcsolatban áll:

/8/ $$y_p = 1 + \frac{z_p}{\sqrt{k}}$$

Az alábbi táblázat a normális eloszlással való közelités esetén y értékeit adja meg különböző k értékekre:

k \ p	0,999	0,99	0,975	0,95	0,90
10	1,972	1,734	1,620	1,516	1,403
100	1,3090	1,2326	1,1960	1,1645	1,1281
1000	1,0934	1,0702	1,0592	1,0496	1,0390

Ezen értékekkel történő közelités pontosságáról a cikk végén szereplő táblázatban lévő valódi értékkel való összehasonlitás alapján dönthetünk.

Az /1.6/ becslés alapján belátható, hogy k kis értékeire $\frac{1}{\lambda}$ torzitatlan és "jó" becslése

$$s_1^2 \left(\sim \frac{1}{\lambda}\right)$$

lesz, mig k nagy értékeire

$$\frac{s_2^2}{T} \left(\sim \frac{1}{\lambda}\right)$$

lesz $\frac{1}{\lambda}$ torzitatlan "jó" becslése /Megjegyzendő, hogy sem S_1^2 sem S_2^2 nem "megengedhető" becslés/. Mivel az S_1^2 statisztika kiszámolása igen egyszerü, nagy gyakorlati jelentőséggel bir annak meghatározása, hogy milyen tartományban használhatjuk megbizhatóan a λ paraméter becslésére. Hasonló a helyzet az S_2^2 statisztikával történő becslések esetében is. Ezzel a problémával egy külön dolgozatban kivánok foglalkozni.

Összehasonlitásul közlöm az S_1^2 statisztikával történő közelités és a maximum likelihood becslés által szolgáltatott y értékek táblázatát $\kappa = 1/10$ és $\kappa = 1/2$ esetén /zárójelben a maximum likelihood becsléses eredmények szerepelnek/.

K \ P	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001	0,90
1/2	/4,08/	/5,59/	/7,24/	/9,58/	/16,36/	
	4,8	7,0	11,0	16,8	25,0	0,48
1/10	/6,79/	/10,92/	/16,20/	/25,00/	/53,33/	
	6,86	11,3	17,4	28,0	60,0	0,446

0,95	0,975	0,99	0,999
0,38	0,33	0,25	0,17
0,346	0,281	0,225	0,151

Innen látható, hogy $\kappa \sim 1/10$-től az s_1^2 becslés jól használható.

3. §. Közelités egzakt formulákkal.

Az /1.3/ összefüggésből adódó

$$G(p)=\frac{16y^2 e^{\kappa}\sqrt{p}\, e^{-\kappa\sqrt{p}}}{(p-1)(\sqrt{p}+1)^2(\sqrt{p}+a)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{p}-1)^{2k}\cdot(\sqrt{p}-a)^{2k}}{(\sqrt{p}+1)^{2k}(\sqrt{p}+a)^{2k}}\, e^{-2k\kappa\sqrt{p}}$$

végtelen sorfejtéssel előálló Laplace transzformált megforditásának gondolatát vizsgáljuk meg az alábbiakban. Amennyiben megelégszünk κ nem tulságosan kis értékeire történő közelitéssel, kiindulásként vizsgáljuk meg a fenti összeg első tagjának inverz Laplace-transzformáltját:

$$g(p)=\frac{16y^2e^{\kappa}\sqrt{p}\,e^{-\kappa\sqrt{p}}}{(p-1)(\sqrt{p}+1)^2\cdot(\sqrt{p}+a)^2}$$

Egyszerü, de hosszadalmas számolásokkal adódik, hogy

$$g(p)=\frac{16y^2e^{\kappa}\sqrt{p}\cdot e^{-\kappa\sqrt{p}}}{(a-1)^2(p-1)}\cdot\left[\frac{1}{(\sqrt{p}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{p}+a)^2}-\frac{2}{(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}+a)}\right]=$$

$$=\frac{16y^2e^{\kappa}}{(a-1)^2}\sqrt{p}\cdot e^{-\kappa\sqrt{p}}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(\sqrt{p}+1)^2}-\frac{2}{(\sqrt{p}+1)^3}\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{(a^2-1)^2}\cdot\left[\frac{a^2+1}{p-1}-\frac{2a\sqrt{p}}{p-1}+\frac{2a}{\sqrt{p}+a}+\frac{a^2-1}{(\sqrt{p}+a)^2}\right]+$$

$$\left.-\frac{1}{a-1}\left[\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(\sqrt{p}+1)^2}\right]+\frac{2}{(a-1)(a^2-1)}\left[\frac{a}{p-1}-\frac{\sqrt{p}}{p-1}+\frac{1}{\sqrt{p}+a}\right]\right\}=$$

$$=\frac{16y^2e^{\kappa}}{(a-1)^2}\cdot\sqrt{p}\cdot e^{-\kappa\sqrt{p}}\left\{\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{4}+\frac{a^2+1}{(a^2-1)^2}-\frac{1}{a-1}+\frac{2a}{(a-1)(a^2-1)}\right]-\frac{\sqrt{p}}{p-1}\left[\frac{2a}{(a^2-1)^2}+\frac{2}{(a-1)(a^2-1)}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{p}+a}\left[\frac{2}{(a-1)(a^2-1)}+\frac{2a}{(a^2-1)^2}\right]+\frac{1}{(\sqrt{p}+a)^2}\cdot\frac{1}{(a^2-1)}+\frac{1}{(\sqrt{p}+1)^2}\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{a-1}\right]-\frac{1}{2}\frac{1}{(\sqrt{p}+1)^3}\right\}$$

feltéve, hogy $y \neq 1$, mert ekkor $a = 1$ és a parciális törtekre bontás másképen történik /erre a kérdésre még visszatérünk/. Most felhasználva [3] táblázatait az egyes tagok inverzei megkaphatók, mégpedig /zárójelben az idézett könyv formuláinak számozását használom/

/23.103/ alapján:

$$\frac{\sqrt{p}\cdot e^{-\kappa\sqrt{p}}}{p-1} \leftrightarrow \frac{e^{t}}{2}\left\{e^{-\kappa}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)\right]-e^{\kappa}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]\right\}+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}$$

/23.98/ alapján:

$$\frac{p\,e^{-\kappa\sqrt{p}}}{p-1} \leftrightarrow \frac{e^{t}}{2}\left\{e^{-\kappa}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)\right]+e^{\kappa}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]\right\}+\frac{\kappa}{2+\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}$$

/23.113/ alapján:

$$\frac{\sqrt{p}\,e^{-\kappa\sqrt{p}}}{\sqrt{p}+a} \leftrightarrow \frac{1}{a}\left(\frac{\kappa}{2t}-a\right)a\,\frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}+e^{\kappa a+a^2t}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]$$

/23.118/ alapján:

$$\frac{\sqrt{p}\cdot e^{-\kappa\sqrt{p}}}{(\sqrt{p}+a)^2}=\frac{e^{-\kappa\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})^2}\cdot p \leftrightarrow \left\{\frac{2t}{\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}-(2at+\kappa)e^{\kappa a+a^2t}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]\right\}'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}\left[1+2a^2t\right]-a\left(2+\kappa a+2a^2t\right)e^{\kappa a+\kappa a^2t}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]$$

$$\frac{\sqrt{p}\,e^{-\kappa\sqrt{p}}}{(\sqrt{p}+1)^2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}\left[1+2t\right]-(2+\kappa+2t)e^{\kappa+t}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right]\right.$$

ahol

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du$$

A $\Phi(x)$ és $\tilde{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ közötti összefüggés:

$$\Phi(x)=2\left[\tilde{\Phi}(\sqrt{2}\cdot x)-\frac{1}{2}\right]$$

Meghatározható még $\frac{\sqrt{p}\, e^{-\kappa\sqrt{p}}}{(\sqrt{p}+1)^3}$ inverze. Ehhez fel kell használni a következő összefüggések egyikét /20.27/ ill. /20.26/

$$f(\sqrt{p}) \longleftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} \int_0^\infty \tau\cdot e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\cdot\varphi(\tau)\, d\tau \;, \quad \text{ha } f(p) \longleftrightarrow \varphi(t)$$

$$\frac{f(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\cdot \varphi(\tau)\, d\tau \;, \quad \text{ha } f(p) \longleftrightarrow \varphi(t)$$

ahol /23.36/ alapján:

$$\frac{\sqrt{p}\cdot e^{-\kappa\sqrt{p}}}{(\sqrt{p}+1)^3} = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{p\cdot e^{-\kappa\sqrt{p}}}{(\sqrt{p}+1)^3} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\cdot\varphi(\tau)\, d\tau$$

$$\frac{p^2 e^{-\kappa p}}{(p+1)^3} \longleftrightarrow \varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \tau < \kappa \\ \frac{1}{2}\left[(\tau-\kappa)^2\cdot e^{-(\tau-\kappa)}\right]'' = \frac{e^{-(\tau-\kappa)}}{2}\left[(\tau-\kappa)^2 - 4(\tau-\kappa)+2\right] \end{cases}$$

Másrészt

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(\tau+\kappa)^2}{4t}-\tau}\cdot\left[\tau^2-4\tau+2\right] d\tau = \frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}-\tau\left(1+\frac{\kappa}{2t}\right)}\cdot\left[\tau^2-4\tau+2\right] d\tau$$

és az ismert összefüggések alapján

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}-\tau\left(1+\frac{\kappa}{2t}\right)}\cdot d\tau = \sqrt{\pi\tau}\; e^{t+\kappa+\frac{\kappa^2}{4t}}\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]$$

$$\int_0^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}-\tau\left(1+\frac{\kappa}{2t}\right)}\cdot d\tau = 2t - (2t+\kappa)\sqrt{\pi t}\cdot e^{t+\kappa+\frac{\kappa^2}{4t}}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]$$

$$\int_0^\infty \tau^2 e^{-\frac{\tau^2}{4t}-\tau\left(1+\frac{\kappa}{2t}\right)}\, d\tau = -(4t^2+2\kappa t) + \sqrt{\pi t}\left[4t^2+t(4\kappa+2)+\kappa^2\right] e^{t+\kappa+\frac{\kappa^2}{4}}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{p}\, e^{-\kappa\sqrt{p}}}{(\sqrt{p}+1)^3} \longleftrightarrow e^{\kappa+t}\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]\left[2t^2+t(2\kappa+5)+(\kappa+1)^2-\frac{\kappa^2}{2}\right]+\frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}\left[-\kappa t-2t^2-4t\right]$$

A fenti összefüggések alapján

$$g(p)\leftrightarrow G(t)=\frac{16y^2e^{\kappa}}{(a-1)^2}\left\{\left[\frac{e^{t-\kappa}}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)\right]-\frac{e^{t+\kappa}}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]\right]\left(\frac{1}{4}+\frac{a^2+1}{(a^2-1)^2}-\frac{1}{a-1}+\frac{2a}{(a-1)(a^2-1)}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}\left(\frac{1}{4}+\frac{a^2+1}{(a^2-1)^2}-\frac{1}{a-1}+\frac{2a}{(a-1)(a^2-1)}\right)+$$

$$-\left\{\frac{e^{t-\kappa}}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)\right]+\frac{e^{t+\kappa}}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]\right\}\left(\frac{2a}{(a^2-1)^2}+\frac{2}{(a-1)(a^2-1)}\right)+$$

$$-\frac{\kappa}{2\sqrt{\pi t}\,t}\cdot e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}\left(\frac{2a}{(a^2-1)^2}+\frac{2}{(a-1)(a^2-1)}\right)+$$

$$+e^{\kappa a+a^2t}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]\left(\frac{2a}{(a^2-1)^2}-\frac{2}{(a-1)(a^2-1)}\right)+$$

$$+\left(\frac{\kappa}{2t}-a\right)\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}\left(\frac{2a}{a^2-1}+\frac{2}{(a-1)(a^2-1)}\right)+$$

$$-\frac{a}{a^2-1}(2+\kappa a+2a^2t)e^{\kappa a+a^2t}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{a^2-1}\left[1+2a^2t\right]\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{\kappa}{4t}}+$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{a-1}\right)(2+\kappa+2t)\cdot e^{\kappa+t}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]+$$

$$+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{a-1}\right)(1+2t)\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}+$$

$$-\frac{1}{2}e^{t+\kappa}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]\left[2t^2+t(2\kappa+5)+(\kappa+1)^2-\frac{\kappa^2}{2}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}\left[2t^2+4t+\kappa t\right]\right\}$$

Tovább egyszerüsitve

$$G(t)=\frac{16y^2e^{\kappa}}{(a-1)^2}\left\{\frac{e^{t-\kappa}}{2}\left[1-\varphi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)\right]\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{a-1}+\frac{2}{a^2-1}\right)+\right.$$

$$+\frac{e^{t+\kappa}}{2}\left[1-\varphi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{(a-1)^2}+\frac{1}{a-1}-\frac{2}{(a-1)^2}+\frac{1}{2}+\frac{\kappa}{4}+\frac{t}{2}+\right.$$

$$\left.-\frac{2}{a-1}-\frac{\kappa}{a-1}-\frac{2t}{a-1}-\frac{1}{2}-\kappa-\frac{\kappa^2}{4}-\kappa t-\frac{5t}{2}-t^2\right)+$$

$$+e^{\kappa a+a^2t}\left[1-\varphi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]\left(\frac{2a}{(a^2-1)^2}+\frac{2}{(a-1)(a^2-1)}+\right.$$

$$\left.-\frac{2a}{(a^2-1)}-\frac{\kappa a^2}{a^2-1}-\frac{2a^3t}{a^2-1}\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{\kappa^2}{4t}}\cdot t\left[t+\frac{3}{2}+\frac{\kappa}{2}+\frac{2}{a-1}+\frac{2a^2}{a^2-1}\right]\right\}$$

és innen

$$G(t)=\frac{16y^2}{(a-1)^2}\left\{\frac{e^{t}}{2}\left[1-\varphi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)\right]\frac{(a-1)^2}{4(a+1)^2}+\right.$$

$$+\frac{e^{t+2\kappa}}{2}\left[1-\varphi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)\right]\left[\frac{1}{4}+\frac{\kappa+1}{a-1}+\frac{3\kappa}{4}+\frac{\kappa^2}{4}+\frac{3}{(a-1)^2}+t\left(2+\kappa+\frac{2}{a-1}\right)+t^2\right]+$$

$$+e^{\kappa+a\kappa+a^2t}\cdot\left[1-\varphi\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}\right)\right]\left[\frac{2a}{(a^2-1)^2}+\frac{2}{(a-1)^2\cdot(a+1)}-\frac{2a+\kappa a^2+2a^3t}{(a-1)(a-1)}\right]+$$

$$\left.+\frac{e^{-\frac{\kappa^2}{4t}+\kappa}}{\sqrt{\pi t}}\cdot t\cdot\left[t+\frac{3}{2}+\frac{\kappa}{2}+\frac{2}{a-1}+\frac{2a^2}{a^2-1}\right]\right\}$$

A már ismertetett $F(t)=e^{-\frac{t}{2y^2}}\cdot G\left(\frac{t}{2y^2}\right)$ összefüggés alapján ($a=2y-1$ behelyettesitésével):

$$F(t)=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa y}{\sqrt{2t}}-\frac{1}{y}\sqrt{\frac{t}{2}}\right)\right]-\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa y}{\sqrt{2t}}-\frac{1}{y}\sqrt{\frac{t}{2}}\right)\right]+$$

$$-\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa y}{\sqrt{2t}}+\frac{1}{y}\sqrt{\frac{t}{2}}\right)\right]e^{2\kappa}\frac{y^2}{(y-1)^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\kappa+1}{y-1}+\frac{3\kappa}{2}+\frac{\kappa^2}{2}+\frac{3}{2(y-1)^2}+\frac{t}{y^2}\left(2+\kappa+\frac{1}{y-1}\right)+\frac{t^2}{2y^4}\right]+$$

$$+\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa y}{\sqrt{2t}}+\frac{2y-1}{y}\sqrt{\frac{t}{2}}\right)\right]\cdot e^{-\frac{t}{2y^2}+2y\kappa+\frac{(2y-1)^2}{2y^2}t}\cdot\frac{y^2}{(y-1)^2}\left[\frac{2y-1}{2y^2(y-1)^2}+\frac{1}{y(y-1)^2}+\right.$$

$$\left.-\frac{2(2y-1)+\kappa(2y-1)^2}{y(y-1)}-\frac{(2y-1)^3\,t}{y^3(y-1)}\right]+$$

$$+e^{-\frac{\kappa^2y^2}{2t}+\kappa-\frac{t}{2y^2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{t}}{y(y-1)^2}\left[\frac{t}{y^2}+3+\kappa+\frac{2}{y-1}+\frac{(2y-1)^2}{y(y-1)}\right]$$

és

$$(*)\quad P_\kappa\{\hat{\kappa}>\kappa y\}=F(\kappa y+1)=\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa y}{\sqrt{2(\kappa y+1)}}-\frac{\sqrt{\kappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]+$$

$$-\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa y}{\sqrt{2(\kappa y+1)}}+\frac{\sqrt{\kappa y+1}}{y\sqrt{2}}\right)\right]\cdot e^{2\kappa}\cdot\frac{y^2}{(y-1)^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{\kappa+1}{y-1}+\frac{3\kappa}{2}+\frac{\kappa^2}{2}-\frac{3}{2(y-1)^2}+\frac{\kappa y+1}{y^2}\left(2+\kappa+\frac{1}{y-1}\right)+\frac{(\kappa y+1)^2}{2y^4}\right]$$

$$+\left[1-\Phi\left(\frac{\kappa y}{\sqrt{2(\kappa y+1)}}+\frac{2y-1}{y}\sqrt{\frac{\kappa y+1}{2}}\right)\right]\cdot e^{-\frac{\kappa y+1}{2y^2}+2\kappa y+\frac{(2y-1)^2}{2y^2}(\kappa y+1)}\cdot\frac{y^2}{(y-1)^2}\left[\frac{2y-1}{2y^2(y-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{y(y-1)^2}-\frac{2(2y-1)+\kappa(2y-1)^2}{y(y-1)}-\frac{(\kappa y+1)(2y-1)^3}{y^3(y-1)}\right]+$$

$$+e^{-\frac{\kappa^2y^2}{2(\kappa y+1)}+\kappa-\frac{\kappa y+1}{2y^2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\kappa y+1}}{y(y-1)^2}\left[y^2(\kappa+7)+y(\kappa+2)+4+\frac{3}{y-1}\right]$$

Ismét megjegyzem, hogy az előállitás $y=1$-re nem érvényes. Másrészt, mivel κ nagy értékeire ($k \sim 10$, $\kappa > 10$) várható jó közelités $1-\Phi(x)$ aszimptotikus előállitását kell számolási célokra használni, annál is inkább, mert szerepel $e^{2\kappa}$ és hasonló hatványok, melyek előállitása $\kappa \sim 100$ esetén nem valósitható meg gépen.

Ezért $x \geq 2$ esetén az

$$1-\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-x^2}\left[\frac{1}{2x}-2\left(\frac{1}{2x}\right)^3+4{,}3\left(\frac{1}{2x}\right)^5-\ldots\ldots\right]$$

aszimptotikus előállitással kell dolgozni. /v.ö. [5] 225.o./ A fenti közelitéssel történő számitások alapján - amint azt az alábbi táblázat is mutatja - nem remélhető sem egyszerü összefüggések keresése, sem a számitások pontosságának növelése. Összehasonlitásul közlöm $\kappa=100$ esetén a valódi, a normális eloszlással való közelitésből nyert, s a fenti összefüggésből nyert y értékek táblázatát. $\left(P_\kappa\{\hat{\kappa}>\kappa y\}\right)$

y \ p	0,1	0,05	0,025	0,01	0,001	0,9	0,95	0,975	0,99	0,999
valódi	1,1413	1,18	1,22	1,27	1,36	0,88	0,85	0,83	0,80	0,73
normál.	1,1281	1,16	1,20	1,23	1,31	0,87	0,84	0,80	0,77	0,69
*közelités	1,58	1,61	1,63	1,65	1,70	0,86	0,84	0,80	0,75	0,69

Külön megjegyzendő, hogy a fenti közelités képletekkel történő használhatatlanságát mutatja az a tény, hogy amenynyiben az inverz Laplace transzformáltat numerikus integrálással nyerjük, hasonló elhanyagolással - mint amellyel g(p) adódik - már $\kappa=10$ esetén jó közelités adódik.

4. §. A pontos számitások /numerikus integrálás/

Az előbbi pontban ismertetett eljárás nem vezetett eredményre a κ kis és nagy értékei közötti közelités kérdésében, igy első tekintetre talán meglepőnek tünő, de számolási szempontból egyáltalán nem leküzdhetetlen akadályt jelentő numerikus integrálás gondolatát is ki kellett próbálni. Ehhez az első pontban felirt /1.2/ képletből kell kiindulni. Ha az

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px} F^*(p)\,dp$$

képletben σ választása szerencsésen történik - mivel $x=\kappa y+1$ és κ nagy és kicsiny értékeket is felvehet - a numerikus integrálás nagy pontossággal elvégezhető. Ott ahol a számolások nehezen vihetők véghez /tulságosan nagy gépidő szükséges egyetlen integrál meghatározásához/ a közelitő formulák jól használhatók. A

$$\sigma = \begin{cases} \kappa & ha \quad \kappa \le 1 \\ \frac{1}{\kappa} & ha \quad \kappa > 1 \end{cases}$$

választással az $F_\xi(\kappa y+1)$ eloszlásfüggvény a következő integrállal fejezhető ki:

(1)
$$F(\kappa y+1)=\frac{2}{\pi}e^{\sigma(\kappa y+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(\kappa y+1)s+\kappa\cdot\frac{\left(1-\sqrt{1+2y^2\sigma+i2y^2s}\right)}{\sqrt{1+2y^2\sigma+i2y^2s}}}}{(\sigma+is)\left\{\left[1+y\sigma+iys+\sqrt{1+2y^2\sigma+i2y^2s}\right]^2-\left[1+y\sigma+iys-\sqrt{1+2y^2\sigma+i2y^2s}\right]^2e^{-2\kappa\sqrt{1+2y^2\sigma+i2y^2s}}\right\}}\,ds$$

Mivel a jobboldalon szereplő integrál valós részére van csak szükségünk, az

$$r=\sqrt{(1+2y^2\sigma)^2+(2y^2s)^2} \qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{2y^2s}{1+2y^2\sigma}$$

jelöléssel

(2)
$$F(\kappa y+1)=\frac{2}{\pi}e^{\sigma(\kappa y+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\kappa[1-\sqrt{r}\cos\varphi/2]}\cdot\sqrt{r}(\sigma-is)\{\cos[(\kappa y+1)s+\varphi/2]+i\sin[(\kappa y+1)s+\varphi/2]\}}{(\sigma^2+s^2)\{[A_1+iA_2]^2\cdot[\cos(\kappa\sqrt{r}\sin\varphi/2)+i\sin(\kappa\sqrt{r}\sin\varphi/2)]-[B_1+iB_2]^2\cdot e^{-2\kappa\sqrt{r}\cos\varphi/2}\cdot[\cos(\kappa\sqrt{r}\sin\varphi/2)-i\sin(\kappa\sqrt{r}\sin\varphi/2)]\}}\,ds$$

ahol

(3)
$$A_1=A_1(s)=\left(1+y\sigma+r^{1/2}\cos\varphi/2\right)$$
$$A_2=A_2(s)=\left(ys+r^{1/2}\sin\varphi/2\right)$$
$$B_1=B_1(s)=\left(1+y\sigma-r^{1/2}\cos\varphi/2\right)$$
$$B_2=B_2(s)=\left(ys-r^{1/2}\sin\varphi/2\right)$$

Legyen most

(4)
$$\alpha_1 = \cos(\kappa\sqrt{r}\sin\varphi/2)\left[(A_1^2 - A_2^2) - (B_1^2 - B_2^2)e^{-2\kappa\sqrt{r}\cos\varphi/2}\right] - 2\sin(\kappa\sqrt{r}\sin\varphi/2)\left[A_1A_2 + B_1B_2e^{-2\kappa\sqrt{r}\cos\varphi/2}\right]$$

$$\alpha_2 = \sin(\kappa\sqrt{r}\sin\varphi/2)\left[(A_1^2 - A_2^2) + (B_1^2 - B_2^2)e^{-2\kappa\sqrt{r}\cos\varphi/2}\right] + 2\sin(\kappa\sqrt{r}\sin\varphi/2)\left[A_1A_2 + B_1B_2e^{-2\kappa\sqrt{r}\cos\varphi/2}\right]$$

$$\gamma = (\kappa y + 1)s + \varphi/2$$

Akkor

(5)
$$F(\kappa y+1) = \frac{2}{\pi} e^{\sigma(\kappa y+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\kappa(1-\sqrt{r}\cos\varphi/2)} \cdot \sqrt{r}\,\{\sigma\cos r + s\sin r + i(\sigma\sin r - s\cos r)\}}{(\sigma^2+s^2)\,\{\alpha_1 + i\alpha_2\}}\,ds$$

ahonnan csak a valós rész figyelembevételével

$$F(\kappa y+1) = \frac{2e^{\sigma(\kappa y+1)}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{r}\,e^{\kappa(1-\sqrt{r}\cos\varphi/2)}\,\{\alpha_1[\sigma\cos\gamma + s\sin\gamma] + \alpha_2[\sigma\sin\gamma - s\cos y]\}}{(\sigma^2+s^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}\,ds$$

Az integrálási határok megválasztása - hogy a pontosság legalább 10^{-4} nagyságrendü legyen - előbb $\left[-\frac{20}{\kappa y}\,;\,\frac{20}{\kappa y}\right]$ majd később $\left[-\frac{30}{\kappa y}\,;\,\frac{30}{\kappa y}\right]$ alakban történt /a programban figyelembevettük $\left[-\frac{60}{\kappa y}\,;\,-\frac{30}{\kappa y}\right]$ és $\left[\frac{30}{\kappa y}\,;\,\frac{60}{\kappa y}\right]$ tartománybeli integrál kiszámitását is, ez azonban mindig kisebb értéket adott a megkivánt pontosságnál/. Egy ilyen integrál kiszámitása az URAL-2 gépen - a Simpson formula alapján - 5-15 percet vesz igénybe. Figyelembevéve, hogy nekünk azt az y értéket kell megkeresnünk, melyre $F(\kappa y+1)=p$ /adott/ y-ban még egy iterációt is végre kellett hajtani. Abból a célból, hogy minél kevesebb integrál kiszámitását végezzük el, az iterációt mindig a már más κ-ra kiszámitott értékek figyelembevételével és közelitő y értékekből nyert interpoláció segitségével kézi uton végeztem el. Ez lehetővé tette a szemléletes uton történő ellenőrzését is a kapott számolási eredményeknek. A fenti eredmények egy részét - mivel az kapcsolatos Kolmogorov és Szinajjal /lásd [6] / régebben publikált eredményeinkkel - a [2] cikkemben is közöltem.

