A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXIII. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1977

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXIII. kötet

Szerkesztőség: 1051 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: 1054 Budapest, Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1063 Budapest, Alkotmány u. 21 Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, 1011 Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Mathematicarum Hungarica.

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVSZEMLE

INDEX

FROM THE FOREIGN LITERATURE

BOOK REVIEWS

77-431 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXIII. KÖTET

1—2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1977

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXIII. kötet 1—2. szám

Szerkesztőség: 1051 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: 1054 Budapest, Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1054 Budapest, Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jezlzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, 1011 Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Mathematicarum Hungarica.

VIZSGÁLATOK ALGEBRAI STRUKTÚRÁK RADIKÁL-ELMÉLETÉBEN (II)*

Írta: SZÁSZ FERENC

III. FEJEZET

GYŰRŰK GYENGÉN SZUPERNILPOTENS RADIKÁLJAIRÓL

11. §. Az antiegyszerű gyűrűkről

Ennek a §-nak az anyaga szerző [56] dolgozatában található meg.

Egy R radikál gyengén szupernilpotens, ha minden nilpotens gyűrű R-radikálgyűrű. Egy radikál szupernilpotens, ha öröklődő és gyengén szupernilpotens. Egy A gyűrű antiegyszerű, ha A homomorf módon nem képezhető le idempotens szívű szubdirekt irreducibilis gyűrűre. Az antiegyszerű gyűrűket V. A. ANDRUNAKIEVICS [1] vizsgálta részletesen. Bármely antiegyszerű gyűrű nilpotens szívű szubdirekt irreducibilis gyűrűknek egy szubdirekt összege. Bármely nilpotens gyűrű antiegyszerű, és bármely, kétoldali ideálokra minimumfeltételű antiegyszerű gyűrű nilpotens.

Az antiegyszerű gyűrűk osztálya radikálosztály, mégpedig speciális radikál *Andrunakievics*-féle értelemben, tehát szupernilpotens is. Az antiegyszerű radikál a minimális ideált tartalmazó prímgyűrűk osztályával meghatározott felső radikál.

57. TÉTEL. *Egy A gyűrűre ekvivalens az alábbi két feltétel:*

1. *A antiegyszerű gyűrű;*

2. *$(a)=(a+b)$ érvényes minden (a) főideálra és $(a)^2$ ideálnégyzet minden b elemére.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy 2. nem teljesül. Akkor van olyan $a\in A$ és $b\in(a)^2$ elem, hogy

$$(a) \neq (a+b).$$

Nyilván $(a+b)\subset(a)$. Legyen M maximális olyan ideál A-ban, hogy $a\notin M$ és $M\supseteq(a+b)$. Ilyen M a *Zorn*-lemma alapján létezik. Ekkor A/M szubdirekt irreducibilis gyűrű, amelynek $(a)/M$ lesz a szíve. Minthogy $a+b\in M$, ezért

$$(a)+M = (b)+M$$

és $b\in(a)^2$ miatt az $(a)/M$ szív idempotens. Ezért nem teljesül (1).

Fordítva, ha 1. nem teljesül, akkor van A-nak olyan I ideálja, hogy $A/I\cong S$ szubdirekt irreducibilis és a H/I szív idempotens. Ekkor $H=(h)$, így

$$(h)+I = (h)^2+I.$$

* Doktori értekezés, Budapest, 1972. Az értekezés I. és II. fejezete, valamint a teljes tartalom és irodalomjegyzék az MTA *III. Osztály Közleményei* **22**:2—3—4 füzetében pp. 215—255. jelent meg. A paragrafusok, tételek stb. számozása folytatólagos.

Van tehát olyan $h_0 \in (h)^2$ és $i_0 \in I$ elem, hogy

$$h = h_0 + i_0.$$

Ekkor $(h) \neq (h-h_0)$, mert $(h-h_0) \subseteq I$ viszont $(h) \nsubseteq I$. Ezért 2. nem teljesül.

12. §. Négy kritérium arra, hogy egy konkrét F-radikál a Brown—McCoy-féle radikál legyen

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható szerző [38] dolgozatában. Minden (k, l, m, n) nemnegatív egész számokból álló számnégyeshez explicit módon bevezetünk egy konkrét (k, l, m, n)-radikált. Ha az A gyűrű elemei az $a \circ b = a + b - ab$ körműveletre egy *Neumann*-reguláris félcsoportot alkotnak, akkor A egy $(k, 0, 1, 1)$-radikálgyűrű és $(0, l, 1, 1)$-radikálgyűrű lesz minden nemnegatív $k, l \in Z$ esetén. Továbbá bármely (k, l, m, n)-féligegyszerű és kétoldali főideálokra minimumfeltételű A gyűrű, mint (A, A)-dupla modulus, teljesen reducibilis.

Legyen $a^{(0)} = 0$, $a^{(1)} = a$, $a^{(n+1)} = a^{(n)} \circ a$ a körművelettel. Legyen $a \in A$ rögzített, $x \in A$ változó elem és legyen

$$(k, l, m, n)(a) = \sum_{x \in A} (a^{(m)} \circ x \circ a^{(n)} - k \cdot a^{(l)}.$$

Ekkor egy speciális F-regularitás definiálható $a \in (k, l, m, n)(a)$ által, ahol $F(a) = (k, l, m, n)(a)$.

58. TÉTEL. *Ha G jelöli a Brown—McCoy radikált, akkor $G(a) = (1, 1, 1, 1)(A) = (1, 1, 1, 0)(A) = (1, 1, 0, 1)(A) = (1, 2, 1, 1)(A)$ teljesül minden A gyűrűben.*

Bizonyítás. Legyen P szubdirekt irreducibilis és (k, l, m, n)-féligegyszerű gyűrű. Ekkor P-nek az S-szívében van olyan $d \neq 0$ elem, hogy $(k, l, m, n)(d) = 0$, tehát

$$d^{(m)} \circ x \circ d^{(n)} = k \cdot d^{(l)}$$

minden $x \in P$ elemre. Ha speciálisan $x = 0$, akkor $d^{(m+n)} = kd^{(l)}$, így tetszőleges $x \in P$ elemre

$$x = d^{(m)}x + xd^{(n)} - d^{(m)} \cdot x \cdot d^{(n)} \in S,$$

tehát $S = P$. Ezért P-ben csak triviális ideálok vannak:

$$0 \text{ és } P.$$

Továbbá:

$$(1 - d^{(m)})P(1 - d^{(n)}) = 0 \quad \text{és} \quad d = d \cdot d^{(m+n)} = kd \cdot d^{(l)}.$$

Hosszasabb számolással igazolható, hogy d akkor és csak akkor lesz P kétoldali egységeleme, ha $(k, l, m, n) = (1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ vagy $(1, 2, 1, 1)$.

A számolás részletesen megtalálható a [38] dolgozatban. Pl. $k = l = m = n = 1$ esetén $d^2 = d \neq 0$ és $(1-d)P(1-d) = 0$ miatt d egységelem.

13. §. Gyengén szupernilpotens radikálok és idealizátorok

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható szerző [72] dolgozatában.

Legyen S tetszőleges részgyűrű az A gyűrűben. A-nak azt a legbővebb $I(S)$ részgyűrűjét, amelyben S még kétoldali ideál, az S idealizátorának nevezzük. Továbbá egy A gyűrűt T-nilpotensnek nevezünk, ha a

$$p_m = a_1 a_2 \dots a_m \quad \text{és} \quad p'_n = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$$

szorzatok sorozatai nullát tartalmazzák. Az összes T-nilpotens gyűrű osztályával meghatározott alsó radikál szupernilpotens. Bármely, főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűnek a Jacobson-radikálja T-nilpotens.

59. TÉTEL. *Legyen R gyűrűknek egy gyengén szupernilpotens radikálja. Legyen S maximális A-nak az R-radikál részgyűrűi közt. Ekkor bármely S részgyűrű $I(S)$ idealizátorának az $I(I(S))$ idealizátorára $I(I(S))=I(S)$ teljesül.*

Bizonyítás. $I(S)$-nek az R-radikálja S, mert S ideál $I(S)$-ben és S maximális R-radikál részgyűrű A-ban. Továbbá $I(S)\cdot I(I(S))\subseteq I(S)$ miatt $I(S)\cdot I(I(S))\cdot S\subseteq S$. Definíciónk alapján $I(I(S))\subseteq I(S)$, ezért $I(I(S))S+S/S$ jobbannihilátora $I(S)/S$-nek, és minthogy S maximális R-radikál részgyűrű A-ban, ezért $I(I(S))S\subseteq S$. Hasonlóan igazolható $S.I(I(S))\subseteq S$, tehát S kétoldali ideál $I(I(S))$-ben is. Ennélfogva $I(I(S))\subseteq I(S)\subseteq I(I(S))$, tehát $I(I(S)=I(S))$.

MEGJEGYZÉS. Az 59. Tétel hasonló az egyik jól ismert csoportelméleti tételhez: Ha S egy π-*Sylow*-alcsoport egy tetszőleges G csoportban, akkor az $N(S)$ normalizátornak az $N(N(S))$ normalizátora maga $N(S)$, tehát $N(N(S))=N(S)$.

60. TÉTEL. *Ha az S valódi részgyűrű T-nilpotens az A gyűrűben, akkor $I(S)$ valódi módon bővebb S-nél, tehát $I(S)\supsetneqq S$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $I(S)=S$. Minthogy $S\neq A$, van olyan $x\in A$, elem, hogy $x\notin I(S)=S$. Ezért van olyan s_1 és $s'_1\in S$ elem, hogy $xs_1\notin S$ vagy $s'_1x\notin S$. Így $S=I(S)$ miatt van olyan s_2 és $s'_2\in S$, hogy pl. $s_2xs_1\notin S$ vagy $s'_2s'_1x\notin S$. Eljárásunkat tovább folytatva olyan $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots$ és $\bar{s}'_1, \bar{s}'_2, \dots$ sorozatok adódnak, hogy

$$\bar{s}'_m \cdot \bar{s}'_{m-1} \dots \bar{s}'_1 x \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_c \dots \bar{s}_n \notin S,$$

ami ellentmond annak, hogy S T-nilpotens A-ban. Ezért valóban $I(S)\neq S$.

MEGJEGYZÉS. Említettük, hogy főjobbideálokra nézve minimumfeltételű gyűrűk *Jacobson*-radikálja T-nilpotens. E gyűrűk *Jacobson*-radikálja egybeesik a *Baer*-féle alsó nilradikállal és ha a gyűrű balegységelemes, akkor a *Brown—McCoy*-féle radikállal is.

Másfelől, ha egy tetszőleges A (asszociatív) gyűrűben a B *Baer*-féle alsó nilradikál különbözik a G *Brown—McCoy*-féle radikáltól, akkor:

1. van A-nak olyan végesen generált valódi részgyűrűje, amely nem egy $(a)_r$ főjobbideál [40],
2. van A-nak olyan végesen generált valódi részgyűrűje, amely nem aA alakú jobbideál [41].

Ugyanis a [40] dolgozatban bizonyított tételünk *explicit* módon meghatározza mindazon gyűrűket, amelyeknek bármely végesen generált valódi részgyűrűjük főjobbideál, míg a [41] dolgozatban bizonyított tételünk pedig *explicit* módon meghatározza mindazon A gyűrűket, amelyeknek bármely végesen generált valódi részgyűrűjük aA alakú jobbideál. Szerző [40] tételének bizonyítása a kvadratikus nemmaradékokat is felhasználja. Megjegyzendő, hogy a [40] és [41] gyűrűosztályok explicit leírásának feladatát RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus említette még 1958 tavaszán a szerzőnek.

IV. FEJEZET

A JACOBSON-RADIKÁL TETSZŐLEGES (ASSZOCIATÍV) GYŰRŰKBEN

14. §. A Jacobson-radikál jellemzése Green-ekvivalenciával

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [54] dolgozatában szerepel. Az A gyűrű B és C részhalmazaira nézve legyen

$$B^{-1}C = [x; x \in A, Bx \subseteq C].$$

Továbbá definiáljuk az $a, b \in A$ elemekre az $a \equiv b$ ekvivalenciát $(a)_r = (b)_r$ által, ahol $(a)_r$ főjobbideál A-ban. $a \equiv b$ az A multiplikatív félcsoportjában egy *Green*-féle ekvivalencia, amely a félcsoport balkongruenciája.

61. TÉTEL. *Az A gyűrű J Jacobson-radikálja egybeesik mindazon x elemek K halmazával, amelyekre az $(x)_r$ főjobbideál minden y elemével és A minden z elemével*

$$z \equiv z + zy.$$

Bizonyítás. Legyen Φ_r az A A-jobbmodulus *Frattini*-részmodulusa. KERTÉSZ ANDOR [21] szerint $J = A^{-1}\Phi_r$. Először a $K \subseteq J$ tartalmazást igazoljuk. Ha $x \in A$, és $x \notin J$, akkor $x \notin A^{-1}\Phi_r$, $Ax \not\subseteq \Phi_r$, tehát van olyan $y \in A$ és R maximális jobbideál, hogy $yx \notin R$. Minthogy ekkor $A^2 \not\subseteq R$ és A/R egyszerű A-jobbmodulus, van olyan $u \in A$, hogy $y + R = yxu + R$, ahonnan a $v = -xu \in (x)_r$ jelöléssel

$$(y + yv)_r \subseteq R \neq A = (y)_r + R,$$

tehát $y + yv \not\equiv y$, és $v \in (x)_r$ miatt $x \notin K$. Így $K \subseteq J$.

Most a $J \subseteq K$ tartalmazást bizonyítjuk be. Ha ugyanis $x \in A$ és $x \notin K$, akkor létezik olyan $y \in (x)_r$ elem és olyan $z \in A$ elem, hogy $z \not\equiv z + zy$. ZORN lemmája alapján van olyan R jobbideál, amely maximális a $z \notin R$ és $R \supseteq (z + zy)_r$ relációkra nézve. Ekkor az A/R A-jobbmodulus szubdirekt irreducibilis, mert A/R minden nemzérus A-részmodulusában z benne van. Minthogy $z + zy \in R$ ezért

$$(y)_r + R = (zy)_r + R = z(y)_r + R \neq R.$$

Minthogy $(z)_r + R/R$ egyszerű A-jobbmodulus és $z(y)_r \not\subseteq R$, ezért $y \in (x)_r$ miatt $x \notin J$. Tehát valóban $J \subseteq K$, és ezért $J = K$, amivel a 61. Tételt bebizonyítottuk.

15. §. Kertész Andor egy problémájának és Kertész Andor és Wiegandt Richard egy közös problémájának megoldása . modulusok egy radikáljáról

Ennek a §-nak az anyaga szerző [62] és [74] dolgozataiban található meg.

Legyen A tetszőleges (asszociatív) gyűrű, M egy A-jobbmodulus és $\Phi(M)$ az M *Frattini*-részmodulusa. M *Kertész*-féle radikálját így értelmezzük

$$K(M) = [m; m \in M, mA \subseteqq \Phi(M)].$$

Világos, hogy $K(M)$ részmodulus M-ben (vö. KERTÉSZ [20]). M-nek egy N részmodulusa homoperfekt, ha $MA+N=M$. KERTÉSZ ANDOR [20] igazolta, hogy $K(M)$ egybeesik M összes homoperfekt maximális részmodulusának a metszetével. Ha A balegységelemes gyűrű, akkor A-nak, mint A-jobbmodulusnak a *Kertész*-radikálja éppen A *Jacobson*-radikálja lesz. Egyébként pedig minden A gyűrűben $K(A) \subseteqq J(A)$.

KERTÉSZ ANDOR [20] kérdezte, hogy vajon bármilyen A gyűrűben $K(A)$, mint az A A-jobbmodulus (*Kertész*-féle) radikálja egybeesik-e a $J(A)$ *Jacobson*-radikállal. Az alábbi példa mutatja, hogy erre a válasz nemleges.

Példa. Legyen A a p elemű véges prímtest felett az

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixokkal generált algebra. Ekkor A egy p^2-elemű nemkommutatív gyűrű és a szorzási tábla:

	x	y
x	0	x
y	0	y

Minthogy y jobbegységelem A-ban, $A^2=A$, tehát minden jobbideál A-ban homoperfekt. Ezért $(x)_r=Zx$ és $(y)_r=Zy$, ahol Z a racionális egészek gyűrűje, homoperfekt, p-elemű, ezért maximális jobbideál A-ban. Minthogy pedig

$$(x)_r \wedge (y)_r = 0,$$

ezért $K_r(A)=0$. Viszont a $J(A)$ *Jacobson*-radikál éppen

$$(x)_l = Zx = (x)_r = K_l(A) = J(A) \neq 0,$$

ahol K_l a K_r bal-jobb duálisa.

62. TÉTEL. *Egy tetszőleges* $\mathfrak{m}$ *számossághoz akkor és csak akkor létezik olyan* $\mathfrak{m}$*-számosságú gyűrű, amelyben* $0=K_r(A) \neq J(A)=K_l(A)$, *ha* $\mathfrak{m}$ *nem négyzetmentes véges szám.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{m}$ véges négyzetmentes szám, akkor minden p-komponens p-elemű zérógyűrű, vagy p-elemű test. Ezért A kommutatív, tehát minden homoperfekt maximális jobbideál moduláris, és ennélfogva

$$J(A) = K_r(A) = K_l(A).$$

Ha $\mathfrak{m}$ véges, de nem négyzetmentes szám, akkor $\mathfrak{m}=p^2\mathfrak{n}$. Legyen A az előző példában szereplő p^2-rendű nemkommutatív gyűrű, B pedig $\mathfrak{n}$-számosságú gyűrű, amely p-hatványrendű véges testek direkt összege. Ekkor $K_r(B)=J(B)=0$. Ha $C=A\oplus B$, akkor

$$K_r(C) = K_r(A) = 0 \neq J(C) = J(A) = (x)_r = K_l(C).$$

Ha pedig $\mathfrak{m}$ végtelen számosság, legyen B egy tetszőleges $\mathfrak{m}$-számosságú test (pl. a racionális számtest $\mathfrak{m}$-transzcendenciafokú tisztán transzcendens bővítése), A az előbbi gyűrű és $C=A\oplus B$. Ekkor szintén $K_r(B)=J(B)=0$ és

$$K_r(C) = K_r(A) = 0 \neq J(C) = J(A) = (x)_r = K_l(C).$$

63. TÉTEL. *K_r és K_l kétoldali ideálok minden A gyűrűben, amelyekre $AK_r\subseteqq \Phi_r\subseteqq$ $\subseteqq K_r\subseteqq J(A)$ és $K_lA\subseteqq \Phi_l\subseteqq K_l\subseteqq J(A)$ teljesülnek. De K_r és K_l nem gyűrűradikálok Amitsur—Kuros értelemben.*

Bizonyítás. $\Phi_r\subseteqq K_r\subseteqq J$ az előzőek alapján világos, míg a *Hille* [16]—*Kertész* [21]-féle $AJ\subseteqq \Phi_r$ tartalmazásból $AK_r\subseteqq \Phi_r$ is adódik.

Láttuk az előző példában szereplő A gyűrűre, hogy $K_r(A)=0$, de A-nak az $A_0=(x)_r\neq 0$ ideáljára $K_r(A_0)=A_0\neq 0$. Ezért K_r nem *Amitsur—Kuros*-féle gyűrűradikál. K_l vizsgálatához A-nak az A' antiizomorf képét kell tekintenünk.

A Keszthelyi Gyűrűelméleti Konferencián KERTÉSZ ANDOR említette A. KERTÉSZ—A. WIDIGER egy közös eredményét, hogy bármely N nilgyűrűre $K_r(N)=N$ teljesül és a konferencián WIEGANDT RICHARD is kérdezte, hogy: melyek azok az összes A gyűrűk, amelyekre $K_r(A)=A$?

64. TÉTEL. *Egy A gyűrűre $K_r(A)=A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $J(A)=A$.*

Bizonyítás. Ha $K_r(A)=A$, akkor $K_r\subseteqq J$ miatt $J(A)=A$ is teljesül.

Fordítva, ha $J(A)=A$, akkor $AJ\subseteqq \Phi_r\subseteqq J(A)$ miatt $A^2\subseteqq \Phi(A)$. Ez pedig azt jelenti, $K(M)$ definíciója alapján, hogy $A=K_r(A)$. Ezzel a 64. Tételt elemmentesen bebizonyítottuk.

Bizonyítás nélkül megemlítjük azt az eredményünket, amely szerint az A gyűrűre az alábbi két feltétel egymással ekvivalens:

1. A *Jacobson*-radikálmentes jobbartin-féle gyűrű;
2. A olyan egységelemes *MHR*-gyűrű, hogy bármely M A-jobbmodulusban a $K(M)$ *Kertész*-radikál egybeesik M maximális triviális részmodulusával, azaz $K(M)\cdot A=0$ ([42], Satz 4.3).

16. §. Kertész Andor egy problémájának megoldása kvázi-moduláris, maximális, de nem moduláris jobbideálok létezéséről

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [45] és [75] dolgozatában szerepel.

Az A gyűrű egy R jobbideálját kvázimodulárisnak nevezzük, ha $A^{-1}R \subseteq R$, ahol $B^{-1}C = [x;\ x \in A,\ Bx \subseteq C]$. Továbbá egy R jobbideál moduláris, ha van olyan $e \in A$ elem, hogy minden $x \in A$ elemre $x - xe \in R$. Egy R moduláris jobbideálra $R = A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $e \in R$. JACOBSON ([19] 1.3.1. állítás Korolláriuma, 6. oldal) szerint minden moduláris jobbideál kvázimoduláris.

KERTÉSZ ANDOR ([23, 125. oldal) könyvének 3. Problémája (más elnevezésekkel) kérdezi:

Minden kvázimoduláris maximális jobbideál moduláris-e?

A probléma azért jelentős, mert JACOBSON [19] szerint a J *Jacobson*-radikál minden gyűrűben az összes moduláris maximális jobbideál metszete. Másrészt KERTÉSZ ([23], 5. 24. Tétel (g)) szerint az összes kvázimoduláris maximális jobbideál metszete is éppen a *Jacobson*-radikál.

65. TÉTEL. *Minden $\mathfrak{m}$ végtelen számossághoz létezik egy K_p ($p=0$ vagy prímszám) prímtest felett vett A algebra, amely tartalmaz egy kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris R jobbideált, úgy hogy*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} R = \mathfrak{m}.$$

Bizonyítás. Legyen $\delta_{\alpha\beta}$ a *Kronecker*-szimbólum és Γ egy $\mathfrak{m}$-számosságú indexhalmaz. Legyen továbbá A az összes a_α, $r_{\beta\gamma}$ és $s_{\varepsilon\eta\vartheta}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta, \vartheta \in \Gamma$) szimbólummal a K_p prímtest felett generált algebra, ahol a szorzótábla

	a_ε	$r_{\varepsilon\eta}$	$s_{\varepsilon\eta\vartheta}$
a_α	a_ε	$\delta_{\alpha\varepsilon}\cdot a_\eta$	$\delta_{\alpha\varepsilon}\cdot a_\vartheta$
$r_{\alpha\beta}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\beta\varepsilon}\cdot r_{\alpha\eta}$	$\delta_{\beta\varepsilon}\cdot s_{\alpha\eta\vartheta}$
$s_{\alpha\beta\gamma}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\gamma\varepsilon}\cdot s_{\alpha\beta\eta}$	$\delta_{\gamma\varepsilon}\cdot s_{\alpha\beta\vartheta}$

Ez az A algebra monomiális és asszociatív. Legyen R az összes $r_{\alpha\beta}$ és $s_{\alpha\beta\gamma}$ elemmel generált részalgebra. A minden eleme

$$(*)\qquad a = \sum \pi_i a_{\alpha_i} + \sum \varrho_{i'j'} r_{\alpha_{i'}\beta_{j'}} + \sum \sigma_{i''j''k''} s_{\alpha_{i''}\beta_{j''}\gamma_{k''}}$$

alakban írható, ahol π_i, $\varrho_{i'j'}$, $\sigma_{i'j'k''} \in K_p$ és mindhárom $\sum$ összeg véges. R nyilván jobbideál A-ban, és minthogy $aR + R = A$ adódik minden $a \notin R (a \in A)$ elemre, R maximális jobbideál A-ban. Továbbá R nem moduláris $(1-a)A \subsetneqq R$ miatt. Ugyanis $a \in R$ esetén $(1-a]a_\alpha \notin R$ minden $\alpha \in \Gamma$ indexre. Ha pedig $a \notin R$, akkor $(*)$-ban legalább egy $\pi_i \neq 0$, és

$$(1-a)(-\pi_i^{-1} r_{\alpha_i\beta}) = a_\beta + r'' \notin R \quad (r'' \in R).$$

Meg lehet mutatni, hogy minden $a \notin R$ elemhez (lásd $(*)$) van végtelen sok olyan a_ε elem, hogy

$$a_\varepsilon \cdot a \notin R,$$

amiből következik, hogy a kvázimoduláris jobbideál. Ugyanis ha $a_\alpha a=r^*$, akkor $a=\sum \pi_i a_{\alpha_i}+r(r\in R)$. Minthogy $a_\alpha r=-\sum \pi_i a_{\alpha_i}+r^*$, ezért

$$r = \sum \sigma_i r_{\alpha\alpha_i}+\sum \tau_{jk} s_{\alpha\beta_j\gamma_k}+r_\alpha,$$

ahol $\sigma_i, \tau_{jk}\in K_p$ és mindkét $\sum$ összeg véges. Továbbá $r_\alpha\in R$ és $ar_\alpha\in R$. Tehát

$$(**) \qquad r_\alpha = \sum \pi_{ij}(r_{\alpha\gamma_i}-s_{\alpha\beta_j\gamma_i})+\sum \sigma'_{ij} r_{\beta_i\gamma_j}+\sum \tau'_{ijk} s_{\varepsilon_i\eta_j\vartheta_k}.$$

Minthogy mindhárom $\sum$ véges és $|\Gamma|=\mathfrak{m}$, van $\mathfrak{m}$ számosságú végtelen sok olyan ε index, hogy $\varepsilon\neq\alpha$ és ε különbözik a véges $\sum$-okban balról álló összes véges sok β_i és ε_i indextől is. Ekkor $a_\varepsilon r_\alpha=a_\varepsilon r=0$ és

$$a_\varepsilon a = \sum \pi_i a_{\alpha_i}\notin R.$$

Nyilvánvalóan $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} R=\mathfrak{m}$ is érvényes.

66. TÉTEL. *Ha egy A gyűrű tartalmaz kvázimoduláris, maximális de nem moduláris R jobbideált és egy nemzérus e idempotens elemet, akkor R is tartalmaz egy nemzérus f idempotens elemet.*

Bizonyítás. Nyilván $A=(1-e)A+R$, mert R maximális és nem moduláris. Ezért $e=(a-ea)+r$, ahol $r\in R$, és $e=e^2=er$. Ebből pedig $e=ere$, $re\neq 0$ és $f=re$ idempotens elem R-ben.

Szerző [45] dolgozata 3. §-ában több eredmény szerepel egyoldali ideálhányadosokkal kapcsolatban.

Redukáltnak nevezünk egy A gyűrűt, ha egy kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris R jobbideáljában fekvő kétoldali ideálja csak (0) lehet. Redukált gyűrű primitiv is.

67. TÉTEL. *Redukált gyűrű centruma* 0.

Bizonyítás. Legyen $a\in A$ és $a\notin R$. Ekkor $A^2\nsubseteq R$ miatt $aA+R=A$. Tehát van olyan $b\in A$ és $r\in R$, hogy

$$a = ab+r,$$

amiből $a(1-b)A=rA\subseteq R$. Másfelől $A=R+(1-b)A$, mert R maximális és nem moduláris. Ezért $aA\subseteq aR+R$ tehát $aR+R=A$. Legyen most C az A redukált gyűrű centruma és $c\in C$. Ekkor $cR=Rc\subseteq R$ és a bizonyítás előző részlete miatt $C\subseteq R$. Ekkor $(C)=C+CA\subseteq R$ és minthogy A redukált, a (C) ideál 0, és ezért $C=0$.

68. TÉTEL. *Redukált A gyűrűnek az A^+ additiv csoportja vagy elemi p-csoport, vagy pedig olyan torziómentes csoport, amelyre minden m racionális egész számmal*

$$A^+ = mA^++R^+$$

teljesül, ahol R kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris jobbideál. Ekkor R^+ tiszta alcsoport A^+-ban.

Bizonyítás. Legyen $A[p]$ az A^+ maximális elemi p-alcsoportja. Ha A^+ nem torziómentes, van olyan p prímszám, hogy $A[p]\neq 0$, ezért $A=A[p]+R$, ahonnan $pA=pR\subseteq R$. Minthogy pA ideál A-ban és A redukált, ezért $pA=0$. Ebben az esetben R^+ direkt összeadandó A^+-ban, ezért R^+ ekkor tiszta alcsoport is. Ha viszont $A[p]=0$ minden p prímszámra, akkor A^+ torziómentes, és ha $mA\neq 0$, akkor a redukáltság és R maximalitása miatt

$$A = mA+R.$$

Tegyük fel, hogy $a\in A$, $a\notin R$ és $na\in R$ egy nemzérus n egész számra. Minthogy $aR+R=A$, ezért $nA\subseteq R$, ami A redukáltságának ellentmond. Ezért $a\notin R$ esetén $Za\wedge R=0$, ahol Za jelenti most az a-val generált ciklikus csoportot, más szóval $(A/R)^+$ torziómentes. Ezért R^+ ekkor is tiszta alcsoport.

69. TÉTEL. *Legyen R kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris jobbideál az A gyűrűben, amely nem feltétlen redukált, de additív csoportja olyan legyen, mint a 68. tételben levő gyűrű additív csoportja. Legyen az $[x]^{-1}R$ jobboldali ideálhányadosra, ahol $[x]$ a csak az x elemből álló halmazt jelöli, $R=x$. $([x]^{-1}R)$. Ekkor $A=xR$, tehát x egy balnövelő elem, és $x_0R+R=A$ teljesül az x elemmel generált $\{x\}$ részgyűrű minden x_0 elemére. Van olyan $y\in A$ elem, hogy minden $x_0\in\{x\}$ elemre fennáll:*

$$(y-x_0)R+R = A.$$

Bizonyítás, amely nemtriviális, két oldalon megtalálható [45]-ben, ezért ezt itt mellőzzük.

1. *Példa.* Legyen A a racionális számtest felett az a és b elemekkel generált algebra, ahol

$$a = ba^2 \quad \text{és} \quad b = b^2a.$$

Igazolni lehet, hogy A-ban a szorzás asszociatív. Az is belátható, hogy A-ban nincs sem kétoldali, sem egyoldali egységelem. Legyen $R=baA$ és $L=Aba$. Ekkor R jobbideál és L balideál, továbbá

$$b\notin R\neq A \quad \text{és} \quad a\notin L\neq A.$$

Minthogy azonban $bA=Aa=A$, ezért $bR=b^2aA=bA=A$ és $La=Aba^2=Aa=A$. Tehát b *balnövelő, a jobbnövelő* elem A-ban.

2. *Példa.* Legyen A a racionális számtest felett az a, b és c elemekkel generált algebra, ahol

$$a = aba = a^2b, \quad b = ab^2 = bab,$$

$$c = abc = bac \quad \text{és} \quad ca = cb = c^2 = 0.$$

Ekkor $c=ab$ és $f=ba$ nemzérus idempotensek, legyen $R=fA$. Nyilván $R\neq A$, mert $a\notin R$, pedig A balegységelemes, hiszen $eA=A$.

Minthogy

$$aR = afA = abaA = aA\supseteq abA = eA = A,$$

ezért *a balnövelő* elem. A-nak a $J(A)$ *Jacobson*-radikálja $A(1-e)=(c)_l$. Továbbá, ha

$$e_i = b^i(1-f)a^i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

akkor e_i és e_j $(i \neq j)$ páronként orthogonális idempotens elemek. A nem jobbartin-féle és nem balartin-féle gyűrű, mert az

$$R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} e_i A$$

jobbideálok valódi végtelen fogyó láncot alkotnak és az

$$L_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} A e_i$$

balideálok pedig szintén valódi fogyó láncot alkotnak. $cA=0$ miatt A-ban nincs jobbegységelem, de $e=ab$, miként említettük, balegységelem. Továbbá

$$a^i + b^j a^k c \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

minden $x \in A$ elemnek balosztója.

70. TÉTEL. *Legyen R kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris jobbideál az A gyűrűben. Legyenek*

$$x_1, x_2, \dots, x_m \in A$$

olyan elemek, hogy $x_i R = A$ és $x_i r_i = x_i$ $(r_i \in R)$ $(i=1, 2, \dots, m)$, továbbá $(1-r)A = [a-ra;\ a \in A]$ és $I = \bigcap_{i=1}^{m} (1-r_i)A$. Legyen $S = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, vagyis az x_i elemekkel generált részgyűrű. Ha I moduláris jobbideál az A gyűrűben, akkor $S+R$ valódi $(\neq A)$ alcsoport az A^+ additív csoportban.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A^+ = S+R$. Minthogy $I = \bigcap_{i=1}^{m} (1-r_i)A$ feltétel szerint moduláris jobbideál, van olyan $a_0 \in A$ elem, hogy $(1-a_0)A \subseteqq I$. Továbbá tetszőleges $a \in A$ elemre $a = s+r$, ahol $s \in S = \{x_1, \dots, x_m\}$ és $r \in R$.

Minthogy pedig

$$x_i(1-a_0)A \subseteqq x_i(1-r_i)A = (x_i - x_i r_i)A = 0A = 0,$$

ezért minden $s \in S$ elemre $s(1-a_0)A = 0$, tehát minden $a = s+r$ elemre $a(1-a_0)A = r(1-a_0)A \subseteqq R$, ennélfogva $A(1-a_0)A \subseteqq R$. Az R kvázimodularitása miatt $(1-a_0)A \subseteqq R$, ami pedig ellentmond annak, hogy R nem moduláris A-ban. Ezért tényleg

$$R + S \neq A.$$

17. §. Kertész Andor egy problémájának megoldása moduláris jobbideálok metszetéről

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [51], [52] és [53] dolgozataiban található meg. — Ismeretes, hogy véges sok moduláris maximális jobbideál metszete szintén moduláris. Továbbá, vö. A. KERTÉSZ ([23], Satz 5.2), ha $A = R_1 + R_2$, ahol R_1 és R_2 moduláris jobbideálok az A gyűrűben, akkor $R_1 \cap R_2$ metszet szintén moduláris. A disszertáció 70. Tételében pedig feltételként szerepelt az, hogy $I = \bigcap_{i=1}^{m} (1-r_i)A$ legyen moduláris jobbideál.

KERTÉSZ ANDOR [23] könyvének 2. Problémája (a könyv 123. oldalán) kérdezi: Két moduláris jobbideál metszete mindig moduláris-e?

71. TÉTEL. *Minden $\aleph_\nu$ végtelen számossághoz van olyan A gyűrű, amely tartalmaz $\aleph_\nu$ számú olyan moduláris jobbideált, amelyek közül bármely kettőnek a metszete nem moduláris.*

Bizonyítás. Legyen A a kételemű test felett bizonyos t_α elemekkel generált algebra, ahol a t_α elemek halmazának számossága $\aleph_\nu$ és

$$t_\alpha^{k_\alpha} t_\beta^{k_\beta} = t_\alpha^{k_\beta} + t_\beta^{k_\beta} + t_\alpha^{k_\alpha + k_\beta}.$$

Közvetlen számolás mutatja, hogy ez a szorzás $x+x=0$ miatt asszociatív. $t_\alpha \neq t_\beta$ esetén $f(t_\alpha)=g(t_\beta)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f(t_\alpha)=g(t_\beta)=0$. Továbbá

$$(1-t_\alpha)A = (1+t_\alpha)A$$

pontosan az $(1+t_\alpha)f(t_\alpha)$ alakú polinomok halmaza lesz. Ezért $t_\alpha \neq t_\beta$ esetén $(1-t_\alpha)A \wedge \wedge (1-t_\beta)A=0$. Viszont 0 akkor és csak akkor moduláris, ha A balegységelemes. Megmutatjuk, hogy egyik

$$e = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} t_{\alpha_i}^j$$

elem sem lehet A balegységeleme. Ugyanis $et_\alpha = t_\alpha$ és

$$t_\beta^k t_\alpha = t_\alpha + t_\beta + t_\beta^{k+1}$$

miatt egyidejűleg

$$1 = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{és} \quad 0 = \sum_{\substack{j=1\\ i\neq m}}^{n} a_{ij},$$

tehát az $1=0$ ellentmondás adódik. Ezért A nem balegységelemes és $(1-t_\alpha)A \cap \cap (1-t_\beta)A$ pedig nem moduláris.

RÉDEI [26] *Algebra* I. könyvének német változata veti fel (a könyv 90. oldalán) azt a kérdést, hogy: Minden olyan F félcsoportban, amelyben a *Frattini*-részfélcsoport üres, félcsoport-e minden részhalmaz?

Ezt a problémát, mint ismeretes, LAJOS SÁNDOR negatív irányban, tehát egy F példa megadásával megoldotta. Ebben az F példában, amely négyelemű félcsoport, $\Phi(F)$ üres, bár van olyan részhalmaz, amely nem félcsoport.

Most egy szimultán megoldást adunk KERTÉSZ ANDOR könyve 2. problémájára és RÉDEI LÁSZLÓnak erre a félcsoportelméleti problémájára.

72. TÉTEL. *Létezik olyan* 16 *elemű A gyűrű, amelyre:*

1. *A-ban két moduláris nilpotens jobbideál metszete nem moduláris;*
2. *A elemei az $x \circ y = x+y-xy$ körművelettel olyan F_1 félcsoportot alkotnak, amelynek egy F négyelemű részfélcsoportjában $\Phi(F)$ üres, de F nem minden részhalmaza félcsoport;*
3. *A-ban a J Jacobson-radikál moduláris jobbideál, $J^3=0$, de $J^2 \neq 0$.*

Bizonyítás. Legyen A a kételemű test felett az a, b, c és d elemekkel generált algebra, és legyen a szorzási tábla:

	a	b	c	d
a	a	$a+b+c$	a	d
b	$a+b+d$	b	c	b
c	c	b	c	$a+c+d$
d	a	d	$b+c+d$	d

Ebben a bázis-előállításban A nem-monomiális algebra, de létezik A-nak olyan bázisa, miként H. J. WEINERT megmutatta, amelyben A már monomiális algebra lesz. Igazolható, közvetlen számolással, hogy A-ban a szorzás asszociatív, és hogy nincs A-nak balegységeleme. Továbbá

$$(1-a)A \wedge (1-b)A = 0,$$

tehát ez a metszet nem moduláris jobbideál. Nyilvánvalóan

$$(1-a)A = Z(a+c) \quad \text{és} \quad (1-b)A = Z(b+d),$$

amelyek nilpotens moduláris jobbideálok. J nyolc elemből áll, ezek:

$$0, a+b+c+d,$$

továbbá

$$a+b, a+c, a+d, b+c, b+d \quad \text{és} \quad c+d.$$

Belátható, hogy $J^3=0$, de $J^2 \neq 0$.

Végül megjegyezzük, hogy az a, b, c és d elemek a körművelettel egy olyan félcsoportot alkotnak, amely a *Lajos Sándor*-féle F nemkommutatív négyelemű félcsoporttal izomorf.

MEGJEGYZÉS. A 72. Tétel bizonyításában szereplő a, b, c és d elemek megadhatók 5×5 típusú matrixokkal is ([51], 213. oldal).

Most elegendő feltételeket adunk meg arra, hogy két moduláris jobbideál metszete mindig moduláris legyen:

73. TÉTEL. *Ha egy A gyűrűben teljesül az alábbi két feltétel egyike, akkor A bármely két moduláris jobbideáljának a metszete moduláris:*

1. *A balegységelemes,*
2. *minden $a, b \in A$ elempárra a*

$$Q_a = [a+x-ax; x \in A] \quad \text{és} \quad Q_b = [b+y-by; y \in A]$$

halmazok metszete nem üres.

Bizonyítás. Ha 1. teljesül, akkor minden jobbideál moduláris. Tegyük fel azt, hogy 2. teljesül. Ekkor van olyan $x, y \in A$, hogy

$$q = a+x-ax = b+y-by \in Q_a \cap Q_b,$$

ezért

$$(1-q)A = (1-a)(1-x)A = (1-b)(1-y)A \subseteqq (1-a)A \cap (1-b)A$$

miatt bármely két moduláris jobbideál metszete moduláris.

74. Tétel. *Teljesüljön az A gyűrűre az alábbi feltételek egyike:*

1. $a-b \in (1-a)A+(1-b)A$, *minden* $a, b \in A$ *elemre;*
2. *A Jacobson-radikálgyűrű;*
3. *Minden* $a, b \in A$ *elempárhoz létezik olyan* $q_a \in Q_a$ *és* $q_b \in Q_b$, *hogy* $q_a q_b = q_b \cdot q_a$;
4. *A kommutatív;*
5. *Ha* $q_a t = q_a$ *érvényes egy* $q_a \in Q_a$ *elemmel és* $t \in A$ *elemmel, akkor minden* Q_b*-ben van egy* q_b *elem úgy, hogy* $q_b t = q_b$;
6. *A jobbegységelemes;*
7. $a-ab \in (1-ab)A$ *érvényes minden* $a, b \in A$ *elemre.*

Bizonyítás. Mind a hét feltételről megmutatjuk, hogy belőle $Q_a \cap Q_b \neq \emptyset$ következik, és ekkor elég a 73. Tételt alkalmazni. Az 1. feltétel alapján van olyan $x, y \in A$, hogy

$$a-b = (1-a)(-x)+(1-b)y,$$

amiből

$$q = a+x-ax = b+y-by \in Q_a \cap Q_b$$

adódik.

A 2. feltételből triviálisan következik 1. és így $Q_a \cap Q_b \neq \emptyset$.

A 3. feltétel alapján van olyan $q_a \in Q_a$ és $q_b \in Q_b$, hogy $q_a \cdot q_b = q_b \cdot q_a$, tehát

$$q_a \circ q_b = q_b \circ q_a,$$

ezért, ha $q_a = a \circ x$ és $q_b = b \circ y$, akkor valóban:

$$a+(x \circ q_b)-a(x \circ q_b) = b+(y \circ q_a)-b(y \circ q_a) \in Q_a \cap Q_b.$$

A 4. feltételből következik 3., tehát $Q_a \cap Q_b \neq \emptyset$.

Az 5. feltétel alapján legyen egyidejűleg $q_a t = q_a$ és $q_b t = q_b$. Ekkor

$$t = q_a+t-q_a t = q_b+t-q_b t = a \circ x \circ t = b \circ y \circ t \in Q_a \cap Q_b.$$

6. feltétel alapján legyen e jobbegységelem. Ekkor $q_a e = q_a$ és $q_b e = q_b$ miatt 5. teljesül.

7. feltétel alapján van olyan $c \in A$, hogy $a-ab = c-abc$, amiből $c = a-ab+abc$. Ezért a $d = b-bc$ jelöléssel:

$$c = a-ad.$$

Ennélfogva egyrészt $a \circ d \in Q_a$, másrészt $b \circ c \in Q_b$ és fennáll az

$$a \circ d = a+d-ad = a+b-bc-ad = b \circ c$$

azonosság miatt $a \circ d \in Q_a \cap Q_b$.

F. HANSEN megmutatta, hogy ezek az elegendő feltételek nem szükségesek, és ő megadta a pontos kritériumot is későbbi dolgozatában.

Most megadjuk a „kínai maradék-tétel" egy általánosítását.

75. TÉTEL. *Legyen* $m \geqq 2$ *természetes szám és* $I_1, I_2, \ldots, I_m$ *olyan kétoldali ideálok az A gyűrűben, hogy* $I_0 = \bigcap_{j=1}^{m} I_j$ *moduláris és* $i \neq j$ *esetén mindig* $I_i + I_j = A$*:*
Legyen

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \in A$$

tetszőleges elemrendszer A-ban. Ekkor van olyan $x_0 \in A$ *elem, hogy* $x_0 - x_j \in I_j$ *minden j indexre* $(1 \leqq j \leqq m)$*, és ha* $y_0 - x_j \in I_j$ *minden j indexre, akkor* $x_0 - y_0 \in I_0$.

Bizonyítás. Minthogy I_0 moduláris, van olyan $e \in A$, hogy $x - ex \in I_0 \subseteqq I_j$ minden j indexre. Továbbá $i \neq j$ esetén $I_j + I_i = A$, tehát

$$A^{m-1} = \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} (I_t + I_s) \subseteqq I_s + \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} I_t \subseteqq A. \tag{1}$$

Minthogy $x - ex \in I_0$ minden $x \in A$ elemre, ezért $x \in A^2 + I_0$, tehát $A^2 + I_0 = A$, és az eljárást ismételve, $A = A^k + I_n$ minden k kitevőre. Ezért (1) és $I_0 \subseteqq I_j$ alapján:

$$A^{m-1} + I_0 \subseteqq I_s + \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} t_t \subseteqq A = A^{m-1} + I_0. \tag{2}$$

Tehát nyilván

$$A = I_s + \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} I_t \quad \text{minden } s \text{ indexre } (1 \leqq s \leqq m). \tag{3}$$

Legyen

$$K_s = \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} I_t.$$

Ekkor (3) alapján $A = I_s + K_s$ minden s-re $(1 \leqq s \leqq m)$, tehát létezik olyan $i_s \in I_s$ és $k_s \in K_s$, hogy

$$e = i_s + k_s. \tag{4}$$

Tekintsük a következő összegeket:

$$x_0 = \sum_{s=1}^{m} k_s x_s, \quad y_0 = x_0 + i_0 (i_0 \in I_0). \tag{5}$$

Ekkor $y_0 - x_0 \in I_0$ és

$$k_t \in K_t = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{m} I_s \subseteqq \bigcap_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{m} I_s \subseteqq I_s$$

miatt

$$\sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} k_t x_t \in I_s.$$

Ezért

$$k_s x_s - x_s = (e-i_j)x_s - x_s \in I_s,$$

következőleg

$$x_0 - x_s = \sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{m} k_t x_t + (k_s x_s - x_s) \in I_s.$$

18. §. Steinfeld Ottó két problémájának a megoldása és egy eredményének az élesítése

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [48], [49] és [63] dolgozataiban található meg. (Megjegyezzük, hogy [63]-ban Bechtell amerikai matematikus négy tételét megcáfoljuk.)

Legyen R egy kvázimoduláris maximális jobbideál az A (asszociatív) gyűrűben. A $Q=A^{-1}R=[x;\, x\in A,\, Ax\subseteq R]$ ideálhányadost kváziprimitív ideálnak nevezzük, az A/Q gyűrűt pedig kváziprimitív gyűrűnek.

Steinfeld Ottó kérdezte, hogy az összes kváziprimitív ideál D metszete egybeesik-e minden gyűrűben a J *Jacobson*-radikállal.

Szerző két bizonyítást is adott arra, hogy $D=J$. Az első [48] igen rövid és gyűrűelemekkel számol. Minthogy $D\subseteq J$, elég megmutatni, hogy $D\neq J$ lehetetlen. A másik bizonyítás, amely a [48] dolgozatban szerepel, gyűrűelemek használata nélkül mutatja meg négy metszetnek, köztük D-nek és J-nek az egyenlőségét. Steinfeld Ottó még kéziratban olvasta a [48] dolgozatot, és ennek a módszereit is felhasználva bebizonyította [32], hogy minden kváziprimitív ideál primitív ideál. Steinfeld Ottó [32] azt is igazolta, hogy ha R kvázimoduláris maximális jobbideál, akkor *létezik* egy olyan $x\in A$ és $x\notin R$ elem, hogy $[x]^{-1}R$ moduláris maximális jobbideál, és hogy teljesül:

$$A^{-1}R = A^{-1}[x]^{-1}R.$$

Élesebben igaz a következő:

76. Tétel. *Ha R egy kvázimoduláris maximális jobbideál az A gyűrűben, akkor minden olyan $x\in A$ elemre, amelyre $x\notin R$, érvényes, hogy*

$$P_x = (xA)^{-1}R$$

primitív ideál A-ban (tehát lényegében minden x-re egy x helyett).

Bizonyítás. Szerző [48] szerint $R_x=[x]^{-1}R$ moduláris maximális jobbideál, ha R kvázimoduláris maximális jobbideál. (Ugyanis, [48]-t követve, R_x jobbideál, és $A^2+R=A$ miatt $RA^{-1}=R$, tehát minden $x\in A$, $x\notin R$ elemre $xA+R=A$. Ezért minden $x\notin R$ elemhez van olyan $y\in A$, hogy $xy\notin R$, ezért $y\notin R_x$, tehát $R_x\neq A$. Ha $z\in A$ és $z\notin R_x$, akkor $xz\notin R$ és $xzA+R=A$, tehát tetszőleges $b\in A$ elemhez van olyan $a\in A$, $r\in R$, hogy

$$xza+r = xb.$$

Ennélfogva $x(b-za)=r\in R$, tehát $b-za\in R_x$ és $zA+R_x=A$, mert $b\in A$ tetszőleges elem. Ezért R_x maximális jobbideál A-ban. $xza_1+r_1=x$ teljesül bizonyos $a_1\in A$ és $r_1\in R$ elemekre, ahonnan $x(1-za_1)=r_1\in R$, tehát $x(1-za_1)A\subseteq R$ és $(1-za_1)A\subseteq R_x$ miatt R_x moduláris.

Minthogy pedig

$$A((xA)^{-1}R) = (xA+R)((xA)^{-1}R) \subseteq R,$$

következésképpen $(xA)^{-1}R\subseteq A^{-1}R$. Másfelől, ha $y\in A^{-1}R$, akkor $A^{-1}R=(xA+R)^{-1}R$ miatt $xAy\subseteq R$, tehát $y\in(xA)^{-1}R$, ezért $A^{-1}R=(xA)^{-1}R$ minden $x\in A$, $x\notin R$ elemre. Triviálisan igaz, hogy $(xA)^{-1}R=A^{-1}[x]^{-1}R=A^{-1}R_x^{-1}$, amivel a tételt bebizonyítottuk.

Steinfeld Ottó definiált egy T tulajdonságot egy A gyűrű maximális R jobbideáljaira: R egy T-tulajdonságú maximális jobbideál, ha minden $a\in A$, $a\notin R$ és minden $c\in A$ elemhez létezik olyan $b\in A$ elem, hogy teljesül:

$$abc-c^2\in R.$$

Steinfeld Ottó azt kérdezte, hogy tartalmazás szempontjából az összes T-tulajdonságú maximális jobbideál I metszete hogyan viszonylik a J *Jacobson*-radikálhoz.

77. Tétel. *Minden R maximális jobbideál T-tulajdonságú. Ezért $I=\Phi_r$ és $AJ\subseteq I\subseteq J$ minden A gyűrűben,*

Bizonyítás. Ha $A^2\subseteq R$, akkor $abc-c^2\in R$ minden a, b, c elemre. Ha pedig $A^2\nsubseteq R$, akkor A/R egyszerű A-jobbmodulus, tehát N. Jacobson ([19], 5. oldal) 1.2. Állítása szerint ciklikus is. Ezért létezik olyan moduláris maximális M jobbideál, hogy A/M és A/R egymással A-izomorfok. Minden $a\in A$, $a\notin R$ elemre $aA+R=A$, ezért minden $c\in A$ elemre:

$$c^2\in Ac = (aA+R)c \subseteq aAc+R$$

érvényes, tehát van olyan $b\in A$ és $r\in R$, hogy

$$c^2 = abc+r,$$

amiből $abc-c^2=-r\in R$ adódik. Ezért $I=\Phi_r$.

19. §. Bizonyos egyszerű Jacobson-radikálgyűrűkről

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [56] és [76] dolgozataiban szerepel.

Egy A gyűrű egyszerű, ha $A^2=A$ és A-ban csak 0 és A kétoldali ideálok. Miként jól ismeretes, E. Sasiada [19] adott meg példát egyszerű *Jacobson*-radikálgyűrűre, amely nem zérus, tehát nem is nilpotens. (Ugyanis $A^m=0$ és $A^2=A$ esetén $A=0$.)

Legyen A egy *Jacobson*-radikálgyűrű. Minden $a\in A$ elemre

$$\varphi_a: x \to (1-a)x(1-a)^{-1}$$

az A gyűrűnek egy kvázibelső-automorfizmusa. Itt 1 operátor és $(1-a)^{-1}=1-b$, ahol $a+b-ab=0$.

Jelölje $\bar{x}$ az x elem összes kvázibelső automorf képének a halmazát.

78. TÉTEL. *Legyen A olyan nemzérus Jacobson-radikálgyűrű, amelyre az $\bar{x}$ halmazzal generált $\{\bar{x}\}$ részgyűrű minden $x\in A$ elemmel kommutatív és az alábbi feltételek egyike teljesül:*

1. *A-ban nincs nemzérus nilpotens elem,*
2. *A-ban nincs olyan elem, amely egyidejűleg balnullosztó és jobbnullosztó,*
3. *A nullosztómentes.*

Akkor az $\bar{x}$ halmaz végtelen minden nemzérus $x\in A$ elemre.

Bizonyítás. 3.-ból következik 2., 2.-ből következik 1. és 1.-ből, mert A prímgyűrű, következik 3. Ezért azt igazoljuk, hogy 2. feltételű egyszerű *Jacobson*-radikálgyűrűben az $\bar{x}$ halmaz végtelen, ha $x\neq 0$. Ha ugyanis $\bar{x}$ véges volna, legyen

$$y = \prod_{z\in\bar{x}} z.$$

Ekkor $y = y\varphi_a$ minden φ_a kvázibelső automorfizmusra és az $R = yA$ jobbideálra $R\varphi_a \subseteq R$. Ezért

$$(1-a)R(1-a)^{-1} \subseteq R,$$

tehát $(1-a)R\subseteq R(1-a)\subseteq R$. Más szóval $r-ar\in R$ minden $a\in R$ elemre, ennélfogva $AR\subseteq R$. Tehát $R=A$ vagy $R=0$. De $yA=R=A$ lehetetlen, mert ekkor volna olyan $v\in A$ és $w\in A$, hogy $yv=y$ és $v+w-vw=0$, amiből

$$y = y(1-v-w+vw) = (y-yv)(1-w) = 0$$

adódik. De $yA=0$ esetén is $y=0$, mert $A^2\neq 0$. Viszont $y=0$ esetén

$$\prod_{i=1}^{k} x\varphi_{a_i} = 0$$

miatt

$$x\cdot\left(\prod_{i=2}^{k-1} x\varphi_{a_i}\right)x = 0,$$

tehát 2. alapján $x=0$.

79. TÉTEL. *Az előző jelölésekkel $A=\sum_{z\in\bar{x}} zA$ érvényes az A egyszerű Jacobson-radikálgyűrű minden $x\in A$ elemére.*

Bizonyítás. Ha $R=\sum_{z\in\bar{x}} zA$, akkor mindig $R\varphi_a\subseteq R$, tehát $AR\subseteq R$ és $R=A$.

A továbbiakban olyan A *Jacobson*-radikálgyűrűket vizsgálunk, amelyekre $x\neq 0$ és $y\neq 0$ esetén mindig $\bar{x}=\bar{y}$. Tehát csak két ekvivalencia osztály van $\bar{0}$ és $\bar{x}=A\setminus 0$. Az ilyen gyűrűket *Ω-gyűrűknek* nevezzük. $\bar{x}=\bar{y}$ miatt van olyan z, hogy

$$(*)\qquad x = (1-z)y(1-z)^{-1}.$$

Ezért, ha $A^2=A$, akkor A egyszerű gyűrű, amely algebra egy K_p ($p=0$ vagy prímszám) prímtest felett.

80. TÉTEL. *Ha egy Ω-gyűrűben vannak nemzérus nilpotens elemek, akkor $A^2=0$ és $|A|=2$.*

Bizonyítás. Feltételünk és $(*)$ alapján A olyan ideálmentes gyűrű, amelyben minden nemzérus elem négyzete 0. Így

$$0 = (x+y)^2 = xy+yx$$

miatt $yx = -xy$, és szintén $(*)$ alapján

$$x = (1-z)y(1-z)^{-1} = (1-z)y(1+z) = y+2yz \in (y)_r.$$

$(y)_r$ tehát minimális jobbideál, amelyre $(y)_r = A$, ennélfogva $A^2=0$ és $|A|=2$.

81. TÉTEL. *Nilpotens elem nélküli A Ω-gyűrű zérusosztómentes, és ha K_p az A algebra operátorprímteste, akkor minden $x \in A$ elem transzcendens K_p felett. Továbbá minden nemzérus $a \in A$ elemhez és minden $f(x) \in xZ[x]$ polinomhoz van olyan $c \in A$ elem, hogy $a=f(c)$. Speciálisan, ha $a^m+b^m \neq 0$, van olyan $c \in A$, hogy $a^m+b^m=c^m$.*

Bizonyítás. Nilpotens elem nélküli Ω-gyűrű $A^2 \neq 0$ miatt egyszerű, tehát prímgyűrű, és minden nilpotens elem nélküli prímgyűrű zérusosztómentes. (Ugyanis $xy=0$ és $x \neq 0$ esetén $(yAx)^2=0$, tehát $yAx=0$ és $(y)(x)=0$ miatt $(y)=0$, tehát $y=0$.) N. JACOBSON ([19], 1.10.1 Tétel) alapján A minden eleme transzcendens K_p felett, mert A nilpotens elem nélküli. Ezért ha $a \neq 0$, $a \in A$, és ha $f(x) \in z, Z[x]$, akkor $a^* = f(a) \neq 0$. Van tehát olyan $b \in A$ elem, hogy

$$a^* = f(a) = a\varphi_b = (1-b)a(1-b)^{-1}.$$

Legyen $c = a\varphi_{b^*} = (1-b)^{-1}a(1-b)$, ahol tehát

$$\varphi_b \cdot \varphi_{b^*} = \varphi_{b^*} \cdot \varphi_b = 1, \qquad b+b^*-bb^* = 0.$$

Ekkor nyilván b^* kváiinverze b-nek és fennáll:

$$f(c) = f(a\varphi_{b^*}) = f(a) \cdot \varphi_{b^*} = a\varphi_b\varphi_{b^*} = a \cdot 1 = a.$$

Ha $a_1^m + b_1^m \neq 0$ és $f(x)=x^m$, nyilván van olyan $c_1 \in A$ elem is, hogy $a_1^m+b_1^m=c_1^m$, amivel a tételt bebizonyítottuk.

82. TÉTEL. *Legyen A zérusosztómentes Ω-gyűrű, $x \neq 0$, $x \in A$ és $x+x'-xx'=0$, $x+x'-x'x=0$. Tegyük fel azt, hogy $2y-y^2 \in \{x, x'\}$ esetén mindig $y \in \{x, x'\}$, ahol $\{v, w\}$ jelenti a v és w által generált részgyűrűt. Ekkor minden x elemnek a C_x centralizátora bővebb, mint $\{x, x'\}$.*

Bizonyítás. Van olyan $z \in A$ elem, hogy $x'=(1-z)x(1-z)^{-1}$. Minthogy $(1-x)(1-x')=(1-x')(1-x)=1$, ahol 1 operátor,

$$(1-x')\left(1-(1-z)x'(1-z)^{-1}\right) = 1,$$

amiből a kváziinverz egyértelműsége miatt $x=(1-z)x'(1-z)^{-1}$, tehát $x=(1-z)^2 \cdot$ $\cdot x(1-z)^{-2}$ és $x'=(1-z)x'(1-z)^{-2}$. Ezért $c=2z-z^2 \in C_x \cap C_{x'}$. Triviálisan $\{x, x'\} \subseteq$ $\subseteq C_x \cap C_x$. Ha $2z-z^2 \in \{x, x'\}$ volna, akkor a Tételben kimondott feltétel szerint $z \in \{x, x'\}$, de ekkor $z \in C_x \cap C_{x'}$, tehát z definíciója miatt $x'=x$ és így $2x-x^2=0$ volna, ami a 81. Tétel szerint $x \neq 0$ esetén lehetetlen. Ezért $c \notin \{x, x'\}$ és így tényleg fennáll, hogy

$$\{x, x'\} \subsetneqq \{x, x', c\} \subseteq C_x \cap C_{x'} \subseteq C_x.$$

V. FEJEZET

A JACOBSON-RADIKÁL NEMZÉRUS JOBBTALPÚ GYŰRŰKBEN

20. §. Szele, Fuchs és Kertész közös problémájának megoldása jobbartin-féle gyűrűk széthasíthatóságáról

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [44] dolgozatában található.

Jobb talpon a gyűrű összes minimális jobbideáljának az összegét értjük. MHR-gyűrűkben és jobbartin-féle gyűrűkben a jobbtalp nemzérus. Egy A jobbartin-féle gyűrűt széthasíthatónak nevezünk, ha A egy torziómentes ideáljának és egy torzióideáljának a direkt összege. E direkt összeadandók, mint A homomorf képei, szintén jobbartin-féle gyűrűk. Ha $A=J(A)$ és A jobbartin-féle, akkor A nilpotens, és minthogy ekkor A^+ torziócsoport, ezért A széthasítható. Másrészt, ha $J(A)=0$ és A jobbartin-féle gyűrű, akkor A, mint (A, A)-duplamodulus teljesen reducibilis, tehát a maximális torzióideál direkt összeadandó, és ezért A ekkor is széthasítható. Másrészt FUCHS és SZELE [12] igazolta azt, hogy ha nincs $C(p^\infty)$ alcsoport A^+-ban, akkor az A jobb-artin-féle gyűrű mindig széthasítható.

SZELE még 1953-ban kérdezte, hogy létezik-e vegyes additív csoportú, gyűrű-elméletileg direkt felbonthatatlan, jobbartin-féle gyűrű.

Ezzel ekvivalens FUCHS és SZELE 1955-ből való problémája:

Vajon minden jobbartin-féle gyűrű széthasítható-e?

1961 őszén ugyanezt a problémát KERTÉSZ ANDOR újra felvetette Oberwolfach-ban, a Gyűrűelméleti Konferencián tartott előadásában.

Minthogy $C(p^\infty)$ benne van az A jobbartin-féle gyűrű kétoldali annihilátorá-ban, és az annihilátor pedig a $J(A)$ *Jacobson*-radikálban és minthogy $C(p^\infty)$-t nem tartalmazó, jobbartin-féle gyűrűk, vagy ha $A=J(A)$ vagy ha $J(A)=0$, széthasít-hatók, a *Jacobson*-radikálnak nyilván szerepe van A széthasíthatóságában.

Ebben a §-ban minden A jobbartin-féle gyűrűre megoldjuk az említett *Szele—Fuchs—Kertész*-féle problémát, mert igazoljuk, hogy minden jobbartin-féle gyűrű széthasítható.

83. TÉTEL. *Ha egy torziómentes A gyűrűben minden R jobbideál additív csoportja osztható, akkor A Divinsky-radikálgyűrű, azaz $a\in aA$ érvényes minden $a\in A$ elemre.*

Bizonyítás. Tegyük fel azt, hogy van olyan $a\in A$, hogy $a\notin aA$. Ha $ka=aa_1\in aA$ volna egy $k\neq 0$, $k\in Z$ számmal, akkor volna olyan $a_2\in A$, hogy $a_1=ka_2$, tehát

$$ka = kaa_2, \qquad k(a-aa_2) = 0,$$

így $a=aa_2\in aA$, ami lehetetlen. Ezért $Za\cap aA=0$ és minthogy $(a)_r^+=(Za+aA)^+$ osztható csoport, $Za\cong(a)_r^+/aA^+$ is osztható, ami lehetetlen. Ezért valóban $a\in aA$ teljesül minden $a\in A$ elemre.

84. TÉTEL. *Ha $a\in aA$ minden $a\in A$ elemre, és ha van olyan $e\in A$ idempotens elem, hogy $b-be\in J$, ahol J az A Jacobson-radikálja, akkor e jobbegységelem A-ban.*

Bizonyítás. Legyen $a \in A$ tetszőleges elem, és $e^2 = e \in A$ olyan idempotens elem, hogy $b - be \in J$ minden $b \in A$ elemre. Van olyan $a_2 \in A$ elem, hogy $a_1 = a_1 a_2$, ahol $a_1 = a - ae$. Ezért fennáll, hogy

$$a - ae = (a - ae)(a_2 - a_2 e) + (a - ae) a_2 e.$$

Szorozzuk meg e-vel jobbról ezt az egyenlőséget:

$$(a - ae) a_2 e = 0,$$

tehát

$$a - ae = (a - ae)(a_2 - a_2 e).$$

Minthogy $a_2 - a_2 e \in J$, van olyan a_3 elem, hogy

$$(a_2 - a_2 e) + a_3 - (a_2 - a_2 e) a_3 = 0,$$

ennélfogva

$$a - ae = (a - ae)\big(1 - (a_2 - a_2 e) - a_3 + (a_2 - a_2 e) a_3\big) =$$

$$= (a - ae)\big(1 - (a_2 - a_2 e)\big)(1 - a_3) = 0.$$

Tehát $a = ae$, és így e tényleg jobbegységelem A-ban.

85. TÉTEL. *Bármilyen torziómentes jobbartin-féle gyűrű jobbegységelemes.*

Bizonyítás. A-nak a J *Jacobson*-radikálja nilpotens. Minthogy A^+ torziómentes, ezért $J \neq A$, mert $J = A$ esetén A^+ torziócsoport volna. Minthogy A/J egységelemes és J nilpotens, van olyan $0 \neq e \in A$ idempotens elem, hogy $e + J$ éppen A/J egységeleme lesz. Ekkor $a - ae \in J$ minden $a \in A$ elemre. Legyen R tetszőleges jobbideál A-ban, és legyen mR minimális az nR alakú jobbideálok közt $(m, n \in Z)$. Ekkor mR^+ osztható, tehát $R^+ = mR^+ + K$, ahol K egy alkalmas additív alcsoport A^+-ban. Minthogy $K \cong R/mR$ m-korlátos elemrendű és A^+ torziómentes, ezért $K = 0$ és $R^+ = mR^+$ osztható csoport. Ennélfogva $a \in aA$ érvényes a 83. tétel alapján, és A-ban e jobbegységelem lesz a 84. Tétel alapján. Ezzel a 85. Tételt bebizonyítottuk.

86. TÉTEL. *Minden jobbartin-féle A gyűrű széthasítható.*

Bizonyítás. Legyen P az A maximális torzió ideálja. Ekkor A *Everett*-bővítése P-nek a torziómentes A/P gyűrűvel. Minthogy $A^+ = B + C + D$, ahol B korlátos elemrendű *Abel*-csoport, C véges sok $C(p^\infty)$ direkt összege és D torziómentes osztható csoport, nyilván $P^+ = B + C$. Legyen $T = A/P$. Ekkor, mind a $[t_1, t_2]$ additív faktorrendszer, mind pedig a pt és tp $(p \in P,\ t \in T)$ endomorfizmus-rendszerek választhatók azonos zérusnak, mert $A^+ = P^+ + D$. Legyen $\langle t_1, t_2 \rangle$ az *Everett*-bővítés multiplikatív faktorrendszere.
Ekkor

$$\langle t_1 + t_2, t_3 \rangle = \langle t_1, t_3 \rangle + \langle t_2, t_3 \rangle$$

$$\langle t_1, t_2 + t_3 \rangle = \langle t_1, t_2 \rangle + \langle t_1, t_3 \rangle,$$

valamint $\langle t_1, t_2 t_3 \rangle = \langle t_1 t_2, t_3 \rangle$, ahol $t_i \in T$. Minthogy a torziómentes jobbartin-féle $T = A/P$ gyűrűnek van egy e jobbegységeleme, $\langle t_1 t_2, e \rangle = \langle t_1, t_2 \rangle$. Ekkor

$$\varphi : t \to \langle t, e \rangle$$

additív homomorfizmusa T^+-nak P^+-ba és

$$(t_1 t_2)\varphi = \langle t_1 t_2, e\rangle = \langle t_1, t_2\rangle.$$

Minthogy $T^+ \cong (A/P)^+ = D$, ezért $T\varphi$ osztható, tehát $T\varphi \subseteq B$. Ennélfogva A formálisan az összes (p, t) rendezett pár halmaza, ahol a párok egyenlőségét triviálisan értelmezzük, az összeadást is triviálisan, azaz

$$(p_1, t_1)+(p_2, t_2) = (p_1+p_2, t_1+t_2).$$

A szorzás pedig

$$(p_1, t_1)\cdot(p_2, t_2) = \big(p_1\cdot p_2+(t_1\cdot t_2)\varphi, t_1 t_2\big).$$

Az összes $(t\varphi, t)$ alakú elem A-ban egy torziómentes Q ideált képez, és $Q \subseteq A^2$, mert B — ami véges sok $C(p^\infty)$ összege — A kétoldali annihilátorában fekszik. Minthogy pedig $(p, t) = (p - t\varphi, 0) + (t\varphi, t)$, ahol $(p - t\varphi, 0) \in P$, $(t\varphi, t) \in Q$, továbbá $P \cap Q = 0$, nyilván $A = P \oplus Q$. Ezzel a 86. Tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Később J. N. HERSTEIN [14] másik bizonyítást adott arra, hogy torziómentes jobbartin-féle gyűrű jobbegységelemes, és szintén később KERTÉSZ ANDOR [22] az *Everett*-bővítések nélkül bebizonyított egy általánosabb $A = P \oplus Q$ széthasíthatósági tételt, de KERTÉSZ ANDOR szintén feltette azt, hogy $Q \cong A/P$ jobbegységelemes gyűrű.

21. §. Szele, Rédei és Kertész egy közös problémájának a megoldása olyan gyűrűk létezéséről, melyeknek csak véges sok jobbideáljuk, de végtelen sok balideáljuk van

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [42] dolgozatában található.

SZELE TIBOR [89] 1949-ben kérdezte, hogy létezik-e olyan gyűrű, amelynek csak véges sok jobbideálja, de végtelen sok balideálja van.* Ugyanezt a kérdést RÉDEI [26] Algebra I. könyve 211. oldalán 1959-ben újra felveti. KERTÉSZ ANDOR pedig 1961-ben, az Oberwolfachban tartott Gyűrűelméleti Konferencián, előadásában veti fel ugyanezt a *Szele*-féle problémát. Később HAJNAL ANDRÁS egy másik, ilyen típusú kérdést vetett fel. E §-ban ezeket a kérdéseket oldjuk meg.

Példa. Legyen F tetszőleges ferdetest, $\varphi\colon F \to F\varphi$ az F-nek egy önmagába való izomorfizmusa pl. F legyen a K_0 racionális számtestnek egy $\aleph_\nu$ transzcendenciafokú transzcendens testbővítése, ahol $[\dots, t_\alpha, \dots]$ lesz egy $\aleph_\nu$-számosságú transzcendenciabázisa. Legyen A_0 az összes

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k$$

formális hatványsor halmaza, ahol z transzcendens elem F felett, $Z^0 = 1 \in F$ és $f_k \in F$. Ekkor A_0 egy (F, F)-duplaalgebra lesz, ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k g_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (f_k + g_k),$$

* Ha A ilyen gyűrű, akkor a $J(A)$ *Jacobson*-radikálra nyilván $0 \neq J(A) \neq A$ teljesül.

továbbá $fz = zf\varphi$ és $fz^k = z^k f\varphi^k$. Legyen két hatványsor szorzata a következő:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l g_l\right) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left(\sum_{m=k+l} f_k \varphi^l, g_l\right).$$

Minthogy a hatványsorok együtthatóit jobbról írtuk, ezek lényegileg jobbhatványsorok, de $fz = z(f\varphi)$ miatt bármely balhatványsor átírható jobbhatványsorba, és $(f\varphi^{-1})z = zf$ alapján bármely jobbhatványsor is átírható balhatványsorrá.

Legyen R tetszőleges jobbideál A_0-ban, $r_k = \sum_{j \geq k}^{\infty} z^j f_j$ olyan elem, ahol $f_k \neq 0$ és k minimális. Minthogy

$$\begin{aligned} f_k h_0 &= g_k \\ (f_k \varphi) h_1 + f_{k+1} h_0 &= g_{k+1} \\ (f_k \varphi^2) h_2 + (f_{k+1} \varphi) h_1 + f_{k+2} h_0 &= g_{k+2} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \end{aligned}$$

egyenletek a $h_0, h_1, h_2, \ldots$ ismeretlenekre megoldhatók, belátható, hogy $R = (r_k)_r$ főjobbideál. Tehát A_0-ban minden jobbideál egy $(z^k)_r$ alakú főjobbideál. Az A_0 balideálhálója erősen függ attól, hogyan választjuk meg az

$$F \to F\varphi$$

testizomorfizmust. Nyilván A_0 lokális gyűrű, amelyben $(z)_r = zA_0$ az egyetlen maximális ideál és $F \cong A_0/zA_0$, $zA_0 = J(A)$.

87. TÉTEL. *Minden $n \geq 3$ természetes számhoz és minden $\aleph_\nu$ végtelen számossághoz van olyan A jobbartin-féle gyűrű, hogy teljesül:*

1. *A egységelemes, és A-nak pontosan $\aleph_\nu$ számú eleme van;*
2. *A jobbideálhálója n-elemű lánc, és minden jobbideál kétoldali ideál;*
3. *A balideálhálójának $\aleph_\nu$ számú eleme van, és ez a háló véges hosszúságú.*
4. *A-nak pontosan $\aleph_\nu$ számú főbalideálja van.*

Bizonyítás. Legyen $A = A_0/z^{n-1}A_0$ és F a K_0 racionális számtestnek $[\ldots, t_\alpha, \ldots]$ transzcendencia-bázisú, $\aleph_\nu$ transzcendencia-fokú transzcendens testbővítése, és legyen

$$t_\alpha \varphi = \begin{cases} t_\beta^n, & \text{ha} \quad \alpha = \beta \\ t_\alpha, & \text{ha} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

A $\varphi: t_\alpha \to t_\alpha \varphi$ leképezés, amely K_0 elemeit rögzítve hagyja, kiterjeszthető F-nek egy testizomorfizmusává. Ekkor F rangja az $F\varphi$ résztest felett éppen n, és közvetlenül igazolható, hogy az $A = A_0/z^{n-1}A_0$ faktorgyűrűre 1., 2., 3. és 4. feltételek teljesülnek.

Még 1962 tavaszán említettem HAJNAL ANDRÁSnak a 87. Tételem tartalmát, és akkor HAJNAL ANDRÁS azt kérdezte, hogy lehetséges-e az, hogy a gyűrűnek $\aleph_\nu$ eleme, $2^{\aleph_\nu}$ balideálja, de csak véges sok jobbideálja van. (Itt $2^{\aleph_\nu}$ nyilván a halmazelméleti maximum.) Ekkor bebizonyítottam a következőt:

88. TÉTEL. *Minden $n \geqq 3$ természetes számhoz és minden $\aleph_\nu$ végtelen számossághoz létezik olyan jobbartin-féle A gyűrű, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. *A egységelemes, és A-nak pontosan $\aleph_\nu$ számú eleme van;*
2. *A jobbideálhálója n-elemű lánc, és minden jobbideál kétoldali ideál;*
3. *A balideálhálója pontosan $2^{\aleph_\nu}$ elemű, és a balideálháló $\aleph_\nu$-hosszúságú.*
4. *Léteznek a balideálhálóban fogyó és növő, $\aleph_\nu$-elemű láncok, tehát A sem balartin-féle, sem balnoether-féle gyűrű;*
5. *A-nak $\aleph_\nu$-számú főbalideálja van, de a főbalideálok láncainak hosszai összességükben végesek, és korlátosak.*

Bizonyítás. Legyen $A = A_0/z^{n-1}A_0$, és φ úgy megválasztva, hogy az F rangja $F\varphi$ résztest felett éppen $\aleph_\nu$ legyen. Ez például történhetik úgy, hogy minden α indexre a transzcendencia-bázisnak a

$$t_\alpha \varphi = t_\alpha^2 \quad \text{(minden } \alpha \text{ indexre)}$$

leképezését kiterjesztjük F önmagába való $\varphi: F \to F\varphi$ izomorfizmusává. Ekkor F rangja $F\varphi$ felett tényleg $\aleph_\nu$. Igazolható, hogy 1., 2., 3., 4. és 5. teljesül az $A = A_0/z^{n-1}A_0$ faktorgyűrűre.

89. TÉTEL. *Minden $(\aleph_\mu, \aleph_\nu)$ végtelen számosságpárhoz létezik olyan egységelemes, balról és jobbról is Artin-féle C gyűrű, amelynek pontosan $\aleph_\nu$ számú balideálja és pontosan $\aleph_\nu$ számú jobbideálja van.*

Bizonyítás. A 87. Tétel alapján van olyan A gyűrű, amelynek n $(\geqq 3)$ jobbideálja és $\aleph_\nu$ balideálja van. Továbbá legyen B antiizomorf egy olyan A'-gyűrűhöz, hogy A'-nek n jobbideálja és $\aleph_\mu$ balideálja van. Ekkor B-nek n balideálja és $\aleph_\mu$ jobbideálja van. Ekkor a

$$C = A \oplus B$$

direkt összegnek pontosan $\aleph_\nu$ balideálja és pontosan $\aleph_\mu$ jobbideálja van.

Megjegyezzük, hogy szerző ([42], Satz 2.5) explicit meghatározta mindazokat a gyűrűket, amelyeknek pontosan három jobbideáljuk van. SZÉP JENŐ [90] olyan G csoportokat vizsgált korábban, amelyeknek 1, N és G, ahol $1 \neq N \neq G$, az összes normálosztója. Szerző ([42], Satz 2.7) szerint minden három jobbideálos A gyűrűben teljesül a főbalideálok minimum-feltétele, és ha ekkor a balideálháló végtelen, akkor A egységelemes.

Probléma. Teljesül-e a gyűrűben a főbalideálok minimum-feltétele, ha a jobbideálháló véges?

22. §. Hans-Jürgen Hoehnke egy problémájának megoldása bizonyos nemzérus jobbtalpú primitív gyűrűknek a körművelettel való jellemzéséről

E §-nak az anyaga a szerző [64] dolgozatában található meg.

Ismeretes, hogy az A gyűrű akkor és csak akkor *Jacobson*-radikálgyűrű, ha elemei az $x \circ y = x + y - xy$ körművelettel csoportot alkotnak. Tetszőleges A gyűrűben az elemek a körművelettel egységelemes félcsoportot alkotnak és éppen $0 (\in A)$

lesz e félcsoportnak az egységeleme. Ez az adjungált félcsoport akkor és csak akkor „jó", ha a gyűrű „rossz". H. J. HONEHKE azt kérdezte, hogy a körművelet felhasználásával hogyan jellemezhetők bizonyos *Jacobson*-féligegyszerű gyűrűk. Eredményképpen bizonyos nemzérus jobbtalpú primitív gyűrűket, éspedig kételemű testeket fogunk kapni. Ezeknek legfőbb jelentőségük a kétértékű logikában és a *Boole*-algebrák elméletében van, ui. *Stone*-tétele szerint bármely *Boole*-gyűrű (vagyis $a^2=a$ minden $a\in A$ elemre) kételemű testeknek egy szubdirekt összege, és tudvalevőleg a *Boole*-algebrák és *Boole*-gyűrűk egymást kölcsönösen és egyértelműen meghatározzák.

Legyen S egy tetszőleges absztrakt félcsoport. S-nek egy $s\in S$ elemét jobbkváziregulárisnak nevezzük, ha minden $t, u\in S$ elemhez létezik olyan nemnegatív m és n kitevő, hogy

$$s^m t = s^n u.$$

(Ha esetleg $m=0$, akkor legyen $s^0=1$, az egységoperátor, vagy S egységeleme, ha S egységelemes.)

Az e egységelemes S félcsoportot majdnem jobbkváziregulárisnak (ill. majdnem nil-nek, majdnem nilpotensnek, majdnem triviálisnak) nevezzük, ha $S=e\cup Q, e\notin Q$ és a Q ideál minden eleme jobbkvázireguláris (illetve, Q zéruselemes, és Q nil félcsoport; Q nilpotens félcsoport, ill. $Q^2=0$).

Az A gyűrű elemeinek a körművelettel ellátott egységelemes félcsoportját a gyűrű adjungált félcsoportjának nevezzük.

90. TÉTEL. *Egy A gyűrűre, illetve A-nak az S adjungált félcsoportjára az alábbi tizenhárom feltétel egymással ekvivalens:*

1. *S majdnem jobbkvázireguláris;*
2. *S majdnem jobbkvázireguláris és van olyan $e\in S$ idempotens eleme, hogy $e\neq 1\in S$ (itt $1\in S$ éppen az A gyűrű zéruseleme lesz, és S esetleges zéruseleme pedig A esetleges (kétoldali) egységeleme);*
3. *S balzéruselemes és majdnem jobbkvázireguláris;*
4. *S jobbzéruselemes és majdnem jobbkvázireguláris;*
5. *S zéruselemes és majdnem jobbkvázireguláris;*
6. *S zéruselemes és majdnem nil;*
7. *S zéruselemes, majdnem nil és elemei korlátos nilpotenciafokúak;*
8. *S zéruselemes és majdnem nilpotens;*
9. *S zéruselemes, majdnem nilpotens és kommutatív;*
10. *S zéruselemes és majdnem triviális;*
11. *S zéruselemes, majdnem triviális és véges;*
12. *S kételemű félcsoport és szorzótáblája*

	a	b
a	a	a
b	a	b

13. *S egy kételemű A test adjungált félcsoportja.*

Bizonyítás. Az 1., 2., ..., 12. és 13. feltételek logikai összefüggése olyan, hogy ha igazoljuk csupán 1. és 13. ekvivalenciáját, akkor már mind a tizenhárom feltétel ekvivalenciáját is igazoltuk. *Hoehnke*-gyűrűnek, röviden H-gyűrűnek nevezzük A-t, ha az S adjungált félcsoportra az 1. feltétel teljesül. Feltesszük tehát, hogy A egy H-gyűrű, és igazoljuk, hogy A kételemű test, tehát hogy teljesül 13. A bizonyítást kilenc lépésben végezzük el, ezeket a lépéseket *a)*-val, *b)*-vel, ... *h)*-val és *i)*-vel jelöljük.

a) Minden nemzérus x elemhez és tetszőleges y és z elemekhez van olyan nemnegatív kitevő, hogy $1-(1-x)^m(1-y)=1-(1-x)^n(1-z)$. Ennek bizonyítása a jobbkvázireguláris elem definíciója és $x\circ y=1-(1-x)(1-y)$ alapján adódik.

b) Ha A egy H-gyűrű és $0\neq e=e^2\in A$ idempotens elem, akkor e az A balegységeleme. Nyilván $(1-e)^2=1-e$, és ha *a)*-ban $x=y=e$, akkor $1-(1-e)=$ $=1-(1-e)(1-z)$, tehát $ez=z$ minden $z\in A$ elemre.

c) Minden A H-gyűrű minden $a\in A$ eleméhez van két különböző k és l kitevő, úgy hogy $1-(1-a)^k=1-(1-a)^l$. Ha ugyanis az *a)* állításban $x=y=a\circ a=2a-a^2$ és $z=a$, akkor

$$1-(1-a\circ a)^m(1-a\circ a) = 1-(1-a\circ a)(1-a)$$

bizonyos m és n nemnegatív kitevőkkel. Ezért

$$1-(1-a)^{2m+2} = 1-(1-a)^{2n+1}$$

és ez a két kitevő különbözik, mert baloldalon páros, jobboldalon páratlan szám a kitevő.

d) Bármely A H-gyűrű bármely nemzérus a eleméhez van olyan m kitevő, hogy minden $b\in A$ elemre

$$(1-a)^m b = 0$$

érvényes, ezért az $\{a\}$ részgyűrűnek mindig van egységeleme.

Ugyanis *c)* alapján az S adjungált félcsoport torziófélcsoport. Ezért S minden a eleme olyan részfélcsoportot generál, amelyben van egy e idempotens, amelyre $e\neq 0$ (0 az A zérus eleme). Ekkor $e=1-(1-a)^m$, és minthogy *b)* alapján $eb=b$ minden $b\in A$ elemre, ezért $(1-a)^m b=0$. Minthogy $e\in\{a\}$, ezért $\{a\}$ egységelemes.

e) Ha az A H-gyűrűben van az $a\in A$ elemnek kváziinverze, tehát $a\circ b=b\circ a=0$, akkor $a=0$.

Ugyanis, ha $a\neq 0$ és $(1-a)(1-b)=(1-b)(1-a)=1$, akkor minden m kitevőre $1-(1-b)^m(1-a)^m=0$. Viszont a *d)* lépés alapján $a\neq 0$ esetén van olyan m kitevő, hogy $(1-a)^m c=0$ minden $c\in A$ elemre, ezért

$$c = 1.\, c = (1-b)^m(1-a)^m c = (1-b)^m\cdot 0 = 0,$$

ami lehetetlen. Ezért $a=0$.

f) Bármely A H-gyűrű 2-karakterisztikájú, azaz $2A=0$. Ugyanis *d)* alapján minden $\{a\}$ részgyűrűben van egy e kétoldali egységelem, és minthogy

$$0 = 4e-4e = 2e+2e-2e\cdot 2e,$$

ezért $2e$-nek kváziinverze van, és így *e)* lépés alapján $2e=0$. Ekkor $x=ex$ miatt minden $x\in\{a\}$ elemre $2x=2(ex)=(2e)x=0x=0$, tehát $2A=0$.

g) Bármely A H-gyűrűnek van kétoldali egységeleme. Ugyanis *d)* alapján van e balegységelem A-ban. Ekkor $L=A(1-e)=[y-ye; y\in A]$ minden elemének négyzete nulla, tehát L minden elemének van kváziinverze A-ban. Ezért az *e)* lépés alapján $L=0$, tehát A egységelemes.

h) Bármely A H-gyűrűnek az adjungált félcsoportja majdnem nil. Ugyanis *g)* alapján A-nak van egységeleme, amely S-nek zéruseleme és H. SEIDEL [27] 3.3 Tételéből és 3.4 Tételéből következik, hogy S majdnem nil, mert SEIDEL [27] szerint zéruselemes félcsoport nil, ha minden eleme jobbkvázireguláris.

i) Bármely H-gyűrű kételemű test. Ugyanis *g)* alapján van 1 egységelem A-ban és minthogy pedig *h)* alapján S majdnem nil, minden nemzérus $a\in A$ elemére $a\circ b=a+b-ab$ miatt *d)* alapján $1-(1-a)^m=1$, $(1-a)^m=0$ teljesül alkalmas m kitevővel. Minthogy pedig $(1-a)$ nilpotens, van kváziinverze A-ban, tehát *e)* alapján $1-a=0$. Ezért $a=1$ és így A, minthogy a tetszőleges nemzérus elem A-ban, valóban kételemű test.

23. §. További eredmények nemzérus jobbtalpú gyűrűkkel és a Jacobson-radikállal kapcsolatban

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [39], [42] és [43] dolgozataiban található meg. Ebben a §-ban külön bizonyítások nélkül ismertetünk néhány eredményt.

Mint az 1.§-ban már említettük, STEINFELD OTTÓ kérdezte azt, hogy létezik-e olyan MHR-gyűrű (ez nyilván nemzérus jobbtalpú), amelyben az összes nilpotens ideál összege nem nilpotens. Az 1.§-ban 2)-nél tárgyalt $(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})=\dagger$ esetnél explicit módon megadtunk olyan, végtelen sok elemmel generált MHR-nilgyűrűt, amely példa megoldja STEINFELD OTTÓ említett problémáját.

* * *

Szerző ([36], 477. oldal) egy A gyűrű R jobbideálját szabályosnak nevezte, ha R tartalmaz olyan e nemzérus idempotens elemet, hogy $R=eA$ és $Q=(1-e)AeA(1-e)$ nilpotens kváziideál, azaz $Q^n=0$ egy n kitevővel. Ismeretes, hogy a kváziideál fogalmát gyűrűkben (és félcsoportokban is) STEINFELD OTTÓ definiálta (lásd pl. [30]), és hogy a gyűrű jobbtalpában fekvő szabályos jobbideáloknak szerepük van abban, hogy a „jobbideálnak lennie reláció" tranzitív legyen. Ugyanis érvényes a következő:

91. TÉTEL. (1) *Ha $R=eA$, az e nemzérus idempotens elemmel generált szabályos főjobbideál az A gyűrűben, úgy hogy R az A gyűrű A_1 jobbtalpában fekszik, akkor az R gyűrű minden S jobbideálja egyszersmind A-nak is jobbideálja, továbbá $eA=eAe$ érvényes, és eAe jobbartin-féle Jacobson-féligegyszerű gyűrű, valamint $eN=0$, ahol N jelenti A összes nilpotens minimális jobbideáljának az összegét.*

(2) *Ha $N_0=Ne$ és $n\in N_0$, akkor $(e+n)^2=e+n$ és*

$$eA\oplus N=(e+n)A\oplus N,$$

továbbá $(e+n)A$ szintén szabályos jobbideál A-ban, és $(e+n)A$ szintén az A_1 jobbtalpban fekszik. Az

$$ex \leftrightarrow (e+n)x$$

megfeleltetés A-izomorfizmus eA-ról (e+n)A-ra. Ha $n_1 \in N_0$, $n_2 \in N_0$, *és ha*

$$(e+n_1)A = (e+n_2)A$$

akkor $n_1 = n_2$. *Ha* $n \in N_0$, *akkor érvényesek a tartalmazások:*

$$A(1-e) \subseteq (1-e-n)A$$

és

$$A(1-e-n) \subseteq (1-e)A.$$

(3) *Fordítva, ha R′ az A olyan jobbideálja, hogy*

$$R' \oplus N = eA \oplus N$$

és ha $e=e^2$ *és ha eA szabályos jobbideál, akkor R′ is szabályos jobbideál és van olyan* $m \in N_0 = Ne$ *elem, hogy* $R'=(e+m)A$.

(4) *Ha* $e^2=e$, $f^2=f$, $eA=fA$ *és ha eA szabályos főjobbideál A-ban, akkor* $e=f$.

(5) *Ha* $Q=(1-e)AeA(1-e)$ *nilpotens, akkor már* $Q=0$.

* * *

Szerző [39] dolgozatát követve, egy gyűrűt nevezzünk nemkommutatív főideálgyűrűnek, röviden F-gyűrűnek, ha bármely balideál főbalideál, és bármely jobbideál főjobbideál.

92. TÉTEL. *Minden F-gyűrűben a Baer-féle felső nilradikál minden nil egyoldali ideált tartalmaz, és ez a radikál egybeesik a Baer-féle alsó nilradikállal, tehát a Levitzki-féle radikállal is.*

93. TÉTEL. *Legyen A egy F-gyűrű és P az A-nak egy komplett prímideálja (azaz A/P nullosztómentes), és minden* $x \in A$ *elemre teljesüljön:*

$$x \in (xA+P) \cap (Ax+P).$$

Ekkor A/P egységelemes, és a minimum-feltétel teljesül mindazokra a jobb- és balideálokra, amelyek a P ideált és egy rögzített

$$b \in A, \quad b \notin P$$

elemet tartalmaznak.

94. TÉTEL. *Ha A egy F-gyűrű, P komplett prímideál A-ban,* $x \in (xA+P) \cap \cap (Ax+P)$ *minden* $x \in A$ *elemre teljesül, és ha P valódi ideál a Jacobson-radikálban, akkor* $G=J$, *ahol G a Brown—McCoy-féle radikál.*

95. TÉTEL. (1) *A akkor és csak akkor nemzérus jobbtalpú jobbprimitív F-gyűrű, ha A jobbartin-féle egyszerű gyűrű.* (2) *A akkor és csak akkor egységelemes Neumann-reguláris F-gyűrű, ha A jobbartin-féle Jacobson-féligegyszerű gyűrű.* (3) *Egy G Abel-féle csoport akkor és csak akkor egy F-nilgyűrű additív csoportja, ha G végesen generált Abel-féle csoport.* (4) *Az A F-nilgyűrű* A^+ *additív csoportja akkor és csak akkor torziómentes, ha van A-nak végtelenrendű balannihilátora (vagy jobbannihilátora).*

* * *

96. TÉTEL. (1) *Legyen M mindazon nilgyűrűk osztályával meghatározott alsó radikál, amelyek MHR-gyűrűk J Jacobson-radikáljai, tehát egyszersmind Baer-féle alsó nilradikáljai és T legyen az összes egyszerű MHR-gyűrű osztályával meghatározott felső radikál. Egy R általános radikál akkor és csak akkor esik J-vel egybe az MHR-gyűrűk osztályán, ha $M \leqq R \leqq T$.* (2) *Legyen N_0 a prímszámrendű zérógyűrűk osztályával meghatározott alsó radikál. Ha A egy MHR-nilgyűrű, amelynek minden B ideáljára $B \neq (B: A)_r \cap (B: A)_l$, akkor A egy N_0-radikálgyűrű.* (3) *Minden A MHR-gyűrűben a Jacobson-radikál T-nilpotens és transzfinit nilpotens.*

VI. FEJEZET

ZÉRUSELEMES FÉLCSOPORTOKNAK ÉS BIZONYOS AUTOMORFIZMUS-CSOPORTOKNAK A RADIKÁLJAIRÓL

24. §. Zéruselemes félcsoportok radikáljairól

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [47], [77], [79] és [80] dolgozataiban található meg. E § eredményeit bizonyítás nélkül közöljük. — Legyen S zéruselemes tetszőleges félcsoport, B és C két részhalmaz S-ben. Legyen

$$B^{-1}C = [x; x \in S, Bx \subseteqq C] \quad \text{és} \quad CB^{-1} = [y; y \in S, yB \subseteqq C].$$

Ezek a $B^{-1}C$ és CB^{-1} részhalmazok persze üresek is lehetnek. Ha B balideál és C is balideál, akkor $B^{-1}C$ ideál lesz. Tetszőleges B részhalmazra $B^{-1}C$ jobbideál, ha C jobbideál és CB^{-1} balideál, ha C balideál.

Jelölje Φ_r az S jobbfrattini jobbideálját, tehát Φ_r az S összes maximális jobbideáljának a metszete (ami persze üres is lehet), és legyen $\Phi_r = S$, ha nincs maximális jobbideál S-ben.

Egy R maximális jobbideált kvázimodulárisnak nevezünk, ha $S^{-1}R \subseteqq R$. Továbbá egy kétoldali $Q^{(r)}$ ideált jobbkváziprimitívnek nevezünk, ha van olyan kvázimoduláris maximális R jobbideál, hogy $Q^{(r)} = S^{-1}R$. Ekkor nyilván $Q^{(r)} \subseteqq R$. Bal-jobb dualitás alapján definiálható a kvázimoduláris maximális balideál és balkváziprimitív kétoldali ideál, továbbá a Φ_l balfrattini balideál. Legyenek:

1) $I_1 = S^{-1}\Phi_r$
2) $I_2 = \Phi\ S^{-1}$
3) I_3 = az összes jobbkváziprimitív ideál metszete;
4) I_4 = az összes balkváziprimitív ideál metszete;
5) I_5 = az összes kvázimoduláris maximális jobbideál metszete; és
6) I_6 = az összes kvázimoduláris maximális balideál metszete.

97. TÉTEL. (1) *I_1, I_2, I_3 és I_4 kétoldali ideálok, és érvényes, hogy*

$$I_1 \subseteqq I_3 \subseteqq I_5 \quad és \quad I_2 \subseteqq I_4 \subseteqq I_6.$$

(2) *Ha S-ben érvényes a baloldali törlési szabály (tehát $s \neq 0$ és $ss_1 = ss_2$ esetén mindig $s_1 = s_2$), akkor $\Phi_r \subseteqq I_1$.* (3) *Ha S-ben érvényes a baloldali törlési szabály, R kvázimoduláris maximális jobbideál, és ha $z \in S^2$, de $z \notin R$, akkor $R_z = [z]^{-1}R$ is kvázimodu-*

láris, és I_5 kétoldali ideál S-ben. (4) *Ha S-ben érvényes a baloldali törlési szabály, és ha R_z kvázimoduláris minden maximális R jobbideálra, akkor*

$$I_1 = I_3 = I_5.$$

MEGJEGYZÉS. Később H. SEIDEL [28] igazolta, hogy minden zéruselemes S félcsoportban

$$H = I_1 = I_3 (= I_2 = I_4),$$

ahol H jelenti S-nek a HOEHNKE-radikálját [17].

Probléma. Mi annak a kritériuma, hogy:

1. I_5 kétoldali ideál legyen, és hogy
2. $H = I_5$ legyen.

Szerző [77] zéruselemes félcsoportokra az *Amitsur—Kuros*-féle R radikálosztályt a következőképpen definiálta:

1. R zárt minden félcsoport-homomorfizmusra nézve;
2. Minden S zéruselemes félcsoport tartalmaz egy $R(S) \in R$ kétoldali ideált, amely minden más $I \in R$ ideált tartalmaz S-ben. Ezt az $R(S)$ ideált R-radikálnak nevezzük.
3. Az $S/R(S)$ *Rees*-féle faktor-félcsoport R-radikálja 0, azaz $R(S/R(S)) = 0$.

98. TÉTEL. (1) *Ha I ideál a zéruselemes S-félcsoportban, akkor $R(I)$ ideál S-ben.* (2) *Bármely homomorfban zárt H zéruselemes félcsoportosztályból kiindulva transzfinit indukcióval definiálható egy (a Kuroš-féle alsó radikálosztályhoz hasonló, általában bővebb) $\bar{H} \supseteq H$ félcsoportosztály úgy, hogy ez a konstrukció már ω lépésben véget ér, ahol ω a legkisebb végtelen rendszám* [77].

Egy R félcsoport-radikál öröklődő (vö. szerző [79]), ha abból, hogy I ideál S-ben és hogy $S \in R$, következik $I \in R$. ROBERT SHULKA [29] több tételét általánosítottam a következőképpen:

99. TÉTEL. *Legyen S minden I ideáljára $\bar{I}/I = R(S/I)$, ahol R öröklődő radikál. Ekkor $I \to \bar{I}$ az S ideálhálójának egy metszet-endomorfizmusa, vagyis $\overline{I_1 \wedge I_2} = \bar{I}_1 \wedge \bar{I}_2$.*

R-féligegyszerű a zéruselemes S félcsoport, ha $R(S) = 0$, és erősen R-féligegyszerű, ha S minden homomorf képe R-féligegyszerű.

100. TÉTEL. *Ha az R radikál olyan, hogy minden R-féligegyszerű zéruselemes félcsoport erősen R-féligegyszerű, akkor egy tetszőleges zéruselemes S félcsoport ideálhálójában az*

$$I \to R(I)$$

leképezés mindig egyesítés-endomorfizmus, vagyis:

$$R(I_1 \cup I_2) = R(I_1) \cup R(I_2).$$

25. §. Bizonyos Hashimoto-féle univerzális algebrák automorfizmus-csoportjának egy féligegyszerűségéről

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [82] dolgozatában szerepel.

Legyen V az összes véges G csoport osztálya. A csoport egységelemét 1 fogja jelölni. V nyilván zárt mind a homomorf képeknek, mind pedig a normálosztóknak a képzésére nézve. Legyen $\bar{V}$ mindazon csoportoknak az osztálya, amelyeknek bármely $N\neq 1$ normálosztójuk homomorfan leképezhető egy véges csoportra. (Ilyenek pl. a véges, egyszerű csoportok is, ezekhez lásd pl. SZÉP [91].) Nyilván $V\subseteq\bar{V}$. Legyen továbbá R mindazon G csoportoknak az osztálya, amelyek nem képezhetők le homomorf módon egy $G_1\neq 1$ olyan csoportra, amely $\bar{V}$ eleme. Igazolhatók az alábbi tulajdonságok:

1. Az R csoportosztály homomorfan zárt;
2. Minden G csoport tartalmaz egy $N\in R$ normálosztót úgy, hogy N tartalmazza G-nek minden más $N_1\in R$ normálosztóját. Ezt az $N=R(G)$ normálosztót a G csoport R-radikáljának nevezzük; továbbá G R-féligegyszerű akkor lesz, ha $R(G)=1$.
3. Minden G csoportra $R(G/R(G))=1$, vagyis $G/R(G)$ R-féligegyszerű.

Azt sem nehéz bebizonyítani, hogy R-féligegyszerű csoportoknak bármilyen szubdirekt szorzata szintén R-féligegyszerű csoport, és hogy R-féligegyszerű csoportnak bármely normálosztója szintén R-féligegyszerű lesz.

Így egy *konkrét Amitsur—Kuros*-féle R radikált definiáltunk az összes csoport osztályán. Meg fogjuk mutatni, hogy bizonyos, alább definiált *Hashimoto*-féle univerzális algebráknak a teljes automorfizmus-csoportja (a továbbiakban röviden csak automorfizmus-csoportja) erre a konkrét radikálra nézve féligegyszerű.

Egy U univerzális algebrát *Hashimoto*-félének nevezünk, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

1. Minden homomorfizmusnak van egy és csak egy magva, amit ideálnak nevezünk, és minden ideál részalgebra U-ban;
2. Minden ideál fellép egy és csak egy homomorfizmus magvaként.
3. Éppen az ideálok szerint vett mellékosztályok adják U összes kongruencia-osztályát.

Példák. Hashimoto-féle univerzális algebrákra:

1. Tetszőleges (nem-feltétlen kommutatív vagy véges) csoportok;
2. Asszociatív és nemasszociatív gyűrűk;
3. Egy A asszociatív gyűrű felett vett A-jobbmodulusok;
4. P. J. HIGGINS [15]-féle multioperátor-csoportok;
5. Alulról korlátos, relatív komplementumos, disztributív hálók, (lásd SZÁSZ GÁBOR [88], (vö. még HASHIMOTO [13])) így speciálisan pl. a *Boole*-algebrák.

Egy H *Hashimoto*-féle univerzális algebrát *Hopf*-félének nevezünk, ha bármely önmagára való homomorfizmusa szükségképpen automorfizmus. Minden véges univerzális algebra, vagy pl. a végtelen ciklikus csoport nyilván *Hopf*-féle; viszont a *Prüfer*-féle kváziciklikus csoportok nyilván nem *Hopf*-féle univezális algebrák.*

* Korábban G. BAUMSLAG vizsgált *Hopf*-féle kommutatív csoportokat.

Egy H *Hashimoto*-féle univerzális algebra I ideálja teljesen invariáns, ha $I\varepsilon \subseteq I$ teljesül minden ε endomorfizmusra.

101. TÉTEL. (1) *Egy H Hashimoto-féle univerzális algebra akkor és csak akkor Hopf-féle, ha léteznek olyan teljesen invariáns I_α ($\alpha \in A$) ideálok H-ban, hogy mindegyik H/I_α Hopf-féle, és H az összes ilyen H/I_α-nak egy szubdirekt összetétele,* (2) *Ha mindegyik I_α ideál teljesen invariáns a H Hashimoto-féle univerzális algebrában úgy, hogy mindegyik H/I_α véges, és ha H az összes ilyen H/I_α-nak egy szubdirekt összetétele, akkor H Hopf-féle.*

Bizonyítás. Minthogy (2) következik (1)-ből, elég (1)-et bebizonyítani. Legyen ε tetszőleges olyan endomorfizmusa H-nak, hogy $H\varepsilon = H$ és legyen $a_1, a_2 \in H$ két olyan elem, hogy $a_1\varepsilon = a_2\varepsilon$. Minthogy I_α teljesen invariáns ideál H-ban, $I_\alpha\varepsilon \subseteq I_\alpha$, és minthogy H/I_α *Hopf*-féle, ezért ε egy automorfizmust indukál a H/I_α univerzális algebrában. Ezért a_1 kongruens a_2-vel modulo I_α, ahol I_α a mondott tulajdonságú ideálok közt *tetszőleges*. Minthogy $\bigwedge_{\alpha \in A} I_\alpha = 0$, ahol 0 a legfinomabb kongruencia, ezért a_1 és a_2 kongruensek modulo 0 is, tehát $a_1 = a_2$ és így H tényleg *Hopf*-féle. Az (1) állítás megfordítása triviális és ezzel a 101. Tételt bebizonyítottuk.

H-nak egy I ideálját karakterisztikusnak nevezzük, ha I invariáns H minden automorfizmusával szemben.

102. TÉTEL. *Legyen a Hashimoto-féle univerzális algebra olyan véges H/I_α ($\alpha \in A$) univerzális algebráknak egy szubdirekt összetétele, hogy mindegyik I_α ideál karakterisztikus H-ban. Ekkor H-nak az* Aut *$H = G$ automorfizmus-csoportja R-féligegyszerű* (e § elején explicit módon definiált konkrét R radikálra), *éspedig G véges csoportoknak lesz egy szubdirekt szorzata.*

Bizonyítás. Legyen $1 \neq \gamma \in G$ tetszőleges automorfizmusa H-nak. Minthogy $\gamma \neq 1$, van olyan $h \in H$, hogy $h\gamma \neq h$, és mert $\bigwedge_{\alpha \in A} I_\alpha = 0$ van olyan I_α ideál is, hogy $h\gamma$ és h inkongruensek modulo I_α. Ekkor a $\overline{h\gamma}$ és $\bar{h}$ mellékosztályok (modulo I_α véve) különbözők. Minthogy I_α karakterisztikus ideál H-ban, ezért γ egy automorfizmust indukál H/I_α-ban. Minthogy H/I_α véges, ezért $\bar{G} = \mathrm{Aut}\,(H/I_\alpha)$ is véges. Ha tehát M_α a G-nek $\bar{G}$-be való homomorfizmusánál a mag, akkor G/M_α is véges. Továbbá $\bar{h}\bar{\gamma} \neq \bar{h}$ miatt $\gamma \notin M_\alpha$. Ezért $\bigwedge_{\alpha \in A} M_\alpha = 1$, és minthogy G/M_α R-féligegyszerű és G pedig az összes ilyen véges G/M_α csoportnak egy szubdirekt szorzata, ezért G maga is R-féligegyszerű csoport.

MEGJEGYZÉS. A H *Hashimoto*-féle univerzális algebra egy H_α részalgebrája karakterisztikus, ha H_α invariáns H minden automorfizmusával szemben. Szerző ([82], Proposition 8.) igazolta, és itt bizonyítás nélkül közöljük, a következőt:

103. TÉTEL. *Legyen a H Hashimoto-féle univerzális algebra bizonyos H_α ($\alpha \in A$) karakterisztikus részalgebráinak a halmazelméleti egyesítése, és mindegyik H_α legyen olyan véges $H_\alpha/I_{\alpha\beta}$ ($\beta \in B$) algebráknak egy szubdirekt összetétele, hogy mindegyik $I_{\alpha\beta}$ ideál H_α-ban karakterisztikus. Ekkor H-nak a $G =$* Aut *H automorfizmus-csoportja R-féligegyszerű, éspedig G véges csoportoknak lesz egy szubdirekt szorzata.*

(Beérkezett: 1973. I. 24.)

ÚJ MÓDSZER SZIMMETRIKUS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYEK SZUPERPOZÍCIÓINAK FELBONTÁSÁRA, I.

Írta: MEDGYESSY PÁL

1.

Bevezetőül néhány alapfogalmat elevenítünk fel.

a) Legyen $f(x, \alpha, \beta)$ adott analitikus alakú, kétparaméteres sűrűségfüggvény, α_k, β_k α, illetve β egy megengedett értéke. A

$$k_1(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x, \alpha_k, \beta_k)$$

függvényt, ahol $p_k > 0$, azonos (α_k, β_k) párok nincsenek és $\beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \ldots \leqq \beta_N$, az $f(x, \alpha_k, \beta_k)$ sűrűségfüggvények — *a komponensek* — p_k *súlyokkal* képezett *szuperpozíciójának* nevezzük.

A gyakorlatban sokszor találkozunk a következő *problémával.*

Adva vannak egy $k_1(x)$ *sűrűségfüggvény-szuperpozíció* görbéje egyes pontjai ordinátáinak *mért* értékei. Az $N, p_k, \alpha_k, \beta_k$ paraméterek ismeretlenek. Meghatározandó a *mért* értékek alapján N és esetleg egyes p_k, α_k, β_k paraméterek *közelítő értéke.*

A problémánk megoldását szolgáltató *numerikus* eljárást a $k(x)$ *sűrűségfüggvény-szuperpozíció* (numerikus) *felbontásának* nevezzük.

Részletes tárgyalás és példák: [1], I. 1. §.

A következőkben a

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$$

típusú szuperpozíciók vizsgálatára szorítkozunk és azt is feltesszük, hogy $f(x)$ (0) *szimmetrikus, szigorúan* (0) *egycsúcsú, folytonos sűrűségfüggvény.**

Vizsgálatainkban szükségünk van a következő definíciókra.

Legyen $f_1(x)$, illetve $f_2(x)$ (0) szimmetrikus, szigorúan (0) egycsúcsú sűrűségfüggvény. Azt mondjuk, hogy $f_2(x)$ görbéje (tágabb értelemben) *keskenyebb*, mint $f_1(x)$ görbéje, ha 1. $x > 0$ esetén az $f_2(x)$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvény görbéje az $f_1(x)$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvény görbéje felett halad és 2. $f_2(x)$ görbéjének csúcsmagassága nagyobb, mint $f_1(x)$ görbéjének csúcsmagassága.

Ekkor $f_2(x)$ görbéje $f_1(x)$ görbéjéből abszcisszatengely menti összenyomás és ordinátatengely menti nyújtással keletkezik, miközben a görbe alatti terület változatlan.

* Ha $-\infty < x < \infty$, $f(x)$ „(a) szimmetrikus", azt jelenti, hogy $f(a-x) = f(a+x)$; $f(x)$ „szigorúan (a) egycsúcsú" pedig azt, hogy $f(x)$ szigorúan egycsúcsú, $x = a$ csúcshellyel.

Megállapodunk abban, hogy $f_1(x)$ és $f_2(x)$ eltolása nem változtat a „keskenyebb" viszonylaton.

Tekintsünk most egy $\{g(x, \lambda)\}$ $(\Lambda_1 \leqq \lambda < \Lambda_2)$ egyparaméteres sűrűségfüggvénycsaládot, melynek tagjai (0) szimmetrikusak és szigorúan (0) egycsúcsúak. Ha λ_i, λ_j a λ paraméter két különböző értéke, $\Lambda_1 < \lambda_i < \lambda_j < \Lambda_2$ és $g(x, \lambda_j)$ görbéje (tágabb értelemben) keskenyebb, mint $g(x, \lambda_i)$ görbéje, azt mondjuk, hogy λ $g(x, \lambda)$ görbéjének (Λ_1, Λ_2) *monoton formánsa.* (Λ_1, Λ_2) λ monoton változása irányára utal. — E monoton formáns szemléletes jelentése egyszerű: ha λ monoton növekedik, a megfelelő görbe egyre keskenyebb lesz; a keskenységet egyetlen szám jellemzi. Részletek és egyéb „keskenyebbség"-definíciók: [1] II. 4. §.

A fenti $k(x)$ szuperpozíció esetére a felbontási eljárások lényege többek között a következőképp fogalmazható meg ([2], III. 1. §.).

A görbéjével képviselt $k(x)$ szuperpozícióhoz hozzárendelünk egy

$$b(y) = \sum_{k=1}^{N} p_k g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$$

típusú úgynevezett *tesztfüggvényt,* melyre fennáll:

1. $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ szigorúan egycsúcsú sűrűségfüggvény, $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ és $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ közt jól definiált összefüggés áll fenn; emellett $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ görbéje keskenyebb, mint $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ görbéje;

2. ha $(\alpha_k, \beta_k) \not\equiv (\alpha_l, \beta_l)$, akkor $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ görbéjének csúcshelye $g_1(y, \alpha_l, \beta_l)$ görbéjének csúcshelyétől legalább olyan távol van, mint $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ görbéjének csúcshelye $f\left(\frac{x-\alpha_l}{\beta_l}\right)$ görbéjének csúcshelyétől;

3. $k(x)$ és $b(y)$ közt összefüggés állítható fel az $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ és $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ közti összefüggés alapján.

Mindebből az következik, hogy ha a $b(y)$ sűrűségfüggvény-szuperpozíció görbét felrajzolnánk, abban az egyes komponensek görbéi *különváltabban* mutatkoznának meg, mint $k(x)$ görbéjében. Ha e különváltság elég nagymérvű, a komponensek görbéi szinte egymást nem is zavarva jelennének meg. Ekkor $b(y)$ görbéjéből a komponensek száma — és esetleg egyes paraméterek közelítő értéke is — megállapítható volna.

Mivel mindez *közelítőleg* igaz akkor is, ha $k(x)$ görbéjének *mért* ordinátaértékeiből $b(y)$ analitikus alakjának megfelelő numerikus módszerrel a $b(y)$ tesztfüggvény bizonyos közelítésének görbéjét állítjuk elő, *felbontási eljárásnak ez utóbbi görbe csúcsai számának, helyeinek stb. megállapítását fogjuk tekinteni.*

Adott felbontási probléma esetében a feladat tehát:

A) az említett $b(y)$ tesztfüggvény megtalálása;

B) a felbontandó szuperpozíció komponensei és a tesztfüggvény komponensei közti összefüggés meghatározása, és ennek alapján a felbontási eljárás alapjául szolgáló $b(y)$ tesztfüggvény előállítása a $k(x)$ szuperpozíció segítségével;

C) mindezek alapján numerikus módszer kidolgozása a tesztfüggvény valamilyen közelítése görbéjének előállítására.

Részletek és általánosítás: [2], III. 1. §.

2.

Korábbi munkáinkban a $b(y)$ tesztfüggvényt a $k(x)$ szuperpozíciót tartalmazó konvolúciós integrálegyenlet megoldása vagy konvolúciós transzformált szolgáltatta. A tesztfüggvénynek az előbbiekre épített analitikus kifejezését a *numerikus felbontáskor* egy

$$b^*(y) = \sum_{j=-m}^{m} c_j k(x+jh)$$

alakú összeggel *közelítettük* (h adott konstans).

E közelítés *hibája* azonban nehezen volt becsülhető; a kapott becslések a gyakorlatban használhatatlanok is voltak. $b^*(y)$ görbéjében általában számos olyan kisebb csúcs mutatkozott, melyről nem tudtuk megmondani, hogy $b(y)$ valamelyik komponense közelítésének görbéje-e vagy pedig a $k(x)$ mért értékeiben rejlő hibáktól, „zajtól" származik-e. A gyakorlatban előadódó szuperpozíciók felbontását ez sokszor megnehezítette.

Dolgozatunk jelen I. részének célja egy olyan új felbontási módszer ismertetése, mely kiküszöböli az említett nehézségeket.

3.

Új módszerünk *alapötlete:* adott $k(x)$ szuperpozícióhoz tesztfüggvényként $p(y) = \sum_{\nu=-m}^{m} c_\nu k(x+\nu h)$ típusú *véges* összeget kísérelünk meg hozzárendelni, minél kisebb m érték mellett ($m=1$ vagy 2), a c_ν konstansokat a tesztfüggvényt értelmező feltételekből határozva meg. Ez esetben numerikus felbontáskor a tesztfüggvény analitikus kifejezésének közelítése elmarad és a $k(x)$ mért értékeiben rejlő „zajnak" a tesztfüggvényt eltorzító hatása is követhető. A $p(y)$ tesztfüggvény bevezetése tehát a keresett módszert szolgáltatja.

Hogy vizsgálódásunkat folytathassuk, határozottabb formát kell adnunk alapötletünknek. A később tárgyalandó példákat tartva szem előtt, $p(y)$ konkrét alakja a következő meggondolások alapján adható meg:

Legyen $f(x)$ a fenti (0) szimmetrikus, szigorúan (0) egycsúcsú sűrűségfüggvény és tekintsük a

$$h(y, P, \vartheta) = (1+2P)f(y) - P[f(y-\vartheta)+f(y+\vartheta)]$$

függvényt, ahol $P \geqq 0$, $\vartheta \geqq 0$. Látható, hogy $h(y, P, \vartheta)$ is (0) szimmetrikus és $h(y, 0, \vartheta) = f(y)$.

Tegyük fel, hogy bármely $\vartheta > 0$-hoz található egy a ϑ-tól függő $P_0(\vartheta)$ korlát, melyre fennáll:

A) ha $0 \leqq P < P_0(\vartheta)$, $h(y, P, \vartheta)$ nemnegatív, mikor is $h(y, P, \vartheta)$ sűrűségfüggvény;

B) ha $0 \leqq P < P_0(\vartheta)$, $h(y, P, \vartheta)$ szigorúan (0) egycsúcsú, vagyis $h'_y(y, P, \vartheta) \leqq 0$ $(y > 0)$ és nincs olyan nem félig végtelen intervallum az abszcisszatengelyen, melynek minden pontjában $h'_y(y, P, \vartheta) = 0$.

C) ha $0 \leqq P < P_0(\vartheta)$, P $h(y, P, \vartheta)$ görbéjének $(0, P_0(\vartheta))$ monoton formánsa, vagyis P növekedésekor $h(y, P, \vartheta)$ görbéje egyre keskenyebbé válik, olyan értelemben, hogy (az origóban levő) csúcsa emelkedése mellett (ami rögtön látható), a görbe az y-tengely felé irányulva összenyomódik.

Ezek után vegyük a $k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ szuperpozícióhoz rendelt tesztfüggvénynek a következő $p(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ függvényt, melyben egy később meghatározandó értékkészletű λ paraméter is szerepel és ϑ rögzített:

$$p(y, \lambda) = (1+2\lambda)k(x) - \lambda[k(x-\vartheta)+k(x+\vartheta)].$$

$k(x)$ k-adik komponense, $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ és $p(y, \lambda)$ k-adik komponense, $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ közt a

$$g_1(y, \alpha_k, \beta_k) = (1+2\lambda) f\left(\frac{y-\alpha_k}{\beta_k}\right) - \lambda\left[f\left(\frac{y-\vartheta-\alpha_k}{\beta_k}\right) + f\left(\frac{y+\vartheta-\alpha_k}{\beta_k}\right)\right]$$

összefüggés áll fenn; mivel ez λ-t is tartalmazza, de csak $y-\alpha_k$-tól függ, vezessük be a $g_1(y, \alpha_k, \beta_k) = g(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$ jelölést; ezzel

$$p(y, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k g(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda).$$

Mivel skálaparaméter-változtatás vagy eltolás nemnegativitáson, egycsúcsúságon, keskenységi viszonylaton nem változtat, az előbbiek folytán $g(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$ (α_k) szimmetrikus, szigorúan (α_k) egycsúcsú sűrűségfüggvény és görbéjének λ $\left(0, P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_k}\right)\right)$ monoton formánsa. Így tehát görbéje keskenyebb, mint $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right) = g(x-\alpha_k, \beta_k, 0)$ görbéje, ha $0 < \lambda < P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_k}\right)$ és λ növekedésével keskenysége növekedik. Továbbá $g(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$ és $g(y-\alpha_l, \beta_l, \lambda)$ görbéi csúcshelyeinek távolsága ugyanakkora, mint $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ és $f\left(\frac{x-\alpha_l}{\beta_k}\right)$ görbéi csúcshelyeinek távolsága (azaz $|\alpha_k - \alpha_l|$).

Így tehát a $p(y, \lambda)$ és $k(x)$ közti fenti összefüggés tesztfüggvényt szolgáltat, ha λ értékére fennáll $0 < \lambda < P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_k}\right)$ $(k = 1, \ldots, N)$, vagyis mindig, amidőn $0 < \lambda < P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$. Minél közelebb van λ $P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$-hez, annál keskenyebbé válnak a tesztfüggvény komponenseinek görbéi, elsősorban a β_N paraméterű és annál inkább sikerülhet a felbontás. A legjobb komponens-különválást nyújtó λ értékéből $P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$-re, vagyis

β_N-re is következtethetünk; ennél nagyobb λ alkalmazásakor viszont negatív tesztfüggvény-értékek léphetnek fel és a tesztfüggvény görbéje áttekinthetetlenné válik.

A gyakorlatban az a helyzet, hogy ϑ megválasztása után (amit az is befolyásol, hogy milyen pontokban adott $k(x)$ mért értéke) egyre növekedő λ értékekkel előállítjuk $p(y, \lambda)$ görbéjét, $k(x)$ mért értékei segítségével. Ezek a tesztfüggvény bizonyos közelítésének görbéi lesznek, melyekben annál jobban várható különálló komponens görbék megmutatkozása (csúcsok fellépése), minél közelebb van az épp használt λ $P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$-hez.

Ami ϑ megválasztását illeti, mindeddig abból indultunk ki, hogy ϑ ($\vartheta>0$) tetszőleges, illetve, hogy $k(x)$ rendelkezésre álló mért értékei jelölik ki a szóbajövő ϑ-értékeket. A $\lambda \uparrow P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$ esetén fellépő keskenyebbé válás mértéke azonban ϑ-tól függ. A keskenyebbé válás szempontjából legjelentősebb a $g(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$ $(k=1,\dots,N)$ komponensek görbéi csúcsmagasságának megnövekedése, feltéve, hogy λ megnövekedésekor e görbe „monoton" esik, emellett az y-tengely felé irányulóan összenyomódik. A csúcsmagasságok nyilván

$$g(0, \beta_k, \lambda) = (1+2\lambda)f(0) - 2\lambda f\left(\frac{\vartheta}{\beta_k}\right) \quad (k = 1, \dots, N);$$

$\lambda \uparrow P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$ esetén ennek minél gyorsabban növekednie kell. ϑ és $P_0(\vartheta)$ ismeretében az optimális λ-érték *elvileg* megtalálható. Vegyük azonban figyelembe, hogy a gyakorlatban $\hat{f}\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)=f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)+\varepsilon_k(x)$ áll rendelkezésünkre, ahol $\varepsilon_k(x)$ a „zaj" és e „zaj" továbbplántálódik $g(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)$ kiszámított értékeibe is, azokat $\hat{g}(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)=g(y-\alpha_k, \beta_k, \lambda)+\xi_k(y)$-ná torzítva el. Könnyen belátható, hogy ha $|\varepsilon_k(x)|<E$, a $\xi_k(y)$ eltorzításra fennáll $|\xi_k(y)|<(1+4\lambda)E$, vagyis ez az eltorzítás nagyjából $(1+4\lambda)$-val arányosan nő; λ azonban ϑ függvénye. Hasonlók igazak $p(y, \lambda)$-nak $k(x)$ „zaja" okozta eltorzulására. A „zaj" megnövekedése miatt nem ajánlatos tehát olyan ϑ-t választani, amely mellett λ nagy lesz. — Világos, hogy a „zaj", mint sztochasztikus folyamat-realizáció továbbplántálódása is elemi eszközökkel vizsgálható; erre itt nem térünk ki.

A gyakorlatban legjobb több, monoton változó ϑ értékkel kísérletezni, és a kapott tesztfüggvény-görbéket egybevetve keresni ki a legjobb felbontást mutatókat.

$P_0(\vartheta)$ értékét adott típusú $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ komponensekből álló $k(x)$ szuperpozíció esetében analitikus eszközökkel vagy numerikus kísérletezéssel — $h(y, P, \vartheta)$ értékeit sokféle (P, ϑ) párra tabellázva — határozzuk meg. Ha $P_0(\vartheta)$ egyszer tabellázva van, e táblázat $f(x)$ típusához tartozó univerzális konstans-összesség lesz.

Belátható, hogy — korábbi módszereinkkel ellentétben — a közölt eljárás általában *nem* biztosítja azt, hogy a $p(y, \lambda)$ tesztfüggvénynek optimális esetben legalább egy komponense tetszőlegesen keskeny (végtelenbe futó csúcshoz hasonló) görbéjű lesz. Ez például abból is következik, hogy rögzített ϑ mellett a két, megengedett P_1 és P_2 $(P_2>P_1)$ paraméterértékhez tartozó $h(y, P_1, \vartheta)$ és $h(y, P_2, \vartheta)$ függvények görbéi metszéspontjának abszcisszája csupán ϑ-tól függ és általában nem tart zérushoz, még ha P_2-höz keskenyebb görbe tartozik is, mint P_1-hez. Nevezetesen

$$(1+2P_1)f(y) - P_1[f(y-\vartheta)+f(y+\vartheta)] = (1+2P_2)f(y) - P_2[f(y-\vartheta)+f(y+\vartheta)]$$

-ból

$$2f(y) - [f(y-\vartheta)+f(y+\vartheta)] = 0$$

következik, vagyis *nagyjából* $f''(y)=0$, és az ezen egyenlet megoldását szolgáltató $y=y_0$ érték általában nem 0, vagy ∞, vagyis P növekedésekor $h(y, P, \vartheta)$ görbéje nem közeledik egyre jobban és jobban az ordinátatengelyhez.

Konkrét esetben tehát lehetséges, hogy új eljárásunk nem nyújtja a kívánt felbontást; ezt azonban csak kísérletezés döntheti el. Kétségtelen előnye mindenesetre egyszerűsége és a hibák (a „zaj") befolyásának áttekinthető volta.

Mindezekre tekintettel új eljárásunkat a $k(x)$ szuperpozíció részleges, *parciális* (numerikus) *felbontásának* nevezzük.

Alapgondolata akkor is alkalmazható, ha $p(y, \lambda)$ helyett ennél bonyolultabb, $\sum_{\nu=-m}^{m} c_\nu k(x+\nu h)$ $(m=2, 3, \ldots)$ alakú tesztfüggvényt vezetünk be. Részletekbe azonban itt nem bocsátkozhatunk.

4.

A mondottakat két példával illusztráljuk.

1. Példa. *Laplace-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása.* Legyen

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{-\frac{|x-\alpha_k|}{\beta_k}}}{2\beta_k} \quad (\alpha_i \neq \alpha_j\ (i \neq j);\ i, j = 1, \ldots, N;\ 0 < \beta_1 \leqq \ldots \leqq \beta_N < \Lambda_2).$$

Most

$$h(y, P, \vartheta) = (1+2P)\, e^{-|y|} - P(e^{-|y-\vartheta|}+e^{-|y+\vartheta|}) \quad (P \geqq 0, \vartheta \geqq 0)$$

és elemi számítással belátható, hogy ha $p \leqq \dfrac{1}{2(\operatorname{ch}\vartheta-1)}$ $(\vartheta>0)$, vagyis

$$P_0(\vartheta) = \frac{1}{2(\operatorname{ch}\vartheta-1)},$$

akkor $h(y, P, \vartheta) \geqq 0$ és $h'_y(y, P, \vartheta) \leqq 0$ $(y>0)$ (az „=" bizonyos (y_1, ∞) szakaszon áll fenn $(y_1>0)$) és P $h(y, P, \vartheta)$ görbéjének $(0, P_n(\vartheta))$ monoton formánsa, megjegyezve, hogy $h(y, P, \vartheta)$ csúcsmagassága,

$$h(0, P, \vartheta) = 1+2P(1-e^{-\vartheta}) \leqq \frac{\operatorname{ch}\vartheta-e^{-\vartheta}}{\operatorname{ch}\vartheta-1}$$

annál nagyobb, minél kisebb ϑ és minél közelebb van P $P_0(\vartheta)$-hoz. Így tehát $k(x)$-re alkalmazható a parciális felbontás módszere, és mert $\vartheta \downarrow 0$ esetén $h(0, P, \vartheta) \uparrow \infty$, a felbontáskor a $k(x)$-hez rendelt $p(y, \lambda)$ tesztfüggvény N-edik komponensének görbéje elvileg tetszőlegesen elkeskenyedik. $k(x)$ mért értékeivel dolgozva, ϑ illetve P említett csökkentése, illetve az előbbivel összefüggő növekedése azonban a felbontási eljárás hibáját növeli, így tehát konkrét esetben különböző ϑ és az annak megfelelő λ értékekkel el kell végezni a felbontást és az eredményeket össze kell hasonlítani.

2. PÉLDA. ch-*sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása.* Legyen

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{2\beta_k \operatorname{ch}[\pi(x-\alpha_k)/2\beta_k]}$$

$$(\alpha_i \neq \alpha_i \ (i \neq j);\ i, j = 1, \ldots, N;\ 0 < \beta_1 \leqq \ldots \leqq \beta_N < \Lambda_2).$$

Itt

$$h(y, P, \vartheta) = (1+2P)\frac{1}{\operatorname{ch} y} - P\left[\frac{1}{\operatorname{ch}(y-\vartheta)} + \frac{1}{\operatorname{ch}(y+\vartheta)}\right]$$

és hosszadalmas, de elemi számítással belátható, hogy ha

$$P < \frac{1}{2(\operatorname{ch}\vartheta - 1)}, \quad \text{vagyis} \quad P_0(\vartheta) = \frac{1}{2(\operatorname{ch}\vartheta-1)},$$

akkor $h(y, P, \vartheta) > 0$ és $h'_y(y, P, \vartheta) < 0$ $(y > 0)$ és P $h(y, P, \vartheta)$ görbéjének $(0, P_0(\vartheta))$ monoton formánsa, megjegyezve, hogy $h(y, P, \vartheta)$ csúcsmagassága, $h(0, P, \vartheta) = 1+2P\left(1-\frac{1}{\operatorname{ch}\vartheta}\right) < 1+\frac{1}{\operatorname{ch}\vartheta}$ annál nagyobb, minél kisebb ϑ és minél közelebb van P $P_0(\vartheta)$-hoz. Így tehát $k(x)$-re alkalmazható a parciális felbontás módszere. Itt azonban $\vartheta \downarrow 0$ esetén $h(0, P, \vartheta) < 1+\frac{1}{\operatorname{ch}\vartheta} \leqq 2$, és így a felbontáskor a $k(x)$-hez rendelt $p(y, \lambda)$ tesztfüggvény egyetlen komponensének görbéje sem keskenyedhetik el tetszőlegesen.

$k(x)$ mért értékeivel dolgozva, a felbontási eljárás hibájának változása úgy folyik le, mint az 1. Példa esetében és így itt is többféle ϑ és annak megfelelő λ értékkel el kell végezni a felbontást és az eredményeket egybe kell vetni.

Metodológiai példaként tekintsük a

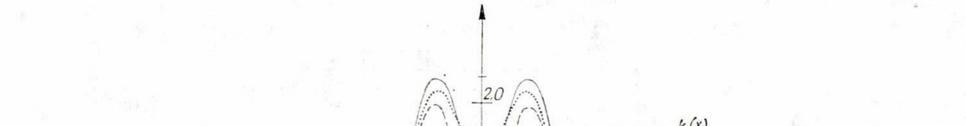
$$k(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi(x-0{,}5)/2]} + \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi(x+0{,}5)/2]}$$

ch-*sűrűségfüggvény szuperpozíció felbontását.* Ezt más, bonyolult módszerrel [2], III. 1. § 2.2.-ben már elvégeztük. $k(x)$ görbéje egycsúcsú; az 1. ábrán a vastag vonal ábrázolja. A $k(x)$-hez tartozó $p(y, \lambda)$ tesztfüggvény értékeit $\vartheta = 0{,}4$, $\lambda = 2{,}6$, illetve $\vartheta = 0{,}2$, $\lambda = 10$ mellett, $k(x)$ táblázatból kiszámított értékeiből 4 tizedesjegyet megtartva számítottuk ki. $p(y, \lambda)$ görbéjét az 1. ábrán $\vartheta = 0{,}4$, $\lambda = 2{,}6$-ra a pontozott, $\vartheta = 0{,}2$ $\lambda = 10$-re a vékony vonal mutatja. Összehasonlításul bemutatjuk a [2],

III. 1. §. 2.2.-ben leírt eljárással kapott tesztfüggvény-*közelítés* görbéjét is (szaggatott vonal). A két — eredetileg rejtett — komponens már $p(y, \lambda)$ görbéjében is jól megmutatkozik.

Egyéb sűrűségfüggvény-szuperpozíció típusok vizsgálatával jelen cikkünk folytatásaiban foglalkozunk majd.

Köszönetünket fejezzük ki DELLAGRAMMATIKA KULÁnak az 1. ábrával kapcsolatos számolások elvégzéséért.



1. ábra

IRODALOM

[1] MEDGYESSY PÁL: Sűrűségfüggvények és diszkrét eloszlások szuperpozícióinak felbontása. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **21** (1972) 129—200.

[2] MEDGYESSY PÁL: Sűrűségfüggvények és diszkrét eloszlások szuperpozícióinak felbontása. II. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **21** (1972) 261—382.

(Beérkezett: 1973. XI. 5.)

FÜGGVÉNYAPPROXIMÁCIÓ BERNSTEIN-TÍPUSÚ RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEKKEL ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI VONATKOZÁSAI

Írta: BALÁZS KATALIN

Jelen dolgozat ún. *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekkel foglalkozik. Mint ismeretes, a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényhez tartozó *Bernstein-féle* polinomok a következők:

$$(0.1) \qquad B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

A *Bernstein*-polinomok fontos szerepet játszanak a matematika különböző ágaiban, így az approximációelméletben és a valószínűségszámításban is. Ismeretes például ([6]), hogy ha $f(x)$ folytonos a $[0, 1]$ intervallumban, akkor a (0. 1) *Bernstein*-polinomok egyenletesen konvergálnak az $f(x)$ függvényhez. BERNSTEINnek ez a tétele egyben WEIERSTRASS első approximációs tételének konstruktív bizonyítása is. VORONOVSZKAJA ([33]) aszimptotikus approximációs tételt bizonyított a *Bernstein*-polinomokra, KANTOROVICS [20] pedig bebizonyította, hogy ha $f(x)$ egész függvény, akkor a hozzátartozó $B_n(f; x)$ *Bernstein*-polinomok az egész tengelyen az $f(x)$ függvényhez konvergálnak. Ismeretes továbbá [29], hogy ha $f(x)$ deriválható függvény a $[0, 1]$ intervallumban, akkor a $B_n(f; x)$ *Bernstein*-polinomok deriváltjai is konvergálnak $f'(x)$-hez a $[0, 1]$-ben. A *Bernstein*-polinomokat fölhasználták a momentumok problémájának véges intervallumon való megoldásához is ([29]).

A *Bernstein*-polinomok jelentőségét látva több matematikus foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy hogyan lehetne olyan operátorsorozatot konstruálni, akár polinomsorozatot, akár más típusú függvények sorozatát, amely végtelen intervallumon is rendelkezik a *Bernstein*-polinomok jó tulajdonságaival. Ezekről az eredményekről bővebben szólunk az 1. fejezet A. pontjában.

Ezen dolgozat célja is olyan operátorsorozat, mégpedig racionális törtfüggvénysorozat megadása, amely végtelen intervallumon is hasonlóan viselkedik, mint a *Bernstein*-polinomok a $[0, 1]$-ben. Az 1. fejezet B. pontjában definiáljuk az $R_n(f; x)$ *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényeket, és megindokoljuk elnevezésüket is. A dolgozat további részében az $R_n(f; x)$ *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények tulajdonságait vizsgáljuk.

A 2. fejezetben megmutatjuk, hogy az $R_n(f; x)$-ek konvergálnak $f(x)$-hez a $[0, \infty)$-ben, ha $f(x)$ folytonos és $f(x) = O(e^{\alpha x})$, ha $x \to \infty$.

A 3. fejezetben ún. aszimptotikus approximációs tételt bizonyítunk, a 4. fejezetben pedig igazoljuk, hogy az $R_n(f; x)$ deriváltja is tart $f'(x)$-hez, amennyiben $f(x)$ differenciálható.

Az 5. fejezetben az $R_n(f; x)$-eket az ott definiált „kvázibinomiális" eloszlás segítségével állítjuk elő, és valószínűségszámítási eszközökkel bizonyítjuk be a konvergenciatételt korlátos $f(x)$ függvények esetén.

A 6. fejezetben az $R_n(f; x)$-ek differenciákkal való előállítására bizonyítunk egy tételt.

I. FEJEZET

A. A Bernstein-polinomok általánosításai végtelen intervallumra

Ebben a részben röviden ismertetjük a *Bernstein*-polinomoknak végtelen intervallumra való általánosításával kapcsolatos főbb eredményeket.

CHLODOVSKY [10] a következő polinomsorozatot definiálta valamilyen, a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényhez:

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{h_n k}{n}\right)\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k}\binom{n}{k}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

ahol $h_n \to \infty$, ha $n \to \infty$ ($h_n = 1$ esetben éppen a (0.1) szerint definiált *Bernstein*-polinomokat kapjuk). CHLODOVSKY bebizonyította, hogy ha $f(x)$ a $[0, \infty)$-ben folytonos és korlátos függvény, és $h_n = o(n)$, akkor

$$B_n(f{:}x) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty, 0 \leqq x < \infty.$$

Ezen túlmenően CHLODOVSKY bizonyos, nem túl gyorsan növekvő, nem korlátos, folytonos függvényekre is bizonyította a konvergenciát, mégpedig a következő eredményt érte el: ha $M(h_n)$ jelöli az $f(x)$ függvény maximumát $[0, h_n]$-ben, és az

$$M(h_n)e^{-\alpha(n/h_n)} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

ahol $\alpha > 0$, $h_n = o(n)$, $h_n \to \infty$ ha $n \to \infty$, akkor az (1.1)-beli

$$B_n^*(f, x) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

CHLODOVSKY igazolta azt is, hogy ha létezik $f'(x)$ a $[0, \infty)$ intervallumban, és $f'(x)$ eleget tesz a fentiekben részletezett nagyságrendi korlátozásnak, ahol most $M(h_n)$ az $f'(x)$ maximumát jelenti a $[0, h_n]$ intervallumban, akkor a $B_n^*(f; x)$ deriváltja is tart $f'(x)$-hez.

A matematikusok azonban nem csak polinomsorozatokat, hanem más típusú operátorsorozatokat is vizsgáltak, mint azt látni fogjuk. Ismert tény, hogy a *Bernstein*-polinomok származtathatók a binomiális eloszlás segítségével. SZÁSZ O. [32] a binomiális eloszlást a *Poisson*-eloszlással helyettesítette, és a következő végtelen összegekből álló operátorsorozatot konstruálta a $[0, \infty)$-ben értelmezett $f(x)$ függvényhez:

$$S_n(f; x) = e^{-nx}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

és ezt a *Bernstein*-polinomok általánosításának nevezte. SZÁSZ O. megmutatta, hogy $0 \leqq x < \infty$ esetén $S_n(f; x) \to f(x)$, ha $n \to \infty$, ha $f(x)$ folytonos, és $f(x) = O(x^m)(x \to \infty)$, sőt ha $f^{(k)}(x)$ létezik és $f^{(k)}(x) = O(x^m)(x \to \infty)$, akkor $S_n^{(k)}(f; x)$ is konvergál $f^{(k)}(x)$-hez, $k = 1, 2, \ldots$.

A konvergenciatételt GRÓF [14] élesítette, azaz bebizonyította, hogy $f^{(k)}(x)=O(e^{\alpha x})$ ($x\to\infty$, $\alpha>0$ rögzített) esetén is tart $S_n^{(k)}(f;x)$ $f^{(k)}(x)$-hez. GRÓF aszimptotikus approximációs tételt is igazolt az $S_n(f;x)$-ekre.

GRÓF [15] dolgozatában $S_n(f;x)$-nek a következő véges részletösszegét tekintette:

$$S_n^*(f;x) = e^{-nx}\sum_{\nu=0}^{N} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

és sikerült bebizonyítania, hogy ha létezik $f^{(k)}(x)$, akkor $S_n^{*(k)}(f;x)\to f^{(k)}(x)$, ahol $k=0,1,2,\dots$; $N=N(n)\to\infty$ és $N(n)/n\to\infty$ ($n\to\infty$); az $f(x)$-re tett alkalmas feltevések mellett.

Megemlítjük, hogy HIRSCHMAN, WIDDER és GELFOND [13], [16], [17] a

$$B_n^{**}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\binom{n}{k}e^{-kx}(1-e^{-x})^{n-k},\quad x\geqq 0,\ n=1,2,\dots, \tag{1.3}$$

operátorsorozatról mutatta meg, hogy az $n\to\infty$ esetén konvergál az $f(x)$ függvényhez, ha $f(x)$ korlátos és folytonos a $[0,\infty)$ intervallumban, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton növő, végtelenbe tartó sorozat, és $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ divergens.

Az (1.3)-ban definiált $B_n^{**}(f;x)$-ből a következőképpen kapható a $B_n(f;x)$ Bernstein-polinom: ha bevezetjük a $t=e^{-x}$ változót, és a_k helyébe k-t írva a $\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i}$ összeget $\log\frac{n}{k}$-val helyttesítjük (a két kifejezés aszimptotikusan egyenlő, ha n és k elég nagy), és $f\left(\log\frac{1}{t}\right)$-t $g(t)$-nek nevezzük, akkor a $B_n^{**}(f;x)$ helyett a $B_n(g;t)=\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{n}{k}\right)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$ *Bernstein*-polinomhoz jutunk, tehát ilyen értelemben az (1.3)-beli $B_n^{**}(f;x)$-ek is a *Bernstein*-polinomok általánosításának tekinthetők.

BASZKAKOV [3] általánosabb alakban kereste, hogy milyen sorozatokkal lehet a folytonos függvényeket közelíteni. Bebizonyította, hogy ha $\varphi_n(x)$, $n=1,2,\dots$, olyan függvények sorozata, hogy

a) $\varphi_n(x)$ analitikus a $[0,2R]$ intervallumban, $R>0$,
b) $\varphi_n(0)=1$,
c) $(-1)^k\varphi_n^{(k)}(x)\geqq 0$, $\quad k=1,2,\dots,\quad x\in[0,R]$,
d) $-\varphi_n^{(k)}(x)=n\varphi_{m_n}^{(k-1)}(x)\,(1+\alpha_{kn}(x))$,

ahol $k=1,2,\dots$, $x\in[0,R]$, és $\alpha_{kn}(x)$ egyenletesen tart 0-hoz rögzített k és x mellett, ha $n\to\infty$,

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{m_n}=1$,

akkor az

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!}(-1)^k x^k,\quad n=1,2,\dots \tag{1.4}$$

operátorsorozatra teljesül az, hogy $L_n(1; x)\to 1$, $L_n(t; x)\to x$, és $L_n(t^2; x)\to x^2$ egyenletesen a $[0, R]$ intervallumban, ebből pedig KOROVKIN [21] tétele értelmében (a tétel a dolgozat 5. fejezetében is megtalálható) az (1.4)-beli $L_n(f, x)$ $n\to\infty$ esetén egyenletesen konvergál $f(x)$-hez a $[0, R]$ intervallumban, ha $f(x)$ a $[0, R]$-ben folytonos és a $[0, \infty)$-ben korlátos függvény.

Vizsgálta ezenkívül az $L_n(f; x)$ $f(x)$-től való eltérésének nagyságrendjét, és aszimptotikus approximációs tételt is kimondott az $L_n(f; x)$-ekre.

Megmutatta továbbá, hogy $\varphi_n(x)$ helyébe $(1-x)^n$-et írva az (1.4) alatti $L_n(f; n)$-ek éppen a (0.1) Bernstein-polinomok lesznek, $\varphi_n(x)=e^{-nx}$ esetén pedig az (1.2) szerint definiált $S_n(f; x)$ operátorokat kapjuk.

BASZKAKOV a $\varphi_n(x)$-ek helyébe az $\dfrac{1}{(1+x)^n}$ függvényt tette, és így racionális törtfüggvényeket kapott:

$$L_n(f; x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k, \tag{1.5}$$

$n=1, 2, \dots$, ez a sorozat pedig tétele értelmében egyenletesen konvergál minden $[0, R]$ intervallumon az $f(x)$ függvényhez, ha $f(x)$ folytonos a $[0, R]$-en, és korlátos az egész számegyenesen.

B. Az $R_n(f; x)$ Bernstein-típusú racionális törtfüggvények definíciója

Legyen $f(x)$ a $[0, \infty)$ intervallumban értelmezett, valós, egyértékű függvény, akkor a hozzá tartozó *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényen a következőt értjük:

$$R_n(f; x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_n x)^k, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.6}$$

ahol a_n és b_n az x-től nem függő, célszerűen választott, valós szám.

Az (1.6)-ban definiált racionális törtfüggvény valóban *Bernstein*-típusú. Ugyanis az (1.6) alatti $R_n(f; x)$-ben az

$$\frac{(a_n x)^k}{(1+a_n x)^n} = \left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^k\left(1-\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^{n-k}$$

faktorban a $t=\dfrac{a_n x}{1+a_n x}$ jelölést bevezetve,

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}$$

adódik (vö. (0.1)-gyel).

2. FEJEZET

Az $R_n(f; x)$-ek konvergenciatétele

Legyenek $R_n(f; x)$-ek az $f(x)$ függvényhez az (1.6)-ban definiált racionális törtfüggvények, amelyekben $a_n = \frac{b_n}{n}$, $b_n = n^{2/3}$, $n = 1, 2, \ldots$, és legyen $k_{2\omega}(\delta)$ az $f(x)$ függvény folytonossági modulusa a $[0, 2\omega]$ intervallumban, azaz

$$k_{2\omega}(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in [0, 2\omega] \\ |x-y| \leqq \delta}} |f(x) - f(y)|.$$

Bizonyítani fogjuk a következő tételt:

I. TÉTEL. *Legyen $f(x)$ a $[0, \infty)$ intervallumban értelmezett, olyan folytonos függvény, amelyre $f(x) = O(e^{\alpha x})$, ha $x \to \infty$ és $\alpha \geqq 0$ tetszőleges, rögzített, valós szám, akkor a $0 \leqq x \leqq \omega$ intervallumban ($\omega > 0$, tetszőleges) az*

$$|f(x) - R_n(f; x)| \leqq c_0 \left\{ k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) + \frac{1}{n^{2/3}} \right\} \tag{2.1}$$

egyenlőtlenség érvényes, ha n elég nagy, c_0 n-től független állandót jelöl.

A (2.1) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy az $R_n(f; x)$ tart $f(x)$-hez, ha $n \to \infty$, minden $x \geqq 0$ esetén, és ez a konvergencia egyenletes minden $0 \leqq x \leqq \omega$ intervallumban.

Megjegyezzük, hogy az a_n és b_n más választása mellett is tart $R_n(f; x)$ az $f(x)$-hez. a_n-nek és b_n-nek a tételben szereplő választása a közelítés nagyságrendje szempontjából látszott célszerűnek.

A tétel igazolásához több segédtételre lesz szükség. A következőkben c_i ($i = 1, 2, \ldots$) n-től független állandót fog jelölni.

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha $x \geqq 0$, akkor igazak a következő azonosságok:*

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (b_n x - k)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k = \frac{1}{(1+a_n x)^2} (a_n^2 b_n^2 x^4 + b_n x), \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_n x)^k = 1, \tag{2.3}$$

ahol $n = 1, 2, \ldots$, $a_n = \frac{b_n}{n}$ és $b_n > 0$, tetszőleges, valós szám.

Bizonyítás. A

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_n x)^k = (1 + a_n x)^n \tag{2.4}$$

nyilvánvaló azonosságot x szerint deriválva, majd x-szel mindkét oldalt szorozva a

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} (a_n x)^k = b_n x (1 + a_n x)^{n-1} \tag{2.5}$$

egyenlőséget kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy $a_n=\frac{b_n}{n}$. Ismét deriválva, és x-szel szorozva a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k = (b_n^2 x^2 + b_n x)(1+a_n x)^{n-2} \tag{2.6}$$

egyenlőséghez jutunk. Ha a (2.4), (2.5) és (2.6) egyenlőségek mindkét oldalát rendre $b_n^2 x^2 (1+a_n x)^{-n}$, $-2b_n x(1+a_n x)^{-n}$, illetve az $(1+a_n x)^{-n}$ kifejezésekkel szorozzuk, majd a három egyenlőséget összeadjuk, akkor a bizonyítandó (2.2) egyenlőséget kapjuk. A (2.3) azonosság (2.4)-ből nyilvánvaló.

2.2. SEGÉDTÉTEL. *A $0 \leqq x \leqq \omega$ intervallumban ($\omega>0$, tetszőleges, rögzített) érvényes a következő egyenlőtlenség, ha n elég nagy:*

$$A_n = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} e^{\alpha(k/b_n)} \binom{n}{k} (a_n x)^k \leqq c_5 \frac{a_n^2 x^4 + (x/b_n)}{(1+a_n x)^2}, \tag{2.7}$$

ahol $\alpha>0$ tetszőleges, rögzített, valós szám, $a_n=\frac{b_n}{n}\to 0$, $b_n\to\infty$, ha $n\to\infty$, b_n egyébként tetszőleges.

Bizonyítás. Igaz a következő

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} e^{\alpha(k/b_n)} \binom{n}{k} (a_n x)^k = \tag{2.8}$$

$$= \left(\frac{1+a_n x e^{\alpha/b_n}}{1+a_n x}\right)^n \frac{1}{(1+a_n x e^{\alpha/b_n})^n} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} \binom{n}{k} (a_n x e^{\alpha/b_n})^k$$

egyenlőség. Ha $\alpha \geqq 0$ rögzített, $b_n \to \infty$, ha $n\to\infty$, akkor elég nagy n-re

$$e^{\alpha/b_n} - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{b_n}\right)^{\nu} \cdot \frac{1}{\nu!} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{b_n}\right)^{\nu} = \frac{\alpha}{b_n} \cdot \frac{1}{1-(\alpha/b_n)} = \frac{\alpha}{b_n-\alpha},$$

és így mivel $a_n=\frac{b_n}{n}$,

$$\left(\frac{1+a_n x e^{\alpha/b_n}}{1+a_n x}\right)^n = \left(\frac{1+a_n x + a_n x(e^{\alpha/b_n}-1)}{1+a_n x}\right)^n \leqq \left(1+\frac{\alpha a_n x}{(1+a_n x)(b_n-\alpha)}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{\alpha b_n x}{n(1+a_n x)(b_n-\alpha)}\right)^n \leqq \exp\left\{\frac{\alpha b_n x}{(1+a_n x)(b_n-\alpha)}\right\},$$

ebből pedig (mivel $0\leqq x\leqq\omega$, $b_n\to\infty$ és $a_n\to 0$, ha $n\to\infty$) az

$$\left(\frac{1+a_n x e^{\alpha/b_n}}{1+a_n x}\right)^n \leqq \exp\left\{\frac{\alpha b_n x}{(1+a_n x)(b_n-\alpha)}\right\} \leqq c_1 \tag{2.9}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A (2.8) és (2.9) alapján, ha $t=xe^{\alpha/b_n}$, igaz a következő egyenlőtlenség:

$$(2.10)\qquad \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega} e^{\alpha(k/b_n)}\binom{n}{k}(a_nx)^k \leqq c_1\frac{1}{(1+a_nt)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega}\binom{n}{k}(a_nt)^k.$$

Tekintettel arra, hogy $0\leqq x\leqq\omega$, $\frac{k}{b_n}\geqq 2\omega$, ezért ha n elég nagy ($b_n\to\infty$, ha $n\to\infty$),

$$\frac{k}{b_n}-t \geqq 2\omega-\omega e^{1/2} = \omega(2-e^{1/2}) = c_2,$$

ebből pedig átrendezéssel és négyzetre emeléssel a

$$(2.11)\qquad \frac{c_3}{b_n^2}(k-b_nt)^2 \geqq 1$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A (2.10), (2.11) és a (2.2) alapján, felhasználva, hogy $t=xe^{\alpha/b_n}$, ahol $\frac{\alpha}{b_n}\to 0$, ha $n\to\infty$,

$$A_n \leqq \frac{c_4}{b_n^2}\cdot\frac{1}{(1+a_nt)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega}(k-b_nt)^2\binom{n}{k}(a_nt)^k \leqq c_5\frac{a_n^2x^4+(x/b_n)}{(1+a_nx)^2},$$

ami a (2.7) alatti állítás bizonyítása.

Következmény. *A $0\leqq x\leqq\omega$ intervallumban*

$$(2.12)\qquad \lim_{n\to\infty} A_n = 0.$$

A konvergenciatétel bizonyításához szükségünk lesz az $0\leqq x\leqq 2\omega$ intervallumban folytonos $f(x)$ függvényhez tartozó $k_{2\omega}(\delta)$ folytonossági modulus következő, ismert tulajdonságára (lásd pl. [29]):

Ha δ és λ tetszőleges pozitív szám, akkor

$$(2.13)\qquad k_{2\omega}(\lambda\delta) \leqq k_{2\omega}(\delta)\cdot(\lambda+1).$$

Rátérünk a *konvergenciatétel bizonyítására.* Az (1.2) és (2.3) miatt, figyelembe véve a tételben kimondott feltételeket

$$(2.14)\qquad \Delta_n(f;x) = |f(x)-R_n(f;x)| \leqq \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{b_n}\right)\right|\binom{n}{k}(a_nx)^k \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\leqq 2\omega}+\frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega} = S_1+S_2.$$

A feltétel szerint $f(x)$ folytonos az $0\leqq x<\infty$ intervallumban, ezért ha $k_{2\omega}(\delta)$ jelöli a $[0, 2\omega]$ intervallumban a folytonossági modulusát, akkor (2.13) alapján kapjuk, hogy

$$(2.15)\qquad \left|f(x)-f\left(\frac{k}{b_n}\right)\right| \leqq k_{2\omega}\left(\left|x-\frac{k}{b_n}\right|\right) = k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\cdot n^\beta\left|x-\frac{k}{b_n}\right|\right) \leqq$$

$$\leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\left(n^\beta\left|x-\frac{k}{b_n}\right|+1\right).$$

A $\beta>0$ számot célszerűen fogjuk választani. A (2.14), (2.15) és (2.3) miatt

$$S_1 \leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\frac{n^\beta}{(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\leqq 2\omega}\left|x-\frac{k}{b_n}\right|\binom{n}{k}(a_nx)^k+ \tag{2.16}$$

$$+k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\leqq 2\omega}\binom{n}{k}(a_nx)^k \leqq S_1'+k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

A *Cauchy—Schwarz*-egyenlőtlenség felhasználásával, majd az összegezést a teljes szummára kiterjesztve, figyelembe véve (2.2)-t és (2.3)-at, kapjuk, hogy

$$S_1' \leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\frac{n^\beta}{b_n}\left\{\frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n}(b_nx-k)^2\binom{n}{k}(a_nx)^k\cdot\right. \tag{2.17}$$

$$\left.\cdot\frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_nx)^k\right\}^{1/2} \leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\frac{n^\beta}{b_n}\left\{\frac{1}{(1+a_nx)^2}(a_n^2b_n^2x^4+b_nx)\right\}^{1/2}.$$

Ha $\beta=\frac{1}{3}$ és $b_n=n^{2/3}$, akkor ebben az esetben $a_n=\frac{b_n}{n}=n^{-1/3}$, ezért a β ilyen választása mellett (2.16) és (2.17) miatt

$$S_1 \leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)[(x^4+x)^{1/2}+1]. \tag{2.18}$$

Jelölje M az $f(x)$ függvény maximumát a $[0, \omega]$ intervallumban. Mivel $f(x)=O(e^{\alpha x})$, ha $x\to\infty$ ($\alpha\geqq 0$ rögzített), ezért (2.14) és (2.7) miatt, figyelemmel a_n és b_n előbbi választására

$$S_2 \leqq \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega}(M+c_6e^{\alpha(k/b_n)})\binom{n}{k}(a_nx)^k \leqq \tag{2.19}$$

$$\leqq c_7\left(a_n^2x^4+\frac{x}{b_n}\right) \leqq \frac{c_7}{n^{2/3}}(x^4+x).$$

Ezek után a (2.14)-beli kifejezés a (2.18) és a (2.19) alapján a $0\leqq x\leqq\omega$ intervallumban a következőképpen becsülhető, ha n elég nagy:

$$\Delta_n(f; x) \leqq c_0\left[k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)+\frac{1}{n^{2/3}}\right]. \tag{2.20}$$

Ez pedig az I. tétel állításának bizonyítását adja.

3. FEJEZET

Aszimptotikus approximációs tétel az $R_n(f; x)$-ekre

E. V. Voronovszkaja [33] a (0.1) *Bernstein*-polinomokra bebizonyította, hogy

$$B_n(f; x) = f(x)+\frac{f''(x)}{2n}x(1-x)+\frac{\varrho_n}{n}, \tag{3.1}$$

ha $f(x)$ korlátos a $0\leqq x\leqq 1$ intervallumban, és az x pontban véges második deriváltja van. A (3.1)-ben ϱ_n az n növekedésével nullához tart.

Ebben a részben a (3.1)-hez hasonló aszimptotikus approximációs tételt bizonyítunk az (1.6)-ban definiált $R_n(f; x)$ *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekre. A tétel, amit bizonyítani fogunk, a következő:

II. TÉTEL. *Legyen $f(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumban értelmezett olyan függvény, hogy $f(t)=O(e^{\alpha t})$, ha $t\to\infty$, $\alpha\geqq 0$ pedig tetszőleges, rögzített, valós szám, akkor minden olyan x pontban, amelyben $f''(t)=f''(x)$ létezik és véges,*

$$R_n(f; x) = f(x)+a_n f'(x) g_1(x)+a_n f''(x) g_2(x)+a_n \varrho_n, \tag{3.2}$$

ahol $\varrho_n\to 0$, $a_n=\frac{b_n}{n}\to 0$ és $\frac{n^{1/2}}{b_n}\to 0$, ha $n\to\infty$, továbbá

$$g_1(x) = \frac{-x^2}{1+a_n x}, \quad g_2(x) = \frac{a_n b_n x^4+(x/a_n)}{2b_n(1+a_n x)^2}.$$

Megjegyezzük, hogy az a_n-re és b_n-re vonatkozó kikötések teljesülése esetén a $g_1(x)$ és a $g_2(x)$ csak x-től függő korlát alatt marad, és mivel $a_n\to 0$, ha $n\to\infty$, ezért a III. tétel valóban aszimptotikus approximációs tétel.

A II. tétel bizonyítása. A tételben kimondott feltételek szerint $f''(x)$ véges, így nyilvánvaló, hogy $f(t)$ az

$$f(t) = f(x)+f'(x)(t-x)+\left[\frac{f''(x)}{2}+\lambda(t)\right](t-x)^2 \tag{3.3}$$

alakban írható föl, ahol $\lambda(t)\to 0$, ha $t\to x$. Ennek alapján

$$f\left(\frac{k}{b_n}\right) = f(x)+f'(x)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)+\left[\frac{f''(x)}{2}+\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\right]\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2. \tag{3.4}$$

Behelyettesítve ezt az $R_n(f; x)$-be, kapjuk, hogy

$$R_n(f; x) = \frac{f(x)}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_n x)^k+\frac{f'(x)}{b_n(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}(k-b_n x)\binom{n}{k}(a_n x)^k+$$
$$+\frac{f''(x)}{2b_n^2(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}(k-b_n x)^2\binom{n}{k}(a_n x)^k+\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2\binom{n}{k}(a_n x)^k. \tag{3.5}$$

Ha (2.5) mindkét oldalát osztjuk $(1+a_n x)^n$-nel, majd levonunk $b_n x$-et, és fölhasználjuk a (2.3) azonosságot, akkor

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}(k-b_n x)\binom{n}{k}(a_n x)^k = \frac{-a_n x^2 b_n}{1+a_n x}. \tag{3.6}$$

Figyelembe véve a (2.3), (3.6), (2.2) azonosságokat

$$R_n(f; x) = f(x)+f'(x)\frac{-a_n x^2}{1+a_n x}+f''(x)\frac{a_n^2 b_n x^4+x}{2b_n(1+a_n x)^2}+r_n, \tag{3.7}$$

ahol

$$r_n = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k. \tag{3.8}$$

Adjunk meg egy tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ számot, és válasszuk $\delta > 0$-t olyan kicsire, hogy ha $|t-x| < \delta$, akkor $|\lambda(t)| < \varepsilon$ teljesüljön. Ilyen δ mellett a (3.8) összeget bontsuk két részre:

$$r_n = \sum_1 + \sum_2, \tag{3.9}$$

ahol $\sum_1$ tartalmazza azokat a tagokat, ahol $\left|\frac{k}{b_n}-x\right| < \delta$ és $\sum_2$ azokat, ahol $\left|\frac{k}{b_n}-x\right| \geqq \delta$. A $\lambda(t)$-re vonatkozó előző megállapítások és (2.2) miatt

$$\left|\sum_1\right| < \frac{\varepsilon}{b_n^2(1+a_n x)^2}(a_n^2 b_n^2 x^4 + b_n x). \tag{3.10}$$

Most felső becslést adunk $|\sum_2|$-re. A továbbiakban c_i, $i = 8, 9, \ldots$ csak x-től és α-tól függő, n-től független pozitív számok. Legyen $\omega > x$ rögzített szám. $\sum_2$-t bontsuk föl $\sum'$ és $\sum''$ összegére, ahol

$$\sum{}' = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{|(k/b_n)-x| \geqq \delta \text{ és } k/b_n < 2\omega} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k, \tag{3.11}$$

illetve

$$\sum{}'' = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k, \tag{3.12}$$

tehát

$$r_n = \sum_1 + \sum{}' + \sum{}''. \tag{3.13}$$

A (3.3)-ból látható, hogy $\lambda(t)(t-x)^2$ korlátos, ha $t \in [0, 2\omega]$. Ezért, ha $\frac{k}{b_n} < 2\omega$ és $\left|\frac{k}{b_n}-x\right| \geqq \delta$, akkor $\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\right| < \frac{c_8}{\delta^2}$. Így (3.11) és a (2.2) értelmében

$$\left|\sum{}'\right| < \frac{c_8\left(a_n^2 x^4 + (x/b_n)\right)}{\delta^2(1+a_n x)^2}. \tag{3.14}$$

Mivel $f(t) = O(e^{\alpha t})$ $(t \to \infty)$, ezért ha ω-t elég nagynak választjuk, akkor (3.4)-ből azt kapjuk, hogy

$$\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2\right| = \left|f\left(\frac{k}{b_n}\right) - f(x) - f'(x)\left(\frac{k}{b_n}-x\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{-f''(x)}{2}\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2\right| < c_9 e^{\alpha(k/b_n)}, \quad \text{ha} \quad \frac{k}{b_n} \geqq 2\omega. \tag{3.15}$$

A (3.12), (3.15), (2.7) alapján adódik, hogy

$$\left|\sum{}''\right| < c_{10}\frac{a_n x^4 + (x/b_n)}{(1+a_n x)^2}. \tag{3.16}$$

Legyen most

$$\varrho_n \overset{\text{def}}{=} \frac{r_n}{a_n}. \tag{3.17}$$

A (3.17), (3.13), (3.10), (3.14) és (3.16) alapján

$$|\varrho_n| < \varepsilon \frac{a_n^2 b_n x^4 + x}{a_n b_n (1+a_n x)^2} + \frac{c_8 (a_n^2 b_n x^4 + x)}{\delta^2 a_n b_n (1+a_n x)^2} + c_{10} \frac{a_n^2 b_n x^4 + x}{a_n b_n (1+a_n x)^2} = \tag{3.18}$$

$$= c_{11} \frac{a_n^2 b_n x^4 + x}{a_n b_n (1+a_n x)^2} = c_{12} \left(a_n x^4 + \frac{x}{a_n b_n} \right) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

mert $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$, és $\frac{n^{1/2}}{b_n} \to 0$, ha $n \to \infty$. A (3.7), (3.8), (3.17), (3.18) a II. tétel igazolását adja.

4. FEJEZET

Az $R_n(f; x)$-ek deriváltjának konvergenciája

Jelöljük $R_n'(f; x)$-szel az $f(x)$ függvényhez tartozó, (1.6) szerint definiált racionális törtfüggvény x szerinti deriváltját. Ekkor igaz a

III. TÉTEL. *Legyen $f(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumban értelmezett függvény, amelyre teljesül, hogy $f(t) = O(e^{\alpha t})(t \to \infty)$, $\alpha \geqq 0$ tetszőleges, rögzített, valós szám; tegyük föl továbbá, hogy a $t = x$ pontban $f'(t) = f'(x)$ létezik és véges, akkor*

$$R_n'(f; x) \to f'(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \tag{4.1}$$

ahol $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$, ha $n \to \infty$, és $b_n = n^{3/2}$.

A bizonyításhoz néhány lemmára lesz szükség.

4.1. SEGÉDTÉTEL. *Az $x \geqq 0$ feltétel teljesülése esetén az*

$$S_m(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x)^m \binom{n}{k} (a_n x)^k, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

racionális törtfüggvények között fennáll a következő rekurzív összefüggés:

$$S_{m+1}(x) = x \left[S_m'(x) + m b_n S_{m-1}(x) - \frac{a_n b_n x}{1+a_n x} S_m(x) \right], \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Bizonyítás. $S_m(x)$-et deriválva azt kapjuk, hogy

$$S_m'(x) = \frac{-1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x)^{m-1} \binom{n}{k} (a_n x)^k \cdot m \cdot b_n +$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x)^{m-1} \binom{n}{k} (a_n x)^{k-1} \cdot (k - b_n x) \left(a_n k - a_n b_n x + a_n b_n x - \frac{a_n b_n x}{1+a_n x} \right).$$

Ebből megfelelő átírással

$$S_m'(x) = -mb_n S_{m-1}(x) + \frac{1}{x} S_{m+1}(x) + \left(b_n - \frac{b_n}{1+a_n x}\right) S_m(x),$$

ahonnan a bizonyítandó (4.3) adódik.

4.2. SEGÉDTÉTEL. *A (4.2)-ben definiált $S_m(x)$ racionális törtfüggvény előállítható a*

$$S_m(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^m} \sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x) b_n^i, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

alakban, ahol $A_{m,i}(x)$ polinomok b_n-től függetlenek, és együtthatóik az a_n polinomjai.

Bizonyítás. A (4.4) igazolása m szerinti teljes indukcióval történik. $S_0(x)$ éppen a (2.3) kifejezés, azaz

$$S_0(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_n x)^k = 1. \tag{4.5}$$

$S_1(x)$ pedig a (3.6) kifejezés:

$$S_1(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x) \binom{n}{k} (a_n x)^k = \frac{-a_n x^2 b_n}{1+a_n x} = \frac{A_{1,0}(x) + A_{1,1}(x) b_n}{1+a_n x}, \tag{4.6}$$

ahol $A_{1,0}(x) = 0$, $A_{1,1}(x) = -a_n x^2$. $S_2(x)$ a (2.2)-ből adódik:

$$S_2(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k = \frac{a_n^2 b_n^2 x^4 + b_n x}{(1+a_n x)^2} = \tag{4.7}$$

$$= \frac{A_{2,0}(x) + A_{2,1}(x) b_n + A_{2,2}(x) b_n^2}{(1+a_n x)^2},$$

ahol $A_{2,0}(x) = 0$, $A_{2,1}(x) = x$ és $A_{2,2}(x) = a_n^2 \cdot x^4$. A (4.5), (4.6), (4.7)-ből látható, hogy a segédtétel állítása igaz az $m = 0, 1, 2$ esetben. Tételezzük föl, hogy az állítás igaz m-re, és igazoljuk $m+1$-re is. A (4.3) rekurziós formula és az indukciós föltevés szerint

$$S_{m+1}(x) = x \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} A'_{m,i} b_n^i (1+a_n x)^m - \sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x) b_n^i m a_n (1+a_n x)^{m-1}}{(1+a_n x)^{2m}} + \right.$$

$$\left. + \frac{m b_n}{(1+a_n x)^{m-1}} \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-1,i}(x) b_n^i - \frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{m+1}} \sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x) b_n^i \right],$$

ebből pedig átrendezéssel adódik, hogy

$$S_{m+1}(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^{m+1}} \sum_{i=0}^{m+1} A_{m+1,i}(x) b_n^i,$$

ahol az $A_{m+1,i}(x)$ polinomok nyilvánvalóan eleget tesznek a segédtételben kimondottaknak.

4.3. SEGÉDTÉTEL. *Minden* $0 \leqq x \leqq \omega < \infty$ *intervallumban fönnáll a következő egyenlőtlenség, ha n elég nagy:*

$$(4.8)\qquad |S_m(x)| = \left|\frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n}(k-b_nx)^m\binom{n}{k}(a_nx)^k\right| \leqq K_m(\omega)a_n^m\cdot b_n^m,$$

$m=0, 1, 2, \ldots,$ *ahol* $K_m(\omega)$ *csak* ω*-tól függő, pozitív állandó,* $a_n=\dfrac{b_n}{n}$, $b_n=n^{2/3}$.

Bizonyítás. (4.4) szerint

$$(4.9)\qquad S_m(x) = \frac{g_m(x)}{(1+a_nx)^m}, \quad m = 0,1,2,\ldots,$$

ahol $g_m(x)=\sum_{i=0}^{m}A_{m,i}(x)b_n^i$. Megmutatjuk, hogy $g_m(x)$ az x-nek $2m$-edfokú polinomja. (4.8) szerint

$$(4.10)\qquad S_m(x) = \frac{P_{n+m}(x)}{(1+a_nx)^n}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $P_{n+m}(x)$ pontosan $n+m$-edfokú polinom. $S_m(x)$ (4.9)-beli alakjából a (4.10) $(1+a_nx)^{n-m}$-mel való bővítéssel adódott, és ez csak úgy lehetséges, ha $g_m(x)$ pontosan $2m$-edfokú polinom.

Ezek után (4.8)-at m szerinti teljes indukcióval látjuk be. $m=0$ esetben $S_0(x)\equiv 1$, tehát (4.8) triviálisan teljesül. Az $m=1$ esetben, (4.6) értelmében

$$|S_1(x)| = \frac{a_nb_nx^2}{1+a_nx} \leqq \frac{\omega^2}{1+\omega}a_nb_n = K_1(\omega)a_nb_n.$$

Most tegyük fel, hogy valamilyen m természetes szám esetén igaz a (4.8) és lássuk be $m+1$-re. (4.9) és (4.3) szerint

$$(4.11)\qquad S_{m+1}(x) = x\left[\frac{g_m'(x)(1+a_nx)^m+g_m(x)(1+a_nx)^{m-1}\cdot ma_n}{(1+a_nx)^{2m}}+\right.$$

$$\left.+\frac{mb_ng_{m-1}(x)}{(1+a_nx)^{m-1}}-\frac{a_nb_nxg_m(x)}{(1+a_nx)^{m+1}}\right]=\frac{g_m'(x)x}{(1+a_nx)^m}+\frac{g_m(x)(xma_n-a_nb_nx^2)}{(1+a_nx)^{m+1}}+\frac{g_{m-1}(x)mb_nx}{(1+a_nx)^{m-1}}.$$

A polinomokra vonatkozó *Markov*-egyenlőtlenség kimondja, hogy ha egy $Q(x)$ k-adfokú polinom abszolút értéke az $[a, b]$-n egy C korlát alatt marad, akkor

$$(4.12)\qquad |Q'(x)| \leqq \frac{2Ck^2}{(b-a)}, \quad \text{ha} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Alkalmazzuk $g_m(x)$-re a *Markov*-egyenlőtlenséget. Mivel a (4.8) indukciós feltétel szerint

$$|g_m(x)| \leqq K_m(\omega)a_n^mb_n^m(1+a_nx)^m,$$

ezért

$$(4.13)\qquad |g_m'(x)| \leqq \frac{8m^2k_m(\omega)a_n^mb_n^m}{\omega}(1+a_nx)^m \leqq K_m'(\omega)a_n^mb_n^m,$$

ha $0 \leqq x \leqq \omega$. (4.11), (4.8) és (4.13) alapján $a_n^{m+1} b_n^{m+1}$ kiemelésével

$$|S_{m+1}(x)| \leqq a_n^{m+1} b_n^{m+1} \left[\frac{K_m'(\omega)}{a_n b_n (1+a_n x)^m} + \left| \frac{K_m(\omega)(xm/b_n - x^2)}{(1+a_n x)^{m+1}} \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{K_{m-1}(\omega) m x}{a_n^2 b_n (1+a_n x)^{m-1}} \right] \leqq K_{m+1}(\omega) a_n^{m+1} b_n^{m+1}$$

adódik.

A *III. tétel bizonyítása*. Tekintsük előbb azt az esetet, amikor $x > 0$. Az (1.6) és (2.3) miatt

$$R_n'(f; x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} a_n (a_n x)^{k-1} \left(k - \frac{b_n x}{1+a_n x}\right), \tag{4.14}$$

ebből átalakítással

$$R_n'(f, x) = \frac{1}{x(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k (k - b_n x) + \tag{4.15}$$

$$+ \frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k.$$

Mivel $f'(x)$ létezik és véges, ezért

$$f\left(\frac{k}{b_n}\right) = f(x) + \left[f'(x) + \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right) \right] \left(\frac{k}{b_n} - x\right), \tag{4.16}$$

ahol $\lambda(t) \to 0$, ha $t \to x$. Figyelembe véve a (4.15), (4.16), (2.2) és (4.6) alattiakat, átalakítással adódik, hogy

$$R_n'(f, x) = f'(x) \frac{1}{(1+a_n x)^2} + \Delta_n, \tag{4.17}$$

ahol

$$\Delta_n = \frac{b_n}{x(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \tag{4.18}$$

$$+ \frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{k}{b_n} - x\right).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi, rögzített szám. Ekkor $\lambda(t) \to 0$ $(t \to x)$ miatt van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\lambda(t)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |t - x| < \delta. \tag{4.19}$$

Legyen továbbá $\omega > x$ rögzített szám. Bontsuk föl Δ_n-t:

$$\Delta_n = \frac{b_n}{x(1+a_nx)^n}\left\{\sum_{|(k/b_n)-x|<\delta} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_nx)^k\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2 + \right. \tag{4.20}$$

$$\left. + \sum_{|(k/b_n)-x|\geqq\delta \text{ és } k/b_n<2\omega} + \sum_{k/b_n\geqq 2\omega}\right\} +$$

$$+\frac{a_nb_nx}{(1+a_nx)^{n+1}}\left\{\sum_{|(k/b_n)-x|<\delta} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_nx)^k\left(\frac{k}{b_n}-x\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{|(k/b_n)-x|\geqq\delta \text{ és } k/b_n<2\omega} + \sum_{k/b_n\geqq 2\omega}\right\} = A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6.$$

(4.20), (4.19) és (2.2) miatt

$$|A_1| < \varepsilon\frac{a_n^2b_nx^3+1}{(1+a_nx)^2} < 2\cdot\varepsilon\omega^3, \quad \text{ha} \quad n \text{ elég nagy.} \tag{4.21}$$

Hasonlóan, (4.20) és (4.6) miatt

$$|A_4| < \varepsilon\frac{a_n^2b_nx^3}{(1+a_nx)^2} < \varepsilon\omega^3. \tag{4.22}$$

A $\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)$ függvény (4.16) miatt korlátos, ha $\frac{k}{b_n}<2\omega$, sőt igaz az is, hogy

$$\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\right| < \frac{c_{12}}{\delta}, \quad \text{ha} \quad \left|\frac{k}{b_n}-x\right| \geqq \delta \quad \text{és} \quad \frac{k}{b_n} < 2\omega. \tag{4.23}$$

(c_i, $i=12, 13, \ldots$, ω-tól és α-tól függő, n-től független pozitív szám.) (4.20)-ból és (4.23)-ból következik, hogy

$$|A_2| \leqq \frac{c_{12}b_n}{\delta^3x(1+a_nx)^n}\sum_{|(k/b_n)-x|\geqq\delta \text{ és } k/b_n<2\omega}\binom{n}{k}(a_nx)^k\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^4. \tag{4.24}$$

(4.8) és (4.24) alapján

$$|A_2| < \frac{c_{12}K_4(\omega)a_n^4b_n^4}{\delta^3b_n^4x} < c_{13}a_n^4b_n, \tag{4.25}$$

$c_{13}\cdot a_n^4b_n$ pedig 0-hoz tart a_n és b_n választása miatt.