5. §. A konfidencia intervallumok grafikus szerkesztése és táblázatok

Az alábbiakban megadjuk a $P_\kappa\{\hat{\kappa} > \kappa_y\} = p$ összefüggésekből (p=0,1; 0,05; 0,025; 0,01; 0,001; 0,9; 0,95; 0,975; 0,99; 0,999), az y értékek, valamint a κ_y értékek görbéit. A κ_y görbék segitségével szerkeszthetőek κ-ra konfidencia intervallumok, a $\hat{\kappa}$-magasságu vizszintes metszéspontjai adják a $\hat{\kappa}$ becslés különböző szintü konfidencia intervallumait.

Irodalom:

[1] Arató M.: Folytonos állapotu Markov-folyamatok statisztikai vizsgálatáról, III. MTA. III. Oszt. Közleményei 14 /1964/ No3. 317-330.

[2] Arató M.: Vücsiszlenije doveritelnü hgranic dlja parametra "zatuhanija" komplexnogo sztacionarnogo gausszovszkogo markovszkogo processza. /Sajtó alatt a Teorija Verojatnosztej c. folyóiratban./

[3] Ditkin V.A.-Prudnikov A.P.: Szpravocsnyik po operacionnomu iscsiszleniju, Moszkva, 1965. Vüszsaja Skola.

[4] Gradstein I.Sz.-Rüzsik J.M.: Tablicu integralov, szumm, rjadov iproizvegyenij: Moszkva, 1962. Fizmatgiz.

[5] Fuksz B.A.-Levin B.R.: Operacionnoje iszcsiszlenie. Moszkva, 1962.

[6] Arató M.-Kolmogorov A.N.-Szinaj Ja.G.: Ob ocenke parametrov komplexnogo sztacionarnogo gaussovszkogo processa. D.A.N. 146/1962/ 747-750.

Summary

Estimation and confidence limits for the "/dropping"/ parameter λ of the complex stationary Gaussian Markovian process.

The complex stationary Gaussion Markov process is related by the covariance function $M\xi(t+s)\overline{\xi(t)} = \sigma^2 \exp\{-\lambda|s| - i\omega s\}$
We assume that ω is known, but λ unknown $(M\xi(t)=0)$
We get exact formulas for the approaching distribution of the maximum likelihood estimation of $\lambda \gg 1$. There are computed the confidence limits for λ in the interval $0.1 \leq \lambda \leq 100$. We give tables and figures of the evaluations at the levels $\alpha = 0.1$, 0.05, 0.025, 0.01, 0.001, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.999. The method what we used is the numerical integration of the characteristic fun ction.

Táblázat $\varkappa$,y (illetve y) értékeire a $P\{\hat{\varkappa} > \varkappa, y\} = p$ összefüggés alapján

$\varkappa \backslash p$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
0	0	0	0	0	0
	(9.510)	(19.52)	(39.60)	(99.90)	(1000)
0.05	-	-	-	1.660	3.800
				(33.20)	(76.00)
0.1	0.679	1.092	1.620	2.500	5.333
	(6.790)	(10.92)	-16.20)	(25.00)	(53.33)
0.2	1.123	1.666	2.350	3.368	6.336
	(5.615)	(8.330)	(11.752)	(16.84)	(31.68)
0.3	1.474	2.119	2.860	3.975	7.004
	(4.913)	(7.064)	(9.352)	(13.25)	(23.68)
0.4	1.773	2.478	3.270	4.418	7.697
	(4.432)	(6.195)	(8.175)	(11.045)	(19.242)
0.5	2.039	2.793	3.622	4.790	8.178
	(4.077)	(5.586)	(7.243)	(9.580)	(16.355)
0.6	2.279	3.071	3.938	5.166	8.573
	(3.799)	(5.118)	(6.563)	(8.610)	(14.289)
0.7	2.503	3.333	4.225	5.481	8.931
	(3.575)	(4.762)	(6.036)	(7.830)	(12.758)

0.8	2.723	3.580	4.496	5.781	9.250
	(3.404)	(4.475)	5.620)	(7.226)	(11.562)
0.9	2.927	3.812	4.748	6.057	9.594
	(3.252)	(4.235)	(5.276)	(6.730)	(10.660)
1.	3.124	4.032	4.980	6.317	9.892
	(3.124)	(4.032)	(4.980)	(6.317)	(9.892)
1.5	4.020	5.028	6.068	7.484	11.208
	(2.680)	(3.352)	(4.045)	(4.989)	(7.472)
2.	4.832	5.916	7.020	8.492	12.348
	(2.416)	(2.958)	(3.510)	(4.246)	(6.174)
2.5	5.592	6.748	7.903	9.448	13.40
	(2.237)	(2.699)	(3.161)	(3.779)	(5.360)
3.	6.321	7.530	8.733	10.329	14.256
	(2.107)	(2.510)	(2.911)	(3.443)	(4.752)
3.5	7.025	8.292	9.524	11.172	15.309
	(2.007)	(2.369)	(2.721)	(3.192)	(4.374)
4.	7.732	9.020	10.316	11.988	16.204
	(1.933)	(2.255)	(2.579)	(2.997)	(4.051)
4.5	8.384	9.738	11.052	12.789	17.082
	(1.863)	(2.164)	(2.456)	(2.842)	(3.796)
5.	9.045	10.450	11.750	13.55	17.915
	(1.809)	(2.090)	(2.354)	(2.710)	(3.583)
5.5	9.697	11.132	12.507	14.322	18.76
	(1.763)	(2.024)	(2.274)	(2.604)	(3.411)

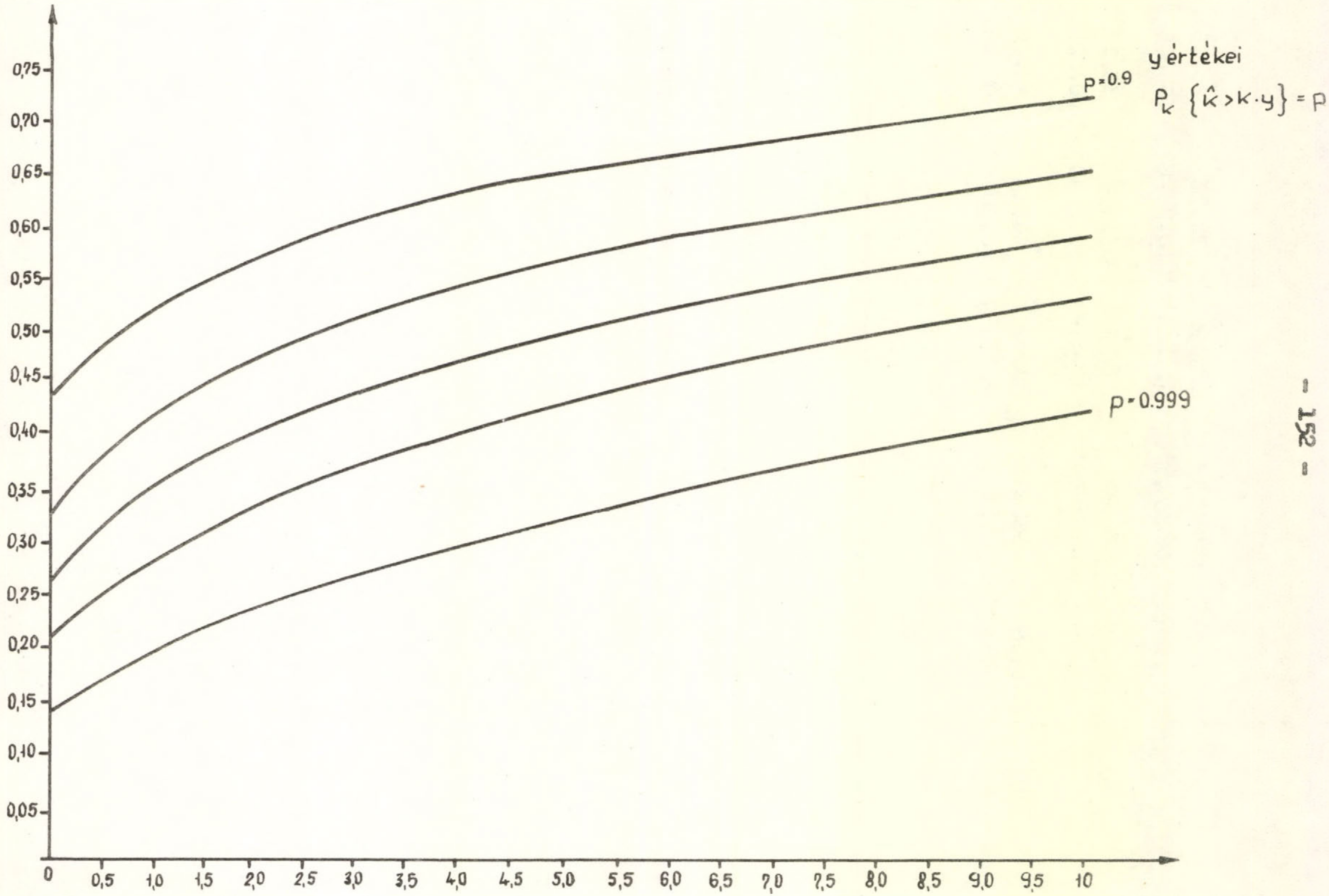
6.	10.338	11.820	13.236	15.072	19.572
	(1.723)	(1.970)	(2.206)	(2.512)	(3.262)
6.5	10.985	12.487	13.942	15.815	20.332
	(1.690)	(1.921)	(2.145)	(2.433)	(3.128)
7.	11.641	13.153	14.631	16.527	21.105
	(1.663)	(1.879)	(2.091)	(2.361)	(3.015)
7.5	12.233	13.815	15.322	17.250	21.930
	(1.631)	(1.842)	(2.043)	(2.300)	(2.924)
8.	12.856	14.464	16.000	17.960	22.672
	(1.607)	(1.808)	(2.000)	(2.245)	(2.834)
8.5	13.472	15.113	16.677	18.558	23.468
	(1.585)	(1.778)	(1.962)	(2.195)	(2.761)
9.	14.085	15.750	17.343	19.368	24.219
	(1.565)	(1.750)	(1.927)	(2.152)	(2.691)
9.5	14.706	16.398	18.003	20.036	24.966
	(1.548)	(1.726)	(1.895)	(2.109)	(2.628)
10.	15.30	17.01	18.67	20.63	25.75
	(1.530)	(1.701)	(1.867)	(2.073)	(2.575)
20.	26.98	29.21	31.25	33.74	39.62
	(1.3492)	(1.4606)	(1.5627)	(1.6869)	(1.9810)
30.	38.32	40.88	43.62	46.11	52.71
	(1.2774)	(1.3625)	(1.4407)	(1.5365)	(1.7570)
40.	49.41	52.28	54.88	58.06	65.16
	(1.2353)	(1.3070)	(1.3720)	(1.4516)	(1.6290)

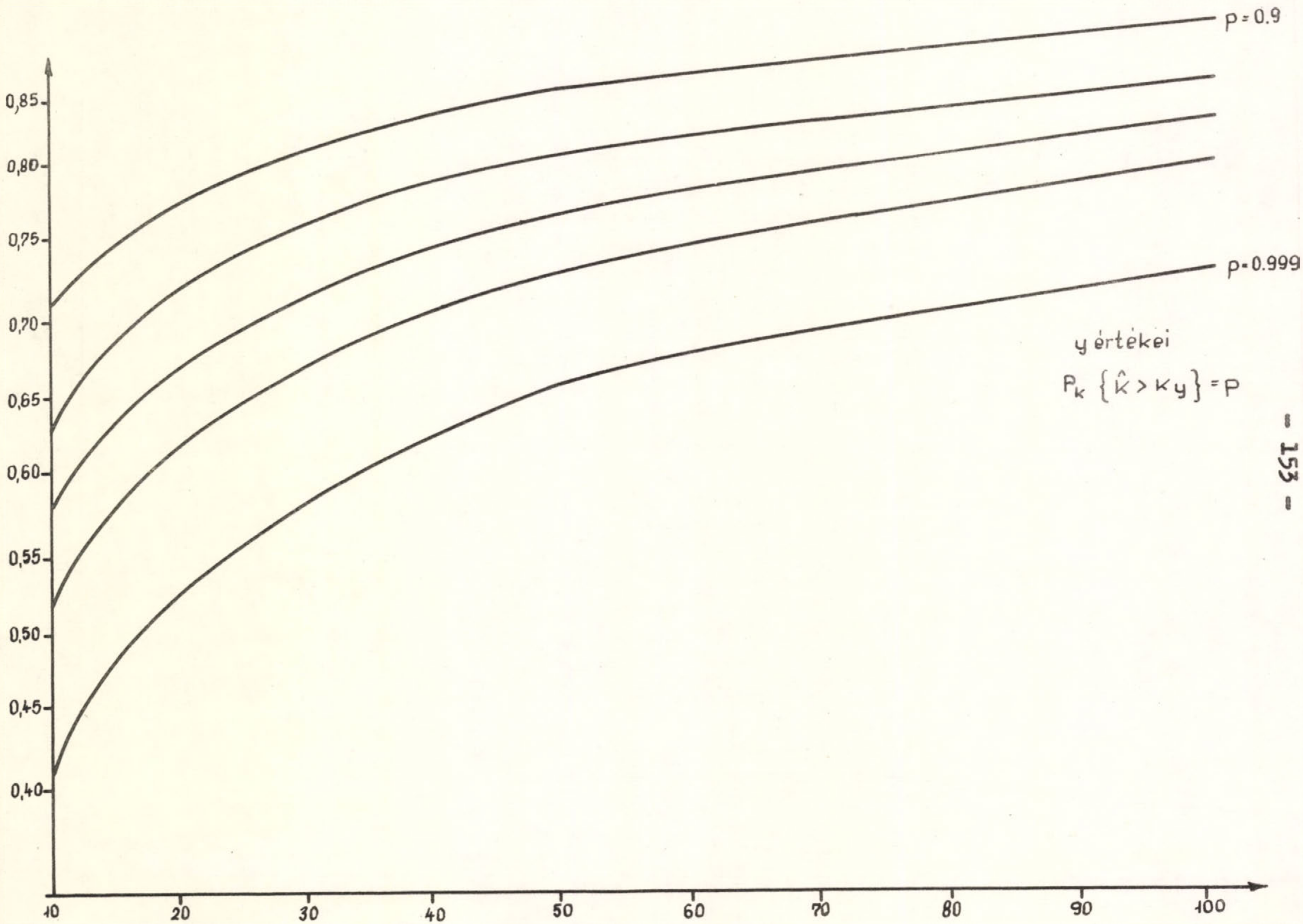
50.	60.38	63.50	66.26	69.74	77.46
	(1.2075)	(1.2700)	(1.3252)	(1.3947)	(1.5491)
60.	71.24	74.61	77.66	81.32	89.58
	(1.1873)	(1.2435)	(1.2943)	(1.3553)	(1.4930)
70.	82.03	85.62	88.87	92.78	101.24
	(1.1719)	(1.2232)	(1.2696)	(1.3254)	(1.4463)
80.	92.78	96.57	100.00	104.12	112.90
	(1.1598)	(1.2071)	(1.2499)	(1.3015)	(1.4137)
90.	103.46	107.48	111.06	116.36	124.84
	(1.1495)	(1.1942)	(1.2340)	(1.2818)	(1.3871)
100.	114.13	118.32	122.05	126.54	136.41
	(1.1413)	(1.1832)	(1.2205)	(1.2654)	(1.3641)

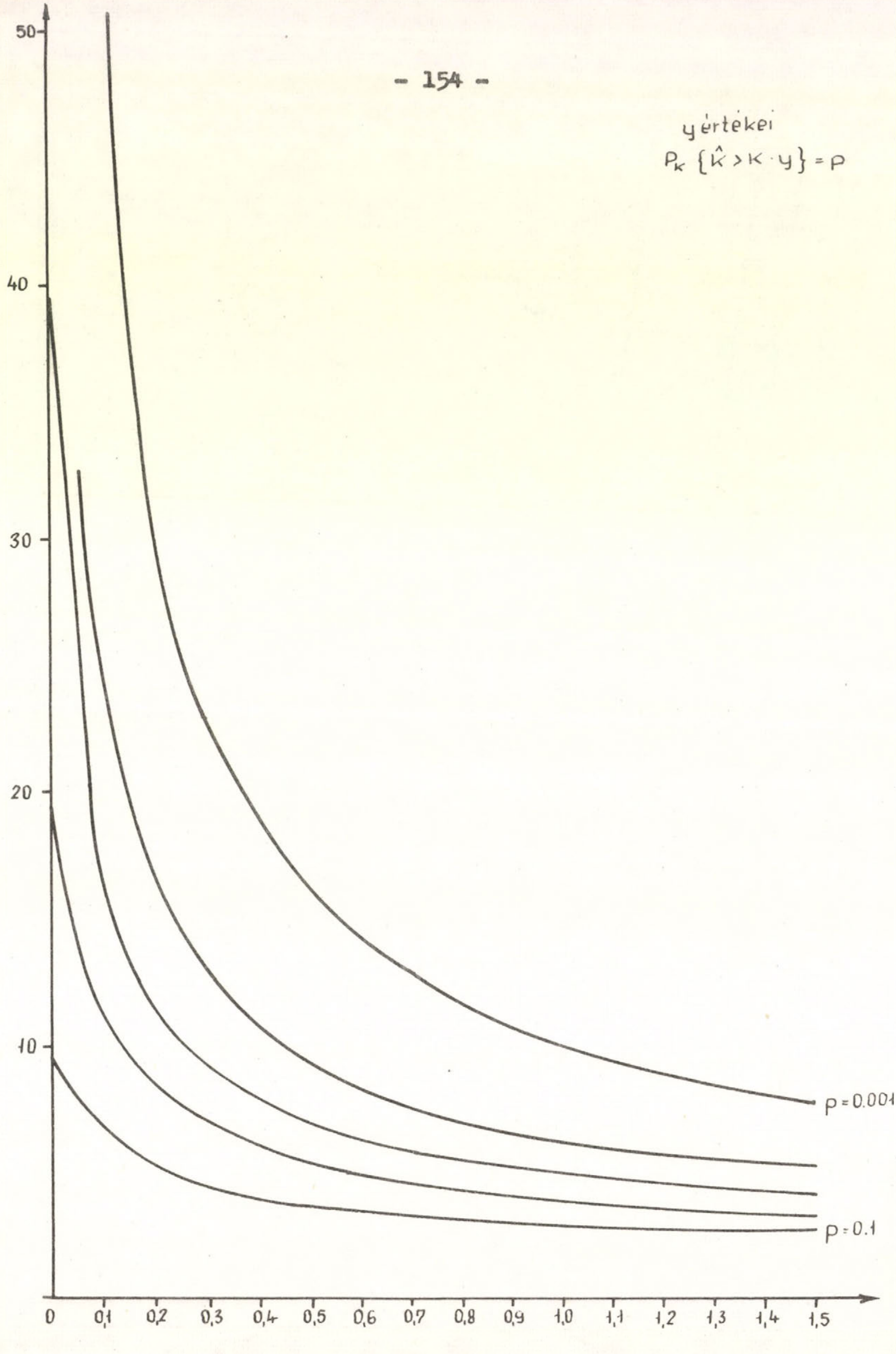
k \ p	0.999	0.990	0.975	0.950	0.900
0	0 (0.1460)	0 (0.2165)	0 (0.2620)	0 (0.3351)	0 (0.4352)
1.	0.224 (0.224)	0.298 (0.298)	0.354 (0.354)	0.420 (0.420)	0.519 (0.519)
1.5	0.341 (0.227)	0.474 (0.316)	0.567 (0.378)	0.669 (0.446)	0.816 (0.544)
2.	0.480 (0.240)	0.670 (0.335)	0.802 (0.401)	0.936 (0.468)	1.130 (0.565)
2.5	0.640 (0.256)	0.885 (0.354)	1.050 (0.420)	1.220 (0.488)	1.456 (0.583)
3.	0.804 (0.268)	1.119 (0.373)	1.317 (0.439)	1.518 (0.506)	1.800 (0.600)
3.5	0.994 (0.284)	1.362 (0.389)	1.593 (0.455)	1.827 (0.522)	2.146 (0.613)
4.	1.184 (0.296)	1.616 (0.404)	1.880 (0.470)	2.148 (0.537)	2.504 (0.626)
4.5	1.377 (0.306)	1.886 (0.419)	2.183 (0.485)	2.475 (0.550)	2.867 (0.637)
5.	1.595 (0.319)	2.160 (0.432)	2.485 (0.497)	2.810 (0.562)	3.235 (0.647)

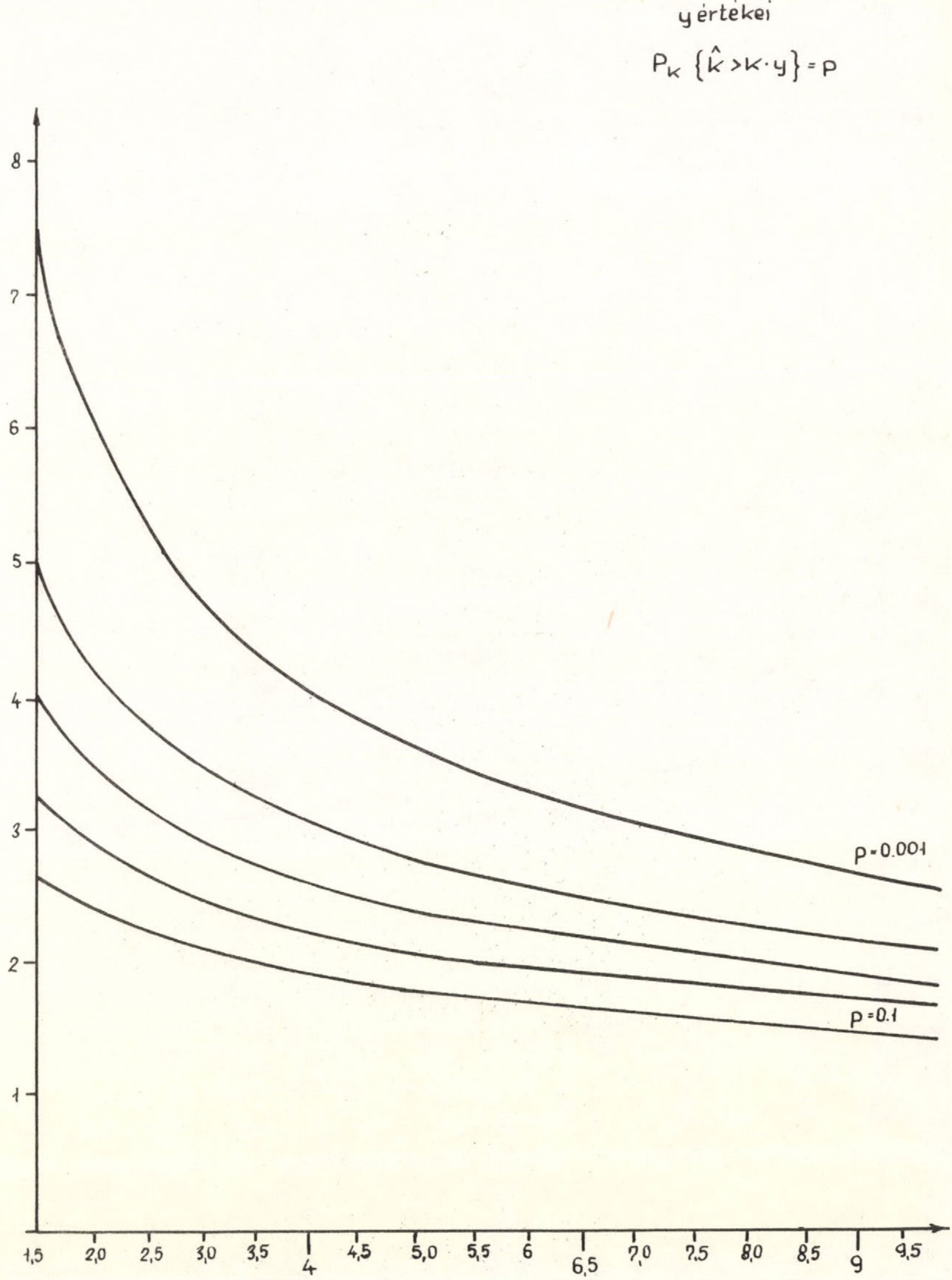
5.5	1.815 (0.330)	2.442 (0.444)	2.800 (0.509)	3.146 (0.572)	3.608 (0.656)
6.	2.082 (0.347)	2.736 (0.456)	3.120 (0.520)	3.492 (0.582)	3.984 (0.664)
6.5	2.308 (0.355)	3.036 (0.467)	3.445 (0.530)	3.848 (0.592)	4.374 (0.673)
7.	2.576 (0.368)	3.346 (0.478)	3.780 (0.540)	4.200 (0.600)	4.753 (0.679)
7.5	2.835 (0.378)	3.645 (0.486)	4.118 (0.549)	4.552 (0.607)	5.145 (0.686)
8.	3.096 (0.387)	3.952 (0.494)	4.456 (0.557)	4.904 (0.613)	5.528 (0.691)
8.5	3.383 (0.398)	4.284 (0.504)	4.794 (0.564)	5.296 (0.623)	5.933 (0.698)
9.	3.690 (0.410)	4.608 (0.512)	5.157 (0.573)	5.661 (0.629)	6.345 (0.705)
9.5	3.962 (0.417)	4.930 (0.519)	5.510 (0.580)	6.042 (0.636)	6.726 (0.708)
10.	4.22 (0.422)	5.27 (0.527)	5.88 (0.588)	6.41 (0.641)	7.14 (0.714)
20.	10.56 (0.5278)	12.42 (0.6208)	13.42 (0.6708)	14.35 (0.7173)	15.51 (0.7755)