Ha ω-t elég nagynak választjuk, akkor $f(t)=O(e^{\alpha t})(t\to\infty)$ miatt (4.16)-ból látható, hogy

$$\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\right| < c_{14}e^{\alpha(k/b_n)}, \quad \text{ha} \quad \frac{k}{b_n} \geqq 2\omega. \tag{4.26}$$

(4.20)-ból és (4.26)-ból azt kapjuk, hogy

$$|A_3| \leqq \frac{c_{14}}{b_nx(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega} e^{\alpha(k/b_n)}\binom{n}{k}(a_nx)^k(k-b_nx)^2.$$

Alkalmazzuk a *Cauchy—Schwarz*-egyenlőtlenséget:

$$|A_3| \leqq \frac{c_{14}}{b_n x}\sqrt{\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k/b_n \geqq 2\omega} e^{2\alpha(k/b_n)}\binom{n}{k}(a_n x)^k}\sqrt{\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_n x)^k (k-b_n x)^4}.$$

A (2.7) tetszőleges $\alpha \geqq 0$-ra teljesül. (2.7) és (4.8) felhasználásával adódik, hogy

$$|A_3| \leqq \frac{c_{15}}{b_n x}\sqrt{\frac{a_n^2 x^4 + (x/b_n)}{(1+a_n x)^2}}\sqrt{K_4(\omega) a_n^4 b_n^4} < \tag{4.27}$$

$$< c_{16}(a_n^3 b_n + a_n^2 b_n^{1/2}) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

$|A_5|$ becslését (4.23)-ból és (2.2)-ből kapjuk:

$$|A_5| = \left|\frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{n+1}} \sum_{|(k/b_n)-x| \geqq \delta \text{ és } k/b_n < 2\omega} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_n x)^k \left(\frac{k}{b_n} - x\right)\right| \leqq \tag{4.28}$$

$$\leqq \frac{c_{12} a_n x (a_n^2 b_n x^4 + x)}{\delta^2 (1+a_n x)^3} = a_n(c_{17} a_n^2 b_n + c_{18}),$$

ez pedig tart 0-hoz, ha $n \to \infty$. (4.26)-ból következik, hogy

$$\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n} - x\right)\right| \leqq c_{19} e^{\alpha(k/b_n)}, \quad \text{ha} \quad \frac{k}{b_n} \geqq 2\omega. \tag{4.29}$$

(4.29) és (2.7) felhasználásával becsüljük $|A_6|$-ot:

$$|A_6| = \left|\frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{n+1}} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_n x)^k \left(\frac{k}{b_n} - x\right)\right| \leqq \tag{4.30}$$

$$\leqq \frac{a_n b_n x c_{19} c_5 (a_n^2 x^4 + x/b_n)}{(1+a_n x)^3} \leqq c_{20}(a_n^3 b_n + a_n) \to 0,$$

ha $n \to \infty$.

(4.21), (4.25), (4.27), (4.22), (4.28), és (4.30)-ból látható, hogy

$$|\Delta_n| \leqq \sum_{i=1}^{6} |A_i| \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Így (4.17)-ből következik, hogy

$$R_n'(f; x) \to f'(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \quad \text{és} \quad x > 0.$$

Legyen most $x=0$, akkor a III. tétel feltétele értelmében $f'(+0)$ létezik és véges, s így $R_n(f; x)$ (1.6) alatti értelmezése miatt

$$R_n'(f; x)|_{x=0} = \left\{\frac{1}{(1+a_n x)^n} f(0) + nf\left(\frac{1}{b_n}\right)\frac{a_n x}{(1+a_n x)^n}\right\}'\Bigg|_{x=0} =$$

$$= b_n\left(-f(0) + f\left(\frac{1}{b_n}\right)\right) \to f'(0),$$

mivel $b_n \to \infty$, ha $n \to \infty$.

Ezzel a III. tételt igazoltuk.

5. FEJEZET

Az $R_n(f;\, x)$-ek kapcsolata a valószínűségszámítással

Ebben a fejezetben a konvergenciatétellel (I. tétel) kapcsolatos valószínűségszámítási tétellel foglalkozunk. Ebből a tételből következik, hogy bizonyos feltételeket teljesítő valószínűségeloszlások segítségével alkotott pozitív, lineáris operátorokkal korlátos és folytonos függvényeket közelíthetünk. Mi itt megmutatjuk, hogy a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények is származtathatók egy speciális valószínűségeloszlás-sorozat segítségével, továbbá, hogy az eloszlásoknak ez a sorozata is teljesíti az említett tétel feltételeit. Így a folytonos és korlátos függvényeknek *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekkel való közelítésére vonatkozó konvergenciatételt valószínűségszámítási eszközökkel is megkapjuk, hasonlóan, mint más, nevezetes eloszlásokkal konstruált operátorok esetén.

Az itt következő tétel nagy jelentőségű mind a valószínűségszámításban, mind az approximációelméletben, számos következménye és alkalmazása miatt.

Tegyük föl, hogy az x paraméter valamilyen véges vagy végtelen intervallumban változhat. Ekkor igaz a következő:

IV. TÉTEL. *Legyen $F_{n,x}$, $n=1, 2, \dots$, $M_n(x)$ várható értékű és $D_n^2(x)$ szórásnégyzetű valószínűségeloszlások olyan sorozata, amelyre teljesül, hogy $M_n(x)\to x$, és $D_n^2(x)\to 0$, ha $n\to\infty$. Legyen továbbá $f(t)$ az egész számegyenesen korlátos és folytonos függvény. Ekkor*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dF_{n,x}(t) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n\to\infty. \tag{5.1}$$

A konvergencia egyenletes minden olyan $-\infty<a\leqq x\leqq b<\infty$ intervallumban, ahol $M_n(x)$ egyenletesen tart x-hez, $D_n^2(x)$ egyenletesen tart 0-hoz.

FELLER [12] könyvének 218. oldalán található „fő lemma" konklúziója hasonló, ott azonban a szigorúbb $M_n(x)=x$, $n=1, 2, \dots$, feltétel fönnállását követelik meg $M_n(x)\to x$ $(n\to\infty)$ helyett. Ahhoz, hogy a tétel eredményét a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények által meghatározott valószínűségeloszlásokra is alkalmazhassuk, a tételt az $M_n(x)\to x$ esetben is bizonyítani kell.

A IV. tételt a funkcionálanalízis eszközeivel KOROVKIN [21] is bebizonyította, valamivel általánosabb feltételek mellett. Ő ugyanis nem szorítkozott a valószínűségi eloszlásfüggvények szerint vett *Stieltjes*-integrálok esetére. A teljesség kedvéért röviden ismertetjük KOROVKIN eredményeit is. Az első tétel, amit KOROVKINtól idézünk, bizonyos pozitív lineáris funkcionálok sorozatára vonatkozik.

Azt mondjuk, hogy Φ a valós számokon értelmezett, valós számértékű függvények egy F halmazán értelmezett pozitív lineáris funkcionál, ha minden $f\in F$ függvényhez egy valós számot rendel, amit $\Phi(f)$-fel jelölünk, és Φ-re és F-re teljesülnek a következő tulajdonságok: tetszőleges a, b valós szám és $f_1\in F$ és $f_2\in F$ függvény esetén $af_1+bf_2\in F$, és

$$\Phi(af_1+bf_2) = a\Phi(f_1)+b\Phi(f_2),$$

továbbá $\Phi(f)\geqq 0$, minden pozitív $f\in F$ függvény esetén (f-et akkor nevezzük pozitív függvénynek, ha $f(t)\geqq 0$ minden t-re).

TÉTEL (KOROVKIN [21]). *Ha pozitív lineáris funkcionálok* $\Phi_n(f)$, $n=1, 2, \ldots$ *sorozatára teljesül, hogy*

$$\Phi_n(1) \to 1 \quad \text{és} \quad \Phi_n(\Psi) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

ahol $\Psi(t)=(t-x)^2$, *akkor*

$$\Phi_n(f) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

minden olyan $f(t)$ *függvény esetén, amely korlátos az egész számegyenesen, és a* $t=x$ *pontban folytonos.*

A tétel következménye könnyen ellenőrizhető feltételt fogalmaz meg annak eldöntésére, hogy a $\Phi_n(f)$ pozitív lineáris funkcionálok sorozatával közelíthetjük-e $f(x)$-et.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha pozitív lineáris funkcionálok* $\Phi_n(f)$, $n=1, 2, \ldots$, *sorozatára teljesül, hogy*

$$\Phi_n(1) \to 1,$$

$$\Phi_n(t) \to x,$$

$$\Phi_n(t^2) \to x^2, \quad \text{ha } n \to \infty,$$

akkor

$$\Phi_n(f) \to f(x), \quad \text{ha } n \to \infty,$$

minden olyan $f(t)$ *függvény esetén, amely korlátos az egész számegyenesen, és a* $t=x$ *pontban folytonos.*

Most vizsgáljuk meg, hogyan következik a IV. tétel KOROVKIN tételéből. Legyen F a korlátos és folytonos függvények halmaza. Értelmezzük F-en a következő lineáris funkcionál sorozatot:

$$\Phi_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_{n,x}(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ahol $F_{n,x}$, ($n=1, 2, \ldots$, x rögzített paraméter) olyan valószínűségeloszlások sorozata, amelyeknek $M_n(x)$ várható értéke x-hez, $D_n^2(x)$ szórásnégyzete 0-hoz tart, ha $n\to\infty$. A $\Phi_n(f)$ létezik, és pozitív lineáris funkcionál, mert folytonos és korlátos függvénynek valószínűségi eloszlásfüggvény szerint vett *Stieltjes*-integrálja. Azonnal látható, hogy az így választott Φ_n, $n=1, 2, \ldots$, sorozat teljesíti a következmény feltételeit, mert

$$\Phi_n(1) = \int_{-\infty}^{\infty} 1dF_{n,x}(t) = 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

és

$$\Phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} tdF_{n,x}(t) = M_n(x) \to x, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

továbbá a

$$D_n^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-M_n(x))^2 dF_{n,x}(t)$$

azonosságból átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 dF_{n,x}(t) = D_n^2(x)+2M_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} t dF_{n,x}(t) - \int_{-\infty}^{\infty} (M_n(x))^2 dF_{n,x}(t) =$$

$$= D_n^2(x)+2M_n^2(x)-M_n^2(x) = D_n^2(x)+M_n^2(x) \to x^2, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

KOROVKIN az egyenletes konvergencia fennállásának feltételeit is vizsgálta, bizonyos pozitív lineáris operátorok sorozatával való közelítés esetén.

Azt mondjuk, hogy az $f(t)$ függvények egy F halmazán adott egy $L(f; x)$ lineáris operátor, ha minden $f(t) \in E$ függvényhez egy $\varphi(x) = L(f; x)$ függvény van rendelve, továbbá tetszőleges a, b valós szám és $f_1 \in F$ és $f_2 \in F$ függvény esetén $af_1 + bf_2 \in F$, és

$$L(af_1+bf_2; x) = aL(f_1; x)+bL(f_2; x).$$

Az $L(f; x)$ lineáris operátort a számegyenes E részhalmazán pozitív lineáris operátornak nevezzük, ha $x \in E$ esetén $L(f; x) \geqq 0$, minden olyan $f(t)$ függvény mellett, amely nem vesz föl negatív értékeket.

Megjegyezzük, hogy az $L(f; x)$ pozitív lineáris operátor minden rögzített $x \in E$ esetén egy pozitív lineáris funkcionál. Ha pedig minden rögzített $x \in E$ esetén $L(f; x)$ pozitív lineáris funkcionál, akkor $L(f; x)$ pozitív lineáris operátor az E halmazon.

TÉTEL (KOROVKIN [21]). *Ha az $L_n(f; x)$, $n = 1, 2, \ldots$, pozitív lineáris operátorok sorozatára teljesülnek a következő feltételek:*

$$L_n(1; x) = 1+\alpha_n(x),$$

$$L_n(t; x) = x+\beta_n(x),$$

$$L_n(t^2; x) = x^2+\gamma_n(x),$$

ahol $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ és $\gamma_n(x)$ egyenletesen tart 0-hoz az $a \leqq x \leqq b$ véges, zárt intervallumon $n \to \infty$ mellett, akkor

$$L_n(f; x) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

egyenletesen az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban, ha $f(t)$ korlátos függvény az egész számegyenesen, $[a, b]$-ben pedig folytonos.

Változzon most x a számegyenes valamely véges vagy végtelen intervallumában. Ekkor a IV. tételben szereplő

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dF_{n,x}(t) = \varphi_n(x) = L_n(f; x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

sorozat pozitív lineáris operátorsorozat, hiszen már korábban láttuk, hogy rögzített x mellett a

$$\Phi_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dF_{n,x}(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

sorozat pozitív lineáris funkcionálsorozat. Az így alkotott pozitív lineáris operátorsorozatok közül véges intervallumban való egyenletes konvergencia teljesülését fogjuk látni az a), b), c) és d) pontban szereplő $B_n(f; x)$, $S_n(f; x)$, $G_n(f; x)$, illetve $R_n(f; x)$ $(n=1, 2, \dots)$ operátorsorozatoknál.

Most pedig rátérünk a *IV. tétel bizonyítására.*

Bizonyítás. Nyilván

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_{n,x}(t)-f(x)\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)-f(x)|\,dF_{n,x}(t). \tag{5.2}$$

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőlegesen kicsi, rögzített szám. Mivel f folytonos, ezért van olyan $\delta>0$, hogy $|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$, ha $|t-x|<\delta$, és így

$$\int_{|t-x|<\delta} |f(t)-f(x)|\,dF_{n,x}(t) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.3}$$

Másrészt

$$\int_{|t-x|\geqq\delta} |f(t)-f(x)|\,dF_{n,x}(t) \leqq \tag{5.4}$$

$$\leqq \int_{|t-x|\geqq\delta} \left|f(t)-f(M_n(x))\right| dF_{n,x}(t)+\int_{|t-x|\geqq\delta} \left|f(M_n(x))-fx)\right| dF_{n,x}(t).$$

A *Csebisev*-egyenlőtlenség szerint

$$P_n\left(|t-M_n(x)| \geqq \delta\right) \leqq \frac{D_n^2(x)}{\delta^2},$$

ezért f korlátossága miatt van olyan rögzített K szám, hogy

$$\int_{|t-x|\geqq\delta} \left|f(t)-f(M_n(x))\right| dF_{n,x}(t) \leqq \frac{KD_n^2(x)}{\delta^2}, \tag{5.5}$$

és elég nagy n-re

$$\frac{KD_n^2(x)}{\delta^2} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.6}$$

Mivel $M_n(x)\to x$, ha $n\to\infty$, ezért f folytonossága miatt

$$\left|f(M_n(x))-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.7}$$

ha n elég nagy.

(5.5), (5.6) és (5.7) értelmében elég nagy n-re

$$\int_{|t-x|\geqq\delta} |f(t)-f(x)|\,dF_{n,x}(t) \leqq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.8}$$

(5.2), (5.3) és (5.8) alapján pedig elég nagy n-re

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_{n,x}(t)-f(x)\right| < \varepsilon.$$

Ha az $-\infty<b\leqq x\leqq a<\infty$ intervallumban $M_n(x)$ és $D_n^2(x)$ egyenletesen tart x-hez, illetve 0-hoz, akkor a bizonyítás menetéből látható, hogy van olyan N természetes szám, hogy $n>N$ esetén

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_{n,x}(t)-f(t)\right| < \varepsilon,$$

minden $x\in[a, b]$ mellett.

Most a IV. tétel segítségével ismét bebizonyítjuk a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények konvergenciatételét korlátos és folytonos f függvényekre. Előtte ismertetjük a tétel néhány más, ismert, jellegében hasonló alkalmazását is, ahol ismert valószínűségeloszlásokról mutatjuk meg, hogy teljesítik a IV. tétel feltételeit, így ismert konvergenciatételek valószínűségszámítási bizonyítását kapjuk. Az a) pontban $F_{n,x}$-ként a binomiális eloszlás szerepel, és a (0.1)-ben megadott $B_n(f; x)$ *Bernstein*-polinom felel meg az $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_{n,x}(t)$-nek. A b) pontban a *Poisson*-eloszlással, illetve az (1.2)-beli *Szász*-féle operátorral foglalkozunk, a c) pontban a gammaeloszlással, illetve az ún. gammaoperátorral. Ezekből is látható, hogy sokszor a valószínűségszámítási módszerek igen célravezetőek lehetnek. Ezek után a d) pontban hasonló módszerrel tárgyaljuk az (1.6) *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények, illetve az általuk meghatározott és a rövidség kedvéért „kvázibinomiális" eloszlásnak nevezett eloszlás esetét.

a) Legyen ξ_i, $i=1, 2, \dots, n$, olyan független valószínűségi változók sorozata, amelyek 1 és 0 értéket vesznek föl, x, illetve $1-x$ valószínűséggel, $0\leqq x\leqq 1$. $F_{n,x}$ legyen $(\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n)n^{-1}$ eloszlása, azaz legyen

$$F_{n,x} = P\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

$F_{n,x}$ tehát binomiális eloszlás, várható értéke $M_n(x)=x$, szórásnégyzete pedig

$$D_n^2(x) = \frac{x(1-x)}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n\to\infty,$$

a $0\leqq x\leqq 1$ intervallumban egyenletesen. Ha f a $[0, 1]$-ben folytonos függvény, amiből következik, hogy itt egyenletesen folytonos és korlátos is, akkor a IV. tétel értelmében

$$\int_0^1 f(t)\,dF_{n,x}(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = B_n(f; x) \to f(x),$$

ha $n\to\infty$, és $0\leqq x\leqq 1$, és a konvergencia egyenletes. Azaz konstruktív, valószínűségszámítási bizonyítását kaptuk WEIERSTRASS híres tételének, amely kimondja, hogy véges, zárt intervallumban folytonos függvény egyenletesen közelíthető polinomok sorozatával, mégpedig konkrétan BERNSTEIN $B_n(f; x)$, $n=1, 2, \dots$, polinomjaival ([6]).

b) Legyen most $F_{n,x}$ a $(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)n^{-1}$ eloszlása $(n=1, 2, \ldots)$, ahol ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, független, x paraméterű, *Poisson*-eloszlású valószínűségi változók sorozata, $0\leqq x<\infty$. Ekkor

$$M_n(x) = x, \quad D_n^2(x) = \frac{x}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

minden $0\leqq a\leqq x\leqq b<\infty$ intervallumban egyenletesen. $f(t)$ legyen tetszőleges, $[0, \infty)$-ben korlátos és folytonos függvény. Vezessük be az

$$S_n(f; x) = \int_0^\infty f(t)dF_{n,x}(t)$$

jelölést. $S_n(f; x)$-et *Szász—Mirakyan*-féle operátornak is szokták nevezni. $S_n(f; x)$-re alkalmazhatjuk a IV. tételt:

$$S_n(f; x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^\infty f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!} \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

a $0\leqq x<\infty$ intervallumban. A konvergencia minden $0\leqq a\leqq x\leqq b<\infty$ intervallumban egyenletes. Mint az 1. fejezetben említettük, az $S_n(f; x)$-ekre vonatkozó tételt SZÁSZ O. [32] bizonyította be, a korlátosság helyett azt az esetet is megengedve, ha $f(t)=O(t^m)$, ha $t\to\infty$, m tetszőleges.

c) Legyen $F_{n,x}$, $n=1, 2, \ldots$, a $(0, \infty)$-be koncentrált n-edrendű, n/x paraméterű gammaeloszlások sorozata, $x>0$. $F_{n,x}$-ek teljesítik a IV. tétel feltételeit, hiszen

$$M_n(x) = x, \quad D_n^2(x) = \frac{x^2}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A szórásnégyzet egyenletesen tart 0-hoz minden $0<a\leqq x\leqq b<\infty$ intervallumban. Ha f $(0, \infty)$-ben folytonos és korlátos függvény, akkor a IV. tétel értelmében f közelíthető a

$$G_n(f; x) = \int_0^\infty f(t)dF_{n,x}(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ún. gammaoperátorok sorozatával, azaz

$$G_n(f; x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty f(t)\left(\frac{n}{x}\right)^n t^{n-1}e^{-(n/x)t}\,dt \to f(x),$$

ha $n\to\infty$, és $x>0$. A konvergencia $(0, \infty)$ minden véges részintervallumában egyenletes.

d) Ebben a pontban valószínűségszámítási eszközökkel látjuk be, hogy a $[0, \infty)$-ben folytonos és korlátos függvények közelíthetők az (1.6) *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekkel.

Először bevezetjük a „kvázibinomiális" eloszlás fogalmát. Legyen $x \geqq 0$, $a_n > 0$, $n=1, 2, \dots$. Tekintsük az (1.6)-ban definiált $R_n(f; x)$ n-edik *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvény k-adik alapfüggvényét. Az $x \geqq 0$ és $a_n > 0$ feltétel miatt

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n} \binom{n}{k} (a_n x)^k \geqq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

(2.3) szerint pedig

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+a_n x)^n} \binom{n}{k} (a_n x)^k = 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

tehát megállapítottuk, hogy rögzített n és $x \geqq 0$ esetén a

$$p_k = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \binom{n}{k} (a_n x)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

számok valószínűségeloszlást alkotnak.

A kapott valószínűségeloszlásokat származtathatjuk például a következő módon: legyen $x \geqq 0$, n természetes szám, $a_n > 0$, mindhárom mennyiség rögzített. Jelölje $\xi_i^{(n)}$, $i=1, 2, \dots n$, azon független valószínűségi változókat, amelyek $\frac{a_n x}{1+a_n x}$ valószínűséggel veszik föl az 1 értéket, és $\frac{1}{1+a_n x}$ valószínűséggel a 0-t. Annak a valószínűsége, hogy $\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_n^{(n)}$ k-val egyenlő:

$$P(\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots \xi_n^{(n)} = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+a_n x}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n} \binom{n}{k} (a_n x)^k = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

ami éppen az (1.6) n-edik *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvény k-adik alapfüggvényének az x helyen fölvett értéke.

Ezt az eloszlást nevezhetjük n-edrendű, $a_n x$ paraméterű „kvázibinomiális" eloszlásnak, hiszen a $\xi_i^{(n)} = 1$ esemény $\frac{a_n x}{1+a_n x}$ valószínűségét p-vel jelölve éppen a binomiális eloszláshoz jutunk:

$$P(\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} \dots + \xi_n^{(n)} = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^k \left(\frac{1}{1+a_n x}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

ahol $0 \leqq p < 1$.

Alkalmazzuk most a IV. tételt a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények esetére. Legyen $F_{n,x}$, $n=1, 2, \dots$ a $(\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \dots + \xi_n^{(n)}) b_n^{-1}$ eloszlása, ahol a $\xi_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \dots, n)$ a fentebb definiált, $b_n \to \infty$ és $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$, ha $n \to \infty$. Az így definiált

$F_{n,x}$, $n=1, 2, \ldots,$ eloszlások sorozata teljesíti a IV. tétel feltételeit, mert egyrészt $\xi_i^{(n)}$ várható értéke

$$M(\xi_i^{(n)}) = \frac{a_n x}{1+a_n x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

és figyelembe véve, hogy $a_n = \frac{b_n}{n}$, illetve $a_n \to 0$, ha $n \to \infty$,

$$M_n(x) = M\left(\frac{\xi_1^{(n)}+\xi_2^{(n)}+\ldots+\xi_n^{(n)}}{b_n}\right) = \frac{n}{b_n}\cdot\frac{a_n x}{1+a_n x} = \frac{x}{1+a_n x} \to x,$$

ha $n\to\infty$. Másrészt

$$D^2(\xi_i^{(n)}) = M(\xi_i^{(n)2}) - M^2(\xi_i^{(n)}) = \frac{a_n x}{1+a_n x} - \frac{a_n^2 x^2}{(1+a_n x)^2} = \frac{a_n x}{(1+a_n x)^2},$$

és ezért a szórásnégyzet

$$D_n^2(x) = D^2\left(\frac{\xi_1^{(n)}+\xi_2^{(n)}+\ldots+\xi_n^{(n)}}{b_n}\right) = \frac{n}{b_n^2}\cdot\frac{a_n x}{(1+a_n x)^2} = \frac{x}{b_n(1+a_n x)^2} \to 0,$$

ha $n\to\infty$, itt szintén az $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$ feltételt kell fölhasználni. Igaz továbbá, hogy $M_n(x)$ és $D_n^2(x)$ egyenletesen tart x-hez, illetve 0-hoz minden $0 \leqq a \leqq x \leqq b < \infty$ intervallumban. A IV. tétel értelmében tehát tetszőleges $[0, \infty)$-ben korlátos és folytonos f függvény esetén

$$(5.9)\qquad \int_0^\infty f(t)\,dF_{n,x}(t) = \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_n x)^k =$$

$$= R_n(f; x) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

$x \geqq 0$, $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$, és $b_n \to \infty$ (ha $n \to \infty$) mellett. A konvergencia $[0, \infty)$ minden véges részintervallumában egyenletes.

6. FEJEZET

Az $R_n(f; x)$-ek előállítása differenciákkal

A dolgozat 1. fejezetének B pontjában már utaltunk arra, hogy miért neveztük az $R_n(f; x)$ operátorokat *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényeknek. A $B_n(f; x)$ *Bernstein*-polinomok és az $R_n(f; x)$-ek közötti analógia világosan látható abból is, hogy az I., II. és III. tételt sikerült igazolni a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekre, hiszen ilyen tételek a Bernstein-polinomokra is igazak. Láttuk azt is, hogy az $R_n(f; x)$-eket hasonló kapcsolat fűzi a „kvázibinomiális" eloszláshoz, mint a $B_n(f; x)$-eket a binomiális eloszláshoz. Most a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényeknek még egy olyan tulajdonságával foglalkozunk, amelyhez hasonlóval a *Bernstein*-polinomok is rendelkeznek.

Ismeretes, hogy a *Bernstein*-polinomok fölírhatók véges differenciák segítségével is, és ezt az előállítást az analízisben és a valószínűségszámításban egyaránt fölhasználják. Megmutatjuk, hogy a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények is előállíthatók ilyen alakban.

Ha adott egy c_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, számsorozat, akkor a $\Delta c_n = c_{n+1} - c_n$ egyenlőséggel definiáljuk a Δ differenciaoperátort. A Δ operátort alkalmazzuk a Δc_n sorosorozatra, kapjuk a $\Delta^2 c_n$ sorozatot. Általában $\Delta^r c_n = \Delta(\Delta^{r-1} c_n)$, ahol $\Delta^0 c_n = c_n$, és $\Delta^1 c_n = \Delta c_n$. Teljes indukcióval belátható, hogy

$$\Delta^r c_n = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r+k} c_{n+k}. \tag{6.1}$$

Legyen ezek után $c_n = f(x+nh)$, ahol x és $h>0$ rögzített érték, és tekintsük most a $\underset{h}{\Delta} = h^{-1}\Delta$ differenciahányados operátort, azaz legyen

$$\underset{h}{\Delta} f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

A magasabb rendű differenciahányadosokat a következőképpen definiáljuk: $\underset{h}{\Delta}^r = \underset{h}{\Delta}\underset{h}{\Delta}^{r-1}$, ahol $\underset{h}{\Delta}^0 f(x) = f(x)$ és $\underset{h}{\Delta}^1 = \underset{h}{\Delta}$. A (6.1) formula itt a következőnek felel meg:

$$\underset{h}{\Delta}^r f(x) = h^{-r} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r+k} f(x+kh). \tag{6.2}$$

(6.2) segítségével az $f(x)$-hez tartozó n-edik *Bernstein*-polinom a következő módon írható föl (FELLER [12] 221. oldal):

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (hx)^k \underset{h}{\Delta}^k f(0), \quad \text{ahol} \quad h = \frac{1}{n}.$$

A *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények pedig a következőképpen állíthatók elő:

V. TÉTEL. *Az* (1.6) *Bernstein-típusú racionális törtfüggvény azonos a következővel:*

$$R_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^k \underset{h}{\Delta}^k f(0),$$

ahol $h = \frac{1}{b_n}$, $x \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Bizonyítás. $\frac{1}{b_n}$-t h-val és $\frac{a_n x}{1+a_n x}$-et t-vel jelölve, az (1.6)-beli $R_n(f; x)$ így írható:

$$R_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(kh) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad 0 \leqq t < 1. \tag{6.3}$$

(6.3)-at írjuk föl t polinomjaként a szokásos alakban. $(1-t)^{n-k}$-t NEWTON binomiális tétele szerint kifejtve kiszámíthatjuk t^j együtthatóját:

$$\sum_{k=0}^{j} f(kh)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}(-1)^{j-k} = \binom{n}{j}\sum_{k=0}^{j} f(kh)\binom{j}{k}(-1)^{j+k}.$$

Ez a kifejezés pedig (6.2) szerint $\binom{n}{j} h^j \underset{h}{\Delta^j} f(0)$-val egyenlő. A j helyett k indexre áttérve adódik, hogy

$$R_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ht)^k \underset{h}{\Delta^k} f(0), \quad \text{ahol} \quad t = \frac{a_n x}{1+a_n x},$$

és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

IRODALOM

[1] ARATÓ, M. és RÉNYI, A.: Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957), 91—98.

[2] BALÁZS, K.: Approximation by Bernstein type rational functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **26** (1975), 123—134.

[3] Баскаков, В. А.: Пример последоватеьности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций *Докл. Акад. Наук.* СССР **113** (1957), 249—251.

[4] Баскаков, В. А.: Об одном обощении многочленов С. Н. Бернштеина, *Изв. Высш. Учебн. Завед. Мат. №. 13.*, **16** (1960). 48—53.

[5] Баскаков, В. А.: О некоторых условиях сходимости линейных положительных операторов, *Успехи Мат. Наук.* **16**/1. (1961), 131—134.

[6] BERNSTEIN, S. N.: Démonstration du theorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, **13** Харьков, *Сообщ. Матем. Об.* (2) **13** (1912), 1—2. (1912), 1—2.

[7] BUTZER, P. L.: Linear combinations of Bernstein polynomials, *Canad. J. Math.* **5** (1953), 559—567.

[8] BUTZER, P. L.: On the extension of Bernstein polynomials to the infinite interval, *Proc. Am. Math. Soc.* **5** (1954), 547—553.

[9] CHENEY, E. W. és SHARMA, A.: Bernstein power series, *Canad. J. Math.* **16** (1964), 241—252.

[10] CHLODOVSKY, I.: Sur le développement des fonctions dans un intervalle infini en séries de polynômes de M. S. Bernstein, *Compositio Math.*, **4** (1937), 380—393.

[11] EISENBERG, S. és WOOD, B.: Approximating unbounded functions with linear operators generated by moment sequences, *Studia Math.* **35** (1970), 299—304.

[12] FELLER, W.: *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. II., New York, 1966.

[13] Гельфонд, А. О.: Об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна, *Изв. Акад. Наук. СССР.* **14** (1950), 413—420.

[14] GRÓF JÓZSEF: A Szász O.-féle operátor approximációs tulajdonságairól, *MTA III. Oszt. Közl.* **20** (1971), 35—44.

[15] GRÓF, J.: Über Approximation durch Polynome mit Belegunsfunktion, *Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Math.* 1974.

[16] HIRSCHMAN, I. J. és WIDDER, D. V.: *The convolution transform*, Princeton, 1955, 240—246.

[17] HIRSCHMAN, I. J. és WIDDER, D. V.: Generalized Bernstein polynomials, *Duke Math. Journal*, **16** (1949), 433—438.

[18] JAKIMOVSKI, A. és LEVIATAN, D.: Generalized Bernstein polynomials, *Math. Z.*, **93** (1966), 416—426.

[19] JAKIMOVSKI, A. és LEVIATAN, D.: Generalized Bernstein power series, *Math. Z.* **96** (1967), 333—342.

[20] Канторович, Л. В.: О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бериштейна запределами основого интервала, *Изв. Акад. Наук СССР*, сер. физ.-матем., (1931), 1103—1115.

[21] Коровкин, П. П.: *Линейные операторы и теория приближений*, Москва, 1957.
[22] Lorentz, G. G.: *Bernstein polynomials*, Toronto, 1953.
[23] Łuszczki, Z.—Mikusiński, I.—Urbanik, K.—Wloka, I.—Zieleźny, Z.: Einige Bemerkungen über die Hirschman—Widdersche Funktionen, *Colloquium Mathematicum*, **4** (1956), 30—32.
[24] Мамедов, Р. Г.: Асимптотическое значение дифференцируемых функций линейными положительными операторами, *Докл. Акад. Наук. СССР*, **128** (1959), 471—474.
[25] Мамедов, Р. Г.: Об асимптотическом значении приближения многократно дифференцируемых функций линейными положительными операторами, *Докл. Акад. Наук. СССР*, **146** (1962), 1013—1016.
[26] Meyer—König, W. és Zeller, K.: Bernsteinsche Potenzreihen, *Studia Math.* **19** (1960), 89—94.
[27] Müller, M. W.: *Die Folge der Gammaoperatoren*, Doktori értekezés, Stuttgart, 1967.
[28] Müller, M. W.: On asymptotic approximation theorems for sequences of linear positive operators, *Proceedings of a Symposium held at Lancaster*, July 1969, *Approximation Theory*, London, 1970.
[29] Natanszon, I. P.: Konstruktív függvénytan, Budapest, 1952.
[30] Schurer, F.: *On linear positive operators in approximation theory*. Doktori értekezés, Delft, 1965.
[31] Stancu, D. D.: Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, *Revue Roumaine de Math. Pures et Appl.* **13** (1968), 1173—1194.
[32] Szász, O.: Generalizations of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval, *J. Research Nat. Bur. Standards*, **45** (1950), 239—245.
[33] Вороновская, Е. В.: Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна, *Докл. Акад. Наук (А)* (1932), 79—85.

(Beérkezett: 1973. XI. 21.)

APPROXIMATION BY BERNSTEIN TYPE RATIONAL FUNCTIONS AND ITS RELATION TO PROBABILITY THEORY

By

K. Balázs

Summary

Unbounded functions can be approximated on an infinite interval by means of *Bernstein*-type rational functions introduced in this paper. For a function $f(x)$, $0 \leq x < \infty$, we define the n-th *Bernstein*-type rational function by

$$R_n(f;x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_n x)^k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

where a_n and b_n are constants depending only on n. $R_n(f;x)$ may be called a *Bernstein*-type one, for substituting $\frac{a_n x}{1+a_n x}$ by t in $R(f;x)$ we get a polynomial similar to *Bernstein* polynomial of degree n. The following theorems are proved:

Theorem I. *Let $f(x)$ be a continuous function defined in $[0, \infty)$ such that $f(x)=O(e^{\alpha x})$, ($x \geq 0$, $\alpha \geq 0$* fixed). *If $a_n = \frac{b_n}{n}$, $b_n = n^{2/3}$, then in any interval $0 \leq x \leq \omega$ $(\omega > 0)$ the inequality*

$$|f(x) - R_n(f;x)| \leq c_0 \left\{ k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) + \frac{1}{n^{2/3}} \right\}$$

holds for n sufficiently large, where c_0 is a constant depending on ω and α only, and $k_{2\omega}(\delta)$ denotes the modulus of continuity of $f(x)$ in $[0, 2\omega]$.

This inequality shows that $R_n(f;x) \to f(x)$ if $n \to \infty$ and $0 \leq x < \infty$. This convergence is unifom in every finite interval $0 \leq x \leq \omega$.

THEOREM II. *Let $f(t)$ be a function defined in* $[0, \infty)$ *for which* $f(t)=O(e^{\alpha t})$ $(t\to\infty, \alpha\geqq 0)$. *If* $f''(t)$ *exists and is finite at the point* $t=x$, *then*

$$R_n(f; x) = f(x)+a_n f'(x) g_1(x)+a_n f''(x) g_2(x)+a_n \varrho_n,$$

where $\varrho_n\to 0$, $a_n=\dfrac{b_n}{n}\to 0$ *and* $\dfrac{n^{1/2}}{b_n}\to 0$, *if* $n\to\infty$, *moreover*

$$g_1(x) = \frac{-x^2}{1+a_n x}, \qquad g_2(x) = \frac{a_n b_n x^4+(x/a_n)}{2b_n(1+a_n x)^2}$$

$g_1(x)$ and $g_2(x)$ remain under a limit depending only on x, so Theorem II. is a *Voronovskaya*-type asymptotic approximation theorem.

THEOREM III. *Let $f(t)$ be a function defined in* $[0, \infty)$, *for which* $f(t)=O(e^{\alpha t})$ $(t\to, \alpha\geqq 0$ fixed). *If $f'(t)$ exists at the point $t=x$, then*

$$R_n'(f; x) \to f'(x), \quad \text{if} \quad n\to\infty,$$

where $a_n=\dfrac{b_n}{n}\to 0$, *and* $b_n=n^{2/3}$.

The convergence theorem (Theorem I.) for bounded functions is proved by probabilistic tools, too, using the following general theorem: let x be a parameter varying in a finite or infinite interval, $F_{n,x}$ $(n=1, 2, \ldots)$ be as equence of probability distributions with expectation $M_n(x)$ and variance $D_n^2(x)$. If $\lim\limits_{n\to\infty} M_n(x)=x$ and $\lim\limits_{n\to\infty} D_n^2(x)=0$, then $\lim \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_{n,x}(t)\to f(x)$ for every bounded continuous function f. The convergence is uniform in every interval, wherre $M_n(x)\to x$ and $D_n^2(x)\to 0$ uniformly. We can apply the theorem if we introduce a „quasi binomial" distribution. Let $\xi_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ be independent random variables assuming the values 1 and 0 with probability $\dfrac{a_n x}{1+a_n x}$ and $\dfrac{1}{1+a_n x}$ respectively $(x\geqq 0$ fixed), and let $F_{n,x}$ be the distribution of $\dfrac{1}{b_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^{(n)}$. If $a_n=\dfrac{b_n}{n}\to 0$ and $b_n\to\infty$ $(n\to\infty)$, then $M_n(x)\to x$ and $D_n^2(x)\to 0$. So we have

$$\int_0^\infty f(t)\, dF_{n,x}(t) = \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_n x)^k = R_n(f; x)\to f(x), \quad \text{if} \quad n\to\infty,$$

for a continuous and bounded function $f(x)$, $x\geqq 0$. The convergence is uniform in every finite subinterval of $[0, \infty)$.

THEOREM V. *Bernstein type rational functions can be rewritten by finite differences:*

$$R_n(f: x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} h^k \left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^k \Delta_h^k f(0), \quad \textit{where} \quad h=\frac{1}{b_n},\ x\geqq 0.$$

A LOKÁLIS GYŰRŰK ELMÉLETÉHEZ, II.

D. A. Buchsbaum egy problémájáról

Írta: WOLFGANG VOGEL és MÁRKI LÁSZLÓ

I. FEJEZET

D. A. BUCHSBAUM EGY PROBLÉMÁJÁRÓL

1. §. Első ellenpélda a Buchsbaum-problémára

D. A. BUCHSBAUM 1965-ben a varennai nyári iskolán az alábbi problémát vetette fel (l. [2]):

Legyen A lokális gyűrű (azaz: kommutatív, egységelemes *Noether*-gyűrű egyetlen M maximális ideállal). Legyen $Q \lhd A$ paraméterideál (azaz: dim A számú elemmel generálható M-primér ideál). Elég nagy n-ekre tekintsük a *Hilbert—Samuel*-polinomot:

$$l_A(A/Q^{n+1}) = e_0(Q, A)\binom{n+d}{d} - e_1(Q, A)\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^d e_d(Q, A),$$

ahol $d = \dim A$, és az $e_i(Q, A)$ együtthatók egész számok.

BUCHSBAUM kérdése a következő: Invariánsa-e az $l_A(A/Q) - e_0(Q, A)$ különbség A-nak, azaz van-e olyan, Q-tól független $I(A)$ szám, melyre

$$l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = I(A)?$$

BUCHSBAUM azt sejtette, hogy igen, mégpedig $I(A) = \dim A - \operatorname{codh} A$, ahol codh A az A homologikus kodimenziója (l. 0. fejezet, 3.13. definíció előtti megjegyzést).

A 0.3.14. tétel szerint $l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = 0$ akkor és csak akkor, ha A *Cohen—Macaulay*-gyűrű, azaz ha $\dim A - \operatorname{codh} A = 0$. *Cohen—Macaulay*-gyűrűkben tehát a *Buchsbaum*-sejtés triviálisan teljesül.

Az alábbi tétel viszont azt mutatja, hogy nemcsak a *Buchsbaum*-sejtésre, de a problémára is tagadó a válasz.

1.1. TÉTEL. *$l_A(A/Q) - e_0(Q, A)$ nem föltétlenül invariánsa A-nak.*

Bizonyítás. Megadunk egy alkalmas (A, M) lokális gyűrűt és abban $Q(n)$ paraméterideálokat úgy, hogy a fenti különbség függjön attól, hogy melyik $Q(n)$-t választottuk.

Tekintsük az $R =: K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ polinomgyűrűben a következő ideált:

$$B =: (x_1^2, x_1x_2) = (x_1) \cap (x_1^2, x_2).$$

Ezzel megkonstruáljuk az alábbi lokális gyűrűt:

$$A =: (R_x/B)_{(1, x_2, x_3)\cdot(R/B)} \cong R_{(x_1, x_2, x_3)}/B \cdot R_{(x_1, x_2, x_3)}.$$

R-ben a $B \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset (x_1, x_2, x_3)$ lánc B és (x_1, x_2, x_3) között prímideálokkal tovább már nem finomítható, sőt, már B sem prímideál. Egészítsük most ki ezt a láncot R egy maximális prímideálláncává. Ha itt B-vel faktorizálunk, majd (x_1, x_2, x_3) szerint lokalizálunk, akkor A egy maximális prímideálláncát kapjuk — eközben viszont a láncban a B alatt szereplő ideálok mind a (0)-ba (ami nem prímideál A-ban), az (x_1, x_2, x_3) fölötti ideálok pedig az (1)-be mennek át. Eszerint $\dim A = 2$.

x_3 nem nullosztó A-ban, és $(B, x_3) = (x_1, x_3) \cap (x_1^2, x_2, x_3)$ miatt az x_3 prímsorozatot nem lehet „meghosszabbítani" (x_0 már egység A-ban), így $\operatorname{codh} A = 1$. A tehát nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű.

Tekintsük A-ban a

$$Q = Q(n) =: (x_2, x_3^n) \cdot A \quad (n \geqq 1)$$

ideált. Q-nak az R-ben $(B, Q) = (x_1^2, x_2, x_3^n)$ felel meg, és ez (x_1, x_2, x_3)-primér ideál, így Q $(x_1, x_2, x_3) \cdot A$-primér ideál A-ban, továbbá Q-t $2 = \dim A$ elem generálja; Q tehát paraméterideál.

Most kiszámítjuk $l_A(A/Q)$ és $e_0(Q, A)$ értékét. Definíció szerint $l_A(A/Q)$ egy tovább már nem finomítható $A/Q \supset \ldots \supset (0)$ lánc A/Q-tól különböző elemeinek a számát jelenti, ahol a lánc elemei A/Q rész-A-modulusai. Egy ilyen láncnak A-ban ideálok egy Q fölött tovább már nem finomítható lánca felel meg:

$$A \supset M \supset \ldots \supset Q.$$

(Közvetlenül A alatt természetesen az A lokális gyűrű maximális ideálja áll.) Ebben a láncban minden ideál M-primér a következő, könnyen igazolható tétel szerint: Legyen S *Noether*-gyűrű, $M \lhd S$ maximális ideál; egy $N \neq S$ ideál akkor és csak akkor M-primér, ha tartalmazza M valamely hatványát.

A konstrukciója szerint a fenti, M és Q közötti primér ideál-láncnak R-ben primér ideálok egy (x_1, x_2, x_3) és $(B, Q) = (x_1^2, x_2, x_3^n)$ közti lánca felel meg, és ez az utóbbi lánc sem finomítható tovább. Ezzel azt kaptuk, hogy $l_A(A/Q)$ a $(B, Q) \lhd R$ ideálelméleti multiplicitásával egyenlő. Minthogy (x_1^2, x_2, x_3^n) és (x_1, x_2, x_3) között az

$$(x_1^2, x_2, x_3^n) \subset (x_1^2, x_2, x_1 x_3^{n-1}, x_3^n) \subset \ldots \subset (x_1^2, x_2, x_1 x_3, x_3^n) \subset (x_1, x_2, x_3^n) \subset$$

$$\subset (x_1, x_2, x_3^{n-1}) \subset \ldots \subset (x_1, x_2, x_3)$$

primér lánc tovább már nem finomítható, azért tehát $l_A(A/Q) = 2n$.

Könnyen igazolható, hogy B és Q lokálisan nem elfajulóan metszi egymást, így $e_0(Q, A)$ kiszámítására felhasználhatjuk a 0. fejezet 3.10. tételét (minthogy (B, Q) primér ideál, azért most $t = 1$):

$$h_0(B) \cdot h_0\big((x_2, x_3^n)\big) = e_0(Q, A) \cdot h_0\big((x_1, x_2, x_3)\big).$$

Itt (x_2, x_3^n) és (x_1, x_2, x_3) főosztályhoz tartozó ideál, így a 0.2.10. gyakorlat 1. állítása szerint $h_0((x_2, x_3^n)) = n$ és $h_0((x_1, x_2, x_3)) = 1$; $B = (x_1) \cap (x_1^2, x_2)$-re viszont ugyanezen gyakorlat 2. állítása értelmében $h_0(B) = h_0(x_1) = 1$. Az így nyert értékeket a fenti egyenlőségbe behelyettesítve $e_0(Q, A) = n$ adódik.

Példánkban tehát $l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = n$, ami függ n-től, vagyis a Q megválasztásától, q.e.d.

Ezek után természetesen vetődik fel a kérdés: milyen gyűrűkben létezik ilyen $I(A)$ invariáns? Erre majd a II. fejezetben adunk választ.

2. §. A Buchsbaum-probléma egy geometriai interpretációja. Példák.

A következőkben eddigi fogalmaink, eredményeink geometriai jelentését vizsgáljuk. Ezzel kapcsolatban hadd idézzük W. GRÖBNERt [10]: „A polinomgyűrűk absztrakt elmélete önmagában zárt, nem igényel geometriai megfontolásokat vagy bizonyításokat. Az elmélet geometriai oldalát interpretáció útján nyerjük, ideálelméleti fogalmaknak és műveleteknek geometriai fogalmakat és műveleteket feleltetünk meg. Emellett megmarad annak a lehetősége, hogy bizonyos interpretációkat megváltoztassunk, és így újabb, különböző geometriákhoz jussunk."

Most pedig először is bevezetjük az algebrai sokaság fogalmát.

Legyen adott egy k kommutatív test, és legyen K a k algebrai lezártja. A K fölötti n-dimenziós P_n^K projektív tér pontjait $(y_0, \ldots, y_n)$ $n+1$-esekkel reprezentáljuk, ahol $y_i \in K$, a $(0, \ldots, 0)$ $n+1$-es egyetlen pontnak sem felel meg, továbbá az $(y_0, \ldots, y_n)$ és az $(y_0', \ldots, y_n')$ $n+1$-es ugyanazt a pontot reprezentálja, ha létezik olyan $t \in K$, hogy $y_i' = ty_i$, $i=0, \ldots, n$. Az $(y_0, \ldots, y_n)$ $n+1$-est nevezzük a megfelelő pont homogén koordinátáinak is: ezt a pontot gyakran csak így jelöljük: (y).

Legyen $F(Y_0, \ldots, Y_n) \in k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén polinom és $P \in P_n^K$. Ha P valamely $(y_0, \ldots, y_n)$ homogén koordinátáira $F(y_0, \ldots, y_n)=0$, akkor ez P bármely homogén koordinátáira is teljesül; ilyenkor azt mondjuk, hogy P nullahelye F-nek, vagy hogy F eltűnik P-ben. Ha $A \lhd k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén ideál, akkor az A-beli polinomok közös nullahelyeit az A ideál nullahelyeinek nevezzük, A összes nullahelyének a halmazát pedig A sokaságának. Ez utóbbit $V(A)$-val jelöljük.

2.1. DEFINÍCIÓ. Az $E \subset P_n^K$ halmaz *algebrai projektív sokaság k* fölött, ha létezik olyan $A \lhd k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén ideál, melyre $V(A)=E$.

Minthogy egy előre rögzített k alaptesttel dolgozunk, azért a következőkben nem fogjuk explicite feltüntetni, hogy a szóban forgó algebrai projektív sokaságot k fölött tekintjük. Sőt, algebrai projektív sokaság helyett is általában csak sokaságot fogunk mondani.

Legyen $E \subset P_n^K$ tetszőleges. E-hez hozzárendeljük azt a $\mathscr{P}(E)$-vel jelölt, $k[Y_0, \ldots, Y_n]$-beli ideált, amelyet az E valamennyi pontjában eltűnő homogén polinomok generálnak. A $k[Y_0, \ldots, Y_n]$ polinomgyűrű $\mathscr{P}(E)$ alakban $(E \subset P_n^K)$ előállítható homogén ideáljainak a halmazát I-vel jelöljük.

2.2. *Gyakorlat.* Igazoljuk az alábbi összefüggéseket (A, B, $A_i \lhd k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén; E, F, $E_i \subset P_n^K$):

(1) $A \subset B \Rightarrow V(A) \supseteq V(B)$

(1') $E \subset F \Rightarrow \mathscr{P}(E) \supseteq \mathscr{P}(F)$

(2) $V\left(\sum_i A_i\right) = \bigcap_i V(A_i)$

(2') $\mathscr{P}\left(\bigcup_i E_i\right) = \bigcap_i \mathscr{P}(E_i)$

(3) $V(A \cap B) = V(A \cdot B) = V(A) \cup V(B)$

(4) $V(\mathscr{P}(E)) \supseteq E$

(4') $\mathscr{P}(V(A)) \supseteq A$

(5) $V(\mathscr{P}(E)) = E \Leftrightarrow E$ sokaság

(5′) $\mathscr{P}(V(A)) = A \Leftrightarrow A \in I$

(6) $A \in I \Rightarrow \sqrt{A} = A$,

ahol a $\sqrt{A}$ ideál (az A *radikálja*) pontosan azokból a (homogén) polinomokból áll, amelyeknek valamilyen hatványa A-ba esik,

(7) ha A B-primér ideál, akkor $V(A)=V(B)$.

2.3. Definíció. A V algebrai projektív sokaság *reducibilis*, ha előállítható két olyan sokaság egyesítéseként, amelyek V-nek valódi részhalmazai. Ellenkező esetben V-t *irreducibilisnek* nevezzük.

2.4. *Gyakorlat.* (1) A V sokaság akkor és csak akkor irreducibilis, ha $\mathscr{P}(V)$ prímideál.

(2) Tegyük fel, hogy az $A \lhd k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén ideál nem lényegtelen, azaz A nem $(Y_0, \ldots, Y_n)$-primér ideál. Akkor $V(A) \neq \emptyset$, és $\mathscr{P}(V(A)) = \sqrt{A}$. (Ez az ún. projektív nullahely-tétel.) (L. [33] § 121, vagy [35] 171. o.)

(3) Minden V sokaság előállítható véges sok irreducibilis sokaság egyesítéseként:

$$V = \bigcup_{i=1}^{h} V_i.$$

Ha itt a V_i-k egyikét sem hagyhatjuk el, akkor ez az előállítás egyértelmű; a benne szereplő sokaságokat a V irreducibilis komponenseinek nevezzük.

(4) Konkrétan, V egyértelmű irreducibilis felbontása

$$V = \bigcup_{i=1}^{h} V(P_i),$$

ahol $P_1, \ldots, P_h$ a $\mathscr{P}(V)$ ideálhoz tartozó izolált prímideálok.

Legyen V algebrai projektív sokaság, $A = \mathscr{P}(V)$ a hozzá tartozó homogén ideál. A (homogén) dimenzióját a V (projektív) dimenziójának is nevezzük — ez megegyezik a dimenzióról alkotott szokásos geometriai elképzeléssel. Legyen most V és W két tetszőleges sokaság P_n^K-ben, akkor a 0.2.4. tétel következménye szerint

$$\dim V \cap W \geqq \dim V + \dim W - n.$$

Azt mondjuk, hogy V és W (globálisan) nem elfajulóan metszi egymást, ha

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \mathrm{n},$$

és ez pontosan ugyanazt jelenti, mint hogy A és B metszete (globálisan) nem elfajuló (l. 0.2.5. definíció), ahol A és B a V-nek, ill. W-nek megfelelő ideál. Az elfajuló metszet extrém példája az, amikor az egyik sokaság tartalmazza a másikat. Nem triviálisan elfajuló a metszet például akkor, ha W hiperfelület (azaz valamilyen F alakra az $F=0$ egyenletnek eleget tevő pontok összessége; más szóval $B=(F)$ főideál), és W tartalmazza V egy maximális dimenziójú komponensét. Például:

P_3^K-ban legyen V az $x_0=x_1=0$ és az $x_2=x_3=0$ kitérő egyenesek egyesítése, W az $x_3=0$ sík. Ez a sík tartalmazza az $x_2=x_3=0$ egyenest, az $x_0=x_1=0$ egyenest pedig az $x_0=x_1=x_3=0$ pontban metszi. A dimenziók összehasonlításával azonnal látszik, hogy V és W metszete elfajuló. Más, nem triviális példa: $n \geqq 4$ esetén a P_n^K térben bármely két térgörbe (azaz: 1-dimenziós sokaság) metszete elfajuló; P_3^K-ban két térgörbe metszete akkor és csak akkor nem elfajuló, ha a metszet üres. — A dimenziócsökkentés tétele (0.2.3. tétel) lényeges segítséget nyújt annak a megállapítására, hogy mikor nem elfajuló két sokaság metszete.

Most pedig multiplicitáselméleti kérdésekre térünk rá. Ehhez előrebocsátunk néhány általános megjegyzést.

BEZOUT klasszikus tétele azt mondja ki, hogy ha a síkban egy m-edrendű és egy q-adrendű görbének csak véges sok közös pontja van, akkor ezek száma legföljebb $m \cdot q$. A tétel ilyen formában már MACLAURIN 1720-ban megjelent, „*Geometrica organica*" c. könyvében is szerepel, de első teljes bizonyítása BEZOUT-tól származik. Az erre vonatkozó irodalom általában nem említi, hogy BEZOUT 1764-ben nemcsak a fenti tételt, hanem annak n-dimenziós megfelelőjét (ez a 0.2.10. gyakorlatunk első pontja a $\varrho=n$ esetben) is bebizonyította.

A multiplicitáselmélet fő problémáját a fenti példában így fogalmazhatjuk meg: a közös pontokhoz egy *multiplicitás*nak nevezett (pozitív) egész számot akarunk hozzárendelni úgy, hogy egy m-edrendű és egy q-adrendű görbe pontosan $m \cdot q$ pontban messe egymást, ha a metszéspontokat a megfelelő multiplicitással számoljuk. Általában, legyen a P_n^K térben a V és a W sokaság metszete (globálisan) nem elfajuló. Problémánk most a következő: a $V \cap W$ metszet maximális dimenziójú C komponenseihez egy-egy χ_C multiplicitást akarunk hozzárendelni úgy, hogy érvényben maradjon a 0.2.13. tétel utáni megjegyzések értelmében vett *Bezout*-tétel:

$$h_0(A) \cdot h_0(B) = \sum_C \chi_C \cdot h_0(P_C),$$

ahol A és B a V-hez, ill. W-hez tartozó ideál, P_C pedig a C-hez tartozó prímideál.

0. fejezetünk 2. paragrafusának a végén már találkoztunk egy ilyen multiplicitásfogalommal: eszerint χ_C-nek a Q_C ideálelméleti multiplicitását választjuk, ahol Q_C az (A, B) P_C-primér komponense (ez egyértelmű, mert C maximális dimenziójú komponens). Ez a multiplicitás — amely különben W. GRÖBNERtől származik — az algebra alaptételében fellépő multiplicitásnak az általánosítása. A 0.2.14. példánk azonban azt mutatja, hogy χ_C ilyen megválasztásával a *Bezout*-tétel nem lesz mindig igaz.

Másrészről a XIX. században az ún. olasz iskola olyan módszereket fejlesztett ki, amelyek a leszámláló geometria (abzählende Geometrie) elméletéhez vezettek. E módszerekkel sikerült bizonyos speciális metszetproblémákban multiplicitást megadniok. A leszámláló geometria elméletének alapjai azonban, sajnos, nem voltak egzaktak. HILBERT 15. problémája éppen e módszerek egzakt megalapozását kívánta. Ezt azután lényegében B. L. VAN DER WAERDEN végezte el (l. [32]), de az ő felépítése is megköveteli bizonyos feltételek teljesülését. Csak A. WEILnek sikerült 1946-ban megjelent könyvében [34] olyan általános multiplicitáselméletet megadnia, amely minden metszetproblémára alkalmazható. A V és a W sokaság egy maximális dimenziójú C komponensének a multiplicitását A. WEIL $i(V \cdot W, C)$-vel jelöli. Minthogy azonban az $i(V \cdot W, C)$ szám konkrét megadása gyakran igen bonyolult, azért továbbra is indokolt W. GRÖBNER [7]-ben kitűzött programja: 1) lehetőleg az egyszerű ideálelméleti multiplicitással dolgozzunk, 2) találjuk meg, mi az oka annak, hogy az ideálelméleti multiplicitás alkalmazásakor a *Bezout*-tétel bizonyos esetekben nem teljesül. Ez utóbbi kérdés a multiplicitáselméletben J.-P. SERRE [23] által bevezetett homologikus algebrai számításmód segítségével a [3] és a [12] dolgozatban nyert választ.

Később P. SAMUEL megmutatta (l. [21]), hogy a *Weil*-féle $i(V\cdot W, C)$ multiplicitások alkalmas lokális gyűrűk segítségével is megadhatók; konstrukcióját a következőkben majd részletesen is leírjuk. WEIL [34] és SAMUEL [21] eredményei szerint ha $V=\bigcup_j V_j$ és $W=\bigcup_k W_k$ nem elfajulóan metszi egymást C-ben, akkor

$$i(V\cdot W, C) = \sum i(V_j\cdot W_k, C),$$

ahol a szummázás mindazokra a (j, k) párokra történik, amelyekre V_j és W_k nem elfajulóan metszi egymást C-ben. Ezért a multiplicitási problémában az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy mindkét sokaság irreducibilis, A. WEIL [34] egy eredménye szerint pedig még azt is föltehetjük, hogy a két sokaság egyikét főosztályhoz tartozó (prím)ideál definiálja.

Fő témánkra való tekintettel megemlítjük még, hogy D. A. BUCHSBAUM problémája algebrai geometriai megfelelőjének pozitív megválaszolása azt jelentené, hogy a *Gröbner*- és a *Weil*-féle multiplicitás csak egy additív invariánsban különbözik egymástól.

Végül pedig a rend fogalmának geometriai jelentéséről ejtünk néhány szót.

Legyen először is $A\lhd k[x_0, \dots, x_n]$ 0-dimenziós ideál, A 0-dimenziós primér komponensei $Q_1, \dots, Q_s$ (A-nak lehet 1-dimenziós komponense is). Akkor a 0.2.8. gyakorlat 2) állítása értelmében

$$h_0(A) = h_0(Q_1)+\dots+h_0(Q_s),$$

így a 0.2.13. tétel szerint

$$h_0(A) = \mu_1\cdot h_0(P_1)+\dots+\mu_s h_0(P_s),$$

ahol P_i a Q_i-hez tartozó prímideál, μ_i pedig a Q_i multiplicitása. Itt mindegy, hogy *Gröbner*- vagy *Weil*-féle multiplicitást veszünk, hiszen $R=:(k[x_0,\dots,x_n]/A)_{P_i\cdot(k[x_0,\dots,x_n]/A)}$ 0-dimenziós, tehát *Cohen—Macaulay*-gyűrű, akkor pedig

$$\mu(Q_i) = l_R(R/Q_i) = e_0(Q_i, R) = i\big(V(A)\cdot V(P_i), V(P_i)\big).$$

Igazolható, hogy ha P_i 0-dimenziós prímideál, akkor egyrészt $V(P_i)$ egyetlen pontból áll (és így $V(Q_i)$ is), másrészt pedig $h_0(P_i)=1$. Eszerint

$$h_0(A) = \mu_1+\dots+\mu_s,$$

azaz A rendje éppen az A sokaságához tartozó pontok száma, mindegyiket a megfelelő multiplicitással véve.

Legyen most A tetszőleges d-dimenziós ideál. Keressünk először d olyan hipersíkot: $H_1, \dots, H_d$ (az őket definiáló lineáris egyenletek: $l_1=0, \dots, l_d=0$), melyekre $h_0(A, l_1, \dots, l_d)=h_0(A)$ és $\dim(A, l_1, \dots, l_d)=0$. A 0.2.11. tétel értelmében ilyenek mindig találhatók. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $V(A)$ sokaságot addig metsszük egy-egy H_i hipersíkkal, amíg végül 0-dimenziós $V(A)\cap H_1\cap\dots\cap H_d$ sokasághoz nem jutunk. A H_i-k kiválasztására vonatkozó feltétel azt fejezi ki, hogy a H_i hipersíkok $V(A)$-hoz viszonyítva „általános helyzetűek": H_i nem tartalmaza $V(A) \cap H_1 \cap \cap \ldots \cap H_{i-1}$ egyetlen legmagasabb vagy második legmagasabb dimenziójú komponensét sem. — Ezzel a kérdést visszavezettük a 0-dimenziós esetre: dim $A=d$ esetén $V(A)$-t elmetsszük egy általános helyzetű $H_1 \cap \ldots \cap H_d$ $(n-d)$-dimenziós lineáris altérrel, és most $h_0(A)$ éppen az így kapott metszéspontok száma, mindegyiket a megfelelő multiplicitással számolva.

A szükséges fogalmak ismeretében most már rátérhetünk Buchsbaum problémájának geometriai megfelelőjére:

Legyen V és W két irreducibilis algebrai sokaság a P_n^K projektív térben, $k[x_0, \ldots, x_n]$-ben a megfelelő prímideálok P_V és P_W, és tegyük fel, hogy V és W (globálisan) nem elfajulóan metszi egymást. Legyen C a $V \cap W$ egy maximális dimenziójú irreducibilis komponense, P_C a megfelelő prímideál; más szóval, P_C egy, a (P_V, P_W)-hez tartozó maximális dimenziójú (tehát izolált) prímideál. Jelölje A a V lokális gyűrűjét C-ben:

$$A =: k[x_0, \ldots, x_n]_{P_C}/P_V \cdot k[x_0, \ldots, x_n]_{P_C} \cong (k[x_0, \ldots, x_n]/P_V)_{P_C \cdot (k[x_0, \ldots, x_n]/P_V)}.$$

A vizsgálatával arról nyerhetünk információt, hogyan viselkedik V a C egy környezetében (innen ered az A elnevezése).

Tegyük még fel, hogy P_W főosztályhoz tartozó ideál, vagyis $P_W=(F_1, \ldots, F_\varrho)$, dim $P_W=n-\varrho$. Jelölje $f_1, \ldots, f_\varrho$ az $F_1, \ldots, F_\varrho$-nak megfelelő, P_V szerinti mellékosztályokat. Minthogy P_V és P_W prímideál, tehát egynemű, azért a 0.3.9. definíció utáni 3) gyakorlat szerint P_V és P_W metszete lokálisan sem elfajuló (más szóval: V és W lokálisan nem elfajulóan metszi egymást), így e gyakorlatunk utáni megállapításunk értelmében $Q=: (f_1, \ldots, f_\varrho) \cdot A$ paraméterideál. Ekkor jól definiált a Q multiplicitása: $e_0(Q, A)$. P. SAMUEL redukciótétele ([21] II. fejezet, §7, b; 83. o.) szerint $e_0(Q, A)$ éppen az A. *Weil*-féle $i(V \cdot W, C)$ multiplicitás.

Tekintsük (P_V, P_W) egy primér felbontását; ebben szerepel egy, a P_C prímideálhoz tartozó Q_C izolált primér komponens. Jelölje $\mu(C)$ a Q_C ideálelméleti multiplicitását (l. 0. fejezet, 2.12. definíció). Megmutatjuk, hogy

$$\mu(C) = l_A(A/(f_1, \ldots, f_\varrho) \cdot A).$$

Tekintsük a $(P_V, P_W) \subseteqq Q_C \subset \ldots \subset P_C$ láncot, ahol Q_C és P_C között tovább már nem finomítható primér lánc áll. Ha most P_V-vel faktorizálunk és P_C szerint lokalizálunk, akkor, A-t is hozzáírva, egy $Q \subseteqq Q'_C \subset \ldots \subset M \subset A$ láncot kapunk, ahol Q'_C a Q_C-nek megfelelő M-primér ideál, és ez a lánc Q'_C és A között nem finomítható. Minthogy P_C a (P_V, P_W)-hez tartozó izolált prímideál, azért (P_V, P_W)-nek csak egyetlen primér komponense eshet teljesen P_C-be, Q_C; így $(P_V, P_W) \cdot k[x_0, \ldots, x_n]_{P_C} = Q_C \cdot k[x_0, \ldots, x_n]_{P_C}$, és persze még inkább $Q=Q'_C$. A fenti $Q \subset \ldots \subset M \subset A$ lánc tehát nem finomítható, ami Q-val faktorizálva éppen azt adja, hogy $\mu(C)=l_A(A/Q)$. (Eközben persze hallgatólagosan felhasználtuk, hogy A/Q részmodulusainak A-ban primér ideálok felelnek meg, de ezt már tudjuk az 1.1. tétel bizonyításából.)

Ebben a geometriai helyzetben tehát BUCHSBAUM sejtése, ill. problémája így fogalmazható meg:

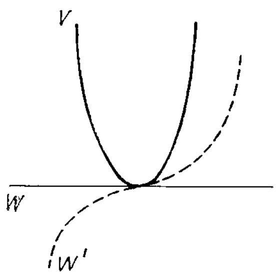
(P_1) $\mu(C)-i(V \cdot W, C)=\dim A - \operatorname{codh} A$.

(P_2) Létezik-e olyan $N(V, C)$ (tehát W-től független) egész szám, amelyre

$$\mu(C)-i(V \cdot W, C) = N(V, C)?$$

Az 1. §-ban tárgyalt általános esettel szemben tehát most csak olyan A lokális gyűrűkkel és $Q \lhd A$ paraméterideálokkal foglalkozunk, melyekre az $e_0(Q, A)$ *Samuel*-féle multiplicitás egy alkalmas $i(V \cdot W, C)$ *Weil*-féle multiplicitás, és itt a fenti konstrukció V, W és C-ből éppen A-t és Q-t szolgáltatja. Az 1.1. tételben szereplő példa nem ilyen, és ez indokolja további vizsgálatainkat.

Megjegyzések. 1. Tegyük fel, hogy a W sokaságot úgy deformáljuk, hogy az így kapott W' sokaság továbbra is irreducibilis, egy ugyanahhoz a főosztályhoz tartozó ideálnak felel meg és V-t nem elfajulóan metszi. Tegyük még fel, hogy a $V \cap W$ egy maximális dimenziójú C irreducibilis komponense irreducibilis komponense $V \cap W'$-nek is. (Feltételeinkből következik, hogy C $V \cap W'$-nek is maximális dimenziójú komponense.) A deformáció következtében a (P_V, P_W) ideál Q_C primér komponense persze általában erősen megváltozik; az új, a $(P_V, P_{W'})$-nek megfelelő primér komponens legyen Q'_C. Ekkor általában megváltozik a Q_C ideálelméleti multiplicitása is: $\mu(Q_C) = \mu(C) \neq \mu(C') = \mu(Q'_C)$. Ha Buchsbaum (P_2) problémájára a válasz pozitív, ez azt jelenti, hogy a két multiplicitás, $\mu(C)$ és $i(V \cdot W, C)$ különbségét a W sokaság ilyen deformálása változatlanul hagyja:



1. ábra

$$\mu(C) - i(V \cdot W, C) = \mu(C') - i(V \cdot W', C) = N(V, C).$$

2. 0.3.8. tételünk szerint mindig $\mu(C) \geqq i(V \cdot W, C)$, és itt egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha A *Cohen—Macaulay*-gyűrű, márpedig A csak V-től és C-től függ. Ezért ha a (P_1) vagy a (P_2) problémára ellenpéldát keresünk, csak olyan esetekkel érdemes foglalkoznunk, ahol $\mu(C) - i(V \cdot W, C) \geqq 1$. Ilyen példák kereséséhez nyújt segítséget a következő tétel:

2.5. TÉTEL. *Legyen adott két irreducibilis sokaság: V és W. Akkor és csak akkor létezik $V \cap W$-nek olyan C komponense, melyre $\mu(C) - i(V \cdot W, C) \geqq 1$, ha a P_V és a P_W ideálra nem teljesül a Bezout-tétel, vagyis ha*

$$h_0((P_V, P_W)) \neq h_0(P_V) \cdot h_0(P_W).$$

Megjegyzés. W. GRÖBNER általánosított *Bezout*-tétele (0.2.10. gyakorlat 3) állítás) szerint akkor V (azaz P_V) nem lehet perfekt. Sőt, V lokálisan perfekt sem lehet (D. REES [16] nyomán V-t lokálisan perfektnek nevezzük, ha V lokális gyűrűje minden pontban *Cohen—Macaulay*-gyűrű). Az utóbbi állításunk a 0.3.16. tétel felhasználásával igazolható; l. még A. REITBERGER—W. VOGEL [17].

2.5. tételünk a 0.2.13. tétel utáni megjegyzések, továbbá a 0.3.8. és a 0.3.10. tétel segítségével bizonyítható; a bizonyítást az Olvasóra hagyjuk. (Lásd még M. HERRMANN—W. VOGEL [12], Satz 1.)

A következőkben két olyan példát mutatunk be, amelyek a (P_1) probléma állítását támasztják alá.

Tekintsük P_4^K-ben azt a két irreducibilis sokaságot, V-t és W-t, amelyet az alábbi két prímideál definiál:

$P_V =: (x_1^2 x_3 - x_2^3,\ x_1 x_4 - x_2 x_3,\ x_1 x_3^2 - x_2^2 x_4,\ x_2 x_4^2 - x_3^3)$ (ez a *Macaulay*-féle prímideál) és

$P_W =: (x_1, x_4)$.

Ekkor $(P_V, P_W)=(x_1, x_2^3, x_2x_3, x_3^3, x_4)$. Könnyen igazolható, hogy V és W metszete nem elfajuló, és egyetlen C komponensből áll; a C-hez tartozó prímideál $P_C= =(x_1, x_2, x_3, x_4)$. V lokális gyűrűje C-ben

$$A =: R_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}/P_V \cdot R_{(x_1, x_2, x_3, x_4)},$$

ahol $R=: k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. A 0.3.14. tétel utáni példa szerint A nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű, $\dim A=2$ és $\operatorname{codh} A=1$.

Most $Q_C=(P_V, P_W)=(x_1, x_2^3, x_2x_3, x_3^3, x_4)$ és $P_C=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ között egy tovább nem finomítható primér lánc

$$(x_1, x_2^3, x_2x_3, x_3^3, x_4) \subset (x_1, x_2^2, x_2x_3, x_3^3, x_4) \subset (x_1, x_2, x_3^3, x_4) \subset (x_1, x_2, x_3^2, x_4) \subset$$
$$\subset (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

így $l_A(A/Q)=\mu(C)=5$. Másrészt a 0.3.10. tétel alkalmazásával

$$h_0(P_V)\cdot h_0(P_W) = e_0(Q, A)\cdot h_0(P_C)$$

adódik. A 0.2.14. példa szerint $h_0(P_V)=4$, $h_0(P_W)=1$, a 0.2.10. gyakorlat 1) állítása szerint $h_0(P_C)=1$. Tehát $e_0(Q, A)=i(V\cdot W, C)=4$.

2.6. KÖVETKEZMÉNY. A fenti példa jelöléseivel $\mu(C)-i(V\cdot W, C)=1=\dim A - -\operatorname{codh} A$, azaz (P_1) teljesül.

Megjegyzés. Ha most a fenti példában a W sokaságot úgy változtatjuk, hogy a P_C-hez tartozó metszetkomponens változatlan maradjon, az új W' sokasághoz tartozó ideál pedig (x_i, F) alakú legyen valamilyen F homogén polinommal, akkor a $\mu(C)-i(V\cdot W', C)$ különbség továbbra is 1 marad; pl. az Olvasó meggyőződhet róla, hogy $Q=: (x_2, x_1^2+x_4^2)\cdot A$ esetén $l_A(A/Q)=9$ és $e_0(Q, A)=8$. Semmit sem tudunk viszont mondani arról a még általánosabb esetről, amikor x_i helyett is valamilyen alkalmas, bonyolultabb F' alakot választunk.

Ha a (P_1) problémára egyéb, nem triviális példákat keresünk (ahol tehát $\dim A>\operatorname{codh} A$), akkor figyelembe kell vennünk a 2.5. tétel állítását. Speciálisan, további nem perfekt prímideálokra van szükségünk. Az előbbi példában szereplő nem perfekt prímideál egészen az utóbbi évekig (pontosabban 1965-ig) meglehetősen egyedül állt az irodalomban. Akkor W. GRÖBNER [8] megmutatta, hogy nem perfekt prímideálokat nyerhetünk, ha *Veronese*-sokaságokat (a definíciót lásd alább) egy x_i-tengely ideális pontjából az $x_i=0$ hipersíkra vetítünk. Így végtelen sok nem perfekt prímideált kapunk; az előző példában szereplő *Macaulay*-féle prímideál éppen ezek legegyszerűbbike.

Röviden megadjuk W. GRÖBNER [8] konstrukcióját:

A $k[y_0, \ldots, y_n]=: k[y]$ homogén polinomgyűrűben tekintsük az összes m-edfokú hatványszorzatot: $y_0^{i_0}\ldots y_n^{i_n}$, $i_0+\ldots+i_n=m$, és rendezzük őket valahogyan, például lexikografikusan, sorozatba. Az ilyen hatványszorzatok száma $\binom{n+m}{m}=:N+1$. $k[y]$-on kívül tekintsük még a $k[x_0, \ldots, x_N]=: k[x]$ homogén polinomgyűrűt, és végezzük el a következő helyettesítést:

$$(*) \qquad x_{(i)} \to y^{(i)} = y_0^{i_0} \ldots y_n^{i_n},$$

ahol $y^{(i)}$ a hatványszorzat-sorozat i-edik eleme. Az egyszerűség kedvéért x_i helyett $x_{(i)}$-t írunk, ahol $(i)=(i_0, \ldots, i_n)$ az $y^{(i)}$-nek megfelelő vektor.

A $V_{n,m} \lhd k[x]$ *Veronese*-ideált azok a $\Phi(x)=\Phi(x_0, \ldots, x_N) \in k[x]$ alakok alkotják, amelyek a $(*)$ behelyettesítés elvégzése után eltűnnek:

$$V_{n,m} = \{\Phi(x_{(i)}) \in k[x] | \Phi(y^{(i)}) = 0\}.$$

A *Veronese*-ideáloknak megfelelő algebrai projektív sokaságokat *Veronese*-sokaságoknak nevezzük.

A *Veronese*-ideálok bázisát és *Hilbert*-függvényét L. S. GODDARD [4], [5] adta meg. Eredményei valamivel rövidebb bizonyítással szerepelnek [8]-ban is, további tételekkel együtt, melyek a *Veronese*-ideálok perfektségére és bizonyos projekcióira vonatkoznak. Most bizonyítás nékül közöljük GODDARD, ill. GRÖBNER néhány eredményét:

Minden *Veronese*-ideál perfekt prímideál; a $V_{n,m}$-nek megfelelő sokaság része az $N=\binom{n+m}{n}-1$ dimenziós projektív térnek, szingularitása nincs, dimenziója n, rendje $h_0(V_{n,m})=m^n$ és $s=:\binom{N+2}{2}-\binom{2m+n}{n}$ másodrendű sokaság metszeteként állítható elő, azaz $V_{n,m}$-nek van s alakból álló bázisa. Ez a bázis $x_{(i)}x_{(k)}-x_{(l)}x_{(p)}$ alakú polinomokból áll, ahol $(i)+(k)=(l)+(p)$.

Most megváltoztatjuk a $(*)$ helyettesítést: elhagyjuk az $y_0^{m-1}y_1$ hatványszorzatot, és ennek megfelelően $x_1=x_{(m-1,1,0,\ldots,0)}$ helyébe mindenütt 0-t írunk; ezzel eggyel kevesebb határozatlanunk marad. Az új helyettesítés segítségével definiáljuk a $V_{n,m}^{(1)}$ ideált: ez a $V_{n,m}$-hez tartozó, x_1-et nem tartalmazó alakokból áll; azaz

$$V_{n,m}^{(1)} = V_{n,m} \cap k[x_0, x_2, \ldots, x_N].$$

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $V_{n,m}$ ideál által meghatározott sokaságot az x_1 tengely ideális pontjából az $x_1=0$ hipersíkra vetítjük. W. GRÖBNER [8] szerint a $V_{n,m}^{(1)}$ prímideál $n=1$ esetén perfekt, $n \geqq 2$ esetén nem perfekt.

Hasonlóan minden i-re, $i=0, \ldots, N$, képezhetjük a $V_{n,m}^{(i)}$ prímideálokat; az $i=2$ esetben például szintén [8] szerint $V_{n,m}^{(2)}$ nem perfekt, ha $n \geqq 1$ és $m \geqq 4$. ($V_{1,4}^{(2)}$ éppen a 2.6. következményben szereplő *Macaulay*-féle prímideál.) Ha most a $V_{n,m}^{(i)}$ prímideál sokaságát az x_j-tengely ideális pontjából az $x_j=0$ hipersíkra vetítjük (azaz x_j helyébe is 0-t írunk), akkor újabb $V_{n,m}^{(i,j)}$ prímideálhoz jutunk, és így tovább.

B. RENSCHUCH (Potsdam) igen hasznos módszert dolgozott ki, amely lehetővé teszi $V_{n,m}^{(i,j\ldots)}$ báziselemeinek a meghatározását, és ennek a segítségével vizsgálja a *Veronese*-sokaságok vetületeit. Minimális bázis explicit megadása azonban még ezzel a módszerrel is meglehetősen nehéz. Polinomideálokról szóló dolgozatában [19] leírja ezt a módszert és több példát is közöl. Néhány példájára (bizonyítás nélkül) mi is támaszkodunk.

Most még egy olyan példát fogunk látni, amely (P_1) állítását támasztja alá. Minthogy W. GRÖBNER [8] vizsgálatai szerint $V_{n,m}^{(1)}$ és $V_{n,m}^{(2)}$ struktúrája lényegesen különböző, és a 2.6. következményben az $x_2=0$ hipersíkra vetítettünk, azért most az $x_1=0$ hipersíkra fogunk vetíteni. [8] szerint ez esetben a legegyszerűbb nem perfekt prímideál $V_{2,3}^{(1)}$. B. RENSCHUCH [19] nyomán ismerjük a $V_{2,3}^{(1)}$ ideál egy bázisát, és tudjuk, hogy $V_{2,3}^{(1)} \lhd k[x_0, \ldots, x_8]$. Most $R=:k[x_0, \ldots, x_9]$-ben azt a P_V prímideált tekintjük, amelyet úgy kapunk, hogy $V_{2,3}^{(1)}$ báziselemeiben mindenütt eggyel nagyobb indexet veszünk:

$$P_V =: (x_1x_5-x_2^2, x_1x_7-x_2x_3, x_1x_8-x_2x_4, x_1x_9-x_2x_5, x_2x_6-x_3x_4, x_2x_7-x_4^2,$$
$$x_2x_8-x_4x_5, x_2x_9-x_5^2, x_3x_5-x_4^2, x_3x_7-x_4x_6, x_3x_8-x_5x_6, x_3x_9-x_5x_7,$$
$$x_4x_7-x_5x_6, x_4x_8-x_5x_7, x_4x_9-x_5x_8, x_6x_8-x_7^2, x_6x_9-x_7x_8, x_7x_9-x_8^2, x_1x_6-x_3^3).$$

Legyen $P_W =: (x_1, x_6, x_9)$, akkor

$$(P_V, P_W) = (x_1, x_2^2, x_3^3, x_5^2, x_6, x_7^2, x_8^2, x_9, x_2x_3, x_2x_5, x_3x_7, x_3x_8, x_5x_7, x_5x_8,$$
$$x_3x_5-x_4^2, x_2x_7-x_4^2, x_2x_4, x_3x_4, x_2x_8-x_4x_5, x_4x_7, x_4x_8).$$

$(P_V, P_W) \lhd R$ primér ideál, a hozzá tartozó prímideál

$$P_C =: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9).$$

$\dim P_W = 6$, $\dim P_C = 0$, és látni fogjuk, hogy $\dim P_V = 3$; tehát P_V és P_W nem elfajulóan metszi egymást, és a metszet egyetlen komponensből áll.

Konstruáljuk most meg az $A =: R_{P_C}/P_V \cdot R_{P_C}$ lokális gyűrűt! [8] szerint $k[x_0, \ldots, x_8]$-ban $\dim V_{2,3}^{(1)} = 2$, így R-ben $\dim P_V = 3$. Mivel $\dim P_C = 0$, azért $\dim A = 3$. $Q = (x_1, x_6, x_9) \cdot A$ tehát paraméterideál. Most a 2.6. következmény bizonyításához hasonló, de annál valamivel fáradságosabb számolás útján az alábbi eredményt kapjuk:

2.7. KÖVETKEZMÉNY. $\mu(C) = 10$, $i(V \cdot W, C) = 9$, $\dim A = 3$ és $\operatorname{codh} A = 2$, vagyis (P_1) állítása ez esetben is igaz.

Ismeretesek olyan sokaságok is, amelyek szintén nem perfekt prímideálokhoz tartoznak, nem állíthatók elő *Veronese*-sokaságok vetületeiként, és igaz rájuk (P_1) (lásd B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20]). Ezért azt gondolhatnánk, hogy a fenti, geometriai feltételek mellett a *Buchsbaum*-sejtés mindig igaz. Ez azonban nem így van. A következőkben olyan példát adunk meg, amelyben (P_1) nem teljesül, de amely bonyolultabb, mint a 2.6. vagy a 2.7. következményben szereplő példa. Inkább csak „érzés alapján" olyan, nem perfekt prímideált keresünk, amelynek van legalább egy legalább negyedfokú bázispolinomja. A fenti, (P_1)-et alátámasztó példákban ugyanis valamennyi bázispolinom legfeljebb harmadfokú volt. Ilyen bonyolultabb példát pl. *Veronese*-sokaságok többszörös vetítésével kaphatunk.

Tekintsük a $V_{1,5}$ prímideállal definiált sokaságot, és vetítsük előbb az $x_2 = 0$, majd az $x_3 = 0$ hipersíkra. (Ez a legegyszerűbb olyan eset, amikor egy *Veronese*-sokaság kétszeres vetítésével térgörbét kapunk.) Térjünk át most is eggyel magasabb dimenziós térbe, és tekintsük $R =: k[x_0, \ldots, x_4]$-ben azt a P_V prímideált, amelyet úgy kapunk, hogy $V_{1,5}^{(2,3)}$ báziselemeiben mindenütt eggyel nagyobb indexet írunk. Ekkor [19] szerint $P_V = (x_1x_4 - x_2x_3, x_1^3x_3 - x_2^4, x_1^2x_3^2 - x_2^3x_4, x_1x_3^3 - x_2^2x_4^2, x_3^4 - x_2x_4^3)$, $\dim P_V = 2$ és a 0.2.14. példához hasonlóan igazolható, hogy $h_0(P_V) = 5$. Legyen $P_W =: (x_1, x_4)$, akkor $(P_V, P_W) = (x_1, x_4, x_2x_3, x_2^4, x_3^4)$ primér, a hozzá tartozó prímideál $P =: (x_1, x_2, x_3, x_4)$, így $\dim P_W = 3$, $\dim (P_V, P_W) = 1$, V és W tehát nem elfajulóan metszi egymást egyetlen C komponensben. Képezzük most az $A = : R_P/P_V \cdot R_P$ lokális együrűt és a $Q =: (x_1, x_4) \cdot A$ paraméterideált. Ekkor a 2.6. következmény bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy

2.8. KÖVETKEZMÉNY. $\mu(C)=7$, $i(V\cdot W, C)=5$, $\dim A=2$, $\operatorname{codh} A=1$, tehát (P_1) nem igaz.

Megjegyzés. B. RENSCHUCH, J. STÜCKRAD és W. VOGEL [20] megmutatta, hogy a (P_1)-ben szereplő $\mu(C)-i(V\cdot W, C)$ különbség értéke tetszőleges nem negatív egész értéket felvehet.

1. *Probléma.* Mikor teljesül (P_1)?

Azt sejtjük, hogy ez V struktúrájának egy eddig még ismeretlen tulajdonságától függ. Talán definiálható homogén polinomideáloknak egy olyan, a lokálisan perfekt ideálokat tartalmazó osztálya, amelyben igaz (P_1). [1])

A (P_2) problémáról pillanatnyilag nagyon keveset tudunk. A (P_1) problémával kapcsolatban vizsgált példák alapján a keresett $N(V, C)$ invariáns lehetne például a következő: Legyen $(p_1, ..., p_s)$ a V sokaságot definiáló P_V prímideál egy minimális bázisa, $M=\max\limits_{1\le i\le s} \operatorname{gr} p_i$, $m=\min\limits_{1\le i\le s} \operatorname{gr} p_i$. Igazolható, hogy M és m nem függ a p_i bázispolinomok választásától. Legyen most

$$N(V, C) = (M-m)(\dim A-\operatorname{codh} A).$$

Eddig példáink szerint ez megfelelne; a következő, [19]-ben szereplő példa azonban azt mutatja, hogy ez az $N(V, C)$ nem lehet a keresett invariáns.

Tekintsük a $V_{1,6}^{(1,3,4)}$ nem perfekt prímideált, és legyen az eggyel magasabb dimenziójú $R=:k[x_0, ..., x_4]$ gyűrűben a megfelelő prímideál P_V. [19] szerint

$$P_V = (x_1x_3^2-x_2^2x_4,\ x_1x_4^2-x_2x_3^2,\ x_1^2x_4-x_2^3,\ x_2x_4^3-x_3^4).$$

A 0.2.14. példában látott módszerrel igazolható, hogy $h_0(P_V)=6$ és $\dim P_V=2$. Legyen továbbá

$$P_W =:(x_1, x_4),$$

akkor $h_0(P_W)=1$, $\dim P_W=3$.

$(P_V, P_W)=(x_1, x_4, x_2x_3^2, x_2^3, x_3^4)$ primér ideál, a hozzá tartozó prímideál $P_C=:(x_1, x_2, x_3, x_4)$, így $\dim(P_V, P_W)=1$ és $\mu((P_V, P_W))=\mu(C)=8$. P_V és P_W metszete tehát nem elfajuló. Képezzük most az

$$A =: R_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}/P_V\cdot R_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

lokális gyűrűt és a $Q=:(x_1, x_4)\cdot A$ paraméterideált, akkor a 0.3.10. tételből $e_0(Q, A)=6$ adódik. Eszerint $l_A(A/Q)-e_0(Q, A)=\mu(C)-e_0(Q, A)=2$, így a 0.3.14. tétel értelmében A nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{codh} A\le 1$, hiszen azonnal látszik, hogy $\dim A=2$. Másrészt viszont $P_V: x_1=P_V$, azaz x_1 nem nullosztó A-ban, így $\operatorname{codh} A\ge 1$.

Végeredményben azt kaptuk, hogy

$$\mu(C)-i(V\cdot W, C) = 8-6 \ne (4-3)(2-1) = (M-m)(\dim A-\operatorname{codh} A),$$

tehát

[1]) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: A problémát azóta megoldották, ld. B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20].

2.9. KÖVETKEZMÉNY. $(M-m)(\dim A - \operatorname{codh} A)$ nem lehet a (P_2) problémában keresett $N(V, C)$ invariáns.

Megjegyezzük még, hogy korábbi példáinkkal ellentétben most P_V bázisában nem szerepelt másodfokú alak.

A 2.9. következmény ellenére is azt sejtjük, hogy a (P_2) problémára a válasz pozitív, mégpedig

$$\mu(C) - i(V \cdot W, C) = t \cdot (\dim A - \operatorname{codh} A),$$

ahol t a P_V báziselemeinek a fokától függő nem negatív egész szám. Ezzel kapcsolatban merül fel a következő probléma:

2. Probléma. Perfekt-e (vagy lokálisan perfekt-e) egy $P \lhd k[x_0, ..., x_n]$ homogén prímideál, ha egy minimális bázisának valamennyi eleme ugyanolyan fokú? (Pl. lokálisan perfektek-e azok a sokaságok, amelyeket MUMFORD [15] vizsgált?) [2])

Végül ismét megfogalmazzuk az I. fejezetünk fő problémáját:

3. *Probléma.* Létezik-e olyan, csak V-től és C-től függő nem negatív egész szám, $N(V, C)$, melyre

$$\mu(C) - i(V \cdot W, C) = N(V, C)?\ ^{3})$$

Az 1. § alapján tudjuk, hogy ha itt a korlátozó geometriai feltételeinktől eltekintünk, akkor ilyen invariáns nem létezik.

3. §. M. Auslander és D. A. Buchsbaum néhány lokális multiplicitáselméleti eredménye

Legyen (R, M) lokális gyűrű, Q M-primér ideál. Az $e_0(Q, R)$ multiplicitás meghatározásakor a 0.3.7. tétel szerint elég arra az esetre szorítkoznunk, amikor Q paraméterideál. A következőkben látni fogjuk, hogy az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük azt is, hogy a paraméterrendszer rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal. E célból M. AUSLANDER—D. A. BUCHSBAUM [1], § 4 néhány eredményét közöljük (bizonyítás nélkül). Ezek az eredmények önmagukban is érdekesek, azonkívül pedig kiegészítik eddigi multiplicitáselméleti vizsgálatainkat.

Minthogy e paragrafus során általában modulusokkal fogunk foglalkozni, azért most előrebocsátunk bizonyos moduluselméleti eredményeket. Ezek pontosan úgy bizonyíthatók, mint a megfelelő, a 0. fejezetünk 1. paragrafusában szereplő gyűrűelméleti eredmények, ezért a bizonyításukra nem térünk ki (lásd még [35], IV. fejezet, függelék).

[2]) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Az általános kérdésre a válasz: nem. B. RENSCHUCH ellenpéldát konstruált a [19] dolgozatban közölt módszerrel. A zárójelben álló speciális kérdés még nyitott.

[3]) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Időközben bizonyítást nyert, hogy ilyen invariáns nem mindig létezik. Ld. J. STÜCKRAD—W. VOGEL: Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum-Varietäten. *Monatsh. Math.* **78** (1974), 433—445.

Legyen R tetszőleges gyűrű (nem föltétlen *Noether*-féle), E R-modulus, F részmodulusa E-nek. Az F részmodulus *radikálja*

$$\sqrt{F} = \{a \in R \mid \exists n \text{ term. szám } a^n \cdot E \subset F\} \lhd R.$$

Az $F \subset E$ részmodulust *primér*nek nevezzük, ha

$$ax \in F, \quad a \in R, \quad x \in E \Rightarrow x \in F \quad \text{vagy} \quad a \in \sqrt{F}.$$

Ha F primér részmodulusa E-nek, akkor $\sqrt{F}$ prímideál R-ben.

Azt mondjuk, hogy E *Noether-modulus,* ha E olyan unitér modulus, melynek minden részmodulusa végesen generálható. Ha R *Noether*-gyűrű, akkor egy E unitér R-modulus akkor és csak akkor *Noether*-féle, ha végesen generálható. Ha E *Noether*-modulus, akkor E minden F részmodulusa előállítható véges sok primér részmodulus nem rövidíthető metszeteként; ezeket a primér részmodulusokat F primér komponenseinek nevezzük. F primér komponenseinek a radikálja (a komponenshez tartozó prímideál) egyértelmű, és egyértelműek az F izolált primér komponensei is (ez utóbbiakat ugyanúgy definiáljuk, mint az ideáloknál).

A 0.3.4. tétel utáni megjegyzésünk értelmében tekintsünk egy R szemilokális gyűrűt, egy $V \lhd R$ nyílt ideált és egy E *Noether*-féle R-modulust, akkor az $l_R(E/V^{n+1} \cdot E)$ *Hilbert—Samuel*-polinom fölírható ilyen alakban:

$$l_R(E/V^{n+1} \cdot E) = e_0(V, E)\binom{n+d}{d} + \ldots, \quad \text{ahol} \quad d = \dim R.$$

Itt $\binom{n+\dim E}{\dim E}$ együtthatója az első el nem tűnő együttható, azaz $e_0(V, E) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dim E < \dim R$. Az is igazolható, hogy ha V generálható paraméterrendszerrel, és létezik olyan m természetes szám és $x \in V$, hogy $x^m \cdot E = 0$ és x kiegészíthető egy V-t generáló paraméterrendszerré, akkor $e_0(V, E) = 0$.

A következő tétel multiplicitások kiszámításához nyújt segítséget:

3.1. Tétel. *Legyen R, V és E olyan, mint fent,* $\dim R = d$, *és tegyük fel, hogy V d elemmel generálható: $V = (x_1, \ldots, x_d)$. Akkor*

$$e_0(V, E) = l_R(E/V \cdot E) - l_{R/V_{d-1}}((V_{d-1} \cdot E) : x_d/(V_{d-1} \cdot E)) -$$

$$- \sum_{k=1}^{d-1} e_0(V/V_k, (V_{k-1} \cdot E) : x_k/V_{k-1} \cdot E)),$$

ahol $V_k =: (x_1, \ldots, x_k)$, $k = 1, \ldots, d-1$, $V_0 \cdot E =: (0)$, *továbbá*

$$(V_{k-1} \cdot E) : x_k = \{e \in E \mid x_k \cdot e \in V_{k-1} \cdot E\} \supseteqq V_{k-1} \cdot E.$$

Auslander és Buchsbaum azt is észrevette, hogy a V ideál x_i generátorainak alkalmas megválasztásával a fenti, meglehetősen bonyolult képlet jelentősen egyszerűsíthető. Úgy tűnik, hogy ez az eredményük az irodalomban eddig még nem nyert alkalmazást, nekünk azonban szükségünk lesz rá a II. fejezetben.

3.2. Lemma. *Legyen R, V és E olyan, mint a* 3.1. *tételben; akkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $e_0(V/V_k, (V_{k-1}\cdot E): x_k/(V_{k-1}\cdot E)) = 0, \quad k = 0, ..., d-1.$

(ii) $e_0(V, E) = l_R(E/V\cdot E) - l_{R/V_{d-1}}((V_{d-1}\cdot E): x_d/(V_{d-1}\cdot E)),$

(iii) *Minden k-ra* ($k=0, ..., d-1$): *x_k nem eleme egyetlen olyan P prímideálnak sem, amely a $V_{k-1}\cdot E$ modulushoz tartozik (a moduluselméleti primér felbontás értelmében), és amelyre* $\dim P \geqq d-k$.

3.3. DEFINÍCIÓ. Legyen R, V és E olyan mint a 3.1. tételben, továbbá $\dim E = \dim R = d$ és $V=(x_1, ..., x_d)$. Azt mondjuk, hogy $x_1, ..., x_d$ *redukált paraméterrendszere E-nek,* ha

(a) $x_1, ..., x_d$ paraméterrendszer (R-ben), azaz $l_R(R/V)<\infty$ és

(b) $e_0(V, E) = l_R(E/V\cdot E) - l_{R/V_{d-1}}((V_{d-1}\cdot E): x_d/(V_{d-1}\cdot E)),$

ahol $V_{d-1} = (x_1, ..., x_{d-1})$.

Általában az $E=R$ esettel fogunk foglalkozni, és ekkor egyszerűen csak *redukált paraméterrendszer*ről beszélünk.

Megjegyzés. Innen azonnal következik, hogy ha $x_1, ..., x_d$ redukált paraméterrendszere E-nek, akkor $x_1, ..., x_{d-1}, y$ is az minden olyan $y\in R$-re, amellyel $x_1, ..., x_{d-1}, y$ paraméterrendszer (R-ben). Ehhez az észrevételünkhöz kapcsolódik az alábbi lemma:

3.4. LEMMA. *$(x_1, ..., x_{d-1}, x)$ és $(x_1, ..., x_{d-1}, y)$ paraméterrendszer R-ben, akkor paraméterrendszer $(x_1, ..., x_{d-1}, xy)$ is, és tetszőleges E Noether-féle R-modulusra*

$$e_0((x_1, ..., x_{d-1}, xy), E) = e_0((x_1, ..., x_{d-1}, x), E) + e_0((x_1, ..., x_{d-1}, y), E).$$

Most pedig AUSLANDER és BUCHSBAUM dolgozatának fő eredménye következik:

3.5. TÉTEL. *Legyen R szemilokális gyűrű, E Noether-féle R-modulus,* $\dim R = \dim E$, *és tegyük fel, hogy a $V \lhd R$ ideál generálható (R-beli) paraméterrendszerrel, akkor V generálható E egy redukált paraméterrendszerével.*

II. FEJEZET

LOKÁLIS GYŰRŰK EGY ÚJ OSZTÁLYA

1. §. A Cohen—Macaulay gyűrűk egy általánosítása

Legyen (A, M) lokális gyűrű, $B \lhd A$. A rövidség kedvéért bevezetünk néhány jelölést: Ass (B) jelölje a B-hez tartozó prímideálokat, Assh (B) a maximális dimenziójú, B-hez tartozó prímideálokat, $U(B)$ pedig a B-hez tartozó, maximális dimenziójú primér ideálok metszetét. Ekkor Assh (B) = Ass $(U(B))$ = Assh $(U(B))$, és B pontosan akkor egynemű, ha $B = U(B)$.

Gyakran használjuk majd a következő segédtételt:

1.1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $B, P_1, ..., P_n \lhd A$, $P_1, ..., P_n$ prímideál, továbbá minden i-re ($i=1, ..., n$) $\dim P_i \geqq \dim B$ és $P_i \notin$ Ass (B). Akkor létezik olyan $b\in B$, melyre $b\notin P_i$ ($i=1, ..., n$).*

Bizonyítás. A 0.2.7. definíció utáni 2) gyakorlat szerint elegendő azt belátnunk, hogy $B \nsubseteq P_i$, $i=1, \dots, n$. Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy $B \subseteq P_k$ valamilyen $1 \leq k \leq n$-nel, és legyen $\mathrm{Ass}(B) = \{P_{(1)}, \dots, P_{(m)}\}$; akkor megfelelő $\varrho_1, \dots, \varrho_m$ természetes számokkal $\prod_{j=1}^{m} P_{(j)}^{\varrho_j} \subseteq B \subseteq P_k$, tehát létezik olyan j, $1 \leq j \leq m$, hogy $P_{(j)} \subseteq P_k$, és itt egyenlőség nem állhat, mivel $P_{(j)} \in \mathrm{Ass}(B)$ és $P_k \notin \mathrm{Ass}(B)$. Eszerint $B \subseteq P_{(j)} \subset P_k$, így $\dim B \geq \dim P_{(j)} > \dim P_k \geq \dim B$, ami ellentmondás, q.e.d.

Megjegyezzük még, hogy e fejezetben a példáinkat mind úgy konstruáljuk, hogy egy k test fölötti R polinomgyűrűnek egy ideálja szerinti faktorát vesszük, majd lokalizálunk egy prímideál szerint, és az így kapott A lokális gyűrűt vizsgáljuk. Vizsgálataink során azonban az előző fejezetben részletesen leírt megfeleltetések szerint A helyett R-ben számolunk, anélkül, hogy erre külön utalnánk.

Most pedig az 1. §. legfontosabb definíciója következik:

1.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy $a_1, \dots, a_r$ $(a_i \in M)$ *gyenge prímsorozat* vagy *gyenge A-sorozat,* ha minden i-re, $i=1, \dots, r$,

$$M \cdot [(a_1, \dots, a_{i-1}) : a_i] \subseteq (a_1, \dots, a_{i-1})$$

$(i=0$ esetén $(a_1, \dots, a_i) =: (0))$.

1.3. Következmény. Minden prímsorozat gyenge prímsorozat.

Példa: Legyen $R =: k[x_0, \dots, x_3]$, $B =: (x_1^2, x_1x_2) \lhd R$, $A =: R_{(x_1, x_2, x_3)}/B \cdot R_{(x_1, x_2, x_3)}$. Az 1.1.1. tételünk bizonyításában láttuk, hogy $\dim A = 2$, $\mathrm{codh}\, A = 1$ és A-ban nem teljesül a Buchsbaum-probléma állítása.

a) állítás: x_3, x_2 gyenge prímsorozat A-ban, de nem prímsorozat. Valóban,

$$(x_1, x_2, x_3)\,[B : x_3] = (x_1, x_2, x_3) \cdot B \subseteq B,$$

$$(x_1, x_2, x_3)[(B, x_3) : x_2] = (x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1, x_3) \subseteq (B, x_3),$$

mivel

$$(B, x_3) = (x_1, x_3) \cap (x_1^2, x_2, x_3) = (x_1^2, x_1x_2, x_3)$$

és

$$(B, x_3) : x_2 = (x_1, x_3) : x_2 \cap (x_1^2, x_2, x_3) : x_2 = (x_1, x_3) \cap (1) = (x_1, x_3);$$

x_3, x_2 tehát gyenge prímsorozat; prímsorozat viszont nem lehet, hiszen $\mathrm{codh}\, A = 1$. Látni fogjuk, hogy a gyenge prímsorozatok hossza is legföljebb $\dim A$, így x_3, x_2 maximális gyenge prímsorozat.

b) állítás: x_2, x_3 nem gyenge prímsorozat. Valóban,

$$(x_1, x_2, x_3)\,[B : x_2] = (x_1, x_2, x_3)\,(x_1) = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3) \nsubseteq B.$$

Példánkból tehát a következőket szűrhetjük le:

1) létezik olyan gyenge prímsorozat, ami nem prímsorozat,

2) a prímsorozatokkal ellentétben, a gyenge prímsorozatokban igen lényeges az elemek sorrendje,

3) ha a *Cohen—Macaulay*-gyűrűket úgy próbáljuk általánosítani, hogy a 0.3.13. definícióban prímsorozat helyett gyenge prímsorozatot veszünk, akkor ebben a bővebb gyűrűosztályban már nem teljesülne a *Buchsbaum*-probléma állítása.

Most egy szükséges és egy elegendő feltételt adunk annak eldöntésére, hogy egy adott sorozat gyenge prímsorozat-e.

1.4. SEGÉDTÉTEL. *Ha $a_1, \dots, a_r$ gyenge prímsorozat, akkor minden i-re $(i=1, \dots, r)$*

$$(*) \qquad a_i \notin P \quad \forall P \in \operatorname{Ass}\left((a_1, \dots, a_{i-1})\right), \dim P \geqq 1.$$

Bizonyítás. A gyenge prímsorozat definíciójából következik, hogy minden i-re $(i=1, \dots, r)$

$$(a_1, \dots, a_{i-1}) \colon a_i \subseteqq (a_1, \dots, a_{i-1}) \colon M,$$

$a_i \in M$ miatt viszont

$$(a_1, \dots, a_{i-1}) \colon a_i \supseteqq (a_1, \dots, a_{i-1}) \colon M,$$

így

$$(a_1, \dots, a_{i-1}) \colon a_i = (a_1, \dots, a_{i-1}) \colon M.$$

Tegyük most fel, hogy létezik olyan $P \in \operatorname{Ass}\left((a_1, \dots, a_{i-1})\right)$, melyre $\dim P \geqq 1$ (azaz $P \neq M$) és $a_i \in P$. Legyen Q az $(a_1, \dots, a_{i-1})$ ideál egy P-primér komponense, akkor létezik olyan $n \geqq 0$ egész szám, hogy $a_i^{n+1} \in Q$, $a_i^n \notin Q$. Legyen továbbá M egy bázisa $(m_1, \dots, m_t)$, akkor

$$(a_1, \dots, a_{i-1}) \colon a_i^{n+1} = \left((a_1, \dots, a_{i-1}) \colon a_i\right) \colon a_i^n = \left((a_1, \dots, a_{i-1}) \colon M\right) \colon a_i^n =$$

$$= \left(\bigcap_{j=1}^{t} (a_1, \dots, a_{i-1}) \colon m_j\right) \colon a_i^n = \bigcap_{j=1}^{t} (a_1, \dots, a_{i-1}) \colon (a_i^n m_j) = \bigcap_{j=1}^{t} \left((a_1, \dots, a_{i-1}) \colon a_i^n\right) \colon m_j =$$

$$= \left((a_1, \dots, a_{i-1}) \colon a_i^n\right) \colon M.$$

Itt $(a_1, \dots, a_{i-1}) \colon a_i^{n+1}$-nek nincs P-primér komponense, $\left((a_1, \dots, a_{i-1}) \colon a_i^n\right) \colon M$-nek viszont van, ami ellentmondás, q.e.d.

1.5. KÖVETKEZMÉNY. Minden gyenge prímsorozat kiegészíthető redukált paraméterrendszerré, így ha $a_1, \dots, a_r$ gyenge prímsorozat, akkor $r \leqq \dim A$.

Megjegyzés. A $(*)$ feltétel nem elegendő, amint azt a következő példa mutatja. Tekintsük ismét az 1.3. következmény utáni példában megadott A lokális gyűrűt és abban az x_3^2, x_2 sorozatot. Erre teljesül $(*)$, mivel x_3^2 nem eleme egyetlen, az $(x_1^2, x_1 x_2)$-höz tartozó prímideálnak sem, továbbá $(x_1^2, x_1 x_2, x_3^2) = (x_1, x_3^2) \cap \cap (x_1^2, x_2, x_3^2)$, $x_2 \notin (x_1, x_3)$, (x_1^2, x_2, x_3^2) pedig A-ban 0-dimenziós. Másrészt viszont x_3^2, x_2 nem gyenge prímsorozat, ugyanis

$$(x_1, x_2, x_3)\,[(x_1^2, x_1 x_2, x_3^2) \colon x_2] = (x_1, x_2, x_3)\,(x_1, x_3^2) \ni x_1 x_3 \quad \text{és} \quad x_1 x_3 \notin (x_1^2, x_1 x_2, x_3^2).$$

1.6. SEGÉDTÉTEL. *Ha egy $a_1, \dots, a_r$ $(a_i \in M)$ sorozatra teljesül $(*)$, továbbá minden i-re $(i=1, \dots, r)$ $M \cdot (Q'_{i-1} \colon a_i) \subseteqq Q'_{i-1}$, ahol Q'_{i-1} az $(a_1, \dots, a_{i-1})$ ideál egy M-primér komponense (ha ilyen nincsen, akkor $Q^1_{i-1} = \colon A$), akkor $a_1, \dots, a_r$ gyenge prímsorozat.*

Bizonyítás. Legyen $(a_1, ..., a_{i-1})$ egy primér felbontása $Q'_{i-1} \cap Q_1 \cap ... \cap Q_t$, akkor

$$M \cdot [(a_1, ..., a_{i-1}): a_i] = M \cdot [Q_1: a_i \cap ... \cap Q_t: a_i \cap Q'_{i-1}: a_i] =$$
$$= M \cdot [Q_1 \cap ... \cap Q_t \cap Q'_{i-1}: a_i] = M \cdot Q_1 \cap ... \cap M \cdot Q_t \cap M \cdot (Q'_{i-1}: a_i) \subseteqq$$
$$\subseteqq Q_1 \cap ... \cap Q_t \cap Q'_{i-1} = (a_1, ..., a_{i-1}), \qquad \text{q.e.d.}$$

Megjegyzés. Az 1.6. segédtétel második feltétele nem szükséges, amint azt az alábbi példa mutatja. Tekintsük ismét az 1.3. következmény utáni példában szereplő lokális gyűrűt; láttuk, hogy ebben x_3, x_2 gyenge prímsorozat. Legyen most $i=2$; (x_1^2, x_1x_2, x_3)-nak az a primér komponense, amely A-ban M-primér lesz, (x_1^2, x_2, x_3), erre pedig

$$(x_1, x_2, x_3)\,[(x_1^2, x_2, x_3): x_2] = (x_1, x_2, x_3) \cdot (1) \subsetneqq (x_1^2, x_2, x_3).$$

1.7. TÉTEL. *Legyen (A, M) lokális gyűrű,* $\dim A = d$. *Ekkor ekvivalensek a következő állítások:*

(i) *Minden paraméterrendszer gyenge prímsorozat.*

(ii) *Ha $a_1, ..., a_d$ paraméterrendszer, akkor minden $0 \leqq k < d$-re*

$$M \cdot U((a_1, ..., a_k)) \subseteqq (a_1, ..., a_k).$$

(iii) *Ha $a_1, ..., a_d$ paraméterrendszer, $a \in M$ és* $\dim (a_1, ..., a_{k-1}, a) = d-k$, *ahol $1 \leqq k \leqq d$, akkor*

$$(a_1, ..., a_{k-1}): a_k = (a_1, ..., a_{k-1}): a.$$

(iv) *Ha $a_1, ..., a_d$ paraméterrendszer, $a \in M$ és* $\dim (a_1, ..., a_{d-1}, a) = 0$ *(azaz $a_1, ..., a_{d-1}, a$ is paraméterrendszer), akkor*

$$(a_1, ..., a_{d-1}): a_d = (a_1, ..., a_{d-1}): a.$$

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(iii): Minthogy $\dim (a_1, ..., a_{k-1}, a) = d-k$ esetén $a_1, ..., a_{k-1}, a$ kiegészíthető paraméterrendszerré (l. 0.3.11a. következmény), azért (i) értelmében $a_1, ..., a_{k-1}, a$ is és $a_1, ..., a_{k-1}, a_k$ is gyenge prímsorozat, így az 1.4. segédtétel bizonyítása szerint

$$(a_1, ..., a_{k-1}): a_k = (a_1, ..., a_{k-1}): M = (a_1, ..., a_{k-1}): a.$$

(iii)$\Rightarrow$(ii): Legyen $0 \leqq k < d$, $B =: (a_1, ..., a_k)$, és válasszunk egy olyan $a \in M$ elemet, melyre $a_1, ..., a_k, a$ kiegészíthető paraméterrendszerré. Most $B = U(B) \cap C$, ahol $\dim C < d-k$. Ekkor az 1.1. segédtétel szerint létezik olyan $a' \in C$ elem, hogy $a' \notin P$ egyetlen $P \in \mathrm{Assh}\,(B)$-re sem, így a 0.3.11a. következmény értelmében $a_1, ..., a_k, a'$ is kiegészíthető paraméterrendszerré. Feltevésünk szerint akkor

$$U(B) = U(B): a' = (U(B): a') \cap (C: a') = B: a' = B: a,$$

innen

$$a \cdot U(B) = a \cdot (B: a) \subseteqq B.$$

Legyen most $m \in M$ tetszőleges és $\mathrm{Assh}\,(B) = \{P_1, ..., P_n\}$. Tegyük fel, hogy $m \in P_1, ..., P_t$ és $m \notin P_{t+1}, ..., P_n$. Az 1.1. segédtétel szerint létezik olyan $m' \in C \cap \cap P_{t+1} \cap ... \cap P_n$, melyre $m' \notin P_1, ..., P_t$. Most akkor $a_1, ..., a_k, m+m'$ kiegészíthető paraméterrendszerré, így a fentiek szerint $(m+m')U(B)\subseteq B$. $m'\in C$ miatt viszont $m'U(B)\subseteq U(B)\cap C=B$, tehát $mU(B)\subseteq B$, q.e.d.

(ii)$\Rightarrow$(i): Legyen $a_1 \dots, a_d$ egy tetszőleges paraméterrendszer A-ban és $1\leq i\leq d$, akkor a 0.3.11a. következmény szerint $a_i\notin P$, ha $P\in\operatorname{Assh}((a_1, \dots, a_{i-1}))=$ $=\operatorname{Ass}(U((a_1, \dots, a_{i-1})))$, így $U((a_1, \dots, a_{i-1})):a_i=U((a_1, \dots, a_{i-1}))$. Ekkor viszont $(a_1, \dots, a_{i-1}):a_i\subseteq U((a_1, \dots, a_{i-1}))$, tehát $M\cdot[(a_1, \dots, a_{i-1}):a_i]\subseteq M\cdot U((a_1, \dots, a_{i-1}))\subseteq$ $\subseteq(a_1, \dots, a_{i-1})$, q.e.d.

(iii)$\Rightarrow$(iv) triviális.

(iv)$\Rightarrow$(iii): Tegyük fel, hogy $a_1, \dots, a_k$ és $a_1, \dots, a_{k-1}, a$ kiegészíthető paraméterrendszerré ($1\leq k\leq d$). Az 1.1. segédtétel szerint található olyan $a_{k+1}\in M$, amely nem eleme egyetlen olyan prímideálnak sem, amely $\operatorname{Assh}((a_1, \dots, a_k))$-hoz vagy $\operatorname{Assh}((a_1, \dots, a_{k-1}, a))$-hoz tartozik. Ugyanígy továbbhaladva adjuk meg az $a_{k+2}, \dots, a_d$ elemeket is; ekkor a 0.3.11a. következmény szerint $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_d$ is és $a_1, \dots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \dots, a_d$ is paraméterrendszer. Az 1.3.4. lemma értelmében akkor paraméterrendszer $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}^n, \dots, a_d^n, a_k$ és $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}^n, \dots, a_d^n, a$ is minden $n\geq 1$-re. Legyen most $B=:(a_1, \dots, a_{k-1})$, akkor

$$B: a_k \subseteq \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, a_{k+1}^n, \dots, a_d^n)\right] : a_k = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, a_{k+1}^n, \dots, a_d^n)\right] : a$$

az indukciós feltevés szerint, így

$$B: a_k \subseteq \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, (a_{k+1}, \dots, a_d)^n\right] : a = B: a.$$

Itt az utolsó egyenlőség helyett többet is igazolunk: megmutatjuk, hogy ha az (A, M) lokális gyűrűben egy B és egy C ideálra $B, C\subseteq M$, akkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, C^n)=B$. Ehhez W. KRULL egy tételét használjuk fel, miszerint ha (A, M) lokális gyűrű, akkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n=(0)$ (l. [35]). Legyen most $\bar{A}=:A/B$ és $\bar{C}=:C\cdot\bar{A}$, akkor

$$0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{C}^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B, C^n)/B = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, C^n)\right)/B,$$

így valóban $B=\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, C^n)$.

A fenti meggondolásunkban a_k és a szerepét felcserélve azt kapjuk, hogy $B:a\subseteq B:a_k$, tehát $B:a_k=B:a$, q.e.d.

1.8. DEFINÍCIÓ. *Buchsbaum-gyűrűnek* vagy röviden **B**-*gyűrűnek* nevezzük azokat a lokális gyűrűket, amelyekben teljesülnek az 1.7. tétel ekvivalens állításai.

1.9. KÖVETKEZMÉNY. Minden *Cohen—Macaulay*-gyűrű **B**-gyűrű.

1.10. KÖVETKEZMÉNY. **B**-gyűrűben minden paraméterrendszer redukált.

1.11. KÖVETKEZMÉNY. Ha A **B**-gyűrű és $a_1, \dots, a_k$ kiegészíthető A egy paraméterrendszerévé, akkor $A/(a_1, \dots, a_k)$ is **B**-gyűrű.

Látni fogjuk a 2. §-ban, hogy a *Buchsbaum*-problémával kapcsolatos a következő kérdés: mikor **B**-gyűrű egy olyan lokális gyűrű, amely nem *Cohen—Macaulay*-féle? Erre adunk most egy szükséges feltételt az alábbi tétel segítségével. Ez a tétel különben jóval általánosabban is igaz, szemilokális gyűrűk fölötti modulusokra (l. [29]).

1.12. TÉTEL. *Legyen* (A, M) *lokális gyűrű,* $\dim A = d$, $Q =: (x_1, \ldots, x_d) \lhd A$ *paraméterideál. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

(i) *minden* k*-ra* $(k = 1, \ldots, d)$: $x_k \notin P$, *ha*

$$P \in \operatorname{Ass}((x_1, \ldots, x_{k-1})) \quad \textit{és} \quad \dim P = d - k,$$

(ii) $x_1, \ldots, x_d$ *prímsorozat.*

Bizonyítás. (ii)⇒(i) triviális.

(i)⇒(ii): A 0.3.14. tétel szerint (ii) éppen azt jelenti, hogy A *Cohen—Macaulay*-gyűrű. Ezt kell tehát bizonyítanunk.

Az 1.3.1. tétel szerint

$$e_0(Q, A) = l_A(A/Q) - l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}\colon x_d/Q_{d-1}) - \sum_{k=0}^{d-1} e_0(Q/Q_k, Q_{k-1}\colon x_k/Q_{k-1}),$$

ahol $Q_k =: (x_1, \ldots, x_k)$. Feltevésünkből és az 1.3.2. lemmából következik, hogy

$$e_0(Q/Q_k, Q_{k-1}\colon x_k/Q_{k-1}) = 0, \quad k = 1, \ldots, d-1.$$

(i) feltevésünk szerint x_k nem eleme az $(x_1, \ldots, x_{k-1})$-hez tartozó $(d-k)$-dimenziós prímideáloknak, (ii) feltevésünk és a 0.3.11a. következmény miatt azonban az $(x_1, \ldots, x_{k-1})$-hez tartozó $(d-k+1)$-dimenziós prímideáloknak sem lehet eleme. $k = d$ esetén ez éppen azt jelenti, hogy x_d nem eleme egyetlen $(x_1, \ldots, x_{d-1})$-hez tartozó prímideálnak sem, vagyis $Q_{d-1}\colon x_d = Q_{d-1}$. Ezt az előző eredményeinkkel összevetve $e_0(Q, A) = l_A(A/Q)$ adódik, így a 0.3.14. tétel szerint A *Cohen—Macaulay*-gyűrű.

1.13. KÖVETKEZMÉNY. Legyen (A, M) lokális gyűrű, $\dim A = d$. Ha A **B**-gyűrű, de nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű, akkor bármely $(a_1, \ldots, a_d)$ paraméterrendszerre az $(a_1, \ldots, a_{d-1})$ ideálnak van M-primér komponense.

Ez azt jelenti, hogy ha A nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű, akkor az 1.7. tétel (iv) állítása sohasem triviális (ha ugyanis $(a_1, \ldots, a_{d-1})$-nek nem lenne M-primér komponense, akkor a (iv) állítás triviálisan teljesülne).

2. §. A Buchsbaum-probléma megoldása

Most visszatérünk D. A. BUCHSBAUM problémájára. Legyen (A, M) lokális gyűrű, $\dim A = d$, $Q \lhd A$ paraméterideál. Problémánk ekkor a következő: mikor független az $l_A(A/Q) - e_0(Q, A)$ szám a Q paraméterideáltól, azaz mikor létezik olyan $I(A)$ invariáns, hogy $l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = I(A)$ minden $Q \lhd A$ paraméterideálra?

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha az* $l_A(A/Q) - e_0(Q, A)$ *szám minden* $Q \lhd A$ *paraméterideálra azonos, akkor* A*-ban minden paraméterrendszer redukált.*

Bizonyítás. Legyen $Q=:(a_1, \ldots, a_d)$ tetszőleges paraméterideál, akkor az 1.3.4. lemma szerint $Q'=:(a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d^2)$ is paraméterideál. Legyen most $Q_0=:(0)$, $k=1, \ldots, d-1$ esetén pedig $Q_k=:(a_1, \ldots, a_k)$ és $E_k=:Q_{k-1}:a_k/Q_{k-1}$, akkor feltevésünk és az 1.3.1. tétel szerint

$$0 = l_A(A/Q')-e_0(Q', A)-l_A(A/Q)+e_0(Q, A) =$$

$$(1) \qquad = \sum_{k=1}^{d-1} [e_0(Q'/Q_k, E_k)-e_0(Q/Q_k, E_k)]+l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d^2/Q_{d-1})-$$

$$-l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d/Q_{d-1}) = \sum_{k=1}^{d-1} e_0(Q/Q_k, E_k)+l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d^2/Q_{d-1}:a_d),$$

ugyanis az 1.3.4. lemma értelmében

$$e_0(Q'/Q_k, E_k) = 2e_0(Q/Q_k, E_k).$$

Minthogy (1) jobb oldalán minden összeadandó ≥ 0, azért mindegyikük 0. Tehát $e_0(Q/Q_k, E_k)=0$, $k=1, \ldots, d-1$, ami az 1.3.2. lemma és az 1.3.3. definíció szerint éppen azt jelenti, hogy az $a_1, \ldots, a_d$ paraméterrendszer redukált.

Megjegyzés. A 2.1. segédtétel bizonyításából az is kiderül, hogy

$$l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}:a_d^2/Q_{d-1}:a_d) = 0,$$

tehát ha a 2.1. segédtétel feltevése teljesül, akkor minden $a_1, \ldots, a_d$ paraméterrendszerre

$$Q_{d-1}: a_d^n = Q_{d-1}: a_d.$$

Dolgozatunk fő eredménye a következő tétel, amely BUCHSBAUM problémájának a megoldását szolgáltatja:

2.2. TÉTEL. *Legyen (A, M) lokális gyűrű,* dim $A=d$, *akkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

(i) *létezik olyan $I(A)$ invariáns, hogy minden $Q \lhd A$ paraméterideálra*

$$l_A(A/Q)-e_0(Q, A) = I(A),$$

(ii) *A* B-*gyűrű.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii): Legyen $a_1, \ldots, a_d$ egy tetszőleges paraméterrendszer, $a \in M$ pedig olyan, hogy $a_1, \ldots, a_{d-1}, a$ is paraméterrendszer. Az 1.3.4. lemma szerint akkor paraméterrendszer $a_1, \ldots, a_{d-1}, a \cdot a_d$ is. A 2.1. segédtétel szerint minden paraméterrendszer redukált, azaz

$$l_A(A/Q)-e_0(Q, A) = l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d/Q_{d-1}),$$

feltevésünk értelmében pedig ez a szám invariáns, így

$$l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d/Q_{d-1}) = l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a \cdot a_d/Q_{d-1}) = l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a/Q_{d-1}).$$

Innen következik egyrészt $Q_{d-1}:a_d=Q_{d-1}:a \cdot a_d$, másrészt $Q_{d-1}:a=Q_{d-1}:a \cdot a_d$, vagyis

$$Q_{d-1}: a_d = Q_{d-1}: a,$$

és így az 1.7. tétel szerint A **B**-gyűrű.

(ii)$\Rightarrow$(i): A bizonyítást d szerinti teljes indukcióval végezzük. Mindenekelőtt azonban megjegyezzük, hogy az 1.10. következmény szerint A-ban minden paraméterrendszer redukált. Legyen $d=1$, a_1 és a (redukált) paraméterrendszer, akkor az 1.7. tétel értelmében $0{:}a_1=0{:}a$, így

$$l_A(A/(a_1))-e_0((a_1), A)-l_A(A/(a))+e_0((a), A) = l_A(0\colon a_1)-l_A(0\colon a) = 0.$$

Tegyük most fel, hogy $\dim A \leqq d-1$ esetén az állítás igaz. Legyen $\dim A=d$ és $a_1, \dots, a_d$ egy tetszőleges (redukált) paraméterrendszer, $Q=\colon (a_1, \dots, a_d)$ és $B=\colon (a_1, \dots, a_{d-1})$, akkor $l_A(A/Q)-e_0(Q, A)=l_{A/B}(B{:}a_d/B)$. Itt a baloldal független az $a_1, \dots, a_d$ elemek sorrendjétől, ezért a jobboldal is független tőle. Legyen most $a_1', \dots, a_d'$ egy tetszőleges másik (redukált) paraméterrendszer, $Q'=\colon (a_1', \dots, a_d')$, $B'=\colon (a_1', \dots, a_{d-1}')$. Az 1.1. segédtételünk szerint létezik olyan $a\in M$, hogy $a\notin P$ egyetlen $P\in \operatorname{Assh}(B)\cup \operatorname{Assh}(B')$-re sem. A 0.3.11a. következmény és az 1.7. tétel (ii) állítása szerint akkor

$$B\colon a_d = B\colon a \quad \text{és} \quad B'\colon a_d' = B\colon a.$$

Legyen most $\bar{A}=\colon A/(a)$, $C=\colon (a, a_1, \dots, a_{d-2})$, $C'=\colon (a, a_1', \dots, a_{d-2}')$, $\bar{C}=\colon C\cdot\bar{A}$, $\bar{C}'=\colon C'\cdot\bar{A}$. Az 1.11. következmény szerint $\bar{A}$ is $\mathbf{B}$-gyűrű, és $(\bar{C}, a_{d-1}\cdot\bar{A})$, ill. $(\bar{C}', a_{d-1}'\cdot\bar{A})$ paraméterideál $\bar{A}$-ban. Ekkor

$$l_A(A/Q)-e_0(Q, A) = l_{A/B}(B\colon a_d/B) = (l_{A/B}(B\colon a/B) = l_{A/C}(C\colon a_{d-1}/C),$$

mivel egyik fenti megjegyzésünk értelmében ez a kifejezés független az elemek sorrendjétől

$$= l_{\bar{A}/\bar{C}}(\bar{C}\colon \bar{a}_{d-1}/\bar{C}),$$

mivel

$$\bar{C}\colon \bar{a}_{d-1}/\bar{C} = (C/(a)\colon \bar{a}_{d-1})/(C/(a)) \cong (C\colon a_{d-1}/(a))/(C/(a)) \cong C\colon a_{d-1}/C$$

$$= l_{\bar{A}/\bar{C}}(\bar{C}'\colon \bar{a}_{d-1}'/\bar{C}') \text{ az indukciós feltevés szerint}$$

$$= l_{A/C'}(C'\colon a_{d-1}'C') = l_{A/B'}(B'\colon a/B') = l_{A/B'}(B'\colon a_d'/B') = l_A(A/Q')-e_0(Q', A),$$

q. e. d.

2.3. Következmény. Ha A $\mathbf{B}$-gyűrű, akkor tetszőleges $a_1, \dots, a_d$ paraméterrendszerre és n természetes számra

$$Q_{d-1}\colon a_d^n = Q_{d-1}\colon a_d.$$

(L. a 2.1. segédtétel utáni megjegyzést.)

Megjegyzés. A fenti tétel szerint $l(A/Q)-e_0(Q, A)$ általában nem invariánsa az A lokális gyűrűnek. Elképzelhető viszont, hogy ez a különbség mégiscsak konstans, ha csupán olyan Q paraméterideálokra szorítkozunk, amelyek generálhatók gyenge prímsorozattal. A következő példa azonban azt mutatja, hogy még ez sem áll fenn.

Tekintsük ismét az 1.1.1. tételben szereplő A lokális gyűrűt, továbbá legyen $Q=\colon (x_3, x_2)$ és $Q'=\colon (x_3^2, x_3+x_2)$. A 2.1.3. következmény utáni példában láttuk, hogy x_3, x_2 gyenge prímsorozat; hasonlóan igazolható, hogy x_3^2, x_3+x_2 is az. Végül az 1.1.1. tétel bizonyítása szerint $l(A/Q)-e_0(Q, A)=1$, és ugyanolyan módon látható az is, hogy $l(A/Q')-e_0(Q', A)=2$.

Most megadunk egy szükséges és egy elegendő feltételt annak eldöntésére, hogy egy lokális gyűrű **B**-gyűrű-e. Az ezeknek megfelelő esetekben megadjuk az $I(A)$ invariánst is. A 3. § példái nyomán látni fogjuk, hogy egyik feltételünk sem szükséges és elegendő.

2.4. SEGÉDTÉTEL. *Legyen* (A, M) *lokális gyűrű,* $C \lhd A$, *és tegyük fel, hogy* A/C **B**-*gyűrű. Legyen továbbá* $a_1, \ldots, a_t \in M$ *olyan, hogy* $\dim(C, a_1, \ldots, a_t) = \dim C - t \geqq 0$, *akkor*

$$U(C) \cap (a_1, \ldots, a_t) \subseteqq C.$$

Bizonyítás. t szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. $t=0$ esetén $(a_1, \ldots, a_t) =: (0)$, az állítás triviális. Legyen most $t \geqq 1$, és tegyük fel, hogy $t-1$-ig az állítás igaz. Legyen $D =: (a_1, \ldots, a_t)$ és $D' =: (a_1, \ldots, a_{t-1})$, $u =: \sum_{i=1}^{t} r_i a_i \in U(C) \cap D$ tetszőleges elem. A/C **B**-gyűrű, így az 1.7. tétel (ii) állítása szerint ($k=0$ esetén)

$$M/C \cdot U(0) \subseteqq (0),$$

azaz

$$M \cdot U(C) \subseteqq C.$$

Ezért $r_t \cdot a_t^2 = u a_t - \sum_{i=1}^{t-1} r_i a_i a_t \in (C, D')$, tehát $r_t \in (C, D') : a_t^2$. Minthogy azonban $a_1, \ldots, a_t$ paraméterrendszerré egészíthető ki A/C-ben (l. 0.3.11a. következmény) és A/C **B**-gyűrű, azért $(C, D') : a_t^2 = (C, D') : a_t$. Eszerint $r_t a_t \in (C, D')$, azaz $r_t a_t = a' + \sum_{i=1}^{t-1} r_i' a_i$, ahol $a' \in C \subseteqq U(C)$. Ekkor

$$u - a' = \sum_{i=1}^{t} r_i a_i - a' = \sum_{i=1}^{t-1} (r_i + r_i') a_i \in U(C) \cap D',$$

az indukciós feltevésünk szerint $U(C) \cap D' \subseteqq C$, így $u \in C$, q.e.d.

2.5. TÉTEL. *Ha* A **B**-*gyűrű, akkor* **B**-*gyűrű* $A/U(0)$ *is, és*

$$I(A/U(0)) = I(A) - l_A(U(0)).$$

Bizonyítás. Legyen $a_1, \ldots, a_d$ tetszőleges paraméterrendszer A-ban, $Q =: (a_1, \ldots, a_d)$. Általában, ha A tetszőleges gyűrű,

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

pedig A-modulusokból álló tetszőleges egzakt sorozat, akkor a hosszúság definíciója szerint

$$l_A(N) = l_A(N') + l_A(N'').$$

Ha pedig A lokális gyűrű és Q paraméterideál, akkor

$$e_0(Q, N) = e_0(Q, N') + e_0(Q, N''),$$

minthogy a 3.1. tételt d-szer egymás után alkalmazva az e_0 multiplicitásokat elő tudjuk állítani hosszúságok összegeként, és így a problémát az előzőre vezetjük vissza.

Tekintsük most a következő két egzakt sorozatot:

$$0 \to U(0) \to A \to A/U(0) \to 0,$$

$$0 \to U(0)/U(0) \cap Q \to A/Q \to A/(U(0), Q) \to 0,$$

a fentiek szerint akkor

$$(2) \quad l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = l_A(A/(U(0), Q)) - e_0(Q, A/U(0)) + l_A(U(0)/U(0) \cap Q) - $$
$$- e_0(Q, U(0)).$$

Alkalmazzuk most a 2.4. segédtételt a $C=(0)$, $(a_1, ..., a_t)=Q$ esetben:

$$(0) \subseteqq U(0) \cap Q \subset (0),$$

ezért

$$U(0)/U(0) \cap Q \cong U(0).$$

Másrészt az 1.7. tétel (ii) állítása értelmében

$$a_k \cdot U(0) \subseteqq M \cdot U(0) \subseteqq (0),$$

így az 1.3.1. tétel előtti megjegyzés szerint

$$e_0(Q, U(0)) = 0.$$

Végül $U(0) \subseteqq \mathrm{Ann}\,(A/(U(0), Q))$ miatt (a $\bar{Q} = Q \cdot A/U(0)$ jelöléssel)

$$l_A(A/(U(0), Q)) = l_{A/U(0)}(A/(U(0), Q)) = l_{A/U(0)}(A/U(0))/\bar{Q}),$$

és ugyanezért

$$l_A((A/U(0))/Q^{n+1} \cdot (A/U(0))) = l_{A/U(0)}((A/U(0))/\bar{Q}^{n+1}),$$

így persze megegyezik a *Hilbert—Samuel*-polinomjuk főegyütthatója is, azaz $e_0(Q, A/U(0)) = e_0(\bar{Q}, A/U(0))$, ahol az első esetben $A/U(0)$-t mint A-modulust tekintjük, a második esetben pedig mint lokális gyűrűt.

Mindezeket (2)-be beírva azt kapjuk, hogy

$$(3) \quad l_{A/U(0)}((A/U(0))/\bar{Q}) - e_0(\bar{Q}, A/U(0)) = l_A(A/Q) - e_0(Q, A) - l_A(U(0)).$$

Minthogy pedig $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_d$ (ahol $\bar{a}_i$ az a_i-t tartalmazó $U(0)$ szerinti mellékosztály) akkor és csak akkor paraméterrendszer $A/U(0)$-ban, ha $a_1, ..., a_d$ paraméterrendszer A-ban, azért (3) éppen a kívánt állítás.

2.6. Következmény. Ha A **B**-gyűrű, $0 \leqq k < d$ és $a_1, ..., a_k$ kiegészíthető A egy paraméterrendszerévé, akkor $A/U(a_1, ..., a_k)$ is **B**-gyűrű, és

$$I(A/U(a_1, ..., a_k)) = I(A) - l_A(U(a_1, ..., a_k)).$$

Bizonyítás. Állításunk közvetlenül leolvasható az 1.11. következményből és a 2.5. tételből.

2.7. Segédtétel. *Legyen A lokális gyűrű, $B \lhd A$, $a_1, ..., a_s \in A$ pedig olyan elemek, amelyek A/B-sorozatot alkotnak, akkor $C =: (a_1, ..., a_s)$-sel ($s=0$ esetén $C =: (0)$)*

$$B \cap C = B \cdot C.$$

Bizonyítás. s szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. $s=0$ esetén az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $s-1$-re állításunk teljesül. Legyen $C'=:(a_1, \ldots, a_{s-1})$, továbbá $x=:\sum_{i=1}^{s} r_i a_i \in B \cap C$, akkor

$$r_s a_s = x - \sum_{i=1}^{s-1} r_i a_i \in (B, C'),$$

azaz

$$r_s \in (B, C') : a_s.$$

Minthogy azonban $a_1, \ldots, a_s$ A/B-sorozat, azért $(B, C'):a_s=(B, C')$, így létezik olyan $x' \in B$ elem, hogy

$$r_s = x' + \sum_{i=1}^{s-1} r_i' a_i.$$

Most

$$x - x' \cdot a_s = (r_1 + r_1' \cdot a_s)a_1 + \ldots + (r_{s-1} + r_{s-1}' \cdot a_s)a_{s-1} \in B \cap C',$$

az indukciós feltevés szerint $B \cap C' = B \cdot C'$, így létezik olyan $x_1, \ldots, x_{s-1} \in B$, melyre

$$x = x_1 a_1 + \ldots + x_{s-1} a_{s-1} + x' a_s \in B \cap C,$$

tehát $B \cap C \subseteq B \cdot C$; $B \cdot C \subseteq B \cap C$ triviális.

2.8. TÉTEL. *Legyen (A, M) lokális gyűrű. Ha $A/U(0)$ Cohen—Macaulay-gyűrű és $M \cdot U(0)=(0)$, akkor A* **B**-*gyűrű, és*

$$I(A) = l_A(U(0)).$$

Bizonyítás. Bizonyításunk hasonló a 2.5. tételéhez. Legyen $a_1, \ldots, a_d$ tetszőleges paraméterrendszer, $Q=:(a_1, \ldots, a_d)$. $M \cdot U(0)=(0)$ miatt itt is $e_0(Q, U(0))=0$. Ha most a 2.7. segédtételbe $B=:U(0)$-t és $C=:Q$-t teszünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$U(0) \cap Q = U(0) \cdot Q \subseteq U(0) \cdot M = (0),$$

vagyis itt is $U(0) \cap Q=(0)$. Most is érvényes tehát a 2.5. tételben nyert előállítás, de mivel $A/U(0)$ *Cohen—Macaulay*-gyűrű, azért $I(A/U(0))=0$. Ezért valóban

$$l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = l_A(U(0)).$$

3. §. Példák, problémák

Az itt szereplő példákkal az előző paragrafusban nyert eredményeinket kívánjuk megvilágítani.

3.1. TÉTEL. *Legyen m és n két tetszőleges természetes szám, akkor létezik olyan* **B**-*gyűrű: A, melyre* $\dim A=n$, $\operatorname{codh} A=0$ *és* $I(A)=m$.

Bizonyítás. Legyen K egy tetszőleges test, r és s pedig két tetszőleges természetes szám, $0<r<s$. Legyen továbbá $R_s=:K[x_1, \ldots, x_s]$, $B_r=:(x_1, \ldots, x_r) \cap \cap [(x_1, \ldots, x_r)^2, (x_{r+1}, \ldots, x_s)] \lhd R_s$, $R_s^*=:R_{s(x_1, \ldots, x_s)}$ és $B_r^*=:B_r \cdot R_s^*$. Ekkor R_s^* lokális gyűrű és $\dim R_s^*=s$. Képezzük most az $A_{r,s}=:R_s^*/B_r^*$ lokális gyűrűt; erre $\dim A_{r,s}=s-r$, továbbá $\operatorname{codh} A_{r,s}=0$, mivel B_r^*-nek van $(x_1, \ldots, x_s)$-primér komponense R_s^*-ban.

Minthogy R_s-ben $(x_1, ..., x_s) \cdot (x_1, ..., x_r) = B_r$, azért $A_{r,s}$-ben $M \cdot U(0) = (0)$; másrészt pedig $A_{r,s}/U(0) = R_s^*/(x_1, ..., x_r) \cdot R_s^*$ *Cohen—Macaulay*-gyűrű, hiszen benne $x_{r+1}, ..., x_s$ prímsorozat, így a 2.8. tétel szerint $A_{r,s}$ **B**-gyűrű, melyre

$$I(A_{r,s}) = l_{A_{r,s}}(U(0)) = l_{R_s}((x_1, ..., x_s) \cdot R_s/((x_1, ..., x_r)^2 \cdot R_s, (x_{r+1}, ..., x_s) \cdot R_s)) = r.$$

Innen $s = n+m$ és $r = m$ esetén éppen a kívánt állítást kapjuk.

Az itt megadott példa alapján a következőket állapíthatjuk meg:

KÖVETKEZMÉNY. 1. Attól még, hogy egy **B**-gyűrűben nincsen nem üres prímsorozat, lehet benne akármilyen nagy (előre megadott hosszúságú) gyenge prímsorozat.

2. **B**-gyűrűkben az $I(A)$ invariáns általában nem $\dim A - \operatorname{codh} A$.

A következő példában olyan egydimenziós lokális gyűrűt látunk, amelyben nincsen nem üres gyenge prímsorozat; a maximális gyenge prímsorozatok hossza tehát általában nem a gyűrű dimenziója.

3.2. *Példa.* Legyen K egy tetszőleges test,

$$R =: K[x, y]_{(x,y)} \quad \text{és} \quad B =: (x) \cap (y) \cap (x^3, y^3) = (x^3y, xy^3) \cdot R.$$

Ekkor $A =: R/B$ egydimenziós lokális gyűrű; megmutatjuk, hogy A-ban nincsen nem üres gyenge prímsorozat.

Tegyük fel, hogy van, akkor van olyan $f(x, y)$ homogén polinom, melyre

$$B:f = B:(x, y) = B:(x) \cap B:(y) = (x^3y, x^2y^2, xy^3).$$

Tegyük fel először, hogy f-ben nincsen lineáris tag: $f = \sum_{i+k \geqq 2} a_{ik}x^iy^k$, $a_{ik} \in K$. Akkor $x^2yf \in B$, azaz $x^2y \in B:f$, de $x^2y \notin B:(x, y)$, hiszen $y \cdot x^2y \notin B$.

Legyen most általában $f = ax + by + g$, ahol $a, b \in K$ és $g(x, y)$ olyan polinom, amely nem tartalmaz lineáris tagot. Legyen továbbá $h =: ax^2y - bxy^2$, akkor $h \cdot g \in B$ és $h \cdot (ax + by) = a^2x^3y - b^2xy^3 \in B$, azaz $h \in B:f$, de $h \notin B:(x, y)$.

Mindkét esetben ellentmondáshoz jutottunk, tehát semmilyen f polinom sem alkothat A-ban gyenge prímsorozatot.

A 0.3.15. 3) gyakorlat szerint perfekt polinomideálokból *Cohen—Macaulay*-gyűrűket nyerhetünk, és ez a tulajdonság jellemzi is a perfekt ideálokat. Ezért felmerül a kérdés: milyen polinomideálokra szolgáltat ez az eljárás **B**-gyűrűket? A következő példa azt mutatja, hogy az így definiált polinomideálok osztálya határozottan nagyobb a perfekt ideálokénál.

3.3. *Példa.* Legyen K egy tetszőleges test,

$$R =: K[x_0, ..., x_4] \quad \text{és} \quad B =: (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4) = (x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4).$$

A 0.2.7. definíció utáni 4) gyakorlat szerint $B \lhd R$ nem perfekt. Tekintsük most az

$$A =: R_{(x_1, ..., x_4)} B \cdot R_{(x_1, ..., x_4)}$$

lokális gyűrűt. Megmutatjuk, hogy A **B**-gyűrű.

Minthogy dim $A=2$ és $(x_1, \ldots, x_4) \cdot U(B) = (x_1, \ldots, x_4) \cdot B \subseteqq B$, azért az 1.7. tétel (ii) állítása értelmében elegendő azt igazolnunk, hogy ha $F \in (x_1, \ldots, x_4)$, $F \notin (x_1, x_2)$ és $F \notin (x_3, x_4)$, akkor

$$(x_1, \ldots, x_4)\, U(B, F) \subseteqq (B, F).$$

Írjuk fel F-et $F=f+g$ alakban, ahol $f \in (x_1, x_2)$, $f \notin (x_3, x_4)$ és $g \in (x_3, x_4)$, $g \notin (x_1, x_2)$, akkor $(B, F) = (B, f+g)$. Megmutatjuk, hogy $U(B, F) = (B, f, g)$. Ebből már következik a kívánt állítás, hiszen $x_3 f, x_4 f, x_1 g, x_2 g \in B$ miatt $x_1 f = x_1(f+g) - x_1 g \in (B, F)$, hasonlóan $x_2 f, x_3 g, x_4 g \in (B, F)$ és így $(x_1, \ldots, x_4) U(B, F) = (x_1, \ldots, x_4) B + (x_1, \ldots, x_4) f + (x_1, \ldots, x_4) g \subseteqq (B, F)$.

Meg kell még mutatnunk, hogy $U(B, F) = (B, f, g)$.

Ismeretes (és könnyen igazolható), hogy egy tetszőleges S gyűrű ideáljai moduláris hálót alkotnak, vagyis ha $X, Y, Z \lhd S$ és $Y \subseteqq Z$, akkor $(X, Y) \cap Z = (Y, X \cap Z)$. Ezt az azonosságot kétszer alkalmazva kapjuk, hogy

$$(x_1, x_2, g) \cap (x_3, x_4, f) = (B, f, g).$$

A dimenziócsökkentés tétele (0.2.3. tétel) értelmében itt a baloldalon szereplő mindkét R-beli ideál 1-dimenziós, tehát a 3 főosztályhoz tartozik és így egynemű, ami egyben azt is jelenti, hogy (B, f, g) egynemű ideál. A dimenziócsökkentés tétele és F választása szerint (B, F) is 1-dimenziós ideál, tehát $U(B, F)$ és (B, f, g) egyaránt 1-dimenziós primér ideálok metszete. Most először azt mutatjuk meg, hogy mindkét ideálhoz ugyanazok a prímideálok tartoznak. Ehhez az 1. fejezetben definiált radikál egy tulajdonságára lesz szükségünk.

Az 1.2.2. gyakorlat (6) pontjában megadott definíció egy ekvivalens átfogalmazása szerint egy X ideál radikálja, $\sqrt{X}$ az X-hez tartozó izolált prímideálok metszete. Igazolható, hogy ha $\sqrt{X} = P_1 \cap \ldots \cap P_r$, akkor tetszőleges Y ideálra

$$\sqrt{(X, Y)} = \sqrt{(X, P_1)} \cap \ldots \cap \sqrt{(X, P_r)}.$$

Ezt az összefüggést felhasználva

$$\sqrt{U(B, F)} = \sqrt{(B, F)} = \sqrt{(x_1, x_2, F)} \cap \sqrt{(x_3, x_4, F)} = \sqrt{(x_1, x_2, g)} \cap \sqrt{(x_3, x_4, f)} =$$
$$= \sqrt{(x_1, x_2, f, g)} \cap \sqrt{(x_3, x_4, f, g)} = \sqrt{(B, f, g)},$$

tehát az $U(B, F)$-hez, ill. a (B, f, g)-hez tartozó izolált prímideálok (azaz a hozzájuk tartozó összes prímideál) metszete megegyezik, amiből a prímtulajdonság és az azonos dimenziók miatt következik, hogy a két ideálhoz tartozó prímideálok páronként megegyeznek.

Legyen most P egy tetszőleges, az $U(B, F)$-hez és a (B, f, g)-hez tartozó prímideál. Igazolnunk kell még, hogy $U(B, F)$ és (B, f, g) P-primér komponense megegyezik, vagy ami ugyanazt jelenti, hogy (B, F) és (B, f, g) P-primér komponense megegyezik, tehát hogy $(B, F) \cdot R_P = (B, f, g) \cdot R_P$. Tegyük fel, hogy P a (B, f, g)-ben pl. (x_1, x_2, g)-hez tartozik, akkor dim $P=1$ miatt x_3 és x_4 közül legalább az egyik biztosan nem eleme P-nek. Most akkor

$$(B, F) \cdot R_P = \big(B \cdot R_P, (F) \cdot R_P\big) = \big((x_1, x_2) \cdot R_P, (F) \cdot R_P\big) = (x_1, x_2, F) \cdot R_P =$$
$$= (x_1, x_2, g) \cdot R_P,$$

másrészt viszont

$$(B, f, g)\cdot R_P = \bigl(B\cdot R_P, (f, g)\cdot R_P\bigr) = \bigl((x_1, x_2)\cdot R_P, (f, g)\cdot R_P\bigr) = (x_1, x_2, f, g)\cdot R_P =$$
$$= (x_1, x_2, g)\cdot R_P,$$

tehát valóban $(B, F)\cdot R_P = (B, f, g)\cdot R_P$. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy a fenti példában B egynemű ideál, azaz $U(B)=B$, így A-ban $U(0)=(0)$, tehát $A/U(0)\cong A$, A pedig nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű, hiszen B nem perfekt. Ez azt mutatja, hogy a 2.8. tételben megadott elégséges feltétel nem szükséges ahhoz, hogy A **B**-gyűrű legyen. A következő példa alapján pedig a 2.5. tételben látott szükséges feltétel nem elegendő.

3.4. *Példa.* Tekintsük ismét az előző példában szereplő R gyűrűt és $B \lhd R$ ideált. Legyen

$$C =: B\cap(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1x_3, x_2x_4) = (x_1x_3, x_2x_4, x_1x_4^2, x_1^2x_4, x_2x_3^2, x_2^2x_3)$$

és

$$S =: R_{(x_1, \dots, x_4)}/C\cdot R_{(x_1, \dots, x_4)}.$$

Minthogy $U(C)=U(B)=B$, azért $(x_1, \dots, x_4)\cdot U(C)=(x_1, \dots, x_4)\cdot B$, és könnyen igazolható, hogy $(x_1, \dots, x_4)\cdot B\subseteq C$; $(x_1, \dots, x_4)U(C)\subseteq C$-ből viszont következik, hogy S-ben $M\cdot U(0)=(0)$. Tekintsük most (x_1+x_3)-at. x_1+x_3 nem eleme egyetlen, C-hez tartozó maximális dimenziójú prímideálnak sem $R_{(x_1, \dots, x_4)}$-ben, így S-ben x_1+x_3 kiegészíthető paraméterrendszerré. Ha megmutatjuk, hogy $(x_1, x_4)\cdot U(C, x_1+x_3)\subsetneqq(C, x_1+x_3)$, akkor S-ben $M\cdot U\bigl((x_1+x_3)\cdot S\bigr)\subsetneqq(x_1+x_3)\cdot S$, így az 1.7. tétel (ii) állítása értelmében S nem **B**-gyűrű.

Valóban,

$$(C, x_1+x_3) = (x_1x_3, x_2x_4, x_1x_4^2, x_1^2x_4, x_2x_3^2, x_2^2x_3, x_1+x_3) =$$
$$= (x_1^2, x_3^2, x_1x_3, x_2x_4, x_2^2x_3, x_1x_4^2, x_1+x_3) = (x_1, x_2, x_3)\cap(x_1, x_3, x_4)\cap$$
$$\cap(x_1^2, x_2, x_3^2, x_4^2, x_1x_3, x_1+x_3)\cap(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4, x_1x_3, x_1+x_3),$$

így

$$U(C, x_1+x_3) = (x_1, x_2, x_3)\cap(x_1, x_3, x_4) = (x_1, x_3, x_2x_4),$$

és most pl. $x_2x_1\in x_2U(C, x_1+x_3)$, de $x_2x_1\notin(C, x_1+x_3)$, tehát S nem **B**-gyűrű, holott $U(C)=B$ miatt $S/U(0)\cong A$, vagyis $S/U(0)$ **B**-gyűrű.

Most egy újabb dimenzió-fogalmat definiálunk:

3.5. Definíció. Legyen A lokális gyűrű. A gyenge A-sorozatok maximális elemszámát A gyenge homologikus kodimenziójának nevezzük, és így jelöljük: s-codh A.

Az 1.3. és az 1.5. következmény szerint akkor

$$\operatorname{codh} A \leqq \text{s-codh } A \leqq \dim A.$$

Az 1.3. következmény utáni példa és a 3.2. példa szerint itt egyik egyenlőtlenség sem helyettesíthető általában egyenlőséggel. Az 1.7. tétel (i) állítása értelmében ha A **B**-gyűrű, akkor s-codh $A=\dim A$, és minden maximális gyenge A-sorozat hossza $\dim A$; az 1.3. következmény utáni példa viszont azt mutatja, hogy s-codh $A=\dim A$-ból még nem következik, hogy A **B**-gyűrű.

Végül pedig néhány további problémát sorolunk fel:

4. *Probléma.* a) Egyenlő hosszúak-e egy lokális gyűrűben a maximális gyenge prímsorozatok?

b) Jellemezzük azokat az A lokális gyűrűket, amelyekre $\dim A = \text{s-codh}\, A$.

c) **B**-gyűrű-e az A lokális gyűrű, ha minden maximális gyenge A-sorozat hossza $\dim A$?[4)]

5. *Probléma.* Adjunk meg lokális gyűrűkben olyan „használható" feltételeket, amelyek teljesülése esetén abból, hogy egy paraméterrendszer generálható gyenge prímsorozattal, következik ugyanez minden paraméterrendszerre — ami pedig éppen azt jelenti, hogy a vizsgált gyűrű **B**-gyűrű.[5)]

6. *Probléma.* Jellemezzük a **B**-gyűrűket paraméterrendszerek felhasználása nélkül.

7. *Probléma.* Jellemezzük a **B**-gyűrűket homologikus módszerek, pontosabban a lokális kohomológia módszereinek a segítségével. (A *Cohen—Macaulay*-gyűrűk ilyen jellemzését l. [6], [11].)[6)]

8. *Probléma.* Jellemezzük (homologikus módszerekkel) azokat a lokális gyűrűket, amelyekben létezik gyenge prímsorozat. (Prímsorozatokra l. MATSUMURA [14], 26. tétel.)

9. *Probléma.* Határozzuk meg az A **B**-gyűrű $I(A)$ invariánsát.[7)]

10. *Probléma.* a) Jellemezzük azokat a **B**-gyűrűket, amelyekben $I(A) = \dim A - \operatorname{codh} A$.

b) Adjunk meg további érdekes $I(A)$ invariánsokat, valamint olyan feltételeket, amelyek ezek fellépését vonják maguk után.[8)]

11. *Probléma.* **B**-gyűrű-e $K[x_0, \ldots, x_4]_{(x_1, \ldots, x_4)}/P \cdot K[x_0, \ldots, x_4]_{(x_1, \ldots, x_4)}$, ahol P a *Macaulay*-féle prímideál?[9)]

12. *Probléma.* Legyen $R =: K[x_0, \ldots, x_n]$. Jellemezzük azokat a $C \lhd R$ ideálokat, amelyekre $(R/C)_{(x_0, \ldots, x_n) \cdot R/C}$ **B**-gyűrű. (Ez a probléma a geometriai alkalmazás szempontjából igen érdekes.)

[4)] Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Az a) és a c) kérdésre a válasz: nem, ld. N. T. CUONG—N. V. TRUNG: Über **B**-Moduln und ihre Verallgemeinerungen, Szakdolgozat, Universität Halle, 1974. A probléma b) részre továbbra is nyitott.

[5)] Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: A $\dim A - \operatorname{codh} A = 1$ speciális esetben ismeretes ilyen feltétel, ld. N. T. CUONG—N. V. TRUNG: Über **B**-Moduln und ihre Verallgemeinerungen, Szakdolgozat, Universität Halle, 1974.

[6)] Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Azóta már vannak részeredmények: egy szükséges feltétel (ld. B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20]) és egy elegendő feltétel (ld. J. STÜCKRAD—W. VOGEL: Toward a theory of Buchsbaum singularities, preprint, Universität Halle, 1975).

[7)] Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: A problémát időközben megoldották, ld. B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20].

[8)] Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: a) megoldását ld. B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20], b)-hez pedig egy újabb érdekes invariánst adott meg P. SCHENZEL: Lokale Kohomologie und Ungemischtheitssätze, Disszertáció, Universität Halle 1975.

[9)] Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Időközben bizonyítást nyert, hogy a fenti gyűrű valóban **B**-gyűrű, ld. J. STÜCKRAD—W. VOGEL: Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum-Varietäten, *Monatsh. Math.* **78** (1974), 433—445.

IRODALOM

[1] AUSLANDER, M.—BUCHSBAUM, D. A.: Codimension and multiplicity, *Ann. of Math.* **68** (1958), 625—657.
[2] BUCHSBAUM, D. A.: *Complexes in local ring theory.* In: *Some aspects of ring theory*, C.I.M.E., Roma, 1965, 223—228.
[3] BUDACH, L.—VOGEL, W.: Cohen—Macaulay Moduln und der Bezoutsche Satz, *Monatsh. Math.* **73** (1969), 97—111.
[4] GODDARD, L. S.: Bases for the prime ideals associated with certain classes of algebraic varieties, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **39** (1943), 35—47.
[5] GODDARD, L. S.: Prime ideals and postulation formulae. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **44** (1948), 43—49.
[6] GROTHENDIECK, A.: *Local Cohomology, Lecture Notes in Math.*, **41**, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1967.
[7] GRÖBNER, W.: *Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen*, Springer, Wien—Innsbruck, 1949.
[8] GRÖBNER, W.: Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen, *Arch. Math.* **16** (1965), 257—264.
[9] GRÖBNER, W.: *Algebraische Geometrie* I, II. B.I. Mannheim, 1968/70.
[10] GRÖBNER, W.: Teoria degli ideali e geometria algebrica, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **41** (1971), 171—242.
[11] HARTSHORNE, R.: *Residues and Duality, Lecture Notes in Math.*, **20**, Springer, Berlin—New York, 1966.
[12] HERRMANN, M.—VOGEL, W.: Bemerkungen zur Multiplizitätstheorie von Gröbner und Serre, *J. Reine Angew. Math.* **241** (1970), 42—46.
[13] HERRMANN, M.—VOGEL, W.: Über Cohen—Macaulay Punkte, *J. of Algebra*, **24** (1973), 396—404.
[14] MATSUMURA, H.: *Commutative algebra*, W. A. Benjamin, New York, 1970.
[15] MUMFORD, D.: *Varieties defined by quadratic equations*, C.I.M.E., Roma, 1970, 31—100.
[16] REES, D.: The grade of an ideal or module, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), 28—42.
[17] REITBERGER, H.—VOGEL, W.: A cohomology condition in idealtheoretical multiplicity theory. *Rend. di Mat.* (3), Vol. **5**, Ser. VI. (1972), 1—7.
[18] RENSCHUCH, B.: Verallgemeinerungen des Bezoutschen Satzes, *Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl.* **107** (1966), Nr. 4.
[19] RENSCHUCH, B. u. a.: Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, *Wiss. Z. der Pädagog. Hochsch. Potsdam, Math.-Naturw. Reihe* **17** (1973), 141—153.
[20] RENSCHUCH, B.—STÜCKRAD, J.—VOGEL, W.: Weitere Bemerkungen zu einem Problem der Schnittheorie und über ein Mass von A. Seidenberg für die Imperfektheit, *J. of Algebra*, **37** (1975), 447—471.
[21] SAMUEL, P.: *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Ergebn. der Math.*, **4**, Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
[22] SERRE, J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.* **61** (1955), 197—278.
[23] SERRE, J.-P.: *Algèbre Locale. Multiplicités, Lecture Notes in Math.*, **11**, Springer, Berlin, 1965.
[24] STÜCKRAD, J.—VOGEL, W.: Über die h_1-Bedingung in der idealtheoretischen Multiplizitätstheorie, *Beitr. Alg. Geom.* **1** (1971), 73—76.
[25] STÜCKRAD, J.—VOGEL, W.: Ein Korrekturglied in der Multiplizitätstheorie von D. G. Northcott und Anwendungen, *Monatsh. Math.* **76** (1972), 264—271.
[26] STÜCKRAD, J.—VOGEL, W.: Eine Verallgemeinerung der Cohen—Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13** (1973), 513—528.
[27] VOGEL, W.: Grenzen für die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes, *Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin* **8** (1966), 1—7.
[28] VOGEL, W.: Idealtheoretische Ordnungsbestimmung des Schnittes einer Veroneseschen und Grassmannschen Varietät, *Arch. Math.* **21** (1970), 567—570.
[29] VOGEL, W.: Über eine Konstruktion von Primsequenzen und lokal vollständige Durchschnitte, *Publ. Math.*, (sajtó alatt).
[30] VOGEL, W.: Über eine Vermutung von D. A. Buchsbaum, *J. of Algebra*, **25** (1973), 106—112.
[31] VOGEL, W.: Schnitte von perfekten Mannigfaltigkeiten. In: *Beiträge zur algebraischen Geometrie*, Veröffentlichungen der Univ. Innsbruck, Math. Studien 91, Innsbruck, 1974.
[32] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Einführung in die algebraische Geometrie*, Springer, Berlin, 1939.

[33] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra* II, 4. kiadás, Springer, Berlin—Heidelberg, 1959.
[34] WEIL, A.: *Foundations of algebraic geometry*, 2. kiadás, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Nr. 29, Providence, 1962.
[35] ZARISKI, O.—SAMUEL, P.: *Commutative algebra* I, II. Van Nostrand, Princeton, 1958/60.

(Beérkezett: 1973. XII. 6.)

TO THE THEORY OF LOCAL RINGS
On a problem of D. A. Buchsbaum

By

W. VOGEL—L. MÁRKI

Summary

This work contains the material of the lecture "*To the theory of local rings — On a problem of D. A. Buchsbaum*" given by the first named author at the Eötvös Loránd University of Budapest in the fall semester, 1972. The aim of these lectures was to present some methods of local algebra and of algebraic geometry by giving the solution of a problem proposed by D. A. BUCHSBAUM (Brandeis University, Massachusetts, USA) at a summer school in Varenna (Italy) in 1965. Concerning the solution of this problem, the lectures were based on the works [20], [26] and [30]. The material was critically, by own ideas revised by the second named author.

Chapter 0 gives an introduction to commutative and local algebra. Most results from there are well known, they are to be found e.g. in the standard work of O. ZARISKI and P. SAMUEL "*Commutative Algebra*" I, II. Nevertheless, our exposition is directed towards the aim of the lectures, the problem of BUCHSBAUM. Hereby we give some results in §§2 and 3 of this chapter being published only in papers or even being unpublished yet. By giving several examples and exercises we had the intention to illustrate and to loosen this rather concise chapter.

Chapters I and II deal exclusively with the problem of D. A. BUCHSBAUM, formulated as follows: Let A be a local ring (noetherian, commutative with unity) and Q a parameter ideal. Consider the *Hilbert—Samuel*-polynomial with n sufficiently large:

$$l_A(A/Q^{n+1}) = e_0(Q, A)\binom{n+d}{d} - e_1(Q, A)\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^d e_d(Q, A)$$

where $d = \dim A$. Does there exist an invariant $I(A)$ of A such that

$$l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = I(A)?$$

In particular, BUCHSBAUM conjectured that $I(A) = \dim A - \operatorname{codh} A$.

In § 1 of Chapter I we show by an example that there exist local rings in which $l_A(A/Q) - e_0(Q, A)$ is not independent of the choice of Q. Further, in this chapter, we give a geometric interpretation of the problem.

In Chapter II we characterize the local rings in which the problem of D. A. BUCHSBAUM has a positive solution. These rings are called **B**-rings (after the name of BUCHSBAUM). For this characterization the notion of prime sequences is generalized as follows: Let A be a local ring, M its maximal ideal. The sequence $a_1, \ldots, a_r$ of elements of M is called a weak prime sequence (or weak A-sequence) if we have

$$M\cdot[(a_1, \ldots, a_{i-1}) : a_i] \subseteqq (a_1, \ldots, a_{i-1})$$

for $i = 1, \ldots, r$. Now the main result of this work says that the local ring A is a **B**-ring (i.e. there exists an invariant $I(A)$ with $l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = I(A)$) if and only if every system of parameters in A is a weak prime sequence. We also give further characterizations of **B**-rings, and conclude by giving some examples and a number of problems.

Б. Фогель—Л. Марки

К ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ

Об одной проблеме Д. А. Буксбаума

В этой работе излагается материал лекций «*К теории локальных колец — Об одной проблеме Д. А. Буксбаума*», прочитанных первым из вышеуказанных авторов в Будапештском Университете им. Лоранда Этвеша в осеннем семестре 1972 года. Лекции имели целью представить некоторые методы локальной алгебры и алгебраической геометрии путем решения проблемы Д. А. Буксбаума, предложенной на летнем конгрессе в Варенне (в Италии) в 1965-ом году. Решение этой проблемы основано на работах [20], [26], [30]. Материал лекций был критически переработан и дополнен собственными мыслями второго из вышеуказанных авторов.

В главе 0 излагаются основы коммутативной и локальной алгебры. Результаты этой главы вообще хорошо известны, они находятся, например, в книге О. Зарисского и П. Самюэля «*Коммутативная алгебра*», I. II. Всё-таки, наше построение преследует цель подготовиться к решению проблемы Буксбаума. При этом в §§2 и 3 приводятся некоторые результаты, опубликованные до сих пор только в отдельных трудах или совсем не опубликованные. Дается несколько примеров и упражнений, с намерением развернуть и пояснить эту довольно сжатую главу.

В главах I и II мы занимаемся исключительно проблемой Буксбаума, которую мы теперь сформулируем: Пусть A — локальное кольцо (нётерово, коммутативное с единицей) и Q — идеал, порождаемый системой параметров. Рассмотрим многочлен *Гильберта—Самюэля* для достаточно большого n:

$$l_A(A/Q^{n+1}) = e_0(Q, A)\binom{n+d}{d} - e_1(Q, A)\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^d e_d(Q, A),$$

где $d = \dim A$. Существует ли инвариант $I(A)$ кольца A такой, что

$$l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = I(A)?$$

В частности, Буксбаум предполагал, что $I(A) = \dim A - \operatorname{codh} A$.

В §1 главы I примером показывается существование локального кольца A, для которого $l_A(A/Q) - e_0(Q, A)$ зависит от выбора Q. Затем, в той же главе, дается геометрическая интерпретация проблемы.

В главе II характеризуются локальные кольца, для которых проблема Д. А. Буксбаума имеет положительное решение. Такие кольца называются **B**-кольцами (по имени Буксбаума). Чтобы осуществить эту характеризацию, обобщается понятие простой последовательности следующим образом: Пусть A – локальное кольцо, M – его максимальный идеал. Последовательность $a_1, \ldots, a_r$ элементов из M называется слабой простой последовательностью (или слабой A-последовательностью), если для всяких $i = 1, \ldots, r$ выполняется

$$M \cdot [(a_1, \ldots, a_{i-1}) : a_i] \subseteqq (a_1, \ldots, a_{i-1}).$$

Главный результат нашей работы утверждает, что локальное кольцо A является **B**-кольцом (т. е. существует инвариант $I(A)$ свойством $l_A(A/Q) - e_0(Q,A) = I(A)$) тогда и только тогда, если каждая система параметров в A — слабая простая последовательность. Даются также дальнейшие характеристики **B**-колец, а в заключение несколько примеров и ряд проблем.

NÉHÁNY IDŐSZERŰ KÉRDÉS A SZÁMOLÓGÉPEKKEL KAPCSOLATBAN, II*

Írta: POGÁNY CSABA

A következőkben napjaink számítástechnikai fejlődésének két jellegzetes eredményével foglalkozunk. Az első inkább szoftver jellegű, a másikban nagyobb szerepe van a hardvernek is. Az itt következő tárgyalás ismertető célú. A területtel kapcsolatos matematikai problémák egy külön dolgozatot igényelnek.

II. Rendszerek működésének, viselkedésének modellezése számológépekkel

1. Általános megjegyzések

Egy rendszer időbel iviselkedésének, működésének tanulmányozása a műszaki és gazdasági tervezési és elemzési munka szempontjából egyaránt rendkívül fontos. A nehézségek miatt azonban erre sokszor nem volt és ma sincs lehetőség, annak ellenére, hogy a helyzet napjainkban lényegesen javuló tendenciájú. Ez a javulás főleg a modellezés, pontosabban a számológépes modellezés fejlődésének köszönhető.

A számológépes működésmodellezés a rendszerek viselkedésének sok szempontból minden eddiginél pontosabb és kényelmesebb feltárását teszi lehetővé.

A viselkedésmodellezés kezdeti eredményei után, főleg kényelmi igények hatására keresni kezdték a sokszor bonyolult feladatokban leggyakrabban előforduló közös részeket, tipikus eljárásokat. Ennek eredményeként megjelentek az olyan „tipizált", „előregyártott", „féligkész" modellezési elemek, amelyeket nem kell minden új feladatnál elölről kezdve újra elkészíteni; ezekkel közvetlen felhasználás előtt egyszerű, főleg csak „összeillesztési" munkát kell végezni.

A statisztikailag kezelhető tömegjelenségekkel kapcsolatos modellezés és a közvetlen (elektromos) analóg számológépek tevékenységének digitális számológépi modellezése külön-külön úton elvezetett bizonyos speciális területekre vonatkozó, de viszonylag általános, széles körben alkalmazható modellezési rendszerek kialakulásához. E rendszerek technikai megoldásának közös magja a következő:

1. Megadott szabályok szerint le kell írni a tanulmányozni kívánt rendszert (ha ez nem lehetséges, akkor az ilyen rendszerek modellezését másképpen kell megkísérelnünk).

2. Le kell írnunk azokat a hatásokat, amelyek a tanulmányozni kívánt rendszerre hatnak (természetesen ennek is kötött formája van; az olyan esetekben, amikor ez nem lehetséges, itt is más utakat kell keresnünk).

* E dolgozat folytatása az irodalomjegyzék első cikkének, amely az I. fejezetet tartalmazza.

3. A számológépbe be kell vinnünk azt a programot, amely a megadott módon (adott rendszerben, adott „nyelven") leírt modellt működtetni tudja, helyesebben a számológép működését úgy vezérli, hogy a gép a modell viselkedésének, működésének egy modelljét állítja elő.

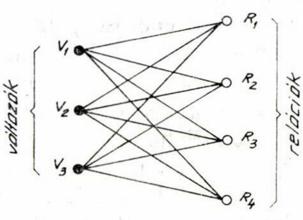
4. Meg kell indítanunk az előbb említett működésmodellező (viselkedésmodellező) eljárás működését.

Ezek után megkapjuk (pl. táblázatok vagy görbék formájában) a modellnek a rá ható hatások következtében kialakuló viselkedésének kívánt jellemzőit.

A következőkben bemutatunk egy illusztratív célú számológépes modellezési rendszert, amely a modellezendő rendszer leírási rendszeréből, a modellezendő rendszert érő hatások leírási rendszeréből és a „modellműködtető" programból áll.[1]

2. A rendszerleírás

Egy rendszert (általunk fontosnak ítélt) változói és ezek között *minden pillanatban* fennálló relációk megadásával tekintünk megadottnak. Ez a megadás a rendszernek egy relációgráf segítségével történő szemléletes megjelenítését is lehetővé teszi. (Ezzel a következőkben azért foglalkozunk részletesebben, mert a rendszerleírást alkalmas módon elkészített gráffal a gyakorlatban előforduló rendszerek nagy részében el lehet végezni.) Az 1. ábrán egy 3 változós, négy[2] relációval megadott rendszer gráfja szerepel. (Az egyes változók (v_1, v_2, ...) és az egyes relációk (R_1, R_2, ...) természetesen függhetnek egymástól, egyes itt szereplő vagy más változóktól is, az ilyen bonyolltabb esetekkel itt nem foglalkozunk.)



1. ábra

A gyakorlatban nagyon sok helyen fordulnak elő olyan relációk, amelyek egy (egy- vagy többváltozós) művelet operandusai és e művelet eredménye, illetve eredményei között állnak fenn. Ez indokolja azt, hogy a modellezési eljárások ezeket, a műveletekkel egy-egyértelmű kapcsolatba hozható relációkat részesítsék előnyben. (Ilyen felfogásnál természetesen külön gondolnunk kell a változók közötti elsődlegességi viszony figyelembevételére, azaz arra, hogy mely változók azok — ha ilyenek vannak —, amelyek másokat a valóságban meghatároznak, amelyek mintegy „előbb vannak" mint mások.)

Így tehát relációk megadása történhet műveletek megadásával is. Lássunk egy példát! Legyen rendszerünknek öt változója *a*, *b*, *c*, *d* és *e*. Ezek között álljanak fenn egyidejűleg a következő relációk

$$a^2 = c,$$

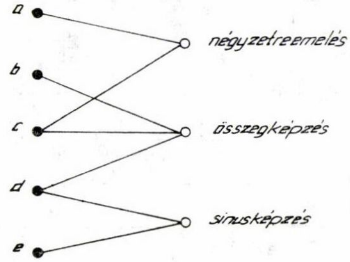
$$b + c = d,$$

$$\sin d = e.$$

[1] Ez a rendszer lényegesen egyszerűbb a SIMULA 67-hez hasonló bonyolult és nagy igényű rendszereknél.

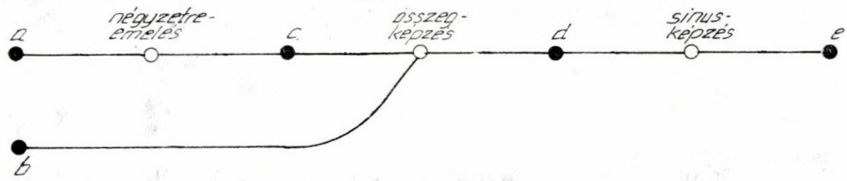
[2] A relációk száma bizonyos mértékig szubjektív megítélés kérdése is, hiszen relációkat összevonni és felbontani is lehet.

Rendszerünk „relációgráfját" a 2. ábra mutatja. Az ábrából látható, hogy pusztán a gráfból nem lehet a generáló relációrendszert rekonstruálni, még akkor sem, ha a gráfot „ügyesebben" helyezzük el a síkban (3. ábra). Ha azonban az egyes relációkban megkülönböztetünk „függő" és „független" változókat, illetve a műveleteknél megmondjuk, hogy mely változókat kell operandusnak tekinteni, akkor az egyértelműségi probléma a gyakorlatban előforduló esetek nagy részében a gráf éleinek irányításával megoldható. Példánk esetében így a 4. ábrából kiolvasható pl. az, hogy a négyzetreemelési művelet operandusa a, eredménye c, vagy az összegképzés operandusa b és c, eredménye pedig d. Célszerű, ha megkülönböztetett változókra vonatkozó relációkat megkülönböztetett módon jelöljük. Jól használható például a „független" változók megkülönböztetett jelölése (fölé vagy aláhúzással stb., pl. $\bar{a}+\bar{b}=c$) vagy műveletek esetében pl. $b+c=d$ helyett $b+c \Rightarrow d$ írásmód, ha b és c operandus. (Az olyan esetekben, amikor a változók közötti előbbi módokon történő különbségtételre elvi okokból nincs lehetőség, az egyes gyakorlati módszerek más és más módon járnak el. Ezekkel a következőkben nem foglalkozunk.)

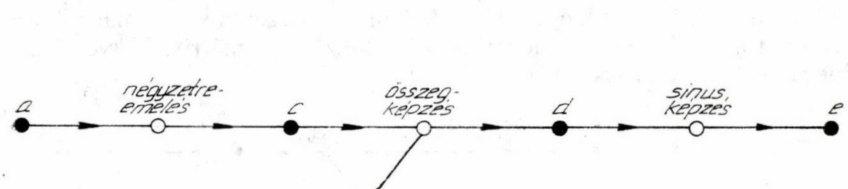


2. ábra

A rendszerleírásra, speciálisan a rendszert definiáló relációk, illetve műveletek megadására két módszert használunk. Az egyik módszernél formulákkal, a másiknál egymáshoz csatlakozó műveletekkel írjuk le a kívánt relációkat. Az első módszer magától értetődően egyszerű. A második módszernél lényegében a relációgráfot kell egyértelműen leírnunk, ami szintén egyszerű feladat, és a gyakorlati megvalósítás szempontjából többféleképpen is történhet. Példánk esetében ez a feladat egy



3. ábra



4. ábra

illeszkedési mátrixszal megoldható (5. ábra). (Meg kell jegyezni, hogy a mátrixnak itt csak a bevonalkázott részei tartalmaznak és tartalmazhatnak információt. Ha a rendszerben több ugyanolyan művelet is szerepel, akkor természetesen ezek között különbséget kell tenni, hiszen ezek a gráf különböző csomópontjainak felelnek meg.

	a	b	c	d	e	+	↑2	sin
a							1	
b						1		
c						1		
d								1
e								
+				1				
↑2			1					
sin					1			

5. ábra

3. A rendszert érő hatások leírása

Feltételeztük, hogy a vizsgálni kívánt rendszerek viselkedését a kezdeti állapotuk és az őket érő hatások határozzák meg. Meg kell adnunk tehát a modell működtetéséhez bizonyos kezdeti értékeket és a rendszert érő hatások modelljeként a rendszer modelljére ható hatásokat is. A kezdeti értékek megadása esetleges és főleg technikai kérdés, ezért ezzel nem foglalkozunk. A hatások megadása sem okoz különösebb problémát. A rendszert érő hatásokat különböző időtől függő változók segítségével vesszük figyelembe, megadásuk tehát újból csak relációk, illetve műveletek megadási problémájára vezethető vissza. Az elmondottak szemléltetését szolgálja a következő példa. Az előbbiekben említett rendszerünket a kezdeti

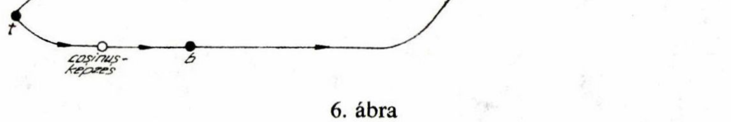
$$a=b=c=d=e=0$$

állapotában érje olyan hatás, amelynek eredménye az, hogy az a változó az idővel szinuszosan, b pedig koszinuszosan kezd változni, azaz a rendszert definiáló relációkon kívül ezekkel egyidejűleg fenn kell állniok a további

$$a = \sin t,$$

$$b = \cos t,$$

relációnak is, ahol t független változó (amely, ha nem monoton változik, akkor bizonyos hiszterézis jellegű, lényegében többértékűséggel kapcsolatos jelenségekre is számítanunk kell). A gyakorlati megadás szempontjából leggyakrabban itt is kétféleképpen szoktak eljárni: vagy kiegészítő formulákat adnak meg, vagy a relációgráfot egészítik ki, és ezt a kiegészítést adják meg. Az első módszer magától értetődő, a másodikat a 6. ábrával szemléltetjük. (Az illeszkedési mátrix, illetve kiegészítésének megadása szintén egyszerű.)