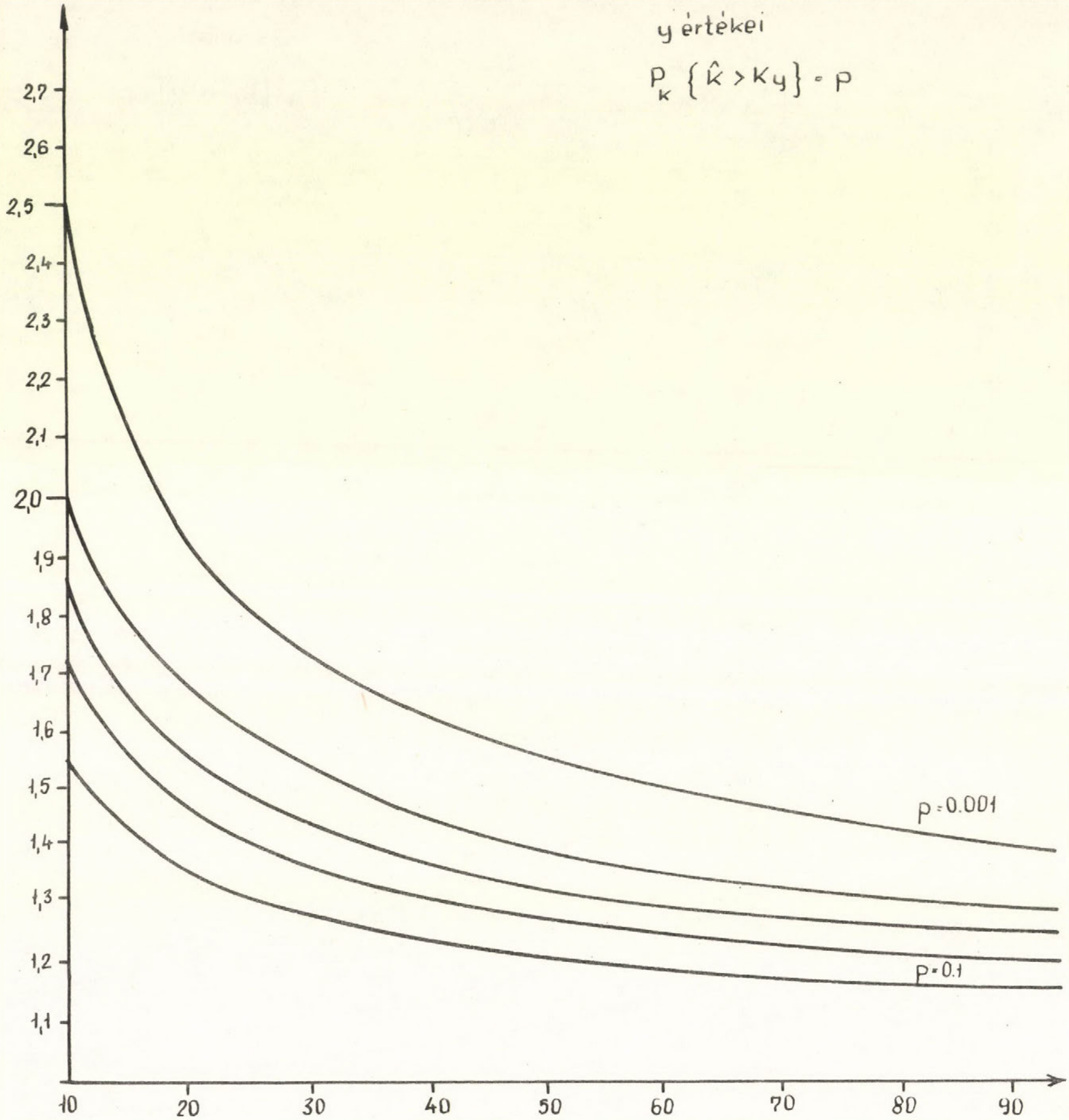
30.	17.41	20.15	21.49	22.73	24.25
	(0.5871)	(0.6715)	(0.7163)	(0.7576)	(0.8082)
40.	24.99	28.22	29.86	31.36	33.17
	(0.6247)	(0.7055)	(0.7465)	(0.7840)	(0.8292)
50.	32.60	36.50	38.42	40.13	42.24
	(0.6520)	(0.7300)	(0.7683)	(0.8026)	(0.8447)
60.	40.69	44.84	47.09	49.00	51.35
	(0.6780)	(0.7473)	(0.7849)	(0.8167)	(0.8559)
70.	48.58	53.49	55.78	57.97	60.56
	(0.6940)	(0.7642)	(0.7967)	(0.8283)	(0.8651)
80.	56.74	62.13	64.76	67.05	69.94
	(0.7092)	(0.7766)	(0.8095)	(0.8384)	(0.8742)
90.	64.89	70.97	73.68	76.27	79.11
	(0.7210)	(0.7885)	(0.8187)	(0.8474)	(0.8790)
100.	73.23	79.72	82.69	85.33	88.47
	(0.7323)	(0.7972)	(0.8269)	(0.8533)	(0.8847)

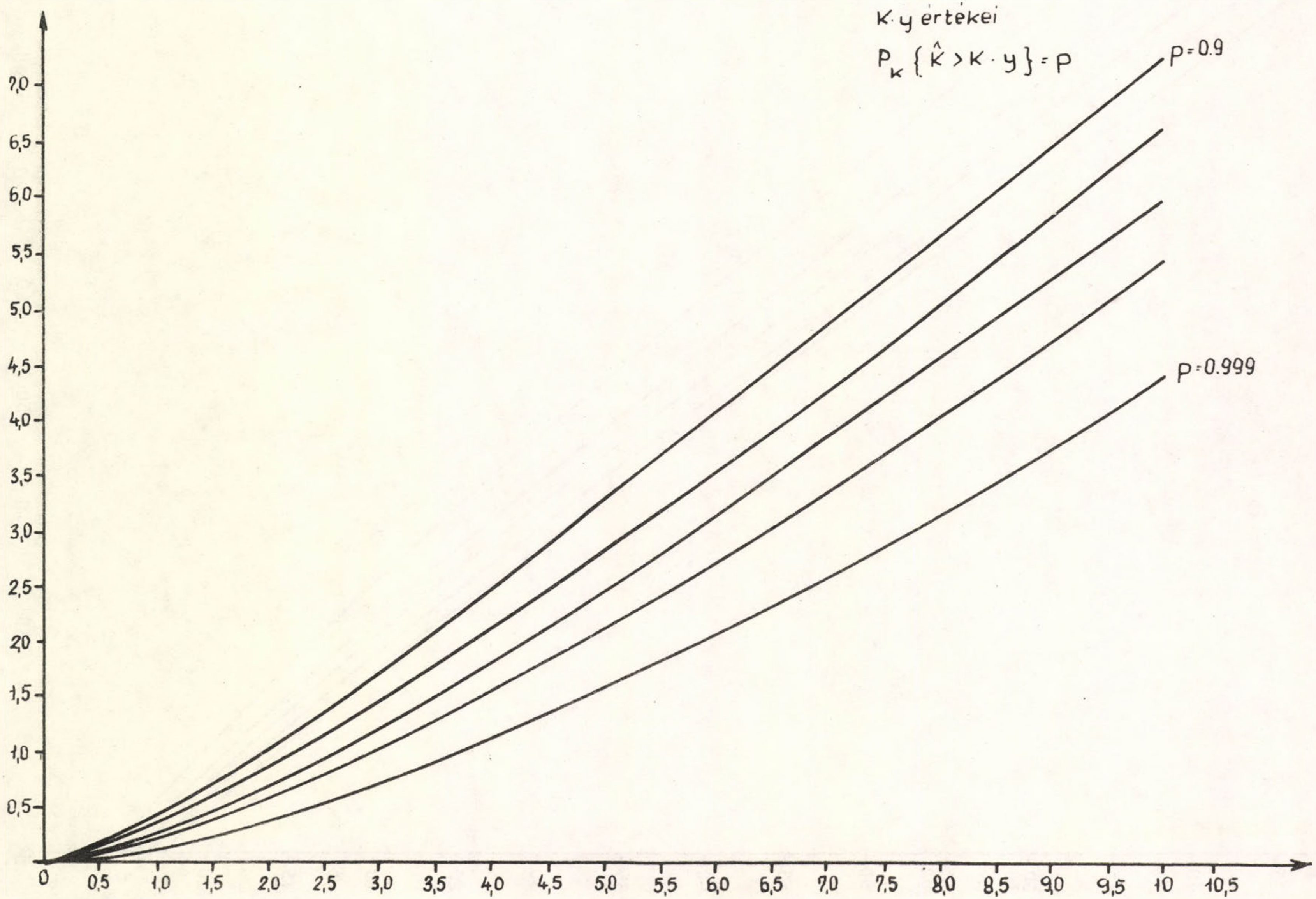

y értékei
$P_k\{\hat{k} > k \cdot y\} = p$
p = 0.9
p = 0.999
0,75
0,70
0,65
0,60
0,55
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
4,5
5,0
5,5
6,0
6,5
7,0
7,5
8,0
8,5
9,0
9,5
10

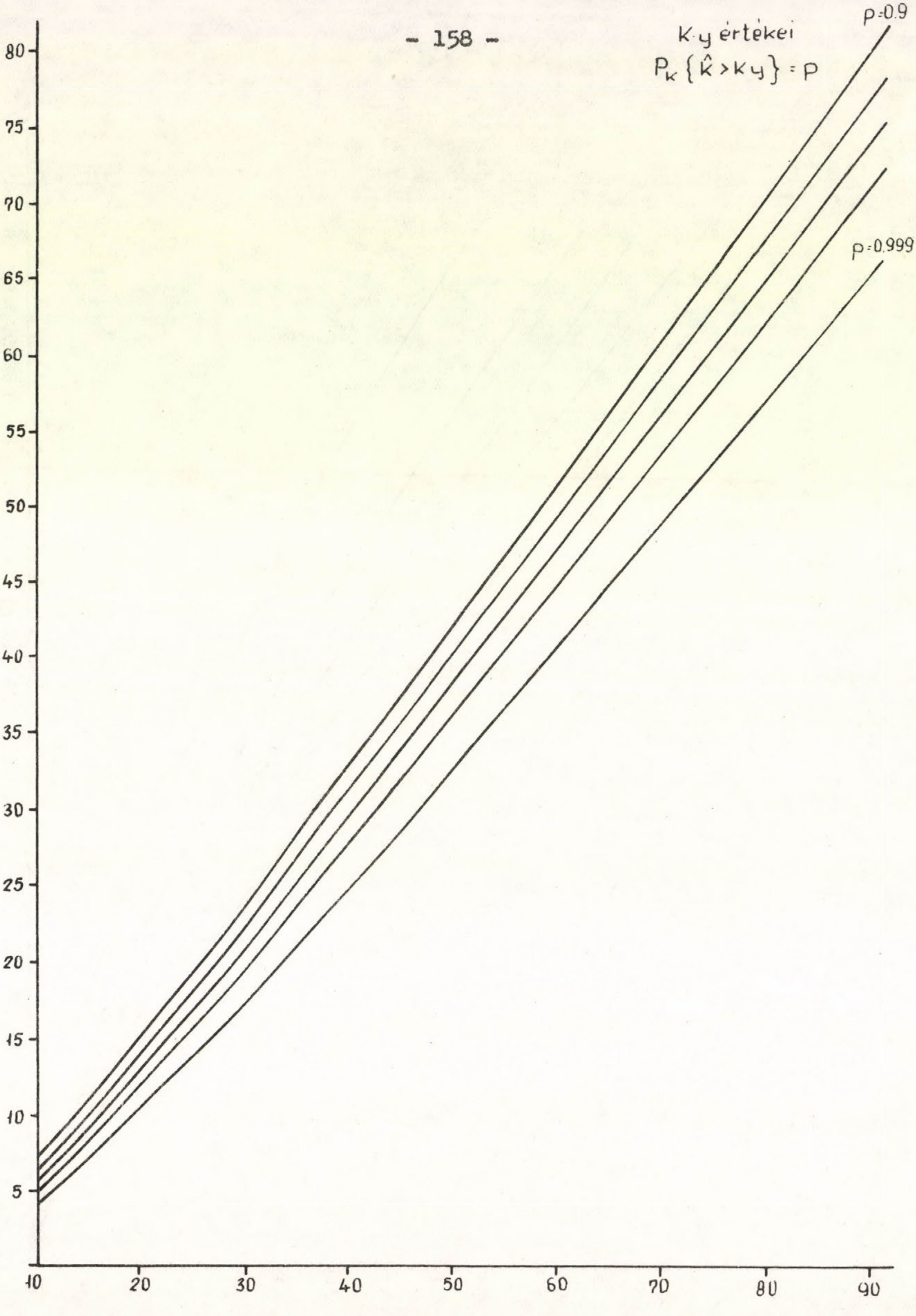

p = 0.9
p = 0.999
y értékei
$P_k \{\hat{k} > k y\} = P$
0,85
0,80
0,75
0,70
0,65
0,60
0,55
0,50
0,45
0,40
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

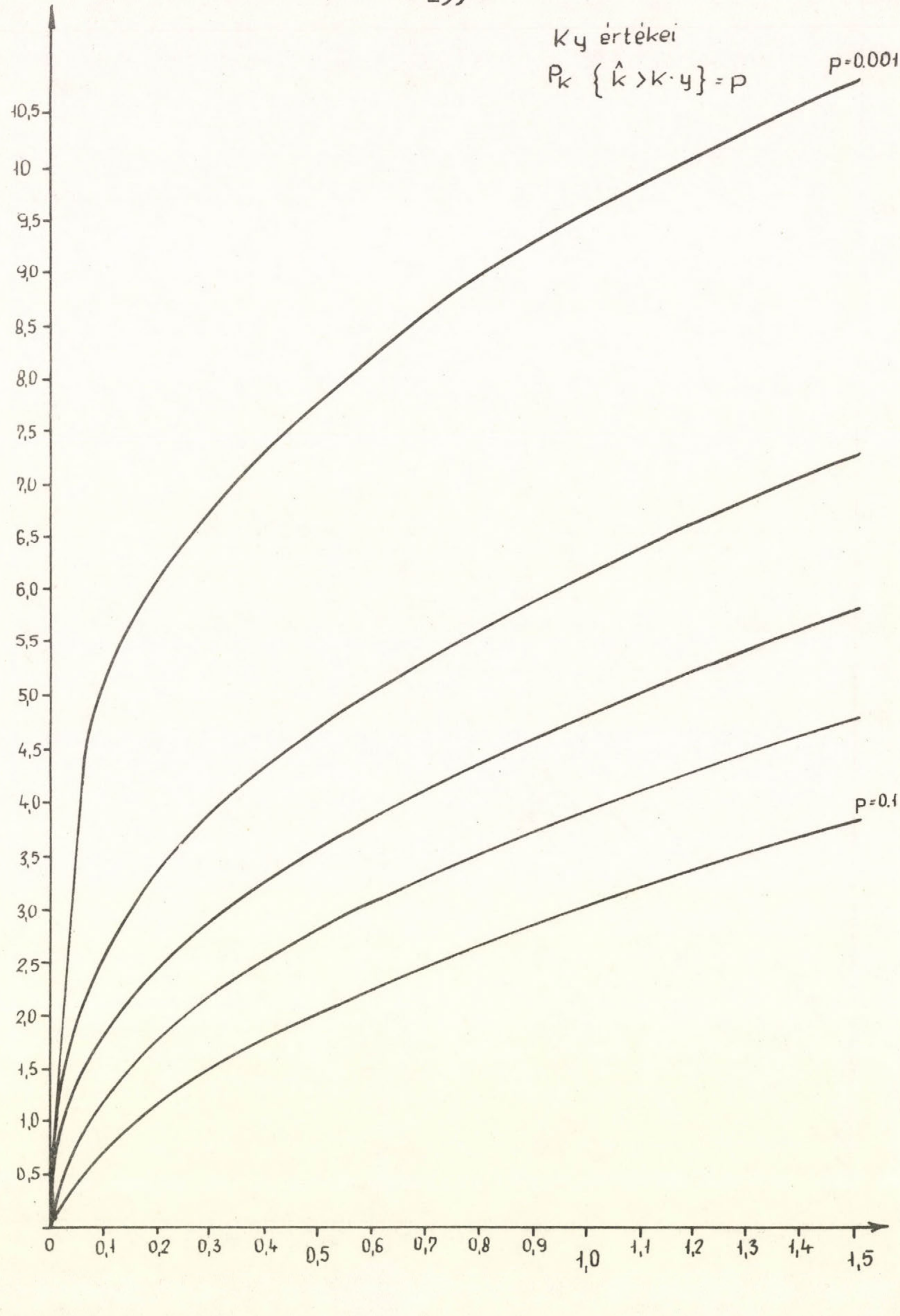

y értékei
$P_K\{\hat{K} > K \cdot y\} = p$
50
40
30
20
10
p = 0.001
p = 0.1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5

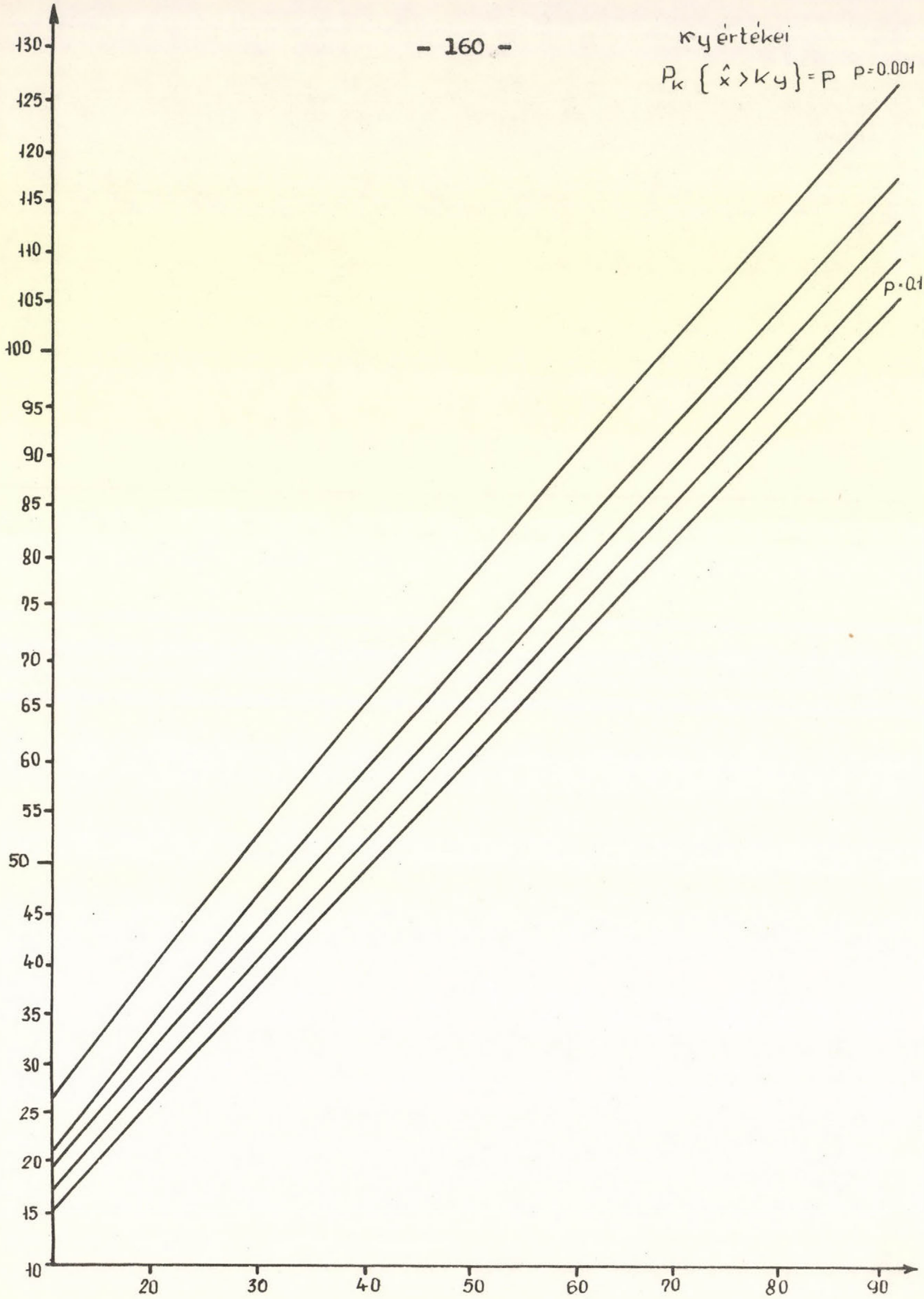

y értékei
$P_k \{\hat{k} > k \cdot y\} = p$
8
7
6
5
4
3
2
1
p = 0.001
p = 0.1
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4
4,5
5,0
5,5
6
6,5
7,0
7,5
8,0
8,5
9
9,5


y értékei
$P_k \{\hat{k} > Ky\} = p$
2,7
2,6
2,5
2,4
2,3
2,2
2,1
2,0
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
p = 0.001
p = 0.1
10
20
30
40
50
60
70
80
90

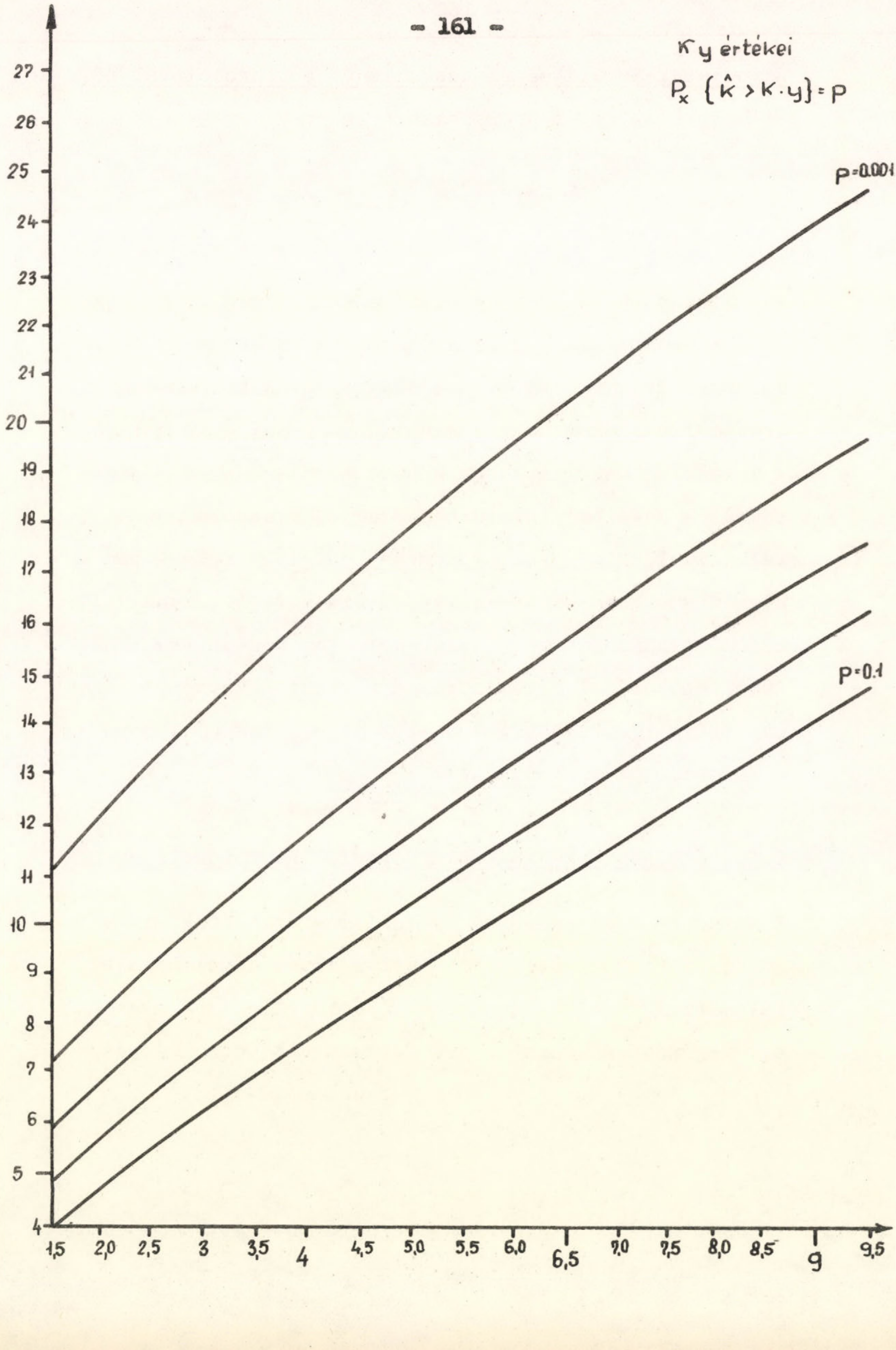

K·y értékei
P_K {K̂ > K·y} = P
P=0.9
P=0.999
7,0
6,5
6,0
5,5
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
4,5
5,0
5,5
6,0
6,5
7,0
7,5
8,0
8,5
9,0
9,5
10
10,5


K·y értékei
$P_k\{\hat{k} > ky\} = p$
p=0.9
p=0.999
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
10
20
30
40
50
60
70
80
90


Ky értékei
$P_k\{\hat{k} > K \cdot y\} = P$
P=0.001
P=0.1
10,5
10
9,5
9,0
8,5
8,0
7,5
7,0
6,5
6,0
5,5
5,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5



ky értékei
$P_k \{ \hat{x} > ky \} = P$
P=0.001
P=0.1
130
125
120
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
20
30
40
50
60
70
80
90


κy értékei
$P_x\{\hat{k} > \kappa \cdot y\} = p$
p=0.001
p=0.1
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
1,5
2,0
2,5
3
3,5
4
4,5
5,0
5,5
6,0
6,5
7,0
7,5
8,0
8,5
9
9,5

Egyenletek megoldása szakaszonkénti perturbációval II.

Frey Tamás

1. §. Bevezetés

Az intézeti Közleményünk előző számában megjelent cikkhez az alábbiakban hozzáfüzzük az onnét lemaradt táblázatokat. Néhány további eredményről és alkalmazásról is beszámolunk. Első helyre kinálkozik annak a gondolatnak a továbbfejlesztése, hogy a Runge-Kutta tipusu eljárásoknál a megelőző lépésekben számitott növekményeket felhasználjuk az ujak képzésénél, amelyet a 2. §-ban a klasszikus Runge-Kutta eljárásra is kiterjesztünk, ilymódon igen nagymértékü takarékosságot biztositva. Ennek jelentőségét jól érzékelteti a mostani Közleményszámunk egy cikke ([1]). A 3.§-ban viszont egy nagyon fontos uj alkalmazásról számolunk be.

2.§. "Ölelkező" Runge-Kutta formulák konstrukciója

E dolgozat első részében (l. [2]) már felvettük azt a gondolatot, hogy előző részintervallumok növelményeit felhasználjuk ujak képzésénél. Rövid példaként megadunk egy "egypontos" harmadrendü formulát (h^4-nel arányos hibájut, amelyet a klasszikus Runge-Kutta módszerrel csak akkor lehetne biztositani, ha részintervallumonként nem egy, hanem három pontban számolnánk függvényértéket), majd részletesen tárgyaljuk a kétpontos negyedrendü formulát. Ezután röviden vázoljuk a továbbfejlesztés módját is.

A harmadrendü formulánál egyetlen k_0 segédnövekményt készitünk abból a célból, hogy az $\dot{x} = f\ (t,x)$ differenciálegyenlet (x itt Banach térbeli általános változó lehet) (t_0,x_0) ponton kiinduló integrálgörbéjének $(t_0+h;\ x_0+\Delta x(h))$ pontját h ismeretében a $k_3(h) = \Delta x(h) + O(h^4)$ növekménnyel közelitsük. k_0 meghatározásánál azonban felhasználjuk a megelőző részintervallumra kapott k_{-1} jelü, sőt az azt megelőző részintervallumra kapott k_{-2} jelü segédnökményt is. Igy a

$$k_0 = hf\left(t_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}h\right);\quad x_0 + \frac{17 - 2\sqrt{6}}{12}k_{-1} - \frac{5}{12}k_{-2}\right)$$

$$k_3(h) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)k_{-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)k_0 \qquad /1/$$

formulákra jutunk.