6. ábra

A 6. ábrából jól látható, hogy rendszerünknek egyetlen „független" változója van, ez az „idő"; tehát a teljes megadáshoz ennek a változási intervallumát kell még megadni, amelynek végrehajtása konkrét rendszereknél más és más módon történik.

4. Az eredmények megjelenítése

A modell működtetését végző, helyesebben ennek egy modelljét előállító program szerkezete a modellező számára érdektelen, számára csak e program működésének eredménye fontos. A modellműködtető program a modellnek az őt érő hatásokra kialakuló viselkedését, ún. *„működéstörténetek"* formájában állítja elő. Ez tulajdonképpen a kijelölt változók értékeinek kronologikus sorozata az időváltozó változási tartományában megadott időpontokban. A működéstörténet konkrétan[3] lehet a változók táblázata, a változók értékeinek ábrája az idő függvényében rajzológéppel (plotterrel) kirajzoltatva vagy ugyanezek a görbék katódsugárcsöves kijelző képernyőjére vetítve.

5. Néhány alkalmazási példa

A következőkben néhány olyan tipikus példát mutatunk be, amelyek gyakorlati alkalmazások terén merültek fel, és megoldásukhoz (a rendszerek viselkedésének a leírásához) az előzőkben vázolt technikához hasonlóan kényelmes, más módszer jelenleg nem áll rendelkezésünkre. Példáink gyakorlati alkalmazási területekről valók. Ez azonban nem jelenti azt, hogy az itt ismertetett módszer elméleti, ún. „tiszta matematikai" szempontból kisebb mértékben volna értékes. Ennek bizonyítására elég csak néhány bonyolultabb differencia-, illetve differencia-differenciál- vagy integrodifferenciál-egyenlet típust említenünk, amelyeket eddigi eszközeinkkel meg sem tudtunk közelíteni, de ugyanez a helyzet egyes függvénytranszformációknál és számos más esetben is. A következőkben a tárgyalásra kerülő rendszerek rendszermodelljét speciális relációgráffal fogjuk megadni. A gyakorlatban a relációgráfban szereplő műveleteket egy előre megadott „szabványos" elemkészletből is választhatjuk (ez általában nem jelent korlátozást, inkább a kényelmet szolgálja, hiszen az elemkészlet legtöbbször nagyon gazdag; ha pedig olyan eset merülne fel, hogy egy feladatban egy, a készletben nem szereplő műveletet is szerepeltetni kellene, akkor csak ezeket kell a programozónak — nem a modellezőnek — külön programozási munkával elkészítenie).

Az itt következő elemkészlet a szemléltetést szolgálja, vannak gépek, amelyeknek rendszerében az itt bemutatottak közül néhány elem hiányzik, míg mások szerepelnek. (A gyakorlat a műveleti elemekkel kapcsolatban a „függő" és „független" változók megkülönböztetésére a „bemenő" és a „kimenő" változó szavakat használja. A következőkben mi is ezt a terminológiát alkalmazzuk.)

Az elemkészlet, illetve az elemek leírása a következő:

Összegképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változók pillanatnyi értékének összegét mutatja.

Különbségképző, kimenő változója minden pillanatban a két bemenő változója pillanatnyi értékének különbségét mutatja.

[3] Természetesen csak bizonyos pontossággal.

Szorzatképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változók pillanatnyi értékének szorzatát mutatja.

Hányadosképző, kimenő változója minden pillanatban a két bemenő változó pillanatnyi értékének hányadosát mutatja (nullával való osztás kísérletekor hibajelzéssel leállítja a modell további működtetését).

Ellentettképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének ellentett értékét mutatja.

Reciprokképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének reciprokát mutatja (nullával való osztás kísérletére ugyanúgy viselkedik, mint a hányadosképző).

Négyzetreemelő, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének négyzetét mutatja.

Hatványozó, kimenő változója minden pillanatban annak a hatványnak az értékét mutatja, amelynek alapja az első bemenő változó pillanatnyi értéke, kitevője pedig a második bemenő változó pillanatnyi értéke (nem megengedhető esetekben hibajelzéssel leállítja a modell további működtetését).

Négyzetgyökvonó, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változója pillanatnyi értékének négyzetgyökét mutatja (negatív bemenő érték esetében hibajelzéssel leállítja a további modellműködtetést).

Exponenciáló, ugyanúgy működik, mint a hatványozó állandó *e* alap mellett.

Logaritmusképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változója pillanatnyi értékének *e* alapú logaritmusát mutatja, (nem pozitív bemenő érték esetében hibajelzéssel leállítja a további modellműködtetést).

Sinusképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének sinusát mutatja.

Cosinusképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének cosinusát mutatja.

Tangensképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének tangensét mutatja (túlcsordulást előidéző bemenő változó értékeknél hibajelzéssel leállítja a modellműködést).

Arcussinus képző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének Arcussinusát mutatja (egynél nagyobb abszolút értékű bemenő értékek esetében hibajelzéssel leállítja a modellműködtetést).

Arcuscosinus képző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének Arcuscosinusát mutatja (nem megengedett bemenő változó értékekre az előzőhöz hasonlóan működik).

Arcustangensképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének Arcustangensét mutatja.

Signumképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének sg függvény értékét mutatja.

Abszolútértékképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének abszolútértékét mutatja.

Maximumképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változók pillanatnyi értékének maximumát mutatja.

Minimumképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változók pillanatnyi értékének minimumát mutatja.

Pozitívrészképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének és nullának a maximumát mutatja.

Negatívrészképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének és a nullának a minimumát mutatja.

Korlátozó, kimenő változója minden pillanatban a korlátozott bemenő változó pillanatnyi értékét mutatja, ha az a korlátozó bemenő változók által pillanatnyilag megadott számközben mozog, ha ebből kilép, a kimenő változó a korlátozandó bemenő változó pillanatnyi értékéhez legközelebbi korlátozó változó értékét mutatja.

Egészrészképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének egészrészét mutatja.

Törtrészképző, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének törtrészét mutatja.

Konjunkcióképző, kimenő változója a bemenő változók pillanatnyi értékének minimumát mutatja (nem logikai értékű bemenő változó értékekre hibajelzéssel leállítja a modellműködtetést).

Diszjunkcióképző, az előzőhöz hasonlóan ez speciális maximumképző.

Negáló, kimenő változója a minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékének negáltját mutatja (ha a bemenő változó értéke nem logikai érték, akkor a modellműködtetést hibajelzéssel leállítja).

Tárolók, speciális, információ tárolására használható elemek.

Késleltető, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó adott idővel korábban felvett pillanatnyi értékét mutatja.

Holtzónaképző, kimenő változója additív állandóktól eltekintve, minden pillanatban a bemenő változó pillanatnyi értékét mutatja, ha az nem esik egy megadott intervallumba, égyébként értéke nulla.

Differenciáló, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó („idő szerinti", baloldali) differenciálhányadosának pillanatnyi értékét mutatja.

Integráló, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó értékének, adott kezdőpontból a szóban forgó pillanatig számított, adott kezdeti értékkel vett idő szerint integráljának értékét mutatja.

Simítók, kimenő változója minden pillanatban a bemenő változó valamilyen eljárással simított értékét mutatja.

Felhasználói elemek, a felhasználó által — akár implicit módon is — definiálható, a szabványos elemkészletben elő nem forduló elemek.

Értékadó elemek, adott feltételek teljesülésekor integrátorokban, késleltetőkben (általában tároló elemeket felhasználó) műveleti elemekben a tárolt információk megváltoztatására használható elemek.

Futásleállító (szüneteltető) elemek, adott feltételek teljesülésekor a modellműködtetést leállítják, illetve szüneteltetik.

Időléptékmutató elem, ezzel a modellműködtetés sebességét, illetve a megjelenítésnél felhasznált mintavételi időszak hosszát lehet változtatni („lassított gyorsított film" hatás elérésére).

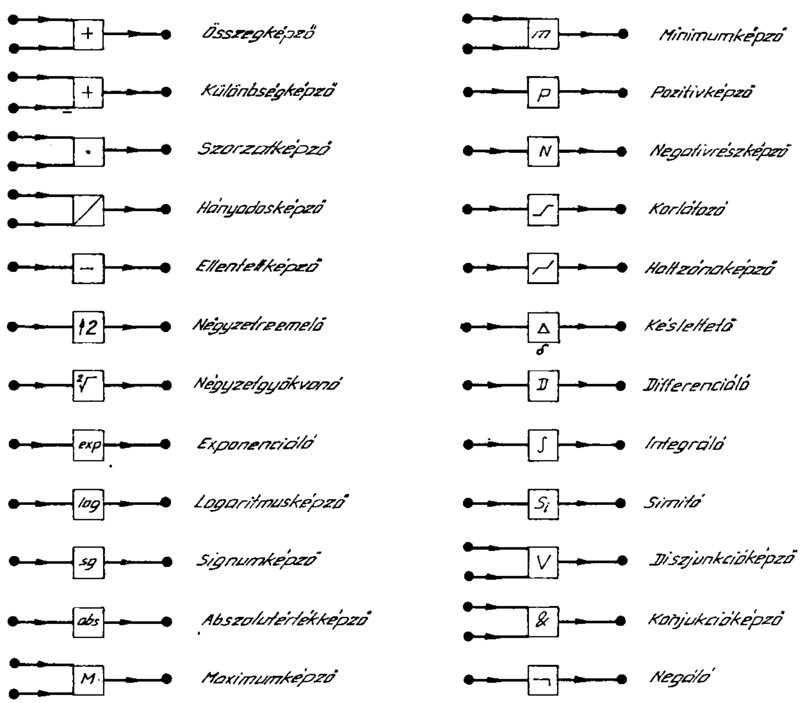
Komplex aritmetikával dolgozó elemek, komplex számokkal dolgozó rendszermodelleknél lényegében az előző feladatok komplex értékű változók esetében történő ellátására szolgáló műveleti elemek.

Vektoraritmetikával dolgozó elemek, vektorokkal, illetve mátrixokkal leírható rendszerek modellezésénél használhatók.

(Algebrai) struktúraelemekkel dolgozó műveleti elemek, általánosabb rendszerek modellezésénél használhatók.

Átalakítók (konverterek) egy-egy rendszerváltozó pillanatnyi értékéhez minden pillanatban valamilyen (algebrai) struktúraelemet hozzárendelő műveleti elemek.[4]

A felsorolt műveleti elemeket a különböző modellezési rendszerek egymástól többé-kevésbé eltérő módon jelölni is szokták. Valamennyi között talán a legegy-



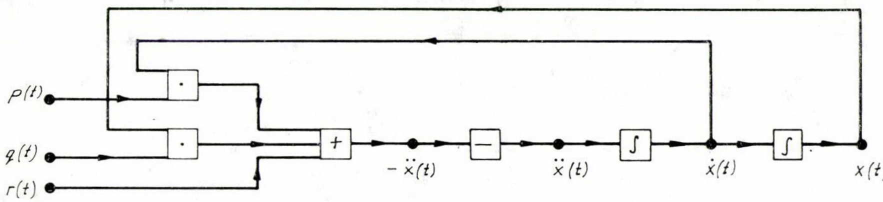
7. ábra

szerűbb és legáttekinthetőbb az az ábrázolási mód, amikor a relációgráf műveleti elemeknek megfelelő csomópontjait nem körökkel, hanem téglalapokkal jelölve megkülönböztetjük a körrel jelölt, változókat képviselő csomópontoktól. Szemléltetésképpen a 7. ábrán néhány gyakori műveleti elem rajzjele szerepel. A téglalapokba beírjuk a művelet szimbólumát.

[4] Gyakorlati gépi megvalósítást tekintve szinte az összes felsorolt elem csak közelítőleg valósítja meg a nevében szereplő funkciót. Pontos hibabecsléssel, hibafigyeléssel vagy például pontos intervallumműveletekkel dolgozó rendszerről nem tudunk. A szokásos intervallumaritmetika becsléseiben (intervallumvégpont kiszámításokban) az egyes valós műveleteket és számokat a velük ***azonos nevű*** gépi megfelelőikkel helyettesítve a kapott eredmények általában géptől függő módon kisebb-nagyobb mértékig ***helytelen*** eredményt adnak. Hiszen már a legegyszerűbb egyenlőtlenségekre vonatkozó azonosságok „***szószerinti gépesítése***" sem tartja meg a valóssal azonos relációkat; ez a rendezési relációnál is így van.

Egy másodrendű differenciálegyenlet megoldására szolgáló modell

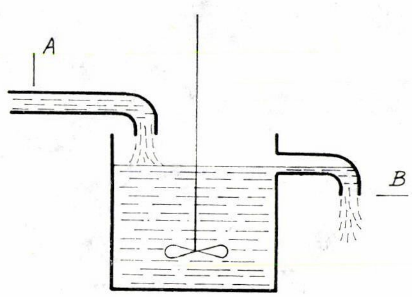
Az $\ddot{x}(t)+p(t)\dot{x}(t)+q(t)x(t)+r(t)=0$ másodrendű változóegyütthatós differenciálegyenlet numerikus megoldását a 8. ábrán látható modell $x(t)$ változója szolgáltatja.



8. ábra

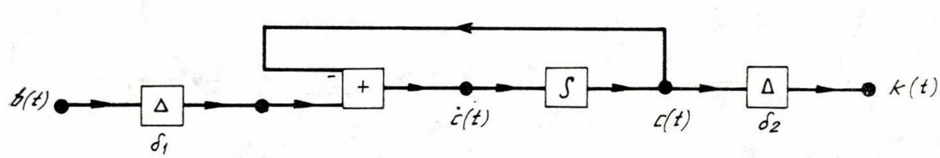
Egy keverőtartály modellje

A 9. ábrán bemutatott keverőtartály a következőképpen működik. Állandó, egységnyi térfogatsebességgel ömlik bele egy kétkomponensű folyadék, ugyancsak e két komponens keveréke van a tartályban, és ömlik ki belőle, szintén állandó, egységnyi térfogatsebességgel. Ha a beömlő folyadék első komponensének pillanatnyi



9. ábra

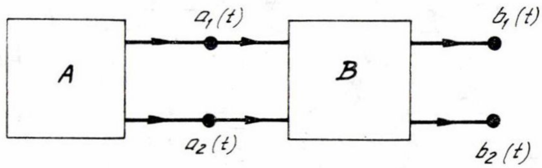
koncentrációját az A keresztmetszeten $b(t)$ függvény adja meg, akkor mi lesz a távozó folyadék $k(t)$ koncentrációja a B keresztmetszetben, a t pillanatban, ha a tele tartály pillanatnyi koncentrációját $c(t)$ adja meg? A rendszer modelljét a 10. ábra szemlélteti, a modell $k(t)$ változója minden pillanatban a B keresztmetszeten áthaladó folyadékkoncentrációt mutatja.



10. ábra

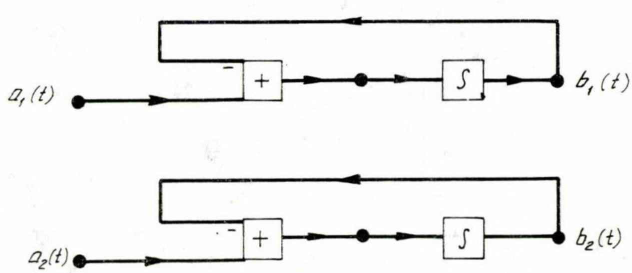
Egy általános üldözési jellegű probléma

A feladatot egyszerűség kedvéért síkban fogalmazzuk meg. Legyen a síkon két „pontszerű" objektum, A és B, (ezeket két vektorral tekintjük megadottnak). Az A objektum valamilyen (nem szükségképpen B-től független) módon mozog a síkon, a t időpontban az $(a_1(t), a_2(t))$ helyvektorú pontban van. A $(b_1,(t), b_2(t))$ hely-

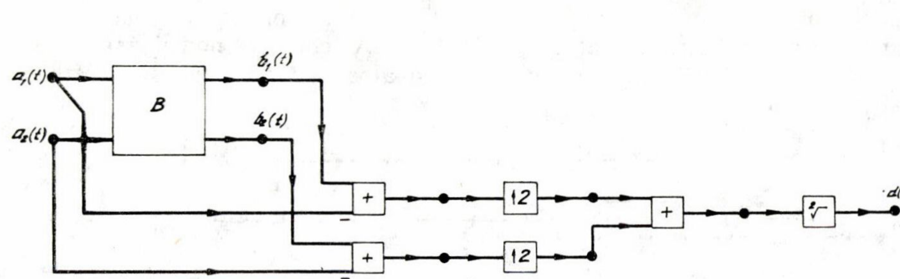


11. ábra

vektorú B objektum célja az A objektumnak valamilyen adott sugarú környezetébe bekerülni, más szóval A-t megközelíteni. A B objektum viselkedését A viselkedése és saját mozgástörvényei egyértelműen meghatározzák. Ha B mozgástörvényei adottak, akkor a B rendszert olyannak is felfoghatjuk, mint aminek a viselkedését az A mozgása pl. pillanatnyi helyzete irányítja, gerjeszti (11. ábra). B rendszerét például a 12. ábrán látható módon adhatjuk meg. A 13. ábra rendszerének $d(t)$ változója minden pillanatban az A és a B pont távolságát mutatja.



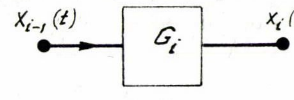
12. ábra



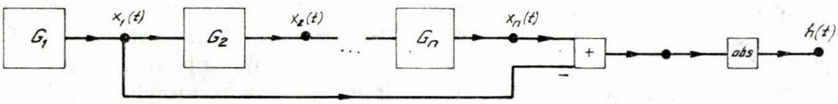
13. ábra

Gépkocsikaraván viselkedése

Egyszerűség kedvéért itt is csak egy speciális esettel foglalkozunk. (Legyen a pálya egyenes, a látási és útviszonyok mindenütt ideálisak stb.) A gépkocsikaravánt vezető gépkocsi helykoordinátája, $x_1(t)$ legyen adott. Az utolsó, n-edik kocsi pillanatnyi helykoordinátájára (illetve a karaván hosszára) vagyunk kíváncsiak. Tegyük fel, hogy mindegyik kocsi viselkedését le tudjuk írni, és egy kocsi pillanatnyi helyét az őt megelőző gépkocsi pillanatnyi helyét leíró függvény valamilyen rendszer szerint egyértelműen meghatározza (14. ábra). Ekkor az n elemű karaván utolsó kocsijának helykoordinátáját minden pillanatban a 15. ábra rendszerének $x_n(t)$ változója, a gépkocsikaraván hosszát pedig $h(t)$ változója fogja mutatni.



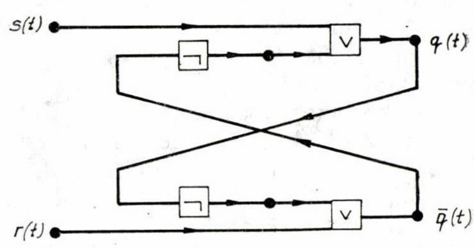
14. ábra



15. ábra

Problematikus modellek

Vannak olyan esetek, amelyek elméletileg ugyan egyértelműen megfogalmazhatók és modellezhetők, a gyakorlati gépi munka során azonban problémát okozhatnak. Különösen sok probléma merül fel a gépi műveletek pontatlansága miatt (hiszen a gép „valós számaira" és műveleteire nem igaz pl. a disztributivitás és számos más elemi tanulmányainkból megszokott azonosság sem). Ez a terület azonban nagyon bonyolult, itt csak egy másik egyszerűbb kérdést, az implicit kapcsolatok problémáját említjük, példaként egy, az irodalomban elterjedt *hibás* modellt mutatunk be. A számológépek egy nagyon gyakori tároló elemét, egy ún. „rs flipflopot" számos helyen a 16. ábrán látható módon modellezik. Pedig ez a modell *nem alkalmas* az említett elem modellezésére.



16. ábra

Alkalmazás közvetlen digitális irányításban

Az előzőkben vázolt és illusztrált számológépes viselkedésmodellezési módszer nemcsak kutatási feladatoknál, hanem a modelleket egy irányított folyamatból származó adatokkal gerjesztve és a modell „válaszait" az irányított folyamatra ható beavatkozó szervek vezérlésére használva (közvetlen) digitális irányításnál, „on line" módon, „azonos idejű" (real time) üzemmódban is alkalmazható.

A közvetlen digitális irányításnál a *szabályozók* funkcióját a digitális gép veszi át. Egy, az előzőkben leírt modellezési rendszerrel rendelkező gépben a kívánt szabályozók összeállítása a modellezési rendszer műveleti elemeiből mint építőelemekből rugalmasan és gyorsan, könnyen módosítható módon elvégezhető. Nagy előny még az is, hogy az irányított rendszerről, sőt ennek megfelelő „környezetéről" egyaránt készíthetünk modellt, és így például nagy pontosságú, rövidebb és hosszabb időszakokra szóló prognózisokat is tudunk készíteni és felhasználni, elébevágásoknál és általában az irányítási munkában.

III. Ipari folyamatirányítás számológépekkel

Termelési folyamatok irányításában már elég korán alkalmaztak számológépeket. A gép eleinte főleg csak az addig emberek által végzett egyes *ügyviteli* munkák elvégzésében bizonyult hasznosnak. A termelési tevékenység mind nagyobb mértékű automatizálásával azonban egyre több olyan számológép jelent meg, amellyel nem egyes ügyviteli tevékenységeket végeztettek, hanem a gyártási folyamatokkal szerves, közvetlen kapcsolatban működtették őket olyan feladatok ellátására, amelyet azelőtt ember, vagy pedig (a nagy munka- és időigény miatt) senki sem végzett el. A feladatkörök különbözőségéhez igazodva, a számológépgyártó cégek tudományos számításokra, ügyviteli adatfeldolgozásra és ipari folyamatirányításra külön speciális gépeket kezdtek forgalomba hozni. A főleg tudományos számításokra alkalmazott gépeknek viszonylag kevés adatból sok számolást kell elvégezniük, ezért ezeknél előtérbe kerül a műveletvégzési sebesség. Az ügyviteli adatfeldolgozásnál sok adat ki- és bevitele, valamint tárolása miatt a ki- és bevitel és a nagy tömegű adat tárolási és elérési sebessége kapott nagyobb hangsúlyt. Az ipari folyamatirányításban (folyamatvezérlésben és folyamatszabályozásban) alkalmazott számológépeknél a gyors műveletvégzés mellett a nagyon nagy számú, de kis tömegű adat több helyről és helyre történő gyors bevitelét, illetve kivitelét kell biztosítani.

A következőkben vázlatosan ismertetni fogjuk egy egyszerű, tipikus ipari folyamatirányító számológép működését, ez azonban a fő elveket tekintve sok közös vonást mutat más géptípusokkal, sőt a több kapcsolt gépből álló rendszerekkel is, hiszen egy-egy szoftver egység önálló automatának is felfogható és önálló hardver megvalósítást is lehetővé tesz.

A gép mint automata, működésének hardver rendszertechnikai szinten és a legkifinomultabb szoftver szintjén egyaránt ugyanaz: bizonyos eljárásokkal, automatákkal bizonyos változók (mutatók, nyilvántartók, adatmezők, illetve tárolók, regiszterek) adatainak függvényében más változók (mutatók stb.) értékeinek, illetve tartalmának a módosítása. Ugyanez áll a felhasználó szempontjából is. Az elv közös: információ-tároló területek közötti, ezek által meghatározott transzformációkkal történő információ-transzformáció és információmozgatás (az információ helyének transzformációja).

A gép működését a tárolóban tárolt program információi és bizonyos más regiszterekben tárolt információk vezérlik. A működés megértéséhez tudnunk kell, hogy *mi, mikor, mit, minek alapján, milyen célból, hogyan és milyen formában informál, illetve vezérel.*

A gép tevékenységének a vezérlése a következőképpen történik. A vezérlést a tárolt programok utasításai és egy az egyes programok közötti automatikus vezérléskiosztást végző program, illetve ennek hardver változata végzi.

Az említett vezérléskiosztási rendszer nem mindig működhet, csak egy változó (egy regiszter) megfelelő (pl. 0 vagy 1) értékénél. (Ennek oka az, hogy enélkül a korlátozás nélkül a vezérléskiosztás egyes, éppen futó programok végzését nem kívánt helyen is megszakíthatná, más rendszereknek adva át a vezérlést.) Az említett regiszter tartalmát pedig utasításokkal tudjuk módosítani, így a vezérléskiosztási mechanizmusnak működését szabályozni tudjuk. A programokban alkalmas helyre elhelyezett utasításokkal ennek a vezérléskiosztási mechanizmusnak a működési lehetőségét szüneteltethetjük, illetve adhatjuk vissza.

A vezérléskiosztási program (a megvalósítás hardver vagy szoftver volta itt közömbös) a következőképp működik. A program egy rangsorolt pozíciójú igényregiszter tartalmát figyeli, és ha átveszi a vezérlést, akkor az igényregiszterben jelentkező igények közül kiválasztja a rangsorban legelsőt. Minden igényregiszterbeli pozíciónak egyértelműen megfelel egy tárolórekesz. A vezérléskiosztó ennek a kiválasztott igénynek megfelelő tárolórekesznek, illetve tartalmának adja át a vezérlést, egyidejűleg törölve az igényregiszter szóban forgó pozícióján levő igényjelzést. A rekeszbe, amely a vezérlést ily módon átvette, előzőleg az illető igényfajta kielégítését elvégző program első utasításának történő vezérlésátadási utasítást kell helyezni. Ily módon tehát megindulhat egy, az igényregiszterben jelzett munka elvégzésének folyamata. Ha ez az éppen megindult tevékenység egy előzőt megszakított, akkor megfelelő módon megfelelő helyen nyilván kell tartanunk a megszakadt tevékenység folytatásához szükséges adatokat. E hátralékban levő tevékenységek elvégzésére szolgáló programok közötti vezérléskiosztást természetesen külön programmal kell vezéreltetnünk ugyanúgy, mint az egyes háttértárolót használó programok végrehajtásához a helykiosztást, valamint az adatok be- és kiviteli tevékenységénél az egyes egységek, illetve általánosan az egyes tevékenységfajták, illetve szolgáltatások kiosztását. Ezek a kiosztást vezérlő programok igényregiszterekből, általában igény-nyilvántartókból veszik a működésükhöz szükséges információkat.

Ipari folyamatirányító számológépek — de több más típusú gépnél is — az adat be- és kivitel egy, a számológépbe beépített speciális célszámológépre van bízva, amelynek tevékenységét közönséges utasítással indíthatjuk. Így megoldható az, hogy addig, míg pl. egy kívánt adatbevitel lezajlik, más programok végrehajtása folyhat. Az adatbehozatal befejezését az említett célszámológép az igényregiszter megfelelő pozícióján jelzi. Így a legelőször említett vezérléskiosztási mechanizmuson keresztül visszatérési lehetőség nyílik az adatait időközben már megkapott programok folytatására.

Az itteni rövid ismertetésből is jól érzékelhető, hogy egy korszerű kisszámológép (amit hardver és szoftver együttesének tekintünk) felépítésében a múlthoz képest döntő módon megnőtt a szoftver szerepe.

Egy-egy tevékenységsorozat amit a géppel kívánunk elvégeztetni (aminek egy program felel meg), többféle szolgáltatást igényelhet, amelyek között programon belül sorrendi, programok között prioritási és egyéb feltételek is fennállhatnak. A gépnek mint egy bonyolult szolgáltató egységnek a munkáját *megszervezni* (illetve jól megszervezni) olyan *matematikai feladat*, amelynek megoldásához főleg automataelméleti és kiszolgáláselméleti téren sokat kell még tennünk.

IRODALOM

POGÁNY CSABA: Néhány időszerű kérdés számológépekkel kapcsolatban, I. *MTA III. Osztály Közleményei* **19** (1969), 345—348.

POGÁNY CSABA: *Bevezetés a gazdasági rendszermodellezésbe.* SZÁMOK 1973.

POGÁNY CSABA—SZIRTES LÁSZLÓ: *Bevezetés a számítógépes folyamatirányításba.* EMG. (kézirat.)

TAKÁCSY ILDIKÓ—BENEDIKTI ISTVÁN—TÓTH KÁROLY: *A rendszermodellezés technikája.* SZÁMOK (megjelenés alatt).

SZELKE ERZSÉBET—TARNAY GYULA—TÓTH KÁROLY: Az ANDISIM digitál-analóg szimulációs programnyelv. MTA SZTAKI 1973 november.

(Beérkezett: 1973. XII. 28.)

EGYENLŐTLENSÉGEK NUMERIKUS BIZONYÍTÁSA, II.

Írta: RUDA MIHÁLY

1. Bevezetés

Dolgozatunkban egyenlőtlenségek numerikus vizsgálatával kapcsolatos eredményeink közlését folytatjuk. A következőkben néhány további bizonyítási eljárást mutatunk be. Szó lesz továbbá a tárgyalt algoritmusok alkalmazásakor felmerülő nehézségekről, melyek a vizsgált függvények, illetve értelmezési tartományuk tulajdonságaiból, valamint a számítási eljárások korlátozott pontosságából adódnak.

2. Bizonyítási eljárások

Az [1] dolgozatban a következő típusú eljárások szerepelnek:

a) Differenciálható függvények összehasonlítása az első — esetleg a második — derivált, illetve a deriváltakra adható korlátok ismeretében.

b) Speciális tulajdonságú függvények esete: monoton növekvő vagy csökkenő, monoton deriválttal rendelkező függvények.

c) Egyenlőtlenségek vizsgálata szélsőérték keresési eljárások segítségével.

Tekintsünk most néhány további lehetőséget!

d) Legyen $f(x)$ és $g(x)$ egy I intervallumon egyenletesen folytonos függvény! Legyen adott az I intervallumon az f, illetve a g $\omega_f(r)$, illetve $\omega_g(r)$ folytonossági modulusára egy $\Omega_f(r)$, illetve egy $\Omega_g(r)$ felső becslés, a $0<r\leqq R$ értékekre (ahol R egy rögzített pozitív érték). Ekkor, ha található véges sok olyan x_i pont és r_i érték ($0<r_i\leqq R$, $i=1, 2, ..., n$), hogy az x_i pontok r_i sugarú környezetei lefedik az I intervallumot, és minden x_i pontban teljesül az

$$f(x_i)-g(x_i)-\Omega_f(r_i)-\Omega_g(r_i) > 0 \tag{1}$$

egyenlőtlenség, akkor igaz az $f(x)>g(x)$, $x\in I$ reláció.

e) Az [1] dolgozatban bizonyos monotonitási tulajdonságok teljesülésekor egyszerűsített eljárások szerepelnek (l. a fenti b) pontot). A vizsgált függvények, illetve deriváltjaik lokális szélsőérték helyeinek ismeretében olyan részekre oszthatjuk az értelmezési tartományt, mely részeken külön-külön már teljesülnek a fent említett monotonitási tulajdonságok.

Ha a szélsőérték-helyeket valamely numerikus eljárással keressük meg — ezekről l. például [2] —, akkor a minden esetben korlátozott számítási pontosság miatt a szélsőérték-helyeknek legtöbbször csak egy környezetét tudjuk kijelölni. Ezekben a környezetekben a függvényvizsgálat még külön eljárást igényel.

f) A szélsőérték-keresési eljárások mellett az ugyanacsak részletesen kidolgozott gyökkeresési eljárások alkalmazásával is vizsgálhatunk egyenlőtlenségeket. Ha valamely H halmazon értelmezett $f(x)$, $g(x)$ függvényekre a $h(x)=f(x)-g(x)$, $(x\in H)$ függvény folytonos, van pozitív értéke és nincs gyöke a H halmazon, akkor igaz az $f(x)>g(x)$ $(x\in H)$ reláció. Általában folytonos, illetve differenciálható függvényekre kézenfekvő jól bevált gyökkeresési, illetve szélsőérték-keresési eljárásokat alkalmazni. Fordítva is igaz: módszereinket gyökkeresési és szélsőértékkeresési eljárásoknál is alkalmazhatjuk. Eljárásaink segítségével (l. az a—e) pontokat) azonban függvények egy igen széles osztályánál bizonyíthatunk egyenlőtlenségeket. Az eddig szereplő módszerekhez hasonlókat akkor is megadhatunk, ha bármilyen módon becslést tudunk adni az értelmezési tartomány egyes pontjainak megfelelő környezetében a vizsgált függvények változásának mértékére. Nemcsak lineáris becslések szerepelhetnek (mint pl. a d) pontban), hanem bármely más könnyen kezelhető függvénytípus, például monoton vagy monoton deriváltú becslések, visszavezetve az adott függvények vizsgálatát a b) és e) pontokban említett speciális esetekre.

g) Két adott $f(x)$, $g(x)$ ($x\in I$, ahol I egy egydimenziós intervallum) függvényből kiindulva nem csak az e) pontban leírt módon juthatunk monoton függvényekhez, hanem a következő meggondolásokkal is.

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ $(x\in I)$ korlátos változású! Ekkor létezik olyan $f_1(x)$ és $g_1(x)$ monoton növekvő, illetve $f_2(x)$ és $g_2(x)$ monton fogyó függvény, hogy $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$, $(x\in I)$. Ha találunk ilyen felbontást, akkor az $f(x)>g(x)$ $(x\in I)$ reláció helyett elegendő az $f_1(x)-g_2(x)>g_1(x)-f_2(x)$ monoton függvények közti egyenlőtlenséget vizsgálni. Nem korlátos változású függvények numerikus összehasonlítása sokkal nehezebbnek látszik.

3. Különböző típusú értelmezési tartományok és többváltozós függvények vizsgálata

Az előző szakaszban, illetve az [1] dolgozatban szereplő eljárások legegyszerűbben egydimenziós zárt intervallumon alkalmazhatók. A következőkben más típusú értelmezési tartományokkal is foglalkozunk.

a) A probléma véges sok pontban értelmezett függvények vizsgálatánál a legegyszerűbb. Gyakorlatilag tulajdonképpen minden más vizsgálatot erre az esetre vezetünk vissza.

b) Előfordulhat, hogy bár az értelmezési tartomány intervallum, mégis egyes pontjaiban, illetve egyes pontok valamely környezetében külön meggondolásokra van szükség. Ilyen esettel állunk szemben például, ha egy nyílt intervallumon akarunk két folytonos függvény között egyenlőtlenséget bizonyítani, miközben azok az egyik határpontban egyenlők.

c) Az értelmezési tartomány korlátos, de nem intervallum. Zárt intervallumok egy rendszerével lefedjük az értelmezési tartományt, és a lefedő rendszerre alkalmas módon kiterjesztett függvényt vizsgáljuk. Egy másik megoldás: intervallumok egy rendszerével kitöltjük az értelmezési tartományt vagy egy részét, és a kitöltött részen vizsgáljuk az adott függvényeket. A maradék részen külön meggondolást alkalmazunk.

Az adott függvények változásának mértékét ismerve, sokszor sem az értelmezési tartomány kiterjesztésére, sem külön meggondolásokra nincs szükség, hiszen a 2. pontban említett eljárások nem feltétlenül használják ki az értelmezési tartomány zártságát, összefüggőségét.

d) Az értelmezési tartomány nem korlátos. Numerikus eljárás ekkor közvetlenül általában nem alkalmazható. Periodikus függvényeknél a periodicitást kihasználva gyakran korlátos tartományra szűkíthetjük a vizsgálatot. Ha az összehasonlítandó függvények nem periodikusak, periódusuk aránya irracionális vagy a közös periódus túl nagy, a következő módok valamelyikén juthatunk egy megfelelő korlátos értelmezési tartományhoz. Tekintsünk példaként egyváltozós függvényeket!

A vizsgált $f(x)$, $g(x)$ függvények értelmezési tartományán olyan $x'=\varphi(x)$ transzformációt alkalmazunk, hogy az $f(x')$ és $g(x')$ közös periódusa elég kicsi. Ha $\varphi(x)$ monoton, a vizsgálatot végezhetjük magukon az $f(x)$, $g(x)$ — és nem szükségképpen az $f(\varphi(x))$, $g(\varphi(x))$ — függvényeken is, egy megfelelő intervallumon. Mivel $\varphi(x)$ nem feltétlenül lineáris — ha egyáltalán létezik —, az utóbb említett intervallum hossza függhet a vizsgálat helyétől is.

Alkalmazhatunk olyan leképezést is, amely a $p=(x, y)$, $y=f(x)$ pontokat olyan $p'=(x', y')$ pontokra képezi le, hogy az $y'=f'(x')$ függvény periodikus lesz. Természetesen, ilyenkor adott x érték mellett a leképezésnek y-ra vonatkozóan szigorúan monotonnak kell lennie: szakaszonként vagy minden x pontban növekvőnek vagy minden x pontban csökkenőnek.

A nem korlátos tartományon elhelyezkedő $p=(x, y)$, $y=f(x)$ pontokat leképezhetjük egy korlátos tartományba is. Ekkor már korlátos tartományon értelmezett, korlátos függvények esetével állunk szemben.

A különböző transzformációk alkalmazásakor azonban előfordulhat, hogy az eredetileg jól kezelhető, de nem korlátos függvényekre a transzformációk után nem alkalmazhatók sikeresen az adott eljárások.

e) Nem korlátos értelmezési tartományt leképezhetünk magasabb dimenziós korlátos halmazra is. Általában transzformációk alkalmazásakor a vizsgált pontokat tartalmazó tér típusát megváltoztathatjuk.

Egy numerikus vizsgálat előtt az értelmezési tartomány, illetve az értékkészlet transzformációjának lehetőségét érdemes alaposan megvizsgálni.

f) Többváltozós függvényeknél két nehézség felmerülése gyakori:

Az értelmezési tartomány még egyszeresen összefüggő halmazoknál is sokkal változatosabb lehet, mint egy dimenzióban.

Ha az értelmezési tartomány egy-egy pontjának ugyanakkora sugarú környezetében tudjuk az egyenlőtlenséget vizsgálni, mint egy hasonló átmérőjű egydimenziós tartományon, akkor általában hatványozottan több lépést kell végrehajtani. Ez a lépésszám-növekedés magasabb dimenzióban gyakorlatilag „végtelenre" növelheti az eljárás végrehajtási idejét. Megfelelő egyszerűsítésekkel, illetve a vizsgált függvények tulajdonságainak kihasználásával azonban sokszor lényegesen csökkenthető a lépésszám. A szerző például geometriai feladatoknál 12, 18 és 20 változós függvényekre is tudta alkalmazni a fenti eljárásokat egzakt tételek előállítására, számológép segítségével.

4. A számítási hiba szerepe

Numerikus eljárásoknál a használt számértékek pontosságára és az eljárások maximális lépésszámára adott korlátok függvényében rendszerint bizonyos hibatagokat fogadunk el. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges valós számok helyett csak bizonyos intervallum-végpontokkal tudunk számolni. [Egy eljárással kapcsolatos hiba fogalmán sokszor sztochasztikus mennyiséget értenek (l. pl. [2]). Mi ilyen jellegű kérdésekkel nem foglalkozunk.]

Eddig szereplő eljárásainkon belül (l. [1], illetve a jelen dolgozat 2. pontját) az $f(x)>g(x)$ egyenlőtlenség bizonyítását az $f(x)-g(x)$ különbségfüggvénynek különböző pontok környezetében való pozitivitásának és ezen keresztül egy

$$\varphi(x) > 0, \quad x \in (x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

egyenlőtlenségnek bizonyítására vezethetjük vissza. Lényeges felhívni rá a figyelmet, hogy a $\varphi(x)$ függvény itt már magába foglalja a bizonyításhoz szükséges becsléseket, például a deriváltakra, a folytonossági modulusra adott korlátokat is.

Az x_i argumentumokat mi jelölhetjük ki, tehát általunk pontosan kifejezhető értékek. Az ellenkező esetben (l. a 3. pontot) elvi nehézségek adódnak.

Sokszor magukat a függvényértékeket is pontosan kifejezhetjük, például bizonyos tartományon belül tetszőleges polinomok esetében. Ha a vizsgált függvény zárt alakban nem fejezhető ki — például hatványsorral vagy numerikus integrállal adjuk meg —, akkor is bizonyos kívánt pontosságot elérhetünk. Tetszőleges pontosság elérése azonban általában lehetetlen.

Akár zárt alakban fejezzük ki a vizsgált függvényeket, akár nem, a lehetséges maximális pontosság függvényében a különböző műveletek végzésekor hibatagok léphetnek fel. Például azért mert a függvény argumentumai között fellépő nagyságrendbeli különbség, vagy a kiértékelés lépéseinek a száma túlságosan nagy. Ezek a hibatagok a függvényértékekkel azonos nagyságrendűek is lehetnek, másrészt ugyanazon függvény különböző kiértékelési módjai különböző hibatagokhoz és így különböző számított értékekhez vezthetnek. Például a $\sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n}$ értéket a rendelkezésre álló pontossághoz viszonyítva elég nagy K-ra nem lehet közvetlenül kiszámítani, hanem csak megfelelő részletösszegekre való bontással.

Egy $\varphi(x)$ függvény kiszámításakor fellépő $\Delta\varphi(x) \geqq 0$ hibatag tehát függ egyrészt az általunk megadható legrövidebb intervallum hosszától (amely nyilvánvalóan az intervallum elhelyezkedésétől is függ), az x argumentumtól, a φ függvénytől és a kiértékelés módjától. Tehát a (2) egyenlőtlenség numerikus bizonyításának szükséges és elégséges feltétele a

$$\varphi(x) - \Delta_\varphi(x) > \delta \tag{3}$$

egyenlőtlenség teljesülése, ahol δ a minimális kifejezhető pozitív érték.

Ha a (3) egyenlőtlenség teljesülését az eredeti egyenlőtlenség teljesülése mellett nem tudjuk biztosítani, a vizsgált függvények kedvezőtlen tulajdonságai miatt, akkor a φ függvény, illetve az értelmezési tartomány transzformálásával esetenként elérhetjük a (3) egyenlőtlenség teljesülését, illetve meggyorsíthatjuk a bizonyítási eljárást (l. még az előző 3. pontot).

Ugyanígy pontosabb becsléseket adva a φ függvényre (például a kifejezhető pontosság növelésével) az eljárások lépésszáma csökkenthető, viszont a pontosabb számítási, becslési eljárások időigényesebbek. Érdekes feladat esetenként az optimális eljárások megkeresése.

IRODALOM

[1] RUDA MIHÁLY: Egyenlőtlenségek numerikus bizonyítása I., *MTA III. Osztály Közleményei*, **19**, (1969), 349—357.
[2] WILDE, D. J.: *Optimum seeking methods*, Prentice-Hall Inc. (1965).

(Beérkezett: 1974. I. 2.)

NUMERICAL PROOF OF INEQUALITIES, II.

By

M. RUDA

Summary

Methods for numerical proof of inequalities are given. Various tipe of functions and domains are investigated.

D. REES EGY TÉTELÉNEK KITERJESZTÉSE

Írta: TRAN QUY TIEN

1. §. Bevezetés

D. REES [3] dolgozatában a következő fontos struktúratételt bizonyította be: egy S (nullelemes) félcsoport akkor és csak akkor teljesen O-egyszerű, ha egy nullelemmel kiegészített csoport fölötti, reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoporttal izomorf. Ugyanott szükséges és elégséges feltételt adott arra vonatkozóan, hogy két, nullelemmel kiegészített csoport fölötti, reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoport izomorf legyen. (Az említett fogalmakat és eredményeket illetően lásd például A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [1] könyvét.)

O. STEINFELD [4] dolgozatában REES struktúratételének következő általánosítása szerepel: egy S (nullelemes) félcsoport akkor és csak akkor hasonlóan felbontható, ha egy null- és egységelemes félcsoport fölötti, lokálisan reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoporttal izomorf. E dolgozatban REES másodiknak említett eredményét általánosítva szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy két, null- és egységelemes félcsoport fölötti, lokálisan reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoport izomorf legyen.

Az alapvető félcsoportelméleti eredményeket és fogalmakat illetően A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [1] könyvére utalunk.

2. §. Előkészületek és a főeredmény

A tétel kimondása előtt két fogalmat kell definiálnunk. A H null- és egységelemes félcsoport fölötti $S=M^0(H; I, \Lambda; P=(p_{\lambda i}))$ *Rees*-féle mátrixfélcsoportot *lokálisan regulárisnak* nevezzük, ha a P szendvicsmátrixnak megvannak a következő tulajdonságai:

1. P minden oszlopában létezik legalább egy balról invertálható elem; az i-edik ($i\in I$) oszlopban legyen a $p_{\mu(i)i}$ elem ilyen, azaz $p''_{\mu(i)i}p_{\mu(i)i}=e$ ($\mu(i)\in\Lambda, p''_{\mu(i)i}\in H$, e a H egységeleme).

2. P minden sorában létezik legalább egy jobbról invertálható elem; a λ-adik ($\lambda\in\Lambda$) sorban legyen a $p_{\lambda j(\lambda)}$ elem ilyen, azaz $p_{\lambda j(\lambda)}p'_{\lambda j(\lambda)}=e$ ($j(\lambda)\in I$, $p'_{\lambda j(\lambda)}\in H$, e a H egységeleme).

3. P elemei között létezik legalább egy $p_{\lambda i}(\lambda\in\Lambda, i\in I)$ invertálható elem, azaz $p_{\lambda i}^{-1}p_{\lambda i}=p_{\lambda i}p_{\lambda i}^{-1}=e$ ($p_{\lambda i}^{-1}\in H$).

Ha a dolgozatban egy $S=M^0(H; I, \Lambda; P=(p_{\lambda i}))$ lokálisan reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoportról lesz szó, akkor $p_{\mu(i)i}, p''_{\mu(i)i}, p_{\lambda j(\lambda)}, p'_{\lambda j(\lambda)}$ mindig a szendvicsmátrix itt megadott elemeit jelöli, e pedig a H egységelemét.

A H null- és egységelemes félcsoport fölötti $I \times \Lambda$-típusú $U = (u_{i\lambda})$ mátrixot *reverzibilisnek* nevezzük, ha U minden sorában és minden oszlopában pontosan egy O-tól különböző elem van, és U mindegyik O-tól különböző eleme invertálható.

TÉTEL. *Két lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport* $S = M^0(H; I, \Lambda; P = (p_{\lambda i}))$ *és* $S^* = M^{*0}(H^*; I^*, \Lambda^*; P^* = (p^*_{\lambda^* i^*}))$ *akkor és csak akkor izomorf egymással, ha létezik H-nak H^*-ra való olyan ω izomorfizmusa és létezik egy-egy olyan* $U = (u^*_{j^* i})$ $I^* \times I$*-típusú,* $V = (v^*_{\lambda \mu^*})$ $\Lambda \times \Lambda^*$*-típusú reverzibilis mátrix, hogy* $P\omega = VP^*U$.

KÖVETKEZMÉNY. (Lásd A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [1], Corollary 3.12.) *Az* $S = M^0(G; I, \Lambda; P)$ *és az* $S^* = M^{*0}(G^*; I^*, \Lambda^*; P^*)$ *reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport akkor és csak akkor izomorf egymással, ha létezik G^0-nak G^{*0}-ra való olyan ω izomorfizmusa, és létezik olyan U $I^* \times I$-típusú, ill. V $\Lambda \times \Lambda^*$-típusú reverzibilis mátrix, hogy* $P\omega = VP^*U$.

3. §. Az elégségesség igazolása

Tegyük fel, hogy ω H-nak H^*-ra való izomorfizmusa és $P\omega = VP^*U$, ahol $U = (u^*_{j^* i})$ és $V = (v^*_{\lambda \mu^*})$ $I^* \times I$-típusú, illetve $\Lambda \times \Lambda^*$-típusú reverzibilis mátrix.

Minthogy $P\omega = VP^*U$, azért $p_{\lambda_i}\omega = v^*_{\lambda\mu^*} p^*_{\mu^* j^*} u^*_{j^* i}$, ahol $u^*_{j^* i}$ és $v^*_{\lambda\mu^*}$ invertálható elem H^*-ban.

$u^*_{j^* i}$ az U mátrix i-edik oszlopának és j^*-adik sorának invertálható eleme. A reverzibilis mátrix definíciója szerint $\varphi : i \to j^*$ I-nek I^*-ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Hasonlóan $\psi : \lambda \to \mu^*$ Λ-nak Λ^*-ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése.

Most tekintsük a $\theta : (a)_{i\lambda} \to [u^*_{j^* i}(a\omega) v^*_{\lambda\mu^*}]_{j^* \mu^*}$ $(a \in H)$ leképezést; ez S-et S^*-ba viszi.

Legyen $(k)\varphi = l^*$ $(k \in I;\ l^* \in I^*)$ és $(\nu)\psi = \varrho^*$ $(\nu \in \Lambda;\ \varrho^* \in \Lambda^*)$, akkor $(b)_{k\nu}\theta = [u^*_{l^* k}(b\omega) v^*_{\nu l^*}]_{l^* \varrho^*}$.

θ S-nek S^*-ba való homomorfizmusa, ugyanis tetszőleges $(a)_{i\lambda}$; $(b)_{k\nu}$ $(\in S)$ elemekre

$$\begin{aligned}((a)_{i\lambda} \circ (b)_{k\nu})\theta &= (a p_{\lambda k} b)_{i\nu}\theta = [u^*_{j^* i}(a p_{\lambda k} b)\omega v^*_{\nu\varrho^*}]_{j^* \varrho^*} = \\ &= [u^*_{j^* i}(a\omega)(p_{\lambda k}\omega)(b\omega) v^*_{\nu\varrho^*}]_{j^* \varrho^*} = [u^*_{j^* i}(a\omega)(v^*_{\lambda\mu^*} p^*_{\mu^* l^*} u^*_{l^* k})(b\omega) v^*_{\nu\varrho^*}]_{j^* \varrho^*} = \\ &= [u^*_{j^* i^*}(a\omega) v^*_{\lambda\mu^*}]_{j^* \mu^*} \circ [u^*_{l^* k}(b\omega) v^*_{\nu\varrho^*}]_{l^* \varrho^*} = (a)_{i\lambda}\theta \circ (b)_{k\nu}\theta.\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy θ kölcsönösen egyértelmű leképezés. Valóban, ha az $(a)_{i\lambda}$; $(b)_{k\nu}$ $(\in S)$ elemekre $[u^*_{j^* i}(a\omega) v^*_{\lambda\mu^*}]_{j^* \mu^*} = [u^*_{l^* k}(b\omega) v^*_{\nu\varrho^*}]_{l^* \varrho^*}$, akkor $j^* = l^*$; $\mu^* = \varrho^*$, tehát a φ és a ψ leképezés kölcsönös egyértelműsége miatt $i = k$; $\lambda = \nu$. Így azt nyertük, hogy $u^*_{j^* i}(a\omega) v^*_{\lambda\mu^*} = u^*_{j^* i}(b\omega) v^*_{\lambda\mu^*}$, amiből $u^*_{j^* i}$ és $v^*_{\lambda\mu^*}$ invertálhatósága miatt $a\omega = b\omega$ következik, ezért $a = b$. Ezzel igazoltuk, hogy $(a)_{i\lambda} = (b)_{k\nu}$.

Végül azt bizonyítjuk be, hogy θ az S-nek S^*-ra való leképezése. Legyen $[a^*]_{j^* \mu^*}$ S^*-nak egy tetszőleges eleme. Akkor az $(u^{*-1}_{j^* i} a^* v^{*-1}_{\lambda\mu^*})\omega^{-1}$ $(\in H)$ elemmel

$$((u^{*-1}_{j^* i} a^* v^{*-1}_{\lambda\mu^*})\omega^{-1})_{i\lambda}\theta = [u^*_{j^* i}((u^{*-1}_{j^* i} a^* v^{*-1}_{\lambda\mu^*})\omega^{-1})\omega v^*_{a\mu^*}]_{j^* \mu^*} = [a^*]_{j^* \mu^*}.$$

Tehát θ valóban S-nek S^*-ra való izomorfizmusa.

MEGJEGYZÉS. Az elégségesség igazolásánál nem használtuk ki, hogy az $S = u^0(H; I, \Lambda; P = (p_{\lambda i}))$ és az $S^* = u^{*0}(H^*; I^*, \Lambda^*; P^* = (p^*_{\lambda^* i^*}))$ *Rees*-féle mátrixfélcsoport lokálisan reguláris.

4. §. A szükségesség igazolása

Ehhez némi előkészületre, néhány lemmára lesz szükségünk.

Egy H null- és egységelemes félcsoport fölötti $S=M^0(H;\,I,\,\Lambda;\,P=(p_{\lambda i}))$ *Rees-féle* mátrixfélcsoportban tekintsük a következő részhalmazokat:

$$R_i = \{(a)_{i\lambda}/a\in H;\ \lambda\in\Lambda\}$$

és

$$L_\lambda = \{(a)_{i\lambda}/a\in H;\ i\in I\}.$$

R_i és L_λ definíciója szerint

$$S=\bigcup_{i\in I} R_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda (R_i\cap R_k = 0,\ \text{ ha }\ i\neq k;\ L_\lambda\cap L_\gamma = 0,\ \text{ ha }\ \lambda\neq\gamma).$$

Kimutatható, hogy $R_i[L_\lambda]$ S-nek jobboldali [baloldali] ideálja, továbbá $M^0_{i\lambda}=R_i\cap L_\lambda$ S-nek részfélcsoportja.

Érvényesek a következő lemmák:

1. LEMMA. (Lásd L. MÁRKI [2].) *Legyen adott egy* $S=M^0(H;\,I,\,\Lambda;\,P=(p_{\lambda i}))$ *lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport. A* H *és az* $M^0_{i\lambda}$ *félcsoport akkor és csak akkor izomorf egymással, ha* $p_{\lambda i}$ *invertálható elem, mégpedig ez esetben*

$$\varphi\colon H\to M^0_{i\lambda}(a\to(ap_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})$$

izomorfizmus.

2. LEMMA. *Legyen* $S=M^0(H;\,I,\,\Lambda;\,P=(p_{\lambda i}))=\bigcup_{i\in I} R_i=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$ *és*

$$S^*=M^{*0}(H^*;\,I^*,\,\Lambda^*;\,P^*=(p^*_{\lambda^* i^*}))=\bigcup_{i^*\in I^*} R^*_{i^*}=\bigcup_{\lambda^*\in\Lambda^*} L^*_{\lambda^*}$$

lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport. Ha a θ *leképezés az* S*-nek* S^**-ra való izomorfizmusa, akkor létezik olyan* $i\to i^*$ $(i\in I;\ i^*\in I^*)$ *és* $\lambda\to\lambda^*$ $(\lambda\in\Lambda;\ \lambda^*\in\Lambda^*)$ *kölcsönösen egyértelmű leképezés, hogy* $R_i\theta=R^*_{i^*}$, $L_\lambda\theta=L^*_{\lambda^*}$, $M^0_{i\lambda}\theta=M^{*0}_{i^*\lambda^*}$.

Bizonyítás. Ismeretes, hogy $(p''_{\mu(i)i})_{i\mu(i)}=E_i$ idempotens elem, és $R_i=E_i\circ S$. (Lásd O. STEINFELD [4]!)

Vegyünk most egy tetszőleges R_i jobbideált és ennek egy tetszőleges $E_i\circ T$ elemét $(T\in S)$. Tudjuk, hogy $E_i\theta$ az S^* egy idempotens eleme. Ha $E_i\theta\in R^*_{i^*}$, akkor $(E_i\circ T)\theta=(E_i\theta)\circ(T\theta)\in R^*_{i^*}$, ugyanis $R^*_{i^*}$ az S^* egy jobbideálja, azaz

$$R_i\theta \subseteq R^*_{i^*} \qquad (i^*\in I^*). \tag{1}$$

Mivel θ izomorfizmus, azért létezik olyan θ^{-1} leképezés, amely az S^*-nek S-re való izomorfizmusa. A fenti bizonyításhoz hasonló okoskodás arra vezet, hogy $R^*_{i^*}\theta^{-1}$ az S valamely R_k $(k\in I)$ jobboldali ideáljának része. Kimutatjuk, hogy $R_i=R_k$.

Tegyük fel, hogy $R^*_{i^*}\theta^{-1}\subseteq R_k$ és $k\neq i$. Legyen $0\neq(a)_{i\lambda}\in R_i$, akkor $(a)_{i\lambda}\theta\in R_i\theta\subseteq R^*_{i^*}$. E miatt $((a)_{i\lambda}\theta)\theta^{-1}\in R^*_{i^*}\theta^{-1}$, de $R^*_{i^*}\theta^{-1}\subseteq R_k$, ezért $((a)^*_{i^*}\theta)\theta^{-1}\in R_k$, azaz $(a)_{i\lambda}\in R_k$. Eszerint $0\neq(a)_{i\lambda}\in R_i\cap R_k$, ami ellentmond az $R_i\cap R_k=0$ $(i\neq k)$ feltevésünknek. Ezzel igazoltuk, hogy $R_i=R_k$. Tehát $R^*_{i^*}\theta^{-1}\subseteq R_i$ vagyis

$$R^*_{i^*}\subseteq R_i\theta. \tag{2}$$

(1)-ből és (2)-ből látható, hogy $R_i\theta=R^*_{i^*}$.

Hasonlóan bebizonyítható, hogy $L_\lambda\theta=L^*_{\lambda^*}$.

A fenti egyenlőségekből közvetlenül adódik, hogy léteznek a keresett $i \to i^*$ ($i \in I$; $i^* \in I^*$) és $\lambda \to \lambda^*$ ($\lambda \in \Lambda$; $\lambda^* \in \Lambda^*$) kölcsönösen egyértelmű leképezések.

Azt kell még igazolnunk, hogy $M_{i\lambda}^0 \theta = M_{i^*\lambda^*}^{*0}$. Vegyük $M_{i\lambda}^0 = R_i \cap L_\lambda$ egy tetszőleges $(a)_{i\lambda}$ elemét ($a \in H$). Könnyen belátható, hogy $(a)_{i\lambda}\theta \in R_{i^*}^* \cap L_{\lambda^*}^* = M_{i^*\lambda^*}^{*0}$, tehát $M_{i\lambda}^0 \theta \subseteq M_{i^*\lambda^*}^{*0}$. Fordítva, vegyük $M_{i^*\lambda^*}^{0*} = R_{i^*}^* \cap L_{\lambda^*}^*$ egy tetszőleges $[a^*]_{i^*\lambda^*}$ elemét ($a^* \in H^*$). Világos, hogy $[a^*]_{i^*\lambda^*}\theta^{-1} \in R_i \cap L_\lambda = M_{i\lambda}^0$, ezért $[a^*]_{j^*\lambda^*} \in M_{i\lambda}^0 \theta$, vagyis $M_{i^*\lambda^*}^{*0} \subseteq M_{i\lambda}^0 \theta$. Azt nyertük tehát, hogy $M_{i\lambda}^0 \theta = M_{i^*\lambda^*}^{*0}$. Ezzel a 2. lemma bizonyítását befejeztük.

3. LEMMA. *Legyen $S = M^0(H; I, \Lambda; P = (p_{\lambda i}))$ és $S^* = M^{*0}(H^*; I^*, \Lambda^*; P^* = (p_{\lambda^* i^*}^*))$ két egymással izomorf lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport, és legyen $\theta : (a)_{i\lambda} \to (a)_{i\lambda}\theta = [a^*]_{i^*\lambda^*}$ ($a \in H$; $a^* \in H^*$) S-nek S^*-ra való izomorfizmusa. H-nak egy a eleme akkor és csak akkor invertálható, ha az a^* elem invertálható H^*-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a invertálható elem. Mivel θ S-nek S^*-ra való leképezése, ezért az $[e^*]_{i^*\nu^*}$ ($\in S^*$) elemhez létezik olyan $(x)_{i\nu}$ ($\in S$) elem, hogy $(x)_{i\nu}\theta = [e^*]_{i^*\nu^*}$ (e^* a H^* egységeleme). Most

$$(x)_{i\nu} = (ap_{\lambda j(\lambda)}p'_{\lambda j(\lambda)}a^{-1}p''_{\mu(i)i}p_{\mu(i)i}x)_{i\nu} = (a)_{i\lambda} \circ (p'_{\lambda j(\lambda)}a^{-1}p''_{\mu(i)i})_{j(\lambda)\mu(i)} \circ (x)_{i\nu}.$$

A θ leképezést alkalmazva azt nyerjük, hogy

$$[e^*]_{i^*\nu^*} = [a^*]_{i^*\lambda^*} \circ [t^*]_{j^*(\lambda^*)\mu^*(i^*)} \circ [e^*]_{i^*\nu^*} = [a^* p^*_{\lambda^* j^*(\lambda^*)} t^* p^*_{\mu^* i^*(i^*)} e^*]_{i^*\nu^*}, \ (t^* \in H^*);$$

eszerint $e^* = a^* p^*_{\lambda^* j^*(\lambda^*)} t^* p^*_{\mu^*(i^*) i^*}$, tehát a^* jobbról invertálható elem H^*-ban.

Duális módon igazolhatjuk, hogy a^* egy balról invertálható elem.

Összefoglalva, azt nyertük, hogy a^* H^*-nak invertálható eleme. Hasonlóan igazoljuk, hogy ha a^* invertálható elem H^*-ban, akkor a invertálható H-ban.

4. LEMMA. *Legyen $S = M^0(H; I, \Lambda; P = (p_{\lambda i}))$ és $S^* = M^{*0}(H^*; I^*, \Lambda^*; P^* = (p^*_{\lambda^* i^*}))$ két egymással izomorf lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport, és $\theta : (a)_{i\lambda} \to (a)_{i\lambda}\theta$ jelölje a megfelelő izomorf leképezést. A P mátrix $p_{\lambda i}$ eleme akkor és csak akkor invertálható H-ban, ha $p^*_{\lambda^* i^*}$ invertálható H^*-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $p_{\lambda i}$ invertálható elem. Mindenekelőtt azt bizonyítjuk, hogy ha $p_{\lambda i}$ inverze $p_{\lambda i}^{-1}$ ($\in H$), akkor $(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$ egységeleme $M_{i\lambda}^0$-nak. Valóban, vegyük $M_{i\lambda}^0$ egy tetszőleges $(a)_{i\lambda}$ elemét ($a \in H$; $i \in I$; $\lambda \in \Lambda$). Világos, hogy

$$(a)_{i\lambda} \circ (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = (a p_{\lambda i} p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = (a)_{i\lambda}$$

és

$$(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \circ (a)_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda i} a)_{i\lambda} = (a)_{i\lambda}.$$

A 2. lemma szerint tudjuk, hogy $M_{i\lambda}^0 \theta = M_{i^*\lambda^*}^{*0}$. Mivel θ izomorfizmus, azért $(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}\theta$ egységeleme $M_{i^*\lambda^*}^{*0}$-nak. Vezessük be a következő jelölést:

$$(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}\theta = [q^*]_{i^*\lambda^*} \quad (q^* \in H^*; i^* \in I^*; \lambda^* \in \Lambda^*).$$

$p_{\lambda i}^{-1}$ invertálható elem H-ban, így a 3. lemma szerint q^* invertálható elem H^*-ban, tehát létezik olyan q^{*-1} elem, hogy $q^* q^{*-1} = q^{*-1} q^* = e^*$ (e^* a H^* egységeleme). Mivel $[q^*]_{i^*\lambda^*}$ egységeleme $M_{i^*\lambda^*}^{*0}$-nak, azért

$$[q^{*-1}]_{i^*\lambda^*} \circ [q^*]_{i^*\lambda^*} = [q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}, \quad \text{vagyis} \quad [q^{*-1} p^*_{\lambda^* i^*} q^*]_{i^*\lambda^*} = [q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}.$$

Így $q^{*-1}p^*_{\lambda^*i^*}q^*=q^{*-1}$, ezért $p^*_{\lambda^*i^*}q^*=e^*$. Másrészt $[q^*]_{i^*\lambda^*}\circ[q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}=[q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}$, ugyanis $[q^*]_{i^*\lambda^*}$ egységeleme $M^{*0}_{i^*\lambda^*}$-nak; innen $[q^*p^*_{\lambda^*i^*}q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}=[q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}$. Ebből adódik, hogy $q^*p^*_{\lambda^*i^*}q^{*-1}=q^{*-1}$, ezért $q^*p^*_{\lambda^*i^*}=e^*$.

Ezzel megmutattuk, hogy $p^*_{\lambda^*i^*}$ invertálható elem H^*-ban. Hasonlóan igazolható, hogy $p_{\lambda i}$ invertálható elem H-ban, ha $p^*_{\lambda^*i^*}$ invertálható H^*-ban.

A lemmák alapján kimutatjuk a feltétel szükségességét.

Tegyük fel, hogy $S=M^0(H;\,I,\,\Lambda;\,P=(p_{\lambda i}))$ és $S^*=M^{*0}(H^*;\,I^*,\,\Lambda^*;\,P^*=(p^*_{\lambda^*i^*}))$ két, egymással izomorf lokálisan reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoport, és jelölje $\theta:(a)_{i\lambda}\to(a)_{i\lambda}\theta$ a megfelelő izomorf leképezést.

A 2. lemma szerint létezik a

$$\varphi: I\to I^*(i\leftrightarrow i^*)$$

és

$$\psi: \Lambda\to\Lambda^*(\lambda\leftrightarrow\lambda^*)$$

kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Az S lokálisan reguláris volta miatt a P szendvics-mátrixban létezik legalább egy $p_{\mu j}$ invertálható elem, azaz $p^{-1}_{\mu j}p_{\mu j}=p_{\mu j}p^{-1}_{\mu j}=e$. A 4. lemma alapján $p^*_{\mu^*j^*}$ invertálható elem H^*-ban. Most az 1. lemma szerint létezik az

$$\alpha: H\to M^0_{j\mu}(a\to(ap^{-1}_{\mu j})_{j\mu})$$

és

$$\beta: H^*\to M^{*0}_{j^*\mu^*}(a^*\to[a^*p^{*-1}_{\mu^*j^*}]_{j^*\mu^*})$$

izomorfizmus.

Mivel a 2. lemma értelmében $\theta:M^0_{j\mu}\to M^{0*}_{j^*\mu^*}$ izomorfizmus, azért $\omega=\alpha\theta\beta^{-1}$ a H-nak H^*-ra való izomorfizmusa.

Tudjuk, hogy $p^*_{\lambda^*i^*}\beta=[p^*_{\lambda^*i^*}p^{*-1}_{\mu^*j^*}]_{j^*\mu^*}=[e^*]_{j^*\lambda^*}\circ[p^{*-1}_{\mu^*j^*}]_{i^*\mu^*}$. De $0^*\neq[p^{*-1}_{\mu^*j^*}]_{i^*\mu^*}\in S^*$, ezért $0\neq[p^{*-1}_{\mu^*j^*}]_{i^*\mu^*}\theta^{-1}\in S$ és $0^*\neq[e^*]_{j^*\lambda^*}\in S^*$, ezért $0\neq[e^*]_{j^*\lambda^*}\theta^{-1}\in S$.

Legyen $[p^{*-1}_{\mu^*j^*}]_{i^*\mu^*}\theta^{-1}=(c_i)_{i\mu}$ ($\neq0$ és $[c^*]_{j^*\lambda^*}\theta^{-1}=(d_\lambda)_{j\lambda}$ ($\neq0$) ($c_i\in H;\,d_\lambda\in H$).

Most tekintsük p^*-nak a $p^*_{\lambda^*i^*}$ elemét.

$$\begin{aligned}p^*_{\lambda^*i^*} &= (p^*_{\lambda^*i^*}\beta\theta^{-1})\theta\beta^{-1} = ([e^*]_{j^*\lambda^*}\circ[p^{*-1}_{\mu^*j^*}]_{i^*\mu^*})\theta^{-1}\theta\beta^{-1} =\\ &= ([e^*]_{j^*\lambda^*}\theta^{-1}\circ[p^{*-1}_{\mu^*j^*}]_{i^*\mu^*}\theta^{-1})\theta\beta^{-1} = \big((d_\lambda)_{j\lambda}\circ(c_i)_{i\mu}\big)\alpha^{-1}\omega =\\ &= (d_\lambda p_{\lambda i}c_i)_{j\mu}\alpha^{-1}\omega = (d_\lambda p_{\lambda i}c_ip_{\mu j})\omega = (d_\lambda\omega)(p_{\lambda i}\omega)\big((c_ip_{\mu j})\omega\big).\end{aligned}$$

Minthogy θ^{-1} izomorfizmus, $p^{*-1}_{\mu^*j^*}$ és e^* invertálható, azért a 3. lemma szerint c_i és d_λ is invertálható elem H-ban. Mivel ω izomorfizmus és c_i, d_λ, $p_{\mu j}$ invertálható, ezért $(d_\lambda\omega)^{-1}$ és $\big((c_ip_{\mu j})\omega\big)^{-1}$ létezik H^*-ban.

Innen látjuk, hogy $p_{\lambda i}\omega=(d_\lambda\omega)^{-1}p^*_{\lambda^*i^*}\big((c_ip_{\mu j})\omega\big)^{-1}$, tehát $p_{\lambda i}\omega=v^*_\lambda\,p^*_{\lambda^*i^*}u^*_i$, ahol $v^*_\lambda=(d_\lambda\omega)^{-1}$ és $u^*_i=\big((c_ip_{\mu j})\omega\big)^{-1}$.

Most definiáljuk az $U=(u^*_{j^*i})$ $I^*\times I$-típusú mátrixot:

$$u^*_{j^*i^*}=\begin{cases}u^*_i, & \text{ha } j^*=i^* \quad (u^*_i\in H^*)\\ 0^*, & \text{ha } j^*\neq i^*\end{cases}$$

és hasonlóan a $V=(v^*_{\lambda\mu^*})$ $\Lambda\times\Lambda^*$-típusú mátrixot:

$$v^*_{\lambda\mu^*}=\begin{cases}v^*_\lambda, & \text{ha } \mu^*=\lambda^* \ (v^*_\lambda\in H^*)\\ 0^*, & \text{ha } \mu^*\neq\lambda^*.\end{cases}$$

Látható, hogy az U mátrix i-edik oszlopában is és j^*-adik sorában is pontosan egy nem nulla elem van:
$u_i^* = ((c_i p_{\mu j})\omega)^{-1}$, és u_i^* invertálható elem H^*-ban. Eszerint $U = (u_{j^* i}^*)$ reverzibilis mátrix.

Hasonlóan $V = (v_{\lambda\mu^*}^*)$ is reverzibilis mátrix.

Végül tudjuk, hogy $p_{\lambda i}\omega = v_\lambda^* p_{\lambda^* i^*}^* u_i^* = v_{\lambda\lambda^*}^* p_{\lambda^* i^*}^* u_{i^* i}^*$, azaz $P\omega = VP^*U$.

A tételt ezzel teljesen bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups, Vol I.* Math. Surveys, No. 7, American Math. Soc. Providence, 1961.
[2] L. Márki, On locally regular Rees matrix semigroups, *Acta Sci. Math.* 37 (1975), 95—102.
[3] D. Rees, On semi-groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **36** (1940), 387—400.
[4] O. Steinfeld, On a generalization of completely O-simple semigroups, *Acta Sci, Math.* **28** (1967), 135—145.

(Beérkezett: 1974. XII. 12.)

A MCNEMAR-PRÓBA NÉHÁNY ÁLTALÁNOSÍTÁSA

Írta: HAJTMAN BÉLA

Bevezetés

A *McNemar*-próba néven közismert nemparaméteres statisztikai eljárás önkontrollos (vagy ennek megfelelő) kísérleti elrendezések esetén alkalmazható olyankor, ha a vizsgált változónak csupán két értéke lehetséges (illetve, ha az eredeti változót dichotomizáljuk). A továbbiakban a változót a kísérleti személyektől kapott *válasz*nak fogjuk nevezni, értékeire pedig a pozitív (+) és negatív (−) megjelöléseket fogjuk használni.

A próba a különböző értékek gyakoriságainak segítségével azt igyekszik megállapítani, hogy valamely beavatkozás megváltoztatja-e a kapott válaszok megoszlását. Nevezetesen, azt a nullhipotézist vizsgálja, hogy az egyes személyektől kapott válasz a beavatkozás után is ugyanaz, mint előtte volt — és az ettől való eltérések csak véletlen ingadozásoknak tekinthetők. A válaszok gyakoriságát egy 2×2-es táblázatban lehet célszerűen elrendezni (1. táblázat), ahol $a+b+c+d=n$ a kísérleti személyek száma.

1. TÁBLÁZAT

		Utána +	Utána −
Előtte	+	a	b
	−	c	d

A *McNemar*-próba [1] a fenti nullhipotézist a

$$\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{b+c} \tag{1}$$

kifejezés segítségével vizsgálja; ez közelítőleg 1 szabadságfokú χ^2-eloszlást követ, ha a nullhipotézisnek megfelelő $\frac{b+c}{2}$ várt gyakoriság értéke 5 vagy annál nagyobb. (Egyébként a próba nem alkalmazható.)

Figyelembe véve a kísérletezés során fellépő gyakorlati igényeket, számos általánosítás, illetve korrekció látszik szükségesnek ezzel a próbával kapcsolatban. Ilyen általánosításnak fogható fel COCHRAN azon próbája [2] is, mely — az önkontrollos elrendezésre jellemző két minta helyett — több összetartozó minta vizsgálatára alkalmas, ugyancsak dichotomizált változók esetében. Bár a kísérleti elrendezés az előbbinek nyilvánvalóan általánosítása, COCHRAN a problémát más oldalról közelítette meg, és megoldásának formája sem mutat első látásra rokonságot MCNEMAR próbájával. (Valójában két minta esetén ekvivalens a két próba.)

A következőkben néhány olyan általánosításról lesz szó (részben csak a probléma felvetésének formájában), melyek közvetlenül a *McNemar*-próbából indulnak ki és azt igyekeznek néhány szempontból kiterjeszteni.

Az arányos változás problémája

Kiindulva a *McNemar*-próbának megfelelő kísérleti elrendezésből (1. táblázat), először is annak nullhipotézisét tesszük kritika tárgyává. MCNEMAR azt a nullhipotézist állította fel, hogy a véletlen okozta változások egyforma arányban oszlanak meg a pozitívból negatívba, illetve negatívból pozitívba forduló válaszok között. Ennek megfelelően, adottnak véve az „összes megváltozások" számát, a χ^2-próba alapjául szolgáló várt gyakoriság $\frac{b+c}{2}$ volt.

Ez a nézet, véleményünk szerint, tarthatatlanná válik, ha a válaszok kiindulási megoszlása erősen aránytalan. Ha pl. jóval több személytől kapunk negatív választ, mint pozitívot (azaz ha $a+b \ll c+d$), a nullhipotézisnek megfelelő esetben — tehát hatástalanság esetén — várhatóan több negatív válasz változik „véletlenül" pozitívvá, mint fordítva. Ezt a tényt figyelembe véve úgy fogalmazhatjuk a nullhipotézist, hogy a véletlen okozta megváltozások az eredeti csoportok *ugyanakkora részét* érintik. A két várt gyakoriság — a b mellett álló β és a c mellett álló γ — arányára tehát

$$\beta : \gamma = a+b : c+d \tag{2}$$

kell hogy teljesüljön. Figyelembe véve még a

$$\beta+\gamma = b+c$$

kikötést,

$$\beta = \frac{(a+b)(b+c)}{n}$$

és

$$\gamma = \frac{(c+d)(b+c)}{n}$$

adódik.

Behelyettesítve ezeket a két cellából számított (1 szabadságfokú) χ^2 képletébe, rövid számolás után a

$$\chi^2 = \frac{(ac-bd)^2}{(a+b)(c+d)(b+c)} \tag{3}$$

összefüggést kapjuk. Ennek értéke számszerűleg megegyezik (1) értékével, ha $a+b=$ $=c+d$, egyébként azonban különbözik tőle. Könnyű olyan szituációkat találni, melyekben az egyik próba $\chi^2=0$-t ad, míg a másik erősen szignifikáns eredményt, más esetekben pedig a kimutatott változás ellentétes irányúnak adódik az (1), illetve (3) próba alapján számolva.

Az elmondottakból következik, hogy nem lenne sok értelme erőfüggvény segítségével keresni az igazolást, hogy melyik próba jobb: egyszerűen *mást* vizsgál az egyik, és mást a másik. A (3) próba bevezetésénél alkalmazott gyakorlati érvelést csak egyetlen szemponttal egészíteném ki. Az önkontrollos elrendezések esetén alkalmazott próbák (egymintás *t*-próba, *Wilcoxon*-próba, előjelpróba stb.) valamennyien invariánsak az időbeli megfordításra vonatkozólag. Legjobb tudomásom szerint egyetlen más próba sem használja ki azt az információt, amit az *előtte-utána* megkülönböztetés tartalmaz, vagyis ennek a viszonynak a tényleges *megfordíthatatlanságát*. Az pedig nyilvánvaló, hogy valamely probléma megoldására az a próba alkalmasabb, amelyik *többet* használ fel a feladat nyújtotta információk közül.

A (3) próba esetében is alkalmazható — természetesen kissé módosított formában — a *Yates*-féle folytonossági korrekció. Az (1) táblázat celláiban úgy kell az 1/2 értékeket hozzáadnunk, ill. levonnunk, hogy a várt gyakoriságok előállításához felhasznált (2) arány változatlan maradjon. Eszerint két-két egymás alatti cellában kell ugyanazt a korrekciót végezni.

Tegyük fel, hogy a válasz negatívba fordulását várjuk. Ehhez nem elég (de nem is kell), mint a *McNemar*-próba esetében, $b > c$ teljesülése: a kérdést a $b-\beta$ különbség előjele dönti el. Ennek értelmében a változás irányára vonatkozó feltevésünk ekvivalens azzal, hogy $bd-ac>0$ legyen. Ebből már következik, hogy az a és c értékeket kell növelnünk, a b-t és d-t pedig csökkentenünk 1/2-del.

Behelyettesítve az így módosított értékeket a (3) képletbe — és mindjárt az ellenkező feltevést, a pozitív irányú változást is figyelembe véve —, a (3) próba folytonossági korrekcióval módosított alakjára ezt kapjuk:

$$\text{(3)*} \qquad \chi^2 = \frac{(|ac-bd|-(n/2))^2}{(a+b)(c+d)(b+c)}.$$

A szakmai hatásosság figyelembevétele

Ezt a kérdést már Cochran [2] is érinti, sőt rámutat a megoldás nehézségeire is. Arról van szó, hogy a *McNemar*-próba (és ugyanígy Cochran általánosítása) teljesen figyelmen kívül hagyja az „előtte" és „utána" szituációban változatlan választ adó személyeket. Az (1) alatti képletből látszik, hogy a és d akármekkorák lehetnek, ez a próba eredményén nem változtat. Márpedig *szakmai* szempontból igen jelentős ezeknek az értékeknek a nagysága is. Tegyük fel, hogy bizonyos embereknek a véleményét akarjuk megváltoztatni, és azt szeretnénk, hogy akik negatív választ adtak, azok is igeneljék a szóban forgó kérdést. Ha a válaszok megváltozásából ezt a választott szinten szignifikánsan megerősíthetjük, látszólag igazoltuk meggyőzési módszerünk hatásosságát. Ehhez nem kell más, mint hogy $c > b$ legyen és (1) meghaladja a választott szignifikanciaszintnek megfelelő értéket. A feltételeknek megfelelő minimális számot választva ($b+c \geqq 10$), $c=9$, $b=1$ esetén (1) az 5%-os szinten szignifikáns lesz, még folytonossági korrekció bevezetése esetén is.[1] Világos azonban, hogy ennek

[1] A (3) próba esetében is alkalmazott *Yates*-féle korrekció (1) képletét így módosítja:

$$\text{(1)*} \qquad \chi^2 = \frac{(|b-c|-1)^2}{b+c}.$$

ellenére nem tekinthetjük — szakmai szempontból — hatásosnak a beavatkozásunkat, ha pl. 200 személy közül ($c+d=200$) került ki ez a 9 „meggyőzött”. Ha viszont mindössze tizenketten voltak ($d=3$), akiket meg kellett győzni, eljárásunkkal meg lehetünk elégedve.

COCHRAN erre vonatkozóan azt mondja, hogy nem látja az utat, ahogyan ezt a problémát meg lehetne oldani anélkül, hogy a próba objektív voltát ne veszélyeztetnénk. Valóban így van, annyival inkább, mivel ez a „szakmai hatásosságra” vonatkozó követelmény problémánként más és más lehet. (Valamely gyógymód alkalmazandó akkor is, ha az — egyébként reménytelen — betegeknek csak egy kis százaléka is megenyhül, egy költséges reklámhadjárat viszont csak akkor kifizetődő, ha sok embert sikerül megnyerni a reklámozott ügynek.)

A probléma egyébként formailag könnyen megoldható. Ha az alternatív hipotézisben a változás irányát előre meghatározzuk (egyoldalú próbavégzés), a $\frac{c}{d}$ $\left(\text{vagy } \frac{b}{a}\right)$ arányra kell valamilyen kikötést tennünk, ha viszont ilyen előzetes hipotézisünk nincs (kétoldalú próba), a $\frac{b+c}{a+d}$ aránynak kell valamilyen előre meghatározott szintet meghaladnia. Elvileg megtehetjük azt is, hogy az előre kikötött (pl. legalább a populáció 40%-át érintő) változás teljesülését a binomiális eloszlás táblázata segítségével vizsgáljuk meg. Nem lenne azonban sok értelme ilyen pontos elemzést végezni egy végső soron *találomra* meghatározott, tetszőlegesen kitűzött „minimális hatásfok” ellenőrzése érdekében.

Végső soron abban lehet maradni, hogy esetenként szubjektív elbírálás tárgyává kell tenni, hogy a tapasztalt változások mennyisége elegendő-e ahhoz, hogy az alkalmazott beavatkozás hatásosságáról beszélhessünk. Ha a válaszunk igenlő, akkor láthatunk hozzá (a *McNemar*-próba vagy az előző szakaszban javasolt eljárás segítségével) annak eldöntéséhez, hogy a talált változás valóban alátámasztható-e az adatok alapján.

A kitűzött célt tehát nem értük el: a próbát nem sikerült megszabadítani a szakasz elején említett hiányosságától. Összegezésképp annyit mondhatunk, hogy szükségesnek tűnik a *McNemar*-próbát *kiegészíteni* egy előzetes, szubjektív „próbával”, mivel önmagában — a feladatok gyakorlati célját tekintve — nem állja meg a helyét.[2]

A próba kiterjesztése kettőnél több értéket felvevő változókra

A kísérleti személyektől kapott válasz sok esetben finomabb osztályozást is megenged, mint az egyszerű dichotómiát. Ilyenkor is feltehetjük a kérdést, hogy a beavatkozás megváltoztatta-e a kapott válaszok arányait.

A feladatokat két részre oszthatjuk aszerint, hogy a lehetséges válaszok természetes sorrendbe (rangsorba) állíthatók-e vagy pedig nem. Nézzük először az utóbbi esetet. Ez az általánosabb, valójában azonban kevesebb érdekességet ígérő lehetőség. Egyszerűen általánosítva ugyanis a *McNemar*-próba gondolatmenetét,

[2] Hasonló probléma egyébként az előjelpróbával kapcsolatban is felléphet, de ott azért nem annyira szembetűnő, mert ritka az az eset, hogy a változatlan — tehát végső soron a mintából kihagyott — elemek száma számottevően nagy legyen.

2. TÁBLÁZAT

A satírozott mezőkben álló gyakoriságok a próba szempontjából közömbösek, ezért fel sem tüntettük őket.

		Utána		
		A	B	C
Előtte	A		n_1	n_2
	B	n_3		n_4
	C	n_5	n_6	

a feltételek olyan rendszeréhez jutunk, amelynek alapján valamennyi várt gyakoriság egymással egyenlő. A legegyszerűbb, három lehetséges választ tartalmazó esetben (l. a 2. táblázatot):

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i}{6}.$$

Az így kapott, 6 tagból álló χ^2 szabadságfoka 5. Szignifikáns eredményt kaphatunk, ha — mondjuk — n_2 és n_5 igen nagyok, a többi négy gyakoriság pedig kicsi. A gyakorlati feladat szempontjából azonban alig magyarázható az olyan beavatkozás, mely az A válaszokat C válasszá változtatja, ugyanakkor a C válaszokból A válaszokat csinál.[3]

Ami a másik lehetőséget illeti, a rangsorba állítható válaszok esetét, ez gyakorlati szempontból sokkal fontosabbnak tűnik. A *McNemar*-próba feladatának megfogalmazásában *pozitív* és *negatív válaszokat* emlegettünk; ezzel mintegy elköteleztük a próbát az *attitűdök* vizsgálatára. Márpedig az attitűdök rendezhető (sorbaállítható) értékű változót képeznek, és ritkán szorítkoznak csupán két értékre. A 3. táblázat az 5 lehetséges értéket felvevő válasz esetében mutatja a gyakoriságok elrendezésének sémáját. Ebben az esetben a válasz a leghatározottabb igenléstől (+ +) a közömbösségen át (0) az erős ellenzésig (— —) terjed. Máskor a skála pl. így fogalmazható: nagyon szereti, szereti, közömbös, nem szereti, ki nem állhatja.

Az attitűdök azonban csak egyik (talán a legtipikusabb és leggyakoribb, de nem egyetlen) példája a rangsorolható válaszoknak. Az ismertetendő eljárás nem szorítkozik az attitűdök vizsgálatára — épp úgy, ahogy nem korlátozódik az öt különböző értéket felvevő változókra sem.

[3] Pszichológiai problémáknál elképzelhető hasonló jelenség; erre vonatkozó — bár fiktív — példát említek a [3] könyv 329. oldalán. Mindenesetre pozitívumként kell elkönyvelni azt, hogy a fent vázolt próba *képes* az ilyen jellegű változások kimutatására.

3. TÁBLÁZAT

Utána

Előtte	$++$	$+$	0	$-$	$--$
$++$	n_{11}	n_{12}	$\dots$	$\dots$	n_{15}
$+$	n_{21}	n_{22}	$\dots$	$\dots$	n_{25}
0	$\vdots$				
$-$	$\vdots$				
$--$	n_{51}	n_{52}	$\dots$	$\dots$	n_{55}

Általánosságban, tekintsünk egy önkontrollos (vagy azzal egyenértékű, páronként összetartozó elemekből álló) elrendezést, melyben a változó (a válasz) k lehetséges értéket vesz fel ($k>2$). A két mintában — a bevezetett szóhasználattal a beavatkozás *előtt* és *után* — kapott válaszokat egy $k \times k$ mezős táblázatban helyezhetjük el a 3. táblázat mintájára, ahol

$$\sum_i \sum_j n_{ij} = N$$

a minta elemszáma. Szükségünk lesz még a sorösszegekre is:

$$\sum_j n_{ij} = N_i$$

az i-edik sor elemeinek összege, az „előtte" i-edik választ adó személyek száma.

Egy ilyen elrendezésben a változás „mértékét" a cella két indexének eltérése jellemzi: az $i-j$ szám megmutatja, hogy a cellához tartozó n_{ij} számú személy válasza milyen mértékben változott meg a beavatkozás hatására. Ha $i-j$ pozitív, a válasz „pozitívabb" lett (pl. kevésbé elutasító, közömbös vagy igenlő, ha pozitív volt, akkor még pozitívabb), ha negatív, „negatívabb". (L. a 3. táblázatot.) A főátlóban azok állnak, akik nem változtatták meg véleményüket; valóban, ezekben a cellákban $i-j=0$ adódik.

Vizsgáljuk azt a nullhipotézist, hogy a beavatkozás nem változtatja meg a kapott válaszok arányait, illetve, hogy az ilyen változások csupán véletlen ingadozásoknak tekinthetők. A hipotézis ellenőrzésére a főátlón kívüli $k(k-1)$ cellára vonatkozó tagok összegeként előállított χ^2 mennyiség szolgál; feladatunk az ennek felírásához szükséges várt gyakoriságok előállítása. Jelöljük ezeket (a már előbb is alkalmazott görög betűs jelölés analógiájára) ν_{ij}-vel.

Elsőnek a (3) alatti próba általánosítását állítjuk elő. Ennek megfelelően, az egyes sorokban az összes változások (megváltozott vélemények) számát a nullhipotézis fennállása esetén a sor létszámával arányosnak tételezzük fel:

$$\frac{\sum\limits_{j \neq i_1} \nu_{i_1 j}}{\sum\limits_{j \neq i_2} \nu_{i_2 j}} = \frac{N_{i_1}}{N_{i_2}}, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, k. \tag{4}$$

Az *összes* megváltozások számát, mint mindig, adottnak vesszük:

$$\sum\sum_{i\neq j} \nu_{ij} = \sum\sum_{i\neq j} n_{ij}. \tag{5}$$

Ennyi azonban nem elég a várt gyakoriságok előállításához. (4) és (5) alapján megkapható a várt gyakoriságok összege valamennyi sorban, de kellene valamilyen elv, ami szerint a cellákban „szétosztjuk" őket.

Térjünk vissza a nullhipotézishez. Kézenfekvő az a megállapítás, hogy ha a változások csupán a véletlennek tulajdoníthatók, a nagy változások jóval ritkábbak, mint a kicsik. Mivel pedig a megváltozásban mintegy „hibát" látunk a feltételezett változatlansággal szemben,[4] természetes következtetés, hogy a megváltozások előfordulása a normális eloszlás (a „hibafüggvény") törvényeit követi. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy pl. az első sor várt gyakoriságai, $\nu_{12}, \nu_{13}, \ldots, \nu_{1k}$ úgy aránylanak egymáshoz, mint a normális eloszlás megfelelő helyein vett valószínűségek.

A problémát éppen ezeknek a „megfelelő helyeknek" a kijelölése okozza. Meglehetős önkényesen úgy jártunk el, hogy a normális eloszlás görbéjét a kétoldalú 5%-os szignifikanciaszintnek megfelelő értéknél ($\pm 1{,}960$-nál) csonkítottuk, majd a maradékot $2k-1$ *egyenlő részre* osztottuk. Így a középső, „legvalószínűbb" szakasztól jobbra is, balra is megkaptuk a változásoknak megfelelő $k-1$ szakaszt. A normális eloszlás bármely eléggé részletes táblázatából könnyű meghatározni az ezekhez a szakaszokhoz tartozó valószínűségeket. Minket azonban nem maguk a valószínűségek érdekelnek, hanem azok egymáshoz viszonyított arányai: ezek az arányok jellemzik — modellünk értelmében — az egy sorba kerülő ν_{ij} várt gyakoriságok megoszlását.

A várt gyakoriságokat meghatározó egyenletek választhatók úgy, hogy ne legyen szükség valamennyi arány meghatározására. Ha minden várt gyakoriságot a főátló melletihez viszonyítunk, $k-2$ arány megadása elegendő. A konkrét munka megkönnyítése érdekében $k \leqq 10$ esetére táblázatba foglaltuk ezeket a P_j^k-val jelzett arányszámokat (4. táblázat); a k felső index a változó különböző értékeinek számát mutatja (ez a *feladat* paramétere), j pedig a főátlótól való távolságot ($j=1, 2, \ldots, k-1$). A normális eloszlás szimmetriája miatt csak pozitív j-értékeket vettünk figyelembe.

A táblázatbeli értékek segítségével az egyes sorokban álló (és összegükben már meghatározott) ν_{ij} várt gyakoriságok így jellemezhetők:

$$\begin{aligned} \nu_{ij} &= P_{j-i}^k \nu_{i,i+1}, \quad \text{ha } j > i; \\ \nu_{ij} &= P_{i-j}^k \nu_{i,i-1}, \quad \text{ha } j < i. \end{aligned} \tag{6}$$

Az elmondottakból következik, hogy minden esetben igaz, hogy $\nu_{i,i+1} = \nu_{i,i-1}$ ($i=2, \ldots, k-1$).

A felállított modell önkényessége nem az 5%-os (meglehetősen konvencionális) csonkításban, hanem az ekvidisztans felosztásban van. Amíg mérési eredmények ilyen úton történő vizsgálatáról van szó, tökéletesen helytálló az eljárásunk, ha

[4] Valóban hibáról van szó, ha ezen itt nem is (vagy nem kizárólag) a szokásos értelemben vett mérési hibát értjük. Ha igaz a nullhipotézis, a megkérdezett személynek semmi oka, hogy válaszát megváltoztassa. Ha mégis ezt teszi, ez valamilyen belső határozatlanság — a saját véleménye pontos megállapításának hibája! — miatt van.

4. TÁBLÁZAT

A P_j^k értékek táblázata

k \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	—	—	—	—	—	—	—	—
3	1	0,416	—	—	—	—	—	—	—
4	1	0,633	0,295	—	—	—	—	—	—
5	1	0,756	0,474	0,246	—	—	—	—	—
6	1	0,828	0,605	0,390	0,221	—	—	—	—
7	1	0,873	0,697	0,508	0,339	0,206	—	—	—
8	1	0,903	0,762	0,600	0,443	0,305	0,196	—	—
9	1	0,924	0,809	0,672	0,530	0,396	0,281	0,189	—
10	1	0,938	0,844	0,727	0,601	0,476	0,361	0,263	0,183

egyenletes osztályszélességet választottunk a gyakoriságokon keresztül történő vizsgálatra való áttéréskor. Megállapítható vagy rangsorolható változók (pl. attitűdök) esetében azonban az egyenletes beosztás erősen támadható. Az attitűdök (és hasonló változók) mérési skálára való áttételekor ugyan rendszerint a normális eloszlást választják a skála meghatározásához (l. pl. a [4] és [5] monográfiákat), a skálázások konkrét elvégzésekor azonban rendszerint kiderül, hogy a skála — a normális eloszlásra „illesztve" — nem ekvidisztans. Mivel azonban egy-egy konkrét próbavégzés esetén a skálázási eljárás végrehajtására aligha van mód (rendszerint a minta nagysága sem elegendő ehhez), csak azokban az esetekben nem ajánlható a fent leírt eljárás alkalmazása, ahol a változó beosztásának „nem egyenletes" volta plauzibilis.[5] A 3. táblázaton jelzett attitűd-skála esetében például aligha van durva eltérés az ekvidisztanciától.

Valószínűleg jobb, de az ajánlottnál lényegesen bonyolultabb volna a normális eloszláshoz való illesztés megvalósítására egy olyan eljárás, mely a főátlóban álló gyakoriságokat is figyelembe veszi. Felvéve ismét egy $2k-1$ szakaszos ekvidisztans beosztást (mely ebben az esetben tetszőleges sűrűségű lehet), a változatlan választ adók gyakorisága segítségével becsüljük meg annak a normális eloszlásnak a *szórását,* amelyet erre a beosztásra illesztünk. Ha a főátló elemei eléggé egyformák, egységesen határozhatjuk meg valamennyi sorra a várt gyakoriságok egymáshoz viszonyított arányát. Ha azonban soronként végezzük, célszerű a (4) feltétel helyett soronként kikötni a

$$\sum_{j \neq i} v_{ij} = \sum_{j \neq i} n_{ij} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

[5] Elvileg járható a következő út. A mintánk eloszlásának a normális eloszlás skáláján megfelelő pontokat meghatározzuk az $N_1, N_2, \ldots, N_k$ számok alapján. Az így kapott szakaszokból azután minden sorban külön-külön meghatározzuk a normális eloszlásnak azt a beosztását, amiből a $P_j^{k,i}$ arányok adódnak. (Itt tehát nem *feladatonként,* hanem *soronként* más arányokkal kell dolgoznunk.) Közben meg kell oldanunk azt a problémát, hogy mekkora szakaszt „tartunk fenn" a változatlanok számára. Ezt ismét végezhetjük soronkénti becsléssel, de felhasználhatjuk a $\frac{\sum n_{ii}}{N}$ arányt is. Minderre azonban csak akkor kerülhet sor, ha az N_i számok által meghatározott eloszlás egyáltalán illeszthető a normálishoz. Nem ritka azonban az az eset, hogy ez egy U-alakú (bimodális) eloszlás: a kérdéssel kapcsolatban a populáció két szélsőséges táborra oszlik.

egyenlőség teljesülését. Ezek az újabb megszorítások azonban erősen csökkentik a próba szabadságfokát. (A becslések nem vesznek el a szabadságfokból, tekintve, hogy azokra az egyébként föl nem használt n_{ii} elemeket vesszük csak igénybe.)

A (4)—(6) feltételek felhasználásával a főátló melletti várt gyakoriságok így állíthatók elő:

$$(7) \qquad \nu_{i,i\pm 1} = \frac{N_i \sum\sum_{i\neq j} n_{ij}}{N\left(\sum_{j=1}^{k-i} P_j^k + \sum_{j=1}^{i-1} P_j^k\right)}.$$

A többi várt gyakoriság már könnyen kapható (6) segítségével.

Mivel a várt gyakoriságok előállításához felhasznált feltételek közül csak (5) volt az, amelyik számszerű megkötést tartalmazott rájuk vonatkozólag (a többi csak egymáshoz viszonyított *arányukat* rögzítette), a kapott χ^2 szabadságfoka k^2-k-1 lesz.

Egészen hasonló módon kaphattuk volna az (1) próba általánosítását, a (4) kikötés helyett az egyenletesen elosztott változást feltételező

$$\sum_{j\neq i} \nu_{ij} = \frac{\sum\sum_{i\neq j} n_{ij}}{k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

feltételt használva. Meg kell azonban mondani, hogy ez a próba itt sokkal kevésbé természetes, mint a $k=2$ esetben. Ha viszont kiegészítjük egy, az *oszlopok* egyenletes eloszlására vonatkozó hasonló feltétellel, ez már $k=3$ esetben sem egyeztethető össze a normális eloszlást feltételező modellel. Mivel pedig aszimmetrikus eloszlást észszerűtlen volna feltételezni, egyetlen lehetőség az egyforma nagy várt gyakoriságok megállapítása:

$$(8) \qquad \nu_{ij} = \frac{\sum\sum_{i\neq j} n_{ij}}{k(k-1)} \qquad i \neq j.$$

Ezzel visszajutottunk ahhoz a próbához, amit a szakasz elején, a nem rendezhető változók esetében kaptunk. Valóban: itt sehol nem használjuk ki a rendezettséget — és az ezzel járó előnyöket.

A fönt vázolt valamennyi eljárás ekvivalens $k=2$ esetén az (1), ill. (3) próbákkal. Van azonban arra is lehetőség, hogy *közvetlenül* alkalmazzuk a *McNemar*-próbát $k>2$ esetén, ha a változó értékei rendezhetők. Visszavezetve ugyanis a 3. táblázathoz hasonló (de akármekkora) elrendezéseket az 1. táblázatra, értelemszerűen igaz

$$\sum\sum_{i<j} n_{ij} = b$$

és

$$\sum\sum_{i>j} n_{ij} = c.$$

A (3) próbát nem alkalmazhatjuk így, mert ahhoz az a és d mennyiségekre is szükség van, azokat azonban nem tudjuk a $k>2$ esetből kiindulva definiálni.

Talán nem szükséges hangsúlyozni, hogy a legutóbb leírt próba $k>2$ esetén *nem ekvivalens* a (8) alatti várt gyakoriságokkal megadott próbával. Az utóbbi a változás „tendenciáján" (irányán) kívül a cellákban történő egyenletes eloszlásra is érzékeny; más kérdés, hogy ezt az egyenletességet, illetve az ettől való eltérést sokszor nehéz interpretálni.

A 3. táblázat típusába tartozó gyakorisági elrendezések vizsgálatára egyéb módok is lehetségesek. Meg kell itt említenünk Bowker [6] próbáját, aki a kontingenciatáblázat szimmetriájának vizsgálatára dolgozta ki a

$$\chi^2 = \sum_{i>j}\sum \frac{(n_{ij}-n_{ji})^2}{n_{ij}+n_{ji}} \tag{9}$$

próbát. $\left(\text{Szabadságfok: } \frac{k(k-1)}{2}.\right)$ Ezzel ismét az a probléma, hogy nehéz olyan gyakorlati feladatot találni, amelynek megfelel ez a kérdésfeltevés. A válaszok megváltozásának önkontrollos elrendezés segítségével történő vizsgálatára a (9) próba alkalmatlan.

Befejezésül csak megemlítenénk egy, az eddigiektől eltérő lehetőséget a várt gyakoriságok előállítására a $k>2$ esetben. Hasonlóan a *McNemar*-próbához, azt kötjük ki, hogy

$$\sum_{i<j}\sum \nu_{ij} = \sum_{i>j}\sum \nu_{ij} = \frac{\sum\limits_{i\neq j}\sum n_{ij}}{2} \tag{10}$$

legyen, továbbá, hogy a várt gyakoriságokat úgy kell megállapítani, hogy a χ^2 értéke minimális legyen. (Így valóban csak a (10) feltételt használjuk fel: csak akkor fogunk tudni kimondani szignifikanciát, ha *minden* olyan χ^2-próba, melyet (10)-nek megfelelő módon konstruáltunk, szignifikáns.)

A számítások bonyolultsága miatt ehelyett azt a — vele nyilván nem egyenértékű — problémát oldottuk meg, hogy mik lesznek a várt gyakoriságok, ha (10) feltevése mellett még azt követeljük meg, hogy a

$$\sum_{i\neq j}\sum (n_{ij}-\nu_{ij})^2$$

összeg legyen minimális. Ekkor $i<j$ esetére a következő összefüggést kaptuk:

$$\nu_{ij} = n_{ij} + \frac{\sum\limits_{i>j}\sum n_{ij} - \sum\limits_{i<j}\sum n_{ij}}{k(k-1)}. \tag{11}$$

($i>j$ esetén értelemszerűen úgy módosul a képlet, hogy a tört előjele ellenkezőjére változik.) A szabadságfok ilyenkor k^2-k-2 lesz.

A (11) által megadott várt gyakoriság zérus, sőt negatív is lehet; különösen fontos tehát, hogy a χ^2-próba alkalmazhatóságának a várt gyakoriságokra vonatkozó általánosan elfogadott feltételeit figyelembe vegyük. (A várt gyakoriságoknak 5-nél nagyobbnak kell lenniök, illetve egyes szerzők szerint néhány cellában 1 és 5 közötti értékeket is meg lehet engedni.) A feltétel csak akkor tud teljesülni, ha a változás irányába eső gyakoriságok (pl. a válaszok „negatívabbá válása" esetén a jobb felső háromszög n_{ij}-i) viszonylag egyenletesen nagyok. Ez azonban alkalmasint olyan ritkán megvalósuló feltétel, hogy ez az utolsóként említett próba ezáltal elveszti minden gyakorlati jelentőségét.

IRODALOM

[1] McNEMAR, Q.: Note on sampling error of the difference between correlated proportions or percentages, *Psychometrika* **12** (1947), 153—157.
[2] COCHRAN, W. G.: The comparison of percentages in matched samples, *Biometrika* **37** (1950), 256—266.
[3] HAJTMAN, B.: *Bevezetés a matematikai statisztikába, pszichológusok számára.* Akadémiai Kiadó, Budapest (1968).
[4] EDWARDS, A. L.: *Techniques of Attitude Scale Construction.* Appleton—Century—Crofts, New York (1957).
[5] TORGERSON, W. S.: *Theory and Methods of Scaling.* Wiley, New York (1958).
[6] BOWKER, A. H.: A test for symmetry in contingency tables, *J. Amer. Stat. Ass.* **43** (1948), 572—574.

(Beérkezett: 1969. VII. 2.)

SOME GENERALIZATIONS OF MCNEMAR'S TEST

by

B. HAJTMAN

Summary

The well-known *McNemar* test (1) is criticized as regards its null-hypothesis. It is not obvious (see Table 1) that under null-hypothesis $b=c$ holds; the changes are rather proportional to the original contingencies (the marginal distribution "before"). Under this assumption we get the test (3).

After arising an unsolved problem (to incorporate the "unchanged" persons a and d in the test) an attempt is made to generalize both tests (1) and (3) for non-dichotomized answers (for $k>2$ instead of McNemar's case $k=2$). Among several possibilities the test characterized by (4)—(7) seems to be the most appropriate. This test is in particular intended to investigate the changes in attitudes. The P_j^k coefficients in Table 4 are calculated by the aid of areas under the normal curve.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A HERMITIKUS OPERÁTOROK FOLYTATÁSÁRA VONATKOZÓ ALAPTÉTELEK ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSUK AZ ORTOGONÁLIS POLINOMOK ELMÉLETÉRE ÉS A MOMENTUM PROBLÉMÁRA*

Írta: M. G. KREJN és M. A. KRASZNOSZELSZKIJ

A hermitikus operátorokról szóló alapvető munkájában NEUMANN JÁNOS [11] ezen operátorok általa *Cayley*-transzformációnak elnevezett lineáris tört transzformációja segítségével a $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben értelmezett hermitikus operátorok folytatásának a problémáját visszavezette az izometrikus operátorok folytatásának egyszerűbb kérdésére. Ilyen módon rögtön meg lehetett állapítani a hermitikus operátorok folytatásával kapcsolatos leglényegesebb törvényszerűségeket.

Munkájában NEUMANN JÁNOS kimondta azt a sejtést, hogy pozitív hermitikus operátornak mindig van pozitív önadjungált (hipermaximális) folytatása, és ezt valamivel később M. H. STONE [20] és K. FRIEDRICHS [17] be is bizonyította.

Ezeknek a szerzőknek azonban nem sikerült adott pozitív hermitikus operátor *összes* pozitív önadjungált folytatásait alkalmas módon megszerkeszteni, ezeket a folytatásokat osztályozni, és annak a kritériumát megtalálni, hogy egyetlen pozitív folytatás létezzen.

Ezeket a kérdéseket a jelen cikk egyik szerzője oldotta meg ([6]g, i) úgy, hogy ismét a lineáris tört transzformáció ötletét felhasználva a pozitív operátorok folytatásának a problémáját új problémára, a $\mathfrak{H}$ tér $\mathfrak{D}$ alterén értelmezett korlátos „hermitikus" operátorok hermitikusságot és normát (vagy a normára vonatkozó felső korlátot) megtartó folytatásainak a problémájára vezette vissza.

Az utóbbi probléma megoldása alapján nagyon egyszerűen be lehetett bizonyítani azt is, hogy minden sűrűn definiált és „spektrális hézaggal" rendelkező hermitikus operátornak van a hézagot megtartó önadjungált folytatása (lásd 9. §).

Dolgozatunkban ismertetjük mindezeket a folytatási tételeket, és közben szisztematikusan alkalmazzuk a lineáris operátorok lineáris tört transzformációjának az ötletét.

NEUMANN JÁNOS említett munkájának fontos eredményei közé tartozik az is, hogy bevezette a hermitikus operátorok defekt számainak a fogalmát és megállapította, hogy ezek a felső, ill. alsó félsíkban invariánsak. Nemrég nagyon egyszerű eszközökkel sikerült kimutatni [7], hogy ezek az eredmények általánosíthatók tetszés szerinti *zárt* lineáris operátor esetére. A jelen cikkben a szerzők egy rendkívül egyszerű és szemléletes lemmára támaszkodva általánosítják ezeket az eredményeket *tetszés szerinti* lineáris operátorok esetére.

A nyert általános tételek alkalmazására az ortogonális polinomok elmélete és a momentum probléma területéről mutatunk példákat.

* *Успехи математических наук*, 2, № 3 (1947), 60—106.

Ezek kevesebb *analízisbeli tudnivaló* előzetes ismertetését teszik szükségessé, mint egyéb alkalmazások.

A példák megválasztását azonban nemcsak ez a körülmény indokolja.

A momentum probléma fontos szerepet játszott az önadjungált operátorok spektrális felbontására vonatkozó alapvető tételek felállításánál.

CARLEMAN, HELLINGER és mások a momentum problémán próbálták ki a hermitikus operátorok elmélete által nyújtott apparátus élességét, és a sikerek a két területen általában egymást kísérték. Elég rámutatni arra, hogy a két elmélet alaptételeit CARLEMAN [4a], NEUMANN [11], HAMBURGER [3], NEVANLINNA ([10]a, b) és RIESZ MARCEL ([14]a, b) csaknem egyidőben bizonyította be véglegesen.

Végül szovjet matematikusok nemrég megjelent munkáikban ([6]a—i, [8], [9]a—d) új kapcsolatokat fedeztek fel a hermitikus operátorok elmélete és az „általánosított momentum probléma" között, ily módon kiszélesítvén a hermitikus operátorok alkalmazásainak a területét.

Megjegyezzük azonban, hogy a folytatások elméletének itt ismertetendő új eredményei a matematikai fizika peremérték feladataiban — a hermitikus operátorok elméletének tulajdonképpeni forrásaiban — is fontos alkalmazásokra találnak, de ezeknek a kifejtése nagyon messzire vezetne.

Dolgozatunk címét jobban igazolná, ha ismertetnénk M. A. NAJMARK ([9]a, b) fontos eredményeit is, amelyek a hermitikus operátorok tágabb térbe kilépő önadjungált folytatásairól szólnak, ettől azonban idő hiányában kénytelenek voltunk eltekinteni.

A jelen cikkben foglalt eredeti tételek jelentős részét M. G. KREJN sajtó alatt levő ([6]i) munkájából vettük át. Szintén tőle származik mindaz, ami a szerzők által alább ismertetendő példákban új.

A dolgozat megértése céljából az olvasónak ismerni kell a *Hilbert*-terek geometriájának alapvető tételeit és az önadjungált operátorok alaptulajdonságait a spektrális felbontási tételig terjedően. Mindezek a tudnivalók megtalálhatók A. I. PLESZNER ([12]a) cikkében vagy N. I. AHIJEZER előadásainak sokszorosított jegyzetében (lásd még [12]b).

1. §. Alapfogalmak

1. Olyan lineáris operátorokat fogunk vizsgálni, amelyek egy $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben hatnak.

A $\mathfrak{H}$ Hilbert-térben ható A lineáris operátor értelmezési tartományát $\mathfrak{D}(A)$-val, értékkészletét pedig $\mathfrak{R}(A)$-val fogjuk jelölni. Tehát

$$\mathfrak{R}(A) = A\mathfrak{D}(A).$$

Az azonosság operátorát I-vel fogjuk jelölni.

Emlékeztetünk arra, hogy az A lineáris operátort akkor mondják *zártnak*, ha $f_n \in \mathfrak{D}(A)$ $(n=1, 2, \ldots)$, $f_n \to f$, $Af_n \to h$ esetén $f \in \mathfrak{D}(A)$ és $h = Af$.

A komplex sík λ_0 pontját az A operátorra nézve *reguláris típusúnak* fogjuk nevezni, ha található olyan pozitív k_{λ_0} szám, amelyre

$$|(A-\lambda_0 I)f| \geqq k_{\lambda_0}|f| \quad (f \in \mathfrak{D}(A)). \tag{1.1}$$

Az A operátorra nézve reguláris típusú pontok nyílt halmazt alkotnak, ugyanis ha λ_0 az A operátorra nézve reguláris típusú, akkor $|\lambda-\lambda_0|<k_{\lambda_0}$ esetén

$$|(A-\lambda I)f| \geqq |(A-\lambda_0 I)f|-|\lambda-\lambda_0|\,|f| \geqq k_\lambda |f| \quad (f\in\mathfrak{D}(A)),$$

ahol

$$k_\lambda = k_{\lambda_0}-|\lambda-\lambda_0|.$$

Egy reguláris típusú λ pontot az A operátorra nézve *regulárisnak* mondunk, ha az $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ halmaz *egybe esik az egész* $\mathfrak{H}$ *térrel.*

Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománnyal rendelkező A operátornak megfelel egy és csak egy olyan A^* operátor, amelyre az $f\in\mathfrak{D}(A^*)$, $h=A^*f$ összefüggések akkor és csak akkor állnak fenn, ha

$$(Ag,f) = (g,h) \quad (g\in\mathfrak{D}(A)).$$

Az A^* operátort A *adjungáltjának* nevezzük.

Az általánosan elfogadott terminológiától eltérően az A operátort akkor fogjuk *hermitikusnak* mondani, ha

$$(Af,g) = (f,Ag) \quad (f,g\in\mathfrak{D}(A)).$$

A hermitikus A operátort *önadjungáltnak* nevezzük, ha $\overline{\mathfrak{D}(A)}=\mathfrak{H}$ és $A^*=A$.

Minden nem valós λ a hermitikus operátorokra nézve reguláris típusú és az önadjungált operátorokra nézve reguláris. Megfordítva, ha egy hermitikus A operátorra nézve minden nem valós λ reguláris, akkor A önadjungált.

PÉLDA ÖNADJUNGÁLT OPERÁTORRA. Tekintsünk egy a valós tengelyen értelmezett korlátos nemfogyó $\sigma(t)=\sigma(t-0)$ $(-\infty<t<\infty, \sigma(-\infty)=0)$ függvényt. Mint ismeretes, azok a komplex értékű $f(t)$ függvények, amelyek σ-mérhetők és σ-ra nézve négyzetesen integrálhatók,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, d\sigma(t) < \infty,$$

egy $\mathfrak{L}_\sigma$ teljes *Hilbert*-teret alkotnak, ha két ilyen függvény skaláris szorzatát az

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, d\sigma(t)$$

képlettel értelmezzük. Tekintsük az azokból az $f(t)\in\mathfrak{L}_\sigma$ függvényekből álló $\mathfrak{D}(T)$ lineáris halmazt, amelyekre

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2\, d\sigma(t) < \infty,$$

és értelmezzünk ezen a halmazon egy T operátort a

$$Tf(t) = tf(t) \quad (f(t)\in\mathfrak{D}(T))$$

egyenlőség segítségével.

Világos, hogy a T operátor hermitikus. Ezen felül önadjungált is, mert ha a λ szám nem valós, akkor a $(T-\lambda I)g=f$ egyenletnek tetszés szerinti $f\in\mathfrak{L}_\sigma$ mellett van megoldása, ti. $g=f/(t-\lambda)$, vagyis fennáll az $\mathfrak{R}(T-\lambda I)=\mathfrak{H}$ egyenlőség.

Az U operátort *izometrikusnak* nevezzük, ha

$$(Uf,Ug) = (f,g) \quad (f,g\in\mathfrak{D}(U)).$$

Az olyan izometrikus operátort, amelyre $\mathfrak{D}(U)=\mathfrak{R}(U)=\mathfrak{H}$, *unitérnek* mondjuk.

2. Az $\tilde{A}$ operátort az A operátor folytatásának nevezzük, ha $\mathfrak{D}(\tilde{A}) \supset \mathfrak{D}(A)$ és $\tilde{A}f = Af$, valahányszor $f \in \mathfrak{D}(A)$.

Ha egy A operátornak vannak zárt folytatásai, akkor létezik egy $\bar{A}$ minimális zárt folytatás; ezt *A lezárásának* fogjuk nevezni. Az A operátor összes többi zárt folytatása az $\bar{A}$ operátornak is folytatása.

Megemlítjük, hogy a $\mathfrak{H}$ térben mindenütt sűrű $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománnyal rendelkező hermitikus A operátornak mindig van lezárása és az ismét hermitikus.

2. §. A lineáris operátorok defekt számai

1. Legyen $\mathfrak{L}_1$ és $\mathfrak{L}_2$ két lineáris halmaz $\mathfrak{H}$-ban:

$$\mathfrak{L}_i \subset \mathfrak{H} \quad (i = 1, 2).$$

$\mathfrak{N}_i$-vel fogjuk jelölni $\bar{\mathfrak{L}}_i$ ($\mathfrak{L}_i$ lezárása) ortogonális komplementumát a $\mathfrak{H}$ térben:

$$\bar{\mathfrak{L}}_i \oplus \mathfrak{N}_i = \mathfrak{H} \quad (i = 1, 2).$$

Emlékeztetünk arra, hogy egy $f \in \mathfrak{H}$ elemnek az $\mathfrak{L}_i \subset \mathfrak{H}$ $(i = 1, 2)$ halmaztól mért $\varrho(f, \mathfrak{L}_i)$ távolságát a

$$\varrho(f, \mathfrak{L}_i) = \inf_{g \in \mathfrak{L}_i} |f - g| \quad (i = 1, 2)$$

képlet értelmezi.

A

$$\theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \max \left\{ \sup_{f \in \mathfrak{L}_2, |f| = 1} \varrho(f, \mathfrak{L}_1), \sup_{f \in \mathfrak{L}_1, |f| = 1} \varrho(f, \mathfrak{L}_2) \right\} \tag{2.1}$$

mennyiséget az $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ lineáris halmazok nyílásának fogjuk nevezni.

Nyilvánvaló, hogy

$$0 \leqq \theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \theta(\bar{\mathfrak{L}}_1, \bar{\mathfrak{L}}_2) \leqq 1.$$

2.1. Lemma. *Két altér, $\mathfrak{L}_1$ és $\mathfrak{L}_2$ nyílása egyenlő ortogonális komplementumaik, $\mathfrak{N}_1$ és $\mathfrak{N}_2$ nyílásával:*

$$\theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2).$$

A $\varrho(f, \mathfrak{L}_i)$ távolságot a következőképpen is ki lehet számítani:

$$\varrho(f, \mathfrak{L}_i) = \max_{h \in \mathfrak{N}_i, |h| = 1} |(f, h)|.$$

Ennélfogva

$$\theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2) = \sup \{ |(g_1, h_2)|, |(g_2, h_1)| \}, \tag{2.2}$$

ahol a felső határ mindazokra a g_i, h_i elemekre képezendő, amelyekre

$$g_i \in \mathfrak{L}_i, \; h_i \in \mathfrak{N}_i, \; |g_i| = |h_i| = 1 \qquad (i = 1, 2).$$

Az $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ alterek nyílásának így kapott kifejezéséből (amely szimmetrikus a g_i, h_i elemekben) a lemma állítása közvetlenül következik.

2.2. LEMMA. *Ha* $\theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)=m<1$, *akkor* $\mathfrak{L}_1$, *ill.* $\mathfrak{N}_1$ *dimenziója megegyezik* $\mathfrak{L}_2$, *ill.* $\mathfrak{N}_2$ *dimenziójával*[1].

Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{L}_1$ altér dimenziója nagyobb, mint az $\mathfrak{L}_2$ altéré.

Legyen P az $\mathfrak{L}_1$-re való merőleges vetítés operátora $\mathfrak{H}$-ban. Az $\mathfrak{L}_2$ altér $\mathfrak{L}_1$ altérre való $P\mathfrak{L}_2$ vetületének a dimenziója nem nagyobb, mint $\mathfrak{L}_2$ dimenziója. Véges dimenziójú $\mathfrak{L}_2$ esetén ez nyilvánvaló, végtelen dimenziójú $\mathfrak{L}_2$-re pedig abból következik, hogy egy $\mathfrak{L}_2$-ben mindenütt sűrű $\mathfrak{M}$ halmaz $P\mathfrak{M}$ vetülete mindenütt sűrű $P\mathfrak{L}_2$-ben.

Ekkor $\mathfrak{L}_1$-ben található olyan h elem ($|h|=1$), amely ortogonális $P\mathfrak{L}_2$-re: $(P\mathfrak{L}_2, h)=0$, vagyis $(\mathfrak{L}_2, Ph)=0$. Mivel $Ph=h$, azt kapjuk, hogy $(\mathfrak{L}_2, h)=0$.

Megmutattuk, hogy $h\in\mathfrak{L}_1, h\in\mathfrak{N}_2$. Így a (2.2) képlet alapján $\theta(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)=1$, ellentmondásban a lemma feltevésével.

Ugyanezek a meggondolások alkalmazhatók az $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ alterekre is, mert a 2.1. lemma értelmében $\theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)=m<1$.

2. I. TÉTEL. *Legyen G a komplex sík összefüggő tartománya, amelynek a pontjai az A operátorra nézve reguláris típusúak. Ekkor az $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ halmaz $\mathfrak{N}_\lambda$ ortogonális komplementumának a dimenziója minden $\lambda\in G$ érték mellett ugyanaz.*

Bizonyítás. Meg fogjuk mutatni, hogy minden egyes $\lambda_0\in G$ pontnak van olyan W környezete, hogy $\mathfrak{N}_\lambda$ és $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ dimenziója minden $\lambda\in W$ mellett megegyezik; ebből a tétel állítása már következik.

Legyen W a λ_0 pont $\frac{1}{3}k_{\lambda_0}$ sugarú környezete. Ekkor az (1.1) összefüggés értelmében a $\lambda\in W$ pontokra fennáll

$$|(A-\lambda I)f| \geqq |(A-\lambda_0 I)f|-|\lambda-\lambda_0|\,|f| > \frac{2}{3}k_{\lambda_0}|f| \quad (f\in\mathfrak{D}(A))$$

és

$$|(A-\lambda I)f-(A-\lambda_0 I)f| = |\lambda-\lambda_0|\,|f| < \frac{1}{2}|(A-\lambda I)f|,$$

$$|(A-\lambda I)f-(A-\lambda_0 I)f| < \frac{1}{3}|(A-\lambda_0 I)f|.$$

Ennélfogva az $\overline{\mathfrak{R}(A-\lambda_0 I)}$, $\overline{\mathfrak{R}(A-\lambda I)}$ alterek nyílása nem nagyobb, mint $\frac{1}{2}$:

$$\theta(\overline{\mathfrak{R}(A-\lambda_0 I)}, \overline{\mathfrak{R}(A-\lambda I)}) \leqq \frac{1}{2} \quad (\lambda\in W),$$

tehát a 2.2. lemma szerint $\mathfrak{N}_\lambda$ ($\lambda\in W$) dimenziója egyenlő $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ dimenziójával.

A tételt bebizonyítottuk.

[1] Emlékeztetünk arra, hogy egy $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{H}$ lineáris halmaz *dimenziójának* az $\mathfrak{N}$-beli teljes ortonormális rendszerek számosságát nevezik. Ez a számosság egyenlő az $\mathfrak{N}$-ben sűrű $E\subset\mathfrak{N}$ halmazok számosságai közül a legkisebbel. Nem nehéz megmutatni, hogy ha $\theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)<1$. akkor a (2.1) képletben a „max" jel után álló szuprémumok megegyeznek, és a θ nyílás az $\mathfrak{N}_1$ és $\mathfrak{N}_2$ közötti szög szinuszának tekinthető. A 2.1. és 2.2. lemma Banach-tér esetére is általánosítható.

A $\lambda \in G$ értékekhez tartozó $\mathfrak{N}_\lambda$ alterek dimenzióját az A operátor G-beli defekt számának fogjuk nevezni (G összefüggő).

Hermitikus operátor esetén a komplex sík felső és alsó félsíkja A-ra nézve reguláris típusú pontokból áll. Ezért hermitikus operátornak legfeljebb két különböző defekt száma lehet.

Az $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ párt, ahol $\mathfrak{m}$ az A operátor felső félsíkbeli, $\mathfrak{n}$ pedig A alsó félsíkbeli defekt száma, az A operátor *defekt indexének* mondjuk. Ha a valós tengely valamelyik pontja reguláris típusú, akkor a hermitikus operátor defekt számai egyenlők. Önadjungált operátor mindkét defekt száma nulla.

3. Szemléltessük a bevezetett fogalmakat két példával.

2.1. *példa.* Legyen V fél-unitér operátor, vagyis olyan operátor, amely az egész $\mathfrak{H}$ teret izometrikusan $\mathfrak{H}$ valamilyen valódi részére képezi le:

$$(Vf, Vg) = (f, g) \quad (f, g \in \mathfrak{H}, \mathfrak{R}(V) \neq \mathfrak{H}).$$

Minden λ pont, amely a komplex sík egységkörén belül vagy kívül helyezkedik el, reguláris típusú, ugyanis

$$|(V-\lambda I)f| \geqq |Vf| - |\lambda|\,|f| = (1-|\lambda|)\,|f| \quad (|\lambda| < 1)$$

és

$$|(V-\lambda I)f| \geqq |\lambda|\,|f| - |Vf| = (|\lambda|-1)\,|f| \quad (|\lambda| > 1).$$

Legyen az $f_0 \in \mathfrak{H}$ $(|f_0|=1)$ elem ortogonális az $\mathfrak{R}(V-\lambda I)$ halmazra. Ekkor

$$|\lambda| = |\lambda f_0| = \min_{g \in \mathfrak{R}(V-\lambda I)} |\lambda f_0 - g| \leqq |\lambda f_0 - (\lambda f_0 - Vf_0)| = 1.$$

Tehát $|\lambda|>1$ esetén $\mathfrak{R}(V-\lambda I)$ egybe esik a $\mathfrak{H}$ térrel.

A $\lambda=0$ esetben a fél-unitér operátor definíciója szerint $\mathfrak{R}(V)$ nem azonos $\mathfrak{H}$-val, így az I. tétel értelmében minden olyan λ-ra, amelyre $|\lambda|<1$, az $\mathfrak{R}(V-\lambda I)$ halmaz a $\mathfrak{H}$ tér valódi altere. A megfelelő $\mathfrak{N}_\lambda$ ortogonális komplementumok $\mathfrak{n}$ dimenziója egyenlő $\mathfrak{N}_0$-nak, az $\mathfrak{R}(V)$ altér ortogonális komplementumának a dimenziójával. Következésképpen a fél-unitér operátoroknak két defekt, számuk van: 0 és $\mathfrak{n}$. Megjegyezzük, hogy mivel a defekt számok nem egyenlők, fél-unitér operátornak az egységkörön nincs reguláris típusú pontja.

2.2. *példa.* Legyen M a komplex sík zárt valódi részhalmaza, és legyen M-en értelmezve egy $\sigma(\mathscr{E})$ $(\mathscr{E} \subset M)$ *Radon*-mérték, amelyre

$$\int_M d\sigma = 1, \quad \int_M |z|^n\, d\sigma(z) < \infty \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Azoknak az M-en értelmezett $f(z)$ függvényeknek a halmaza, amelyek saját maguk és négyzetük is σ-integrálhatók,

$$\int_M |f(z)|^2 d\sigma(z) < \infty,$$

mint ismeretes, egy $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ teljes *Hilbert*-teret alkot, ha a skaláris szorzatot az

$$(f, g) = \int_M f(z)\overline{g(z)}\, d\sigma(z)$$

képlettel definiáljuk.

A (2.3) összefüggések értelmében z minden polinomja benne van ebben a térben. Az alábbiakban azt a $\mathfrak{H}_\sigma$ *Hilbert*-teret fogjuk vizsgálni, amelyet úgy kapunk, hogy a polinomok halmazát az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben lezárjuk.

Az $1, z, z^2, \ldots$ sorozat ortonormálása útján $\mathfrak{H}_\sigma$-ban egy $D_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots)$, $D_0=1$ teljes ortonormális bázist nyerünk. Értelmezzünk a polinomoknak a $\mathfrak{H}_\sigma$ térben sűrű $\mathfrak{P}$ halmazán egy A operátort az

$$AP(z) = zP(z) \quad \big(P(z)\in\mathfrak{P}\big)$$

képlettel.

Az A operátor $\mathfrak{R}(A)$ értékkészlete azokból a polinomokból áll, amelyek a $z=0$ helyen nullával egyenlők. Hasonlóképpen $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ a $z=\lambda$ helyen nullával egyenlő polinomok halmaza.

Ha $\lambda_0\notin M$, akkor minden $z\in M$ pontra $|z-\lambda_0|\geqq\alpha>0$, úgyhogy $P(z)\in\mathfrak{P}$ esetén[2]

$$\|(A-\lambda_0 I)P(z)\|^2 = \int_M |z-\lambda_0|^2 |P(z)|^2 \, d\sigma(z) \geqq \alpha^2 \|P(z)\|^2 .$$

Tehát az M halmaz komplex síkbeli N komplementumának minden pontja az A operátorra nézve reguláris típusú.

1°. *Az A operátor defekt számai csak* 0-*val vagy* 1-*gyel lehetnek egyenlők.*

Ha $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ nem sűrű $\mathfrak{H}_\sigma$-ban (a λ pontban nullává váló polinomok halmaza nem mindenütt sűrű az összes polinomok halmazában), akkor $D_0\notin\mathfrak{R}(A-\lambda I)$, de $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ és D_0 lineáris burka megegyezik $\mathfrak{P}$-vel, tehát sűrű $\mathfrak{H}_\sigma$-ban. Ennélfogva ilyen λ-ra a defekt szám 1.

Ugyanezen meggondolások szerint ahhoz, hogy a defekt szám 0-val legyen egyenlő, szükséges és elégséges a

$$\varrho\big(D_0, \mathfrak{R}(A-\lambda I)\big) = \inf_{P(z)\in\mathfrak{P}} \|1-(z-\lambda)P(z)\| = 0 \tag{2.4}$$

egyenlőség fennállása.

A norma jel alatt álló kifejezés tetszés szerinti polinom, amely a λ helyen az 1 értéket veszi fel. Ezek a polinomok előállíthatók $Q(z)/Q(\lambda)$ alakban vagy, a $Q(z)$ függvényt a $D_k(z)$ ortogonális polinomok szerint kifejtve, $\sum_{k=0}^{n} c_k D_k(z) \Big/ \sum_{k=0}^{n} c_k D_k(\lambda)$ alakban.

A (2.4) feltételből a következőt kapjuk:

$$\varrho\big(D_0, \mathfrak{R}(A-\lambda I)\big) = \inf \frac{\left\| \sum_{k=0}^{n} c_k D_k(z) \right\|}{\left| \sum_{k=0}^{n} c_k D_k(\lambda) \right|} = 0,$$

[2] Annak érdekében, hogy a $P(z)$ függvénynek mint a $\mathfrak{H}_\sigma$ tér elemének a normáját megkülönböztessük a $P(z)$ függvény abszolút értékétől, a 2.2. példában az elemek normáját a $\|P(z)\|$ jellel fogjuk jelölni.

ahol az infimum az összes $\sum_{k=0}^{n} c_k D_k(z)$ $(n=0, 1, \dots)$ polinomokra képezendő. Tetszés szerinti rögzített n mellett az infimum $c_k=\overline{D_k(\lambda)}$ esetén éretik el és értéke $\left(\sum_{k=0}^{n} |D_k(\lambda)|^2\right)^{-1/2}$. Innen

$$\varrho(D_0, \mathfrak{N}(A-\lambda I)) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(\lambda)|^2}}.$$

Tehát ahhoz, hogy a λ pontban eltűnő polinomok halmaza sűrű legyen $\mathfrak{P}$-ben, vagy ami ugyanaz, $\mathfrak{H}_\sigma$-ban, szükséges és elégséges, hogy a

$$|D_0|^2+|D_1(\lambda)|^2+|D_2(\lambda)|^2+\dots \tag{2.5}$$

sor divergens legyen.

Figyelembe véve az I. tételt a következő állításra jutunk:

2°. *Minden λ pontban, amely az N halmaz ugyanazon összefüggő komponenséhez tartozik, a* (2.5) *sor egyszerre konvergál vagy divergál.*

Az első esetben az A operátor defekt száma ebben a komponensben 1, a másodikban 0.

Szintén könnyen belátható, hogy:

3°. *Ha az M halmaz korlátos, akkor az N halmaz azon komponensén, amely a végtelen távoli pontot tartalmazza, a* (2.5) *sor divergens.*

Valóban, tegyük fel, hogy az M halmaz a $|z|<R$ körben fekszik; ekkor $|\lambda|>R$ esetén

$$\varrho(D_0, \mathfrak{N}(A-\lambda I)) = \inf_{P(z)\in\mathfrak{P}} \left\|(z-\lambda)\left(\frac{D_0}{z-\lambda}-P(z)\right)\right\| \leqq$$

$$\leqq (R+|\lambda|) \inf_{P(z)\in\mathfrak{P}} \left\|\frac{1}{z-\lambda}-P(z)\right\|.$$

Másrészt $n\to\infty$ esetén

$$\left\|\frac{1}{\lambda-z}-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{\lambda^{k+1}}\right\| \to 0,$$

tehát

$$\varrho(D_0, \mathfrak{N}(A-\lambda I)) = 0.$$

Tekintsünk néhány speciális esetet.

a) Legyen M az egységkörvonal.

Ebben az esetben $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ azoknak az $f(z)=f(e^{i\theta})$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ függvényeknek a *Hilbert*-tere, amelyek négyzetükkel együtt σ-integrálhatók valamilyen nem-csökkenő $\sigma(\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ függvényre vonatkozóan.

Az A operátor $(AP(z)=zP(z))$ ebben az esetben izometrikus:

$$(AP, AQ) = \int_0^{2\pi} |z|^2 P(z)\overline{Q(z)}\,d\sigma(z) = \int_0^{2\pi} P(z)\overline{Q(z)}\,d\sigma(z) = (P, Q) \quad (z = e^{i\theta}).$$

Ha az A operátort lezárjuk $\mathfrak{H}_\sigma$-ban, akkor vagy unitérré vagy fél-unitérré válik (lásd a 2.1. példát).

Megmutatjuk, hogy az első eset akkor és csak akkor áll fenn, ha a polinomok halmaza sűrű az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben, azaz a $D_k(z)$ $(k=0, 1, \ldots)$ rendszer teljes ortonormális rendszer $\mathfrak{L}_\sigma(M)$-ben.

Valóban, ha $\bar{A}$ unitér operátor, akkor $\bar{A}\mathfrak{H}_\sigma=\mathfrak{H}_\sigma$, következésképpen $\bar{A}^{-1}$ létezik az egész $\mathfrak{H}_\sigma$ téren, úgyhogy $z^{-k}=\bar{A}^{-k}D_0\in\mathfrak{H}_\sigma$ $(k=1, 2, \ldots)$. Ily módon $\mathfrak{H}_\sigma$ azonos az összes

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k z^k \quad (z = e^{i\theta};\, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

trigonometrikus polinomok halmazának a lezárásával, ez pedig, mint ismeretes, az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ tér.

Megfordítva, ha $\mathfrak{H}_\sigma=\mathfrak{L}_\sigma(M)$, vagyis $\overline{\mathfrak{P}}=\mathfrak{L}_\sigma(M)$, akkor A lezárása $\mathfrak{L}_\sigma(M)$-ben az a T operátor lesz, amelyet a

$$Tf = zf \quad \big(f\in\mathfrak{D}(T)\big)$$

egyenlőség értelmez, ez pedig unitér.

Bizonyos függvénytani megfontolásokat alkalmazva meg lehet mutatni, hogy ahhoz, hogy a polinomok rendszere ne legyen sűrű $\mathfrak{L}_\sigma(M)$-ben és így

$$\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(z)|^2 < \infty \quad (|z| < 1)$$

legyen, szükséges és elégséges az

$$\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{\sigma'(\theta)}\, d\theta < \infty$$

feltétel teljesülése (lásd [5], [6f]).

b) Álljon a $\mathfrak{D}(T)$ halmaz azokból az $f(z)\in\mathfrak{L}_\sigma(M)$ függvényekből, amelyekre

$$\int_M |zf(z)|^2 d\sigma(z) < \infty,$$

és értelmezzük a T operátort a

$$Tf(z) = zf(z) \quad \big(f(z)\in\mathfrak{D}(T)\big)$$

egyenlőséggel.

Az olvasóra bízzuk annak a bebizonyítását, hogy a T operátor zárt. Nyilvánvaló, hogy minden $\lambda\notin M$ pont reguláris T-re vonatkozóan.

A T operátor az A operátor zárt folytatása az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben. Ebből következik, hogy A-nak van lezárása.

Megjegyezzük még, hogy bármilyen $\lambda\notin M$ mellett a $(z-\lambda)^{-1}$ függvény hozzá tartozik a T operátor $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartományához.

Legyen W az M halmaz komplex síkra vonatkozó N kiegészítő halmazának valamelyik komponense.

4°. *Ha a W tartományban az A operátor defekt száma nulla, akkor minden $\lambda \in W$ pontra a $(z-\lambda)^{-1}$ függvény benne van $\mathfrak{H}_\sigma$-ban.*

Csakugyan, legyen $\bar{A}$ az A operátor lezárása, λ pedig W valamelyik pontja. Ekkor található olyan $g \in \mathfrak{D}(\bar{A}) \subset \mathfrak{H}_\sigma$ elem, hogy $(\bar{A}-\lambda I)g=1$. Minthogy a T operátor az $\bar{A}$ operátor folytatása, $(T-\lambda I)g=1$, és ebből következik, hogy $g=(z-\lambda)^{-1}$.

5°. *Ha az M halmaz N kiegészítő halmazának valamelyik W komponensében egy λ_0 pontra a $(z-\lambda_0)^{-1}$ függvény $\mathfrak{H}_\sigma$-hoz tartozik, akkor minden $\lambda \in W$ esetén is igaz az, hogy a $(z-\lambda)^{-1}$ függvény $\mathfrak{H}_\sigma$-hoz tartozik.*

Ha A defekt száma W-ben nullával egyenlő, akkor a bebizonyítandó kijelentés a 4°. állításból következik. Abban az esetben, amikor az A operátor defekt száma a W komponensben 1, akkor, amint az 1°. állítás bizonyítása során megmutattuk, $\varrho(D_0, \mathfrak{R}(A-\lambda_0 I))>0$, és ebből következik, hogy $(z-\lambda_0)^{-1}$ nincs benne az $\bar{A}$ operátornak (A lezárásának) az értelmezési tartományában.

Értelmezzünk a $\mathfrak{H}_\sigma$ tér

$$f = g+c(z-\lambda_0)^{-1} \quad (g \in \mathfrak{D}(\bar{A}))$$

alakú elemein egy B operátort a

$$Bf = zf = \bar{A}g+c+c\lambda_0(z-\lambda_0)^{-1}$$

egyenlőség útján.

Nyilvánvaló, hogy B értékkészlete is $\mathfrak{H}_\sigma$-hoz tartozik. A B operátor az A operátor folytatása, T pedig B folytatása. Következésképpen a $\lambda \in W$ pontok a B operátorra nézve reguláris típusúak. Minthogy $(B-\lambda_0 I)(z-\lambda_0)^{-1}=1$ és $\mathfrak{R}(\bar{A}-\lambda_0 I) \subset \subset \mathfrak{R}(B-\lambda_0 I)$, a B operátor W-beli defekt száma nullával egyenlő.

Most már csak szó szerint meg kell ismételni a 4°. állítás bizonyítását.

6°. *Ha az $\bar{A}$ operátor defekt száma W-ben 1-gyel egyenlő és valamilyen $\lambda_0 \in W$ pontra $(z-\lambda_0)^{-1} \in \mathfrak{H}_\sigma$, akkor $\bar{A}$ defekt száma N mindegyik komponensében 1-gyel egyenlő és $(z-\lambda)^{-1} \in \mathfrak{H}_\sigma$ minden $\lambda \notin M$ pontra.*

Tegyük fel, hogy valamelyik komponensben $\bar{A}$ defekt száma 0, vagyis valamilyen $\lambda \notin M$ pontra $\mathfrak{R}(\bar{A}-\lambda I)=\mathfrak{H}_\sigma$. Ekkor

$$(B-\lambda I)(z-\lambda_0)^{-1} = (\bar{A}-\lambda I)g,$$

ahol B az 5°. állítás bizonyítása során megszerkesztett operátor és g a $\mathfrak{D}(\bar{A})$ halmaz eleme. Az utóbbi egyenlőségből $\bar{A}g=Bg$ miatt következik, hogy

$$(B-\lambda I)\big((z-\lambda_0)^{-1}-g\big) = 0,$$

innen pedig $(z-\lambda_0)^{-1}=g \in \mathfrak{D}(\bar{A})$, mivel a λ pont a B operátorra nézve reguláris típusú. De ha $(z-\lambda_0)^{-1} \in \mathfrak{D}(\bar{A})$, akkor A defekt száma W-ben nullával egyenlő.

Megmutattuk, hogy a defekt szám N mindegyik komponensében 1. Egyidejűleg megmutattuk, hogy a B operátor mindegyik defekt száma 0. A további megfontolások ugyanolyanok, mint a 4°. állítás bizonyításában.

c) Most néhány kritériumot fogunk megállapítani arra, hogy a polinomok $\mathfrak{P}$ halmaza sűrű legyen az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben.

Azt fogjuk mondani, hogy az M halmaz α tulajdonságú, ha abból, hogy

$$\int_M \frac{d\omega(z)}{z-\lambda} = 0$$

minden $\lambda \notin M$ pontra, ahol $\omega(\mathscr{E})$ valamilyen komplex értékű, teljesen additív, az M halmaz *Borel*-féle részhalmazaiból álló halmaztesten értelmezett függvény, következik, hogy $\omega(\mathscr{E})=0$ ($\mathscr{E}$ az M halmaz tetszés szerinti Borel-féle részhalmaza).

Például α tulajdonságú minden olyan görbe, amelynek minden korlátos szakasza rektifikálható (lásd [13]).

7°. *Legyen az M halmaz α tulajdonságú. Ha az A operátor defekt számai nullával egyenlők, akkor a polinomok rendszere sűrű $\mathfrak{L}_\sigma(M)$-ben, azaz $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma(M)$.*

Minthogy minden defekt szám nullával egyenlő, a 4°. állításból következik, hogy mindegyik $(z-\lambda)^{-1}$ $(\lambda \notin M)$ függvény benne van $\mathfrak{H}_\sigma$-ban. Ha egy $h(z) \in \mathfrak{L}_\sigma(M)$ függvény ortogonális a $\mathfrak{H}_\sigma$ térre, akkor speciálisan ortogonális minden $(z-\lambda)^{-1}$ $(\lambda \notin M)$ függvényre, vagyis

$$\int_M \frac{\overline{h(z)}\,d\sigma(z)}{z-\lambda} = 0 \quad (\lambda \notin M),$$

minthogy pedig az M halmaz α tulajdonságú, M tetszés szerinti $\mathscr{E}$ Borel-féle részhalmazára

$$\int_{\mathscr{E}} \overline{h(z)}\,d\sigma(z) = 0$$

és innen

$$\int_M |h(z)|^2 d\sigma(z) = 0.$$

Az állítást bebizonyítottuk.

A vizsgált esetben, amikor A összes defekt számai nullával egyenlők, bármilyen σ_1 mérték, amely lényegesen különbözik a $\sigma_0=\sigma$ mértéktől (legalább egy nyílt halmazon nem egyenlő σ-val), a polinomok $\mathfrak{P}$ halmazán olyan metrikát generál, amely különbözik a $\mathfrak{H}_{\sigma_0} = \mathfrak{H}_\sigma$ tér metrikájától.

Valóban, ha a σ_1 függvény a polinomok halmazán ugyanazt a metrikát generálja, mint a $\sigma_0=\sigma$ függvény, akkor tetszés szerinti $\lambda \notin M$ esetén található olyan $(z-\lambda)P_n(z)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ polinom-sorozat, amely mindkét $\mathfrak{H}_{\sigma_i}$ $(i=0, 1)$ térben 1-hez tart:

$$\lim_{n\to\infty} \int_M |1-(z-\lambda)P_n(z)|^2 d\sigma_i(z) = 0 \quad (i = 0,\ 1).$$

Ebben az esetben

$$\lim_{n\to\infty} \int_M \left|\frac{1}{z-\lambda} - P_n(z)\right|^2 d\sigma_i(z) = 0 \quad (i = 0, 1),$$

következésképpen

$$\int_M \frac{d\sigma_i(z)}{z-\lambda} = \lim_{n\to\infty} \int_M P_n(z)\,d\sigma_i(z) = \lim_{n\to\infty} (P_n, 1) \quad (\mathrm{i} = 0, 1),$$

és így

$$\int_M \frac{d\sigma_1(z)}{z-\lambda} = \int_M \frac{d\sigma_0(z)}{z-\lambda} \quad (\lambda \notin M).$$

Innen adódik, hogy a σ_1 és a $\sigma_0=\sigma$ mérték megegyezik (lényegében).

Ily módon bebizonyítottuk, hogy a vizsgált esetben az

$$\int_M z^j \bar{z}^k d\sigma_1(z) = \int_M z^j \bar{z}^k d\sigma_0(z) \quad (j, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

egyenlőségekből következik, hogy σ_1 és σ_0 megegyezik (lényegében).

Ha az A operátor defekt számai a $\mathfrak{H}_\sigma$ térben nem mind nullák, akkor az utóbbi állítás általában nem érvényes még akkor sem, ha feltesszük, hogy $\mathfrak{H}_{\sigma_1}$, illetve $\mathfrak{H}_{\sigma_0}$ egybe esik az $\mathfrak{L}_{\sigma_1}(M)$, illetve $\mathfrak{L}_{\sigma_0}(M)$ térrel (lásd 5. §.).

A 6°. állítás felhasználásával azonban még a következő kritérium is megadható arra, hogy a polinomok $\mathfrak{P}$ halmaza sűrű legyen az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben.

8°. *Legyen az M halmaz α tulajdonságú. Ha az N halmaz valamelyik W komponensében az A operátor defekt száma* 1, *továbbá egy $\lambda_0 \in W$ pontra $(z-\lambda_0)^{-1} \in \mathfrak{H}_\sigma$, akkor a $\mathfrak{P}$ halmaz sűrű az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben.*

A 7°. állítás bizonyításából kitűnik, hogy elég megmutatni, hogy a $(z-\lambda)^{-1}$ függvény minden $\lambda \notin M$ esetén $\mathfrak{H}_\sigma$-hoz tartozik, ez pedig a 6°. állításból következik.

d) Legyen M a valós tengely: $z=t$ $(-\infty<t<\infty)$. Ebben az esetben az A operátor hermitikus. A $D_k(t)$ ortogonális polinomok választhatók valósnak. Ekkor $D_k(\bar{\lambda}) = \overline{D_k(\lambda)}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, tehát a (2.5) sor minden nem valós λ-ra egyszerre konvergál vagy divergál.

Az első esetben az A operátor defekt indexe (1, 1). A második esetben a defekt index (0, 0), vagyis A önadjungált.

Az 5. paragrafusban részletesen tanulmányozni fogjuk az itt felmerülő lehetőségeket.

3. §. Operátorok lineáris tört transzformációi

Legyen az A operátor értelmezési tartománya $\mathfrak{D}(A)$, és tegyük fel, hogy valamilyen γ és δ mellett a $\gamma A\varphi+\delta\varphi=0$ $(\varphi \in \mathfrak{D}(A))$ egyenlőségből következik, hogy $\varphi=0$.

Értelmezzünk az

$$f = \gamma Ag+\delta g \quad (g \in \mathfrak{D}(A)) \tag{3.1}$$

alakú elemeken egy B operátort a

$$Bf = \alpha Ag+\beta g \tag{3.2}$$

képlet segítségével, ahol az α, β számok eleget tesznek az

$$\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$$

feltételnek.

A B lineáris operátort *A lineáris tört transzformáltjának* fogjuk nevezni és a

$$(3.3) \qquad B = (\alpha A + \beta I)(\gamma A + \delta I)^{-1}$$

módon jelöljük.

Minthogy az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ számokat velük arányos mennyiségekkel helyettesítve a B operátor nem változik meg, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

3.1. LEMMA. *Ha B az A operátorral a* (3.3) *képlet szerint fejezhető ki, akkor A a B operátorból az alábbi módon adódik:*

$$(3.4) \qquad A = (\delta B - \beta I)(-\gamma B + \alpha I)^{-1}.$$

Valóban, a (3.1), (3.2) egyenleteket megoldva a g, Ag elemekre azt kapjuk, hogy

$$(3.5) \qquad g = -\gamma Bf + \alpha f, \; Ag = \delta Bf - \beta f \quad (g \in \mathfrak{D}(A), f \in \mathfrak{D}(B)),$$

ezenkívül $g=0$ esetén $f=0$. Így a lineáris tört transzformáció definíciója értelmében fennáll a (3.4) egyenlőség.

1°. *Ha az A és a B operátor egymás lineáris tört transzformáltja, akkor egyikük zártságából következik a másik zártsága.*

Legyen A zárt. Ha az $f_n \in \mathfrak{D}(B)$ és a Bf_n $(n=1, 2, \ldots)$ sorozat tart egy f_0, ill. h_0 elemhez, akkor a

$$g_n = -\gamma Bf_n + \alpha f_n, \; Ag_n = \delta Bf_n - \beta f_n \quad (g_n \in \mathfrak{D}(A), f_n \in \mathfrak{D}(B); n = 1, 2, \ldots)$$

sorozatok rendre valamilyen g_0, ill. φ_0 elemhez tartanak. Minthogy azonban A zárt, azt kapjuk, hogy $g_0 \in \mathfrak{D}(A)$ és $\varphi_0 = Ag_0$. A (3.1), (3.2) összefüggések alapján

$$f_n = \gamma Ag_n + \delta g_n, \; Bf_n = \alpha Ag_n + \beta g_n \quad (g_n \in \mathfrak{D}(A), f_n \in \mathfrak{D}(B); \quad n = 1, 2, \ldots).$$

Az $n \to \infty$ határátmenettel nyerjük:

$$f_0 = \gamma Ag_0 + \delta g_0, \quad h_0 = \alpha Ag_0 + \beta g_0,$$

úgyhogy $f_0 \in \mathfrak{D}(B)$ és $h_0 = Bf_0$, vagyis a B operátor zárt.

Az 1°. állításból következik, hogy *ha az A operátor zárt és a λ pont A-ra nézve reguláris típusú, akkor $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$ zárt altér.*

Csakugyan, az $(A-\lambda I)^{-1}$ operátor, amelynek értelmezési tartománya $\mathfrak{R}(A-\lambda I)$, az (1.1) képlet értelmében korlátos, az 1°. állítás alapján pedig zárt; következésképpen zárt altéren van értelmezve.

2°. *Ha az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ számok valósak és az A operátor hermitikus vagy önadjungált, akkor a B operátor is hermitikus, illetve önadjungált.*

Valóban, ha A hermitikus, akkor tetszés szerinti $g_1, g_2 \in \mathfrak{D}(A)$ elemekre

$$\begin{aligned}(\alpha Ag_1 + \beta g_1, \gamma Ag_2 + \delta g_2) &= \alpha\gamma(Ag_1, Ag_2) + \alpha\delta(Ag_1, g_2) + \beta\gamma(g_1, Ag_2) + \beta\delta(g_1, g_2) = \\ &= \alpha\gamma(Ag_1, Ag_2) + \alpha\delta(g_1, Ag_2) + \beta\gamma(Ag_1, g_2) + \beta\delta(g_1, g_2) = \\ &= (\gamma Ag_1 + \delta g_1, \alpha Ag_2 + \beta g_2),\end{aligned}$$

tehát a (3.1), (3.2) összefüggések folytán

$$(Bf_1, f_2) = (f_1, Bf_2) \quad (f_1, f_2 \in \mathfrak{D}(B)).$$

Legyen az A operátor önadjungált. Megmutatjuk, hogy ekkor bármilyen nem valós λ-ra az $\mathfrak{R}(B-\lambda I)$ halmaz megegyezik az egész $\mathfrak{H}$ térrel, és így a hermitikus B operátor önadjungált.

A (3.1), (3.2) egyenlőségek szerint az $\mathfrak{R}(B-\lambda I)$ halmaz az

$$\alpha Ag+\beta g-\lambda(\gamma Ag+\delta g) = (\alpha-\lambda\gamma)Ag+(\beta-\lambda\delta)g \quad (g \in \mathfrak{D}(A))$$

alakú elemekből áll.

Minthogy az α, β, γ, δ számok valósak, valós λ értékekre $\alpha-\lambda\gamma \neq 0$ és a

$$\mu = -\frac{\beta-\lambda\delta}{\alpha-\lambda\gamma}$$

szám nem valós; következésképpen

$$\mathfrak{R}(B-\lambda I) = \mathfrak{R}(A-\mu I) = \mathfrak{H}.$$

Speciálisan, ha egy A önadjungált operátor inverz operátora, A^{-1} létezik, akkor önadjungált.

3°. *Ha $\gamma=\bar{\alpha}$, $\delta=\bar{\beta}$ és az A operátor hermitikus vagy önadjungált, akkor B izometrikus, illetve unitér.*

Valóban, ha az A operátor hermitikus, akkor tetszés szerinti $g_1, g_2 \in \mathfrak{D}(A)$ elemekre

$$\begin{aligned}(\alpha Ag_1+\beta g_1, \alpha Ag_2+\beta g_2) &= \\ &= \alpha\bar{\alpha}(Ag_1, Ag_2)+\alpha\bar{\beta}(Ag_1, g_2)+\bar{\alpha}\beta(g_1, Ag_2)+\beta\bar{\beta}(g_1, g_2) = \\ &= \gamma\bar{\gamma}(Ag_1, Ag_2)+\delta\bar{\gamma}(g_1, Ag_2)+\gamma\bar{\delta}(Ag_1, g_2)+\delta\bar{\delta}(g_1, g_2) = \\ &= (\gamma Ag_1+\delta g_1, \gamma Ag_2+\delta g_2),\end{aligned}$$

azaz

$$(Bf_1, Bf_2) = (f_1, f_2) \quad (f_1, f_2 \in \mathfrak{D}(B)),$$

tehát B izometrikus.

Legyen az A operátor önadjungált. Ekkor a B izometrikus operátor $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{R}(\bar{\alpha}A+\bar{\beta}I)$ értelmezési tartománya és $\mathfrak{R}(B)=\mathfrak{R}(\alpha A+\beta I)$ értékkészlete a $\mathfrak{H}$ tér, és így B unitér.

Analóg módon lehet bebizonyítani az ellenkező irányú állítást:

4°. *A 3°. állítás feltételei mellett a B operátor izometrikus vagy unitér voltából következik, hogy A hermitikus, illetve önadjungált.*

A hermitikus A operátor olyan lineáris tört transzformáltját, amelyre teljesülnek a 3°. állításban szereplő feltételek, *A Cayley-transzformáltjának* fogjuk nevezni; a $\lambda = -\dfrac{\delta}{\gamma}$ jelöléssel ez az

$$U_\lambda = (A-\bar{\lambda}I)(A-\lambda I)^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0) \tag{3.6}$$

alakra hozható.

4. §. Hermitikus operátorok folytatása

1. 4.1. LEMMA. *Legyen B az A operátor lineáris tört transzformáltja:*

$$B = (\alpha A + \beta I)(\gamma A + \delta I)^{-1}.$$

Ha ezenkívül $\tilde{A}$ az A operátor olyan folytatása, hogy a $\gamma\tilde{A}\varphi + \delta\varphi = 0$ egyenlőség csak $\varphi = 0$ esetén állhat fenn, akkor az $\tilde{A}$ operátor

$$\tilde{B} = (\alpha\tilde{A} + \beta I)(\gamma\tilde{A} + \delta I)^{-1}$$

lineáris tört transzformáltja a B operátor folytatása.

Ez a lemma a lineáris tört transzformáció definíciójából következik.

A lemma lehetővé teszi, hogy amikor bizonyos osztályba tartozó operátorok valamilyen tulajdonságot megtartó folytatásait keressük, akkor ezt a feladatot alkalmas lineáris tört transzformáció segítségével visszavezessük egy másik osztályhoz tartozó operátorok megfelelő tulajdonságú folytatásainak a megtalálására. A *Cayley*-transzformáció segítségével, mint a 3.§ 3°. és 4°. állítása mutatja, az A hermitikus operátor önadjungált folytatásainak a megkeresését az

$$U_\lambda = (A - \bar{\lambda} I)(A - \lambda I)^{-1}$$

izometrikus operátor unitér folytatásainak a megkeresésére lehet visszavezetni.

2. Az U_λ operátor értelmezési tartománya a

$$\mathfrak{D}(U_\lambda) = \mathfrak{R}(A - \lambda I) = \mathfrak{L}_\lambda$$

altér, értékkészlete pedig

$$\mathfrak{R}(U_\lambda) = \mathfrak{R}(A - \bar{\lambda} I) = \mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}.$$

$\mathfrak{L}_\lambda$, ill. $\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}$ ortogonális komplementumát a korábbiakhoz hasonlóan $\mathfrak{N}_\lambda$, ill. $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ fogja jelölni.

Minthogy minden izometrikus operátor egymásra ortogonális elemeket egymásra ortogonálisakba visz át, könnyű belátni, hogy az U_λ operátor bármelyik zárt izometrikus $\tilde{U}_\lambda$ folytatását meg lehet kapni a következőképpen.

Válasszunk $\mathfrak{N}_\lambda$-ban egy $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in N}$, az $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ altérben pedig egy $\{\psi_\nu\}_{\nu\in N}$ ortonormális rendszert, amelyeknek ugyanaz a számossága, majd az $\mathfrak{L}_\lambda$ altérnek és a $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in N}$ rendszer zárt lineáris burkának az $\tilde{\mathfrak{L}}_\lambda$ direkt összegén értelmezzük az $\tilde{U}_\lambda$ operátort az

$$\tilde{U}_\lambda\Big(f + \sum_{\nu\in N}\xi_\nu\varphi_\nu\Big) = U_\lambda f + \sum_{\nu\in N}\xi_\nu\psi_\nu \quad (f\in\mathfrak{L}_\lambda) \tag{4.1}$$

képlettel, ahol ξ_ν $(\nu\in N)$ tetszés szerinti, a

$$\sum_{\nu\in N}|\xi_\nu|^2 < \infty$$

feltételnek eleget tevő számok.

Az így nyert izometrikus operátor az $\tilde{\mathfrak{L}}_\lambda$ alteret az $\mathfrak{L}_{\bar{\lambda}}$ altérnek és a $\{\psi_\nu\}_{\nu\in N}$ rendszer lineáris burkának az $\tilde{\mathfrak{L}}_{\bar{\lambda}}$ direkt összegére képezi le.

Ha $\mathfrak{N}_\lambda$ és $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ dimenziója különböző (ez annak felel meg, hogy az

$$A = (\lambda U_\lambda - \bar\lambda I)(U_\lambda - I)^{-1}$$

hermitikus operátor defekt számai különbözők), akkor felvéve a kisebb dimenziójúban egy teljes ortonormális bázist, a másik altérben pedig egy ugyanilyen számosságú ortonormális rendszert, az U_λ izometrikus operátort fél-unitér operátorrá vagy fél-unitér operátor inverzévé folytathatjuk. Az ilyen folytatásokat *maximális izometrikus folytatásoknak* hívjuk, mert nincs további izometrikus folytatásuk.

Ha az $\mathfrak{N}_\lambda, \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ alterek dimenziója egyenlő (a megfelelő hermitikus operátor defekt számai egyenlők), akkor az U_λ izometrikus operátornak van unitér folytatása, és ez természetesen maximális folytatás.

Ha $\mathfrak{N}_\lambda$ és $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ dimenziója egyenlő és véges, akkor az U_λ operátornak az unitéreken kívül nincs más maximális izometrikus folytatása.

Ha $\mathfrak{N}_\lambda$ és $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ dimenziója egyenlő és végtelen, akkor az operátornak az unitéreken kívül más maximális izometrikus folytatásai is képezhetők. Ha például az U_λ operátornak egy fél-unitér $\tilde U_\lambda$ folytatását akarjuk megkapni, akkor az $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ altérben választunk egy ortonormális és *nem teljes* $\{\psi_\nu\}$ rendszert, amelynek a számossága egyenlő $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ dimenziójával, az $\mathfrak{N}_\lambda$ altérben pedig egy $\{\varphi_\nu\}$ teljes ortonormális rendszert, és az $\tilde U_\lambda$ operátort a (4.1) képlet segítségével értelmezzük.

Ahhoz, hogy egy $\tilde U_\lambda$ izometrikus folytatásból inverz lineáris tört transzformációval az A operátornak

$$\tilde A = (\lambda \tilde U_\lambda - \bar\lambda I)(\tilde U_\lambda - I)^{-1}$$

hermitikus folytatását nyerhessük, szükséges és elégséges, hogy az

$$\tilde U_\lambda \varphi - \varphi = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{D}(\tilde U_\lambda))$$

egyenlőség csak $\varphi = 0$ esetén állhasson fönn.

A továbbiakban olyan $\tilde U_\lambda$ folytatásokat fogunk keresni, amelyek eleget tesznek ennek a feltételnek.

3. Legyen az A hermitikus operátor $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{H}$-ban. Ekkor az

$$U_\lambda = (A - \bar\lambda I)(A - \lambda I)^{-1}$$

operátor bármelyik $\tilde U_\lambda$ izometrikus folytatására teljesül a 4.1. lemmában szereplő feltétel.

Csakugyan, tegyük fel, hogy $\tilde U_\lambda$ az U_λ izometrikus operátor izometrikus folytatása és

$$(\tilde U_\lambda \varphi - \varphi, h) = 0 \quad (h \in \mathfrak{H}).$$

Ez az egyenlőség igaz speciálisan minden

$$h = \tilde U_\lambda g = U_\lambda g \quad (g \in \mathfrak{D}(U_\lambda))$$

alakú elemre:

$$(\tilde U_\lambda \varphi - \varphi, \tilde U_\lambda g) = (\varphi, g - U_\lambda g) = 0.$$

Innen a (3.5) összefüggés értelmében $(\varphi, f) = 0$ $(f \in \mathfrak{D}(A))$, minthogy pedig $\mathfrak{D}(A)$ sűrű a $\mathfrak{H}$ térben, $\varphi = 0$.

Ha mindazt, amit az U_λ izometrikus operátor folytatásairól elmondtunk, összevetjük a 3.1. és a 4.1. lemmával, megkapjuk Neumann János [11] alaptételeit.

II. TÉTEL. *A $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(A)$ halmazon értelmezett hermitikus A operátornak akkor és csak akkor van önadjungált folytatása, ha defekt számai egyenlők.*

Egy hermitikus operátort *maximálisnak* mondunk, ha nincs hermitikus folytatása.

III. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a hermitikus A operátor maximális legyen, szükséges és elégséges, hogy egyik defekt száma nulla legyen.*
Minden hermitikus operátornak van maximális hermitikus folytatása.

Nyilvánvaló, hogy az $\tilde{A}$ ($\neq A$) maximális folytatás, ha létezik, nincs egyértelműen meghatározva.

4. Ha a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(A)$ halmazon értelmezett A hermitikus operátor defekt számai nem egyenlők, akkor, mint megmutattuk, az A operátort a $\mathfrak{H}$ térben nem lehet önadjungálttá folytatni. Ha azonban *kilépünk* egy másik térbe, akkor lehet önadjungált folytatást találni.

A következőkben megmagyarázzuk ezt az állítást.

Két *Hilbert*-tér, $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{H}'$ direkt összegének nevezzük és a $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}'$ jellel jelöljük az $\{f,f'\}, f\in\mathfrak{H}, f'\in\mathfrak{H}'$ rendezett párok összességét, amelyben az összeadás, a skalárral való szorzás és a skaláris szorzás művelete a következőképpen van értelmezve:

$$\{f,f'\}+\{g,g'\} = \{f+g,f'+g'\}, \quad \alpha\{f,f'\} = \{\alpha f, \alpha f'\},$$

$$(\{f,f'\}, \{g,g'\}) = (f,g)+(f',g').$$

A $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}'$ direkt összeg szintén *Hilbert*-tér.

Az $\{f, 0\}$ és $\{0,f'\}$ alakú elemeket nem fogjuk megkülönböztetni az $f\in\mathfrak{H}$, illetve $f'\in\mathfrak{H}'$ elemektől: úgy tekintjük, hogy $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{H}'$ be van ágyazva a $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}'$ térbe és ott egymás ortogonális komplemenumát alkotja.

Legyen A valamilyen operátor a $\mathfrak{H}$, B pedig a $\mathfrak{H}'$ térben.

Az A, B operátorok $A\oplus B$ direkt összegének fogjuk nevezni a $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}'$ térnek azt a C operátorát, amely az $\{f,f'\}, f\in\mathfrak{D}(A), f'\in\mathfrak{D}(B)$ alakú elemek halmazán a

$$C\{f,f'\} = \{Af, Bf'\}$$

képlettel van értelmezve.

Megemlítjük a C operátor következő tulajdonságait.

Ha $\mathfrak{D}(A)$ sűrű $\mathfrak{H}$-ban és $\mathfrak{D}(B)$ sűrű $\mathfrak{H}'$-ben, akkor $\mathfrak{D}(C)$ sűrű a $\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}'$ térben.

Ha A és B hermitikus, akkor C is az.

Ha az A operátor defekt indexe $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, *a B operátoré pedig* $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$, *akkor C defekt indexe* $(\mathfrak{m}+\mathfrak{m}', \mathfrak{n}+\mathfrak{n}')$.

Igazoljuk a harmadik állítást. Minthogy

$$(C-\lambda I)\{f,f'\} = \{(A-\lambda I)f, (B-\lambda I)f'\} \quad (f\in\mathfrak{D}(A), f'\in\mathfrak{D}(B)),$$

azért

$$\mathfrak{R}(C-\lambda I) = \mathfrak{R}(A-\lambda I)\oplus\mathfrak{R}(B-\lambda I),$$

tehát

$$\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}' = \mathfrak{R}(C-\lambda I)\oplus\mathfrak{N}_\lambda\oplus\mathfrak{N}'_\lambda,$$

ahol

$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{R}(A-\lambda I), \quad \mathfrak{N}'_\lambda = \mathfrak{H}'\ominus\mathfrak{R}(B-\lambda I).$$

Legyen A hermitikus operátor a $\mathfrak{H}$ térben, a $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartomány sűrű $\mathfrak{H}$-ban, és A defekt indexe $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ $(\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n})$. Ekkor található egy B hermitikus operátor, amely bizonyos $\mathfrak{H}'$ térben működik, $\mathfrak{H}'$-ben sűrű $\mathfrak{D}(B)$ halmazon van definiálva, és defekt indexe $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ (például a $-A$ operátor a $\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}$ térben).

Így a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ tér $C=A \oplus B$ operátora hermitikus, sűrűn definiált, és defekt számai egyenlők. A II. tétel szerint a C operátornak vannak önadjungált folytatásai, és ezek az A operátornak a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ térbe kilépő önadjungált folytatásait szolgáltatják.

Hermitikus operátorok másik térbe kilépő önadjungált folytatásainak a szerepét M. A. NAJMARK ([9] a, b]) világította meg.

5. §. A momentum probléma a $(-\infty, \infty)$ intervallumban

1. Az előző paragrafusokban igazolt általános tételek alkalmazására példaként le fogjuk vezetni a *Hamburger*-féle klasszikus momentum probléma főbb eredményeit (lásd [1]a, [16]).

Kezdjük az arra vonatkozó ismert kritériummal, hogy egy $\{s_k\}_0^\infty$ számsorozat mikor állítható elő az

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \, d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.1}$$

alakban, ahol $\sigma(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ valamilyen nem korlátos és nem-csökkenő függvény; utóbbit a

$$\sigma(-\infty) = 0, \quad \sigma(t-0) = \sigma(t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

feltételekkel fogjuk normálni.

A. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az* $\{s_k\}_0^\infty$ *sorozat előállítható legyen az* (5.1) *alakban (momentum sorozat legyen), szükséges és elégséges, hogy a*

$$\sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k} \xi_j \xi_k \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.2}$$

valós formák mindannyian nem-negatívok legyenek.

Bizonyítás. A feltétel szükséges volta abból következik, hogy ha az s_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ számok előállíthatók az (5.1) képlet segítségével, akkor

$$\sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k} \xi_j \xi_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{0}^{n} \xi_j t^j \right)^2 d\sigma(t) \geqq 0.$$

Most bebizonyítjuk, hogy a feltétel elégséges. Előre bocsátjuk, hogy ha az (5.2) formák valós $\xi_1, \ldots, \xi_n$ értékek mellett nem-negatívok, akkor tetszés szerinti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ komplex számokra fennállnak a

$$\sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k} \xi_j \bar{\xi}_k \geqq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.3}$$

egyenlőtlenségek.

Tekintsük azt a $\mathfrak{P}$ lineáris halmazt, amely a $P(t)$ polinomokból áll, és értelmezzünk rajta egy (P, Q) hermitikus bilineáris funkcionált a következőképpen:

$$(5.4)\qquad (P, Q) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} s_{j+k} \xi_j \bar{\eta}_k, \qquad P(t) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j t^j, \qquad Q(t) = \sum_{k=0}^{m} \eta_k t^k.$$

Könnyű belátni, hogy

$$(tP, Q) = (P, tQ) \qquad (P, Q \in \mathfrak{P}),$$

és így bármely három $P, Q, R \in \mathfrak{P}$ polinomra

$$(PR, Q) = (P, QR).$$

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor mindegyik (5.2) forma, és ennélfogva mindegyik (5.3) forma is pozitív (nem elfajuló), azaz $(P, P) > 0$ ha $P(t) \not\equiv 0$.

Ebben az esetben a (P, Q) funkcionál rendelkezik a skaláris szorzat összes tulajdonságaival és $\mathfrak{P}$-ben bizonyos metrikát értelmez.

A $\mathfrak{P}$ halmazt lezárva egy teljes $\mathfrak{H}$ Hilbert-teret kapunk, amelyben $\mathfrak{P}$ mindenütt sűrűn helyezkedik el.

Értelmezzünk a polinomokon egy A operátort az

$$AP = tP \qquad (P \in \mathfrak{P})$$

egyenlőség segítségével.

Az A operátor $\mathfrak{H}$-ban sűrű halmazon van definiálva és hermitikus.

Az alábbiakban az A operátor $\bar{A}$ lezárását fogjuk vizsgálni.

$\bar{A}$ defekt számai 0-val vagy 1-gyel lehetnek egyenlők, mert $\bar{A} - \lambda I$ értékkészlete tartalmazza mindazokat a polinomokat, amelyek a λ pontban a 0 értéket veszik fel, és $\bar{A} - \lambda I$ értékkészletéhez hozzáadva a konstans függvényeket a $\mathfrak{H}$ térben sűrű halmazt kapunk (lásd a 2.2. példát).

Az $\bar{A}$ operátor defekt számai egyenlők. Ha az egyik félsíkban a defekt szám nulla, az azt jelenti, hogy ezen a félsíkon választott λ esetén az $(\bar{A} - \lambda I)\mathfrak{P}$ halmaz sűrű a $\mathfrak{H}$ térben. Ekkor van olyan $P_n \in \mathfrak{P}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat, hogy

$$|1 - (t - \lambda) P_n| \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Erre a sorozatra nyilván az is igaz, hogy

$$|1 - (t - \bar{\lambda}) \bar{P}_n| \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

tehát $(\bar{A} - \bar{\lambda} I)\mathfrak{P}$ sűrű $\mathfrak{H}$-ban, és a defekt szám a másik félsíkban nulla.

Legyen H az $\bar{A}$ operátor valamilyen önadjungált folytatása a $\mathfrak{H}$ térben vagy egy másik $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$ térben.

Legyen $E(t)$ a H operátor spektrálfüggvénye. Vezessük be a

$$\sigma(t) = \big(E(t)1, 1\big) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

jelölést. Ekkor

$$s_k = (t^k, 1) = (A^k 1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\big(E(t)1, 1\big) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

A vizsgált esetben, amikor az (5.2) formák mind pozitívok, a tételt bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy az (5.2) nem-negatív formák közt van elfajuló. Ekkor ha az előbbiekhez hasonlóan az (5.4) egyenlőség útján a polinomok $\mathfrak{P}$ halmazán egy bilineáris funkcionált definiálunk, ez rendelkezni fog a skaláris szorzat minden tulajdonságával, kivéve azt, hogy $(P, P)=0$ esetén $P(t)\equiv 0$ volna.

Tekintsünk egy minimális p fokszámú $\Pi(t)$ polinomot, amelyre $(\Pi, \Pi)=0$. A *Schwarz*-egyenlőtlenség értelmében

$$|(\Pi, Q)|^2 \leqq (\Pi, \Pi)\,(Q, Q),$$

ennélfogva

$$(\Pi, Q) = 0 \qquad (Q \in \mathfrak{P}). \tag{5.5}$$

Feltehetjük, hogy $p>0$, mert ellenkező esetben $(p=0)$ választható $\Pi=1$, és ekkor $s_k=(\Pi, t^k)=0$ $(k=1, 2, \ldots)$, tehát az $\{s_k\}$ sorozatnak megfelel a $\sigma\equiv 0$ függvény.

Megmutatjuk, hogy a $(P, P)=0$ összefüggésből következik, hogy $P(t)$ osztható $\Pi(t)$-vel. Valóban, ha a $P(t)$ polinomot a $P(t)=\Pi(t)Q(t)+R(t)$ alakban írjuk fel, ahol $R(t)$ fokszáma kisebb, mint p, akkor (5.5) miatt azt kapjuk, hogy

$$(R, R) = (P-\Pi Q, P-\Pi Q) = 0,$$

és így $R(t)\equiv 0$.

A következőkben $\hat{P}$ $(P\in\mathfrak{P})$ azoknak a polinomoknak az osztályát fogja jelölni, amelyek kongruensek $P(t)$-vel modulo $\Pi(t)$. Értelmezzünk a $\hat{P}$ osztályok által alkotott p-dimenziós $\mathfrak{H}_m$ halmazon egy $(\hat{P}, \hat{Q})$ bilineáris funkcionált a

$$(\hat{P}, \hat{Q}) = (P, Q)$$

képlet segítségével.

Ez a definíció egyértelmű, mert

$$(P+S_1\Pi, Q+S_2\Pi) = (P, Q).$$

A $(\hat{P}, \hat{Q})$ funkcionál a $\mathfrak{H}_m$ téren skaláris szorzatnak tekinthető.

Most vegyük észre, hogy ha $\hat{P}=0$, vagyis $(P, P)=0$, akkor egyben

$$(tP, tP) = (P, t^2P) = 0,$$

azaz $t\hat{P}=0$. Ennélfogva $\hat{P}_1=\hat{P}_2$ esetén $t\hat{P}_1=t\hat{P}_2$.

Az utóbbi körülmény lehetővé teszi, hogy $\mathfrak{H}_m$-ben bevezessünk egy $\hat{A}$ operátort, amelyet az

$$\hat{A}\hat{P} = t\hat{P} \quad (\hat{P}\in\mathfrak{H}_m)$$

képlet értelmez. Az $\hat{A}$ operátor önadjungált.

Legyen $E(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ az $\hat{A}$ operátor spektrálfüggvénye, továbbá

$$\sigma(t) = \left(E(t)\hat{1}, \hat{1}\right) \quad (-\infty < t < \infty);$$

ekkor

$$s_k = (\hat{t}^k, \hat{1}) = (\hat{A}^k\hat{1}, \hat{1}) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\left(E(t)\hat{1}, \hat{1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t).$$

A tételt bebizonyítottuk.

Megmutatjuk, hogy a második esetben, amikor tehát az (5.2) formák között van elfajuló is, az (5.1) előállításban fellépő $\sigma(t)$ függvény egyértelműen meg van határozva és pontosan p számú növekedési pontja van.

Csakugyan, ebben az esetben (5.1) alapján

$$(\Pi, \Pi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Pi|^2 d\sigma(t) = 0,$$

tehát a $\sigma(t)$ függvénynek legfeljebb p növekedési pontja van és ezek $\Pi(t)$ zérushelyei. A növekedési pontok száma nem lehet kisebb, mint p, mert ellenkező esetben lehetne találni olyan $\Pi_1(t) \not\equiv 0$ polinomot, amely p-nél alacsonyabb fokú és $\sigma(t)$ növekedési pontjaiban nullával egyenlő, és erre $(\Pi_1, \Pi_1) = 0$ volna, ami lehetetlen.