Az ellenőrzést a "kétszeres" lépésközre adódó (azaz a $(t_0-h;\ x_{-1})$ pont alapján a $t_0+h;\ x_{-1}+\Delta x(2h)$ pont alapján a $t_0+h;\ x_{-1}+\ x(2h)$ pont meghatározásban szereplő) $\hat{k}_3(2h)=\Delta x(2h)+O(h^4)$ formulával lehet elvégezni:

$$\hat{k}_3(2h)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)k_{-3}-\left(1+\frac{4}{\sqrt{6}}\right)k_{-2}+\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{\sqrt{6}}\right)k_{-1} \qquad /2/$$

Megemlitjük, hogy /2/ nem biztosit "kifogástalan" ellenőrzést /1/-hez, mert a negyedrendü tagok együtthatóiban $k_3(h)$ és $\hat{k}_3(2h)$ nem azonos strukturáinak; az a tény azonban, hogy $\hat{k}_3(2h)$ erősen "visszanyul" megelőző részintervallumokra, ezt eléggé durvává teszi ahhoz, hogy a

$$\left|\hat{k}_3(2h)-k_3(h;x_{-1})-k_3(h;x_0)\right|$$

kifejezés általában elég durva felső becslése a

$|k_3(h;x_0)-\Delta x(h;x_0)|$ hibának.

A tapasztalat szerint kevésbé rontja a közelités jóságát, ha csak a segédnövekmények képzésénél nyulunk vissza megelőző részintervallumokra, mint ha ezeket a sulyozott középben is szerepeltetjük. Ezért /1/ helyett inkább ajánljuk az alábbiakban kimunkálásra kerülő kétpontos negyedrendü formulát. Ennek strukturája

$$k_1=hf(t_0+ah;\ x_0+\alpha_3k_{-3}+\alpha_2k_{-2}+\alpha_1k_{-1})$$

$$k_2 = hf(t_0 + bh;\ x_0 + \beta_2 k_{-2} + \beta_1 k_{-1} + \beta_0 k_1)$$

$$k = R_1 k_1 + R_2 k_2 = k_4(h)$$

ahol az

$$a = \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1 \qquad \text{és} \qquad b = \beta_2 + \beta_1 + \beta_0$$

egyenleteknek fenn kell állniok. E miatt - figyelembevéve, hogy k negyedrendben pontos, és felhasználva a [2]-ben részletesen kimunkált sorbafejtési módszereket - a k-ra vonatkozó egyenletek két csoportra esnek szét. Az elsőben az α-k és β-k egyáltalán nem szerepelnek:

hf	együttható:	1	ill.	$R_1 + R_2$
$h^2 Df$		$\frac{1}{2}$	ill.	$R_1 a + R_2 b$
$h^3 D^2 f$		$\frac{1}{6}$	ill.	$R_1 \frac{a^2}{2} + R_2 \frac{b^2}{2}$
$h^4 D^3 f$		$\frac{1}{24}$	ill.	$R_1 \frac{a^3}{6} + R_2 \frac{b^3}{6}$ /3/

Ebből

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2}; \qquad a = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}; \qquad b = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \qquad /4/$$

adódik. Az α-k és β-k meghatározása céljából "vissza kell mennünk" a sorozatban, hogy t.i. k, és igy k_1 ill. k_2 sorfejtésében h^4 együtthatói még pontosak legyenek, k_{-3}, k_2, és k_{-1} is harmadfoku pontossággal, azaz k_{-6}, k_{-5} és k_{-4} még másodfoku pontossággal (fi a (t_0,x_0) pontra vonatkozó sorfejtést illetően) szükségesek. Ezt azonban a és b ismeretében, továbbá a [2] dolgozat 1. segédtétele alapján könynyen meg tudjuk adni. A később ugyis sorrakerülő számitás részleteit elhagyva, az alábbi értékek adódnak:

$$\alpha_3 = 0\ ; \qquad \alpha_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{4}\ ; \qquad \alpha_1 = \frac{4\sqrt{3}-3}{12}$$

$$\beta_2 = \frac{4\sqrt{3}-3}{12}\ ; \qquad \beta_1 = -\frac{1+2\sqrt{3}}{4}\ ; \qquad \beta_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

Formuláink tehát

$$k_1 = hf\left(t_0 + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h\ ;\ x_0 + \frac{3-2\sqrt{3}}{4}k_{-2} + \frac{4\sqrt{3}-3}{12}k_{-1}\right)$$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h\ ;\ x_0 + \frac{4\sqrt{3}-3}{12}k_{-2} - \frac{1+2\sqrt{3}}{4}k_{-1} + \frac{3+\sqrt{3}}{3}k_1\right)$$

$$k_4(h) = \Delta x(h) + O(h^5) = \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \qquad /5/$$

A "dupla lépésközhöz" tartozó formulák miatt az alábbiakban meghatározzuk bizonyos számu k_i hatványsorát; ennek alapján arra is választ tudunk adni, hogy hogyan lehet "elindulni" a /5/ formula használatával. A "dupla lépésközhöz" tartozóan itt sem azt az elméletileg "jobb" formulát határozzuk meg, amely $k_4(h)$-val még az ötödfoku tagok strukturájában is megegyezik, mert ehhez "tulságosan vissza kellene nyulnunk" a megelőző részintervallumokra, hanem megelégszünk egy olyan $\hat{k}_4(2h)$ felépitésével, amely ugyancsak $O(32h^5)$ nagyságrendü hibát tartalmaz (de az ötödrendü tagokban történő egyeztetés hiánya miatt általában más együtthatóval, mint $k_4(h)$ hibája). E célból még k_{-2} és k_{-1} is negyedfoku, azaz k_{-4} és k_{-3} harmad, k_{-6} és k_{-5} másodfoku pontossággal adandók meg:

$$k_{-6} = hf\left(t_0 - 3h + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h;\ x_{-3} + \dots\dots\right) =$$

$$= hf_0 - \frac{15+\sqrt{3}}{6}h^2 Df + O(h^3);$$

$$k_{-5} = hf\left(t_0 - 3h + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h;\ x_3 + \dots\dots\right) =$$

$$= hf_0 - \frac{15-\sqrt{3}}{6}h^2 Df + O(h^3);$$

$$k_{-4} = hf\left(t_0 - 2h + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h;\ x_{-2} + \frac{3-2\sqrt{3}}{4}k_{-6} + \frac{4\sqrt{3}-3}{12}k_{-5}\right) =$$

$$= hf\Big[t_0 - \frac{9+\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 - 2hf_0 + 2h^2 Df_0 + \frac{3-2\sqrt{3}}{4}\Big(hf_0 -$$

$$- \frac{15+\sqrt{3}}{6}h^2 Df\Big) + \frac{4\sqrt{3}-3}{12}\Big(hf_0 - \frac{15-\sqrt{3}}{6}h^2 Df + O(h^3)\Big)\Big] =$$

$$= hf\Big[t_0 - \frac{9+\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 - \frac{9+\sqrt{3}}{6}hf_0 + \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^2 Df + O(h^2)\Big] =$$

$$= hf_0 - \frac{9+\sqrt{3}}{6}h^2 Df - \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^3 D^2 f + \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^3 f'_x Df + O(h^4)$$

$$k_{-3} = hf\Big[t_0 - 2h + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h\,;\ x_0 - 2hf_0 + 2h^2Df_0 + \frac{4\sqrt{3}-3}{12}\big(hf_0 -$$

$$- \frac{15+\sqrt{3}}{6}h^2Df_0 + \ldots\big) - \frac{3+6\sqrt{3}}{12}\big(hf_0 - \frac{15-\sqrt{3}}{6}h^2Df_0 + \ldots\big) +$$

$$+ \frac{12+4\sqrt{3}}{12}\big(hf_0 - \frac{9+\sqrt{3}}{6}h^2Df + \ldots\big)\Big] =$$

$$= hf\Big[t_0 - \frac{9-\sqrt{3}}{6}h\,;\ x_0 - \frac{9-\sqrt{3}}{6}hf_0 + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^2Df_0 + O(h^3)\Big] =$$

$$= hf - \frac{9-\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + O(h^4)\,;$$

$$k_{-2} = hf\Big[t_0 - h + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h\,;\ x_0 - hf_0 + \frac{h^2}{2}Df_0 - \frac{h^3}{6}D^2f - \frac{h^3}{6}f_x'Df +$$

$$+ \frac{9-6\sqrt{3}}{12}\big(hf_0 - \frac{9+\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\big) +$$

$$- \frac{4\sqrt{3}-3}{12}\big(hf - \frac{9-\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\big)\Big] =$$

$$= hf\Big(t_0 - \frac{3+\sqrt{3}}{6}h\,;\ x_0 - \frac{3+\sqrt{3}}{6}hf_0 + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^2Df - \frac{15-4\sqrt{3}}{72}h^3D^2f -$$

$$- \frac{15-\sqrt{3}\cdot 4}{72}h^3f_x'Df + O(h^4)\Big) = hf - \frac{3+\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3D^2f +$$

$$+ \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df - \frac{9+5\sqrt{3}}{216}h^4D^3f - \frac{15-4\sqrt{3}}{72}h^3f_x'D^2f -$$

$$- \frac{15-4\sqrt{3}}{72}h^3f_x'^2Df - \frac{9+5\sqrt{3}}{72}h^4Df_x'Df + O(h^5)\,;$$

$$k_{-1} = hf\Big[t_0 - h + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h\,;\ x_0 - hf_0 + \frac{h^2}{2}Df_0 - \frac{h^3}{6}D^2f - \frac{h^3}{6}f_x'Df +$$

$$+ \frac{4\sqrt{3}-3}{12}\big(hf - \frac{9+\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\big) -$$

$$- \frac{3+6\sqrt{3}}{12}\big(hf_0 - \frac{9-\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^2D^2f + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\big) +$$

$$+ \frac{12+4\sqrt{3}}{12}\big(hf - \frac{3+\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\big) +$$

$$= hf\Big[t_0 - \frac{3-\sqrt{3}}{6}h\,;\ x_0 - \frac{3-\sqrt{3}}{6}hf + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^2Df + \frac{9-4\sqrt{3}}{72}h^3D^2f +$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{9-4\sqrt{3}}{72}h^3 f'_x Df + \ldots\ldots\Big] = hf - \frac{3-\sqrt{3}}{6}h^2 Df + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 D^2 f + \\
&+\frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 f'_x Df - \frac{9-5\sqrt{3}}{216}h^4 D^3 f - \frac{9-4\sqrt{3}}{72}h^4 f'_x D^2 f + \\
&+\frac{9-4\sqrt{3}}{72}h^4 f'^2_x Df - \frac{9-5\sqrt{3}}{72}h^4 D f'_x Df + O(h^5) \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_1 = {} & hf\Big[t_0 + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h \ ; \ x_0 + \frac{9-6\sqrt{3}}{12}\Big(hf - \frac{3+\sqrt{3}}{6}h^2 Df + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3 D^2 f + \\
&-\frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3 f'_x Df + \ldots\ldots\Big) + \frac{4\sqrt{3}-3}{12}\Big(hf - \frac{3-\sqrt{3}}{6}h^2 Df + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 D^2 f + \\
&+\frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 f'_x Df + \ldots\ldots\Big) = hf\Big[t_0 + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h \ ; \ x_0 + \frac{3-\sqrt{3}}{6}hf + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^2 Df - \\
&-\frac{9-4\sqrt{3}}{72}h^3 D^2 f - \frac{9-4\sqrt{3}}{72}h^3 f'_x Df\Big] = hf + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h^2 Df + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 D^2 f + \\
&+\frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 f'_x Df + \frac{9-5\sqrt{3}}{216}h^4 D^3 f - \frac{9-4\sqrt{3}}{72}h^4 f'_x D^2 f - \frac{9-4\sqrt{3}}{72}h^4 f'^2_x Df + \\
&+\frac{9-5\sqrt{3}}{72}h^4 D f'_x Df + O(h^5) \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2 = {} & hf\Big[t_0 + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h \ ; \ x_0 + \frac{4\sqrt{3}-3}{12}\Big(hf - \frac{3+\sqrt{3}}{6}h^2 Df + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3 D^2 f + \\
&+\frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3 f'_x Df + \ldots\ldots\Big) - \frac{3+6\sqrt{3}}{12}\Big(hf - \frac{3-\sqrt{3}}{6}h^2 Df + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 D^2 f + \\
&+\frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 f'_x Df + \ldots\ldots\Big) - \frac{12+4\sqrt{3}}{12}\Big(hf + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h^2 Df + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 D^2 f + \\
&+\frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3 f'_x Df + \ldots\ldots\Big)\Big] = hf\Big[t_0 + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h \ ; \ x_0 - \frac{3+\sqrt{3}}{6}hf + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^2 Df + \\
&+\frac{15-4\sqrt{3}}{72}h^3 D^2 f + \frac{15-4\sqrt{3}}{72}h^3 f'_x Df + \ldots\ldots\Big] = hf + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h^2 Df + \\
&+\frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3 D^2 f + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3 f'_x Df + \frac{9+5\sqrt{3}}{216}h^4 D^3 f + \frac{15-4\sqrt{3}}{72}h^4 f'_x D^2 f + \\
&+\frac{15-4\sqrt{3}}{72}h^4 f'^2_x Df + \frac{9+5\sqrt{3}}{216}h^4 D f'_x Df + O(h^5) \ ;
\end{aligned}
$$

$$k_3 = hf\Big[t_0 + \frac{9-\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 + hf + \frac{h^2}{2}Df + \frac{h^3}{6}D^2f + \frac{h^3}{6}f_x'Df + \frac{9-6\sqrt{3}}{12}\Big(hf +$$

$$+ \frac{3-\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\ldots\Big) + \frac{4\sqrt{3}-3}{12}\Big(hf +$$

$$+ \frac{3+\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\ldots\Big)\Big] =$$

$$= hf\Big[t_0 + \frac{9-\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 + \frac{9-\sqrt{3}}{6}hf + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^2Df + \frac{33-8\sqrt{3}}{72}h^3D^2f +$$

$$+ \frac{33-8\sqrt{3}}{72}h^3f_x'Df + \ldots\ldots\Big] = hf + \frac{9-\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^3D^2f +$$

$$+ \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \frac{135-41\sqrt{3}}{216}h^4D^3f + \frac{33-8\sqrt{3}}{72}h^4f_x'D^2f +$$

$$+ \frac{33-8\sqrt{3}}{72}h^4f_x'^2Df + \frac{135-41\sqrt{3}}{72}h^4Df_x'Df + O(h^5)\ ;$$

$$k_4 = hf\Big[t_0 + \frac{9+\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 + hf + \frac{h^2}{2}Df + \frac{h^3}{6}D^2f + \frac{h^3}{6}f_x'Df + \frac{4\sqrt{3}-3}{12}\Big(hf +$$

$$+ \frac{3-\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\ldots\Big) - \frac{3+6\sqrt{3}}{12}\Big(hf +$$

$$+ \frac{3+\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3D^2f - \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\ldots\Big) + \frac{12+4\sqrt{3}}{12}\Big(hf + \frac{9-\sqrt{3}}{6}h^2Df +$$

$$+ \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^2D^2f + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + \ldots\ldots\Big)\Big] = hf\Big[t_0 + \frac{9+\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 + \frac{9+\sqrt{3}}{6}hf +$$

$$+ \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^2Df + \frac{57+8\sqrt{3}}{72}h^3D^2f + \frac{57+8\sqrt{3}}{72}h^3f_x'Df + \ldots\ldots\Big] =$$

$$= hf + \frac{9+\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{14+3\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df +$$

$$+ \frac{135+41\sqrt{3}}{216}h^4D^3f + \frac{57+8\sqrt{3}}{72}h^4f_x'D^2f + \frac{57+8\sqrt{3}}{72}h^4f_x'^2Df + \frac{135+41\sqrt{3}}{72}h^4Df_x'Df + \ldots$$

A kétszeres lépésközhöz tartozó formulát öt tagból összerakhatjuk, mert a szimmetriák miatt D^2f és $f'_x Df$, továbbá $f'_x D^2f$ és $f'^2_x Df$ együtthatói ugyis megegyeznek, $Df'_x Df$ együtthatója pedig épp háromszorosa D^3f -ének (lévén hogy ezek minden k-ra igazak). Igy

$$\hat{k}_4(2h) = R_{-2}k_{-2} + R_{-1}k_{-1} + R_1k_1 + R_2k_2 + R_3k_3$$

és itt

f együtthatói:	$R_{-2} + R_{-1} + R_1 + R_2 + R_3 = 2$
Df	$(R_1 - R_{-1})\frac{3-\sqrt{3}}{6} + (R_2 - R_{-2})\frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{9-\sqrt{3}}{6}R_3 = 2$
D^2f	$(R_1 + R_{-1})\frac{2-\sqrt{3}}{12} + (R_2 + R_{-2})\frac{2+\sqrt{3}}{12} + \frac{14-3\sqrt{3}}{12}R_3 = \frac{4}{3}$
D^3f	$(R_1 - R_{-1})\frac{9-5\sqrt{3}}{216} + (R_2 - R_{-2})\frac{9+5\sqrt{3}}{216} + \frac{135-41\sqrt{3}}{216}R_3 = \frac{2}{3}$
$f'_x D^2f$	$-(R_1 - R_{-1})\frac{9-4\sqrt{3}}{72} + (R_2 - R_{-2})\frac{15-4\sqrt{3}}{72} + \frac{33-8\sqrt{3}}{72}R_3 = \frac{2}{3}$

Bevezetve az $R_1 + R_{-1} = u_1$; $R_1 - R_{-1} = v_1$; $R_2 + R_{-2} = u_2$; $R_2 - R_{-2} = v_2$ jelölést, először a második, negyedik és ötödik egyenletből álló rendszert tekintjük:

$$(3-\sqrt{3})v_1+(3+\sqrt{3})v_2+(9-\sqrt{3})R_3=12$$

$$(9-5\sqrt{3})v_1+(9+5\sqrt{3})v_2+(135-41\sqrt{3})R_3=144$$

$$-(9-4\sqrt{3})v_1+(15-4\sqrt{3})v_2+(33-8\sqrt{3})R_3=48$$

amiből

$$R_3=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\,;\qquad v_1=-(1+\sqrt{3})\,;\qquad v_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Az első és harmadik egyenletből

$$u_1+u_2=2-\frac{3+\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

ill.

$$u_1(2-\sqrt{3})+u_2(2+\sqrt{3})=16-(14-3\sqrt{3})(3+\sqrt{3})\frac{1}{2}=-\frac{1+5\sqrt{3}}{2}$$

azaz

$$u_2=-\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-\frac{3+3\sqrt{3}}{6}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$u_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=1$$

Igy $R_1+R_{-1}=1$; $R_1-R_{-1}=-(1+\sqrt{3})$, azaz $R_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ R_{-1}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

és $R_2+R_{-2}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $R_2-R_{-2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, azaz $R_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ R_{-2}=-\frac{1}{2}$

Formulánk tehát:

$$\hat{k}_4(2h)=\frac{1}{2}\left[-k_{-2}+(2+\sqrt{3})k_{-1}-\sqrt{3}k_1-\sqrt{3}k_2+(3+\sqrt{3})k_3\right]$$

Az integráció első lépését nem tudjuk a fenti formulával kezdeni, mert "hiányzik" a k_{-2} ill. k_{-1} növekmény. Ezért az első lépést a szokásos Runge-Kutta formulával kezdjük, de ennek r_1, r_2, r_3 ill. r_4 segédnövekménye alkalmat ad k_1 ill. k_2 harmadrendüen pontos meghatározására, és ezeket a következő részintervallumban már használhatjuk.

Ugyanis

$$r_1 = hf_0$$

$$r_2 = hf(t_0 + \tfrac{h}{2}; x_0 + \tfrac{1}{2}r_1) = hf_0 + \tfrac{1}{2}h^2Df_0 + \tfrac{1}{8}h^3D^2f_0 + \dots\dots$$

$$r_3 = hf(t_0 + \tfrac{h}{2}; x_0 + \tfrac{1}{2}r_2) = hf_0 + \tfrac{1}{2}h^2Df_0 + \tfrac{1}{8}h^3D^2f_0 + \tfrac{1}{4}h^3f'_xDf + \dots\dots$$

$$r_4 = hf(t_0 + h; x_0 + r_3) = hf + h^2Df + \frac{h^3}{2}D^2f + \frac{h^3}{2}f'_xDf + \dots\dots$$

Legyen mármost

$$k_1 = \varrho_1^{(1)}r_1 + \varrho_2^{(1)}r_2 + \varrho_3^{(1)}r_3 + \varrho_4^{(1)}r_4 + O(h^4)$$

ill.

$$k_2 = \varrho_1^{(2)}r_1 + \varrho_2^{(2)}r_2 + \varrho_3^{(2)}r_3 + \varrho_4^{(2)}r_4 + O(h^4)$$

Érvényes tehát egyrészt az

$$\varrho_1^{(1)} + \varrho_2^{(1)} + \varrho_3^{(1)} + \varrho_4^{(1)} = 1 \qquad (hf \text{ együtthatói})$$

$$\tfrac{1}{2}\varrho_2^{(1)} + \tfrac{1}{2}\varrho_3^{(1)} + \varrho_4^{(1)} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \qquad (h^2Df \text{ együtthatói})$$

$$\frac{1}{8}\varrho_2^{(1)}+\frac{1}{8}\varrho_3^{(1)}+\frac{1}{2}\varrho_4^{(1)}=\frac{2-\sqrt{3}}{12} \qquad (h^3D^2f \text{ együtthatói})$$

$$\frac{1}{4}\varrho_3^{(1)}+\frac{1}{2}\varrho_4^{(1)}=\frac{2-\sqrt{3}}{12} \qquad (h^3f_x'Df \text{ együtthatói})$$

egyenletrendszer, amiből

$$\varrho_1^{(1)}=\frac{1+\sqrt{3}}{6}\,;\quad \varrho_2^{(1)}=\frac{7}{12}\,;\quad \varrho_3=\frac{1}{12}\,;\quad \varrho_4=\frac{1-\sqrt{3}}{6}\,;$$

másrészt ugyanigy a

$$\varrho_1^{(2)}+\varrho_2^{(2)}+\varrho_3^{(2)}+\varrho_4^{(2)}=1$$

$$\frac{1}{2}\varrho_2^{(2)}+\frac{1}{2}\varrho_3^{(2)}+\varrho_4^{(2)}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{1}{8}\varrho_2^{(2)}+\frac{1}{8}\varrho_3^{(2)}+\frac{1}{2}\varrho_4^{(2)}=\frac{2+\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{1}{4}\varrho_3^{(2)}+\frac{1}{2}\varrho_4^{(2)}=\frac{2+\sqrt{3}}{12}$$

rendszer, amiből

$$\varrho_1^{(2)}=\frac{1-\sqrt{3}}{6}\,;\quad \varrho_2^{(2)}=\frac{7}{12}\,;\quad \varrho_3^{(2)}=\frac{1}{12}\,;\quad \varrho_4^{(2)}=\frac{1+\sqrt{3}}{6}$$

Igy

$$k_1=\frac{1+\sqrt{3}}{6}r_1+\frac{7}{12}r_2+\frac{1}{12}r_3+\frac{1-\sqrt{3}}{6}r_4+O(h^4)\,;$$

$$k_2=\frac{1-\sqrt{3}}{6}r_1+\frac{7}{12}r_2+\frac{1}{12}r_3+\frac{1+\sqrt{3}}{6}r_4+O(h^4)\,;$$

Áttérünk most a lépésközfelezés ill. duplikálás technikájára. Ezzel kapcsolatban mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a /3/ alatti egyenletek függetlenek a megelőző lépéstől, igy a /4/ alatti értékek univerzálisak.

Univerzálisak tehát az

$$\alpha_2 + \alpha_1 = a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

és a /7/

$$\beta_2 + \beta_1 + \beta_0 = b_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

relációk is. k_{-2} és k_{-1}-gyel kapcsolatban feltesszük azt is, hogy az α -k és β -k ugy vannak megválasztva, hogy D^2f és $f_x' Df$ együtthatója egyenlő. Látni fogjuk, hogy ez a tény a lépésfelező $\alpha_2^{(f)}, \alpha_1^{(f)}, \beta_2^{(f)}, \beta_1^{(f)}, \beta_0^{(f)}$ ill. a lépésközduplikáló $\alpha_2^{(d)}, \alpha_1^{(d)}, \beta_2^{(d)}, \beta_1^{(d)}, \beta_0^{(d)}$ értékrendszereknél is biztositva lesz, igy a fenti tény fennállása független attól, hogy a megelőző intervallumba való belépés során történt-e lépésköz-duplikálás, resp. felezés, ill. sem.

Tekintsük ezért először a lépésközfelezés esetét. Ilyen feltételek mellett - figyelembevéve a fent mondottakat - k_{-2} ill. k_{-1} igy állitható elő:

$$k_{-2} = 2hf\left(t_0 - 2h + \frac{3-\sqrt{3}}{6}2h\,;\ x_{-2} + \dots\dots\right) =$$

$$= 2hf\left(t_0 - \frac{3+\sqrt{3}}{3}h\,;\ x_0 - \frac{3+\sqrt{3}}{3}hf + \dots\dots\right) =$$

$$= 2\left\{hf - \frac{3+\sqrt{3}}{3}h^2Df + \frac{2+\sqrt{3}}{3}h^3D^2f + \frac{2+\sqrt{3}}{3}h^3f_x'Df + O(h^4)\right\}$$

ill.

$$k_{-1} = 2\left\{hf - \frac{3-\sqrt{3}}{3} h^2 Df + \frac{2-\sqrt{3}}{3} h^3 D^2 f + \frac{2-\sqrt{3}}{3} h^3 f_x' Df + O(h^4)\right\}$$

ahol $f_x' Df$ együtthatóját abból a feltevésből kiindulva állapitottuk meg, hogy az $D^2 f$ -ével megegyezik, a 2 szorzófaktortól pedig eltekintettünk, hogy /7/ érvényes legyen (ilymódon $\alpha_2 = 2\alpha_2^{(1)}$).

(Azaz $2\alpha_2^{(f)} + 2\alpha_1^{(f)} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ resp. $2\beta_2^{(f)} + 2\beta_1^{(f)} + \beta_0^{(f)} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$).