Legyenek $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p$ a $\sigma(t)$ függvény növekedési pontjai (Π zérushelyei). Képezzük a

$$q_j(t) = \frac{\Pi(t)}{(t-\alpha_j)\Pi'(\alpha_j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

polinomokat. Ekkor

$$(q_j, q_j) = \int_{-\infty}^{\infty} |q_j|^2 d\sigma(t) = \sigma(\alpha_j + 0) - \sigma(\alpha_j - 0) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Az állítást bebizonyítottuk.

2. Térjünk vissza az első esetre, amikor mindegyik (5.2) forma pozitív, és vizsgáljuk meg azt a V halmazt, amely az összes normált, nem-csökkenő és az (5.1) előállítást lehetővé tevő $\sigma(t)$ függvényekből áll.

Mindegyik $\sigma \in V$ függvényre vonatkozóan $\mathfrak{H}$ úgy tekinthető, mint az $\mathfrak{L}_\sigma$ tér (lásd a 2.2. példát) bizonyos $\mathfrak{H}_\sigma$ altere, amelyet úgy nyerünk, hogy az összes polinomokból álló $\mathfrak{P}$ halmazt lezárjuk $\mathfrak{L}_\sigma$-ban.

Ezek szerint az összes $\mathfrak{H}_\sigma$ $(\sigma \in V)$ terek izometrikusak egymással és ugyanannak a $\mathfrak{H}$ térnek a realizációi.

Minden ilyen térben $\bar{A}$ a $P(t)$ polinomok t-vel való szorzásának az operátoraként ábrázolható.

A $\{t^k\}$ sorozatot $\mathfrak{H}$-ban ortonormálva egy valós polinomokból álló $\{D_k(t)\}$ sorozatot kapunk, amely mindegyik $\mathfrak{H}_\sigma$ $(\sigma \in V)$ térben ortonormális.

Az $\bar{A}$ operátor önadjungált vagy (1, 1) defekt indexű a szerint, amint a $\sum_0^\infty |D_k(\lambda)|^2$ sor nem valós λ mellett divergens vagy konvergens.

B. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a σ függvényt az* (5.1) *egyenlőségek egyértelműen meghatározzák (a momentum probléma meghatározott legyen), szükséges és elégséges, hogy $\bar{A}$ önadjungált operátor legyen.*

A feltétel elégséges volta a 2.2c. példában szereplő általános állításból következik. Bebizonyítjuk a szükségességet.

Legyen B_k $(k = 1, 2)$ az $\bar{A}$ operátor két különböző önadjungált folytatása $\mathfrak{H}$-ban, $E^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2)$ a megfelelő spektrálfüggvények, $\sigma^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2)$ pedig az (5.1) momentum probléma hozzájuk tartozó megoldásai.

Megjegyezzük, hogy ekkor

$$(R_z^{(k)}1,1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\big(E^{(k)}(t)1,1\big)}{t-z}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma^{(k)}(t)}{t-z}\quad(k=1,2),$$

ahol $R_z^{(k)}=(B_k-zI)^{-1}$ a B_k $(k=1,2)$ operátor rezolvense.

Nyilvánvaló, hogy az $R_z^{(k)}$ rezolvens és az

$$U_z^{(k)}=(B_k-\bar{z}I)(B_k-zI)^{-1}\qquad(k=1,2)$$

Calyey-transzformált között fennáll az

$$R_z^{(k)}=\frac{1}{z-\bar{z}}(I-U_z^{(k)})\quad(k=1,2)$$

összefüggés.

Rögzítsük a z számot. Legyen e_z az $\mathfrak{L}_z=\mathfrak{R}(\bar{A}-zI)$ halmazra merőleges egységvektor, $e_{\bar{z}}^{(1)}=U_z^{(1)}e_z$ pedig az $\mathfrak{L}_{\bar{z}}=\mathfrak{R}(\bar{A}-\bar{z}I)$ halmazra merőleges egységvektor. Minthogy az $U_z^{(k)}$ $(k=1,2)$ operátorok az $\mathfrak{L}_z$ halmazon megegyeznek, fennáll $e_{\bar{z}}^{(2)}=U_z^{(2)}e_z=\varepsilon e_{\bar{z}}^{(1)}$, ahol $|\varepsilon|=1$.

Bontsuk fel az $1\in\mathfrak{H}$ vektort merőleges összetevőkre:

$$1=(1,e_z)e_z+g\quad(g\in\mathfrak{L}_z).$$

Vegyük tekintetbe, hogy (lásd a 2.1. példát)

$$|(1,e_z)|^2=|(1,e_{\bar{z}})|^2=\big(\varrho(1,\mathfrak{L}_{\bar{z}})\big)^2=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}|D_k(z)|^2}>0.$$

Minthogy $g\in\mathfrak{L}_z$, azért $U_z^{(1)}g=U_z^{(2)}g$, következésképpen

$$U_z^{(2)}1-U_z^{(1)}1=(1,e_z)(\varepsilon-1)e_{\bar{z}}^{(1)},$$

$$R_z^{(2)}1-R_z^{(1)}1=\frac{(1,e_z)}{z-\bar{z}}(1-\varepsilon)e_{\bar{z}}^{(1)},$$

tehát

$$(R_z^{(2)}1,1)-(R_z^{(1)}1,1)=\frac{(1,e_z)(e_{\bar{z}}^{(1)},1)}{2iy}(1-\varepsilon).\tag{5.6}$$

A 4. §-ban elmondottak értelmében az $\bar{A}$ operátor B_2 önadjungált folytatását az ε $(|\varepsilon|=1)$ szám határozza meg. Ha ε befutja az egységkört, akkor megkapjuk $\bar{A}$ összes önadjungált folytatásait a $\mathfrak{H}$ térben.

Ennek során, amint az (5.6) egyenlőség mutatja, a

$$w(z)=(R_z^{(2)}1,1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma^{(2)}(t)}{t-z}$$

pont egy $\Gamma(z)$ kört ír le, amelynek a sugara

$$r(z) = \frac{|(1, e_z)(1, e_{\bar{z}}^{(1)})|}{2|y|} = \frac{1}{2|y| \sum_{k=0}^{\infty} |D_k(z)|^2}. \tag{5.7}$$

Ebből következik, hogy $\varepsilon \neq 1$ esetén $\sigma^{(2)}(t)$ nem azonos $\sigma^{(1)}(t)$-vel.

3. Most legyen $\sigma \in V$. Tekintsük $\mathfrak{L}_\sigma$-ban a t-vel való szorzás T operátorát azokon a $g \in \mathfrak{L}_\sigma$ függvényeken, amelyekre teljesül az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 d\sigma(t) < \infty \tag{5.8}$$

feltétel. A T operátor a $\mathfrak{H}_\sigma$ térben működő $\bar{A}$ operátornak olyan önadjungált folytatása, amely $\mathfrak{H}_\sigma$-ból kilép $\mathfrak{L}_\sigma$-ba (ha $\mathfrak{H}_\sigma \neq \mathfrak{L}_\sigma$).

Legyen $E(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ a T operátor spektrálfüggvénye. Ekkor tetszés szerinti nem valós λ-ra

$$((T-\lambda I)^{-1} 1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(t)1, 1)}{t-\lambda}.$$

Másrészt az $\mathfrak{L}_\sigma$-beli skaláris szorzat definíciója szerint

$$((T-\lambda I)^{-1} 1, 1) = ((t-\lambda)^{-1}, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}.$$

Látjuk, hogy

$$\sigma(t) = (E(t)1, 1) \quad (-\infty < t < \infty). \tag{5.9}$$

Ilyenformán tetszés szerinti $\sigma \in V$ függvény az A. tétel bizonyítása során ismertetett módon, vagyis az (5.9) képlet útján nyerhető, ahol $E(t)$ az A operátor valamelyik, általában egy $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$ térbe kilépő, önadjungált folytatásának a spektrálfüggvénye.

4. Abban az esetben, amikor V sok függvényből áll (határozatlan momentum probléma), a $\sigma \in V$ függvényt *kanonikusnak* fogjuk nevezni, ha az (5.9) képlet segítségével nyerhető, ahol $E(t)$ az A operátor valamilyen $\mathfrak{H}$-beli $\tilde{A}$ önadjungált folytatásának spektrálfüggvénye.

Riesz Marceltől [14b] (lásd még [16]) származik a következő

C. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az összes polinomok halmaza, $\mathfrak{P}$ sűrű legyen $\mathfrak{L}_\sigma$-ban ($\sigma \in V$), szükséges és elégséges, hogy a következő két feltétel közül az egyik teljesüljön: vagy a momentum probléma határozott, vagy a σ függvény kanonikus.*

Bizonyítás. Valóban, ha teljesül az első feltétel, akkor az A operátor defekt indexe $(0, 0)$, és $\mathfrak{P}$-nek $\mathfrak{L}_\sigma$-ban sűrű volta a 2.2. példa 7°. állításából adódik.

Most tegyük fel, hogy a $\sigma(t)$ függvény nincs egyértelműen meghatározva, vagyis hogy A defekt indexe $(1, 1)$.

Ha $\mathfrak{P}$ sűrű $\mathfrak{L}_\sigma$-ban, azaz $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma$, akkor (a $\mathfrak{H}_\sigma$ teret az $\mathfrak{L}_\sigma$ térrel azonosítva) a T operátort az A operátor $\mathfrak{H}$-beli önadjungált folytatásának lehet tekinteni, minthogy pedig $\sigma(t)$ a 3. pontban mondottak értelmében az (5.9) képletből nyerhető, ahol $E(t)$ a T operátor spektrálfüggvénye, azért $\sigma(t)$ kanonikus függvény.

Megfordítva, tegyük fel, tudjuk, hogy $\sigma(t)$ kanonikus függvény, vagyis az (5.9) képlet szerint számítható ki, ahol $E(t)$ az A operátor egy $\mathfrak{H}$-beli önadjungált folytatásának, $\tilde{A}$-nak a spektrálfüggvénye.

Tekintsük az $\tilde{A}$ operátor R_λ rezolvensét:

$$R_\lambda = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1}.$$

Erre teljesül az

$$(R_\lambda 1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(t)1, 1)}{t-\lambda}$$

egyenlőség. Felhasználva a rezolvens

$$\text{(5.10)} \qquad 1.\ \ R_\lambda^* = R_{\bar{\lambda}},$$

$$2.\ \ R_\lambda = R_\mu + (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$$

tulajdonságait, kapjuk:

$$(R_\lambda 1, R_\lambda 1) = (R_{\bar{\lambda}} R_\lambda 1, 1) = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} [(R_\lambda 1, 1) - (R_{\bar{\lambda}} 1, 1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{|t-\lambda|^2}.$$

Továbbá bármilyen $P(t)$ polimonra

$$\text{(5.11)} \qquad (R_\lambda 1, P) = \big(R_\lambda 1, P(A)1\big) = \big(P(A) R_\lambda 1, 1\big) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{t-\lambda} d\big(E(t)1, 1\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{t-\lambda} d\sigma(t) \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0).$$

Innen már nehézség nélkül adódik, hogy

$$\|R_\lambda 1 - P\|^2 = (R_\lambda 1, R_\lambda 1) - (R_\lambda 1, P) - (P, R_\lambda 1) - (P, P) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{t-\lambda} - P(t) \right|^2 d\sigma(t) \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0).$$

Minthogy pedig az $R_\lambda 1$ $(\in \mathfrak{H})$ elem polinomok limesze a $\mathfrak{H}$ térben, azért $(t-\lambda)^{-1}$ polinomok limesze $\mathfrak{H}_\sigma$-ban, tehát $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma$.

5. Meg fogjuk mutatni, hogyan határozhatók meg analitikusan az összes $\sigma \in V$ kanonikus függvények abban az esetben, amikor a momentum probléma határozatlan (az A operátor defekt indexe $(1, 1)$).

Tekintsük az ún. másodfajú polinomokat (a D_k-hoz adjungált polinomokat); nevezetesen legyen

$$G_n(z) = \left(\frac{D_n(t) - D_n(z)}{t - z}, 1 \right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ilyen módon tetszés szerinti $\sigma \in V$ függvényre

$$(5.12)\qquad G_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_n(t)-D_n(z)}{t-z}\, d\sigma(t) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots; G_0 = 0).$$

Most legyen $\sigma(t)$ kanonikus függvény, amely az A operátor valamilyen $\mathfrak{H}$-beli $\tilde{A}$ önadjungált folytatásának felel meg. Ekkor az $R_\lambda = (\tilde{A}-\lambda I)^{-1}$ rezolvensre tetszés szerinti λ (Im $\lambda \neq 0$) esetén $R_\lambda 1 \in \mathfrak{H}$, és így

$$(5.13)\qquad (R_\lambda 1, R_\mu 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (R_\lambda 1, D_k)\, \overline{(R_\mu 1, D_k)} \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{Im}\lambda \neq 0, \\ \operatorname{Im}\mu \neq 0. \end{pmatrix}.$$

Az (5.11) összefüggés értelmében

$$(5.14)\qquad (R_\lambda 1, D_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_k(t)}{t-\lambda}\, d\sigma(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_k(t)-D_k(\lambda)}{t-\lambda}\, d\sigma + D_k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda} = G_k(\lambda) + w_\sigma(\lambda) D_k(\lambda) \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

ahol $w_\sigma(\lambda) = (R_\lambda 1, 1)$ a $\sigma(t)$ függvényre vonatkozó *Stieltjes*-integrál:

$$(5.15)\qquad w_\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}.$$

Másrészt (5.10) alapján

$$(R_\lambda 1, R_\mu 1) = (R_{\bar{\mu}} R_\lambda 1, 1) = \frac{1}{\lambda-\bar{\mu}} \left(w_\sigma(\lambda) - w_\sigma(\bar{\mu})\right).$$

Ennélfogva

$$(5.16)\qquad \frac{w_\sigma(\lambda)-w_\sigma(\bar{\mu})}{\lambda-\bar{\mu}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(G_k(\lambda)+w_\sigma(\lambda)D_k(\lambda)\right)\overline{\left(G_k(\mu)+w_\sigma(\mu)D_k(\mu)\right)}.$$

Ha itt a $\mu = \lambda$ helyettesítést alkalmazzuk, meggyőződhetünk arról, hogy kanonikus σ esetén $w_\sigma(\lambda)$ a w-síkban azon a körön helyezkedik el, amelynek az egyenlete

$$(5.17)\qquad \frac{w-\bar{w}}{\lambda-\bar{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} |G_k(\lambda) + w D_k(\lambda)|^2.$$

Megkaptuk annak a $\Gamma(\lambda)$ körnek az explicit egyenletét, amelyről a 2. pontban szó volt és amelynek az $r(\lambda)$ sugara az (5.7) képlet szerint számítható ki.

Az (5.17) összefüggésben w helyébe a $w_\sigma(\lambda)$ analitikus függvényt helyettesítve (σ kanonikus), a baloldalon a nem-valós λ változó folytonos függvényét kapjuk, és minthogy az (5.17) sor minden tagja pozitív, azért *Dini* tétele szerint az (5.17) sor egyenletesen konvergens bármely korlátos, zárt, a valós tengelyt nem metsző halmazon.

Ezek után tekintve az (5.17) egyenlőséget $w = w_{\sigma_k}(\lambda)$ $(k=1, 2)$ esetén, ahol $\sigma_1(t)$ és $\sigma_2(t)$ két különböző kanonikus függvény, azt kapjuk, hogy a mondott halmazokon a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(\lambda)|^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |G_k(\lambda)|^2 \tag{5.18}$$

sorok mindketten egyenletesen konvergensek.

De a D_k ortogonális polinomok és a G_k adjungált polinomok gyökei mindig valósak (lásd [2] vagy [16]), és ha egy $P(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$ polinom mindegyik α_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ gyöke valós, akkor a

$$|P(z)| = |a_0| \prod_{j=1}^{n} |z-\alpha_j|$$

mennyiség az $|y| = |\mathrm{Im}\, z|$ változónak nyilván növekedő függvénye. Ennélfogva az (5.18) sorok a sík bármelyik korlátos részhalmazán egyenletesen konvergensek.

Legyen λ_0 a felső félsík rögzített pontja $(\mathrm{Im}\, \lambda_0 > 0)$ és

$$w = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} \qquad (-\infty < \tau < \infty) \tag{5.19}$$

a $\Gamma(\lambda_0)$ kör paraméteres egyenlete úgy felírva, hogy amikor τ növekszik, akkor a w pont a $\Gamma(\lambda_0)$ kört az óramutató járásával ellentétes értelemben futja be.

Végezzük el az (5.16) egyenlőségben a $\mu = \bar{\lambda}_0$ helyettesítést és oldjuk meg az egyenletet $w_\sigma(\lambda)$-ra. Ekkor a következőt nyerjük:

$$w_\sigma(\lambda) = \frac{A(\lambda) + B(\lambda) w_\sigma(\lambda_0)}{C(\lambda) + D(\lambda) w_\sigma(\lambda_0)},$$

ahol

$$A(\lambda) = -(\lambda-\lambda_0) \sum_{0}^{\infty} G_k(\lambda_0) G_k(\lambda),$$

$$B(\lambda) = -1 + (\lambda-\lambda_0) \sum_{0}^{\infty} D_k(\lambda_0) G_k(\lambda),$$

$$C(\lambda) = -1 + (\lambda-\lambda_0) \sum_{0}^{\infty} G_k(\lambda_0) D_k(\lambda),$$

$$D(\lambda) = (\lambda-\lambda_0) \sum_{0}^{\infty} D_k(\lambda_0) D_k(\lambda).$$

Ha $w_\sigma(\lambda_0)$ helyébe beírjuk a megfelelő (5.19) értéket, akkor megkapjuk a $\Gamma(\lambda)$ kör paraméteres egyenletét:

$$w_\sigma(\lambda) = \frac{p_0(\lambda) + \tau p_1(\lambda)}{q_0(\lambda) + \tau q_1(\lambda)} \qquad (-\infty < \tau < \infty), \tag{5.20}$$

ahol

$$p_0(\lambda) = \delta A(\lambda)+\beta B(\lambda), \quad p_1(\lambda) = \gamma A(\lambda)+\alpha B(\lambda),$$

$$q_0(\lambda) = \delta C(\lambda)+\beta D(\lambda), \quad q_1(\lambda) = \gamma C(\lambda)+\alpha D(\lambda).$$

Folytonossági meggondolásokból következik, hogy τ növekedésekor a $w_\sigma(\lambda)$ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) pont a $\Gamma(\lambda)$ kört az óramutató járásával ellenkező értelemben futja be (mert $\lambda=\lambda_0$ esetén ez a helyzet). Ezek szerint rögzített λ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) mellett az (5.20) lineáris transzformáció a τ-sík felső felét a $\Gamma(\lambda_0)$ kör által határolt körlemezre képezi le.

Ilyen módon bebizonyítottuk, hogy *a $\sigma \in V$ kanonikus függvények halmaza egy-egyértelműen megfeleltethető a végtelen τ-tengelynek (beleértve a végtelen távoli pontot), miközben tetszés szerinti λ* ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) *mellett fennáll az* (5.20) *összefüggés.*

Minthogy $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ egész függvények, azért $p_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$ ($i=0, 1$) lineáris kombinációik is egész függvények, tehát kanonikus σ esetén $w_\sigma(\lambda)$ meromorf függvény. Ebből (5.15) figyelembevételével azt kapjuk, hogy σ tiszta ugrófüggvény, amelynek a szakadási helyei a $q_0(\lambda)+\tau q_1(\lambda)$ függvény gyökei. A $\sigma(\lambda)$ függvény ugrásait az (5.20) meromorf függvény reziduumai szolgáltatják.

Minthogy a vizsgált esetben $\mathfrak{H}_\sigma=\mathfrak{L}_\sigma=\mathfrak{H}$, és a σ függvényt generáló $\tilde{A}$ önadjungált folytatás megegyezik a t-vel való szorzás T operátorával $\mathfrak{L}_\sigma$-ban, σ ugráshelyei egyúttal $\tilde{A}$ spektrumát (sajátértékeit) adják.

Legyen ξ az $\tilde{A}$ operátor reguláris pontja (a σ függvény állandósági helye). Ekkor az $R_\lambda=(\tilde{A}-\lambda I)^{-1}$ rezolvens $\lambda=\xi$ esetén is létezik; az (5.10) és így az (5.16) összefüggésekben is lehet $\mu=\xi$. Ha ezekután az (5.16) egyenletet megoldjuk $w_\sigma(\lambda)$-ra és alkalmazzuk a $t=w_\sigma(\xi)$ jelölést, azt találjuk, hogy

$$w_\sigma(\lambda) = \frac{p_0(\lambda;\xi)+tp_1(\lambda;\xi)}{q_0(\lambda;\xi)+tq_1(\lambda;\xi)} \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{5.21}$$

ahol már

$$\left\{\begin{aligned} p_0(\lambda;\xi) &= -(\lambda-\xi)\sum_{k=1}^{\infty} G_k(\xi)G_k(\lambda),\\ p_1(\lambda;\xi) &= -1+(\lambda-\xi)\sum_{k=1}^{\infty} D_k(\xi)G_k(\lambda),\\ q_0(\lambda;\xi) &= -1+(\lambda-\xi)\sum_{k=1}^{\infty} G_k(\xi)D_k(\lambda),\\ q_1(\lambda;\xi) &= (\lambda-\xi)\sum_{k=1}^{\infty} D_k(\xi)D_k(\lambda). \end{aligned}\right. \tag{5.22}$$

Tehát minden $\sigma \in V$ kanonikus függvénynek, amelynek a ξ pontban nincs ugrása, megfelel egy valós t érték úgy, hogy tetszés szerinti λ mellett fennáll (5.21).

Most tegyük fel, hogy valamilyen $\sigma=\sigma_\xi(t)$ kanonikus függvénynek a ξ pontban ugrása van (ξ a megfelelő $\tilde{A}$ operátor sajátértéke).

Ekkor az (5.21) egyenlőség fennáll valamilyen $t=t'$ esetén, ha a ξ pontot egy elég közeli $\xi' \neq \xi$ ponttal helyettesítjük, amely nem tartozik $\tilde{A}$ spektrumához. Válaszszunk egy $\xi_n \to \xi$ ($\xi_n \neq \xi$) sorozatot, és tegyük fel, hogy $\sigma=\sigma_{\xi_n}$-re az (5.21) egyenlőség teljesül $\xi=\xi_n$ és $t=t_n$ ($n=1, 2, \ldots$) esetén. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $t_n \to t_0$, ahol t_0 a valós tengely végesben vagy végtelenben levő pontja. De ekkor behelyettesítve (5.21)-be a $\xi = \xi_n$, $t = t_n$ értékeket és kiszámítva a jobboldal határértékét azt találjuk, hogy (5.21) fennáll $\sigma = \sigma_\xi$-re, ha $t = t_0$.

Minthogy az adott esetben a $w_\sigma(\lambda)$ függvénynek a $\lambda = \xi$ helyen pólusa van, (5.21) és (5.22) alapján azt kapjuk, hogy $t_0 = \infty$, és így

$$w_{\sigma_\xi}(\lambda) = \frac{-1 + (\lambda - \xi) \sum_1^\infty D_k(\xi) G_k(\lambda)}{(\lambda - \xi) \sum_1^\infty D_k(\xi) D_k(\lambda)}. \tag{5.23}$$

Mivel a $\sigma \in V$ függvényt Stieltjes-integrálja, a $w_\sigma(\lambda)$ függvény egyértelműen meghatározza, azért ilyen módon bebizonyítottuk, hogy ha a ξ pontnak megfelel egy $\sigma_\xi \in V$ függvény, amelynek a $t = \xi$ helyen ugrása van, akkor csak egy ilyen függvény van és az (5.23) képletből nyerhető.

Minden más $\sigma \in V$ kanonikus függvényt az (5.21) képlet kell hogy értelmezzen a megfelelő $t = w_\sigma(\xi)$ érték mellett. Ezenkívül miközben σ befutja az összes $\sigma \in V$ kanonikus függvényeket, azalatt rögzített λ ($\operatorname{Im} \lambda \neq 0$) mellett a $w_\sigma(\lambda)$ pont befutja a teljes $\Gamma(\lambda)$ kört. Ebből következik, hogy minden valós t-nek, köztük a $t = \infty$ értéknek is, megfelel egy és csak egy $\sigma \in V$ kanonikus függvény, ez az (5.21) képletből határozható meg, és ilyen módon kimerítjük a kanonikus σ függvények V összességét.

Egyidejűleg azt is bebizonyítottuk, hogy tetszés szerinti ξ pontnak $(-\infty < \xi < \infty)$ *valóban megfelel egy* $\sigma_\xi \in V$ *kanonikus függvény.*

Az (5.21) összefüggésből kiszámítva a $w_{\sigma_\xi}(\lambda)$ függvénynek a $\lambda = \xi$ helyhez tartozó reziduumát, amely egyenlő a

$$\varrho(\xi) = \sigma_\xi(\xi + 0) - \sigma_\xi(\xi - 0)$$

ugrás (-1)-szeresével, nyerjük:

$$\varrho(\xi) = \left(\sum_0^\infty D_k^2(\xi) \right)^{-1}.$$

Most megmutatjuk, hogy bármely más $\sigma \in V$ függvényre

$$\sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0) \leqq \varrho(\xi). \tag{5.24}$$

Csakugyan, tetszés szerinti P valós polinomra

$$P^2(\xi) \big(\sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0) \big) \leqq \int_{-\infty}^{\infty} P^2(t) \, d\sigma(t).$$

Alkalmazva a

$$P(t) = P_n(t) = \sum_{k=0}^n D_k(\xi) D_k(t) \Big/ \sum_{k=0}^n D_k^2(\xi) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

helyettesítést, kapjuk:

$$\sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0) \leqq \left(\sum_{k=0}^n D_k^2(\xi) \right)^{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

és ebből adódik (5.24).

Különösebb nehézség nélkül bebizonyítható, hogy az (5.24) összefüggésben egyenlőség csak $\sigma=\sigma_\xi$ esetén következik be.

6. Most már nem nehéz leírni, hogyan kaphatók meg az összes $\sigma\in V$ függvények.

Amint a 3. pontból tudjuk, tetszés szerinti $\sigma\in V$ függvény az (5.9) képlet szerint nyerhető, ahol $E(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ az A operátor valamilyen $\mathfrak{L}_\sigma\supset\mathfrak{H}$ térbe kilépő $T=\tilde{A}$ önadjungált folytatásának a spektrálfüggvénye.

Ha képezzük a megfelelő $R_\lambda=(\tilde{A}-\lambda I)^{-1}$ $(\operatorname{Im}\lambda\neq 0)$ rezolvenst, akkor már nem állíthatjuk, hogy $R_\lambda 1\in\mathfrak{H}$. Ezért most a $w_\sigma(\lambda)$ függvényre az (5.13) egyenlőség helyett a

$$\frac{w_\sigma(\lambda)-\overline{w_\sigma(\lambda)}}{\lambda-\bar{\lambda}} = (R_\lambda 1, R_\lambda 1) \geqq \sum_{k=0}^{\infty} |(R_\lambda 1, D_k)|^2$$

Bessel-féle egyenlőtlenség érvényes.

Az (5.14) összefüggés alapján azt kapjuk, hogy a $w=w_\sigma(\lambda)$ függvény eleget tesz a

$$\frac{w-\bar{w}}{\lambda-\bar{\lambda}} \geqq \sum_{k=0}^{\infty} |G_k(\lambda)+wD_k(\lambda)|^2 \tag{5.25}$$

egyenlőtlenségnek. De ez az egyenlőtlenség a $\Gamma(\lambda)$ által határolt körlemezt[3] jellemzi.

Ennélfogva tetszés szerinti λ esetén $(\operatorname{Im}\lambda>0)$ a $w_\sigma(\lambda)$ pont a $\Gamma(\lambda)$ kör által határolt $K(\lambda)$ körlemezen helyezkedik el.

Minthogy a t változónak az (5.20) egyenlőség jobboldalán álló lineáris tört függvénye a felső félsíkot a $K(\lambda)$ körlemezre képezi le, azért e körlemez $w_\sigma(\lambda)$ pontjának megfelel a felső félsíknak az a $\tau(\lambda)$ pontja, amelyre

$$w_\sigma(\lambda) = \frac{p_0(\lambda)+\tau(\lambda)\,p_1(\lambda)}{q_0(\lambda)+\tau(\lambda)\,q_1(\lambda)} \qquad (\operatorname{Im}\lambda>0). \tag{5.26}$$

Ha megoldjuk ezt az egyenletet $\tau(\lambda)$-ra, azt kapjuk, hogy $\tau(\lambda)$, ugyanúgy mint a $p_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$ $(i=0, 1)$, $w_\sigma(\lambda)$ függvények, a felső félsíkon holomorf, és fennáll

$$\operatorname{Im}\tau(\lambda) \geqq 0 \quad (\operatorname{Im}\lambda>0). \tag{5.27}$$

Ezzel bebizonyítottuk R. NEVANLINNA [10a] állításának az első részét.

Ezen állítás értelmében megfordítva is, *minden olyan holomorf* $\tau(\lambda)$ *függvénynek, amelynek a képzetes része nem-negatív, az* (5.26) *képlet szerint megfelel az* (5.1) *momentum probléma valamilyen* σ *megoldásának a Stieltjes-integrálja,* $w_\sigma(\lambda)$.

Most megjegyezzük, hogy ha egy λ_0 $(\operatorname{Im}\lambda_0>0)$ érték mellett a $w_\sigma(\lambda_0)$ pont a $\Gamma(\lambda_0)$ körre esik, akkor ez azt jelenti, hogy $\operatorname{Im}\tau(\lambda_0)=0$, mivel pedig egy harmonikus függvény csak akkor veszi fel minimumát a tartomány belsejében, ha állandó, azért $\tau(\lambda)$ azonosan egyenlő egy valós konstanssal, tehát ebben az esetben a $w_\sigma(\lambda)$ pont tetszés szerinti λ $(\operatorname{Im}\lambda>0)$ esetén a $\Gamma(\lambda)$ körön fekszik és a σ függvény kanonikus.

R. NEVANLINNA eredménye a momentum probléma kimerítő megoldását adja, azét a problémáét, amely szerint meghatározandók mindazok a nem-fogyó σ függvények, amelyeknek a momentumai előre megadott s_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ értékek.

[3] És nem a kör külsejét, mert ha w abszolút értéke elég nagy, akkor (5.25) jobboldala nagyobb, mint a bal oldal.

Nagyon kevés hiányzik ahhoz, hogy teljesen megkapjuk NEVANLINNA eredményét; azonban fel kellene használni bizonyos komplex függvénytani módszereket, amit itt nem kívánunk megtenni.

Egyébként NEVANLINNA eredménye és a momentum probléma összes többi itt ismertetett állítása igen speciális következményként adódik azokból az új vizsgálatokból, amelyeket M. G. KREJN ([6]a—d), M. A. LIVSIC [8] és M. A. NAJMARK [9d] folytatott az (1, 1) defekt indexű hermitikus operátorok elmélete és az általánosított momentum probléma területén.

A momentum probléma számos tételének egy másik tárgyalásával ismerkedhet meg az olvasó N. AHIJEZER [1a] cikkéből, amely ebben a folyóiratban jelent meg. Itt megtalálható annak a jelentős elégséges feltételnek a bizonyítása, amelyet CARLEMAN a momentum probléma határozottságára adott és úgy hangzik, hogy a momentum probléma határozott, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{s_{2n}}} = \infty.$$

6. §. Korlátos hermitikus operátorok normatartó folytatásai

Ebben és a két következő paragrafusban egy A korlátos hermitikus operátor $\tilde{A}$ önadjungált folytatásaival fogunk foglalkozni.

IV. TÉTEL. *Bármely $\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{H}$ altéren értelmezett A korlátos hermitikus operátornak van legalább egy $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelynek a normája ugyanannyi, mint A-nak.*

Bizonyítás. Minthogy az A korlátos hermitikus operátor mindegyik $\tilde{A}$ önadjungált folytatását megkaphatjuk úgy, hogy a $B=A/\|A\|$ ($\|B\|=1$) operátor valamelyik folytatását megszorozzuk $\|A\|$-val, azért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\|A\|=1$.

Tetszés szerinti $f\in\mathfrak{H}$, $g\in\mathfrak{D}(A)$ elemekre

$$|(Ag,f)| \leqq \|A\|\cdot|g|\cdot|f| = |g|\cdot|f|.$$

Ebből következik, hogy (Ag,f) folytonos lineáris funkcionál a $\mathfrak{D}(A)$ téren. RIESZ FRIGYES lemmája szerint minden $f\in\mathfrak{H}$ elemnek egyértelműen megfelel egy $h\in\mathfrak{D}(A)$ elem, amelyre $(Ag,f)=(g,h)$ $(g\in\mathfrak{D}(A))$.

Értelmezzünk egy A^0 operátort a

$$h = A^0 f \qquad (f\in\mathfrak{H},\ h\in\mathfrak{D}(A))$$

képlettel. A^0 lineáris, és

$$|A^0 f|^2 = (A^0 f, A^0 f) = (AA^0 f, f) \leqq |A^0 f|\cdot|f|$$

miatt $|A^0 f|\leqq|f|$ minden $f\in\mathfrak{H}$ elemre. Jelöljük P-vel a $\mathfrak{D}(A)$-ra való merőleges vetítés operátorát; ekkor

$$(A^0 g, h) = (g, Ah) = (Ag, h) = (PAg, h) \qquad (g, h\in\mathfrak{D}(A))$$

és

$$A^0 g = PAg \quad (g\in\mathfrak{D}(A)). \tag{6.1}$$

Vezessük be $\mathfrak{H}$-ban a

$$(g,f)_1 = (g,f)-(A^0g, A^0f) \qquad (g,f\in\mathfrak{H})$$

új „skaláris" szorzatot. A megfelelő „normát" az

$$|f|_1^2 = |f|^2-|A^0f|^2$$

képlet definiálja.

Az új „skaláris" szorzat eleget tesz a skaláris szorzattól megkívánt összes követelménynek, kivéve esetleg azt, hogy $|f|_1=0$ esetén $f=0$. Azt fogjuk mondani, hogy a $g, f\in\mathfrak{H}$ elemek *ekvivalensek* (felírva: $g\sim f$), ha $|g-f|_1=0$. Osszuk fel a $\mathfrak{H}$ teret ekvivalencia-osztályokra; az ekvivalencia-reláció tranzitivitása (ha $g\sim f$ és $f\sim h$, akkor $g\sim h$) miatt, ami viszont a

$$|g-h|_1 \leqq |g-f|_1+|f-h|_1$$

egyenlőtlenségből következik, ez lehetséges. A $g\in\mathfrak{H}$ elemmel ekvivalens elemek osztályát a $\hat{g}$ jellel fogjuk jelölni (az osztálynak természetesen sokféle jelölése lehet). Könnyű megmutatni, hogy az ekvivalens elemek osztályaiból álló halmaz, általában, nemteljes *Hilbert*-térré válik, ha benne a $\lambda\hat{g}+\mu\hat{f}=\hat{h}$ $(h=\lambda g+\mu f)$ definíciót vezetjük be és a

$$(\hat{g},\hat{f}) = (g,f)_1$$

képlet segítségével skaláris szorzatot értelmezünk.

Megjegyezzük, hogy ekkor $|\hat{g}|=|g|_1$. Legyen $\hat{\mathfrak{H}}$ az összes ekvivalencia-osztályok halmazának a most bevezetett metrikában képezett lezárása. A $g\in\mathfrak{D}(A)$ elemekhez tartozó $\hat{g}$ osztályok halmazának a lezárása egy $\hat{\mathfrak{D}}\subset\hat{\mathfrak{H}}$ altér.

A $\mathfrak{D}(A)$ altéren értelmezve van a $B=A-A^0$ operátor, és (6.1) miatt $Bg\in\mathfrak{N}$ $(g\in\mathfrak{D}(A))$, ahol

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}(A).$$

Minthogy $|Bg|^2=|Ag|^2-|A^0g|^2\leqq|g|^2-|A^0g|^2$, azért

$$|Bg| \leqq |g|_1 \quad (g\in\mathfrak{D}(A)). \tag{6.2}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség értelmében a $g\sim h$ $(g, h\in\mathfrak{D}(A))$ összefüggésből következik, hogy $Bg=Bh$. Ez lehetővé teszi, hogy $\hat{\mathfrak{D}}$-nak egy sűrű részhalmazán egy B' operátort értelmezzünk a

$$B'\hat{g} = Bg \quad (g\in\mathfrak{D}(A),\ B'\hat{g}\in\hat{\mathfrak{N}})$$

képlet útján. Ekkor a (6.2) egyenlőtlenség az alábbiba megy át:

$$|B'\hat{g}| \leqq |\hat{g}| \quad (g\in\mathfrak{D}(A)). \tag{6.3}$$

A (6.3) összefüggésből következik, hogy a

$$B'\hat{g}_n = Bg_n \quad (g_n\in\mathfrak{D}(A),\ n = 1, 2, \ldots)$$

sorozat a $\mathfrak{H}$ térben tart az $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{H}$ altér valamelyik eleméhez, ha a $\hat{g}_n$ sorozat a $\hat{\mathfrak{H}}$ térben a $\hat{\mathfrak{D}}$ altér egy eleméhez tart. A B' operátort lezárva egy $\hat{B}$ operátort kapunk, amely az egész $\hat{\mathfrak{D}}\,(\subset\hat{\mathfrak{H}})$ altéren van értelmezve, értékei az $\hat{\mathfrak{N}}(\subset\hat{\mathfrak{H}})$ altérhez tartoznak, és (6.3) szerint fennáll

$$|\hat{B}\hat{g}| \leqq |\hat{g}| \quad (\hat{g}\in\hat{\mathfrak{D}}). \tag{6.4}$$

Legyen $\hat{P}$ a $\hat{\mathfrak{D}}$ altérre való merőleges vetítés operátora a $\hat{\mathfrak{H}}$ térben. Értelmezzünk az egész $\mathfrak{H}$ téren egy operátort a

$$B^0 f = \hat{B}\hat{P}\hat{f} \qquad (f\in\mathfrak{H})$$

képlettel. Ekkor (6.4) alapján

$$|B^0 f| = |\hat{B}\hat{P}\hat{f}| \leqq |\hat{P}\hat{f}| \leqq |\hat{f}| = |f|_1,$$

vagyis

$$|B^0 f|^2 \leqq |f|^2 - |A^0 f|^2 \qquad (f\in\mathfrak{H}). \tag{6.5}$$

Tekintsük az $A_1 = A^0 + B^0$ operátort. A (6.5) egyenlőtlenségből következik, hogy $\|A_1\| \leqq 1$, tehát $\|A_1^*\| \leqq 1$.

Minthogy $g\in\mathfrak{D}(A)$ esetén $\hat{P}\hat{g}=\hat{g}$, azért $B^0 g = Bg$ $(g\in\mathfrak{D}(A))$, és a B operátor definíciójából következik, hogy

$$A_1 g = Ag \qquad (g\in\mathfrak{D}(A)).$$

Minden $f\in\mathfrak{H}$, $g\in\mathfrak{D}(A)$ elempárra

$$(A_1^* g, f) = (g, A_1 f) = (g, A^0 f + B^0 f).$$

De $B^0 f\in\mathfrak{N}$ és $(g, B^0 f)=0$, azaz

$$(A_1^* g, f) = (g, A^0 f) = (Ag, f)$$

és így

$$A_1^* g = Ag \qquad (g\in\mathfrak{D}(A)).$$

Ily módon megmutattuk, hogy A_1 és A_1^* az A operátor normatartó folytatása. Ennélfogva az

$$\tilde{A} = \frac{A_1 + A_1^*}{2}$$

önadjungált operátor is A folytatása és $\|\tilde{A}\| = 1$.

A tételt bebizonyítottuk.

7. §. Az A_μ, A_M extremális operátorok

1. A H hermitikus operátort *pozitívnak* mondjuk $(H>0)$, ha $(Hf, f)\geqq 0$ $(f\in\mathfrak{D}(H))$ és legalább egy $g\in\mathfrak{D}(H)$ elemre $(Hg, g)>0$. Korlátos önadjungált pozitív H operátorhoz található egy és csak egy pozitív operátor, amelynek a négyzete H-val egyenlő; ennek a jele a továbbiakban $H^{1/2}$ lesz.

Ha H spektrális felbontása

$$H = \int_0^l t\,dE(t),$$

akkor

$$H^{\frac{1}{2}} = \int_0^l t^{\frac{1}{2}}\,dE(t).$$

Legyen S és T két korlátos önadjungált operátor. Azt fogjuk mondani, hogy S nagyobb mint T (jelben: $S > T$), ha $S-T$ pozitív operátor.

Legyen A korlátos hermitikus operátor, amelyre $\|A\| \leqq 1$ és amelynek az értelmezési tartománya egy $\mathfrak{D}(A) \neq \mathfrak{H}$ zárt lineáris halmaz.

Jelöljük $\mathfrak{B}(A)$-val az A operátor 1-nél nem nagyobb normájú önadjungált folytatásainak az összességét.

A $\mathfrak{B}(A)$ halmaz nem üres, ugyanis hozzá tartoznak például az A operátornak a IV. tétel értelmében létező változatlan normájú önadjungált folytatásai.

Az A operátor két tetszés szerinti önadjungált folytatásának a C különbsége olyan önadjungált operátor, amely a $\mathfrak{D}(A)$ altéren nullával egyenlő. A C operátor értékei a $\mathfrak{D}(A)$ altér ortogonális komplementumába, $\mathfrak{N}$-be esnek, mert $(Cg, f) = 0$ $(g \in \mathfrak{D}(A), f \in \mathfrak{H})$ miatt $(g, Cf) = 0$, vagyis $Cf \in \mathfrak{N}$.

Ezek szerint ha a $\mathfrak{B}(A)$ összességhez tartozó egyik operátor $\tilde{A}$, akkor minden $\mathfrak{B}(A)$-beli operátor $\tilde{A} + C$ alakú, ahol a C operátor csak $\mathfrak{N}$-beli értékeket vesz fel és eleget tesz az

$$|(\tilde{A}f + Cf, f)| \leqq (f, f) \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

feltételnek, amely ekvivalens azzal, hogy

$$-((I+\tilde{A})f, f) \leqq (Cf, f) \leqq ((I-\tilde{A})f, f) \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

vagy másképpen

$$-(I+\tilde{A}) \leqq C \leqq I - \tilde{A}. \tag{7.1}$$

Megjegyezzük, hogy az $I-\tilde{A}$, $I+\tilde{A}$ operátorok pozitívok.

2. Ahhoz, hogy tisztázzuk a (7.1) feltételnek eleget tevő C operátorok természetét, szükségünk lesz az alábbi lemmára.

7.1. LEMMA. *Legyen $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{H}$ tér zárt altere, H pedig egy pozitív operátor. Ekkor a*

$$C \leqq H, \quad \mathfrak{R}(C) \subset \mathfrak{N}$$

feltételeket teljesítő C önadjungált operátorok $\mathfrak{M}$ halmazában mindig található maximális $H_{\mathfrak{N}}$ operátor (vagyis olyan operátor, amely a halmazba tartozó bármely másik C operátornál nagyobb).

Bizonyítás[4]. Az $\mathfrak{M}$ halmaz nem üres, mert hozzá tartoznak például a $0, -P_{\mathfrak{N}}$ operátorok ($P_{\mathfrak{N}}$ az $\mathfrak{N}$-re való merőleges vetítés operátora).

[4] Az itt következő bizonyítás egyszerűbb, mint M. G. KREJN eredeti bizonyítása; szerzője I. M. GELFAND.

Az $\mathfrak{N}$ altér $\mathfrak{H}$-ra vonatkozó ortogonális komplementumát $\mathfrak{D}$-vel fogjuk jelölni. Ekkor $Cg=0$ $(g\in\mathfrak{D})$ és $(Cf, g)=0$ $(f\in\mathfrak{H}, g\in\mathfrak{D})$, tehát

$$(Cf,f) = \big(C(f-g),f-g\big).$$

A C operátor nem nagyobb, mint H, ezért

$$(Cf,f) \leqq \big(H(f-g),f-g\big) = |H^{1/2}(f-g)|^2 \qquad (f\in\mathfrak{H}, g\in\mathfrak{D})$$

és

$$(Cf,f) \leqq \inf_{g\in\mathfrak{D}} |H^{1/2}f-H^{1/2}g|^2. \tag{7.2}$$

Legyen $\mathfrak{L}$ azoknak a h elemeknek a halmaza, amelyek ortogonálisak a $H^{1/2}\mathfrak{D}$ halmazra, $P_{\mathfrak{L}}$ pedig az $\mathfrak{L}$ altérre való merőleges vetítés operátora. A (7.2) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(Cf,f) \leqq |P_{\mathfrak{L}}H^{1/2}f|^2 = (H^{1/2}P_{\mathfrak{L}}H^{1/2}f,f) \qquad (f\in\mathfrak{H}). \tag{7.3}$$

De $h\in\mathfrak{L}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(h, H^{1/2}g)=0$ $(g\in\mathfrak{D})$, vagyis $(H^{1/2}h, g)=0$, és így $H^{1/2}h\in\mathfrak{N}$.

Ezek szerint a

$$H_{\mathfrak{N}} = H^{1/2}P_{\mathfrak{L}}H^{1/2} \tag{7.4}$$

operátor benne van az $\mathfrak{M}$ halmazban és azonos a keresett maximális operátorral.

3. Visszatérve a (7.1) összefüggésekhez azt látjuk, hogy

$$-(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}} \leqq C \leqq (I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}} \quad \big(\mathfrak{N} = \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}(A)\big), \tag{7.5}$$

és hogy A minden olyan önadjungált folytatása, amely a $\mathfrak{B}(A)$ összességhez tartozik, egy A_μ *minimális* és egy A_M *maximális* folytatás közé esik, ahol

$$\begin{cases} A_\mu = \tilde{A}-(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}}, \\ A_M = \tilde{A}+(I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}}. \end{cases} \tag{7.6}$$

V. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az A_1 önadjungált operátor a $\mathfrak{B}(A)$ halmazhoz tartozzék, szükséges és elégséges, hogy teljesüljön az*

$$A_\mu \leqq A_1 \leqq A_M \tag{7.7}$$

feltétel.

Bizonyítás. Hogy a (7.7) feltétel szükséges, azt már bebizonyítottuk. Be fogjuk bizonyítani, hogy elégséges is.

A (7.7) egyenlőtlenségekből következik, hogy $\|A_1\|\leqq\max(\|A_\mu\|, \|A_M\|)\leqq 1$, és hogy az A_1-A_μ pozitív operátor nem nagyobb, mint A_M-A_μ. Így

$$0 \leqq \big((A_1-A_\mu)g, g\big) \leqq \big((A_M-A_\mu)g, g\big) = 0 \qquad \big(g\in\mathfrak{D}(A)\big),$$

tehát

$$\big((A_1-A_\mu)g, g\big) = |(A_1-A_\mu)^{1/2}g|^2 = 0,$$

vagyis

$$A_1 g = A_\mu g = Ag \quad \big(g\in\mathfrak{D}(A)\big).$$

A tételt bebizonyítottuk.

8. §. Az $\tilde{A}\in\mathfrak{B}(A)$ folytatás egyértelműségének kritériuma

1. Állapítsuk meg annak a feltételét, hogy az A korlátos hermitikus operátornak egyetlen olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása legyen, amelynek a normája $\leqq 1$.

Az előbbi paragrafusban a C operátorra (két $\mathfrak{B}(A)$-beli önadjungált folytatás különbségére) nyert (7.5)

$$-(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}} \leqq C \leqq (I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}}$$

egyenlőtlenségekből közvetlenül következik, hogy *az A korlátos hermitikus operátor valamelyik $\tilde{A}$ önadjungált folytatása akkor és csak akkor egyetlen olyan önadjungált folytatása A-nak, amelynek a normája $\leqq 1$, ha*

$$(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}} = (I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}} = 0. \tag{8.1}$$

2. A (8.1) feltételek tartalmának a tisztázása céljából bebizonyítunk két lemmát.

8.1. LEMMA. $H_{\mathfrak{N}}=0$ *akkor és csak akkor, ha*

$$\mathfrak{N}\cap\Re(H^{1/2}) = 0. \tag{8.2}$$

Valóban, (7.4) alapján $\Re(H_{\mathfrak{N}})\subset\Re(H^{1/2})$. Minthogy továbbá a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor definíciója szerint

$$\Re(H_{\mathfrak{N}})\subset\mathfrak{N},$$

azért

$$\Re(H_{\mathfrak{N}})\subset H^{1/2}\mathfrak{L}.$$

Ennélfogva a (8.2) összefüggésből következik, hogy $H_{\mathfrak{N}}=0$. Megfordítva, ha $H_{\mathfrak{N}}=0$, akkor

$$(H_{\mathfrak{N}}f,f) = (H^{1/2}P_{\mathfrak{L}}H^{1/2}f,f) = 0 \qquad (f\in\mathfrak{H}),$$

tehát $|P_{\mathfrak{L}}H^{1/2}f|=0$ $(f\in\mathfrak{H})$. Ezért az $\mathfrak{L}$ altér merőleges a $H^{1/2}$ operátor értékkészletére, és így benne van $H^{1/2}$ zérus-alterében.

Legyen

$$H = \int_0^\infty t\,dE(t) \quad \text{és} \quad H^{1/2} = \int_0^\infty t^{1/2}dE(t)$$

a H, ill. a $H^{1/2}$ operátor spektrális felbontása.

Nyilvánvaló, hogy $f\in\Re(H^{1/2})$ akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\int_0^\infty \frac{d(E(t)f,f)}{t} < \infty.$$

Következésképpen a 8.1. lemmából közvetlenül adódik az alábbi.

8.2. LEMMA. *Ahhoz, hogy* $H_{\mathfrak{N}}=0$ *legyen, szükséges és elégséges, hogy minden* $h\in\mathfrak{N}$ *elemre teljesüljön az*

$$\int_0^\infty \frac{d(E(t)h,h)}{t} = \infty \tag{8.3}$$

feltétel.

3. Ha a (8.1) feltételeket a 8.2. lemmának megfelelően interpretáljuk, akkor a következő tételhez jutunk.

VI. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az A hermitikus operátor $\tilde{A}$ önadjungált folytatása* ($\|\tilde{A}\| \leqq 1$) *A egyetlen olyan önadjungált folytatása legyen, amelynek a normája* $\leqq 1$, *szükséges és elégséges, hogy minden $h \in \mathfrak{N}$ elemre teljesüljenek az*

$$\int_{-1}^{1} \frac{d(F(t)h, h)}{1+t} = \infty, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{d(F(t)h, h)}{1-t} = \infty \tag{8.4}$$

feltételek, ahol $F(t)$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ az $\tilde{A}$ operátor spektrálfüggvénye.

A 8.2. lemma bizonyítása során végzett megfontolások alapján világos, hogy a (8.4) alatt szereplő első, ill. második feltétel külön-külön szükséges és elégséges ahhoz, hogy az adott $\tilde{A}$ folytatás megegyezzék az A_μ minimális, ill. az A_M maximális folytatással.

4. Érdeklődésre tarthatnak számot olyan kritériumok, amelyek segítségével magáról az A korlátos hermitikus operátorról (az $\tilde{A}$ folytatás ismerete nélkül) eldönthető, hogy változatlan normájú önadjungált folytatása egyértelmű-e. Megelégszünk azzal, hogy bizonyítás nélkül idézzük a következő feltételt (lásd [6i], 6. tétel).

VII. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az A korlátos hermitikus operátornak egyetlen olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása legyen, amelynek a normája* $\leqq 1$, *szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti $h \in \mathfrak{N}$ elemre* $(\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(A))$ *teljesüljön a*

$$\sup_{g \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|(Ag, h)|^2}{|g|^2 - |Ag|^2} = \infty$$

feltétel.

8.1. *példa.* Az operátoros momentum probléma véges intervallumban.

Legyen $\mathfrak{E}$ *Hilbert*-tér, amelyben két elem, x és y skaláris szorzatának a jele $[x, y]$. Tegyük fel, hogy a (véges vagy végtelen) (a, b) zárt intervallumhoz tartozó mindegyik t értéknek megfelel egy az $\mathfrak{E}$ térben ható $F(t)$ korlátos önadjungált operátor. Azt fogjuk mondani, hogy $F(t)$ *nem-csökkenő operátorfüggvény*, ha

$$F(t_1) \leqq F(t_2) \quad (t_1 < t_2; \quad t_1, t_2 \in (a, b)).$$

Nem-csökkenő $F(t)$ operátorfüggvényre mindig léteznek az $F(t-0)$, $F(t+0)$ limesz-operátorok abban az értelemben, hogy tetszés szerinti $x \in \mathfrak{E}$ elemre

$$F(t-0)x = \lim_{\tau \uparrow t} F(\tau)x, \qquad F(t+0)x = \lim_{\tau \downarrow t} F(\tau)x.$$

A következőkben

$$J = \int_a^b \varphi(t)\, dF(t) \tag{8.5}$$

alakú integrálokat fogunk vizsgálni, ahol $\varphi(t)$ az (a, b) számközben folytonos függvény. Ezért nem jelent majd megszorítást, ha feltesszük, hogy

$$F(a) = 0 \quad \text{és} \quad F(t) = F(t-0) \qquad (a < t < b).$$

Az (a, b) számközben folytonos $\varphi(t)$ függvény esetén tetszés szerinti $x \in \mathfrak{E}$ elemre az

$$(8.6) \qquad \int_a^b \varphi(t)\, dF(t)x$$

integrál erősen konvergens $\mathfrak{E}$-ben. A (8.5) egyenlőségen azt értjük, hogy bármelyik $x \in \mathfrak{E}$ elemre Jx egyenlő a (8.6) kifejezéssel. A J operátor korlátos. A (8.6) integrál konvergenciája és az $F(t)$ függvény említett tulajdonságai M. A. NAJMARK egyik általános tételéből ([9]a, b) adódnak.

Az az olvasó, aki nem ismeri ezeket a munkákat, értelmezze a (8.5) egyenlőséget úgy, hogy tetszés szerinti $x, y \in \mathfrak{E}$ elemekre

$$[Jx, y] = \int_a^b \varphi(t)\, d[F(t)x, y].$$

D. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy korlátos önadjungált operátorokból álló* $S_0, S_1, \ldots, S_{2n}$ *sorozat előállítható legyen*

$$(8.7) \qquad S_k = \int_{-1}^{1} t^k dF(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n)$$

alakban, szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti $x_i \in \mathfrak{E}$ $(i=0, 1, \ldots, 2n)$ *elemekre teljesüljenek a következő feltételek:*

I. $\sum_{j,k=0}^{n-1} [S_{j+k}x_j, x_k] \geqq 0,$

II. $\sum_{j,k=0}^{n-1} [(S_{j+k} - S_{j+k+2})x_j, x_k] \geqq 0.$

Bizonyítás. A (8.7) összefüggésből

$$\sum_{j,k=0}^{n} [S_{j+k}x_j, x_k] = \int_{-1}^{1} \sum_{j,k=0}^{n} t^{j+k} d[F(t)x_j, x_k] = \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N} [\Delta_\nu F(t) y_\nu, y_\nu],$$

ahol

$$\Delta_\nu F(t) = F(t_\nu) - F(t_{\nu-1}), \qquad y_\nu = \sum_{j=0}^{n} t_\nu^j x_j,$$

$$t_\nu = -1 + \frac{2\nu}{N} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N).$$

Innen adódik az I. feltétel szükségessége.

A II. feltétel szükségessége az analóg

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} [(S_{j+k} - S_{j+k+2})x_j, x_k] = \lim_{N\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N} (1 - t_\nu^2)[\Delta_\nu F(t) y_\nu, y_\nu]$$

egyenlőségből következik.

Be fogjuk bizonyítani, hogy az I., II. feltételek elégségesek is. Tekintsük azt a $\mathfrak{P}$ lineáris halmazt, amely a

$$P(t) = \sum_{j=0}^{n} t^j x_j \qquad (x_j \in \mathfrak{E};\quad j = 0, 1, \ldots, n)$$

alakú $P(t)$ „polinomokból" áll. Definiáljunk a $\mathfrak{P}$ halmazon egy (P, Q) hermitikus bilineáris funkcionált a

$$(P, Q) = \sum_{j,k=0}^{n} [S_{j+k} x_j, y_k] \qquad \left(Q(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k y_k;\quad y_k \in \mathfrak{E}\right)$$

egyenlőség segítségével. Az I. feltétel alapján

$$(P, P) \geqq 0 \quad \big(P(t) \in \mathfrak{P}\big).$$

Először tegyük fel, hogy az I. forma nem elfajuló, azaz ha $P(t) \not\equiv 0$ (nem mindegyik x_j „együttható" nulla), akkor $(P, P) > 0$.

Ebben az esetben a (P, Q) bilineáris funkcionál tekinthető skaláris szorzatnak $\mathfrak{P}$-ben. Ha a $\mathfrak{P}$ halmazt erre a skaláris szorzatra nézve lezárjuk, akkor valamilyen $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-teret kapunk.

Jelöljük $\mathfrak{D}$-vel azoknak a $Q \in \mathfrak{P}$ polinomoknak az összességét, amelyek legfeljebb $(n-1)$-edfokúak:

$$Q(t) = \sum_{j=0}^{n-1} t^j y_j \qquad (y_j \in \mathfrak{E}).$$

A $\mathfrak{D}$ halmazon értelmezzünk egy A operátort az

$$AQ(t) = tQ(t) = \sum_{j=0}^{n-1} t^{j+1} y_j$$

egyenlőség segítségével.

Minthogy tetszés szerinti $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{D}$ esetén

$$(tQ_1, Q_2) = (Q_1, tQ_2),$$

azért az A operátor hermitikus.

Ezenkívül a II. feltétel értelmében

$$(8.8) \qquad (AQ, AQ) = (tQ, tQ) \leqq (Q, Q) \qquad (Q \in \mathfrak{D}).$$

Ily módon az A operátor normája legfeljebb 1: $\|A\| \leqq 1$.

A IV. tétel szerint A-nak van 1-nél nem nagyobb normájú $\tilde{A}$ önadjungált folytatása.

Legyen $\tilde{A}$ spektrálfüggvénye $E(t)$:

$$\tilde{A} = \int_{-1}^{1} t\, dE(t).$$

Ekkor tetszés szerinti $x, y \in \mathfrak{E}$ elemekre fennáll

$$[S_{j+k}x, y] = (t^j x, t^k y) = (\tilde{A}^j x, \tilde{A}^k y) = (\tilde{A}^{j+k}x, y) = \tag{8.9}$$

$$= \int_{-1}^{1} t^{j+k} d(E(t)x, y) \qquad (j+k = 0,1, \ldots, 2n).$$

Megjegyezzük, hogy az $E(t)$ operátorok a $\mathfrak{H}$ térben hatnak és nem $\mathfrak{E}$-ben; ennek ellenére $(E(t)x, y)$ hermitikus bilineáris funkcionál $\mathfrak{E}$-ben, és az

$$|(E(t)x, x)| \leqq (x, x) = [S_0 x, x] \leqq \|S_0\| \, [x, x]$$

egyenlőtlenségek miatt folytonos is. RIESZ tétele szerint ennek a funkcionálnak megfelel egy az $\mathfrak{E}$ térben ható $F(t)$ korlátos önadjungált operátor úgy, hogy

$$(E(t)x, y) = [F(t)x, y] \qquad (x, y \in \mathfrak{E}). \tag{8.10}$$

Minthogy tetszés szerinti $x \in \mathfrak{E}$ mellett az $(E(t)x, x)$ függvény nem-csökkenő, azért $F(t)$ nem-csökkenő operátorfüggvény.

A (8.9), (8.10) összefüggésekből következik (8.7), így arra az esetre, amikor az I. forma pozitív, a tételt bebizonyítottuk.

Abban az esetben, amikor az I. forma elfajuló, két $P, Q \in \mathfrak{P}$ polinomot ekvivalensnek fogunk tekinteni, ha

$$(P-Q, P-Q) = 0.$$

A (8.8) képlet értelmében az A operátor ekvivalens polinomokat ekvivalensekbe visz át. Ezek szerint az ekvivalens polinomokat egymással azonosítva a vizsgált eset könnyen visszavezethető az előbbire (lásd az 5. §-t).

A tételt bebizonyítottuk.

Abban az esetben, amikor az $\mathfrak{E}$ tér egydimenziós, a D tétel a hatványokra vonatkozó véges momentum probléma megoldását szolgáltatja:

Ahhoz, hogy az s_k $(k=0, 1, \ldots, 2n)$ számsorozat előállítható legyen

$$s_k = \int_{-1}^{1} t^k d\sigma(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n) \tag{8.11}$$

alakban, ahol $\sigma(t)=\sigma(t-0)$ $(\sigma(-1)=0)$ valamilyen nem-csökkenő függvény, szükséges és elégséges, hogy a

$$\sum_{j,k=0}^{n} s_{j+k}\xi_j\xi_k, \qquad \sum_{j,k=0}^{n-1} (s_{j+k}-s_{j+k+2})\xi_j\xi_k \tag{8.12}$$

formák nem-negatívok legyenek.

Ebben az esetben a $\mathfrak{H}$ tér n-dimenziós, tehát az $E(t)$ spektrálfüggvénynek, és így a $\sigma(t)=F(t)$ függvénynek is, legfeljebb n növekedési pontja van.

Felhasználva azokat a kritériumokat, amelyek a változatlan normájú folytatás egyértelműségére vonatkoznak, meg lehet mutatni, hogy a $\sigma(t)$ függvény akkor és csak akkor van egyértelműen meghatározva, ha a (8.12) formák közül az egyik elfajuló.

Ha viszont mindkét forma pozitív, akkor a (8.11) előállítást adó $\sigma(t)$ függvények között található lesz két szélső, amelyek az A operátor minimális, ill. maximális folytatásának felelnek meg. E két függvény közül az egyiknek a $\lambda=-1$, a másiknak a $\lambda=1$ helyen van növekedési pontja; ennek az igazolását az olvasóra bízzuk.

Ha az $\mathfrak{E}$ tér p-dimenziós, akkor a $\mathfrak{H}$ tér np-dimenziós, és $E(t)$-nek, tehát $F(t)$-nek és $\sigma(t)$-nek is legfeljebb np számú növekedési pontja lehet. Ebben az esetben az $S_0, S_1, \ldots, S_{2n}$ operátorok hermitikus mátrixoknak tekinthetők, és ha teljesülnek az I., II. feltételek, akkor érvényes az

$$S_k = \sum_{i=1}^{m} t_i^k H_i \qquad (m \leqq np;\ k = 0, 1, \ldots, 2n)$$

előállítás, ahol H_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ pozitív hermitikus mátrixok.

Az operátoros momentum probléma vizsgálatánál arra az esetre szorítkoztunk, amikor véges számú S_k $(k=0, 1, 2, \ldots, 2n)$ „momentum" van megadva, ugyanis ha mindegyik S_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ „momentum" adott, akkor a feladat megoldása lényegesen egyszerűbb.

Végül megemlítjük, hogy a hatványokra vonatkozó klasszikus momentum probléma a $(-\infty, \infty)$ végtelen alapintervallum (lásd 5. §) esetében is hasonló módon általánosítható operátorokra.

9. §. Hézaggal rendelkező operátorok folytatása

1. 9.1. LEMMA. *Legyen R egy a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(R)$ halmazon értelmezett hermitikus operátor, és legyen A az R operátor lineáris tört transzformáltja:*

$$A = (\alpha R+\beta I)(\gamma R+\delta I)^{-1},$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ valós számok és $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Ekkor az A operátor tetszés szerinti $\tilde{A}$ önadjungált folytatásának megfelel R-nek egy $\tilde{R}$ önadjungált folytatása, amelyet az

$$\tilde{R} = (\delta\tilde{A}-\beta I)(-\gamma\tilde{A}+\alpha I)^{-1}$$

képlet értelmez.

A 3.1. és 4.1. lemma, továbbá a 3. § 2°. állítása értelmében elég megmutatni, hogy $\gamma\tilde{A}f-\alpha f=0$ esetén $f=0$. Tegyük fel, hogy $\gamma\tilde{A}f-\alpha f=0$. Ekkor $(\gamma\tilde{A}f-\alpha f, h)=0$ $(h\in\mathfrak{H})$. Speciálisan $(\gamma\tilde{A}f-\alpha f, \varphi)=0$ ha $\varphi\in\mathfrak{D}(A)$. Innen $(f, \gamma\tilde{A}\varphi-\alpha\varphi)=(f, \gamma A\varphi-\alpha\varphi)=$ $=0$, azaz $(f, g)=0$ $\big(g\in\mathfrak{D}(R)\big)$. A $\mathfrak{D}(R)$ halmaz sűrű $\mathfrak{H}$-ban, tehát $f=0$.

2. Legyen R olyan hermitikus operátor, amelynek a $\mathfrak{D}(R)$ értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{H}$-ban.

Az (a, b) véges intervallumot az R operátor *hézagának* fogjuk nevezni, ha

$$\left|Rf-\frac{a+b}{2}f\right| \geqq \frac{b-a}{2}|f| \qquad (f\in\mathfrak{D}(R)).$$

Az R operátor hézaga nyilván R-re nézve reguláris típusú pontokból áll. Következésképpen az R-re nézve reguláris típusú pontok halmaza összefüggő, és az I. tétel értelmében az R operátor defekt számai egyenlők. A II. tétel szerint R-nek van önadjungált folytatása.

Érvényes az erősebb

VIII. TÉTEL. *Az (a, b) hézaggal rendelkező R hermitikus operátornak van legalább egy folytatása, amelyre nézve az (a, b) számköz regularitási intervallum.*

Bizonyítás. Az R operátorról áttérve az

$$R_1 = \frac{2}{b-a}\left(R - \frac{a+b}{2} I\right)$$

operátor vizsgálatára, arra az esetre jutunk, amikor a hézag a $(-1, 1)$ számköz. Ezért az általánosság megszorítása nélkül mindjárt úgy vehetjük, hogy $a = -1$, $b=1$, vagyis hogy az R operátor eleget tesz az

$$|Rf| \geqq |f| \qquad (f \in \mathfrak{D}(R)) \tag{9.1}$$

feltételnek.

Tekintsük az R operátor lineáris tört transzformáltját:

$$A = R^{-1}.$$

Az A operátor a 3. § 2°. állítása következtében hermitikus, és (9.1) miatt korlátos: $\|A\| \leqq 1$. Az V. tétel szerint A-nak van legalább egy olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelynek a normája $\|A\|$-val egyenlő. A 9.1. lemma szerint az

$$\tilde{R} = \tilde{A}^{-1}$$

önadjungált operátor R önadjungált folytatását szolgáltatja. Minthogy

$$|\tilde{A}g| \leqq |g| \qquad (g \in \mathfrak{D}(\tilde{A})),$$

azért

$$|\tilde{R}f| \geqq |f| \qquad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{R})).$$

A tételt bebizonyítottuk.

10. §. Pozitív operátorok folytatása

1. Az S hermitikus operátort pozitívnak nevezik (képletben: $S>0$), ha

$$(Sf, f) \geqq 0 \qquad (f \in \mathfrak{D}(S))$$

és legalább egy $f_0 \in \mathfrak{D}(S)$ elemre $(Sf_0, f_0) > 0$.

Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy $S \neq 0$.

Ha $S>0$, akkor tetszés szerinti $a>0$ számra

$$|Sf+af|^2 = |Sf|^2 + 2a(Sf, f) + a^2|f|^2 \geqq a^2|f|^2.$$

Ily módon pozitív operátor összes reguláris típusú pontjainak a halmaza összefüggő (tartalmazza az összes nem valós és az összes negatív λ számokat); következésképpen defekt számai egyenlők.

Ha $\overline{\mathfrak{D}(S)}=\mathfrak{H}$, akkor S-nek vannak önadjungált folytatásai.

M. STONE [20] és később K. FRIEDRICHS [17] megmutatta, hogy ezenfelül az S pozitív hermitikus operátornak $(\overline{\mathfrak{D}(S)}=\mathfrak{H})$ mindig van legalább egy pozitív önadjungált folytatása.

Az a módszer, amellyel ezt a tételt alább bebizonyítjuk, lehetővé teszi, hogy megtaláljuk az S operátor *összes* pozitív önadjungált folytatásait és kiválasszunk közülük két „extremális" folytatást, amelyeknek az egybeesése fogja megmutatni, hogy S-nek csak egy pozitív önadjungált folytatása van.

IX. TÉTEL. *Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű*[5] *$\mathfrak{D}(S)$ értelmezési tartománnyal rendelkező S pozitív hermitikus operátornak van legalább egy $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatása.*

Bizonyítás.[6] Tekintsük az S operátor alábbi lineáris tört transzformáltját:

$$A=(I-S)(I+S)^{-1}, \qquad S=(I-A)(I+A)^{-1}.$$

Az A operátor létezik, mert $f+Sf=0$ esetén $f=0$, ugyanis

$$(f,f)\leqq(f,f)+(Sf,f)=(f+Sf,f) \qquad (f\in\mathfrak{D}(S)).$$

Az A operátor a 3. § 2°. állítása értelmében hermitikus.

A vizsgált esetben $(B=S)$ a (3.1), (3.2) képletek a következő alakot öltik:

$$g=f+Sf, \qquad Ag=f-Sf \qquad (f\in\mathfrak{D}(S), g\in\mathfrak{D}(A)).$$

Az S operátor pozitivitásából nyerjük:

$$(Ag,Ag)=(f-Sf,f-Sf)=|f|^2-2(Sf,f)+|Sf|^2\leqq$$
$$\leqq|f|^2+2(Sf,f)+|Sf|^2=(f+Sf,f+Sf)=(g,g),$$

vagyis A korlátos $(\|A\|\leqq 1)$.

Az V. tétel szerint az A operátornak van legalább egy olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelynek a normája $\leqq 1$. Az előző paragrafusban bebizonyított lemma alapján az

$$\tilde{S}=(I-\tilde{A})(I+\tilde{A})^{-1} \tag{10.1}$$

önadjungált operátor az S operátor önadjungált folytatása.

[5] Az a kikötés, hogy $\mathfrak{D}(S)$ sűrű $\mathfrak{H}$-ban, lényeges. Legyen például $\mathfrak{H}$ a háromdimenziós tér egy e_1, e_2, e_3 ortonormális bázissal, S pedig az a pozitív operátor, amely az ae_1+be_2 alakú vektorok halmazán van értelmezve az $S(ae_1+be_2)=ae_1+be_3$ egyenlőség útján. Ekkor S bármelyik $\tilde{S}$ önadjungált folytatását választjuk is, az nem lesz pozitív, ugyanis

$$(\tilde{S}(e_2-\varepsilon e_3), e_2-\varepsilon e_3)=-2\varepsilon+\varepsilon^2(\tilde{S}e_3,e_3)<0,$$

ha $\varepsilon<2|(\tilde{S}e_3,e_3)|^{-1}$.

[6] A tételre egyszerű bizonyítást adott FREUDENTHAL [18] is; ez FRIEDRICHS ötletein alapszik és szintén nem teszi lehetővé pozitív operátor összes pozitív önadjungált folytatásainak a leírását.

Az $\|\tilde{A}\| \leqq 1$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\tilde{S}$ pozitív. Valóban, ha $f \in \mathfrak{D}(\tilde{S})$, akkor található olyan $g \in \mathfrak{D}(\tilde{A})$, hogy $f = g + \tilde{A}g$, $\tilde{S}f = g - \tilde{A}g$, és így

$$(\tilde{S}f, f) = (g - \tilde{A}g, g + \tilde{A}g) = |g|^2 - |\tilde{A}g|^2 \geqq 0.$$

A tételt bebizonyítottuk.

2. Legyen A_μ és A_M az A operátor minimális, illetve maximális folytatása. Az

$$S_\mu = (I - A_\mu)(I + A_\mu)^{-1}, \qquad S_M = (I - A_M)(I + A_M)^{-1}$$

operátorokat S *durva*, ill. *finom* folytatásának fogjuk nevezni.

Az (10.1) összefüggés ekvivalens a következővel:

$$\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1} = 2(I + \tilde{S})^{-1} - I.$$

Így $A_\mu \leqq \tilde{A} \leqq A_M$ miatt

$$(S_\mu + I)^{-1} \leqq (\tilde{S} + I)^{-1} \leqq (S_M + I)^{-1}. \tag{10.2}$$

Meg lehet mutatni (lásd [6i], 11. tétel), hogy tetszés szerinti $a > 0$ mellett

$$(S_\mu + aI)^{-1} \leqq (\tilde{S} + aI)^{-1} \leqq (S_M + aI)^{-1}. \tag{10.3}$$

Minthogy az S operátor mindegyik $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásának megfelel A-nak egy $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelynek a normája $\leqq 1$, azért az $\tilde{S}$ folytatás akkor és csak akkor lesz az S operátor egyetlen pozitív önadjungált folytatása, ha az S_μ durva és az S_M finom folytatás egybeesik, vagy ami ugyanaz, ha az A operátor A_μ minimális és A_M maximális folytatása egybeesik.

A VI. tételből egyszerű átalakítások útján adódik a következő.

X. TÉTEL. *Legyen* $\mathfrak{N}_1$ *az*

$$S^* \varphi + \varphi = 0 \tag{10.4}$$

egyenlet összes megoldásainak a halmaza, és

$$\tilde{S} = \int_0^\infty t \, dE(t) \tag{10.5}$$

az S *pozitív operátor* $\tilde{S}$ *pozitív önadjungált folytatásának a spektrális felbontása. Ekkor ahhoz, hogy* $\tilde{S}$ *az* S *operátor egyetlen pozitív önadjungált folytatása legyen, szükséges és elégséges, hogy minden* $\varphi \in \mathfrak{N}_1$ *elemre fennálljon*

$$\int_0^\infty t \; d(E(t)\varphi, \; \varphi) = \int_0^\infty \frac{1}{t} d(E(t)\varphi, \varphi) = \infty. \tag{10.6}$$

Bizonyítás. Tekintsük az $\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1}$ operátort. A (10.5) képlet értelmében

$$\tilde{A} = \int_0^\infty \frac{1-t}{1+t} dE(t) = \int_{-1}^1 u \; dF(u) \quad \left(u = \frac{t-1}{t+1}; \; F(u) = E(t)\right).$$

Az $A=(I-S)(I+S)^{-1}$ operátor értelmezési tartománya a

$$g = Sf+f \quad (f\in\mathfrak{D}(S))$$

alakú g elemekből áll.

Ennélfogva ha egy $\varphi\in\mathfrak{H}$ elem ortogonális $\mathfrak{D}(A)$-ra, akkor $(\varphi, Sf+f)= =(S^*\varphi+\varphi, f)=0$ $(f\in\mathfrak{D}(S))$, és minthogy $\mathfrak{D}(S)$ sűrű $\mathfrak{H}$-ban, azért

$$S^*\varphi+\varphi = 0.$$

Nyilvánvaló, hogy fordítva is: ha φ a (10.4) egyenlet megoldása, akkor φ ortogonális $\mathfrak{D}(A)$-ra. Következésképpen $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}(A)$.

Így a VI. tétel szerint $\tilde{A}$ akkor és csak akkor lesz az A operátor egyetlen olyan önadjungált folytatása, amelynek a normája $\|A\|$-val egyenlő, ha

$$\int_{-1}^{1}\frac{d(F(u)\varphi,\varphi)}{1-u} = \infty \quad \text{és} \quad \int_{-1}^{1}\frac{d(F(u)\varphi,\varphi)}{1+u} = \infty$$

minden $\varphi\in\mathfrak{N}_1$ elemre.

Minthogy az $F(u)=E(t)$ $(u=(t-1)/(t+1))$ egyenlőség alapján

$$\int_{-1}^{1}\frac{d(F(u)\varphi,\varphi)}{1\pm u} = \frac{1}{2}(\varphi,\varphi)+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} t^{\mp 1}\; d(E(t)\varphi,\varphi),$$

a tételt bebizonyítottuk.

3. A következő kritériumnak (lásd [6i], 9. tétel) az az érdekessége, hogy nem kívánja meg az S operátor egyetlen $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásának az ismeretét sem.

XI. Tétel. *Ahhoz, hogy az S pozitív hermitikus operátornak $(\overline{\mathfrak{D}(S)}=\mathfrak{H})$ egyetlen pozitív önadjungált folytatása legyen, szükséges és elégséges, hogy*

$$\inf_{f\in\mathfrak{D}(S)}\frac{(Sf,f)}{|(f,\varphi)|^2} = 0$$

legyen az $S^*\varphi+\varphi=0$ egyenlet bármelyik φ megoldására.

A XI. tétel a VII. tételből egyszerű átalakítások útján adódik. Ezt nem mutatjuk meg, mert a VII. tétel bizonyítását is elhagytuk.

4. A T hermitikus operátort *alulról félig korlátosnak* nevezzük, ha

$$m(T) = \inf_{f\in\mathfrak{D}(T)}\frac{(Tf,f)}{(f,f)} > -\infty.$$

Legyen $\tilde{S}$ az $S=T-m(T)I$ pozitív operátor valamilyen pozitív önadjungált folytatása, és legyen $\tilde{T}=\tilde{S}+m(T)I$. Ekkor $m(\tilde{T})=m(T)$. Ebből következik a

XII. Tétel. *Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű értelmezési tartománnyal rendelkező T félig korlátos hermitikus operátornak van legalább egy $\tilde{T}$ félig korlátos önadjungált folytatása, amelyre $m(\tilde{T})=m(T)$.*

Ha az S ($\neq S^*$) pozitív operátor $m(S)$ alsó határa nagyobb, mint nulla, akkor a pozitív folytatás nyilván nem lesz egyértelműen meghatározva. Azonban az $m(S)=0$ feltétel nem elégséges ahhoz, hogy az S operátornak csak egy pozitív önadjungált folytatása legyen. Reducibilis S hermitikus operátorokra (olyan operátorokra, amelyek előállíthatók $\mathfrak{H}$ két egymásra ortogonális alterében ható két hermitikus operátor direkt összegeként) ez nyilvánvaló.

Legyen H nem korlátos pozitív önadjungált operátor, amelynek a folytonos spektruma tartalmazza a 0 pontot, és legyen H spektrális felbontása

$$H = \int_0^\infty t\, dE(t).$$

Vegyünk egy $\varphi \in \mathfrak{H}$ ($|\varphi|=1$) elemet, amelyre

$$\int_0^\infty t d(E(t)\varphi, \varphi) = \infty, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{t} d(E(t)\varphi, \varphi) < \infty. \tag{10.7}$$

Jelölje $\mathfrak{D}(S)$ azoknak az $f \in \mathfrak{D}(H)$ elemeknek a halmazát, amelyekre

$$(f+Hf, \varphi) = 0, \tag{10.8}$$

és értelmezzünk a $\mathfrak{D}(S)$ halmazon egy S operátort:

$$Sf = Hf \quad (f \in \mathfrak{D}(S)).$$

A $\mathfrak{D}(S)$ halmaz sűrű $\mathfrak{H}$-ban. Csakugyan, ha a $h \in \mathfrak{H}$ elem ortogonális $\mathfrak{D}(S)$-re, akkor a h elemet $h=H\psi+\psi$ ($\psi \in \mathfrak{D}(H)$) alakban előállítva azt kapjuk, hogy ψ ortogonális a $(H+I)\mathfrak{D}(S)$ halmazra, vagyis $\psi = c\varphi \in \mathfrak{D}(H)$. Minthogy a (10.7) alatt szereplő első feltétel értelmében $\varphi \notin \mathfrak{D}(H)$, azért $c=0$, $\psi=0$ és $h=0$.

Most megmutatjuk, hogy $m(S)=0$. Minthogy a 0 pont a H operátor folytonos spektrumához tartozik, tetszés szerinti $\varepsilon>0$ esetén található két lineárisan független $f_k \in \mathfrak{D}(H)$ ($k=1, 2$) elem úgy, hogy

$$E(t)f_k = f_k \quad \text{ha} \quad t > \varepsilon \qquad (k = 1, 2). \tag{10.9}$$

Valamilyen α mellett az $f=f_1 \cos\alpha + f_2 \sin\alpha$ elem kielégíti a (10.8) feltételt, azaz $f \in \mathfrak{D}(S)$. A (10.9) képlet alapján

$$(Sf, f) = (Hf, f) = \int_0^\varepsilon t\; d(E(t)f, f) \leqq \varepsilon(f, f),$$

és innen $m(S)=0$.

Az így megszerkesztett S operátornak a (10.7) alatt feltüntetett második feltétel következtében végtelen sok pozitív önadjungált folytatása van.

Ha ezenkívül a H operátornak egyszerű spektruma[7] van, a φ elemet pedig úgy választjuk, hogy az $E(t)\varphi$ elemek zárt lineáris burka az egész $\mathfrak{H}$ tér legyen, akkor, mint könnyen látható, az S operátor is irreducibilis lesz.

5. 10.1. *példa. A Stieltjes-integrálokra vonatkozó operátoros momentum probléma.*

[7] Az egyszerű spektrumú operátorok definícióját lásd a [19] munkában.

Itt $F(t)$ nem-csökkenő operátorfüggvényeket kell majd vizsgálnunk (lásd a 8.1. példát, ahonnan számos jelölést is átveszünk) egy végtelen intervallumban $(0 \leqq t < \infty)$.

Legyen $\varphi(t)$ $(0 \leqq t < \infty)$ valamilyen folytonos függvény. Ebben a példában a

$$J = \int_0^\infty \varphi(t)\, dF(t)$$

egyenlőségen azt fogjuk érteni, hogy

$$[Jx, y] = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \varphi(t)\, d[F(t)x, y] \qquad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

E. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a korlátos*[8] *önadjungált operátorokból álló* $S_0, S_1, \ldots$ *sorozat előállítható legyen*

$$S_k = \int_0^\infty t^k\, dF(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{10.10}$$

alakban, ahol $F(t)$ $(0 \leqq t < \infty)$ *nem-csökkenő operátorfüggvény, szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti* $x_j \in \mathfrak{E}$ $(j=0, 1, \ldots)$ *elemekre teljesüljenek az*

$$\text{I.} \quad \sum_{j,k=0}^{n} [S_{j+k}x_j, x_k] \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{10.11}$$

$$\text{II.} \quad \sum_{j,k=0}^{n} [S_{j+k+1}x_j, x_k] \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{10.12}$$

feltételek.

Bizonyítás. Az I., II. feltételek szükségességét ugyanúgy lehet bebizonyítani, mint a 8.1. példában. Valóban, a (10.10) összefüggésből következik, hogy

$$\sum_{j,k=0}^{n} [S_{j+k}x_j, x_k] = \lim_{N\to\infty} \lim_{p\to\infty} \sum_{\nu=1}^{p} [\Delta_\nu F(t) y_\nu, y_\nu],$$

$$\sum_{j,k=0}^{n} [S_{j+k+1}x_j, x_k] = \lim_{N\to\infty} \lim_{p\to\infty} \sum_{\nu=1}^{p} t_\nu [\Delta_\nu F(t) y_\nu, y_\nu],$$

ahol

$$t_\nu = \frac{\nu N}{p}, \qquad y_\nu = \sum_{j=0}^{n} t_\nu^j x_j, \quad \Delta_\nu F(t) = F(t_{\nu+1}) - F(t_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p).$$

Mutassuk meg, hogy az I., II. feltételek elégségesek abban az esetben, amikor a (10.11) formák nem elfajulók $\left(\sum_{j=1}^{n} [S_{j+k}x_j, x_k] = 0\right.$ esetén $\left. x_j = 0;\ j = 0, 1, \ldots, n\right)$. Ilyenkor (lásd a 8.1. példát) képezzük azt a $\mathfrak{P}$ halmazt, amely a

$$P(t) = \sum_{j=0}^{n} t^j x_j \quad (x_j \in \mathfrak{E};\ n = 0, 1, \ldots)$$

[8] Ha a tétel megfogalmazását kissé módosítjuk, az operátorok korlátosságára vonatkozó feltételtől meg lehet szabadulni.

alakú $P(t)$ „polinomokból” áll, értelmezzük rajta a

$$(10.13)\qquad (P,Q)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}[S_{j+k}x_j, y_k] \qquad \left(Q(t)=\sum_{k=0}^{m}t^k y_k;\ y_k\in\mathfrak{E}\right)$$

skaláris szorzatot, és tekintjük a $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-teret, $\mathfrak{P}$ teljes burkát ($\overline{\mathfrak{P}}=\mathfrak{H}$).

Értelmezzünk a $\mathfrak{P}$ halmazon egy H operátort a

$$HP(t)=tP(t)=\sum_{j=0}^{n}t^{j+1}x_j$$

egyenlőséggel.

A H operátor, ugyanúgy mint a 8.1. példában, hermitikus.

A II. feltételből következik, hogy H pozitív, ugyanis

$$(HP,P)=(tP,P)=\sum_{j,k=0}^{n}[S_{j+k}x_j, x_k].$$

A IX. tétel szerint H-nak van $\tilde{H}$ pozitív önadjungált folytatása. Legyen a $\tilde{H}$ operátor spektrálfüggvénye $E(t)$:

$$\tilde{H}=\int_0^\infty t\,dE(t).$$

Ekkor tetszés szerinti $x, y\in\mathfrak{E}$ elemekre fennáll (vö. a 8.1. példával):

$$(10.14)\qquad [S_k x, y]=(H^k x, y)=\int_0^\infty t^k d\big(E(t)x, y\big) \qquad (k=0,1,\ldots).$$

Az $E(t)$ operátorok a $\mathfrak{H}$ térben hatnak, de $\big(E(t)x, y\big)$ hermitikus bilineáris funkcionál $\mathfrak{E}$-ben, és folytonos is, mert

$$0\leqq\big(E(t)x,x\big)\leqq(x,x)=[S_0x,x]\leqq\|S_0\|\,[x,x].$$

Riesz tétele szerint található olyan az $\mathfrak{E}$ térben ható $F(t)$ korlátos önadjungált operátor, amelyre

$$(10.15)\qquad \big(E(t)x,y\big)=[F(t)x,y] \qquad (x,y\in\mathfrak{E}).$$

Az $F(t)$ operátorfüggvény nem-csökkenő. Ennélfogva a (10.14), (10.15) összefüggésekből következik (10.10).

Abban az esetben, amikor a (10.11) formák között vannak elfajulók is, két $P, Q\in\mathfrak{P}$ polinomot ekvivalensnek fogunk tekinteni, ha

$$(P-Q, P-Q)=0,$$

ahol (P,Q) a (10.13) egyenlőséggel értelmezett bilineáris funkcionál.

A t-vel való szorzás H operátora ekvivalens polinomokat ekvivalensekbe visz át. Ahhoz, hogy erről meggyőződjünk, elég megmutatni, hogy ha $(P,P)=0$, akkor $(tP,tP)=0$. Ez viszont abból következik, hogy

$$(tP,tP)^2=(P,t^2P)^2\leqq(P,P)\,(t^2P,t^2P).$$

Az ekvivalens polinomokat azonosítva a vizsgált esetet visszavezethetjük az előzőre.

Mint tudjuk, a H pozitív hermitikus operátornak van két szélső pozitív önadjungált folytatása, H_μ és H_M, és bármely más $\tilde{H}$ pozitív önadjungált folytatásra tetszés szerinti $a>0$ esetén

$$(H_\mu+aI)^{-1} \leqq (\tilde{H}+aI)^{-1} \leqq (H_M+aI)^{-1}.$$

Ennek megfelelően a H_μ, H_M folytatások az operátoros momentum probléma két olyan $F_\mu(t)$, $F_M(t)$ extremális megoldását generálják, hogy az operátoros momentum probléma bármilyen $F(t)$ megoldására

$$\int_0^\infty \frac{dF_\mu(t)}{t+a} \leqq \int_0^\infty \frac{dF(t)}{t+a} \leqq \int_0^\infty \frac{dF_M(t)}{t+a}.$$

Ha $F_\mu(t)$ és $F_M(t)$ megegyezik, és csak ebben az esetben, a Stieltjes-féle operátoros momentum probléma megoldása egyértelmű.

A számokra vonatkozó momentum probléma ($\mathfrak{E}$ egydimenziós) esetére két ilyen extremális megoldás létezését Stieltjes [15] állapította meg.

Az olvasóra hagyjuk annak a bebizonyítását, hogy ha $m(S_0)>0$, akkor a (10.10) alatti integrálok erős értelemben is konvergálnak.

IRODALOM

[1] Н. И. Ахиезер, a) Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов, *Успехи математических наук*, № 9 (1941), 126—156; b) *Введение в теорию линейных операторов в простриастве Гильберта*, ч. I и II. Литорграфированный курс лекций, Харьков, 1940; lásd még: Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Москва, 1966.

[2] Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов*, Харьков, 1938.

[3] H. Hamburger, Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems, *Mathematische Annalen*, **82** (1921), 168—187.

[4] T. Carleman, a) *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, Uppsala, 1923; b) *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926.

[5] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, *Бюллетень Московского государственного университета*, Математика, **2**, № 6 (1941).

[6] М. Г. Крейн, a) Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице. I, II, *Доклады Академии наук СССР*, **43** (1944) 323—326; **44** (1944), 131—134; b) Об одном замечательном классе эрмитовых операторов, *Доклады Академии наук СССР*, **44** (1944), 175—179; c) Об обобщенной проблеме моментов, *Доклады Академии наук СССР*, **44** (1944), 219—222; d) О логарифме безгранично разложимой эрмитово-положительной функции, *Доклады, Академии наук СССР*, **45** (1944), 91—94; e) О проблеме продолжения винтовых линий в гильбертовом пространстве, *Доклады Академии наук СССР*, **45** (1944), 139—142; f) Об одном обобщении исследований G. Szegő, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова, *Доклады Академии наук СССР*, **46** (1945), 91—94; g) О самосопряженных расширениях ограниченных и полуограниченных эрмитовых операторов, *Доклады Академии наук СССР*, **48** (1945), 303—306; h) Об одном общем методе разложения эрмитово-положительных ядер на элементарные произведения, *Доклады Академии наук СССР*, **53** (1946)˙ 3—6; i) Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, *Математический сборник*, **20** (1947), 431—495; magyar fordítása: *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei*, **18** (1968), 273—314. és **19** (1969), 131—188.

[7] M. A. Красносельский, О дефектных числах замкнутого оператора, *Доклады Академии наук СССР*, **56** (1947), 559—561.

[8] M. C. Лившиц, a) Об одном применении теории эрмитовых операторов к обобщенной проблеме моментов, *Доклады Академии наук СССР*, **44** (1944), 3—7; b) О некоторых вопросах, связанных с определенностью проблемы моментов Hamburger'a, *Математический сборник*, **6** (1939), 293—306.

[9] M. A. Наймарк, a) Спектральные функции симметрического оператора, *Известия Академии наук СССР*, серия математическая, **4** (1940), 277—318; b) О представлении аддитивных операторных функций множеств, *Доклады Академи наук СССР*, **41** (1943), 359—361; c) Об экстремальных спектралньных функциях симметрического оператора, *Доклады Академии наук СССР*, **54** (1946), 7—9; d) О спектральных функциях симметрического оператора, *Известия Академии наук СССР*, серия математическая, **7** (1943), 285—296.

[10] R. Nevanlinna, a) Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, ser. A, **18**, No. 5 (1922); b) Über beschränkte analytische Funktionen, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, ser. A, **32**, No. 7 (1929).

[11] J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Mathematische Annalen*, **102** (1929), 49—131.

[12] A. И. Плеснер, a) Спектральная теория линейных операторов, I. *Успехи математических наук*, № 9 (1941), 3—125: b) Основные понятия спектральной теории эрмитовых операторов, *Успехи математических наук*, **1**, № 1 (1946), 192—216; lásd még: *Спектральная теория линейных операторов*, Москва, 1965.

[13] И. И. Привалов, *Граничные свойства однозначных аналитических функций*, Москва, 1941; átdolgozott és bővített német fordítása: I. I. Priwalow, *Randeigenschaften analytischer Funktionen*, Berlin, 1956.

[14] M. Riesz, a) Sur le problème des moments I, II, III, *Arkiv för Matematik, Astronomie och Fysik*, **16**, No. 12 (1922); **16**, No. 19 (1922); **17**, No. 16 (1923); b) Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant, *Acta Litterarum ac Scientiarum (Szeged)*, sectio sci. math., **1** (1922—1923), 209—225.

[15] T. И. Стильтьес, *Исследования о непрерывных дробях*, Харьков, 1936.

[16] J. A. Shohat, I. D. Tamarkin, *The problem of moments*, New York, 1943.

[17] K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, *Mathematische Annalen*, **109** (1934), 465—487.

[18] H. Freudenthal, Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren, *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, **39** (1936), 832—833.

[19] A. И. Плеснер, B. A. Рохлин, Спектральная теория линейных операторов, II, *Успехи математических наук* **1**, № 1 (1946), 71—191.

[20] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space*, New York, 1932.

Fordította: *Bognár János*

KÖNYVISMERTETÉS

KÉT KÖNYV BOLYAI JÁNOS MŰVÉVEL KAPCSOLATBAN

Hazánkat néhányan matematikai nagyhatalomnak emlegetik. Pedig egy nagyhatalom megbecsüli múltbeli nagyjait. A Bolyaiakat és művüket pedig szépszerével már a feledés homálya fedi. Ezt bizonyítja, ha megnézzük a Bolyaiak részesedését az egyetemi tananyagokban, vagy ha megnézzük, hogy mit tud róluk vagy műveikről egy átlagos matematikus vagy matematika szakos tanár. De a könyvkiadás és a hazai geometriai kutatás áttekintéséből ugyanezt következtethetjük. *Van ugyan egy* BOLYAI *nevet viselő társaság, de díj nincs.* Nincs egy rendszeres geometriai fórum, például szimpozium, ami emléküket ápolná. A BOLYAI évfordulók méltó megünnepléséről nem gondoskodunk. BOLYAI-kultusznak tehát nyoma sincs. Sőt! 1972-re odáig jutottunk, hogy a Matematikai Kislexikonban az „Abszolút geometria" címszó alatt ez jelenhetett meg: „Az abszolút geometria elnevezés BOLYAI JÁNOStól származik és azon geometriai tételek összességét jelenti, amelyek párhuzamossági axióma felhasználása nélkül..."

Mintha csak az elnevezés származna BOLYAItól — ahogyan egy forrásul használt alacsony színvonalú szótárban áll. (A matematikai és nyelvhelyességi hibákat nem számítva, valószínűleg még ez sem igaz: a KOLMOGOROV és KAGAN által joggal bírált név, minden bizonnyal FRISCHAUFtól származik.)

Ebben a lehangoló képben különösen örvendetes két kiváló szerző jelenkezése. KÁRTESZI professzor könyve 20 év múlva újra megjelent, SZÁSZ professzor pedig bevezető munkát írt a *Bolyai—Lobacsevszkij*-geometriába.

BOLYAI JÁNOS: Appendix, a tér tudománya

Szerkesztette, bevezetéssel, magyarázatokkal, kiegészítésekkel ellátta KÁRTESZI FERENC. Akadémiai Kiadó Budapest, 1973. 17 cm×24 cm, 211 oldal, 91 ábra + 29 oldal fakszimile.

A mű tartalomjegyzéke:

I. *A térfogalom fejlődése a nem-euklideszi geometria felfedezéséig.* A tér tapasztalati megismerésétől a deduktív geometriáig. Az ötödik posztulátum bizonyítására törekvő kísérletek. A tizenkilencedik század kezdetén megújuló kutatások. GAUSS elmélkedésének eredményei. LOBACSEVSZKIJ geometriai vizsgálatai. BOLYAI JÁNOS matematikai tanulmányai. Az abszolút geometria felfedezése.

II. *Bolyai János abszolút geometriája. Az Appendix.* Appendix (fakszimile). Appendix (fordítás). Jelmagyarázat. I. A párhuzamosság. II. A paraciklus és a paraszféra. III. Trigonometria. IV. Az analízis módszereinek alkalmazása, a geometria és a valóság viszonya. V. Szerkesztések.

III. *Megjegyzések.* Az euklideszi geometria *Hilbert*-féle axiómarendszere. Az 1. §—43. §-hoz fűzött megjegyzések.

IV. *Bolyai műve a későbbi kutatások tükrében.* I. A geometria elemi módszerekkel való felépítése. BOLYAI JÁNOS további vizsgálatai az abszolút geometria terén. Az elliptikus geometria. A kommentárirodalom. A hiperbolikus sík geometriájának megalapozása a folytonossági axiómák felhasználása nélkül. II. A nem-euklideszi geometriák ellentmondásnélkülisége. Az ellentmondásnélküliség bizonyításáról. A *Beltrami*-féle modell. A *Cayley—Klein*-féle modell. A *Poincaré*-féle modell. III. A nem-euklideszi geometria felfedezésének hatása a matematika fejlődésének legújabb szakaszában. A matematikai tér fogalmának kialakulása és fejlődése. Az axiomatikus módszer és a modern matematika.

A könyv a több mint két évtizede megjelent, a hazai szakirodalomban azóta klasszikussá vált, hasonló című munka átdolgozott kiadása.

BOLYAI JÁNOS amikor azt írta, hogy

„...semmiből egy új más világot teremtettem," valószínűleg csak *abszolút* (nem hiperbolikus!) geometriájára gondolt. Valójában az új más világ nemcsak egy geometriai rendszer (algebrai analógiát általánosítva egy struktúra) volt, hanem egy olyan új más világ, amelyben az addigiakhoz képest máshogyan is lehetett gondolkodni, viselkedni, élni. BOLYAI JÁNOS műve a modern axiomatikus látásmód — a matematika nagykorúsága korszakának — vitathatatlan kezdete. Ettől kell számítani a matematika mint önálló tudomány megjelenését és — paradox módon — a matematika széles körű alkalmazásának útjából is ez a függetlenné válás távolította el a legtöbb akadályt. Napjainkban az Appendixet — ez jellemzője a nagy műveknek — újabb oldalról, a térelmélet megindítójaként is az „örökbecsű művek" (KÁRTESZI professzor bevezetőjéből) között tartjuk számon.

KÁRTESZI professzor BOLYAI JÁNOS munkájának e két, korszakot nyitó jellegzetességét kiemelve, az utóbbit hangsúlyozva, BOLYAI JÁNOST és munkáját az emberiség legnagyobbjainak a tér megismerésére irányuló drámai küzdelme szempontjából mutatja be, klasszikushoz méltó módon. Ez vonatkozik nemcsak az alaposságra, az anyag és az előadás szigorára, a belső tartalmi arányok és megismerés-lélektani hangsúlyok elrendezésére, hanem a külső megtervezésre és a különlegesen — tartalmilag — szép ábrákra is.

A könyv szuggesztív mű, a BOLYAI-tragédia — mert van ilyen — a tiszta matematikai sorok között is érezhető. A könyv nem egy a matematikára korlátozódó küzdelem eredményének tisztított és mai ízlésünknek megfelelően tálalt kommentárja. KÁRTESZI professzor nem kommentál, inkább interpretál, és az olvasót az emberiség története egyik halhatatlanjának világába viszi. Ez az óriás nem geométer, hanem küzdő ember (erre bizonyíték Üdvtana), aki geometriával is foglalkozik (hogy hogyan, arra bizonyíték az Appendix).

A könyvről szokásos értelmű bírálatot írni nem lehet. Nem lehet részekre szedni. Csak ajánlani lehet. Olvasni kell, így eljuthatunk abba az atmoszférába, amelyben olyan géniusz alkotott, mint BOLYAI JÁNOS. De ha mégis méltatni kényszerülnénk, ezt kellene mondani: KÁRTESZI professzor könyve BOLYAI atmoszférájának izzását sugározza modern formában, de eredeti hőfokon.

A munka, amelynek első kiadása a magyar szakirodalom eddig is elismert kiemelkedő teljesítménye volt, a közeljövőben megjelenő angol nyelvű kiadás révén, amelyhez SZÉNÁSSY BARNA készít életrajzi kiegészítést (amelynek hiánya a kiadás egyetlen negatívuma) rövidesen a matematika nemzetközi irodalmában is elfoglalja előkelő helyét.

SZÁSZ PÁL: Bevezetés a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriába

Akadémiai Kiadó Budapest, 1973. 17 cm×24 cm, 296 oldal, 248 ábra.

SZÁSZ professzor könyve, a szerző előszava szerint is olyanok számára kíván bevezetést nyújtani a hiperbolikus geometriába, akik „az euklideszi geometria alapos ismerete mellett a valós és a komplex analízis elemeiben is jártasak".

A könyv csak a hiperbolikus síkgeometriával foglalkozik. A felépítés fő eszköze a hiperbolikus trigonometria.

A tárgyalt anyagnak tekintélyes része a szerző saját eredménye. Ezek az eredmények is ékesszólóan bizonyítják, hogy szerzőjük a hiperbolikus geometria kutatóinak nemzetközi élvonalába tartozik.

A mű főbb részei:

Első fejezet. Hiperbolikus trigonometria. Bevezetés. A hiperbolikus szögösszeg-axióma. I. A szögösszegtétel. II. Az $S(x)$ és $C(x)$ szögfüggvények bevezetése. III. A $K(r)$ távolságfüggvény bevezetése. IV. Az $S(x)$, $C(x)$ és $K(r)$ függvények meghatározása. V. A derékszögű háromszög és a *Lambert*-féle négyszög trigonometriai képletei. VI. Az általános háromszög trigonometriai képletei. VII. A gömbi trigonometria érvényessége.

Második fejezet. A hiperbolikus sík euklideszi ábrázolása. I. A hiperbolikus sík kollineáris ábrázolása az egységkörben. *Weierstrass*-féle koordináták. II. A sík mozgásai és átfordításai. III. *Weierstrass*-féle vonalkoordináták. IV. Ciklusok. A háromszög nevezetes pontjai. V. Görbe ívek rektifikációja. Derékszögű, polár- és paraciklus-koordináták. VI. A hiperbolikus sík szögtartó ábrázolása az euklideszi félsíkon és az egységkörben. VII. Területmérés.

Harmadik fejezet. Különböző szerkesztések. I. Sokszögesíthető körök szerkesztése. II. Szerkeszthető egyenes darabok. III. Szétszedhetően egyenlő sokszögek.

Függelék. A hiperbolikus geometria ellentmondás-mentessége. A *Poincaré*-féle féltér, mint a hiperbolikus tér modellje. Kiegészítő irodalom. Tárgymutató. Szerzők jegyzéke.

Biztosra vehető, hogy ez a hazai szakirodalomban régi hiányt pótoló munka sok kutatónak ad majd indítást e gazdag terület művelésére, és szerzőjét — aki kutatónemzedékeket látott el a klasszikus analízis megbízható alapjaival —, ezáltal e klasszikus terület modern kutatásában is a kiemelkedő tanítómesterek között tisztelhetjük.

Pogány Csaba

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

KÖNYVSZEMLE

INDEX

FROM THE FOREIGN LITERATURE

BOOK REVIEWS

Technikai szerkesztő: dr. Ziermann Margit
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó — Műszaki szerkesztő: Agócs András
A kézirat nyomdába érkezett: 1974. XII. 15. — Ívterjedelem: 17,15 (A/5) ív

77-430 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

Ára: 36,— Ft

Megjelent 1977. III. 30.

Index; 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXIII. KÖTET
3—4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1977

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXIII. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: 1051 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: 1054 Budapest, Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1063 Budapest, Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, 1011 Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Mathematicarum Hungarica.

KEDVES ELŐFIZETŐNK!

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei záró kötetével egyidejűleg — külön füzetben — átnyujtjuk Önöknek az e folyóirat 1951—1974 között megjelent valamennyi publikációját felölelő tartalomjegyzéket.

Szives elnézésüket kérve az utolsó kötet késedelmes megjelenéséért, kérjük, hogy a Közlemények jogutódját, az ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOKAT előfizetésével, cikkek, tanulmányok beküldésével továbbra is támogatni sziveskedjék.

Budapest, 1977. január

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztály Közleményei Szerkesztő Bizottsága
Akadémiai Kiadó

ELLENTMONDÓ FELTÉTELRENDSZEREK KEZELÉSÉRŐL, II.*

Írta: POGÁNY CSABA

3. Feltételrendszer értelmezése és megoldása

Feltétel megadása — általánosan — kijelentés formájában történhet. (Kijelentésnek tekinthetők az egyenletek, egyenlőtlenségek és általában a relációk is.) Ha egy objektumra egy kijelentés igaz, akkor ez az objektum per definitionem kielégíti a kijelentés által reprezentált feltételt.

Feltételrendszeren a gyakorlat egyidejűleg kielégítendő feltételek halmazát (rendszerét) szokta érteni. Más szóval: az egyes kijelentésekből logikai „ÉS" művelettel képzett *egyetlen* kijelentés fennállásának megköveteléséről van szó. (Ez, mint valamiféle „normálforma" a gyakorlatban egyeduralkodóvá is vált.) Nem nehéz azonban a feltételek (kijelentések) más logikai műveletekkel történő összekapcsolásának értelmezése sem, amint ez a következő példákból is látható.

Legyen adva a következő három feltétel:

$$K_1(x) = (f_1(x) = 0),$$

$$K_2(x) = (f_2(x) = 0),$$

$$K_3(x) = (f_3(x) = 0).$$

A K_1 & K_2 & K_3 feltétel klasszikus formája és neve közismert: az egyenletek felsorolása mellett, „egyenletrendszer" a nevük.

K_1 & K_2 & K_3 azonban így is megadható

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|+|f_3(x)| = 0,$$

vagy

$$(f_1(x))^2+(f_2(x))^2+(f_3(x))^2 = 0$$

stb.

$(K_1 \vee K_2)$ & K_3 megadható például

$$|f_1(x)\cdot f_2(x)|+|f_3(x)| = 0,$$

vagy

$$(f_1(x)\cdot f_2(x))^2+(f_3(x))^2 = 0,$$

vagy

$$|f_1(x)\cdot f_2(x)|+(f_3(x))^4 = 0$$

stb. módon is.

* E dolgozat a [7] cikk folytatása, ezért a fejezetszámozás is folytatólagos, tartalmilag a szerzőnek a [7]-ben említett kollokviumon tartott előadása részletesebb kifejtésével foglalkozik.

$\bar{K}_1 \vee (K_2 \,\&\, K_3)$ megadása történhet a

$$\big(|\mathrm{sg}\,(f_1(x))|-1\big)\cdot\big(|f_2(x)|+|f_3(x)|\big)=0$$

relációval és számos más fomában is.

Látható a példákból az is, hogy egy feltételrendszer feltételeinek számával (számosságával) kapcsolatban indokolt az óvatosság. (Sajnos az „*n* egyenlet, *n* ismeretlen" kezdetű varázsszövegek és ökölszabályok máig is szilárdan tartják magukat a köztudatban és — sajnos — számos tankönyvben is.)

Az előző példákban a „feltételek száma csökkent". Egyszerűen adhatók azonban példák — a megoldhatóság változatlanul hagyása mellett — feltételek számának növelésére is.

Legyen adva még egy, például a

$$K_4(x)=\big(f_4(x)=0\big)$$

feltétel! Klasszikus szóhasználattal az

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2(x)=0,$$
$$f_3(x)=0$$

három egyenletből álló egyenletrendszer „egyenértékű" a következő

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2(x)=0,$$
$$f_3(x)=0,$$
$$f_4(x)\cdot\big(\mathrm{sg}\,(f_4(x))+1\big)\cdot\big(\mathrm{sg}\,(f_4(x))-1\big)=0$$

négy egyeletből álló egyenletrendszerrel, vagy az

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2(x)=0,$$
$$f_3(x)=0,$$
$$\big(f_1(x)\big)^2+\big(f_2(x)\big)^4=0,$$
$$\big(f_2(x)\big)^6+\big(f_3(x)\big)^8=0$$

öt egyenletből álló egyenletrendszerrel stb.

Mint ismeretes, az egyes feltételek közötti függőség, illetve függetlenség fogalma elvileg számos nehézséget képes kiküszöbölni; ezek tárgyalása azonban nem képezi e cikk célját. Érdemes azonban megjegyezni, hogy míg a legutolsó példából rögtön látszik, hogy elég vagy csak a három első egyenlettel vagy csak a két utolsóval foglalkozni, a gyakorlatban egészen más a helyzet. Meggyőző példát szolgáltat erre az az eset, amelyben $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ rendre például másod-, harmad-, illetve negyedfokú polinom, a negyedik és ötödik egyenlet bal oldala pedig nem faktorizált, hatványsor formában van megadva.

Geometriai interpretációban a helyzet *lényegesen áttekinthetőbb.* Így minden feltétel (kijelentés) valamilyen (esetleg üres) halmaz egy indikátora (lásd [7]), és ez a kijelentés úgy is felfogható mint amely a szóban forgó halmazt *generálja.* Így tehát az egész problémakör az egyes feltételek (kijelentések) által generált halmazokkal végzett műveletekre (illetve a kijelentéskalkulusra) vezethető vissza.

Feltételrendszerek (pontosabban feltételek) megoldásának folyamata a feltétel (úgynevezett „megengedett") átalakításokkal történő átalakításaiból áll. Ezek az átalakítási műveletek feltételekből feltételeket (illetve kijelentésekből kijelentéseket) képeznek. A „megoldás" valamilyen értelemben a kiinduló (egyenletnél, relációnál) feltételnél, kijelentésnél *előnyösebb, használhatóbb, egyszerűbb.* (Természetesen hasonló a helyzet több megoldás létezése esetében is.)

4. Ellentmondó feltételek kezelése

Mint már szó volt róla, feltételrendszerek helyett helyesebb feltételt mondani, és ésszerű, és sokszor szükséges is, a feltételrendszert alkotó feltételeket összekapcsoló „ÉS" művelet helyett más műveletek szerepeltetését is megengedni. Mivel az itteni tárgyalás bevezető és illusztratív célú, a következőkben — egyszerűség kedvéért — csak a klasszikus „ÉS" művelettel összekapcsolt feltételekből álló eset szerepel, és feltételrendszeren is ilyent kell érteni.

Ellentmondó feltételrendszerek a gyakorlatban két, egymás határesetének tekinthető módon szoktak felmerülni. Az egyik esetben statisztikailag kezelhető véletlen tömegjelenségekkel, a másikban egyedi helyzetekkel kapcsolatban jelentkezik „megoldandó" ellentmondásos feltételrendszer. (A sztochasztikus modellek tárgyalása külön tanulmányt igényel, ezért a következőkben csak egyedi, determinisztikus esetek szerepelnek. Ezek az esetek speciális valószínűségeloszlásoknak felelnek meg.)

Az itt következő felsorolás az eljáráscsaládoknak csak rövid, általános jellemzését tűzi ki célul, részletes bemutatásuk, összehasonlító és kritikai elemzésük külön dolgozat feladata.

Hangsúlyozni kell, hogy az említésre kerülő eljárások — habár lineáris esetben a legegyszerűbbek — nemcsak lineáris egyenletrendszerek esetében alkalmazhatók.

1. eljáráscsalád

A kielégítendő feltételek halmazából valamilyen szabály szerint képzett részhalmaz valamilyen értelemben vett megoldása lesz az eredeti feltételrendszer (egy) „megoldása".

2. eljáráscsalád

A kielégítendő feltételek halmazából valamilyen szabály szerint képzett részhalmazok (részhalmaz) valamilyen értelemben képzett megoldásaira (megoldására) támaszkodva, valamilyen eljárással (például átlagolással) képezhető az eredeti feltételrendszer (egy) „megoldása".

3. eljáráscsalád

A feltételrendszer megoldását a megoldáshoz konvergáló sorozat fomájában előállító eljárások közül sok (lineáris esetekben lásd például [4], [5] és [6]) olyan, hogy az eljárások által szolgáltatott sorozat ellentmondó feltételrendszer esetében is képezhető. Ilyen esetekben, ha a szóban forgó sorozat konvergens, ennek határértéke lesz az ellentmondó feltételrendszer „megoldása". Ha az említett sorozat nem konvergens, akkor e sorozatra támaszkodó valamilyen eljárás eredménye definiálja az eredeti ellentmondó rendszer (egy) „megoldását". (Természetesen az ilyen eljárások között kitüntetett szerepe van a különböző határértékképzési módszereknek. Ezekre vonatkozóan lásd például [3] és [10].)

4.a. eljáráscsalád

Ha a feltételrendszer egyes elemei külön-külön mind kielégíthetők, akkor az egyes feltételek (kijelentések) által generált halmazok mindegyikében felvehető egy-egy elem (pont). Ezeknek az elemeknek a halmaza jellemezhető olyan szempontból, hogy az elemek mennyire *zsúfoltan,* mennyire *tömören* helyezkednek el. (Elhelyezési tömörség értelmezésére vonatkozóan lásd [1], [2], [8] és [9].) Az egyes feltételek által generált halmazból úgy választva ki egy-egy elemet, hogy az ezekből az elemekből álló halmaz maximális tömörségű legyen, egy így keletkező (vagy az összes vagy bizonyos így keletkező) halmaz felhasználható az eredeti ellentmondó feltételrendszer „megoldásának" definiálására. Néhány lehetséges mód a következő.

Legyen a tömörség a GINI-féle mérőszámmal jellemezve! Legyen egy „megoldás" egy minimális GINI-féle szóródási értékű elemrendszer súlypontja.

Legyen a tömörség a kiválasztott elemrendszer legszűkebb konvex burka térfogatával jellemezve! Definiáljon egy „megoldást" egy minimális térfogatot szolgáltató elemrendszer súlypontja.

Legyen a tömörség a kiválasztott elemrendszer köré írható legszűkebb gömb, a „külgömb" sugarával jellemezve! Az eredeti rendszer (egy) „megoldását" értelmezi e gömb középpontja.

4.b. eljáráscsalád

Feltételrendszerek megoldására szolgáló eljárások egy része a feltételrendszerből származtatott valamilyen szélsőértékfeladatot old meg. Az említett szélsőértékkereső eljárások nagy része ellentmondó feltételrendszerek esetében is alkalmazható, és a kapott eredmény segítségével definiálhatók különböző „megoldások".

5. eljáráscsalád

Feltételek és feltételrendszerek esetében számos esetben többféleképp is definiálható ezek közötti eltérés, pszeudoszemimetrika, pszeudometrika, szemimetrika, metrika vagy valamilyen hasonló, metrika jellegű, azok *„távolságával"* szorosabb kapcsolatban levő jellemző. Ha ily módon definiálható az ellentmondó feltételrendszerhez egy valamilyen értelemben legközelebbi, nem ellentmondó rendszer (vagy rendszerek), ez utóbbi nem ellentmondó rendszer (vagy rendszerek) megoldása (vagy megoldásai) segítségével értelmezhető az eredeti ellentmondó rendszer egy megoldása (megoldásai). (A képződő távolságok pedig legtöbbször valamilyen módon alkalmazhatók az ellentmondásosság mértékének jellemzésére.)

Ellentmondó feltételrendszer egyes feltételei által generált halmazok meghatározott sugarú környezeteit véve, a sugárértékeket olyan alkalmas módon változtatva, hogy a környezethalmazoknak legyen nem üres közös része, az előzőkkel szoros kapcsolatban levő „megoldások" definiálhatók.

Megjegyzések

1. Gyakorlati alkalmazások szempontjából nagyon fontos annak állandó figyelemmel kísérése és ellenőrzése, hogy az egyes általunk végzett átalakítások a valóságban értelmezhetők-e, megengedettek-e, illetve a végeredményt *hogyan kell helyesen értelmezni*. Sokszor előnyös a megoldási folyamatnak megfelelő gyakorlati folyamatok — ha ilyenek vannak — felderítésére törekedni.

2. Nem konvergens sorozatokból konvergens sorozatok képzése sokszor már egészen egyszerűen, például csúszó (mozgó) közepeléssel vagy különböző simító eljárásokkal (egyszerű digitális szűrők alkalmazásával) is kielégítően elvégezhető. (Hasonló a helyzet a lefedési és a kitöltési stb. sűrűségek egzakt értelmezésénél is.)

3. A feltételrendszer minden egyes feltételének külön-külön megoldható volta sokszor súlyos megkötés, amit különböző eljárásokkal fel lehet oldani — ha a feladat gyakorlati természete szempontjából ez megengedhető. Egy ilyen „önmagával is ellentmondó" feltétel valamilyen eljárással pótolható például két egyenként kielégíthető, de együttesen kielégíthetetlen feltétellel. (E feltételek által generált halmazok metszete tehát üres lesz.)

(Az önmagukban ellentmondó feltételek fellépése esetében gyakran célszerűbb az egész feltételrendszert egységes egészként felfogva új megfelelő rendszerrel pótolni az előzőt az egyes kielégíthetetlen feltételeknek a többitől független úton történő kicserélése helyett.)

4. Egy ellentmondó feltételrendszer ellentmondásosságának, kielégíthetetlenségének mérése a geometriai interpretációban nagyon egyszerűen elvégezhető tömörségi mérőszámokkal is.

Ha a feltételrendszer elemei által generált halmazokat vesszük, ezek bizonyos elhelyezkedési tömörségi mérőszáma is alkalmas alapot ad az ellentmondásosság, kielégíthetetlenség mérésére.

5. A 4.b. eljáráscsalád a 4.a. eljáráscsaládnál bővebb.

A tömörségi mérőszámok felhasználásával definiált megoldások megkeresése nyilván szélsőértékprobléma (problémák) megoldását igényli (igénylik).

Érdemes még megemlíteni azt a gyakorlatilag hasznosítható tényt, hogy bizonyos feltételekkel, szélsőértékkereső eljárások birtokában, gyökök meghatározása, gyökmeghatározó eljárások birtokában pedig szélsőértékkeresési feladatok oldhatók meg.

6. Néhány példa az 5. eljáráscsaládnál említett távolságjellemzőre:

Ha a feltételrendszer lineáris egyenletekből áll, ezek egyenként egy-egy vektorral jellemezhetők. E vektorok valamilyen távolságaival definiálhatók feltételek távolságai is.

Az előzőhöz hasonló módon definiálhatók távolságok polinomok esetében is.

A feltételek által generált halmazok szimmetrikus differenciájának (és még több más származék halmazának) valamilyen mértéke (ha ilyen definiálható) alkalmas lehet a feltételek közötti különböző jellegű „távolságok" mérésére.

Ilyen vizsgálatoknál előnyösen használhatók nemcsak objektumpárok, hanem objektumhármasok, objektumnégyesek stb. egymástól való eltérését jellemző függvények is.

7. Azoknál a módszereknél, amelyeknél a feltételrendszer minden egyes feltételének külön-külön kielégíthetőnek kell lennie, jogosult lehet egy-egy kielégíthetetlen feltételt (egy) őhozzá legközelebbi kielégíthetővel helyettesíteni.

8. Néhány utalástól eltekintve az itteni vizsgálatokban nem szerepelt a „megoldások" halmazának számossága. Ilyen általános tárgyalásnál erre nincs is mód. Sok esetben az eljárások csak egy lehetséges megoldást szolgáltatnak.

9. A feltételek különböző módon származtatott rendszereivel, valamint a feltételek számával (egyáltalán az egzisztenciájával) kapcsolatos megjegyzések szó szerint alkalmazhatók feltételes szélsőértékfeladatok esetében is.

10. Az olyan esetekre, amelyeknél a logikai „ÉS" műveleten kívül más műveletek (például „VAGY", „NEM" stb.) is szerepelnek, az egyes feltételeket összekötő műveletként, az itt elmondottak nem mindig vihetők át minden változtatás nélkül; ennek oka főleg a szimmetria-tulajdonságok hiányában van. Ahol szimmetria jellegü tulajdonság, például dualitás jelentkezik, a hasonlóság is nagyobb mértékű.

IRODALOM

[1] Benedikti István: Halmazrendszerek extremális tömörségű elrendezéseivel kapcsolatos problémák, I. *MTA III. Oszt. Közl.* **19** (1969), 359—374.

[2] Benedikti István: Halmazrendszerek tömörségéről, *MTA III. Oszt. Közl.* **20** (1971), 329—340.

[3] Hardy, G. H.: *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford 1956.

[4] Pogány Csaba: Geometriai approximációs módszerek el nem tűnő determinánsú lineáris egyenletrendszerek megoldására. *Gépek és programok* 5. kötet 1963. 81—102. old.

[5] Pogány Csaba: Megjegyzések lineáris egyenletrendszerek geometriai megoldási módszereiről, *Gépek és Programok* 6—7. kötet 1963. 33—35. old.

[6] Pogány Csaba: Lineáris egyenletrendszerek megoldása geometriai közelítő módszerekkel, *MTA III. Oszt. Közl.* **17** (1967), 151—160.

[7] Pogány Csaba: Ellentmondó feltételrendszerek kezeléséről, I. *MTA III. Oszt. Közl.* **19** (1969), 383—386.

[8] Tölgyesi László: Egy elhelyezési problémakörről, I. *MTA III. Oszt. Közl.* **19** (1969), 333—344.

[9] Ruda Mihály: Alakzatrendszerek tömörségével kapcsolatos vizsgálatok, *MTA III. Oszt. Közl.* **23** (1974), 203—237.

[10] Zeller, Karl: *Theorie der Limitierungsverfahren.* Springer Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.

(Beérkezett: 1973. XI. 5.)

ALAKZATRENDSZEREK TÖMÖRSÉGÉVEL KAPCSOLATOS VIZSGÁLATOK

Írta: RUDA MIHÁLY

1. Bevezetés

Ez a dolgozat olyan geometriai kérdésekkel foglalkozik, amelyek valamilyen kapcsolatban állnak alakzatok elhelyezésének tömörségével. A szereplő témák széles területet ölelnek fel, így ennek a cikknek fő célja nem részletes elemzés, hanem az utóbbi időben ezen a területen felmerült kérdések és a velük kapcsolatos fogalmak összefoglalása. Így a közölt tételeket itt nem bizonyítjuk, és a gyakorlati, illetve elméleti alkalmazásokat sem részletezzük. Hasonlóan, az egyes fogalmak és állítások összes kézenfekvő általánosítását sem tárgyaljuk, hanem általában a legegyszerűbb modelleket alkalmazzuk. (Néhány esetben azonban jelezzük az általánosítás lehetőségeit is.) Következő dolgozatok feladata lesz a vizsgált területek részletes feldolgozása.

Az itt tárgyalt kérdések nemcsak elméleti szempontból, hanem gyakorlati feladatokhoz, például fizikai, kémiai problémákhoz való kapcsolódásuk miatt is érdeklődésre tarthatnak számot. (Közvetlenül kapcsolódó fizikai kérdésként anyagszerkezeti, kristálykémiai problémákat említhetünk, erről l. például a [8] könyvet.) Többek között ennek, az utóbb említett fizikai, kristálykémiai kapcsolatnak is tulajdonítható, hogy az általunk vizsgált elhelyezési problémáknál általában nem kerül előtérbe az egyes elhelyezett elemek alakjának fontossága, — például egyszerűen pontelhelyezéseket vizsgálunk, vagy csupán gömb alakú elemek esetére szorítkozunk — hanem egymáshoz viszonyított elhelyezkedésüket tekintjük elsősorban. Ezen belül főleg azt vizsgáljuk, hogy az egyes elrendezések elemei valamilyen adott szempont szerint mennyire tömören, illetve mennyire lazán helyezkednek el. A tömörség (lazaság) mértékét az elhelyezéseken értelmezett függvények értékeivel jellemezzük.

A következőkben elsősorban olyan elrendezésekkel foglalkozunk, melyek elemszáma végtelen. Itt két esetet különböztethetünk meg. Állhat egy elrendezés eleve (megszámlálható) végtelen sok elemből, például akkor, amikor a teljes sík egy négyzetrácsának minden csúcspontjába elemként egy egységkört helyezünk. Hasonlóképpen végtelen sok elemű elrendezéshez juthatunk egy véges elemszámú elrendezésből kiindulva úgy, hogy egy eljárást adunk, melynek segítségével egy n elemű elrendezésből egy $n+k$ elemű elrendezésbe juthatunk, tetszőlegesen nagy n értékekre is. Az utóbbi esetben még két lehetőség van. Vagy változatlanul hagyjuk a kiindulásként adott n elemet, és csak a k új elemet kell megadni, vagy az eredeti n elem közül is megváltoztatjuk néhánynak a helyzetét, nagyságát, alakját. Ennek a megkülönböztetésnek elsősorban az egyes problémák megfogalmazásakor van jelentősége.

Az általunk vizsgált tömörségi függvények (véges elemszámú elrendezéseknél) nagyrészt szerepelnek BENEDIKTI [1], [2], TAKÁCSY [12], TÖLGYESI [13] dolgozatában. Az itt tárgyalt általános problémákra — kiemelve az eloszlásokkal kapcsolatos vizsgálatok fontosságát — POGÁNY CSABA hívta fel a szerző figyelmét, ez a dolgozatban szereplő speciális kérdések jelentős részére is vonatkozik.

Bár halmazelrendezések kitöltési, lefedési sűrűsége az adott elrendezés tömörségének egy jellemzője, most itt nem utalunk a széles körben vizsgált kitöltési és lefedési problémák gazdag irodalmára.

A következő szakaszokban a tárgyalt kérdéseket a szereplő tömörségfüggvények tulajdonságai szerint csoportosítjuk.

2. Távolságösszeg mérőszám

Halmazelrendezések tömörségének jellemzésére kézenfekvő az egyes elemek között mérhető távolságokat felhasználni. Távolságként például a szokásos halmaztávolságokat vehetjük. Ugyanilyen módon jellemezte például C. GINI statisztikai vizsgálatoknál diszkrét pontrendszerek szóródását, az egyes pontpárok távolságának összegével (l. például [14]). Diszkrét pontrendszerek távolságösszeg minimumát vizsgálja az [5] dolgozat, hét pontból álló rendszer esetére. A távolságösszeg függvénnyel, mint halmazrendszerek tömörségének mértékét kifejező értékkel foglalkozik [1], [12], [13] dolgozat.

Cikkünkben egységesen a következő jelölést használjuk. Ha ettől eltérünk, külön jelezzük.

Jelölés: Legyenek a h_i elemek $(i=1, 2, \ldots)$ egy síkon elhelyezett zárt körlemezek, melyeknek legfeljebb határpontjaik közösek. Ezeknek a körlemezeknek különféle elrendezésével különféle H halmazokat képezünk. Egy-egy ilyen H elrendezésen értelmezünk különféle $s_j(H)$ $(j=1, 2, \ldots)$ tömörségfüggvényeket.

Elempárok távolságösszege

1. DEFINÍCIÓ. Rendeljünk egy H elrendezés minden egyes h_i eleméhez kölcsönösen egyértelműen egy-egy p_i pontot. Legyen.

$$s_1(H) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \delta(p_i, p_j),$$

ahol $\delta(p_i, p_j)$ a p_i és p_j pont távolsága.

MEGJEGYZÉSEK. 1. Pontok közti távolságok helyett tekinthetünk közvetlenül a h_i elemeken értelmezett távolságokat, például a $\delta(h_i, h_j)$ távolság lehet a két elem halmaztávolsága, halmazeltérése vagy az $\frac{1}{2}\int\limits_{g_{i,j}} \delta(p_i, p_j)\,\mathrm{d}f$ integrál (ahol $p_i \in h_i$, $p_j \in h_j$, $\delta(p_i, p_j)$ a p_i, p_j pontok távolsága, $g_{i,j}$ a h_i és h_j elem *Descartes*-szorzata) stb.

2. A fenti definícióban szereplő p_i pontok megválasztása különféleképpen történhet. A p_i pontot rögzíthetjük a h_i-hez annak belsejében vagy egy külső pontban. A rögzítést feloldva bizonyos tartományokon, például h_i belsejében vagy egy adott környezetében, tetszőlegesen helyezhető el p_i. Ilyenkor, ha extremalitásra törekszünk, a p_i pontok helyzete függ az egész H elrendezéstől valamint a többi p_j, $j \neq i$ pont helyzetétől, és fordítva.

Az [1], [12] és [13] dolgozatban is szerepel a következő meghatározás.

2. DEFINÍCIÓ. Az eddigi jelöléseket használva, a h_i elemekhez rögzített p_i pontot „fix mérőpontnak”, a mozgathatót „lebegő mérőpontnak” nevezzük. A megfelelő extremális elrendezéseket és a hozzájuk tartozó tömörségfüggvény értékeket fix, illetve lebegő mérőpontos extremumoknak hívjuk.

MEGJEGYZÉS. A fix és a lebegő mérőpont fogalma nemcsak az $s_1(H)$ (távolságösszeg) függvénynél, hanem minden olyan tömörségfüggvénynél is értelmezhető, ahol a tömörséget (lazaságot) egyes pontok helyzetével jellemezzük. Ugyanígy beszélhetünk fix, illetve lebegő részhalmazokról is.

Az [1] dolgozatban szerepel a következő

1. Kérdés. Milyen különbségek, kapcsolatok vannak a fix és a lebegő mérőpontos extrémumok között? Milyen kapcsolat, illetve különbség van egy adott H elrendezés fix, illetve lebegő mérőpontos tömörségértéke között? Adott H elhelyezésnél mi lesz a lebegő mérőpontok extremális tömörségértéket szolgáltató elhelyezkedése?

Egy speciális tétel kimondható arra az esetre, amikor a h_i elemek nemcsak körök, hanem tetszőleges dimenziós gömbök is lehetnek.

1. TÉTEL. *Legyen a H elrendezés r sugarú kongruens gömbök n elemű halmaza. Rögzítsük a p_i pontokat a h_i elemek (gömbök) középpontjába. Jelölje ekkor T az $s_1(H)$ értékét. Jelölje továbbá T' a lebegő mérőpontos távolságösszeg minimumát ugyanarra a H elrendezésre, feltéve, hogy $p_i \in h_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Ekkor $T' > T - \frac{n^2}{2} \cdot r$.*

Az 1. tétel különféle általánosításait, illetve specializálását tartalmazza a

2. TÉTEL. *Megtartva az 1. tétel jelöléseit:*

a) *Egydimenziós esetben (amikor a gömbök intervallumok),*

ha n páros, $T' = T - \frac{n^2}{4} r$,

ha n páratlan, $T' = T - \frac{n^2-1}{4} r$.

b) *Ugyancsak egydimenziós esetben, ha intervallumoknak egy sorozatát tekintjük, melyre a h_i intervallumok a_i átmérőinek összege korlátos: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = d$, és a H elrendezés olyan, hogy a h_i elemeknek egyetlen torlódási pontja van, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{T'}{T - \frac{1}{2} d \cdot n} = 1$, (ahol n az elemek száma).*

c) *Tetszőleges h_i tartományokból álló megszámlálható H elrendezésekre igaz a $T' \leqq T$ reláció, melyben nem véges elemszámú elrendezésekre az egyenlőség is felléphet.*

Lebegő mérőpontos extrémumok vizsgálata már aránylag egyszerű H elrendezések esetén is bonyolult diszkussziót igényel. Ilyen vizsgálatok szerepelnek az [1], [12] és [13] dolgozatokban.

A továbbiakban fix mérőpontos tömörségfüggvényeket tekintünk.

Egydimenziós elrendezések

Sok érdekes probléma merül fel már egy egyenesen elhelyezett intervallumsorozatra vonatkozó $s_1(H)$ függvény vizsgálatakor is. Tekintsünk most ilyen kérdéseket! Általában az $s_1(H)$ minimumát keressük, tehát a H elrendezés feltétlenül összefüggő. (A h_i zárt intervallumok végpontjaikban érintkeznek.) Elegendő tehát egy szakasz — például egységszakasz — különböző véges vagy végtelen felbontásait vizsgálni.

Végtelen sok elemből álló felosztást (mint ahogy a bevezetésben említettük) kétféleképpen is nyerhetünk. Vagy úgy osztjuk fel az intervallumot, hogy az egyes részintervallumok hossza egy előre adott a_i sorozat: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$, például $a_i = \frac{1}{2^i}$, vagy egy olyan eljárást alkalmazunk, mely egy minden határon túl növekvő elemszámú felbontás sorozatot határoz meg, például az i-edik lépésben i egyenlő részre osztjuk az egységszakaszt.

3. DEFINÍCIÓ. Az első esetben azt mondjuk, hogy a h_i elemeket „sorozatban" adjuk meg, míg a másodikban „iterált" megadási módról beszélünk.

Minden határon túl növekvő elemszámú felosztásnál az $s_1(H)$ érték nem maradhat korlátos. Ilyenkor csak a végtelenhez tartó n felosztásszámhoz viszonyított nagyságrendet figyeljük. A következőkben főleg az utóbbi problémával foglalkozunk, bár speciális esetekben véges elemszámú elrendezésekre is meghatározzuk az $s_1(H)$ függvény értékét.

3. TÉTEL. *Legyenek adva az egységintervallum H_n n elemű felosztásai. Annak, hogy a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1(H_n)}{\alpha \cdot n} \leqq 1 \tag{1}$$

egyenlőtlenség teljesüljön, ahol α alkalmasan választott rögzített, korlátos, pozitív érték, szükséges és elégséges feltétele a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_{i,n} = c$$

egyenlőség teljesülése, ahol c korlátos, $a_{i,n}$ a H_n elrendezés i-edik eleme. Ha a h_i elemek nagyság szerint monoton csökkenő sorrendben követik egymást, akkor az (1) *egyenlőtlenségben ha $\alpha = c - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ $\left(\text{egységszakasz felbontásánál } \alpha = c - \frac{1}{2}\right)$ az egyenlőség teljesül.*

MEGJEGYZÉSEK. 1. Nem korlátos intervallumnak a felosztásánál az (1) egyenlőtlenség nyilván nem teljesülhet.

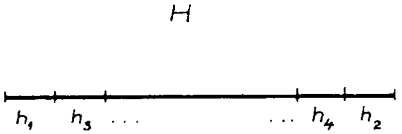
2. A 3. tételben adott feltétel teljesülésének szükséges feltétele, hogy a h_i részintervallumoknak egyetlen torlódási pontja legyen — ez azonban nem elégséges feltétel. Egy olyan sorozatra, melyre teljesül a 3. tétel feltétele, példa az a h_i sorozat, melynek elemhosszai: $a_i = (1-q)q^{i-1}$ mértani sorozat $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1, 0 < q < 1\right)$. Ekkor $\alpha = \frac{1+q}{1-q}$. Olyan elemsorozatra, mely az egységszakaszt tölti ki, egyetlen torlódási

pontja van, melyre azonban az $s_1(H)$ érték mégsem arányos az elrendezés n elemszámával, példa az olyan h_i elemekből álló felbontás, ahol a h_i elemek a_i hosszára $a_i = \frac{1}{i^2} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}}$ $(i=1, 2, ..., n)$, hiszen van olyan pozitív c érték, melyre ekkor $\lim_{n \to \infty} s_1(H_n)/\log(n) \cdot n > c$.

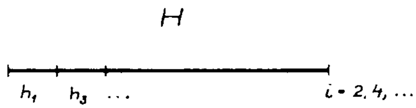
Érdemes megvizsgálni, hogy egy H elrendezés elemeinek megváltoztatásával hogyan változik H tömörsége, például $s_1(H)$. Ilyen kérdésekkel foglalkozik a [2] dolgozat is. Általában az egyes H elrendezéseken, illetve a h_i elemsorozatokon értelmezett műveleteket vizsgálunk a következő szakaszban.

Műveletek a H elrendezéseken

Egy intervallum végtelen sok részintervallumra való felbontásánál, ha a részintervallumoknak egyetlen torlódási pontja van, a következő két módon indexezhetjük a h_i elemeket: 1. ha a torlódási pont a H szakasz belsejében van, vagy a H véges elemszámú, a h_i elemeket (i = 1, 2, ...) a H szakasz két szélétől indulva, befelé haladva egyesével váltogatva indexezzük, (1. ábra),



1. ábra



2. ábra

2. ha a h_i elemek torlódási pontja a H egyik végpontjában van, akkor a másik végpontból indulva kettesével indexezzük az egymás után következő részintervallumokat. Az ellenkező paritású indexeket a torlódási ponthoz rendeljük (2. ábra).

Ez az indexezési eljárás a következő kérdések és állítások megfogalmazását könnyíti. Több torlódási pont esetén az elemek indexezése bonyolultabb.

3. Definíció. A H intervallumfelbontásokon a következő műveleteket vizsgáljuk:

a) Felcseréljük a h_i és h_j elemeket úgy, hogy az indexezést meghagyjuk, vagy úgy, hogy az indexeket is felcseréljük.

b) Egy vagy több intervallum hosszának növelése mellett más részintervallumok hosszát csökkentjük.

c) Speciálisan, két szomszédos h_i, h_{i+2} intervallum közös határpontját mozgatjuk a h_i és h_{i+2} egyesítésén belül.

Megjegyzés. A h_i részintervallumokat mindig úgy változtatjuk, hogy a teljes H szakasz változatlan marad.

4. Tétel. *Ha egy H_1 és egy H_2 felbontás azonos elemszámú, vagy végtelen sok elemű, de mindkét rendszer egyetlen torlódási ponttal rendelkezik, akkor a* 3. *definícióban adott* a) *és* c) *műveletek ismételt alkalmazásával H_1-ből H_2-be juthatunk (és fordítva). Ugyanezt elérhetjük a* b) *művelet ismételt alkalmazásával is.*

Ez utóbbi állítás véges elemszámú H felbontásoknál, vagy ha megengedjük, hogy egy lépésben megszámlálhatóan végtelen sok elemet is megváltoztassunk, triviálisan igaz.

5. TÉTEL. *A szakasz elején leírt indexelési módot alkalmazva (legfeljebb egy torlódási pontot tartalmazó H elrendezésekre) a következő műveletek növelik az $s_1(H)$ értékét:*

a) *Felcserélünk két olyan h_i és h_j részintervallumot, melyekre, ha j páros, $j>i+1$, ha j páratlan, $j\geqq i+1$ és h_j hosszab mint h_i.*

b) *Egy vagy több h_j elemet növelünk, és a H szakasz hosszának változatlanul hagyásával olyan i indexű h_i részintervallumokat csökkentünk, hogy* $\min(j)>\max(i)+1$, *illetve ha* $\min(j)$ *páratlan, akkor* $\min(j)>\max(i)$.

c) *A* b) *pont állítása speciálisan, szomszédos részintervallumok közös határpontjának mozgatására is igaz.*

A fenti pontoknak megfelelően megadhatók azok a feltételek is, melyek az $s_1(H)$ értékének csökkenését vagy változatlanul maradását biztosítják az egyes h_i elemek cseréje vagy másfajta változtatása közben.

4. DEFINÍCIÓ. A szakaszcsere (l. 3. definíció a) pont) ismétlésével — de közvetlenül is — megadhatjuk a H elrendezések különféle átrendezéseit. Ilyenkor a h_i elemek változatlanok, csak indexezésük (sorrendjük a H elrendezésben) változik meg.

Az 5. tétel következménye a következő

6. TÉTEL. *Egy adott h_i elemekből álló intervallumfelosztás különböző átrendezései közül minimális $s_1(H)$ függvényértéket ad, vagyis „legtömörebb" elrendezésű az, melyben a szakasz elején leírt indexezést alkalmazva $h_i\geqq h_j$, ha $j>i+1$, illetve ha j páratlan, akkor $j=i+1$ esetén is. Ilyen elrendezéshez úgy jutunk, hogy a H intervallum két végpontjából indulva nagyság szerint monoton csökkenő sorrendben egyesével váltogatva helyezzük el az intervallumfelbontás h_i elemeit. A leglazább felbontást (H összefüggő), vagyis amikor $s_1(H)$ maximális, az az elrendezés adja, melyben $h_i\leqq h_j$, ha $j>i+1$, ha j páratlan, akkor $j=i+1$ esetén is.*

Az előző két tétel után azonnal látható, hogy adott h_i elemek mellett legtömörebb, leglazább, illetve tetszőleges rögzített tömörségű intervallumfelosztást különféle elrendezések is adhatnak.

5. DEFINÍCIÓ. Egy H szakasz felbontását szimmetrikusnak nevezünk, ha minden páratlan i indexre a h_i és h_{i+1} elemek hossza egyenlő. Azt mondjuk, hogy szimmetrizálunk egy felosztást, ha minden páratlan i indexre a h_i és h_{i+1} elemeket olyan részintervallumokkal helyettesítjük, melyek hossza az előző kettő hosszának számtani közepe.

7. TÉTEL. *Tetszőleges H intervallumfelosztás szimmetrizálása változatlanul hagyja $s_1(H)$ értékét.*

8. TÉTEL. *Megszámlálható végtelen sok elemű, egyik végpontjában egyetlen torlódási ponttal rendelkező H intervallumfelbontás szimmetrizáltja az eredeti elrendezés 1/2 arányú kicsinyítésének és a kicsinyített példánynak a torlódási pontra való tükrözésének egyesítése.*

Egy irányban monoton fogyó hosszúságú h_i elemekből álló H elrendezés — nevezzük ezt röviden monoton rendezésűnek — szimmetrizáltja olyan, hogy az őt alkotó h_j részintervallumok egy legtömörebb elrendezését adja, az $s_1(H)$ mérőszámra vonatkozóan (l. a 6. tételt). Érdekes összehasonlítás adódik egy h_i szakaszsorozat legtömörebb rendezésére és monoton rendezettjének szimmetrizáltjára adódó $s_1(H)$ érték között.

Különböző H intervallumfelosztások szimmetrizáltja is lehet azonos. A 8. tétel következményeként kimondható azonban a következő

9. TÉTEL. *Minden határon túl növekvő elemszámú, azonos szimmetrizáltat adó rendszerek monoton rendezésű határhelyzete egyértelmű.*

2. Kérdés. Hogyan adható meg nem egyetlen torlódási ponttal rendelkező végtelen sok elemű rendszerek szimmetrizáltja? Hogyan határozható meg „iterált" megadási móddal (3. definíció) nyert rendszerek szimmetrizáltja? Ez utóbbi kérdés általánosabb formában is felmerül, mivel az elrendezés egyes elemeit csak mint határhelyzetet ismerjük, ezért a velük való bármely operáció definíciós problémákat vet fel.

10. TÉTEL. *Legyen adott a H_n elrendezések egy olyan sorozata, melynek létezik egy H határhelyzete. Ekkor a H_n elrendezések szimmetrizáltjainak sorozata rendelkezik határelrendezéssel, mely éppen a H szimmetrizáltja.*

6. DEFINÍCIÓ. Egy H elrendezésen belüli átlagolásnak nevezzük azt a műveletet, amikor — a szakasz elején leírt indexezési módot alkalmazva — a szomszédos h_i, h_{i+2} elemeket, melyek hossza a_i, illetve a_{i+2}, az $a_i-\alpha\cdot\Delta$ és $a_{i+2}+\alpha\cdot\Delta$ hosszúságú elemekkel helyettesítjük, ahol $\Delta=a_i-a_{i+2}$, α rögzített érték, melyre $0<\alpha<1$. Az α értékét az átlagolás súlyának nevezzük.

7. DEFINÍCIÓ. n különböző H_i $(i=1,2,\dots,n)$ elrendezés α_i súlyokkal vett átlagának nevezzük az $a_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{i,j}$ hosszúságú elemekből álló elrendezést, ahol $a_{i,j}$ a H_i elrendezés $h_{i,j}$ elemének hossza, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ és az elemek sorrendjét a j index határozza meg.

A következő tételben az előző definíciókkal kapcsolatos néhány egyszerű állítást sorolunk fel.

11. TÉTEL. a) *Monoton sorozaton belüli átlagolás megtartja a monotonitást.*

b) *Véges elemszámú intervallumfelbontáson az átlagolást minden szomszédos elempárra tetszőlegesen sokszor ismételten alkalmazva, intervallumfelosztások egyenlőközű felosztáshoz tartó sorozatát kapjuk.*

c) *Különböző, monoton rendezésű intervallumfelosztások átlaga megtartja a monotonitást.*

3. Kérdés. A tétel b) állítása általánosítható-e (és ha igen, akkor hogyan) végtelen sok elemű intervallumfelbontás esetére?

A következőkben a különböző intervallumfelosztások geometriai tulajdonságai és a rajtuk értelmezett $s_1(H)$ tömörségérték közti kapcsolatokkal foglalkozunk.

Az $s_1(H)$ függvényérték nagyságrendjének vizsgálata

Tekintsük egységintervallumok különféle felbontásait.

12. TÉTEL. *Azoknak az n elemű h_i $(i=1,2,\dots,n)$ részintervallum sorozatoknak, melyekre teljesül a 3. tétel feltétele (a h_i elemek számával arányos nagyságrendű $s_1(H)$ függvényértéket szolgáltató elrendezés állítható elő belőlük), legtömörebb H_n elrendezéseire* (1. a 6. tétel) *igaz a*

$$\lim_{n\to\infty} s_1(H_n)/\alpha\cdot n = 1$$

reláció, ahol $\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\left(i-\frac{1}{2}\right)(a_{2i-1}+a_{2i})$, *($a_i$ a h_i elem hossza, az indexezés az előző szakaszban adott módon történik).*

Speciálisan, ha például a h_i elemek a_i hossza: $a_i=(1-q)q^{i-1}$, akkor $\alpha=$ $=\frac{1+q^2}{2(1-q^2)}$ $(0<q<1)$. Ez az érték mindig kisebb, mint a monoton rendezésű intervallumfelosztásra adódó $\alpha=\frac{1+q}{1-q}$ érték. A leglazább elrendezésben (1. 6. tétel) viszont $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot s_1(H_n)}{n^2}=1$.

13. TÉTEL. *Az egységintervallum tetszőleges n elemű H_n felbontásaira*

$$\frac{4\cdot s_1(H_n)}{n^2}\leqq 1\leqq\frac{2\cdot s_1(H_n)}{n}.$$

A jobboldali egyenlőtlenségben az $a_1=1$, $a_i=0$ $(i=2,3,\dots)$ elfajult elemsorozat legtömörebb elrendezésére, illetve az $n=2$ esetre teljesül az egyenlőség. A baloldali egyenlőtlenségben az egyenlőség minden „sorozatban” megadott (ld. 3. definíció) *végtelen elemszámú h_i elemsorozat leglazább elrendezésére teljesül.*

Többdimenziós elrendezéseknél, ha a p_i mérőpontok konvex burka egységátmérőjű, $s_1(H_n)\leqq c\cdot n^2$, ahol c a dimenziószám függvénye.

4. Kérdés. A c érték monoton csökkenő függvénye a dimenziószámnak, vagy sem? Adott dimenziószám esetén milyen korlát adható c értékére?

5. Kérdés. Milyen közbeeső $s_1(H_n)$ értékek realizálódhatnak a 13. tételben adott határok között? Milyen elrendezések tartoznak ezekhez a közbeeső értékekhez?

14. TÉTEL. *Az egységintervallumon minden „sorozatban” adott, végtelenhez tartó elemszámú felbontásból bármely $c\cdot n^2$ $\left(0<c<\frac{1}{4}\right)$ nagyságrend elérhető egy megfelelő átrendezéssel. Ennél kisebb nagyságrend érték nem mindig érhető el* (erről l. még a 15. tételt). *A* 3. *tétel feltételét kielégítő h_i elemsorozatokra viszont mindig van olyan elrendezés, melyre $\lim_{n\to\infty}\frac{s_1(H_n)}{n\cdot f(n)}=1$, ahol $f(n)$ bármely olyan függvény lehet, melyre $\lim_{n\to\infty} f(n)=\infty$, de $f(n)<n$ és $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{f(n+k)}=1$ minden rögzített pozitív egész*

k-ra. Ez utóbbi feltétel, a fent adott kikötések mellett, szükséges és elégséges a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_1(H_n)}{n \cdot f(n)} = 1$ *teljesüléséhez.*

Az $s_1(H_n)$ függvény nagyságrendjének egy másfajta változtatására ad példát a következő tétel.

15. TÉTEL. *Legyen a h_i elemek a_i hossza $a_i=(1-q)q^{i-1}$ $(i=1, 2, \ldots$ mértani sorozat). Ekkor, ha a h_i elemeket monoton csökkenő sorrendben helyezzük el, a q $(0<q<1)$ függvényében tetszőleges, az előző tételben leírt $f(n)$ függvényt megadhatunk úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1(H_n)}{n \cdot f(n)} = 1,$$

ha $\frac{1}{2}<f(n)<\frac{1}{6}n$. Az $f(n)=\frac{1}{6}n$, illetve az $f(n)=\frac{1}{2}$ határeset a $q=1$, illetve a $q=0$ határesetben lép fel. Ha q értékével tartunk az 1 felé, akkor egy „iteráltan" megadható intervallumfelosztáshoz tartunk.

Tekintsünk most „iteráltan" megadott elrendezéseket!

16. TÉTEL. *Legyen H_n az egységintervallum n elemű egyenlőközű felosztása. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6 \cdot s_1(H_n)}{n^2} = 1. \tag{2}$$

Ha a H_n elrendezés h_i elemeinek a_i átmérői számtani sorozatot alkotnak, vagyis megfelelőn választott a_0 és d értékre $a_i=a_0+(i-1)\,d$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, akkor monoton rendezésben teljesül a (2) egyenlőség. Legtömörebb elrendezésben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8 \cdot s_1(H_n)}{n^2} = 1,$$

leglazább elrendezésnél (H összefüggő)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{24 \cdot s_1(H_n)}{5 \cdot n^2} = 1.$$

MEGJEGYZÉSEK. 1. Véges n-re a mértani sorozat, számtani sorozat és egyenlőközű felosztás esetén az $s_1(H_n)$ érték pontosan ismert. (Ezeket a képleteket itt nem közöljük.)

2. Érdekes, hogy az egyenletes felosztás és a monoton rendezésű számtani sorozat esetén $s_1(H_n)$ asszimptotikusan azonos.

3. Véges sok, véges indexű h_i elem cseréje monoton rendezésű felosztásoknál a $\lim\limits_{n\to\infty} s_1(H_n)$ értéket nem változtatja meg.

6. Kérdés. Melyek azok az n elemű intervallumfelosztások, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty} s_1(H_n)$ mindenfajta átrendezéssel szemben invariáns? Triviális példaként az egyenlőközű felosztás adható.

17. TÉTEL. *Ha monoton rendezésű, n elemű H_n elrendezések sorozatára*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1(H_n)}{c\cdot n^2} = 1, \tag{3}$$

ahol c egy tetszőleges, korlátos pozitív érték, akkor a H_n felosztások minden átrendezésére teljesül a (3) egyenlőség, természetesen a c értéke közben megváltozhat.

Különböző intervallumfelosztások átlagával (1. 7. definíció) kapcsolatban mondjuk ki a következő tételt.

18. TÉTEL. *Legyenek adva H_i elrendezések ($i=1, 2, \dots, n$) $h_{i,j}$ ($j=1, 2, \dots$) elemei. Ezeknek az elrendezéseknek α_i súllyal vett H átlagában a h_k és h_l elemek távolsága (a középpontok távolsága) egyenlő a $h_{i,k}$ és $h_{i,l}$ ($i=1, \dots, n$) elempárok távolságainak α_i súlyú átlagával. Következésképpen, intervallumfelosztások átlagán nyert $s_1(H)$ függvény az egyes felosztások $s_1(H_i)$ függvényeinek α_i súlyú átlagával egyenlő.*

MEGJEGYZÉS. Megszámlálhatóan végtelen sok elrendezés átlaga is értelmezhető, ekkor azonban kérdéses az átlagelrendezés egyes elemeinek létezése.

Távolságeloszlás függvények

8. DEFINÍCIÓ. Egy tetszőleges H elrendezés h_i elemeihez rendelt p_i „mérőpontok" között mért távolságok összességét a H elrendezésen értelmezett távolságeloszlásnak nevezzük.

7. *Kérdés.* Milyen távolságeloszlásokhoz található megfelelő H elrendezés?

Ez a kérdés általánosabb esetekben is felvethető. Tekinthetünk például tetszőleges metrikus teret. A háromszög egyenlőtlenség még ebben az esetben is bizonyos megkötéseket ad a távolságeloszlásra, kettőnél több pont esetén. Euklideszi-térben levő n elemű pontelrendezést egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza az $\binom{n}{2}$ távolság.

Egydimenziós elrendezéseknél maradva, a távolságeloszlás fogalma további általánosítást is kínál. Megszámlálható elemszámú elrendezéseken túl vizsgálhatjuk, hogy egy szakasz valamennyi pontpárján értelmezett folytonos távolságeloszlás milyen. Ebből a távolságeloszlásból integrálással nyerhetünk az $s_1(H)$-hoz hasonló tömörségfüggvényeket.

9. DEFINÍCIÓ. Az egyenes egy d átmérőjű H tartományán értelmezett $f(r)$ távolságeloszlás függvény legyen

$$f(r) = \int_R dx,$$

ahol $0 \leqq r \leqq d$, R pedig olyan x pontoknak a halmaza, melyekre x és $x+r$ is pontja a H-nak.

Például, ha H az egységintervallum, akkor $f(r) = 1-r$.

MEGJEGYZÉS. Ez és a következő definíció közvetlenül általánosítható magasabb dimenziós terekre.
Súlyfüggvények alkalmazásával a távolságeloszlás általánosabb formában is megadható.

10. DEFINÍCIÓ. Az egydimenziós H tartományon értelmezett $f(r)$ távolságeloszlás legyen

$$f(r) = \int_H s(x+r) \cdot s(x) dx,$$

ahol $s(x)$ a H-n értelmezett pontsűrűség függvény, melyre $s(x)=0$, ha $x \notin H$. A 9. definícióban $s(x)$ a H karakterisztikus függvénye.

8. Kérdés. Véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok elemű H elrendezésekhez hasonlóan folytonos távolságeloszlás esetén is kérdés: mikor létezik egy $f(r)$ függvényhez egy H elrendezés és egy azon értelmezett nem negatív $s(x)$ pontsűrűség.
A továbbiakban folytonos pontelhelyezés kérdéseivel — például azzal, hogy hogyan valósítható meg diszkrét, asszimptotikusan végtelen elemszámú elrendezésekről folytonos rendszerekre való áttérés — itt nem foglalkozunk.
Az eddigiekhez hasonlóan a továbbiakban is elsősorban egydimenziós elrendezéseket vizsgálunk.

Intervallumfelosztások tulajdonságai és tömörségük kapcsolata

A következő tételben néhány egyszerű állítást foglalunk össze.

19. TÉTEL. a) *Az egységintervallum n elemű felosztásai közül a monoton rendezésűek, az $s_1(H)$ függvény szerint tömörebbek, mint az egyenlőközű felosztás.*
b) *Ha két azonos elemszámú felosztás közül monoton rendezésben az egyik tömörebb mint a másik, akkor ezeknek egy legtömörebb, illetve leglazább átrendezésében* (1. 6. tétel) *is ugyanaz az elrendezés lesz tömörebb, illetve lazább. A fordított állítás is igaz, legtömörebb elrendezések tömörségértéke közti egyenlőtlenség monoton rendezésben megmarad, a leglazább elrendezésben megfordul.*
c) *A tétel* a) *állítása általánosabb formában is kimondható. Ha két n elemű, monoton rendezésű H_1 és H_2 felosztás $h_{1,i}$ és $h_{2,i}$ elemeinek $a_{1,i}$ és $a_{2,i}$ hosszára teljesül a*

$$\sum_{i=j}^{n} a_{1,i} < \sum_{i=j}^{n} a_{2,i} \tag{4}$$

egyenlőtlenség minden j-re, ($j=2, 3, \ldots, n$), *akkor* $s_1(H_1) < s_1(H_2)$.

A b) állítás alapján ugyanígy kapunk egyenlőtlenségeket a H_1 és H_2 legtömörebb, illetve leglazább elrendezésein fellépő $s_1(H)$ függvényértékek között. Ha az n elemszám minden határon túl növekszik, akkor a (4) egyenlőtlenség teljesülését elegendő egy tetszőleges véges j érték felett megkövetelni.

11. DEFINÍCIÓ. a) Egy intervallum egy H felosztását alulról konvexnek nevezzük, ha a felosztásban szomszédos h_i elemek δ_i differenciája, $\delta_i = h_{i+1} - h_i$ (az indexezéssel most egy irányban haladunk!) monoton növekszik. Ez a feltétel végtelen

sok elemű felosztásnál a differencia sorozat abszolút értékének és a h_i elemek hosszának monoton csökkenését jelenti. Végtelen sorozat tehát csak akkor lehet konvex, ha monoton rendezésű, de ez nem elégséges feltétel.

b) Egy véges h_i sorozatot alulról konkávnak mondunk, ha a δ_i sorozat monoton fogy. Ilyen felosztás nem lehet tetszőlegesen növekvő elemszámú, „sorozatban" adott elrendezés, hanem csak „iteráltan" megadott (l. 3. definíció) végtelen sorozat.

12. DEFINÍCIÓ. A konvex és konkáv sorozatokat monoton differenciasorozatú felosztásoknak nevezzük.

20. TÉTEL. *Konvex intervallumfelosztások az $s_1(H)$ függvény szerint mindig tömörebbek mint az azonos elemszámú egyenlőközű felosztás, a konkáv elrendezések viszont lazábbak mint az egyenlőközű.*

21. TÉTEL. *A szimmetrizálás* (5. definíció) *meghagyja a konvexitást és konkávitást.*

Ez utóbbi tétel alapján a monoton differenciasorozatú elrendezések osztályokba sorolhatók. Egy osztályba soroljuk a közös szimmetrizálttal rendelkező felosztásokat. Az egyes osztályokat éppen a közös szimmetrizált reprezentálhatja.

A szimmetrizálás folytonos halmazokon is értelmezhető. Legyen az $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvénynek az $[a, b]$ intervallumra vonatkozó szimmetrizáltja az a $g(x)$ függvény, melyre $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(b-x+a))$. Ilyen módon folytonos pontsűrűség függvényeket is szimmetrizálhatunk. A szimmetrizálás megtartja a folytonosságot, konvexitást, konkávitást, integrálhatóságot és integrálható függvényekre teljesül az $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ egyenlőség.

Többdimenziós vizsgálatok

Az $s_1(H)$ függvény (1. 1. definíció) bármely olyan elrendezésen értelmezhető, melynek elemei között valamilyen távolságérték van adva. A távolságérték például az elempárokon értelmezett tetszőleges valós függvény is lehet (1. az 1. definíció utáni megjegyzést). Így az egyenesen elhelyezkedő elrendezések vizsgálata után most másfajta térben adott halmazokat is tekintünk.

Elsősorban olyan H elrendezésekkel foglalkozunk, melyekben a h_i elemekhez rendelt p_i pontok egy euklideszi tér egy rácsának csúcspontjai. Különféle rácsokban elhelyezett rendszerek kapcsolatáról mondható ki a

22. TÉTEL. *Affinitással egymásba vihető $\{p_i\}$, illetve $\{r_i\}$ $(i=1, 2, \dots, n)$ pontrendszereken adott s_1 függvényre $s_1(\{p_i\})=c\cdot s_1(\{r_i\})$, ahol c az adott affinitástól függő, n-től független korlátok közé esik, $1/K<c<K$. Következésképpen, különböző, de egymásba affinitással átvihető asszimptotikusan végtelen elemszámú pontrendszereken adódó s_1 függvényértékek csak konstans szorzóban térhetnek el egymástól. (Még akkor is, ha az elrendezések nem korlátosak.) Rácsosan elhelyezkedő elemek elrendezésein adódó $s_1(H)$ értékek nagyságrendi vizsgálatát elegendő tehát egyfajta rácson, például négyzetrácson (kockarácson) elvégezni.*

Jelölje $G(n, d)$ a d dimenziós euklideszi tér egy (egységélű) kockarácsának n különböző csúcsába helyezett $\{p_i\}$ $(i=1, 2, ..., n)$ pontrendszeren az $s_1(\{p_i\})$ függvény minimumát a $\{p_i\}$ rendszer különböző elhelyezésein. $G(n, d)$ tehát a legtömörebb n elemű kockarácsos elrendezés tömörségértéke.

23. TÉTEL. *Tetszőleges n-re $(n=1, 2, ...)$ és tetszőleges d dimenzióértékre $(d=1, 2, ...)$*

$$\frac{n(n-1)}{2} \leqq G(n, d) \leqq \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

A baloldali egyenlőtlenségben egyenlőség csak az $n \leqq 2$ esetben, a jobboldalon a $d=1$ dimenzióban teljesül.

Bonyolultabb meggondolásokkal egy nagyságrendben pontos becslés is adható.

24. TÉTEL.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(d+1)G(n, d)}{d\sqrt{d}\; n^{2+(1/d)}} \leqq 1 \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{4(d+1)G(n, d)}{d \cdot n^{2+(1/d)}}.$$

A d dimenziószám növekedésével a $G(n, d)$-re a fenti egyenlőtlenséggel adott korlátok nagyon eltávolodnak egymástól.

Az alsó korlát tovább élesíthető.

25. TÉTEL.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(d+1)\sqrt{\pi}\; G(n, d)}{\sqrt[d]{(d/2)!}\; n^{2+(1/d)}} \geqq 1.$$

A d értékével is végtelenhez tartva (a Stirling formulát alkalmazva),

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{d\to\infty} \frac{\sqrt{e\pi}\; G(n, d)}{\sqrt{2d}\; n^{2+(1/d)}} \right) \geqq 1.$$

Az előző két (24., 25.) tétel nem csak rácsos, hanem általában egyenletes sűrűséggel elhelyezkedő pontrendszerekre is alkalmazható. Természetesen előbb definiálni kell egy pontelrendezés egyenletességét. A későbbiekben, az 5. szakaszban ilyen kérdésekről lesz még szó.

Az előzőkben adott becslések a d dimenziószám szigorúan monoton csökkenő függvényei. Maga $G(n, d)$ nyilvánvalóan szigorúan monoton fogyó függvénye d-nek (adott n érték mellett).

Nem csak rácsos elrendezéseknél, hanem általában többdimenziós halmazok esetén merül fel a

9. Kérdés. Milyen alaki tulajdonságokkal rendelkeznek az $s_1(H)$ függvény szerint extremális elrendezések? Speciálisan, négyzetrácsban milyenek a legtömörebb (leglazább) p_i pontelhelyezések?

A kérdés utóbbi része és a következő 10. kérdés az [1] dolgozatban szerepel, egy hasonló formában.

Legyenek a H elrendezés h_i elemei d dimenziós egységkockák. A p_i mérőpontok, melyek a kockák középpontjai, legyenek egy egységélű kockarács csúcspontjai.

10. Kérdés. Az ilyen elrendezésekben, ha adott n elemszámra $s_1(H_n)$ minimális,

a) H_n egyszeresen összefüggő-e (a kockák határpontjait is H_n-hez számítjuk),

b) H_n konvex burkán belül elhelyezhető-e egy újabb $n+1$-edik egységkocka (amelynek p_{n+1} középpontja rácspont),

c) igaz-e, hogy a legtömörebb elrendezés, az n elemszám minden határon túl való növekedésével, gömb alakhoz tart?

Az a) pontot összefüggőségi, a b)-t lyukmentességi, a c)-t kikerekedési (kigömbölyödési) problémának nevezzük.

MEGJEGYZÉSEK. 1. A *Steiner*-féle szimmetrizálás alkalmazásával LÜKŐ GÁBOR mutatta meg, hogy az a) és c) pontra igenlő felelet adható. A kikerekedés feltételének teljesüléséből asszimptotikusan végtelen elemszámú elrendezéseknél becslés is adható $G(n, d)$ értékére. A 23—25. tételben adott becslések ettől abban különböznek, hogy véges elemszám esetén is érvényesek.

2. Véges elemszám esetén különféleképpen jellemezhetjük egy elrendezésnek gömbhöz való legjobb közelítését. Jellemző lehet az $s_1(H)$ függvény minimalitása (l. az előző megjegyzést), esetleg más, a következőkben definiált $s_i(H)$ függvény extremalitása. Figyelembe vehetjük a kikerekedés jellemzésekor a $\varrho(p_i, p_j)$ távolságok eloszlásának valamilyen speciális tulajdonságát, például a maximális távolság (az átmérő) minimalitását.

A 10. kérdéshez hasonlóan, speciálisan felvethető a következő probléma.

11. Kérdés. Téglatestbe rendezett egységkockák n elemű H_n rendszere — melyben a p_i pontok négyzetrácsot alkotnak — adott n elemszám mellett akkor szolgáltatja-e a minimális $s_1(H_n)$ értéket, ha a téglatest kocka, és a különböző téglatestek közül a kockához közelebb álló téglatesten lesz-e $s_1(H_n)$ kisebb?

Négyzetrácsos elrendezések tömörségének vizsgálatával kapcsolatban elsősorban az [1] dolgozatra hívjuk fel a figyelmet.

Egyéb, távolságösszeg típusú tömörségfüggvények

13. DEFINÍCIÓ. Jelölje $s_2(H)$ a H elrendezés h_i elemeihez rendelt p_i pontoknak a H súlypontjától vett távolságainak összegét. H súlypontját különféleképpen definiálhatjuk. Vehetjük a p_i pontok súlypontját, a h_i elemek (vagyis H) szokásos értelemben vett súlypontját, vagy valamilyen más súlyozott átlagként adódó súlypontot.

Súlypont helyett tekinthetünk valamilyen más szempontból kitüntetett pontot is.

14. DEFINÍCIÓ

$$s_3(H_n) = \inf_x \sum_{i=1}^{n} \varrho(x, p_i),$$

ahol x a H elrendezést tartalmazó tér egy kijelölt pontja, ϱ az adott térben értelmezett távolság, p_i az n elemű H_n elrendezés h_i eleméhez rendelt mérőpont. Az $s_3(H)$ értékét a H elrendezés x pontra vonatkozó tömörségének nevezzük.

Természetesen, az x pont elhelyezkedésével kapcsolatban különféle megkötéseket is tehetünk.

Ugyanezeket a jelöléseket alkalmazva:

15. DEFINÍCIÓ.

$$s_4(H_n) = \sum_{i=1}^{n} \min_{j \neq i} \varrho(p_i, p_j),$$

a legközelebbi mérőponttól vett távolságok összege.

16. DEFINÍCIÓ.

$$s_5(H_n) = \sum_{i=1}^{n} \max_{j} \varrho(p_i, p_j),$$

a legtávolabbi mérőponttól vett távolságok összege.

12. Kérdés. Adott H elrendezésekre milyen összefüggések találhatók az $s_1(H), \dots, s_5(H)$ függvények között?

26. TÉTEL. *Ha egy H elrendezés h_i elemei szigorúan konvex (diszkjunkt, legfeljebb határukon közös ponttal rendelkező) zárt tartományok, akkor a $p_i \in h_i$ feltétel mellett a „lebegő mérőpontos"* (1. 2. definíció) *$s_2(H), \dots, s_5(H)$ függvények minimumát szolgáltató p_i pontok elhelyezkedése mind a négy függvény esetén egyértelmű.*

Az $s_1(H)$ függvényhez adható olyan elrendezés, ahol a minimális függvényértéket (lebegő mérőpontoknál) nem egyértelmű p_i pontrendszer adja — még szigorúan konvex h_i elemek esetén is.

Az $s_1(H), \dots, s_5(H)$ függvényekkel kapcsolatban még elmondhatjuk a következőket: Az $s_5(H)$ érték az n elemű H elrendezés átmérőjének n-szeresével arányos. $s_4(H)$ tetszőlegesen nagy elemszám esetén is korlátos marad, ha H korlátos. Ha az x vonatkoztatási pont a H elrendezés konvex burkának belsejében van, akkor $s_3(H)$ is az elrendezés átmérőjének n-szeresével arányos.

A 23., 24., 25. tételben adott becslésekhez hasonlóan általában nem rácsos elrendezésekre is adhatók korlátok az $s_j(H)$ $(j=1, \dots, 5)$ függvényekre. Ha az n elemű H_n elrendezés h_i elemei r_i sugarú, d dimenziós gömbök, akkor egy triviális alsó becslést ad az

$$s_1(H) \geqq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (r_i + r_j), \quad i \neq j$$

egyenlőtlenség. Az egyenlőtlenség esetenként éles, ugyanis az n elemszámot, a d dimenziószámot és az r_i értékeket megfelelően kiválasztva egyenlőség is felléphet, például, ha $d=2$ és $n=3$.

Általában az $s_1(H), \dots, s_5(H)$ értékek függnek a h_i elemsorozattól, illetve az elemek elhelyezésétől, így szoros kapcsolatban állnak az elrendezések más tömörségi jellemzőivel, például a kitöltési sűrűséggel.

Alaki kérdések

Olyan halmazelrendezéseknél, melyekre a szokásos alakjellemző tulajdonságok, például konvexitás, összefüggőség nem értelmezhetők, mivel például diszjunkt elemekből állnak, felmerülhet az igény az elrendezés alakjának valamilyen jellemzésére. Ilyenkor közvetett módszereket alkalmazhatunk. Jellemzi egy halmazelrendezés alaki tulajdonságait az elrendezés elempárjain értelmezett távolságeloszlás.

27. TÉTEL. *Euklideszi térben összefüggő T tartomány pontpárjain értelmezett távolságeloszlás* (1. 9., 10. definíció) *folytonos és pozitív a* $[0, d)$ *intervallumon, ahol d a T tartomány átmérője.*

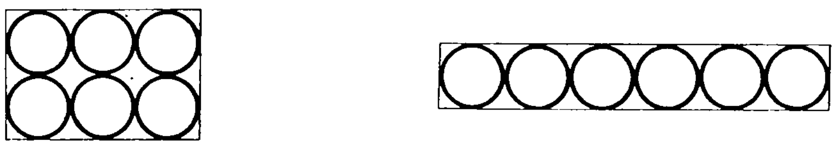
A folytonosság és pozitivitás elég közeli komponensekből álló, nem összefüggő tartományokon is megmarad.

3. Halmazrendszerek elhelyezési sűrűségének vizsgálata

Legsűrűbb körelhelyezések

Alakzatok legsűrűbb kitöltést szolgáltató elhelyezése, illetve a legritkább lefedés problémája, ma már klasszikus feladatkörnek számít. Adott alakzat, például a sík, egy gömbfelület, a tér egy rétege stb. kitöltésénél általánosabb kérdés az, ha a kitöltendő alakzatnak csak a típusát rögzítjük — például csak azt követeljük meg, hogy téglalap legyen —, és az adott típusú, de különböző alakú tartományok legsűrűbb kitöltését vizsgáljuk. Ilyen feladat megoldására példa a következő tétel is.

28. TÉTEL. *Téglalap n $(n \leqq 10)$ kongruens körrel akkor tölthető ki a legsűrűbben (adott n esetén), ha a kitöltő körök négyzetrácsos elrendezést alkotnak úgy, hogy a téglalap belsejébe eső minden rácspont körközéppont* ($n=6$-ra l. pl. a 3. ábrát). *Természetesen a téglalap mindig a köröket tartalmazó legszűkebb téglalap. A kitöltési sűrűség ekkor $\pi/4$.*



3. ábra

29. TÉTEL. $n=11$ *vagy* $n \geqq 14$ *esetén a legsűrűbb kitöltést nem négyzetrácsos elrendezések adják.*

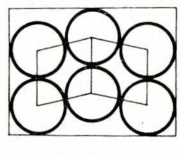
A 28. és 29. tételről l. a [11] dolgozatot.

13. Kérdés. $n=12$ és $n=13$ esetén a négyzetrácsos rendszerek adják-e a legsűrűbb kitöltést, vagy sem?

14. Kérdés. Mely elrendezések lesznek extremálisak, ha $n>10$?

15. Kérdés. Az olyan téglalapokon, melyek nem tölthetők ki a legsűrűbben egy négyzetrácsot adó, n kongruens elemből álló körelrendezéssel, mi lesz a legsűrűbb kitöltést adó körelhelyezés? (Ha $n \leqq 10$, akkor az n függvényében nyilván nem itt lesz a sűrűség maximuma, l. a 28. tételt.)

MEGJEGYZÉS. A 15. kérdésre néhány esetben ismert a válasz (l. [11]). Például, ha $n=6$ és a téglalap a és b oldalainak aránya olyan, hogy $\frac{2}{3} \leqq \frac{a}{b} \leqq \frac{5}{2+2\sqrt{3}}$, akkor a legsűrűbb kitöltést a 4. ábrán látható elrendezés adja.

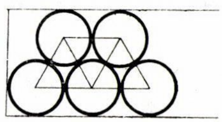


4. ábra

Hasonlóan igaz a következő tétel is (l. [11]).

30. TÉTEL. *Ha $n \geqq 14$ és a téglalap rövidebbik a oldala olyan, hogy $2r \leqq a \leqq (2+\sqrt{3})r$, ahol r a kitöltő körök sugara, akkor a legsűrűbb kitöltést szabályos háromszögrácsos elhelyezés adja* (l. 5. ábra), *vagyis ha $a=(2+\sqrt{3})r$.*

A 30. tétel következménye: Végtelenbe nyúló s szélességű síkbeli sávok r sugarú körökkel való kitöltésénél, ha $2r \leqq s \leqq (2+\sqrt{3})r$, a legsűrűbb elhelyezés az $s=(2+\sqrt{3})r$ értéknél adódik (l. 5. ábra).



5. ábra

16. Kérdés. Mi lesz az extremális elrendezés, ha $s>(2+\sqrt{3})r$? Speciálisan, térbeli gömbkitöltések vizsgálatánál, érdekes a $(2+\sqrt{3})r<s<4r$ eset.

Téglalapok körökkel való kitöltéséhez hasonlóan más, egy vagy több paramétertől függő alakzatok kitöltését is vizsgálhatjuk. Ilyenkor a kitöltési sűrűség elérhető maximuma ezektől a paraméterektől is függ.

Ilyen feladat például egy csonkakúp palást (speciálisan: henger, kúp, körgyűrű) kongruens körökkel történő legritkább lefedése. Ennek megoldása már 3—4 lefedő kör esetén is elég bonyolult, sőt egy vagy két kör elhelyezésére is igen változatos megoldások adódnak a kúpfelület alakjának függvényében. Ez utóbbi említett, speciálisnak tűnő kérdéskörnek gyakorlati, például méréstechnikai szempontból van nagy jelentősége.

Természetesen nem csak a tartalmazó alakzat változhat egy vagy több paraméter függvényében, hanem a kitöltő (lefedő) alakzatok is.

17. Kérdés. Melyek azok a téglalapok, amelyek n (nem feltétlenül kongruens) körrel legsűrűbben kitölthetők? Hogyan kell ehhez a legsűrűbb kitöltéshez a körök sugárarányát megválasztani?

18. Kérdés. Hogyan kell megválasztani n kör sugarát (legalább az egyik sugárérték határozottan pozitív), hogy a legkisebb tartalmazó téglalapon belüli kitöltési sűrűség az adott n-re minimális legyen? Létezik-e a minimum?

Az elhelyezett alakzatok megválasztási lehetőségét korlátozva, kiköthetjük például azt, hogy az alakzatokat egy előre adott készletből választjuk ki.

A feladat egy további általánosítása az, amikor nem adunk meg előre egy tartalmazó alakzatot (alakzat típust). Az elhelyezés a síkon (a térben) tetszőlegesen történhet. A kitöltési sűrűséget az elhelyezés által meghatározott tartományra vonatkoztatjuk, vagy általában valamilyen, az elhelyezésen értelmezett függvénnyel (tömörségfüggvény) jellemezzük az adott elhelyezés sűrűségét. Ilyen függvények szerepeltek az előző, 2. szakaszban is $(s_1(H), \ldots, s_5(H))$.

A következőkben ilyen típusú kérdésekkel foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért általában csak körök vagy pontok elhelyezéseit vizsgáljuk. Az elhelyezési sűrűséget a továbbiakban egy újabb tömörségi jellemzőnek tekintjük.

Kitöltési sűrűséggel kapcsolatos tömörségfüggvények

Először néhány definíciót adunk meg, melyek korlátos elrendezések kitöltési sűrűségét jellemző tömörségfüggvényeit írják le. A szereplő H elrendezések h_i körök (pontok) síkbeli korlátos halmazai.