Ilymódon - /7/ felhasználásával -

$$k_1^{(f)} = hf\left(t_0 + \frac{3-\sqrt{3}}{6} h;\ x_0 + \alpha_2^{(f)} k_{-2} + \alpha_1^{(f)} k_{-1}\right) =$$

$$= hf\Big[t_0 + \frac{3-\sqrt{3}}{6} h;\ x_0 + \frac{3-\sqrt{3}}{6} hf + \alpha_2^{(f)}\Big(-2\frac{3+\sqrt{3}}{3} h^2 Df +$$

$$+2\frac{2+\sqrt{3}}{3} h^3 D^2 f + 2\frac{2+\sqrt{3}}{3} h^3 f_x' Df + O(h^4)\Big) + \alpha_1^{(f)}\Big(-2\frac{3-\sqrt{3}}{3} h^2 Df +$$

$$+2\frac{2-\sqrt{3}}{3} h^3 D^2 f + 2\frac{2-\sqrt{3}}{3} h^3 f_x' Df + O(h^4)\Big)\Big] =$$

$$= hf + \frac{3-\sqrt{3}}{6} h^2 Df + \frac{2-\sqrt{3}}{12} h^3 D^2 f + \left[-2\frac{3+\sqrt{3}}{3}\alpha_2^{(f)} - 2\frac{3-\sqrt{3}}{3}\alpha_1^{(f)}\right]\cdot$$

$$\cdot h^3 f_x' Df + \frac{9-5\sqrt{3}}{216} h^4 D^3 f + \left[2\frac{2+\sqrt{3}}{3}\alpha_2^{(f)} + 2\frac{2-\sqrt{3}}{3}\alpha_1^{(f)}\right] h^4 f_{\cancel{x}}' D^2 f +$$

$$+\left[2\frac{2+\sqrt{3}}{3}\alpha_2^{(f)} + 2\frac{2-\sqrt{3}}{3}\alpha_1^{(f)}\right] h^4 f_x'^2 Df + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left[-2\frac{3+\sqrt{3}}{3}\alpha_2^{(f)} -\right.$$

$$\left.-2\frac{3-\sqrt{3}}{3}\alpha_1^{(f)}\right] h^4 Df_x' Df + O(h^4)$$

Mármost azonnal látható, hogy az a feltevés, hogy k_{-2}-ben és k_{-1}-ben D^2f és $f_x' Df$ együtthatója megegyezett, automatikusan maga után vonja, hogy k_1-ben is egyezik $f_x' D^2f$ és $f_x'^2 Df$ együtthatója. Ha még kikötjük, hogy

$$-2\frac{3+\sqrt{3}}{3}\alpha_2^{(f)} - 2\frac{3-\sqrt{3}}{3}\alpha_1^{(f)} = \frac{2-\sqrt{3}}{12} \qquad /8/$$

is érvényes legyen, akkor itt is biztositva van egyrészt D^2f és $f_x' Df$ együtthatóinak egyenlősége, másrészt az is, hogy $Df_x' Df$ együtthatója épp háromszorosa D^3f -ének. /7/ és /8/ alapján mármost

$$\alpha_1^{(f)} = \frac{-1+2\sqrt{3}}{16}\ ; \qquad \alpha_2^{(f)} = \frac{15-10\sqrt{3}}{48}$$

Hasonlóképp

$$\begin{aligned}
k_2 = {} & hf\Big[t_0 + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 + \frac{3+\sqrt{3}}{6}hf + \beta_2^{(f)}\Big(-2\frac{3+\sqrt{3}}{3}h^2Df + \\
& + 2\frac{2+\sqrt{3}}{3}h^3D^2f + 2\frac{2+\sqrt{3}}{3}h^3f_x'Df + O(h^4)\Big) + \\
& + \beta_1^{(f)}\Big(-2\frac{3-\sqrt{3}}{3}h^2Df + 2\frac{2-\sqrt{3}}{3}h^3D^2f + 2\frac{2-\sqrt{3}}{3}h^3f_x'Df + O(h^4)\Big) + \\
& + \beta_0^{(f)}\Big(\frac{3-\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \frac{2-\sqrt{3}}{12}h^3f_x'Df + O(h^4)\Big)\Big] = \\
= {} & hf + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h^2Df + \frac{2+\sqrt{3}}{12}h^3D^2f + \Big[-2\frac{3+\sqrt{3}}{3}\beta_2^{(f)} - \\
& - 2\frac{3-\sqrt{3}}{3}\beta_1^{(f)} + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\beta_0^{(f)}\Big]h^3f_x'Df + \frac{9+5\sqrt{3}}{216}h^4D^3f + \\
& + \Big[2\frac{2+\sqrt{3}}{3}\beta_2^{(f)} + 2\frac{2-\sqrt{3}}{3}\beta_1^{(f)} + \frac{2-\sqrt{3}}{12}\beta_0^{(f)}\Big]h^4f_x'Df +
\end{aligned}$$

$$+\left[2\frac{2+\sqrt{3}}{3}\beta_2^{(f)}+2\frac{2-\sqrt{3}}{3}\beta_1^{(f)}+\frac{2-\sqrt{3}}{6}\beta_0^{(f)}\right]h^4 f_x'^2 Df +$$

$$+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\left[-2\frac{3+\sqrt{3}}{3}\beta_2^{(f)}-2\frac{3-\sqrt{3}}{3}\beta_1^{(f)}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\beta_0^{(f)}\right]h^4 Df_x' Df + O(h^4)$$

Ha tehát itt is kikötjük, hogy

$$-2\frac{3+\sqrt{3}}{3}\beta_2^{(f)}-2\frac{3-\sqrt{3}}{3}\beta_1^{(f)}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\beta_0^{(f)}=\frac{2-\sqrt{3}}{12} \qquad /9/$$

érvényes legyen, akkor itt is teljesül az $D^2 f$ és $f_x' Df$ továbbá $f_x' D^2 f$ és $f_x'^2 Df$ együtthatóinak azonosságára vonatkozó feltétel, továbbá az is, hogy $Df_x' Df$ együtthatója épp háromszorosa $D^2 f$ -nek. Minthogy pedig /5/-/6/-ból indultunk ki, ezért e feltételek miatt $k^{(f)}=\frac{1}{2}k_1^{(f)}+\frac{1}{2}k_2^{(f)}$ -ben f, Df, $D^2 f$ - emiatt tehát $f_x' Df$ -é is - továbbá $D^2 f$ - és emiatt $Df_x' Df$ -~~é~~ is- együtthatója azonos Δx -ével, csak $f_x' D^2 f$ együtthatójának egyeztetéséről kell gondoskodni - ami a fenti szimmetriák miatt automatikusan maga után vonja $f_x'^2 Df$ együtthatójának egyezését is. Igy még az

$$\frac{1}{2}\left\{2\frac{2+\sqrt{3}}{3}\left(\alpha_2^{(f)}+\beta_2^{(f)}\right)+2\frac{2-\sqrt{3}}{3}\left(\alpha_1^{(f)}+\beta_1^{(f)}\right)+\frac{2-\sqrt{3}}{6}\beta_0^{(f)}\right\}=\frac{1}{24} \qquad /10/$$

egyenletnek is fenn kell állnia. /7/, /9/ és /10/ mármost meghatározza $\beta_2^{(f)}$, $\beta_1^{(f)}$ és $\beta_0^{(f)}$ értékét is:

$$\beta_2^{(f)} = \frac{-231+415\sqrt{3}}{1776}; \quad \beta_1^{(f)} = -\frac{247+245\sqrt{3}}{592}; \quad \beta_0^{(f)} = \frac{118+39\sqrt{3}}{74}$$

Ugyanilyen meggondolás vezet el a lépésduplikálásnak megfelelő együtthatóihoz is.

Egyemleteink tehát:

$$k_{-2} = \frac{1}{2}\left\{hf - \frac{3+\sqrt{3}}{12}h^2Df + \frac{2+\sqrt{3}}{48}h^3D^2f + \frac{2+\sqrt{3}}{48}h^3f_x'Df + O(h^4)\right\}$$

$$k_{-1} = \frac{1}{2}\left\{hf - \frac{3-\sqrt{3}}{12}h^2Df + \frac{2-\sqrt{3}}{48}h^3D^2f + \frac{2-\sqrt{3}}{48}h^3f_x'Df + O(h^4)\right\}$$

ill. ennek alapján

$$\frac{1}{2}\alpha_2^{(d)} + \frac{1}{2}\alpha_1^{(d)} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

és

$$-\frac{1}{2}\,\frac{3+\sqrt{3}}{12}\,\alpha_2^{(d)} - \frac{1}{2}\,\frac{3-\sqrt{3}}{12}\,\alpha_1^{(d)} = \frac{2-\sqrt{3}}{12}$$

amiből

$$\alpha_2^{(d)} = \frac{6-4\sqrt{3}}{3}; \quad \alpha_1^{(d)} = \sqrt{3}-1$$

Hasonlóképp

$$\frac{1}{2}\beta_2^{(d)} + \frac{1}{2}\beta_1^{(d)} + \beta_0^{(d)} = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

és

$$-\frac{1}{2}\,\frac{3+\sqrt{3}}{12}\,\beta_2^{(d)}-\frac{1}{2}\,\frac{3-\sqrt{3}}{12}\,\beta_1^{(d)}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\,\beta_0^{(d)}=\frac{2+\sqrt{3}}{12}$$

végül

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{2+\sqrt{3}}{48}\left(\alpha_2^{(d)}+\beta_2^{(d)}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{2-\sqrt{3}}{48}\left(\alpha_1^{(d)}+\beta_1^{(d)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2-\sqrt{3}}{6}\,\beta_0^{(d)}\right\}=\frac{1}{24}$$

amiből

$$\beta_2^{(d)}=\frac{-120+366\sqrt{3}}{687}\,;\quad \beta_1^{(d)}=-\frac{435+677\sqrt{3}}{687}\,;\quad \beta_0^{(d)}=\frac{207+90\sqrt{3}}{229}$$

Lépésfelezés ill. diplikálás kapcsán is meg lehet adni a két szomszédos részintervallumot áthidaló megoldást is, ezekkel azonban (8-8 kombináció lévén) nem érdemes foglalkozni.

Gyakorlatilag a következő módszert célszerü használni: mindenekelőtt megállapitjuk a megengedett $\Sigma(t,h)$ -t-től és h-tól függő - hibakorlátot. Ezután a szokásos lépésfelezéses módszerrel meghatározzuk az első két részintervallumra vonatkozó növekményt a szokásos Runge--Kutta módszerrel - egyszersmind a használható lépésköz--nagyságot. A második részintervallumon a fentiekben megadott

$$k_1=\frac{1+\sqrt{3}}{6}r_1+\frac{7}{12}r_2+\frac{1}{12}r_3+\frac{1-\sqrt{3}}{6}r_4+O(h^4)$$

$$k_2=\frac{1-\sqrt{3}}{6}r_1+\frac{7}{12}r_2+\frac{1}{12}r_3-\frac{1+\sqrt{3}}{6}r_4+O(h^4)$$

képletekkel kiszámitjuk a két segédnövekmény $O(h^4)$ hibáju közelitését. A következő részintervallumon használhatjuk tehát már az /5/ alatti formulákat, az ötödik részintervallumtól kezdve pedig ellenőrzésül a kétszeres lépésközre megadott

$$\hat{k}_4(2h)=\frac{1}{2}[-k_{-4}+(2+\sqrt{3})k_{-3}-\sqrt{3}\,k_{-2}-\sqrt{3}\,k_{-1}+(3+\sqrt{3})k_1]$$

formulát /ahol az eredetihez képest olyan átindexelést hajtottunk végre, amely a legutolsó részintervallum két osztáspontját jelöli k_1-gyel ill. k_2-vel, a bázispont pedig az x_{-1}-nek felel meg/. Ha mármost

$$\frac{1}{3200}\varepsilon(t,h)<|\hat{k}_4(2h;x_1)-k_4(h;x_{-1})-k_4(h;x_0)|<\frac{1}{64}\varepsilon(t,h)$$

teljesül, nem változtatunk a lépésközön a következő lépésben. Ha azonban $|\hat{k}_4(2h;x_{-1})-k_4(h;x_{-1})-k_4(h;x_0)|>\frac{\varepsilon}{64}$ akkor a következő lépésben feleakkora lépésközzel megyünk tovább (ez kb. $\frac{1}{32}$ -edrészére csökkenti a hibát), amelyhez a

$$k_1=hf\left(t_0+\frac{3-\sqrt{3}}{6}h;\,x_0+\frac{15-10\sqrt{3}}{48}k_{-2}+\frac{2\sqrt{3}-1}{16}k_{-1}\right);$$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 + \frac{415\sqrt{3}-231}{1776}k_{-2} - \frac{247+245\sqrt{3}}{592}k_{-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{118+39\sqrt{3}}{74}k_0\right)$$

$$k_4(h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

formulát használhatjuk. Ha viszont $|\hat{k}_4(2h;\ x_{-1}) - k_4(h;x_{-1}) - k_4(h;x_0)| < \frac{1}{3200}\varepsilon(t,h)$, akkor a következő lépésben megduplázzuk a lépésközt. Ehhez a

$$k_1 = hf\left(t_0 + \frac{3-\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 + \frac{6-4\sqrt{3}}{3}k_{-2} + (\sqrt{3}-1)k_{-1}\right)$$

$$k_2 = hf\left(t_0 + \frac{3+\sqrt{3}}{6}h;\ x_0 + \frac{366\sqrt{3}-120}{687}k_{-2} - \frac{435+677\sqrt{3}}{687}k_{-1} + \frac{207+90\sqrt{3}}{229}k_0\right)$$

$$k_4 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

formulát használjuk.

Nagyobb biztonsággal - de lényegesen számitásigényesebb munkával - használhatjuk a fenti formulákat a Runge-Kutta módszernél megszokott módon, azaz minden lépésben dupla és normál lépésközzel is integrálva.

A fenti módszer alkalmas természetesen magasabb fokszámu formulák létrehozására is. Igy pl. három segédpontra támaszkodva ötödrendü formulát hozhatunk létre, stb. Ezekkel a lehetőségekkel egy későbbi munkában foglalkozunk.

3.§. Alkalmazás a periodikus együtthatós differenciálegyenletrendszerekre

Ismeretes, hogy T periodusu periodikus $\underline{\underline{P}}(t)$ együtthatómátrixszal képezett

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{P}}(t)\,\underline{x} \qquad /11/$$

lineáris differenciálegyenletrendszernek egy alapmegoldásrendszere előállitható az

$$\underline{\underline{X}}(t) = \underline{\underline{Q}}(t)\,e^{t\underline{\underline{J}}} \qquad /12/$$

alakban, ahol $\underline{\underline{Q}}$ ugyancsak T periódusu $\underline{\underline{J}}$ pedig állandó mátrix $\underline{\underline{Q}}$ ill. $\underline{\underline{J}}$ explicit alakját azonban általában nem tudjuk megadni. Ezért először a következő problémát tekintjük: /12/-t, azaz $\underline{\underline{Q}}$-t és $\underline{\underline{J}}$-t tekintjük adottnak, és ehhez próbáljuk és /11/ alatti $\underline{\underline{P}}$-t meghatározni. Mármost /12/ alapján

$$\frac{d}{dt}\underline{\underline{X}}(t) = \dot{\underline{\underline{X}}}(t) = \dot{\underline{\underline{Q}}}(t)\,e^{t\underline{\underline{J}}} + \underline{\underline{Q}}(t)\,\underline{\underline{J}}\,e^{t\underline{\underline{J}}} =$$

$$= [\dot{\underline{\underline{Q}}}(t)\,\underline{\underline{Q}}^{-1}(t) + \underline{\underline{Q}}(t)\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{Q}}^{-1}(t)]\,\underline{\underline{Q}}(t)\,e^{t\underline{\underline{J}}} =$$

$$= [\dot{\underline{\underline{Q}}}(t)\,\underline{\underline{Q}}^{-1}(t) + \underline{\underline{Q}}(t)\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{Q}}^{-1}(t)]\,\underline{\underline{X}}(t)$$

és igy

$$\underline{\underline{P}}(t)=\dot{\underline{\underline{Q}}}(t)\underline{\underline{Q}}^{-1}(t)+\underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{Q}}^{-1}(t) \qquad /13/$$

érvényes.

A következőkben igazoljuk, hogy $\underline{\underline{Q}}$ ill. $\underline{\underline{J}}$ differenciálható függvényei $\underline{\underline{P}}$-nek, egyszersmint megadjuk $\underline{\underline{Q}}$ ill. $\underline{\underline{J}}$ Frechet-deriváltját is. E célból /13/-at a

$$\dot{\underline{\underline{Q}}}+\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{J}}-\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{Q}}=\underline{\underline{0}} \qquad /14/$$

alakban irjuk fel; megváltozásaik kielégitik eszerint a

$$\Delta\dot{\underline{\underline{Q}}}+\Delta\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{J}}-\underline{\underline{P}}\Delta\underline{\underline{Q}}=-\underline{\underline{Q}}\,\Delta\underline{\underline{J}}+\Delta\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{Q}}-\Delta\underline{\underline{Q}}\,\Delta\underline{\underline{J}}+\Delta\underline{\underline{P}}\Delta\underline{\underline{Q}} \qquad /15/$$

relációt. A továbbiakban a korlátos T periódusu mátrixok körében bevezetjük az

$$\|\underline{\underline{R}}(t)\|_t=\sup_{t_0\le t\le t_0+T}\|\underline{\underline{R}}(t)\| \qquad /16/$$

normát ($\|\ \|$ itt tetszőleges, de a hasonlósági transzformációra invariáns mátrixnormát jelöl). Igazoljuk mármost, hogy /15/-ben a két legutolsó tag $\|\ \|_t$-normája $\|\Delta\underline{\underline{P}}\|_t^2$ nagyságrendü, amiből leolvasható $\underline{\underline{Q}}$ ill. $\underline{\underline{J}}$ Fréchet-differenciálható volta.

/15/ ugyanis egy olyan lineáris differenciálegyenletrend-szer $\underline{\underline{\Delta Q}}$ -ra vonatkozóan, amelynek baloldalt szereplő "homogén" része azonos /14/-gyel. Emellett $\underline{\underline{\Delta J}}$-t az definiálja, hogy /15/ megoldása T periodusu kell, hogy legyen. /15/ főrészét tehát igy a

$$\underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)} = \int_{t_0}^{t} \underline{\underline{Q}}(t)\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\left\{-\underline{\underline{Q}}(\tau)\underline{\underline{\Delta J}}^{(1)} + \underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\underline{\underline{Q}}(\tau)\right\} d\tau = \\ = \underline{\underline{Q}}(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\,\underline{\underline{Q}}(\tau) - \underline{\underline{\Delta J}}^{(1)}\right\} d\tau \qquad /16/$$

függvény elégiti ki. Ez pedig csak akkor T periódusu, ha

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\left\{\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\underline{\underline{Q}}(\tau) - \underline{\underline{\Delta J}}^{(1)}\right\} d\tau = \underline{\underline{0}}$$

azaz, ha

$$\underline{\underline{\Delta J}}^{(1)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \underline{\underline{Q}}^{-1}(t)\,\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\underline{\underline{Q}}(\tau)\, d\tau \qquad /17/$$

teljesül. Ennek alapján

$$\| \underline{\underline{\Delta J}}^{(1)} \| \leq \| \underline{\underline{\Delta P}} \|_t \qquad /18/$$

azaz

$$\| \underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)} \|_t \leq \| \underline{\underline{Q}}(t) \|_t \cdot T \cdot 2 \cdot \| \underline{\underline{\Delta P}} \|_t = K \, \| \underline{\underline{\Delta P}} \|_t \qquad /19/$$

$\underline{\underline{\Delta Q}}$ ill. $\underline{\underline{\Delta J}}$ egy második közelitését mármost /14/ alapján a

$$\underline{\underline{\Delta Q}}^{(2)} = \underline{\underline{Q}}(t)\int_{t_0}^{t}\{\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\,\underline{\underline{Q}}(\tau) - \underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta Q}}^{1}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta J}}^{(1)} +$$
$$+\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)}(\tau) - \underline{\underline{\Delta J}}^{(2)}\}\,d\tau \qquad /20/$$

formula adja; minthogy $\underline{\underline{\Delta Q}}^{(2)}$ -t is periodikusnak kivánjuk választani, azért innét

$$\underline{\underline{\Delta J}}^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\{\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\,\underline{\underline{Q}}(\tau) - \underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta J}}^{(1)} +$$
$$+\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)}(\tau)\}\,d\tau$$

és igy

$$\underline{\underline{\Delta J}}^{(2)} - \underline{\underline{\Delta J}}^{(1)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\{\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)}(\tau) - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta J}}^{(1)}\}\,d\tau$$

azaz

$$\| \Delta J^{(2)} - \Delta J^{(1)} \| \leq \frac{1}{T}\, T\, \| Q^{-1}(t)\|_t K \,\|\Delta P(t)\|_t^2 = K_1 \|\Delta P(t)\|^2 \qquad /21/$$

Ebből következően

$$\underline{\underline{\Delta Q}}^{(2)} - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)} = \underline{\underline{Q}}(t)\int_{t_0}^{t}\langle \underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\{\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)}(\tau) - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta J}}^{(1)}\} -$$
$$-\{\underline{\underline{\Delta J}}^{(2)} - \underline{\underline{\Delta J}}^{(1)}\}\rangle\, d\tau \; ;$$

azaz

$$\| \underline{\underline{\Delta Q}}^{(2)} - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)} \| \leq T\, \|\underline{\underline{Q}}(t)\|_t\, \|Q^{-1}(t)\|_t \{2K + K_1\}\, \|\underline{\underline{\Delta P}}(t)\|_t^2 \leq$$
$$\leq K_1\{2K + K_1\}\, \|\underline{\underline{\Delta P}}(t)\|_t^2 \qquad /22/$$

Tegyük fel mármost, hogy a

$$\| \underline{\underline{\Delta J}}^{(n+1)} - \underline{\underline{\Delta J}}^{(n)} \| \leq n\{2K + K_1\}^n \,\|\underline{\underline{\Delta P}}(t)\|_t^{n+1} \qquad /23/$$

ill.

$$\| \underline{\underline{\Delta Q}}^{(n+1)}(t) - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(n)}(t) \|_t \leq n\{2K+K_1\}^{n+1} \|\underline{\underline{\Delta P}}(t)\|_t^{n+1} \qquad /24/$$

becslést már n=1,2,...,N-1 esetére már igazoltuk. Minthogy a fentiek mintájára ΔQ N-edik közelitését a

$$\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N+1)}(t) = \underline{\underline{Q}}(t)\int_{t_0}^{t} \langle \underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\{\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\underline{\underline{Q}}(\tau) - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau)\underline{\underline{\Delta J}}^{(N)} + $$
$$+ \underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau)\} - \underline{\underline{\Delta J}}^{(N+1)}\rangle d\tau \qquad /25/$$

reláció révén értelmezzük, és itt $\Delta Q^{(N+1)}(t)$ periódicitását a

$$\underline{\underline{\Delta J}}^{(N+1)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\{\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\underline{\underline{Q}}(\tau) - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau)\underline{\underline{\Delta J}}^{(N)} + \underline{\underline{\Delta P}}(\tau)\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau)\} d\tau \qquad /26/$$

reláció biztositja. Eszerint tehát

$$\underline{\underline{\Delta J}}^{(N+1)} - \underline{\underline{\Delta J}}^{(N)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\{\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)[\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau) - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(N-1)}(\tau)] + $$
$$+ \underline{\underline{\Delta Q}}^{(N-1)}\underline{\underline{\Delta J}}^{(N-1)} - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau)\underline{\underline{\Delta J}}^{(N)}\} d\tau = $$
$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\{\underline{\underline{\Delta P}}(\tau)[\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau) - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(N-1)}(\tau)] - [\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau) - $$
$$- \underline{\underline{\Delta Q}}^{(N-1)}(\tau)]\underline{\underline{\Delta J}}^{N-1} - \underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau)[\underline{\underline{\Delta J}}^{(N)} - \underline{\underline{\Delta J}}^{(N-1)}]\} d\tau$$

és igy

$$\|\underline{\underline{\Delta J}}^{(N+1)}-\underline{\underline{\Delta J}}^{(N)}\| \leq \frac{1}{T} T\|\underline{\underline{Q}}^{-1}(t)\|_t\cdot\|\Delta P(t)\|_t^{N+1}\{(N-1)\cdot(2K+K_1)^N\cdot$$
$$\cdot(1+2K)+2K_1(2K+K_1)^{N-1}\}\leq N(2K+K_1)^{N+1}\cdot\|\underline{\underline{\Delta P}}(t)\|_t^{N+1}$$

és igy /23/ n minden értékére érvényes. Ugyanigy

$$\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N+1)}(\tau)-\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(t)=\underline{\underline{Q}}(t)\int_{t_0}^{t}\langle\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\{\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N-1)}(\tau)\,\underline{\underline{\Delta J}}^{(N-1)}-$$
$$-\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}(\tau)\underline{\underline{\Delta J}}^{(N)}+\underline{\underline{\Delta P}}(t)[\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}-\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N-1)}]\}-[\underline{\underline{\Delta J}}^{(N+1)}-\underline{\underline{\Delta J}}^{(N)}]\rangle d\tau$$

és igy

$$\|\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N+1)}-\underline{\underline{\Delta Q}}^{(N)}\|_t\leq T\|\underline{\underline{Q}}(t)\|_t\cdot\|\underline{\underline{Q}}^{-1}(t)\|_t\cdot\|\underline{\underline{\Delta P}}(t)\|_t^{N+1}\{\langle(N-1)2K(2K+K_1)+$$
$$+2K_1\rangle(2K+K_1)^{N-1}+(N-1)(2K+K_1)^N+N(2K+K_1)^N\}\leq$$
$$\leq N(2K+K_1)^{N+1}\|\underline{\underline{\Delta P}}(t)\|_t^{N+1}$$

azaz /24/ is érvényes n minden értékére. /23/ és /24/ szerint viszont $\{\underline{\underline{\Delta Q}}^{(n)}\}$ ill. $\{\underline{\underline{\Delta J}}^{(n)}\}$ erősen egyenletesen egy periodikus $\underline{\underline{\Delta Q}}(t)$ resp. egy állandó $\underline{\underline{\Delta J}}$-hez konvergál, amelyek kielégitik a /15/ egyenletet. Egyszersmind az is leolvasható innét, hogy $\underline{\underline{\Delta Q}}^{(1)}$ resp. $\underline{\underline{\Delta J}}^{(1)}$ e $\underline{\underline{\Delta Q}}$ -tól, ill. $\underline{\underline{\Delta J}}$ -től legfeljebb egy $O(\|\Delta P(t)\|_t^2)$ normáju tagban különbözhetnek, azaz ezek

$\underline{\underline{Q}}$ ill. $\underline{\underline{J}}$ $\underline{\underline{P}}$ szerinti Fréchet-deriváltjai. Érvényes tehát az

1. tétel: $\underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{P}})$ ill. $\underline{\underline{J}}(\underline{\underline{P}})$ $\underline{\underline{P}}$-nek Fréchet-differenciálható függvényei (hacsak $\underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{P}})$ ill. $\underline{\underline{J}}(\underline{\underline{P}})$ többértelmüségét pl. a $\underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{P}}, t_0) \equiv \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{P}}_0, t_0)$ feltétellel megszüntetjük), éspedig

$$\frac{d\underline{\underline{J}}}{d\underline{\underline{P}}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t} \underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\left(\qquad \right)\underline{\underline{Q}}(\tau)\,d\tau \tag{27}$$

ill.

$$\frac{d\underline{\underline{Q}}}{d\underline{\underline{P}}} = \underline{\underline{Q}}(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau)\cdot\left(\qquad \right)\underline{\underline{Q}}(\tau) - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\underline{\underline{Q}}^{-1}(\xi)\left(\qquad \right)\underline{\underline{Q}}(\xi)\,d\xi\right\}d\tau \tag{28}$$

(Meg kell emlitenünk, hogy a fentiek azt mutatják, hogy $\underline{\underline{J}}$ és $\underline{\underline{Q}}$ analitikus függvényei z-nek, ha $\underline{\underline{P}}$+z $\Delta\underline{\underline{P}}$-hez hozzárendeltnek tekintjük őket, és fenti formuláinkban $\Delta\underline{\underline{Q}}^{(n)}$ resp. $\Delta\underline{\underline{J}}^{(n)}$ éppen az n-edik derivált (a z=o helyen).

Ha tehát ismerünk egy tetszőleges, egymáshoz tartozó $\underline{\underline{Q}}^{(o)}, \underline{\underline{J}}^{(o)}, \underline{\underline{P}}^{(o)}$ hármast, akkor a $\underline{\underline{P}}(t;z) = \underline{\underline{P}}^{(o)}(t) + z[\underline{\underline{P}}(t) - \underline{\underline{P}}^{(o)}(t)]$ együtthatómátrixhoz tartozó $\underline{\underline{Q}}(t,z)$ ill. $\underline{\underline{P}}(t,z)$ kielégitik az alábbi kezdeti-értékfeladatrendszert:

$$\frac{d\underline{\underline{Q}}(t,z)}{dz}=\underline{\underline{Q}}(t,z)\int_{t_0}^{t}\{\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau,z)[\underline{\underline{P}}(\tau)-\underline{\underline{P}}^{(0)}(\tau)]\underline{\underline{Q}}(\tau,z)-$$

$$-\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\underline{\underline{Q}}^{-1}(\xi,z)[\underline{\underline{P}}(\xi)-\underline{\underline{P}}^{(0)}(\xi)]\,\underline{\underline{Q}}(\xi,z)d\xi\}\,d\tau \qquad /29/$$

$$\frac{d\underline{\underline{J}}(z)}{dz}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\underline{\underline{Q}}^{-1}(\tau,z)[\underline{\underline{P}}(\tau)-\underline{\underline{P}}^{(0)}(\tau)]\,\underline{\underline{Q}}(\tau,z)d\tau \qquad /30/$$

$$\underline{\underline{Q}}(t,0)=\underline{\underline{Q}}^{(0)}\,;\quad \underline{\underline{J}}(0)=\underline{\underline{J}}^{(0)}$$

Megjegyezzük még, hogy a fentiekben bemutatott módszer elég általánosan használható olyan problémák megoldására, ahol egy változó operátorsorozattal kell szukcessziv approximációsorozatot konstruálni. Lényegében egy ilyen problémákkal kapcsolatos fixponttételt használtunk ki, amelynek pontos megfogalmazására és általánositásaira egy későbbi munkában részletesen kitérünk.

4.§. Az optimális vezérlések problémaköre

Már a dolgozat első részében (l. [2]) vázoltuk, hogy hogyan lehet az általános optimális vezérlési problémakörre alkalmazni a bevezetett módszert. A kérdéskörre azért térünk vissza, mert ott egzisztenciatételek nem szerepeltek, most pedig épp ezekkel kivánunk foglalkozni. Megfogalmazásunk a következő strukturáju volt: az

$F_0(u_1,u_2)$ függvény képezze le a $B_1 \ni u_1$ és $B_2 \ni u_2$ Banach-terek $B_1 \times B_2$ direkt szorzatát a B_3 Banach térbe, $G_0(u_1,u_2)$ pedig legyen egy valósértékü funkcionál a $B_1 \times B_2$-n. Feladatunk azon $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) \in B_1 \times B_2$ elem meghatározása, amely "rajta van" az $F_0(u_1, u_2) = \Theta$ "absztrakt felületen" és amelyre e felületen G_0 lokális extrenumot vesz fel. Mármost jólismert (l. pl. [3]) hogy amennyiben F_0 és G_0 folytonos parciális deriváltakkal rendelkeznek, megadható egy olyan $\omega_0 \in \bar{B}_3$ elem ($\bar{B}_3$ a B_3-hoz konjugált tér, ω pedig a Lagrange-féle multiplikátor általánositása), hogy

$$\frac{\partial[G_0+\omega F_0]}{\partial u_1} = \frac{\partial[G_0+\omega F_0]}{\partial u_2} = \frac{\partial[G_0+\omega F_0]}{\partial \omega} = \Theta$$

érvényesek $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \omega_0)$ -ban. Tekintsük most a fenti problémának a t valós paramétertől függő általánositását, azaz $\phi(u_1,u_2,t)$ képezze le a $B_1(t) \times B_2(t) \times R$ teret a B_3 Banach térre (feltesszük, hogy $\bigcup_t B_1 = B^{(1)}$ $\bigcup_t B_2 = B^{(2)}$ maguk is Banach terek, konzervativ metrikával, továbbá $\gamma(u_1, u_2, t)$ egy funkciónál a $B_1(t) \times B_2(t)$ téren. Legyen továbbá, hogy γ és φ folytonos parciális deriváltakkal rendelkeznek $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, t_0)$ egy megfelelő környezetében. ($\varphi(u_1, u_2, t_0) \equiv F_0$; $\gamma(u_1, u_2, t_0) \equiv G_0$)

Tekintsük tehát most a t paramétertől függő

$$\gamma(u_1, u_2, t) = extr. \; ; \; \varphi(u_1, u_2, t) = \Theta$$

extrémumproblémát rögzitett t értékek mellett, és tegyük fel, hogy e probléma minden rögzitett $t\in[t_0,t_1]$-re egy $u_1(t)$, $u_2(t)$ megoldással bir, amely t-nek folytonos függvénye.

Érvényes ekkor a

2. tétel. Fenti feltételeink mellett a $\omega(t)$ Lagrange multiplikátor is folytonos függvény minden olyan t pontban, ahol $\|\varphi'_{u_1}\|+\|\varphi'_{u_2}\|>0$ teljesül.

Bizonyitás: A folytonos u_1, u_2 és a még ismeretlen strukturáju ω kielégitik feltételeink alapján a

$$\begin{aligned} &\gamma'_{u_1}(u_1(t),u_2(t),t)+\omega(t)\varphi'_{u_1}(u_1(t),u_2(t),t)=\Theta \\ &\gamma'_{u_2}(u_1(t),u_2(t),t)+\omega(t)\varphi'_{u_2}(u_1(t),u_2(t),t)=\Theta \\ &\varphi(u_1(t),u_2(t),t)=\Theta \end{aligned} \qquad /31/$$

egyenleteket.

Legyen mármost $t_2\in[t_0,t\;)$ olyan pont, ahol $\|\varphi'_{u_1}\|+\|\varphi'_{u_2}\|>0$ teljesül; legyen pl. $\varphi_{u_i}(u_1(t_2),u_2(t_2),t_2)=\psi\neq\Theta$ (i=1 vagy 2). Igy φ'_{u_i} és u_1 ill. u_2 folytonossága miatt. Megadható olyan $\varepsilon(t_2)$, hogy $\|\varphi_{u_i}(u_1(t),u_2(t),t\|\geq\frac{1}{2}\|\psi\|$ $t_2-\varepsilon\leq t\leq t_2+\varepsilon$ -ra még teljesül. Ennek alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\|\omega(t_2+\Delta t)-\omega(t_2)\|=0$

érvényes /31/ szerint ugyanis

$$\gamma'_{u_i}(u_1(t_2+\Delta t),\, u_2(t_2+\Delta t),\, t_2+\Delta t) - \gamma'_{u_i}(u_1(t_2),\, u_2(t_2),\, t_2) =$$
$$= [\omega(t_2) - \omega(t_2+\Delta t)]\, \varphi'_{u_i}(u_1(t_2+\Delta t),\, u_2(t_2+\Delta t),\, t_2+\Delta t) -$$
$$- \omega(t_2)[\varphi'_{u_i}(u_1(t_2+\Delta t),\, u_2(t_2+\Delta t),\, t_2+\Delta t) - \varphi'_{u_i}(u_1(t_2),\, u_2(t_2),\, t_2)]$$

azaz

$$\omega(t_2+\Delta t) - \omega(t_2) = -\varphi'^{-1}_{u_i}(u_1(t_2+\Delta t),\, u_2(t_2+\Delta t),\, t_2+\Delta t)\,\{\gamma'_{u_i}(u_1(t_2+\Delta t),$$
$$,\, u_2(t_2+\Delta t),\, t_2+\Delta t) - \gamma'_{u_i}(u_1(t_2),\, u_2(t_2),\, t_2) + \omega(t_2)[\varphi'_{u_i}(u_1(t_2+\Delta t),$$
$$,\, u_2(t_2+\Delta t),\, t_2+\Delta t) - \varphi'_{u_i}(u_1(t_2),\, u_2(t_2),\, t_2)]\}$$

tehát végül

$$\|\omega(t_2+\Delta t) - \omega(t_2)\| \leq \frac{2}{\|\psi\|}\{\|\gamma'_{u_i}(u_1(t_2+\Delta t),\, u_2(t_2+\Delta t),\, t_2+\Delta t) -$$
$$- \gamma'_{u_i}(u_1(t_2),\, u_2(t_2),\, t_2)\| + \|\omega(t_2)\| \cdot \|\varphi'_{u_i}(u_1(t_2+\Delta t),\, u_2(t_2+\Delta t),\, t_2+\Delta t) -$$
$$- \varphi'_{u_i}(u_1(t_2),\, u_2(t_2),\, t_2)\|\}$$

amiből állitásaink azonnal leolvashatóak.

Ha azonban a $\varphi(u_1, u_2, t) = \Theta$ tartomány t-ben teljesen kompakt (azaz bármely korlátos $(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, t^n$) sorozatból, amely kielégiti az $u_1^{(n)} \in B_1(t^{(n)}),\ u_2^{(n)} \in B_2(t^{(n)})$, $\varphi(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, t^n) = \Theta$ feltételeket, kiválasztható egy konvergens ($u_1^{(n_i)},\ u_2^{(u_i)},\ t^{(n_i)}$) részsorozat, amely az

$(u_1^{(\infty)}, u_2^{(\infty)}, t^{(\infty)})$ elemhez tart, és itt $u_1^{(\infty)} \in B_1(t^{(\infty)})$ $u_2^{(\infty)} \in B_2(t^{(\infty)})$ továbbá a szereplő parciális deriváltak folytonosak és a γ = estr. $\varphi = \Theta$ probléma minden $t \in [t_0, t_1]$ -re egyetlen, egyértelmüen definiált szigoru extremális megoldással rendelkezik, és itt $\|\varphi'_{u_1}\| + \|\varphi'_{u_2}\| > 0$ mindig teljesül, akkor az $(u_1(t), u_2(t))$ extremális "helygörbe" folytonosságát sem kell posztulálnunk, hanem a fenti feltételek alapján igazolni tudjuk.

3.tétel. A fenti feltételek mellett nemcsak a $\omega(t)$ Lagrange-multiplikátor, hanem az $(u_1(t), u_2(t))$ extremális helygörbe is, a $\gamma(u_1(t), u_2(t), t)$ extremális érték is folytonos függvénye a t paraméternek.

Bizonyitás: Ha $(u_1(t), u_2(t))$ pl. $t_2 \in [t_0, t_1]$ pontban nem lenne folytonos, akkor megadhatnánk (kompaktság!) az extremális helyek olyan $\{u_1(t^{(i)}), u_2(t^{(i)})\}$ sorozatát, amelyben $t^i \to t_2$ ha $i \to \infty$ de $\lim_{i\to\infty} \{u_1(t^{(i)}), u_2(t^{(i)})\} =$
$= (\omega_1, \omega_2) \neq (u_1(t_2), u_2(t_2))$ ezzel szemben $\omega_1 \in B_1(t_2)$, $\omega_2 \in B_2(t_2)$ és $\varphi(\omega_1, \omega_2, t_2) = \Theta$ is érvényes. Igy tehát

$$\gamma(\omega_1, \omega_2, t_2) = \gamma(u_1(t_2), u_2(t_2), t_2) + \Delta \quad \text{és itt} \quad \Delta > 0\ ;\ resp < 0$$

attól függően, hogy minimum- vagy maximumproblémát kell megoldanunk. (Itt használjuk fel, hogy feltételeink szerint egyetlen szigoru extremális pontunk van minden rögzitett t-nél). Ha tehát i elég nagy, $\gamma(u_1(t^{(i)}), u_2(t^{(i)}), t^{(i)})$ tetszőlegesen közel fekszik γ folytonossága miatt $\gamma(\omega_1, \omega_2, t_2) + \frac{1}{4}\Delta$-hoz ; ugyanakkor $u_1(t_2), u_2(t_2)$ környezetében megadhatunk olyan ϑ_1, ϑ_2 pontot, hogy $\vartheta_1 \in B_1(t^{(i)}), \vartheta_2 \in B_2(t^{(i)})$ és $\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, t^{(i)}) = \Theta$ is teljesül, végül $\gamma(\vartheta_1, \vartheta_2, t^{(i)})$ tetszőlegesen közel fekszik $\gamma(u_1(t_2), u_2(t_2), t_2) + \frac{3}{4}\Delta$ -hoz. Ez a tény azonban ellentmond annak, hogy $(u_1(t^{(i)}), u_2(t^{(i)}))$ a t^{i} -hez tartozó extremumhely, és igy állitásunkat igazoltuk.

__4. tétel:__ Tegyük most fel, hogy φ és γ az $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, t_0$ hely egy megfelelő környezetében folytonos második parciális deriváltakkal rendelkeznek, továbbá az

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial u_1^2} + \omega\frac{\partial^2 F_0}{\partial u_1^2}\right)(\Delta u_1)(\Delta u_1) + \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial u_1 \partial u_2} + \omega\frac{\partial^2 F_0}{\partial u_1 \partial u_2}\right)(\Delta u_1)(\Delta u_2) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial u_2^2} + \omega\frac{\partial^2 F_0}{\partial u_2^2}\right)(\Delta u_2)(\Delta u_2)$$

bilineáris alakzat $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, t_0$ -ban szigoruan definit (éspedig negativ, resp. pozitiv definit attól függően, hogy minimum maximumproblémát tekintünk), továbbá

$\|\varphi'_{u_1}\| + \|\varphi'_{u_2}\| > 0$

Ekkor az $u_1(t), u_2(t), \omega(t)$ rendszer folytonosan differenciálható is t_0-ban, kielégitik ott a

$$
\begin{aligned}
&\gamma''_{u_1u_1}\dot{u}_1 + \gamma''_{u_1u_2}\dot{u}_2 + \gamma''_{u_1t} + \dot{\omega}\varphi'_{u_1} + \omega(\varphi''_{u_1u_1}\dot{u}_1 + \varphi''_{u_1u_2}\dot{u}_2 + \varphi''_{u_1t}) = \Theta \\
&\gamma''_{u_1u_2}\dot{u}_1 + \gamma''_{u_2u_2}\dot{u}_2 + \gamma''_{u_2t} + \dot{\omega}\varphi'_{u_2} + \omega(\varphi''_{u_1u_2}\dot{u}_1 + \varphi''_{u_2u_2}\dot{u}_2 + \varphi''_{u_2t}) = \Theta \qquad (32) \\
&\varphi'_{u_1}\dot{u}_1 + \varphi'_{u_2}\dot{u}_2 + \varphi'_t = \Theta
\end{aligned}
$$

és t_0 egy környezetében is kielégitik az extrémumfeladatot /32/ integrálgörbéi mentén.

Bizonyitás: Mindenekelőtt igazoljuk, hogy ha t_0-ban /31/ teljesül, és a tekintett bilineáris alakzat megfelelő értelemben definit, ez biztositja azt, hogy a szóbanforgó helyen lokális extrémum található. Érvényes itt ugyanis, hogy elég kis Δu_1 és Δu_2 mellett a $\Delta(\gamma + \omega\varphi)$ kifejezés stabil előjelü, azaz $\gamma + \omega\varphi$ -nek extrémumhelye van. Emellett $\Delta(\gamma + \omega\varphi) = \Delta\gamma + \omega\Delta\varphi$; ha pedig olyan $(\Delta u_1, \Delta u_2)$ párokra szoritkozunk, amelyek φ un. érintőhalmazához tartoznak (és /31/ csak ilyeneket enged meg), akkor $\|\Delta\varphi\| = O\left(\sqrt{\|\Delta u_1\|^2 + \|\Delta u_2\|^2}\right) = O(\|\Delta\gamma\|$ is teljesül. Ezen érintőhalmazon tehát $\Delta\gamma$ előjele is egyértelmüen van meghatározva, amit bizonyitani akartunk.

Az a feltétel, hogy a tekintett bilineáris alakzat szigoruan definit, és $\|\varphi'_{u_1}\| + \|\varphi'_{u_2}\| > 0$ biztositja a /32/ alatti rendszer $\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$ és $\dot{\omega}$ -re történő megoldhatóságát, ill. az $\dot{u}_1$-ot, $\dot{u}_2$-ot és $\dot{\omega}$-ot kifejező kapcsolat t_0-beli folytonosságot. Ez pedig a 3. tétel alapján bizonyitja állitásunkat.

Idézett irodalom:

[1] Frey T: Polinomok felbontása Hurwitz- és antihurwitz komponensre. Közlemények e számában

[2] Frey T.: Egyenletek megoldása szakaszonkénti perturbációval. MTA Számitástechnikai Központja Közlemények 1. (1966 szeptember)

[3] Ljusternik L.A. - Sobolew, W.I. Elemente der Funktionalanalysis. Berlin 1960 Akademie Verlag.

Táblázatok [2] -höz, illetve e közleményhez

1.-2. Táblázat:

Növekmények összehasonlitása "normál" (1) ill. "erősen meredek" (2) integrálgörbék esetén. Az 1. oszlopban a növekmény pontos értéke, a 2. oszlopban a Runge-Kutta eljárás növekménye, a 3. 4. ill. 5. oszlopban, pedig a 2 (24), (27) ill. (28) alatti formulája révén számitott növekmény szerepel. Az 1. táblázatban az első sor a h=0,05, a második a h=0,2, a harmadik a h=0,8 értékhez tartozik. A 2. táblázatban az első sor a $h=10^{-3}$, a második az 5.10^{-3}, a harmadik a 2.10^{-2} értékhez számitott növekményeket tartalmazza.

1./

0,0246951	0,024723	0,024766	0,024699	0,0246952
0,0954455	0,09427	0,09672	0,095816	0,0954741
0,3416407	0,307966	0,37541	0,367730	0,3452704

2./

0,1546352	0,71825	0,1652	0,15973	0,154702
0,6241350	24,835	1,1732	0,85447	0,62937
1,5349283	72,445	2,5843	1,97721	1,59818

3. - 4. Táblázat

A 3. és a 4. táblázat a [2] alatti (29) - (34) képletek értékét mutatja ugyanazon függvények esetén, mint az 1.-2. táblázatban, az ottani harmadik oszloppal célszerü az összehasonlitást végezni, mert az annak megfelelő formula a bázisformula. A második oszlop a becsült hiba a kétszeres lépésközhöz tartozó formula alapján

3.

0,024699	4.10^{-4}
0,095543	6.10^{-3}
0,348231	2.10^{-2}

4.

0,1554	2.10^{-2}
1,8472	5
24,3830	3.10^{2}

5. Táblázat

Szinguláris pontból induló növekmények összehasonlítása a 2 dolgozat (51) ill. (52) képletek alapján számított értékkel. Az első sor a h=0,001, a második a h=0,005, a harmadik a h=0,01 értékhez tartozik.

0,17425	0,17472	0,17435
0,74317	0,75012	0,74872
1,12042	1,25314	1,16820

6. Táblázat

Az (1) - (2) formula erejét veti egybe a másodrendü Euler-Couchy ill. a harmadrendü Runge-Kutta formulával h=0,01, 0,05 és 0,1 mellett. Az első oszlop a pontos növekményt adja.

0,0245637	0,0245642	0,0245645	0,0245639
0,1432752	0,1432912	0,1433042	0,1432803
0,2756342	0,2757019	0,2757252	0,275651

Summary

§.2. of the paper describes the construction of the formulas of the so-called "embracing" Runge-Kutta type. These are utilizing in constructing the new increment also the auxiliary increments calculated in the previous steps, but only while choosing the arguments, for so the inherited fault troubles the new increment only through one h factor which ensures the numerical stability of the formulas, being at the same time more economical in its requirements of operations than the other known modified formulas of Runge-Kutta type. §§ 3. and 4. present two very important areas of the new applications of the principle and demonstrate new theses of continuity required by then, out of the province of linear differential equations with periodical co-efficients on the one hand, and out of that of the numerical solution of optimal control on the other.

Speciális optimalizálási feladatok megoldása

Szelezsán János

Az alábbiakban felirjuk három speciális optimalizálási feladat megoldását. Ezek közül kettő "rávezérlési" feladatnak tekinthető, abban az értelemben, hogy a "vezérlőfüggvényt" ugy kell megválasztani, hogy a folyamatot leiró differenciálegyenlet megoldása bizonyos pontokban adott értéket vegyen fel és emellett a vezérlőfüggvényre vonatkozó kvadratikus funkcionál értéke minimális legyen. A harmadiknál egy kvadratikus célfüggvényt optimalizálunk, adott feltétel mellett.

A/ A "rávezérlési" feladatokat az alábbi tétel segitségével oldjuk meg.

Legyen $f \in L_2$ és tekintsük a következő feladatot:

$$\min (f,f)$$

$$\text{ha } (f,q_n) = C_n \qquad n=1,2,\dots,N$$

ahol $q_n \in L_2$ adott függvények, C_n pedig adott konstans. /A ( ) zárójel a skalárszorzat jele./

Tétel:

Ha a $q_1,q_2,\dots,q_n$ függvények lineárisan függetlenek, akkor (f,f) funkcionál minimumát az

$$f^* = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_n$$

függvény adja, ahol az α_n együtthatók az

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + \dots & \dots + a_{1n}\alpha_n = c_1 \\ & \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + \dots & \dots + a_{nn}\alpha_n = c_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai, ahol

$$a_{ij} = (q_i, q_j)$$

Bizonyitás:

Jelöljük $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n)$-el a $q_1, \dots, q_n$ elemek által generált lineáris alteret. Megmutatjuk, hogy a megoldás ezen altér eleme.

Jelöljük a minimumot adó függvényt f^* -al. Ismeretes, hogy az f^* elem

$$f^* = f' + f''$$

alakban állitható elő, ahol $f' \in \mathcal{L}$, $f'' \in \bar{\mathcal{L}}$; ($\bar{\mathcal{L}}$ az $\mathcal{L}$ altér ortogonális komplementere).

De

$$(f^*, f^*) = (f', f') + (f'', f'')$$

Viszont f^* megengedett megoldás, tehát

$$c_n = (f^*, q_n) = (f' + f'', q_n) = (f', q_n) + (f'', q_n) = (f', q_n)$$

(mivel $(f'', q_n) = 0$)

Azt kaptuk tehát, hogy az f' függvényen az (f,f) funkcionál kisebb értéket vesz fel, mint f^*-on. A feltevés szerint azonban f^* optimális megoldás, tehát

$$(f^*, f^*) = (f', f') + (f'', f'')$$

csak ugy teljesülhet, ha $(f'', f'') = 0$ azaz $f'' \equiv 0$. De ez éppen azt jelenti, hogy

$$f^* \in \mathcal{L} \quad (q_1, \dots, q_n)$$

azaz

$$f^* = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_n$$

Az α_n számokat abból a feltételből kapjuk, hogy

$$(f^*, q_i) = c_i \qquad i=1,2,\dots,N$$

azaz

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n q_n, q_i \right) = c_i$$

vagyis

$$(q_1,q_1)\alpha_1+\dots\dots+(q_1,q_n)\alpha_n=c_1$$

$$(q_n,q_1)\alpha_1+\dots\dots+(q_n,q_n)\alpha_n=c_n$$

A feltétel szerint azonban a $q_1, q_2, \dots, q_n$ függvények lineárisan függetlenek, ezért a fenti egyenletrendszernek létezik megoldása.

A.1/ <u>Optimális "rávezérlés" egy pontra</u>

Tekintsük a következő vezérlési feladatot.

Egy folyamatot a

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=a_i^2\frac{\partial u_i}{\partial x^2}\qquad i=1,2,\dots,n \qquad 1/$$

parabolikus differenciálegyenlet-rendszer ir le az

$$\begin{aligned} u_i(x,o)&=0 && x\geq 0\\ u_i(0,t)&=f(t) && 0\leq t\leq t_0 \end{aligned}\qquad 2/$$

feltételek mellett.

Jelöljük $u_i\,(x,t)$-vel az 1/ rendszer i-edik egyenletének megoldását a 2/-es feltétel mellett.

Legyen c egy adott konstans és (x_o, t_o) egy adott pont.

Feladat: Keressünk olyan $f(t)$ peremfeltételt, amelyre

$$u_i\,(x_o, t_o) = C \qquad i = 1, 2, 3, \dots n \tag{3/}$$

és amelyen a

$$J(f(t)) = \int_0^{t_o} f^2(t)\,dt \tag{4/}$$

funkcionál minimumot vesz fel.

A feladatot az előbbi tétel felhasználásával oldjuk meg.

Ismeretes, hogy az i-edik differenciálegyenlet megoldása a 2/ peremfeltétel mellett

$$u_i(x,t) = \int_0^t K_i\,(x, t-s)\, f(s)\, ds$$

ahol

$$K_i\,(x, t-s) = \frac{x}{2a_i \pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a_i^2(t-s)}} \cdot (t-s)^{-\frac{3}{2}}$$

Emiatt a 3/-as feltételek fennállása azt jelenti, hogy teljesülniök kell az alábbi egyenlőségeknek:

$$\int_0^{t_o} K_i\,(x_o, t_o - s)\, f(s)\, ds = C$$

Eszerint olyan f(s) függvényt kell keresnünk, amely kielégiti a 4/-es integrál-egyenletrendszert, és minimalizálja a

$$J(f)=\int_0^{t_0} f^2(s)\, ds$$

funkcionált.

A korábbi jelölésekkel a feladat igy irható fel:

$$\min\ (f,f)$$

ha $(K_i,f) = c \qquad i=1,2,\ldots,n$

A feladat megoldása, ha a $K_i(x_0,t_0-s)$ függvények lineárisan függetlenek a 2/ tétel alapján

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_i(x_0,t_0-s)$$

ahol az α_i számok az

$$a_{11}\alpha_1 + \ldots \quad \ldots + a_{1n}\alpha_n = C$$

$$a_{n1}\alpha_1 + \ldots \quad \ldots + a_{nn}\alpha_n = C$$

egyenletrendszer megoldásai, és

$$a_{ij} = \int_0^{t_0} K_i(x_0,t_0-s)\, K_j(x_0,t_0-s)\, ds.$$

A.2/ <u>Adott pontokon átmenő optimális megoldás parabolikus differenciálegyenlet esetén</u>

Tekintsük az

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{5/}$$

parabolikus differenciálegyenletet az

$$u(x,o) = 0 \qquad x \geq 0$$
$$u(o,t) = f(t) \qquad 0 \leq t \leq t_o$$

feltételek mellett. Legyenek adottak az $(x_1,t_o),\dots,(x_n,t_o)$ pontok és a $c_1,c_2,\dots,c_n$ számok.