17. DEFINÍCIÓ. $s_6(H)$ a H konvex burkának területe.

18. DEFINÍCIÓ. $s_7(H)$ a H konvex burkának kerülete.

19. DEFINÍCIÓ. $s_8(H)$ a H köré írható legkisebb kör, azaz a körülírt kör (külkör) területe.

20. DEFINÍCIÓ. $s_9(H)$ a H körülírt körének kerülete.

21. DEFINÍCIÓ. $s_{10}(H)$ a H-nak saját konvex burkára vonatkozó kitöltési sűrűsége.

22. DEFINÍCIÓ. $s_{11}(H)$ a H körülírt körére vonatkozó kitöltési sűrűség.

23. DEFINÍCIÓ. $s_{12}(H)$ a H átmérőjének hossza.

Az $s_{12}(H)$ érték nyilván egyenlő a konvex burok átmérőjének hosszával. A körülírt kör átmérője azonban hosszabb is lehet. Így egy új függvényt ad a

24. DEFINÍCIÓ. $s_{13}(H)$ a H külkörének átmérőhossza.

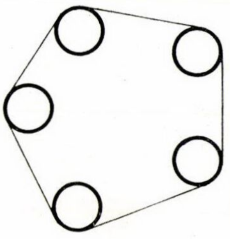
Természetesen s_{13}, s_8, s_9 egymással arányos értékek: $s_9 = s_{13}\pi$, $s_8 = (s_9/2)^2\pi$. A H halmaz szerkezetével szorosabb kapcsolatban áll a

25. DEFINÍCIÓ. $s_{14}(H)$ a H halmaznak súlypontjától való eltérése (vagyis a súlypont és a tőle legmesszebb eső pont távolsága).

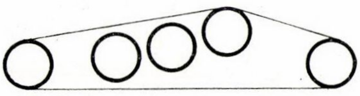
A súlyponttal kapcsolatban a 13. definíciónál tett megjegyzések itt is értelmezhetők. Súlypont helyett más, kitüntetett pontját is tekinthetjük a H-nak.

A 17—25. definíciók közül a 17., 18., 21., 23., 24. és 25. definícióhoz hasonló meghatározások szerepelnek a [2] dolgozatban.

A konvex burok területének nagysága, a konvex burokra vonatkozó kitöltési sűrűség sokszor nem eléggé jellemző az illető elrendezés tömörségére. Például, a 6. ábrán látható körrendszer legalább olyan tömörnek — ha nem tömörebbnek — tekinthető, mint a 7. ábra szerinti elrendezés. A konvex burok területe az utóbbi esetben mégis lényegesen kisebb. Indokolt tehát kimondani a következő definíciót.



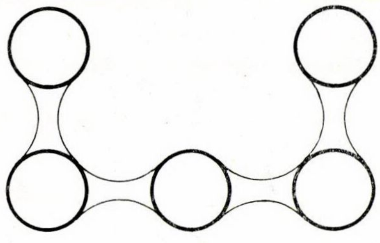
6. ábra



7. ábra

26. DEFINÍCIÓ. Jelölje $s_{15}(H)$ a H elrendezés ϱ körkonvex burkának területét. A ϱ esetenként egy rögzített pozitív érték. (1. 8. ábra.)

A ϱ körkonvexitás fogalmával a [7] dolgozat foglalkozik. A ϱ körkonvex burok helyett más, a H elrendezéshez hasonlóan jól illeszkedő tartomány is szerepeltethető. Ilyen tartományokkal a későbbiekben, az 5. szakaszban, foglalkozunk még.



8. ábra

27. DEFINÍCIÓ. Jelölje $s_{16}(H)$ a $H\,\varrho$ körkonvex burkának kerületét!

28. DEFINÍCIÓ. Jelölje $s_{17}(H)$ a $H\,\varrho$ körkonvex burkára vonatkozó kitöltési sűrűséget!

MEGJEGYZÉS. Egy elrendezés annál tömörebbnek tekinthető, minél nagyobb egy adott ϱ értékre vonatkozó körkonvex burka.

31. TÉTEL. *Egy adott H elrendezésre az $s_6(H), \dots, s_{17}(H)$ függvényértékek között a következő egyenlőtlenségek érvényesek:*

(1) $s_{15} \leqq s_6 \leqq s_8$, *tehát* $s_{11} \leqq s_{10} \leqq s_{17}$,

(2) $s_{12} \leqq s_{13} \leqq 2s_{14}$,

(3) $s_7 \leqq s_{16}$ *és* $s_7 \leqq s_9$.

Ha H véges sok h elemből áll, de nem egyetlen kör, akkor

(4) $s_6 < s_8$, $s_7 < s_9$, $s_{11} < s_{10}$ *és* $s_{12} < s_{13}$.

Ha a H ϱ körkonvex burka nem egy összefüggő konvex halmaz, akkor

(5) $s_{15} < s_6, \quad s_{10} < s_{17}, \quad s_7 < s_{16}.$

Az elhelyezési sűrűséget jellemzi a tömörségfüggvények következő két csoportja ($s_{18}, \ldots, s_{20}$ és $s_{21}, \ldots, s_{23}$) is. Jelölje $\delta(H, x)$ a sík (a tér) egy x pontjának a H halmaztól mért távolságát!

29. DEFINÍCIÓ.

$$s_{18}(H) = \int_M \delta(H, x)\, df,$$

ahol M-mel a H konvex burkát jelöljük.

30. DEFINÍCIÓ.

$$s_{19}(H) = \int_R \delta(H, x)\, df,$$

ahol R a H ϱ körkonvex burka.

31. DEFINÍCIÓ.

$$s_{20}(H) = \int_K \delta(H, x)\, df,$$

ahol K a H-hoz tartozó külkör.

Rendeljünk a H elrendezés minden egyes h_i eleméhez egy-egy p_i pontot! Jelölje $\lambda(x, h_i)$ az x pontnak a h_i elemtől vett távolságfüggvény értékét a p_i pontra vonatkozóan. $\lambda(x, h_i)$ infimuma azoknak a λ_p értékeknek, amelyekre $\lambda_p(p-p_i)=x$, ha $p\in h_i$. A λ távolságfüggvényről részletesebben l. [6].

Jelölje $\lambda(x, H)$ az $\inf_i \lambda(x, h_i)$ értéket!

32. DEFINÍCIÓ.

$$s_{21}(H) = \int_M \lambda(x, H)\, df.$$

33. DEFINÍCIÓ.

$$s_{22}(H) = \int_R \lambda(x, H)\, df.$$

34. DEFINÍCIÓ.

$$s_{23}(H) = \int_K \lambda(x, H)\, df.$$

Az előzőkhöz hasonlóan igazak a következő egyenlőtlenségek:

32. TÉTEL.

(1) $s_{19} \leqq s_{18} \leqq s_{20}, \quad s_{22} \leqq s_{21} \leqq s_{23},$

ha H véges elemszámú, de nem egyetlen kör, akkor

(2) $s_{18} < s_{20}$ *és* $s_{21} < s_{23},$

ha pedig H ϱ körkonvex burka nem egyezik a H konvex burkával,

(3) $s_{19} < s_{18}$ *és* $s_{22} < s_{21}.$

A fenti egyenlőtlenségek egy adott H rendszerre vonatkoznak. Különböző H elrendezéseknél az $s_6(H), \ldots, s_{23}(H)$ függvények (az $s_1(H), \ldots, s_5(H)$ függvényekhez hasonlóan) igen változatos módon viselkednek, így ezeknek a függvényeknek pontos és részletes leírása általában igen nehéz feladat. Itt most először néhány általános tulajdonságot vizsgálunk, melyek inkább közös vonásokat és nem annyira különbségeket emelnek ki.

Korlátossági kérdések

Az $s_6(H), \ldots, s_{23}(H)$ függvényértékek korlátosság szempontjából nem mutatnak lényeges eltérést, a következő értelemben.

33. TÉTEL. *Egy adott H elrendezésnél az $s_6(H), \ldots, s_9(H), s_{12}(H), \ldots, s_{16}(H)$ függvények korlátosságának szükséges és elégséges feltétele ezek bármelyikének korlátossága. Ha magának a H rendszernek a területe (térfogata) korlátos, akkor $s_{10}(H)$, $s_{11}(H)$ és $s_{17}(H)$ nullától való különbözősége és az $s_{18}(H), \ldots, s_{23}(H)$ korlátossága is ekvivalens a fenti kilenc függvény korlátosságával.*

Ezután az $s_6(H), \ldots, s_{23}(H)$ függvények közül csak a kitöltési sűrűséget közvetlenül jellemző függvényekkel foglalkozunk. (Ez a fenti tétel alapján jogosnak mondható. Továbbra is síkbeli körelrendezéseket vizsgálunk.)

Korlátos összterületű H rendszer esetén a sűrűség pozitivitását az elrendezés korlátossága biztosítja. Természetesen véges elemszámú rendszereknél, ha a h_i elemek korlátosak, automatikusan teljesül a korlátosság.

34. TÉTEL. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy megszámlálhatóan végtelen elemszámú H elrendezés korlátos lehessen, a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ korlátossága, vagyis a H összterületének korlátossága. Az a_i a h_i kör átmérőjének hosszát jelöli. A feltétel teljesülésekor a körülírt kör sugárhosszának R minimumára teljesül az $R < \frac{a}{2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}$ egyenlőtlenség,* ahol $a = \max a_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

MEGJEGYZÉSEK. 1. A tétel állítása nem triviális. Megadható olyan korlátos területösszegű H elrendezés (mely természetesen nem körökből áll), amely egyetlen elrendezésében sem korlátos (a H h_i elemei diszjunktak). Létezik viszont síkbeli konvex tartományoknak olyan rendszere is, melyben a h_i elemek a_i átmérőinek négyzetösszege nem korlátos, de maga a H elrendezés véges.

2. A tétel nem csak körökből álló H elrendezésekre igaz, hanem tetszőleges olyan H-ra is, amelynek h_i elemeire az a_i átmérők korlátosak és h_i területe arányos a_i^2-tel. Ugyanígy tetszőleges véges dimenziós euklideszi térben is $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^d$ szükséges és elégséges feltétele a H korlátosságának (a_i a h_i d dimenziós gömb átmérője).

A 34. tétel konstrukcióval bizonyítható, melyből a következő, többet mondó tétel is nyerhető.

35. TÉTEL. *Korlátos területösszegű körök végtelen sorozata elhelyezhető egy korlátos sugarú körön belül úgy, hogy a körközéppontok halmazának egyetlen torlódási pontja van. Előállítható olyan elrendezés is, amikor ez a torlódási pont a legszűkebb tartalmazó kör középpontja.*

19. Kérdés. Milyen más, meghatározott típusú korlátos elrendezés állítható elő? Például előállítható-e két vagy több (esetleg megszámlálható), a körülírt kör adott pontjaiban levő torlódási pontot tartalmazó elrendezés? Hogyan változik a különböző konstrukciókban H átmérője?

Az előbb említett konstrukcióból egy felső korlát adható a H köré írt legszűkebb kör sugarára. Ez egy alsó becslést ad a külkörben elérhető kitöltési sűrűségre.

36. TÉTEL. *Korlátos területösszegű* $H=\{h_i\}$ *megszámlálható körrendszer elhelyezhető úgy, hogy*

$$s_{12}(H) > \frac{1}{4+\frac{a^2}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2}+\frac{4a}{\sqrt{\sum a_i^2}}}.$$

MEGJEGYZÉSEK. 1. Ez a korlát lényegesen javítható, ha figyelembe vesszük az $a_1, \dots, a_n, \dots$ átmérősorozat sajátosságait.

2. n-féle körrel konvex, illetve ϱ körkonvex tartományon elérhető kitöltési sűrűségre ismertek felső korlátok. Ilyen eredmények találhatók a [7] dolgozatban.

3. Az elrendezés átmérőjére adott korlátokkal az előző szakaszban szereplő $s_1(H), \dots, s_5(H)$ függvények értékeit is jellemezzük.

Különféle sűrűségű rendszerek

Korlátos területösszegű H elrendezéseknél az átmérő korlátossága a kitöltési sűrűség (például $s_{10}(H)$, $s_{11}(H)$, $s_{17}(H)$) pozitivitását biztosítja csak. Ezen belül lehetnek közel nulla sűrűségű elhelyezések is, de konstruálhatók olyan rendszerek is, melyekben a kitöltési sűrűség 1-hez konvergál. (Továbbra is körelhelyezéseket vizsgálunk.)

20. Kérdés. Különböző a_i átmérősorozatokhoz milyen $s_{10}(H)$, $s_{11}(H)$, $s_{17}(H)$ értéket adó H elrendezések konstruálhatók?

21. Kérdés. Milyen körsorozatokból építhető olyan elrendezés, melynek sűrűsége az elemszám növekedésével 1-hez konvergál? Mi a konvergencia sebessége?

Jelölje H_m $(m=1, 2, \dots)$ az $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$ körrendszert. A $h_{i,j}$ körsorozat elemszámát lépésenként egyszerre n_i-vel növeljük. A H_m sorozat $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$ határhelyzetét jelöljük H-val.

37. TÉTEL. *Legyen egy, az előzőkben leirt* H_m *sorozat olyan, hogy* $\lim\limits_{m\to\infty} s_{10}(H_m)=$ $=s_{10}(H)=1$, *és* $H-H_m=\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$ *sűrűsége a H külkörére vonatkoztatva legyen* a^m*-nel arányos* (az a egy rögzített érték, $0<a<1$), *akkor* $\limsup\limits_{i\to\infty} n_i=\infty$. *Ha tehát* n_i *újabb kör elhelyezésével a H külkörére vonatkozó kitöltési sűrűség exponenciális sebességgel tart* 1*-hez, akkor ez tetszőlegesen sok kör elhelyezése után már csak úgy érhető el, hogy az m-medik lépésben elhelyezett körök számának* lim *superiorja végtelen.*

KÖVETKEZMÉNY. Egy kör (körökkel való) egységsűrűségű kitöltéséhez exponenciális sebességgel konvergáló rendszer lépéseként véges sok újabb kitöltő kör elhelyezésével, például egyenkénti elhelyezéssel, nem építhető fel.

38. TÉTEL. *Egy K kör kitölthető egy minden határon túl növekvő elemszámú körrendszerrel úgy, hogy található olyan a és b pozitív, korlátos konstans, melyre a K körben az m-edik lépésben elért kitöltési sűrűség, az előző tétel jelöléseit alkalmazva, olyan, hogy a körök egyenkénti elhelyezésekor* (a 37. tétel jelölésével $n_i=1$)

$$\frac{t(H-H_m)}{t(K)}<\frac{b}{m^a}, \quad 0<a<1,$$

ahol $t(H-H_m)$, illetve $t(K)$ a $H-H_m$ halmaz, illetve a K kör területét jelöli. Ugyanakkor bármely kitöltéshez adható olyan (korlátos) pozitív c konstans, hogy

$$\frac{t(H-H_m)}{t(K)}>\frac{c}{m^a}.$$

Az egységsűrűségű, illetve más, adott sűrűségű kitöltés (kitöltési sűrűség alatt például az $s_{10}(H)$ értékét értjük) elérésének elégséges feltételeit általában nehéz megadni, hiszen nem csak egy elemsorozatot, hanem az elemek egy megfelelő elhelyezését is meg kell adni. Szükséges feltételek könnyen nyerhetők. A 38. tétel következménye a

39. TÉTEL. *A $\lim_{m\to\infty} s_{10}(H_m)=s_{10}(H)=1$ egyenlőség teljesülésének szükséges feltétele $\left(H=\bigcup_{i=1}^{\infty} h_i\right)$, hogy minden m-re $(m=1,2,\ldots)$ teljesüljön a $\frac{b}{m^a}\cdot t(H)\leqq$ $\leqq \sum_{i=m}^{\infty} t(h_i)$ egyenlőtlenség, ahol a és b alkalmasan választott rögzített pozitív érték* $(0<a<1$; t a területet jelöli).

A 38. tétel alapján egy felső korlát is adható m kör által elérhető maximális $s_{10}(H_m)$ kitöltési sűrűségre.

40. TÉTEL. *Tetszőleges m elemű H_m körelrendezéshez található olyan pozitív a és b érték, $(0<a<1)$, hogy $s_{10}(H_m)\leqq\left(1-\frac{b}{m^a}\right)$.*

MEGJEGYZÉS. Ha m végtelenhez tart, akkor ez a korlát élesebb, mint az m-féle körrel elérhető kitöltési sűrűségre ismert $1-c^m$ korlát.

22. Kérdés. Adott h_i körsorozatnál milyen a, b és c értékek adhatók a fenti tételekben.

23. Kérdés. Milyen elégséges feltételek adhatók az $s_{10}(H)=\delta$, $0<\delta\leqq 1$ reláció teljesülésére (adott δ értékre)?

Egységsűrűség, illetve bizonyos $\delta, 0<\delta\leqq 1$ sűrűségek elérésére konstrukciók könnyen adhatók. Egy elégséges feltételt ad a következő tétel.

41. TÉTEL. *Ha a h_i elemeket egy divergens területösszegű, monoton nullához tartó h_j sorozatból válogatjuk, akkor az $s_{10}(H)$ függvény tetszőleges δ értéket $(0<\delta\leqq 1)$ felvehet. (Ugyanez elmondható a többi, kitöltési sűrűséget jellemző mérőszámról is.)*

Ilyen sorozatból ugyanis tetszőleges sorösszegű konvergens sor válogatható ki, még akkor is, ha az n-edikként választott elem nagyságára az előző $n-1$ elem függvényében felső korlátot adunk.

24. Kérdés. Adott δ kitöltési sűrűséghez $(0<\delta\leqq 1)$ van-e olyan nem divergens területösszegű körsorozat, melyből szintén válogatható δ sűrűséget adó h_i sorozat? Ha van, akkor milyen tulajdonságokkal rendelkezik?

Általában kérdéses, hogy mely tulajdonságaikkal jellemezzük a h_i sorozatokat. Milyen tulajdonságokat hozzunk kapcsolatba az elérhető maximális tömörségértékkel — nem csak a kitöltési sűrűség, de más tömörségfüggvények esetén is. Egy ilyen jól használható tulajdonság az $\bigcup_{i=m}^{\infty} h_i$ maradék sorozat területösszegének tulajdonsága (l. például a 37. tételt). Ugyanezt fejezheti ki — a h_i elemek nagyság szerint monoton rendezésében — a szomszédos elemek területaránya is. Általában megmarad azonban a

25. Kérdés. A h_i sorozat mely jellemzői állnak kapcsolatban az elérhető maximális tömörséggel — például a kitöltési sűrűséggel? Nevezetes átmérősorozatok esetén, például, ha a h_i elemek területei mértani sorozatot alkotnak, milyen tömörségek érhetők el?

A legegyszerűbb eset az, ha véges sok féle h_i elem adott.

26. Kérdés. n-féle körrel milyen tömörségű elrendezések állíthatók elő? Hogyan függ az elérhető tömörség (például a kitöltési sűrűség maximuma) a sugárhosszak arányaitól és az n-féle kör darabszám arányaitól?

A maximális kitöltési sűrűség felső korlátja n-féle körre ismert. Ld. [7]. Ez a korlát végtelenhez tartó elemszám esetén pontos.

Különféle elhelyezési eljárások realizálásakor, illetve adott, konkrét elhelyezések vizsgálatakor, probléma adódhat az egyes elemek nagyságának és helyének pontos meghatározásánál. Ilyen kérdések általában minden numerikus feladatnál felmerülnek.

27. Kérdés. Milyen pontossággal becsülhető egy adott H körelrendezésen egy tömörségi mérőszám — például $s_{10}(H)$ — vagy bármely más, a H halmazon értelmezett függvény, ha a H körelhelyezésben a sugárértékek és a középpontok koordinátái korlátozott pontossággal adhatók meg? Hogyan változik egy h_i körsorozattal elérhető maximális kitöltési sűrűség, például $s_{10}(H)$ maximuma, ha a h_i körök r_i sugarait Δ_i értékekkel megváltoztatjuk?

Különféle lehetőségek vannak: Véges sok fajta körnél minden sugárértéket egy Δ $(\Delta>0)$ értékkel növeljük vagy csökkentjük (az utóbbi esetben $\Delta<\min_i(r_i)$). Tetszőlegesen változtatjuk a sugarakat az eredeti érték körüli Δ sugarú intervallumban. Az r_i sugarakat egy i-től függő Δ_i értékkel változtatjuk.

Egy adott tartományra vonatkozó kitöltési sűrűség, például $s_{10}(H)$, változására adható egy becslés.

42. TÉTEL. *Ha egy H, maximális tömörségű elrendezésben a körök sugara r_i ($r_i \in [a, b]$) és a kitöltési sűrűség értéke δ, akkor ha a sugárértékeket egy Δ ($\Delta < a$) értékkel növeljük, és az $r_i + \Delta$ sugarú körökkel elérhető maximális kitöltési sűrűséget δ'-vel jelöljük, akkor*

$$\frac{\delta'}{\delta} > \frac{1}{1+2x+x^2},$$

ahol $x = \frac{\Delta}{a}$. Ha a sugárértékeket Δ-val csökkentjük, akkor

$$\frac{\delta'}{\delta} > 1-2x+x^2.$$

A tétel bizonyítása egyszerű nagyítás, illetve kicsinyítés felhasználásával nyerhető. Valamivel bonyolultabb módon egy élesebb becslés is adható. Az előző tétel jelöléseit alkalmazva:

43. TÉTEL. *Ha Δ-val növeljük az eredeti sugarakat, akkor*

$$\frac{\delta'}{\delta} > \frac{1+y+y^2}{1+x+x^2},$$

ha csökkentjük, akkor

$$\frac{\delta'}{\delta} > \frac{1-2x+x^2}{1-2y+y^2},$$

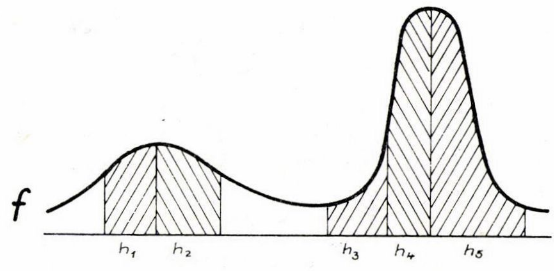
ahol $y = \frac{\Delta}{b}$.

Egyéb elhelyezés sűrűségi vizsgálatok

Az elhelyezési tömörséget jellemző kitöltési sűrűség vizsgálatakor különféle általánosítások is adhatók.

28. Kérdés. Mi lesz adott köröknek síkbeli legtömörebb (leglazább) elhelyezése, ha a körök területösszege helyett egy a síkon értelmezett függvénynek (súlyfüggvénynek) a körökre vonatkozó integráljainak összegét tekintjük, vagy például a körközéppontokon vett függvényértékek összegét, és ezek maximumát (minimumát) keressük.

29. Kérdés. A súlyfüggvény tulajdonságai hogyan befolyásolják az elhelyezés tulajdonságait, ha extremalitásra törekszünk? Például, szimmetrikus súlyfüggvény esetén milyen szimmetria tulajdonságokkal rendelkeznek az extremális elrendezések? *Egy példa:* olyan súlyfüggvénynél, melynek több lokális maximuma is van, nem feltétlenül összefüggők a „legsűrűbb" elrendezések, még olyankor is, ha ez egyébként természetes lenne. A 9. ábrán egydimenziós h intervallumoknak egy f súlyfüggvény alatti legsűrűbb, nem összefüggő elrendezése látható.



9. ábra

30. Kérdés. Hogyan határozzuk meg az extremális elrendezéseket, ha az elhelyezett elemek tulajdonságai attól is függnek, hogy hová helyezzük őket. Például, az elhelyezett körök sugara a körközéppont koordinátáinak is függvénye.

4. Érintkező halmazpárok

Halmazelrendezések érintkező elempárjainak száma

A következő problémakör, bár csak euklideszi terekben elhelyezkedő halmazok vizsgálatával foglalkozunk, természeténél fogva általánosabb, például topologiai tulajdonságokra épül.

35. DEFINÍCIÓ. Legyen a H elrendezés minden h_i eleme páronként közös belső ponttal nem rendelkező összefüggő tartomány. Jelölje $s_{24}(H)$ azoknak a h_i, h_j, $i \neq j$ elempároknak a számát, melyek halmaza kölcsönösen és egyértelműen megfeleltethető közös határpontjaikból kiválasztott $p_{i,j}$ ponthalmaznak. $s_{24}(H)$ értékét nevezzük az „érintkező halmazpárok számának".

Az $s_{24}(H)$ tömörségfüggvény az elhelyezési sűrűséget jellemző függvények egy részéhez hasonlóan (l. az előző szakaszt) csak lokálisan jellemzi a H elrendezést. Az $s_{24}(H)$ értékét nem az egymástól távoleső elemek viszonya és nem az egész elrendezés alakja befolyásolja, hanem az egymáshoz közel eső elemek külcsönös elhelyezkedése. Ez azzal a ténnyel áll kapcsolatban, hogy $s_{24}(H)$ értékét elsősorban topológiai jellegű tulajdonságok határozzák meg. Természetesen egy adott h_i elemkészlet és egy adott tér $s_{24}(H)$ lehetséges értékeit korlátozza.

31. Kérdés. d dimenziós euklideszi térben adott n elemű h_i sorozattal milyen $s_{24}(H)$ értékeket nyerhetünk? Melyek lesznek az extremális elrendezések?

44. TÉTEL. *Egy d dimenziós euklideszi térben levő tetszőleges n elemű, páronként diszjunkt, összefüggő tartományokból álló H elrendezéshez hozzárendelhető egy ugyanabban a térben levő n szögpontú gráf. A gráf csúcsai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a H h_i elemeinek, élei pedig a $p_{i,j}$ közös határpontoknak. A csúcsok a h_i elemek belsejében vannak. Két csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze, ha az őket tartalmazó h_i, h_j elemekhez tartozik $p_{i,j}$ közös határpont* (a 35. definíció jelölésével).

Két csúcsot tehát csak egy él köt össze, az élek nem metszik egymást. Az utóbbi feltétel teljesülése kétdimenziós térben lényeges. A megfordított állítás is igaz. *Bármely n szögpontú gráfhoz (euklideszi térben) hozzárendelhető h_i tartományrendszer a fent leírt módon.*

Ha az élek és csúcsok rendszerére semmiféle metrikus kikötést nem teszünk, akkor az előzőkben leírt gráfban az élek száma nyilván elérheti az $\binom{n}{2}$ értéket, ha $d \geqq 3$. A $d<3$ esetben már maga a dimenziószám is megkötést ad (ha $n>2$, illetve $n>4$).

A 44. tételben szereplő gráffal kapcsolatban adjuk meg a következő definíciót.

36. DEFINÍCIÓ. A h_i elemrendszerhez rendelt gráfot „érintkezési gráfnak", a gráf által adott relációk (érintkezések) rendszerét „érintkezési rendszernek" nevezzük.

32. Kérdés. Milyen feltételek korlátozzák három vagy annál magasabb dimenziós euklideszi térben az $s_{24}(H)$ függvény maximális értékét? Kétdimenziós euklideszi térben milyen $s_{24}(H)$ értékek érhetők el?

A következőkben elsősorban asszimptotikusan végtelen elemszámú elrendezésekkel foglalkozunk.

45. TÉTEL. *Ha csak azt kötjük ki, hogy a H elrendezés h_i elemei konvex tartományok legyenek, akkor ezzel nem csökken az adott térben maximálisan elérhető $s_{24}(H)$ érték.* (Megadható maximális érintkezési számú konvex elemekből álló rendszer.)

37. DEFINÍCIÓ. Egy h_i konvex tartománysorozatot nem elfajulónak nevezünk, ha a h_i elemek köré írt körök R_i és a maximális beírható körök r_i sugarainak arányához található olyan K korlát, hogy $\frac{R_i}{r_i}<K$ minden i-re. Ha $\limsup_{i\to\infty}\frac{R_i}{r_i}=\infty$, a sorozat elfajuló.

46. TÉTEL. *A d-dimenziós euklideszi-térben, ha egy konvex h_i elemekből álló n elemszámú $H_n=\{h_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ elrendezésre $\limsup_{n\to\infty} s_{24}(H_n)=f(n)\cdot n$, ahol $f(n)$ olyan függvény melyre $\limsup_{n\to\infty} f(n)=\infty$, akkor a h_i elemek sorozata elfajuló.*

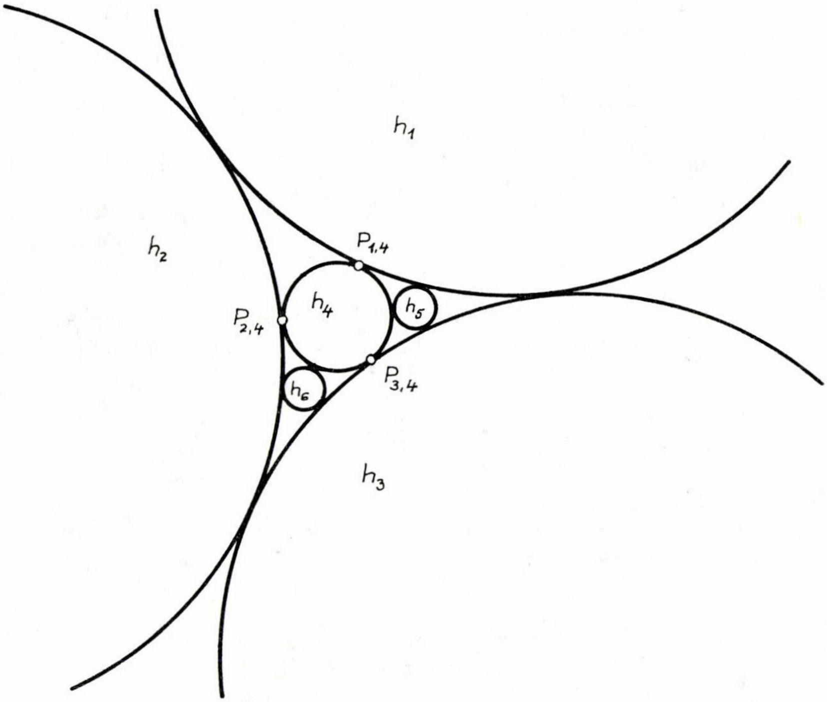
A 46. tétel egy következménye a

47. TÉTEL. *El nem fajuló h_i elemsorozatból álló H elrendezés esetén a H n elemű H_n részrendszereire*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{24}(H_n)}{c\cdot n}\leqq 1,$$

ahol c a h_i elemsorozattól, illetve a dimenziószámtól függő korlátos pozitív érték.

48. TÉTEL. *Kétdimenziós euklideszi-térben minden n elemű H_n tartományrendszerre $s_{24}(H_n) \leqq 3 \cdot n - 6$, ha $n > 2$. Az egyenlőség is elérhető, speciálisan körökkel is* ($n=6$ esetén l. pl. a 10. ábrát).



10. ábra

Minden határon túl növekvő elemszámú elrendezésekre a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_{24}(H_n)}{3 \cdot n} = 1$ egyenlőség teljesülése különféle konstrukciókkal elérhető, például kongruens körök szabályos háromszögrácsos elhelyezésével. Elérhető még az egyenlőség teljesülése a 10. ábrán adotthoz hasonló konstrukciókkal is (monoton csökkenő vagy monoton növekvő sugársorozatokat képező h_i elemekkel). Különféle konstrukciók adhatók olyan elrendezésekre is, melyekre $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_{24}(H_n)}{f(n)} = 1$, ahol $f(n) < 3 \cdot n$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{f(n+k)} = 1$ minden pozitív egész k-ra.

49. TÉTEL. *Tetszőleges, síkbeli konvex tartományokból álló n elemű H_n elemsorozat elrendezhető úgy, hogy $s_{24}(H_n) \geqq 2 \cdot n - 3$.*

33. Kérdés. Speciálisan körelhelyezéseket tekintve, milyen h_i körsorozatokkal építhetők olyan elrendezések, melyekre $3 \cdot n \geqq s_{24}(H_n) \geqq 2 \cdot n$?

50. TÉTEL. *Ha a h_i körök r_i sugarainak sorozata túl gyorsan csökken, nevezetesen, ha egy minden határon túl növekvő elemszámú körelrendezés elemeinek r_i sugaraira legfeljebb véges sok i index kivételével*

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} < \frac{2}{\sqrt{3}} - 1, \tag{5}$$

akkor nem érhető el a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{24}(H_n)}{2n} > 1$ *egyenlőtlenség teljesülése. Ha* (5) *minden i indexre teljesül, akkor egyetlen véges n-re sem lehet* $s_{24}(H_n) > 2 \cdot n$.

MEGJEGYZÉSEK. 1. Hasonló tételek mondhatók ki másfajta konvex elemekből álló h_i elemsorozatokra is.

2. Figyelemre méltó ennek a tételnek és a 39. tételnek a kapcsolata. Mindkét esetben a túlságosan gyorsan csökkenő nagyságú h_i elemsorozatokkal nem érhető el a tömörség $(s_{10}(H)$, illetve $s_{24}(H))$ egy maximális értéke. Ezzel szemben megadható azonban olyan körrendszer is, melyre $s_{10}(H)$ értéke közel 1, de $s_{24}(H)=0$.

51. TÉTEL. *Ha n elemű H_n elrendezések egy sorozatára* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{24}(H_n)}{\alpha n} = 1$ (α egy rögzített érték), *akkor az ilyen elrendezések elemeiből bármely* β $(0 < \beta < \alpha)$ *értékre alkotható olyan elrendezéssorozat, melyre* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{24}(H_n)}{\beta \cdot n} = 1$.

A következő tétel már magasabb dimenziós elrendezésekkel kapcsolatos.

52. TÉTEL. *A d-dimenziós euklideszi-tér konvex, (nem elfajuló sorozatot adó) h_i $(i=1, 2, ..., n)$ tartományaiból előállítható olyan H_n elrendezés, melyre* $s_{24}(H_n) \geqq$ $\geqq n \cdot d - \frac{d \cdot (d+1)}{2}$ (a 49. tétel ennek speciális esete).

Egy példa: Kongruens gömbök végtelen elemszámú H sorozatával elérhető a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{24}(H_n)}{5 \cdot n} = 1$ egyenlőség teljesülése $(H = \lim\limits_{n\to\infty} H_n)$.

Néhány hasonló jellegű függvény

Az $s_{24}(H)$ tömörségértékhez hasonló függvényeket nem csak euklideszi-térben, hanem tetszőleges olyan térben értelmezhetünk, ahol definiálni tudjuk diszjunkt halmazok érintkezését. Például vizsgálhatjuk, hogy valós függvények valahány osztályából hány olyan osztálypárt választhatunk ki, melyek rendelkeznek közös elemmel. Ilyen két érintkező osztály lehet az $y = c \cdot x$ és az $y = x^c$, $-\infty < c < \infty$ függvénysokaság, melyek a $c = 1$ pontban érintkeznek.

A tartalmazó tér különféle megválasztása mellett különféleképpen definiálhatjuk az érintkezés mértékét is.

38. DEFINÍCIÓ. Egy d-dimenziós euklideszi-tér h_i tartományaiból álló H halmazára $(H = \{h_i\})$ jelölje $s_{25}(H)$ a h_i tartományok közös határpontjai halmazának $d-1$ dimenziós mértékét.

34. Kérdés. Mely elrendezésekre létezik $s_{25}(H)$, és hogyan függ értéke az elrendezés tulajdonságaitól?

MEGJEGYZÉSEK. 1. Konvex h_i elemek esetén $s_{25}(H)$ mindig létezik. Ha a h_i elemek szigorúan konvexek $s_{25}(H)=0$ (ha $d>1$).

2. Egy dimenzióban $s_{24}(H)\leqq s_{25}(H)$, és intervallumokból álló n elemű elrendezéseknél $s_{24}(H)=s_{25}(H)=n-1$.

3. Az érintkezés mértékét ugyanígy definiálhatjuk a h_i elemek közös határpontjaiból alkotott halmaz komponenseinek számával. Szigorúan konvex tartományoknál ez az érték is egyenlő $s_{24}(H)$-val.

4. Egy hasonló definíció szerepel [2]-ben és [12]-ben. A tömörség (lazaság) mértékét ezek a dolgozatok általában az elempárokon értelmezett függvényekkel definiálják.

Ismert fogalom a „szoliditás" (l. pl. [3]). Egy síkbeli körkitöltést szolídnak nevezünk, ha elemei nem mozgathatók úgy, hogy egy másik elemet részben át ne fedjenek. Ez a kikötés szigorúbb mint az érintkezés feltétele. Ennek ellenére adható olyan H szolíd tartományelrendezés, melyben $s_{24}(H)$ közel sem maximális.

39. DEFINÍCIÓ. $s_{26}(H)$ az n elemű H elrendezés rögzített elemeinek száma.

Kis elemszámú rendszereknél, vagy ha megengedjük, hogy az egyes elemek átfedjék egymást, a korlátos H elrendezés lazaságát jellemezheti a közös belső vagy határponttal nem rendelkező elempárok száma.

40. DEFINÍCIÓ. $s_{27}(H)$ az n elemű H elrendezés olyan h_i, h_j $(i\neq j)$ elempárjainak a száma, amelyek egy $d_{i,j}$ távolságnál közelebb vannak egymáshoz. A $d_{i,j}$ lehet konstans, vagy az i és j függvénye.

Ez a definíció már nem topológiai jellegű, mint $s_{24}(H)$, hiszen távolságértékeket is figyelembe vesz. Lényeges tulajdonsága az $s_{27}(H)$ függvénynek, hogy a H elrendezés egy elég kicsiny megváltozásával szemben invariáns. A $d_{i,j}$ távolság mérésekor is tehetünk általánosításokat. Távolságként használhatjuk például a λ távolságfüggvényt is (l. a 32. definíció előtt).

Ugyancsak halmazelrendezések elemeinek különállóságát, lazaságát fejezi ki a „szeparálhatóság" fogalma (erről l. pl. [3]).

5. Egyéb mérőszámok, általános kérdések

Az előző pontokban többször szerepeltek különféle távolságfogalmak. Érdemes ezek közül részletesebben foglalkozni a 32. definíció előtt bevezetett λ távolságfüggvénnyel.

A $\lambda(x)$ távolságfüggvény

A λ távolságfüggvény bevezetésével többféle általánosításra nyílik lehetőség. Előfordulhat, hogy diszkrét rendszereket olyan tulajdonságokkal kívánunk jellemezni, melyek eredetileg folytonos halmazokra vonatkoztak (l. például a 11. kérdést vagy a 27. tételt).

41. DEFINÍCIÓ. Diszkrét tartományokból álló H rendszert λ összefüggőnek nevezzük, ha

a) egy λ távolságú párhuzamos tartományrendszere (paralleltartománya) összefüggő ($\lambda \geqq 0$),

b) ha minden h_i elemen belül van olyan p_i pont melyből a megfelelő h_i elemek λ-szoros nagyításainak egyesítése összefüggő ($\lambda \geqq 1$).

MEGJEGYZÉSEK. 1. A 41. definíció a) és b) pontjában adott meghatározások nem ekvivalensek — néhány kivételtől eltekintve, például amikor a h_i elemek körök, a p_i pontok a körközéppontok.

2. Az egyszeres összefüggést ugyanígy definiálhatjuk.

3. A p_i pontok (nagyítási centrumok) a H elrendezés nevezetes pontjai is lehetnek, a különböző p_i pontok helyett egyetlen vetítési centrumot is kijelölhetünk.

4. Mozaikoknál a $\lambda=0$, illetve a $\lambda=1$ érték is elég az egyszeres összefüggőség teljesüléséhez. Lefedést adó rendszereknél a $\lambda<0$, illetve a $\lambda<1$ értékekre is lehet λ összefüggő az elrendezés.

42. DEFINÍCIÓ. Egy H tartományrendszer λ konvex, ha

a) λ távolságú paralleltartománya, vagy

b) λ mértékű nagyítása (egy vagy több centrumból) tartalmazza a H konvex burkát.

MEGJEGYZÉSEK. 1. Bármely korlátos tartományrendszerhez található olyan λ érték, hogy az λ összefüggő (egyszeresen összefüggő), λ konvex legyen (mindkét előbb definiált értelemben).

2. Érdekes a ϱ körkonvexitás és a λ konvexitás összehasonlítása. Az első a konkávitás mértékét korlátozza lokálisan, míg a második a konvex buroktól való halmazeltérés maximumát szorítja egy érték alá.

3. A 42. definícióban a konvex burok helyett gyengébb feltételnek eleget tevő halmazokat is választhatunk, például a ϱ körkonvex burkot, vagy speciálisabb alakzatokat, például a H külkörét. Ennek megfelelőn egy tágabb értelemben vett ϱ konvexitásról, illetve kör alakról beszélhetünk.

A λ távolságfüggvény fogalmát, mely eredetileg konvex tartományokon értelmezett, nem konvex halmazokra is kiterjeszthetjük.

43. DEFINÍCIÓ. Egy adott T tartományra és egy adott σ pontra, a tér egy x pontjának a T halmazra és a σ origóra vonatkozó λ_A távolságfüggvénye:

$$\lambda_A(T, \sigma, x) = \inf \lambda,$$

ahol λ olyan, hogy létezik y pont ($y \in T$), melyre $\lambda \cdot (y-\sigma)=x$, de $\lambda \geqq 1$, ha $x \notin T$.

Ugyanígy kapjuk a következő definíciókat.

44. DEFINÍCIÓ. Az előző definíció feltételeivel,

$$\lambda_B(T, \sigma, x) = \inf \lambda,$$

de most λ értéke minden esetben kisebb lehet 1-nél.

Ha a σ pontot nem rögzítjük;

45. DEFINÍCIÓ.
$$\lambda_C(T, x) = \inf_{\sigma \in T} \lambda_A .$$

46. DEFINÍCIÓ.
$$\lambda_D(T, x) = \inf_{\sigma \in T} \lambda_B .$$

Természetesen (a 45., 46. definícióban) más korlátos tartományt is kijelölhetnénk σ mozgásteréül, nem csak magát a T tartományt.

53. TÉTEL. *Legyen σ a T tartomány belső pontja, és T legyen a σ-ra nézve konvex. Ekkor $\lambda_A(T, \sigma, x) = \lambda_B(T, \sigma, x)$. Jelöljük ezt a közös értéket most $\lambda(T, x)$-szel. Ilyen feltétel mellett teljesül a*

$$\int_{x \in T} \lambda(T, x)\, \mathrm{d}f = \frac{d}{d+1} \mu(T) \tag{6}$$

egyenlőség, ahol $\mu(T)$ a T térfogata, d a T tartományt tartalmazó euklideszi-tér dimenziószáma. Ha T bármely belső pontjából nézve konvex, akkor a (6) egyenlőség a $\lambda_C(T, x)$ és $\lambda_D(T, x)$ függvényekre is igaz. (Konvex T tartományokra $\lambda_C(T, x) = \lambda_D(T, x)$.)

54. TÉTEL. *Ha egy d dimenziós T tartomány egy σ pontjára nézve nem konvex, akkor az ilyen σ pontokra az $\alpha \cdot \mu(T) = \int_{x \in T} \lambda_A(T, \sigma, x)\, \mathrm{d}f$ egyenletben az α érték olyan, hogy $\frac{d}{d+1} < \alpha < \infty$. Ha az egyenletben a λ_B függvényt szerepeltetjük, akkor $0 < \alpha < \infty$. Ha a σ pont nem tartozik a T-hez, akkor $\int_T \lambda_A(T, \sigma, x)\, \mathrm{d}f > \frac{d}{d+1}$ és $\int_T \lambda_B(T, \sigma, x)\, \mathrm{d}f > \frac{d}{d+1}$.*

MEGJEGYZÉS. A fent definiált λ függvények, ha sem σ, sem x nem eleme T-nek, csak olyan x, σ pontpárra léteznek, melyhez található u és v valós szám $(u+v=1)$, hogy az $y = u \cdot x + v \cdot \sigma$ pont eleme T-nek.

Árnyékoltság és tömörség

A fenti megjegyzéshez kapcsolódva, ha a T tartomány elválasztja a σ pontot az x pontok egy halmazától, más szóval, T árnyékolja a σ pontot, akkor a λ függvények az adott x pontok halmazán értelmezhetők.

Vizsgálhatjuk, hogy egy pontot milyen szögben árnyékol egy T tartomány, mekkora hányadát árnyékolja a térnek egy T tartomány (végtelen tartományrendszer). Milyenek azok a tartományrendszerek amelyek egy adott R távolságon belül elhomályosulnak: a tér bármely x pontjából, bármely irányba húzott R hosszúságú szakasz tartalmaz a T-hez tartozó pontot. Végtelen rendszereknél van értelme önmagát árnyékoló, illetve egymást külcsönösen árnyékoló halmazokról beszélni. Megvizsgálhatjuk például, hogy melyek a leglazább (legkisebb kitöltési sűrűséget adó), R távolságon belül elhomályosuló körrendszerek.

Egyenletesség

Megfigyelhető, hogy bizonyos alakzatok legtömörebb elhelyezéseinél szabályosságok mutatkoznak. Ez tapasztalható például az ismert, legsűrűbb gömbfelületkitöltést adó kongruens elemű körrendszereknél, vagy az extremális téglalapkitöltést adó kongruens elemű körrendszereknél is (l. 28. tétel). Az esetenként fellépő, különböző jellegű szabályosságoknál általánosabb tulajdonság egy elhelyezés egyenletessége. Az előzőkből, de egyes műszaki problémákból kiindulva is felmerül az igény, hogy egy pont- vagy más alakzatrendszert a lehető legegyenletesebben helyezzünk el.

47. DEFINÍCIÓ. Egy T tartományon elhelyezett n elemű pontrendszerre akkor mondjuk, hogy a legegyenletesebb elhelyezkedésű, ha (az adott T-re és az adott n pontszám mellett) a pontrendszer és a T halmazeltérése a minimális.

48. DEFINÍCIÓ. Egy konvex T tartományon elhelyezett véges elemszámú pontrendszert akkor mondunk legegyenletesebbnek, ha a pontok közt mért távolságoknak a minimuma maximális. (l. például a klasszikus gömbfelület kitöltési problémát, [3].)

Egy dimenzióban a 47. és 48. definíció ekvivalens, (magasabb dimenzióban azonban már nem). A 47. definíció nem csak pontrendszerekre, de más tartományrendszerekre is átvihető.

Jellemezheti egy elrendezés egyenletességét az elhelyezett pontokhoz, illetve tartományokhoz rendelt függvények, például a karakterisztikus függvények, összegeként nyert függvény egyenletessége (konstans értékhez való közelsége) is (l. [4]).

34. Kérdés. Van-e kapcsolat egy H elrendezésnek az előzőkben definiált valamelyik egyenletességi mértéke és az előző szakaszokban szereplő $s_i(H)$ függvények értékei között?

Halmazelrendezéseken értelmezett eljárások

Az előző szakaszokban a H elrendezéseken értelmezett transzformációkat, műveleteket vizsgáltunk (l. pl. az 5., 6., 7. definíciót). Ilyen kérdésekre térünk most vissza.

35. Kérdés. Milyen hatással van az egyes $s_i(H)$ tömörségfüggvényekre a H elrendezés elemeinek (meghatározott módon történő) aprítása, bizonyos alakváltozása, például lapítása? Mely $s_i(H)$ függvények invariánsok adott transzformációkkal szemben? Például a konvex burokra vonatkozó kitöltési sűrűség affin invariáns. Nem mondható el ugyanez például a ϱ körkonvex burokra vonatkozó kitöltési sűrűségről.

Eljárások iterált alkalmazásakor mindig kérdéses az eljárás konvergenciája. Ilyen kérdésekkel foglalkozik például a [10] dolgozat is.

Kapcsolatok, különbségek a tömörségfüggvények között, legtömörebben továbbépített rendszerek, láncok

Az $s_i(H)$ tömörségfüggvények közti kapcsolatok vizsgálata számos új problémát vet fel. Ilyen kérdések szerepeltek a 31., 32. tételben is. Hasonlóan, bizonyos tömörségfüggvények közti különbözőségeket mutat ki a [2] dolgozat.

Az extremális tömörségű halmazrendszereken kívül beszélhetünk legtömörebben továbbépített elrendezésekről is. Ennek meghatározása az [1] dolgozatban található. Legtömörebben továbbépítettnek nevezünk egy n elemű elrendezést akkor, ha i-edik elemei (a továbbépítési sorrendet tekintve) az első $i-1$ elemből álló rendszert az adott $s_j(H)$ függvényre vonatkozóan extremálisan egészítik ki, minden i-re ($i=1, 2, \ldots, n$). Ez a meghatározás bármely $s_j(H)$ tömörségfüggvényre értelmezhető.

49. DEFINÍCIÓ. Nevezzünk egy H elrendezést „láncnak", ha az elrendezés h_i elemeinek van olyan indexezése, hogy a h_i és h_{i+1} elemek minden i-re érintkeznek (vagy általánosabban, valamilyen más, például geometriai reláció teljesül köztük).

Vizsgálható egy adott h_i elemkészletre és egy adott $s_j(H)$ tömörségfüggvényre a legtömörebb, a legtömörebben továbbépített és a legtömörebb láncot adó elrendezések közti kapcsolat.

Egyéb általános megjegyzések

Az előző szakaszokban elsősorban a legegyszerűbb modelleket (pont vagy körelhelyezéseket) vizsgáltunk. A tárgyalt kérdéseknek egyrészt magasabb dimenziós, illetve nem euklideszi térre, másrészt körelhelyezéseken túl más alakzattípusokra való általánosítása jöhet elsősorban szóba (néhány ilyen általánosításra az előzőkben már sor került).

Az elért eredmények kiterjesztésekor a tömörségfüggvények értelmezése okozhat problémát. Kitöltési sűrűséggel kapcsolatos vizsgálataink például korlátos elrendezésekre vonatkoznak. Kérdéses, hogy például a korlátos elrendezéseken értelmezett tömörségfüggvények közül melyek terjeszthetők ki közvetlenül nem korlátos elrendezésekre. Most nem térünk ki a sűrűség fogalmával kapcsolatos értelmezhetőségi nehézségekre ([9]). Véges esetekben ezek a problémák megkerülhetők.

Különböző elemekből álló alakzatrendszerek tömörségét elsősorban az elrendezést alkotó elemek eloszlása befolyásolja. Az, hogy melyik fajta elemből (például körelhelyezéseknél a kisebb vagy nagyobb körökből) van több vagy kevesebb, dönti el az elérhető tömörség mértékét.

Tömörségfüggvények vizsgálatakor tehát elsődleges szerepet játszik az alakzatrendszer — melyen a vizsgált tömörségfüggvényt értelmezzük — és az alakzatrendszer elemei geometriai jellemzőinek (pl. átmérő) eloszlása. Az ilyen eloszlások, az alakzatrendszer lehetséges geometriai elhelyezései és ezeken az elhelyezéseken értelmezett tömörségfüggvények értékei közötti kapcsolat jól jellemzi a vizsgált alakzatrendszert.

Egyes tartományok elhelyezésén túl adott szerkezetű tartománycsoportokból álló elrendezéseket is vizsgálhatunk. (Például érintkező körhármasok elrendezéseit.) Továbblépve, valamilyen szerkezet szerint, többszörösen egymásra épülő tartományszerkezetek felépítése is lehetséges. Egybevágó elemekből építhető nem homeomorf rendszereket vizsgál a [13] dolgozat.

MEGJEGYZÉS A KORREKTÚRÁNÁL. Az árnyékolással kapcsolatban (ld. 234. old.) értelmezhető az egyes (pl. rádióaktív) sugaraknak az egyes árnyékoló tartományok belsejébe eső darabjainak S összhosszúsága. Az árnyékolt tartomány pontjain áthaladó sugarakhoz tartozó S értékek infimuma jellemzi az árnyékolás „jóságát". Az árnyékolás mértékének ilyen módon történő értelmezésével az árnyékoló halmazok elrendezésének egyfajta (az árnyékolt halmazra vonatkozó) tömörségét is definiálhatjuk.

A kitöltési és lefedési feladatokkal kapcsolatban (ld. pl. 204. old.) megjegyezhető, hogy ezek a kitöltő és lefedő tartományok karakterisztikus függvényeinek összegével történő alsó, illetve felső approximációt jelentenek ([9]).

IRODALOM

[1] BENEDIKTI ISTVÁN (1969), Halmazrendszerek extremális tömörségű elrendezéseivel kapcsolatos problémák, I., *MTA III. Osztály közleményei*, **19**, 359—374.

[2] — (1971), Halmazrendszerek tömörségéről, *MTA III. Osztály közleményei*, **20**, 329—340.

[3] FEJES TÓTH L. (1972), *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum* (második kiadás), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg—New York.

[4] HEPPES ALADÁR (1963), Egy egydimenziós probléma, *Mat. Lapok*, XIV., 134—137.

[5] HORVÁTH JENŐ (1969), Távolságok összegére vonatkozó egy minimum problémáról, *Mat. Lapok*, XX., 25—37.

[6] LEKKERKERKER, C. G. (1969), *Geometry of numbers*, Woltes—Noordhoff, Groningen.

[7] MOLNÁR JÓZSEF (1962), Körelhelyezések állandó görbületű felületeken, *MTA III. Osztály közleményei*, **12**, 224—263.

[8] NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN (1965), *Kristálykémia*, Akadémiai Kiadó, Budapest.

[9] POGÁNY CSABA (1971), Szemináriumi előadás.

[10] RUDA MIHÁLY (1968), Relaxációs pontelhelyezési eljárások, *MTA III. Osztály közleményei*, **18**, 253—268.

[11] — (1969), Körelhelyezések téglalapokon, *MTA III. Osztály közleményei*, **19**, 73—87.

[12] TAKÁCSY ILDIKÓ (1971), Egy elhelyezési problémakörről. Szakdolgozat, Budapest.

[13] TÖLGYESI LÁSZLÓ (1969), Egy elhelyezési problémakörről, I., *MTA III. Osztály közleményei*, **19**, 333—344.

[14] YULE—KENDALL (1964), *Bevezetés a statisztika általános elméletébe*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

(Beérkezett: 1973. XI. 10.)

VIZSGÁLATOK AZ EMPIRIKUS ELOSZLÁSFÜGGVÉNYRŐL*

Írta: CSÁKI ENDRE

Bevezetés

A matematikai statisztika alapvető feladata a mintából az alapsokaságra, elméleti eloszlásra való megbízható következtetések vizsgálata. Fontos szerepet játszik itt, különösen a nemparaméteres módszereknél az empirikus eloszlásfüggvény, amely az elméleti eloszlásfüggvénynek sok szempontból jó (torzítatlan, konzisztens stb.) becslése.

Az empirikus eloszlásfüggvénynek egy rögzített x pontban való viselkedése a valószínűségszámítás klasszikus eredményeivel, a *Bernoulli* (binomiális) — szkéma segítségével tárgyalható. A statisztika szempontjából nagyobb jelentőségűek azok az eredmények, melyek az empirikus eloszlásfüggvénynek x-ben egyenletes tulajdonságaira vonatkoznak. E téren alapvető KOLMOGOROV [64] és GLIVENKO [54] munkája 1933-ból. Azóta e kérdéskörben számos dolgozat látott napvilágot, melyet még csak felsorolni is lehetetlen vállalkozás lenne. A rendkívül kiterjedt irodalom jelzi a téma fontosságát mind elméleti, mind gyakorlati szempontból. Irodalomjegyzékünk az értekezés végén igyekszik felsorolni azokat a fontosabb irodalmi forrásokat, melyek az értekezés témájával és tárgyalásmódjával kapcsolatban állnak.

Az értekezésben egymintás, egyoldali eltérésekkel kapcsolatos kérdések egységes tárgyalását igyekszünk megadni. A tárgyalás egy igen elemi kombinatorikus módszeren, az ún. ballot-lemmán alapszik, amely lényegében TAKÁCStól származik.

Az 1. §-ban pontos formulákat adunk annak valószínűségére, hogy egy (0, 1)-ben egyenletes eloszlásból vett minta empirikus eloszlásfüggvénye egy adott törtvonal felett halad. Ezek speciális esetként tartalmazzák az általunk ismert, egyoldali eltérésre és relatív eltérésre vonatkozó formulákat, a pontos irodalmi hivatkozásokkal együtt.

A 2. §-ban a pontos eloszlásokból származtatunk határeloszlásokat, ill. határérték tételeket.

A 3. §-ban erőfüggvényeket vizsgálunk. Pontos és aszimptotikus formulákat egyaránt adunk bizonyos alternatívák esetére, és tárgyaljuk az efficiencia különböző értelmezéseit.

A 4. §-ban empirikus eloszlásfüggvényre vonatkozó iterált logaritmus tételekkel foglalkozunk.

Az 5. §-ban néhány kiegészítő jellegű tárgyalás kerül sorra. Itt vizsgáljuk pl. a maximális eltéréssel kapcsolatos egyéb statisztikák, mint pl. max hely eloszlását.

* Kandidátusi értekezés, Budapest, 1974. május

Tárgyaljuk a véletlen mintaelemszám esetét, valamint bizonyos kétdimenziós problémákat.

Szeretnék köszönetet mondani Révész Pálnak, Tusnády Gábornak és Vincze Istvánnak probléma-felvetéseikért és értékes tanácsaikért.

1. §. VÉGES ELOSZLÁSTÉTELEK

1.1. A Ballot-lemma

Mint a Bevezetés-ben is említettük, az empirikus eloszlásfüggvény viselkedése általában nem csupán egy rögzített x pontban érdekes, hanem egy halmazon, rendszerint intervallumon vagy ezek egyesítésén. Érdekes, hogy erre vonatkozó első eredmények határértéktételek (Kolmogorov [64], Glivenko [54]) véges eloszlástételeket csak jóval később adtak meg. Az első ilyen eredmény Szmirnov nevéhez fűződik, aki megadta D_n^+ és D_n^- pontos eloszlását [92]. Később ő maga is, majd mások végeztek pontos eloszlásra vonatkozó vizsgálatokat. Ennek irodalma ma már olyan nagy, hogy a munkákat teljességében felsorolni lehetetlen, a fontosabb és érdekesebb cikkek, ill. könyvek közül megemlítjük a következőket: Barton—Mallows [8], Darling [37], Gupta—Panchapakesan [55], Hájek—Sidák [56], Karlin [61], Sahler [82], Suzuki [89], Takács [97], Vincze [104], [105].

Disszertációnkban egy elemi, kombinatorikus módszert kívánunk bemutatni, amely az ún. ballot (szavazatszámlálási) lemmán, ill. annak egy módosításán alapul. Ez a módszer lényegében Takácstól származik [94].

A ballot lemma eredeti formája a következő (Bertrand [10]): *Egy választás során, ahol 2 jelölt verseng egymással, a győztes végeredményben a, a vesztes b szavazatot kapott* $(a>b)$. *Annak valószínűsége, hogy a győztes a szavazatok összeszámlálása során végig előnyben volt,* $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Könnyen látható, hogy Takács következő tétele [97] a ballot lemma általánosítása: *legyenek* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *nem-negatív egész számok, melyekre* $k_1+k_2+\ldots+k_n=k\leq n$. *Ekkor a* $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *számok* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ciklikus permutációi közül pontosan* $n-k$ *olyan van, melyre teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$x_1<1, x_1+x_2<2, \ldots, x_1+x_2+\ldots+x_n<n.$$

Takács nyomán ballot tételeknek fogjuk nevezni azokat a tételeket, melyek a fenti egyenlőtlenségek egyidejű teljesülésének valószínűségét adják meg, bár a feltételeket kissé módosítani fogjuk.

Az alábbi ballot tétel, melyre a továbbiakban szükségünk lesz, ekvivalens Daniels egy tételével [36], melyet később mások is felfedeztek, ill. bizonyítottak. (Lásd pl. Robbins [80], Chapman [23], Rényi [79], Vincze [104], Sarkadi [83]). Tekintettel arra, hogy ez a tétel képezi az e paragrafusban leírt vizsgálatok alapját, mi is adunk egy egyszerű bizonyítást (lásd Csáki—Tusnády [32]).

1.1. Tétel. *Legyen* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *teljes eseményrendszer, melyre* $P(A_0)=p\geq 0$, $P(A_i)=q\geq 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. *Természetesen* $p+nq=1$. *Végezzünk* n *független kísérletet, melynek során az* A_j *esemény* ν_j*-szer következett be,* $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Ekkor

$$P(\nu_1 < 1,\ \nu_1+\nu_2 < 2, \dots, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n < n) = p. \tag{1.1}$$

Bizonyítás. A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=1$-re nyilván $P(\nu_1<1)=$ $=P(\nu_0=1)=p$. Tegyük fel, hogy az állítást $n<N$-re, tetszőleges p, q-ra már beláttuk. Ekkor

$$P(\nu_1 < 1, \dots, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_N < N|\nu_0) =$$

$$= P(\nu_1 < 1, \dots, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{N-\nu_0} < N-\nu_0|\nu_0) =$$

$$= P(\nu_1 < 1, \dots, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{N-\nu_0} < N-\nu_0|\nu_1+\dots+\nu_N = N-\nu_0) = \frac{\nu_0}{N}.$$

Itt az utolsó lépés $\nu_0=0$ esetén nyilvánvaló, $\nu_0>0$ esetén pedig az indukciós feltevés miatt igaz. Így a teljes valószínűség tétele szerint

$$P(\nu_1 < 1, \nu_1+\nu_2 < 2, \dots, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_N < N) = E\left(\frac{\nu_0}{N}\right) = p,$$

ami a tétel állítása.

1.2. Pontos eloszlástételek

A továbbiakban vizsgáljuk az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók empirikus eloszlásfüggvényét, azaz

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{X_i<x} 1. \tag{1.2}$$

Feltételezzük, hogy az $X_1, X_2, \dots, X_n$ változók függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $(0, 1)$ intervallumban. A folytonos eloszlások alkalmas transzformációval nyilván erre az esetre visszavezethetők, de a nem folytonos alapeloszlásokat is visszavezetjük a fenti esetre (lásd 1.4 pont, ill. NOETHER [72], SCHMID [85], VINCZE [104]).

Az alábbi tétel TAKÁCS [97], ill. EICKER [50] tételének speciális esete, de a formula az általános esethez képest lényegesen egyszerűsödik. $a=1$-re lásd DEMPSTER [40] és DWASS [48].

1.2. TÉTEL. *Legyen* $0<a\leqq 1, 0<b, 0<c, 0<ca-b<1$. *Ekkor*

$$P\big(F_n(x) > cx-b, 0 \leqq x \leqq a\big) = \tag{1.3}$$

$$= 1-\frac{b}{c}\sum_{j=0}^{[n(ca-b)]}\binom{n}{j}\left(\frac{b}{c}+\frac{j}{nc}\right)^{j-1}\left(1-\frac{b}{c}-\frac{j}{nc}\right)^{n-j}.$$

Bizonyítás. Az (1.3) formula annak az eseménynek a valószínűségét adja, hogy $F_n(x)$ az $y=cx-b$ egyenes felett halad, azaz az egyenest nem metszi a $(0, a]$ intervallum egyetlen pontjában sem. Határozzuk meg e helyett annak valószínűségét, hogy $F_n(x)$ metszi az egyenest valamilyen x pontban, ahol $0<x\leqq a$. Ez egy $\frac{j}{n}$

magasságon történhet, ahol $0 \leqq j \leqq [n(ca-b)]$. Jelölje tehát B_j azt az eseményt, hogy $F_n(x)$ átmetszi az $y=cx-b$ egyenest a $\frac{j}{n}$ magasságon, tehát létezik olyan x_j $(0<x_j \leqq a)$, hogy $\frac{j}{n}=F_n(x_j)=cx_j-b$. Ez azt jelenti, hogy a $(0, x_j)$ intervallumban, ahol $x_j=\frac{b}{c}+\frac{j}{nc}$, pontosan j mintaelem van. Ennek valószínűsége nyilván

$$P(B_j) = \binom{n}{j} x_j^j (1-x_j)^{n-j}. \tag{1.4}$$

Mi a $B=\sum_{j=0}^{[n(ca-b)]} B_j$ esemény valószínűségét keressük. A B_j események természetesen nem diszjunktak, ezért

$$P(B) = P\left(\sum_{j=0}^{[n(ca-b)]} B_j\right) = P\left(\sum_{j=0}^{[n(ca-b)]} \bar{B}_0 \bar{B}_1 \dots \bar{B}_{j-1} B_j\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{[n(ca-b)]} P(\bar{B}_0 \bar{B}_1 \dots \bar{B}_{j-1} | B_j) P(B_j).$$

A $P(B_j)$ valószínűséget az (1.4) formula adja, míg a $P(\bar{B}_0\bar{B}_1 \dots \bar{B}_{j-1}|B_j)$ feltételes valószínűséget az 1.1. Tételből határozhatjuk meg. Jelölje ui. ν_0 a $(0, x_0)$ intervallumba eső mintaelemek számát, ν_i pedig az (x_{j-i}, x_{j-i+1}) intervallumba eső mintaelemek számát $(i=1, 2, \dots, j)$. Ekkor a B_j esemény ekvivalens a $\{\nu_0+\nu_1+\dots+\nu_j=j\}$ eseménnyel, a $\bar{B}_0\bar{B}_1 \dots \bar{B}_{j-1}$ esemény pedig a

$$\nu_1 < 1,\ \nu_1+\nu_2 < 2, \dots, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_j < j$$

egyenlőtlenségek egyidejű teljesülésével. Így alkalmazható az 1.1. Tétel $n=j$, $p=\frac{x_0}{x_j}$-vel, tehát

$$P(\bar{B}_0 \bar{B}_1 \dots \bar{B}_{j-1} | B_j) = \frac{x_0}{x_j}, \tag{1.5}$$

azaz

$$P(B) = x_0 \sum_{j=0}^{[n(ca-b)]} \binom{n}{j} x_j^{j-1} (1-x_j)^{n-j}.$$

Ezzel bizonyítottuk az 1.2. Tételt, hiszen az ott szereplő valószínűség a B esemény kiegészítő eseményének valószínűsége.

MEGJEGYZÉS. Az 1.2. Tételnél feltételeztük, hogy $ca-b<1$. Ha ui. $ca-b \geqq 1$, akkor $F_n(x)$ a $(0, a]$ intervallumon biztosan átmetszi a $cx-b$ egyenest, ha máshol nem, az 1 magasságon, ill. az x_n pontban, ahol $cx_n-b=1$ és most $x_n \leqq a$. Tekintsük annak valószínűségét, hogy csak itt történjék metszés. Ez kétféleképpen is meghatározható. Alkalmazzuk először az 1.2. Tétel módszerét. Ekkor az $1-P\left(\sum_{j=0}^{n-1} B_j\right)$ valószínűséget kell meghatároznunk, így kapjuk

$$P\left(F_n(x) > cx-b,\ 0 \leqq x < \frac{1+b}{c}\right) = \tag{1.6}$$

$$= 1-\frac{b}{c}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\left(\frac{b}{c}+\frac{j}{nc}\right)^{j-1}\left(1-\frac{b}{c}-\frac{j}{nc}\right)^{n-j}.$$

Másrészt pedig itt a $P(\bar{B}_0\bar{B}_1\ldots\bar{B}_{n-1}B_n)=P(\bar{B}_0\bar{B}_1\ldots\bar{B}_{n-1}|B_n)P(B_n)$ valószínűségről van szó, tehát

$$P\left(F_n(x) > cx-b,\ 0 \leqq x < \frac{1+b}{c}\right) = \frac{b}{c}\left(\frac{1+b}{c}\right)^{n-1} = \frac{b(1+b)^{n-1}}{c^n}. \tag{1.7}$$

A két valószínűség természetesen azonos, ami pl. az *Abel*-azonosságból is belátható.

Az Abel-féle

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A(A+jB)^{j-1}(1-A-jB)^{n-j} = 1 \tag{1.8}$$

azonosságot felhasználva bizonyos esetekben az 1.2. Tétel (1.3) formulája is egyszerűsíthető. Igaz ui., hogy

$$1-\frac{b}{c}\sum_{j=0}^{[n(ca-b)]}\binom{n}{j}\left(\frac{b}{c}+\frac{j}{nc}\right)^{j-1}\left(1-\frac{b}{c}-\frac{j}{nc}\right)^{n-j} =$$

$$= \frac{b}{c}\sum_{j=[n(ca-b)]+1}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{b}{c}+\frac{j}{nc}\right)^{j-1}\left(1-\frac{b}{c}-\frac{j}{nc}\right)^{n-j}.$$

Ebből pl. $a=1$, $b=\dfrac{p}{1-p}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, $c=\dfrac{1-\frac{1}{n}}{1-p}$-re megkaphatjuk SZMIRNOV következő formuláját (lásd [93], ill. RÉNYI [79])

$$P\left(F_n(x) > \frac{x-p}{1-p}\left(1-\frac{1}{n}\right),\ 0 \leqq x \leqq 1\right) = p\left(1+\frac{1-p}{n-1}\right)^{n-1}. \tag{1.9}$$

Ez a formula egyébként ekvivalens a következő ballot-lemmával:

Legyen $n \geqq 2$ és $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ egy teljes eseményrendszer, melyre

$$P(A_0) = p, \quad P(A_i) = q \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Természetesen $p+(n-1)q=1$. *Legyen* v_i $(i=0, 1, 2, \dots, n-1)$ *az* A_i *esemény gyakorisága* n *független kísérlet során. Ekkor*

$$(1.10)\qquad P(v_1 \leqq 1,\ v_1+v_2 \leqq 2, \dots, v_1+v_2+\dots+v_{n-1} \leqq n-1) = p(1+q)^{n-1}.$$

A továbbiakban vizsgáljunk egy $G(x)$, a $[0, 1]$ intervallumban értelmezett nem-csökkenő függvényt, mely szakaszonként lineáris és $G(0) \leqq 0$, $G(1) \leqq 1$. Az a feltétel, hogy $G(x)$ szakaszonként lineáris, tulajdonképpen nem jelenti az általánosság megszorítását, tetszőleges más függvény is visszavezethető erre az esetre. Általában azonban a szakaszok száma függhet a mintaelemszámtól. Az érdekes eset nyilvány az, amikor a szakaszok száma nem nagy, és nem függ a mintaelemszámtól. Ezeket a későbbiekben részletesen tárgyaljuk.

Tekintsük a $P(F_n(x) > G(x),\ 0 \leqq x \leqq 1)$ valószínűséget. A fenti valószínűség egyéb előállításaira (pl. n-változós integrál, rekurziós formula, determináns) a következő dolgozatokra utalunk: WALD—WOLFOWITZ [106], DANIELS [36], WHITTLE [108], SUZUKI [89], DURBIN [44], NOÉ—VANDEWIELE [71], STECK [87], SARKADI [84]. Az 1.3. Tételben erre egy annyi változós összeget adunk meg, ahány szakaszból $G(x)$ áll. Bizonyos esetekben 2, vagy 3 szakasz össze is vonható (mint pl. az 1.2. Tételnél, és így az összegben szereplő változók száma csökken.

Legyen tehát $G(x)$ adva a következő formulával:

$$(1.11)\qquad G(x) = c_i x + b_i, \quad a_{i-1} < x \leqq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

ahol

$$a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < a_k = 1,$$

$$c_i \geqq 0, \quad c_i a_i + b_i \leqq c_{i+1} a_i + b_{i+1}, \quad c_k + b_k \leqq 1,$$

valamint vagy $b_1 < 0$, vagy $b_1 = 0, c_1 = 0$.

1.3. TÉTEL. *A fenti feltétel mellett*

$$(1.12)\qquad P\big(F_n(x) \geqq G(x),\ 0 \leqq x \leqq 1\big) =$$

$$= n! \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \!\!\dots \sum \prod_{i=1}^{k} \frac{(a_i - a_{i-1})^{\alpha_i}}{\alpha_i!} p_n\left(c_i(a_i - a_{i-1}), \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1}}{n} - b_i - c_i a_{i-1}; \alpha_i\right),$$

ahol

$$p_n(u, z; \alpha) = \begin{cases} 1 - \dfrac{z}{u^\alpha} \displaystyle\sum_{j=0}^{[\alpha(u-z)]} \binom{\alpha}{j} \left(z + \frac{j}{n}\right)^{j-1} \left(u - z - \frac{j}{n}\right)^{\alpha - j}, & u \geqq z \\ 1, & u < z \end{cases}$$

és az összegzés azon $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ *nem-negatív egész számokra terjed ki, melyekre*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i \geqq n(c_{i+1} a_i + b_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Bizonyítás. Legyen v_i az (a_{i-1}, a_i) intervallumba eső mintaelemek száma. A $\{v_1 = \alpha_1, \dots, v_k = \alpha_k\}$ esemény valószínűsége a polinomiális eloszlásból adódik, ezen feltétel mellett az $\{F_n(x) \geqq G(x), a_{i-1} \leqq x \leqq a_i\}$ események különböző i-re nyilván függetlenek. Tekintsük tehát az $\{F_n(x) \geqq G(x), a_{i-1} \leqq x \leqq a_i\}$, azaz az

$\{F_n(x)\geqq c_i x+b_i,\ a_{i-1}\leqq x\leqq a_i\}$ eseményt a $\nu_1=\alpha_1,\ \nu_2=\alpha_2,\ \ldots,\ \nu_k=\alpha_k$ feltétel mellett. Ekkor $F_n(a_{i-1})=\dfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}}{n}$ és $F_n(a_i)=\dfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_i}{n}$. Alkalmazzuk az 1.2. Tétel bizonyításánál kifejtett gondolatmenetet. Ekkor annak valószínűsége, hogy $F_n(x)$ az $y=c_i x+b_i$ egyenest az $\dfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+j}{n}$ magasságon messe, $\binom{\alpha_i}{j}x_j^j(1-x_j)^{\alpha_i-j}$, ahol most $x_j=\dfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+j}{nc_i(a_i-a_{i-1})}-\dfrac{b_i+a_{i-1}c_i}{c_i(a_i-a_{i-1})}$. Annak valószínűsége pedig, hogy ez legyen az első metszés, $\dfrac{x_0}{x_j}$. Így annak valószínűsége, hogy $F_n(x)$ az egyenest ne messe, a tételben szereplő p_n. Az α-kra vonatkozó egyenlőtlenség biztosítja, hogy $F_n(x)$ az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pontokban a $G(x)$, szakaszonként lineáris függvény felett legyen. Ezzel az 1.3. Tételt bizonyítottuk.

Az 1.3. Tétel több fontos statisztika eloszlását speciális esetként tartalmazza. Ezeket kívánjuk részletezni a továbbiakban. Mint jeleztük, bizonyos esetekben 2 vagy 3 szakasz össze is vonható, ami által a formula egyszerűsödik. Ezeket külön tételként mondjuk ki.

Az alábbi, 1.4. Tétel a $P\big(F_n(x)>cx+b,\ a_1\leqq x\leqq a_2\big)$ valószínűséget adja meg. Ezzel ekvivalens formulákat ad meg EICKER [50], de véleményünk szerint az alábbi tétel mind módszerében, mind formulájában egyszerűbb, a speciális esetre vonatkozó legegyszerűbb formulák azonnal kiadódnak.

1.4. TÉTEL. *Legyen* $0\leqq a_1<a_2\leqq 1,\ c>0,\ ca_2+b\leqq 1$. *Ekkor*

$$P\big(F_n(x)\geqq cx+b,\ a_1\leqq x\leqq a_2\big)= \tag{1.13}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\alpha>n(ca_1+b)}\binom{n}{\alpha}a_1^\alpha(1-a_1)^{n-\alpha}-\\ \displaystyle-\sum_{\alpha>n(ca_1+b)}(x_0-a_1)\sum_{j=0}^{[n(ca_2+b)]-\alpha}\frac{n!}{\alpha!\,j!\,(n-\alpha-j)!}a_1^\alpha(x_j-a_1)^{j-1}(1-x_j)^{n-\alpha-j}, & ha\ \ ca_1+b>0\\ \displaystyle 1-z_0\sum_{j=0}^{[n(ca_2+b)]}\binom{n}{j}z_j^{j-1}(1-z_j)^{n-j}, \quad ha\ \ ca_1+b\leqq 0,\end{cases}$$

$$x_j=\frac{\alpha+j}{nc}-\frac{b}{c},\quad z_j=\frac{j}{nc}-\frac{b}{c}.$$

Bizonyítás. Ha $ca_1+b>0$, legyen ν a $(0, a_1)$ intervallumban levő mintaelemek száma. A $\{\nu=\alpha\}$ esemény valószínűsége nyilván $\binom{n}{\alpha}a_1^\alpha(1-a_1)^{n-\alpha}$, ezen feltétel mellett az $\{F_n(x)>cx+b,\ a_1\leqq x\leqq a_2\}$ esemény valószínűségét az 1.2. Tétel módszerével, az 1.3. Tételnél eszközölt módosítást alkalmazva határozhatjuk meg. Eszerint

$$P\big(F_n(x)\geqq cx+b,\ a_1\leqq x\leqq a_2|\nu=\alpha\big)=$$

$$=1-\sum_{(j)}\binom{n-\alpha}{j}\left(\frac{x_j-a_1}{1-a_1}\right)^{j-1}\left(\frac{1-x_j}{1-a_1}\right)^{n-\alpha-j}\frac{x_0-a_1}{1-a_1},$$

feltéve, hogy $\alpha > n(ca_1+b)$. így

$$P(F_n(x) \geqq cx+b,\ a_1 \leqq x \leqq a_2) =$$

$$= \sum_{\alpha > n(ca_1+b)} P(F_n(x) \geqq cx+b,\ a_1 \leqq x \leqq a_2 | \nu = \alpha) P(\nu = \alpha) =$$

$$= \sum_{(\alpha)} \binom{n}{\alpha} a_1^\alpha (1-a_1)^{n-\alpha} \left(1 - \sum_{(j)} \binom{n-\alpha}{j} \left(\frac{x_j - a_1}{1-a_1}\right)^{j-1} \left(\frac{1-x_j}{1-a_1}\right)^{n-\alpha-j} \frac{x_0 - a_1}{1-a_1}\right),$$

ami adja az állítást, ha $ca_1+b>0$. (Megjegyezzük, hogy a formula $a_1=0, b>0$ esetén 0-t ad, aminek így is kell lenni.)

Ha $ca_1+b \leqq 0$, akkor az állítás közvetlenül az 1.2. Tételből adódik. Ekkor ui.

$$P(F_n(x) \geqq cx+b,\ a_1 \leqq x \leqq a_2) = P(F_n(x) \geqq cx+b,\ 0 \leqq x \leqq a_2).$$

Az 1.4. Tétel következményeként megadjuk néhány (egyoldali) statisztika pontos eloszlását. Ezek egyike-másika természetesen nem új, az irodalomban már megtalálható, ismert formula. Ezeknél megjelöljük azt a forrást, ahol az illető formula tudomásunk szerint először meg van adva (helyesen). Megjegyezzük, hogy Birnbaum és Lientz [12] egy formulagyűjteményt bizonyítással vélnek megadni, de csaknem minden eredményük — egy-két kivétellel — hibás. Az alábbiakban elvégezzük e formulagyűjtemény korrekcióját is.

Előbb kimondunk még egy lemmát, amely lehetővé teszi, hogy $\{F_n(x) \leqq \ldots\}$ események valószínűségét visszavezessük $\{F_n(x) \geqq \ldots\}$ események valószínűségére.

1.1. Lemma. *Legyen $G(x)$ a $[0, 1]$ intervallumban értelmezett függvény. Ekkor*

$$P(F_n(x) \geqq G(x),\ 0 \leqq x \leqq 1) = P(F_n(x) \leqq 1 - G(1-x),\ 0 \leqq x \leqq 1).$$

Bizonyítás. Végezzük el az $X_i^{(1)} = 1 - X_i$ transzformációt. Ekkor $(X_1^{(1)}, X_2^{(2)}, \ldots$ $\ldots, X_n^{(1)})$ ugyancsak a (0,1)-ben egyenletes eloszlásból vett véletlen minta és az $\{F_n(x) \geqq G(x)\}$ esemény minden x-re ekvivalens az $\{F_n^{(1)}(x) \leqq 1 - G(1-x)\}$ eseménnyel, ahol $F_n^{(1)}(x)$ az $X_1^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)}$ mintaelemek empirikus eloszlásfüggvénye.

1.4.1. Korollárium. *Tekintsük a* $\sup\limits_{a_1 \leqq x \leqq a_2} (x - F_n(x))$, *ill. a* $\sup\limits_{1-a_2 \leqq x \leqq 1-a_1} (F_n(x) - x)$ *statisztikákat, melyeknek az* 1.1. Lemma *értelmében azonos az eloszlásuk. Ekkor*

$$P\left(\sup_{a_1 \leqq x \leqq a_2} (x - F_n(x)) < \varepsilon\right) = P\left(\sup_{1-a_2 \leqq x \leqq 1-a_1} (F_n(x) - x) < \varepsilon\right) = \tag{1.14}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha > n(a_1-\varepsilon)} \binom{n}{\alpha} a_1^\alpha (1-a_1)^{n-\alpha} - \\ \displaystyle - \sum_{\alpha > n(a_1-\varepsilon)} \left(\frac{\alpha}{n} + \varepsilon - a_1\right) \sum_{j=0}^{[n(a_2-\varepsilon)]-\alpha} \frac{n!}{\alpha!\, j!\, (n-\alpha-j)!} a_1^\alpha \left(\frac{\alpha+j}{n} + \varepsilon - a_1\right)^{j-1} \left(1 - \frac{\alpha+j}{n} - \varepsilon\right)^{n-\alpha-j}, & 0 < \varepsilon < a_1. \\ \displaystyle 1 - \varepsilon \sum_{j=0}^{[n(a_2-\varepsilon)]} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n} + \varepsilon\right)^{j-1} \left(1 - \frac{j}{n} - \varepsilon\right)^{n-j}, & a_1 \leqq \varepsilon < 1. \end{cases}$$

Bizonyítás.

$$P(\sup_{a_1 \leqq x \leqq a_2}(x-F_n(x))<\varepsilon) = P(x-F_n(x)<\varepsilon,\ a_1 \leqq x \leqq a_2) =$$
$$= P(F_n(x)>x-\varepsilon,\ a_1 \leqq x \leqq a_2),$$

így alkalmazható az 1.4. Tétel $b=-\varepsilon$, $c=1$-gyel.

Az $a_1=0$, $a_2=1$ eset felel meg az egyoldali *Kolmogorov—Szmirnov* statisztika eloszlásának. Tudomásunk szerint ez volt az első pontos eloszlás, melyet meghatároztak, mégpedig SZMIRNOV [92]. Később BIRNBAUM és TINGEY [15] is megadták ugyanezt a formulát, néhol — tévesen — a formula meghatározását nekik tulajdonítják. Az $a_1=0$, a_2 tetszőleges, ill. a_1 tetszőleges, $a_2=1$ esetet G. ISHII [58], majd később SZMIRNOV [93] vizsgálta. Lásd még CSÖRGŐ [33]. Az általános esetet TAKÁCS [94] adja meg, nem a fenti formában. BIRNBAUM és LIENTZ formulái [12] hibásak.

1.4.2. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a*

$$\sup_{a_1 \leqq x \leqq a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right), \quad \textit{ill. a} \quad \sup_{1-a_2 \leqq x \leqq 1-a_1}\left(\frac{F_n(x)-x}{x}\right)$$

statisztikákat, melyeknek az 1.1. Lemma *értelmében azonos az eloszlásuk. Ekkor*

$$P\left(\sup_{a_1 \leqq x \leqq a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon\right) = P\left(\sup_{1-a_2 \leqq x \leqq 1-a_1}\left(\frac{F_n(x)-x}{x}\right)<\varepsilon\right) = \tag{1.15}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha>n(1+\varepsilon)a_1-\varepsilon}\binom{n}{\alpha}a_1^\alpha(1-a_1)^{n-\alpha} - \sum_{\alpha>n(1+\varepsilon)a_1-\varepsilon}\left(\frac{\alpha}{n(1+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}-a_1\right)\times \\ \displaystyle\times\sum_{j=0}^{[n((1+\varepsilon)a_2-\varepsilon)]-\alpha}\frac{n!a_1^\alpha}{\alpha!\,j!\,(n-\alpha-j)!}\left(\frac{\alpha+j}{n(1+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}-a_1\right)^{j-1}\left(1-\frac{\alpha+j}{n(1+\varepsilon)}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n-\alpha-j}, \\ \hfill 0<\varepsilon<\dfrac{a_1}{1-a_1}, \\ \displaystyle 1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum_{j=0}^{[n((1+\varepsilon)a_2-\varepsilon)]}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n(1+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{j-1}\left(1-\frac{j}{n(1+\varepsilon)}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n-j}, \quad \frac{a_1}{1-a_1}\leqq\varepsilon. \end{cases}$$

$a_2=1$ *esetén a formula tovább egyszerűsíthető:*

$$P\left(\sup_{a_1 \leqq x \leqq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon\right) = \tag{1.16}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha>n((1+\varepsilon)a_1-\varepsilon)}\binom{n}{\alpha}a_1^\alpha(1-a_1)^{n-\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{n(1+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}-a_1\right), & 0<\varepsilon<\dfrac{a_1}{1-a_1} \\ \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, & \dfrac{a_1}{1-a_1}\leqq\varepsilon. \end{cases}$$

Bizonyítás.

$$P\left(\sup_{a_1\leqq x\leqq a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon\right)=P\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}<\varepsilon,\ a_1\leqq x\leqq a_2\right)=$$

$$=P\big(F_n(x)>(1+\varepsilon)x-\varepsilon,\ a_1\leqq x\leqq a_2\big),$$

így alkalmazható az 1.4. Tétel $b=-\varepsilon$, $c=1+\varepsilon$-nal. $a_2=1$ esetén a $\{\nu=\alpha\}$ feltétel mellett, ill. $\frac{a_1}{1-a_1}\leqq\varepsilon$ esetén közvetlenül az 1.1. Tétel alkalmazható.

Az $a_1=0$, $a_2=1$ esetben az állítás ekvivalens az 1.1. Tétellel, tehát DANIELStől származik [36]. Az $a_1=0$, a_2 tetszőleges esetet G. ISHII [59], a_1 tetszőleges, $a_2=1$ esetet CHANG [20] vizsgálta. Mind a két eset megtalálható SZMIRNOVnál [93] is. Lásd még CSÖRGŐ [34]. Az általános esetet TAKÁCS [94] adja, de nem a fenti formában. BIRNBAUM és LIENTZ formulái [12] hibásak.

1.4.3. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a*

$$\sup_{a_1\leqq x\leqq a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right),\quad \textit{ill. a}\quad \sup_{1-a_2\leqq x\leqq 1-a_1}\left(\frac{F_n(x)-x}{1-x}\right)$$

statisztikákat, melyeknek az 1.1. Lemma *értelmében azonos az eloszlásuk. Ekkor* $a_1>0$ *esetén*

$$P\left(\sup_{a_1\leqq x\leqq a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\varepsilon\right)=P\left(\sup_{1-a_2\leqq x\leqq 1-a_1}\left(\frac{F_n(x)-x}{x}\right)<\varepsilon\right)= \tag{1.17}$$

$$=\sum_{\alpha>n(1-\varepsilon)a_1}\binom{n}{\alpha}a_1^{\alpha}(1-a_1)^{n-\alpha}-$$

$$-\sum_{\alpha>n(1-\varepsilon)a_1}\left(\frac{\alpha}{n(1-\varepsilon)}-a_1\right)\sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)a_2]-\alpha}\frac{n!\,a_1^{\alpha}}{\alpha!\,j!\,(n-\alpha-j)!}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha+j}{n(1-\varepsilon)}-a_1\right)^{j-1}\left(1-\frac{\alpha+j}{n(1-\varepsilon)}\right)^{n-\alpha-j},\quad \textit{ha}\quad \frac{a_2-1}{a_2}<\varepsilon<1.$$

Bizonyítás.

$$P\left(\sup_{a_1\leqq x\leqq a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\varepsilon\right)=P\left(\frac{x-F_n(x)}{x}<\varepsilon,\ a_1\leqq x\leqq a_2\right)=$$

$$=P\big(F_n(x)>(1-\varepsilon)x,\ a_1\leqq x\leqq a_2\big),$$

így alkalmazható az 1.4. Tétel $b=0$, $c=1-\varepsilon$-nal. Itt az $a_1=0$ eset értelmetlen, hiszen 1 valószínűséggel fennáll $\sup_{0\leqq x\leqq a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)=1$, azaz konstans.

BIRNBAUM és LIENTZ formulái [12] hibásak.

Tudomásunk szerint az (1.17) formula explicite még speciális esetben sem található meg az irodalomban.

1.4.4. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a*

$$\sup_{A_1 \leqq F_n(x) \leqq A_2} (x - F_n(x)), \quad \textit{ill. a} \quad \sup_{1-A_2 \leqq F_n(x) \leqq 1-A_1} (F_n(x) - x)$$

statisztikákat, melyek eloszlása az 1.1. Lemma *értelmében azonos. Ekkor*

$$(1.18) \quad P\Big(\sup_{A_1 \leqq F_n(x) \leqq A} (x - F_n(x)) < \varepsilon\Big) = P\Big(\sup_{1-A_2 \leqq F_n(x) \leqq 1-A_1} (F_n(x) - x) < \varepsilon\Big) = 1, \qquad \textit{ha} \quad \varepsilon \geqq 1 - A_1$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha > nA_1} \binom{n}{\alpha} (A_1+\varepsilon)^\alpha (1-A_1-\varepsilon)^{n-\alpha} - \\ - \sum\limits_{\alpha > nA_1} \left(\dfrac{\alpha}{n} - A_1\right) \sum\limits_{j=0}^{[nA_2]-\alpha} \dfrac{n!(A_1+\varepsilon)^\alpha}{\alpha!j!(n-\alpha-j)!} \left(\dfrac{\alpha+j}{n} - A_1\right)^{j-1} \left(1 - \dfrac{\alpha+j}{n} - \varepsilon\right)^{n-\alpha-j}, \\ \qquad \textit{ha} \quad -A_1 \leqq \varepsilon < 1 - A_1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$P\Big(\sup_{A_1 \leqq F_n(x) \leqq A_2} (x - F_n(x)) < \varepsilon\Big) = P\Big(\sup_{a_1 \leqq x \leqq a_2} (x - F_n(x)) < \varepsilon\Big),$$

ahol $a_1 = \min(A_1+\varepsilon, 1)$ és $a_2 = \min(A_2+\varepsilon, 1)$, így a fenti formulát az 1.4.1. Korolláriumból kaphatjuk. $A_1=0$-ra a formula a következőképpen egyszerűsíthető:

$$P\Big(\sup_{0 \leqq F_n(x) \leqq A_2} (x - F_n(x)) < \varepsilon\Big) = 1 - \varepsilon \sum_{j=0}^{[nA_2]} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n} + \varepsilon\right)^{j-1} \left(1 - \frac{j}{n} - \varepsilon\right)^{n-j}.$$

$A_1=0$-ra, ill. $A_2=1$-re CSÖRGŐ [33] határozta meg az eloszlást. $A_1=0$-ra BIRNBAUM és LIENTZ formulája [12] korrekt, míg az általános eset tudomásunk szerint az irodalomban nem található.

1.4.5. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a*

$$\sup_{A_1 \leqq F_n(x) \leqq A_2} \left(\frac{x - F_n(x)}{1 - F_n(x)}\right), \quad \textit{ill. a} \quad \sup_{1-A_2 \leqq F_n(x) \leqq 1-A_1} \left(\frac{F_n(x) - x}{F_n(x)}\right)$$

statisztikákat, melyeknek eloszlása az 1.1. Lemma *értelmében azonos. Ekkor*

$$(1.19) \quad P\left(\sup_{A_1 \leqq F_n(x) \leqq A_2} \left(\frac{x - F_n(x)}{1 - F_n(x)}\right) < \varepsilon\right) = P\left(\sup_{1-A_2 \leqq F_n(x) \leqq 1-A_1} \left(\frac{F_n(x) - x}{F_n(x)}\right) < \varepsilon\right) =$$

$$= \sum_{\alpha > nA_1} \binom{n}{\alpha} (A_1(1-\varepsilon)+\varepsilon)^\alpha (1-\varepsilon)^{n-\alpha} (1-A_1)^{n-\alpha} -$$

$$- \sum_{\alpha > nA_1} \left(\frac{\alpha}{n} - A_1\right) \sum_{j=0}^{[nA_2]-\alpha} \frac{n!(A_1(1-\varepsilon)+\varepsilon)^\alpha}{\alpha!j!(n-\alpha-j)!} (1-\varepsilon)^{n-\alpha} \left(\frac{\alpha+j}{n} - A_1\right)^{j-1} \left(1 - \frac{\alpha+j}{n}\right)^{n-\alpha-j},$$

$$-\frac{A_1}{1-A_1} < \varepsilon < 1.$$

Ha $A_1=0$, *akkor*

$$P\left(\sup_{0\le F_n(x)\le A_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-F_n(x)}\right)<\varepsilon\right)=$$

$$=1-\varepsilon\sum_{j=0}^{[nA_2]}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}(1-\varepsilon)+\varepsilon\right)^{j-1}(1-\varepsilon)^{n-j}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{n-j},\quad 0<\varepsilon<1.$$

Ha $A_2=1$, *akkor*

$$P\left(\sup_{A_1\le F_n(x)\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-F_n(x)}\right)<\varepsilon\right)=$$

$$=\sum_{\alpha>nA_1}\binom{n}{\alpha}(A_1(1-\varepsilon)+\varepsilon)^{\alpha}(1-\varepsilon)^{n-\alpha}(1-A_1)^{n-\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{n}-A_1\right),\quad -\frac{A_1}{1-A_1}<\varepsilon<1.$$

Ha $A_1=0$, $A_2=1$, *akkor*

$$P\left(\sup_{0\le F_n(x)\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-F_n(x)}\right)<\varepsilon\right)=\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<1,$$

azaz az eloszlás egyenletes.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$P\left(\sup_{A_1\le F_n(x)\le A_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-F_n(x)}\right)<\varepsilon\right)=P\left(\sup_{a_1\le x\le a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right),$$

ahol $a_1=A_1(1-\varepsilon)+\varepsilon$ és $a_2=A_2(1-\varepsilon)+\varepsilon$. Így a formulát az 1.4.2. Korolláriumból kaphatjuk.

Az $A_1=0$ eset CSÖRGŐtől származik [34]. BIRNBAUM és LIENTZ formulája [12] hibás. Az általános eset tudomásunk szerint az irodalomban nem található.

1.4.6. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a*

$$\sup_{A_1\le F_n(x)\le A_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{F_n(x)}\right),\quad \textit{ill. a}\quad \sup_{1-A_2\le F_n(x)\le 1-A_1}\left(\frac{F_n(x)-x}{1-F_n(x)}\right)$$

statisztikákat, melyeknek eloszlása az 1.1. Lemma *értelmében azonos. Ekkor* $A_1>0$*-ra*

$$P\left(\sup_{A_1\le F_n(x)\le A_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{F_n(x)}\right)<\varepsilon\right)=P\left(\sup_{1-A_2\le F_n(x)\le 1-A_1}\left(\frac{F_n(x)-x}{1-F_n(x)}\right)<\varepsilon\right)= \tag{1.20}$$

$$=\sum_{\alpha>nA_1}\binom{n}{\alpha}((1+\varepsilon)A_1)^{\alpha}(1-(1+\varepsilon)A_1)^{n-\alpha}-$$

$$-\sum_{\alpha>nA_1}\left(\frac{\alpha}{n}-A_1\right)\sum_{j=0}^{[nA_2]-\alpha}\frac{n!A_1^{\alpha}(1+\varepsilon)^{\alpha+j}}{\alpha!j!(n-\alpha-j)!}\left(\frac{\alpha+j}{n}-A_1\right)^{j-1}\left(1-\frac{\alpha+j}{n}(1+\varepsilon)\right)^{n-\alpha-j},$$

$$-1<\varepsilon<\frac{1-A_1}{A_1}.$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$P\left(\sup_{A_1 \leqq F_n(x) \leqq A_2} \left(\frac{x-F_n(x)}{F_n(x)}\right) < \varepsilon\right) = P\left(\sup_{a_1 \leqq x \leqq a_2} \left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right) < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right),$$

ahol $a_1=(1+\varepsilon)A_1$ és $a_2=(1+\varepsilon)A_2$, így a formulát az 1.4.3. Korolláriumból kaphatjuk.

További, hasonló statisztikák eloszlása, mint pl.

$$\sup_{a_1 \leqq x \leqq a_2} (F_n(x)-\gamma x), \quad \text{ill.} \quad \sup_{a_1 \leqq x \leqq a_2} \left(\frac{F_n(x)-\gamma x}{x}\right)$$

(TAKÁCS [94]) stb. is meghatározható a fenti módszerrel, ezek részletezéséről azonban eltekintünk.

A következőkben két lineáris szakaszból álló $G(x)$ esetével foglalkozunk.

1.5. TÉTEL. *Legyen* $0<a_1 \leqq a_2<1$, $c_1>0$, $c_2>0$, $b_1<0$, $c_1a_1+b_1>0$, $c_2a_2+b_2 \geqq \geqq c_1a_1+b_1$, $c_2+b_2 \leqq 1$.
Ekkor

$$P(F_n(x) > c_1x+b_1, \ 0 \leqq x \leqq a_1; \ F_n(x) > c_2x+b_2, \ a_2 \leqq x < 1) = \tag{1.21}$$

$$= \sum_{\alpha > n(c_2a_2+b_2)} \binom{n}{\alpha} a_2^\alpha (1-a_2)^{n-\alpha} \times$$

$$\times \left(1+\frac{b_1}{a_2c_1} \sum_{j=0}^{[n(c_1a_1+b_1)]} \binom{\alpha}{j} \left(\frac{\frac{j}{n}-b_1}{a_2c_1}\right)^{j-1} \left(1-\frac{\frac{j}{n}-b_1}{a_2c_1}\right)^{\alpha-j}\right) \times$$

$$\times \left(1-\frac{\frac{\alpha}{nc_2}-\frac{b_2}{c_2}-a_2}{1-a_2} \sum_{i=0}^{[n(c_2+b_2)]-\alpha} \binom{n-\alpha}{i} \left(\frac{\frac{\alpha+i}{nc_2}-\frac{b_2}{c_2}-a_2}{1-a_2}\right)^{i-1} \left(\frac{1-\frac{\alpha+i}{nc_2}+\frac{b_2}{c_2}}{1-a_2}\right)^{n-\alpha-i}\right).$$

Bizonyítás. Legyen ν a $(0, a_2)$ intervallumba eső mintaelemek száma. A $\{\nu=\alpha\}$ esemény valószínűsége $\binom{n}{\alpha} a_2^\alpha(1-a_2)^{n-\alpha}$, ezen feltétel mellett $\alpha>n(c_2a_2+b_2)$ esetén az $\{F_n(x)>c_1x+b_1, 0 \leqq x \leqq a_1\}$ és $\{F_n(x)>c_2x+b_2, a_2 \leqq x<1\}$ események függetlenek. A valószínűségeket éppen úgy kaphatjuk mint az 1.4. Tételben, amivel az 1.5. Tételt bizonyítottuk.

Az 1.5. Tétel folyományaként megkaphatjuk néhány újabb statisztika eloszlását.

1.5.1. KOROLLÁRIUM. *Vizsgáljuk a*

$$\sup_{\substack{x \leqq a_1 \\ a_2 \leqq x}} (x-F_n(x)), \quad \textit{ill. a} \quad \sup_{\substack{x \leqq 1-a_2 \\ 1-a_1 \leqq x}} (F_n(x)-x)$$

statisztikákat, melyeknek eloszlása az 1.1. Lemma *értelmében azonos. Ekkor*

$$(1.22)\qquad P\Big(\sup_{\substack{x\le a_1\\ a_2\le x}}(x-F_n(x))<\varepsilon\Big)=P\Big(\sup_{\substack{x\le 1-a_2\\ 1-a_1\le x}}(F_n(x)-x)<\varepsilon\Big)=$$

$$=\sum_{\alpha>n(a_2-\varepsilon)}\binom{n}{\alpha}a_2^{\alpha}(1-a_2)^{n-\alpha}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\varepsilon}{a_2}\sum_{j=0}^{[n(a_1-\varepsilon)]}\binom{\alpha}{j}\left(\left(\frac{j}{n}+\varepsilon\right)\frac{1}{a_2}\right)^{j-1}\left(1-\left(\frac{j}{n}+\varepsilon\right)\frac{1}{a_2}\right)^{\alpha-j}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\frac{\alpha}{n}+\varepsilon-a_2}{1-a_2}\sum_{i=0}^{[n(1-\varepsilon)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{i}\left(\frac{\frac{\alpha+i}{n}+\varepsilon-a_2}{1-a_2}\right)^{i-1}\left(1-\frac{\frac{\alpha+i}{n}+\varepsilon-a_2}{1-a_2}\right)^{n-\alpha-i}\right).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.5. Tételt $c_1=c_2=1$, $b_1=b_2=-\varepsilon$-nal.

1.5.2. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a*

$$\sup_{\substack{x\le a_1\\ a_2\le x}}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right),\quad \textit{ill. a}\quad \sup_{\substack{x\le 1-a_2\\ 1-a_1\le x}}\left(\frac{F_n(x)-x}{x}\right)$$

statisztikákat, melyeknek eloszlása az 1.1. Lemma *értelmében azonos. Ekkor*

$$(1.23)\qquad P\left(\sup_{\substack{x\le a_1\\ a_2\le x}}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon\right)=P\left(\sup_{\substack{x\le 1-a_2\\ 1-a_1\le x}}\left(\frac{F_n(x)-x}{x}\right)<\varepsilon\right)=$$

$$=\sum_{\alpha>n((1+\varepsilon)a_2-\varepsilon)}\binom{n}{\alpha}a_2^{\alpha}(1-a_2)^{n-\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{n(1+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}-a_2\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\varepsilon}{a_2(1+\varepsilon)}\sum_{j=0}^{[n(a_1(1+\varepsilon)-\varepsilon)]}\binom{\alpha}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{a_2(1+\varepsilon)}\right)^{j-1}\left(1-\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{a_2(1+\varepsilon)}\right)^{\alpha-j}\right).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.5. Tételt $c_1=c_2=1+\varepsilon$, $b_1=b_2=-\varepsilon$-nal, a második részre azonban, azaz az $\{F_n(x)>(1+\varepsilon)x-\varepsilon,\ a_2\le x<1\}$ esemény valószínűségének meghatározásánál az 1.4.2. Korolláriumnál $a_2=1$ esetén alkalmazott egyszerűsítés lehetséges.

1.5.3. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a*

$$\sup_{\substack{F_n(x)\le A_1\\ A_2\le F_n(x)}}(x-F_n(x)),\quad \textit{ill. a}\quad \sup_{\substack{F_n(x)\le 1-A_2\\ 1-A_1\le F_n(x)}}(F_n(x)-x)$$

statisztikákat, melyeknek eloszlása az 1.1. Lemma *értelmében azonos. Ekkor*

$$P\Big(\sup_{\substack{F_n(x)\le A_1\\ F_n(x)\ge A_2}}(x-F_n(x))<\varepsilon\Big)=P\Big(\sup_{\substack{F_n(x)\le 1-A_2\\ F_n(x)\ge 1-A_1}}(F_n(x)-x)<\varepsilon\Big)= \tag{1.24}$$

$$=\sum_{\alpha>nA_2}\binom{n}{\alpha}(A_2+\varepsilon)^{\alpha}(1-A_2-\varepsilon)^{n-\alpha}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\varepsilon}{A_2+\varepsilon}\sum_{j=0}^{[nA_1]}\binom{\alpha}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{A_2+\varepsilon}\right)^{j-1}\left(1-\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{A_2+\varepsilon}\right)^{\alpha-j}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\frac{\alpha}{n}-A_2}{1-A_2-\varepsilon}\sum_{i=0}^{[n(1-\varepsilon)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{i}\left(\frac{\frac{\alpha+i}{n}-A_2}{1-A_2-\varepsilon}\right)^{i-1}\left(\frac{1-\varepsilon-\frac{\alpha+i}{n}}{1-A_2-\varepsilon}\right)^{n-\alpha-i}\right).$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$P\Big(\sup_{\substack{F_n(x)\le A_1\\ A_2\le F_n(x)}}(x-F_n(x))<\varepsilon\Big)=P\Big(\sup_{\substack{x\le a_1\\ x\ge a_2}}(x-F_n(x))<\varepsilon\Big),$$

ahol $a_1=A_1+\varepsilon$, $a_2=A_2+\varepsilon$, így a formulát az 1.5.1. Korolláriumból kaphatjuk.

1.5.4. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a*

$$\sup_{\substack{F_n(x)\le A_1\\ A_2\le F_n(x)}}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-F_n(x)}\right),\quad \textit{ill. a}\quad \sup_{\substack{F_n(x)\le 1-A_2\\ 1-A_1\le F_n(x)}}\left(\frac{F_n(x)-x}{F_n(x)}\right)$$

statisztikákat, melyek eloszlása az 1.1. Lemma *értelmében azonos. Ekkor*

$$P\left(\sup_{\substack{F_n(x)\le A_1\\ F_n(x)\ge A_2}}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-F_n(x)}\right)<\varepsilon\right)=P\left(\sup_{\substack{F_n(x)\le 1-A_2\\ F_n(x)\ge 1-A_1}}\left(\frac{F_n(x)-x}{F_n(x)}\right)<\varepsilon\right)= \tag{1.25}$$

$$=\sum_{\alpha>nA_2}\binom{n}{\alpha}(A_2(1-\varepsilon)+\varepsilon)^{\alpha}(1-\varepsilon)^{n-\alpha}(1-A_2)^{n-\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{n}-A_2\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\varepsilon}{A_2(1-\varepsilon)+\varepsilon}\sum_{j=0}^{[nA_1]}\binom{\alpha}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}(1-\varepsilon)+\varepsilon}{A_2(1-\varepsilon)+\varepsilon}\right)^{j-1}\left(\frac{\left(A_2-\frac{j}{n}\right)(1-\varepsilon)}{A_2(1-\varepsilon)+\varepsilon}\right)^{\alpha-j}\right).$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$P\left(\sup_{\substack{F_n(x)\le A_1\\ A_2\le F_n(x)}}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-F_n(x)}\right)<\varepsilon\right)=P\left(\sup_{\substack{x\le a_1\\ a_2\le x}}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right),$$

ahol $a_1=A_1(1-\varepsilon)+\varepsilon$ és $a_2=A_2(1-\varepsilon)+\varepsilon$, így az eloszlást az 1.5.2. Korolláriumból közvetlenül megkaphatjuk.

1.5.5. KOROLLÁRIUM. *Tekintsük a*

$$\max\left(\sup_{0\le x\le\frac{1}{2}}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right),\ \sup_{\frac{1}{2}\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)\right),$$

ill. a

$$\max\left(\sup_{0\le x\le\frac{1}{2}}\left(\frac{F_n(x)-x}{1-x}\right),\ \sup_{\frac{1}{2}\le x\le 1}\left(\frac{F_n(x)-x}{x}\right)\right)$$

statisztikákat, melyeknek eloszlása az 1.1. Lemma *értelmében azonos. Ekkor*

$$P\left(\max\left(\sup_{0\le x\le\frac{1}{2}}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right),\ \sup_{\frac{1}{2}\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)\right)<\varepsilon\right)= \tag{1.26}$$

$$=P\left(\max\left(\sup_{0\le x\le\frac{1}{2}}\left(\frac{F_n(x)-x}{1-x}\right),\ \sup_{\frac{1}{2}\le x\le 1}\left(\frac{F_n(x)-x}{x}\right)\right)<\varepsilon\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{\alpha>\frac{n(1-\varepsilon)}{2}}\binom{n}{\alpha}\left(1-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n(1-\varepsilon)}{2}\right]}\binom{\alpha}{j}\left(\frac{\frac{2j}{n}+2\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{j-1}\left(1-\frac{\frac{2j}{n}+2\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\alpha-j}\right)\times$$

$$\times\left(1-\left(\frac{2\alpha}{n(1-\varepsilon)}-1\right)\sum_{i=0}^{[n(1-\varepsilon)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{i}\left(\frac{2(\alpha+i)}{n(1-\varepsilon)}-1\right)^{i-1}\left(2-\frac{2(\alpha+i)}{n(1-\varepsilon)}\right)^{n-\alpha-i}\right).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.5. Tételt $a_1=a_2=1/2$, $c_1=1+\varepsilon$, $c_2=1-\varepsilon$, $b_1=-\varepsilon$, $b_2=0$-val.

Tudomásunk szerint a fenti statisztikáknak csupán határeloszlásával foglalkoztak eddig (lásd 2.2. pont), a pontos eloszlások az irodalomban nem találhatók.

1.3. A Ballot-lemma egy kiterjesztése

Az előzőkben olyan statisztikákkal foglalkoztunk, melyek függvények suprémumának eloszlását adják meg. CHANG [20] és TANG [99] megadta az $\inf\limits_{0<F_n(x)\le c/n}\frac{F_n(x)}{x}$ statisztika pontos eloszlását. Az eloszlás meghatározása természetesen az 1.2. pontban leírt módszerrel is megy, de az nem adja meg közvetlenül a legegyszerűbb formulát. Az eloszlás meghatározására egyszerűbb út kínálkozik az 1.1. Tétel egy kiterjesztésével. Először ezt adjuk meg.

1.2. LEMMA. *Legyen* (mint 1.1. Tételnél) $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *teljes eseményrendszer, melyre* $P(A_0)=p$, $P(A_i)=q$ $(i=1,2,\ldots,n)$. *Természetesen* $p+nq=1$. *Végezzünk*

$n+k$ független kísérletet, melynek során az A_j esemény ν_j-szer következett be ($j=0, 1, 2, \dots, n$). Ekkor

$$(1.27) \qquad P(\nu_1 < 1, \nu_1+\nu_2 < 2, \dots, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n < n) =$$

$$= \begin{cases} p-kq, & ha \quad k=-1, -2, \dots, -n, \\ p-kq+kq\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+k}{i}p^i(1-p)^{n+k-1-i}, & ha \quad k=0, 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Bizonyítás. A bizonyítás az 1.1. Tételen, ill. az ott alkalmazott módszeren alapszik. (Egyébként az 1.2. Lemma $k=0$-ra az 1.1. Tételt adja.) Vizsgáljuk a fenti esemény feltételes valószínűségét ν_0 rögzített értéke mellett.

$$P(\nu_1 < 1, \dots, \nu_1+\dots+\nu_n < n|\nu_0) =$$

$$= P(\nu_1 < 1, \dots, \nu_1+\dots+\nu_{n+k-\nu_0} < n+k-\nu_0|\nu_0) =$$

$$= P(\nu_1 < 1, \dots, \nu_1+\dots+\nu_{n+k-\nu_0} < n+k-\nu_0|\nu_1+\dots+\nu_n = n+k-\nu_0) =$$

$$= \frac{\nu_0-k}{n},$$

feltéve, hogy $\nu_0 \geqq k$. Így $k \geqq 0$ esetén

$$P(\nu_1 < 1, \dots, \nu_1+\dots+\nu_n < n) =$$

$$= \sum_{\nu_0=k}^{n+k}\frac{\nu_0-k}{n}P(\nu_0) = \sum_{\nu_0=0}^{n+k}\frac{\nu_0-k}{n}P(\nu_0)+\frac{k}{n}\sum_{\nu_0=0}^{k-1}P(\nu_0) =$$

$$= \frac{E(\nu_0)-k}{n}+\frac{k}{n}\sum_{\nu_0=0}^{k-1}\binom{n+k}{\nu_0}p^{\nu_0}(1-p)^{n+k-\nu_0} =$$

$$= p-kq+kq\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n+k}{i}p^i(1-p)^{n+k-1-i}.$$

Ha pedig $-n \leqq k < 0$, akkor

$$P(\nu_1 < 1, \dots, \nu_1+\dots+\nu_n < n) = \sum_{\nu_0=0}^{n+k}\frac{\nu_0-k}{n}P(\nu_0) = \frac{(n+k)p-k}{n} = p-kq.$$

Ha $k=1$ és $p=q=\frac{1}{n+1}$, akkor az 1.2. Lemma a következőt adja:

$$P(\nu_1 < 1, \dots, \nu_1+\dots+\nu_n < n) = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Ebből megkapható CHANG formulája [20] (lásd még TANG [99]):

1.6. TÉTEL.

$$P\left(\inf_{0<F_n(x)\leqq(c/n)}\frac{F_n(x)}{x}<\varepsilon\right)= \tag{1.28}$$

$$=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{n\varepsilon}\right)^n+\sum\limits_{j=1}^{[\varepsilon n]}\dbinom{n}{j}\dfrac{(j-1)^{j-1}(n\varepsilon-j)^{n-j}}{(n\varepsilon)^n}, & \dfrac{1}{n}\leqq\varepsilon\leqq\dfrac{c}{n}\\ \left(1-\dfrac{1}{n\varepsilon}\right)^n+\sum\limits_{j=1}^{c}\dbinom{n}{j}\dfrac{(j-1)^{j-1}(n\varepsilon-j)^{n-j}}{(n\varepsilon)^n}, & \dfrac{c}{n}<\varepsilon\leqq 1.\end{cases}$$

Az $\varepsilon=1$, $c=n$ eset közvetlenül az 1.2. Lemmából adódik, n helyett $n-1$-gyel:

$$P\left(\inf_{0<F_n(x)\leqq 1}\frac{F_n(x)}{x}>1\right)=\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Bizonyítás. $\left\{\inf\limits_{0<F_n(x)\leqq(c/n)}\dfrac{F_n(x)}{x}<\varepsilon\right\}=\left\{F_n(x)<\varepsilon x \text{ vmely } x\text{-re}, \dfrac{1}{n\varepsilon}\leqq x\leqq\dfrac{c}{n\varepsilon}\right\}$, azaz vagy $F_n\left(\dfrac{1}{n\varepsilon}\right)=0$, vagy van olyan x, melyre $\varepsilon x=F_n(x)$. Az $\left\{F_n\left(\dfrac{1}{n\varepsilon}\right)=0\right\}$ esemény valószínűsége $\left(1-\dfrac{1}{n\varepsilon}\right)^n$.

Ha $F_n\left(\dfrac{1}{n\varepsilon}\right)>0$, legyen $x=\dfrac{j}{n\varepsilon}$ az első olyan x, melyre $\varepsilon x=F_n(x)$. Annak valószínűsége, hogy $\left\{F_n\left(\dfrac{j}{n\varepsilon}\right)=\dfrac{j}{n}\right\}$, nyilván $\dbinom{n}{j}\left(\dfrac{j}{n\varepsilon}\right)^j\left(1-\dfrac{j}{n\varepsilon}\right)^{n-j}$. Ezen feltétel mellett tekintsük annak valószínűségét, hogy $\left\{F_n(x)>\varepsilon x, \dfrac{1}{n\varepsilon}\leqq x<\dfrac{j}{n\varepsilon}\right\}$. Ha ν_i jelöli a $\left(\dfrac{j-i}{n\varepsilon}, \dfrac{j-i+1}{n\varepsilon}\right)$ intervallumba eső mintaelemek számát ($i=1, 2, \dots, j-1$), akkor itt éppen a $\{\nu_1<1, \dots, \nu_1+\dots+\nu_{j-1}<j-1\}$ eseményről van szó, melynek valószínűsége az 1.2. Lemma szerint $\dfrac{(j-1)^{j-1}}{j^j}$. Annak valószínűsége tehát, hogy $\dfrac{j}{n}$ magasságon történjék az első metszés,

$$\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n\varepsilon}\right)^j\left(1-\frac{j}{n\varepsilon}\right)^{n-j}\frac{(j-1)^{j-1}}{j^j}=\binom{n}{j}\frac{(j-1)^{j-1}(n\varepsilon-j)^{n-j}}{(n\varepsilon)^n}$$

és ezek j-re vonatkozó összegezéséből adódik (1.28).

1.4. Nem folytonos alapeloszlás esete

Az 1.3. Tétel számos speciális esetei közül megemlítünk még egyet, ti. a nem folytonos alapeloszlás esetét. Ebben az esetben SCHMID [85] határozta meg a határeloszlásokat, míg CONOVER [30], ill. COBERLY—LEWIS [29] rekurziós formulákat adtak meg a pontos eloszlásra. VINCZE [104] vizsgálta a kétmintás esetet. Az alábbiakban megadjuk az egyoldali *Kolmogorov*-eltérés pontos eloszlását, explicit alakban, egymintás esetben. Más statisztikák (pl. relatív eltérés stb.) eloszlása is hasonlóképpen adható meg, ezek felsorolásától azonban eltekintünk.

Legyen tehát $F(x)$ egy eloszlásfüggvény, melynek az $x_1, x_2, \dots, x_r$ pontban vannak szakadásai, ahol $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_r < \infty$, minden más pontban legyen $F(x)$ folytonos.

Legyen

$$p_i = F(x_i) - F(x_{i-1}+0) \geqq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r+1$$

$$q_i = F(x_i+0) - F(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Igaz, hogy

$$\sum_{i=1}^{r+1} p_i + \sum_{i=1}^{r} q_i = 1.$$

Jelölje $F_n(x)$ az ebből az eloszlásból vett n elemű minta empirikus eloszlásfüggvényét, és vizsgáljuk a $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} (F(x) - F_n(x))$ statisztikát. Ekkor igaz a következő

1.3. LEMMA. $P(\sup\limits_{-\infty<x<\infty} (F(x) - F_n(x)) < \varepsilon) = P(\bar{F}_n(x) > x - \varepsilon, 0 \leqq x \leqq p_1, p_1 + q_1 \leqq \leqq x \leqq p_1 + q_1 + p_2, \dots)$, *ahol* $\bar{F}_n(x)$ *egy* $(0, 1)$*-ben egyenletes eloszlásból vett minta empirikus eloszlásfüggvénye.*

Bizonyítását lásd NOETHER [72], SCHMID [85], VINCZE [104], WALSH [107]. A fenti lemmából következik, hogy

$$P(\sup_{-\infty<x<\infty} (F(x) - F_n(x)) < \varepsilon) \geqq P(\bar{F}_n(x) > x - \varepsilon, 0 \leqq x \leqq 1) =$$

$$= 1 - \varepsilon \sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)]} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n} + \varepsilon\right)^{j-1} \left(1 - \varepsilon - \frac{j}{n}\right)^{n-j}.$$

Az 1.3. lemmát felhasználva kapjuk a következő tételt:

1.7. TÉTEL.

$$P(\sup_{-\infty<x<\infty} (F(x) - F_n(x)) < \varepsilon) = \tag{1.29}$$

$$= n! \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_{r+1} = n \\ \beta_i > n(a_i - \varepsilon)}} \!\!\cdots\! \sum \prod_{i=1}^{r+1} \frac{(p_i + q_i)^{\alpha_i}}{\alpha_i!} p_n\left(p_i, q_i, \frac{\beta_{i-1}}{n} + \varepsilon - a_{i-1}; \alpha_i\right),$$

ahol

$$p_n(u_1, u_2, z; \alpha) = \begin{cases} 1 - \dfrac{z}{u^\alpha} \displaystyle\sum_{j=0}^{[n(u_1 - z)]} \binom{\alpha}{j} \left(z + \frac{j}{n}\right)^{j-1} \left(u - z - \frac{j}{n}\right)^{\alpha - j}, & u_1 \geqq z, \\ 1 \quad \textit{különben}, \end{cases}$$

$$u = u_1 + u_2, \quad a_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad q_{r+1} = 0,$$

$$a_i = \sum_{j=1}^{i} (p_j + q_j), \quad \beta_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, r+1.$$

Bizonyítás. Legyen ν_i az (a_{i-1}, a_i) intervallumba eső mintaelemek száma, $i=1, 2, \dots, r+1$. A $\{\nu_1=\alpha_1, \nu_2=\alpha_2, \dots, \nu_{r+1}=\alpha_{r+1}\}$ esemény valószínűségét a polinomiális eloszlásból kaphatjuk. Ezen feltétel mellett az $\{\bar{F}_n(x)>x-\varepsilon, a_{i-1}< <x<a_{i-1}+p_i\}$ események $i=1, 2, \dots, r+1$-re függetlenek.

Nyilván $\bar{F}_n(a_{i-1})=\frac{\beta_{i-1}}{n}$ és annak valószínűsége, hogy $\bar{F}_n(x)$ a $\frac{\beta_{i-1}+j}{n}$ magasságon átmesse az $y=x-\varepsilon$ egyenest, $\binom{\alpha_i}{j}x_j^j(1-x_j)^{\alpha_i-j}$, ahol $x_j = \dfrac{\frac{\beta_{i-1}+j}{n}-\varepsilon-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}}$. Annak valószínűsége, hogy itt legyen az első metszés az (a_{i-1}, a_i) intervallumban, az 1.1. Tételből $\frac{x_0}{x_j}$. Így az $x_0\binom{\alpha_i}{j}x_j^{j-1}(1-x_j)^{\alpha_i-j}$ valószínűségeket kell összegezni olyan j-kre, melyre $\frac{\beta_{i-1}+j}{n}\leqq a_{i-1}+p_i-\varepsilon$ és 1-ből levonni. Ezzel kapjuk az 1.7. Tétel állítását.

Amennyiben az 1.3. tételt közvetlenül akarjuk alkalmazni, a (0, 1) intervallumot nem $r+1$, hanem $2r+1$ részre kell bontanunk, így $2r+1$ változós összeget kapunk. Ezt a formulát is megadjuk, ui. célszerűbb ennek alapján számítani a határeloszlást.

(1.30)
$$P\Big(\sup_{-\infty<x<\infty}\big(F(x)-F_n(x)\big)<\varepsilon\Big)=$$
$$=\sum_{\substack{\gamma_1+\dots+\gamma_{r+1}+\delta_1+\dots+\delta_r=n\\ \gamma_1+\delta_1+\dots+\gamma_i+\delta_i>n(a_i-\varepsilon)}}\cdots\sum \frac{n!}{\gamma_1!\dots\gamma_{r+1}!\delta_1!\dots\delta_r!}p_1^{\gamma_1}\dots p_{r+1}^{\gamma_{r+1}}q_1^{\delta_1}\dots q_r^{\delta_r}\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{r+1}P_n\left(p_i, \frac{\gamma_1+\delta_1+\dots+\gamma_{i-1}+\delta_{i-1}}{n}+\varepsilon-a_{i-1}; \gamma_i\right).$$

1.5. A Pyke-féle empirikus eloszlásfüggvény

Legyen, mint az 1.2. pontban $X_1, X_2, \dots, X_n$ egy n-elemű véletlen minta a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlásból. Legyen továbbá $X_0^*=0<X_1^*<X_2^*<\dots \dots<X_n^*<X_{n+1}^*=1$ a megfelelő rendezett minta. PYKE [74] vezette be a következő, módosított empirikus eloszlásfüggvényt:

$$(1.31)\quad F_n^*(x)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{x-X_{i-1}^*}{X_i^*-X_{i-1}^*}+i-1\right),\quad X_{i-1}^*\leqq x\leqq X_i^*\quad i=1, 2, \dots, n+1.$$

Ez az $F_n^*(x)$ függvény egy folytonos törött vonal, amely az $\left(X_i^*, \frac{i}{n+1}\right)$ pontokat köti össze.

A *Pyke*-féle empirikus eloszlásfüggvényre vonatkozó egyoldali eltérések visszavezethetők a közönséges empirikus eloszlásfüggvényre vonatkozó egyoldali eltérésekre. Igaz ui. a következő lemma:

1.4. LEMMA. *Legyen* $G(x)$ *monoton növekvő, alulról konvex függvény a* $(0, 1)$ *intervallumban. Ekkor*

$$(1.32)\quad P\big(F_n^*(x) > G(x), 0 \leqq x \leqq 1\big) = P\left(F_n(x) > \frac{n+1}{n} G(x) - \frac{1}{n},\ 0 \leqq x \leqq 1\right).$$

Bizonyítás. Legyen tehát $G(x)$ monoton növekvő, alulról konvex függvény. Ekkor az $F_n^*(x) > G(x)$ egyenlőtlenség teljesülését elég megkövetelni az $x = X_i^*$ pontokban, ez már maga után vonja az egyenlőtlenség teljesülését az egész $(0, 1)$ intervallumon. Mivel $F_n^*(X_i^*) = \dfrac{i}{n+1}$, ezért

$$P\big(F_n^*(x) > G(x), 0 \leqq x \leqq 1\big) = P\left(\frac{i}{n+1} > G(X_i^*),\ i = 0, 1, \dots, n+1\right) =$$

$$= P\left(\frac{i-1}{n} \geqq \frac{n+1}{n} G(X_i^*) - \frac{1}{n},\ i = 0, 1, \dots, n+1\right) =$$

$$= P\left(F_n(X_i^*) > \frac{n+1}{n} G(X_i^*) - \frac{1}{n},\ i = 0, 1, \dots, n+1\right) =$$

$$= P\left(F_n(x) > \frac{n+1}{n} G(x) - \frac{1}{n},\ 0 \leqq x \leqq 1\right).$$

E lemmát felhasználva, megadjuk néhány legfontosabb eltérés eloszlását. A részletes felsorolástól itt is eltekintünk.

$$(1.33)\qquad P\big(\sup_{0 \leqq x \leqq 1} \big(x - F_n^*(x)\big) < \varepsilon\big) =$$

$$= 1 - \left(\varepsilon + \frac{1}{n+1}\right) \sum_{j=0}^{[(n+1)(1-\varepsilon)]-1} \binom{n}{j} \left(\frac{j+1}{n+1} + \varepsilon\right)^{j-1} \left(1 - \varepsilon - \frac{j+1}{n+1}\right)^{n-j}.$$

(Lásd PYKE [74], BRUNK [16]).

$$(1.34)\qquad P\left(\sup_{0 \leqq x \leqq 1} \left(\frac{x - F_n^*(x)}{1-x}\right) < \varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{1}{(n+1)(1+\varepsilon)}.$$

$$(1.35)\qquad P\left(\sup_{0 \leqq x \leqq 1} \left(\frac{x - F_n^*(x)}{x}\right) < \varepsilon\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)(1-\varepsilon)} \sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)-\varepsilon]} \binom{n}{j} \left(\frac{j+1}{(n+1)(1-\varepsilon)}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{j+1}{(n+1)(1-\varepsilon)}\right)^{n-j}.$$

2. §. HATÁRELOSZLÁS TÉTELEK

2.1. Néhány segédtétel

Az 1. §-ban megadott véges eloszlástételekhez szorosan kapcsolódnak a határeloszlás tételek, midőn a mintaelemszám, n a végtelenhez tart.

Mint a Bevezetőben is említettük, az irodalomban a határeloszlás tételek megadása történetileg megelőzte a véges eloszlástételek megadását. KOLMOGOROV [64] úttörő jellegű munkájában a $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |F_n(x)-F(x)|$ statisztika határeloszlását adja meg. A későbbiekben sokan foglalkoztak határeloszlások meghatározásával, ezek közül a legfontosabb és legérdekesebb cikkek: SZMIRNOV [91], FELLER [51], RÉNYI [77], ANDERSON—DARLING [5], DOOB [43], DONSKER [41], SCHMID [85], LAUWERIER [66].

E cikkekben különféle módszereket dolgoztak ki a határeloszlások meghatározására. Viszonylag kevés azon cikkek száma, melyekben a határeloszlásokat a véges eloszlástételek folyományaként, határátmenettel nyerték. Ezek közül elsősorban SZMIRNOV [92], [93], cikkeit kell említenünk. Disszertációnkban ezt az utat követjük, azaz az 1. §-ban nyert véges eloszlástételekből származtatunk határeloszlás tételeket.

Szükségünk lesz az alábbi lemmákra:

2.1. LEMMA. *Ha* $0<K\leq 1, 0<B, 0<A+B$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^K \frac{B}{z\sqrt{z(1-z)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(Az+B)^2}{z(1-z)}}dz = \tag{2.1}$$

$$= e^{-2B(A+B)}\Phi\left(\frac{AK-B+2BK}{\sqrt{K(1-K)}}\right)+1-\Phi\left(\frac{AK+B}{\sqrt{K(1-K)}}\right),$$

ahol itt és a továbbiakban mindenütt

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{v^2}{2}}dv.$$

MEGJEGYZÉS. A $K=0$ eset érdektelen (bár a formula ebben az esetben is igaz), $K=1$-re (2.1) a következőt adja:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \frac{B}{z\sqrt{z(1-z)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(Az+B)^2}{z(1-z)}}dz = e^{-2B(A+B)}. \tag{2.2}$$

Bizonyítás. Legyen

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^K \frac{(A+B)z+B(1-z)}{2(z(1-z))^{3/2}}e^{-\frac{[(A+B)z+B(1-z)]^2}{2z(1-z)}}dz =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2B(A+B)}\int_0^K \frac{(A+B)z+B(1-z)}{2(z(1-z))^{3/2}}e^{-\frac{[(A+B)z-B(1-z)]^2}{2z(1-z)}}dz.$$

Elvégezve az $\dfrac{(A+B)z-B(1-z)}{\sqrt{z(1-z)}}=u$ helyettesítést, kapjuk

$$I_1 = e^{-2B(A+B)} \int_{-\infty}^{\frac{(A+B)K-B(1-K)}{\sqrt{K(1-K)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{-2B(A+B)} \Phi\left(\frac{AK-B+2BK}{\sqrt{K(1-K)}}\right).$$

Legyen most

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^K \frac{(A+B)z-B(1-z)}{2(z(1-z))^{3/2}} e^{-\frac{[(A+B)z+B(1-z)]^2}{2z(1-z)}} dz.$$

Elvégezve az $\dfrac{(A+B)z+B(1-z)}{\sqrt{z(1-z)}}=v$ helyettesítést, kapjuk

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\frac{(A+B)K+B(1-K)}{\sqrt{K(1-K)}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = -\left(1 - \int_{-\infty}^{\frac{AK+B}{\sqrt{K(1-K)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv\right) =$$

$$= -\left(1-\Phi\left(\frac{AK+B}{\sqrt{K(1-K)}}\right)\right).$$

A keresett integrál:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^K \frac{B}{z\sqrt{z(1-z)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(Az+B)^2}{z(1-z)}} dz = I_1 - I_2 =$$

$$= e^{-2B(A+B)} \Phi\left(\frac{AK-B+2BK}{\sqrt{K(1-K)}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{AK+B}{\sqrt{K(1-K)}}\right), \quad \text{q.e.d.}$$

A határeloszlások meghatározásához a továbbiakban először

$$\frac{B\sqrt{pn}}{\alpha - A\sqrt{pn}} \binom{\alpha}{j} \left(\frac{j+B\sqrt{pn}}{\alpha - A\sqrt{pn}}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{j+B\sqrt{pn}}{\alpha - A\sqrt{pn}}\right)^{\alpha - j}$$

alakú kifejezések aszimptotikus értékét kell megadnunk, ahol A, B, p konstansok és $\alpha \approx np, j=\alpha z$. Erre vonatkozik a következő lemma.

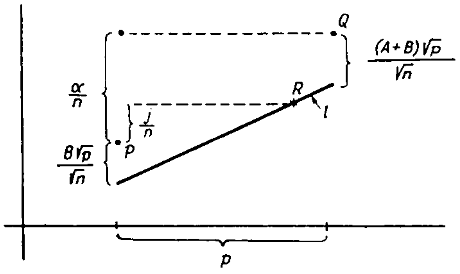
2.2. LEMMA. *Legyenek A, B, p, z n-től független konstansok, $\alpha \approx np$, $j=\alpha z$. Ekkor $n \to \infty$ esetén*

$$\frac{B\sqrt{pn}}{\alpha - A\sqrt{pn}} \binom{\alpha}{j} \left(\frac{j+B\sqrt{pn}}{\alpha - A\sqrt{pn}}\right)^{j-1} \left(1 - \frac{j+B\sqrt{pn}}{\alpha - A\sqrt{pn}}\right)^{\alpha - j} \sim \tag{2.3}$$

$$\sim \frac{1}{\alpha} \frac{B}{\sqrt{2\pi}\, z\sqrt{z(1-z)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(Az+B)^2}{z(1-z)}}.$$

MEGJEGYZÉS. A fenti aszimptotikus érték a 2.1. Lemmában szereplő integrandus, $\dfrac{1}{\alpha} \approx dz$, így a fenti alakú összegek a 2.1. Lemmában kiszámított integrálba mennek át.

A baloldalon álló valószínűséget a következő ábrával szemléltetjük:
A fenti kifejezés annak valószínűsége, hogy ha $F_n(x)$ a P és Q pontokon keresztül megy, az R pontban messe először az l egyenest.



1. ábra

Bizonyítás. A *de Moivre—Laplace*-tétel értelmében

$$\binom{N}{j}\varrho^j(1-\varrho)^{N-j}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi N\varrho(1-\varrho)}}\,e^{-\frac{(j-N\varrho)^2}{2N\varrho(1-\varrho)}}.$$

Alkalmazzuk ezt $N=\alpha\approx np$, $\varrho=\dfrac{j+B\sqrt{pn}}{\alpha-A\sqrt{pn}}\sim z$-re. Könnyen látható, hogy

$$\frac{(j-\alpha\varrho)^2}{\alpha\varrho(1-\varrho)}=\frac{\left(\dfrac{B\alpha\sqrt{pn}+A\alpha z\sqrt{pn}}{\alpha-A\sqrt{pn}}\right)^2}{\alpha\varrho(1-\varrho)}\sim\frac{pn(Az+B)^2}{\alpha z(1-z)}\sim\frac{(Az+B)^2}{z(1-z)},$$

így

$$\frac{B\sqrt{pn}}{\alpha-A\sqrt{pn}}\binom{\alpha}{j}\varrho^{j-1}(1-\varrho)^{\alpha-j}=\frac{B\sqrt{pn}}{B\sqrt{pn}+j}\binom{\alpha}{j}\varrho^{j}(1-\varrho)^{\alpha-j}\sim$$

$$\sim\frac{B\sqrt{pn}}{j}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha z(1-z)}}\,e^{-\frac{(Az+B)^2}{2z(1-z)}}\sim\frac{B}{\alpha z\sqrt{2\pi z(1-z)}}\,e^{-\frac{(Az+B)^2}{2z(1-z)}}.$$

2.2. Határeloszlás tételek

A továbbiakban megadjuk az 1. § tételeinek megfelelő határeloszlás tételeket. A sort azonban nem az 1.1., hanem az 1.2. Tétellel kezdjük.

2.1. TÉTEL. *Legyen* $0<a\leqq 1$, $v>0$, $v-ua\geqq 0$. *Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(F_n(x)>\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)x-\frac{v}{\sqrt{n}},\ 0\leqq x\leqq a\right)= \tag{2.4}$$

$$=\Phi\left(\frac{v-ua}{\sqrt{a(1-a)}}\right)-e^{-2v(v-u)}\,\Phi\left(\frac{2av-v-ua}{\sqrt{a(1-a)}}\right).$$

MEGJEGYZÉS. $a=1$-re kapjuk

$$\lim_{n\to\infty} P\left(F_n(x) > \left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)x - \frac{v}{\sqrt{n}},\ 0 \leqq x \leqq 1\right) = 1 - e^{-2v(v-u)}. \tag{2.5}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.2. Tételt $c=1+\frac{u}{\sqrt{n}}$, $b=\frac{v}{\sqrt{n}}$-el, majd a 2.2. Lemmát $\alpha=n$, $p=1$, $B=v$, $A=-u$ értékekkel. E szerint az integrandus a következő lesz:

$$\frac{v}{\sqrt{2\pi}\, z\sqrt{z(1-z)}}\, e^{-\frac{(v-uz)^2}{2z(1-z)}}.$$

Az összegzésben j-re a felső határ $[n(ca-b)]$, így a z-re vonatkozó felső határt a következőképpen kapjuk:

$$j \leqq n(ca-b)$$

$$nz \leqq n\left(\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)a - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)$$

$$z \leqq a + \frac{au-v}{\sqrt{n}} \sim a.$$

Alkalmazzuk tehát a 2.1. Lemmát $K=a$-val, így kapjuk a tétel állítását.

Az 1.3. Tételnek megfelelően tekintsünk most egy szakaszonként lineáris $G_n(x)$ függvényt, amely tartson az $y=x$ egyeneshez. Legyen tehát

$$G_n(x) = \left(1+\frac{u_i}{\sqrt{n}}\right)x - \frac{v_i}{\sqrt{n}},\quad a_{i-1}<x \leqq a_i,\quad i = 1, 2, \dots, k,$$

ahol $a_0=0<a_1<a_2<\dots<a_{k-1}<a_k=1$, u_i és v_i rögzítettek.

2.2. TÉTEL. *A fenti feltételek mellett igaz a következő határérték reláció:*

$$\lim_{n\to\infty} P\big(F_n(x) \geqq G_n(x),\ 0 \leqq x \leqq 1\big) = \tag{2.6}$$

$$= \underset{\left\{\substack{\sum_{j=1}^{i} y_j\sqrt{p_j} \geqq u_{i+1}a_i - v_{i+1} \\ i=1,2,\dots,k-1}\right\}}{\int \cdots \int} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{p_k}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} y_i^2} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k}\left(1 - e^{-\frac{2\left(v_i-u_ia_{i-1}+\sum_{j=1}^{i-1} y_j\sqrt{p_j}\right)\left(v_i-u_ia_i+\sum_{j=1}^{i} y_j\sqrt{p_j}\right)}{p_i}}\right) dy_1 dy_2 \dots dy_{k-1},$$

ahol

$$y_k = -\frac{\sum_{j=1}^{k-1} y_j\sqrt{p_j}}{\sqrt{p_k}},\quad p_j = a_j - a_{j-1}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.3. Tételt $c_i=1+\frac{u_i}{\sqrt{n}}$, $b_i=-\frac{v_i}{\sqrt{n}}$-nel, majd helyettesítsünk $\alpha_i=n(a_i-a_{i-1})+y_i\sqrt{n(a_i-a_{i-1})}$; $j=\alpha_i z_i$-t. Ekkor $n\to\infty$ határátmenet esetén a polinomiális valószínűség többváltozós normális sűrűségfüggvénybe, a $p_n(\ )$ függvény pedig a 2.2. és 2.1. Lemma szerint az

$$1-\exp\left(\frac{-2\left(v_i-u_ia_{i-1}+\sum_{j=1}^{i-1}y_j\sqrt{a_j-a_{j-1}}\right)\left(v_i-u_ia_i+\sum_{j=1}^{i}y_j\sqrt{a_j-a_{j-1}}\right)}{a_i-a_{i-1}}\right)$$

függvénybe, az összeg pedig integrálba megy át.

Az alábbi tételek a 2.2. Tétel speciális esetei, de — mint az 1. §-ban — külön tételként mondjuk ki.

2.3. TÉTEL. *Legyen* $0\leqq a_1<a_2\leqq 1$ *rögzített,* $v\geqq 0, v-u\geqq 0$.

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(F_n(x)>\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)x-\frac{v}{\sqrt{n}},\ a_1\leqq x\leqq a_2\right)= \tag{2.7}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{ua_1-v}{\sqrt{a_1(1-a_1)}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left[\Phi\left((v-u)\sqrt{\frac{a_2-a_1}{(1-a_1)(1-a_2)}}+\left(y\sqrt{a_1}-\frac{a_1u-v}{\sqrt{1-a_1}}\right)\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2-a_1}}\right)-\right.$$

$$-e^{-2\left(y\sqrt{a_1}-\frac{a_1u-v}{\sqrt{1-a_1}}\right)\left(\frac{v-u}{\sqrt{1-a_1}}\right)}\times$$

$$\left.\times\Phi\left((v-u)\sqrt{\frac{a_2-a_1}{(1-a_1)(1-a_2)}}-\left(y\sqrt{a_1}-\frac{a_1u-v}{\sqrt{1-a_1}}\right)\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2-a_1}}\right)\right]dy.$$

Bizonyítás. Legyen $b=-\frac{v}{\sqrt{n}}$, $c=1+\frac{u}{\sqrt{n}}$, és alkalmazzuk az 1.4. Tétel első felét, tekintve, hogy most $ca_1+b=\left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)a_1-\frac{v}{\sqrt{n}}>0$ elég nagy n-re, feltéve, hogy $a_1>0$. Ha $a_1=0$, akkor közvetlenül a 2.1. Tételt alkalmazhatjuk.

Írjuk át az (1.13) formulát a következőképpen:

$$\sum_{\alpha>n(ca_1+b)}\binom{n}{\alpha}a_1^{\alpha}(1-a_1)^{n-\alpha}\left(1-\left(\frac{x_0-a_1}{1-a_1}\right)\sum_{j=0}^{[n(ca_2+b)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{j}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{x_j-a_1}{1-a_1}\right)^{j-1}\left(\frac{1-x_j}{1-a_1}\right)^{n-\alpha-j}\right),$$

ahol

$$x_j=\frac{\alpha+j}{nc}-\frac{b}{c}.$$

Legyen $\alpha = na_1 + y\sqrt{na_1(1-a_1)}$, ekkor az $\binom{n}{\alpha} a_1^{\alpha}(1-a_1)^{n-\alpha}$ binomiális valószínűségből $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ lesz, mikor is az $\alpha > n(ca_1+b)$ egyenlőtlenség átmegy az $y > \frac{ua_1 - v}{\sqrt{a_1(1-a_1)}}$ egyenlőtlenségbe.

A belső zárójelben levő kifejezés határértékének meghatározásához pedig alkalmazzuk a 2.2. Lemmát, α helyett $n-\alpha$-val $(n-\alpha \approx n(1-a_1))$, $p = 1-a_1$, $B = y\sqrt{a_1} + \frac{v-ua_1}{\sqrt{1-a_1}}$, $A = -y\sqrt{a_1} - u\sqrt{1-a_1}$ helyettesítéssel. Végül a 2.1. Lemma adja a tétel állítását.

2.3.1. KOROLLÁRIUM.

$$(2.8)\quad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a_1 \le x \le a_2} (x - F_n(x)) < \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{1-a_2 \le x \le 1-a_1} (F_n(x) - x) < \frac{t}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{t}{\sqrt{a_1(1-a_1)}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \left[\Phi\left(t\sqrt{\frac{a_2-a_1}{(1-a_1)(1-a_2)}} + \left(y\sqrt{a_1} + \frac{t}{\sqrt{1-a_1}}\right)\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2-a_1}}\right) -\right.$$

$$\left. - e^{-2\left(y\sqrt{a_1} + \frac{t}{\sqrt{1-a_1}}\right)\frac{t}{\sqrt{1-a_1}}} \Phi\left(t\sqrt{\frac{a_2-a_1}{(1-a_1)(1-a_2)}} - \left(y\sqrt{a_1} + \frac{t}{\sqrt{1-a_1}}\right)\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2-a_1}}\right)\right] dy.$$

Ha $a_1 = 0$, akkor

$$(2.9)\quad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0 \le x \le a_2} (x - F_n(x)) < \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{a_2(1-a_2)}}\right) - e^{-2t^2} \Phi\left(\frac{(2a_2-1)t}{\sqrt{a_2(1-a_2)}}\right),$$

míg ha $a_2 = 1$, akkor

$$(2.10)\quad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a_1 \le x \le 1} (x - F_n(x)) < \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{a_1(1-a_1)}}\right) - e^{-2t^2} \Phi\left(\frac{(1-2a_1)t}{\sqrt{a_1(1-a_1)}}\right),$$

végül ha $a_1 = 0$ és $a_2 = 1$, akkor

$$(2.11)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0 \le x \le 1} (x - F_n(x)) < \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - e^{-2t^2}, \quad t > 0.$$

Bizonyítás. Helyettesítsünk a 2.3. Tétel (2.7) képletébe $u = 0$, $v = t$-t.

Az $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ eset SZMIRNOVtól [91] származik, míg az általános esetben ekvivalens formulát adott meg MANIJA [68].

2.3.2. KOROLLÁRIUM.

(2.12)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a_1\le x\le a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{1-a_2\le x\le 1-a_1}\left(\frac{F_n(x)-x}{x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-t\sqrt{\frac{1-a_1}{a_1}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\times$$

$$\times\left[\Phi\left((y\sqrt{a_1}+t\sqrt{1-a_1})\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2-a_1}}\right)-\Phi\left(-(y\sqrt{a_1}+t\sqrt{1-a_1})\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2-a_1}}\right)\right]dy.$$

$a_2=1$ esetén a jobboldal 0, míg $a_1=0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(t\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2}}\right)-\Phi\left(-t\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2}}\right). \tag{2.13}$$

Bizonyítás. Helyettesítsünk a 2.3. Tétel képletébe $u=v=t$-t.

Ezt a határeloszlást először RÉNYI [77] határozta meg. Lásd még CSÖRGŐ [35], SAHLER [82].

2.3.3. KOROLLÁRIUM.

(2.14)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a_1\le x\le a_2}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{1-a_2\le x\le 1-a_1}\left(\frac{F_n(x)-x}{1-x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-t\sqrt{\frac{a_1}{1-a_1}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left[\Phi\left(t\sqrt{\frac{a_2-a_1}{(1-a_1)(1-a_2)}}+\left(y\sqrt{a_1}+\frac{a_1t}{\sqrt{1-a_1}}\right)\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2-a_1}}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{-2\left(y\sqrt{a_1}+\frac{a_1t}{\sqrt{1-a_1}}\right)\frac{t}{\sqrt{1-a_1}}}\Phi\left(t\sqrt{\frac{a_2-a_1}{(1-a_1)(1-a_2)}}-\left(y\sqrt{a_1}+\frac{a_1t}{\sqrt{1-a_1}}\right)\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2-a_1}}\right)\right]dy,$$

az $a_1=0$ eset értelmetlen, míg $a_2=1$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a_1\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(t\sqrt{\frac{a_1}{1-a_1}}\right)-\Phi\left(-t\sqrt{\frac{a_1}{1-a_1}}\right). \tag{2.15}$$

Bizonyítás. Helyettesítsünk a 2.3. Tétel képletébe $v=0$, $u=-t$-t.

Ez a határeloszlás ugyancsak RÉNYITŐL [77] származik. Lásd még CSÖRGŐ [35], SAHLER [82].

Itt nem térünk ki a $\sup\limits_{A_1\le F_n(x)\le A_2}(x-F_n(x))$, stb. statisztikák határeloszlásaira (lásd 1.4.4.—1.4.6. Korolláriumok), mert ezek megegyeznek a már tárgyalt $\sup\limits_{a_1\le x\le a_2}(x-F_n(x))$ stb. statisztikák határeloszlásaival.

Most vizsgáljuk az 1.5. Tételnek megfelelő határeloszlásokat.

2.4. TÉTEL. *Legyen* $0<a_1\leqq a_2<1$, *ekkor*

(2.16)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(F_n(x)>\left(1+\frac{u_1}{\sqrt{n}}\right)x-\frac{v_1}{\sqrt{n}},\ 0\leqq x\leqq a_1;\ F_n(x)>\left(1+\frac{u_2}{\sqrt{n}}\right)x-\frac{v_2}{\sqrt{n}},\ a_2\leqq x\leqq 1\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{u_2a_2-v_2}{\sqrt{a_2(1-a_2)}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1-e^{-2\left(\frac{y\sqrt{a_2(1-a_2)}+v_2-a_2u_2}{\sqrt{1-a_2}}\right)\cdot\left(\frac{v_2-u_2}{\sqrt{1-a_2}}\right)}\right)\times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{ya_1\sqrt{1-a_2}+a_2(v_1-a_2u_1)}{\sqrt{a_1a_2(a_2-a_1)}}\right)-e^{-2\left(\frac{v_1-a_2u_1}{\sqrt{a_2}}\right)\left(\frac{y\sqrt{a_2(1-a_2)}+v_1-a_2u_1}{\sqrt{a_2}}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\Phi\left(\frac{ya_1\sqrt{1-a_2}+(2a_1-a_2)(v_1-a_2u_1)}{\sqrt{a_1a_2(a_2-a_1)}}\right)\right]dy.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.5. Tételt és a szokásos határátmeneti eljárást. A részleteket mellőzzük. Speciális esetben ($a_1=a_2=1/2$) MALMQUIST [67] adott meg ekvivalens formulát.

2.4.1. KOROLLÁRIUM.

(2.17)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{\substack{x\leqq a_1\\ a_2\leqq x}}(x-F_n(x))<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{t}{\sqrt{a_2(1-a_2)}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1-e^{-2\frac{t(y\sqrt{a_2(1-a_2)}+t)}{1-a_2}}\right)\times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{ya_1\sqrt{1-a_2}+ta_2}{\sqrt{a_1a_2(a_2-a_1)}}\right)-e^{-2\frac{t(y\sqrt{a_2(1-a_2)}+t)}{a_2}}\Phi\left(\frac{ya_1\sqrt{1-a_2}+t(2a_1-a_2)}{\sqrt{a_1a_2(a_2-a_1)}}\right)\right]dy.$$

Bizonyítás. Helyettesítsünk a 2.4. Tétel (2.16) képletébe $u_1=u_2=0$, $v_1=v_2=t$-t.

2.4.2. KOROLLÁRIUM.

(2.18)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max\left(\sup_{0\leqq x\leqq 1/2}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right),\ \sup_{1/2\leqq x\leqq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} P\left(\max\left(\sup_{0\leqq x\leqq 1/2}\left(\frac{F_n(x)-x}{1-x}\right),\ \sup_{1/2\leqq x\leqq 1}\left(\frac{F_n(x)-x}{x}\right)\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$=3\Phi(t)-2+e^{4t^2}\Phi(-3t),\quad t>0.$$

Bizonyítás. Helyettesítsünk a 2.4. Tétel (2.16) képletébe $a_1=a_2=1/2$, $u_1=v_1=t$, $u_2=-t$, $v_2=0$-t. Kapjuk a következő integrált:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1-e^{-2t(y+t)}\right)\left(1-e^{-2t(y+t)}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy-2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{\infty} e^{-\frac{(y+2t)^2}{2}}dy+e^{4t^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{\infty} e^{-\frac{(y+4t)^2}{2}}dy=$$

$$=1-\Phi(-t)-2\left(1-\Phi(t)\right)+e^{4t^2}\left(1-\Phi(3t)\right),$$

ahonnan adódik az eredmény.

A (2.18) formula egyébként MALMQUIST [67] eredményéből következik.

2.3. Nem folytonos alapeloszlás esete

Tekintsük most a nem folytonos alapeloszlás esetét. Mint említettük, a határeloszlást SCHMID [85] határozta meg először. Lásd még CARNAL [18]. Az alábbi eredményünk azonban inkább VINCZE [104] kétmintás eredményével analóg.

Tekintsük az 1.4. pontban adott $F(x)$ eloszlásfüggvényt.

2.5. TÉTEL.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{-\infty<x<\infty}\left(F(x)-F_n(x)\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)= \tag{2.19}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^r\sqrt{p_{r+1}}}\int\underset{T}{\cdots}\int e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{r}(y_i^2+w_i^2)-\frac{y_{r+1}^2}{p_{r+1}}\right)}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{r+1}\left(1-e^{-\frac{2}{p_i}\left(t+\sum_{j=1}^{i-1}y_j\sqrt{p_j}+\sum_{j=1}^{i-1}w_j\sqrt{q_j}\right)\left(t+\sum_{j=1}^{i}y_j\sqrt{p_j}+\sum_{j=1}^{i-1}w_j\sqrt{q_j}\right)}\right)dy_1\ldots dy_r dw_1\ldots dw_r,$$

ahol

$$y_{r+1}=-\frac{1}{\sqrt{p_{r+1}}}\left(\sum_{j=1}^{r}y_j\sqrt{p_j}+\sum_{j=1}^{r}w_j\sqrt{q_j}\right)$$

és T az $(y_1,\ldots,y_r,w_1,\ldots,w_r)$ $2r$-dimenziós tér azon tartománya, melyre

$$\left.\begin{aligned}&t+\sum_{j=1}^{i-1}y_j\sqrt{p_j}+\sum_{j=1}^{i-1}w_j\sqrt{q_j}>0\\&t+\sum_{j=1}^{i}y_j\sqrt{p_j}+\sum_{j=1}^{i-1}w_j\sqrt{q_j}>0\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,\ldots,r.$$

Bizonyítás. A határeloszlást az 1.7. Tétel (1.29) formulájából is megkaphatnánk, ekkor azonban a 2.1. Lemmát $K<1$-re kellene alkalmaznunk. Egyszerűbbnek látszik az (1.30) formulából kiindulni.

Az $n\to\infty$ határátmenetnél legyen

$$\gamma_i = np_i + y_i\sqrt{np_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r+1$$
$$\delta_i = nq_i + w_i\sqrt{nq_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$
$$j = \gamma_i z.$$

Ekkor a polinomiális valószínűség többváltozós normális sűrűségfüggvénybe, az $1-\sum\limits_{(j)}\dots$ pedig (rögzített i-re) a szokásos gondolatmenetet (2.2. és 2.1. Lemmát $K=1$-gyel) alkalmazva az

$$1-e^{-\frac{2}{p_i}\left(t+\sum\limits_{j=1}^{i-1} y_j\sqrt{p_j}+\sum\limits_{j=1}^{i-1} w_j\sqrt{q_j}\right)\left(t+\sum\limits_{j=1}^{i} y_j\sqrt{p_j}+\sum\limits_{j=1}^{i-1} w_j\sqrt{q_j}\right)}$$

függvénybe, az összeg pedig integrálba megy át.

2.4. A „nem standard" esetekre vonatkozó határeloszlás tételek

A *Chang*-féle $\inf\limits_{0<F_n(x)\leq c/n} \frac{F_n(x)}{x}$ statisztika határeloszlása a következő (lásd CHANG [20], ill. RÉNYI [79]):

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\inf_{0<F_n(x)\leq(c/n)} \frac{F_n(x)}{x} < \varepsilon\right) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + \sum_{j=1}^{c} \frac{(j-1)^{j-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^j e^{-\frac{j}{\varepsilon}}}{j!}.$$

Itt lehet c rögzített, vagy n-től függően ∞-hez tarthat. Ez utóbbi esetben az összegzés felső határa természetesen ∞.

Másrészt DWASS [48] bizonyította a következővel ekvivalens formulát:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(F_n(x) > cx+1-c-\frac{d}{n},\ 0\leq x\leq 1\right) =$$
$$= \left(1-\frac{1}{c}\right)\sum_{i=0}^{[d]} \frac{1}{i!}\left(\frac{i-d}{c}\right)^i e^{\frac{d-i}{c}},$$

ahol $c>1$, $d>0$ rögzített.

Mint látjuk, ezek a határeloszlások merőben különböznek az előző „standard" határeloszlásoktól, melyek mind $\sqrt{n}$-rendűek.

Ezzel kapcsolatban felmerül az a kérdés, hogy milyen esetekben kapunk nemtriviális határértéket a $P\left(F_n(x)>G_n(x),\ 0\leq x\leq 1\right)$ valószínűségre.

A *Glivenko—Cantelli*-tételből nyilvánvaló, hogy $G_n(x)$ nem lehet túl távol x-től. Ha pl. $G_n(x)\leq x-\varepsilon$ minden x-re elég nagy n esetén, ε rögzített, akkor a fenti valószínűség nyilván 1-hez tart.

Ha $G_n(x)\to x$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ rendben, a megfelelő intervallum pontjaiban, akkor kapjuk a „standard" határeloszlástételeket.

A *Chang*-féle, ill. *Dwass*-féle határeloszlásokat abban az esetben kapjuk, ha $G_n(x)$ csak bizonyos x-re, vagy x-ekre tart x-hez $\left(\frac{1}{n} \text{ rendben}\right)$, de egyébként a $\max\limits_{(x)}(x-G_n(x))$-nek pozitív alsó korlátja van.

További vizsgálatok lehetségesek arra az esetre is, mikor $x-G_n(x)$ nagyságrendje $\frac{1}{\sqrt{n}}$ és $\frac{1}{n}$ között van. Tudomásunk szerint az ilyen közbenső esetekkel az irodalomban egyáltalán nem foglalkoztak.

Foglalkozzunk először a $P(F_n(x)>cx-b, 0\leqq x\leqq a)$ valószínűség különböző határértékeivel, azaz az 1.2. Tételben szereplő formula limeszével.

Szükségünk lesz a következő lemmára:

2.3. LEMMA. *Legyen* $B>0, A>0$, *akkor*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{B}{z\sqrt{z}}e^{-\frac{(Az+B)^2}{2z}}\,dz = e^{-2AB}. \tag{2.20}$$

Bizonyítás. Visszavezethető a 2.1. Lemma (2.2) formulájára a $t=\frac{z}{1+z}$ helyettesítéssel.

2.6. TÉTEL. (i) *Legyen* $b_n>0$, $b_n\sqrt{n}\to 0$, $b_n n\to\infty$ *és* $nb_n(1-c_n)\to w>0$, *midőn* $n\to\infty$, *ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} P(F_n(x)>c_nx-b_n,\ 0\leqq x\leqq a) = 1-e^{-2w}. \tag{2.21}$$

(ii) *Ha* $b_n=\frac{v}{n}>0$, $0<c<1$ *rögzített, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P(F_n(x)>cx-b_n,\ 0\leqq x\leqq a) = 1-v\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(v+j)^{j-1}}{c^j j!}e^{-\frac{v+j}{c}}. \tag{2.22}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.2. Tétel (1.3) formuláját és végezzünk határátmenetet a tétel feltételeinek megfelelően és (i)-nél legyen $j=\frac{nb_n}{1-c_n}z$. Ekkor a *de Moivre—Laplace*-tétel értelmében és némi számolással adódik:

$$\binom{n}{j}\left(\frac{b_n}{c_n}+\frac{j}{nc_n}\right)^j\left(1-\frac{b_n}{c_n}-\frac{j}{nc_n}\right)^{n-j}\sim$$

$$\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n\left(\frac{b_n}{c_n}+\frac{j}{nc_n}\right)}}e^{-\frac{\left(n\left(\frac{b_n}{c_n}+\frac{j}{nc_n}\right)-j\right)^2}{2n\left(\frac{b_n}{c_n}+\frac{j}{nc_n}\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n\frac{b_n}{1-c_n}z}}e^{-\frac{(nb_n+(1-c_n)j)^2}{2j}}\sim$$

$$\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n\frac{b_n}{1-c_n}z}}e^{-\frac{(\sqrt{w}+z\sqrt{w})^2}{2z}},$$

így az (1.3) formulában szereplő összeg $\Delta z = \frac{1-c_n}{b_n}$ lévén, az alábbi integrál közelítő összege lesz:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{2\pi z}\sqrt{z}} e^{-\frac{(\sqrt{w}+z\sqrt{w})^2}{2z}} dz,$$

ami a 2.3. Lemma értelmében e^{-2w}.

(ii) esetben rögzített j-re $\binom{n}{j} \sim \frac{n^j}{j!}$, $\left(1-\frac{b}{c}-\frac{j}{nc}\right)^{n-j} \sim e^{-\frac{v+j}{c}}$, így adódik (2.22).

Mint látjuk, az eredmény a-tól független. Ennek így is kell lenni, hiszen a $(cx-b)$ egyenes olyan, hogy $F_n(x)$-nek az $(a, 1)$ intervallumban való viselkedése az átmetszés szempontjából már nem sokat számít. Éppen így a következő tételnél a

$$P\big(F_n(x) > c_n x - b_n, a \leqq x \leqq 1\big)$$

valószínűség határértéke független lesz a-tól, ezért egyszerűség kedvéért $a=0$-t válasszunk.

2.7. TÉTEL. (i) *Legyen* $b_n>0$, $c_n>1$, $1-c_n+b_n>0$, $\sqrt{n}(1-c_n+b_n)\to 0$, $n(1-c_n+b_n)\to\infty$ *és* $n(1-c_n+b_n)(c_n-1)\to w>0$ *midőn* $n\to\infty$, *ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\big(F_n(x) > c_n x - b_n, 0 \leqq x \leqq 1\big) = 1-e^{-2w}. \tag{2.23}$$

(ii) *Ha* $1-c_n+b_n = \frac{v}{n} > 0$, $b>0$ *rögzített, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\big(F_n(x) > c_n x - b, 0 \leqq x \leqq 1\big) = 1-\frac{b}{1+b}\sum_{k\leqq v}\frac{1}{k!}\left(\frac{k-v}{1+b}\right)^k e^{\frac{v-k}{1+b}}. \tag{2.24}$$

Bizonyítás. Hasonló, mint a 2.6. Tételé, csak j és $n-j$ szerepét fel kell cserélni. Így (i) esetben $n-j = n\frac{1-c_n+b_n}{c_n-1}z$-t választva a 2.6. Tételnél követett gondolatmenettel adódik (2.23), míg (ii) esetben $n-j=k$-t rögzítjük, és tagonként végzünk határátmenetet.

E tetel (ii) része analóg DWASS [48] eredményével.

A továbbiakban vizsgáljuk a $\sup\limits_{a\leqq x\leqq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)$ statisztikát, mely $a=0$ esetén értelmetlen. Tekintsünk azonban egy a_n sorozatot, amely 0-hoz tart. Ekkor a következő határeloszlásokat kapjuk:

2.8. TÉTEL. *Legyen* $a_n>0$ *és* $a_n\to 0$ *midőn* $n\to\infty$.

(i) *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \infty$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a_n\leqq x\leqq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right) < \frac{t}{\sqrt{na_n}}\right) = \Phi(t)-\Phi(-t), \quad t>0. \tag{2.25}$$

(ii) *Ha* $a_n = \frac{v}{n}$, $\varepsilon > 0$ *rögzített, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a_n \le x \le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right) < \varepsilon\right) = \tag{2.26}$$

$$= \sum_{\alpha \ge v(1-\varepsilon)} \frac{v^\alpha}{\alpha!} e^{-v}\left(1-\left(\frac{\alpha}{1-\varepsilon}-v\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha+j}{1-\varepsilon}-v\right)^{j-1}}{j!} e^{-\frac{\alpha+j}{1-\varepsilon}+v}\right).$$

Bizonyítás. Kiindulunk a

$$P\left(\sup_{a\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right) < \varepsilon\right) = \sum_{\alpha > n(1-\varepsilon)a}\binom{n}{\alpha} a^\alpha (1-a)^{n-\alpha}\times$$

$$\times\left(1-\left(\frac{\alpha}{n(1-\varepsilon)}-a\right)\sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{j}\left(\frac{\frac{\alpha+j}{n(1-\varepsilon)}-a}{1-a}\right)^{j-1}\left(\frac{1-\frac{\alpha+j}{n(1-\varepsilon)}}{1-a}\right)^{n-\alpha-j}\right)$$

képletből (lásd 1.4.3. Korollárium).

(i) esetben az $\binom{n}{\alpha} a_n^\alpha (1-a_n)^{n-\alpha}$ binomiális valószínűség $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$-nal aszimptotikusan egyenlő, ahol $\alpha = na_n + y\sqrt{na_n}$. A j-re vonatkozó összeg pedig $\varepsilon = \frac{t}{\sqrt{na_n}}$, $= na_n z$-t behelyettesítve, a *de Moivre—Laplace* lokális tételt alkalmazva, a következő integrál közelítő összege lesz:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{y+t}{z\sqrt{z}} e^{-\frac{(y+t+zt)^2}{2z}} dz,$$

ami a 2.3. Lemma értelmében $e^{-2t(y+t)}$-vel egyenlő. Így

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a_n\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right) < \frac{t}{\sqrt{na_n}}\right) =$$

$$= \int_{-t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} (1-e^{-2t(y+t)})\, dy = \Phi(t) - \Phi(-t).$$

Az (ii) esetben a határátmenetet rögzített α-ra, ill. j-re tagonként végezve adódik (2.26).

Hasonlóképpen adódik $\sup\limits_{0\le x\le a_n}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$ határeloszlása, midőn $n\to\infty$, $a_n \to 1$.

2.9. TÉTEL. *Legyen* $0<a_n<1$ *és* $\lim_{n\to\infty} a_n=1$.

(i) *Ha* $\lim_{n\to\infty} n(1-a_n)=\infty$, *akkor*

$$(2.27)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a_n}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n(1-a_n)}}\right)=\Phi(t)-\Phi(-t),\qquad t>0.$$

(ii) *Ha* $1-a_n=\frac{v}{n}>0$, $\varepsilon>0$, *rögzített, akkor*

$$(2.28)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a_n}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon\right)=1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum_{k=[v(1+\varepsilon)]}^{\infty}\frac{k^k}{(1+\varepsilon)^k k!}e^{-\frac{k}{1+\varepsilon}}.$$

Bizonyítás. Kiindulunk a

$$P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon\right)=$$

$$=1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum_{j=0}^{[n(a(1+\varepsilon)-\varepsilon)]}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n(1+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{j-1}\left(1-\frac{j}{n(1+\varepsilon)}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n-j}$$

formulából (lásd 1.4.2. Korollárium). A j-re vonatkozó összegzésben $n-j=k$-t helyettesítünk, így

$$P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon\right)=1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum_{k=[n(1-a)(1+\varepsilon)]}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n(1+\varepsilon)}\right)^{k}\left(1-\frac{k}{n(1+\varepsilon)}\right)^{n-k-1}.$$

Az (i) esetben legyen $\varepsilon=\frac{t}{\sqrt{n(1-a_n)}}$, $k=n(1-a_n)z$ és alkalmazzuk — mint szokásos — a *de Moivre—Laplace* lokális tételt. Könnyen látható, hogy az összeg a következő integrál közelítő összege:

$$\int_1^\infty \frac{t}{\sqrt{2\pi z}}e^{-\frac{zt^2}{2}}\,dz=\int_t^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

(az $u=t\sqrt{z}$ helyettesítéssel), amiből adódik a tétel állítása az (i) esetben.

A (ii) esetben a határátmenet az összegben tagonként végezhető.

A határérték tételekkel kapcsolatban még egy problémát vizsgáljunk. Legyen a rögzített, és tekintsük a $P_n=P\left(\sup_{a\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon_n\right)$ valószínűséget, mely $\varepsilon_n\to 0$ esetén 0-hoz tart (lásd 1.4.2. Korollárium). A következő tételben vizsgáljuk P_n nagyságrendjét.

2.10. TÉTEL.

(i) *Ha* $\varepsilon_n=\varepsilon>0$ *rögzített, akkor*

$$(2.29)\qquad \lim_{n\to\infty} P_n=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

(ii) *Ha* $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, *de* $\sqrt{n}\varepsilon_n \to \infty$, *midőn* $n \to \infty$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{\varepsilon_n} = 1. \tag{2.30}$$

(iii) *Ha* $\varepsilon_n = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}P_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{a}{1-a}}\, e^{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1-a}{a}\right)} + t\Phi\left(t\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right). \tag{2.31}$$

(iv) *Ha* $\sqrt{n}\varepsilon_n \to 0$, *midőn* $n \to \infty$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}P_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{a}{1-a}}. \tag{2.32}$$

Bizonyítás. Az 1.4.2. Korolláriumból

$$P_n = \sum_{(\alpha)} \binom{n}{\alpha} a^\alpha (1-a)^{n-\alpha} \left(\frac{\dfrac{\alpha}{n(1+\varepsilon)} + \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - a}{1-a} \right).$$

Legyen $\alpha = na + y\sqrt{na(1-a)}$, ekkor

$$\binom{n}{\alpha} a^\alpha (1-a)^{n-\alpha} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

és

$$\frac{\dfrac{\alpha}{n(1+\varepsilon)} + \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - a}{1-a} = \frac{y\sqrt{na(1-a)} + n\varepsilon(1-a)}{n(1+\varepsilon)(1-a)},$$

így

$$P_n \sim \int_A^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{y\sqrt{na(1-a)} + n\varepsilon(1-a)}{n(1+\varepsilon)(1-a)}\, dy,$$

ahol

$$A = -\sqrt{\frac{1-a}{a}} \lim_{n\to\infty} (\varepsilon_n \sqrt{n}).$$

Az (i) és (ii) esetben $A = -\infty$, így kapjuk

$$P_n \sim \frac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}.$$

A (iii) esetben $A=-t\sqrt{\frac{1-a}{a}}$, így

$$P_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{-t\sqrt{\frac{1-a}{a}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{y\sqrt{a(1-a)}+t(1-a)}{1-a}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{a}{1-a}}\, e^{-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1-a}{a}\right)} + t\Phi\left(t\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right)\right),$$

míg a (iv) eset a (iii)-nak felel meg $t=0$-val.

Megjegyezzük még, hogy $a=0$-ra mind a négy esetben $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{\varepsilon_n} = 1$ adódik.

Végül megjegyezzük, hogy a *Pyke*-féle empirikus eloszlásfüggvényre (1.5. pont) vonatkozó határeloszlás tételek megegyeznek a közönséges empirikus eloszlásfüggvényre vonatkozó határeloszlás tételekkel, hiszen a kétféle empirikus eloszlásfüggvény $\frac{1}{n^2}$ rendben különbözik egymástól.

3.§. ERŐFÜGGVÉNYEK VIZSGÁLATA

3.1. Pontos eloszlások alternatívák esetén

3.1.1. *Bevezetés*

Ebben a paragrafusban erőfüggvényeket vizsgálunk, szakaszonként lineáris alternatívára, azaz VINCZE [103] módszerét követjük. Az erőfüggvény meg van határozva, ha megadjuk az egyes statisztikák eloszlását az alternatíva esetén.

Tekintettel arra, hogy a *Kolmogorov—Szmirnov*-féle statisztikák monoton statisztikák (lásd CHAPMAN [22]), tetszőleges alternatíva esetére az erőfüggvény alulról és felülről becsülhető az ún. minimum és maximum alternatívákhoz tartozó erőfüggvények segítségével. Ezen szélső alternatívák szakaszonként lineárisak, így tehát vizsgálatainkból ezek a becslések is megkaphatók. (Lásd még BIRNBAUM [11], CHAPMAN [22], MASSEY [69], ROSENBLATT [81]). Normális eloszlásra lásd VAN DER WAERDEN [101], KNOTT [63], míg exponenciális eloszlásra lásd DURBIN [46].

A jelen paragrafusban a véges eloszlásokból levezethető aszimptotikus formulákat is adunk meg az erőfüggvényre. Egyéb aszimptotikus vizsgálatokra vonatkozóan lásd ABRAHAMSON [1], ANDĚL [4], QUADE [75] stb.

Egyszerűség kedvéért csupán a következő statisztikákkal foglalkozunk:

(i) $\sup\limits_{0\leq x\leq 1} (x-F_n(x))$

(ii) $\sup\limits_{0\leq x\leq a} \left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$, $0<a<1$

(iii) $\sup\limits_{a\leq x\leq 1} \left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)$, $0<a<1$.

A többi statisztikára az erőfüggvény hasonlóképpen vizsgálható.

A null-hipotézisünk mindig

$$(3.1)\qquad H_0:\ F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha}\quad x<0,\\ x & \text{ha}\quad 0\leqq x\leqq 1\\ 1 & \text{ha}\quad 1<x\end{cases}$$

és az alternatíva:

$$H_1:\quad F(x)=G(x),$$

melyre $G(0)=0,\ G(1+)=1$ és $G(x)$ szakaszonként lineáris, azaz

$$(3.2)\qquad G(x)=\begin{cases}0, & x\leqq 0\\ c_i x+b_i, & a_{i-1}<x\leqq a_i,\ i=1,\dots,k\\ 1, & 1<x\end{cases}$$

ahol $a_0=0<a_1<\dots<a_k=1$.

Ha $G(x)$ folytonos, akkor ezen alternatíva esetén $G(X_1), G(X_2), \dots, G(X_n)$ a $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlásból vett minta, melynek empirikus eloszlásfüggvénye $F_n(G^{-1}(x))$. Így az $\{F_n(x)>H(x), 0\leqq x\leqq 1\}$ esemény ekvivalens az $\{F_n(G^{-1}(x))>$ $>H(G^{-1}(x)), 0\leqq x\leqq 1\}$ eseménnyel. Nyerjük tehát a következő lemmát:

3.1. LEMMA. *A $G(x)$ alternatíva esetén*

$$(3.3)\qquad P\big(F_n(x)>H(x),\ 0\leqq x\leqq 1\big)=P\big(\bar F_n(x)>H(G^{-1}(x)),\ 0\leqq x\leqq 1\big)$$

ahol $\bar F_n(x)$ egy $(0,1)$*-ben egyenletes eloszlásból vett minta empirikus eloszlásfüggvénye.*

Könnyen látható, hogy a lemma nem folytonos $G(x)$-re is fennáll, ekkor invertálásnál a függőleges szakaszokból (ugrásokból) vízszintes, a vizszintesekből pedig függőleges szakaszok (ugrások) lesznek, azaz G^{-1}-t úgy értelmezzük, mint G tükörképét a 45°-os egyenesre.

Tegyük fel még a továbbiakban, hogy $G(x)\leqq x$, tekintve, hogy egyoldali statisztikákat vizsgálunk, ezért az alternatíva is legyen egyoldali.

3.1.2. *A* $\sup\limits_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))$ *statisztika*

3.1. TÉTEL. *Legyen $G(x)$ a* (3.2) *formulával adott.*

$$(3.4)\qquad P\big(\sup_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|H_1\big)=$$

$$=n!\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\!\!\cdots\sum\prod_{i=1}^{k}\frac{(a_i-a_{i-1})^{\alpha_i}c_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!}\,p_n\left(a_i-a_{i-1},\ \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}}{n}+\varepsilon-a_{i-1};\ \alpha_i\right),$$

ahol $p_n(\ )$ definícióját lásd (1.12) *és az összegzés azon $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ nem-negatív egész számokra terjed ki, melyekre*

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k=n,$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_i\geqq n\left(\frac{c_ia_i+b_i-b_{i+1}}{c_{i+1}}-\varepsilon\right),\quad i=1,2,\dots,k-1.$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma szerint

$$P\big(\sup_{0\leq x\leq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|H_1\big)=P\big(F_n(x)>x-\varepsilon,\ 0<x<1|H_1\big)=$$
$$=P\big(\bar{F}_n(x)>G^{-1}(x)-\varepsilon,\ 0<x<1\big),$$

ahol

$$G^{-1}(x)=\frac{x}{c_i}-\frac{b_i}{c_i},\quad c_ia_{i-1}+b_i\leqq x<c_ia_i+b_i.$$

Az 1.3. Tételt alkalmazva adódik az állítás.

Vizsgáljunk most speciális alternatívákat.

Rögzítsük a $\sup\limits_{0\leq x\leq 1}(x-G(x))=\Delta>0$-t és legyen x_0 az a pont, melyre $x_0-G(x_0)=$ $=\Delta$. Legyen továbbá

$$(3.5)\qquad G_1(x)=\begin{cases}x, & 0\leqq x\leqq x_0-\Delta\\ x_0-\Delta, & x_0-\Delta\leqq x\leqq x_0\\ x, & x_0<x\leqq 1\end{cases}$$

$$(3.6)\qquad G_2(x)=\begin{cases}x-\Delta, & \Delta\leqq x\leqq 1\\ 1, & 1<x.\end{cases}$$

Ekkor igaz az, hogy $G_2(x)\leqq G(x)\leqq G_1(x)$, és rögzített Δ, x_0 esetén az erőfüggvény $G_1(x)$-re minimális, $G_2(x)$-re maximális. Ezért $G_1(x)$ az ún. „minimum alternatíva", míg $G_2(x)$ az ún. „maximum alternatíva". (CHAPMAN [22]).

Tekintsük még a két egyenes szakaszból álló alternatívát (VINCZE [103]):

$$(3.7)\qquad G_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x_0-\Delta}{x_0}x, & 0\leqq x\leqq x_0\\[2ex] \dfrac{1-x_0+\Delta}{1-x_0}x-\dfrac{\Delta}{1-x_0}, & x_0\leqq x\leqq 1,\end{cases}$$

továbbá a $(\Delta, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlást:

$$(3.8)\qquad G_4(x)=\frac{x-\Delta}{1-\Delta},\quad \Delta\leqq x\leqq 1.$$

Ezekre igazak a következő eloszlástételek:

3.1.1. KOROLLÁRIUM.

$$(3.9)\quad P\big(\sup_{0\leq x\leq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|G_1(x)\big)=\sum_{\alpha\geq n(x_0-\varepsilon)}\binom{n}{\alpha}(x_0-\Delta)^\alpha(1-x_0+\Delta)^{n-\alpha}\times$$
$$\times\left(1-\frac{\varepsilon}{x_0-\Delta}\sum_{j=0}^{[n(x_0-\Delta-\varepsilon)]}\binom{\alpha}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{x_0-\Delta}\right)^{j-1}\left(1-\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{x_0-\Delta}\right)^{\alpha-j}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{\frac{\alpha}{n}+\varepsilon}{1-x_0+\Delta}\sum_{i=0}^{[n(1-\varepsilon)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{i}\left(\frac{\frac{\alpha+i}{n}+\varepsilon}{1-x_0+\Delta}\right)^{i-1}\left(1-\frac{\frac{\alpha+i}{n}+\varepsilon}{1-x_0+\Delta}\right)^{n-\alpha-i}\right).$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemmát alkalmazva

$$P(\sup_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|G_1(x))=P(F_n(x)>x-\varepsilon,\ 0\leqq x\leqq 1|G_1(x))=$$

$$P(\bar{F}_n(x)>x-\varepsilon,\ 0\leqq x\leqq x_0-\Delta,\ x_0\leqq x\leqq 1;\ \bar{F}_n(x)>x_0-\varepsilon,\ x_0-\Delta\leqq x\leqq x_0).$$

Ez utóbbi valószínűség az 1.5. Tételnél alkalmazott gondolatmenettel adódik. Legyen ui. ν a $(0, x_0-\Delta)$ intervallumba eső pontok száma. A $\{\nu=\alpha\}$ esemény valószínűsége $\binom{n}{\alpha}(x_0-\Delta)^\alpha(1-x_0+\Delta)^{n-\alpha}$ és nyilván $\frac{\alpha}{n}\geqq x_0-\varepsilon$ kell legyen. A $\{\nu=\alpha\}$ feltétel mellett az $\{\bar{F}_n(x)>x-\varepsilon, 0\leqq x\leqq x_0-\Delta\}$ és az $\{\bar{F}_n(x)>x-\varepsilon, x_0\leqq x\leqq 1\}$ események függetlenek, valószínűségeik meghatározására az 1. § módszerét alkalmazva, adódik az állítás.

3.1.2. Korollárium.

$$P(\sup_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|G_2(x))= \tag{3.10}$$

$$=1-(\varepsilon-\Delta)\sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)]}\binom{n}{j}\left(\varepsilon-\Delta+\frac{j}{n}\right)^{j-1}\left(1-\varepsilon+\Delta-\frac{j}{n}\right)^{n-j},\quad \varepsilon>\Delta.$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma szerint

$$P(\sup_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|G_2(x))=$$

$$=(PF_n(x)>x-\varepsilon,\ 0\leqq x\leqq 1|G_2(x))=P(\bar{F}_n(x)>x-\varepsilon+\Delta,\ 0\leqq x\leqq 1-\Delta),$$

ez utóbbi valószínűség pedig azonnal adódik az 1.2. tételből.

3.1.3. Korollárium.

$$P(\sup_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|G_3(x))=\sum_{\alpha\geqq n(x_0-\varepsilon)}\binom{n}{\alpha}(x_0-\Delta)^\alpha(1-x_0+\Delta)^{n-\alpha}\times \tag{3.11}$$

$$\times\left(1-\frac{\varepsilon}{x_0}\sum_{j=0}^{[n(x_0-\varepsilon)]}\binom{\alpha}{j}\left(\left(\frac{j}{n}+\varepsilon\right)x_0\right)^{j-1}\left(1-\left(\frac{j}{n}+\varepsilon\right)x_0\right)^{n-j}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\frac{\alpha}{n}+\varepsilon-x_0}{1-x_0}\sum_{i=0}^{[n(1-\varepsilon)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{i}\left(\frac{\frac{\alpha+i}{n}+\varepsilon-x_0}{1-x_0}\right)^{i-1}\left(\frac{1-\frac{\alpha+i}{n}-\varepsilon}{1-x_0}\right)^{n-\alpha-i}\right).$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma értelmében

$$P(\sup_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|G_3(x))=P(F_n(x)>x-\varepsilon,\ 0\leqq x\leqq 1|G_3(x))=$$
$$=P(\bar{F}_n(x)>G_3^{-1}(x)-\varepsilon,\ 0\leqq x\leqq 1),$$

ahol

$$G_3^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x_0}{x_0-\Delta}x, & 0\leqq x\leqq x_0-\Delta\\[2ex] \dfrac{1-x_0}{1-x_0+\Delta}x+\dfrac{\Delta}{1-x_0+\Delta}, & x_0-\Delta\leqq x\leqq 1,\end{cases}$$

ez a valószínűség pedig az 1.5. Tételből azonnal adódik.

3.1.4. KOROLLÁRIUM.

$$P\big(\sup_{0\leq x\leq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|G_4(x)\big)= \tag{3.12}$$

$$=1-\frac{\varepsilon-\Delta}{1-\Delta}\sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)]}\binom{n}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}-\Delta+\varepsilon}{1-\Delta}\right)^{j-1}\left(\frac{1-\frac{j}{n}-\varepsilon}{1-\Delta}\right)^{n-j},\quad \varepsilon>\Delta.$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma szerint

$$P\big(\sup_{0\leq x\leq 1}(x-F_n(x))<\varepsilon|G_4(x)\big)=P\big(\bar{F}_n(x)>(1-\Delta)x+\Delta-\varepsilon,\ 0\leqq x\leqq 1\big),$$

ez pedig az 1.2. Tételből azonnal adódik.

3.1.3. *A* $\sup\limits_{0\leq x\leq a}\left(\dfrac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$ *statisztika*

A $G(x)$ függvény definíciójánál (3.2) legyen most $a_{k-1}=a$.

3.2. TÉTEL.

$$P\left(\sup_{0\leq x\leq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon|H_1\right)=n!\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\dots\sum\frac{(1-a)^{\alpha_k}c_k^{\alpha_k}}{\alpha_k!}\times \tag{3.13}$$

$$\times\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(a_i-a_{i-1})^{\alpha_i}c_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!}p_n\left((1+\varepsilon)(a_i-a_{i-1}),\ \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}}{n}+\varepsilon-(1+\varepsilon)a_{i+1};\ \alpha_i\right),$$

ahol $p_n(\ )$ *definícióját lásd* (1.12), *és az összegzés azon* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ *nem-negatív egész számokra terjed ki, melyekre*

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k=n,$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_i\geqq n\left(\frac{1+\varepsilon}{c_{i+1}}(c_ia_i+b_i-b_{i+1})-\varepsilon\right)\quad i=1,2,\dots,k-1.$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma szerint

$$P\left(\sup_{0\leq x\leq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon|H_1\right)=P\big(F_n(x)>(1+\varepsilon)x-\varepsilon,\ 0\leqq x\leqq a|H_1\big)=$$

$$=P\big(\bar{F}_n(x)>(1+\varepsilon)G^{-1}(x)-\varepsilon,\ 0\leqq x\leqq c_{k-1}a+b_{k-1}\big).$$

Ez a valószínűség pedig az 1.3. Tételből adódik.

Itt is vizsgáljunk speciális alternatívákat. A minimum alternatíva most

$$G_5(x)=\begin{cases}x, & 0\leqq x\leqq x_0-\Delta(1-x_0)\\ x_0-\Delta(1-x_0), & x_0-\Delta(1-x_0)<x\leqq x_0\\ x, & x_0<x\leqq 1,\end{cases} \tag{3.14}$$

a maximum alternatíva pedig

$$G_6(x) = (1+\Delta)x-\Delta, \quad \frac{\Delta}{1+\Delta} \leqq x \leqq 1. \tag{3.15}$$

Legyen továbbá

$$G_7(x) = \begin{cases} \left(1+\Delta-\dfrac{\Delta}{x_0}\right)x, & 0 \leqq x \leqq x_0 \\ (1+\Delta)x-\Delta, & x_0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

és

$$G_8(x) = \begin{cases} x-\Delta(1-a), & \Delta(1-a) \leqq x \leqq 1 \\ 1, & 1 < x, \end{cases}$$

ahol $\Delta \leqq \dfrac{a}{1-a}$.

Igazak a következő eloszlástételek:

3.2.1. Korollárium.

$$P\left(\sup_{0\leqq x\leqq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right) < \varepsilon | G_5(x)\right) = \tag{3.16}$$

$$= \sum_{\alpha\geqq n(x_0-\varepsilon(1-x_0))} \binom{n}{\alpha}(x_0-\Delta(1-x_0))^\alpha(1-x_0)^{n-\alpha}(1+\Delta)^{n-\alpha}\left(1-\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)(x_0-\Delta(1-x_0))}\times\right.$$

$$\times\sum_{j=0}^{[n((1+\varepsilon)(x-\Delta)(1-x_0))-\varepsilon)]}\binom{\alpha}{j}\left(\frac{\dfrac{j}{n}+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(x_0-\Delta(1-x_0))}\right)^{j-1}\left.\left(1-\frac{\dfrac{j}{n}+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(x_0-\Delta(1-x_0))}\right)^{\alpha-j}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\dfrac{\alpha}{n}+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1+\Delta)(1-x_0)}\sum_{i=0}^{[n((1+\varepsilon)a-\varepsilon)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{i}\left(\frac{\dfrac{\alpha+i}{n}+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1+\Delta)(1-x_0)}\right)^{i-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{\dfrac{\alpha+i}{n}+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1+\Delta)(1-x_0)}\right)^{n-\alpha-i}\right).$$

Bizonyítás. A 3.1. lemmából

$$P\left(\sup_{0\leqq x\leqq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right) < \varepsilon | G_5(x)\right) =$$

$$= P\left(\begin{matrix}\bar{F}_n(x) > (1+\varepsilon)x-\varepsilon, \ 0 \leqq x \leqq x_0-\Delta(1-x_0), \ x_0 \leqq x \leqq a; \\ \bar{F}_n(x) > (1+\varepsilon)x_0-\varepsilon, \ x_0-\Delta(1-x_0) \leqq x \leqq x_0.\end{matrix}\right).$$

Ezt a valószínűséget a 3.1.1. Korolláriumhoz hasonlóan az 1.5. Tétel gondolatmenetével kaphatjuk meg.

3.2.2. KOROLLÁRIUM.

$$P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon \,\middle|\, G_6(x)\right)= \tag{3.17}$$

$$=1-\sum_{j=0}^{[n(a(1+\varepsilon)-\varepsilon)]}\binom{n}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}(1+\Delta)+\varepsilon-\Delta}{1+\varepsilon}\right)^{j-1}\left(1-\frac{\frac{j}{n}(1+\Delta)+\varepsilon-\Delta}{1+\varepsilon}\right)^{n-j}\frac{\varepsilon-\Delta}{1+\varepsilon},\quad \varepsilon>\Delta.$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma szerint

$$P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon \,\middle|\, G_6(x)\right)=$$

$$=P\left(\bar F_n(x)>x\frac{1+\varepsilon}{1+\Delta}-\frac{\varepsilon-\Delta}{1+\Delta},\quad 0\le x\le a(1+\Delta)-\Delta\right).$$

Ez a valószínűség az 1.2. Tételből adódik.

3.2.3. KOROLLÁRIUM.

$$P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon \,\middle|\, G_7(x)\right)= \tag{3.18}$$

$$=\sum_{\alpha\ge n((1+\varepsilon)x_0-\varepsilon)}\binom{n}{\alpha}((1+\Delta)x_0-\Delta)^{\alpha}(1-x_0)^{n-\alpha}(1+\Delta)^{n-\alpha}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)x_0}\sum_{j=0}^{[n((1+\varepsilon)x_0-\varepsilon)]}\binom{\alpha}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{(1+\varepsilon)x_0}\right)^{j-1}\left(1-\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{(1+\varepsilon)x_0}\right)^{\alpha-j}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\frac{\alpha}{n}+\frac{\varepsilon-\Delta}{1+\Delta}}{(1+\varepsilon)(1-x_0)}\sum_{i=0}^{[n((1+\varepsilon)a-\varepsilon)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{i}\left(\frac{\frac{\alpha+i}{n}+\frac{\varepsilon-\Delta}{1+\Delta}}{(1+\varepsilon)(1-x_0)}\right)^{i-1}\left(1-\frac{\frac{\alpha+i}{n}+\frac{\varepsilon-\Delta}{1+\Delta}}{(1+\varepsilon)(1-x_0)}\right)^{n-\alpha-i}\right).$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma szerint

$$P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon \,\middle|\, G_7(x)\right)=$$

$$=P\begin{pmatrix}\bar F_n(x)>\dfrac{(1+\varepsilon)x_0}{(1+\Delta)x_0-\Delta}x-\varepsilon, & 0\le x\le(1+\Delta)x_0-\Delta;\\ \bar F_n(x)>\dfrac{1+\varepsilon}{1+\Delta}x-\dfrac{\varepsilon-\Delta}{1+\Delta}, & (1+\Delta)x_0-\Delta\le x\le(1+\Delta)a-\Delta\end{pmatrix}.$$

Ez a valószínűség az 1.5. Tételnél alkalmazott gondolatmenettel adódik.

3.2.4. KOROLLÁRIUM. *Ha* $\Delta \leqq \dfrac{a}{1-a}$, *akkor*

$$P\left(\sup_{0\leqq x\leqq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon \,\middle|\, G_8(x)\right)= \tag{3.19}$$

$$=1-\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}-\Delta(1-a)\right)\sum_{j=0}^{[n((1+\varepsilon)a-\varepsilon)]}\binom{n}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{1+\varepsilon}-\Delta(1-a)\right)^{j-1}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{1+\varepsilon}+\Delta(1-a)\right)^{n-j},\quad \varepsilon>\frac{\Delta(1-a)}{1-\Delta(1-a)}.$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma szerint

$$P\left(\sup_{0\leqq x\leqq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\varepsilon \,\middle|\, G_8(x)\right)=$$

$$=P\big(\bar F_n(x)>(1+\varepsilon)\big(x+\Delta(1-a)\big)-\varepsilon,\ 0\leqq x\leqq a(1+\Delta)-\Delta\big).$$

Ez a valószínűség az 1.2. Tételből közvetlenül adódik.

3.1.4. *A* $\sup\limits_{a\leqq x\leqq 1}\left(\dfrac{x-F_n(x)}{x}\right)$ *statisztika*

Legyen most $a_1=a$.

3.3. TÉTEL.

$$P\left(\sup_{a\leqq x\leqq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\varepsilon \,\middle|\, H_1\right)=n!\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}\cdots\sum\frac{a^{\alpha_1}c_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\times \tag{3.20}$$

$$\times\prod_{i=2}^{k}\frac{(a_i-a_{i-1})^{\alpha_i}c_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!}\,p_n\left((a_i-a_{i-1})(1-\varepsilon),\ \frac{\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}}{n}-(1-\varepsilon)a_{i-1};\ \alpha_i\right),$$

ahol $p_n(\ )$ *definícióját lásd* (1.12), *és az összegzés azon* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ *nem-negatív egész számokra terjed ki, melyekre*

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k=n,$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_i\geqq n\frac{1-\varepsilon}{c_{i+1}}(c_ia_i+b_i-b_{i+1}),\quad i=1,2,\dots,k.$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma értelmében

$$P\left(\sup_{a\leqq x\leqq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\varepsilon \,\middle|\, H_1\right)=P\big(F_n(x)>(1-\varepsilon)x,\ a\leqq x\leqq 1 \,|\, H_1\big)=$$

$$=P\big(\bar F_n(x)>(1-\varepsilon)G^{-1}(x),\ c_1a+b_1\leqq x\leqq 1\big).$$

Ez a valószínűség az 1.3. Tételből adódik.

Tekintsünk most is speciális alternatívákat, de egyszerűség kedvéért csak a szélső alternatívákkal foglalkozzunk.

A minimum alternatíva:

$$G_9(x)=\begin{cases}x, & a\leqq x\leqq x_0(1-\Delta)\\ x_0(1-\Delta), & x_0(1-\Delta)\leqq x\leqq x_0\\ x, & x_0<x\leqq 1,\end{cases}$$

a maximum alternatíva:

$$G_{10}(x)=\begin{cases}x(1-\Delta) & 0\leqq x\leqq 1\\ 1 & 1<x.\end{cases}$$

Ezekre igazak a következő eloszlástételek:

3.3.1. KOROLLÁRIUM.

$$P\left(\sup_{a\leqq x\leqq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\varepsilon\,|\,G_9(x)\right)= \tag{3.21}$$

$$=\sum_{\substack{\alpha_1>(1-\varepsilon)a\\ \alpha_1+\alpha_2>(1-\varepsilon)x_0}}\!\!\cdots\sum\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,(n-\alpha_1-\alpha_2)!}a^{\alpha_1}(x_0(1-\Delta)-a)^{\alpha_2}(1-x_0(1-\Delta))^{n-\alpha_1-\alpha_2}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\frac{\alpha_1}{n(1-\varepsilon)}-a}{x_0(1-\Delta)-a}\sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)(1-\Delta)x_0]-\alpha_1}\binom{\alpha_2}{j}\left(\frac{\frac{\alpha_1+j}{n(1-\varepsilon)}-a}{x_0(1-\Delta)-a}\right)^{j-1}\left(1-\frac{\frac{\alpha_1+j}{n(1-\varepsilon)}-a}{x_0(1-\Delta)-a}\right)^{\alpha_2-j}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{n(1-\varepsilon)}-x_0(1-\Delta)}{1-x_0(1-\Delta)}\sum_{i=0}^{[n(1-\varepsilon)]-\alpha_1-\alpha_2}\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{i}\left(\frac{\frac{\alpha_1+\alpha_2+i}{n(1-\varepsilon)}-x_0(1-\Delta)}{1-x_0(1-\Delta)}\right)^{i-1}\right.\times$$

$$\left.\times\left(\frac{1-\frac{\alpha_1+\alpha_2+i}{n(1-\varepsilon)}}{1-x_0(1-\Delta)}\right)^{n-\alpha_1-\alpha_2-i}\right).$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemmából

$$P\left(\sup_{a\leqq x\leqq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\varepsilon\,|\,G_9(x)\right)=$$

$$=P\begin{pmatrix}\bar F_n(x)>(1-\varepsilon)x, & a\leqq x\leqq x_0(1-\Delta),\ x_0\leqq x\leqq 1;\\ \bar F_n(x)>(1-\varepsilon)x_0, & x_0(1-\Delta)\leqq x\leqq x_0.\end{pmatrix}$$

Ezt a valószínűséget pedig az 1.3. Tételből kaphatjuk meg.

3.3.2. KOROLLÁRIUM

$$P\left(\sup_{a\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\varepsilon|G_{10}(x)\right)= \tag{3.22}$$

$$=\sum_{\alpha>a(1-\varepsilon)}\binom{n}{\alpha}(a(1-\Delta))^{\alpha}(1-a(1-\Delta))^{n-\alpha}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\dfrac{\alpha}{n(1-\varepsilon)}-a}{1-a}\sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)]-\alpha}\binom{n-\alpha}{j}\left(\frac{\dfrac{\alpha+j}{n(1-\varepsilon)}-a}{1-a}\right)^{j-1}\left(\frac{1-\dfrac{\alpha+j}{n(1-\varepsilon)}}{1-a}\right)^{n-\alpha-j}\right).$$

Bizonyítás. A 3.1. Lemma szerint

$$P\left(\sup_{a\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\varepsilon|G_{10}(x)\right)=$$

$$=P\left(\bar{F}_n(x)>\frac{1-\varepsilon}{1-\Delta}x,\ a(1-\Delta)\le x\le 1-\Delta\right).$$

Ez a valószínűség az 1.4.3. Korolláriumból adódik.

3.2. Erőfüggvények aszimptotikus vizsgálata

3.2.1. *Bevezetés*

Ismeretes (lásd pl. MASSEY [69]), hogy az egyoldali *Kolmogorov—Szmirnov*-próba konzisztens minden rögzített alternatívára, melyre $\Delta>0$. Hasonlóképpen belátható, hogy az általunk vizsgált további statisztikán $\left(\sup\limits_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right),\right.$ $\left.\sup\limits_{a\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right),\text{ stb.}\right)$ alapuló próbák is konzisztensek minden rögzített alternatívára, melyre $\Delta>0$. Belátható viszont, hogy a $\sup\limits_{0\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$ statisztikán alapuló próba nem konzisztens. Ennek oka az, hogy a statisztika az előzőekkel ellentétben még nullhipotézis esetén sem tart sztochasztikusan 0-hoz, hiszen (lásd 1.1. Tétel vagy 1.4.2. Korollárium)

$$P\left(\sup_{0\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)>\varepsilon\right)=\frac{1}{1+\varepsilon}, \tag{3.23}$$

n-től függetlenül. Így rögzítve az $\frac{1}{1+\varepsilon}=\gamma$ elsőfajú hibát és a $G_6(x)=(1+\Delta)x-\Delta$ $\frac{\Delta}{1+\Delta}\le x\le 1$ alternatívát (amely pedig maximum alternatíva), a 3.1. Lemma alapján látható, hogy

$$P\left(\sup_{0\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right) > \varepsilon \middle| G_6(x)\right) = \tag{3.24}$$

$$= P\left(\bar{F}_n(x) > x\frac{1+\varepsilon}{1+\Delta}-\frac{\varepsilon-\Delta}{1+\Delta},\ 0 \le x \le 1\right) = \frac{\varepsilon-\Delta}{1+\varepsilon} = 1-\gamma(1+\Delta),$$

azaz az erőfüggvény nem tart 1-hez, midőn $n\to\infty$. Itt fennáll tehát az a paradox helyzet, hogy ha a $\sup\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$ statisztikán alapuló próbát akarunk konstruálni, az alternatívák egy igen nagy osztályára jobb próbát kapunk, ha ezt nem az egész (0, 1) intervallumon, hanem csak egy részén, a $(0, a)$ intervallumon vizsgáljuk, azaz információt vesztünk.

A $\sup\limits_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$ statisztikán alapuló próba azon $G(x)$ alternatívákra nem lesz konzisztens, melyekre $G(x)=x$, a $[0, a]$ intervallumban és csak az $(a, 1]$ intervallumban $G(x)\not\equiv x$. Könnyen tudunk azonban minden rögzített $G(x)\le x$, $G(x)\not\equiv x$ alternatívára konzisztens próbát konstruálni, ha $a=a_n$-et veszünk úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$. A 2.9. Tételből következik ui., hogy ha még $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-a_n)=\infty$, akkor minden rögzített $\varepsilon>0$-ra H_0 esetén

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a_n}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right) < \varepsilon\right) = 0, \tag{3.25}$$

így a $\sup\limits_{0\le x\le a_n}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$ statisztika nullhipotézis esetén sztochasztikusan 0-hoz, alternatíva esetén $\sup\limits_{0\le x\le 1}\left(\frac{x-G(x)}{1-x}\right)=\Delta>0$-hoz tart, amiből már (lásd FRASER [53]) a konzisztencia következik.

Hasonlóképpen a $\sup\limits_{a_n\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)$ statisztikán alapuló próba minden rögzített $G(x)\le x$, $G(x)\not\equiv x$ alternatívára konzisztens, ahol $0<a_n<1$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \text{de} \quad \lim_{n\to\infty} na_n = \infty.$$

E rövid kitérő után azonban térjünk vissza rögzített a-ra és vizsgáljuk a tárgyalt statisztikák határeloszlását alternatíva esetén, ill. az efficiencia különböző értelmezéseit a mi esetünkben.

3.2.2. *Határeloszlás tételek alternatíva esetén*

RAGHAVACHARI [76] megadta a *Kolmogorov—Szmirnov*-típusú statisztikák határeloszlását rögzített alternatívára, *Wiener*-folyamat bizonyos funkcionáljainak eloszlásával. Mi explicite megadjuk a határeloszlásokat az általunk vizsgált statisztikákra és alternatívákra.

3.4. TÉTEL.

(3.26)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le 1}(x-F_n(x))-\Delta<\frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_i(x)\right)=$$
$$=\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{(x_0-\Delta)(1-x_0+\Delta)}}\right),\quad i=1,3.$$

(3.27)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le 1}(x-F_n(x))-\Delta<\frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_2(x)\right)=$$
$$=\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{\Delta(1-\Delta)}}\right)-e^{-2t^2}\Phi\left(\frac{(1-2\Delta)t}{\sqrt{\Delta(1-\Delta)}}\right),\quad t>0.$$

(3.28)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le 1}(x-F_n(x))-\Delta<\frac{v}{n}\middle| G_4(x)\right)=$$
$$=1-v\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(v+j)^{j-1}}{(1-\Delta)^j j!}e^{-\frac{v+j}{1-\Delta}},\quad v>0.$$

Bizonyítás. A $G_1(x)$ és $G_3(x)$ alternatívánál a $\sup(x-G(x))=\Delta$ csak az $x=x_0$ pontban éretik el, ezért azonos a határeloszlás.

A 3.1.1. és 3.1.3. Korolláriumból látható ui., hogy mindkét esetben a domináló tag a $\sum\binom{n}{\alpha}(x_0-\Delta)^\alpha(1-x_0+\Delta)^{n-\alpha}$ binomiális valószínűség, amely — mint ismeretes — a normális eloszlásfüggvényhez tart. A zárójelben levő többi összeg — a 2. § módszerét alkalmazva (lásd 2.4. pont) 0-hoz tart.

$G_2(x)$ esetén a határeloszlás a 2.3.1. Korolláriumból, $a_1=0$, $a_2=1-\Delta$ helyettesítéssel adódik.

$G_4(x)$ esetén a $\sup(x-G_4(x))$ az $x=\Delta$ pontban éretik el, és itt $G_4(\Delta)=0$. Így itt a standard, $\sqrt{n}$-rendű határátmenet 1-et ad minden rögzített t-re (lásd (3.26) $x_0=\Delta$-val). Ezért ez az eset a 2.6. Tétel (ii) részéből adódik $c=1-\Delta$ helyettesítéssel.

3.5. TÉTEL.

(3.29)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)-\Delta<\frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_5(x)\right)=\Phi\left(t\sqrt{\frac{1-x_0}{(1+\Delta)(x_0-\Delta(1-x_0))}}\right).$$

(3.30)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)-\Delta<\frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_6(x)\right)=$$
$$=\Phi\left(t\sqrt{\frac{1-a}{(1+\Delta)(a-\Delta(1-a))}}\right)-\Phi\left(-t\sqrt{\frac{1-a}{(1+\Delta)(a-\Delta(1-a))}}\right),\quad t>0.$$

(3.31)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\leqq x\leqq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)-\Delta<\frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_7(x)\right)=$$

$$=\int\limits_{-t\sqrt{\frac{1-x_0}{(1+\Delta)(x_0-\Delta(1-x_0))}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\left[\Phi\left(\left(y+t\sqrt{\frac{1-x_0}{(1+\Delta)(x_0-\Delta(1-x_0))}}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{(1-a)(x_0-\Delta(1-x_0))}{a-x_0+\Delta(1-x_0)}}\right)-\Phi\left(-\left(y+t\sqrt{\frac{1-x_0}{(1+\Delta)(x_0-\Delta(1-x_0))}}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\sqrt{\frac{(1-a)(x_0-\Delta(1-x_0))}{a-x_0+\Delta(1-x_0)}}\right)\right]dy.$$

(3.32)
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\leqq x\leqq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)-\Delta<\frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_8(x)\right)=\Phi\left(t\sqrt{\frac{1-a}{(a(1+\Delta)-\Delta)(1+\Delta)}}\right).$$

Bizonyítás. A 3.2.1. Korolláriumnál a domináló tag a $\sum\binom{n}{\alpha}(x_0-\Delta(1-x_0))^\alpha\times$ $\times(1-x_0)^{n-\alpha}(1+\Delta)^{n-\alpha}$ binomiális valószínűség. A zárójelben levő összegek ui. 0-hoz tartanak (lásd 2.4. pont). A binomiális összegekre vonatkozó standard módszereket alkalmazva kapjuk (3.29)-et.

$G_6(x)$ esetén a 3.2.2. Korollárium szerint a

$$P\left(\bar{F}_n(x)>\left(1+\frac{t}{(1+\Delta)\sqrt{n}}\right)x-\frac{t}{(1+\Delta)\sqrt{n}},\ 0\leqq x\leqq a(1+\Delta)-\Delta\right)$$

valószínűség határértékét kell meghatároznunk, ami közvetlenül adódik a 2.1. Tételből.

$G_7(x)$ esetén a 3.2.3. Korolláriumnál csupán a j-re vonatkozó összegzés hanyagolható el. A

$$P\left(\sup_{0\leqq x\leqq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_7(x)\right)$$

valószínűség így aszimptotikusan egyenlő a

$$P\left(\bar{F}_n(x)>\left(1+\frac{t}{(1+\Delta)\sqrt{n}}\right)x-\frac{t}{(1+\Delta)\sqrt{n}},\ (1+\Delta)x_0-\Delta\leqq x\leqq(1+\Delta)a-\Delta\right)$$

valószínűséggel, amelynek határértéke közvetlenül adódik a 2.3. Tételből.

$G_8(x)$ esetén induljunk ki a 3.2.4. Korollárium képletéből, és legyen $\varepsilon=\Delta+\frac{t}{\sqrt{n}}$, $\frac{j}{n}=(1+\varepsilon)a-\varepsilon+\frac{z}{\sqrt{n}}$, és alkalmazzuk a 2. § standard módszerét. E szerint

$$\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}-\Delta(1-a)\right)\binom{n}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{1+\varepsilon}-\Delta(1-a)\right)^{j-1}\left(1-\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{1+\varepsilon}+\Delta(1-a)\right)^{n-j}=$$

$$=\frac{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}-\Delta(1-a)}{\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{1+\varepsilon}-\Delta(1-a)}\binom{n}{j}\left(\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{1+\varepsilon}-\Delta(1-a)\right)^{j}\left(1-\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{1+\varepsilon}+\Delta(1-a)\right)^{n-j}\sim$$

$$\sim\frac{\Delta}{1+\Delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(np-j)^2}{2npq}},$$

ahol $p=\frac{\frac{j}{n}+\varepsilon}{1+\varepsilon}-\Delta(1-a)$ és $q=1-p$.

Némi számolással adódik:

$$p\sim a-\Delta+\Delta a,\quad np-j\sim\sqrt{n}\left(t(1-a)-\frac{\Delta}{1+\Delta}z\right),$$

így

$$\frac{(np-j)^2}{npq}\sim\frac{\left(\frac{\Delta}{1+\Delta}z-t(1-a)\right)^2}{(a-\Delta+\Delta a)(1+\Delta)(1-a)}.$$

A keresett valószínűség aszimptotikus értékére adódik tehát

$$1-\int_{-\infty}^{0}\frac{\Delta}{1+\Delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi(a-\Delta+\Delta a)(1+\Delta)(1-a)}}e^{-\frac{\left(\frac{\Delta}{1+\Delta}z-t(1-a)\right)^2}{2(a-\Delta+\Delta a)(1+\Delta)(1-a)}}dz=$$

$$=1-\Phi\left(-t\sqrt{\frac{1-a}{(a-\Delta+\Delta a)(1+\Delta)}}\right)=\Phi\left(t\sqrt{\frac{1-a}{(a-\Delta+\Delta a)(1+\Delta)}}\right).$$

3.6. TÉTEL.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right) < \frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_9(x)\right) = \Phi\left(t\sqrt{\frac{x_0}{(1-\Delta)(1-x_0(1-\Delta))}}\right). \tag{3.33}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a\le x\le 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)-\Delta < \frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_{10}(x)\right) = \tag{3.34}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-t\sqrt{\frac{a}{(1-\Delta)(1-a(1-\Delta))}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left[\Phi\left(y\sqrt{\frac{a\Delta}{1-a}}+t\sqrt{\frac{a\Delta+1-a}{\Delta(1-\Delta)(1-a)}}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{-2\left(y\sqrt{a(1-\Delta)}+\frac{at}{\sqrt{1-a(1-\Delta)}}\right)\frac{t}{(1-\Delta)\sqrt{1-a(1-\Delta)}}}\Phi\left(-y\sqrt{\frac{a\Delta}{1-a}}+t\sqrt{\frac{a\Delta+1-a}{\Delta(1-\Delta)(1-a)}}\right)\right]dy.$$

Bizonyítás. (3.33) lényegében abból következik, hogy az $\frac{x-G_9(x)}{x}$ csak az $x=x_0$ pontban veszi fel a maximumát, így $G_1(x)$, $G_3(x)$, $G_5(x)$-hez hasonlóan, $F_n(x)$ viselkedése a többi pontban elhanyagolható.

(3.34) rész a $P\left(\bar{F}_n(x) > x\left(1-\frac{t}{(1-\Delta)\sqrt{n}}\right),\ a(1-\Delta)\le x\le 1-\Delta\right)$ valószínűség határértéke, ami a 2.3. Tételből közvetlenül adódik.

3.2.3. *A Chernoff-féle efficiencia*

Rögzített elsőfajú valószínűség és rögzített alternatíva esetén a másodfajú hibavalószínűség általában kb. ϱ^n, azaz exponenciálisan tart 0-hoz. ϱ természetesen függ az alkalmazott próbától és az alternatívától. Egy rögzített alternatívára a legkisebb ϱ a *Neyman—Pearson* (likelihood-hányados) -próba esetén adódik, hiszen az a legjobb próba. CHERNOFF [26] javasolta a $\frac{\log \varrho_1}{\log \varrho_2}$ mennyiséget efficienciának. SZANOV [90] tételéből következik azonban, hogy a *Kolmogorov—Szmirnov*-próbánál is elérhető a legjobb ϱ, ilyen értelemben tehát a *Kolmogorov—Szmirnov*-próba relatív efficienciája a *Neyman—Pearson*-próbára vonatkozólag 1. Érdemes idézni SZANOV említett tételét:

Legyen $F_n(x)$ az $F(x)$ eloszlásból vett minta empirikus eloszlásfüggvénye és $G(x)$ egy másik eloszlásfüggvény, melyre $\int_{-\infty}^{\infty} \log\frac{dG(x)}{dF(x)}\,dG(x)$ (I-divergencia) létezik és véges. Ekkor

$$P(\sup_{(x)} |F_n(x)-G(x)| < \varepsilon) = e^{n\left(-\int_{-\infty}^{\infty}\log\frac{dG(x)}{dF(x)}dG(x)+\gamma_\varepsilon+\delta_{n,\varepsilon}\right)}, \tag{3.35}$$

ahol $\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon = 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\delta_{n,\varepsilon} = 0$.

Egy másik cikkében CHERNOFF [25] a következő módosítást vezette be: Tartson a γ elsőfajú hiba is alkalmas módon 0-hoz, mégpedig azonos rendben mint a másodfajú hiba. Általában elérhető, hogy ez a nagyságrend exponenciális legyen, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta} = \varrho, \tag{3.36}$$

valamilyen ϱ-val. (Ez a ϱ természetesen nem azonos az előző ϱ-val). CHERNOFF az $e=\dfrac{\log \varrho_1}{\log \varrho_2}$ mennyiséget nevezi relatív efficienciának. A *Neyman—Pearson*-próbára (lásd CHERNOFF [25])

$$\varrho = \inf_{0<t<1} \int (f_1(x))^t (f_0(x))^{1-t}\, d\nu(x) \tag{3.37}$$

ahol $\nu(\ )$ mind a nullhipotézist, mind az alternatívát domináló mérték, $f_0(x)$ és $f_1(x)$ az erre vonatkozó sűrűségfüggvény nullhipotézis, ill. alternatíva esetén. A ϱ meghatározásához szükségünk lesz ABRAHAMSON [1] következő tételére:

Legyen $K_{\psi,n}=\sup\limits_{0<x<1}\big((x-F_n(x))\psi(x)\big)$, *ahol* $\psi(x)\geqq 0$ *folytonos súlyfüggvény, melyre*

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)\psi(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x\psi(x) = 0.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(K_{\psi,n} \geqq \varepsilon) = \sup_{(x)} \log \varrho\left(x, \frac{\varepsilon}{\psi(x)}\right), \tag{3.38}$$

ahol

$$\varrho(x,\varepsilon) = \left(\frac{1-x}{1-x+\varepsilon}\right)^{1-x+\varepsilon} \left(\frac{x}{x-\varepsilon}\right)^{x-\varepsilon}, \quad \varepsilon < x < 1.$$

Határozzuk meg tehát ϱ-t az általunk vizsgált esetekben. Nem mindig van azonban értelme a *Chernoff*-efficienciának. A $\sup\limits_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))$ statisztika és $G_2(x)$ alternatíva esetén ui. a 3.1.2. Korolláriumból látható, hogy rögzített ε esetén

$$\beta = P\big(\sup_{0\leqq x\leqq 1} (x-F_n(x)) < \varepsilon | G_2(x)\big) = 0, \tag{3.39}$$

ha $\varepsilon<\Delta$, míg $\lim\limits_{n\to\infty}\beta=1$, ha $\varepsilon>\Delta$. Ugyanez a helyzet a $G_4(x)$ alternatívánál, valamint a $G_6(x)$, $G_8(x)$, $G_{10}(x)$ alternatívánál is. A többi esetet vegyük most egybe:

3.7. TÉTEL.

(i) *A* $\sup\limits_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))$ *statisztika,* $G_1(x)$ *és* $G_3(x)$ *alternatívák esetén*

$$\varrho = \left(\frac{x_0-\Delta}{x_0-\varepsilon}\right)^{x_0-\varepsilon} \left(\frac{1-x_0+\Delta}{1-x_0+\varepsilon}\right)^{1-x_0+\varepsilon}, \tag{3.40}$$

ahol ε *a*

$$\sup_{\varepsilon<x<1}\left(\left(\frac{1-x}{1-x+\varepsilon}\right)^{1-x+\varepsilon}\left(\frac{x}{x-\varepsilon}\right)^{x-\varepsilon}\right) = \left(\frac{x_0-\Delta}{x_0-\varepsilon}\right)^{x_0-\varepsilon}\left(\frac{1-x_0+\Delta}{1-x_0+\varepsilon}\right)^{1-x_0+\varepsilon}$$

egyenlet megoldása.

(ii) *A* $\sup\limits_{0\leq x\leq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$ *statisztika esetén a* $G_5(x)$ *alternatívánál*

$$\varrho=\left(\frac{x_0-\Delta(1-x_0)}{x_0-\varepsilon}\right)^{x_0-\varepsilon}\left(\frac{(1-x_0)(1+\Delta)}{1-x_0+\varepsilon}\right)^{1-x_0+\varepsilon}, \tag{3.41}$$

ahol ε *az*

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{(1+\varepsilon)(1-a)}\left(\frac{a}{a(1+\varepsilon)-\varepsilon}\right)^{a(1+\varepsilon)-\varepsilon}=\left(\frac{x_0-\Delta(1-x_0)}{x_0-\varepsilon}\right)^{x_0-\varepsilon}\left(\frac{(1-x_0)(1+\Delta)}{1-x_0+\varepsilon}\right)^{1-x_0+\varepsilon}$$

egyenlet megoldása.

(iii) *A* $\sup\limits_{a\leq x\leq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)$ *statisztika esetén a* $G_9(x)$ *alternatívánál*

$$\varrho=\left(\frac{x_0(1-\Delta)}{x_0-\varepsilon}\right)^{x_0-\varepsilon}\left(\frac{1-x_0+\Delta x_0}{1-x_0+\varepsilon}\right)^{1-x_0+\varepsilon}, \tag{3.42}$$

ahol ε *az*

$$\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{a(1-\varepsilon)}\left(\frac{1-a}{1-a+a\varepsilon}\right)^{1-a+a\varepsilon}=\left(\frac{x_0(1-\Delta)}{x_0-\varepsilon}\right)^{x_0-\varepsilon}\left(\frac{1-x_0+\Delta x_0}{1-x_0+\varepsilon}\right)^{1-x_0+\varepsilon}$$

egyenlet megoldása.

Bizonyítás. Az (i) esetben Abrahamson idézett tétele szerint rögzített ε-ra

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\gamma}=\sup_{(x)}\left(\left(\frac{1-x}{1-x+\varepsilon}\right)^{1-x+\varepsilon}\left(\frac{x}{x-\varepsilon}\right)^{x-\varepsilon}\right).$$

A 3.1.1. és 3.1.3. Korolláriumból

$$\beta=P(\sup_{0\leq x\leq 1}(x-F_n(x))|G_i(x))=\sum_{\alpha\geq n(x_0-\varepsilon)}\binom{n}{\alpha}(x_0-\Delta)^{\alpha}(1-x_0+\Delta)^{n-\alpha},\quad i=1,3$$

és itt a jobboldal a pontos nagyságrendet is megadja. (lásd 3.2.2. pont). Így (lásd CHERNOFF [25])

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\beta}=\left(\frac{x_0-\Delta}{x_0-\varepsilon}\right)^{x_0-\varepsilon}\left(\frac{1-x_0+\Delta}{1-x_0+\varepsilon}\right)^{1-x_0+\varepsilon}.$$

ε-t megválasztva úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\gamma}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\beta}$ legyen, kapjuk a tétel állítását.

Az (ii) esetben ABRAHAMSON tétele szerint

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\gamma}=\sup_{0\leq x\leq a}\left(\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{(1+\varepsilon)(1-x)}\left(\frac{x}{x(1+\varepsilon)-\varepsilon}\right)^{x(1+\varepsilon)-\varepsilon}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{(1+\varepsilon)(1-a)}\left(\frac{a}{a(1+\varepsilon)-\varepsilon}\right)^{a(1+\varepsilon)-\varepsilon}$$

és (CHERNOFF [25])

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta} = \left(\frac{x_0-\Delta(1-x_0)}{x_0-\varepsilon}\right)^{x_0-\varepsilon} \left(\frac{(1-x_0)(1+\Delta)}{1-x_0+\varepsilon}\right)^{1-x_0+\varepsilon},$$

amiből következik az állítás.

Az (iii) esetben ABRAHAMSON szerint

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma} = \sup_{a\le x\le 1} \left(\left(\frac{1-x}{1-x+\varepsilon x}\right)^{1-x+\varepsilon x} \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{x(1-\varepsilon)}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{a(1-\varepsilon)} \left(\frac{1-a}{1-a+\varepsilon a}\right)^{1-a+\varepsilon a},$$

míg (CHERNOFF [25])

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta} = \left(\frac{x_0(1-\Delta)}{x_0-\varepsilon}\right)^{x_0-\varepsilon} \left(\frac{1-x_0+\Delta x_0}{1-x_0+\varepsilon}\right)^{1-x_0+\varepsilon},$$

amiből következik az állítás.

3.2.4. *A Bahadur-féle efficiencia*

A *Bahadur*-féle efficiencia [6] előnye a könnyebb kezelhetősége.
Legyen T_n $(n=1, 2, \dots)$ statisztikák egy végtelen sorozata, melyre
(i) nullhipotézis esetén

(3.43)
$$\lim_{n\to\infty} P(T_n < t) = H(t),$$

folytonos eloszlásfüggvény,

(3.44)
$$\text{(ii)}\ \log\bigl(1-H(t)\bigr) = -\frac{At^2}{2}\bigl(1+o(1)\bigr), \quad t\to\infty.$$

(iii) A P_θ ellenhipotézis esetén

(3.45)
$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{\sqrt{n}} = b(\theta)\right) = 1.$$

Ekkor a $c(\theta)=A\bigl(b(\theta)\bigr)^2$ jelöléssel a *Bahadur*-efficiencia az

(3.46)
$$e(\theta) = \frac{c_1(\theta)}{c_2(\theta)}$$

mennyiség, ahol $c_1(\theta)$ és $c_2(\theta)$ a két összehasonlítandó statisztika-sorozathoz tartozó $c(\theta)$-érték.

Határozzuk meg a továbbiakban $c(\theta)$ értékét az általunk vizsgált esetekben.

Megjegyezzük, hogy ABRAHAMSON [1] nem a fenti efficienciát vizsgálja, hanem egy módosított formáját, az ún. egzakt *Bahadur*-efficienciát. Ez a módosítás azonban nehezebben kezelhető, mint az eredeti definíció. A *Chernoff*- és *Bahadur*-efficiencia részletes tárgyalását lásd BAHADUR [7].

3.8. TÉTEL.

(i) *A* $\sup\limits_{0\leq x\leq 1}(x-F_n(x))$ *statisztika esetén minden* $\sup\limits_{(x)}(x-G(x))=\Delta$ *alternatívára* $c=4\Delta^2$.

(ii) *A* $\sup\limits_{0\leq x\leq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$ *statisztika esetén minden* $\sup\limits_{0\leq x\leq a}\left(\frac{x-G(x)}{1-x}\right)=\Delta$ *alternatívára* $c=\frac{1-a}{a}\Delta^2$.

(iii) *A* $\sup\limits_{a\leq x\leq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)$ *statisztika esetén minden* $\sup\limits_{a\leq x\leq 1}\left(\frac{x-G(x)}{x}\right)=\Delta$ *alternatívára* $c=\frac{a}{1-a}\Delta^2$.

Bizonyítás. Legyen (i)-nél $T_n=\sqrt{n}\sup\limits_{0\leq x\leq 1}(x-F_n(x))$. Ekkor nullhipotézis esetén (2.3.1. Korollárium)

$$\lim_{n\to\infty}P(T_n<t)=1-e^{-2t^2},\quad t>0,$$

így $A=4$. A *Glivenko—Cantelli*-tétel szerint alternatíva esetén

$$\frac{T_n}{\sqrt{n}}\to\Delta\quad 1 \text{ valószínűséggel},$$

tehát $c=4\Delta^2$.

(ii)-nél legyen $T_n=\sqrt{n}\sup\limits_{0\leq x\leq a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$. Nullhipotézis esetén (2.3.2. Korollárium)

$$\lim_{n\to\infty}P(T_n<t)=\Phi\left(t\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right)-\Phi\left(-t\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right),$$

és tekintve, hogy $1-\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}(1+o(1))$, $x\to\infty$ (lásd pl. RÉNYI [78]), ezért $A=\frac{1-a}{a}$. Ellenhipotézis esetén a *Glivenko—Cantelli*-tétel szerint

$$\frac{T_n}{\sqrt{n}}\to\Delta\quad 1 \text{ valószínűséggel},$$

így $c=\frac{1-a}{a}\Delta^2$.

(iii)-nál legyen $T_n=\sqrt{n}\sup\limits_{a\leq x\leq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right)$. Nullhipotézis esetén (2.3.3. Korollárium)

$$\lim_{n\to\infty}P(T_n<t)=\Phi\left(t\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)-\Phi\left(-t\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right),$$

így $\Delta = \frac{a}{1-a}$. Ellenhipotézis esetén ugyancsak

$$\frac{T_n}{\sqrt{n}} \to \Delta \quad 1 \text{ valószínűséggel,}$$

tehát $c = \frac{a}{1-a} \Delta^2$.

Ismerve a c értékét a fenti esetekre, meghatározhatjuk az egyes próbák *Bahadur*-efficienciáját egy másik próbához viszonyítva.

$G_1(x)$ és $G_3(x)$ alternatívák esetén pl. tekintsük az x_0 pontban alkalmazott binomiális próbát, azaz az $F_n(x_0)$ statisztikán alapuló próbát. Könnyű látni, hogy az erre vonatkozó c-érték $c = \frac{\Delta^2}{x_0(1-x_0)}$, így a *Kolmogorov—Szmirnov*-próba efficienciája $G_1(x)$ és $G_3(x)$ esetén $e = 4x_0(1-x_0)$. Ha tehát $x_0 = 1/2$, akkor $e = 1$.

$G_2(x)$ és $G_4(x)$ alternatívák esetén a legjobb próba X_1^*-on alapul, és ez nem elégíti ki a *Bahadur*-efficiencia definíciójánál előírt feltételeket. Ui. nX_1^*-nak van határeloszlása, de alternatíva esetén $X_1^* \to \Delta$, így azt is mondhatnánk, hogy a *Bahadur*-efficiencia 0. A legjobb próba ezekben az esetekben lényegesen jobb, mint a *Kolmogorov—Szmirnov*-próba. Hasonló a helyzet $G_6(x)$, $G_8(x)$ és $G_{10}(x)$ alternatíva esetén.

$G_5(x)$ és $G_7(x)$ lényegében azonos a $G_1(x)$ és $G_3(x)$ alternatívával, csak Δ helyébe $\Delta(1-x_0)$-at kell tenni. Így az $F_n(x_0)$-on alapuló binomiális próbára $c = \frac{1-x_0}{x_0} \Delta^2$, tehát erre $e = \frac{(1-a)x_0}{a(1-x_0)}$. Ha $x_0 = a$, akkor $e = 1$.

Az előzőkhöz hasonlóan $G_9(x)$-re a binomiális próbánál $c = \frac{x_0}{1-x_0} \Delta^2$, így $e = \frac{a(1-x_0)}{(1-a)x_0}$.

3.2.5. *A Pitman-féle efficiencia*

Az előzőkben az alternatívákat rögzítettük, abban az értelemben, hogy határátmenetnél nem függtek a mintaelemszámtól. Egy próba érzékenységét azonban tulajdonképpen az méri, hogy a nullhipotézishez közeli alternatívákat is minél jobban meg tud különböztetni. Ha rögzítjük a γ elsőfajú hibavalószínűséget, az alternatívát a nullhipotézishez tartatjuk, ($\Delta_n \to 0$, ha $n \to \infty$), az erőfüggvénynek általában valamilyen γ és 1 közé eső határértéke lesz. Erre az esetre vonatkozik az efficiencia legrégibb, PITMANtól származó definíciója (lásd pl. FRASER [53]).

Tekintsünk két próbát (statisztika-sorozatot) és az alternatíva függjön egy Δ_n paramétertől, melyre $\Delta_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0$ (nullhipotézis). Jelölje $\beta_n(\Delta)$ az egyik, $\beta_m^*(\Delta)$ a másik próbához tartozó másodfajú hibavalószínűséget, n, illetve m mintaelemszám, Δ alternatíva esetén. Tegyük fel, hogy az n_i és m_i részsorozatok olyanok, hogy

$$\lim_{i\to\infty} \beta_{n_i}(\Delta_i) = \lim_{i\to\infty} \beta_{m_i}^*(\Delta_i), \tag{3.47}$$

ahol ez a határérték 0 és $1-\gamma$ közé esik, de azoktól különböző. Ha $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{n_i}{m_i}$ létezik és azonos minden, a fenti feltételnek eleget tevő részsorozatra, akkor ezt nevezzük a két próba relatív efficienciájának.

Valójában a *Pitman*-féle efficiencia akkor kezelhető jól, ha a szóban forgó határeloszlások normálisak. Az erre vonatkozó tételek megtalálhatók FRASER [53] könyvében. Esetünkben azonban nem ez a helyzet.

Meg kell határoznunk tehát a másodfajú hibavalószínűség határértékét rögzített elsőfajú hibavalószínűség és $\Delta_n\to 0$ esetén. De csak akkor kapunk 0-tól és $1-\gamma$-tól különböző határértékeket, ha $\Delta_n=\frac{w}{\sqrt{n}}$. Ennél távolabbi alternatíva esetén ui. az erőfüggvény 1-hez tart, közelebbi alternatíva esetén pedig γ-hoz tart.

Megadjuk a határeloszlásokat az általunk vizsgált statisztikák és alternatívák esetén, ahol legyen mindenütt $\Delta=\Delta_n=\frac{w}{\sqrt{n}}$.

3.9. TÉTEL.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le 1}(x-F_n(x))<\frac{t}{\sqrt{n}}\,\middle|\,G_1(x)\right)= \tag{3.48}$$

$$=1-\Phi\left(\frac{t+w}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}\right)+\Phi\left(\frac{t-w}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}\right)-$$

$$-e^{-2t^2}\left(1-\Phi\left(\frac{t(1-2x_0)+w}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}\right)+\Phi\left(\frac{t(1-2x_0)-w}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}\right)\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le 1}(x-F_n(x))<\frac{t}{\sqrt{n}}\,\middle|\,G_2(x)\right)=1-e^{-2(t-w)^2},\quad w<t. \tag{3.49}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le 1}(x-F_n(x))<\frac{t}{\sqrt{n}}\,\middle|\,G_3(x)\right)= \tag{3.50}$$

$$=\Phi\left(\frac{t-w}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}\right)+e^{-\frac{2tw}{x_0(1-x_0)}}\left(1-\Phi\left(\frac{t+w}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}\right)\right)-$$

$$-e^{-2t^2+\frac{2wt}{x_0}}\Phi\left(\frac{t(2x_0-1)-w}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}\right)-e^{-2t^2+\frac{2wt}{1-x_0}}\Phi\left(\frac{t(1-2x_0)-w}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le 1}(x-F_n(x))<\frac{t}{\sqrt{n}}\,\middle|\,G_4(x)\right)=1-e^{-2t(t-w)},\quad w<t. \tag{3.51}$$

Bizonyítás. A 2. § módszereinek alkalmazásával kaphatjuk a fenti határeloszlásokat, a megfelelő véges eloszlásokból. A részleteket egyszerűség kedvéért elhagyjuk.

A fenti formulák megadják a másodfajú hibavalószínűségek határértékét. Ui. az elfogadási tartomány

$$\left\{\sup_{0\le x\le 1}(x-F_n(x))<\varepsilon\right\},$$

és rögzített γ elsőfajú hiba azt jelenti, hogy $\varepsilon \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\log 1/\gamma}{2}}$. (A (2.3.1) Korolláriumból ui.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le 1}(x-F_n(x)) > \frac{\sqrt{\frac{\log 1/\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = e^{-2\left(\sqrt{\frac{\log 1/\gamma}{2}}\right)^2} = \gamma .$$

A másodfajú hibavalószínűségek határértékét tehát

$$t = \sqrt{\frac{\log 1/\gamma}{2}}$$

helyettesítéssel kaphatjuk.

3.10. Tétel.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right) < \frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_5(x)\right) = \tag{3.52}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(w-t)\sqrt{\frac{1-x_0}{x_0}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1-e^{-2t\left(y\sqrt{\frac{1-x_0}{x_0}}+t\frac{1-x_0}{x_0}\right)}\right)\times$$

$$\times\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{1-a}{a-x_0}}\,(y\sqrt{x_0}+t\sqrt{1-x_0})\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{1-a}{a-x_0}}\,(y\sqrt{x_0}+t\sqrt{1-x_0})\right)\right)dy.$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right) < \frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_6(x)\right) = \tag{3.53}$$

$$= \Phi\left((t-w)\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right)-\Phi\left(-(t-w)\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right), \quad w<t.$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right) < \frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_7(x)\right) = \tag{3.54}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(w-t)\sqrt{\frac{1-x_0}{x_0}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1-e^{-2t\left(y\sqrt{\frac{1-x_0}{x_0}}+(t-w)\frac{1-x_0}{x_0}\right)}\right)\times$$

$$\times\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{1-a}{a-x_0}}\,(y\sqrt{x_0}+(t+w)\sqrt{1-x_0})\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{1-a}{a-x_0}}\,(y\sqrt{x_0}+(t-w)\sqrt{1-x_0})\right)\right)dy.$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{0\le x\le a}\left(\frac{x-F_n(x)}{1-x}\right) < \frac{t}{\sqrt{n}}\middle| G_8(x)\right) = \tag{3.55}$$

$$= \Phi\left((t-w)\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right)-e^{2w(1-a)(t-w+aw)}\,\Phi\left((w-t-2aw)\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right), \quad w(1-a)<t.$$

A bizonyítást itt is mellőzzük.

Megjegyezzük, hogy a másodfajú hibavalószínűségek határértékének meghatározásához most t értékét a

$$\Phi\left(t\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right)-\Phi\left(-t\sqrt{\frac{1-a}{a}}\right)=1-\gamma\right.$$

egyenlet gyökeként kell meghatározni.

3.11. TÉTEL.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a\leq x\leq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\,\middle|\,G_9(x)\right)= \tag{3.56}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(w-t)\sqrt{\frac{x_0}{1-x_0}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\left(1-e^{-2t\left(y\sqrt{\frac{x_0}{1-x_0}}+t\frac{x_0}{1-x_0}\right)}\right)\times$$

$$\times\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{a}{x_0-a}}\left(y\sqrt{1-x_0}+t\sqrt{x_0}\right)\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{a}{x_0-a}}\left(y\sqrt{1-x_0}+t\sqrt{x_0}\right)\right)\right)dy.$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{a\leq x\leq 1}\left(\frac{x-F_n(x)}{x}\right)<\frac{t}{\sqrt{n}}\,\middle|\,G_{10}(x)\right)= \tag{3.57}$$

$$=\Phi\left((t-w)\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)-\Phi\left(-(t-w)\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right),\quad w<t.$$

A bizonyítást mellőzzük.

A másodfajú hibavalószínűségeket a fenti formulákból kaphatjuk, ahol most t a

$$\Phi\left(t\left(\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)-\Phi\left(-t\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)=1-\gamma\right.$$

egyenlet megoldása.

A fenti határértékek lehetőséget adnak a vizsgált próbák összehasonlításához a *Pitman*-efficiencia alapján — legalábbis elvileg. Gyakorlatilag azonban a formulák nehezen kezelhetők.

Megjegyezzük még, hogy nullhipotézishez $1/\sqrt{n}$-rendben tartó alternatívák esetén erőfüggvények határértéke a *Doob*-módszerrel, *Wiener*-folyamatra vonatkozó megfelelő valószínűségek meghatározásával is kapható. Ezt az utat követte QUADE [75].

4. §. AZ ITERÁLT LOGARITMUS TÉTEL EMPIRIKUS ELOSZLÁSFÜGGVÉNYRE

4.1. Történeti áttekintés és néhány segédtétel

Az $F_n(x)$ empirikus eloszlásfüggvény binomiális eloszlású független valószínűségi változók átlaga, s mint ilyen, igaz rá a nagy számok erős törvénye, azaz

$$P(\lim_{n\to\infty} F_n(x)=x)=1. \tag{4.1}$$

A *Glivenko—Cantelli*-tétel kimondja, (lásd [54]), hogy ez a konvergencia x-ben egyenletes, azaz

$$P(\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le 1} |x-F_n(x)| = 0) = 1. \tag{4.2}$$

E tétel általánosítására és egyéb kiterjesztéseire vonatkozólag utalunk a [88], [100] dolgozatokra.

Független változók összegére azonban — a szórás létezésének feltételezése mellett — több is igaz, nevezetesen fennáll az iterált logaritmus tétel (lásd pl. HARTMAN—WINTNER [57]). Ebből következik, hogy

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\, |x-F_n(x)|\right) = \sqrt{2x(1-x)}\right) = 1. \tag{4.3}$$

SZMIRNOV [92] bizonyította, hogy az iterált logaritmus tétel fennáll az eltérés maximumára is, azaz

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sqrt{\frac{n}{\log\log n}} \sup_{0\le x\le 1} |x-F_n(x)|\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1. \tag{4.4}$$

Itt az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ konstans onnan adódik, hogy $x=\frac{1}{2}$-re $\sqrt{2x(1-x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, más x-ekre természetesen $\sqrt{2x(1-x)}<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Lásd még CHUNG [28].

CASSELS [19] bizonyította, hogy (4.3) egyenletesen áll fenn:

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{0\le x\le 1} \left(\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\, |x-F_n(x)| - \sqrt{2x(1-x)}\right) = 0\right) = 1. \tag{4.5}$$

CASSELS valamivel többet is bizonyított, nevezetesen, hogy

(4.6)

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{0\le y<x\le 1} \left(\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\, |x-y-F_n(x)+F_n(y)| - \sqrt{2(x-y)(1-x+y)}\right) = 0\right) = 1.$$

CASSELS (4.5) eredményéből következik SZMIRNOV (4.4) eredménye, de fordítva nem.

Az iterált log tétel funkcionális (*Strassen*-féle) verziójára vonatkozólag utalunk FINKELSTEIN [52] és WICHURA [109] dolgozataira.

Felmerül a kérdés, hogy igaz-e az iterált log tétel az általánosabb

$$K_n = \sup_{0\le x\le 1} \left(|x-F_n(x)|\tau(x)\right) \tag{4.7}$$

statisztikára, ahol $\tau(x)$ alkalmas súlyfüggvény. Rögzített x-re nyilván

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\,|x-F_n(x)|\tau(x)=\tau(x)\sqrt{2x(1-x)}\right)\right)=1, \tag{4.8}$$

így

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\,K_n\right)\geqq A\right)=1, \tag{4.9}$$

ahol

$$A=\sup_{0\leqq x\leqq 1}\left(\tau(x)\sqrt{2x(1-x)}\right).$$

(4.5) egyszerű következményeként belátható, hogy ez az A konstans alkalmas súlyfüggvényre el is érhető. Ez nem lesz igaz azonban minden $\tau(x)$-re, nevezetesen $\tau(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$-re

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\sup_{0<x<1}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\right)=\infty\right)=1. \tag{4.10}$$

Először egy új bizonyítást adunk CASSELS (4.5) tételére a [31] dolgozat módszerével. Úgy gondoljuk, hogy ez a bizonyítás több szempontból sem érdektelen. Először is, kimondunk egy iterált log tételt szemi-martingálokra, ami önmagában is érdekes lehet és más esetre is alkalmazható. Másrészt belátjuk, hogy az $nK_n^+=$ $=n\sup\limits_{0<x<1}\left(x-F_n(x)\right)\tau(x)$ sorozat szemi-martingál. Továbbá explicit becslést adunk K_n^+ eloszlására, ill. momentum generáló függvényére. Ezek a tulajdonságok alkalmazhatók pl. a *Darling—Robbins*-féle [39] szekvenciális próbák konstruálására (lásd STANLEY [86]).

4.1. LEMMA. *Legyen* $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\ldots\subset\mathcal{F}_n\subset\ldots$ *egy növekvő σ-algebra sorozat,* $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\ldots$ *valószínűségi változók sorozata,* ζ_i *legyen mérhető* $\mathcal{F}_i$*-re vonatkozólag* $(i=1,2,\ldots)$, *és*

$$E(\zeta_n|\mathcal{F}_{n-1})\geqq\zeta_{n-1},\quad n=2,3,\ldots \tag{4.11}$$

azaz a fenti sorozat alkosson szemi-martingált a σ-algebra sorozatra vonatkozólag. Létezzék a változók $E(e^{t\zeta_n})$ *momentum generáló függvénye elég nagy n-re és* $0\leqq t<t_0$*-ra, továbbá*

$$E(e^{t\zeta_n})\leqq\left(\psi(t)\right)^n,\quad 0\leqq t<t_0, \tag{4.12}$$

ahol

$$\psi(t)=1+\frac{B^2}{2}t^2+O(t^3)\quad t\to 0.$$

Ekkor

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\zeta_n}{\sqrt{n\log\log n}}\leqq B\sqrt{2}\right)=1. \tag{4.13}$$

Bizonyítás. Legyen $P_k = P(\max\limits_{n_k < i \leq n_{k+1}} \zeta_i \geqq (B\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{n_k \log\log n_k})$. Ekkor a *Borel—Cantelli*-lemma értelmében elég bizonyítani, hogy $\sum\limits_{(k)} P_k$ konvergens egy alkalmas n_k sorozatra és minden $\varepsilon > 0$-ra.

Az $e^{t\zeta_1}, \dots, e^{t\zeta_n}, \dots$ sorozat ugyancsak szemi-martingál (DOOB [42], 295. o. 1.1. Tétel) és a *Kolmogorov*-egyenlőtlenséget (DOOB [42] 314. o. 3.2. Tétel) és a (4.12) feltételt alkalmazva, kapjuk

$$P_k = P(\max_{n_k < i \leq n_{k+1}} \zeta_i \geqq (B\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{n_k \log\log n_k}) =$$

$$= P(\max_{n_k < i \leq n_{k+1}} e^{t\zeta_i} \geqq e^{t(B\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{n_k \log\log n_k}}) \leqq$$

$$\leqq \frac{E(e^{t\zeta_{n_{k+1}}})}{e^{t(B\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{n_k \log\log n_k}}} \leqq \frac{(\psi(t))^{n_{k+1}}}{e^{t(B\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{n_k \log\log n_k}}}.$$

Legyen $n_k = \left[\left(1+\frac{\varepsilon}{B\sqrt{2}}\right)^k\right]$ ([ ]: egész rész) és $t = \frac{\sqrt{2}}{B}\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{B\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{\log\log n_{k+1}}{n_{k+1}}}$, ekkor

$$n_{k+1}\log\psi(t) = n_{k+1}\log\left(1+\frac{B^2}{2}t^2+O(t^3)\right) =$$

$$= n_{k+1}\frac{B^2t^2}{2}+o(1) = \left(1+\frac{\varepsilon}{B\sqrt{2}}\right)\log\log n_{k+1}+o(1) \quad (k\to\infty),$$

és

$$t(B\sqrt{2}+\varepsilon)\sqrt{n_k \log\log n_k} =$$

$$= (B\sqrt{2}+\varepsilon)\frac{\sqrt{2}}{B}\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{B\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{n_k}{n_{k+1}}}\sqrt{\log\log n_k \log\log n_{k+1}} =$$

$$= 2\left(1+\frac{\varepsilon}{B\sqrt{2}}\right)\log\log n_{k+1}+o(1).$$

Innen

$$P_k \leqq \frac{c}{(\log n_{k+1})^{1+\frac{\varepsilon}{B\sqrt{2}}}} \leqq \frac{c}{(k+1)^{1+\frac{\varepsilon}{B\sqrt{2}}}}.$$

Ezzel a 3.1. Lemmát bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy a (4.12) feltétel gyengíthető, elegendő ui. egy

$$E(e^{t\zeta_n}) \leqq c_n(t)(\psi(t))^n \tag{4.14}$$

egyenlőtlenség teljesülésének megkövetelése, ahol a $c_n(t)$ tényező a $\sum\limits_{(k)} P_k$ konvergenciáját nem befolyásolja. Ilyen tényező pl. $c_n(t) = (t\sqrt{n})^\varkappa$, ahol $\varkappa$ egy pozitív konstans.

4.2. LEMMA. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független, (0,1)-ben egyenletes valószínűségi változók sorozata, $F_n(x)$ az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ változók empirikus eloszlásfüggvénye, és legyen $\mathcal{F}_n$ az a σ-algebra, melyet az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ változók generálnak. Legyen továbbá $\tau(x)$ szakaszonként folytonos és korlátos függvény. Ekkor a*

$$\zeta_n = n \sup_{0 \leqq x \leqq 1} \big((x - F_n(x))\tau(x)\big), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.15}$$

sorozat szemi-martingál az $\mathcal{F}_n$, $n=1, 2, \ldots$ σ-algebra sorozatra vonatkozóan, azaz

$$E(\zeta_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geqq \zeta_n. \tag{4.16}$$

Bizonyítás. Legyen ϱ_n a maximum hely, amely a tett feltevések mellett létezik és $\mathcal{F}_n$-re mérhető, azaz

$$\zeta_n = n\big(\varrho_n - F_n(\varrho_n)\big)\tau(\varrho_n).$$

Nyilván

$$\zeta_{n+1} \geqq (n+1)\big(\varrho_n - F_{n+1}(\varrho_n)\big)\tau(\varrho_n) = \zeta_n + \varrho_n \tau(\varrho_n) + \big(nF_n(\varrho_n) - (n+1)F_{n+1}(\varrho_n)\big)\tau(\varrho_n).$$

Ha most $X_{n+1} < \varrho_n$, amelynek $\mathcal{F}_n$ feltétel mellett ϱ_n a valószínűsége, akkor $(n+1)F_{n+1}(\varrho_n) = nF_n(\varrho_n) + 1$, és így $\zeta_{n+1} \geqq \zeta_n - (1-\varrho_n)\tau(\varrho_n)$.

Ha pedig $X_{n+1} > \varrho_n$, amelynek $\mathcal{F}_n$ feltétel mellett $1-\varrho_n$ a valószínűsége, akkor $(n+1)F_{n+1}(\varrho_n) = nF_n(\varrho_n)$ és így $\zeta_{n+1} \geqq \zeta_n + \varrho_n \tau(\varrho_n)$. Tehát

$$P\big(\zeta_{n+1} - \zeta_n \geqq -(1-\varrho_n)\tau(\varrho_n) | \mathcal{F}_n\big) = \varrho_n,$$

$$P\big(\zeta_{n+1} - \zeta_n \geqq \varrho_n \tau(\varrho_n) | \mathcal{F}_n\big) = 1 - \varrho_n,$$

így

$$E(\zeta_{n+1} - \zeta_n | \mathcal{F}_n) \geqq -\varrho_n(1-\varrho_n)\tau(\varrho_n) + (1-\varrho_n)\varrho_n \tau(\varrho_n) = 0.$$

4.2. Az iterált log tétel

4.1. TÉTEL. *Legyen $\tau(x) \geqq 0$, $0 \leqq x \leqq 1$ korlátos függvény. Legyen továbbá $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független, (0, 1)-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, és jelölje $F_n(x)$ az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ változók empirikus eloszlásfüggvényét. Ekkor*

$$P\left(\varlimsup_{n \to \infty} \left(\sqrt{\frac{n}{\log \log n}} \sup_{0 \leqq x \leqq 1} \big(|x - F_n(x)| \tau(x)\big)\right) = A\right) = 1, \tag{4.17}$$

ahol

$$A = \sup_{0 \leqq x \leqq 1} \big(\tau(x)\sqrt{2x(1-x)}\big). \tag{4.18}$$

Bizonyítás. Tekintsük először a

$$\tau_1(x) = \frac{1}{c\sqrt{x(1-x)} + b}, \quad 0 \leqq x \leqq 1 \tag{4.19}$$

súlyfüggvényt, ahol $c \geqq 0$, $b > 0$. Legyen

$$\zeta_n = n \sup_{0 \leqq x \leqq 1} \big((x - F_n(x))\tau_1(x)\big). \tag{4.20}$$

A 4.2. Lemma értelmében $\{\zeta_n\}$ szemi-martingál, így a 4.1. Lemma alkalmazásához elegendő egy (4.14) egyenlőtlenséget bizonyítani.

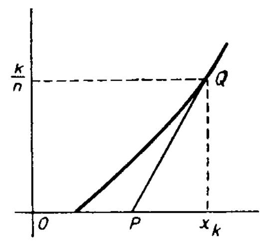
Könnyű látni, hogy

$$E(e^{t\zeta_n}) = 1+tE(\zeta_n)+t\int(e^{tz}-1)(1-H(z))dz, \tag{4.21}$$

ahol

$$H(z) = P(\zeta_n < z) = P\left(F_n(x) > x-\frac{z}{n\tau_1(x)},\quad 0 \leqq x \leqq 1\right),$$

tehát $1-H(z)$ annak valószínűsége, hogy $F_n(x)$ átmetszi az $y=x-\frac{z}{n\tau_1(x)}=$ $=x-\frac{z}{n}\left(c\sqrt{x(1-x)}+b\right)$ görbét. Erre a valószínűségre egy egyszerű becslést nyerhetünk a következőképpen:



2. ábra

Átmetszés csak $\frac{k}{n}$ magasságon történhet, aminek valószínűsége

$$\binom{n}{k}x_k^k(1-x_k)^{n-k},$$

ahol

$$x_k-\frac{z}{n\tau_1(x_k)} = \frac{k}{n}.$$

Ezen feltétel mellett annak valószínűsége, hogy $\frac{k}{n}$ előtt ne legyen átmetszés, felülről becsülhető annak valószínűségével, hogy $F_n(x)$ a $\overline{PQ}$ szakaszt ne messe, ahol $\overline{PQ}$ az $y=x-\frac{z}{n\tau_1(x)}$ görbe $Q\!:\left(x_k,\ \frac{k}{n}\right)$ pontbeli érintőjének a Q pont és az x-tengely közé eső szakasza. Ez a valószínűség az 1.1. Tétel szerint

$$\frac{\overline{OP}}{x_k} = \frac{x_k-\dfrac{k}{n\left(1+\dfrac{z}{n}\dfrac{\tau_1'(x_k)}{\tau_1^2(x_k)}\right)}}{x_k} = \frac{(nx_k-k)\left(\tau_1(x_k)+x_k\tau_1'(x_k)\right)}{x_k\left(n\tau_1(x_k)+(nx_k-k)\tau_1'(x_k)\right)}. \tag{4.22}$$

Tehát

$$1-H(z) \leqq \sum_{k=0}^{[n-zb]} \binom{n}{k} \frac{(nx_k-k)(\tau_1(x_k)+x_k\tau_1'(x_k))}{n\tau_1(x_k)+(nx_k-k)\tau_1'(x_k)} x_k^{k-1}(1-x_k)^{n-k}, \tag{4.23}$$

így

$$\int_0^{n/b} (e^{tz}-1)(1-H(z))\,dz \leqq$$

$$\leqq \int_0^{n/b} (e^{tz}-1) \sum_{k=0}^{[n-zb]} \binom{n}{k} \frac{(nx_k-k)(\tau_1(x_k)+x_k\tau_1'(x_k))}{n\tau_1(x_k)+(nx_k-k)\tau_1'(x_k)} x_k^{k-1}(1-x_k)^{n-k}\,dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^{(n-k)/b} (e^{tz}-1) \frac{(nx_k-k)(\tau_1(x_k)+x_k\tau_1'(x_k))}{n\tau_1(x_k)+(nx_k-k)\tau_1'(x_k)} x_k^{k-1}(1-x_k)^{n-k}\,dz.$$

Helyettesítsünk az integrálba $x_k=y$-t, azaz $z=ny\tau_1(y)-k\tau_1(y)$-t, ekkor $\frac{dz}{dy}=$ $=n\tau_1(y)+(ny-k)\tau_1'(y)$ és

$$\int_0^{n/b} (e^{tz}-1)(1-H(z))\,dz \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_{k/n}^{1} (e^{t(ny-k)\tau_1(y)-1}-1)(ny-k)(\tau_1(y)+y\tau_1'(y))y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,dy.$$

Tekintve, hogy az integrandus minden $0<y<1$-re nem-negatív, az összeget növeljük, ha az integrált 0-tól 1-ig vesszük, majd k szerint összegezve a következőt kapjuk:

$$\int_0^{n/b} (e^{tz}-1)(1-H(z))\,dz \leqq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 (\ldots)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\tau_1(y)+y\tau_1'(y)) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{t(ny-k)}-1)(ny-k)y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\tau_1(y)+y\tau_1'(y))ne^{tny\tau_1(y)}(1-y)(1-e^{-t\tau_1(y)})(ye^{-t\tau_1(y)}+(1-y))^{n-1}dy \leqq$$

$$\leqq n(1-e^{-t/b}) \int_0^1 (\tau_1(y)+y\tau_1'(y))(ye^{t(y-1)\tau_1(y)}+(1-y)e^{ty\tau_1(y)})^n\,dy.$$

Taylor-sorfejtéssel kapjuk:

$$ye^{t(y-1)\tau_1(y)}+(1-y)e^{ty\tau_1(y)} =$$

$$= 1+\frac{t^2}{2}\tau_1^2(y)y(1-y)+\frac{t^3}{6}(y-1)^3y\tau_1^3(y)e^{\theta(y-1)\tau_1(y)}+y^3(1-y)\tau_1^3(y)e^{\theta y\tau_1(y)}) \leqq$$

$$\leqq 1+\frac{B^2t^2}{2}+\frac{t^3}{6b^3}e^{t/b}, \quad \text{ahol} \quad B=\frac{1}{c+2b}.$$

Innen

$$\int_0^{n/b} (e^{tz}-1)(1-H(z))\,dz \leqq$$

$$\leqq n(1-e^{-t/b})\left(1+\frac{B^2t^2}{2}+\frac{t^3}{6b^3}e^{t/b}\right)^n \int_0^1 (\tau_1(y)+y\tau_1'(y))\,dy =$$

$$= n(1-e^{-t/b})\left(1+\frac{B^2t^2}{2}+\frac{t^3}{6b^3}e^{t/b}\right)^n \frac{1}{b}.$$

Végül felhasználva az $1-e^{-t/b} \leqq \frac{t}{b}$ egyenlőtlenséget, (4.21)-ből kapjuk

$$E(e^{t\zeta_n}) \leqq 1+tE(\zeta_n)+\frac{nt^2}{b^2}\left(1+\frac{B^2t^2}{2}+\frac{t^3}{6b^3}e^{t/b}\right)^n, \tag{4.24}$$

ami a 4.1. Lemmánál kívánt becslés, tekintve, hogy $E(\zeta_n)=O(\sqrt{n})$, így az első két tag a harmadikhoz képest elhanyagolható.

Hasonlóképpen vizsgálható $n \sup\limits_{0\leqq x\leqq 1} \left((F_n(x)-x)\tau_1(x)\right)$ (vagy azt is mondhatnánk, hogy az $x_i'=1-x_i$ transzformációval az előző esetre visszavezethető), így kapjuk a tétel állítását a $\tau_1(x)$ súlyfüggvényre.

Általános esetben legyen $0\leqq\tau(x)\leqq K, 0\leqq x\leqq 1$; igaz a következő becslés:

$$\tau(x)|x-F_n(x)| \leqq \frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{2x(1-x)}+\frac{\varepsilon}{K}}(A+\varepsilon), \quad 0\leqq x\leqq 1, \tag{4.25}$$

így a már bizonyítottak szerint

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt{\frac{n}{\log\log n}} \sup_{0\leqq x\leqq 1}\left(|x-F_n(x)|\tau(x)\right)\right) \leqq$$

$$\leqq (A+\varepsilon)\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt{\frac{n}{\log\log n}} \sup_{0\leqq x\leqq 1}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{2x(1-x)}+\frac{\varepsilon}{K}}\right) = (A+\varepsilon)\left(1+\frac{\varepsilon}{K\sqrt{2}}\right)$$

és tekintve, hogy ε tetszőleges, igaz a Tétel állítása.

A 4.1. Tétel $\tau_1(x)$-re ekvivalens (4.5)-tel, azaz CASSELS tételét adja.

A 4.1. Tétel bizonyításában fontos szerepet játszott a $K_n^+=n\sup\left(x-F_n(x)\right)\tau_1(x)$ momentumgeneráló függvényének becslése. Ez a $P(K_n^+>z)$ valószínűségre adott becslés segítségével történt. A momentumgeneráló függvényre adott becslés és a *Markov*-egyenlőtlenség segítségével viszont megbec ülhető a $P(K_n^+>z)$ valószínűség. $\tau_1(x)=1$-re DVORETZKY—KIEFER—WOLFOWITZ [47] bizonyította, hogy létezik $c>0$, hogy

$$P\left(\sup_{0\leqq x\leqq 1}(x-F_n(x))>\varepsilon\right)<ce^{-2n\varepsilon^2}, \quad 0<\varepsilon<1,$$

de c numerikus értékét nem adták meg. Becsléseikből az világos, hogy az ő c értékük igen messze van a BIRNBAUM—McCARTY [13] által sejtett $c=1$ értéktől. Valamit javított a becslésen BUTLER—McCARTY [17], de tudomásunk szerint a $c=1$ sejtést sem igazolni, sem megcáfolni eddig még nem sikerült. További becsléseket DARLING—ROBBINS [39], STANLEY [86], WHITTLE [108] adtak meg.

4.3. A $\tau(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ súlyfüggvény

Könnyen látható, hogy a 4.2. pont módszere nem alkalmazható a $\tau(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ $(0<x<1)$ súlyfüggvényre, hacsak nem zárunk ki az $x=0$ és $x=1$ pont körül egy kis intervallumot, azaz tekintjük a

$$\tau(x)=\begin{cases}0 & 0\leqq x<a_1\\ \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} & a_1\leqq x\leqq a_2\\ 0 & a_2<x\leqq 1\end{cases}\tag{4.26}$$

súlyfüggvényt. A módszerből látható, hogy a_1 és $1-a_2$ még — nem túl gyorsan — 0-hoz is tarthat. EICKER [49] és KIEFER [62] bizonyította, hogy ha $x_n\to 0$, de $\frac{nx_n}{\log\log n}\to\infty$, $n\to\infty$, akkor

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|nF_n(x_n)-nx_n|}{\sqrt{x_n(1-x_n)n\log\log n}}\leqq\sqrt{2}\right)=1.\tag{4.27}$$

Felmerül a kérdés, hogy a_n milyen választása mellett igaz még a

$$\sup_{a_n\leqq x\leqq 1-a_n}\left(\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\right)$$

statisztikára az iterált log tétel. KIEFER [62] cikke nagyon valószínűsíti azt a sejtést (bár eredményeiből nem következik), hogy $a_n=\frac{\log\log n}{n}$ még választható, de $a_n=\frac{c\log\log n}{n}$ tetszőleges c-vel már nem. Pontosabban szólva, az iterált log tételben előforduló nagyságrend még jó lesz, csak a konstans függni fog c-től, és elég kis c-re a szokásos $\sqrt{2}$-nél nagyobb lesz, sőt $c\to 0$ esetén ∞-hez tart.

Ezt a sejtést azonban a 4.2. pont módszerével jelenleg nem tudjuk bizonyítani, de remélhetőleg az ott alkalmazott becslések finomításával már belátható.

$x_n=\frac{1}{n}$-re még BAXTER [9] bizonyította, hogy

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{n\log\log\log n}{\log\log n}F_n\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1\right)=1,\tag{4.28}$$

amiből már következik, hogy

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{\frac{n}{\log\log n}}\sup_{(1/n)\le x\le 1-(1/n)}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}=\infty\right)=1. \tag{4.29}$$

KIEFER [62] szerint, ha $\sum a_n=\infty$, akkor min $(X_1, \ldots, X_n)<a_n$ végtelen sokszor következik be 1 valószínűséggel, így tehát $F_n(a_n)\ge\frac{1}{n}$ végtelen sok n-re. Ha tehát $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, de $\sum a_n=\infty$, akkor

$$\frac{|a_n-F_n(a_n)|}{\sqrt{a_n(1-a_n)}}\ge\frac{c}{n\sqrt{a_n}}$$

1 valószínűséggel végtelen sok n-re, azaz

$$\sup_{0<x<1}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\ge\frac{c}{n\sqrt{a_n}}.$$

Tekintve, hogy minden a_n sorozathoz, melyre $\sum a_n=\infty$, található olyan a_n', hogy $\sum a_n'=\infty$, de $\frac{a_n'}{a_n}\to 0$, $n\to\infty$, azért

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(n\sqrt{a_n}\sup_{0<x<1}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\right)=\infty\right)=1.$$

Ha viszont már $\sum b_n<\infty$, be fogjuk bizonyítani, hogy

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{b_n}\sup_{0<x<1}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\right)=0\right)=1.$$

Igaz lesz tehát a következő tétel:

4.2. TÉTEL.

(4.30) *Ha* $\sum a_n=\infty$, *akkor* $P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(n\sqrt{a_n}\sup_{0<x<1}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\right)=\infty\right)=1.$

(4.31) *Ha* $\sum b_n<\infty$, *akkor* $P\left(\lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{b_n}\sup_{0<x<1}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\right)=0\right)=1.$

Bizonyítás. A tétel első része, mint fentebb láttuk, következik KIEFER [62] eredményéből. Itt csupán a második részt bizonyítjuk.

Legyen tehát $\sum b_n<\infty$. Elegendő a $\sup\limits_{0<x<1/2}$ -al foglalkozni, a $\sup\limits_{1/2<x<1}$ hasonlóképpen megy. Továbbá

$$\sup_{0<x<1/2}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\le\sqrt{2}\sup_{0<x<1/2}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x}} \tag{4.32}$$

ezért elegendő ez utóbbi supremummal foglalkozni.

Legyen $U_n = \sup\limits_{0<x<1/2} \left(\frac{F_n(x)-x}{\sqrt{x}} \right)$, és tekintsük az $\left\{ U_n > \frac{\varepsilon}{n\sqrt{b_n}} \right\}$ eseményt. Legyen $C_n = \left\{ n \text{ az első olyan index, hogy } U_n > \frac{\varepsilon}{n\sqrt{b_n}} \right\}$. Ekkor a *Borel—Cantelli*-lemma értelmében $P(\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{b_n}\, U_n = 0) = 1$-hez elegendő bizonyítani, hogy $\sum P(C_n) < \infty$, minden $\varepsilon > 0$-ra. Tekintve, hogy $C_n \subset$ {van olyan $0 < x < 1/2$, hogy

$$F_n(x) > x + \frac{\varepsilon}{n\sqrt{b_n}} \sqrt{x}, \quad F_{n-1}(x) < x + \frac{\varepsilon}{(n-1)\sqrt{b_{n-1}}} \sqrt{x} \Big\}$$

$\subset$ {van olyan $0 < x < \frac{1}{2}$, hogy

$$nF_n(x) > nx + \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_n}} \sqrt{x}, \quad (n-1)F_{n-1}(x) < nx + \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_n}} \sqrt{x} \Big\} = \sum_{k=1}^{[n/2]} B_{nk},$$

ahol

$B_{nk} =$ {van olyan $x_{k-1} \leqq x < x_k$, hogy

$$nF_n(x) > nx + \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_n}} \sqrt{x}, \quad (n-1)F_{n-1}(x) < nx + \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_n}} \sqrt{x} \Big\},$$

és x_k az $nx + \frac{\varepsilon}{\sqrt{b_n}} \sqrt{x} = k$ egyenlet megoldása, azaz

$$x_k = \frac{4k^2}{4nk + \frac{\varepsilon^2}{b_n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4nkb_n}{\varepsilon^2}} \right)}.$$

(4.33)
$$P(C_n) \leqq \sum_{k=1}^{[n/2]} P(B_{nk}) = \sum_{k=1}^{L_n} P(B_{nk}) + \sum_{k=L_n+1}^{[n/2]} P(B_{nk}),$$

ahol

$$L_n = \frac{\varepsilon^2}{64nb_n}.$$

A $\sum\limits_{k=1}^{L_n} P(B_{nk})$ összeget a következőképpen becsülhetjük:

$B_{nk} =$ {van olyan $x_{k-1} \leqq x < x_k$, hogy

$$(n-1)F_{n-1}(x) = k-1, \quad X_n \leqq x\},$$

így

$$P(B_{nk}) \leqq x_k \binom{n-1}{k-1} x_k^{k-1} = \frac{k}{n} \binom{n}{k} x_k^k \leqq \frac{k}{n} \frac{(nx_k)^k}{k!}.$$

Könnyen látható, hogy $x_k < \frac{2k^2 b_n}{\varepsilon^2}$, így

$$P(B_{nk}) \leqq \frac{k}{n}\left(\frac{2nk^2 b_n}{\varepsilon^2}\right)^k \frac{1}{k!} = \frac{2b_n}{\varepsilon^2}\left(\frac{2nb_n}{\varepsilon^2}\right)^{k-1} \frac{k^{2k}}{(k-1)!}. \tag{4.34}$$

Legyen

$$\alpha_k = \left(\frac{2nb_n}{\varepsilon^2}\right)^{k-1} \frac{k^{2k}}{(k-1)!},$$

ekkor

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{2nb_n}{\varepsilon^2} \frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{2k+2}} k \leqq \frac{2nb_n}{\varepsilon^2} 16 L_n = \frac{1}{2},$$

és így

$$\alpha_{k+1} \leqq \frac{1}{2}\alpha_k \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha_{k-1} \leqq \ldots \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

tehát

$$\sum_{k=1}^{L_n} P(B_{nk}) \leqq \frac{2b_n}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{L_n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < \frac{4b_n}{\varepsilon^2}. \tag{4.35}$$

Az összeg másik részére pedig a következő becslést nyerhetjük:

$$B_{nk} \subset \{\text{van olyan } x_{k-1} \leqq x < x_k, \text{ hogy } nF_n(x) = k\},$$

és tekintve, hogy $x_k < \frac{k}{n}$, ezért belátható, hogy

$$P(B_{nk}) \leqq \binom{n}{k} x_k^k (1-x_k)^{n-k}. \tag{4.36}$$

A *Stirling*-formula alkalmazásával kapjuk

$$\binom{n}{k} x_k^k (1-x_k)^{n-k} < \text{const}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(k-nx_k)^2}{k}}. \tag{4.37}$$

De ha $k > L_n$, akkor

$$k - nx_k = \frac{\frac{\varepsilon^2}{b_n}\left(1+\sqrt{1+\frac{4nkb_n}{\varepsilon^2}}\right)}{4n + \frac{\varepsilon^2}{kb_n}\left(1+\sqrt{1+\frac{4nkb_n}{\varepsilon^2}}\right)} >$$

$$> \frac{\frac{\varepsilon^2}{b_n}\sqrt{\frac{4nkb_n}{\varepsilon^2}}}{4n + \frac{\varepsilon^2}{L_n b_n}\left(1+\sqrt{1+\frac{4nL_nb_n}{\varepsilon^2}}\right)} = \frac{\varepsilon}{34+8\sqrt{17}}\sqrt{\frac{k}{nb_n}},$$

így

$$\frac{1}{2}\frac{(k-nx_k)^2}{k} > \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{(34+8\sqrt{17})^2}\frac{1}{nb_n} > 3\log n,$$

ha n elég nagy. $\left(\text{Ui. } \sum b_n < \infty \text{ lévén, } b_n < \frac{c}{n\log n}\right)$.

Tehát

$$P(B_{nk}) < c'e^{-3\log n} < \frac{c'}{n^3}, \quad L_n < k \leqq \frac{n}{2}, \tag{4.38}$$

és így

$$\sum_{k=L_n+1}^{[n/2]} P(B_{nk}) < n\frac{c'}{n^3} = \frac{c'}{n^2},$$

ha n elég nagy. Összevetve (4.35)-tel,

$$P(C_n) < \frac{4}{\varepsilon^2}b_n + \frac{c'}{n^2}, \tag{4.39}$$

azaz $\sum P(C_n) < \infty$ minden $\varepsilon > 0$-ra.

Hasonlóképpen bizonyítható, hogy

$$P\left(\lim_{n\to\infty}(n\sqrt{b_n}V_n) = 0\right) = 1, \tag{4.40}$$

$V_n = \sup\limits_{0<x<1/2}\left(\frac{x-F_n(x)}{\sqrt{x}}\right)$-re. Valójában ez az eset még egyszerűbb, mert belátható, hogy

$$P\left(V_n > \frac{\varepsilon}{n\sqrt{b_n}}\right) \leqq \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{k}x_k^k(1-x_k)^{n-k}, \tag{4.41}$$

ahol most

$$x_k = \frac{k}{n} + \frac{\varepsilon^2}{2n^2b_n} + \frac{\varepsilon}{2n\sqrt{b_n}}\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n^2b_n}+\frac{4k}{n}},$$

és itt az egész összegre alkalmazható a fenti, normális sűrűségfüggvénnyel történő becslés:

$$\binom{n}{k}x_k^k(1-x_k)^{n-k} \leqq \text{const}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(nx_k-k)^2}{nx_k}}. \tag{4.42}$$

De

$$\frac{(nx_k-k)^2}{nx_k} = \frac{\left(\frac{\varepsilon^2}{2nb_n}+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{b_n}}\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n^2b_n}+\frac{4k}{n}}\right)^2}{k+\frac{\varepsilon^2}{2nb_n}+\frac{\varepsilon}{2\sqrt{b_n}}\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n^2b_n}+\frac{4k}{n}}} = \frac{\varepsilon^2}{nb_n} > 6\log n,$$

így

$$P\left(V_n > \frac{\varepsilon}{n\sqrt{b_n}}\right) \leqq \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{c''}{n^3} < \frac{c''}{n^2}. \tag{4.43}$$

Véleményünk szerint V_n-re még sokkal több is igaz, valószínűleg fennáll az iterált log tétel, de ezt nem tudjuk bizonyítani.

A 4.2. Tételt ezzel bizonyítottuk.

A 4.2. Tételt $a_n = \frac{1}{n \log n}$, ill. $b_n = \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}$-ra alkalmazva, kapjuk a következő korolláriumot:

4.2.1. KOROLLÁRIUM.

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sqrt{n}\sup_{0<x<1}\frac{|x-F_n(x)|}{\sqrt{x(1-x)}}\right)^{\frac{1}{\log\log n}} = \sqrt{e}\right) = 1. \tag{4.44}$$

4.4. További megjegyzések és problémák

a) A 4.1. és 4.2. pontban ismertetett módszer segítségével aránylag pontos felső becslés adható átmetszések valószínűségére (lásd STANLEY [86]). Ez viszont alkalmazható a *Darling—Robbins*-féle szekvenciális próbák (lásd [38], [39]) konstruálására.

Legyen H_0: $F(x)=x$, $0 \leqq x \leqq 1$
H_1: $F(x)=G(x)$,

ahol $G(x) \geqq x$ és $\sup\limits_{0<x<1}(G(x)-x) = \Delta > 0$.

Definiáljuk N-et úgy, hogy az első olyan $n \geqq m$ index, melyre

$$\sqrt{n}\sup_{0<x<1}(F_n(x)-x) > \psi_n, \tag{4.45}$$

ahol m adott egész szám és ψ_n alkalmas sorozat. A [86] cikk alapján (amely lényegében a [31] cikk módszerét követi) megadható m és $\psi_n = O(\sqrt{\log\log n})$ úgy, hogy

$$P(N < \infty | H_0) \leqq \gamma \tag{4.46}$$

előre adott γ-ra.

A *Darling—Robbins*-féle (D—R) próba a következő: elfogadjuk H_0-t, ha $N = \infty$, elfogadjuk H_1-t, ha $N < \infty$. Könnyen látható, hogy e próba ereje 1.

DARLING—ROBBINS [39] módszerét követve továbbá belátható, hogy H_1 esetén

$$E(N) = O\left(\frac{1}{\Delta^2}\log\log\frac{1}{\Delta}\right), \tag{4.47}$$

ami nagyságrendben a lehető legjobb és megegyezik egy paraméteres próbára vonatkozó nagyságrenddel. Itt nem volna érdektelen nem csak a nagyságrendet, hanem a pontos konstanst meghatározni, és ennek alapján összehasonlítani a D—R próbákat efficiencia szempontjából. Ez azonban nem látszik könnyen keresztülvihetőnek.

Megjegyezzük még, hogy DARLING és ROBBINS [39] csak $\psi_n = O(\sqrt{\log n})$-et tudtak választani, és ennek megfelelően $E(N) = O\left(\frac{1}{\Delta^2}\log \Delta\right)$, ami valamivel rosszabb nagyságrend, mint (4.47).

b) Bár az irodalomban többnyire lim sup-ot szoktak vizsgálni, érdekes volna bizonyos lim inf-re is valamit mondani.

CHUNG [27] vizsgálta $S_n^* = \max_{1 \leq i \leq n} |S_i|$-t, ahol S_i független (azonos eloszlású) standard valószínűségi változók részletösszegei, és bizonyította, hogy

$$P\left(\varliminf_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\,S_n^*\right) = \frac{\pi}{\sqrt{8}}\right) = 1. \tag{4.48}$$

Ennek analógiájára — tekintve, hogy $\sqrt{n}\sup\limits_{0<x<1}|x-F_n(x)|$ nagyságrendben $S_n^*/\sqrt{n}$-el azonos határeloszlással rendelkezik — azt sejtjük, hogy

$$P\left(\varliminf_{n\to\infty}\left(\sqrt{n\log\log n}\sup_{0<x<1}|x-F_n(x)|\right) = \frac{\pi}{\sqrt{8}}\right) = 1. \tag{4.49}$$

c) FINKELSTEIN [52] bizonyította a következő tételt: Legyen

$$G_n(x) = \frac{\sqrt{n}(F_n(x)-x)}{\sqrt{2\log\log n}} \tag{4.50}$$

és K a $[0, 1]$-ben értelmezett $f(x)$ függvények halmaza, melyre

(i) $f(0)=f(1)=0$,

(ii) $f(x)$ a *Lebesgue*-mértékre nézve abszolút folytonos,

(iii) $\int\limits_0^1 (f'(x))^2\,dx \leq 1$.

Ekkor 1 valószínűséggel fennáll, hogy $G_n(x)$ torlódás-függvényeinek a halmaza K.

Ezt alkalmazva a $G_n(x)\tau(x)$ súlyozott eltérésre, ha $\tau(x)$ mind alulról, mind felülről korlátos, $0<c_1\leq\tau(x)\leq c_2$, kapjuk, hogy $G_n(x)\tau(x)$ torlódásfüggvényei $f(x)\tau(x)$, ahol $f(x)\in K$.

5. §. NÉHÁNY EGYÉB PROBLÉMA AZ EMPIRIKUS ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEKKEL KAPCSOLATBAN

5.1. Az empirikus eloszlásfüggvénnyel kapcsolatos egyéb statisztikák

Az egyoldali eltérésekkel kapcsolatban még számos egyéb statisztikát vizsgálhatunk. Teljességre nem törekedve, felsorolunk néhányat, melynek eloszlása a disszertációnkban ismertetett eljáráshoz hasonlóan, egyszerű kombinatorikus módszerrel meghatározható.

a) Ismeretes, hogy $(x-F_n(x))$ a maximumát egy rendezett mintaelemnél, azaz valamely $x=X_k^*$ pontban veszi fel. BIRNBAUM—PYKE [14], ill. TAKÁCS [96] foglalkozott a maximum hely és a k index eloszlásával és együttes eloszlásával. Lásd még DEMPSTER [40]. (Ők tulajdonképpen $(F_n(x)-x)$-el foglalkoztak, de ez a fentivel ekvivalens.)

Legyen $0<X_1^*<X_2^*<\ldots<X_n^*<1$ a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlásból vett rendezett minta, $F_n(x)$ az empirikus eloszlásfüggvény és $y=cx-b$ egy tetszőleges egyenes, melyre $b>0$, $c-b\leqq 1$. Tekintsük a következő eseményt:

$$A_k(u)=\{X_k^*=u,\ F_n(u)=cu-b;\ F_n(x)>cx-b,\ \text{ha}\ 0\leqq x<u,\ \text{ill.}\ u<x\leqq 1\}.$$

Kapjuk a következő tételt:

5.1. TÉTEL. *Legyen* $1\leqq k\leqq[n(c-b)]$, $0<u<1$. *Ekkor*

$$\frac{P(A_k(u))}{du}=\binom{n-1}{k-1}u^{k-2}\left[\frac{nb}{c}(1-u)^{n-k}-\frac{b}{c^2}\sum_{i=0}^{[n(c-b)]-k}\binom{n-k}{i}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{i+1}{nc}\right)^{i-1}\left(1-\frac{k+i}{nc}-\frac{b}{c}\right)^{n-k-i}\right]. \tag{5.1}$$

Bizonyítás. Az $\{X_k^*=u\}$ esemény valószínűsége, mint ismeretes, $n\binom{n-1}{k-1}u^{k-1}(1-u)^{n-k}\,du$. Ezen feltétel mellett az $\{F_n(x)>cx-b,\,0\leqq x<u\}$ és az $\{F_n(x)>cx-b,\,u<x\leqq 1\}$ események függetlenek. Az 1.1. Tételből közvetlenül adódik, hogy

$$P\left(F_n(x)>cx-b,\ 0\leqq x<u|F_n(u)=\frac{k-1}{n}=cu-b\right)=\frac{b}{cu},$$

míg az 1.2. Tétel alapján

$$P\left(F_n(x)>cx-b,\ u<x\leqq 1|F_n(u+)=\frac{k}{n}=cu-b+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1-\sum_{i=0}^{[n(c-b)]-k}\binom{n-k}{i}\left(\frac{\frac{k+i}{nc}+\frac{b}{c}-u}{1-u}\right)^{i-1}\left(1-\frac{\frac{k+i}{nc}+\frac{b}{c}-u}{1-u}\right)^{n-k-i}\frac{\frac{k}{nc}+\frac{b}{c}-u}{1-u}=$$

$$=1-\frac{1}{(1-u)^{n-k}}\cdot\frac{1}{nc}\sum_{i=0}^{[n(c-b)]-k}\binom{n-k}{i}\left(\frac{i+1}{nc}\right)^{i-1}\left(1-\frac{k+i}{nc}-\frac{b}{c}\right)^{n-k-i},$$

tekintve, hogy $u=\dfrac{k-1}{nc}+\dfrac{b}{c}$.

Ezek után közvetlenül adódik (5.1).

Tekintsük a $\sup\limits_{0<x<1}(x-F_n(x))=\max\limits_{1\leqq i\leqq n}\left(X_i^*-\dfrac{i-1}{n}\right)$ statisztikát. Jelölje $\varkappa$ azt az indexet, melyre ez a maximum eléretik, és legyen $X_\varkappa^*=u^*$. Ekkor az 5.1. Tétel folyamányaként kapjuk $c=1$ és $b=u-\frac{k-1}{n}$ helyettesítéssel, (lásd BIRNBAUM—PYKE [14] és TAKÁCS [96])

$$\frac{dP(\varkappa=k,\ u^*<u)}{du}=n\binom{n-1}{k-1}\left(u-\frac{k-1}{n}\right)u^{k-2}(1-u)^{n-k}-$$

$$-\binom{n-1}{k-1}\left(u-\frac{k-1}{n}\right)u^{k-2}\sum_{i=0}^{[n(1-u)]-1}\binom{n-k}{i}\left(\frac{i+1}{n}\right)^{i-1}\left(1-u-\frac{i+1}{n}\right)^{n-k-i},$$

ha $nu\geqq k-1$; vagy az *Abel*-féle azonosságot (lásd (1.8)) alkalmazva

$$(1-u)^{n-k}=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\frac{1}{n}\left(\frac{i+1}{n}\right)^{i-1}\left(1-u-\frac{i+1}{n}\right)^{n-k-i},$$

kapjuk, hogy

$$\frac{dP(\varkappa=k,\ u^*<u)}{du}=\binom{n-1}{k-1}\left(u-\frac{k-1}{n}\right)u^{k-2}\times \tag{5.2}$$

$$\times\sum_{i=[n(1-u)]}^{n-k}\binom{n-k}{i}\left(\frac{i+1}{n}\right)^{i-1}\left(1-u-\frac{i+1}{n}\right)^{n-k-i},\quad k=1,2,\ldots,n,\ \frac{k-1}{n}<u<1.$$

(5.2)-ből k-ra vonatkozó összegzéssel, ill. u-ra vonatkozó integrálással nyerhetők az ismert marginális eloszlások (BIRNBAUM—PYKE [14]):

$$\frac{dP(u^*<u)}{du}=1,\quad 0<u<1, \tag{5.3}$$

$$P(\varkappa=k)=\frac{1}{n^n}\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}i^i(n-i)^{n-i-1},\quad k=1,2,\ldots,n. \tag{5.4}$$

Tekintsük most az $\frac{x-F_n(x)}{1-x}$ mennyiséget. Könnyen látható, hogy ez is egy $x=X_k^*$ mintaelemnél veszi fel a maximumát. Legyen $\tilde{\varkappa}$ az az index, ahol ez eléretik és $X_{\tilde{\varkappa}}^*=\tilde{u}^*$. Ekkor az 5.1. Tételben végezzük el a következő helyettesítéseket:

$$b=\frac{u-\frac{k-1}{n}}{1-u},\quad c=\frac{1-\frac{k-1}{n}}{1-u}.$$

Itt még az (5.1) formula némileg egyszerűsíthető, ui. az 1.1. Tételből közvetlenül adódik, hogy a fenti b és c-vel

$$P\left(F_n(x)>cx-b,\ u<x<1/F_n(u+)=\frac{k}{n}=cu-b+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{nc(1-u)}.$$

Így kapjuk (lásd DEMPSTER [40]) a

$$(5.5)\qquad \frac{dP(\tilde{\varkappa}=k,\ \tilde{u}^*<u)}{du}=\frac{n}{n-k+1}\binom{n}{k-1}\left(u-\frac{k-1}{n}\right)u^{k-2}(1-u)^{n-k},$$

ill. a

$$P(\tilde{\varkappa}=k,\ \tilde{u}^*<u)=\frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k-1}\left(\left(\frac{k-1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{n-k+1}-u^{k-1}(1-u)^{n-k+1}\right)$$

összefüggéseket, ha $\frac{k-1}{n}<u<1,\ k=1,2,\dots,n.$

Az $u=1$ helyettesítéssel,

$$(5.6)\qquad P(\tilde{\varkappa}=k)=\frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k-1}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{n-k+1},\quad k=1,2,\dots,n.$$

$\tilde{\varkappa}$ fenti eloszlásából látható, hogy az n-hez közeli értékeket veszi fel nagy valószínűséggel. Nem igaz azonban az, hogy a $P(\tilde{\varkappa}=k)$ értékek monoton sorozatot alkotnak, mert

$$P(\tilde{\varkappa}=1)=\frac{1}{n}$$

$$P(\tilde{\varkappa}=2)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2}<\frac{1}{n},\quad \text{ha}\quad n>2.$$

A valószínűségek először monoton fogynak, és csak később növekszenek. A maximum természetesen $k=n$-nél van. Igaz továbbá a következő határérték reláció, mely az (5.6) formulából adódik, tagonkénti határátmenettel.

Legyen $s=n-k$ rögzített, akkor

$$(5.7)\qquad \lim_{n\to\infty}P(\tilde{\varkappa}=n-s)=\frac{(s+1)^{s-1}}{s!}e^{-(s+1)},\quad s=0,1,2,\dots$$

b) CHENG [24] és TAKÁCS [96] foglalkozott az $\frac{r}{n}-X_r^*$ $(r=1,2,\dots,n)$ mennyiségek közül a pozitívok számával. Ezzel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy mi azon $\left(X_i^*,\ \frac{i-1}{n}\right)$ pontok számának az eloszlása, melyek egy adott $y=cx-b$ egyenes alatt vannak. Sajnos, az általános esetre nem sikerült egyszerű formulát találni, ezért csak olyan egyenessel foglalkozunk, mely átmegy az (1, 1) ponton.

Tekintsük tehát az $y=\frac{x-p}{1-p}$ egyenest $(0<p<1)$ és jelölje τ azon $\left(X_i^*,\ \frac{i-1}{n}\right)$ pontok számát, melyek a fenti egyenes alatt vannak, azaz melyekre $\frac{X_i^*-p}{1-p}>\frac{i-1}{n}$, $i=1,2,\dots,n$. τ eloszlását adja meg a következő tétel:

5.2. TÉTEL. *Legyen* $q=\frac{1-p}{n}$, *ekkor*

(5.8)
$$P(\tau=j)=\sum_{t=0}^{n-j}(p-q)\binom{n}{t}q^{n-t}(p+(t-1)q)^{t-1}(n-t+1)^{n-t-1},\quad j=0,1,2,\dots,n.$$

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy $t=0$-nak megfelelő tag $(p-q)q^n(p-q)^{-1}(n+1)^{n-1}=q^n(n+1)^{n-1}$, és így a fenti formula $p=q=\frac{1}{n+1}$-re a következőt adja:

(5.9)
$$P(\tau=j)=\frac{1}{n+1},\quad j=0,1,2,\dots,n.$$

Ez a formula — melyet a továbbiakban felhasználunk — következik TAKÁCS alábbi lemmájából [96]:

Ha $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N$ *egész értékeket felvevő felcserélhető változók, és* Δ_N *jelöli a* $\gamma_1+\dots+\gamma_i$ $(i=1,2,\dots,N)$ *összegek közül a pozitívok számát, akkor*

$$P(\Delta_N=j\,|\,\gamma_1+\dots+\gamma_N=1)=\frac{1}{N},\quad j=1,2,\dots,N,$$

feltéve, hogy a feltételes valószínűség értelmezhető.

A bizonyításban legyen először $p>q$. Ekkor tekintsük az $y=\frac{x-(p-q)}{1-p}=$ $=\frac{x-p}{1-p}+\frac{1}{n}$ egyenest. Az empirikus eloszlásfüggvény ezt valamely $\frac{k}{n}$ magasságon feltétlenül metszi $(0\leq k\leq n)$. Jelölje t az első ilyen k-t, és legyen $x_t=p+\frac{t-1}{n}(1-p)=$ $=p+(t-1)q$. Az $F_n(x_t)=\frac{t}{n}$ esemény akkor és csak akkor következik be, ha a $(0, x_t)$ intervallumon pontosan t pont van, ennek valószínűsége

$$\binom{n}{t}x_t^t(1-x_t)^{n-t}=\binom{n}{t}(p+(t-1)q)^t(1-p-(t-1)q)^{n-t}=$$
$$=\binom{n}{t}(p+(t-1)q)^tq^{n-t}(n-t+1)^{n-t}.$$

Az $F_n(x_t)=\frac{t}{n}$ feltétel mellett annak valószínűsége, hogy előbb nem történik metszés, az 1.1. Tétel szerint $\frac{x_0}{x_t}=\frac{p-q}{p+(t-1)q}$, és annak valószínűsége, hogy az $(x_t, 1)$ intervallumban éppen j darab pont van az $y=\frac{x-p}{1-p}$ egyenes alatt, a fent idézett *Takács*-lemma szerint $\frac{1}{n-t+1}$. (A $(0, x_t)$ intervallumban ui. minden pont az egyenes felett van.) t-re való összegzéssel kapjuk a Tétel állítását a $p>q$ esetben. (t-re nyilván teljesülnie kell az $n-t\geqq j$ egyenlőtlenségnek.)

A $p<q$ esetre a fenti okoskodást némileg módosítani kell. Tekintsük a $(p-q, 1)$ intervallumot (amely magában foglalja a $(0, 1)$ intervallumot), és tegyük fel, hogy most ezen az intervallumon veszünk n egyenletes eloszlású pontot: $\overline{X}_1^*<\overline{X}_2^*<\ldots<\overline{X}_n^*$.

Legyen $\bar{\tau}$ azon $\left(\overline{X}_i^*, \frac{i-1}{n}\right)$ pontok száma, melyek az $y=\frac{x-p}{1-p}$ egyenes alatt vannak. Ekkor a Takács-lemma szerint $P(\bar{\tau}=j)=\frac{1}{n+1}$, $j=0, 1, \ldots, n$. Ezt a valószínűséget másképpen is előállíthatjuk. Jelölje μ a $(p-q, 0)$ intervallumba eső mintaelemek számát. Ekkor

$$(5.10) \qquad P(\bar{\tau}=j) = P(\mu=0)P(\bar{\tau}=j\,|\,\mu=0)+P(\bar{\tau}=j,\ \mu\geqq 1).$$

Nyilván $P(\mu=0)=\frac{1}{(1+q-p)^n}=\frac{1}{q^n(n+1)^n}$, és $P(\bar{\tau}=j\,|\,\mu=0)$ éppen a keresett valószínűség. Ha $j=n$, akkor $P(\bar{\tau}=n, \mu\geqq 1)=0$, így kapjuk

$$P(\bar{\tau}=n\,|\,\mu=0)=q^n(n+1)^{n-1},$$

azaz ebben az esetben igaz a tétel állítása. Ha $j<n$, akkor $\mu\geqq 1$ esetén létezik olyan $1\leqq t\leqq n-j$, hogy $F_n(x_t)=\frac{t}{n}$ és $F_n(x_i)>\frac{i}{n}$ $i=1, 2, \ldots, t-1$, ahol $x_i=$ $=p+(i-1)q$. Az $F_n(x_t)=\frac{t}{n}$ esemény valószínűsége most

$$\binom{n}{t}\left(\frac{tq}{1+q-p}\right)^t\left(1-\frac{tq}{1+q-p}\right)^{n-t}=\binom{n}{t}\frac{(tq)^t q^{n-t}(n+1-t)^{n-t}}{(1+q-p)^n}.$$

Ezen feltétel mellett annak valószínűsége, hogy az $(x_t, 1)$ intervallumon j pont van az $y=\frac{x-p}{1-p}$ egyenes alatt, ugyancsak a *Takács*-lemma szerint $\frac{1}{n-t+1}$. Meg kell határoznunk még az $F_n(x_t)=\frac{t}{n}$ feltétel mellett annak valószínűségét, hogy $\mu\geqq 1$ és t az első olyan index, melyre $F_n(x_t)=\frac{t}{n}$. Az 1.1. Tételt alkalmazva, erre a valószínűségre kapjuk:

$$\sum_{m=1}^{t}\binom{t}{m}\left(\frac{q-p}{tq}\right)^m\left(1-\frac{q-p}{tq}\right)^{t-m}\frac{p+(m-1)q}{p+(t-1)q}=$$

$$=\frac{1}{p+(t-1)q}\sum_{m=1}^{t}\binom{t}{m}\left(\frac{q-p}{tq}\right)^m\left(1-\frac{q-p}{tq}\right)^{t-m}(p-q+mq)=$$

$$=\frac{1}{p+(t-1)q}\left[(p-q)\left(1-\left(1-\frac{q-p}{tq}\right)^t\right)+qt\frac{q-p}{tq}\right]=\frac{(q-p)(p+(t-1)q)^{t-1}}{(tq)^t}.$$

Innen

$$P(\bar{\tau}=j,\ \mu \geqq 1)=\sum_{t=1}^{n-j}\binom{n}{t}(q-p)\frac{(p+(t-1)q)^{t-1}q^{n-t}(n-t+1)^{n-t-1}}{(1+q-p)^n},$$

és (5.10)-ből $P(\bar{\tau}=j|\mu=0)$-ra éppen a Tétel állítását kapjuk. Ezzel az 5.2. Tételt minden esetre bizonyítottuk.

MEGJEGYZÉSEK. 1. $j=0$-ra az 1.1. Tételből $P(\tau=0)=p$, tehát

$$\sum_{t=0}^{n}(p-q)\binom{n}{t}q^{n-t}(p+(t-1)q)^{t-1}(n-t+1)^{n-t-1}=p, \tag{5.11}$$

ami egyébként némi számolással az *Abel*-azonosságból is belátható. Ezt felhasználva kaphatjuk az alábbi formulát:

$$P(\tau=j)=p+\sum_{s=0}^{j-1}(q-p)\binom{n}{s}q^s(1-(s+1)q)^{n-s-1}(s+1)^{s-1}. \tag{5.12}$$

2. $p=0$-ra kapjuk CHENG [24] eredményét:

$$P(\tau=j)=\sum_{s=0}^{j-1}\binom{n}{s}\frac{1}{n^{s+1}}(s+1)^{s-1}\left(1-\frac{s+1}{n}\right)^{n-s-1}. \tag{5.13}$$

3. $p>q$-ra a valószínűségek monoton fogyók:

$$P(\tau=0)>P(\tau=1)>\ldots>P(\tau=n),$$

míg $p<q$-ra a valószínűségek monoton növekednek:

$$P(\tau=0)<P(\tau=1)<\ldots<P(\tau=n).$$

$p=q$-ra természetesen

$$P(\tau=0)=P(\tau=1)=\ldots=P(\tau=n)=\frac{1}{n+1}.$$

4. Ha p rögzített, az 5.2. Tételből közvetlenül adódik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}P(\tau=j)=p\sum_{s=j}^{\infty}\frac{(1-p)^s(s+1)^{s-1}}{s!}e^{-(1-p)(s+1)},\quad j=0,1,2,\ldots \tag{5.14}$$

c) $F_n(x)$ és valamely $y=cx-b$ egyenes átmetszéseinek számával foglalkozott CHANG [21], NEF [70], TAKÁCS [98], CSÁKI—TUSNÁDY [32]. Itt csupán ez utóbbi cikkből idézzük az eredményeket.

5.3. TÉTEL. *Az* 1.1. Tétel *feltételei mellett jelölje λ azon m indexek számát, melyekre*

$$\sum_{i=1}^{m}\nu_i=m,\quad m=1,2,\ldots,n.$$

Ekkor

$$P(\lambda=l)=n(n-1)\ldots(n-l+1)q^l,\quad l=1,2,\ldots,n. \tag{5.15}$$

Az 5.3. Tétel egyébként megadja az $F_n(x)$ és az $y=\frac{x-p}{1-p}$ metszései számának az eloszlását. Általánosabban, tekintsük az $F_n(x)$ és $y=cx-b$ egyenes átmetszéseinek számát, azaz azon x pontok számát, melyekre $F_n(x)=cx-b$. Jelölje ezt β. Az 5.3. Tétel következményeként kapjuk:

5.4. TÉTEL.

$$P(\beta \geqq l+1) = \frac{n(n-1)\dots(n-l+1)}{(nc)^l}\left(\frac{l}{nc}+\frac{b}{c}\right)\times \tag{5.16}$$

$$\times\sum_{k=l}^{[n(c-b)]}\binom{n-l}{k-l}\left(\frac{k}{nc}+\frac{b}{c}\right)^{k-l-1}\left(1-\frac{k}{nc}-\frac{b}{c}\right)^{n-k}, \quad l=0,1,\dots,[n(c-b)].$$

Ha $c=1+b$, akkor az 5.3. Tételből közvetlenül

$$P(\beta \geqq l+1) = n(n-1)\dots(n-l+1)\frac{1}{(n(1+b))^l}.$$

Így pl. $b=0$, $l=2$-re

$$P(\beta \geqq 3) = \frac{n(n-1)}{n^2} = 1-\frac{1}{n}, \tag{5.17}$$

ami annak valószínűségét adja, hogy az $x=0$ és $x=1$-en kívül legyen még legalább egy olyan x_0, $(0<x_0<1)$, hogy $F_n(x_0)=x_0$ (lásd az 1970. évi SCHWEITZER MIKLÓS emlékverseny 12. feladatát).

Az említett [32] cikkben határeloszlások is találhatók, valamint a véletlen minta-elemszám esetével is foglalkozunk.

5.2. Véletlen mintaelemszám

Gyakran előfordul, különösen élettartam vizsgálatoknál, biológiában stb. hogy a mintaelemszám nem előre rögzített, hanem valószínűségi változó. Sokszor feltehető, hogy a mintaelemszám Poisson eloszlású, és független a mintaelemektől. Mi csupán ezzel az esettel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy

$$P(n=i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \quad i=0,1,2,\dots \tag{5.18}$$

és n független az $(X_1, X_2, \dots)$ változóktól.

KAC [60] ebben az esetben a következőképpen módosította az empirikus eloszlásfüggvényt:

$$F_\lambda^*(x) = \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{X_i<x\\ 1\leqq i\leqq n}} 1, \quad \text{ha} \quad n \geqq 1, \tag{5.19}$$

$$F_\lambda^*(x) = 0, \quad \text{ha} \quad n=0.$$

Fennáll a következő összefüggés:

$$F_\lambda^*(x) = \frac{n}{\lambda}F_n(x).$$

$F_\lambda^*(x)$-en alapuló egyoldali eltérések eloszlásával foglalkozott TAKÁCS [95], ALLEN—BEEKMAN [2], ALVO—CSÖRGŐ [3].

A következő tétel — amely formuláikat speciális esetként tartalmazza — az 1.4. Tételnek megfelelője.

5.5. TÉTEL. *Legyen* $0 \leqq a_1 < a_2 \leqq 1$, $c > 0$, *ekkor*

$$P\left(F_\lambda^*(x) \geqq cx+b,\ a_1 \leqq x \leqq a_2\right) = \tag{5.20}$$

$$= \sum_{\alpha > \lambda(ca_1+b)} \frac{(\lambda a_1)^\alpha}{\alpha!} e^{-\lambda a_1} - \sum_{\alpha > \lambda(ca_1+b)} \frac{(\lambda a_1)^\alpha}{\alpha!} \left(\frac{\alpha-b}{c} - a_1\right)^{[\lambda(ca_2+b)]-\alpha} \sum_{j=0} \frac{1}{j!} \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha+j-\lambda b}{c} - \lambda a_1\right)^{j-1} e^{-\frac{\alpha+j-\lambda b}{c}}, \quad ca_1+b > 0,$$

$$1 + \frac{\lambda b}{c} \sum_{j=0}^{[\lambda(ca_2+b)]} \frac{(j-\lambda b)^{j-1}}{c^{j-1} j!} e^{-\frac{j-\lambda b}{c}}, \quad ca_1+b \leqq 0.$$

Bizonyítás. Nyilvánvalóan fennáll a következő összefüggés:

$$P\left(F_\lambda^*(x) \geqq cx+b,\ a_1 \leqq x \leqq a_2\right) = \tag{5.21}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(F_n(x) \geqq \frac{c\lambda}{n} x + \frac{b\lambda}{n},\ a_1 \leqq x \leqq a_2 | n\right) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Az összegzésben szereplő feltételes valószínűséget az 1.4. Tétel adja. A megfelelő formulát behelyettesítve, majd az összegzést felcserélve és n-re elvégezve kapjuk a Tétel állítását.

Az $a_1=0$, $a_2=1$, $c=1$, $b=-\varepsilon$ esetet lásd TAKÁCS [95] és ALLEN—BEEKMAN [2]. Az $a_1=0$, $c=1$, $b=-\varepsilon$, ill. az $a_1=0$, $c=1+\varepsilon$, $b=-\varepsilon$ esetet lásd ALVO—CSÖRGŐ [3]. Az 1. § többi formuláinak megfelelőjét is hasonlóképpen kaphatnánk meg.

5.3. Kétdimenziós eset

Ismeretes, hogy többdimenzióban a *Kolmogorov*-statisztika nem eloszlásmentes. Mindig elérhető azonban (lásd pl. DURBIN [45]), hogy az eloszlást az egységnégyzetben (ill. egység kockában) egyenletes eloszlásba transzformáljuk, így a feladat arra redukálódik, hogy ellenőrizzük, hogy az eloszlás az egységnégyzetben egyenletes-e. Ez a transzformáció azonban nem egyértelmű, másrészt — az egydimenziós esettel ellentétben — a *Kolmogorov*-statisztika erre a transzformációra nem invariáns. További problémát jelent, hogy a kapott eloszlások nehezen kezelhetők. A többdimenziós esetet egyébként részletesen tárgyalja PURI-SEN [73] könyve.

Itt csupán két problémára kívánunk kitérni. DURBIN [45] vezette be a következő statisztikát:

$$G_n^- = \sup_{0 \leqq x \leqq 1} \left(\frac{x}{2} - G_n(x)\right), \tag{5.22}$$

ahol

$$G_n(x) = \int_0^1 F_n(x,y)\,dy,$$

$F_n(x, y)$ a kétdimenziós empirikus eloszlásfüggvény. A *Doob*-féle heurisztikát alkalmazva határozta meg G_n^- határeloszlását. Az alábbiakban meghatározzuk G_n^- pontos eloszlását, amiből ugyancsak megkapható a határeloszlás.

Legyen $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ a kétdimenziós minta. DURBIN [45] szerint

(5.23) $$G_n(x) = \frac{1}{n}\Big(r - \sum_{X_j<x} Y_j\Big) = \frac{1}{n}\sum_{X_j<x}(1-Y_j), \quad X_r^* < x \leqq X_{r+1}^*.$$

Jelölje A_r az $\{X_r^* < x \leqq X_{r+1}^*\}$ eseményt. Így $nG_n(x)$ az A_r feltétel mellett r darab, független, (0, 1)-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változó összege.

Nyilván
$$E(G_n(x)|A_r) = \frac{r}{2n},$$
tehát
$$E(G_n(x)) = E\left(\frac{r}{2n}\right) = \frac{x}{2}.$$
A
$$P(G_n(x) > cx-b,\ 0 \leqq x < 1)$$
valószínűség meghatározása az 1.2. Tételnél alkalmazott módszerrel történhet. Nem lényeges, hogy $nG_n(x)$ éppen egyenletes eloszlású változók összege, tekinthetjük általánosabban:

(5.24) $$G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} Z_j, \quad X_r^* < x \leqq X_{r+1}^*,$$

ahol $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ független azonos eloszlású, pozitív valószínűségi változók.

Az 1.1. Tétel átvihető ilyen „véletlen ugrású" empirikus eloszlásfüggvényre: legyen $0<p<s$, $S_0=p$, $S_i=p+\sum_{j=1}^{i} U_j$, $i=1, 2, \ldots, n$, ahol $U_1, \ldots, U_n$ független, azonos eloszlású, pozitív valószínűségi változók. Tekintsük az $\{S_n=s\}$ feltételt és vegyünk a $(0, s)$ intervallumon egymástól és U_i-ktől függetlenül n egyenletes eloszlású pontot. Jelölje ν_i az (S_{i-1}, S_i) véletlen intervallumba eső pontok számát, $i=1, \ldots, n$. Ekkor az 1.1. Tételhez hasonlóan

(5.25) $$P(\nu_1 < 1, \nu_1+\nu_2 < 2, \ldots, \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n < n|S_n = s) = \frac{p}{s}.$$

Az állítás következik TAKÁCS [97] 3. fej. 1. Tételéből, de közvetlenül is belátható az 1.1. Tételhez hasonlóan. Jelölje ν_0 a $(0, p)$ intervallumba eső pontok számát, és alkalmazzunk teljes indukciót:
$$P(\nu_1 < 1, \nu_1+\nu_2 < 2, \ldots, \nu_1+\ldots+\nu_n < n|S_n = s, \nu_0, S_{\nu_0}) = \frac{S_{\nu_0}}{s}.$$

Belátható, hogy $E\left(\frac{S_{\nu_0}}{s}\middle|S_n=s,\ \nu_0\right)=\frac{\nu_0}{n}$, így
$$P(\nu_1 < 1, \nu_1+\nu_2 < 2, \ldots, \nu_1+\ldots+\nu_n < n|S_n = s, \nu_0) = \frac{\nu_0}{n},$$

végül

$$P(\nu_1 < 1, \ldots, \nu_1+\ldots+\nu_n < n | S_n = s) = E\left(\frac{\nu_0}{n}\bigg| S_n = s\right) = \frac{p}{s}.$$

(5.25) segítségével meghatározható az 1.2. stb. Tételeknél tekintett valószínűségek megfelelője a „véletlen ugrású" empirikus eloszlásfüggvényre. Exponenciális eloszlású U_i-kre érdekes, egyszerű formulákat adott meg LÁSZLÓ [65] egy készletgazdálkodási problémával kapcsolatban.

Az alábbi tételünk általános eloszlású U_i-kre vonatkozik, mikor is a formula általában valószínűleg nem egyszerűsíthető.

5.6. TÉTEL. *Jelölje* $H_r(u)$ *a* $\sum_{j=1}^{r} Z_j$ *eloszlásfüggvényét, legyen* $0<c<1, 0<b<1$. *Ekkor*

$$(5.26) \qquad P\big(G_n(x) > cx-b,\ 0 < x < 1\big) =$$

$$= 1-\left(1-\frac{b}{c}\right)^n - \frac{b}{c}\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}\int_0^{n(c-b)}\left(\frac{\frac{u}{n}+b}{c}\right)^{r-1}\left(1-\frac{\frac{u}{n}+b}{c}\right)^{n-r} dH_r(u).$$

Bizonyítás. Annak valószínűségét határozzuk meg, hogy $G_n(x)$ átmetszi az $y=cx-b$ egyenest. Annak valószínűsége, hogy ez az $u=0$ magasságon történjék, nyilván $\left(1-\frac{b}{c}\right)^n$. Tekintsük most a $\left\{\sum_{j=1}^{r} Z_j=u\right\}$ eseményt, melynek valószínűsége $dH_r(u)$, ezen feltétel mellett annak valószínűsége, hogy $\left\{G_n\left(\frac{\frac{u}{n}+b}{c}\right)=\frac{u}{n}\right\}$, nyilván $\binom{n}{r}\left(\frac{\frac{u}{n}+b}{c}\right)^r\left(1-\frac{\frac{u}{n}+b}{c}\right)^{n-r}$, és annak valószínűsége, hogy r az első olyan index, amelyre igaz a fenti egyenlőség, (5.25)-öt $p=\frac{b}{c}$, $s=\frac{\frac{u}{n}+b}{c}$-vel alkalmazva $\frac{b}{\frac{u}{n}+b}$, Ezzel szorozva, r-re összegezve, és u szerint integrálva adódik (5.26).

Visszatérve a *Durbin*-féle problémára, $H_r(u)$ r darab $(0, 1)$-ben egyenletes eloszlású változó összegének eloszlásfüggvénye, $h_r(u)=H_r'(u)$; $c=1/2$, $b=\varepsilon$-nal kapjuk:

$$(5.27) \qquad P\left(\sup_{0<x<1}\left(\frac{x}{2}-G_n(x)\right)<\varepsilon\right) = P\left(G_n(x) > \frac{x}{2}-\varepsilon,\ 0<x<1\right) =$$

$$= 1-(1-2\varepsilon)^n - 2\varepsilon\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}\int_0^{n(1/2-\varepsilon)}\left(\frac{2u}{n}+2\varepsilon\right)^{r-1}\left(1-\frac{2u}{n}-2\varepsilon\right)^{n-r} h_r(u)\, du.$$

Ebből határeloszlást a következőképpen számíthatunk:

Legyen $\varepsilon=\frac{t}{\sqrt{n}}$, $r=nz$, és helyettesítsünk az integrálban u helyére

$$\frac{u-\frac{r}{2}}{\sqrt{r}}\sqrt{12}=v\text{-t.}$$

Ezzel nyilván standardizáltuk a változót, és így a centrális határeloszlás tétel értelmében

$$h_r(u)\,du\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv,$$

és a de *Moivre—Laplace*-tételt alkalmazva

$$\binom{n}{r}\left(\frac{2u}{n}+2\varepsilon\right)^r\left(1-\frac{2u}{n}-2\varepsilon\right)^{n-r}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi nz(1-z)}}e^{-\frac{\left(v\sqrt{\frac{z}{3}}+2t\right)^2}{2z(1-z)}}.$$

Így v szerint a következő integrált kell kiszámítani:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\left(v\sqrt{\frac{z}{3}}+2t\right)^2}{2z(1-z)}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv=\sqrt{\frac{3(1-z)}{4-3z}}e^{-\frac{1}{2}\frac{12t^2}{z(4-3z)}}.$$

Tekintve, hogy

$$\frac{2\varepsilon}{\frac{2u}{n}+2\varepsilon}\sim\frac{2t}{z\sqrt{n}}\quad\text{és}\quad dz=\frac{1}{n},$$

az r-re vonatkozó összegzésből határértékben a következő integrált kapjuk:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2t}{z\sqrt{z(1-z)}}\sqrt{\frac{3(1-z)}{4-3z}}e^{-\frac{1}{2}\frac{12t^2}{z(4-3z)}}dz=$$

$$=\int_0^{3/4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\frac{3}{2}t}{w\sqrt{w(1-w)}}e^{-\frac{\left(\frac{3}{2}t\right)^2}{2w(1-w)}}dw=e^{-\frac{9}{2}t^2}\Phi(t\sqrt{3})+1-\Phi(2t\sqrt{3}),$$

ahol közben a $z=\frac{4w}{3}$ helyettesítést végeztük el, és a 2.1. Lemmát alkalmaztuk.

Kapjuk tehát a DURBIN által is nyert határeloszlást:

$$\text{(5.28)}\quad\lim_{n\to\infty}P\left(\sup_{0<x<1}\left(\frac{x}{2}-G_n(x)\right)<t\sqrt{n}\right)=\Phi(2\sqrt{3}\,t)-e^{-\frac{9}{2}t^2}\Phi(t\sqrt{3}),\quad t>0.$$

A másik probléma, amivel itt röviden kívánunk foglalkozni, VINCZE [102] kétmintás problémájának egymintás megfelelője:

Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenül választott y-ra

$$\{\sup_{0<x<1}(xy-F_n(x,y))<\varepsilon\}?$$

Ezt adja meg a következő tétel:

5.7. TÉTEL.

$$(5.29)\quad E_y(P(\sup_{0<x<1}(xy-F_n(x,y))<\varepsilon))=\int_0^1 P(\sup_{0<x<1}(xy-F_n(x,y))<\varepsilon)\,dy=$$

$$=1-\varepsilon\sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)]}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}+\varepsilon\right)^{j-1}\left(1-\frac{j}{n}-\varepsilon\right)^{n-j+1}.$$

Bizonyítás. Belátható, hogy minden rögzített y-ra

$$(5.30)\quad P(\sup_{0<x<1}(xy-F_n(x,y))<\varepsilon)=P(\sup_{0<x<y}(x-F_n(x))<\varepsilon),$$

így az 1.2. Tételt alkalmazva, $a=y$, $c=1$, $b=\varepsilon$ helyettesítéssel,

$$(5.31)\quad P(\sup_{0<x<1}(xy-F_n(x,y))<\varepsilon)=$$

$$=\begin{cases}1, & \text{ha}\quad 0<y\leqq\varepsilon\\ 1-\varepsilon\sum\limits_{j=0}^{[n(y-\varepsilon)]}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}+\varepsilon\right)^{j-1}\left(1-\frac{j}{n}-\varepsilon\right)^{n-j}, & \text{ha}\quad \varepsilon<y<1.\end{cases}$$

(5.31)-et y szerint integrálva adódik (5.29).

A 2.1. Tételből megkapható a VINCZE [102] által is nyert határérték:

$$(5.32)\quad \lim_{n\to\infty}E_y\left(P\left(\sup_{0<x<1}(xy-F_n(x,y))<\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)=$$

$$=\int_0^1\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{y(1-y)}}\right)dy-e^{-2t^2}\int_0^1\Phi\left(\frac{2y-1}{\sqrt{y(1-y)}}\,t\right)dy,\quad t>0.$$

IRODALOM

[1] ABRAHAMSON, J. G.: "Exact Bahadur efficiencies for the Kolmogorov—Smirnov and Kuiper one-and two-sample statistics", *Ann. Math. Stat.* **38** (1967), 1475—1490.

[2] ALLEN, J. L.—BEEKMAN, J. A.: "A statistical test involving a random number of random variables" *Ann. Math. Stat.* **37** (1966), 1305—1311.

[3] ALVO, M.—CSÖRGŐ, M.: "Distribution results and power functions for Kac statistics", *Ann. Inst. Stat. Math.* **22** (1970), 257—260.

[4] ANDĚL, J.: "Local asymptotic power and efficiency of tests of Kolmogorov—Smirnov type", *Ann. Math. Stat.* **38** (1967), 1705—1725.

[5] ANDERSON, T. W.—DARLING, D. A.: "Asymptotic theory of certain 'Goodness of Fit' criteria based on stochastic processes", *Ann. Math. Stat.* **23** (1952), 193—212.

[6] BAHADUR, R. R.: "Stochastic comparison of tests", *Ann. Math. Stat.* **31** (1960), 276—295.

[7] BAHADUR, R. R.: "*Some limit theorems in statistics*", Regional conference series in applied mathematics, Philadelphia, 1971.

[8] BARTON, D. E.—MALLOWS, C. L.: "Some aspects of the random sequence", *Ann. Math. Stat.* **36** (1965), 236—260.

[9] Baxter, G.: "An analogue of the law of the iterated logarithm", *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 177—181.
[10] Bertrand, J.: «Solution d'un problème», *C. R. Acad. Sci. Paris* **105** (1887), 369.
[11] Birnbaum, Z. W.: "On the power of a one sided test of fit for continuous probability functions", *Ann. Math. Stat.* **24** (1953), 484—489.
[12] Birnbaum, Z. W.—Lientz, B. P.: "Exact distributions for some Rényi-type statistics", *Zastosowania Matematyki* (Applicationes Mathematicae), **10** (1969) (Hugo Steinhaus Jubilee Volume), 179—192.
[13] Birnbaum, Z. W.—McCarty, R. C.: "A distribution-free upper confidence bound for $Pr(Y<X)$ based on independent samples of X and Y", *Ann. Math. Stat.* **29** (1958) 558—562.
[14] Birnbaum, Z. W.—Pyke, R.: "On some distributions related to the statistic D_n^+", *Ann. Math. Stat.* **29** (1958), 179—187.
[15] Birnbaum, Z. W.—Tingey F. H.: "One sided confidence contours for probability distribution functions", *Ann. Math. Stat.* **22** (1951), 592—596.
[16] Brunk, H. D.: "On the range of the difference between hypothetical distribution function and Pyke's modified empirical distribution function", *Ann. Math. Stat.* **33** (1962), 525—532.
[17] Butler, J. B.—McCarty, R. C.: "A lower bound for the distribution of the statistic D_n^+" (Abstract), *Notices Amer. Math. Soc.* **7** (1960), 80—81.
[18] Carnal, H.: «Sur les theorèmes de Kolmogorov et Smirnov dans le cas d'une distribution discontinue», *Comm. Math. Helv.* **37** (1962), 19—35.
[19] Cassels, J. W. S.: "An extension of the law of the iterated logarithm", *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **47** (1961), 55—64.
[20] Chang, Li Chien: "On the ratio of an empirical distribution function to the theoretical distribution function", *Acta Math. Sinica* **5** (1955), 437—468.
[21] Chang, Li Chien: "Relative positions of the empirical and theoretical distribution functions", *Academic Records of Peking Univ.* **2** (1956), 129—157.
[22] Chapman, D. G.: "A comparative study of several one-sided goodness of fit tests", *Ann. Math. Stat.* **29** (1958), 655—674.
[23] Chapman, D. G.: "On a limiting distribution due to Rényi", *Ann. Math. Stat.* **29** (1958), 1282.
[24] Cheng, P.: "Non-negative jump points of an empirical distribution function relative to a theoretical distribution function", *Acta Math. Sinica* **8** (1958), 333—347.
[25] Chernoff, H.: "A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations", *Ann. Math. Stat.* **23** (1952), 213—225.
[26] Chernoff, H.: "Large sample theory: parametric case", *Ann. Math. Stat.* **27** (1956), 1—22.
[27] Chung, K. L.: "On the maximum partial sums of sequences of independent random variables", *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948), 205—233.
[28] Chung, K. L.: "An estimate concerning the Kolmogorov limit distribution", *Trans Amer. Math. Soc.* **67** (1949), 36—50.
[29] Coberly, W. A.—Lewis, T. O.: "A note on a one-sided Kolmogorov—Smirnov test of fit for discrete distribution function", *Ann. Inst. Stat. Math.* **24** (1972), 183—188.
[30] Conover, W. J.: "A Kolmogorov-type goodness of fit test for discontinuous distributions", *Journ. Amer. Stat. Ass.* **67** (1972), 591—596.
[31] Csáki, E.: "An iterated logarithm law for semimartingales and its application to empirical distribution function", *Studia Sci. Math. Hung.* **3** (1968), 287—292.
[32] Csáki, E.—Tusnády, G.: "On the number of intersections and the ballot theorem", *Periodica Math. Hung.* **2** (1972), 5—13.
[33] Csörgő, M.: "Exact and limiting probability distributions of some Smirnov type statistics", *Canad. Math. Bull.* **8** (1965), 93—103.
[34] Csörgő, M.: "Exact probability distribution functions of some Rényi type statistics", *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 1158—1167.
[35] Csörgő, M.: "Some Rényi-type limit theorems of empirical distribution function", *Ann. Math. Stat.* **36** (1965), 322—326.
[36] Daniels, H. E.: "The statistical theory of the strengths of bundles of threads, I." *Proc. Roy. Soc. A* **183** (1945), 405—435.
[37] Darling, D. A.: "The Kolmogorov—Smirnov, Cràmèr-von Mises test", *Ann. Math. Stat.* **28** (1957), 823—838.
[38] Darling, D. A.—Robbins, H.: "Some further remarks on inequalities for sample sums", *Proc. Nat. Acad. Sci.* **60** (1968) 1175—1182.

[39] DARLING, D. A.—ROBBINS, H.: "Some nonparametric sequential tests with power one", *Proc. Nat. Acad. Sci.* **61** (1968), 804—809.
[40] DEMPSTER, A.: "Generalized D_n^+ statistics", *Ann. Math. Stat.* **30** (1959), 593—597.
[41] DONSKER, M. O.: "Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems", *Ann. Math. Stat.* **23** (1952), 277—281.
[42] DOOB, J. L.: "*Stochastic processes*", Wiley, New York, 1953.
[43] DOOB, J. L.: "Heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems", *Ann. Math. Stat.* **20** (1949), 393—403.
[44] DURBIN, J.: "The probability that the sample distribution function lies between two parallel straight lines", *Ann. Math. Stat.* **39** (1968), 398—411.
[45] DURBIN, J.: "*Asymptotic distributions of some statistics based on the bivariate sample distribution function*", Nonparametric Techniques in Statistical Inference, ed. by M. L. Puri, Cambridge, 1970, 435—449.
[46] DURBIN, J.: "Boundary crossing probabilities for the Brownian motion and Poisson processes and techniques for computing the power of the Kolmogorov—Smirnov test", *Journ. Appl. Prob.* **8** (1971), 431—453.
[47] DVORETZKY, A.—KIEFER, J.—WOLFOWITZ, J.: "Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator", *Ann. Math. Stat.* **27** (1956), 642—669.
[48] DWASS, M.: "The distribution of a generalized D_n^+ statistic", *Ann. Math. Stat.* **30** (1959), 1024—1028.
[49] EICKER, F.: "A loglog-law for double sequences of random variables", *Zeitschr. Wahrsch.* **16** (1970), 107—133.
[50] EICKER, F.: "On the probability that a sample distribution function lies below a line segment", *Ann. Math. Stat.* **41** (1970), 2075—2092.
[51] FELLER, W.: "On the Kolmogorov—Smirnov limit theorems for empirical distributions", *Ann. Math. Stat.* **19** (1948) 177—189.
[52] FINKELSTEIN, H.: "The law of the iterated logarithm for empirical distributions", *Ann. Math. Stat.* **42** (1971), 607—615.
[53] FRASER, D. A. S.: "*Nonparametric Methods in Statistics*", Wiley, New York, 1957.
[54] GLIVENKO, N.: "Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita", *Giorn. dell' Istit. degli att.* **4** (1933), 92—99.
[55] GUPTA, S. S.—PANCHAPAKESAN, S.: "On order statistics and some applications of combinatorial methods in statistics", *A Survey of Combinatorial Theory*, edited by J. N. Srivastava et al., North Holland Publishing Company, 1973. 217—250.
[56] HÁJEK, J.—SIDÁK, Z.: "*Theory of Rank Tests*" Academic Press, New York, 1967.
[57] HARTMAN, P.—WINTNER, A.: "On the law of the iterated logarithm", *Amer. J. Math.* **63** (1941), 169—176.
[58] ISHII, G.: "Kolmogorov—Smirnov test in life test," *Ann. Inst. Stat. Math.* **10** (1958), 37—46.
[59] ISHII, G.: "On the exact probabilities of Rényi's tests", *Ann. Inst. Stat. Math. Tokyo,* **11** (1959), 17—24.
[60] KAC, M.: "On deviation between theoretical and empirical distribution", *Proc. Nat. Acad. Sci.* **35** (1949), 252—257.
[61] KARLIN, S.: "*A first course in Stochastic Processes*", Academic Press, New York, 1966.
[62] KIEFER, J.: "Iterated logarithm analogues for sample quantiles when $p_n \downarrow 0$", *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1970, Vol. I. 227—244.
[63] KNOTT, M.: "The small sample power of one-sided Kolmogorov tests for a shift in location of the normal di tribution" *Journ. Amer. Stat. Ass.* **65** (1970), 1384—1391.
[64] KOLMOGOROV, A. N.: "Sulla determinazione empirica di une legge di distribuzione", *Giorn. dell'Istit. degli att.* **4** (1933), 83—91.
[65] LÁSZLÓ, Z.: „Egy teljesen véletlen megbízhatósági jellegű készlet-modell", *MTA III. Oszt. Közl.* **21** (1972), 77—117.
[66] LAUWERIER, H. A.: "The asymptotic expansion of the statistical distribution of N. V. Smirnov", *Zeitschr. Wahrsch.* **2** (1963), 61—68.
[67] MALMQUIST, S.: "On certain confidence contours for distribution functions", *Ann. Math. Stat.* **25** (1954), 523—533.
[68] *Мания, Г. М.:* «Обобщение критерия А. Н. Колмогорова для оценки закона распределения по эмпирическим данным», *Докл. Акад. Наук,* **69** (1949), 495—497.

[69] MASSEY, F. J.: "A note on the power of a non-parametric test", *Ann. Math. Stat.* **21** (1950), 440—443. Correction: *Ann. Math. Stat.* **23** (1952), 637—638.
[70] NEF, W.: »Über die Differenz zwischen theoretischer und empirischer Verteilungsfunktion«, *Zeitschr. Wahrsch.* **3** (1964), 154—162.
[71] NOÉ, M.—VANDEWIELE, G.: "The calculation of distributions of Kolmogorov—Smirnov type statistics including a table of significance points for a particular case", *Ann. Math. Stat.* **39** (1968), 233—241.
[72] NOETHER, G. E.: "Note on the Kolmogorov-statistic in the discrete case", *Metrika* **7** (1963), 115.
[73] PURI, M. L.—SEN P. K.: *"Nonparametric methods in multivariate analysis"*, Wiley, New York, 1971.
[74] PYKE, R.: "The supremum and infimum of the Poisson process", *Ann. Math. Stat.* **30** (1959), 568—576.
[75] QUADE, D.: "On the asymptotic power of the one sample Kolmogorov—Smirnov tests", *Ann. Math. Stat.* **36** (1965), 1000—1018.
[76] RAGHAVACHARI, M.: "Limiting distributions of Kolmogorov—Smirnov type statistics under the alternative", *Ann. Stat.* **1** (1973), 67—73.
[77] RÉNYI, A.: "On the theory of order statistics", *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953), 191—231.
[78] RÉNYI, A.: *„Valószínűségszámítás"*, 2. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
[79] RÉNYI, A.: „A rendezett minták elméletének egy problémaköréről", *MTA III. Oszt. Közl.* **18** (1968), 23—30.
[80] ROBBINS, H.: "A one-sided confidence interval for an unknown distribution function", (Abstract), *Ann. Math. Stat.* **25** (1954), 409.
[81] ROSENBLATT, J.: "Some modified Kolmogorov—Smirnov tests of approximate hypotheses and their properties", *Ann. Math. Stat.* **33** (1962), 513—524.
[82] SAHLER, W.: "A survey on distribution-free statistics based on distances between distribution functions", *Metrika* **13** (1968) 149—169.
[83] SARKADI, K.: "Combinatorial proof for a theorem of H. E. Daniels", *Coll. Math. Soc. János Bolyai*, **4** (1969), *Combinatorial theory and its applications*, 975—979.
[84] SARKADI, K.: "On the exact distributions of statistics of Kolmogorov—Smirnov type", *Periodica Math. Hung.* **3** (1973), 9—12.
[85] SCHMID, P.: "On the Kolmogorov and Smirnov limit theorems for discontinuous distribution functions", *Ann. Math. Stat.* **29** (1958), 1011—1027.
[86] STANLEY, R. M.: "Boundary crossing probabilities for the Kolmogorov—Smirnov statistics", *Ann. Math. Stat.* **43** (1972), 664—668.
[87] STECK, G. P.: "Rectangle probability that the uniform order statistics and the probability that the empirical distribution function lies between two distribution functions", *Ann. Math. Stat.* **42** (1971), 1—11.
[88] SUZUKI, G.: "On the Glivenko—Cantelli theorem", *Ann. Inst. Stat. Math.* **18** (1966), 29—37.
[89] SUZUKI, G.: "On exact probabilities of some generalised Kolmogorov's D-Statistics", *Ann. Inst. Stat. Math.* **19** (1967), 373—388.
[90] *Санов, И. Н.:* «О вероятности больших отклонений случайных величин», *Мат. Сборник* **42** (81), (1957), 11—44.
[91] *Смирнов, Н. В.:* «Об уклонениях эмпирической функции распределения», *Мат. Сборник* **6** (48), (1939), 3—26.
[92] *Смирнов, Н. В.:* «Приближение законов распределения по эмпирическим данным», *Успехи Мат. Наук*, **10** (1944), 179—206.
[93] *Смирнов, Н. В.:* «Вероятности больших значений непараметрических односторонних критериев согласия», *Труды Мат. Инст. им. Стеклова*, LXIV, (1961), 185—210.
[94] TAKÁCS, L.: "The use of a ballot theorem in order statistics", *Journal Appl. Prob.* **1** (1964), 389—392.
[95] TAKÁCS, L.: "Applications of a ballot theorem in physics and in order statistics", *Journ. Royal Stat. Soc., Series B*, **27** (1965), 130—137.
[96] TAKÁCS, L.: "The distributions of some statistics depending on the deviations between empirical and theoretical distribution functions", *Sankhya, Series A*, **27** (1965) 93—100.
[97] TAKÁCS, L.: *"Combinatorial methods in the theory of stochastic processes"*, Wiley, New York, 1967.
[98] TAKÁCS, L.: "On the comparison of a theoretical and an empirical distribution function", *Journ. Appl. Prob.* **8** (1971), 321—330.

[99] TANG, S. C.: "Some theorems on the ratio of empirical distribution to the theoretical distribution to the theoretical distribution", *Pac. Journ.* **12** (1962), 1107—1114.
[100] TOPSOE, F.: "On the Glivenko—Cantelli theorem", *Zeitschr. Wahrsch.* **14** (1970), 239—250.
[101] VAN DER WAERDEN, B. L.: "Testing a distribution function", *Indag. Math.* **15** (1953), 201—207.
[102] VINCZE, I.: „Kétváltozós empirikus eloszlásfüggvények eltéréséről", *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960), 361—372.
[103] VINCZE, I.: „A Kolmogorov—Szmirnov és más nem-paraméteres próbák erőfüggvényéről", *MTA III. Oszt. Közl.* **15** (1965), 97—105.
[104] VINCZE, I.: "On Kolmogorov—Smirnov type distribution theorems", *Nonparametric Techniques in Statistical Inference*, ed. by M. L. Puri, Cambridge, 1970, 385—401.
[105] VINCZE, I.: "On some results and problems in connection with statistics of the Kolmogorov—Smirnov type", *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1970, Vol. I. 459—470.
[106] WALD, A.—WOLFOWITZ, J.: "Confidence limits for continuous distribution functions", *Ann. Math. Stat.* **10** (1939), 105—118.
[107] WALSH, J. E.: "Bounded probability properties of Kolmogorov—Smirnov and similar statistics for discrete data", *Ann. Inst. Stat. Math.* **15** (1963), 153—158.
[108] WHITTLE, P.: "Some exact results for one sided distribution tests of the Kolmogorov—Smirnov type", *Ann. Math. Stat.* **32** (1961), 499—505.
[109] WICHURA, M. J.: "Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments", *Ann. Prob.* **1** (1973), 272—296.

(Beérkezett: 1973. XII. 21.)

STABIL INTERPOLÁCIÓRÓL*

Írta: JOÓ ISTVÁN

Bevezetés

A természeti jelenségeket leíró függvényeket általában nem ismerjük, legtöbb esetben a függvényértékeket csak diszkrét pontokban tudjuk meghatározni, ill. mérni. A diszkrét pontokban nyert függvényérték segítségével különböző típusú interpolációs polinomokat szerkesztünk (pl. LAGRANGE, HERMITE, HERMITE—FEJÉR, stb.), és ezen interpolációs polinomok konvergenciáját vizsgáljuk, feltéve hogy a jelenséget pl. folytonos függvény írja le. Ennek a kérdéskörnek igen nagy irodalma van, és ma is sok matematikus foglalkozik különböző interpolációs eljárások konvergencia-vizsgálatával.

Nyilvánvaló, hogy ugyanazon mérési alappontokban (vagy másképpen interpolációs alappontokban) különböző mérési adatok (függvényértékek) esetén más és más interpolációs polinomokat kapunk ugyanazon interpolációs eljárás esetén. Fontos kérdés annak vizsgálata, hogy ha ugyanazon interpolációs eljárás esetén két különböző mérési adatsor kevéssé tér el egymástól, akkor az ezek segítségével megkonstruált két interpolációs polinom is kevéssé tér-e el egymástól, nemcsak az alappontokban, hanem az interpoláció intervallumának bármely pontjában. Ha egy interpolációs eljárás rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor stabilnak nevezzük.

Régen bizonyított tény, hogy nem minden interpolációs eljárás stabil. Például a *Lagrange*-féle eljárás semilyen alappontrendszer esetén sem stabil. A *Hermite—Fejér*-féle pedig bizonyos alappontrendszerek esetén stabil (normális alappontrendszerek esete) mások esetén nem.

Ilyen stabilitási vizsgálatokkal foglalkoztak FABER, FEJÉR, EGERVÁRY, TURÁN, BALÁZS és sokan mások.

Jelen dolgozat szintén stabil interpolációs eljárások meghatározásával foglalkozik, továbbá ezen vizsgálatokkal kapcsolatban EGERVÁRY és TURÁN által (l. [3], [4]) felvetett gondolatok néhány approximációelméleti alkalmazását mutatja be.

Az utóbbi vizsgálatok alapvető eszköze a következő lemma, amelyet az 1. §-ban fogunk igazolni.

LEMMA: (A. A. MARKOV—T. J. STIELTJES) *Legyen* (a, b) *véges vagy végtelen intervallum, és*

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b$$

* A dolgozat megegyezik a szerző egyetemi doktori disszertációjával.

n tetszőleges pont, $f(x)$ pedig az (a, b)-ben definiált valós függvény, továbbá $P_{2n-1}(x)$ olyan legfeljebb $2n-1$-edfokú polinom, amelyekre teljesülnek a következők:

$$f^{(2n)}(x) > 0 \quad (a < x < b),\ f(x_k) = P_{2n-1}(x_k),\ f'(x_k) = P'_{2n-1}(x_k) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Ekkor

$$f(x) \geqq P_{2n-1}(x) \qquad (a < x < b)$$

feltéve, hogy valamely $x_0 \in (a, b)$-re $f(x_0) > P_{2n-1}(x_0)$.

Röviden szólva a dolgozat tulajdonképpen ezen lemma[1] néhány alkalmazását mutatja be. Az alkalmazás lehetőségeit természetesen ezzel távolról sem merítettük ki. A 2., 3. és 4. §-ok az általam elért eredményeket tartalmazzák, az 5. §-ban pedig Balázs és Turán egy érdekes tételét ismertetjük. A dolgozatot a Megjegyzések a további alkalmazásokról című résszel zárjuk.

1. §. Az alaplemma bizonyítása. Néhány összefüggés a Jacobi, Laguerre és Hermite polinomokra

Először röviden összefoglalunk néhány interpolációelméleti alapfogalmat. Legyen (a, b) véges vagy végtelen intervallum és

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b \tag{1.1}$$

n tetszőleges pont, továbbá

$$\begin{array}{l} y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\alpha_1-1)} \\ y_2, y_2', \ldots, y_2^{(\alpha_2-1)} \\ \text{-----------------} \\ y_n, y_n', \ldots, y_n^{(\alpha_n-1)} \end{array} \tag{1.2}$$

tetszőlegesen adott számok. Megszerkesztendő az a legalacsonyabb fokú $H(x)$ polinom, amelyre

$$H^{(i)}(x_k) = y_k^{(i)} \quad (k = 1, \ldots, n;\ i = 0, 1, \ldots, \alpha_k - 1). \tag{1.3}$$

Az interpolációnak ezt a módját először Hermite vizsgálta. Ismeretes (l. Natanszon [18]), hogy ennek a feladatnak van megoldása és csak egy van. Ez $\alpha_k = 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ esetben

$$H(x) = L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} = \sum_{k=1}^{k} y_k l_k(x), \tag{1.4}$$

ahol

$$\omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{n} (x - x_k). \tag{1.5}$$

[1] A lemmához hasonló gondolatot először Markov és Stieltjes használták (l. Freud [10], 26. o.).

Ez az ún. *Lagrange*-féle interpoláció. Könnyű belátni, hogy

$$(1.6)\qquad l_k'(x_k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Az $a_k=2$ esetben pedig $(k=1, \ldots, n)$

$$(1.7)\qquad H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k\left[1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right] l_k^2(x)+\sum_{k=1}^{n} y_k'(x-x_k)l_k^2(x).$$

Ez az ún. *Hermite*-féle interpoláció, amit $y_k'=0$ $(k=1, \ldots, n)$ esetben *Hermite—Fejér*-féle eljárásnak neveznek. Ha

$$1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k) \geqq 0 \quad (a \leqq x \leqq b;\ k = 1, \ldots, n),$$

akkor FEJÉR után az (1.1) alappontrendszert normálisnak nevezzük. Ekkor az *Hermite—Fejér*-féle eljárás a következő érdekes stabilitási tulajdonsággal bír:

$$(1.8)\qquad \min_k (y_k-y_k^*) \leqq \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x)-\sum_{k=1}^{n} y_k^* h_k(x) \leqq \max_k (y_k-y_k^*),$$

figyelembe véve a könnyen látható

$$(1.9)\qquad \sum_{k=1}^{n} h_k(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right] l_k^2(x) \equiv 1$$

azonosságot. Hasonlóképpen közismert, hogy

$$(1.10)\qquad \sum_{k=1}^{n} l_k(x) \equiv 1.$$

Egy, az $[a, b]$ intervallumban definiált folytonos $f(x)$ függvény folytonossági modulusán az

$$\omega(f;\, a, b;\, \delta) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{|x-y|\leqq\delta \\ x,y\in[a,b]}} \{|f(x)-f(y)|\}$$

függvényt értjük. Jól ismert, hogy bármely pozitív λ-ra

$$(1.11)\qquad \omega(f;\, a, b;\, \lambda\delta) \leqq (\lambda+1)\,\omega(f;\, a, b;\, \delta),$$

$$(1.12)\qquad \|f\|_{[a,b]} \overset{\text{def}}{=} \max_{a\leqq x\leqq b} |f(x)|$$

az $[a, b]$-ben folytonos $f(x)$ függvény normája.

Rátérünk lemmánk igazolására. Két bizonyítást fogunk adni. Az első bizonyítási gondolatot már STIELTJES és MARKOV ismerték és felhasználták nevezetes egyenlőtlenségük igazolására (l. FREUD [10], 26. o.). Ennek alapján lemmánkat indirekt igazoljuk. Nyilván a $V(x)=f(x)-P_{2n-1}(x)$-re $V(x_k)=V'(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$. Ha volna olyan $\xi\in(a, b)$ melyre $V(\xi)<0$, akkor feltevéseink alapján $V(x)$-nek multiplicitással számolva legalább $2n+1$ gyöke volna (a, b)-ben, azonban ez $V^{(2n)}(x)=$ $=f^{(2n)}(x)>0$ $(a<x<b)$ miatt lehetetlen. Az ellentmondás igazolja lemmánkat.

Újabb bizonyításhoz jutunk, ha figyelembe vesszük, hogy a lemmabeli $P_{2n-1}(x)$ az $f(x)$ függvény x_k $(k=1, \ldots, n)$ alappontokra vonatkozó *Hermite*-féle interpolációs polinomja. A maradéktagos *Hermite*-féle interpolációs formula alapján (l.[18], 377. o.) lemmánknál általánosabb állítást közvetlenül kapunk. E formula szerint

$$f(x)=P_{2n-1}(x)+\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\left\{\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)\right\}^2 \quad (x \neq x_k;\ a<\xi<b)$$

amiből következik, hogy lemmánk állítása akkor is igaz, ha csak a $f^{(2n)}(x)\geqq 0$ $(a<x<b)$ kikötés szerepel, és nem tesszük fel olyan $x_0\in(a, b)$ létezését, ahol $f(x_0)>$ $>P_{2n-1}(x_0)$. Ennek ellenére az első bizonyítás gondolata használható gyümölcsözőbben, amint azt látni fogjuk, mivel az szemléletesebb.

Szükségünk lesz SZEGŐ [21] könyvében található következő összefüggésekre.

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}^{(n)} \tag{1.13}$$
$$(\alpha, \beta>-1;\ n=0, 1, \ldots)$$

polinomokat *Jacobi*-polinomoknak nevezzük. Jól ismert, hogy ezek ortogonális rendszert alkotnak $(-1, 1)$-ben az $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ súlyfüggvényre nézve, továbbá $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ gyökei egyszeresek, valósak, $(-1, 1)$-be esnek. Könnyen látható, hogy (1.13)-nak tetszőleges komplex α, β számok esetén is van értelme, így jutunk az általánosított *Jacobi*-polinomokhoz.

Az $y_n(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomok kielégítik (l. [21], (4.2.1)) az

$$(1-x^2)y_n''(x)+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y_n'(x)+n(n+\alpha+\beta+1)y_n(x)=0 \tag{1.14}$$

differenciálegyenletet, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \max_{0\leqq x\leqq 1}|g_n(x)|=\text{const}\left(\alpha\geqq-\frac{1}{2}\right) \quad \text{(l. [21], 169. o.),} \tag{1.15}$$

ahol

$$g_n(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}}(1-x)^{\frac{2\alpha+1}{4}}(1+x)^{\frac{2\beta+1}{4}}P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

$$\max_{0\leqq x\leqq 1}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\leqq c(\alpha,\beta)n^{-\frac{1}{2}}\left(\alpha<-\frac{1}{2}\right) \quad \text{(l. [21], 168. o.).} \tag{1.16}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x) \quad \text{(l. [21], (4.1.3)).} \tag{1.17}$$

Az

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}(e^{-x}x^{n+\alpha})^{(n)}e^x x^{-\alpha} \quad (\alpha>-1,\ n=0, 1, \ldots) \tag{1.18}$$

polinomokat *Laguerre*-polinomoknak nevezzük. Jól ismert, hogy ezek ortogonális rendszert alkotnak $(0, \infty)$-en az $x^\alpha e^{-x}$ súlyfüggvényre nézve, továbbá $L_n^{(\alpha)}(x)$ gyökei egyszeresek, valósak, pozitívok.

Az $y_n(x)=L_n^{(\alpha)}(x)$ polinomok kielégítik (l. [21], (5.1.2)) az

(1.19) $$xy_n''(x)+(\alpha+1-x)y_n'(x)+ny_n(x)=0$$

differenciálegyenletet, továbbá

(1.20) $$L_n^{(\alpha)}(0)=\binom{n+\alpha}{n} \quad \text{(l. [21], (5.1.7))},$$

(1.21) $$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)=-L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \quad \text{(l. [21], (5.1.14))},$$

(1.22) $$\sum_{k=1}^{n} x_k^{m-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2}=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \quad \text{(l. [21], (14.7.5))},$$

ahol x_k $(k=1, \dots, n)$ $L_n^{(\alpha)}(x)$ gyökeit jelöli és m olyan egész szám, amelyre $0\leqq m\leqq$ $\leqq 2n-1$.

(1.23) $$\int_0^\infty l_k(x)x^\alpha e^{-x}\,dx=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}x_k^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \quad \text{(l. [21], (15.3.5))}.$$

(1.24) $$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}M_n=\text{const.} \quad \text{(l. [21], 7.6.5 tétel)},$$

ahol

$$M_n\overset{\text{def}}{=}\max_{0<x\leqq d} e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}|L_n^{(\alpha)}(x)|, \quad \alpha\geqq-\frac{1}{2}.$$

(1.25) $$L_n^{(\alpha)}(x)=O(n^a)\left(a=\max\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4},\ \alpha\right);\ 0\leqq x\leqq d\right) \quad \text{(l. [21], (7.6.11))}.$$

A

(1.26) $$H_n(x)=(-1)^n(e^{-x^2})^{(n)}e^{x^2} \quad (n=0, 1, \dots)$$

polinomokat *Hermite*-féle polinomoknak nevezik. Jól ismert, hogy ezek ortogonális rendszert alkotnak $(-\infty, +\infty)$-en az e^{-x^2} súlyfüggvényre nézve, továbbá $H_n(x)$ gyökei egyszeresek és valósak.

A *Jacobi-*, *Laguerre-* és *Hermite*-polinomok alkotják az ún. klasszikus ortogonális polinomokat. Ezeket számos szerző jellemezte különféle kitüntetett tulajdonságaikkal, azaz igazoltak olyan tételeket, melyek szerint bizonyos dolgok teljesülnek akkor és csak akkor, ha a klasszikus ortogonális polinomokról van szó. A következő paragrafusban egy interpolációelméleti jellemzését adjuk meg a klasszikus ortogonális polinomoknak, és látni fogjuk, hogy ez hogyan függ össze a stabil interpolációval.

2. §. A stabil interpoláció definíciója. A klasszikus ortogonális polinomok interpolációelméleti jellemzése

Az (1.8) alapján, ha pl. végtelen intervallumon stabil interpolációs eljáráshoz akarunk jutni, kézenfekvő gondolat végtelen intervallumon normális alappontrendszert keresni. Azonban könnyű belátni, hogy ilyen a végtelen intervallumon nem létezik. Tehát célszerű stabil interpolációt más módon keresni. A legújabb ilyen vizsgálatoknál a stabilitás fogalmát definiálják alkalmas módon, és ezután keresik ezen definíció szerint stabil interpolációkat.

Általánosan fogjuk definiálni a stabil interpoláció fogalmát oly módon, hogy ezáltal az eddigi eredményeket könnyen át tudjuk tekinteni. Legyen (a, b) véges vagy végtelen intervallum és

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b \tag{2.1}$$

n tetszőleges véges szám $[a, b]$-ben, továbbá az interpoláció alappolinomjai

$$r_1(x), r_2(x), \ldots, r_n(x), \tag{2.2}$$

azaz amelyekre

$$r_k(x_i) = \delta_{k,i} \quad (k, i = 1, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Legyenek y_k $(k=1, \ldots, n)$ tetszőleges valós számok, akkor

$$R_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} y_k r_k(x) \tag{2.4}$$

interpolációs polinom az adott x_k $(k=1, \ldots, n)$ alappontokon, azaz

$$R_n(x_k) = y_k \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.5}$$

DEFINÍCIÓ. A (2.4) interpolációs eljárást stabilnak nevezzük (a, b)-ben, az itt definiált $\varrho(x)$ súlyfüggvényre nézve, ha fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$0 \leqq \varrho(x) \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_k^*) \cdot r_k(x) \leqq \max_k (y_k - y_k^*) \cdot \varrho(x_k) \tag{2.6}$$

$$(a < x < b;\ y_k \geqq y_k^*,\ k = 1, \ldots, n).$$

Arra fogunk törekedni, hogy a (2.4) eljárásra

$$\text{Grad } R_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \text{grad } r_k(x) = \text{minimális} \tag{2.7}$$

legyen. Ez a feltétel az eljárás gazdaságosságát jelenti.

A. Az $a=-1$, $b=1$, $\varrho(x) \equiv 1$ esetre EGERVÁRY és TURÁN (l. [3]) igazolták, hogy (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 = -1, x_n = 1$, $P_{n-2}^{(0,0)}(x_k) = 0$ $(k=2, \ldots, n-1)$. Megadták erre az esetre az egyértelműen meghatározott (2.4) eljárást, igazolták, hogy $[-1, 1]$-ben folytonos $f(x)$ esetén $R_n(f, x) \to f(x)$ egyenletesen $[-1, 1]$-ben, ahol

$$R_n(f, x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot r_k(x). \tag{2.8}$$

Eljárásukat összehasonlították a $P_{n-2}^{(0,0)}(x)$ gyökeihez tartozó *Hermite—Fejér* eljárással, s az *Egerváry—Turán*-féle, a konvergencia és fokszám szempontjából is előnyösebbnek mutatkozott.

B. Az $a=0$, $b=\infty$, $\varrho(x)=e^{-x}$ esetre szintén EGERVÁRY és TURÁN (l. [4]) igazolták, hogy (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1=0$, $L_{n-1}^{(0)}(x_k)=0$ $(k=2, \ldots, n)$. A kapott eljárásra BALÁZS és TURÁN (l. [5]) bizonyított konvergenciatételt.

C. Az $a=-\infty$, $b=\infty$, $\varrho(x)=e^{-x^2}$ esetre EGERVÁRY és TURÁN igazolták (l. [4]), hogy (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesül, ha $H_n(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ és a következő eljáráshoz jutottak:

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{H_n(x)}{H_n'(x_k)(x-x_k)}\right)^2. \tag{2.9}$$

D. BALÁZS (l. [1]) ezen vizsgálatokhoz kapcsolódva az $a=-1<x_1$, $x_n<b=1$, $\varrho(x)=(1-x^2)^{\alpha+1}$ $(\alpha>-1)$ esetre igazolta, hogy (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesül, ha $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ és

$$R_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)}{P_n^{(\alpha,\alpha)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2. \tag{2.10}$$

A kapott eljárásra $\alpha \geqq 0$ esetben konvergenciatételt is bizonyított.

Az ismertetett vizsgálatokat egészítik ki a következő eredményeim.

I. TÉTEL (l. [14]). *$a=-1<x_1$, $x_n<b=1$, $\varrho(x)=(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$ ($\alpha, \beta>-1$ rögzítettek) esetén* (2.6) *és* (2.7) *egyidejűen akkor és csak akkor teljesülnek, ha a* (2.1) *alappontokra $P_n^{(\alpha,\beta)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ és*

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2. \tag{2.11}$$

II. TÉTEL (l. [14]). *$a=0<x_1$, $b=+\infty$, $\varrho(x)=x^{\alpha+1}e^{-x}$ ($\alpha>-1$ rögzített) esetén* (2.6) *és* (2.7) *egyidejűen akkor és csak akkor teljesülnek, ha a* (2.1) *alappontokra $L_n^{(\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ és*

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2. \tag{2.12}$$

Megjegyezzük, hogy EGERVÁRY és TURÁN **B.** alatti eredménye tetszőleges paraméterű *Laguerre*-polinom esetére nem látszott általánosíthatónak, s a II. tétel ennek nem általánosítása. Tételünkben ugyanis a $0<x_1$ feltevés is szerepel. Az I. tétel viszont általánosítása BALÁZS **D.** alatti eredményének.

A **C.** alatti eredmény, valamint az I. és II. tételek a klasszikus ortogonális polinomok egységes interpoláció-elméleti jellemzését adják. Az egységes jelző jogossága a bizonyításból ki fog derülni.

Az imént említett három tétel bizonyítása egyszerre végezhető. Ehhez szükséges a következő

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Fennállnak a következő egyenlőtlenségek*

$$\{(1-x)^{-\alpha-1}\cdot(1+x)^{-\beta-1}\}^{(2n)}>0 \quad (\alpha,\beta>-1;\ -1<x<1;\ n=0,1,2,\dots), \tag{2.13}$$

$$(x^{-\alpha-1}e^{x})^{(2n)}>0 \quad (\alpha>-1;\ x\geqq 0;\ n=0,1,2,\dots), \tag{2.14}$$

$$(e^{x^2})^{(2n)}>0 \quad (-\infty<x<\infty;\ n=0,1,2,\dots). \tag{2.15}$$

Bizonyítás. Először (2.13)-at igazoljuk. Az (1.13) alapján

$$\{(1-x)^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}\}^{(n)}= \tag{2.16}$$

$$=(-1)^n 2^n n!(1-x)^{-n-\alpha-1}\cdot(1+x)^{-n-\beta-1}P_n^{(-n-\alpha-1,\,-n-\beta-1)}(x).$$

SZEGŐ [21] 6.72. tétele szerint a

$$E(u)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}0 & \text{ha} \quad u\leqq 0\\ [u] & \text{ha} \quad u>0 \quad \text{és nem egész,}\\ u-1 & \text{ha} \quad u=1,2,3,\dots\end{cases} \tag{2.17}$$

$$X(\alpha,\beta)\overset{\text{def}}{=}E\left\{\frac{1}{2}(|2n+\alpha+\beta+1|-|\alpha|-|\beta|+1)\right\}, \tag{2.18}$$

$$N_1(\alpha,\beta)\overset{\text{def}}{=}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\text{-nek } (-1,1)\text{-be eső gyökeinek a száma,} \tag{2.19}$$

jelölésekkel, ha $\alpha\neq -1,-2,-3,\dots;\ \beta\neq -1,-2,-3,\dots;\ n+\alpha+\beta\neq -1,-2,-3,\dots,$ akkor

$$N_1(\alpha,\beta)=\begin{cases}2[(x(\alpha,\beta)+1)/2] & \text{ha} \quad (-1)^n\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}>0\\ 2[x(\alpha,\beta)/2]+1 & \text{ha} \quad (-1)^n\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}<0.\end{cases} \tag{2.20}$$

Jelen esetben ezt $P_n^{(-n-\alpha-1,\,-n-\beta-1)}(x)$-re alkalmazzuk. A (2.16) alapján elég megmutatni, hogy $P_n^{(-n-\alpha-1,\,-n-\beta-1)}(x)$-nek páros n-re $(-1,1)$-ben nincs gyöke, és ezen intervallum valamely pontjában pozitív. A

$$(\alpha)_k\overset{\text{def}}{=}\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1),\quad (\alpha)_0\overset{\text{def}}{=}=1 \quad \text{ha} \quad \alpha\neq 0, \tag{2.21}$$

$$\Gamma(n+1)=n!, \tag{2.22}$$

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}=\frac{(\alpha-k+1)_k}{k!}, \tag{2.23}$$

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)}=(a-k)_k,\quad \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+k-n)}=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)}\frac{(a)_k}{(a-n)_k}, \tag{2.24}$$

$$_pF_q(a_i;\,b_j;\,x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdot\ldots\cdot(a_p)_k}{(b_1)_k\cdot\ldots\cdot(b_q)_k}\frac{x^k}{k!}, \tag{2.25}$$

összefüggések közül az első négy felhasználásával kapjuk páros n-re

$$(2.26)\qquad (-1)^n\binom{-\alpha-1}{n}\binom{-\beta-1}{n}=(-1)^n\frac{(-n-\alpha)_n}{n!}\frac{(-n-\beta)_n}{n!}=$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}{(n!)^2\Gamma(-n-\alpha)\Gamma(-n-\beta)}=(-1)^n\frac{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}{(n!)^2}>0.$$

A (2.18) alapján

$$(2.27)\quad X(-n-\alpha-1,\ -n-\beta-1)=E\left(\frac{1}{2}\{|-\alpha-\beta-1|-|n+\alpha+1|-|n+\beta+1|+1\}\right)=$$

$$=\begin{cases}E\left(\frac{1}{2}\{\alpha+\beta+1-n-\alpha-1-n-\beta-1+1\}\right) & \text{ha}\quad \alpha+\beta>-1\\ E\left(\frac{1}{2}\{-\alpha-\beta-1-n-\alpha-1-n-\beta-1+1\}\right) & \text{ha}\quad -2<\alpha+\beta<-1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}E\left(\frac{1}{2}(-2n)\right)=0 & \text{ha}\quad \alpha+\beta>-1\\ E\left(\frac{1}{2}(-2-2\alpha-2\beta-2n)\right)=0 & \text{ha}\quad -2<\alpha+\beta<-1,\end{cases}$$

és így (2.20) alapján kapjuk páros n-re

$$(2.28)\qquad N_1(-n-\alpha-1,\ -n-\beta-1)=0$$

$$(\alpha,\beta>-1;\ \alpha,\beta\neq-1,-2,\ldots;\ n+\alpha+\beta\neq-1,-2,\ldots).$$

Másrészt

$$(2.29)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}\quad (\text{l. [20], (4.1.1)}),$$

amiből (2.21), ..., (2.24) és (2.26) alapján az $\alpha,\beta\neq-1,-2,\ldots;\alpha+\beta+n\neq-1,-2,\ldots$ feltevések miatt kapjuk

$$(2.30)\qquad P_n^{(-n-\alpha-1,\,-n-\beta-1)}(1)=\binom{-\alpha-1}{n}=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}>0.$$

A (2.28) és (2.30) kiadja (2.13)-at az $\alpha,\beta>-1,\alpha,\beta\neq-1,-2,-3,\ldots,\ n+\alpha+\beta\neq-1,-2,-3,\ldots$ esetre. Ebből a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomok gyökeinek az α,β paraméterektől való folytonos függése (l. [21]) alapján közvetlenül adódik (2.13) az általános esetre.