<u>Feladat:</u> Keressünk olyan $f(t)$ peremfeltételt, amelyre az 5/ differenciálegyenlet $u(x,t)$ megoldása az $(x_1,t_o),\dots,(x_n,t_o)$ pontokban $c_1,\dots,c_n$ értéket vesz fel és amelyre $\int_0^{t_o} f^2(t)dt$ minimális.

Az előbbi feladathoz hasonlóan, felhasználva, hogy

$$u(x_i,t_o) = \int_0^{t_o} K(x_i,t_o-s)\, f(s)\, ds$$

ahol

$$K(x_i,t_o-s) = \frac{x_i}{2a\pi} \cdot e^{-\frac{x_i^2}{4a^2(t_o-s)}} \cdot (t_o-s)^{-\frac{3}{2}}\, ds$$

a megoldás

$$f^{*} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(x_i, t_0 - s)$$

alakban állitható elő, ahol az α_i együtthatókat, feltéve, hogy a $K(x_i, t_0 - s)$ függvények lineárisan függetlenek az

$$a_{11}\alpha_1 + \ldots \ldots + a_{1n}\alpha_n = c_1$$

$$a_{n1}\alpha_1 + \ldots \ldots + a_{nn}\alpha_n = c_n$$

egyenletrendszerből kapjuk, ahol

$$a_{ij} = \int_0^{t_0} K(x_i, t_0 - s)\, K(x_j, t_0 - s)\, ds$$

B/ A következő feladatban tekintsünk olyan rendszert, amelyet a

$$Q(x,t) = \int_0^{t} K(x,t,s)\, u(s)\, ds$$

összefüggés ir le, ahol $K(x,t,s)$ adott magfüggvény. Legyenek (x_0, T), $(x_1, T), \ldots, (x_n, T)$ adott pontok. Legyen

$$U = \left\{ u(t) : \int_0^{T} u^2(t)\, dt = 1, \quad 0 \leq t \leq T \right\}$$

Legyenek $c_1, c_2, \dots, c_n$ adott konstansok.

Feladat:

$$\min_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} [c_i - Q(x_i, T)]^2$$

Tétel:

Vegyük az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol

$$a_{ij} = \int_0^T K(x_i, T, s)\, K(x_j, T, s)\, ds$$

Állitás:

Ha a $(c_1, \dots, c_n)$ pont a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & \dots & \dots & x_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

másodrendü felületen van, akkor a feladatnak létezik megoldása, mégpedig

$$\min_{u \in U} \sum_{i=1}^{n} \left(c_i - Q(x_i, T)\right)^2 = 0$$

és a megoldás:

$$u^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(x_i, T, t)$$

ahol az $\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots, \alpha_n$ **együtthatók az**

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + \dots & \dots + a_{1n}\alpha_n = c_1 \\ & \\ a_{n1}\alpha_1 + \dots & \dots + a_{nn}\alpha_n = c_n \end{aligned} \qquad 6/$$

egyenletrendszer megoldásai.

Bizonyitás:

Megmutatjuk, hogy ha $u^*(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K(x_j, T, t)$ és az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_n$ számok kielégitik a 6/ egyenlet-rendszert, akkor

$$Q^*(x_i,T) = \int_0^T K(x_i,T,s)\, u^*(s)\, ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_0^T K(x_i,T,s)\, K(x_j,T,s)\, ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_j\, a_{ij} = c_i$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i - Q(x_i,T))^2 = 0$$

Az $u^*(t)$ helyen tehát a funkcionál eléri a 0 minimum-értéket. Be kell látni még, hogy $u^*(t) \in U$.

Először is világos, hogy

$$\int_0^T u^*(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$$

Szorozzuk ugyanis meg a 6/ egyenletrendszer i-edik egyenletét α_i -vel és adjuk ezeket az egyenleteket össze.

Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j a_{ij}$$

Ugyanakkor

$$\int_0^T u^{*2}(t)\, dt = \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i K(x_i, T, t)\Big]^2 dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j K(x_i, T, t)\, K(x_j, T, t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j a_{ij}$$

Megmutatjuk, hogy a tett feltevés mellett

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = 1$$

Ugyanis

$$\alpha_i = \frac{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overset{\overset{i}{\vee}}{c_1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Igy a feltétel szerint

$$\begin{vmatrix} 1 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\left(\sum_{i=1}^{n} |A| \alpha_i c_i - |A|\right) = 0$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{n} |A| \alpha_i c_i = |A|$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = 1$$

tehát

$$\int_0^T u^{*2}(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = 1$$

S u m m a r y

Solution of special optimalization problems

János Szelezsán

A solution to three special optimalization problems is given. Two of them can be considered to be a problem of control in the sense that the control function must be chosen in a way that the differential equation that describes the process should take given values in certain places and besides the value of the quadratic functional with respect to the control function should be minimal. The third solution concerns the optimalization, under given conditions, of a quadratic object function.

Optimális vezérlés bizonyos tipusu parciális differenciálegyenletek esetén.

Szelezsán János

Tekintsünk olyan folyamatokat, amelyeknek viselkedését az

$$L\cdot u=0 \qquad 1/$$

parciális differenciálegyenlet irja le:

$$u = u(x,t)$$
$$x = [x_1, x_2, \dots \dots, x_n]$$

és tegyük fel, hogy a perem-, valamint a kezdeti feltételek olyanok, hogy az 1/ differenciálegyenlet megoldása

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i\, u_i(t)\, v_i(x) \qquad 2/$$

alaku, $b_i=\int_{\Omega} \varphi(x)\, v_i(x)\, d\Omega$ ahol a $\{v_i(x)\}$ rendszer az Ω tartományban ortonormált teljes függvényrendszer $(\Omega \in R_n\ ;\ d\Omega = dx_1 \dots\dots dx_n)$. A $\varphi(x)$ függvényt tekintsük vezérlő függvénynek.

Ismeretes, hogy a matematikai fizika számos differenciálegyenletének megoldását lehet 2/ alakban előállitani. 2/ tipusu megoldása van a matematikai fizika számos olyan feladatának, amelynél a $\varphi(x)$ függvény a t=o ponthoz tartozó kezdeti feltétel. Ebben az esetben a $\varphi(x)$ függvény a tartomány határán történő vezérlést jelenti.

A/ Lineáris korlátozó feltétel

Legyen A egy konstans; legyen p(x) egy adott függvény. Vezessük be a $c_i = \int_{\Omega} p(x)\, v_i(x)\, d\Omega$ jelölést.

Legyen a ϕ halmaz az alábbi "hipersík":

$$\phi = \left\{ \varphi(x) : \int_{\Omega} p(x)\, \varphi(x)\, d\Omega = A \right\}$$

Legyen q(x) egy adott függvény, legyen

$$a_i = \int_{\Omega} q(x)\, v_i(x)\, d\Omega$$

Tekintsük a

$$J = \int_{\Omega} [q(x) - u(x,t_o)]^2\, d\Omega$$

funkcionált.

A.1.Feladat: Keressük meg a ϕ halmaznak azt az elemét, amelyen a J funkcionál minimumot vesz fel.

A feladat megoldásához szükségünk lesz az alábbi segédtételre:

Lemma

Tekintsük az

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \qquad 3/$$

funkcionált, és a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = a \qquad 4/$$

feltételt, ahol α_i (i=1,2,...) adott. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$$

Állitás: az f funkcionál minimumát a 4/ feltétel mellett

$$x_i^* = \frac{a}{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2} \alpha_i \qquad i=(1,2,\dots)$$

adja.

Bizonyitás: Megmutatjuk, hogy minden más, a 4/ feltételt kielégitő $x_1, \dots, x_n, \dots$ értékekre $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*2}$

A 4/ feltétel szerint ugyanis

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = a$$

azaz

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right)^2 = a^2$$

Viszont a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség alapján

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \geq \frac{a^2}{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2}$$

Ugyanakkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*2} = \frac{a^2}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\right)^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = \frac{a^2}{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2}$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{*2}$$

A fenti lemma segitségével bizonyitjuk az alábbi tételt.

<u>Tétel:</u>

Tegyük fel,

1/ hogy $0 < k_2 < |\mu_i(t_0)| < k_1$

2/ hogy létezik a feladatnak megoldása

3/ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i c_i < \infty$

Akkor a megoldás

$$\varphi^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i v_i(x)$$

ahol

$$b_i = \frac{a_i - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{a_i c_i}{u_i(t_0)} - A}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{u_i^2(t_0)} c_i^2} \cdot \dfrac{1}{u_i(t_0)} \cdot c_i}{u_i(t_0)} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

<u>Bizonyitás:</u>

A J funkcionál a következő alakban irható fel:

$$J = \int_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i(x) - \sum_{i=1}^{\infty} b_i u_i(t_0) v_i(x) \Big)^2 d\Omega$$

Mivel mindkét az integrál alatt szereplő sor konvergens, ezért a

$$\sum_{i=1}^{\infty} [a_i - b_i u_i(t_0)] v_i(x)$$

Fourier sor konvergens és valamilyen $\varrho(x)$ függvényt állit elő.

Ekkor

$$J = \int_{\Omega} \varrho^2(x) d\Omega = \| \varrho(x) \| = \sum_{i=1}^{\infty} [a_i - b_i u_i(t_0)]^2$$

Az 5/ feltétel alakja viszont

$$\int_{\Omega} [p(x) \sum_{i=1}^{\infty} b_i v_i(x)] d\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_{\Omega} p(x) v_i(x) d\Omega = A$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i c_i = A$$

Vezessük be az $a_i - b_i u_i(t_0) = I_i$

helyettesitést. Ekkor

$$b_i = \frac{a_i - I_i}{u_i(t_0)}$$

A funkcionál ekkor

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} I_i^2$$

a feltétel pedig

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{u_i(t_0)} I_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i c_i}{u_i(t_0)} - A$$

lesz

Mivel

$$\left| \frac{1}{u_i(t_0)} \right| < K$$

ezért

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i c_i}{u_i(t_0)} < \infty$$

Hasonlóan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u_i(t_0)^2} c_i^2 < \infty$$

ezért alkalmazható a lemma.

Eszerint a minimumot az

$$I_i = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i c_i}{u_i(t_0)} - A}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u_i^2(t_0)} c_i^2} \cdot \frac{1}{u_i(t_0)} c_i$$

vagyis a

$$b_i = \frac{a_i - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i c_i}{u_i(t_0)} - A}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u_i^2(t_0)} c_i^2} \cdot \frac{1}{u_i(t_0)} c_i}{u_i(t_0)}$$

helyen éri el a J funkcionál.

A.2.Feladat:

Az előző módszerrel megoldható a következő feladat is.

Minimalizálandó a

$$J = \int_{\Omega} u^2(x,t_0)\, d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \varphi^2(x)\, d\Omega$$

funkcionál $(\gamma > 0)$ a $\int_{\Omega} p(x)\varphi(x)\, d\Omega = A$ feltétel mellett (ahol $p(x)$; $u(x,t_0)$; $\varphi(x)$ jelentése ugyanaz, mint előbb).

Ebben az esetben a J funkcionál

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 u_i^2(t_0) + \gamma \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \left(u_i^2(t_0) + \gamma\right)$$

alakban irható fel, a feltétel pedig, mint fentebb:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i b_i = A$$

A $b_i \sqrt{u_i^2(t_0)+\gamma} = I_i$ helyettesitéssel a funkcionál

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} I_i^2$$

a feltétel pedig

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\sqrt{u_i^2(t_0)+\gamma}} I_i = A$$

alaku.

Tegyük fel, hogy $|u_i(t_0)| < K$. Akkor

$$\frac{c_i^2}{u_i^2(t_0)+\gamma} \leq \frac{c_i^2}{\gamma}$$

Alkalmazhatjuk tehát a lemmát; azt kapjuk, hogy

$$I_i = \frac{A}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{u_i^2(t_0)+\gamma}} \cdot \frac{c_i}{\sqrt{u_i^2(t_0)+\gamma}}$$

azaz

$$b_i^* = \frac{A}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{u_i^2(t_0)+\gamma}} \cdot \frac{c_i}{u_i^2(t_0)+\gamma}$$

A megoldás tehát

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^* v_i(x)$$

A.3.Feladat:

Az előbbi módszerrel megoldható a következő feladat is. Meghatározandó

$$\min_{\varphi \in \Phi} \int_{\Omega} [\varphi(x) - u(x,t_0)]^2 \, d\Omega$$

(Az $u(x,t_0)$ $\varphi(x)$, $p(x)$ függvények és a $\emptyset$ halmaz jelentése ugyanaz, mint előbb).

Ebben az esetben a célfüggvény

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} [b_i(1 - u_i(t_0))]^2$$

és a feltétel

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i b_i = A$$

alaku lesz.

Legyen:

$$b_i(1 - u_i(t_0)) = I_i$$

azaz

$$b_i = \frac{I_i}{1 - u_i(t_0)}$$

Akkor

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} I_i^2$$

és

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{1-u_i(t_0)} I_i = A$$

Tegyük fel, hogy

$$\left|\frac{1}{1-u_i(t_0)}\right| < K$$

akkor

$$\sum^{\infty} \frac{c_i^2}{[1-u_i(t_0)]^2} < \infty$$

Alkalmazva a lemmát, azt kapjuk, hogy

$$I_i = \frac{A}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{[1-u_i(t_0)]^2}} \cdot \frac{c_i}{1-u_i(t_0)}$$

azaz

$$b_i^* = \frac{\frac{A}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{(1-u_i(t_0))^2}} \cdot \frac{c_i}{1-u_i(t_0)}}{1-u_i(t_0)}$$

vagyis a megoldás

$$\varphi^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^* v_i(x)$$

B. Közelitő megoldás kvadratikus feltétel esetén

B.1.Feladat:

Tekintsük a

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} [q(x) - u(x,t_0)]^2 \, d\Omega$$

funkcionált, ahol az előbbiekhez hasonlóan

$$u(x,t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \, u_i(t_0) \, v_i(x)$$

valamilyen parciális differenciálegyenlet megoldása,

$b_i = \int_{\Omega} \varphi(x) \, v_i(x) \, d\Omega$ és $\{v_i(x)\}$ egy ortonormált rendszer. A vezérlőhatást jelentse $\varphi(x)$. Legyen

$$\Phi = \left\{ \varphi(x) : \int_{\Omega} \varphi^2(x) \, d\Omega = 1 \right\}$$

Keressük meg a $J(\varphi)$ funkcionál minimumát a Φ halmazon.

Ebben az esetben célszerü a feladatot matematikai programozási feladatra visszavezetni. /A módszer Ritz-tipusu módszer./

Vegyük az u (x,t) megoldás N-edik szeletét és tekintsük ezen a funkcionált: Ekkor

$$J(\varphi_N) = \int_{\Omega} [q(x) - u^{(N)}(x,t_0)]^2 \, d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} q^2(x) d\Omega - 2 \int_{\Omega} q(x) \, u^{(N)}(x,t_0) \, d\Omega + \int_{\Omega} u^{(N)^2}(x,t_0) =$$

$$= \int_{\Omega} q^2(x) d\Omega - 2 \sum_{i=1}^{N} b_i \, u_i(t_0) \, a_i + \sum_{i=1}^{N} b_i^2 \, u_i^2(t_0)$$

A feltétel alakja

$$\sum_{i=1}^{N} b_i^2 = 1$$

Az N-edik szeletre vonatkozóan tehát a $b_1, b_2, \dots, b_N$ változókban egy kvadratikus programozási feladatot kapunk: minden $N < \infty$ -re vonatkozóan ki tudjuk számitani a $b_1^*, b_2^*, \dots \dots, b_N^*$ minimumhelyet. Az ezen b_i^* "Fourier" együtthatókhoz tartozó

$$\varphi_N^*(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i^* \, v_i(x)$$

függvényt tekintjük a feladat megoldása N-edik közelitésének.

Tétel: Tegyük fel, hogy az eredeti feladatnak létezik $\varphi^*(x) \in \phi$ megoldása és $\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t_0) < \infty$

Akkor

$$\lim_{N \to \infty} J(\varphi_N^*) = J(\varphi^*)$$

Bizonyitás:

Jelöljük Q_N -nel a $v_1, v_2, \dots \dots, v_N$ elemek által kifeszitett $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i$ lineáris térnek azt a részhalmazát, amelynek elemeire

$$\int_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_i\Big)^2 d\Omega = 1$$

Először bebizonyitjuk, hogy bármely ε_1 esetén tetszőleges $\varphi \in \phi$ függvényhez megadható olyan N szám, hogy $\| \varphi(x) - \varphi_N(x) \| < \varepsilon_1$, ahol $\varphi_N(x) \in Q_N$

A $v_i(x)$ rendszer teljessége miatt ugyanis bármilyen $\varphi(x)$ esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)$ összeg (a $\varphi(x)$ függvény Fourier sorának szelete) hogy

$$\| \varphi(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) \| < \varepsilon^2$$

$$b_i = \int_{\Omega} \varphi(x) v_i(x) \, d\Omega$$

Viszont

$$\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) \notin Q_N$$

A $\sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)$ szelethez azonban található

olyan $\sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \in Q_N$, hogy

$$\| \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \| < \varepsilon^2 \qquad 6/$$

Ugyanis $\sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \in Q_N$ azt jelenti,

hogy

$$\| \sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \| = 1$$

azaz $\sum_{i=1}^{N} b_i'^{\,2} = 1$

6/ viszont azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{N} (b_i - b_i')^2 < \varepsilon^2$$

Mivel $\|\varphi(x)\| = 1$, ezért $\|\sum_{i=1}^{\infty} b_i v_i(x)\| = 1$

azaz $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 = 1$. Ebből viszont

$$\sum_{i=1}^{N} b_i^2 = 1 - \sum_{N+1}^{\infty} b_i^2 \qquad 7/$$

Ugyanakkor:

$$\varepsilon^2 > \|\varphi(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)\| = \|\sum_{N+1}^{\infty} b_i v_i(x)\|$$

miatt $\sum_{N+1}^{\infty} b_i^2 < \varepsilon^2$ és ezt összevetve

7/-tel azt kapjuk, hogy

$$1 - \varepsilon^2 < \sum_{i=1}^{N} b_i^2 < 1$$

A 6/ feltétel tehát a következőképpen fogalmazható:

Olyan b_i' számokat kell keresni, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{N} (b_i - b_i')^2 < \varepsilon^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} b_i'^{\,2} = 1$$

$$1 - \varepsilon^2 < \sum_{i=1}^{N} b_i^2 < 1 \qquad 8/$$

A fenti egyenlőtlenség rendszer azonban tetszőleges (a 8/ feltételnek eleget tevő) b_i esetén megoldható. Mindig vehetők ugyanis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \dots, \varepsilon_N$ számok úgy, hogy $b_i' = b_i + \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \dots \dots, N)$ választással

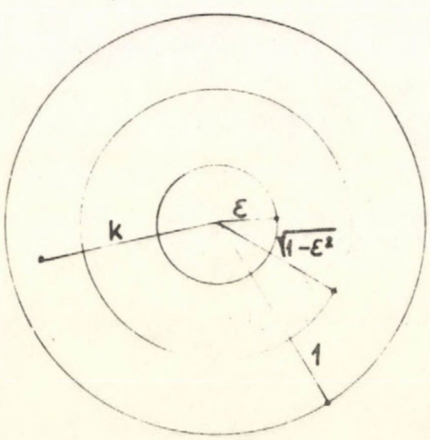
$$\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2 < \varepsilon^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} (b_i + \varepsilon_i)^2 = 1$$

$$1 - \varepsilon^2 < \sum_{i=1}^{N} b_i^2 < 1$$

legyen.

Az első egyenlőtlenség ugyanis egy ε sugaru, N dimenziós gömb belső pontjait jelenti; a második pedig egy egységsugaru $(b_1, \dots, b_N)$ középpontu gömb határpontjait. A második gömb középpontja azonban a $\sqrt{1-\varepsilon^2}$ és 1 sugaru gömbök közötti részben van.



Legyen a $(b_1, \dots, b_N)$ középpont távolsága a középponttól k, azaz

$$k = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} b_i^2}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2} < k < 1$$

Világos, hogy

$$k+\varepsilon>1$$

ugyanis

$$\sqrt{1-\varepsilon^2}<k$$

$$1-\varepsilon^2<k^2$$

$$1<k^2+\varepsilon^2<k+\varepsilon$$

Ez azt jelenti, hogy a $(b_1,\dots,b_N)$ középpontu egységsugaru gömb határpontjai halmazának és az ε sugaru középpontu gömb belső pontjai halmazának van közös eleme. Azt kaptuk tehát, hogy a b_i' együtthatók megválaszthatók ugy, hogy

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \right\| < \varepsilon^2$$

legyen.

Ekkor viszont

$$\left\| \varphi(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \right\| =$$

$$= \left\| \varphi(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \varphi(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i' v_i(x) \right\| <$$

$$< 2\varepsilon^2$$

Ez azt jelenti tehát, hogy bármely $\varphi(x) \in \Phi$ esetén található $\varphi_N(x) \in Q_N$, hogy

$$\| \varphi(x) - \varphi_N(x) \| < \varepsilon_1$$

Bebizonyitjuk, hogy ha

$$\| \overset{*}{\varphi}(x) - \varphi_N(x) \| < \varepsilon \text{, okkor } J(\varphi_N) - J(\varphi^*) < \delta$$

Ugyanis

$$0 \leq J(\varphi_N) - J(\varphi^*) = \| q(x) - u_N(x, t_0) \|^2 -$$
$$- \| q(x) - u^*(x, t_0) \|$$

ahol $u_N(x, t_0)$ a φ_N, $u^*(x, t_0)$ pedig a φ^* kezdőfeltételhez tartozó megoldás.

$$\| q(x) - u_N(x, t_0) \|^2 - \| q(x) - u^*(x, t_0) \|^2 =$$
$$= \left(\| q(x) - u_N(x, t_0) \| + \| q(x) - u^*(x, t_0) \| \right) \cdot$$
$$\cdot \left(\| q(x) - u_N(x, t_0) \| - \| q(x) - u^*(x, t_0) \| \right)$$

De

$$\| q(x) - u_N(x, t_0) \| + \| q(x) - u^*(x, t_0) \| < k$$

és

$$0 \leq (\| q(x) - u_N(x, t_0) \| - \| q(x) - u^*(x, t_0) \| \leq \| u^*(x, t_0) - u_N(x, t_0) \|$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$J(\varphi_N) - J(\varphi^*) \leq k \, \| u^*(x,t_0) - u_N(x,t_0) \| \qquad 9/$$

Azonban, ha $\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t_0) < \infty$, akkor a differenciálegyenlet $u(x,t_0)$ megoldása a kezdőfeltételtől folytonosan függ, azaz, ha

$$\| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \| < \varepsilon_0$$

akkor

$$\| u_1(x,t_0) - u_2(x,t_0) \| < \delta$$

Legyen ugyanis

$$u_1(x,t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(1)} u_i(t_0) \, v_i(x)$$

$$u_2(x,t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(2)} u_i(t_0) \, v_i(x)$$

$$b_i^{(1)} = \int_{\Omega} \varphi_1(x) \, v_i(x) \, d\Omega$$

$$b_i^{(2)} = \int_{\Omega} \varphi_2(x) \, v_i(x) \, d\Omega$$

Ekkor

$$(b_i^{(1)} - b_i^{(2)})^2 = \int_{\Omega} (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))^2 v_i(x) \, d\Omega \leq$$

$$\leq \| \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \|^2 < \varepsilon_0^2$$

ezért

$$\| u_1(x,t_0) - u_2(x,t_0) \| = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i^{(1)} - b_i^{(2)})^2 u_i^2(t_0) <$$

$$< \varepsilon_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t_0) \leq k \varepsilon_0^2$$

Ezek felhasználásával 9/-ből azt kapjuk, hogy

$$J(\varphi_N) - J(\varphi^*) \leq \delta$$

Legyen φ_N^* a $J(\varphi)$ funkcionál minimuma a Q_N halmazon. Az előbbiek alapján bizonyos N-től kezdve felirhatjuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$J(\varphi^*) \leq J(\varphi_N^*) \leq J(\varphi_N) < J(\varphi^*) + \varepsilon^*$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{N \to \infty} J(\varphi_N^*) = J(\varphi^*)$$

És ezzel állitásunkat bebizonyitottuk.

<u>B.2.Feladat:</u> Legyen most a megengedett függvények halmaza a következő:

$$\phi^{(1)} = \left\{ \varphi(x) : \int_{\Omega} \varphi^2(x)\, d\Omega \leq 1 \right\}$$

A funkcionál és a jelölések legyenek ugyanazok mint előbb.

<u>Tétel:</u> Tegyük fel, hogy

1/ $\quad \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(t_0) < \infty$

2/ $\quad |v_i(x)| < k \qquad i = 1, 2, \ldots$

3/ $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i u_i(t_0)| < \infty$

4/ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{u_i^2(t_0)} > 1$

Akkor a feladat közelitő megoldása

$$\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i^{(N)} v_i(x)$$

ahol

$$b_i^{(N)} = \frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(N)} + u_i^2(t_0)}$$

ahol $\lambda^{(N)}$ a $\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2 u_i^2(t_0)}{(\lambda + u_i^2(t_0))^2} = 1$

egyenlet pozitiv gyöke. (Ilyen gyök egyetlen egy van.)

A kapott $\varphi_N(x)$ sorozat konvergens, azaz

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(x) = \varphi^*(x)$$

és

$$\lim_{N\to\infty} J(\varphi_N(x)) = J(\varphi^*(x))$$

Bizonyitás:

Vegyük a $J(\varphi)$ funkcionált a $\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i v_i(x)$ helyen. Azt kapjuk, hogy

$$J(\varphi_N) = \int_\Omega q^2(x)\,d\Omega - 2\sum_{i=1}^{N} a_i u_i(t_0) b_i + \sum_{i=1}^{N} b_i^2 u_i^2(t_0)$$

Az $\int_\Omega \varphi^2(x)\,dx \le 1$ feltétel alakja

$$\sum_{i=1}^{N} b_i^2 \le 1$$

A $J(\varphi_N)$ funkcionált ugy tekinthetjük, mint a $b_1, b_2, \dots, b_N$ skalár számok függvényét. Ezzel feladatunkat matematikai programozási feladatra vezettük vissza. Ez utóbbi megoldása által kapott $b_1^*, b_2^*, \dots, b_N^*$ együtthatókkal felirjuk a $\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i^* v_i(x)$ függvényt és ezt tekintjük az eredeti feladat közelitő megoldásának.

Világos, hogy a $J(b_1, \dots, b_N)$ függvény konvex, ugyanis a $J(x_1 + \lambda y_1, \dots \dots \dots, x_N + \lambda y_N)$ függvény λ-nak konvex függvénye, mert $\frac{\partial^2 J}{\partial \lambda^2} = \sum_{i=1}^{N} {}_i^2 u_i^2 > 0$ és ez mint ismeretes azt jelenti, hogy a $J(b_1, \dots, b_N)$ függvény a $b_1, \dots, b_N$ változóknak konvex függvénye.