A (2.14) bizonyításához nem használható közvetlenül (1.18). Komplex függvénytan felhasználásával azonban belátható, hogy az előző esethez teljesen hasonlóan járhatunk el, azaz (1.18)-ból megkapható a (2.16)-hoz analóg összefüggés a mostani esetre is. Most egy más utat mutatunk a (2.16)-hoz analóg összefüggés igazolására. A

$$(2.31)\qquad {}_1F_1(a,b;x)=e^x{}_1F_1(b-a,b;-x)\quad (\text{l. Snow [23], 393. o.})$$

és

$$(2.32)\qquad L_n^{(\alpha)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}{}_1F_1(-n,\alpha+1;x)\quad (\text{l. [21], (5.3.3)})$$

felhasználásával kapjuk, hogy

(2.33)

$$\left(\frac{e^x}{x^{\alpha+1}}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x^{k-\alpha-1})^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (k-\alpha-1)(k-\alpha-2)\dots(k-\alpha-n)x^{k-n-\alpha-1} =$$

$$= \frac{1}{x^{n+\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (k-\alpha-1)(k-\alpha-2)\dots(k-\alpha-n)x^k = \frac{1}{x^{n+\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k-\alpha-n)} x^k =$$

$$= \frac{1}{x^{n+\alpha+1}} \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(-\alpha-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_k}{(-\alpha-n)_k} \frac{x^k}{k!} = \frac{(\alpha+1)_n}{x^{n+\alpha+1}} (-1)^n {}_1F_1(-\alpha, -\alpha-n, x) =$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{x^{n+\alpha+1}} e^x (-1)^n {}_1F_1(-n, -\alpha-n; -x) = (\alpha+1)_n \frac{e^x}{x^{n+\alpha+1}} (-1)^n \frac{L_n^{(-n-\alpha-1)}(-x)}{L_n^{(-n-\alpha-1)}(0)}.$$

A (2.33) összefüggés felhasználásával a bizonyítás az előzőhöz teljesen hasonló számolással fejezhető be, csak most SZEGŐ [21] 6.73 tételére kell hivatkozni.

A (2.15) összefüggés nyilvánvaló. Ezzel a 2.1. segédtétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a (2.13) és (2.14)-re két másik bizonyítást is sikerült adni, amelyekben nem kell hivatkozni SZEGŐ tételeire. Egyik a *Cauchy*-féle integrálformulán alapul, a másik pedig valósban maradva igazolja (2.13) és (2.14)-et. Azért az itteni bizonyítást közöltük, mert tanulságosabbnak tartjuk ezt. Az itt közölt bizonyítások a feladat nehézségét a *Jacobi*- és *Laguerre*-polinomok gyökeinek eloszlására vezetik vissza, s ez a mód máskor is alkalmazható esetleg.

2.2. SEGÉDTÉTEL. *Fennállnak a következő egyenlőtlenségek*

$$\text{(2.34)} \quad \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1-x_k)^{\alpha+1}(1+x_k)^{\beta+1}} \left(\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \geqq 0$$

$$(-1 < x < 1;\ \alpha, \beta > -1),$$

$$\text{(2.35)} \quad \frac{e^x}{x^{\alpha+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{x_k}}{x_k^{\alpha+1}} \left(\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \geqq 0 \quad (x \geqq 0;\ \alpha > -1),$$

$$\text{(2.36)} \quad e^{x^2} - \sum_{k=1}^{n} e^{x_k^2} \left(\frac{H_n(x)}{H_n'(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \geqq 0 \quad (-\infty < x < \infty),$$

ahol x_k $(k=1, \dots, n)$ *rendre a* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$, $H_n(x)$ *polinomok gyökeit jelölik.*

Bizonyítás. Közvetlenül adódnak a Bevezetésben kimondott alaplemmát rendre az $\big(a=-1,\ b=1,\ f(x)=(1-x)^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1},\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x_k)=0\ (k=1, \dots, n)\big)$; $\big(a=0,\ b=\infty, f(x)=(x^{\alpha+1}e^{-x})^{-1},\ L_n^{(\alpha)}(x_k)=0\ (k=1, \dots, n)\big)$; $\big(a=-\infty,\ b=\infty,\ f(x)=e^{x^2},\ H_n(x_k)=0\ (k=1, \dots, n)\big)$ esetekre alkalmazva s közben figyelembe véve a 2.1. segédtételt.

A továbbiakban csak a II. tétel *bizonyítását* részletezzük, mivel az I. tételé (és a **C.** pontban idézett tételé is) teljesen hasonló.

Először tegyük fel, hogy létezik egy, a (2.6) és (2.7)-nek eleget tevő legfeljebb $2n-2$-edfokú interpolációs eljárás (hogy ilyen létezik, azt látni fogjuk a bizonyítás második részében). Legyen $1 \leqq k \leqq n$, és alkalmazzuk a mostani esetre (2.6)-ot az

$$y_k^* = 0, \quad y_i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, \ldots, n)$$

választással. Ekkor kapjuk, hogy

$$0 \leqq \frac{e^{x_k}}{e^x} \frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}} r_k(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0;\ k = 1, \ldots, n). \tag{2.37}$$

A (2.3) és (2.37) alapján

$$r_k(x_i) = r_k'(x_i) = 0 \quad (k, i = 1, \ldots, n) \tag{2.38}$$

azaz $r_k(x)$ osztható $\left(\frac{\omega(x)}{x-x_k}\right)^2$-nek $k=1, \ldots, n$ esetén, ahol

$$\omega(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{n} (x-x_k). \tag{2.39}$$

Figyelembe véve (2.7)-et is azt kapjuk, hogy

$$r_k(x) = \left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.40}$$

A (2.3) alapján

$$\left(\frac{e^{x_k}}{e^x} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}} r_k(x)\right)'_{x=x_k} = 1 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

azaz

$$r_k'(x_k) + \frac{\alpha+1}{x_k} - 1 = 0.$$

Tekintettel (1.6) és (2.40)-re ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} + \frac{\alpha+1}{x_k} - 1 = 0,$$

azaz

$$X_k \omega''(x_k) + (\alpha+1-x_k)\omega'(x_k) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

tehát

$$X\omega''(x) + (\alpha+1-x)\omega'(x) + C\omega(x) = 0$$

alkalmas C állandóval. Tekintettel (1.19)-re ez azt jelenti, hogy

$$\omega(x) = C_1 L_n^{(\alpha)}(x)$$

alkalmas C_1 állandóval, amint ez jól ismert. Azt kaptuk tehát, hogy a II. tétel feltételeiből

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2$$

következik. Az, hogy a kapott $R_n(x)$-re valóban fennáll (2.6) a $\varrho(x)=x^{\alpha+1}e^{-x}$ választással, egyszerűen adódik (2.35)-öt a következő alakjában használva

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}}{e^x}\cdot\frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}}\,l_k^2(x)\leqq 1\quad (x\geqq 0;\ \alpha>-1;\ n=0,1,2,\dots),$$

felhasználva a következő azonosságot

$$0\leqq x^{\alpha+1}e^{-x}\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x)=\sum_{k=1}^{n}[(y_k-y_k^*)x_k^{\alpha+1}e^{-x_k}]\cdot\left[\frac{e^{x_k}}{e^x}\cdot\frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}}\cdot r_k(x)\right].$$

Ezzel a II. tétel bizonyítását befejeztük.

Néhány megjegyzést fűzünk az eddigiekhez. Érdekes volna az eddigieket általános $\varrho(x)$ esetére vizsgálni, azaz $\varrho(x)$-ről csupán bizonyos tulajdonságokat feltéve. A II. tétel bizonyításából látható, hogy a bizonyítás menete elvezet bennünket egy, a $\varrho(x)$-ből egyszerűen adódó súlyfüggvényre ortogonális polinomrendszer differenciálegyenletéhez. Ez pedig egy más, régi probléma szempontjából is fontos lehet. A régi probléma az, hogy adjunk meg súlyfüggvényeknek egy lehetőleg tág osztályát, amelyekre ortogonális polinomoknak van differenciálegyenlete, azaz e polinomok kielégítenek egy másodrendű differenciálegyenletet. Természetesen n-től független együtthatókkal rendelkező differenciálegyenletről van szó, hasonlóan (1.14) és (1.19)-hez.

Nem várható még jó $\varrho(x)$-ek esetében sem, hogy mindig létezik olyan x_k $(k=1,\dots,n)$ alappontrendszer, amelyen van (2.6) és (2.7)-nek egyidejűen eleget tevő interpolációs eljárás.

A következőkben, az I. és II. tételekben nyert stabil interpolációs eljárásokra konvergenciatételeket fogunk bizonyítani. Amint azt már említettük a (2.9) és (2.10) eljárásokra BALÁZS és TURÁN (l. [1], [5]) igazoltak konvergenciatételeket.

Az 1. § jelölései mellett tekintsük a következő interpolációs eljárást:

$$R_n(f,x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot l_k^2(x). \tag{2.41}$$

Látható, hogy (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) ennek speciális esetei. Röviden összefoglaljuk, hogy milyen eredmények ismertek eddig a (2.41) eljárásra.

E. Az $a=-1$, $b=1$, $(1-x_k^2)P_{n-2}^{(0,0)}(x_k)=0$ $(k=1,\dots,n)$ esetre FEJÉR (l. [9]) igazolta, hogy $[-1,1]$-ben folytonos $f(x)$ függvény esetén $R_n(f,x)\to f(x)$ egyenletesen $[-1,1]$-ben. Ugyanebben a dolgozatában a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x_k)=0$ $(k=1,\dots,n)$ $(-1<\alpha,\beta<0)$ esetet is vizsgálta és bizonyította a következő limeszrelációkat:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha}\quad x=1\\[1ex] 1 & \text{ha}\quad -1<x<1\\[1ex] \dfrac{1}{-\beta} & \text{ha}\quad x=-1\end{cases}\qquad (-1<\alpha,\beta<0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)=\begin{cases}1 & \text{ha}\quad -1<x<1\\ +\infty & \text{ha}\quad x=\pm 1\end{cases}\qquad (\alpha=\beta=0).$$

F. Tetszőleges normális alappontrendszerre GRÜNWALD (l. [8]) igazolta, hogy $[-1, 1]$-ben folytonos $f(x)$ esetén $R_n(f, x) \to f(x)$ egyenletesen $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban. Megjegyezte, hogy a ± 1 pontokban általában nincs konvergencia, amit az **E.**-ben először felírt limeszreláció mutat (ugyanis könnyen belátható, hogy $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ gyökei $-1<\alpha, \beta<0$ esetben normális pontrendszert alkotnak $[-1, 1]$-ben). GRÜNWALD tételéből következik, hogy $[-1, 1]$-ben normális pontrendszer esetén is

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) \equiv 1 \quad (-1 < x < 1).$$

Ugyanez a limeszreláció következik BALÁZS (l. [1]) tételéből a $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x_k) = 0$ $(k=1, \dots, n)$ $(\alpha \geqq 0)$ esetre is, amikor már ezen alappontrendszer nem normális (könnyen belátható). BALÁZS és TURÁN egy konvergenciatételéből (l. [5]) következik az említett limeszreláció a $H_n(x_k)=0$ $(k=1, \dots, n)$ $(-\infty<x<+\infty)$ esetre is.

A következőkben a most ismertetett eredményeket kiegészítjük. Megjegyezzük, hogy a (2.41) eljárásra a konvergencia általános feltételei nincsenek tisztázva úgy, mint ahogy megvizsgálták e kérdést a *Lagrange*- vagy a *Hermite—Fejér*-interpolációnál. Hasonlóan ahhoz, ahogy BALÁZS és TURÁN tették, a 2.2. segédtételben nyert egyenlőtlenségeket lényegesen kihasználjuk a konvergenciatételeink bizonyításában, s ez lehetővé teszi, hogy a JACOBI, LAGUERRE és HERMITE polinomokra vonatkozó legegyszerűbb összefüggéseket használjuk csupán. Nem lesz szükségünk mélyen fekvő asszimptotikus formulákra.

A következőkben mindenütt C-vel x-től és n-től független konstansot fogunk jelölni, indexet nem használunk. Ugyanazon formulán belül is különbözhet két C. Ez a jelölés egyszerűsít. A következő tételeket fogjuk igazolni.

III. TÉTEL (l. [12]). *Ha* $\alpha, \beta > -1$, $f(x)$ *a* $[-1, 1]$*-ben folytonos függvény, akkor a* (2.11) *eljárásra*

$$|R_n^{(\alpha,\beta)}(f, x) - f(x)| \leqq C\|f\|_{[-1,1]} \cdot n^{-1/2} + C\omega(f; -1, 1; n^{-1/2})$$

$$(-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon, \varepsilon > 0)$$

becslés igaz, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(l) = \begin{cases} \dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha} \quad -1 < \alpha < 0, \beta > -1 \\ +\infty & \text{ha} \quad \alpha \geqq 0, \beta > -1. \end{cases}$$

KÖVETKEZMÉNYEK. 1. A III. tétel feltételei mellett $R_n^{(\alpha,\beta)}(f, x) \to f(x)$ egyenletesen $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban $(\alpha, \beta > -1, \varepsilon > 0)$.

2. Fennáll a következő limeszreláció:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) = 1 \quad (\alpha, \beta > -1, -1 < x < 1).$$

Ez a konvergencia egyenletes $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban, tehát

$$(2.42)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha } x = 1,\ -1<\alpha<0,\ \beta>-1 \\ +\infty & \text{ha } x=1,\ \alpha\geqq 0,\ \beta>-1 \\ 1 & \text{ha } -1<x<1;\ \alpha,\beta>-1 \\ \dfrac{1}{-\beta} & \text{ha } x=-1,\ -1<\beta<0,\ \alpha>-1 \\ +\infty & \text{ha } x=-1,\ \beta\geqq 0,\ \alpha>-1. \end{cases}$$

Ebből látszik, hogy ± 1-ben általában nincs konvergencia.

IV. TÉTEL (l. [15]). *Ha* $\alpha>-1$, $f(x)$ *folytonos* $[0,\infty)$*-en,* $f(x)=0(e^x x^{-\alpha-\varepsilon})$ $(x\geqq 1, x\to\infty; \varepsilon>0)$, *akkor a* (2.12) *eljárásra fennáll az*

$$|R_n^{(\alpha)}(f,x)-f(x)| \leqq C(\|f\|_{[0,d]}+\|f\|^*)n^{-1/4}+C\omega(f;0,2d;n^{-1/4})$$

$$(0<\varepsilon'\leqq x\leqq d,\ d>1)$$

becslés, ahol

$$\|f\|^* = 2\sup_{1\leqq x<\infty}\left(|f(x)|/e^x x^{-\alpha-\varepsilon}\right),$$

továbbá

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k^2(0) = \begin{cases} \dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha } -1<\alpha<0 \\ +\infty & \text{ha } \alpha\geqq 0, \end{cases}$$

KÖVETKEZMÉNYEK. 1. A IV. tétel feltételei mellett $R_n^{(\alpha)}(f,x)\to f(x)$ egyenletesen $[\varepsilon', d]$-ben.

2. Fennáll a következő limeszreláció:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) = 1 \quad (x>0, \alpha>-1).$$

Ez a konvergencia egyenletes $[\varepsilon', d]$-ben, tehát

$$(2.43)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha } x=0,\ -1<\alpha<0 \\ +\infty & \text{ha } x=0,\ \alpha\geqq 0 \\ 1 & \text{ha } x>0,\ \alpha>-1. \end{cases}$$

Ebből látszik, hogy 0-ban általában nincs konvergencia. A III. tétel bizonyításához szükséges néhány segédtétel.

2.3. SEGÉDTÉTEL.

$$(2.44)\qquad \left|1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right| \leqq C\cdot n^{-1/2} \quad (-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon;\ \alpha,\beta>-1).$$

Bizonyítás. (1.9) és (1.14)-ből a közismert

$$\sum_{k=1}^{n}\left[1+\frac{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x_k}{1-x_k^2}(x-x_k)\right]l_k^2(x)\equiv 1 \tag{2.45}$$

azonosság adódik, amiből

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right|\leqq C\sum_{k=1}^{n}\frac{|x-x_k|}{1-x_k^2}\,l_k^2(x)=C\Big\{\sum_{|x-x_k|\leqq n^{-1/2}}{}_k+\sum_{|x-x_k|>n^{-1/2}}{}_k\Big\}= \tag{2.46}$$

$$=C\{A+B\}.$$

A (2.34) egyenlőtlenséget a

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-x}{1-x_k}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1+x}{1+x_k}\right)^{\beta+1}l_k^2(x)\leqq 1\quad(\alpha,\beta>-1;\ -1\leqq x\leqq 1) \tag{2.47}$$

alakban használva, kapjuk, hogy

$$A\leqq Cn^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-x}{1-x_k}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1+x}{1+x_k}\right)^{\beta+1}l_k^2(x)\leqq Cn^{-1/2}\quad(-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon). \tag{2.48}$$

Másrészt nyilvánvalóan

$$B\leqq Cn^{1/2}\left[\frac{1}{2^{(\alpha+\beta+1)/2}}(1-x)^{(2\alpha+1)/4}(1+x)^{(2\beta+1)/4}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2\times \tag{2.49}$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)^{-1}\{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}.$$

Szegő ([21] (15.1.6) és (15.3.1)) alapján

$$\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)^{-1}\{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}= \tag{2.50}$$

$$=\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx\leqq C,$$

s így (2.49)-ből (1.15), (1.16), (1.17) alapján

$$B\leqq Cn^{-1/2}. \tag{2.51}$$

(2.46), (2.48) és (2.51) éppen (2.44)-et adja.

2.4. Segédtétel.

$$\sum_{k=1}^{n}|x-x_k|\,l_k^2(x)\leqq Cn^{-1/2}\quad(\alpha,\beta>-1;\ -1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon). \tag{2.52}$$

Bizonyítás. (2.52) közvetlenül adódik az előző segédtételben végzett becslések alapján a

$$\sum_{k=1}^{n}|x-x_k|l_k^2(x)=\sum_{|x-x_k|\leqq n^{-1/2}}{}_k+\sum_{|x-x_k|>n^{-1/2}}{}_k\leqq Cn^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)+$$

$$+Cn^{1/2}\left[\frac{1}{2^{(\alpha+\beta+1)/2}}(1-x)^{(2\alpha+1)/4}(1+x)^{(2\beta+1)/4}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)^{-1}\{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}$$

egyenlőtlenségből.

A III. tétel *bizonyítására* térve, nyilvánvalóan

$$|R_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)-f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\big(f(x)-f(x_k)\big)l_k^2(x)+f(x)\left(1-\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right)\right|\leqq$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{n}|f(x)-f(x_k)|l_k^2(x)+|f(x)|\cdot\left|1-\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right|,$$

másrészt a folytonossági modulus (1.11) tulajdonsága alapján

$$|f(x)-f(x_k)|\leqq\omega(f;\,-1,1;\,|x-x_k|)\leqq\omega(f;\,-1,1;\,n^{-1/2})\{n^{1/2}|x-x_k|+1\},$$

s így (2.44) és (2.52) miatt

$$|R_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)-f(x)|\leqq\omega(f;\,-1,1;\,n^{-1/2})\left\{n^{1/2}\sum_{k=1}^{n}|x-x_k|l_k^2(x)+\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right\}+$$

$$+C\|f\|_{[-1,1]}n^{-1/2}\leqq C\|f\|_{[-1,1]}\cdot n^{-1/2}+C\omega(f;\,-1,1;\,n^{-1/2}).$$

Ezzel a III. tétel első részét bebizonyítottuk. Ez hasonló volt ahhoz, ahogy BALÁZS (l. [1]) $\alpha=\beta\geqq 0$ esetre igazolta ugyanezt. Megjegyezzük, hogy [12]-ben élesebb becslést igazoltunk mint ami a II. tételben szerepel, azonban aszimptotikus formulákat használtunk, s a bizonyítás bonyolultabb. Ekkor ugyanis a (2.47) egyenlőtlenséget nem sikerült igazolni. A III. tételbeli limeszreláció $\alpha\neq 0$ esetben azonnal következik az alábbi, (2.45) és (2.50)-ből rögtön adódó

$$\sum_{k=1}^{n}l_k^2(1)=\frac{1}{-\alpha}\left\{1-(1+\beta)\binom{n+\alpha}{n}^2\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)^{-1}\{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{-\alpha}\left\{1-\binom{n+\alpha}{n}^2\frac{1+\beta}{2^{\alpha+\beta+1}}\,\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx\right\}$$

összefüggésből.

Az $\alpha=0$ eset bizonyítására tekintsük a megfelelő kvadratura-eljárást az

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha}\quad -1\leqq x<0\\[4pt] \dfrac{1}{2^{\beta+1}}\cdot\dfrac{1+x}{1-x} & \text{ha}\quad 0\leqq x\leqq 1-\varepsilon\quad(\varepsilon>0)\\[4pt] 0 & \text{ha}\quad 1-\varepsilon\leqq x\leqq 1\end{cases}$$

függvényre, azaz

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\lambda_k = \sum_{0 \leqq x_k \leqq 1-\varepsilon} {}_k \, (1-x_k)^{-2}\{P_n^{(0,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq \sum_{k=1}^{n} l_k^2(1),$$

ahol

$$\lambda_k = 2^{\beta+1}(1-x_k^2)^{-1}\{P_n^{(0,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2} \quad (\text{l. } [21],\ (15.3.1))$$

a *Cotes* számai a kvadratura-eljárásnak az $\alpha=0$, $\beta>-1$ esetre. Mivel SZEGŐ ([21] 15.2.3) tétele alapján

$$Q_n(f) \to \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{2^{\beta+1}} \frac{1+x}{1-x}(1+x)^\beta\,dx > c \cdot |\log \varepsilon|,$$

ezért azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(1) = +\infty \quad (\alpha = 0, \beta > -1).$$

Ezzel a III. tétel bizonyítását befejeztük. Megjegyezzük, hogy FEJÉR (l. [9]) a (2.42)-nek $-1<\alpha, \beta<0$ speciális esetét az ittenitől eltérő módon igazolta, míg az $\alpha=0$-nál ugyanezt tettük amit FEJÉR az utóbbi határérték $\alpha=0, \beta=0$ speciális esetének bizonyításánál.

A IV. tétel bizonyításához szükséges néhány segédtétel.

2.5. SEGÉDTÉTEL. *Fennáll a*

$$\text{(2.53)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{x_k}}{(x_k+1)^{1+\alpha+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{x_k L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)^2} \leqq$$

$$\leqq \left(\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+1)^{1+\alpha+\varepsilon}}\,dx\right) \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \quad (\alpha > -1, \varepsilon > 0)$$

egyenlőtlenség, ahol x_k $(k=1, \ldots, n)$ $L_n^{(\alpha)}(x)$ *gyökeit jelöli ezután.*

Bizonyítás. A Bevezetésben kimondott lemmát $f(x)=e^x/(x+1)^{1+\alpha+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$, $L_n^{(\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ esetre alkalmazva, (2.13)-alapján

$$\frac{e^x}{(x+1)^{1+\alpha+\varepsilon}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{x_k}}{(x_k+1)^{1+\alpha+\varepsilon}} l_k(x) - \sum_{k=1}^{n} s(x_k)(x-x_k)l_k^2(x) \geqq 0$$

$$(x \geqq 0, \alpha > -1, \varepsilon > 0),$$

adódik, ahol

$$s(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{(x+1)^{1+\alpha+\varepsilon}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{x_k}}{(x_k+1)^{1+\alpha+\varepsilon}} l_k(x)\right).$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát $x^\alpha e^{-x}$-szel szorozva, integrálva, az $L_n^{(\alpha)}(x)$-ek ortogonalitása és (1.23)-alapján nyerjük (2.53)-at.

Megjegyezzük, hogy ugyanilyen gondolatmenettel nyerhető a

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{m-1} e^{\beta x_k} \{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq \left(\frac{1}{1-\beta}\right)^{m+\alpha+1} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}$$

$$(\alpha > -1,\ \beta < 1,\ m \geqq 0 \text{ egész}),$$

egyenlőtlenség is, amely $\beta=0$, $0 \leqq m \leqq 2n-1$ esetben az (1.22) azonosságba megy át. Az utóbbi gondolatmenetettel először BALÁZS és TURÁN ([6]) dolgozatában találkozunk.

2.6. SEGÉDTÉTEL.

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right| \leqq C \cdot n^{-1/4} \quad (0<\varepsilon \leqq x \leqq d,\ \alpha > -1). \tag{2.54}$$

Bizonyítás. (1.9) és (1.19)-ből a közismert

$$\sum_{k=1}^{n} \left[1-\frac{x_k-\alpha-1}{x_k}(x-x_k)\right] l_k^2(x) \equiv 1 \tag{2.55}$$

azonosság adódik, amiből

$$\left|\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)-1\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k+|\alpha+1|}{x_k} |x-x_k| l_k^2(x) = \sum_{|x-x_k| \leqq n^{-1/4}}{}_k + \sum_{|x-x_k| > n^{-1/4}}{}_k = A+B. \tag{2.56}$$

A (2.35)-öt a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{x_k}}{e^x} \frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}} l_k^2(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0;\ \alpha > -1) \tag{2.57}$$

alakban használva, kapjuk, hogy

$$A \leqq Cn^{-1/4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{x_k}}{e^x} \frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}} l_k^2(x) \leqq Cn^{-1/4} \quad (0<\varepsilon \leqq x \leqq d). \tag{2.58}$$

Másrészt (1.22), (1.24) és (1.25) alapján nyilvánvaló, hogy

$$B \leqq n^{1/4} L_n^{(\alpha)}(x)^2 \left\{\sum_{k=1}^{n} (L_n^{(\alpha)\prime}(x_k))^{-2} + |\alpha+1| \sum_{k=1}^{n} x_k^{-1} (L_n^{(\alpha)\prime}(x_k))^{-2}\right\} \leqq Cn^{-1/4}. \tag{2.59}$$

Az utóbbi két egyenlőtlenség kiadja (2.54)-et, sőt igazolást nyert a

$$\sum_{k=1}^{n} |x-x_k| l_k^2(x) \leqq C \cdot n^{-1/4} \quad (0<\varepsilon' \leqq x \leqq d,\ \alpha > -1) \tag{2.60}$$

becslés is.

2.7. SEGÉDTÉTEL.

$$\sum_{x_k > 2d}{}_k e^{x_k} x_k^{-\alpha-\varepsilon} \cdot l_k^2(x) \leqq C \cdot n^{-1/2} \quad (0<\varepsilon' \leqq x \leqq d,\ \alpha > -1). \tag{2.61}$$

Bizonyítás. (2.61) közvetlenül adódik (1.24), (1.25) és (2.53) felhasználásával a nyilvánvaló

$$\sum_{x_k>2d} e^{x_k} x_k^{-\alpha-\varepsilon} l_k^2(x) = L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{x_k>2d} \frac{e^{x_k}}{x_k^{2+\alpha+\varepsilon}} \left(\frac{x_k}{x-x_k}\right)^2 \{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq$$

$$\leqq 4L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{x_k>2d} \frac{e^{x_k}}{x_k^{2+\alpha+\varepsilon}} \frac{1}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)^2}$$

egyenlőtlenségből.

A IV. tétel *bizonyítására* térve, nyilvánvalóan

$$|R_n^{(\alpha)}(f, x)-f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} [f(x)-f(x_k)]\, l_k^2(x) + f(x)\left[1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right]\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{x_k\leqq 2d} |f(x)-f(x_k)|\, l_k^2(x) + \sum_{x_k>2d} |f(x)|+|f(x_k)|\, l_k^2(x) + |f(x)|\cdot\left|1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right|,$$

másrészt a folytonossági modulus (1.11) tulajdonsága alapján

$$(2.62)\qquad |f(x)-f(x_k)| \leqq \omega(f; 0, 2d; |x-x_k|) \leqq$$

$$\leqq \omega(f; 0, 2d; n^{-1/4})\{n^{1/4}\cdot|x-x_k|+1\},$$

s így (2.54), (2.60), (2.61) miatt a

$$|R_n^{(\alpha)}(f, x)-f(x)| \leqq \omega(f; 0, 2d; n^{-1/4})\left\{n^{1/4}\sum_{k=1}^{n} |x-x_k|\, l_k^2(x) + \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right\} +$$

$$+\|f\|^* \sum_{x_k>2d} e^{x_k} x_k^{-\alpha-\varepsilon} l_k^2(x) + \|f\|_{[0,d]}\cdot\left|1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right|$$

egyenlőtlenségből következik a IV. tétel első fele. A IV. tételbeli limeszreláció $\alpha\neq 0$ esetben azonnal következik az alábbi, (1.22) és (2.55)-ből rögtön adódó

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^2(0) = \frac{1}{-\alpha}\left\{1-\binom{n+\alpha}{n}^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}(L_n^{(\alpha)\prime}(x_k))^{-2}\right\} = \frac{1}{-\alpha}\left\{1-\binom{n+\alpha}{n}\right\}$$

összefüggésből. Az $\alpha=0$ eset bizonyítására tekintsük a megfelelő kvadratura-eljárást az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \leqq x < \varepsilon \\ \dfrac{1}{x} & \text{ha} \quad \varepsilon \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$$

függvényre, azaz

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\lambda_k = \sum_{\varepsilon\leqq x_k\leqq 1} x_k^{-2}\{L_n^{(0)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq \sum_{k=1}^{n} l_k^2(0),$$

ahol

$$\lambda_k = x_k^{-1}\{L_n^{(0)\prime}(x_k)\}^{-2} \quad (\text{l. [21], (15.3.5)})$$

a *Cotes* számai a kvadratura-eljárásnak az $\alpha=0$ esetre. Most FREUD ([10] III.1.6(a)) tétele alapján

$$Q_n(f) \to \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x} e^{-x}\, dx > C|\log \varepsilon|,$$

s ezért

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(0) = +\infty \quad (\alpha = 0).$$

Ezzel a IV. tétel bizonyítását befejeztük.

A bizonyított limeszreláció most is azt mutatja, hogy az interpoláció intervallumának végpontjában, most a 0-ban, általában nincs konvergencia.

Néhány megjegyzést fűzünk eddigi eredményeinkhez. SZABADOS (l. [19], [20]) a *Jacobi-* és *Laguerre*-gyökökön készített *Hermite—Fejér*-interpolációt vizsgálta. Az $f(x)$ függvényre tett alkalmas feltevések mellett konvergenciát bizonyított az interpoláció intervallumának végpontjaiban is, sőt egyenletes konvergenciát az egész intervallumon. Megadta ennek az $f(x)$-re vonatkozó szükséges és elégséges feltételeit. Amint ezt SZABADOS [19] megjegyezte, az ő vizsgálatának gyökerei FEJÉR-hez és a [3] dolgozat eredményeihez nyúlnak vissza. Ezen vizsgálatok kezdeményezője, úgy tudom, FREUD GÉZA volt újabban.

SZABADOS módszere alkalmazható a III. és IV. tételek finomítására. Például (2.42) és (2.43) felhasználásával ugyanezeket a következőképpen általánosíthatjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k^2(1) = \frac{1}{-\alpha} f(1) \quad (-1 < \alpha < 0, \beta > -1),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k^2(0) = \frac{1}{-\alpha} f(0) \quad (-1 < \alpha < 0),$$

feltéve, hogy $f(x)$ folytonos $[-1, 1]$-ben, ill. $[0, \infty)$-en, és az utóbbi esetben $f(x) = 0(e^{\gamma x})$ $(x\to\infty, \gamma<1)$. Az első összefüggés pl. azt mutatja, hogy $-1<\alpha<0$ esetén az 1 pontban a konvergenciának szükséges és elégséges feltétele az, hogy $f(1)=0$ teljesüljön. Érdekes, hogy az utóbbi feltétel teljesülése esetén többet is állíthatunk, ti. egyenletes konvergencia bizonyítható tetszőleges $-1<a\leqq 1$ esetén $[a, 1]$-ben. Sőt ez az utóbbi is általánosítható, igaz GRÜNVALD [8] utolsó tételének következő kiegészítése: tetszőleges $[-1, 1]$-ben $\varrho(>0)$ normális alappontrendszer esetén, ha a $[-1, 1]$-ben folytonos $f(x)$ függvényre $f(\pm 1)=0$, akkor a (2.41) alatti $R_n(f; x)\to f(x)$ egyenletesen $[-1, 1]$-ben. Ennek az állításnak a bizonyítása a [15] dolgozatban található.

Megjegyzem, hogy (2.42) és (2.43) $\alpha=0$ esetének bizonyításánál kvadratura-eljárást használtunk, és ennek konvergenciájára hivatkoztunk. Ezek közvetlenül is megkaphatók korábbi azonosságainkból, figyelembe véve azt, hogy a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ és $L_n^{(\alpha)}(x)$ gyökei a paramétereknek nagyon „jó" függvényei (l. [21]).

Végül egy jogos kérdés a következő. Az eddigiekből látjuk, hogy a klasszikus ortogonális polinomok gyökeit, vagy egy tetszőleges normális pontrendszert véve alapul, a megfelelő intervallum minden belső pontjában

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) = 1.$$

Vajon egy tetszőleges súlyra ortogonális polinomok gyökeit tekintve szintén igaz ugyanez? Ha nem, akkor a súlyfüggvényre nézve mi ennek pl. egy elég általános elégséges feltétele? Felhasználva FREUD GÉZA

$$\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)} = -\frac{\lambda_n'(\mathrm{w}, x)}{\lambda_n(\mathrm{w}, x)} \quad \left(\omega(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-x_k);\ \omega(x) \text{ a súlyfüggvény}\right)$$

összefüggését, lehetőség van ennek a kérdésnek a tanulmányozására, ugyanis a baloldal méri az alappontrendszer normális voltát (l. [8]), viszont a jobboldalra már igen jó becslések ismertek nagyon általános súlyfüggvények esetén is.

Végül megjegyzem, hogy a (2.41) eljárásnak a tanulmányozását a *Hermite—Fejér*-interpoláció vizsgálatánál betöltött fontos szerepe is indokolttá teszi, amint erre GRÜNWALD [8] is rámutatott.

3. §. Stabil interpoláció a negatív paraméterű Laguerre polinomok gyökein

Tekintsük az

$$R_n^{(\alpha)}(f, x) = f(0)\frac{L_n^{(\alpha)}(x)^2}{\binom{n+\alpha}{n}} + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\frac{1+\alpha}{x_k}x-\alpha\right) l_k^2(x) = \tag{3.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot r_k(x) \quad (-1 < \alpha \leqq 0)$$

interpolációs eljárást, ahol $L_n^{(\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1, ..., n)$. Nyilvánvalóan

$$R_n^{(\alpha)}(f, x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Ezt az eljárást az $\alpha=0$ esetre EGERVÁRY és TURÁN vezették be, s erről már a 2. § **B.** pontjában szóltunk. Itt azt is említettük, hogy erre az esetre (ti. $\alpha=0$) BALÁZS és TURÁN igazolt konvergenciatételt.

A (3.1) eljárásra igazolni fogjuk a következő stabilitási tulajdonságot.

V. TÉTEL. (l. [13]).

(3.2)

$$0 \leqq e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(y_k-y_k^*)\cdot r_k(x) \leqq \max_k (y_k-y_k^*)\cdot e^{-x_k} \quad (y_0 = y_0^*,\ y_k \geqq y_k^*,\ k = 1, \ldots, n).$$

Bizonyítani fogjuk a (3.1) eljárásra a következő konvergenciatételt.

VI. TÉTEL. (l. [13]). *Ha* $-1<\alpha\leqq 0, f(x)$ *folytonos* $[0, \infty)$*-en*, $f(x)=O(e^x)$ $(x\to\infty)$, *akkor a* (3.1) *eljárásra fennáll a*

(3.3) $$|R_n^{(\alpha)}(f, x)-f(x)| \leqq$$

$$\leqq \begin{cases} C(\|f\|_{[0,d]}+\|f\|^*)n^{-1/4}+C\omega(f; 0, 2d; n^{-1/4}), & \text{ha} \quad -1<\alpha\leqq -\frac{1}{2} \; (0\leqq x\leqq d) \\ C\|f\|_{[0,d]}\cdot n^{-1/4}+C\|f\|^*\{n^{-1/2}+|\alpha|n^{\alpha}\}+C\omega(f; 0, 2d; n^{-1/4}+|\alpha|n^{\alpha}), & \text{ha} \\ & -\frac{1}{2}\leqq \alpha\leqq 0 \end{cases}$$

$$\|f\|^* = 2 \sup_{0\leqq x<\infty} |f(x)|e^{-x}$$

becslés.

KÖVETKEZMÉNY. A IV. tétel feltételei mellett $R_n^{(\alpha)}(f, x)\to f(x)$ egyenletesen $[\varepsilon, d]$-ben.

Megjegyezzük, hogy SHARMA (l. [24]) szintén általánosította EGERVÁRY és TURÁN eljárását, azonban negatív α értékekre SHARMA alappolinomjai nem minden $x\geqq 0$-ra pozitívok, s így nem rendelkezik eljárása ilyenkor a (3.2)-höz hasonló stabilitással.

A (3.1) eljárást nem sikerült úgy karakterizálni, mint ahogy bizonyos eljárásokat jellemeznek az előző § I. és II. tételei. Csupán a (3.2) tulajdonságot sikerült verifikálni.*

Röviden ismertetjük tételeink bizonyítása előtt, hogy milyen meggondolással jutottunk a (3.1) eljáráshoz. A Bevezetés-ben mondott lemma 1. §-beli első bizonyításához hasonlóan igazolható a

$$V(x) = e^x - \left(1+\alpha\sum_{k=1}^{n} e^{x_k} l_k^2(0)\right)\frac{L_n^{(\alpha)}(x)^2}{\binom{n+\alpha}{n}^2} - \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\cdot\left(\frac{1+\alpha}{x_k}x-\alpha\right) l_k^2(x) \geqq 0$$

$$(x\geqq 0;\; -1<\alpha\leqq 0)$$

egyenlőtlenség, figyelembe véve a könnyen ellenőrizhető $V(\infty)=\infty$, $V(0)=V(x_k)=$ $=V'(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ összefüggéseket. Ez az egyenlőtlenség $\alpha=0$ esetben az *Egerváry—Turán*-féle (l. [4]) egyenlőtlenségbe megy át, amely lényeges szerepet játszott a *Balázs—Turán*-féle (l. [5]) konvergenciatétel bizonyításában. Valójában ez az egyenlőtlenség motiválta a (3.1) alappolinomok választását, mivel ha ebben elhagyjuk e^{x_k}-t mindenütt, akkor a baloldali kifejezés $e^x-\sum_{k=1}^{n} r_k(x)$-re redukálódik, és ez volt a helyzet az $\alpha=0$ esetben is.

Végül megjegyzzük, hogy BALÁZS és TURÁN konvergenciatétele $[0, \infty)$-en folytonos és korlátos függvényekre vonatkozott, s így a VI. tétel ezt ilyen irányban is általánosítja.

*MEGJEGYZÉS A KORREKTURA OLVASÁSAKOR:
A [13] dolgozat, amely eredetileg jelen cikk 3. §-ának eredményeit tartalmazta, átírás után időközben megjelent. Ebben a cikkben ez a kérdés is tisztázva van, és jelen dolgozat tárgyát új megvilágításba helyezi.

Az V. tétel *bizonyításához* alkalmazzuk a Bevezetés-ben kimondott lemmát $f(x)=e^x$, $L_n^{(\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1, \dots, n)$ választással. Ekkor kapjuk a

$$e^x - \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\left(\frac{1+\alpha}{x_k}x-\alpha\right) l_k^2(x) \geqq 0 \quad (x \geqq 0,\ -1 < \alpha \leqq 0)$$

egyenlőtlenséget, amit

$$e^{-x}\sum_{k=1}^{n} e^{x_k} r_k(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0,\ -1 < \alpha \leqq 0) \tag{3.4}$$

alakban használva kapjuk az V. tételt a

$$e^{-x}\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x) = e^{-x}\sum_{k=1}^{n}[(y_k-y_k^*)e^{-x_k}][e^{x_k}r_k(x)]$$

azonosság alapján.

Az V. tétel $\alpha=0$ esetét EGERVÁRY és TURÁN a következő élesebb formában igazolták:

$$0 \leqq e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x) \leqq \max_k (y_k-y_k^*)e^{-x_k} \quad (y_k \geqq y_k^*,\ k=0, 1, \dots, n),$$

ugyanis ilyenkor

$$e^x - L_n^{(0)}(x)^2 - \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\frac{x}{x_k} l_k^2(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} e^{x_k} r_k(x) \geqq 0 \quad (x \geqq 0;\ x_0 \overset{\text{def}}{=} 0) \tag{3.5}$$

is igaz. Nálunk viszont szerepel az $y_0=y_0^*$ kikötés. Ettől meg lehetne szabadulni a

$$e^{-x}\frac{L_n^{(\alpha)}(x)^2}{\binom{n+\alpha}{n}} \leqq 1 \quad (x \geqq 0,\ -1 < \alpha < 0)$$

egyenlőtlenség bizonyításával, mivel ebből és (3.4)-ből

$$0 \leqq e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x) \leqq \max_k (y_k-y_k^*)e^{-x_k} \quad (y_k \geqq y_k^*,\ k=0, 1, \dots, n;\ -1<\alpha\leqq 0)$$

következnék. De ezt nem tudom igazolni. Megjegyzem az előbbi egyenlőtlenséggel kapcsolatban, hogy SZEGŐ (l. [22]) komplex függvénytani eszközökkel igazolta a

$$|L_n^{(0)}(x)| \leqq e^{x/2} \quad (x \geqq 0)$$

egyenlőtlenséget, amiből már nagyon egyszerűen következett az általánosabb

$$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \binom{n+\alpha}{n} e^{x/2} \quad (x \geqq 0,\ \alpha \geqq 0) \tag{3.6}$$

egyenlőtlenség. EGERVÁRY és TURÁN (3.5) egyenlőtlenségéből azonban rögtön adódik az $\alpha=0$ eset, amint ezt [4]-ben meg is jegyezték. Viszont negatív α értékekre tudomásom szerint semmilyen becslés sem ismert. Megjegyzem, hogy SHARMA (l. [24]) egy egyenlőtlenségéből közvetlenül adódik a

$$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \binom{n+\alpha}{n} e^{x/2} \quad (0 \leqq x \leqq x_1;\ -1 < \alpha < 0)$$

egyenlőtlenség, ahol x_1 az $L_n^{(\alpha)}(x)$ legkisebb gyöke.

A VI. tétel bizonyításához szükséges néhány segédtétel.

3.1. SEGÉDTÉTEL.

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\right| \leqq C \cdot n^{-1/4} \quad (0 \leqq x \leqq d,\ -1 < \alpha \leqq 0). \tag{3.7}$$

Bizonyítás. A $G(x)=1-\sum_{k=1}^{n} r_k(x)$ függvényre (3.1), (1.6), (1.19), (1.20) alapján

$$G(0) = G(x_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

s így

$$G(x) = x \cdot L_n^{(\alpha)}(x) \cdot g_{n-1}(x), \tag{3.8}$$

ahol $g_{n-1}(x)$ olyan legfeljebb $n-1$ edfokú polinom, amelyre az x_k $(k=1, \dots, n)$ alappontokban (3.1) és (3.8) alapján

$$G'(x_k) = -\frac{1+\alpha}{x_k} - 2l_k'(x_k) = -\frac{1+\alpha}{x_k} - \frac{x_k-\alpha-1}{x_k} = -1 = x_k L_n^{(\alpha)\prime}(x_k) g_{n-1}(x_k)$$

teljesül, amiből

$$\begin{aligned} G(x) &= xL_n^{(\alpha)}(x) \sum_{k=1}^{n} g_{n-1}(x_k) l_k(x) = xL_n^{(\alpha)}(x) \sum_{k=1}^{n} -(x_k)^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-1} l_k(x) = \\ &= xL_n^{(\alpha)}(x) \Big\{ \sum_{|x-x_k| \leqq n^{-1/4}} {}_k + \sum_{|x-x_k| > n^{-1/4}} {}_k \Big\} = xL_n^{(\alpha)}(x)\{A+B\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

A (3.4) alapján nyilván

$$|xL_n^{(\alpha)}(x)A| \leqq \sum_{|x-x_k| \leqq n^{-1/4}} {}_k |x-x_k| \frac{x}{x_k} l_k^2(x) \leqq n^{-1/4} \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{n} r_k(x) \leqq \frac{e^d}{1+\alpha} n^{-1/4}, \tag{3.10}$$

$$(0 \leqq x \leqq d;\ -1 < \alpha \leqq 0).$$

Másrészt (1.22), (1.24), (1.25) alapján

$$\begin{aligned} |x \cdot L_n^{(\alpha)}(x) \cdot B| &\leqq n^{1/4} \cdot x \cdot L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{|x-x_k| > n^{-1/4}} {}_k x_k^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq \\ &\leqq n^{1/4} \cdot x \cdot L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq C \cdot n^{-1/4} \quad (0 \leqq x \leqq d,\ -1 < \alpha \leqq 0). \end{aligned} \tag{3.11}$$

A (3.10) és (3.11) kiadja (3.7)-et.

Megjegyezzük, hogy az $\alpha=0$ esetre ezt a segédtételt BALÁZS és TURÁN (l. [5]) igazolták, de bonyolult módon, s ez a mód nem látszott általánosíthatónak.

3.2. SEGÉDTÉTEL.

$$(3.12)\qquad \sum_{k=0}^{n} |x-x_k| r_k(x) \leqq \begin{cases} Cn^{-1/4} & \text{ha} \quad -1 < \alpha \leqq -\dfrac{1}{2} \\ Cn^{-1/4} + C(|\alpha|)^{1/2} n^{\alpha/2} & \text{ha} \quad -\dfrac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 0 \end{cases} \qquad (0 \leqq x \leqq d).$$

Bizonyítás. (1.24), (1.25), (1.22), (3.4) alapján, a *Schwarz*-egyenlőtlenségből adódó

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} \left(|x-x_k| \sqrt{r_k(x)}\right) \sqrt{r_k(x)}\right\}^2 \leqq \left\{\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\right\} \left\{(1+\alpha) x L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^{-1} \cdot \left(L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\right)^{-2} + \right.$$

$$\left. + |\alpha| L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{k=1}^{n} \left(L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\right)^{-2}\right\}$$

egyenlőtlenség és

$$x \frac{L_n^{(\alpha)}(x)^2}{\binom{n+\alpha}{n}} \leqq Cn^{-1/2} \quad (0 \leqq x \leqq d;\ -1 < \alpha \leqq 0)$$

éppen (3.12)-t adja.

3.3. SEGÉDTÉTEL.

$$(3.13)\qquad \sum_{x_k > 2d} e^{x_k} r_k(x) \leqq \begin{cases} Cn^{-1/2} & \text{ha} \quad -1 < \alpha \leqq -\dfrac{1}{2} \\ Cn^{-1/2} + C|\alpha| n^{\alpha} & \text{ha} \quad -\dfrac{1}{2} \leqq \alpha \leqq 0 \end{cases} \qquad (0 \leqq x \leqq d).$$

Bizonyítás. $-1<\alpha<0$ esetben (3.13) rögtön következik (2.61)-ből a nyilvánvaló

$$0 \leqq \frac{1+\alpha}{x_k} x - \alpha \leqq 1 \quad (-1 < \alpha < 0,\ x_k > 2d,\ 0 \leqq x \leqq d)$$

egyenlőtlenség felhasználásával. Az $\alpha=0$ esetben ez következik (1.24) alapján, (2.53)-at $\varepsilon=1$-nél használva a

$$\sum_{x_k > 2d} e^{x_k} \frac{x}{x_k} l_k^2(x) = x L_n^{(0)}(x)^2 \sum_{x_k > 2d} \frac{e^{x_k}}{x_k^3} \left(\frac{x_k}{x-x_k}\right)^2 \{L_n^{(0)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq$$

$$\leqq 4x L_n^{(0)}(x)^2 \sum_{x_k > 2d} \frac{e^{x_k}}{x_k^3} \frac{1}{L_n^{(0)\prime}(x_k)^2}$$

egyenlőtlenségből.

A VI. tétel *bizonyítására* térve, nyilvánvalóan

$$|R_n^{(\alpha)}(f, x) - f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} [f(x)-f(x_k)] r_k(x) + f(x)\left[1 - \sum_{k=1}^{n} r_k(x)\right]\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{x_k \leqq 2d} |f(x)-f(x_k)| r_k(x) + \sum_{x_k > 2d} |f(x)| + |f(x_k)| r_k(x) + |f(x)| \cdot \left|1 - \sum_{k=1}^{n} r_k(x)\right|,$$

másrészt a folytonossági modulus (1.11) tulajdonsága alapján

$$|f(x)-f(x_k)| \leqq \omega(f; 0, 2d; |x-x_k|) \leqq \omega(f; 0, 2d; n^{-\delta})\{n^\delta|x-x_k|+1\},$$

s így (3.7), (3.12), (3.13) miatt a

$$|R_n^{(\alpha)}(f, x)-f(x)| \leqq \omega(f; 0, 2d; n^{-\delta})\left\{n^\delta \sum_{k=1}^{n} |x-x_k| r_k(x)+\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\right\}+$$

$$+\|f\|^* \sum_{x_k>2d} e^{x_k} r_k(x)+\|f\|_{[0,d]}\left|1-\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\right|$$

egyenlőtlenségből következik a VI. tétel, a δ alkalmas választásával.

4. §. Stabil interpoláció egy pontban előírt deriváltértékkel

Most olyan stabil interpolációs eljárást fogunk megadni $[0, \infty)$-en, amely a függvény deriváltját megadja a 0 pontban. A kapott eljárásra konvergenciatételt is bizonyítunk.

Legyenek

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < +\infty \tag{4.1}$$

az interpoláció alappontjai, az ezekhez tartozó elsőfajú alappolinomok

$$r_0(x), r_1(x), \ldots, r_n(x), \tag{4.2}$$

amelyekre

$$r_k(x_i) = \delta_{k,i} \quad (k, i = 0, \ldots, n) \tag{4.3}$$

és deriváltjukra

$$r_k'(0) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{4.4}$$

Bevezetünk egy $\sigma(x)$ ún. másodfajú alappolinomot, amelyre

$$\sigma(x_k) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{4.5}$$

és deriváltjára

$$\sigma'(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k \neq 0 \\ 1 & \text{ha} \quad k = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Nyilvánvalóan, ha y_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ és y' tetszőleges valós számok, akkor

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k r_k(x)+y'\sigma(x) \tag{4.7}$$

interpolációs eljárás, amelyre

$$R_n(x_k) = y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{4.8}$$

és deriváltjára

$$R_n'(x_0) = R_n'(0) = y'. \tag{4.9}$$

Keressük azt a (4.7) interpolációs eljárást, amelyre egyrészt

(4.10)

$$0 \leqq e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x)+(y'-y^{*\prime})\sigma(x)\right\} \leqq \max\left\{\max_k (y_k-y_k^*)e^{-x_k};\ y'-y^{*\prime}\right\}$$

$$(x \geqq 0;\ y_k \geqq y_k^*\ (k=0,1,\dots,n);\ y' \geqq y^{*\prime})$$

egyenlőtlenség teljesül, azaz stabil az e^{-x} súlyra nézve, másrészt

$$\operatorname{Grad} R_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad} r_k(x) + \operatorname{grad} \sigma(x) \tag{4.11}$$

minimális. Igazolni fogjuk a következő tételeket.

VII. Tétel. (l. [11]). (4.10) *és* (4.11) *egyidejűen akkor és csak akkor teljesülnek a* (4.7) *eljárásra, ha a* (4.1) *alappontokra* $L_n^{(1)}(x_k)=0$ $(k=1,\dots,n)$ *és*

$$r_0(x) = (1+nx)\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2, \quad r_k(x) = \frac{x^2}{x_k^2}\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{L_n^{(1)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \quad (k=1,\dots,n), \tag{4.12}$$

$$\sigma(x) = x\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2. \tag{4.13}$$

Legyen $f(x)$ a $[0, \infty)$-en folytonos függvény és $y'=y_n$ tetszőleges valós számok, akkor

$$R_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot r_k(x) + y_n\sigma(x) \tag{4.14}$$

az $f(x)$-hez tartozó interpolációs polinom; speciálisan $y_n=f'(0)$ is lehet, ha ez létezik.

A VII. tétel azt mutatja, hogy csupán egy alappontban előírva a deriváltértéket is, egészen más alappontrendszer esetén valósul meg a stabil és gazdaságos interpolációs eljárás, mint enélkül (vö. 2. § **B.** pontjával).

VIII. Tétel. (l. [11]). *Ha* $f(x)$ *folytonos* $[0, \infty)$*-en, továbbá* $f(x)=O(e^x)$ $(x\to\infty)$, *akkor az előző tételben nyert eljárásra*

$$|R_n(f,x)-f(x)| \leqq C(\|f\|_{[0,d]}+\|f\|^*)n^{-1/4}+C\omega(f;0,2d;n^{-1/4})+y_n\cdot Cn^{-1/2} \tag{4.15}$$

$$(0 \leqq x \leqq d),\ \|f\|^* = 2\sup_{0\leqq x<\infty} |f(x)|/e^x.$$

Következmény. A VIII. tétel feltételei mellett $y_n=o(n^{1/2})$ esetén $R_n(f,x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ egyenletesen $[0, d]$-ben $(d>0)$.

Rátérünk a VII. tétel *bizonyítására.* Először tegyük fel, hogy létezik a (4.10) és (4.11)-nek eleget tevő legfeljebb $2n+1$-edfokú polinom. A bizonyítás második részéből kiderül, hogy ilyen van. Alkalmazzuk (4.10)-et az $y_0=1$, $y_k=y_k^*=0$ $(k=1, \ldots, n)$, $y_0^*=y'=y^{*\prime}=0$ választással, ekkor kapjuk

$$0 \leqq e^{-x} \cdot r_0(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0). \tag{4.16}$$

Legyen

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-x_k),$$

ekkor (4.3), (4.4), (4.11), (4.16) alapján $r_0(x)$ ilyen alakú

$$r_0(x) = (ax+b)\,\omega(x)^2, \tag{4.17}$$

amiből (4.3) és (4.4) alapján egyszerű számolással adódik, hogy

$$r_0(x) = \left(1-2\frac{\omega'(0)}{\omega(0)}x\right)\omega(x)^2. \tag{4.18}$$

Most alkalmazzuk (4.10)-et $y'=y^{*\prime}=0$, $y_k=1$, $y_k^*=0$, $y_i=y_i^*=0$ $(i\neq k,\ i=0, 1, \ldots, n)$ választással, ekkor kapjuk, hogy

$$0 \leqq e^{-x+x_k} r_k(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0,\ k = 1, \ldots, n). \tag{4.19}$$

Figyelembe véve (4.3), (4.4), (4.11), (4.19)-et azt kapjuk, hogy egyrészt

$$r_k(x) = \frac{x^2}{x_k^2}\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2 = \frac{x^2}{x_k^2} l_k^2(x), \tag{4.20}$$

másrészt (4.3) és (4.4) alapján

$$\left(e^{-x+x_k} \cdot r_k(x)\right)_{x=x_k} = 1,$$

és így

$$\left(e^{-x+x_k} \cdot r_k(x)\right)'_{x=x_k} = 0,$$

azaz (4.20) alapján

$$x_k\,\omega''(x_k)+(2-x_k)\,\omega'(x_k) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Mivel $\omega(x)$ n-edfokú polinom, ezért

$$x\omega''(x)+(2-x)\,\omega'(x) = C\omega(x)$$

alkalmas C állandóval, amiből együttható-összehasonlítással $C=-n$, és így (1.19) alapján, amint az jól ismert,

$$\omega(x) = (-1)^n \cdot n!\,L_n^{(1)}(x)$$

következik, amiből az adódik (4.18), (4.20) alapján, hogy a kívánt interpolációs polinom csak a tételbeli lehet.

Most igazoljuk, hogy a tételbeli interpolációs polinomra valóban teljesül a (4.10) stabilitási tulajdonság. Ehhez szükséges a következő

4.1. SEGÉDTÉTEL.

$$(4.21)\qquad V(x) \overset{\text{def}}{=} e^x-(1+nx)\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2-\sum_{k=1}^{n} e^{x_k} l_k^2(x)-x\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2 \geqq 0$$

$$(x \geqq 0;\ n=0, 1, \ldots),$$

ahol $L_n^{(1)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$.

Bizonyítás. A 4.1 Segédtétel bizonyítása teljesen hasonló a Bevezetés-ben kimondott lemma 1. §-beli első bizonyításához, figyelembe véve az (1.6), (1.19) alapján könnyen ellenőrizhető $V(0)=V'(0)=V(x_k)=V'(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$, $V(\infty)=\infty$ összefüggéseket, ezért nem részletezzük.

A (4.21)-ből azonnal adódnak az alábbi *következmények,* amelyek lényeges szerepet fognak játszani a VIII. tétel bizonyításában is.

$$(4.22)\qquad e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^{n} e^{x_k} r_k(x)+\sigma(x)\right\} \leqq 1 \quad (x \geqq 0;\ n=0, 1, \ldots;\ x_0=0),$$

$$(4.23)\qquad |L_n^{(1)}(x)| \leqq \frac{n+1}{\sqrt{1+(n+1)x}}\, e^{x/2} \quad (x \geqq 0;\ L_n^{(1)}(0)=n+1).$$

A (4.10) azonnal adódik (4.22)-ből az

$$e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^{n}(y_k-y_k^*)\, r_k(x)+(y'-y^*)'\sigma(x)\right\} \equiv$$

$$\equiv e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^{n}[(y_k-y_k^*)e^{-x_k}][e^{x_k} r_k(x)]+(y'-y^*)'\sigma(x)\right\}$$

azonosság alapján. Ezzel a VII. tételt bebizonyítottuk.

A VIII. tétel bizonyításához szükséges néhány segédtétel.

4.2. SEGÉDTÉTEL.

$$(4.24)\qquad 0 \leqq \sigma(x) \leqq C \cdot n^{-1/2} \quad (0 \leqq x \leqq d,\ n=0, 1, \ldots,).$$

Bizonyítás. A (4.13), (4.23) alapján $0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ esetben

$$\sigma(x) \leqq x\frac{e^x}{1+(n+1)x} \leqq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, e^x,$$

az $x>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ esetben pedig

$$\sigma(x) \leqq x\frac{e^x}{1+(n+1)x} \leqq \frac{x}{\sqrt{n+1}}\, e^x$$

adódik, amelyek éppen (4.24)-et adják.

4.3. SEGÉDTÉTEL.

$$(4.25)\qquad \left|1-\sum_{k=0}^{n} r_k(x)\right| \leqq C\cdot n^{-1/4} \quad (0\leqq x\leqq d,\ n=0,1,\dots)$$

Bizonyítás. Hasonló a 3.1. segédtételéhez. A $G(x)=1-\sum_{k=0}^{n} r_k(x)$ függvényre (4.12), (1.6), (1.19), (1.20) alapján

$$G(0)=G'(0)=G(x_k)=0 \quad (k=1,\dots,n),$$

s így

$$(4.26)\qquad G(x)=x^2L_n^{(1)}(x)\cdot g_{n-1}(x),$$

ahol $g_{n-1}(x)$ olyan legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, amelyre az x_k $(k=1,\dots,n)$ alappontokban (4.12) és (4.26) alapján

$$G'(x_k)=-\frac{2}{x_k}-2l_k'(x_k)=-\frac{2}{x_k}-\frac{x_k-2}{x_k}=-1=x_k^2L_n^{(1)\prime}(x_k)g_{n-1}(x_k),$$

teljesül, amiből

$$(4.27)\quad G(x)=x^2L_n^{(1)}(x)\sum_{k=1}^{n} g_{n-1}(x_k)\,l_k(x)=x^2L_n^{(1)}(x)\sum_{k=1}^{n}-(x_k)^{-2}\{L_n^{(1)\prime}(x_k)\}^{-1}l_k(x)=$$

$$=x^2L_n^{(1)}(x)\Big\{\sum_{|x-x_k|\leqq n^{-1/4}}{}_k+\sum_{|x-x_k|>n^{-1/4}}{}_k\Big\}=x^2L_n^{(1)}(x)\{A+B\}.$$

A (4.22) alapján nyilván

$$(4.28)\quad |x^2L_n^{(1)}(x)\cdot A|\leqq \sum_{|x-x_k|\leqq n^{-1/4}}{}_k |x-x_k|\frac{x^2}{x_k^2}l_k^2(x)\leqq n^{-1/4}\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\leqq e^d n^{-1/4}.$$

$$(0\leqq x\leqq d,\ n=0,1,\dots).$$

A $\sum_{k=1}^{n} e_k^2(o)=\frac{1}{-\alpha}\left\{1-\binom{n+\alpha}{n}\right\}$ formulából

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2L_n^{(1)\prime}(x_k)^2}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

adódik, amit felhasználva, (1.24) alapján

$$(4.29)\qquad |x^2L_n^{(1)}(x)\cdot B|\leqq n^{1/4}x^2L_n^{(1)}(x)^2\sum_{|x-x_k|>n^{-1/4}}{}_k (x_k)^{-2}\{L_n^{(1)\prime}(x_k)\}^{-2}\leqq$$

$$\leqq n^{1/4}x^{1/2}e^x\{x^{3/2}\cdot e^{-x}L_n^{(1)}(x)^2\}\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}\leqq C\cdot n^{-1/4}\quad (0\leqq x\leqq d).$$

A (4.28) és (4.29) a (4.25)-öt adja.

4.4. SEGÉDTÉTEL.

$$(4.30)\qquad \sum_{k=0}^{n}|x-x_k|r_k(x)\leqq C\cdot n^{-1/4}\quad (0\leqq x\leqq d,\ n=0,1,\dots).$$

Bizonyítás. (4.30) bizonyítása az (1.24), (4.12), (4.13), (4.28), (4.29) összefüggések felhasználásával a

$$\sum_{k=0}^{n}|x-x_k|r_k(x)=(1+nx)x\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2+\sum_{\substack{k>0\\|x-x_k|\leq n^{-1/4}}}|x-x_k|\frac{x^2}{x_k^2}l_k^2(x)+$$

$$+\sum_{\substack{k>0\\|x-x_k|>n^{-1/4}}}n^{1/4}\frac{x^2L_n^{(1)}(x)^2}{x_k^2L_n^{(1)\prime}(x_k)^2}\leq x\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2+\frac{x^2L_n^{(1)}(x)^2}{n+1}+Cn^{-1/4}$$

egyenlőtlenségből következik.

4.5. SEGÉDTÉTEL.

$$\sum_{x_k>2d}e^{x_k}r_k(x)\leq Cn^{-1/2}\quad(0\leq x\leq d,\ n=0,1,\dots). \tag{4.31}$$

Bizonyítás. A (4.31) egyenlőtlenség (1.24) alapján, (2.53)-at $\varepsilon=1$-re használva, a

$$\sum_{x_k>2d}e^{x_k}\frac{x^2}{x_k^2}l_k^2(x)=x^2L_n^{(1)}(x)^2\sum_{x_k>2d}e^{x_k}\frac{1}{x_k^4}\left(\frac{x_k}{x-x_k}\right)^2\{L_n^{(1)\prime}(x_k)\}^{-2}\leq$$

$$\leq 4x^2L_n^{(1)}(x)^2\sum_{x_k>2d}\frac{e^{x_k}}{x_k^4}\frac{1}{L_n^{(1)\prime}(x_k)^2}$$

egyenlőtlenségből rögtön adódik.

A VIII. tétel *bizonyítására* térve, nyilvánvalóan

$$|R_n(f,x)-f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}[f(x)-f(x_k)]r_k(x)+f(x)\left[1-\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\right]+y_n\sigma(x)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{x_k\leq 2d}|f(x)-f(x_k)|\cdot r_k(x)+\sum_{x_k>2d}|f(x)|+|f(x_k)|r_k(x)+|f(x)|\cdot\left|1-\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\right|+$$

$$+|y_n\sigma(x)|,$$

másrészt a folytonossági modulus (1.11) tulajdonsága miatt

$$|f(x)-f(x_k)|\leq\omega(f;0,2d;|x-x_k|)\leq\omega(f;0,2d;n^{-1/4})\quad\{n^{1/4}|x-x_k|+1\},$$

s így (4.24), (4.25), (4.30), (4.31) alapján a VIII. tétel az

$$|R_n(f,x)-f(x)|\leq\omega(f;0,2d;n^{-1/4})\left\{n^{1/4}\sum_{k=0}^{n}|x-x_k|r_k(x)+\sum_{k=0}^{n}r_k(x)\right\}+$$

$$+\|f\|^*\sum_{x_k>2d}e^{x_k}r_k(x)+\|f\|_{[0,d]}\cdot\left|1-\sum_{k=0}^{n}r_k(x)\right|+y_nCn^{-1/2}$$

egyenlőtlenségből következik.

A következő §-okban ismertetünk néhány olyan eredményt, amelyek bizonyításában alapvető szerepet játszik a Bevezetés-ben kimondott lemma, vagy annak az 1.§-ban adott első bizonyításának a gondolata.

5. §. A Lagrange-interpoláció átlagkonvergenciája végtelen intervallumon

Legyen $p(x)$ egy súlyfüggvény a véges (a, b) intervallumon, azaz legyen LEBESQUE szerint integrálható és m.m. pozitív. Tekintsük a $p(x)$-re ortogonális, normált, pozitív főegyütthatós polinomok $\{\omega_n(x)\}_0^\infty$ rendszerét. Mint ismeretes ezek egyértelműen meg vannak határozva, $\omega_n(x)$ gyökei egyszeresek, valósak, (a, b)-be esnek. Legyenek $\omega_n(x)$ gyökei

$$a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} < b. \tag{5.1}$$

(Tulajdonképpen eddig is két indexet kellett volna használni, de ennek elmulasztása nem okozott félreértést.) Az ezekhez tartozó *Lagrange*-féle alappolinomok

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{5.2}$$

továbbá az $[a, b]$-ben folytonos $f(x)$ függvény *Lagrange*-féle interpolációs polinomja

$$L_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k^{(n)}(x). \tag{5.3}$$

ERDŐS és TURÁN 1937-ben publikálták a következő érdekes tételt.

TÉTEL (ERDŐS—TURÁN). *Bármely $[a, b]$-ben folytonos $f(x)$-re*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x)\{L_n(f, x) - f(x)\}^2\, dx = 0. \tag{5.4}$$

(L. pl. NATANSZON [18] 410. o.) Közismert az a szoros kapcsolat, amely a *Fourier*-sorok és a *Lagrange*-interpolációk között fennáll. Minthogy a *Fourier*-sorokra az analóg tétel közismert, valószínű, hogy ez vezette a szerzőket az (5.4) felismerésére. Az (5.4) megfelelője végtelen intervallumon sokáig ismeretlen volt, egészen 1961-ig, amikor BALÁZS és TURÁN (l. [6]) közölték a következő tételt.

TÉTEL (BALÁZS—TURÁN). *Legyen $p(x) = h(x)/g(x)$ olyan súlyfüggvény a számegyenesen, amelyre $h(x) \geqq 0$ és*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx < \infty, \tag{5.5}$$

továbbá $g^{(2n)}(x) > 0$ $(-\infty < x < \infty, n = 0, 1, \ldots)$ és $x > 0$-ra $\log g(x)$ a $\log x$-nek konvex függvénye, valamint

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log g(x)}{x^2}\, dx = +\infty. \tag{5.6}$$

Ekkor, ha $f(x)$ az egész számegyenesen folytonos függvény, amelyre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} = 0, \tag{5.7}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-L_n(f,x)\}^2 \cdot p(x)\,dx = 0. \tag{5.8}$$

KÖVETKEZMÉNYEK. 1. Könnyen látható, hogy $p(x)=e^{-x^2}=e^{-2\varepsilon x^2}/e^{(1-2\varepsilon)x^2}=h/g$ eleget tesz a tétel követelményeinek ha $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$, s így kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-L_n(f,x)\}^2 e^{-x^2}\,dx = 0. \tag{5.9}$$

2. A tételből a *Schwarz*-egyenlőtlenséggel rögtön kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-L_n(f,x)| \frac{h(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx = 0. \tag{5.10}$$

3. A tétel felhasználásával, a $p(x)$-re ortogonális polinomok gyökeire könnyen bizonyíthatók az alábbi limeszrelációk:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{j=1,2,\dots,n} |x_j^{(n)}| = \infty, \tag{5.11}$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{k\in A} (x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)}) = 0 \quad (A=\{k\colon -d\leqq x_k^{(n)}<x_{k+1}^{(n)}\leqq d\},\ d>0). \tag{5.12}$$

Általában előfordulhat az, hogy $x_k^{(n)}>-K$ $(k=1,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$ valamely n-től független K-val.

Bizonyítás. A $g(x)$-re és $f(x)$-re tett feltevésekből BERNSTEIN és MANDELBROJT [6]-ban idézett tétele szerint minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $P_{\tilde k}(x)$ polinom, amelyre

$$\frac{|f(x)-P_{\tilde k}(x)|}{\sqrt{g(x)}} < \varepsilon \quad (-\infty<x<\infty). \tag{5.13}$$

($P_{\tilde k}(x)$ azt jelöli, hogy pontosan $\tilde k$-adfokú a polinom.)

A Bevezetés-ben kimondott lemmát $g(x)$-re és a $p(x)$ súlyra ortogonális polinomok gyökeire alkalmazva kapjuk a

$$V(x)=g(x)-\sum_{k=1}^{n} g(x_k^{(n)})\left\{1-\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x-x_k^{(n)})\right\} l_k^2(x)-\sum_{k=1}^{n} g'(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})l_k^2(x)\geqq 0$$

$$\left(\omega_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k^{(n)}),\ -\infty<x<\infty\right)$$

egyenlőtlenséget, amelynek mindkét oldalát $p(x)$-szel szorozva és integrálva, figyelembe véve az $\omega_n(x)$-ek ortogonalitását,

$$\sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int_{-\infty}^{+\infty} l_k^2(x)p(x)\,dx \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx \tag{5.14}$$

adódik.

Rátérünk (5.8) bal oldalának becslésére. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$ számot tetszőlegesen, de rögzítsük. Ehhez (5.13) alapján válasszuk meg $P_{\tilde{k}}(x)$ polinomot, majd rögzítsünk egy olyan nagy n-et, melyre $n > \tilde{k}+1$. Ekkor, amint ez jól ismert

$$L_n(P_{\tilde{k}}, x) = P_{\tilde{k}}(x).$$

Ezt felhasználva, nyilvánvalóan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-P_{\tilde{k}}(x)+P_{\tilde{k}}(x)-L_n(f,x)\}^2 p(x)\,dx \leqq 2\int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-P_{\tilde{k}}(x)\}^2 p(x)dx +$$

$$+2\int_{-\infty}^{+\infty} L_n(P_{\tilde{k}}-f,x)^2 \cdot p(x)\,dx.$$

Az (5.13) összefüggés alapján

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-P_{\tilde{k}}(x)\}^2 p(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{f(x)-P_{\tilde{k}}(x)\}^2}{g(x)} h(x)\,dx \leqq 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx,$$

viszont az $\omega_n(x)$-ek ortogonalitása és (5.14) miatt

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} L_n(P_{\tilde{k}}-f,x)^2 p(x)\,dx = 2\sum_{k=1}^{n} \{P_{\tilde{k}}(x_k)-f(x_k)\}^2 \cdot \frac{g(x_k)}{g(x_k)} \int_{-\infty}^{+\infty} l_k^2(x)p(x)dx \leqq$$

$$\leqq 2\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int_{-\infty}^{\infty} l_k^2(x)p(x)\,dx \leqq 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx.$$

Becsléseinket összefoglalva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-L_n(f,x)\}^2 p(x)\,dx \leqq 4\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx,$$

ami éppen a tétel állítását igazolja.

6. §. Megjegyzések a további alkalmazásokról

Amint azt a Bevezetésben említettük, a lemma gondolata a kvadratúra-eljárások konvergenciájának vizsgálatánál vetődött fel talán először. Azóta is számos eredmény született ezzel kapcsolatban a lemma alkalmazásával. Erről FREUD [10] könyvének III. fejezetében több igen általános eredmény található, továbbá BALÁZS—TURÁN [7]-ben is. Jelen dolgozat IV. Tételének bizonyításánál hivatkoztunk egy ilyen tételre.

NÉVAI [17] dolgozatában lényegesen kihasználta BALÁZS és TURÁN 5. §-ban ismertetett eredményeit, s így tulajdonképpen ismét a lemmát alkalmazta.

Végül megemlítem, hogy a 2. § eredményeit felhasználva, sikerült [16]-ban általánosítanom BALÁZS [2] eredményeit tetszőleges paraméterű *Jacobi*-polinomok esetére.

SZÁSZ PÁL felhasználva EGERVÁRY és TURÁN [3] eredményeit általánosította az *Hermite—Fejér*-interpolációt, és bevezette az ún. quasi—*Hermite—Fejér*-interpolációt, továbbá általánosította a normális és szigorúan normális alappontrendszer fogalmát is. Eredményeire azóta sokan hivatkoztak (pl. SHARMA [24]), és sok eredmény született ezzel kapcsolatban.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] BALÁZS J.: Megjegyzések a stabil interpolációról, *Matematikai Lapok* **11** (1960) 280—293.
[2] BALÁZS J.: Súlyozott (0, 2) interpoláció ultraszférikus polinomok gyökein, *MTA III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 305—338.
[3] EGERVÁRY, E.—TURÁN, P.: Notes on interpolation V, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958) 259—267.
[4] EGERVÁRY, E.—TURÁN, P.: Notes on interpolation VI, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 55—62.
[5] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: Notes on interpolation VII, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 63—68.
[6] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: Notes on interpolation VIII, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) 469—474.
[7] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: Notes on interpolation IX, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **16** (1965) 215—220.
[8] GRÜNWALD, G.: On the theory of interpolation, *Acta Math. (Sweden)* **75** (1941) 219—245.
[9] FEJÉR, L.: Bestimmung derjenigen Abscissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst kleines Maximum besitzt, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* (1932) 3—16.
[10] FREUD, G.: *Orthogonal Polynomials*, Akadémiai Kiadó (Budapest), 1971.
[11] JOÓ, I.: Stable interpolation on an infinite interval, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **25** (1974) 147—157.
[12] JOÓ, I.: Interpolation on the roots of Jacobi polynomials, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.* **17** (1974) 119—124.
[13] JOÓ, I.: On positive linear interpolation operators, *Analysis Mathematica* **1** (1975), 273—281.
[14] JOÓ, I.: An interpolation-theoretical characterization of classical orthogonal polynomials, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **26** (1975) 163—169.
[15] JOÓ, I.: Interpolation on the roots of Laguerre polynomials, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.* **17** (1974) 183—188.
[16] JOÓ, I.: On weighted (0, 2)-interpolation (kézirat).
[17] NÉVAI, G. P.: A Laguerre polinomok gyökein alapuló Lagrange-féle interpolációról, *Matematikai Lapok* **22** (1971) 149—164.
[18] NATANSZON, I. P.: *Konstruktiv függvénytan*, Akadémiai Kiadó (Budapest), 1952.
[19] SZABADOS, J.: On Hermite-Fejér interpolation for the Jacobi abscissas, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **23** (1972) 449—464.
[20] SZABADOS, J.: On the convergence of Hermite—Fejér interpolation for the Laguerre abscissas, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **24** (1973) 243—250.
[21] SZEGŐ, G.: *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. (New York, 1959).
[22] SZEGŐ, G.: Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi, *Mathematische Zeitschrift* vol. **1** (1918) 341—356.
[23] SNOW, CH.: *Hypergeometric and Legendre Functions with Applications to Integral Equations of Potential Theory*, Washington, N. B. of Standards 1952.
[24] SHARMA, A.: Remarks on quasi Hermite Fejér interpolation, *Canad. Math. Bull.* **7** (1964) 101—119.
[25] SZÁSZ, P.: On quasi—Hermite—Fejér interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960) 413—439.

(Beérkezett: 1974. I. 4.)

ON STABLBE INTERPOLATION

By I. Joó

Summary

In this paper the author's results published in [11], [12], [13], [14], [15] are summarized. Some theorems are proved in more general form than in the mentioned papers.

NÉHÁNY IDŐSZERŰ KÉRDÉS SZÁMOLÓGÉPEKKEL KAPCSOLATBAN, III

Írta: POGÁNY CSABA

IV. Néhány modellezési probléma*

Rendszerek viselkedésének modellezésekor a modellezni kívánt rendszer és a modellezési technika szempontjából vethetők fel kérdések.

Az első kérdéscsoport inkább más szakterületekkel kapcsolatos, és így a matematikus fő feladata a modellezési módszerek megismertetése és hozzáférhetővé tétele. Az itt következő kiragadott példákból álló felsorolás elsődleges célja a *rendszer-* (illetve működés- vagy viselkedés-) *modellezési* technika hatóerejét bizonyítani. Az említésre kerülő jelenségek megfelelő pontosságú matematikai modellezésére például eddig nem volt meg a lehetőség. (*A természetben előforduló jelenségek, illetve rendszerek* mindegyikének *modellezése* érdekes lehet valamilyen szempontból, így egyesek kiemelése mások hátrányára vitatható tevékenység. A következő néhány példa említése tehát nem jelenti egyúttal ezek kiemelését. Idézésüknek az is a célja, hogy bizonyítsák, hogy látszólag a matematikától távoli területeken is vannak olyan érdekes matematikai problémák amelyek „tiszta" matematikai szempontból is érdemesek a kutatásra. Különösen érdekesek azok a kérdések, ahol a jelenség vagy a rendszer maga viszonylag egyszerűen leírható, de elemi funkciókból történő felépítése nem ismert, sem matematikai, sem konkrét megvalósulási formájában. Ilyenkor a probléma matematikai modelljének matematikai megoldása analógiák alapján segítséget nyújthat a modellezett jelenség, illetve rendszer felépítésére vonatkozó kutatásokban is.)

A példák a következők. Vízi állatok úszása. Baromfi fejmozgatási rendszerének működése (járás közben, kézbe-fogva és kis helyen ide-oda mozgatva stb.). Madarak repülése. Rovarok repülése. Szembe áramló gyalogos forgalom utcán. Az emberi pszichikum működése (tanulás, felejtés; érzelmi működés; szellemi munka, absztrakció, konkretizálás; tudat, hipnózis stb.). Általános emberi viselkedés. Az emberiség története. Emberi életút. Emberpár, család, munkahely. Gazdasági egységek élete. Sportmérkőzés. Üveglap törése. Festékréteg repedése. Folyami hordaléklerakódás. Képlékeny anyag deformálódása stb. stb.

A második kérdéscsoport középpontjában a modellezési technika áll. A legfontosabbak a szélsőértékproblémák és az előállíthatósággal kapcsolatos kérdések. A legjobban közelítő rendszermodell, a valamilyen szempontból extremális (optimális) rendszermodellek előállításának, létezésének, illetve számossági kérdéseinek vizsgálata gyakorlati szempontból is jelentős, nem beszélve arról, hogy ezek az approximációelméletieket nagymértékben általánosító (főleg szélső-„érték") problémák elmé-

* A dolgozat a [2] cikk folytatása, a fejezetszámozás is folytatólagos.

letileg is milyen fontosak. Néhány egyszerűbb problémát tartalmaz [3], és nyilván felvethető valamennyi, az [1]-ben programozási kérdésekre megfogalmazott probléma is. Néhány nagyon egyszerű esetet kivéve ma még a gyakorlatilag és elméletileg fontos problémák egyike sincs megoldva.

V. Speciális problémák

Ebben a részben néhány megoldásra váró, fontos, az előbbiektől elütő jellegű speciális probléma vázlatos ismertetése szerepel.

1. A szoftver-dokumentációról

A szoftver dokumentálásának nyilvánvalóan a dokumentált szoftverfajtákhoz kellene igazodnia. A fejlődés jelenlegi szakaszában azonban megfelelő egységes és jól definiált fogalmak és terminológia hiányában még a szoftverfajták kielégítő pontosságú elkülönítésére sincs mód. Egyetlen járható út a használt fogalmaknak a dokumentációban történő *egyértelmű és világos megmagyarázása.* Ezt azonban az esetek többségében nem teszik meg. Az itt következő vázlatos (javaslatnak is tekinthető) felsorolás olyan kompromisszumot (valószínűleg optimálishoz közeli kompromisszumot) kíván előmozdítani, amely elméletileg teljesen egzakt, gyakorlatilag pedig egyszerű és használható megoldáshoz vezet: *érdemes nemcsak a számológépet, hanem az egyes szoftver-elemeket („programokat", „eljárásokat" stb.) is rendszereknek, speciálisan információfeldolgozó rendszereknek, automatáknak tekinteni.* Így *a szoftver-dokumentálás munkája rendszerek, illetve automaták megadását jelenti,* olyan információkkal történő kiegészítésekkel, amelyek a konkrét megvalósítás és működés, illetve működtetés megadásához, illetve *megértéséhez* szükségesek.

Elfogadva az előbbi elveket, meg kell adni (esetleg az idő függvényében) a bemenő adatok (adatmezők), az állapotjellemző adatok (adatmezők) és a kimenő adatok (adatmezők)

— nevét,
— szerkezetét,
— elhelyezkedését, helyét (felhasználás alatt és egyébként),
— alaki és megjelenési jellemzőit,
— méretét,
— egyes adatai elérésének körülményeit, feltételeit, módját,
— kezdeti kitöltésének körülményeit, feltételeit, módját,
— az adatmezőt bemenetként, kimenetként stb. használó programokat,
— az adatok ábrázolásának, kódolásának jellemzőit,
— változó méretek esetén a megfelelő jellemzőket (minimális, maximális, átlagos helyigényt stb.),
— a konkrét realizáció specialitásait (felhasználás közbeni esetleges áthelyezések, darabolás, ún. „szegmentálás" stb.),
— biztosítottsági, védelmi jellemzőit,
— hibaellenőrzési és javítási módjait (szintaktikus, szemantikus és egyéb szempontokból),

— bonyolultabb adatrendszerek esetén az adatnak, adatmezőnek a hierarchiában elfoglalt helyét és szerepét,
— az adatmező adatainak egyedi értelmezési módjait (például ugyanaz lehet egyszer 2-es számrendszerbeli szám, máskor pedig utasítás, illetve program stb.),
— elérhetőségi jellemzőit (minimális, maximális, átlagos elérési idő stb.)
stb.

Programok (amelyek egyszerű eljárásoktól — sőt mikroutasításoktól — kapcsolódó programokból álló programrendszerekig terjedhetnek) dokumentálásánál a rendszert, speciálisan az információfeldolgozó automatát kell egyértelműen, világosan, a felhasználhatóság igényeinek kielégítésére törekedve, *tehát érthetően* megadni. Így tehát meg kell adni (esetleg az idő függvényében) a program
— nevét,
— szerkezetét,
— a nyelvet (nyelveket), amelyen (amelyeken) elkészült,
— elhelyezkedését, helyét (helyeit) (bevitelkor, felhasználás előtt, alatt, után stb.),
— alaki, megjelenési jellemzőit,
— méreteit (változó esetben minimális, maximális és várható méreteket stb.),
— aktivizálási (általában vezérlési, illetve irányítási) feltételeit, módjait,
— bemenő információit, adatait (adatmezőit),
— kimenő információit, adatait (adatmezőit),
— hibajelzéseit,
— az általa felhasznált programokat,
— az ezt felhasználó programokat,
— bonyolultabb programrendszer esetében a programoknak a „hierarhiában" elfoglalt helyét és szerepét,
— a konkrét realizáció specialitásait (áthelyezések, darabolás stb.),
— biztosítottsági, védelmi jellemzőit,
stb.

A gyakorlatban nem nélkülözhető(k) még
— egy világos működésleírás,
— érthető, minden jelre kiterjedő jelmagyarázattal ellátott kapcsolatábrák, speciálisan folyamatábrák,
— ellenőrző példa (példák),
— a programkészítők neve, elérési helye, módja,
— az ellenőrzést végző neve, elérési helye,
— a dokumentáció készítőjének neve,
— a részeletes leírás, törzspéldány elérési helye,
— a felhasználáshoz szükséges hardver,
— teendők az ismételt futtatáskor,
— becsült, illetve tapasztalati futási, általánosan, kapacitáslekötési idők,
stb.

Az itt vázolt szoftver-dokumentálási elv konkrét megvalósítása természetesen bonyolultabb lesz olyankor, ha a leírandó rendszer időben változó szerkezetű, valamint olyankor is, amikor az egyes objektumok funkciója többféle, illetve változó lehet (például „önmagukat változtató" programok esetében, vagy programokkal operáló programok esetében stb.). Ilyenkor különösen fontos, a megértés szempontjából pedig döntő, a programokkal kapcsolatos *funkcionális* és *értelmezési* vonatkozású *információk* világos és szabatos rögzítése. A példákat és az ismétléseket (a „redundanciákat") nem kell szégyelni. A dokumentáció célja nem minimális szóval való kifejezés, nemcsak az, hogy minden információ benne legyen, hanem az, hogy az az információ, ami benne van, a legkönnyebben ki is vehető legyen belőle. *A dokumentációnak* tehát *elsősorban* lélektani, *tanulás-, illetve munkalélektani szempontokat* kell figyelembe vennie, a szakmai szabatosság betartása mellett.

Sajnos számos szoftver-dokumentáció csak arról informál, hogy szerzőjük a tudás visszatartását primitív axiomatizálási eszközökkel tudja csak megoldani. Jó dokumentációban tűrhetetlen az utalások láncolása, a túl sok vagy nem szuggesztív jelölés, valamint a „mindent egyszer és csakis egyszer" elvhez való ragaszkodás.

Mégegyszer visszatérve az axiomatizálási irányra: nem tagadható a szükségessége (megfelelő szinten, illetve kiegészítésképpen) az olyan axiomatikus tisztultságú dokumentáció *függelékeknek* mint például a metanyelvi leírások. De ezek önmagukban nem tekinthetők dokumentációnak. (Ezért is célszerű minden formailag elkülönített dokumentációnál az azzal a tárggyal kapcsolatos összes többi dokumentációs anyag felsorolása.) A gyakorlati felhasználhatósági korlátokon kívül az axiomatikus törekvéseknek a rendszerelmélet axiomatizálási problémái is megszabják a határt. Ha az ilyen dokumentációk készítői nemcsak az üres formalizálásban, hanem az absztrakcióban is elég messze merészkedtek volna, akkor például a változó rendszerek leírásának megoldatlan és sok vonatkozásban valószínűleg megoldhatatlan problémái is elgondolkoztathatnák őket, és talán rájöttek volna arra, hogy az axiomatizálás és a formalizálás nem azonos.

A dokumentációknak sok más, például nyelvi szempontból is kifogástalannak kell lennie. Nemcsak azért mert a nyelvi közlés, az információhordozó, minőségi követelményei ezt kívánják, hanem mert a dokumentációt sokan forgatják, és így alkalmas nemcsak világos és egyértelmű „közös nyelv", hanem nyelvi torzszülemények elterjesztésére is.

2. Időben változó rendszerek

A folyamatok vizsgálatának, illetve az idő szerepének fontossága sok területen kimutatható. Alkalmazási és elméleti szempontból egyaránt érdekes problémákat vet fel az időben változó rendszerek vizsgálata. Néhány speciális eset:

— Automaták időbeli működésének vizsgálata.
— Időtől is függő axiómarendszerek.
— Időtől is függő algebrai struktúrák.
— Időtől is függő relációrendszerek ugyanilyen halmazokon.

(Fontos megjegyezni, hogy ezek a kérdések nem azonosak az ún. "paraméteres" problémákkal, ezeknél általánosabbak.)

A kérdések sztochasztikus vonatkozásban is felvethetők. A bonyolultabb, időtől is függő rendszerek vizsgálatában ma még csak erősen korlátozott hatékonyságú szimulációs módszerektől várható megoldás. A klasszikus valószínűségelmélet szinte kizárólag egymástól független véletlen változókkal dolgozik. Ez az eset azonban a gyakorlati alkalmazások esetében nagyon ritkán fordul elő. Két konkrét példa jól illusztrálja a problémakör fontosságát és nehézségét is; hogyan kell kiszolgálórendszereket optimálisan irányítani vasúti szállítás és városi forgalom lebonyolítása esetében? (Ezekben a kérdésekben nagy szerepe van az egymástól és az időtől függő *változó* eloszlások vizsgálatának is.)

3. A számítástechnika egységes elméleti megalapozásáról

Számológépek működése és programozása oktatását egységes alapokra lehet helyezni egymást adott szabályok szerint működtető automaták, általános „staféták" segítségével. A gépi kódú programozás példájával illusztrálva az elmondottakat: a gép összes programozási szempontból jelentős információtároló helyét, illetve az itt tárolt információt automatáknak kell tekinteni. Speciálisan automaták a rekeszek, illetve az ott tárolt információk is. (A beolvasásra kerülő lyukszalag egyes információi úgyszintén.) Az automaták között van egy (vagy több) működtető („vezérléskiosztó") automata is. Az összes automata működése össze van hangolva, adott szabályok szerint zajlik az időben. A gép működése közben az automaták változhatnak, automatákkal műveletek végzésére van lehetőség stb. A munka befejezésekor is automata (automaták) az eredmény, amely (amelyek) értelmezése, hogy például a szóban forgó automata szám vagy program (automatasorozat) vagy mindkettő, legtöbbször a felhasználó feladata.

A következetesen érvényesített automataszemlélet révén a rendszermodellezés és a programozás között elmosódik a határ. (Ennek oktatási szempontú hasznát felesleges hangsúlyozni.) A legtöbb, szabványos elemkészlettel dolgozó rendszermodell műveleti elemei elvileg spontán, állandóan dolgozó olyan automaták, amelyek bemenő (gerjesztő) változóik értékét, minden pillanatban, megfelelően transzformálva *átviszik* a kimenő változót tároló helyre; más szavakkal: a kimenő változót az előírt relációnak megfelelő módon, „pillanatra kész" állapotban tartják. A rendszermodell minden automatája elvileg minden pillanatban működik. A számológép esetében az automaták csak akkor működnek, ha működtetik őket.

Nem nehéz folytatni az általánosítást. A számítástechnika egésze is egységes elméleti alapokra helyezhető egymással kapcsolatban álló automaták elmélete segítségével. Ez az egységes szemlélet — mint már szó volt róla — különösen az oktatás területén gyümölcsöző, amiről a szerzőnek gyakorlati bizonyítékok is rendelkezésére állnak.

4. Kutatási programokról

A matematika (ide számítva az „áramköri tervezés" és a számológépgyártás területén kívül a számítástechnikát is, szűkebben a számolás, a számolás megszervezésének tudományát is) mai állapotában meglehetősen heterogén.

Azok a kísérletek, amelyek átfogó matematikai, illetve számítástechnikai kutatási programok létrehozását tűzik ki célul, minden bizonnyal eredménytelenek lesznek. Ma már olyanféle tudományos programok, mint például a múlt század invariánsokkal kapcsolatos, híres „erlangeni programja" perifériára szorultak. Nemcsak azért, mert az invariancia meglehetősen viszonylagos, nagyrészt megfogalmazási kérdés (sok esetben „ügyes" fogalmazással a változó jellemzők megfelelő függvényei segítségével invariánsok tömege állítható elő), hanem azért is, mert a változó jellemzők, tulajdonságok legalább annyira érdekesek, mint a nem változók (ha ismerjük az „összes" változó tulajdonságot, akkor a nem változók maguktól adódnak — mint egy kiegészítő halmaz elemei), és ma az invariánsok mellett sokkal inkább érdekes az a kérdés, hogy a változó jellemzők hogyan változnak. Természetesen az ilyen kérdések is fogalmazhatók úgy, hogy szerepeljen bennük az *invariáns szó.* (Lényegében az egyenlőség relációja akkori abszolutizálásának jelenkori megszűnéséről van szó. Lényeges szem előtt tartani, hogy a relációk között is vannak relációk, így például szignum függvénnyel egyenlőtlenségek is felírhatók egyenlőség formában, és megfordítva, megfelelő függvényekkel az egyenlőség relációja is pótolható egyenlőtlenségekkel. Ez is jól érzékelteti az invariáns szó és fogalom viszonylagos voltát.) Összefoglalva: ma a tervezés és a gyakorlati megvalósítás igényének megfelelően elengedhetetlen az *„összes lehetőség”* vizsgálatára törekedni.[1] (Természetesen mindig csak bizonyos szempontokból összes lehetőségről lehet csak szó.)

Az — alkalmas feltételeknek elegettevő — *összes lehetséges eset megvizsgálását, megismerését* nemcsak azért kell elvégezni, mert ezt a gyakorlat igényli, hanem *mert ez az ismeretszerzés (és felhasználás) lélektanának egyik (talán legfontosabb) alapja is.* A teljességre törekvés lélektani mozgatói hozták létre a sok általános tér, speciálisan állapottér jellegű matematikai rendszert, amelyek között számos értékes elem közvetlenül számítástechnikai területről származik, vagy ilyen jellegű probléma megoldása gyorsította meg a kutatását. Ezek után már csak egy lépés általános programot adni, amely a rendszerelmélet művelését, kutatását tűzi ki célul. Ez azonban túl általános ahhoz, hogy a konkrét munkához használható legyen. Konkrét rendszerek kutatását pedig általános programként az egyes fogalmak és eszközök *funkciójának (ami amúgy sem értelmezhető egyértelműen) időbeli változása (és viszonylagosságuk kiderülése)* következtében felmerülő problémák miatt nem lehet. Ennek a nyugtalanító helyzetnek köszönhető az egyszerű, *véges, kombinatorikus jellegű, „emberközeli”* kis (de sokszor nagyon nehéz) problémák kutatásának mai fellendülése. Ettől remélhető, hogy a gyakorlatban rendkívül fontos kombinatorikus szerkezetű rendszerek kutatása általánosodva, az időben változó rendszerekre is kiterjedve, olyan egységesnek nevezhető problémakomplexumot hoz létre, amely — *egy időre* — kutatási programként elfogadható lesz.

(Az előzők egy STEINITZ programjához hasonló program jogosultságát látszanak igazolni. A valóság azonban az, hogy óriási a különbség egy „algebrai struktúra” és például egy olyan rendszer között, amelynek elemei olyan rendszerekből álló rendszerek, amelynek elemei az időtől és egyebektől függően változó relációkban állnak egymással, és *jellegük, funkciójuk, értelmezésük* is változik, az időtől és másoktól függően.)

A kutatás jellegének „műhelyen belüli” megváltozása is szembetűnő. Ma rendszerek puszta leírásával kapcsolatos problémák súlya a múlthoz képest lényegesen megnövekedett.

5. Az alkalmazások jellege és néhány területe

A számítástechnika alkalmazásainak jellege napjainkra a múlthoz képest lényegesen megváltozott. A számológépet eleinte csak az ún. numerikus matematika feladatainak végrehajtására használták. Ma ez a terület a számológép-felhasználás töredékét teszi csak ki. Nagy szerephez jutott az (ügyviteli) adatfeldolgozás, az ipari folyamatirányítás, a számjegyes vezérlésű (NC) szerszámgépek és több más terület. Azonban nemcsak a felhasználási területek vonatkozásában történt nagy változás, hanem az alkalmazás módjában is. Ma már a programozási technikákkal (például nyelvekkel), a számológépek, számológépes rendszerek alap-szoftverével (például

[1] Ez az elv az oktató-nevelő munkában is rendkívül fontos, természetesen nemcsak a matematika oktatás, hanem valamennyi tárgy oktatására vonatkozóan.

„operációs" rendszereivel) is önálló tudományág foglalkozik. Sajnos a matematikusképzés a mai teljes spektrumnak majdnem csak a hagyományos részét nyújtja, azt is elavult tárgyalásban, pedig ha az alkalmazhatóság nagyon fontos szempontjától el is tekintünk, az említett területeken a megoldatlan „tiszta" matematikai kérdések sokaságával találkozhatunk, különösen optimalizálási problémák formájában.

Néhány példa:

— adott szempontból optimális operációs rendszerek, azaz optimális kiszolgáló algoritmusok tervezése,
— optimális adatrendszerek tervezése,
— optimális utasításkészlet tervezése,
— optimális leírási szabályok megadása rendszerleíráshoz,
stb.

Az utolsó példa igen széles körben fontos probléma, amely nemcsak tiszta matematikai, hanem ipari alkalmazások szempontjából is jelentős. (A tiszta matematikai alkalmazás szempontjából ez a kérdés annak az általánosabb problémának a része, amely *a matematikusi tevékenység egészének folyamatát vizsgálja optimalitási és más szempontokból.* A kiragadott szituációk statikus extrémumainak vizsgálatán túl az ezeket tartalmazó folyamatok optimalitása, optimálissá alakítása ma már időszerű kérdés. Az ipari alkalmazásra szép példa az NC technika által alkalmazott geometriai objektumok és mozgások leírására szolgáló rendszer. A szóban forgó elemek leírására vektorok, illetve mátrixok alkalmazhatók. A különböző vektorokkal, illetve mátrixokkal végezhető műveletek, operációk stb. geometriai megfelelőinek értelmezése, tulajdonságainak kutatása, és e leképezési, illetve értelmezési rendszer egészének vizsgálata más nemcsak geometriai területek vizsgálata szempontjából is rendkívül érdekes.)

Az említett, ma már főirányoknak tekinthető kutatási területeken mutatkozó lemaradás természetes következménye, a kisebb súlyú területek, illetve művelőik aránytalanul nagy térfoglalása. Jellegzetes példa a számológépes nyelvészet területe. A szakmai (elsősorban nem számítástechnikai) színvonalra legjellemzőbb azoknak a nyelvmodelleknek a hosszúéletű kultusza, amelyekről széltében hosszában publikációk tömege születik. Azt azonban senki sem veszi észre, hogy ezek (például CHOMSKY vagy KULAGINA híres modelljei) *nem nyelvmodellek,* hanem a múlt századok korlátolt pedagógiai ráfogásainak hordalékából összeállt ún. *nyelvtanok*[2] modelljei. E modellek még a leírt beszéd (ami pedig a nyelv kis hányadát képviselő részének erősen csökkent informativitású vetülete csak) leírására sem képesek.

A nyelv — funkcionálisan — különböző *hatások kiváltására* szolgáló rendkívül összetett eszköz. Jelentésmódosító és megváltoztató erejű komponensei a hangsúly, a hangerő, a hangszín, a hanghordozás, a mimika, a gesztusok, a szünetek stb. maga a szituáció egésze. Az eddigi nyelvmodellekből — ezek még a leírt beszéd modellezését sem tudják megoldani — mindezek kimaradtak. Pedig egy kielégítő nyelvmodell önmagában is nagy értékű tudományos eredmény volna. Az összes nyelv matematikai pontosságú (funkcionális, információs és szituációs szemléletű) leírására alkalmas rendszer kidolgozása az összehasonlító nyelvészet egy fontos problémakörének szolgálhatna matematikailag is egzakt alapjául. (A probléma megoldását a nyelvek világnézeti, szemléleti különbözősége feltáratlansága is jelentősen nehezíti; a hopi nyelvvel kapcsolatos kérdések jó példát adnak ilyenekre.)

[2] Az iskolában még napjainkban is ezeket használják.

Összefoglalás

A számítástechnika időszerű kérdéseinek egy része tisztán matematikai jellegű, nagyrészt klasszikus eszközökkel megfogalmazható és vizsgálható problémákból áll. Ilyenek szerepelnek [1]-ben és [2]-ben, valamint e dolgozat IV. és V. fejezetében. Vannak azonban olyan problémák is amelyek a számítástechnikára közvetve, az azt művelő emberen keresztül vannak nem elhanyagolható hatással. Ezeknek a megoldása bár csak kisebb részben jelent matematikai feladatot, létfontosságú a tudományos, speciálisan a számítástechnikai felépítmény szempontjából. Ilyen kérdések például a következők. A számítástechnika helye és szerepe egy korszerű, a körülményeket, életkori sajátságokat és alkalmazási igényeket is figyelembe vevő, egységes természettudományos szemléletű oktatási rendszerben. A tantárgyak belső viszonya egymáshoz (például automataelmélet és geometria-tanítás vagy automataelmélet és nyelvtanítás stb.). Matematikai, számítástechnikai továbbképzés matematikusoknak és nem matematikusoknak. A számítástechnikai tanárképzés. Számítástechnikai és matematikai kutatóhelyek betöltési és ösztöndíjak kiadási elvei. A számítástechnikai irodalom helyzete. A számítástechnikai tevékenység jogi és etikai vonatkozásai. A matematikusok, számítástechnikusok helyzete stb.

Ezeknek a nem lebecsülhető fontosságú kérdéseknek a tárgyalása azonban külön tanulmányt igényel.

IRODALOM

[1] Pogány Csaba: Néhány időszerű kérdés számológépekkel kapcsolatban, I., *MTA Oszt. Közl.* **19** (1969) 345—348. old.

[2] Pogány Csaba: Néhány időszerű kérdés számológépekkel kapcsolatban, II., *MTA III. Oszt. Közl.* **23** (1972) 101—114.

[3] Pogány Csaba: Esettanulmányok, játékok és a matematikai modellezés, *Operációkutatási esettanulmányok.* Szerk.: *Csath Magdolna*, Számok, 1971.

A NEM-EGÉSZRENDŰ DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁLOPERÁTOROK ELMÉLETÉNEK ÚJABB FEJLŐDÉSE*

Írta: MIKOLÁS MIKLÓS

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az ún. törtrendű integráloknak és deriváltaknak az analízisbe való bevezetése ABEL, LIOUVILLE és RIEMANN egyes munkáiban már a múlt század első felében megtörtént, de az általánosított differenciál- és integráloperátorok használata csak nem sokkal a századforduló előtt kezdett elterjedni a *Heaviside*-féle „szimbolikus kalkulus" nyomán, hogy aztán századunkban olyan matematikusok eredményei révén nyerjen „polgárjogot", mint HADAMARD, HARDY és LITTLEWOOD, RIESZ MARCELL és H. WEYL. E referátum fő célja a témakörben az utolsó évtizedek alatt bekövetkezett fejlődés áttekintése, amihez mindenekelőtt az elmélet alapproblémájával kell foglalkoznunk: „megadandó a differenciálás és az integrálás műveletének legegyszerűbb közös általánosítása a deriválási, ill. integrálási rendszámra (indexre) vonatkozó interpoláció segítségével". A szóban forgó kérdést többféle módon lehet megközelíteni.

Induljunk ki most egy klasszikus *Cauchy*-féle formulából, amely egy $[x_0, x]$ intervallumban folytonos f függvény m-edik iterált integrálját egyszeres integrál alakjában fejezi ki, s egyúttal az

$$y^{(m)}(x) = f(x); \quad y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(m-1)}(x_0) = 0$$

kezdetiérték-feladat legegyszerűbb megoldását szolgáltatja:

$$\int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t_1} \ldots \int_{x_0}^{t_{m-1}} f(t_m)\, dt_m \ldots dt_2\, dt_1 = \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{m-1}\, dt.$$

Itt az m rendszámra vonatkozó interpoláció közvetlenül végrehajtható azáltal, hogy m-et egy folytonos $\nu > 0$ paraméterrel, $(m-1)!$-t pedig ennek megfelelően $\Gamma(\nu)$-vel pótoljuk; kapjuk a ν-edrendű („törtrendű") integrál LIOUVILLEtól és RIEMANNtól eredő definícióját:

$$(1) \qquad {}_{x_0}I_x^{\nu} f = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{\nu-1}\, dt.$$

Az f függvényre vonatkozó feltétel természetesen enyhíthető: bármely *Lebesgue*-integrálható f és rögzített $\nu > 0$ esetében az (1) integrál létezése majdnem minden

* A tárgykörről New Havenben (Conn., USA) 1974 júniusában tartott nemzetközi kongresszus összefoglaló referátumának magyar nyelvű változata. Angolul megjelent a kongresszus Proceedings-ében a "Lectures Notes in Mathematics" sorozat 457. kötetében (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1975, edited by Prof. B. Ross, p. 357—375), "On the trends in the development, theory and applications of fractional calculus" címmel.

x-re biztosítva van; ha f-ről még azt is kikötjük, hogy $[x_0, x]$-ben korlátos legyen, akkor (1) minden $\nu > 0$ rendszámra létezik, továbbá az ${}_{x_0}I_x$ operátor kielégíti az ún. indextörvényt, melyet félcsoport-tulajdonságnak is szokás nevezni:

$$(2) \qquad {}_{x_0}I_x^{\nu_1}({}_{x_0}I_t^{\nu_2}) = {}_{x_0}I_x^{\nu_2}({}_{x_0}I_t^{\nu_1}) = {}_{x_0}I_x^{\nu_1+\nu_2} \quad (\nu_1 > 0,\ \nu_2 > 0;\ x_0 < t \leqq x).$$

Megjegyzendő, hogy mindez érvényes tetszőleges olyan komplex ν-re is, melyre $\mathrm{Re}\,\nu > 0$; ekkor az (1) *Riemann—Liouville*-féle integrál ν-nek analitikus függvénye.

(1) kiterjesztése ν negatív értékeire, azaz „törtrendű derivált":

$$(3) \qquad {}_{x_0}D_x^{-\nu} f = {}_{x_0}I_x^{\nu} f \quad (\nu < 0)$$

előállítása történhetik például törtrendű integrálok megfelelő számú közönséges deriválásával, nevezetesen egy Riemann-féle formula alapján: [1]

$$(4) \qquad {}_{x_0}D_x^{\mu} f = \frac{d^m}{dx^m}\, {}_{x_0}I_x^{m-\mu} f \quad (\mu \geqq 0),$$

ahol m a legkisebb μ-nél nagyobb egész számot jelöli. Sajnos azonban, (4) nem tekinthető az $f^{(p)}(x)$ $(p=0, 1, 2, \ldots)$ közönséges deriváltak „igazi" általánosításának, mivel $f^{(p)}(x)$ puszta létezéséből még nem következik az ${}_{x_0}D_x^p f = f^{(p)}(x)$ reláció; ehhez a konklúzióhoz további feltételre van szükségünk: $f^{(p)}$ folytonosságára az x helyen. Így érthető, hogy sok olyan probléma van, mellyel kapcsolatban a törtrendű derivált (4) értelmezése nem megfelelő és finomabb definícióval helyettesítendő. Az alábbiakban három szóba jövő értelmezési lehetőséget veszünk számba. [2]

I. Gyakran célravezető a következő gondolat: tekintjük az f alapfüggvénynek egy elemi sor-alakját, és formálisan *tagról-tagra* képezzük e sor törtrendű deriváltját, feltéve, hogy az egyes tagok általánosított deriváltja direkt interpolációval nyerhető. Analitikus f függvény esetében például az *Hadamard*-féle definíció adódik, melyet ő 1892-ben, a *Taylor*-sorra vonatkozó mély aszimptotikus vizsgálataiban eredményesen alkalmazott:

$$(5) \qquad {}_0D_x^{\mu} f = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n-\mu+1)}\, x^{n-\mu} \quad (\mu \text{ tetszőleges}).$$

Kiemeljük, hogy a jobboldali általánosított hatványsor konvergenciatartománya lényegében azonos f *Maclaurin*-soráéval.

A *Fourier*-sorok elméletében a törtrendű integrál *Weyl*-féle definíciója (1917) használatos, amely egy 1-periódusú f függvény $\nu > 0$ rendű integrálját $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$ esetén a következő alakban szolgáltatja:

$$(6) \qquad \begin{gathered} {}_{-\infty}I_x^{\nu} f = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-\nu} \left[\alpha_n \cos\left(2n\pi x - \frac{\pi\nu}{2}\right) + \beta_n \sin\left(2n\pi x - \frac{\pi\nu}{2}\right)\right] \\ \alpha_n = \int_0^1 f(t) \cos 2n\pi t\, dt, \qquad \beta_n = \int_0^1 f(t) \sin 2n\pi t\, dt. \end{gathered}$$

[1] (4)-et nyilván motiválja (2) és (3).

[2] Megemlítjük, hogy törtrendű deriváltak divergens *Riemann—Liouville*-integrálokból *Hadamard*-féle értelemben vett „véges rész"-képzéssel is származtathatók. (MARCHAUD, 1927).

Innen az adjungált törtrendű deriváltakat a klasszikus szummációs eljárások valamelyikével származtathatjuk, amint a szerző először 1958-ban az edinburghi nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadásában, majd nem sokkal később több dolgozatában is megmutatta.[3]

Az (5)—(6) alatti sorok „zárt alakja" szintén figyelemre méltó. Ami (5)-öt illeti, egy *Hankel*-típusú kontúrintegrál-előállításra jutunk, amely úgy fogható fel, mint a *Cauchy*-féle (komplex) integrálformulák közös általánosítása.[4] (6)-ból pedig egy (1)-típusú integrál-alak vezethető le, melyben az x_0 integrációs kezdőpont (paraméter) $-\infty$; az utóbbi könnyen $(0, 1)$ intervallumra vonatkozó integrállá transzformálható, melynek magfüggvényében a $\zeta(s, u)$ ún. *Hurwitz*-féle zetafüggvény lép fel, vö.[3]. ($\zeta(s, u)$-t tudvalevőleg $\mathrm{Re}\, s > 1, 0 < u \leqq 1$ mellett a $\sum_{k=0}^{\infty}(k+u)^{-s}$ sor összegeként értelmezzük.)

II. Emlékeztetünk arra a tényre, hogy az (1) integrál a ν rendszámnak mint komplex változónak holomorf függvénye. Ezen az alapon Riesz Marcell és több tanítványa 1933 és 1949 között egy elegáns és hatékony eljárást épített ki a törtrendű differenciálás elméletében, nevezetesen a *Riemann—Liouville*-integrálnak a rendszámra vonatkozó *analitikus folytatását*. A módszer bizonyos értelemben átvihető többváltozós függvényekre, pontosabban az euklideszi és más, a magfizikában használt metrikus terek pontfüggvényeire is, ti. bevezethetők (1)-nek megfelelő kiterjesztései, az un. „*Riesz*-potenciálok". E lehetőség azon múlik, hogy az $x-t$ különbséget az integrációs tartomány két pontjának az illető tér metrikája szerinti távolságával pótoljuk.[5]

A *Riesz*-féle vizsgálatok szinte kizárólag valós deriválási rendszámok és folytonos alapfüggvények esetére vonatkoztak. A szerző 1958—60-ban tárgyalta a legáltalánosabb esetet is, azaz a komplex s-rendű deriváltak és integrálok egyesített elméletét tetszőleges *Lebesgue*-integrálható függvényekre, mégpedig a törtrendű integrálás *Weyl*-féle koncepciójára építve. (A periodicitás nyilván nem jelenti az általánosság tényleges korlátozását.) Az analitikus folytatás bizonyos mélyebb — Mittag—Lefflertől és Riesz Marcelltől eredő — módszerei segítségével sikerült többek között a kapott törtrendű derivált s-re vonatkozó egzisztencia-tartományának lényegében teljes jellemzése; a (6)-ról mondottaknak megfelelően az eredmények szoros kapcsolatban vannak a zetafüggvények elméletével. (Vö. [3, 6].)

III. Van még egy harmadik, meglehetősen elemi út is tetszőleges nem-egészrendű deriváltak előállítására, amely — paradox módon — bizonyos értelemben a legújabb keletű. A következőkről van szó: több korábbi kísérlet után (pl. Grünwald 1867, Post 1930) csak az utolsó két évtizedben sikerült teljesen kielégítő, szabatos

[3] Vö. pl. Abstracts of communications, *ICM Edinburgh*, 1958, p. 60; továbbá M. Mikolás, „Differentiation and integration of complex order of functions represented by trigonometric series and generalized zeta-functions", *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), 77—124.

[4] L. M. Blumenthal, "Note on fractional operators and the theory of composition", *American Journal of Mathematics*, **53** (1931), 483—492.

[5] M. Riesz, «L'intégrale de Riemann—Liouville et le problème de Cauchy», *Acta Mathematica*, **81** (1949), 1—223.

[6] *Riemann—Liouville*-integrálokra a $\mathrm{Re}\, s = 0$ eset részletes diszkussziója található a következő dolgozatban: E. R. Love, "Fractional derivatives of imaginary order", *Journal of the London Mathematical Society* (II), 3 (1971), 241—259.

formában megadni ${}_{x_0}D_x^\mu f$-nek egy olyan *explicit limesz-előállítását*, amely speciális esetként tartalmazza mind az $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ Riemann-integrálnak (x_0, x) ekvidisztans felosztására kimondott definícióját, mind $f^{(p)}(x)$ kifejezését az

$$
{}_{x_0}\Delta_x^{p,n} f(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f\left(x - k\frac{x-x_0}{n}\right)
$$

„p-edik differencia" segítségével, ahol p valamely nem-negatív egész szám.

Az (x_0, x)-re vonatkozó tetszőleges μ-rendű derivált definíciója a következőképpen írható:[7]

$$
(7) \qquad {}_{x_0}D_x^\mu f = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x-x_0}{n}\right)^{-\mu} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\mu}{k} f\left(x - k\frac{x-x_0}{n}\right).
$$

Világos, hogy ${}_{x_0}D_x^0 f = f(x)$ és

$$
(8) \qquad {}_{x_0}D_x^p f = f^{(p)}(x) \quad (p > 0,\ \text{egész}),
$$

ha $f(t)$ p-szer differenciálható a $t = x$ pontban; másrészt belátható, hogy

$$
(9) \qquad {}_{x_0}D_x^{-\nu} f = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{\nu-1}\,dt \quad (\nu > 0),
$$

feltéve, hogy a jobboldali integrál *Riemann*-féle értelemben létezik. (Vö. (1).) Vegyük észre, hogy ${}_{x_0}D_x^\mu f$ akkor és csak akkor független az x_0 paramétertől, ha μ nem-negatív egész szám. A (7) limesz számára valóban kínálkozik az *integroderivált* elnevezés, mivel ez μ egész értékei esetén iterált integrálok és deriváltak közös általánosítását valósítja meg. (Vö.[7])

Megemlítjük, hogy a (7) előállítás lehetővé teszi a

$$
(10) \qquad {}_{x_0}D_x^{\mu_1}({}_{x_0}D_t^{\mu_2}) = {}_{x_0}D_x^{\mu_1+\mu_2}
$$

kiterjesztett félcsoport-tulajdonság (vö. (2)) érvényességének beható vizsgálatát is, s hogy a törtrendű deriváltak bevezetésére szolgáló összes tárgyalt módszerek ekvivalensek az analitikus függvények osztályában.

Mit mondhatunk a fenti ideák és aspektusok *alkalmazásairól* az újabb szakirodalomban?

[7] K. F. MOPPERT, »Über einen verallgemeinerten Ableitungsoperator«, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **27** (1953), 140—150. — L. továbbá: M. MIKOLÁS, "Generalized Euler sums and the semigroup property of integro-differential operators", *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Mathematica, **6** (1963), 89—101; valamint «Sur la propriété principale des opérateurs différentiels généralisés», *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 5315—5317. — Az $x_0 = \infty$, $x < x_0$ speciális esetet illetően vö. még N. STULOFF, »Die Differentiation beliebiger reeller Ordnung«, *Mathematische Annalen*, **122** (1951), 400—410.

2. Függvénytan, integráltranszformációk

A III. típusú általánosított differenciál- és integráloperátorok segítségével erősen ki lehet terjeszteni a klasszikus infinitezimális számítás formula-apparátusát, mégpedig oly módon, hogy az elemi függvények differenciálására és integrálására vonatkozó legfontosabb szabályok páronként „összeolvadnak” általánosabb szabályokká. Bizonyos új relációk is adódnak egyes transzcendens függvények között; így a $\log\Gamma(x)$ vagy a $\operatorname{ctg} x$ függvény törtrendű deriváltjai kapcsolatba kerülnek a *Hurwitz*-féle zetafüggvénnyel. Néhány konkrét példa:

$$ {}_{x_0}D_x^\mu 1 = \Gamma(1-\mu)^{-1}(x-x_0)^{-\mu} \quad (x > x_0,\ \mu \text{ tetszőleges}) \tag{11} $$

$$ {}_{-\infty}D_x^\mu 1 = 0 \quad (\mu > 0) \tag{12} $$

$$ {}_0D_x^\mu x^\omega = \frac{\Gamma(\omega+1)}{\Gamma(\omega-\mu+1)} x^{\omega-\mu} \quad (x > 0;\ \omega \neq -1, -2, \dots;\ \mu \text{ tetszőleges}) \tag{13} $$

$$ \left.\begin{aligned} &{}_{-\infty}D_x^\mu e^x = e^x && (14)\\ &{}_{-\infty}D_x^\mu \sin x = \sin\left(x+\mu\frac{\pi}{2}\right) && (15)\\ &{}_{-\infty}D_x^\mu \cos x = \cos\left(x+\mu\frac{\pi}{2}\right) && (16) \end{aligned}\right\} \quad (x \text{ és } \mu \text{ tetszőleges}) $$

(11)—(16) mindegyike „komplexben” általánosabb feltételek mellett is érvényes. (Megfelelő értelemben általánosítható a *Leibniz*-szabály, a parciális integrálás módszere és az összetett függvény differenciálási szabálya.) Említésre érdemes, hogy az (5)—(6) alatti *Hadamard-*, ill. *Weyl*-definíció implicite függ (13)-tól, ill. (15)-től és (16)-tól.

Ha komplex paraméterek és meromorf $f(x)$ függvény esetén alkalmazzuk az

$$ {}_{x_0}D_x^\mu f = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi i} \int_{x_0}^{(x+)} f(w)(w-x)^{-(\mu+1)}\,dw \tag{17} $$

kontúrintegrál-előállítást, ahol az integrációs út az x_0 pontból indul ki, pozitív értelemben megkerüli az x pontot és nem tartalmazza f-nek egyetlen szingularitását sem, továbbá a jobboldali komplex kitevőjű hatványnak a főértéke veendő, akkor ${}_{x_0}D_x^\mu f$ értéke meghatározható a $\operatorname{Re}\mu > \mu_0$ félsíkbeli μ-értékekre reziduumszámítás segítségével, feltéve, hogy $|f|$ nem növekszik túlságosan gyorsan, mikor $|x| \to \infty$. Mellékeredményként adódik, hogy számos, a matematikai fizikában nagy jelentőségű speciális függvény (*Legendre-*, *Bessel-*, hipergeometrikus függvények stb.) törtrendű deriváltként fogható fel, ami új támpontot nyújt e függvények diszkussziója számára. [8] További eredményeket talált nemrég a szóban forgó irányban OSLER, erősen

[8] M. MIKOLÁS, »Über die Begründung eines einheitlichen und erweiterten Infinitesimalkalküls im Komplexen«, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Mathematica, **5** (1962), 69—78. — Az egész függvények elméletének felhasználását illetően vö. M. GAER—L. A. RUBEL, “The fractional derivative via entire functions”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **34** (1971), 289—301.

általánosítva a *Cauchy—Taylor*-féle kifejtési tételt és a *Leibniz*-szabályt. Például fennáll az

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(\vartheta n+\gamma+1)^{-1}{}_{x_0}D_x^{\vartheta n+\gamma}f(x)|_{x=a}(x-a)^{\vartheta n+\gamma}\vartheta \tag{18}$$

formula, ahol γ tetszőleges komplex szám és $0<\vartheta\leqq 1$. $\vartheta\to 0$ határátmenetre térve az említett soroknak bizonyos integrál-analogonjaihoz jutunk, amelyek a speciális függvények tanulmányozásának hasznos segédeszközei.[9]

Az a tény, hogy a (9) integrál $w=x-t$ helyettesítés után úgy tekinthető, mint az

$$M_\nu[f] = \int_0^\infty f(w)w^{\nu-1}\,dw \tag{19}$$

Mellin-transzformáltnak speciális esete, az ún. inverziós formula révén a *Laurent*-féle kifejtésnek egy érdekes integrálpendantjára vezet. (L. a [8] lábjegyzetet.) Más integráltranszformációk elméletével is fontos kapcsolat áll fenn: ERDÉLYI és KOBER 1940-ben felfedezte, hogy (9)-nek megfelelően kiterjesztett variánsai hasznosak a *Hankel*-, a hipergeometrikus és *Laplace*-transzformáltak vizsgálatában, minthogy a kérdéses törtrendű operátorok fontos leképezéseket létesítenek a felsorolt transzformációs osztályok között. Többek között kiderült, hogy a *Hankel*-transzformáció teljes elmélete levezethető ily módon a *Fourier*-transzformáció klasszikus elméletéből.[10]

3. Approximáció- és szummációelmélet

I. típusú törtrendű integrálok és deriváltak struktúrális és aszimptotikus sajátságait először HARDY és LITTLEWOOD vizsgálta, akiknek idevágó munkái mély függvénytani segédeszközökre épülnek.[11] A *Weyl*-féle elméletet illetően ALEXITS és KRÁLIK folytatta az említett kutatási irányt, felhasználva bizonyos új sorelméleti módszereket. Ezen az úton a *Hardy—Littlewood*-féle approximációs tételek egyszerűbben nyerhetők és egyúttal általánosíthatók is.[12]

[9] Vö. T. J. OSLER, "Taylor's series generalized for fractional derivatives and applications", *SIAM Journal on Mathematical Analysis,* **2** (1971), 37—48; valamint "An integral analogue of Taylor's series and its use in computing Fourier transforms", *Mathematics of Computation,* **26** (1972), 449—460 és "The integral analogue of the Leibniz rule", ibid., 903—915.

[10] A. ERDÉLYI—H. KOBER, "Some remarks on Hankel transforms", *Quarterly Journal of Mathematics* (Oxford), **11** (1940), 212—221. Továbbá A. ERDÉLYI, "A class of hypergeometric transforms", *Journal of the London Mathematical Society,* **15** (1940), 209—212; valamint "On some functional transforms", *Rendiconti del Seminario Matematico di Torino,* **10** (1950—51), 217—234. — Újabb idevágó eredmények: T. P. HIGGINS, "An inversion integral for a Gegenbauer transformation", *SIAM Journal on Applied Mathematics,* **11** (1963), 886—893; s ua. szerzőtől: "A hypergeometric transform", *SIAM Journal on Applied Mathematics,* **12** (1964), 601—612.

[11] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD, "Some properties of fractional integrals I.—II.", *Mathematische Zeitschrift,* **27** (1928), 565—606 és ibid. **34** (1932), 403—439.

[12] D. KRÁLIK, »Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktionentheorie«, *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.,* **7** (1956), 48—64. — Továbbá G. ALEXITS—D. KRÁLIK, »Über die Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen«, *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.,* **11** (1960), 387—399.

Ha az euklideszi terekre vonatkozó *Riesz*-potenciálok legegyszerűbb speciális esetével, vagyis az ún. *Riesz*-féle törtrendű integrállal foglalkozunk (vö. II.):

$$ {}_{-\infty}I_{\infty}^{\nu} f(x) = \left[2\Gamma(\nu)\cos\frac{\pi\nu}{2}\right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)|x-t|^{\nu-1}\,dt \quad (\nu > 0), \tag{20} $$

akkor a

$$ H_0[f] = \frac{1}{\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{f(t)}{x-t}\,dt \tag{21} $$

alakú *Hilbert*-transzformáltak elmélete kitüntetett szerepet játszik.[13] Ezen az alapon BUTZER és munkatársai a közelmúltban tüzetesen tanulmányozták a törtrendű integrálok, deriváltak és bizonyos klasszikus függvényosztályok (C_r, L_p, Lip α, ...) kapcsolatát, és messzemenő eredményeket találtak, melyeknek alkalmazásaik vannak a matematikai fizikában. E kutatások szorosan összefonódnak a konstruktív függvénytan és a harmonikus analízis modern módszereivel.[14]

A hatvanas években a törtrendű integrálásnak még egy alkalmazási területét találta a szerző: a szummációelméletet. Legyen $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ egy (x_0, x_1) intervallumban korlátos, integrálható függvényekből álló sorozat, és tegyük fel, hogy $\sum {}_{x_0}I_x^{\nu}\varphi_n$ valamely $x \in (x_0, x_1)$ pontban minden pozitív ν-re konvergens. Akkor a

$$ {}^{(W)}\sum \varphi_n(x) = \lim_{\nu\to+0} \sum {}_{x_0}I_x^{\nu}\varphi_n \tag{22} $$

limeszt a $\sum \varphi_n$ sor (W)-szummájának nevezzük, és (22) létezése esetén $\sum \varphi_n$-et (W)-szummábilisnek mondjuk az x helyen. Ez az új szummációs eljárás éles eredményeket szolgáltat például *Fourier*- és *Dirichlet*-féle sorokra. Speciálisan $x_0 = -\infty$ mellett a *Hurwitz*-féle zetafüggvény bizonyos tulajdonságainak felhasználásával (vö. I.) egyszerű, mégpedig szükséges és elegendő szummabilitási kritérium nyerhető trigonometrikus *Fourier*-sorokra; továbbá azt találjuk, hogy a (W)-módszer lokális

[13] M. RIESZ idézett dolgozatában (vö. [5]) a (20) integrál előtti tényező részint a félcsoport-tulajdonságból, részint a $(d^2/dx^2)\,{}_{-\infty}I_{\infty}^{\nu+2} f(x) = -\,{}_{-\infty}I_{\infty}^{\nu} f(x)$ relációból ered. Megjegyezzük, hogy (20)-nak egy lényeges kiterjesztését alkalmazza W. FELLER egyik cikkében: "On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semigroups generated by them", *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.*, 1952, kieg. kötet, 72—81.

[14] P. L. BUTZER—W. TREBELS, *Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentiation*, Köln—Opladen: Westdeutscher Verlag, 1968, 81. pp. és P. L. BUTZER—R. J. NESSEL, *Fourier analysis with approximation*, New York: Academic Press, 1971, 400—403. — Továbbá: H. KOBER, "A modification of Hilbert transforms, the Weyl integral and functional equations", *Journal of the London Mathematical Society*, **42** (1967), 42—50; valamint R. J. NESSEL—W. TREBELS, »Gebrochene Differentiation und Integration und Charakterisierungen von Favard—Klassen«, *Proceedings of the Conf. on Constructive Theory of Functions* (1969), Budapest: Akad. Kiadó, 1972, 331—341.

„hatékonysága" a klasszikus, *Cesàro-, Hölder-, Abel-* stb. féle összegezési módszerek mindegyikénél nagyobb.[15] Új adalékok remélhetők hatványsorok kerületi aszimptotikájának *Hadamard*-féle problémakörében, nevezetesen az ismert eredmények javítása, ill. lokalizációja.

4. Differenciál- és integrálegyenletek, operátorelmélet

Ez tekinthető a legtradícionálisabb alkalmazási területnek. Az első idevágó példa a híres *Abel*-féle integrálegyenlet (1823), melyet ma ilyen alakban írhatunk:

$$ {}_{x_0}D_x^{-\mu} f = \Phi(x) \quad (0 < \mu < 1), \tag{23} $$

előírt függvénnyel a jobb oldalon. HEAVISIDE *"Electromagnetic Theory"* c. művének megjelenése óta (1893—1912) általánosan ismeretes, hogy a $D=d/dt$ operátorral való formális számolás számos, a praxisban előforduló lineáris parciális differenciálegyenlet esetében D-nek nem-egész kitevőjű hatványaira vagy éppen transzcendens függvényeire vezet, ami könnyű motivációt jelent nem-egészrendű integrálok és deriváltak definiálására. A *Laplace*-transzformáció elméletére vagy a közelmúltban talált más szigorú operátormódszerekre támaszkodva természetesen tágabb aspektusban is vizsgálhatjuk a törtrendű differenciálás és integrálás egzakt megalapozásának problémáját.[16]

(23) explicit megoldása azonnal előállítható az ${}_{x_0}D_x^{\mu}$ inverz operátornak az egyenlet mindkét oldalára való alkalmazása útján, amennyiben az

$$ {}_{x_0}D_x^{\mu}({}_{x_0}D_t^{-\mu}) = {}_{x_0}D_x^{0} $$

operátoregyenlet érvényességi feltételeit előzetesen tisztáztuk (vö. (10)). Az utolsó 30—40 évben törtrendű operátorok segítségével tárgyaltak a szakirodalomban sok olyan speciális differenciál- és integrálegyenletet is, amelyekre a szóban forgó kalkulus felhasználása már nem ennyire kézenfekvő. Számos potenciálelméleti, elektrodinamikai, hidro- és aerodinamikai, kémiai kinetikai stb. példán kívül[17] kiemeljük

[15] L. a szerző következő dolgozatait: I) «Sur la sommation des séries de Fourier au moyen de l'intégration d'ordre fractionnaire», *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **251** (1960), 837—839. — II) «Application d'une nouvelle méthode de sommation aux séries trigonométriques et de Dirichlet» *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.,* **11** (1960), 317—334. — III) »Über die Dirichlet-Summation Fourierscher Reihen«, *Annales Univ. Sci. Budapest,* Sectio Mathematica, **3—4** (1960—61), 189—195. — IV) «Procédés de sommation (A, λ_m) dans l'analyse de Fourier», *Communications CIM Nice,* 1970, 132.

[16] Vö. pl. H. T. DAVIS, *The theory of linear operators,* Bloomington (Ind.): The Principle Press, 1936, p. 64—75 és 276—292.

[17] L. pl. S. BOCHNER, "Diffusion equation and stochastic processes", *Proceedings of the National Acad. Sci., U.S.A.,* **35** (1949), 368—370. — J. L. LIONS, «Sur l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes», *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **248** (1959), 2837—2849. — A. ERDÉLYI, "An integral equation involving Legendre functions", *SIAM Journal on Applied Mathematics,* **12** (1964), 15—30. — E. R. LOVE, "Some integral equations involving hypergeometric functions", *Proceedings of the Edinburgh Math. Soc.* (II), **15** (1967), 169—198. —
K. B. OLDHAM—J. SPANIER, "The replacement of Fick's laws by a formulation involving semi-differentiation", *Journal of Electroanalytical Chemistry,* **26** (1970), 331—341; továbbá "A general solution of the diffusion equation for semiinfinite geometries", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **39** (1972), 655—669. —
M. SHINBROT, "Fractional derivatives of solutions of Navier-Stokes equations", *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* **40** (1971), 139—154.

RIESZ MARCELLnek az m-dimenziós hullámegyenletre vonatkozó fundamentális eredményeit (vö. [5]), valamint ERDÉLYI és SNEDDON mély vizsgálatait ún. axiálisan szimmetrikus potenciálokról és duális integrálegyenletekről.[18] E munkákban a nem-egészrendű operátorok használata nemcsak mintegy „gyorsírási" módszerként jelenik meg, melynek segítségével bizonyos analitikus eljárások, ill. matematikai levezetések tömörebb és világosabb módon rögzíthetők, hanem ez az apparátus egyúttal bizonyos lényeges összefüggések fennállását is sugallja, miáltal a fejlődés fontos „katalizátorává" válik.

Az éppen tárgyalt probléma természetének megfelelően gyakran van szükség a legegyszerűbb törtrendű operátorok kisebb-nagyobb mérvű általánosítására. RIESZ MARCELL például a *Cauchy*-probléma megoldását az m-dimenziós *Lorentz—Minkowski*-térben (speciálisan a relativisztikus „téridőben") a következő *Riemann—Liouville*-típusú integrál segítségével adta meg:

$$I^{\nu}f(P)=\pi^{1-\frac{m}{2}}2^{1-\nu}\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-m}{2}\right)\right]^{-1}\int_{S_p}f(Q)r_{PQ}^{\nu-m}\,dQ, \tag{24}$$

ahol $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ és $Q(t_1, t_2, ..., t_m)$ a térnek egy fix, ill. változó pontja, r_{PQ} ezeknek távolsága a megfelelő metrika szerint, tehát az

$$[(x_1-t_1)^2-\sum_{k=2}^{m}(x_k-t_k)^2]^{1/2}$$

kifejezést jelenti, dQ rövidítés $dt_1dt_2...dt_m$ helyett, végül az S_p integrációs tartományt az $t_1<x_1$ egyenlőtlenség határozza meg.[19]

Más az igény az „általánosított axiálisan szimmetrikus potenciálok" *Erdélyi—Weinstein*-féle elméletben, mely a $(2\nu+3)$-dimenziós térbeli ϱ, z hengerkoordinátákra felírt

$$\frac{\partial^2u}{\partial\varrho^2}+\frac{2\nu+1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial\varrho}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0 \quad (u=u(\varrho, z))$$

parciális differenciálegyenletből indul ki. Ez utóbbinak vizsgálatához (1)-nek ilyen alakú kiterjesztését célszerű bevezetni:

$$I_{\Psi}^{\nu}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{x_0}^{x}f(t)[\Psi(x)-\Psi(t)]^{\nu-1}\Psi'(t)\,dt, \tag{25}$$

[18] A. ERDÉLYI—I. N. SNEDDON, "Fractional integration and dual integral equations", *Canadian Journal of Mathematics*, **14** (1962), 685—693. —
I. N. SNEDDON, *Mixed boundary value problems in potential theory*, New York: Wiley and Sons, 1966, 46—52. —
L. továbbá A. ERDÉLYI következő dolgozatait: I) "Some applications of fractional integration", *Mathematical Notes* No. 316, *Boeing Scientific Research Laboratories*, 1963, 23 pp. — II) "Axially symmetric potentials and fractional integration", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **13** (1965), 216—228. — III) "An application of fractional integrals", *Journal d'Analyse Mathématique*, **14** (1965), 113—126.

[19] Ha $m=1$, célszerű r_{PQ} értékét $|x_1-t_1|$-nek vennünk. Ez esetben (24) a $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)=$ $=2^{1-\nu}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)$ reláció folytán (1)-be megy át $x_0=-\infty$ mellett, ami nem más, mint a *Weyl*-integrál. Különben RIESZ MARCELL felhasználta (24)-nek egy *Riemann*-terekre vonatkozó elég erős kiterjesztését is, mégpedig változó együtthatójú lineáris hiperbolikus egyenletek vizsgálatával kapcsolatban.

ahol $\Psi(t)$-ről feltesszük, hogy szigorúan monoton növekedő és folytonosan differenciálható. (Nyilván a $\Psi(t)=t^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ speciális esetnek van legnagyobb jelentősége.)

Az a tény, hogy törtrendű deriváltakat bizonyos integrálegyenletek invertálásával is definiálhatunk, eltérő jellegű alkalmazási lehetőségekre vezet; ily módon ti. érdekes összehasonlítási és jellemzési tételeket kaphatunk, kapcsolatban a *Laplace*-transzformáció elméletével. [20] Ami a törtrendű integráloperátoroknak azt az elemi tulajdonságát illeti, hogy félcsoportot alkotnak, melynek csoporttá bővítése szolgáltatja a törtrendű differenciáloperátorokat — ez az észrevétel a közelmúltban kiindulópontjává vált a félcsoport-elmélet egy új ágának, nevezetesen a „törtkitevős operátorhatványok" elméletének. [21] Az idevágó eredmények kapcsolatban vannak *Banach*-terekre vonatkozó differenciálegyenletek vizsgálatával és a funkcionálanalízis egyes modern kutatási témaköreivel, pl. az absztrakt *Hilbert*-tér bizonyos operátoraira vonatkozólag. [22]

A fenti módszerek egy általános „iteratív-interpolációs" elvet alapoznak meg inhomogén differenciálegyenleteknek törtrendű operátorokkal való megoldására, mely a következőképpen fogalmazható: [23]

Tekintsünk egy

$$\Theta u = f \tag{26}$$

alakú egyenletet, ahol Θ egy lineáris (közönséges vagy parciális) differenciáloperátor, melyre $\Theta u=0$, ha $u=0$ és f ismert függvény. A (7) előállítás felhasználásával (26) bal oldala binomiális együtthatókat tartalmazó limeszkifejezésként írható. Iteráljuk mármost az operátort p-szer; a kapott $\Theta^{p}u$ ismét (7)-típusú limesz lesz. Kíséreljük meg az utóbbinak kiterjesztését p helyett tetszőleges valós ν-re, úgyhogy ν-nek folytonos függvényére jussunk. Ezek után ν helyébe (-1)-et téve adódik a (26) differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldásaként:

$$u = \Theta^{-1}f, \tag{27}$$

feltéve, hogy a $\Theta^{-1}\Theta=\Theta^{0}$ (=identikus operátor) operátorreláció igazolható.

[20] Vö. pl. G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation*, III. kötet, Basel: Birkhäuser-Verlag, 1956, 157—169. — Továbbá: H. Berens—U. Westphal, »Zur Charakterisierung von Ableitungen nichtganzer Ordnung im Rahmen der Laplace-Transformation«, *Mathematische Nachrichten*, **38** (1968), 115—129.

[21] Vö. E. Hille—R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **31** (1957), 808 pp. — U. Westphal, »Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren I—II«, *Compositio Mathematica* **22** (1970), 67—103; 104—136. — H. M. Hövel—U. Westphal, "Fractional powers of closed operators" *Studia Mathematica*, **42** (1972), 177—194. —
U. Westphal, "An approach to fractional powers of operators via fractional differences", *Arbeitsbericht* T. H. Aachen, 1973.

[22] J. L. Lions, *Équations différentielles opérationelles et problèmes aux limites*, Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag, 1961. —
B. Sz. Nagy és C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Budapest—Paris: Akad. Kiadó, 1967, 374. pp. — Újabban pl. R. K. Juberg és H. Kober is publikált idevágó eredményeket.

[23] M. Mikolás, »Über die explizite Auflösung gewisser Differential- und Integralgleichungen und Riszsche Potentiale«, *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Klasse für Mathematik, Physik und Technik, 1965/1, 91—93. — Továbbá: M. Mikolás, *Théorie et application du calcul infinitésimal généralisé*, Cours polycopiés à l'université de Montpellier (France), 1964, 65 pp.

Például az $u'+u=f(x)$ $(u=u(x);\, x_0<x\leqq x_1)$ egyenlet esetében a számítás így alakul:

$$\Theta^p u = \left(1+\frac{d}{dx}\right)^p u = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-x_0}{n}\right)^{-p}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{p}{k}\left(1+\frac{x-x_0}{n}\right)^{p-k} u\left(x-k\frac{x-x_0}{n}\right);$$

innen pedig

$$u=\Theta^{-1}f = \lim_{n\to\infty}\frac{x-x_0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{x-x_0}{n}\right)^{-k-1} f\left(x-k\frac{x-x_0}{n}\right) = \int_{x_0}^{x} f(t)e^{t-x}\,dt$$

a keresett partikuláris megoldás.

Megjegyzendő, hogy a szóban forgó módszer — ha egyáltalán alkalmazható — egyúttal a megoldás numerikus approximációját is lehetővé teszi.

5. Szakadásos függvények általánosított deriválása

Sokszor előfordul a fizikában és a műszaki tudományokban, hogy bizonyos differenciálrelációk „deriváltak" definiálását teszik kívánatossá a függvény törési pontjaiban vagy éppen szakadási helyein. Jól ismert példák a villamosságtanból: a *Dirac*-féle „delta-függvény" $(\delta(x))$, melyet a *Heaviside*-féle ún. egységugrás-függvényből:

$$U_0(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \tag{28}$$

„differenciálással" szokás származtatni, továbbá $\delta(x)$ formális deriváltjai; a statika bizonyos alapfüggvényei, amelyeket egymáshoz globálisan a differenciálás művelete köt, de a szóba jövő deriváltak nem léteznek egyes izolált pontokban, ahol koncentrált erők lépnek fel stb.

Az ötvenes évek eleje óta két teljesen különböző utat sikerült találni lokálisan szakadásos függvények „deriváltjainak" korrekt értelmezésére és felhasználására. Ezek egyike a függvényfogalom alkalmas kiterjesztését jelenti és az *általánosított függvények modern elméletében* realizálódott (*Schwartz*-féle „disztribúcióelmélet", *Mikusinski*-féle „operátorszámítás"). [24] A másik út a *valós szám fogalmának módosítása* annak érdekében, hogy a közönséges értelemben vett derivált egyes szakadási helyeken (mint $U_0(x)$-é az $x=0$ helyen) létezzék. [25]

Néhány évvel ezelőtt a szerző egy harmadik utat javasolt: tartsuk meg mind az analízis aritmetikai alapvetését, mind a klasszikus függvényfogalmat, de alkalmas

[24] Vö. pl. A. ERDÉLYI, *Operational calculus and generalized functions*, New York: Holt Rinehart and Winston, 1962. —
J. M. GELFAND—G. E. SHILOV, *Generalized functions*, New York: Academic Press, vol. I., 1964. — Továbbá:
A. ERDÉLYI—A. C. MCBRIDE, "Fractional integrals of distributions", *SIAM Journal for Mathematical Analysis*, **4** (1970), 547—557. —
A. ERDÉLYI, "Fractional integrals of generalized functions", *Journal of the Australian Mathematical Society*, **14** (1972), 30—37.
[25] C. SCHMIEDEN—D. LAUGWITZ, »Eine Erweiterung des Infinitesimalkalküls«, *Mathematische Zeitschrift*, **69** (1958), 1—39.

módon *terjesszük ki a differenciálás műveletét.* Így a szakadásos függvények „deriváltjai" újra a szokásos értelemben vett függvények lesznek, s megmaradhatunk továbbra is a klasszikus analízis keretei között. Az ismertetendő eljárás hatóköre természetesen szűkebb, mint a disztribúciók vagy a (*Mikusinski*-féle) „konvolúció-hányadosok" használatáé, mindazonáltal elég tág ahhoz, hogy a gyakorlatban fellépő összes eseteket magában foglalja.[26]

A részletekre térve, tekintsük a (4) előállítás következő „bilaterális" variánsát:

$$ {}_{x_0}D^{\mu}f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-x_0)}{\Gamma(m-\mu)} \frac{d^m}{dx^m} \int_{x_0}^{x} f(t)|x-t|^{m-\mu-1}\,dt \tag{29} $$

$$ (m-1 \leqq \mu < m;\ m = 1, 2, \ldots). $$

Célunk, hogy ${}_{x_0}D^{1-\varepsilon}f(x)$ $(\varepsilon>0)$-ből $\varepsilon\to+0$ határátmenettel származtassuk a keresett általánosított deriváltat az x_0 pontban. Ehhez figyelembe kell vennünk néhány előzetes feltételt: 1) a szóban forgó limesznek *lokális* jellegűnek kell lennie, azaz csupán az x_0 helynek egy tetszőlegesen kicsi környezetében felvett függvényértékektől függhet; 2) így $\varepsilon\to+0$ mellett még az $x\to x_0$ határátmenetre is szükségünk van, s e kettő kombinációja révén biztosítanunk kell az általánosított derivált létezését egy elég tág függvényosztályban; 3) ha $f(x_0+0)$ és $f(x-0)$ létezik, akkor a generalizált deriváltnak kapcsolatban kell lennie az $|f(x_0+0)-f(x-0)|$ ugrással.

A felsorolt előírások mind teljesülnek az alábbi definíciók elfogadása esetén: Tegyük fel, hogy az

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}_+f = \lim_{\varepsilon\to+0} [{}_{x_0}D^{1-\varepsilon}f(x_0+\varepsilon) - {}_{x_0}D^{-\varepsilon}f(x_0-\varepsilon)] \tag{30} $$

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}_-f = \lim_{\varepsilon\to+0} [{}_{x_0}D^{1-\varepsilon}f(x_0-\varepsilon) - {}_{x_0}D^{-\varepsilon}f(x_0+\varepsilon)] \tag{31} $$

határértékek léteznek (végesek), és egymással egyenlők. Akkor az f függvényt az x_0 pontban *$\mathscr{D}$-differenciálhatónak* mondjuk, és az

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}f = {}_{x_0}\mathscr{D}_+f = {}_{x_0}\mathscr{D}_-f \tag{32} $$

számot f x_0-beli *$\mathscr{D}$-deriváltjának* nevezzük.

Így például elemi számolással adódik, hogy $U_0(x)$ a kezdőpontban $\mathscr{D}$-differenciálható; pontosabban:

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}U_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x_0 = 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x_0 \neq 0. \end{cases} \tag{33} $$

Általában fennáll a következő tétel:

Ha $f'(x)$ létezik, és folytonos az x_0 pontnak külön egy jobboldali és egy baloldali (magát az x_0 helyet nem tartalmazó) környezetében, továbbá $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=$ $=d_{x_0}$, akkor az f függvény az x_0 helyen $\mathscr{D}$-differenciálható, és

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}f = d_{x_0} + [f(x_0+0) - f(x_0-0)]. \tag{34} $$

[26] L. a szerző két cikkét: I) »Die Benutzung verallgemeinerter Funktionen in der Festigkeitslehre«, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 45 (1965), 130—131. — II) »Über die Benützung neuer Operatorenmethoden in den Ingenieurwissenschaften«, Berichte IV. IKM Weimar, 2 (1967), 138—140.

Speciálisan $d_{x_0}=f'(x_0)$, azaz $f'(x)$-nek x_0-ban való létezése és folytonossága esetén fennáll az

$$(35) \qquad {}_{x_0}\mathscr{D}f=f'(x_0)$$

összefüggés.

Kimondhatjuk tehát, hogy (32) úgy tekinthető, mint a sima függvényekre vonatkozó közönséges derivált fogalmának egy erős általánosítása; megjegyezzük, hogy hasonló módon értelmezhetők a *magasabb rendű $\mathscr{D}$-deriváltak* is. Természetesen finomabb deriváltfogalomhoz jutunk, ha (29) helyett a törtrendű deriváltnak valamelyik pontosabb (de kevésbé elemi) definícióját használjuk fel.

Nem bocsátkozhatunk a (30)—(32) típusú deriváltak elméletének részletes kifejtésébe. Hangsúlyozzuk azonban, hogy ez az elmélet, melyből mostanáig csupán néhány alaptény publikálása történt meg, jól alkalmazhatónak látszik a matematikai fizika számos ágában.

6. Záró észrevételek

Ami a kongresszus eredményeinek összefoglalását illeti, helyzetem nem könnyű. Egyrészt mindig problematikus dolog többet mondani puszta általánosságoknál, amikor egy ilyen áttekintésről van szó, különösen, ha az előadások témaköre annyira szerteágazó, mint esetünkben. Másrészt figyelembe véve, hogy a meghívott előadók listáján számos kiváló matematikus neve található, nem vagyok biztos abban, hogy kompetens vagyok egy adekvát beszámoló tartására.

Mindenesetre kétségtelen, hogy ez az első nemzetközi tudományos rendezvény, mely speciálisan a nem-egészrendű differenciálás és integrálás elméletével, valamint alkalmazásaival foglalkozik; továbbá éppen a kongresszus idején jelent meg a tárgykör első monografikus feldolgozása OLDHAM és SPANIER tollából. Ezek a tények és a közlésre benyújtott dolgozatok, a résztvevők váratlanul magas száma, a jelenlevő szakemberek élénk érdeklődése és aktivitása azt mutatja, hogy az általánosított differenciál- és integráloperátorok elmélete ma már a matematika önálló (a klasszikus és a modern analízissel egyaránt szoros kapcsolatban álló) ágává fejlődött; s remélhető, hogy e tény mind a szakirodalomban, mind a matematikai tudományok oktatásában előbb-utóbb éreztetni fogja hatását.

A kongresszus anyagának tanulmányozása közvetlenül meggyőz arról, hogy a tárgyalt témák spektruma meglehetősen kiterjedt. Több olyan ismertető előadás hangzott el, mely az elmélet megalapozásával foglalkozott, és ugyancsak számos előadást hallottunk a különféle fizikai, kémiai, valószínűségszámítási, műszaki alkalmazásokról, különös tekintettel differenciál- és integrálegyenletekre, a legfontosabb integráltranszformációk és az általánosított függvények felhasználására. Így megállapíthatjuk, hogy a kongresszus egyik fő célkitűzését, az alkalmazási lehetőségek előtérbe állítását, ill. erősítését sikerült elérni; s a hatást bizonyára tovább mélyíti majd a *Proceedings* mielőbbi publikálása. Ezen a ponton visszaemlékszem Arthur ERDÉLYI professzornak egy régebbi megjegyzésére, hogy az e területen dolgozó matematikusok a múltban többnyire nem ismerhették kellőképpen másoknak a témakörben elért eredményeit. Jelen összejövetelünk és a *Proceedings* lépést jelent a helyzet javítása felé.

Napjainkban meglehetősen elterjedt a különböző klasszikus matematikai elméletek mennél nagyobb mérvű általánosításának tendenciája, s az ilyen irányú törekvések nem egyszer tisztán formális absztrakciókra vezetnek. Ki kell emelnünk, hogy az általánosított differenciál- és integráloperátorok elmélete nem sorolható bele ebbe a fejlődési trendbe. Kiindulópontja olyan természetes és konkrét (eredete majdnem a differenciál- és integrálszámítás felfedezéséig nyúlik vissza), s alkalmazási köre az egzakt megalapozás keresésének hosszú időszakában annyira kibővült, hogy a *nemegészrendű differenciálás és integrálás elméletének mint önálló matematikai diszciplínának jövője biztosítva van.* E jövőhöz kongresszusunk nyilván tartósan hozzá fog járulni.

Engedjék meg, hogy a kongresszus meghívott vendégei és összes résztvevői nevében hálámat fejezzem ki a BERTRAM ROSS professzor által vezetett Szervező Bizottság fáradhatatlan, eredményes munkájáért, s köszönetet mondjak a University of New Haven vezetőinek.

(Beérkezett: 1974. december 20.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

ALAPVETŐ MEGÁLLAPÍTÁSOK A LINEÁRIS OPERÁTOROK DEFEKTUS-SZÁMAIRÓL, A GYÖK ÉRTÉKEIRŐL ÉS INDEXEIRŐL

I. C. GOHBERG és M. G. KREIN*

TARTALOM

Bevezetés

Napjainkban a lineáris operátorok elméletében végzett legkülönfélébb kutatások során (a *Hermite*-féle operátorok általános elméletében, a szinguláris integrálegyenletek különböző osztályainak vizsgálatánál az indefinit metrikával ellátott terek operátorainak elméletében, *Hermite*-féle és nem *Hermite*-féle összeadandókkal való perturbációjának elméletében, és így tovább) mind nagyobb és nagyobb szerepet játszanak a lineáris operátor *defektus-száma és indexe* fogalmak.

Bár ezekkel a fogalmakkal a matematikusoknak legalább 35 évvel ezelőtt szoros kapcsolatba kellett kerülniük, és azután a következőkben szintén nemegyszer, ezen fogalmak általános alakban való megfogalmazása, és a rájuk vonatkozó alapvető megállapítások kialakítása aránylag nemrégen történt meg.

Bármennyire meglepő, a funkcionálanalízisnek ez a fontos fejezete, amelynek gyökerei a különböző klasszikus kutatásokba nyúlnak, és amelynek felépítésére — amint látni fogjuk — nem volt szükség olyan különösen jelentős eszközökre, rendkívül lassan fejlődött és, végeredményben, nagyon sok matematikus erőfeszítéseinek eredményeként jött létre.

* И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, *Успехи мат. наук.*, XII. вып. 2 (74) (1957), 43—118.

Szükségesnek tartva legalább röviden rámutatni azon kérdéskörök fejlődésének a főbb korszakaira, amelyekről később szó lesz, legelőször is a következő két eredményről teszünk említést.

1921-ben F. Noether [1] észrevette, hogy a szinguláris integrálegyenletek bizonyos osztályainak elméletében lehetséges egy olyan megállapítás, amely különbözik attól, amihez a *Fredholm*-féle integrálegyenletek elméletében hozzászoktunk, nevezetesen, hogy a homogén és transzponált homogén szinguláris egyenletek lineárisan független megoldásainak a száma különböző lehet, ugyanakkor a megfelelő inhomogén egyenletek megoldhatóságának *Fredholm*-féle feltételei érvényben maradnak.

Ha — követve a korszerű terminológiát — a homogén és transzponált homogén integrálegyenletek megoldásai számának a különbségét az egyenlet *indexének* nevezzük, akkor F. Noether eredményeinek a sorában rámutathatunk az általa vizsgált egyenlet-osztály indexének meghatározására szolgáló szabályra.

Másik eseményként emlékezhetünk meg arról, hogy 1923-ban T. Carleman [2] bizonyos speciális állítások során, hat év múlva pedig I. von Neumann [3] a *Hermite*-féle operátorok általános esetében bevezették és kidolgozták a *Hermite*-féle operátorok defektus-számainak a fogalmát.

Ebben az időben, sőt sokkal később is, nem fedeztek fel semmiféle kapcsolatot és átmenetet a *Hermite*-féle operátorok defektus-számainak elméletéből a szinguláris integrálegyenletek index elméletéhez.

Ezek a kapcsolatok csak akkor tüntek elő, amikor mindkét elméletet tovább fejlesztették és általánosították.

F. Noether említett dolgozata és T. Carleman ismert cikke [4] után F. D. Gahov [5] és a tbiliszi matematikusok iskolája dolgozataikban (ezzel kapcsolatosan l. N. I. Muszkelisvili [6] és V. D. Kupradze [7] monográfiáját) a főérték típusú maggal rendelkező szinguláris integrálegyenletek elméletének teljes kifejlesztését adják.

Sz. G. Mihlin [8], [9] dolgozatában a szinguláris integrálegyenletek elméletének egész sor megállapítását és fogását dolgozza fel az L_2 tér operátorainak általános nyelvén. Számunkra az a lényeges, hogy ez a szerző először fogalmazza meg az általános operátorelmélet nyelvén — egyelőre *Hilbert*-térben — a tételt a korlátos operátor indexének stabilitásáról teljesen folytonos perturbáció mellett.

Meg kell még jegyezni, hogy az absztrakt vizsgálati módszereknek a tekintett kérdéskörbe való behatolását jelentős módon segítette Sz. M. Nikolszkij [10] dolgozata és bizonyos mértékig Z. I. Halilov [11] dolgozata.

A következő lépést egymástól függetlenül (egyidőben történt publikációval) F. V. Atkinszon [12] és I. C. Gohberg [13], [14], [15] tették meg.

Ha az előbbi szerző teljesebb megfogalmazásaiból indulunk ki, akkor azt mondhatjuk, hogy ezekben a dolgozatokban azon korlátos operátorok indexének stabilitását mutatják ki, amelyek tetszőleges *Banach*-térben definiáltak, teljesen folytonos operátorokkal, vagy elég kis normájú korlátos operátorokkal való perturbáció mellett. Ezen kívül F. V. Atkinszon általános tételt bizonyított be a szorzat indexéről (l. 2.1. tételt).

Ezeket az eredményeket M. G. Krejn, M. A. Krasznoszelszkij [16], B. Sz. Nagy [17] és I. G. Gohberg [18] általánosították nemkorlátos zárt operátorokra. Új momentum volt M. G. Krejn és M. A. Krasznoszelszkij dolgozatában a defektus-számok *félstabilitásáról* (l. (2.7) a 2.4. tételben) szóló tétel, és arra a kapcsolatra való rámutatás, amely az indexek elmélete és a defektus-számok elmélete között fennáll.

Ez a dolgozat egyrészt a fent említett dolgozat ciklus, másrészt azon vizsgálatok hatására született, amelyeket annak idején M. G. Krejn, M. A. Krasznoszelszkij és D. P. Milman végeztek, a *Neumann*-féle defektus-számok elméletének a *Hilbert*- és *Banach*-tér tetszőleges operátorainak esetére való általánosítása terén. Ugyancsak helyénvaló megjegyezni, hogy ezekben a vizsgálatokban, ugyanúgy B. Sz. Nagy [20], [21] dolgozataiban is, az általános *Banach*-terek esetében két altér egymástól való eltérésének olyan bizonyos mértékeit jelölik meg, amelyek lehetővé teszik az alterek dimenziójának egyenlőségére való következtetést (l. 1., 6. §). Ezeket az eredményeket a jelen dolgozatban széles körben fogjuk alkalmazni.

A dolgozat nem szorítkozik kizárólag az indexek és defektus-számok stabilitási és félstabilitási tételeinek a leírására. Néhány általános tételt közlünk az operátor spektrumának a viselkedéséről annak különböző perturbációja mellett.

Különös figyelmet szentelünk az operátor izolált sajátértékei létezése kérdésének, amely sajátértékeknek végesdimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek (a fogalom definícióját l. 4. § 66 oldalon) felelnek meg. Emellett az operátor indexe és defektus-számai stabilitásáról szóló alapvető tételek itt ki vannak egészítve a gyökérték stabilitásáról szóló tétellel, mely tétel fontos szerepet játszik az operátorok perturbációjának általános elméletében (l. 4.2. tételt).

A gyök-alterek vizsgálata során figyelembe vettük Sz. N. Kracskovszkij és M. A. Goldman [22], [23], [24], [25] néhány eredményét is.

Az önadjungált operátorok önadjungáltakkal való perturbációjának vizsgálata során érintjük a nem önadjungált operátorok gyök-vektorai rendszerének teljességi kérdését, és idézzük M. V. Keldis [26] és M. Sz. Livsic [27] néhány viszonylag nem régi eredményét.

Helyhiány miatt a cikk nem foglalkozik a tárgyalt általános megállapításoknak a differenciáloperátorok peremfeladatai elméletében való nagyszámú alkalmazásaival. Viszont szükségesnek tartottuk az utolsó fejezetben illusztrálni az index stabilitásáról szóló általános megállapításokat a félegyenesen argumentumok különbségétől függő maggal rendelkező integrálegyenleteken, úgyszintén rámutatni az alapvetően új következtetésekre, amelyeket az általános tételeknek az olyan integrálegyenlet-rendszerekhez való alkalmazásával kapunk, amelyek a félegyenesen adottak és magjuk az argumentumok különbségétől függ.

Egy sor megállapítás, amelyet a cikk különböző fejezeteiben kifejtünk, valószínűleg új.

A cikk végén részletesebb bibliográfiát és bizonyos kiegészítő történeti adatokat közlünk minden fejezethez külön.

A dolgozat összeállítása során a szerzők abból indulnak ki, hogy az olvasó ismeri a *Hilbert*- és *Banach*-terek lineáris operátorai elméletének alapjait.

Szerzők élnek az alkalommal őszinte köszönetet mondani M. A. Krasznoszelszkijnek a sok értékes kritikai megjegyzéséért.

1. §. Bevezető tételek két altér nyílásáról

1. Legyen $\mathfrak{B}$-komplex *Banach*-tér. Emlékeztetünk a *Banach*-tér *dimenziójának* a definíciójára. Az $\mathfrak{M}$ halmazt *generátornak* nevezzük, ha az általa generált lineáris tér sűrű $\mathfrak{B}$-ben.

A $\mathfrak{B}$-t generáló $\mathfrak{M}$ halmazok $\mathfrak{a}_{\mathfrak{M}}$ számosságainak legkisebbikét a $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér *dimenziójának* nevezzük. Ezt a kardinális számot $\dim \mathfrak{B}$-vel fogjuk jelölni. Véges dimenziós tér esetében a dimenzió fenti definíciója egybeesik a szokásossal, azaz mondhatjuk, hogy a tér dimenziója egyenlő a tér lineárisan független elemeinek maximális számával.

Végtelen dimenziós $\mathfrak{B}$ tér esetében annak $\dim \mathfrak{B}$ dimenziója egybeesik a $\mathfrak{B}$-ben sűrű halmazok számosságai közül a minimális számossággal. Ez abból következik, hogy a $\mathfrak{B}$-t generáló halmaz elemeinek racionális együtthatójú lineáris kombinációinak a halmaza sűrű $\mathfrak{B}$-ben.

Nyilvánvaló, hogy ha két $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ *Banach*-tér izomorf (azaz egymásra lineárisan és folytonosan leképezhetők), akkor $\dim \mathfrak{B}_1 = \dim \mathfrak{B}_2$. Az állítás megfordítása végtelen dimenziós terek esetében nem igaz (l. [28], XI. fejezet).

Állapodjunk meg még a következőkben: $\varrho(x, \mathfrak{C})$ jelölje az $x \in \mathfrak{B}$ elem távolságát a $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$ altértől, azaz

$$\varrho(x, \mathfrak{C}) = \inf_{y \in \mathfrak{C}} |x-y|.$$

Fontos számunkra a következő fogalom.

Egy $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér két $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ lineáris részhalmaza nyílásának nevezzük a következő módon definiált számot:

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \max\Big\{\sup_{\substack{x \in \mathfrak{C}_1 \\ |x|=1}} \varrho(x, \mathfrak{C}_2),\ \sup_{\substack{y \in \mathfrak{C}_2 \\ |y|=1}} \varrho(y, \mathfrak{C}_1)\Big\}. \tag{1.1}$$

A nyílás következő két tulajdonsága nyilvánvaló. Először is, mindig igaz

$$0 \leqq \theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \theta(\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_1) \leqq 1,$$

másrészt

$$\theta(\overline{\mathfrak{C}}_1, \overline{\mathfrak{C}}_2) = \theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2),$$

ahol $\overline{\mathfrak{C}}_1, \overline{\mathfrak{C}}_2$ megfelelően a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ lezártjai.

1.1. TÉTEL. *Legyen* $\mathfrak{C}_1$ *és* $\mathfrak{C}_2$ *a* $\mathfrak{B}$ *Banach-tér két lineáris halmaza, mégpedig*

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = a < 1.$$

Ha a $\dim \mathfrak{C}_j$ $(j=1, 2)$ [1] *két szám egyike véges, akkor*

$$\dim \mathfrak{C}_1 = \dim \mathfrak{C}_2.$$

Bizonyítás. A tétel ekvivalens azzal az állítással, hogy ha $\dim \mathfrak{C}_1 = n$, $\dim \mathfrak{C}_2 > n$, akkor $\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = 1$. Utóbbi bizonyításához elegendő megmutatni, hogy $\mathfrak{C}_2$-ben létezik ort y $(|y|=1)$, „ortogonális" $\mathfrak{C}_1$-hez, azaz olyan, hogy $\varrho(y, \mathfrak{C}_1) = 1$; miközben az általánosság megszorítása nélkül fel lehet tételezni, hogy $\dim \mathfrak{C}_1 = n+1$.

[1] $\dim \mathfrak{C}$-n a $\dim \overline{\mathfrak{C}}$-t értjük.

Jelölje $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ által generált lineáris teret.

Tételezzük fel először, hogy $\mathfrak{B}_1$-ben a $|z|=1$ $(z\in\mathfrak{B}_1)$ egységgömb felület szigorúan konvex, azaz nem tartalmaz szakaszokat. Akkor bármely $z\in\mathfrak{B}_1$ elemnek csak egy „projekciója" van $\mathfrak{C}_1$-ben, azaz csak egy olyan $x\in\mathfrak{C}_1$, amelyen a z és $\mathfrak{C}_1$ távolsága eléri a $\varrho(z, \mathfrak{C}_1)$ értéket. Könnyű belátni, hogy az $x=\varphi(z)$ $(z\in\mathfrak{B}_1)$ „projektáló" operátor folytonos és rendelkezik a $\varphi(-z)=-\varphi(z)$ tulajdonsággal. z „ortogonalitása" $\mathfrak{C}_1$-hez azt jelenti, hogy $\varrho(z, \mathfrak{C}_1)=|z-\varphi(z)|=|z|$, azaz $\varphi(z)=0$ (a projekció egyetlen volta miatt).

Ha most feltételezzük, hogy a $\mathfrak{C}_2$ tér $\mathfrak{S}_2$ egységgömbjének a felületén $(|y|=1)$ a $\varphi(y)$ operátor mindenütt különbözik 0-tól, akkor az $\mathfrak{S}_2$ kompaktsága miatt állíthatjuk, hogy a $\Phi(y)=\varphi(y)/|\varphi(y)|$ folytonos $\mathfrak{S}_2$-n. Ez az operátor folytonosan képezi le az $\mathfrak{S}_2$ n-dimenziós gömbfelületet a $\mathfrak{C}_1$ tér $(n-1)$-dimenziós $\mathfrak{S}_1(|x|=1)$ gömbfelületébe. méghozzá úgy, hogy a centrálisan szimmetrikus pontok centrálisan szimmetrikusakba mennek át:

$$\psi(-y) = -\Phi(y),$$

ami viszont lehetetlen K. BORSUK [29][2] ismert tétele miatt.

Tehát a tételt bebizonyítottuk azzal a feltételezéssel, hogy a $\mathfrak{B}_1$ egységgömbfelület szigorúan konvex.

Az általános esetet a vizsgált esetre fogjuk visszavezetni, megmutatva, hogy bármely $\varepsilon>0$ esetén mindig konstruálható $\mathfrak{B}_1$-ben olyan új $|z|_0$ norma, amelyre teljesül

$$|z| \leqq |z|_0 \leqq (1+\varepsilon)|z| \quad (z\in\mathfrak{B}_1) \tag{1.2}$$

és hogy az új $|z|_0=1$ gömbfelület szigorúan konvex legyen, vagyis hogy bármely két $z_1, z_2\in\mathfrak{B}_1$ különböző irányú két vektor esetén teljesüljön

$$|z_1+z_2|_0 < |z_1|_0+|z_2|_0. \tag{1.3}$$

Valóban, az (1.2) egyenlőtlenség nyilvánvaló módon maga után vonja a

$$\theta_0(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) \leqq (1+\varepsilon)\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$$

egyenlőtlenséget, ahol $\theta_0(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ a $|z|_0$ normának megfelelő nyílás a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ között. Az (1.3) feltétel miatt a tekintett $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ esetén a bizonyítottak szerint $\theta_0(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)=1$, következésképp az $\varepsilon>0$ tetszőleges volta miatt $\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)=1$ is teljesül.

Most megmutatjuk, hogyan valósítható meg a $|z|_0$ norma konstrukciója.

[2] Megmagyarázzuk ezt kissé részletesebben. A komplex $\mathfrak{C}_2$ tér $\mathfrak{S}_2$ gömbfelülete homeomorf módon leképezhető — centrális szimmetria tartóan — a közönséges euklideszi-tér $2n$-dimenziós S_2 gömbfelületébe. Ezután az $\mathfrak{C}_1$ gömbfelület homeomorf módon leképezhető egy $2(n-1)$-dimenziós S_1 gömbfelületbe — az S_2 szabályos részébe. Ezután már a $\psi(y)$ leképezés természetes módon generálja az S_2 gömbnek saját S_1 részébe való páratlan ψ leképezését. Mivel S_1 nem esik egybe S_2-vel, a leképezés foka nulla lesz. Másrészt a gömbfelület bármely páratlan folytonos leképezésének (önmagába, K. BORSUK említett tétele miatt) a foka különböző kell legyen nullától.

Legyen $|z_1|$ valamilyen norma $\mathfrak{B}_1$-ben, amelynek szigorúan konvex $|z|_1=1$ gömbfelület felel meg; például ez definiálható a következő módon:

$$|\xi_1 e_1+\ldots+\xi_m e_m| = \sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_m^2},$$

ahol $\{e_1, \ldots, e_m\}$ a $\mathfrak{B}_1$ valamely bázisa.

Ha $k(>0)$-val jelöljük a $|z|_1$ maximumát a $|z|=1$ egységgömbfelületen, akkor fel lehet írni, hogy

$$|z|_1 \leqq k|z|.$$

Mivel $|z|_1$ eleget tesz az (1.3) feltételnek, így tetszőleges $\delta>0$ esetén ennek a feltételnek eleget fog tenni a

$$|z|_0 = |z|+\delta|z|_1$$

norma is. Erre a normára teljesül az (1.2) egyenlőtlenség $\varepsilon=\delta k$ mellett.

A $\delta>0$ tetszőleges volta miatt a konstrukciót befejeztük, a tétel bizonyítva van.

A bizonyított tételből közvetlenül adódik a

KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ a $\mathfrak{B}$ Banach-tér két altere, $\mathfrak{C}_1$ végesdimenziós és dimenziója kisebb $\mathfrak{C}_2$ dimenziójánál. Akkor létezik $\mathfrak{C}_2$-ben olyan $y(\neq 0)$ elem, hogy*

$$\min_{x\in\mathfrak{C}_1} |x-y| = |y|.$$

2. *A $\mathfrak{B}$-ben definiált valamely P lineáris korlátos operátort* projektornak nevezzük, ha

$$P^2 = P.$$

Mint ismeretes, a P projektor értékeinek a $\mathfrak{P}=P\mathfrak{B}$ halmaza mindig zárt. A projektor normája nem kevesebb egynél. Ha P egy projektor, akkor a $Q=I-P$ is projektor, mivel $Q^2=I-2P+P^2=I-P=Q$, méghozzá a P és Q projektorok ortogonálisak, ugyanis $PQ=QP=0$.

Bármely P projektor meghatározza a $\mathfrak{B}$ felbontását a következő direktösszegre:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}\dotplus\mathfrak{Q} \quad (\mathfrak{P} = P\mathfrak{B},\ \mathfrak{Q} = Q\mathfrak{B}).$$

Megfordítva, ha $\mathfrak{B}$-nek létezik két altér direktösszegére való $\mathfrak{B}=\mathfrak{P}\dotplus\mathfrak{Q}$ felbontása, akkor mindig található egy és csakis egy olyan P projektor, hogy $P\mathfrak{B}=\mathfrak{P}$ és $(I-P)\mathfrak{B}=\mathfrak{Q}$.

Megjegyezzük, hogy ha $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{B}$ valamely végesdimenziós altere, akkor könnyen konstruálható olyan P operátor, amely az egész $\mathfrak{B}$ teret projektálja $\mathfrak{C}$-re. Léteznek olyan $\mathfrak{B}$ terek olyan $\mathfrak{C}$ alterükkel, amelyekre nem létezik a $\mathfrak{B}$-t a $\mathfrak{C}$-re projektáló operátor. Ilyen tér például az L_p $(p\neq 2)$.

1.2. TÉTEL. *Legyen P és Q két olyan projektor, amely a $\mathfrak{B}$ Banach teret a $\mathfrak{P}=P\mathfrak{B}$, ill. $\mathfrak{Q}=Q\mathfrak{B}$ altérre projektálja. Ha $|P-Q|<1$, akkor a $\mathfrak{P}$ és $\mathfrak{Q}$ alterek izomorfak, és így* $\dim\mathfrak{P}=\dim\mathfrak{Q}$.

Bizonyítás. Ha $|P-Q|<1$, akkor $I-(P-Q)$ operátor folytonosan invertálható, mivel

$$(I-P+Q)^{-1} = I+\sum_{n=1}^{\infty}(P-Q)^n$$

és így, $(I-P+Q)\mathfrak{B}=\mathfrak{B}$. Innen $P(I-P+Q)\mathfrak{B}=P\mathfrak{B}$, mivel pedig $P^2=P$, így

$$PQ\mathfrak{B} = P\mathfrak{B}, \quad P\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}.$$

Ilyen módon a P operátor $\mathfrak{Q}$-t leképezi az egész $\mathfrak{P}$-re. Sőt bármely $x\in\mathfrak{Q}$-re:

$$|Px| = |Qx+(P-Q)x| = |x+(P-Q)x| \geqq |x|-|(P-Q)x| \geqq (1-|P-Q|)|x|,$$

ahonnan az következik, hogy a P lineáris folytonos operátor leképezi $\mathfrak{Q}$-t a $\mathfrak{P}$-re lineárisan kölcsönösen egyértelműen és kölcsönösen folytonosan. Ilyen leképezés létezése éppen azt jelenti, hogy $\mathfrak{P}$ és $\mathfrak{Q}$ izomorfak.

Az 1.2. tételt SZŐKEFALVI-NAGY B. [20] dolgozatában először a *Hilbert*-tér ortogonális projektoraira, majd [21]-ben a legáltalánosabb esetre is bebizonyította.

Megjegyezzük, hogy mindig teljesül

$$\theta(\mathfrak{P},\mathfrak{Q}) \leqq |P-Q|. \tag{1.4}$$

Valóban, ha $x\in\mathfrak{P}, |x|=1$, akkor $|x-Qx|=|Px-Qx|\leqq|P-Q|$, és emiatt $\varrho(x, \mathfrak{Q})\leqq|P-\mathfrak{Q}|$. Analóg módon, ha $y\in\mathfrak{Q}, |y|=1$, akkor $\varrho(y,\mathfrak{P})\leqq|P-Q|$. Visszaemlékezve az (1.1) definícióra, megkapjuk (1.4)-et.

Ilyen módon abban a fontos esetben, amikor a $\mathfrak{P}$ és $\mathfrak{Q}$ terek valamelyike végesdimenziós, az 1.2. tétel következménye az 1.1. tétel.

A $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-tér esetén minden nehézség nélkül bebizonyítható ([29], 34 §), hogy $\mathfrak{H}$ bármely két $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ alterének a nyílása meghatározható a

$$\theta(\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2) = |P_{\mathfrak{C}_1}-P_{\mathfrak{C}_2}|$$

képlettel, ahol $P_{\mathfrak{C}_1}$ és $P_{\mathfrak{C}_2}$ olyan projektorok, amelyek ortogonálisan projektálják $\mathfrak{H}$-t megfelelően a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$-re. Ilyen módon ebben az esetben az 1.1. tétel a végtelen dimenziós terekre is igaz, és következménye az 1.2. tételnek.

2. §. A Φ-operátorok indexének stabilitásáról és defektus-számainak félstabilitásáról szóló tételek

1. Először megállapodunk néhány jelölésben és terminológiában, majd emlékeztetünk egy sor eredményre.

Azt mondva, hogy valamely A operátor egy $\mathfrak{B}_1$ *Banach*-térből egy $\mathfrak{B}_2$ *Banach*-térbe *hat,* mindössze azt fogjuk érteni, hogy az A operátor értelmezési tartománya (amelyet $\mathfrak{D}_A$-val fogunk jelölni) $\mathfrak{B}_1$-ben van, értékkészlete pedig (amelyet $\mathfrak{R}_A$-val jelölünk) benne van $\mathfrak{B}_2$-ben. Ha $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{B}_2=\mathfrak{B}$, akkor azt fogjuk mondani, hogy az A operátor a $\mathfrak{B}$-ben van értelmezve.

A következőkben az összes tekintett operátorokról fel fogjuk tételezni (nagyrészt nem megfogalmazva ezt), hogy azok *lineárisak,* azaz hogy azok $\mathfrak{D}_A$ értelmezési tartománya lineáris, és hogy azok additívak és homogének.

Ha $\mathfrak{B}$ valamely *Banach*-tér, akkor $\mathfrak{B}^{\dagger}$ a konjugált *Banach*-teret fogja jelölni, azaz a $\mathfrak{B}$-n értelmezett össze lineáris folytonos funkcionálok terét.

Az $Ax=0$ egyenlet összes megoldásainak $\mathfrak{Z}_A$ lineáris sokaságát az *A operátor zérushelyei lineáris sokaságának (alterének)*, az $\mathfrak{R}_A$-hoz ortogonális összes $f\in\mathfrak{B}_2^{\dagger}$ lineáris funkcionálok $\mathfrak{Z}_A$ alterét (azaz olyan funkcionálokét, hogy $f(y)=0$ az összes $y\in\mathfrak{R}_A$-ra) pedig az A operátor *defektus-alterének* fogjuk nevezni.

A $\mathfrak{Z}_A$ és $\mathfrak{Z}_A^{\dagger}$ dimenzióját megfelelően α_A és β_A-val fogjuk jelölni, azaz

$$\alpha_A = \dim \mathfrak{Z}_A, \quad \beta_A = \dim \mathfrak{Z}_A^{\dagger}.$$

A β_A számot az A operátor *defektus-számának* nevezzük.

Mint ismeretes, a $\mathfrak{Z}_A^{\dagger}$ altér véges dimenziós akkor és csakis akkor, ha a $\mathfrak{B}_2/\overline{\mathfrak{R}}_A$ faktortér véges dimenziós, és ebben az esetben

$$\beta_A = \dim(\mathfrak{B}_2/\overline{\mathfrak{R}}_A). \tag{2.1}$$

Végtelen β_A esetén a (2.1) képlet általában nem igaz. Ugyanakkor mindaz, amit a következőkben bizonyítani fogunk a β_A defektus-számról, igaz marad akkor is, ha a β_A szám definíciójaként a $\mathfrak{B}_2/\overline{\mathfrak{R}}_A$ faktortér dimenzióját fogadjuk el.