A $\sum_{i=1}^{N} b_i^2 \le 1$ tartomány is konvex.

Ismeretes [1], hogy konvex függvény lokális minimuma konvex tartományon abszolut minimum is.

Alkalmazzuk az 1/ funkcionálra a 2/ feltétel mellett a Lagange multiplikátor módszert, azaz vegyük a

$$J^{(1)}(b_1, b_2, \dots \dots, b_N, \lambda) = \int_{\Omega} q^2(x)dx - 2\sum_{i=1}^{N} a_i u_i(t_0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} b_i^2 u_i^2(t_0) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{N} b_i^2 - 1\right)$$

függvényt. A $J^{(1)}(b_1, b_2, \dots \dots, \lambda)$ függvény szélsőértékhelyei a

$$\frac{\partial J^{(1)}}{\partial b_i} = 0$$

$$\frac{\partial J^{(1)}}{\partial \lambda} = 0$$

egyenletek gyökhelyei lehetnek. Ezekből az egyenletekből a szélsőértékhelyekre az alábbiakat kapjuk

$$b_i^{(N)} = \frac{a_i\, u_i(t_0)}{\lambda^{(N)} + u_i^2(t_0)} \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

és a $\lambda^{(N)}$ számot a

$$\sum_{i=1}^{N} b_i^{(N)} = 1$$

feltételtől kapjuk.

Könnyen belátható, hogy létezik pozitiv $\lambda^{(N)}$ multiplikátor, vagyis a

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2 u_i^2(t_0)}{(\lambda + u_i^2(t_0))^2} = 1$$

egyenletnek létezik (mégpedig egyetlen) nem-negativ gyöke.

A $\quad \varrho_N(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i u_i(t_0)}{(\lambda + u_i^2(t_0))^2}$ függvény

ugyanis $\lambda > 0$ esetén folytonos és monoton csökken.

A feltétel szerint azonban $\varrho_N(0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2}{u_i^2(t_0)} > 1$ ha $N > \nu$. Viszont

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varrho_N(\lambda) = 0$$

Ebből következik, hogy létezik egyetlen olyan $\lambda^{(N)} \geq 0$ amelyre $\varrho_N(\lambda^{(N)}) = 1$.

Felhasználjuk az alábbi tételt.

<u>Tétel</u> (Kuhn-Tucker)

Tekintsük az alábbi feladatot: minimalizáljuk az

$$f^0(x_1, \dots\dots, x_n)$$

függvényt, ha a megengedett halmaz

$$f^i(x_1, x_2, \dots\dots x_n) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

Irjuk fel a fenti feladatra az általánositott Lagrange-féle egyenleteket, ekkor az alábbi feladathoz jutunk: meghatározandók olyan x, u vektorok, amelyekre

$$\left.\begin{array}{l} f_x^0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_x^i(x) = 0 \\ f^{(i)}(x) \leq 0 \ ; \quad u_i \geq 0 \ ; \qquad i = 1, 2, \ldots \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} u_i f^i(x) = 0 \end{array}\right\} *$$

ahol

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

és

$$f_x^{\nu}(x) = \operatorname{grad} f^{\nu}(x)$$

Ha mármost az $\bar{x}$ vektor környezetében az

$$f^i(x) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

halmaz és az $f^0(x)$ célfüggvény is konvex, és teljesül a Sleiter feltétel, azaz létezik olyan $\tilde{x}$, amelyre $f^i(\tilde{x}) < 0$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m$ akkor az $\bar{x}$ vektor, akkor és csak akkor ad lokális minimumot a fenti feladatra, ha létezik olyan $\bar{u}$, amelyre az $\bar{x}, \bar{u}$ vektorpár kielégiti a * rendszert.

A fenti tétel alkalmazása a mi esetünkre azt adja, hogy mivel a $J(b_1, \dots, b_N)$ függvény, valamint a $\sum_{i=1}^{N} b_i^2 \leq 1$ tartomány konvex és $\lambda^{(N)} > 0$ ezért a

$$b_i^{(N)} = \frac{a_i\, u_i(t_0)}{\lambda^{(N)} + u_i^2(t_0)}$$

helyen a $J(b_1, b_2, \dots, b_N)$ függvény lokális minimumot vesz fel, ahol

$$\lambda^{(N)} \quad a \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2\, u_i^2(t_0)}{(\lambda + u_i^2(t_0))^2} = 1$$

egyenlet pozitiv gyöke. A konvexicitások miatt azonban ez a hely egyuttal abszolut minimum is.

Most bebizonyitjuk, hogy a

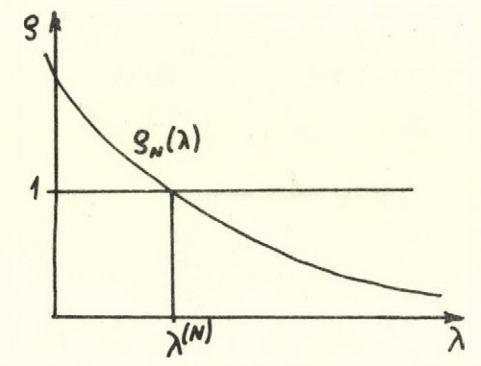
$$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(N)}, \dots$$

sorozat konvergens.

Világos ugyanis, hogy

$$\varrho_{N+1}(\lambda) > \varrho_N(\lambda)$$

A $\varrho_N(\lambda)$ függvény λ-nak folytonos monoton csökkenő függvénye, ha $0 \leq \lambda \leq \infty$, amely a



$\varrho = 1$ egyenest egyetlen pontban metszi (1. ábra).

Mivel $\varrho_{N+1}(\lambda) > \varrho_N(\lambda)$

ezért $\lambda^{(N+1)} > \lambda^{(N)}$

A $\lambda_1^{(1)} \ldots\ldots, \lambda_1^{(N)} \ldots\ldots$ sorozat tehát monoton növekvő.

Megmutatjuk, hogy korlátos is.

Ha ugyanis

$$\lambda > \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \, u_i^2(t_0) = K^2$$

akkor

$$\varrho_N(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2 \, u_i^2(t_0)}{[u_i^2(t_0) + \lambda]^2} <$$

$$< \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i^2 \, u_i^2(t_0)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \, u_i^2(t_0) <$$

$$< \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \, u_i^2(t_0) = \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 < 1$$

vagyis ha $\lambda > k$, akkor a $\varrho_N(\lambda)$ függvény értékei kisebbek 1-nél, ami azt jelenti, hogy a $\varrho_N(\lambda)$ görbe a $\varrho = 1$ egyenest olyan $\lambda^{(N)}$ pontban metszi, amelyre

$$\lambda^{(N)} < K \qquad (N = 1, 2, \dots\dots)$$

A $\lambda^{(1)}, \dots\dots, \lambda^{(N)}, \dots\dots$ sorozat tehát monoton növekvő és korlátos, ezért konvergens, vagyis $\lim \lambda^{(N)} = \lambda^{\infty}$ létezik.

Ez viszont azt jelenti, hogy $\lim\limits_{N \to \infty} b_i^{(N)} = b_i^{\infty}$ létezik.

Megmutatjuk, hogy a tett feltevés mellett az előzőkből következik, hogy

$$\lim_{N \to \infty} \varphi_N(x) = \varphi^*(x)$$

ahol

$$\varphi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i^{(N)} v_i(x)$$

$$\varphi^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{\infty} v_i(x)$$

Ugyanis

$$|\varphi^*(x) - \varphi_N(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{\infty} v_i(x) - \sum_{i=1}^{N} b_i^{(N)} v_i(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{N} (b_i^{(\infty)} - b_i^{(N)}) v_i(x) + \sum_{i=N+1}^{\infty} b_i^{(\infty)} v_i(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(\infty)} + u_i^2(t_0)} - \frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(N)} + u_i^2(t_0)} \right) v_i(x) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(\infty)} + u_i^2(t_0)} v_i(x) \right| \leq$$

$$\leq K\left\{ \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{1}{\lambda^{(\infty)}+u_i^2(t_0)} - \frac{1}{\lambda^{(N)}+u_i^2(t_0)}\right|\left|a_i u_i(t_0)\right| + \right.$$

$$+\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(\infty)}+u_i^2(t_0)}\right|$$

ahol

$$|v_i(x)| < K$$

Mivel $\lambda^{(N)} \to \lambda^{(\infty)}$, ezért

$$\left|\frac{1}{\lambda^{(\infty)}+u_i^2(t_0)} - \frac{1}{\lambda^{(N)}+u_i^2(t_0)}\right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad N > N_0$$

Viszont

$$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{(\infty)}+u_i^2(t_0)}\right| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty}\left|\frac{a_i u_i(t_0)}{\lambda^{\infty}}\right| = \frac{1}{\lambda^{\infty}}\left|\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i u_i(t_0)\right|$$

Mivel a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(t_0)$ sor a feltételek szerint abszolut konvergens, ezért N megválasztható ugy, hogy

$$\left|\sum_{i=N+1}^{\infty} a_i u_i(t_0)\right| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad N > N_1$$

legyen.

Ezenkivül $\left|\sum_{i=1}^{N} a_i \mu_i(t_0)\right| < K_1$ (mivel $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i \mu_i(t_0)|$ konvergens).

Igy az $N \geq \max(N_0, N_1)$ választással

$$|\varphi^*(x) - \varphi_N(x)| < K \left\{ K_1 \varepsilon + \frac{1}{\lambda(\infty)} \varepsilon \right\} =$$

$$= K \left(K_1 + \frac{1}{\lambda(\infty)} \right) \varepsilon = \delta$$

A norma folytonossága miatt azonban

$$\lim_{N \to \infty} J(\varphi_N) = J(\varphi^*)$$

is teljesül.

Irodalom:

[1] Ju.M.Jermolev: Metodi resenija nelinejnih eksztremalnih zadacs. (Kibernetika 1966. No.4; 1.

[2] G.Zoutendijk: Methods of feasible directions (1960).

[3] A.G.Butkovszkij; Teorija optimalnovo upravlenija szisztemami sz raszpredelennimi parametrami (Moszkva, 1965).

Summary

Optimal control with partial differential equations of a certain type

János Szelezsán

Let us consider processes whose behaviour can be described by the partial differential equation

$$L(u)=0$$

$$u=u(x,t) \qquad x=[x_1,x_2,\ldots,x_n]$$

Let us furthermore assume that the boundary and the initial conditions are of the form that the solution of the differential equation under /1/ may be given in the following form

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i u_i(t) v_i(x)$$

$$b_i=\int_{\Omega} \varphi(x) v_i(x) \, d\Omega$$

where the system $\{v_i(x)\}$ is a full system of functions orthonormalized in the range Ω . Let us consider the function $\varphi(x)$ to be the control function.

In this paper the following problems are discussed.

A/ Let be given the functions $q(x), p(x)$. Let us assume that

$$\phi = \{\varphi(x) : \int_\Omega p(x)\,\varphi(x)\,d\Omega = A\}$$

We shall solve the following problems

α_1 $\quad \min_{\varphi\in\phi} \int_\Omega [q(x) - u(x,t_0)]^2 d\Omega$

β_1 $\quad \min_{\varphi\in\phi} \int_\Omega u^2(x,t_0) + \gamma \int_\Omega \varphi^2(x)\,d\Omega$

γ_1 $\quad \min_{\varphi\in\phi} \int_\Omega [\varphi(x) - u(x,t_0)]^2 d\Omega$

The solutions will be given in the form of infinite series.

B/ Let $q(x)$ be the given function,

$$\phi_1 = \{\varphi(x) \int_\Omega \varphi^2(x)\,d\Omega = 1$$

Thenis the following problem:

$$\min_{\varphi\in\phi_1} \int_\Omega [q(x) - u(x,t_0)]^2 d\Omega$$

The problem will be traced back to a problem of mathematical programming

C/ Be

$$\phi_2 = \{\varphi(x) : \int_\Omega \varphi^2(x)\,d\Omega \le 1\}$$

The problem:

$$\min_{\varphi \in \phi_1} \int_{\Omega} [\varphi(x) - u(x,t_0)]^2 \, d\Omega$$

An approximative solution is given by means of the Lagrange multiplicator method and then we prove the convergence of the approximative solution under given conditions.

Rövid közlemények elkészült programokról

Varga Gyula:

A Föld belső szerkezetének vizsgálata magnetotellurikus módszerekkel

A Föld belső szerkezetének kutatásában az utóbbi időben a gravitációs és szeizmikus módszerek mellett különösen fontos szerepet kaptak az elektromágneses tereket használó kutatási eljárások. Ezek segitségével a mélyebben fekvő rétegekről komoly gyakorlati jelentőségü információkat nyerhetünk, t.i. e rétegek elektromos ellenállását.

Az itt ismertetésre kerülő módszer lényegében a természetes elektromágneses tér különböző periodusu változásait használja fel az adott periodusu változásnak megfelelő mélységig terjedő rétegek ellenállásviszonyainak megismerésére.

Ha feltételezzük, hogy az elsődleges magnetotellurikus tér monoharmonikus lineárisan polarizált sikhullám, melynek forrása a Föld felszine felett van, akkor ki lehet számitani $\underline{n}$ rétegből álló, de horizontálisan egynemü közeg esetére az egymásra merőleges irányu $\vec{E}$ és $\vec{H}$ vektorok segitségével az impedanciát:

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{H_x}$$

Horizontálisan nem homogén <u>n</u> rétegü rétegsor esetén az impedancia a következő képlet segitségével határozható meg:

$$Z = -\frac{i\omega}{K_1} cth\left\{k_1 h_1 + arcth\left[\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}\, cth(k_2 h_2 + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. + arcth\left[\sqrt{\frac{\varrho_{n-1}}{\varrho_{n-2}}}\, cth(k_{n-1} h_{n-1} + arcth\sqrt{\frac{\varrho_n}{\varrho_{n-1}}}\,)\right]\ldots)\right]\right\}$$

ahol $\varrho_1, \ldots \ldots \varrho_n$, az egyes rétegek fajlagos ellenállását, $h_1, \ldots \ldots h_{n-1}$ a megfelelő rétegek vastagságát,

(h_n értéke ∞ -nek tekintendő)

$k_1, \ldots, k_n$ pedig a rétegek hullámszámát jelenti

$\left(k_m = \sqrt{-\frac{4\pi i\omega}{10\varrho m}}\right)$, ω pedig a körfrekvenciát.

A látszólagos fajlagos ellenállás (ϱ_T) az impedanciából

$$\varrho_T = 2T|Z|^2$$ alakban adódik.

Ez az összefüggés csak azt teszi lehetővé, hogy a különböző rétegsorokra T különböző értékeihez számitott ϱ_T

értékeket a megfelelő mért ϱ_T értékekkel összehasonlitva következtessünk az altalaj elektromos felépitésére.

Az itt közölt eljárás tehát a ϱ_T értékek meghatározását kivánja meg a megadott T értékek mellett.
A Z-re vonatkozó formula átalakitásával az

$$R_1 = 1$$

$$R_{j+1} = cth\left[\frac{2\pi h_{n-j}(i-1)}{\sqrt{10T\varrho_{n-j}}} + arcth\left(\sqrt{\frac{\varrho_{n+1-j}}{\varrho_{n-j}}}R_j\right)\right]_{j=1,\dots,n-1}$$

rekurziós formulát kapjuk; ennek eredménye R_n, amelynek segitségével a keresett ϱ_T a következő képlet alapján adódik:

$$\varrho_T = \varrho_1 |R_n|^2$$

A program ugy készült, hogy az egyes rétegekhez megadott lehetséges vastagság, ill. fajlagos ellenállás értékek összes változatával kiszámolja a ϱ_T értékeket. A program használatakor a következő adatokat kell megadni:

1./ rétegek száma

2./ az egyes rétegekhez tartozó ϱ_i értékek db számai

3./ ϱ_i értékei

4./ h_i db számai

5./ h_i értékei

6./ periodusidő értékei.

Eredményül a ϱ_T értékeit kapjuk.

A program az Ural-2 elektronikus számológépre készült EFT autokódban.

Srajber Benedek:

Dantzig-Wolfe féle dekompoziciós eljárás

A program az

$$
\begin{array}{lllll}
A_1 \underline{x}_1 + & A_2 \underline{x}_2 + \ldots & \ldots & A_n \underline{x}_n & = \underline{b} \\
B_1 \underline{x}_1 & & & & = \underline{b}_1 \\
 & B_2 \underline{x}_2 & & & = \underline{b}_2 \\
 & & \ddots & & \\
 & & & B_n \underline{x}_n & = \underline{b}_n
\end{array}
$$

feltételek mellett maximalizálja a

$$\underline{c}_1 \underline{x}_1 + \underline{c}_2 \underline{x}_2 + \ldots + \underline{c}_n \underline{x}_n$$

célfüggvényt.

A Gier számológépre irt két algol program hajtja végre az eljárást; egyszerre használva dobot, buffert és három filmszalagot.

Programok:

1."D.W.Szektorprogram", amely a szektorszintü számitásokat végzi normál szimplex eljárással és tervjavaslatokat képez a központi feladat számára.

2. "D.W. Központ", amely a módositótt szimplex módszerrel optimalizálja a központi feladatot és képezi a D.W. feladat megoldását.

Megjegyzés: A hatalmas adatmennyiség kezelésére külön adatellenőrzést, filmelőkészitést és két mágnesszalagon való tárolást biztositottunk.

Dávid Gábor, Knuth Előd, Pergel József, Tomkó József:

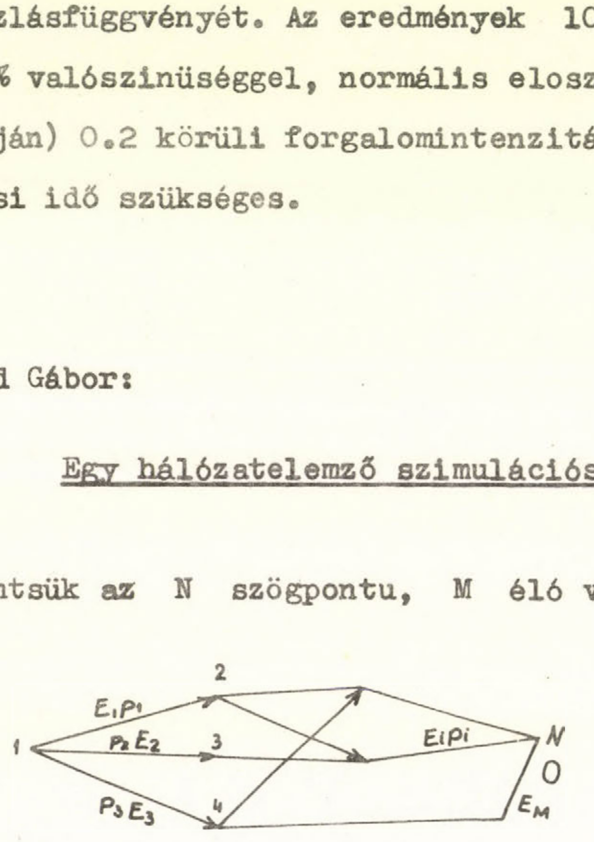
Egy telefonforgalmi probléma vizsgálata Monte-Carló módszerrel

Az Ural-II számitógépre készült program kétfokozatos, tiszta veszteséges, maximálisan 100 x 80-as bekötési mátrixu telefonközpont müködésének szimulálására képes. Memóriaigénye a teljes ferritmemória. A program meghatározza a hivások elveszésének valószinüségét, a forgalomforrások foglaltságának eloszlásfüggvényét, és bizonyos előre megadott figyelt előfizetők vonalai foglaltságának eloszlásfüggvényét. Az eredmények 10^{-3} pontosságához (95 % valószinüséggel, normális eloszlással való becslés alapján) 0.2 körüli forgalomintenzitás mellett 4-7 óra futási idő szükséges.

Dávid Gábor:

Egy hálózatelemző szimulációs program

Tekintsük az N szögpontu, M éló véletlen G gráfot:



Mindegyik E_i élhez megadjuk annak a valószinüségét, hogy szerepel a gráfban, legyen ez a valószinüség p_i.

A feladat: tetszőleges két (I és O) pontra meghatározni annak a valószinüségét, hogy E és O között van a gráf éleiből álló ut. A feladatot Monte-Carló módszerrel oldottam meg, a programot ICT-ALGOL nyelven irtam.

Fidrich Ilona:

Az URAL-2 gép programkönyvtára

A Központban elkészült programkönyvtár olyan gépi kódban készült programok gyüjteménye, melyek mindegyike a programozási gyakorlatban igen hasznosan alkalmazható mint segédeszköz vagy mint szubrutin is. A programkönyvtár mágnesszalagon vagy dobon tárolható. Az alapját egy könyvtári programokat bevivő program alkotja, melynek segitségével lehetőségük van bármely i sorszámu (1 = i 177, nyolcas számrendszerbeli szám) könyvtári programnak az operativ memóriába való elhelyezésére és megfelelő átcimzésére tetszésszerinti páros cimtől kezdve, ahol a munkarekeszek elhelyezése ugyancsak tetszőleges páros cimtől történhet.

A programkönyvtár ellenőrzésének, felujitásának feladatát a könyvtáros programok filmszalagról vagy papirszalagról történő bevitele alapján végezhetjük. Jelenleg mintegy 60 programból áll a programkönyvtár, ezek között szerepel olyan is, melynek segitségével uj programok bekapcsolása is lehetséges.

Az alábbiakban röviden ismertetjük a programkönyvtárba tartozó programokat.

1./ A könyvtári programok beviteli programjának bevitele és átcimzése.

2./ A könyvtári programok beviteli programja, mely lehetővé teszi könyvtári programoknak az operativ memóriába történő bevitelét és átcimzését.

3./ A könyvtáros programok a programkönyvtár ellenőrzését, felujitását teszik lehetővé.

4./ Program bekapcsoló program, bevivő-nyomtató program, dobcim-kiszámitó program szintén szerepel a könyvtárban.

A programkönyvtár kezelő programjainak segitségével elsősorban a programpróbák során felmerülő, általában előre pontosan meg nem határozható, információátvitellel kapcsolatos feladatokat oldhatunk meg.
Ezek között szerepelnek az

1./ szimbolikus programok bevitelére szolgáló program,

2./ lebegő és fixpontos adatok beviteli és kiadási programja,

3./ fiktiv egész adatok beviteli és kiadási programja,

4./ áthelyező program,

5./ bináris kiadás és bevitel programja,

6./ dobra és mágnesszalagra kiiró és beolvasó program.

Az általános programok többsége viszont zárt szubrutinként müködik (a 22....4 utasitással hivható).

1. Számok tizes számrendszerből kettesbe konvertálása és viszont.

2. Számok beviteli és nyomtató programjai.

3. Dobra és mágnesszalagra kiiró és beolvasó program.

Az un. minimális programok egyszerü, de gyakran felmerülő információátviteli problémák megoldására szolgálnak. Lehetővé teszik az információ cserét az operativ memória és mágnesszalag dob, lyukszalag (5 és 8 csatornás) között, továbbá információ kivitelét gyorsnyomtató segitségével. Ezen programok operativ memória igénye minimális, mivel csak 0-tól 20-ig terjedő memóriarekeszeket használják fel (esetleg többszörösen).

A függvényérték kiszámitó programok a leggyakoribb egyváltozós függvények értékeinek meghatározására szolgáló zárt szubrutinok. A programok a Szovjet Tudományos Akadémia Számitástechnikai Központjának szubrutin könyvtárának felhasználásával készültek. (Tartalmazza az $\ln x, e^x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$ trigonometrikus és inverz, hiperbolikus és inverz függvényeiket.)

A lineáris algebrai feladatok megoldására szolgáló szubrutinok szintén a Szovjet Tudományos Akadémia Számitástechnikai Központjának szubrutinkönyvtárából kerültek a programkönyvtárba. Tartalmazza vektorok skaláris sorozatát; mátrixok transzponáltját, szorzatát és inverzét (lineáris egyenletrendszer megoldását) , determinánsok értékét meghatározó programokat.

Végül a programkönyvtárban szerepelnek véletlenszám generáló programok és komplex számokkal történő alapmüveletek elvégzésére szolgáló programok is.

A valószinüségelmélet és statisztikai alkalmazási osztály 1966-ban tartott szemináriumai

I. 1966 első felében január-junius minden csütörtökön d.e. 11^h E.L. Lehmann: "Testing Statistical Hypotheses" c. könyvének ismertetése.

I. fejezet: Tomkó József
II. " : Fidrich Ilona
III. " : Gergely Ervin, Nemetz Tibor, Csáki Péter
IV. " : Pergel József

1966. második felében (szeptember-december) minden szerdán d.e. 9^h-tól Ju.V.Linnik: "Statisticeskije Zadaci s mésajuscimi parametrami" c. könyvének ismertetése.

I. fejezet: Pergel József
II. " : Pergel József
III. " : Pergel József, Tomkó József, Arató Mátyás
IV. " : Arató Mátyás
V. " : Pergel József
VI. " : Tomkó József
VII. " : Tomkó József

II. Stochasztikus folyamatok és alkalmazásaik szemináriumok 1966. első felében (január-junius) minden csütörtökön voltak.

Előadók voltak:

Arató Mátyás: Takács Lajos egy cikkének ismertetése (2 alkalommal).

Arató Mátyás: Stacionárius Gauss-Markov folyamat paraméterei konfidencia intervallumainak szerkesztése (saját eredmények ismertetése, 1 alkalommal).

Gergely József: Tömegkiszolgálási feladatokról (Smith és saját eredményeinek ismertetése, 3 alkalommal).

Csibi Sándor: Reprodukáló maggal rendelkező Hilbert-terek és sztochasztikus folyamatok kapcsolata (E.Parzen eredményeinek ismertetése, 2 alkalommal).

Nemetz Tibor: A tökéletes mérték (Szazonov cikkének ismertetése, 4 alkalommal).

T.Kailoth (USA): Reprodukáló maggal rendelkező Hilbert terek és sztochasztikus folyamatok (1 előadás).

F.J.Beutler (USA): 1. Mintavételi tételek és bázisok Hilbert tereken (1 alkalommal).
2. Stacionárius pontfolyamatok (1 alkalommal).

Müszaki Osztály 1967. első félévében tartott ALGOL szemináriumának tematikája

Ismétlő áttekintés az ALGOL 60-ról.
Ciklus utasitások és gyakorlások.
Kifejezések /aritmetikai és boolean/.
Eljárások, deklarációk elméleti ismertetése.
Eljárások gyakorlati megvalósitása.
Switch.
I.C.T. 1905-ös gépi reprezentáció eltérései a hivatkozási nyelvtől.
Bevezető információk. Multiprogramozás.
Szabványos input-output eljárások.
Más algoritmikus nyelven irt külső eljárások beépitése.
Algol forditók.
I.C.T. kis gyakorló program.
I.C.T. gépkezelési kérdések ALGOL-programok esetében.
Konkrét müszaki probléma felvetése és megbeszélése.
A fenti probléma programozása.

Előadók voltak:

Dancs István
Bakó András
Klafszky Emil
Komáromi Éva
Molnár Imre
Srajber Benedek

TARTALOMJEGYZÉK

Ny.1325/1967.