A rendezett (α_A, β_A) számpárt az A operátor *d-karakterisztikájának* nevezzük.

Ha mindkét α_A és β_A szám véges, akkor az A operátor *d*-karakterisztikáját *végesnek* nevezzük, a $\varkappa_A=\beta_A-\alpha_A$ különbséget pedig az A operátor *indexének* nevezzük.[3]

Ha az α_A és β_A számok közül csak az egyik véges, akkor az A operátor *d*-karakterisztikáját *szeminfinitnek* nevezzük.

Ha $\alpha_A=0$, akkor az A operátor kölcsönösen egyértelműen képezi le $\mathfrak{D}_A$-t $\mathfrak{R}_A$-ba. Ebben az esetben létezik $\mathfrak{R}_A$-n egy A^{-1} inverz operátor, amely leképezi $\mathfrak{R}_A$-t $\mathfrak{D}_A$-ba, úgy hogy

$$A^{-1}Ax = x \quad (x\in\mathfrak{D}_A), \quad AA^{-1}y = y \quad (y\in\mathfrak{R}_A).$$

Megjegyezzük, hogy az A operátorhoz létezik az $\mathfrak{R}_A$-n egy korlátos inverz operátor akkor és csakis akkor, ha található olyan $m>0$ pozitív szám, hogy $|Ax|\geqq \geqq m|x|$ $(x\in\mathfrak{D}_A)$.

Megállapodunk, hogy azt fogjuk mondani, hogy az A operátor *folytonosan invertálható,* ha $\mathfrak{R}_A=\mathfrak{B}_2$ és annak létezik korlátos inverze.

Mint ismeretes, az A operátort *normálisan feloldhatónak* nevezzük, ha $y\in\mathfrak{B}_2$ esetén az $Ax=y$ egyenlet akkor és csakis akkor megoldható, ha $f(y)=0$ az összes $f\in\mathfrak{Z}_A^{\dagger}$-ra.

Utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy az A operátor $\mathfrak{R}_A$ értelmezési tartománya zárt.

Most emlékeztetünk arra, hogy az A operátort *zártnak* nevezzük, ha az $x_n\to x$ $(x_n\in\mathfrak{D}_A)$ és $Ax_n\to y$-ból következik, hogy $x\in\mathfrak{D}_A$ és $Ax=y$.

Ha az A operátorra $\alpha_A=0$, akkor az A operátor zártságából következik az A^{-1} operátor zárt volta, és megfordítva.

BANACH tétele szerint (l. a [28] 35. oldalát) a teljes *Banach*-térben értelmezett lineáris zárt operátor mindig folytonos (korlátos).

[3] Ez a definíció különbözik az általánosan elfogadott $\varkappa_A=\beta_A-\alpha_A$-tól.

Ez a tétel lehetővé teszi azt állítani, hogy ha az A operátor zárt és $\alpha_A=0$, akkor az normálisan feloldható akkor és csakis akkor, ha az A^{-1} operátor korlátos. Valóban, ha az A operátor normálisan feloldható, akkor az $\mathfrak{R}_A$ zárt, és ezért az A^{-1} zárt operátor korlátos.

Megfordítva, ha az A^{-1} operátor korlátos, akkor az $y_n \to y$ ($y_n \in \mathfrak{R}_A$)-ból következik, hogy az $\{y_n\}$ sorozattal együtt az $\{x_n\}=\{A^{-1}y_n\}$ sorozat is egy konvergens sorozat lesz $\mathfrak{B}_1$-ben valamely $x \in \mathfrak{B}_1$ elemhez. Mivel pedig az A operátor zárt, ezért $Ax=y$, $y \in \mathfrak{R}_A$. Ilyen módon $\mathfrak{R}_A$ zárt, azaz az A operátor normálisan feloldható.

2. A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi tételre:

2.1. LEMMA. *Legyen a $\mathfrak{B}$ Banach-tér egy $\mathfrak{R}$ altér és egy végesdimenziós $\mathfrak{N}$ altér direkt összege:*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{R} \dotplus \mathfrak{N},$$

$\mathfrak{D}$ pedig a $\mathfrak{B}$ sűrű lineáris része. Akkor

1) *A $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{R}$ lineáris halmaz sűrű $\mathfrak{R}$-ben, és*

2) *a $\mathfrak{B}$ tér előállítható az $\mathfrak{R}$ és olyan $\mathfrak{N}'$ alterek*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{R} \dotplus \mathfrak{N}'$$

direktösszegeként, ahol $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{D}$.

Bizonyítás. Legyen $e_1, \ldots, e_n$ az $\mathfrak{N}$ altér bázisa, az $f_1, \ldots, f_n$ pedig olyan $\mathfrak{B}^\dagger$-beli lineáris funkcionálok, hogy

$$f_j(e_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, n), \quad f_j(x) = 0 \quad (x \in \mathfrak{R},\ j = 1, \ldots, n).$$

Tehát az $\mathfrak{R}$ altér az f_j ($j=1, \ldots, n$) funkcionálok közös zérushelyeinek az összessége. Legyenek a $\mathfrak{D}$-beli $\tilde{e}_k$ ($k=1, \ldots, n$) elemek olyan közeliek a megfelelő e_k ($k=1, \ldots, n$) elemekhez, hogy a $\det \| f_j(\tilde{e}_k) \|$ determináns nullától különböző.

Abból, hogy $\mathfrak{D}$ sűrű $\mathfrak{B}$-ben, következik, hogy tetszőleges $y \in \mathfrak{R}$ esetén található olyan $\{z_\nu\} \subset \mathfrak{D}$ sorozat, amely konvergál y-hoz:

$$z_\nu \to y \quad (\nu \to \infty).$$

Képezzük a

$$\tilde{z}_\nu = z_\nu + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{\nu k} \tilde{e}_k$$

sorozatot, ahol az $\alpha_{\nu k}$-k komplex számok, amelyeket később definiálunk. Nyilvánvaló, hogy az összes $\tilde{z}_\nu \in \mathfrak{D}$.

Kiválasztjuk az $\alpha_{\nu k}$-t úgy, hogy $\tilde{z}_\nu \in \mathfrak{D}_1 (= \mathfrak{R} \cap \mathfrak{D})$. Ennek érdekében szükséges és elegendő, hogy

$$f_j(\tilde{z}_\nu) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots),$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{\nu k} f_j(e_k) + f_j(z_\nu) = 0 \quad (j = 1, \ldots, k;\ \nu = 1, 2, \ldots).$$

Ilyen módon az $\alpha_{\nu k}$ $(k=1, \ldots, n)$ számok egy olyan egyenletrendszernek a megoldásai, amelynek a determinánsa nullától különböző. Azonkívül a

$$\lim_{\nu\to\infty} f_j(z_\nu) = f_j(y) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

egyenlőségből következik, hogy

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_{\nu k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \quad \lim_{\nu\to\infty} \tilde{z}_\nu = \lim_{\nu\to\infty} z_\nu = y.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\bar{\mathfrak{D}}_1 = \mathfrak{N}$.

A lemma bizonyításának befejezéséhez meg kell még jegyeznünk, hogy az $\tilde{e}_k$ $(k=1, \ldots, n)$ bázisú $\mathfrak{N}'$ altérnek ugyanolyan a dimenziója, mint az $\mathfrak{N}$ altéré, és mivel ezenkívül $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{D}$, $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{N} = 0$, így

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{N}'.$$

A lemmát bebizonyítottuk.

Az egyszerűsítés érdekében megállapodunk *Φ-operátornak* nevezni minden lineáris zárt normálisan feloldható véges *d*-karakterisztikájú operátort.

A következő állítással kezdjük.

2.1. TÉTEL. *Legyen A és B a $\mathfrak{B}$ Banach-térben definiált valamely két Φ-operátor, és legyen $\mathfrak{D}_A$ sűrű $\mathfrak{B}$-ben. Az AB szorzat is Φ-operátor, méghozzá*

$$\varkappa_{AB} = \varkappa_A + \varkappa_B.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{C}_1$ az $\mathfrak{N}_B$ és $\mathfrak{Z}_A$ alterek $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{N}_B \cap \mathfrak{Z}_A$ metszete. Legyen a $\mathfrak{C}_1$ altér dimenziója n_1. Akkor

$$\alpha_{AB} = \alpha_B + n_1. \tag{2.2}$$

A $\mathfrak{Z}_A$ altér előállítható a $\mathfrak{C}_1$ altér és valamely $\mathfrak{C}_2$ altér direkt összegeként, ahol $\mathfrak{C}_2$ dimenziója $\alpha_A - n_1$.

Akkor a 2.1. lemmának megfelelően $\mathfrak{B}$ előállítható az $\mathfrak{N}_B \dotplus \mathfrak{C}_2$ altér és valamely véges dimenziós $\mathfrak{C}_3$ altér direktösszegeként, ahol $\mathfrak{C}_3$ kiválasztható úgy, hogy $\mathfrak{D}_A$-ból való legyen.

Legyen $\dim \mathfrak{C}_3 = n_3$. A $\mathfrak{C}_2 \dotplus \mathfrak{C}_3$ altér ekvivalens a $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}_B$ faktortérrel. Ezért $\dim(\mathfrak{C}_2 \dotplus \mathfrak{C}_3) = \beta_B$, azaz $\alpha_A - n_1 + n_3 = \beta_B$, vagyis

$$n_1 - n_3 = \alpha_A - \beta_B. \tag{2.3}$$

Felhasználjuk most azt, hogy

$$\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_A \cap (\mathfrak{N}_B \dotplus \mathfrak{C}_2 \dotplus \mathfrak{C}_3) = \mathfrak{D}_1 \dotplus \mathfrak{C}_2 \dotplus \mathfrak{C}_3,$$

ahol $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{N}_B$.

Alkalmazva $\mathfrak{D}_A$-ra az A operátort, azt kapjuk, hogy

$$A\mathfrak{D}_A = A\mathfrak{D}_1 \dotplus A\mathfrak{C}_3.$$

Másrészt, $A\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}_{AB}$, tehát

$$\mathfrak{N}_A = \mathfrak{N}_{AB} \dotplus A\mathfrak{C}_3.$$

Utóbbi egyenlőség maga után vonja az $\mathfrak{R}_{AB}$ zártságát, és ezzel az AB operátor normális feloldhatóságát, ezenkívül ebből az is következik, hogy

$$\beta_{AB} = \beta_A + \dim (A\mathfrak{C}_3) = \beta_A + n_3. \tag{2.4}$$

A (2.2), (2.3) és (2.4)-ből azt kapjuk, hogy

$$\varkappa_{AB} = \beta_{AB} - \alpha_{AB} = \beta_A + n_3 - \alpha_B - n_1 = \beta_A - \alpha_A + \beta_B - \alpha_B = \varkappa_A + \varkappa_B.$$

MEGJEGYZÉS. A bebizonyított tétel érvényben marad minden olyan esetben, amikor az A és B operátorok a $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ egyikéből a másikba hatnak, és az AB szorzatnak van értelme.

3. Mint ismeretes, az $\tilde{A}$ operátort az A operátor *bővítésének* nevezzük, ha $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ és $\tilde{A}x = Ax$ az $x \in \mathfrak{D}_A$ mellett. Ha eközben a $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}/\mathfrak{D}_A$ faktortérnek véges k dimenzió száma van, akkor az $\tilde{A}$ operátort az A operátor *k dimenziós bővítésének* nevezzük. Ebben az esetben $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ mindig előállítható $\mathfrak{D}_{\tilde{A}} = \mathfrak{D}_A \dotplus \mathfrak{M}$ direktösszeg alakjában, ahol $\mathfrak{M}$ valamely k-dimenziós tér, és akkor tetszőleges $x \in \mathfrak{D}_A$ és $y \in \mathfrak{M}$-re, $\tilde{A}(x+y) = Ax + Cy$, ahol C valamely véges dimenziós az $\mathfrak{M}$-en értelmezett operátor.

2.2. LEMMA. *Legyen $\tilde{A}$ az A Φ-operátornak k dimenziós bővítése. Akkor az $\tilde{A}$ operátor szintén Φ-operátor, mégpedig*

$$\varkappa_{\tilde{A}} = \varkappa_A - k, \quad \alpha_{\tilde{A}} \leqq \alpha_A + k.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{M}$ egy olyan k-dimenziós altér, amelynek a $\mathfrak{D}_A$-val való metszete csak a nulla, és legyen $\tilde{A}$ az A operátornak k dimenziós bővítése:

$$\tilde{A}(x+y) = Ax + Cy,$$

ahol $x \in \mathfrak{D}_A, y \in \mathfrak{M}$ és C egy, az $\mathfrak{M}$-en értelmezett, véges dimenziós operátor. A lemmát először arra az esetre fogjuk bizonyítani, amikor $\alpha_A = 0$.

Jelöljük $\mathfrak{N}$-el azt az alteret, amely a C képe ($C\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$). Legyen $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}_A$. Az összes olyan $y \in \mathfrak{M}$ elemek halmazát, amelyekre $Cy \in \mathfrak{N}_1$, jelöljük $\mathfrak{M}_1$-el. Speciálisan, $\mathfrak{M}_1$ tartalmazza az összes olyan $y \in \mathfrak{M}$ elemet, amelyekre $Cy = 0$.

Az $\mathfrak{M}$ altér előállítható $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2$ alakban. Akkor az $\mathfrak{N}$ altér előáll az $\mathfrak{N}_1$ és az $\mathfrak{N}_2 = C\mathfrak{M}_2$ altér direktösszegeként. Az $\mathfrak{M}_2$ és $\mathfrak{N}_2$ altereknek azonos $s \leqq k$ a dimenziójuk. Az $\mathfrak{M}_1$ altér dimenziója így $k-s$.

Az $\tilde{A}$ operátor értékkészlete akkor $\mathfrak{R}_{\tilde{A}} = \mathfrak{R}_A \dotplus \mathfrak{N}_2$ direktösszege az $\mathfrak{R}_A$ altérnek és a végesdimenziós $\mathfrak{N}_2$ altérnek. Következésképp az $\tilde{A}$ operátor normálisan feloldható. Ezenkívül, a mondottakból következik, hogy $\beta_{\tilde{A}} = \beta_A - s$.

Tetszőleges $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$-beli y elem előállítható

$$y = x + z_1 + z_2 \quad (x \in \mathfrak{D}_A, \ z_1 \in \mathfrak{M}_1, \ z_2 \in \mathfrak{M}_2)$$

alakban.

Ha $y \in \mathfrak{Z}_{\tilde{A}}$, akkor $\tilde{A}y = \tilde{A}(x + z_1 + z_2) = 0$, vagyis $\tilde{A}(x + z_1) = -\tilde{A}z_2$. Viszont $\tilde{A}(x + z_1) \in \mathfrak{R}_A$, de $Az_2 \in \mathfrak{N}_2$, ezért

$$z_2 = 0, \quad Ax + Cz_1 = 0.$$

Beszámítva, hogy az A operátornak $\mathfrak{R}_A$-n van korlátos inverze, azt kapjuk, hogy $x=-A^{-1}Cz_1$. Tehát az $\tilde{A}$ operátor összes zérushelye

$$y=-\tilde{A}^{-1}Cz_1+z_1 \tag{2.5}$$

alakú, és megfordítva, az összes ilyen alakú elem zérushelye az $\tilde{A}$ operátornak. Ez azt jelenti, hogy $\alpha_{\tilde{A}}$ a (2.5) alakú elemek alterének a dimenziója. Viszont ennek a térnek a dimenziója egyenlő az $\mathfrak{M}_1$ dimenziójával, és ezért egyenlő $k-s$-sel, azaz $\alpha_{\tilde{A}}=k-s$. Az utóbbi két egyenlőségből azonnal adódik, hogy

$$\varkappa_{\tilde{A}}=\varkappa_A-k, \quad \alpha_{\tilde{A}}\leqq k.$$

Most tételezzük fel, hogy $\alpha_A\neq 0$. A $\mathfrak{D}_A$ altér mindig előállítható a $\mathfrak{D}_A=\mathfrak{Z}_A+\mathfrak{N}$ direktösszeggel, ahol $\mathfrak{N}$ egy altér.

Legyen $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{N}$ és jelöljük A_1-gyel az $\mathfrak{N}$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható, az $A_1x=Ax$ $(x\in\mathfrak{D}_1)$ egyenlőséggel definiált operátort. Az A_1 operátor normálisan feloldható, méghozzá $\alpha_{A_1}=0, \beta_{A_1}=\beta_A$. Az A operátor tekinthető az A operátor $k+\alpha_A$ dimenziós bővítésének. Alkalmazva erre a lemma bebizonyított részét, azt kapjuk, hogy

$$\varkappa_{\tilde{A}}=\beta_A-\alpha_A-k=\varkappa_A+k, \quad \text{és} \quad \alpha_{\tilde{A}}\leqq\alpha_A+k.$$

A lemmát bebizonyítottuk.

4. Az egyszerűsítés kedvéért a lineáris korlátos operátorokra bevezetünk egy $|A|_C$ félnormát, mely

$$|A|_C=\inf_T|A+T|,$$

ahol az infimum az összes olyan lineáris teljesen folytonos T operátorok szerinti, amelyek $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be hatnak. A bevezetett félnorma rendelkezik a norma összes szokásos tulajdonságaival, annak kivételével, hogy a $|A|_C$ egyenlő lehet nullával, amikor $A\neq 0$. Nyilvánvaló, hogy az $|A|_C=0$ egyenlőség fennáll akkor és csakis akkor, ha az A operátor teljesen folytonos. Ha A és B lineáris korlátos operátorok $(\mathfrak{D}_A=\mathfrak{D}_B=\mathfrak{B}_1)$, amelyek teljesen folytonos (speciálisan, véges dimenziós) összeadandóban eltérnek egymástól: $A=B+T$, akkor

$$|A|_C=|B|_C.$$

Végül megjegyezzük még, hogy ha a $\mathfrak{B}$ Banach térben definiált A operátor olyan, hogy $|A|_C<1$, akkor az $A-I$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, és $\varkappa_{A-I}=0$.

Valóban, ebben az esetben az A operátor előállítható két lineáris korlátos operátor összegeként: $A=A_1+T$, ahol $|A_1|<1$, T pedig teljesen folytonos.

Figyelembe véve, hogy a $B=A_1-I$ operátor folytonosan invertálható:

$$B^{-1}=-I-\sum_{j=1}^{\infty}A^j,$$

azt kapjuk, hogy az $A-I$ operátor előállítható egy folytonosan invertálható operátor és egy teljesen folytonos $A-I=B+T$ összegeként, vagyis

$$A-I=B(I+T_1),$$

ahol $T_1 = B^{-1}T$ teljesen folytonos operátor. F. RIESZ [31] tételei szerint az $I+T_1$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, indexe pedig egyenlő nullával. Ugyanilyen tulajdonságokkal rendelkezik a B operátor, mint folytonosan invertálható operátor. Alkalmazva az operátorok $B(I+T_1)$ szorzatához a 2.1. tételt, meggyőződhetünk a fent megfogalmazott állítás helyességéről.

2.2. TÉTEL. *Legyen A a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be ható valamely Φ-operátor. Akkor található számára egy olyan ϱ pozitív szám, hogy bármilyen legyen is a $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható olyan B operátor, amelyre $|B|_C < \varrho$, az $A+B$ operátor szintén Φ-operátor, mégpedig*

$$\varkappa_{A+B} = \varkappa_A .$$

Bizonyítás. $\mathfrak{B}_1$ tér előállítható alterek

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{Z}_A \dot{+} \mathfrak{C}$$

direktösszegeként.

Legyen $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{C}$, és jelöljük A_1-gyel a $\mathfrak{D}_{A_1} = \mathfrak{D}_1$ operátor tartománnyal rendelkező azon operátort, amely ebben a tartományban ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint az A operátor.

Nyilvánvaló, hogy az A_1 operátor normálisan feloldható, és d-karakterisztikája $(0, \beta_A)$ alakú. Innen következik, hogy az A_1 operátornak $\mathfrak{R}_A$-n korlátos A_1^{-1} inverze van. $\tilde{A}_1^{-1}$-gyel jelöljük azt a tetszőleges lineáris korlátos operátort, amely az A_1^{-1} operátor β_A dimenziós bővítése, és ezzel definiálva van az egész $\mathfrak{B}_2$ térben. Nyilvánvaló, hogy a bővítés módjától függetlenül teljesül

$$\tilde{A}_1^{-1} A_1 x = x \quad (x \in \mathfrak{D}_1),$$

azaz az $\tilde{A}_1^{-1}$ operátor baloldali inverze az A_1 operátornak.

Legyen

$$\varrho = 1/|\tilde{A}^{-1}|_C$$

és megjegyezzük, hogy a ϱ szám nem függ az $\tilde{A}_1^{-1}$ operátor kiválasztásától, ugyanis bármely két olyan operátor, amelyek az A_1-nek baloldali inverzei, olyan összeadandóban különböznek egymástól, amely véges dimenziós operátor.

Legyen most B tetszőleges olyan lineáris korlátos operátor, amely $\mathfrak{B}_1$-et $\mathfrak{B}_2$-be képezi le és amelyre $|B|_C < \varrho$.

Jelöljük B_1-gyel a B-nek azt a részét, amelynek értelmezési tartománya $\mathfrak{D}_{B_1} = \mathfrak{D}_1$. Az $A_1 + B_1$ operátor előállítható

$$A_1 + B_1 = (I + B_1 \tilde{A}_1^{-1}) A_1 \tag{2.6}$$

alakban. Abból, hogy $|B_1 \tilde{A}_1^{-1}|_C \leqq |B_1|_C |\tilde{A}_1^{-1}|_C < 1$, következik, hogy a $C = I + B_1 \tilde{A}_1^{-1}$ operátor egy Φ-operátor, és $\varkappa_C = 0$.

Alkalmazva most a (2.6) szorzathoz a 2.1. tételt, azt kapjuk, hogy az $A_1 + B_1$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, és

$$\varkappa_{A_1+B_1} = \varkappa_C + \varkappa_{A_1} = \beta_{A_1} = \beta_A .$$

Másrészt az $A+B$ operátor az A_1+B_1 operátornak α_A dimenziós bővítése. Valóban, az $A+B$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, és

$$\varkappa_{A+B} = \varkappa_{A_1+B_1} - \alpha_A = \varkappa_A.$$

A 2.2. tétel azonnali következménye a

2.3. TÉTEL. *Legyen A egy Φ-operátor. Akkor bármilyen legyen a T lineáris teljesen folytonos operátor, az $A+T$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges és $\varkappa_{A+T}=\varkappa_A$.*

Ugyanilyen közvetlen következménye a 2.1. tételnek a következő tétel valamennyi állítása, kivéve a legutolsót.

2.4. TÉTEL. *Bármely A Φ-operátorhoz létezik olyan ϱ pozitív szám, hogy az összes B lineáris korlátos olyan operátor esetén, amelyekre $|B|<\varrho$, az $A+B$ operátor normálisan feloldható, d-karakterisztikája véges, $\varkappa_{A+B}=\varkappa_A$, és azonkívül*

$$\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A. \tag{2.7}$$

Bebizonyítjuk a (2.7) egyenlőtlenséget.

Az A operátor természetes módon generálja a $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{Z}_A$ faktortérben a $\mathfrak{D}_A/\mathfrak{Z}_A$ értelmezési tartományú és $\mathfrak{R}_{\hat{A}}=\mathfrak{R}_A$ értékkészletű $\hat{A}$ operátort. Az $\hat{A}$ operátornak létezik korlátos $\hat{A}^{-1}$ inverze.

Legyen most $\varrho=|\hat{A}^{-1}|^{-1}$. Legyen B a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be ható korlátos operátor, mégpedig $|B|<\varrho$.

Ha x tetszőleges $\mathfrak{Z}_{A+B}$-beli elem, $\hat{x}$ pedig a megfelelő $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{Z}_A$ faktortérbeli elem, akkor

$$\min_{y\in\mathfrak{E}_A} |x-y| = |\hat{x}| = \hat{A}^{-1}Ax| \leqq \frac{1}{\varrho}|Ax|.$$

Másrészt, ha $x\in\mathfrak{Z}_{A+B}$, akkor $Ax=-Bx$ és $x\neq 0$ mellett

$$|Ax| = |Bx| < \varrho|x|.$$

Ilyen módon

$$\min_{y\in\mathfrak{Z}_A} |x-y| < |x| \quad (x\in\mathfrak{Z}_{A+B},\ x\neq 0).$$

Visszaemlékezve a nyílásról szóló első 1.1. tétel következményére, megállapíthatjuk, hogy $\dim \mathfrak{Z}_{A+B} \leqq \dim \mathfrak{Z}_A$, azaz

$$\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A.$$

5. Az előbbi 2.3. és 2.4. tételek általánosíthatók az operátorok nem korlátos operátorokkal való perturbációjának esetére.

Ez az általánosítás a SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA [17], [21] által kimutatott megjegyzéseken alapul.

Legyen A lineáris zárt, a $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható operátor. Az $x\in\mathfrak{D}_A$ elemekre új normát vezetünk be:

$$\|x\| = |x|+|Ax|. \tag{2.8}$$

Az A operátor zárt voltának következménye az a tény, hogy a $\mathfrak{D}_A$ az új normában *Banach*-térré válik. Ebben az új térben, amelyet $\mathbf{\mathfrak{D}}_A$-val fogunk jelölni, az A operátor eleget tesz az

$$|Ax| \leqq |x|$$

egyenlőségnek, következésképp korlátos operátor (amely a $\mathbf{\mathfrak{D}}_A$-ból a $\mathfrak{B}_2$-be hat).

Bevezetünk most egy fogalmat.

Legyen A és B a $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható $\mathfrak{D}_A$ és $\mathfrak{D}_B$ értelmezési tartománnyal rendelkező két lineáris zárt operátor. Akkor a B operátort *A-korlátosnak* nevezzük, ha $\mathfrak{D}_B \supset \mathfrak{D}_A$.

Ha a B operátor A-korlátos, akkor **B**-vel fogjuk jelölni a $\mathbf{\mathfrak{D}}_A$-ból $\mathfrak{B}_2$-be való

$$\mathbf{B}x = Bx$$

egyenlőséggel definiált operátort.

A bevezetett fogalmat a következő körülmények világítják meg:

Ha a B operátor A-korlátos, akkor a **B** operátor korlátos, tehát létezik olyan $k > 0$ szám, hogy

$$|\mathbf{B}x| \leqq k|x|.$$

Valóban, a **B** operátor lineáris, és definiálva van az egész $\mathbf{\mathfrak{D}}$ téren. Megmutatjuk, hogy ezenkívül zárt is. Legyen az $\{x_n\}$ $(x_n \in \mathbf{\mathfrak{D}})$ olyan sorozat, hogy $x_n \to x$ (azaz $|x_n - x| \to 0$) és $\mathbf{B}x_n \to y$. Akkor, speciálisan, $|x_n - x| \to 0$. A B operátor zárt voltából következik, hogy $Bx = y$, tehát $\mathbf{B}x = y$.

A teljes téren értelmezett lineáris zárt operátor korlátosságáról szóló *Banach*-tétel szerint a **B** operátor korlátos.

Most megfogalmazhatjuk a 2.4. tétel következő általánosítását.

2.5. TÉTEL. *Legyen A egy Φ-operátor. Akkor található olyan $\varrho > 0$ szám, hogy az összes A-korlátos B olyan operátorok esetén, amelyek eleget tesznek a*

$$|Bx| \leqq \varrho(|x| + |Ax|)$$

egyenlőtlenségnek, az $A+B$ operátor szintén Φ-operátor, mégpedig $\varkappa_{A+B} = \varkappa_A$ és $\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A$.

Bizonyítás. Valóban, az $|x| = 0$ és $|x| = 0$ egyenlőségek ekvivalensek, tehát a $\mathfrak{D}_A$-ban lineárisan független elemek $\mathbf{\mathfrak{D}}_A$-ban is lineárisan függetlenek lesznek, és megfordítva. Innen speciálisan az is következik, hogy a $\mathbf{\mathfrak{D}}_A$ értelmezési tartománnyal rendelkező tetszőleges operátor zérushelyei alterének a dimenziója nem változik a $\mathfrak{D}_A$-ról a $\mathbf{\mathfrak{D}}_A$-ra való áttéréssel.

A (2.8) új norma bevezetése sehogyan sem érzékelhető az $\mathfrak{N}_{A+B}$ és a $\mathfrak{B}_2$ struktúráján, és ezért nem borítja fel az operátorok normális feloldhatóságát, és nem változtatja d-karakterisztikájukat.

Ilyen módon, az új norma bevezetése után a 2.5. tétel a 2.4. tétel közvetlen következményeként adódik.

KÖVETKEZMÉNY. *A tetszőleges A-korlátos B operátorhoz található olyan $\varepsilon > 0$, hogy a $|\lambda| < \varepsilon$ körhöz tartozó összes λ-ra az $A + \lambda B$ Φ-operátor lesz, mégpedig $\varkappa_{A+\lambda B} = \varkappa_A$ és $\alpha_{A+\lambda B} \leqq \alpha_A$.*

Abból a célból, hogy analóg módon általánosíthassuk a 2.3. tételt, bevezetjük az *A-teljes folytonosság* fogalmát.

Egy lineáris zárt B operátort (amely, mint az A_1, a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be hat) *A-teljesen folytonosnak* fogunk nevezni, ha $\mathfrak{D}_B \supset \mathfrak{D}_A$ és a megfelelő **B** operátor, amely már a $\mathfrak{D}_A$-ból a $\mathfrak{B}_2$-be hat, teljesen folytonos.

Megjegyezzük, hogy ha valamely lineáris térben értelmezve van két norma, akkor ezek a normák a következő két tulajdonság teljesülése esetén lesznek topologikusan ekvivalensek: 1) a tér teljes mindkét normára nézve, és 2) a tér elemeiből képzett bármely olyan sorozat, amely fundamentális mindkét normára nézve, ugyanazon határértékkel rendelkezik mindkét normában. Ezért ha egy lineáris zárt A_1 operátornak ugyanaz az értelmezési tartománya, mint az A operátornak, akkor bármely harmadik olyan zárt B operátor, amely A-teljesen folytonos, A_1-teljesen folytonos is egyben.

Ilyen módon az A-teljesen folytonosság fogalma (ugyanúgy, mint az A-korlátosság fogalma) nem magával az A operátorral kapcsolatos, hanem csak annak értelmezési tartományával.

2.6. Tétel. *Legyen A egy Φ-operátor, B pedig tetszőleges A-teljesen folytonos operátor. Akkor az $A+B$ egy Φ-operátor, mégpedig*

$$\varkappa_{A+B} = \varkappa_A .$$

6. Mivel a következőkben meg fogunk fogalmazni egy egész sor olyan állítást, amelyben szerepelni fog az A-korlátosság és az A-teljes folytonosság fogalma, ezért már itt megfogalmazunk néhány egyszerű állítást ezekről a fogalmakról.

Legyen A egy lineáris zárt operátor, amely a $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben van definiálva. Tételezzük fel hogy valamely komplex λ esetén az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható, azaz létezik folytonos $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}(R_\lambda \mathfrak{B}=\mathfrak{D}_A)$ rezolvens. Akkor

1°. Ha a B operátor A-korlátos, akkor a BR_λ operátor egyszerűen korlátos.

2°. Ahhoz, hogy egy B operátor A-teljesen folytonos legyen, szükséges és elegendő, hogy teljesüljön $\mathfrak{D}_B \supset \mathfrak{D}_A$ és hogy a BR_λ operátor teljesen folytonos legyen.

Valóban, ha teljesülnek az 1° állítás feltételei, akkor a BR_λ operátor lineáris, az egész $\mathfrak{B}$ téren értelmezve van, és zárt. Következésképp, az említett *Banach*-tétel szerint, korlátos.

A 2° állítás bizonyítása céljából megjegyezzük, hogy ha valamely $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ halmaz korlátos a $\mathfrak{B}$ metrikájában, akkor annak $\mathfrak{N}=R_\lambda \mathfrak{M}$ képe korlátos a $\mathfrak{D}$ metrikájában és megfordítva.

Valóban, ha $x \in \mathfrak{B}$ és $y=R_\lambda x$, akkor egyrészt

$$|y| = |y|+|Ay| = |R_\lambda x|+|x+\lambda R_\lambda x| \leqq [(1+|\lambda|)|R_\lambda|+1]|x|,$$

másrészt viszont

$$|x| = |(A-\lambda I)y| \leqq |\lambda||y|+|Ay| \leqq (1+|\lambda|)|y|.$$

Figyelembe véve, továbbá, a

$$BR_\lambda x = \mathbf{B}y \quad (x \in \mathfrak{M})$$

egyenlőséget, megjegyezzük, hogy ha a $BR_\lambda \mathfrak{M}$, $\mathbf{B}\mathfrak{N}$ halmazoknak legalább egyike kompakt, akkor a másik is az.

3. §. Tételek a lineáris zárt operátor Φ-pontjairól

1. Legyen A egy valamely $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben definiált lineáris zárt operátor. A komplex sík λ pontját az A operátor *Φ-pontjának* nevezzük, ha az $A-\lambda I$ operátor normálisan feloldható, és d-karakterisztikája véges, azaz $A-\lambda I$ Φ-operátor. Az A operátor Φ-pontjainak a halmazát az A operátor *Φ-halmazának* nevezzük, és Φ_A-val jelöljük.

Legyen $\lambda_0 \in \Phi_A$. Mivel $A-\lambda I = A-\lambda_0 I + (\lambda-\lambda_0)I$, így a 2.4. tétel szerint található olyan $\varepsilon > 0$, hogy az $|\lambda-\lambda_0| < \varepsilon$ kör összes pontja az A operátor Φ-pontja, miközben $\varkappa_{A-\lambda I} = \varkappa_{A-\lambda_0 I}$.

Ebből a megjegyzésből a következő állítás adódik:

3.1. TÉTEL. *A lineáris zárt A operátor Φ_A halmaza nyílt halmaz, és ezért összefüggő komponensek véges vagy megszámlálható halmazának az összege.*

A Φ_A halmaz egy és ugyanazon összefüggő komponensének minden λ pontjára az A operátor indexe konstans.

Sokkal finomabb a következő

3.2. TÉTEL. *Legyen A a $\mathfrak{B}$-ben definiált valamely lineáris korlátos operátor ($A\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$). Ha a komplex sík bármely pontja annak Φ-pontja, akkor a $\mathfrak{B}$ tér véges dimenziós.*

Bizonyítás. Nagy abszolútértékű λ számokra ($|\lambda| > |A|$) az $A-\lambda I$ operátor invertálható, és így $\varkappa_{A-\lambda I} = 0$ (ha $|\lambda| > |A|$). Mivel, másrészt, a Φ_A a sík összes pontjából áll, így $\varkappa_{A-\lambda I} = 0$ az összes λ számra.

Legyen Ω az összes lineáris korlátos operátorok normált gyűrűje, a $\mathfrak{T}$ pedig a $\mathfrak{B}$-ben ható összes lineáris teljesen folytonos operátorok halmaza. A $\mathfrak{T}$ halmaz kétoldali zárt ideál Ω-ban.

Jelöljük $\hat{\Omega}$-val az $\Omega/\mathfrak{T}$ faktor-gyűrűt. Az A-t tartalmazó $\hat{\Phi}$-beli maradékosztályt $\hat{A}$-val jelöljük. Az $\hat{A}$ elem normáját a következő egyenlőséggel definiáljuk:

$$|\hat{A}| = |A|_C = \inf_{T \in \mathfrak{T}} |A+T|.$$

Most tételezzük fel, hogy a $\mathfrak{B}$ tér nem véges dimenziós. Akkor tetszőleges λ esetén az $A-\lambda I$ operátor nem lesz véges dimenziós (ugyanis $\beta_{A-\lambda I}$ véges) sőt, nem lesz teljesen folytonos, ugyanis az operátor normális feloldhatósága és teljes folytonossága magukkal vonják annak véges dimenziós voltát.

Ilyen módon, tetszőleges λ esetén, az $\hat{A}-\lambda\hat{I}$ elem nullától különböző. Másrészt, tetszőleges λ-ra az $\hat{A}-\lambda\hat{I}$ elem invertálható az $\hat{\Phi}$-ban. Valóban, az A operátor összes reguláris λ pontjában az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható, és ezzel együtt az $\hat{A}-\lambda\hat{I}$ elem is az. Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor λ az A operátor sajátértéke. Legyen $B = A-\lambda I$ és jelöljük $e_1, \ldots, e_n$-nel a $\mathfrak{Z}_B$ altér bázisát, $g_1, \ldots, g_n$-nel az $\mathfrak{R}_B$-ig való valamely direkt komplementer bázisát $\mathfrak{B}$-ben. Legyen továbbá $f_1, \ldots, f_n$ $\mathfrak{B}^\dagger$-beli funkcionálok olyan rendszere, hogy

$$f_j(e_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Tekintsük a

$$B_1 x = Bx + \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j$$

egyenlőséggel definiált B_1 operátort, amelyre nyilván $\mathfrak{R}_{B_1} = \mathfrak{B}$.

Jelöljük $\mathfrak{N}(\subset\mathfrak{B})$-nel az összes olyan elemek alterét, amelyeken az összes f_j $(j=1, \ldots, n)$ funkcionál egyenlő nullával. Akkor a $\mathfrak{B}$ tér előállítható alterek

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{Z}_B$$

direktösszegeként.

Ennek megfelelően a B_1 operátor értékei előállíthatók

$$B_1 x = By + \sum_{j=1}^{n} f_j(z) g_j \quad (x = y+z,\ y \in \mathfrak{N},\ z \in \mathfrak{Z}_B)$$

alakban.

Nyilvánvaló, hogy a $B_1 x=0$ egyenlet felbomlik a $By=0$ és $\sum_1^n f_j(z) g_j = 0$ $(y \in \mathfrak{N}, z \in \mathfrak{Z}_B)$ két egyenletre, amelyek mindegyikének egyetlen triviális megoldása van.

Következésképp, a $B_1 x=0$ egyenlet egyetlen megoldása $x=0$. Másrészt, a B_1 operátor értékkészlete az egész $\mathfrak{B}$ tér. Ilyen módon, a B_1 operátor folytonosan invertálható, a B operátor pedig előáll egy folytonosan invertálható és egy teljesen folytonos (véges dimenziós) operátor összegeként.

Innen következik, hogy a $\hat{B}=\hat{A}-\lambda\hat{I}$ elem invertálható a tekintett esetben is.

Ellentmondáshoz jutottunk, ugyanis a normált gyűrűk elméletéből ismert (l. [32] 2. §), hogy az R normált gyűrű minden a elemének van spektruma, azaz ahhoz létezik olyan μ szám, hogy $a-\mu e$ (e a gyűrű egységeleme) elemnek nincs a gyűrűben inverze.

A bebizonyított tétel egy másik alakban így fogalmazható meg:

3.2'. TÉTEL. *Ha a $\mathfrak{B}$ tér végtelen dimenziós, akkor bármely lineáris korlátos A operátorhoz létezik legalább egy olyan λ pont, amely nem Φ-pontja ennek az operátornak.*

2. Most megvizsgáljuk, hogyan viselkednek az

$$\alpha_A(\lambda) = \alpha_{A-\lambda I} \quad \text{és} \quad \beta_A(\lambda) = \beta_{A-\lambda I}$$

függvények a Φ_A minden komponensében.

Ennek érdekében szükségünk lesz a következő eredményre.

3.1. LEMMA. *Legyen A a $\mathfrak{B}_1$ térből a $\mathfrak{B}_2$-be képező valamely Φ-operátor, B pedig egy tetszőleges lineáris korlátos operátor, amely szintén a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be képez. Akkor létezik olyan $\varepsilon>0$, hogy a $0<|\lambda|<\varepsilon$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes λ számra az*

$$(A-\lambda B)x = 0$$

egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma ugyanaz.

Bizonyítás. Először bizonyítjuk a lemmát a $\varkappa_A=0$ esetre.

Legyen $e_1, \ldots, e_n$ $(n=\alpha_A)$ a $\mathfrak{Z}_A$ altér bázisa a $g_1, \ldots, g_n$ pedig az $\mathfrak{N}_A$-hoz való valamely direkt komplementer bázisa $\mathfrak{B}_2$-ben. Legyen továbbá $f_1, \ldots, f_n$ a $\mathfrak{B}_1^*$-beli funkcionálok olyan rendszere, hogy

$$f_j(e_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Az

$$A_1 x = Ax + \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j$$

egyenlőséggel definiált A_1 operátor folytonosan invertálható (l. az előbbi tétel bizonyítását). Akkor a $|\lambda| < \varrho = |A_1^{-1}|^{-1} |B|$ kör minden λ pontjára az $A_1 - \lambda B$ operátor szintén folytonosan invertálható, és

$$R_\lambda = (A_1 - \lambda B)^{-1} = A_1^{-1} \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k (BA_1^{-1})^k \right).$$

Az $(A - \lambda B)x = 0$ egyenlet nyilván ekvivalens az

$$(A_1 - \lambda B)x = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j$$

egyenlettel, vagy az

$$\begin{cases} x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j R_\lambda g_j, & (3.1) \\ \xi_k = f_k(x) \quad (k = 1, \ldots, n) & (3.2) \end{cases}$$

egyenletrendszerrel.

Behelyettesítve a (3.2) egyenlőségbe az x kifejezését a (3.1)-ből, a ξ_k $(k = 1, \ldots$ $\ldots, n)$ számok meghatározására egy n algebrai egyenletből álló homogén

$$\sum_{j=1}^{n} [\delta_{jk} - f_k(R_\lambda g_j)] \xi_j = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.3}$$

egyenletrendszert kapunk.

Nyilvánvaló, hogy az $\alpha_{A - \lambda B}$ szám egybeesik a (3.3) rendszer lineárisan független megoldásainak a számával.

A (3.3) egyenlet $\Delta(\lambda)$ determinánsának minden eleme a λ paraméter analitikus függvénye a $|\lambda| < \varrho$ körben. Ha azok azonosan egyenlők nullával, akkor a (3.3) rendszernek n lineárisan független megoldása van, és ezért a $|\lambda| < \varrho$ kör összes λ száma esetén

$$\alpha_{A - \lambda B} = n.$$

Legyen a $\Delta(\lambda)$ determináns legalább egy eleme nullától különböző a $|\lambda| < \varrho$ kör valamely pontjában. Jelöljük $\Delta_p(\lambda)$-val a $\Delta(\lambda)$ determináns valamely olyan legmagasabb rendű minorát, amely nem egyenlő nullával a $|\lambda| < \varrho$ kör legalább egy λ pontjában, és legyen p ezen minor rendje. Nyilvánvaló, hogy a tekintett kör λ-ira, kivéve talán valamely izolált pontokat, teljesül $\Delta_p(\lambda) \neq 0$. Azon λ pontokban, amelyekben a $\Delta_p(\lambda)$ determináns nem egyenlő nullával, a (3.3) rendszernek $n-p$ lineárisan független megoldása van.

Található olyan legnagyobb $|\lambda| < \varepsilon$ kör, amelynek minden belső pontjában, kivéve esetleg a $\lambda = 0$-t, teljesül $\Delta_p(\lambda) \neq 0$. Az összes olyan λ-ra, amelyek eleget tesznek a $0 < |\lambda| < \varepsilon$ egyenlőtlenségnek, igaz $\alpha_{A - \lambda B} = n - p$.

Ilyen módon, a $\varkappa_A = 0$ esetben a lemmát bebizonyítottuk.

Tekintsük most azt az esetet, amikor $\varkappa_A<0$. Legyen $\mathfrak{N}$ egy $|\varkappa_A|$-dimenziós normált tér. Jelöljük $\tilde{\mathfrak{B}}_2$-vel a $\mathfrak{B}_2$ és $\mathfrak{N}$ terek direktösszegét, amelyben a normát a következő képlettel definiáljuk

$$|y+z| = |y|+|z| \quad (y\in\mathfrak{B}_2,\ z\in\mathfrak{N}).$$

Most az A és B operátorokat úgy fogjuk tekinteni, mint a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\tilde{\mathfrak{B}}_2$-be ható operátorokat. Akkor az A operátor indexe $\varkappa_A$-val nő, és ezért egyenlő lesz nullával. Alkalmazva az A operátorra a lemma bizonyított részét, és megjegyezve, hogy a $\tilde{\mathfrak{B}}_2$ térnek $\mathfrak{B}_2$ térrel való felcserélésétől az $\alpha_{A-\lambda B}$ szám nem változik, meggyőződhetünk a lemma igaz voltáról ebben az esetben is.

Meg kell még vizsgálnunk az utolsó $\varkappa_A>0$ esetet. Jelöljünk $\mathfrak{C}$-vel egy $\varkappa_A$-dimenziós normált teret, $\tilde{\mathfrak{B}}_1$-vel pedig a $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{C}$ terek direktösszegét a $\tilde{\mathfrak{B}}_2$ konstrukciójával analóg módon.

Bővítjük az A és B operátorokat $\varkappa_A$ dimenziószámmal, feltételezve $\tilde{A}z=$ $=\tilde{B}z=0$-t az összes $z\in\mathfrak{C}$-re. Akkor $\varkappa_{\tilde{A}}=0$ és az $\tilde{A}$ operátorra alkalmazható a lemma. Megjegyezve továbbá, hogy az összes tekintett λ értékekre: $\alpha_{\tilde{A}-\lambda\tilde{B}}=$ $=\alpha_{A-\lambda B}+\varkappa_A$, meggyőződhetünk a lemma igaz voltáról az utolsó esetben is.

A bizonyított lemma segítségével a Φ_A tartomány összefüggő komponenseire bizonyos tulajdonságokat állapíthatunk meg.

3.3. TÉTEL. *Legyen A egy lineáris zárt operátor és G a Φ_A tartomány valamely összefüggő komponense.*

Akkor az összes $\lambda\in G$ pontra, kivéve esetleg némely izolált pontokat, az $\alpha_A(\lambda)$ konstans

$$\alpha_A(\lambda) = n$$

értékkel rendelkezik, az említett izolált pontokban pedig

$$\alpha_A(\lambda) > n.$$

Bizonyítás. Legyen $n=\min \alpha_A(\lambda)$ $(\lambda\in G)$ és ezt a minimumot a $\lambda=\lambda_0$ pontban érje el, azaz $\alpha_A(\lambda_0)=n$.

Jelöljük λ_1-el azt a tetszőleges G-beli pontot, amelyre $\alpha_A(\lambda_1)>n$. Megmutatjuk, hogy λ_1 izolált pont, azaz található olyan $\varepsilon_1>0$, hogy az összes $0<|\lambda-\lambda_1|<\varepsilon_1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő — λ-ra igaz $\alpha_A(\lambda)=n$. Ebből a célból kössük össze a λ_0 és λ_1 pontokat egy — teljesen a G-ben fekvő — Γ görbével. Alkalmazva a 3.1. lemmát az $A-\lambda I$ és $B=I$ operátorokra, azt kapjuk, hogy a Γ görbe minden λ pontjának megfelel egy olyan $\varepsilon_\lambda>0$ szám, hogy a $0<|\mu-\lambda|<\varepsilon_\lambda$ egyenlőtlenségnek eleget tevő μ-kre az $\alpha_A(\mu)$ függvény konstans. Konstruálva ilyen U_λ környezetet minden $\lambda\in\Gamma$ ponthoz, a Γ-nak egy lefedését kapjuk. Kiválasztunk abból egy véges $U_1, U_2, \ldots, U_N$ $(\lambda_1\in U_N)$ lefedést. Megjegyezve, hogy ebben a lefedésben a szomszédos környezetek metszik egymást, megállapíthatjuk, hogy az U_j $(j=$ $=1,\ldots,N)$ környezetek minden pontjában, kivéve esetleg azok középpontjait, az $\alpha_A(\lambda)$ függvény megőrzi ugyanazt az értéket. Mivel pedig a λ_0 pontot tartalmazó U_1 környezetben $\alpha_A(\lambda)=n$, így a λ_1 pont egész U_N környezetében, kivéve esetleg magát a λ_1 pontot, fennáll $\alpha_A(\lambda)=n$.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha az összefüggő $G\subset\Phi_A$ komponensben létezik legalább egy olyan λ pont, amelyben az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható, akkor a kompo-*

nens összes λ pontjában is, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható.

A 2.6. tétel segítségével könnyen belátható a

3.4. TÉTEL. *Legyen A egy lineáris zárt operátor, B pedig egy A-teljesen folytonos operátor. Akkor az A és $A+B$ operátorok Φ-halmazai egybeesnek: $\Phi_{A+B}=\Phi_A$.*

3. A bebizonyított 3.1. és 3.3. tételeknek természetes általánosításuk van. Legyen G a komplex sík valamely nyílt összefüggő tartománya, és legyen adva ebben a tartományban egy A_λ $(\lambda\in G)$ operátorfüggvény, amelynek értékei a $\mathfrak{B}_1$-ből $\mathfrak{B}_2$-be ható lineáris zárt operátorok.

Az A_λ operátor-függvényt *holomorfnak* fogjuk nevezni a G tartományban, ha az összes $\lambda_0\in G$ pont környezetében az A_λ függvény az operátorok normájára nézve konvergens sorba fejthető:

$$A_\lambda = A_{\lambda_0}+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k C_k,$$

ahol C_k $(k=1,\ldots,n)$ lineáris korlátos operátor $(C_k\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2;\ k=1,2,\ldots)$.

Könnyen belátható a következő állítás.

3.5. TÉTEL. *Legyen A_λ holomorf operátor-függvény a G tartományban, és bármely $\lambda\in G$ pontban az A_λ operátor legyen Φ-operátor. Akkor az összes $\lambda\in G$ pontban az A_λ operátor indexe ugyanazt az értéket veszi fel.*

Megjegyezzük, hogy a 3.1. lemma érvényben marad, ha megfogalmazásában az $A-\lambda B$ operátort olyan A_λ operátorral helyettesítjük, amely eleget tesz a 3.5. tétel feltételeinek.

Innen könnyen kijön, hogy a 3.3. tétel a következő módon általánosítható:

3.6. TÉTEL. *Az összes $\lambda\in G$ pontokra, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az α_{A_λ} függvény konstans értéket vesz fel:*

$$\alpha_{A_\lambda} = n,$$

az említett izolált pontokban pedig $\alpha_{A_\lambda}>n$.

3.7. TÉTEL. *Legyen A_λ egy holomorf operátor-függvény a G tartományban, amely függvénynek értékei $\mathfrak{B}$-ben definiált lineáris teljesen folytonos operátorok. Akkor az összes $\lambda\in G$ komplex pontban, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az $\alpha(\lambda)=$ $=\alpha_{I-A\lambda}$ függvénynek konstans értéke van: $\alpha(\lambda)=n$; az említett izolált pontokban pedig $\alpha(\lambda)>n$.*

Ha legalább egy pontban az $\alpha(\lambda)=0$, akkor az összes $\lambda\in G$ pontban, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az $I-A_\lambda$ operátornak létezik korlátos inverze.

4. §. Tételek a gyök-alterekről és gyökértékekről

1. Előbb emlékeztetünk a lineáris operátorok rezolvens elméletének egy sor fogalmára és állítására.

Legyen A egy lineáris operátor, amely valamely $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben hat.

A komplex sík λ pontját az A operátor *reguláris pontjának* nevezzük, ha az $A-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható, azaz létezik az egész $\mathfrak{B}$-n definiált korlátos olyan R_λ operátor (amelyet *rezolvensnek* nevezzük), hogy

$$R_\lambda(A-\lambda I) = (A-\lambda I)R_\lambda = I.$$

Ha az A operátornak létezik legalább egy λ_0 reguláris pontja, akkor nyilván az $A-\lambda_0 I$ és vele az A operátor is zárt.

Az A operátor összes reguláris pontjainak az O_A halmaza mindig nyílt. Valóban, ha $\lambda_0 \in O_A$, akkor az

$$A-\lambda I = A-\lambda_0 I+(\lambda_0-\lambda)I = (A-\lambda_0 I)\big(I+(\lambda_0-\lambda)R_{\lambda_0}\big)$$

előállításból következik, hogy a

$$|\lambda-\lambda_0| < |R_{\lambda_0}|^{-1}$$

körben létezik R_λ rezolvens, amelyet az

$$R_\lambda = \big(I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}\big)^{-1}R_{\lambda_0} = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_{\lambda_0}^{k+1}$$

képlettel kaphatunk meg.

Egyidejűleg meggyőződhetünk arról, hogy az O_A halmaz minden összefüggő komponensében az R_λ rezolvens holomorf operátor-függvény.

Mint ismeretes, az A operátor *spektrumának* nevezzük az O_A halmaz S_A komplementerét az egész komplex síkban. Ilyen módon, az S_A spektrum mindig zárt halmaz.

Szükségünk lesz F. Riesz [33] egy sor alapvető eredményére, amelyeket a *Hilbert*-tér korlátos operátoraira még 1912-ben megállapított, de amelyek közvetlenül átvihetők a *Banach*-tér zárt operátorainak az esetére.

Legyen Γ egy olyan egyszerű vagy összetett vektifikálható kontúr, amely valamely G_Γ tartományt határol, és az A operátor reguláris pontjaiból áll, úgy hogy az $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ egy analitikus reguláris operátor függvény a Γ-n. Feltételezve, hogy a Γ kontúrnak pozitív irányítása van a G_Γ tartományra nézve, képezzük a következő integrált

$$P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\lambda \, d\lambda.$$

Akkor a következőket állíthatjuk:

I) A P_Γ operátor egy projektor, méghozzá a

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_\Gamma \dot{+} \mathfrak{Q}_\Gamma \quad (\mathfrak{P}_\Gamma = P_\Gamma \mathfrak{B},\ \mathfrak{Q}_\Gamma = (I-P_\Gamma)\mathfrak{B})$$

felbontásban mindkét $\mathfrak{Q}_\Gamma$ és $\mathfrak{P}_\Gamma$ összeadandó invariáns altér az A operátorra nézve, és rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

1) Az A operátor az egész $\mathfrak{P}_\Gamma$-n definiálva van, és spektruma teljes egészében benne van G_Γ-ban.

2) Az A operátor $\mathfrak{Q}_\Gamma$-ban a $\mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{Q}_\Gamma$-n van definiálva és spektruma teljes egészében a zárt G_Γ tartományon kívül fekszik.

II) Ha Γ_1 és Γ_2 a fenti tulajdonságokkal rendelkező két kontúr, és a G_{Γ_1} és G_{Γ_2} tartományoknak nincs közös pontjuk, akkor az azoknak megfelelő projektorok ortogonálisak, azaz

$$P_{\Gamma_1} \cdot P_{\Gamma_2} = P_{\Gamma_2} \cdot P_{\Gamma_1} = 0.$$

Megjegyezzük, hogy az I)-ből — a zárt altérben definiált lineáris zárt operátor korlátosságáról szóló BANACH [28] tétel szerint — következik, hogy az A operátor korlátos a $\mathfrak{P}_\Gamma$ altérben.

Ezenkívül (I és II)-ből következik, hogy ha a G_Γ tartományban az A operátor spektrumának véges sok pontja van, és ezek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, akkor

$$P_\Gamma = P_{\lambda_1}+P_{\lambda_2}+\ldots+P_{\lambda_n},\quad P_{\lambda_j}\cdot P_{\lambda_k}=0 \quad (j\neq k), \tag{4.1}$$

ahol P_{λ_j} $(j=1, \ldots, n)$ projektorok, amelyek $\mathfrak{B}$-t az A-ra nézve invariáns olyan $P_{\lambda_j}\mathfrak{B}(\subset\mathfrak{D}_A)$ alterekbe projektálják, amelyek mindegyikében az A operátor teljes spektruma egyetlen λ_j számból áll.

Valóban, legyenek a γ_j-k páranként idegen, λ_j középpontú körök, amelyek teljes egészében benne vannak G_Γ-ban. Akkor

$$P_\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_j} R_\lambda\, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} P_{\lambda_j}.$$

2. Egy x vektort az A operátor λ számnak megfelelő *gyök-vektorának*[4] nevezzük, ha létezik olyan n természetes szám, hogy

$$(A-\lambda I)^n x = 0.$$

Ha a λ_0 számnak megfelel legalább egy $x_0\neq 0$ gyök-vektor, akkor λ_0 az operátor sajátértéke. Valóban, ha k az a legkisebb természetes szám, amelyre $(A-\lambda_0 I)^k x_0 = 0$, akkor $Ay_0=\lambda_0 y_0$, ahol $y_0=(A-\lambda_0 I)^{k-1}$.

Az A operátor ugyanazon λ_0 számhoz tartozó összes gyökvektorainak $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ halmazát az A operátor λ_0 számnak megfelelő *gyök-lineáris* halmazának (vagy, ha az zárt, *gyök alterének*) nevezzük.

A $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ altér dimenzióját a λ_0 sajátérték *multiplicitásának* fogjuk nevezni, és $\nu_A(\lambda_0)$-al fogjuk jelölni.

Megállapodunk azt mondani, hogy a λ_0 pontnak az A operátor *normálisan leválasztható* $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ *gyök-altere* felel meg, ha az egész tér előállítható két alterének

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_{\lambda_0}\dot{+}\mathfrak{N}_{\lambda_0} \tag{4.2}$$

direkt összegeként, mégpedig az $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ második összeadandó az A operátorra nézve invariáns altér, az $A-\lambda_0 I$ operátor pedig folytonosan invertálható az $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$-ban.

Ha a normálisan leválasztható $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ gyök altér véges dimenziós, akkor a $\mathfrak{B}$ tér (2.2) felbontása a fenti tulajdonságokkal egyértelmű. Valóban, ha ν a λ_0 multiplicitása, akkor, mivel az A operátornak $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$-ban a spektruma az egyetlen λ_0 pontból áll, azt kapjuk, hogy

$$(A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{C}_{\lambda_0} = 0.$$

Figyelembe véve, továbbá, hogy az $A-\lambda_0 I$ operátor folytonosan invertálható az $\mathfrak{N}$-ben, állíthatjuk, hogy a valamely $\mathfrak{D}_\nu$ értelmezési tartománnyal rendelkező $(A-\lambda_0 I)^\nu$ operátor is folytonosan invertálható $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$-ban, miközben

$$(A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{D}_\nu = (A-\lambda_0 I)^\nu \mathfrak{C}_{\lambda_0} + (A-\lambda_0 I)(\mathfrak{D}_\nu \cap \mathfrak{N}_{\lambda_0}) = \mathfrak{N}_{\lambda_0}.$$

[4] A „gyök-vektor" terminus helyett az irodalomban használnak úgyszintén „null-elem" (F. RIESZ) és „adjungált elem" elnevezéseket.

Ilyen módon, $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ az $(A-\lambda I)^\nu$ operátor értékkészlete.

Nyilvánvaló, hogy az a λ_0 pont, amelynek az A operátor véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-altere felel meg, az A operátor Φ-pontja.

Azonkívül a λ_0 pont valamely környezetéhez tartozó összes $\lambda \neq \lambda_0$ pont az A operátor reguláris pontja. Valóban, jelöljük A_1 és A_2-vel az A operátor által megfelelően az $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ és $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ alterekben indukált operátoroknak. Amint azt már megjegyeztük, az $A_1-\lambda_0 I$ operátor nulpotens, azaz $(A_1-\lambda_0 I)^\nu=0$.

Jelöljük n-nel a legkisebb olyan természetes számot, hogy $(A_1-\lambda_0 I)^n=0$. Akkor, feltételezve $B_1=A_1-\lambda_0 I$-t, azt kapjuk, hogy

$$-(\lambda-\lambda_0)^n I = B_1^n-(\lambda-\lambda_0)^n I = (A_1-\lambda I)\left[(\lambda-\lambda_0)^{n-1}I+(\lambda-\lambda_0)^{n-2}B_1+\ldots+B_1^{n-1}\right].$$

Innen

$$-(A_1-\lambda I)^{-1} = (\lambda-\lambda_0)^{-1}I+\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda-\lambda_0)^{-j-1}B_1^j.$$

Másrészt az $A_2-\lambda_0 I$ operátor folytonosan invertálható az $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ altérben. Következésképp, a $|\lambda-\lambda_0|<1/|(A_2-\lambda_0 I)^{-1}|$ körből vett összes λ számra létezik

$$(A_2-\lambda I)^{-1} = R_0+(\lambda-\lambda_0)R_0^2+\ldots+(\lambda-\lambda_0)^n R_0^{n+1}+\ldots \quad .$$

rezolvens, ahol $R_0=(A_2-\lambda_0 I)^{-1}$. Innen következik, hogy az $0<|\lambda-\lambda_0|<|R_0|^{-1}$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes λ pont reguláris pontja az A operátornak, mégpedig ezekre a pontokra a rezolvens a következő képlettel fejezhető ki:

$$(4.3)\qquad R_\lambda = (\lambda-\lambda_0)^{-n}B_1^{n-1}+\ldots+(\lambda-\lambda_0)^{-2}B_1+(\lambda-\lambda_0)^{-1}P+\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_0^{k+1},$$

ahol a B_1 és R_0 lineáris operátorok bővítve vannak az egész térre úgy, hogy

$$B_1 y = 0, \quad R_0 x = 0 \quad (x\in\mathfrak{C}_{\lambda_0},\ y\in\mathfrak{N}_{\lambda_0}),$$

P pedig egy projektor, amely az egész $\mathfrak{B}$ teret projektálja a $\mathfrak{C}_{\lambda_0}$ altérre az $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$-lal párhuzamosan.

Integrálva a (4.3) egyenlőség mindkét oldalát a Γ kontúr mentén, azt kapjuk, hogy

$$(4.4)\qquad P = P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\lambda\, d\lambda.$$

Csak keveset kell az előbbiekhez hozzátennünk, hogy bebizonyítsuk a következő állítást.

4.1. TÉTEL. *Legyen Γ egy olyan rektifikálható kontúr, amely valamely G_Γ tartományt határol, és a zárt A operátor reguláris pontjaiból áll. A G_Γ tartomány az A operátor spektrumának végesszámú olyan pontját fogja tartalmazni, amelyek sajátértékek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök alterekkel, akkor és csakis akkor, ha a P_Γ projektor véges dimenziós.*

Ennek a feltételnek a teljesülése mellett a $\mathfrak{P}$ altér az A operátor különböző $\lambda\in G_\Gamma$ sajátértékeinek megfelelő összes gyök altereinek a direkt összege.

Bizonyítás. Álljon az A operátor G_Γ-ban levő egész spektruma a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ véges sok olyan sajátértékből, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök alterek felelnek meg. Akkor a (4.2) és (4.4) összefüggések miatt

$$P_\Gamma = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} + \ldots + P_{\lambda_n} \quad (P_{\lambda_j} P_{\lambda_k} = 0, \text{ ha } j \neq k),$$

ahol a P_{λ_j} $(j=1, \ldots, n)$ projektor az egész $\mathfrak{B}$ teret az A operátor λ_j sajátértékének megfelelő véges dimenziós gyök-altérbe projektálja.

Következésképp, a P_Γ projektor véges dimenziós és

$$\mathfrak{P}_\Gamma = P_\Gamma \mathfrak{B} = \sum_{j=1}^{n} P_{\lambda_j} \mathfrak{B} = \mathfrak{C}_{\lambda_1} \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{C}_{\lambda_n}.$$

Megfordítva, legyen a P_Γ projektor véges dimenziós.

Akkor a $\mathfrak{B}$ tér előállítható az A operátorra nézve invariáns $\mathfrak{P}_\Gamma$ és $\mathfrak{Q}_\Gamma$ alterek

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_\Gamma \dotplus \mathfrak{Q}_\Gamma$$

direktösszegeként.

Jelöljük A_1, A_2-vel az A operátor által a megfelelő $\mathfrak{P}_\Gamma$ és $\mathfrak{Q}_\Gamma$ alterekben indukált operátorokat. A $\mathfrak{P}_\Gamma$ altér véges dimenziós, ezért az A_1 operátor spektruma véges sok λ_j $(j=1, \ldots, n;\ \lambda_j \in G_\Gamma)$ sajátértékből áll. A véges matrixok elméletének ismert eredményei alapján a $\mathfrak{P}_\Gamma$ altér felbontható az A operátorra nézve invariáns olyan $\mathfrak{C}_j$ $(j=1, \ldots, n)$ alterek direktösszegére, hogy az $A_1 - \lambda_j I$ operátor nilpotens a megfelelő $\mathfrak{C}_j$ altérben. Innen, mellesleg, következik, hogy az $A_1 - \lambda_j I$ operátor invertálható az összes $\mathfrak{C}_k$ $(k \neq j)$ altérben.

Az $A_2 - \lambda I$ operátor invertálható az összes $\lambda \in G_\Gamma$-ra, ezért az A operátor spektruma a G_Γ tartományban egybeesik az A_1 operátor spektrumával. Ilyen módon az A operátornak G_Γ-ban végesszámú λ_j $(j=1, \ldots, n)$ sajátértéke van, amelyeknek végesdimenziós $\mathfrak{C}_j$ $(j=1, \ldots, u)$ gyök-alterek felelnek meg. Ezek az alterek normálisan leválaszthatóak, ugyanis a $\mathfrak{B}$ tér felbontható az A operátorra nézve invariáns alterek

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_j \dotplus \mathfrak{N}_j \quad (j = 1, \ldots, u)$$

direktösszegére, méghozzá az $A - \lambda_j I$ operátor folytonosan invertálható a

$$\mathfrak{N}_j = \mathfrak{P}_\Gamma \dotplus \sum_{k \neq j} \mathfrak{C}_k \quad (j = 1, \ldots, u)$$

altérben.

A tételt bebizonyítottuk.

3. Az előbbi állítások egy része általánosítható. Ismerjük ezeket, bár a következőkben nem fogjuk őket használni. Legelőször is rámutatunk a következő tényre. Ha a Γ kontúr eleget tesz a 4.1. tétel feltételeinek, akkor a megfelelő $\mathfrak{P}$ altér mindig fogja tartalmazni az összes olyan $x \in \mathfrak{D}_A$ vektort, amelyekre legalább egy $\lambda \in G_\Gamma$ mellett teljesül

$$\text{(4.5)} \qquad \lim_{n \to \infty} |(A - \lambda I)^n x|^{1/n} = 0.$$

Valóban, teljesüljön valamely $x_0 \in \mathfrak{D}_A$ és $\lambda_0 \in G_\Gamma$-ra a (4.5) feltétel. Akkor, felhasználva az $x_0 = y_0 + z_0$ $(y_0 \in \mathfrak{P}_\Gamma, z_0 \in \mathfrak{Q}_\Gamma)$ felbontást, azt kapjuk, hogy

$$(A-\lambda_0 I)^n x_0 = (A-\lambda_0 I)^n y_0 + (A-\lambda_0 I)^n z_0$$

és így

$$|(A-\lambda_0 I)^n z_0| = |(I-P_\Gamma)(A-\lambda_0 I)^n x_0| \leqq |I-P_\Gamma||(A-\lambda_0 I)^n x_0|.$$

Innen

$$\lim_{n\to\infty} |(A-\lambda_0 I)^n z_0|^{1/n} = 0. \tag{4.6}$$

Másrészt, az $A-\lambda_0 I$ operátor folytonosan invertálható $\mathfrak{Q}_\Gamma$-ban, ezért létezik olyan $m > 0$, hogy

$$|(A-\lambda_0 I)z| \geqq m|z| \quad (z \in \mathfrak{Q}_\Gamma).$$

Innen

$$|(A-\lambda_0 I)^n z_0| \geqq m^n |z_0|,$$

ami a (4.6)-tal összevetve azt adja, hogy $z_0 = 0$, azaz $x_0 \in \mathfrak{P}_\Gamma$.

Ha a G_Γ tartományban az A operátor spektrumának csak egy λ_0 pontja van, akkor a bizonyított állítás erősíthető, mégpedig, ebben az esetben $\mathfrak{P}_\Gamma$ egybeesik az összes $x \in \mathfrak{D}_A$ olyan elemek halmazával, amelyekre

$$\lim_{n\to\infty} |(A-\lambda_0 I)^n x|^{1/n} = 0.$$

Sőt, ebben az esetben $\mathfrak{P}_\Gamma$ az A operátor legnagyobb invariáns olyan altere, amelyben az A operátor a

$$\lim_{n\to\infty} |(A_1-\lambda_0 I)^n x|^{1/n} = 0$$

feltételnek eleget tevő korlátos A_1 operátort indukál.

Ez a tény közvetlenül adódik az előbbiből, ha figyelembe vesszük az ismert eredményt (l. [33] 149. §), amely szerint a *Banach*-teret saját részébe leképező korlátos V operátor spektruma egyetlen $\lambda = 0$ pontból áll akkor és csakis akkor, ha

$$\lim_{n\to\infty} |V^n|^{1/n} = 0.$$

4.2. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a λ_0 számnak az A zárt operátor véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-altere feleljen meg, szükséges és elegendő, hogy a λ_0 a következő két feltételnek tegyen eleget:*

1) *a λ_0 szám az A operátor spektrumának izolált pontja;*

2) *Az $A-\lambda_0 I$ operátor normálisan feloldható, és véges d-karakterisztikája van.*

Bizonyítás. A tétel feltételének szükségességét tisztáztuk a 2. pontban.

Bebizonyítjuk annak elegendőségét. Tegyen eleget λ_0 az 1) és 2) feltételeknek, azaz λ_0 legyen az A operátor spektrumának izolált pontja, amely benne van Φ_A-ban.

Akkor egy elég kis $|\lambda-\lambda_0| < \delta$ kör minden $\lambda \neq \lambda_0$ pontja reguláris pontja lesz az A operátornak, és így λ_0 benne van a Φ_A halmaz valamely C komponensében, amelyben vannak reguláris pontok. A 3.1. tétel alapján az összes $\lambda \in C$ pontra a $\varkappa_A(\lambda) = 0$ és, speciálisan, $\varkappa_A(\lambda_0) = 0$.

Ilyen módon λ_0 az A operátor sajátértéke, mégpedig $\alpha_A(\lambda_0) = \beta_A(\lambda_0)$.

Tekintsük azt a $\mathfrak{C}$ alteret, amelyre a

$$P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda-\lambda_0|=\delta} (A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda$$

projektor az egész $\mathfrak{B}$ teret projektálja.

Jelöljük A_1-el az A operátor által a $\mathfrak{C}$-ben indukált korlátos operátort. Minden λ pont, a λ_0 kivételével, reguláris pontja az A_1 operátornak, a λ_0 pedig, amint azt tisztáztuk, az A operátor véges multiplicitású sajátértéke, tehát az A_1-nek is az. Azonkívül az A_1 operátor normálisan feloldható, és $\varkappa_{A_1}(\lambda_0)=0$. Innen a 3.2. tétel szerint a $\mathfrak{C}$ altér véges dimenziós.

Következésképp, a 4.1. tétel miatt, a λ_0 pontnak normálisan leválasztható gyök-altér felel meg.

A tételt bebizonyítottuk.

4. Legyen Γ egy tetszőleges rektifikálható kontúr, amely egy G_Γ tartományt határol, és amely a zárt A operátorra nézve a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

a) a G_Γ-ben véges sok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sajátértéke van az A operátornak, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek felelnek meg.

b) a zárt G_Γ tartomány összes többi λ $(\lambda \neq \lambda_j)$ pontja az A operátor reguláris pontja.

Az operátor Γ kontúrnak megfelelő *gyök értékének* nevezzük az A operátor összes λ_j $(j=1, \ldots, n)$ a G_Γ tartományba eső sajátértékei multiplicitásainak az összegét, azaz a

$$\nu_A(\Gamma) = \nu_A(\lambda_1) + \ldots + \nu_A(\lambda_n)$$

számot.

A (4.1) képletnek megfelelően

$$\nu_A(\Gamma) = \dim P_\Gamma \mathfrak{B},$$

ahol P_Γ a

$$P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda \tag{4.7}$$

képlettel definiált projektor.

Áttérünk most a gyökérték *stabilitási* tulajdonságának a bizonyítására.

4.3. TÉTEL. *Legyen Γ egy valamely G_Γ tartományt határoló rektifikálható zárt kontúr, amely a zárt A operátorra nézve eleget tesz az* a) *és* b) *tulajdonságoknak. Akkor létezik olyan $\varrho>0$, hogy a $|B|<\varrho$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes B lineáris korlátos operátorra $(B\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B})$ a Γ kontúr rendelkezik az* a) *és* b) *tulajdonságokkal az $A+B$ operátorra nézve is, méghozzá*

$$\nu_{A+B}(\Gamma) = \nu_A(\Gamma).$$

Bizonyítás. Az előbbiekhez hasonlóan R_λ-val jelöljük az A operátor rezolvensét és legyen

$$\delta = 1/\max_{\lambda\in\Gamma} |R_\lambda|.$$

Akkor

$$\varrho = \delta^2 / \left(\delta + \frac{l}{2\pi}\right) \quad (< \delta),$$

ahol l a Γ kontúr hossza, amely számnak a létezését a tétel állítja. Valóban, legyen B tetszőleges olyan lineáris korlátos operátor, amely eleget tesz a

$$(4.8) \qquad |B| < \varrho$$

egyenlőtlenségnek.

Az összes $\lambda \in \Gamma$ pont reguláris pontja az $A+B$ operátornak, ugyanis, amint könnyen látható, $\lambda \in \Gamma$ mellett létezik

$$(4.9) \qquad (A+B-\lambda I)^{-1} = [(I+BR_\lambda)(A-\lambda I)]^{-1} = R_\lambda \left(I + \sum_{j=1}^{\infty} (-BR_\lambda)^j\right),$$

ahol az egyenlőség jobb oldalán levő sor konvergenciáját az garantálja, hogy a (4.8) miatt

$$|BR_\lambda| \leqq |B||R_\lambda| < 1 \quad (\lambda \in \Gamma).$$

Bevezetjük most a

$$\tilde{P}_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (A+B-\lambda I)^{-1} \, d\lambda$$

egyenlőséggel definiált $\tilde{P}_\Gamma$ projektort.

A (4.7) és (4.9)-ből következik, hogy

$$|\tilde{P}_\Gamma - P_\Gamma| = \frac{1}{2\pi} \left(\int_\Gamma R_\lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-BR_\lambda)^j \, d\lambda\right) \leqq \frac{1}{2\pi} \max_{\lambda \in \Gamma} \frac{|B||R_\lambda|^2}{1-|B||R_\lambda|}.$$

Felhasználva

$$|B| < \varrho = 2\pi\delta^2/(l+2\pi\delta), \quad |R_\lambda| < \delta^{-1} \quad (\lambda \in \Gamma)$$

egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy

$$|\tilde{P}_\Gamma - P_\Gamma| < 1.$$

Innen az 1.2. tétel miatt

$$(4.10) \qquad \dim \tilde{P}_\Gamma \mathfrak{B} = \dim P_\Gamma \mathfrak{B},$$

és ezért a P_Γ-val együtt véges dimenziós a $\tilde{P}_\Gamma$ projektor is.

Akkor viszont, a 4.1. tétel miatt, a Γ kontúr rendelkezni fog az a) és b) tulajdonságokkal az $A+B$ operátorra nézve is. Ezen kívül, a (4.10) egyenlőség azt jelenti, hogy $\nu_\Gamma(A+B) = \nu_\Gamma(A)$.

Megjegyzés. A bizonyításból következik, hogy a tétel érvényben marad akkor is, ha a B operátorra tett feltételezést általánosabbal helyettesítjük, éspedig hogy B olyan A-korlátos operátor, amely minden $\lambda \in \Gamma$-ra eleget tesz a

$$|BR_\lambda| < 2\pi\delta/(l+2\pi\delta)$$

egyenlőtlenségnek.

Könnyű belátni, hogy ez az egyenlőtlenség teljesül minden $\lambda \in \Gamma$-ra, ha a B operátornak elég kicsi A-normája van, azaz ha a

$$|Bx| < k(|x|+|Ax|)$$

egyenlőtlenség teljesül elég kicsi k mellett, például ha

$$(0<)k < 2\pi\delta(l+2\pi\delta)^{-1}\left(1+\frac{2}{\delta}\right)^{-1}.$$

Azonkívül, ha a $\nu_A(\Gamma)$ számot úgy definiáljuk mint dim $P_\Gamma\mathfrak{B}$-t abban az esetben is, ha $P_\Gamma\mathfrak{B}$ végtelen dimenziós, akkor a B-re vonatkozó ugyanolyan feltételek mellett állítható, hogy $\nu_\Gamma(A+B)=\nu_\Gamma(A)$.

5. §. Tételek az önadjungált operátorok perturbációjáról

1. Legyen H egy önadjungált (azaz *Hermite*-féle hipermaximális) operátor, amely a $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben hat. Akkor, amint ismeretes, bármely nem valós λ pont reguláris pontja a H-nak, azaz létezik hozzá korlátos $R_\lambda=(H-\lambda I)^{-1}$ rezolvens, mégpedig

$$|R_\lambda| \leqq 1/|\mathrm{Im}\,\lambda|. \tag{5.1}$$

Ilyen módon az önadjungált H operátor Φ-halmaza mindenesetre tartalmazza az összes nem valós pontokat. Egy valós λ pont akkor lesz a H operátor Φ-pontja, ha az vagy reguláris pontja a H operátornak, vagy izolált (a spektrum többi pontjától) véges multiplicitású sajátérték.

Ezért az önadjungált operátor Φ-halmazát úgy kapjuk, hogy kidobáljuk az egész komplex síkból a H operátor végtelen multiplicitású sajátértékeit és a H spektrumának összes határpontjait (és így az egy, vagy két komponensből áll).

5.1. TÉTEL. *Legyen H egy önadjungált operátor és B egy tetszőleges H-teljesen folytonos operátor. Akkor a $H+B$ operátor egész nem valós spektruma olyan izolált sajátértékekből áll, amelyeknek normálisan leválasztható véges dimenziós gyökalterek felelnek meg. Azonkívül*

$$\Phi_{H+B}=\Phi_H.$$

Bizonyítás. A tételt bebizonyítottuk, ha belátjuk a következő két állítást:

1) $\Phi_{H+B}=\Phi_H$;

2) A félsíkok mindegyikében létezik a $H+B$ operátornak legalább egy reguláris pontja.

Az első állítás következik az általánosabb 3.4. tételből.

A második állítást először abban a feltételezésben bizonyítjuk be, hogy B korlátos operátor.

λ tegyen eleget az

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| > |B|$$

egyenlőtlenségnek. Akkor $|R_\lambda|<|B|^{-1}$, és annál inkább $|BR_\lambda|<1$. Az $|BR_\lambda|<1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes λ-ra a $H+B-\lambda I$ operátor folytonosan invertálható:

$$(H+B-\lambda I)^{-1} = R_\lambda\left[I+\sum_{j=1}^{\infty}(-BR_\lambda)^j\right]. \tag{5.2}$$

A korlátos B operátor esetére ismertetett bizonyítás érvényben marad általános esetben is, ha megmutatjuk, hogy valamely nem valós λ-ra fennállnak az

$$|BR_\lambda| < 1 \quad \text{és} \quad |BR_{\bar\lambda}| < 1$$

egyenlőtlenségek.

Most ennek a bizonyításával fogunk foglalkozni.

Felhasználjuk az R_λ és R_μ rezolvensek közötti ismert $R_\lambda=R_\mu+(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu$ összefüggést. Feltételezve ebben $\lambda=i\eta$ és $\mu=i$-t, azt kapjuk, hogy

$$R_{i\eta} = R_i+(\eta-1)iR_iR_{i\eta}.$$

A kapott egyenlőségre tagonként alkalmazva a B operátort, azt kapjuk, hogy

$$BR_{i\eta} = BR_i(I+(\eta-1)iR_{i\eta}). \tag{5.3}$$

Jelölve az $I+(\eta-1)iR_{i\eta}$ operátort C_η-val, annak két tulajdonságát szűrhetjük le:

a) az $|\eta|>1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes η valós számokra

$$|C_\eta| < 1;$$

b) az összes $f\in\mathfrak{H}$-ra

$$\lim_{\eta\to\infty}|C_\eta^* f| = 0,$$

ahol C_η^* a C_η konjugált operátora.

Legyen E_λ $(-\infty<\lambda<\infty)$ a H operátor spektrálfüggvénye. Akkor, amint ismeretes [30],

$$R_{i\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE_\lambda}{\lambda-i\eta},$$

és ezért

$$C_\eta = I+i(\eta-1)R_{i\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}dE_\lambda+(\eta-1)i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE_\lambda}{\lambda-i\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-i}{\lambda-i\eta}\,dE_\lambda.$$

Innen

$$|C_\eta f|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-i}{\lambda-i\eta}\,dE_\lambda\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\eta^2}d(E_\lambda f,f) \leqq |f|^2, \quad \text{ha} \quad \eta^2>1.$$

A C_η operátor b) tulajdonságának a bizonyításához megadunk egy tetszőleges $\varepsilon>0$-t, és kiválasztunk valamilyen $N=N_\varepsilon$ pozitív számot úgy, hogy

$$\Big(\int_{-\infty}^{-N}+\int_{N}^{\infty}\Big)\,d(E_\lambda f,f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Akkor, megjegyezve, hogy

$$C_\eta^* f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda+i}{\lambda+\eta i}\, dE_\lambda f,$$

azt kapjuk, hogy

$$|C_\eta^* f|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\eta^2}\, d(E_\lambda f, f) < \Big(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty}\Big)\, d(E_\lambda f, f) + \int_{-N}^{N} \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\eta^2}\, d(E_\lambda f, f),$$

úgy, hogy

$$|C_\eta^* f| < \varepsilon,$$

amilyen hamar η^2 olyan nagy, hogy

$$\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\eta^2} < \frac{\varepsilon}{2|f|}, \quad \text{ha} \quad -N < \lambda < N.$$

A BR_i operátor (l. a 2. §. 2° állítását) teljesen folytonos, és ezért létezik olyan véges dimenziós

$$Kf = \sum_{j=1}^{n} (f, \psi_j)\varphi_j$$

operátor, hogy

$$|BR_i - K| < \frac{1}{2}.$$

A KC_η operátor előállítható

$$KC_\eta f = \sum_{j=1}^{n} (C_\eta f, \psi_j)\varphi_j = (f, C_\eta^* \psi_j)\varphi_j$$

alakban.

Innen

$$|KC_\eta f| \leqq |f| \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j||C_\eta^* \psi_j|.$$

A C_η^* operátor b) tulajdonsága miatt kiválasztható olyan M szám, hogy az összes $\eta^2 > M$-re

$$|C_\eta^* \psi_j| < 1/2n|\psi_j| \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Akkor

$$|KC_\eta f| < 1/2|f|, \quad \text{azaz} \quad |KC_\eta| < 1/2 \quad (\eta^2 > M).$$

Visszatérve most az (5.3) egyenlőséghez, azt kapjuk, hogy

$$|BR_{i\eta}| = |BR_i C_\eta| \leqq |BR_i - K||C_\eta| + |KC_\eta| < 1,$$

ha $\eta^2 = \max\{1, M\}$.

A tételt bebizonyítottuk.

A bebizonyított tételből adódik az

5.1. KÖVETKEZMÉNY. *A $H+B$ operátor valós sajátértékének szintén normálisan leválasztható véges dimenziós gyök-altér felel meg, hacsak ez a szám nem határpontja a H operátor spektrumának, vagy a H operátor végtelen multiplicitású sajátértéke.*

5.2. KÖVETKEZMÉNY. *Ha a H operátor spektruma diszkrét, akkor a $H+B$ operátor spektruma olyan izolált sajátértékekből áll, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek felelnek meg.*

Szükséges még a következő

MEGJEGYZÉS. Ha az operátor rendelkezik még az

$$\mathrm{Im}\,(Bf,f) \geqq 0 \quad (f \in \mathfrak{D}_A)$$

tulajdonsággal, akkor a $H+B$ operátor egész nem valós spektruma a felső síkon fekszik.

Valóban, ha λ a $H+B$ operátor spektrumának egy nem valós pontja, φ a megfelelő sajátaltér, azaz

$$(A+B)\varphi = \lambda\varphi,$$

akkor skalárisan szorozva az utóbbi egyenlőséget φ-vel, azt kapjuk, hogy

$$(A\varphi, \varphi)+(B\varphi, \varphi) = \lambda,$$

ahonnan

$$\mathrm{Im}\,\lambda = \mathrm{Im}\,(B\varphi, \varphi) > 0.$$

Megjegyezzük, hogy ha B egy korlátos operátor, akkor

$$\mathrm{Im}\,(Bf,f) = \frac{1}{2i}\,[(Bf,f)-(f,Bf)] = (B_I f, f),$$

ahol

$$B_I = \frac{1}{2i}(B-B^*)$$

a B operátor *képzetes Hermite-féle komponense.*

Ilyen módon a korlátos B operátor esetében az $\mathrm{Im}\,(Bf,f) \geqq 0$ feltétel ekvivalens a B_I komponens nemnegatív voltával.

2. Az 5.2. következménnyel kapcsolatosan természetes módon vetődik fel a kérdés arról, hogy mikor lesz a $H+B$ operátor összes gyök-vektorainak a rendszere teljes (azaz a nemlineáris zárt burka az egész $\mathfrak{H}$ teret adja).

Az ilyen rendszer teljességének fontos kritériumát (általánosabb tételek következményeként) adta M.V. KELDIS [26].

KELDIS TÉTELE. *Ha az önadjungált H operátornak diszkrét $\{\lambda_j\}$ $(j=1,2,\ldots)$ olyan spektruma*[5] *van, hogy valamely $p>0$-ra*

$$\sum_{\lambda_j \neq 0} |\lambda_j|^{-p} < \infty, \tag{5.4}$$

[5] Arról beszélve, hogy a H operátornak *diszkrét spektruma* van, mindig azt fogjuk érteni, hogy annak spektruma véges multiplicitású sajátértékekből áll egyetlen határponttal a végtelenben. Elrendezve ezeket a sajátértékeket egy $\{\lambda_j\}$ sorozatba, mindig fel fogjuk tételezni, hogy ebben a sorozatban bármely sajátérték annyiszor fordul elő, amennyi annak a multiplicitása.

és ha B egy H-teljesen folytonos operátor, akkor a $H+B$ operátor gyök-vektorainak rendszere teljes. [6]

A teljesség néhány más, ehhez közeli, de egyszerűbben bizonyítható, kritériuma található M. A. NAJMARK [35] cikkében.

3. Külön kitérünk az önadjungált operátornak korlátossal való perturbációjára. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az (5.1) egyenlőség egy speciális következménye az általánosabb és pontosabb

$$|R_\lambda| \leqq \frac{1}{d_\lambda} \tag{5.5}$$

összefüggésnek, ahol λ az önadjungált H operátor valamely reguláris pontja, a d_λ pedig a λ pontnak a H operátor S_H spektrumától való távolsága.

Az (5.5) egyenlőtlenség az alábbi következtetésre ad módot:

Legyen H egy önadjungált operátor és B egy tetszőleges korlátos operátor. Akkor a $H+B$ operátor teljes spektruma benne van az M sík azon zárt részében, amelyet a $|B|$ sugarú olyan körök fednek le, amelyek középpontjai befutják a H operátor spektrumának összes pontját.

Ha a $\lambda \notin M$, akkor az (5.5) egyenlőtlenség miatt $|R_\lambda| < 1/|B|$, és ezért a $\lambda \notin M$ pontban létezik korlátos $(H+B-\lambda I)^{-1}$ olyan operátor, amelyet az (5.2) képlettel kaphatunk. Ezt felhasználva bebizonyítjuk a következő állítást:

5.2. TÉTEL. *Legyen H egy önadjugált operátor, B pedig korlátos operátor, és legyen λ_0 a H operátor véges ν_0 multiplicitású valamely sajátértéke, amely a H spektrumának minden más pontjától $d_0 > 2|B|$ távolságra van.*

Akkor az $|\lambda-\lambda_0| < |B|$ zárt körben a $H+B$ operátornak véges számú sajátértéke van, amelyeknek normálisan leválasztható végesdimenziós gyök-alterek felelnek meg, méghozzá ezen sajátértékek multiplicitásainak az összege pontosan egyenlő ν_0-al.

Bizonyítás. Jelöljük Γ-val az $|\lambda-\lambda_0| = \varrho$ kört, ahol ϱ úgy van kiválasztva, hogy

$$|B| < \varrho < \frac{d_0}{2}.$$

Ez a kör a $H+B$ operátor reguláris pontjaiból áll, sőt, reguláris pontokból áll az egész

$$|B| < |\lambda-\lambda_0| \leqq \varrho \tag{5.6}$$

gyűrű.

A Γ kör összes pontjára fennáll az

$$|R_\lambda| < \frac{1}{\varrho} \quad \text{és} \quad |BR_\lambda| < 1 \tag{5.7}$$

[6] Valószínűleg, az (5.4) feltétel jelentősen gyengíthető. Nemrég M. G. KREJNnek sikerült bebizonyítania, hogy az operátor gyök — vektorainak a rendszere teljes lesz, ha H *tetszőleges* önadjungált operátor, amelynek diszkrét spektruma van, a B pedig véges dimenziós operátor (l. úgyszintén az utalást M. Sz, LIVSIC tételére a 426. oldalon).

egyenlőtlenség, és ezért (l. a 4.3. tétel bizonyítását), az $|\lambda-\lambda_0|\leqq\varrho$ kör összes pontja Φ-pontja a $H+B$ operátornak. Mivel az (5.6) gyűrű a $H+B$ operátor reguláris pontjaiból áll, így a Γ körben véges sok sajátértéke van a $H+B$ operátornak.

A B operátornak εB $(0\leqq\varepsilon\leqq 1)$ operátorral való felcserélésével az M halmaz csak szűkülhet, és az (5.7) összes relációja érvényben marad. Következésképp a $H+B$ operátor spektrumának jellemzésére a Γ-ban kimondott fenti állítások átvihetők a $H+\varepsilon B$ operátorra is.

A 4.3. tétel szerint a $\nu_{H+\varepsilon B}(\Gamma)$ gyökérték (azaz a $H+\varepsilon B$ operátor Γ-ra eső összes sajátértékei multiplicitásainak az összege) az ε folytonos függvénye lesz, mivel pedig ez a függvény csak egész értékeket vehet fel, így az konstans. Speciálisan,

$$\nu_H(\Gamma) = \nu_{H+B}(\Gamma).$$

A tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Mint ismeretes, az (5.5) képlet igaz nemcsak az önadjungált operátorokra, hanem az unitér és általános tetszőleges normális operátorra. Ezért a tétel átvihető arra az esetre is, amikor H egy tetszőleges normális operátor.

4. A H operátor nem valós spektrumára részletesebb jellemzést lehet adni, ha a H és B operátorokra bizonyos újabb megszorításokat teszünk. Ebből a célból egy sor fogalmat vezetünk be.

Azt fogjuk mondani, hogy a teljesen folytonos A operátornak *véges spektrálnyoma* van, ha a sajátértékeiből alkotott

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_j \tag{5.8}$$

sor abszolút konvergens, miközben feltételezzük, hogy az (5.8) sorban minden sajátérték annyiszor szerepel, amennyi a multiplicitása.

Az (5.8) sort az A operátor *spektrálnyomának* nevezzük, és $\sigma_S(A)$-val jelöljük.

A következőkben szükséges lesz a következő elemi

5.1. Lemma. *Legyen T egy nemnegatív teljesen folytonos, véges spektrálnyommal rendelkező operátor. Akkor, bármilyen legyen az ω_j $(j=1, 2, \ldots)$ ortonormált rendszer, teljesül a*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(T\omega_\nu, \omega_\nu) \leqq \sigma_S(T)$$

egyenlőtlenség.

Az egyenlőség itt akkor és csakis akkor áll fenn, ha az $\{\omega_\nu\}$ rendszer lineáris zárt burka tartalmazza a T operátor nullától különböző sajátértékeihez tartozó összes saját vektorokat.

Bizonyítás. Legyen μ_j $(j=1, 2, \ldots; \mu\geqq 0)$ a T operátor összes sajátértékeinek a sorozata, az e_j $(j=1, 2, \ldots)$ pedig a megfelelő összes normált saját vektorok sorozata. Akkor

$$\omega_j = \sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}e_k,\ a_{jk} = (\omega_j, e_k) \quad (j, k = 1, 2, \ldots)$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

(5.9)
$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \leqq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Az (5.9)-ben az egyenlőség az összes k-ra akkor és csakis akkor áll fenn, ha az összes e_k vektorok benne vannak az $\{\omega_j\}$ rendszer lineáris burkában.

Az ω_j felbontásából kapjuk, hogy

$$T\omega_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\mu_k e_k \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

és ezért

$$\sum_{j=1}^{\infty} (T\omega_j, \omega_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2\mu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k,$$

azaz

(5.10)
$$\sum_{j=1}^{\infty} (T\omega_j, \omega_j) \leqq \sigma_S(T).$$

Az (5.10)-ben az egyenlőség jele akkor és csakis akkor áll fenn, amikor az fennáll az (5.9)-ben is az összes $k=1, 2, \ldots$-re, és ezért abban és csakis abban az esetben igaz, amikor az összes e_j benne van az $\{\omega_j\}$ sorozat lineáris burkában.

A lemmából az alábbi következmény adódik:

1°. Ha a teljesen folytonos önadjungált A operátornak véges spektrálnyoma van, akkor, bármilyen legyen a φ_j $(j=1, 2, \ldots)$ ortonormált bázis $\mathfrak{H}$-ban, teljesül

$$\sigma_S(A) = \sum_{j=1}^{\infty} (A\varphi_j, \varphi_j),$$

ahol a jobboldalon álló sor abszolút konvergens.

Valóban, legyen $\{e_j\}$ az A operátor sajátvektorainak teljes ortonormált rendszere: $A_{e_j} = \lambda_j e_j$ $(j=1, 2, \ldots)$.

Definiáljuk az A^+ és A^- nemnegatív operátorokat az

$$A^+ e_j = \lambda_j^+ e_j, \quad A^- e_j = \lambda_j^- e_j \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőségekkel, ahol $\lambda_j^+ = 1/2\,(|\lambda_j| + \lambda_j)$, $\lambda_j^- = 1/2\,(|\lambda_j| - \lambda_j)$ $(j=1, 2, \ldots)$. Akkor $A = A^+ - A^-$, és nyilván

$$\sigma_S(A) = \sigma_S(A^+) - \sigma_S(A^-) = \sum_{j=1}^{\infty} (A^+\varphi_j, \varphi_j) - \sum_{j=1}^{\infty} (A^-\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} A(\varphi_j, \varphi_j).$$

Az olvasóra bízzuk bebizonyítani, hogy nemnegatív operátorok esetében igaz az 5.1. lemma következő pontosítása.

Legyen A egy nemnegatív operátor és $\{\varphi_j\}$ ortonormált bázis $\mathfrak{H}$-ban. Akkor az A operátor teljesen folytonos lesz és véges spektrálnyoma lesz akkor és csakis akkor, ha a

$$\sum_{j=1}^{\infty}(A\varphi_j, \varphi_j)$$

sor konvergens, miközben a sor összege $\sigma_S(A)$-t adja.

Innen következik, hogy a nemnegatív operátorok pozitív együtthatós tetszőleges lineáris kombinációja, és ezért, a véges spektrálnyommal rendelkező önadjungált operátorok valós együtthatós tetszőleges lineáris kombinációja is, szintén véges spektrálnyommal rendelkezik.

A véges nyommal rendelkező teljesen folytonos önadjungált operátorok lineáris burkát Λ-val fogjuk jelölni.

Nyilvánvaló, hogy $A \in \Lambda$ akkor és csakis akkor, ha Λ-ben benne vannak az A operátor *Hermite*-féle komponensei:

$$A_R = \frac{1}{2}(A+A^*), \quad A_I = \frac{1}{2i}(A-A^*).$$

Ennek a birtokában állíthatjuk, hogy a Λ osztály minden A operátorára a

$$\sum_{j=1}^{\infty}(A\varphi_j, \varphi_j) \tag{5.11}$$

sor konvergens és összege nem függ a $\{\varphi_j\}$ teljes ortonormált bázis kiválasztásától $\mathfrak{H}$-ban.

Az (5.11) összeget az $A \in \Lambda$ operátor *matrixnyomának* fogjuk nevezni és $\sigma_M(A)$-val fogjuk jelölni.

Az 1° állítás azt jelenti, hogy önadjungált operátorok esetében mindkét σ_S és σ_M nyom egybeesik. Amint a következőkben látni fogjuk, a nem önadjungált operátorok esetében ez nem mindig igaz.

5.3. TÉTEL. *Az A operátor legyen előállítható*

$$A = H + iK$$

alakban, ahol H önadjungált operátor (korlátos vagy nem korlátos) K pedig tetszőleges önadjungált teljesen folytonos véges nyommal rendelkező operátor.

Akkor az A operátor $\{\tilde{\lambda}_j\}$ nem valós spektruma rendelkezik a

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\mathrm{Im}\,\tilde{\lambda}_j| < \infty$$

tulajdonsággal, ha pedig K nemnegatív operátor, akkor ezenkívül

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{Im}\,\tilde{\lambda}_j \leqq \sigma_S(K).$$

Bizonyítás. Ha az A operátor minden $\mathfrak{C}_j = \mathfrak{C}_{\lambda_j}$ gyök-alterében kiválasztunk egy *Jordan*-féle bázist, akkor, átindexelve az elemeket az így kapott bázisban, egy $\{\varphi_n\}$ sorozatot kapunk, amely eleget tesz a feltételnek, hogy bármely j-re teljesül a két

(5.12) $$A\varphi_j = \tilde{\lambda}_j \varphi_j, \quad A\varphi_j = \tilde{\lambda}_j \varphi_j + \varphi_{j-1}$$

egyenlőség egyike. .

Jelöljük $\{\omega_j\}$-vel azt az ortonormált rendszert, amelyet a $\{\varphi_j\}$ rendszerből egymásutáni ortogonalizációval kapunk. Akkor könnyű látni, hogy

$$A\omega_j = a_{j1}\omega_1 + \ldots + a_{jj-1} + \omega_{j-1}\tilde{\lambda}_j \omega_j \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Mivel

$$\tilde{\lambda}_j = (A\omega_j, \omega_j) = (H\omega_j, \omega_j) + i(K\omega_j, \omega_j),$$

így

$$\operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j = (K\omega_j, \omega_j) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

A K operátornak véges nyoma van, tehát a $\sum (K\omega_j, \omega_j)$ sor abszolút konvergens. Ilyen módon

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j| \leqq \sum_{j=1}^{\infty} |(K\omega_j, \omega_j)| \leqq \sigma_S(K^+) + \sigma_S(K^-),$$

ha pedig K nemnegatív operátor, akkor

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j = \sum_{j=1}^{\infty} (K\omega_j, \omega_j) \leqq \sigma_S(K).$$

5.3. KÖVETKEZMÉNY. *Bármely $A \ni A$ operátornak véges spektrálnyoma van.*

Valóban, az A operátor előáll $A = A_R + iA_I$ alakban, ahol A_R és A_I véges nyommal rendelkező önadjungált operátorok. Következésképp, az A-operátor sajátértékeinek imaginárius részeiből összeállított sor abszolút konvergens. Mivel pedig $iA = -A_I + iA_R$, így az A operátor sajátértékeinek valós részeiből összeállított sor konvergens.

5.4. TÉTEL. *Legyen A egy*

$$A = H + B$$

alakú operátor, ahol H egy önadjungált félkorlátos (alulról) operátor, amely diszkrét $\{\lambda_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ olyan spektrummal rendelkezik, hogy

(5.13) $$\sum_{\lambda_j \neq 0} \frac{1}{\lambda_j} < \infty,$$

B pedig tetszőleges lineáris korlátos operátor. Akkor a $H + B$ operátor $\{\tilde{\lambda}_j\}$ spektruma diszkrét, izolált sajátértékekből áll, amelyekhez normálisan leválasztható véges dimenziós gyök-alterek tartoznak, és azonkívül, azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a

(5.14) $$\sum_{\tilde{\lambda}_j \neq 0} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j}$$

sor abszolút konvergens.

Bizonyítás. A $H+B$ operátor spektruma diszkrét, sőt olyan sajátértékekből áll, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek felelnek meg, ugyanis a B egy teljesen folytonos operátor (l. az 5.2. következményt).

Tekintsük először azt az egyszerű esetet, amikor a B önadjungált operátor, és ezért az összes $\tilde{\lambda}_j$ valós. Nyilvánvaló, hogy a H-val együtt a $H+B$ operátor is félig korlátos alulról. Rendezzük el a $\lambda_j, \tilde{\lambda}_j$ számokat növekedésük sorrendjében:

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \dots; \quad \tilde{\lambda}_1 \leqq \tilde{\lambda}_2 \leqq \dots .$$

Mivel bármely $f \in \mathfrak{H}$-ra

$$(Af,f) = (Hf,f)+(Bf,f),$$

így

$$(Hf,f)-|B|(f,f) \leqq (Af,f) \leqq (Hf,f)+|B|(f,f). \tag{5.15}$$

Visszaemlékezve a sajátértékek minimaximális tulajdonságaira, konstatáljuk, hogy az (5.15)-ből következik

$$\lambda_j-|B| \leqq \tilde{\lambda}_j \leqq \lambda_j+|B| \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Innen, és az (5.13) sor konvergenciájából következik az (5.14) sor abszolút konvergenciája.

Áttérve annak az esetnek a vizsgálatára, amikor a B nem önadjungált operátor, az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy

$$B = iK,$$

ahol K korlátos önadjungált operátor.

Valóban, A mindig előállítható $A=H+B_R+iB_I$ alakban, ahol B_I önadjungált operátor, a $H+B_R$ pedig félig korlátos (alulról) operátor, amely ugyanúgy eleget tesz az (5.14) feltételnek, mint a H (az éppen bizonyítottak szerint).

Sőt, az $A=H+iK$ előállításban feltételezhetjük, hogy H pozitív operátor, amely teljesíti a

$$(Hf,f) \geqq (f,f)$$

feltételt.

Valóban, ez mindig elérhető, ha helyettesítjük az A operátort egy $A+cI$ operátorral (és megfelelően H-t a $H+cI$ operátorral), ahol c egy elég nagy szám, úgy, hogy a helyettesítéstől az (5.14) feltétel érvényben maradjon. Másrészt, ha az $A_I=A+cI$ operátorra bebizonyítjuk a tételt, akkor, érthetően, be lesz az bizonyítva az A operátorra is.

Legyen $\{e_j\}$ a H operátor sajátelemeinek teljes ortonormált rendszere:

$$He_j = \lambda_j e_j \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Tekintsük a $H^{1/2}e_j=\lambda_j^{1/2}e_j$ $(\lambda_j^{1/2}>0, j=1, 2, \dots)$ egyenlőségekkel megadott $H^{1/2}$ operátort. Mint ismeretes, az értelmezési tartományra igaz: $\mathfrak{D}_{H^{1/2}} \supset \mathfrak{D}_H$.

A $H^{1/2}$ operátornak van korlátos inverze:

$$(H^{1/2})^{-1}e_j = H^{-1/2}e_j = \lambda_j^{-1/2}e_j \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Az A operátor előállítható

$$A = H^{1/2}(I+i\Gamma)H^{1/2}$$

alakban, ahol

$$\Gamma = H^{-1/2}KH^{-1/2}.$$

A Γ operátor korlátos önadjungált, és ezért az $I+i\Gamma=i(\Gamma-iI)$ operátornak van korlátos inverze. Sőt,

$$(I+i\Gamma)^{-1} = (I-i\Gamma)(I+\Gamma^2)^{-1} = (I+\Gamma^2)^{-1}-i\Gamma(I+\Gamma^2)^{-1}.$$

Innen

$$A^{-1} = H^{-1/2}(I+\Gamma^2)H^{-1/2}-iH^{-1/2}\Gamma(I+\Gamma^2)^{-1}H^{-1/2}.$$

Emlékezve az 5.3. következményre, megállapítjuk, hogy a tétel bizonyításának befejezéséhez azt kell már csak megmutatni, hogy $A^{-1}\in A$, vagy, ami ugyanaz, annak minden *Hermite*-féle komponense véges spektrálnyommal rendelkezik.

Tekintsük, például, az első komponenst:

$$(A^{-1})_R = H^{-1/2}(I+\Gamma^2)H^{-1/2}.$$

Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $f\in\mathfrak{H}$-ra

$$((A^{-1})_R f,f) = ((I+\Gamma^2)H^{-1/2}f,\ H^{-1/2}f) \geqq 0$$

és

$$((A^{-1})_R f,f) \leqq |I+\Gamma^2||H^{-1/2}f|^2 = \gamma(H^{-1}f,f) \quad (\gamma = |I+\Gamma^2|). \tag{5.16}$$

A feltétel szerint a H^{-1} operátornak véges spektrálnyoma van. Másrészt, az (5.16) egyenlőtlenség és a sajátértékek ismert minimaximalitási tulajdonságainak a következtében az $(A^{-1})_R$ operátor tetszőleges μ_j ($\mu_1\geqq\mu_2\geqq\ldots$) sajátértéke kisebb a H^{-1} operátor megfelelő sajátértékének γ-val való szorzatánál: $\mu_j\leqq\gamma\lambda_j^{-1}$ ($j=1, 2, \ldots$). Innen

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j \leqq \gamma\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-1}.$$

A tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS: M. V. KELDIS tétele alapján azt állíthatjuk, hogy az 5.4. tétel feltételei mellett a $H+B$ operátor gyök vektorainak a rendszere teljes $\mathfrak{H}$-ban. Ezt a következtetést KELDIS általános tétele nélkül is levonhatjuk az M. A. NAJMARK [35] által leírt egyszerű módszerrel.

5. Visszatérve az (5.3) tételre, természetes feltenni a kérdést, mikor teljesül az $A=H+iK$ alakú A operátorra (ahol H és K véges spektrálnyommal rendelkező önadjungált operátorok) a

$$\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{Im}\tilde{\lambda}_j = \sigma_S(K) \tag{5.17}$$

egyenlőség, ahol $\{\lambda_j\}$ az A operátor nem valós spektruma. Erre a kérdésre választ adott M. Sz. LIVSIC [27] abban az esetben, ha K egy A-beli nemnegatív operátor, H pedig tetszőleges önadjungált teljesen folytonos operátor.

M. Sz. Livsic tétele. *Ha A egy olyan teljesen folytonos operátor, amelynek imaginárius Hermite-féle A_I komponense nemnegatív, és véges spektrálnyoma van, akkor*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j \leqq \sigma_S(A_I).$$

Az A operátor gyök-vektorainak rendszere teljes lesz akkor és csakis akkor, ha ebben az egyenlőtlenségben az egyenlőség áll fenn. [7]

Ennek a fontos tételnek rendkívül egyszerű bizonyítását adta B. P. Mukminov [36]. Kiderül, hogy a bizonyításnak ez az elemi módszere egy általánosabb tétel kimondását is lehetővé teszi.

5.5. Tétel. *Legyen H a következő tulajdonságokkal rendelkező önadjungált operátor:*

1) *H-nak létezik sajátvektoraiból alkotott teljes ortonormált rendszere;*

2) *a H operátor minden sajátértékének a multiplicitása véges;*

3) *a valós számegyenesen létezik a H operátornak legalább egy reguláris pontja.*

Legyen továbbá, K egy véges spektrálnyommal rendelkező nemnegatív operátor. Akkor ahhoz, hogy teljesüljön az (5.17) egyenlőtlenség, szükséges és elegendő, hogy az $A=H+iK$ operátor gyök-vektorainak a rendszere teljes legyen.

Bizonyítás. Használni fogjuk az 5.3. tétel jelöléseit és bizonyításának a következtetéseit.

Az 5.1. lemmának megfelelően a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j = \sum_{j=1}^{\infty} (K\omega_j, \omega_j) \leqq \sigma_S(K)$$

összefüggésben az egyenlőség abban és csakis abban az esetben érhető el, ha az $\{\omega_n\}$ sorozat lineáris zárt burka, vagyis ami ugyanaz, az A operátor összes $\mathfrak{C}_\nu$ gyökalterének a lineáris zárt burka, tartalmazza a K operátor pozitív sajátértékeihez tartozó összes sajátvektorait.

A mondottakból következik, hogy ha az A operátor gyökelemeinek $\{\varphi_j\}$ rendszere teljes $\mathfrak{H}$-ban, akkor

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} \tilde{\lambda}_j = \sigma_S(K).$$

Megfordítva, teljesüljön az (5.17) egyenlőtlenség. Akkor, mindenesetre, a $\{\varphi_j\}$ rendszer lineáris zárt burka tartalmazza a K operátor összes pozitív sajátértékű sajátvektorait. Ezért, ha $\mathfrak{N}$ az összes φ_j $(j=1, 2, \ldots)$-hez ortogonális maximális altér, akkor $K\mathfrak{N}=0$, azaz $K\varphi=0$, ha $\varphi \in \mathfrak{N}$.

Mivel a 3) feltétel miatt a H operátornak létezik valós reguláris pontja, ezért létezik egy egész valós intervallum, amely reguláris pontokból áll. Ennek az intervallumnak bármely zárt részében az A operátor spektrumának csak végesszámú pontja van. Ezért, az általánosság megszorítása nélkül, állíthatjuk, hogy $\lambda=0$

[7] Nemrég V. B. Lidszkij közölte a szerzők egyikével a tétel bizonyítását, amely szerint az $A=A_R+iA_I$ teljesen folytonos operátor gyök-vektorainak rendszere teljes, amint annak A_R és A_I komponensei nemnegatívak, és legalább egyikük véges spektrálnyommal rendelkezik.

reguláris pontja az A és H operátoroknak. Valóban, ez mindig elérhető, ha helyettesítjük az A operátort az $A+cI$ operátorral, és megfelelően a H operátort a $H+cI$ operátorral, ahol c egy szükséges módon kiválasztott olyan valós szám, hogy a helyettesítéssel az (5.17) egyenlőség nem borul fel, és a gyök-vektorok ugyanazok maradnak.

Az A operátorral együtt az A^* operátor is folytonosan invertálható.

Feltételezve $\mathfrak{N}_1 = A^{*-1}\mathfrak{N}$-t, megmutatjuk, hogy $\mathfrak{N}_1 \leqq \mathfrak{N}$.

Valóban, legyen $h \in \mathfrak{N}_1$. Akkor az összes $j=1, 2, \ldots$-re

$$(h, A\varphi_j) = (A^*h, \varphi_j) = 0,$$

és ezért $h \in \mathfrak{N}$.

Ilyen módon, ha $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_{A^*} \cap \mathfrak{N}$, akkor $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{N}_1$. Másrészt, tetszőleges $h \in \mathfrak{D}_1$ esetén

$$(A^*h, \varphi_j) = (h, A\varphi_j) = 0,$$

azaz $A^*\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{N}$. Tehát $A^*\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}$.

Figyelembe véve, hogy $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{Z}_k$ és $A^* = H - iK$, azt kapjuk, hogy az A^* operátor $\mathfrak{N}$-ben egy *Hermite*-féle H_1 operátort indukál, amely egy olyan része a H operátornak, amelyet utóbbi $\mathfrak{D}_H$ értelmezési tartományának a $\mathfrak{D}_1$-ig való szűkítésével kapunk.

Mivel feltétel szerint a H operátor folytonosan invertálható $\mathfrak{N}$-ben, így a H_1 operátor is folytonosan invertálható az $\mathfrak{N}$-ben, azaz létezik olyan önadjungált korlátos H_1^{-1} inverz operátor, amely az egész $\mathfrak{N}$-en van definiálva, és azt leképezi saját $\mathfrak{D}_1$ sűrű részébe (H_1^{-1}-nek nincsenek zérusai).

Ilyen módon, az $\mathfrak{N}$ altér invariáns a H^{-1} korlátos önadjungált operátorra nézve, és ezért a H^{-1} operátor felcserélhető a $P_{\mathfrak{N}}$ operátorral, amely ortogonálisan projektálja az egész $\mathfrak{H}$ teret az $\mathfrak{N}$-re. Ennek alapján, ha e a H operátor saját vektora, azaz

$$He = \lambda e, \quad \text{azaz} \quad H^{-1}e = \lambda^{-1}e,$$

akkor

$$H^{-1}P_{\mathfrak{N}}e = \lambda P_{\mathfrak{N}}e.$$

Ilyen módon vagy $P_{\mathfrak{N}}e=0$, vagy $P_{\mathfrak{N}}e$ sajátvektora a H operátornak.

A második eset nem lehetséges, mivel, azt megengedve, állítani lehet azt, hogy a $P_{\mathfrak{N}}e \in \mathfrak{N}$ az A operátor sajátvektora lesz, ugyanakkor pedig $\mathfrak{N}$ ortogonális az A operátor minden sajátvektorára.

Következésképp, mindig igaz $P_{\mathfrak{N}}e=0$, azaz $\mathfrak{N}$ ortogonális a H operátor összes sajátvektorához, amelyek teljes rendszert alkotnak, ahonnan $\mathfrak{N}$ csak a nullából áll. A tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. A tétel bizonyításának a menetéből következik, hogy ha a K operátornak nincs nullával egyenlő sajátértéke, akkor a tétel igaz az 1), 2) és 3) feltételek megkövetelése nélkül is.

Más dolog, hogy maga az (5.17) egyenlőség létezése, valószínűleg (l. M. V. KELDIS tételét és a 418. és 425. oldalon levő utalásokat), kapcsolatban van a H operátor valamilyen speciális spektrálstruktúrájával, amelyet érdekes volna tisztázni.

Az ebben a paragrafusban ismertetett tételeknek fontos alkalmazásuk van a differenciál- és integrálegyenletek elméletében, viszont hely hiányában ezeket itt nem ismertettük. Egy sor ilyen alkalmazást találhat az olvasó a [26], [27], [32], [35], [36] eredeti dolgozatokban.

6. §. További tételek két altér nyílásáról

1. A $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér két végtelen dimenziós altere nyílásának további tulajdonságai vizsgálata előtt néhány fogalomra és állításra van szükségünk.

Az $\mathfrak{N}$ $(\subset\mathfrak{B})$ halmaz elemeinek $\mathfrak{M}$ részhalmazát az $\mathfrak{N}$ halmaz *α-rácsának* fogjuk nevezni, ha tetszőleges $x, y\in\mathfrak{M}$-ra teljesül

$$|x-y| \geqq \alpha.$$

Ha az $\mathfrak{N}$ halmaz $\mathfrak{M}$ α-rácsa nem szabályos része az $\mathfrak{N}$ halmaz semmilyen más α-rácsának, akkor azt *maximálisnak* nevezzük.

Ilyen módon, ha $\mathfrak{M}$ egy maximális α-rácsa az $\mathfrak{N}$ halmaznak, akkor minden $z\in\mathfrak{N}$-re

$$\varrho(z, \mathfrak{M}) = \inf_{x\in\mathfrak{M}} |z-x| < \alpha.$$

Transzfinit eljárással minden α-rács folytatható a maximálisig. Innen speciálisan következik maximális α-rács létezése bármely $\mathfrak{N}$ $(\subset\mathfrak{B})$ halmaz esetén.

6.1. LEMMA. *Legyen* $\mathfrak{B}$ *egy végtelen dimenziós Banach-tér. Akkor* $0<\alpha<1$ *mellett a* $\mathfrak{K}$ *egységhipergömb minden* $\mathfrak{M}$ *maximális* α*-rácsának a számossága megegyezik a* dim $\mathfrak{B}$*-vel.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{M}$ valamely maximális α-rácsa $(0<\alpha<1)$ a $\mathfrak{K}$: $|x|\leqq 1$ egységhipergömbnek. Tételezzük fel, hogy annak $\mathfrak{a}$ számossága kisebb a dim $\mathfrak{B}$-nél.

Akkor az $\mathfrak{C}$ elemeinek racionális együtthatós lineáris kombinációiból álló $\mathfrak{M}$ halmaz nem sűrű $\mathfrak{B}$-ben. Következésképp, RIESZ ismert lemmája szerint, bármely $\varepsilon>0$-hoz található olyan $x\in\mathfrak{B}$ $(|x|=1)$, hogy $\varrho(x; \mathfrak{C})\geqq 1-\varepsilon$. Kiválasztva a pozitív $\varepsilon<1-\alpha$-t, ellentmondáshoz jutunk azzal, hogy $\mathfrak{M}$ maximális α-rács. Ilyen módon $\mathfrak{a}$ nem kevesebb dim $\mathfrak{B}$-nél.

Másrészt, $\mathfrak{a}$ nem lehet nagyobb dim $\mathfrak{B}$-nél, mivel az α-rács elemeinek $\alpha/2$ sugarú környezetei nem metszik egymást, viszont mindegyikükben van legalább egy elem minden $\mathfrak{B}$-ben sűrű halmazból.

A lemmát bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Könnyű meggyőződni arról, hogy a 6.1. lemma érvényben marad akkor, ha a $\mathfrak{K}$ hipergömböt az $\mathfrak{S}$: $|x|=1$ hiperszférával helyettesítjük.

A 6.1. lemma egyszerű *következményei* az alábbi állítások.

1°. *Legyen* $\mathfrak{B}_1$ *a* $\mathfrak{B}$ *Banach-tér valamely altere, akkor* dim $\mathfrak{B}_1\leqq$dim $\mathfrak{B}$.

Valóban, legyen $\mathfrak{M}_1$ valamely maximális α-rácsa $(0<\alpha<1)$ a $\mathfrak{K}_1\subset\mathfrak{B}_1$ egység hipergömbnek, és legyen $\mathfrak{a}_1$ az $\mathfrak{M}_1$ számossága. Akkor dim $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{a}_1$. Jelöljük $\mathfrak{M}$-mel a $\mathfrak{B}$ olyan maximális α-rácsát, amely bővítése $\mathfrak{M}_1$-nek, és $\mathfrak{a}$-vel annak számosságát. Akkor, egyrészt, dim $\mathfrak{B}=\mathfrak{a}$, másrészt pedig, nyilván $\mathfrak{a}_1\leqq\mathfrak{a}$.

A teljesség kedvéért ismertetjük még a következő állítást, amelyet a következőkben használni fogunk.

2°. *A* $\mathfrak{B}$ *Banach-tér dimenziója nem nagyobb a* $\mathfrak{B}^\dagger$ *konjugált tér dimenziójánál. Speciálisan, ha a* $\mathfrak{B}$ *tér reflexív, akkor*

$$\dim\mathfrak{B} = \dim\mathfrak{B}^\dagger.$$

Valóban, ha $\mathfrak{B}$ végesdimenziós, akkor a 2° állítás nyilvánvaló.

Legyen a dim $\mathfrak{B}$ végtelen. Kiválasztunk $\mathfrak{B}$-ben olyan elemek transzfinit maximális $\{x_\alpha\}$ $(|x_\beta|=1)$ sorozatát, hogy

$$\varrho(x_\beta, \mathfrak{C}_\beta) > 1/2,$$

ahol $\mathfrak{C}_\beta$ azon x_α-k lineáris burka, amelyekre $\alpha<\beta$. Az $\{x_\alpha\}$ sorozat elemei lineáris burkának a lezártja a $\mathfrak{B}$, a sorozat α indexei halmazának a számossága egyenlő dim $\mathfrak{B}$.

Konstruáljuk most olyan funkcionálok $\{f_\alpha\}$ $(|f_\alpha|=1)$ sorozatát, amelyekre $|f_\alpha(x_\alpha)|>1/2, f_\alpha(x)=0$, ha $x \in \mathfrak{C}_\alpha$.

Legyenek $f_{\alpha'}$ és $f_{\alpha''}$ $(\alpha'<\alpha'')$ a megkonstruált sorozat funkcionáljai. Akkor

$$|f_{\alpha'}-f_{\alpha''}| \geqq \frac{|(f_{\alpha'}-f_{\alpha''})x_{\alpha'}|}{|x_{\alpha'}|} = |f_{\alpha'}(x_{\alpha'})| > \frac{1}{2}.$$

Következésképp, a konstruált $\{f_\alpha\}$ funkcionál transzfinit sorozat része a $\mathfrak{B}^\dagger$ tér egységhipergömbje valamely maximális α-rácsának $(\alpha=1/2$ mellett). Tehát dim $\mathfrak{B} \leqq$ dim $\mathfrak{B}^\dagger$.

2. Áttérünk most a végtelen dimenziós terek nyílásairól szóló fő tételek bizonyítására.

6.1. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ a $\mathfrak{B}$ Banach-tér két lineáris halmaza és legyen*

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) < 1/2.$$

Akkor

$$\dim \mathfrak{C}_1 = \dim \mathfrak{C}_2.$$

Bizonyítás. Az 1.1. tétel szerint csak azt az esetet kell megvizsgálnunk, amikor dim $\mathfrak{C}_1$ és dim $\mathfrak{C}_2$ végtelenek. Legyen

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \frac{1}{2}-b \quad \left(0<b<\frac{1}{2}\right).$$

A $\mathfrak{C}_1$ lineáris halmaz $\mathfrak{K}_1$ egységhipergömbben konstruálunk egy $\mathfrak{M}$ maximális α-rácsot, feltéve $\alpha=1-\frac{b}{2}$-t. Feltétel szerint, minden $x \in \mathfrak{M}$ $(\subset \mathfrak{C}_1)$ elemhez található olyan $y_x \in \mathfrak{C}_2$ elem, hogy

$$|y_x-x| < \frac{1}{2}-\frac{b}{2}.$$

Ha $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$, akkor $|x_1-x_2|>1-\frac{b}{2}$ és

$$|y_{x_1}-y_{x_2}| \geqq |x_1-x_2|-|x_1-y_{x_1}|-|x_2-y_{x_2}| > \frac{b}{2}.$$

A kapott egyenlőtlenségből következik, hogy a $\mathfrak{K}_1$ hipergömb $\mathfrak{M}$ maximális $\left(1-\frac{b}{2}\right)$-rácsa x elemeihez tartozó y_x elemek benne vannak a $\mathfrak{C}_2$ lineáris halmaz $\frac{3}{2}$ sugarú hipergömbjének $\left(|y_x| \leqq |y_x - x| + |x| < \frac{3}{2}\right)$ valamely $\frac{b}{2}$-rácsában. Következésképp, a 6.1. lemma alapján $\dim \mathfrak{C}_1 < \dim \mathfrak{C}_2$.

Felcserélve a $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ szerepét, a tétel állításához jutunk.

3. Legyen $\mathfrak{C}$ egy lineáris halmaz $\mathfrak{B}$-ben. Azt a $\mathfrak{C}^\perp \subset \mathfrak{B}^\dagger$ alteret, amely az összes olyan funkcionálokból áll, amelyek a $\mathfrak{C}$ összes elemein nullával egyenlők, a $\mathfrak{C}$ *ortogonális komplementerének* nevezzük $\mathfrak{B}^\dagger$-ban.

6.2. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ két lineáris részhalmaz $\mathfrak{B}$-ben, $\mathfrak{C}_1^\perp$ és $\mathfrak{C}_2^\perp$ pedig azok ortogonális komplementerei a $\mathfrak{B}^\dagger$-ban. Akkor*

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \theta(\mathfrak{C}_1^\perp, \mathfrak{C}_2^\perp).$$

Bizonyítás. HAHN ismert lemmája szerint tetszőleges $f \in \mathfrak{B}$ esetén

$$\varrho(y, \mathfrak{C}) = \max_{f \in \mathfrak{C}^\perp, |f|=1} |f(y)|.$$

Következésképp, a $\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$ kifejezhető így:

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = \sup \{|g(x)|, |f(y)|\},$$

ahol a supremmumot az egész

$$x \in \mathfrak{C}_1, \quad y \in \mathfrak{C}_2, \quad g \in \mathfrak{C}_2^\perp, \quad f \in \mathfrak{C}_1^\perp; \quad |x| = |y| = |g| = |f| = 1 \tag{6.1}$$

szerint vettük.

Emlékeztetünk arra, hogy ha valamely $\mathfrak{C}^* \subset \mathfrak{B}^\dagger$ altér regulárisan zárt (azaz tetszőleges $f_0 \notin \mathfrak{C}^\dagger$ funkcionálhoz található olyan $x_0 \in \mathfrak{B}$ elem, hogy $f_0(x_0) \neq 0$, de $f(x_0) = 0$ az összes $f \in \mathfrak{C}^*$ esetén), akkor BANACH ismert tétele szerint (l. [28], 106 old.) bármely $f_0 \notin \mathfrak{C}^*$ és $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $x_0 \in \mathfrak{B}$ ($|x_0| = 1$) elem, hogy $|f_0(x_0)| \geqq \varrho(f_0, \mathfrak{C}^\perp) - \varepsilon, f(x_0) = 0$ az összes $f \in \mathfrak{C}^*$-ra.

Eközben nyilván mindig $|f_0(x_0)| \leqq \varrho(f_0, \mathfrak{C}^*)$.

Mivel a $\mathfrak{C}$ lineáris halmaz $\mathfrak{C}^\perp$ ortogonális komplementere nyilvánvalóan regulárisan zárt, így a tétel szerint

$$\varrho(f, \mathfrak{C}^\perp) = \sup_{x \in \mathfrak{C}, |x|=1} |f(x)|.$$

Tehát úgyszintén

$$\theta(\mathfrak{C}_1^\perp, \mathfrak{C}_2^\perp) = \sup \{|g(x)|, |f(y)|\},$$

ahol a supremmumot az összes (6.1)-nek eleget tevő x, y, g, f szerint vettük. A tételt bebizonyítottuk.

A 6.1. és 6.2. tételekből közvetlenül következik a

6.3. TÉTEL. *Legyenek $\mathfrak{C}_1$ és $\mathfrak{C}_2$ a $\mathfrak{B}$ Banach-tér lineáris részhalmazai, $\mathfrak{C}_1^\perp$ és $\mathfrak{C}_2^\perp$ azok ortogonális komplementerei $\mathfrak{B}^\dagger$-ben.*

Akkor, ha

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) < 1/2, \tag{6.2}$$

akkor

$$\dim \mathfrak{C}_1^{\perp} = \dim \mathfrak{C}_2^{\perp}.$$

Legyen $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér altere. Mint ismeretes, a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ faktor-térrel konjugált tér ekvivalens a $\mathfrak{C}^{\perp} \subset \mathfrak{B}^{\dagger}$ altérrel.

4. Ha a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ tér reflexiv (ami, például, teljesül akkor, ha a $\mathfrak{B}$ reflexív, l. [37]), akkor

$$\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}) = \dim \mathfrak{C}^{\perp}.$$

Ezért a 6.3. tétel miatt ebben az esetben a (6.2)-ből következik a

$$\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1) = \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2)$$

egyenlőség.

Kiderül, hogy ez a tény érvényben marad a nem reflexív terekre is.

6.4. TÉTEL. *Legyen* $\mathfrak{C}_1$ *és* $\mathfrak{C}_2$ *a* $\mathfrak{B}$ *Banach-tér két altere, és legyen*

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) < 1/2.$$

Akkor

$$\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1) = \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2). \tag{6.3}$$

Ha $\mathfrak{B}$ *Hilbert-tér vagy a* $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1$ *és* $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2$ *terek egyike véges dimenziós, akkor a* (6.3) *teljesül, amint*

$$\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) < 1. \tag{6.4}$$

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{B}$ *Hilbert*-tér, akkor a második állítás nyilvánvaló módon következik az 1.2. tételből.

Ha a két $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1)$ és $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2)$ szám közül az egyik, például az első, véges, akkor $\dim \mathfrak{C}_1^{\perp} = \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1) < \infty$, akkor viszont a (6.4)-ből a 6.2. és 1.1. tételek alapján következni fog

$$\dim \mathfrak{C}_2^{\perp} = \dim \mathfrak{C}_1^{\perp}, \quad \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2) = \dim \mathfrak{C}_2^{\perp} = \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1).$$

Be kell még bizonyítanunk a tétel első állítását arra az esetre, amikor $\mathfrak{B}$ *Banach*-tér és mindkét $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1)$ és $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2)$ kardinális szám végtelen. Ehhez azonban elegendő megmutatni, hogy ha

$$\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1) > \dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2), \tag{6.5}$$

akkor $\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) \geqq 1/2$.

Kiválasztva egy tetszőleges $\beta < 1$ pozitív számot, a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1$ faktor-tér $\mathfrak{S}_1$ egységszférájában konstruálunk egy $\mathfrak{M}_1$ maximális $(1-\beta)$-rácsot. Ennek a rácsnak a számossága egyenlő lesz $\dim (\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_1)$-val (l. a megjegyzést a 6.1. lemmához). Az $\mathfrak{M}_1$ definíciója szerint

$$|\hat{x} - \hat{y}| \geqq 1 - \beta, \quad |\hat{x}| = |\hat{y}| = 1, \quad (\hat{x}, \hat{y} \in \mathfrak{M}_1, \hat{x} \neq \hat{y}).$$

Rögzítve egy tetszőleges $\gamma>0$-t, kiválasztunk minden $\hat{x}\in\mathfrak{M}_1$ mellékosztályban egy $x\in\mathfrak{B}$ elemet, hogy $|x|<|\hat{x}|+\gamma=1+\gamma$. Az így kapott $x\in\mathfrak{B}$ elemek összességét $\mathfrak{M}_1$-vel jelöljük. Mivel mindig teljesül $|\hat{x}-\hat{y}|\leqq|x-y|$ $(x\in\hat{x}, y\in\hat{y})$, így $\mathfrak{M}_1'$ egy $(1-\beta)$-rács lesz $\mathfrak{B}$-ben. A $\mathfrak{B}$ térnek a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2$ faktor-térbe való $x\to\tilde{x}$ természetes leképezése hatására $\mathfrak{M}_1$ átmegy egy $\mathfrak{M}_2$ halmazba, amely benne van a $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}_2$ tér $\mathfrak{K}$: $\|\tilde{x}\|<1+\gamma$ hipergömbjében. Mivel állítás szerint fennáll a (6.5), így a 6.1. lemma alapján állíthatjuk, hogy semmilyen $\alpha(0<\alpha<1+\gamma)$-ra az $\mathfrak{M}_2$ halmaz nem lesz α-rácsa az $\mathfrak{K}$ hipergömbnek. Utóbbi azt jelenti, hogy léteznek olyan $x, y\in\mathfrak{M}_1'$ $(x\neq y)$ elemek és olyan $z\in\mathfrak{C}_2$ elem, hogy $|x-y-z|<\alpha$. Akkor

$$1-\beta-\alpha < |x-y|-\alpha < |z| < \alpha+|x-y| < \alpha+2+2\gamma,$$

és így

$$\frac{\varrho(x-y, \mathfrak{C}_1)-|x-y-z|}{|z|} = \frac{|\hat{x}-\hat{y}|-|x-y-z|}{|z|} > \frac{1-\beta-\alpha}{2+2\gamma+\alpha}. \tag{6.6}$$

Másrészt, mivel tetszőleges $u\in\mathfrak{C}_1$-re $|u-z|\geqq|u-(x-y)|-|x-y-z|$, ezért

$$\varrho\left(\frac{z}{|z|}, \mathfrak{C}_1\right) = \frac{1}{|z|}\varrho(z, \mathfrak{C}_1) \geqq \frac{\varrho(x-y,\mathfrak{C}_1)-|x-y-z|}{|z|}. \tag{6.7}$$

Mivel az α, β, γ pozitív számok tetszőlegesen kicsinek választhatók, a (6.6) és (6.7)-ből következik, hogy $\theta(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)\geqq 1/2$. A tételt bebizonyítottuk.

7. §. Tételek a szemiinfinit d-karakterisztikájú operátorok indexének stabilitásáról

1. Az általunk az előbbi paragrafusokban elfogadott terminológiát tovább fejlesztve, a $\mathfrak{B}_1$-ből a $\mathfrak{B}_2$-be ható valamely A lineáris zárt operátort *Φ_+-operátornak* fogjuk nevezni, ha az A operátor normálisan feloldható, α_A véges és β_A végtelen. A lineáris zárt normálisan feloldható A operátort *Φ_--operátornak* nevezzük, ha β_A véges és α_A végtelen. A továbbiakban szükségünk lesz a következő két lemmára.

7.1. LEMMA. *Legyen $\tilde{A}$ az $A\Phi_+$-operátor k-dimenziós bővítése. Akkor $\tilde{A}$ szintén Φ_+-operátor, mégpedig*

$$\alpha_{\tilde{A}} \leqq \alpha_A+k, \quad \beta_{\tilde{A}} = \alpha_A.$$

7.2. LEMMA. *Legyen $\tilde{A}$ Φ_--operátor egy A operátornak k-dimenziós bővítése. Akkor az $\tilde{A}$ operátor szintén Φ_--operátor, mégpedig*

$$\beta_A \geqq \beta_{\tilde{A}}-k, \quad \alpha_{\tilde{A}} = \alpha_A.$$

Ezeknek a lemmáknak a bizonyítása lényegében ugyanazokon az ötleteken alapszik, mint a 2.2. lemma bizonyítása, ezért azt elhagyjuk.

7.1. TÉTEL. *Legyen A egy Φ_+-operátor $(\mathfrak{D}_A\subset\mathfrak{B}_1, \mathfrak{R}_A\subset\mathfrak{B}_2)$. Akkor található olyan $\varrho>0$ szám, hogy bármilyen legyen is a B lineáris korlátos operátor $(B\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2)$, amelyre $|\mathfrak{B}|<\varrho$, az $A+B$ operátor szintén Φ_+-operátor lesz, mégpedig*

$$\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A, \quad \beta_{A+B} = \alpha_A.$$

Bizonyítás. A $\mathfrak{B}_1$ tér előállítható alterek $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{Z}_A\dot{+}\mathfrak{C}$ direktösszegeként, ahol $\mathfrak{C}$ valamely komplementer altér az A operátor nulláinak $\mathfrak{Z}_A$ halmazához.

Jelöljük A_1-el a $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{C}$ értelmezési tartományú olyan operátort, amely ebben a tartományban ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint az A operátor. Nyilvánvaló, hogy az A_1 operátor normálisan feloldható, és d-karakterisztikája $(0, \beta_A)$ alakú. Az A_1 operátor normális feloldhatóságából és az α_{A_1}-nek nullával való egyenlőségéből következik olyan $m>0$ létezése, hogy

$$|A_1x| \geqq m|x| \quad (x\in\mathfrak{D}_1).$$

Legyen B egy tetszőleges lineáris korlátos operátor, amely $\mathfrak{B}_1$-et a $\mathfrak{B}_2$-be viszi át, és amelyre

$$|B| < \varrho,$$

ahol $\varrho=\frac{m}{3}$. Akkor

$$|(A_1+B)x| \geqq (m-|B|)|x| \geqq \frac{2}{3}m|x| \quad (x\in\mathfrak{D}_1).$$

Az utóbbi egyenlőtlenségből következik, hogy az $A+B$ operátor normálisan feloldható, és $\alpha_{A_1+B}=0$. Azonkívül, nyilvánvalóan, tetszőleges $x\in\mathfrak{D}_1$-re

$$|(A_1+B)x-A_1x| \leqq \frac{1}{3}|A_1x|$$

és

$$|A_1x-(A_1+B)x| \leqq \frac{3|B|}{2m}|(A_1+B)x| \quad \left(\frac{3}{2m}|B| < \frac{1}{2}\right).$$

Ezek az egyenlőtlenségek maguk után vonják az $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}_{A_1+B}$ és $\mathfrak{N}_2=\mathfrak{N}_{A_1}$ terek nyílásának

$$\theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) < 1/2$$

értékelését.

Alkalmazva az $\mathfrak{N}_1$ és $\mathfrak{N}_2$ alterekre a 6.3. tételt, azt kapjuk, hogy

$$\dim \mathfrak{N}_1^\perp = \dim \mathfrak{N}_2^\perp,$$

és ezért

$$\beta_{A_1+B} = \beta_{A_1} = \beta_A.$$

Megjegyezve most, hogy az $A+B$ operátor az A_1+B operátornak α_A-dimenziós bővítése, a 7.1. tételnek megfelelően azt kapjuk, hogy az $A+B$ operátor Φ_+-operátor, mégpedig

$$\alpha_{A+B} \leqq \alpha_A, \quad \beta_{A+B} = \beta_A.$$

A tételt bebizonyítottuk.

7.2. TÉTEL. *Legyen A egy tetszőleges Φ_--operátor. Akkor létezik olyan $\varrho>0$ szám, hogy bármilyen is a $|B|<\varrho$-nak eleget tevő lineáris korlátos B operátor ($B\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2$), az $A+B$ operátor Φ_--operátor lesz, mégpedig*

$$\alpha_{A+B} = \alpha_A, \quad \beta_{A+B} \leqq \beta_A.$$

Bizonyítás. A tételt előbb arra az esetre bizonyítjuk, amikor az A operátor korlátos $\mathfrak{D}_A=\mathfrak{B}_1$ és $\beta_A=0$.

Akkor HAUSDORFF tétele szerint (l. [38] vagy [28]) az A operátorral együtt úgyszintén normálisan feloldható a konjugált $A^\dagger$ operátor is.

Ezenkívül igaz $\alpha_{A^\dagger}=\beta_A=0$, ugyanakkor a $\beta_{A^\dagger}$ végtelen.

Alkalmazva most az $A^\dagger$ operátorra az előbbi 7.1. tételt, a bizonyítása közben a $\theta(\mathfrak{R}_{A+B}, \mathfrak{R}_A)$ nyílásra kapott értékeléssel együtt, megállapítjuk, hogy van olyan $\varrho>0$ szám, a ϱ-nál kisebb normájú összes lineáris korlátos B operátorra ($|B|=|B^\dagger|<\beta$), az $A^\dagger+B^\dagger$ operátor normálisan feloldható, arra

$$\alpha_{A^\dagger+B^\dagger}=0$$

és ezenkívül,

$$\theta(\mathfrak{R}_{A^\dagger+B^\dagger}, \mathfrak{R}_{A^\dagger}) < 1/2. \tag{7.1}$$

Az $\mathfrak{R}_{A^\dagger+B^\dagger}$ és $\mathfrak{R}_{A^\dagger}$ alterek ortogonális komplementerei megfelelően a $\mathfrak{Z}_{A+B}$ és $\mathfrak{Z}_A$-nak, ugyanis, amint F. HAUSDORFF [38] megmutatta, a korlátos normálisan feloldható C operátor $C^\dagger$ konjugáltjának az értelmezési tartománya ortogonális komplementere az előbbi nullái $\mathfrak{Z}_C$ halmazának. A 6.2. tételnek megfelelően innen a (7.1) egyenlőtlenség magával vonja a

$$\theta(\mathfrak{Z}_{A+B}, \mathfrak{Z}_A) < 1/2$$

egyenlőtlenséget, és így

$$\dim \mathfrak{Z}_{A+B} = \dim \mathfrak{Z}_A \quad \text{vagy} \quad \alpha_{A+B}=\alpha_A.$$

Áttérünk most a tétel bizonyítására a $\beta_A\neq 0$ esetében.

Legyen $\mathfrak{N}$ az $\mathfrak{R}_A$ direkt komplementere a $\mathfrak{B}_2$-ben és $\mathfrak{M}$ egy normált β_A-dimenziós altér. Jelöljük C-vel az $\mathfrak{M}$ teret $\mathfrak{N}$-re leképező lineáris operátort (speciálisan ebben a konstrukcióban feltételezhető, hogy $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$, $C=I$).

Legyen $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ a $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{M}$ terek direktösszege, amelyben a normát az alábbi egyenlőséggel definiáljuk:

$$|x+y| = |x|+|y| \quad (x\in\mathfrak{B}_1,\ y\in\mathfrak{M}). \tag{7.2}$$

Bővítjük az operátort β_A dimenzió számmal az $\tilde{A}$ operátorig, feltéve

$$\tilde{A}(x+y) = Ax+Cy \quad (x\in\mathfrak{D}_A,\ y\in\mathfrak{M}).$$

Nyilvánvaló, hogy az $\tilde{A}$ operátor normálisan feloldható

$$\beta_{\tilde{A}}=0, \quad \alpha_{\tilde{A}}=\alpha_A.$$

Következésképp, az operátorra alkalmazható a tétel bebizonyított része. Ennek megfelelően létezik olyan $\varrho>0$ szám, hogy a ϱ-nál kisebb normájú összes $B(B\mathfrak{B}_1\subset\subset\mathfrak{B}_2)$ lineáris korlátos operátorra az $\tilde{A}+\tilde{B}$ operátor, ahol $\tilde{B}$ a B operátornak β_A-dimenziós bővítése és a $\tilde{B}\mathfrak{M}=0$ [8] egyenlőséggel van definiálva, normálisan feloldható, és

$$\beta_{\tilde{A}+\tilde{B}}=0, \quad \alpha_{\tilde{A}+\tilde{B}}=\alpha_{\tilde{A}}.$$

Figyelembe véve, hogy az $\tilde{A}+\tilde{B}$ operátor az $A+B$ operátornak β_A-dimenziós bővítése, a 7.2. lemma alapján megállapíthatjuk, hogy az $A+B$ operátor normálisan feloldható, és

$$\alpha_{A+B} = \alpha_A, \quad \beta_{A+B} \leqq \beta_A.$$

Tekintsük végül az utolsó esetet, amikor az A tetszőleges Φ_--operátor. Bevezetünk normát $\mathfrak{D}_A$-ban (l. a 2. § 5. pontját):

$$\|x\| = |x|+|Ax|,$$

amely $\mathfrak{D}_A$-t egy $\mathfrak{D}$ *Banach*-térré teszi. Akkor az A operátor $\mathfrak{D}$-ban egy korlátos $\mathbf{A}$ operátort indukál, ugyanolyan értelmezési tartománnyal, mint az A. Ezért az $\mathbf{A}$ operátor normálisan feloldható és $\beta_{\mathbf{A}}=\beta_A$. Azonkívül $\alpha_{\mathbf{A}}=\alpha_A$, mivel a $\mathfrak{Z}_{\mathbf{A}}$ és $\mathfrak{Z}_A$ alterek egybeesnek, és tetszőleges $x\in\mathfrak{Z}_A$-ra

$$\|x\| = |x|.$$

Az $\mathbf{A}$ operátorra alkalmazható a 7.2. tétel már bebizonyított esete.

Ezért az összes $\mathbf{B}(\mathbf{B}\mathfrak{D}_A\subset\mathfrak{B}_2)$ olyan operátorokra, amelyek normája kisebb egy bizonyos $\varrho>0$ számnál:

$$\|\mathbf{B}\| < \varrho, \tag{7.3}$$

az $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ operátor normálisan feloldható, és

$$\alpha_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \alpha_{\mathbf{A}}, \quad \beta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \leqq \beta_{\mathbf{A}}. \tag{7.4}$$

Speciálisan, a (7.3) egyenlőség teljesül az összes $|B|<\varrho$ feltételnek eleget tevő lineáris korlátos $B(B\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2)$ operátorra, ugyanis $\|\mathbf{B}\|<|B|$, és így az $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ operátor normálisan feloldható, és arra igazak a (7.4) állítások. Innen pedig következik, hogy az $A+B$ operátor normálisan feloldható, és

$$\beta_{A+B} = \beta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \leqq \beta_{\mathbf{A}} = \beta_A.$$

Már megjegyeztük, hogy $\alpha_{\mathbf{A}}=\alpha_A$, ezért már csak azt kell bebizonyítani, hogy $\alpha_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\alpha_{A+B}$, azaz hogy a $\mathfrak{Z}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\mathfrak{Z}_{A+B}$ altérnek mindkét normában azonos a dimenziója. Utóbbi abból adódik, hogy a $\mathfrak{Z}_{A+B}$-ben mindkét norma topológiailag ekvivalens, amint ez látható a

$$Ax = -Bx, \quad \text{ha} \quad x\in\mathfrak{Z}_{A+B}$$

és

$$|x| < \|x\| = |x|+|Bx| < (1+|B|)|x| \quad (x\in\mathfrak{Z}_{A+B})$$

összefüggésekből.

A tételt bebizonyítottuk.

2. Ebben a pontban meg fogjuk vizsgálni a $\Phi_\pm$-operátornak teljesen folytonosakkal való perturbációját. Ebből a célból előbb egy lemmát bizonyítunk be.

7.3. LEMMA. *Legyen T a $\mathfrak{B}_1$-et $\mathfrak{B}_2$-be leképező valamely teljesen folytonos operátor, A pedig egy véges α_A-val rendelkező lineáris zárt normálisan feloldható operátor. Akkor az $A+T$ operátor normálisan feloldható és α_{A+T} véges.*

[8] Megjegyezzük, hogy a norma (7.2) definíciója szerint a $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ térben teljesül a $|B|=|\tilde{B}|$ egyenlőség.

Bizonyítás. Véges β_A esetén a lemma benne van a bebizonyított 2.3. tételben. Ezért csak azt az esetet kell megvizsgálnunk, amikor $\beta_A=\infty$. A következő okoskodásokban csak azt fogjuk felhasználni, hogy $\alpha_A \leqq \beta_A$.

Tételezzük fel először, hogy $\alpha_A=0$. Ebben az esetben létezik az $\mathfrak{R}_A$-ban értelmezett olyan korlátos A^{-1} operátor, hogy

$$A^{-1}Ax = x \quad (x \in \mathfrak{D}_A).$$

Az $(I+TA^{-1})y=0\,(y\in\mathfrak{R}_A)$ egyenletnek végesszámú lineárisan független megoldása van, ugyanis az $\mathfrak{R}_A$ altéren a TA^{-1} operátor teljesen folytonos. Következésképp, az $(A+T)x=0$ egyenletnek végesszámú lineárisan független megoldása van. A $\mathfrak{B}_1$ altér előállítható alterek $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{Z}_{A+T}\dotplus\mathfrak{C}$ direktösszegeként. Legyen $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{C}$. Hogy meggyőződjünk az $A+T$ operátor normális feloldhatóságáról, meg kell mutatni, hogy valamely $m>0$ esetén az összes $x\in\mathfrak{D}_1$-re teljesül az

$$|(A+T)x| \geqq m|x|$$

egyenlőtlenség.

Tételezzük fel az ellenkezőt, azaz hogy létezik olyan $\{x_n\}$ $(|x_n|=1;\ n=1, 2, \ldots)$ sorozat, hogy

$$(A+T)x_n \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhető, hogy a $\{Tx_n\}$ sorozat konvergens. Akkor létezni fog határérték is:

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = -\lim_{n\to\infty} Tx_n.$$

Alkalmazva az $\{Ax_n\}$ sorozat elemeire az A^{-1} korlátos operátort, azt kapjuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat is konvergál valamely $x_0\in\mathfrak{B}_1$ elemhez.

Nyilvánvaló, hogy az x_0 vektor rendelkezik a következő tulajdonságokkal: $x_0\in\mathfrak{D}_1$, $|x_0|=1$, és

$$(A+T)x_0 = 0.$$

Ilyen módon, $\mathfrak{D}_1$-ben létezik $x_0(\neq 0)$ elem, amelyen az $A+T$ operátor nulla értéket vesz fel, viszont ez ellentmond a $\mathfrak{D}_1$ halmaz konstrukciójának.

Legyen most $\alpha_A>0$. Felbontjuk $\mathfrak{B}_1$-et alterek direktösszegére: $\mathfrak{B}=\mathfrak{Z}_A\dotplus\mathfrak{C}_1$. Jelöljünk C-vel egy olyan végesdimenziós lineáris operátort, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal: 1) $Cx=0$, ha $x\in\mathfrak{C}_1$ és 2) a C operátor leképezi a $\mathfrak{Z}_A$ alteret egy olyan α_A-dimenziós altérre, amely az A operátor értékkészletével csak a nullában metszi egymást (itt felhasználtuk, hogy $\beta_A \geqq \alpha_A$).

A_1-el jelöljük az $A+C$ lineáris zárt normálisan feloldható operátort. Nyilvánvaló, hogy $\alpha_{A_1}=0$. Legyen T_1 a $T-C$-vel egyenlő teljesen folytonos operátor. Akkor az $A+T$ operátor egyenlő A_1+T_1, utóbbira pedig a lemma be van bizonyítva.

7.3. TÉTEL. *Ha A egy Φ_+-operátor, T pedig tetszőleges lineáris teljesen folytonos operátor $(T\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2)$, akkor $A+T$ szintén Φ_+-operátor, mégpedig*

$$\beta_{A+T} = \beta_A.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $A+\varepsilon T\,(0\leqq\varepsilon\leqq 1)$ operátort.

A 7.3. lemma szerint az összes tekintett ε-okra az $A+\varepsilon T$ operátor normálisan feloldható, és az $\alpha(\varepsilon)=\alpha_{A+\varepsilon T}$ véges. A 7.1. tételből következik, hogy minden $\varepsilon_0(0\leqq \leqq\varepsilon_0\leqq 1)$-hoz létezik olyan $\varrho_0>0$ szám, hogy az $|\varepsilon-\varepsilon_0|<\varrho_0$ egyenlőtlenségnek elegettevő összes ε-ra a $\beta(\varepsilon)=\beta_{A+\varepsilon T}$ függvény ugyanazt az értéket veszi fel. Ilyen U_ε környezetet konstruálva a $[0, 1]$ szakasz minden pontjára, annak egy lefedését kapjuk. Kiválasztunk abból egy véges $U_1, \ldots, U_N$ lefedést. Megjegyezve, hogy ezen lefedés szomszédos elemei metszik egymást, megállapítjuk, hogy az U_j $(j=1, \ldots, N)$ környezetek összes pontjaiban a $\beta(\varepsilon)$ függvény ugyanazt az értéket veszi fel. Következésképp, a $\beta(\varepsilon)$ függvény konstans a $[0, 1]$ intervallumon, ahonnan

$$\beta_A=\beta(0)=\beta(1)=\beta_{A+T}.$$

A tételt bebizonyítottuk.

Ugyanúgy, ahogy a 7.1. tétel duálisát, a 7.2. tételt kaptuk, meg lehet fogalmazni a 7.3. tétel duálisát.

7.4. TÉTEL. *Ha A egy Φ_--operátor, T pedig $(T\mathfrak{B}_1\subset\mathfrak{B}_2)$ tetszőleges lineáris teljesen folytonos operátor, akkor az $A+T$ szintén Φ_--operátor, mégpedig*

$$\alpha_{A+T}=\alpha_A.$$

Ugyanúgy, mint ahogy ezt tettük a 2.3. és 2.4. tételek vonatkozásában, általánosíthatjuk az éppen bizonyított 7.1.—7.4. tételeket is arra az esetre, amikor a B operátor norma szerinti kis voltának a feltételét és a T operátor teljes folytonosságának a feltételét helyettesítjük megfelelően az A-norma szerinti kicsiség és a B operátor A-teljesen folytonosságának a feltételeivel.

Meg kell jegyeznünk, hogy ha A normálisan feloldható operátor és mindkét α_A és β_A szám végtelen, akkor olyan operátornak a hozzáadásával, amely tetszőlegesen kicsi a norma szerint, vagy teljesen folytonos, mindig fel lehet borítani annak normális feloldhatóságát, sőt d-karakterisztikájának a végtelenségét is (l. [39]). Következésképp, az α_A és β_A számok egyikének a végessége lényeges feltétel.

8. §. Tételek a lineáris zárt operátor $\Phi_\pm$-pontjairól

1. Egy λ pontot a $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben értelmezett A lineáris zárt operátor *Φ_+-pontjának* nevezünk, ha az $A-\lambda I$ operátor Φ_+-operátor, azaz az $A-\lambda I$ operátor normálisan feloldható, $\alpha_A(\lambda)$ véges és $\beta_A(\lambda)$ végtelen.

Analóg módon a λ pontot a lineáris zárt A operátor *Φ_--pontjának* nevezzük, ha az $A-\lambda I$ operátor Φ_--operátor, azaz az $A-\lambda I$ operátor normálisan feloldható, $\beta_A(\lambda)$ véges és $\alpha_A(\lambda)$ végtelen.

Az operátor összes λ Φ_+-pontjainak a halmazát az A operátor *Φ_+-halmazának* nevezzük, és Φ_{+A}-val jelöljük, az A operátor összes Φ_--pontjainak a halmazát pedig *Φ_--halmaz*-nak nevezzük, és Φ_{-A}-val jelöljük.

Legyen λ_0 egy Φ_+-pontja az A operátornak. Mivel $A-\lambda I=(A-\lambda_0 I)+(\lambda-\lambda_0)I$, így a 7.1. tételnek megfelelően található olyan $\varepsilon>0$ szám, hogy az $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ körből való összes λ pont az A operátor Φ_+-pontja, és azokra $\beta_A(\lambda)=\beta_A(\lambda_0)$.

Analóg helyzet áll fenn, ha $\lambda_0\in\Phi_{-A}$.

Az említett megjegyzésekből következik a következő tétel érvényessége.

8.1. TÉTEL. *A lineáris zárt A operátor $\Phi_{\pm}$-halmazai nyílt halmazok, és így véges vagy megszámlálható sok összefüggő komponens összegei. A Φ_{+A} (megfelelően Φ_{-A}) halmaz egy és ugyanazon összefüggő komponensének összes λ pontjára a $\beta_A(\lambda)$ (megfelelően az $\alpha_A(\lambda)$) függvény konstans értéket vesz fel.*

2. Megvizsgáljuk most, hogyan viselkedik az $\alpha_A(\lambda)=\alpha_{A-\lambda I}$ függvény a Φ_{+A} halmaz komponenseiben és a $\beta_A(\lambda)=\beta_{A-\lambda I}$ függvény a Φ_{-A} halmaz komponenseiben. Ennek érdekében bebizonyítjuk a következő lemmát.

8.1. LEMMA. *Legyen A egy Φ_+-(vagy Φ_--) operátor. Akkor létezik olyan $\varrho>0$ szám, hogy a $0<|\lambda|<\varrho$ egyenlőtlenségnek eleget tevő összes λ komplex számra az*

$$(A-\lambda I)x=0$$

egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma ugyanaz.

Abban az esetben, ha A egy Φ-operátor, ez a lemma következik az általánosabb 3.1. lemmából. Utóbbinak a bizonyításánál lényeges módon támaszkodtunk a β_A véges voltára. A lent következő bizonyítás alkalmas úgy a véges, mint a végtelen β_A esetére.

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{M}$ azon $y\in\mathfrak{B}$ elemek halmaza, amelyekre az $A^n x=y$ egyenletnek van megoldása az összes n természetes szám esetén, úgy hogy

$$\mathfrak{M}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{R}_{A^n}.$$

Mivel az összes $\mathfrak{R}_{A^n}$ $(n=1,2,\ldots)$ zárt altér, így $\mathfrak{M}$ is zárt.

Nyilvánvaló, hogy az A operátor bármely x saját vektora $(Ax=\lambda x, \lambda\neq 0)$ benne van minden $\mathfrak{R}_{A^n}$ altérben, tehát $\mathfrak{M}$-ben is.

Ezért, ha $\mathfrak{M}$ csak az egy nullából áll, akkor tetszőleges $\lambda\neq 0$-ra $\alpha_A(\lambda)=0$, és erre az esetre a lemmát bebizonyítottuk.

Tartalmazzon most az $\mathfrak{M}$ altér nullától különböző elemeket. Feltéve $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_A\cap\mathfrak{M}$-t, megmutatjuk, hogy $A\mathfrak{D}_1=\mathfrak{M}$.

Ebből a célból meg kell mutatni, hogy tetszőleges $y\in\mathfrak{M}$ esetén az

$$Ax=y \tag{8.1}$$

egyenletnek van legalább egy $x\in\mathfrak{D}_1$ megoldása.

Tételezzük fel az ellenkezőt, azaz hogy valamely $y\in\mathfrak{M}$ $(y\neq 0)$-ra a (8.1) egyenlet összes megoldásai egy véges dimenziós $\mathfrak{C}_y=g+\mathfrak{Z}_A(Ag=y)$ sokaságot alkotnak, amely nem metszi $\mathfrak{M}$-et.

Akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{C}_y\cap\mathfrak{R}_{A^n})=\mathfrak{C}_y\cap\mathfrak{M}=\emptyset,$$

ahol $\emptyset$ az üres halmaz.

Figyelembe véve, hogy $\mathfrak{C}_y$ véges dimenziós, és hogy

$$\mathfrak{R}_A\supset\mathfrak{R}_{A^2}\supset\ldots\supset\mathfrak{R}_{A^n}\supset\ldots,$$

ahhoz a következtetéshez jutunk, hogy létezik olyan k természetes szám, amelyre

$$\mathfrak{C}_y \cap \mathfrak{N}_{A^k} = 0. \tag{8.2}$$

Másrészt, mivel $y \in \mathfrak{M}$, így létezik olyan z elem, hogy

$$A^{k+1}z = y \quad \text{vagy} \quad A(A^k z) = y.$$

Utóbbi egyenlőség azt jelenti, hogy $A^k z \in \mathfrak{C}_y$, és mivel $A^k z \in \mathfrak{N}_{A^k}$, így ellentmondáshoz jutunk a (8.2)-vel. Ilyen módon valóban

$$A\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{M}.$$

Legyen A_1 az A operátor által az $\mathfrak{M}$ altérben indukált operátor. Akkor a fennt mondottakból következik, hogy az A_1 operátor normálisan feloldható és d-karakterisztikája $(\alpha_{A_1}, 0)$ alakú, mégpedig α_{A_1} véges és

$$\alpha_{A_1} = \dim (\mathfrak{Z}_A \cap \mathfrak{M}).$$

Továbbá, megjegyezzük, hogy az összes nullától különböző λ számokra $\mathfrak{Z}_{A-\lambda I} \subset \subset \mathfrak{M}$, és ezért $\mathfrak{Z}_{A-\lambda I} = \mathfrak{Z}_{A_1-\lambda I}$. Innen, speciálisan, következik, hogy

$$\alpha_A(\lambda) = \alpha_{A_1}(\lambda) \quad (\lambda \neq 0). \tag{8.3}$$

Az index stabilitásáról szóló 3.1. tételnek megfelelően létezik olyan $\varrho > 0$ szám, hogy az $|\lambda| < \varrho$ egyenlőtlenséget kielégítő összes λ számokra teljesül

$$\varkappa_{A_1}(\lambda) = \varkappa_{A_1}(0), \quad \beta_{A_1}(\lambda) \leqq \beta_{A_1}(0) \quad (\neq 0).$$

A (8.3) egyenlőségből és a β_{A_1} nullával való egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\alpha_A(\lambda) = \alpha_{A_1}(\lambda) = \alpha_{A_1} \tag{8.4}$$

a $0 < |\lambda| < \varrho$ egyenlőtlenséget kielégítő összes λ-ra.

8.1. Megjegyzés. Nyilvánvalóan

$$\alpha_A(0) \geqq \alpha_A(\lambda) = \alpha_{A_1} \quad (0 < \lambda < \varrho),$$

mégpedig az egyenlőség jelének jelenléte itt magával vonja $\mathfrak{Z}_A \subset \mathfrak{M}$-t.

3. Ez ideig elkerültük a konjugált operátor fogalmának a használatát az általános *Banach*-terekben. Viszont eljött az idő, amikor a fogalomra szükség van. A következő módon vezetjük be azt.

Legyen A a $\mathfrak{B}_2$-beli sűrű $\mathfrak{D}_A (\subset \mathfrak{B}_1)$ értelmezési tartományban definiált lineáris operátor.

Akkor minden $f \in \mathfrak{B}_2^\dagger$ funkcionál egyértelműen generál egy g lineáris funkcionált a $\mathfrak{D}_A$-n, amelyet a

$$g(x) = f(Ax) \quad (x \in \mathfrak{D}_A)$$

egyenlőség határoz meg.

Ha a g funkcionálról kiderül, hogy korlátos (folytonos), akkor az egyetlen módon folytatható az egész $\mathfrak{B}_1 = \overline{\mathfrak{D}}_A$-ra, és az tekinthető a $\mathfrak{B}_1^\dagger$ elemének. Ebben az esetben azt fogjuk írni, hogy

$$g = fA = A^\dagger f.$$

Ezzel definiálunk egy $A^\dagger$ lineáris operátort, amelyet az A operátor *konjugált*[9] operátorának nevezünk, amely a $\mathfrak{B}_2^\dagger$-ből a $\mathfrak{B}_1^\dagger$-be hat és $\mathfrak{D}_{A^\dagger}$ értelmezési tartománya azokból és csakis azokból az $f \in \mathfrak{B}_2^\dagger$ elemekből áll, amelyekhez létezik olyan c_f pozitív szám, hogy

$$|f(Ax)| \leqq c_f|x| \quad (x \in \mathfrak{D}_A).$$

Triviális módon ellenőrizhető, hogy az $A^\dagger$ operátor mindig zárt.

Ugyancsak nyilvánvaló, hogy $A^\dagger f = 0$ akkor és csakis akkor, ha $f \in \mathfrak{B}_2^\dagger$ és f ortogonális $\mathfrak{R}_A$-hoz, azaz $f(y) = 0 (y \in \mathfrak{R}_A)$. Innen nyilvánvaló, hogy mindig teljesül

$$\alpha_{A^\dagger} = \beta_A.$$

Ugyancsak világos, hogy mindig

$$\beta_{A^\dagger} \geqq \alpha_A.$$

Ezenkívül jól ismert [28], hogy ha A korlátos operátor, amely $\mathfrak{B}_1$-et $\mathfrak{B}_2$-be viszi át, akkor $A^\dagger$ szintén korlátos operátor, amely a $\mathfrak{B}_2^\dagger$-ot $\mathfrak{B}_1^\dagger$-be viszi át, miközben

$$|A^\dagger| = |A|.$$

Ezt már használtuk a 7.8. tétel bizonyítása során.

Bennünket az az eset fog érdekelni, amikor az A operátor nem korlátos is lehet, de zárt.

Szükséges lesz a következő

8.2. LEMMA. *Legyen A egy sűrű értelmezési tartománnyal rendelkező* ($\overline{\mathfrak{D}}_A = \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{R}_A \subset \mathfrak{B}_2$) zárt operátor. Akkor, ha az A operátor normálisan feloldható, akkor az $A^\dagger$ operátor is normálisan feloldható.

Bizonyítás. Amint már megjegyeztük, a korlátos operátorokra ezt az állítást HAUSDORFF [38] ismerte fel. A lemma bizonyítása céljából tekintjük $\mathfrak{D}_A$-n a

$$\|x\| = |x| + |Ax|$$

normát (l. 2. § 5. pont), amely $\mathfrak{D}_A$-t a $\mathfrak{D}_A$ *Banach*-térré változtatja. Akkor az A operátor $\mathfrak{D}_A$-ban egy korlátos A operátort indukál ugyanazzal az értelmezési tartománnyal. Ezért, ha az A operátor normálisan feloldható, akkor olyan lesz az A operátor is, tehát HAUSDORFF tétele szerint, az $A^\dagger$ operátor is, amely az egész $\mathfrak{B}_2^\dagger$-t $\mathfrak{D}_A^\dagger$-ba viszi át, ahol $\mathfrak{D}_A^\dagger$ a $\mathfrak{D}_A$-hoz konjugált teret jelenti. Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{B}_1^\dagger$ tekinthető a $\mathfrak{D}_A^\dagger$ részének, ugyanis ha $f(x)$ egy lineáris folytonos funkcionál a $\mathfrak{B}_1$-en, akkor

$$|f(x)| \leqq |f|_{\mathfrak{B}_1}|x| \quad (x \in \mathfrak{B}_1),$$

tehát annál inkább

$$|f(x)| \leqq |f|_{\mathfrak{B}_1}\|x\| \quad (x \in \mathfrak{D}_A).$$

[9] Helyesebb volna az $A^\dagger$ operátort *transzponáltnak* nevezni a komplex *Hilbert*-térben értelmezett *konjugált* operátor fogalmától eltérően, ugyanis amíg az $A^\dagger$ operátor definíciójából $(\lambda A)^\dagger = \lambda A^\dagger$ következik, addig a konjugált A^* operátor definíciójából a *Hilbert*-térben $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ következik.

Egyidejűleg megjegyezzük, hogy ha $f \in \mathfrak{B}_1^\dagger$, akkor

$$|f|_{\mathfrak{B}_1} = \sup_{x \in \mathfrak{D}_A} \frac{|f(x)|}{|x|} \geqq \sup_{x \in \mathfrak{D}_A} \frac{|f(x)|}{|x|} = |f|_{\mathfrak{D}_A}.$$

Az $\mathrm{A}^\dagger$ operátor tekinthető úgy, mint az $A^\dagger$ operátor folytatása az egész $\mathfrak{B}_2^\dagger$-re. Jelöljük $\hat{A}^\dagger$ és $\hat{\mathrm{A}}^\dagger$-vel az $A^\dagger$ és $\mathrm{A}^\dagger$ által megfelelően a $\mathfrak{D}_{A^\dagger}/\mathfrak{Z}_{A^\dagger}$ és $\mathfrak{B}_2^\dagger/\mathfrak{Z}_{A^\dagger}$ faktor-terekben indukált zárt operátorokat. Akkor az $\hat{\mathrm{A}}^\dagger$ operátor az $\hat{A}^\dagger$ operátor folytatása lesz.

Mivel az $\mathrm{A}^\dagger$ operátor normálisan feloldható, az $\hat{\mathrm{A}}^\dagger$ operátornak létezik korlátos inverze (l. 2. § 1. pont), azaz található olyan $m>0$, hogy

$$|\hat{\mathrm{A}}^\dagger \hat{f}|_{\mathfrak{D}_A} \geqq m|\hat{f}| \quad (\hat{f} \in \mathfrak{B}_2/\mathfrak{Z}_{A^\dagger}),$$

és ezért

$$|\hat{A}^\dagger \hat{f}|_{\mathfrak{B}_1} = |\hat{\mathrm{A}}^\dagger \hat{f}|_{\mathfrak{B}_1} \geqq |\hat{\mathrm{A}}^\dagger \hat{f}|_{\mathfrak{D}_A} \geqq m|\hat{f}| \quad (\hat{f} \in \mathfrak{D}_{A^\dagger}/\mathfrak{Z}_{A^\dagger}).$$

Innen az $\hat{A}^\dagger$ operátornak van korlátos inverze, ami a zártsággal együtt annak normális feloldhatóságát adja. Mivel az $\hat{A}^\dagger$ és $A^\dagger$ operátorok értékkészletei egybeesnek, így a lemmát bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Korlátos operátor esetében HAUSDORFF bebizonyította (amit már használtunk a 7.2. tétel bizonyítása közben), hogy megfordítva is, az $A^\dagger$ normális feloldhatóságából következik az A normális feloldhatósága.

Nem ismeretes számunkra, általánosítható-e ez az állítás tetszőleges zárt nem korlátos operátorra. Ha a $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ terek reflexívek, akkor ez az általánosítás lehetséges. A dolog abban áll, hogy ha $\mathfrak{B}_2$ reflexív, akkor, általánosítva I. NEUMANN (l. [30], IV. fejezet 46. pont) ismert „gráf-módszerét”, nem nehéz belátni, hogy $\mathfrak{D}_{A^\dagger}$ sűrű $\mathfrak{B}_2^\dagger$-ben.[10]

Ha a $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ reflexívek $((\mathfrak{B}_1^\dagger)^\dagger = \mathfrak{B}_1, (\mathfrak{B}_2^\dagger)^\dagger = \mathfrak{B}_2)$, akkor az $(A^\dagger)^\dagger$ operátor egybe fog esni A-val, ahonnan a 8.2. lemma miatt az $A^\dagger$ normális feloldhatóságából következni fog az A normális feloldhatósága. Reflexív $\mathfrak{B}_1$ és $\mathfrak{B}_2$ esetén nyilván mindig $\alpha_{A^\dagger} = \beta_A$, $\beta_{A^\dagger} = \alpha_A$.

8.3. LEMMA. *Legyen A a $\mathfrak{B}$-ben definiált és abban sűrű értelmezési tartománnyal rendelkező zárt operátor. Ha azonkívül az A operátor Φ_+- (vagy Φ_--) operátor, akkor létezik olyan $\varrho>0$ szám, hogy a $0<|\lambda|<\varrho$ egyenlőséget kielégítő összes λ komplex számokra az*

$$f(A-\lambda I) = 0 \quad (f \in \mathfrak{B}^\dagger) \tag{8.5}$$

egyenlet lineáris független megoldásainak a száma ugyanaz.[11]

[10] Az általános esetben csak azt lehet állítani hogy a $\mathfrak{D}_{A^\dagger}$ regulárisan zárt burka egybeesik $\mathfrak{B}_2^\dagger$-vel.

[11] Megjegyzés a korrektúrán. A cikk módszereit fejlesztve A. Sz. MARKUSznak sikerült a 8.3. lemmában megszabadulni a $\mathfrak{D}_A$-nak $\mathfrak{B}$-ben való sűrűségi megszorításától. Ezzel kapcsolatosan szükségtelenné válik ez a megkötés a 8.2. tétel második állításában is.

Bizonyítás. A 8.2. lemmának megfelelően, a 8.3. lemma feltételeinek teljesülése mellett az A operátornak létezik $A^\dagger$ konjugált operátora, amely amellett normálisan feloldható, és amelyre $\alpha_{A^\dagger}=\beta_A(<\infty)$.

Az $A^\dagger$ operátorra alkalmazható a 8.1. lemma. Másrészt nyilván

$$\beta_A(\lambda)=\alpha_{A^\dagger}(\lambda),$$

és mivel a (8.5) egyenlet ekvivalens az

$$(A^\dagger-\lambda I)f=0$$

egyenlettel, így innen következik a 8.3. lemma.

A bebizonyított lemmák segítségével és a 3.3. tétel bizonyításánál már használt módszerrel könnyűszerrel belátható a következő állítás:

8.2. TÉTEL. *Legyen A a $\mathfrak{B}$-ben definiált valamely zárt operátor, a G pedig az A Φ_+-halmazának valamely összefüggő komponense. Akkor az összes $\lambda\in G$ pontban, kivéve esetleg bizonyos izolált pontokat, az $\alpha_A(\lambda)$ függvény konstans*

$$\alpha_A(\lambda)=n$$

értéket vesz fel, az említett izolált pontokban pedig az értéke csak növekedhet.

Ha az A operátor értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{B}$-ben, akkor analóg állítás fogalmazható meg a $\beta_A(\lambda)$ függvény viselkedésére az A operátor $\mathfrak{B}_-$-halmazának tetszőleges összefüggő komponensében.

8.2. MEGJEGYZÉS. Legyen G a zárt A operátor Φ_+- (vagy Φ_--) halmazának valamely összefüggő komponense.

Akkor a 8.2. tétel szerint az összes $\lambda\in G$-re, kivéve esetleg izolált pontok valamely $\mathcal{E}$ halmazát, az $\alpha_A(\lambda)$ függvénynek ugyanaz az

$$\alpha_A(\lambda)=\dim\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}=n\quad(\alpha\in G\setminus\mathcal{E})$$

értéke, méghozzá a 8.1. megjegyzés szerint,

$$\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}\subset\mathfrak{M}_\lambda=\bigcap_{k=1}^{\infty}\mathfrak{R}_{A-\lambda I^k}.$$

A (8.2) képlet alapján a $\lambda\in\mathcal{E}$ pontokban

$$\dim(\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}\cap\mathfrak{M}_\lambda)=n,$$

viszont már

$$\alpha_A(\lambda)=\dim\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}>n.$$

Ha $n=0$, akkor $\mathcal{E}$ az A operátor összes sajátértékének (izolált) halmaza lesz G-ben. Mivel ezközben $\lambda\in\mathcal{E}$-ra teljesül. $\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}\cap\mathfrak{M}_\lambda=0$, így minden $\lambda\in\mathcal{E}$ sajátértékhez található olyan $k=k_\lambda$ természetes szám, hogy $\mathfrak{Z}_{A-\lambda I}\cap\mathfrak{R}_{(A-\lambda I)^k}=0$, és ezért, az annak megfelelő gyök-altér *véges dimenziós lesz.*

Megfordítva, *ha $n\neq 0$, akkor bármely $\lambda_0\in G$ számnak végtelen dimenziós gyökaltér felel meg.*

Valóban, legyen x_1 ($\neq 0$) tetszőleges $\mathfrak{Z}_{A-\lambda_0 I} \cap \mathfrak{M}_{\lambda_0}$-beli vektor. A 8.1. lemma bizonyítása során megmutattuk, hogy

$$A(\mathfrak{D} \cap \mathfrak{M})_{\lambda_0}) = \mathfrak{M}_{\lambda_0},$$

következésképp, található olyan végtelen $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}_{\lambda_0}$ sorozat, hogy

$$(A-\lambda_0 I)x_{n+1} = x_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Figyelembe véve az $(A-\lambda_0 I)x_1 = 0$ egyenlőséget, megjegyezzük, hogy a $\{x_n\}$ sorozat minden vektora olyan gyök-vektora az A operátornak, amely a λ_0 számnak felel meg, méghozzá az

$$(A-\lambda_0 I)^n x_n = 0, \quad (A-\lambda_0 I)^{n-1} x_n = x_1 \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

összefüggés miatt azok lineárisan függetlenek.

A 2. §. 5. pont következtetései könnyen elvezetnek az alábbi állításhoz.

8.3. TÉTEL. *Legyen A egy zárt operátor, B pedig tetszőleges A-teljesen folytonos operátor. Akkor az A és $A+B$ operátorok Φ_+-halmazai egybeesnek.*

9. §. Reguláris típusú pontok és tételek a Hermite-féle operátorok perturbációjáról

1. Legyen A a $\mathfrak{B}$ *Banach*-térben értelmezett tetszőleges lineáris operátor. A komplex sík λ_0 pontját *reguláris típusú pontnak* nevezzük az A operátorra nézve, ha található olyan m_{λ_0} pozitív szám, hogy

$$|(A-\lambda_0 I)x| \geqq m_{\lambda_0}|x| \quad (x \in \mathfrak{D}_A).$$

Ha az A operátor zárt, akkor nyilván a λ_0 pont reguláris típusú lesz az A-ra nézve akkor és csakis akkor, ha az

$$(A-\lambda_0 I)x = 0$$

egyenletnek egyetlen nulla megoldása van, és az $A-\lambda_0 I$ operátor normálisan feloldható.

Megjegyezzük, hogy lehetségesek olyan esetek, amikor az operátornak vannak reguláris típusú pontjai, ugyanakkor nincs lezártja.

9.1. TÉTEL. *Legyen λ_0 az A lineáris operátor reguláris típusú pontja. Akkor található olyan ϱ pozitív szám, hogy bármilyen legyen is a $\mathfrak{B}$-ben definiált lineáris korlátos B operátor, a λ_0 reguláris típusú pontja lesz az $A+B$ operátornak is, méghozzá*

$$\beta_{A+B} = \beta_A.$$

Megjegyezzük, hogy ha feltételeznénk, hogy az A operátor zárt, akkor ez a tétel benne volna a 7.1. tételben.

Bizonyítás. Valóban, feltétel szerint az összes $x \in \mathfrak{D}_A$-re fennáll az

$$|(A-\lambda_0 I)x| \geqq m_{\lambda_0}|x|$$

egyenlőtlenség.

Legyen $\varphi = m_{\lambda_0}/3$[12] és $|B| < \varrho$. Akkor

$$|(A+B-\lambda_0 I)x| \geqq (m_{\lambda_0} - |B|)|x|.$$

Következésképp, λ_0 reguláris típusú pont az $A+B$ operátorra nézve.

Ezenkívül a nyilvánvaló

$$|(A+B-\lambda_0 I)x-(A-\lambda_0 I)x| \leqq \frac{1}{3}|(A-\lambda_0 I)x|$$

egyenlőtlenségek és

$$|(A-\lambda_0 I)x-(A+B-\lambda_0 I)x| \leqq \frac{3|B|}{2m_{\lambda_0}}|(A+B-\lambda_0 I)x| \quad (x \in \mathfrak{D}_A)$$

miatt azt kapjuk, hogy

$$\theta(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2) < 1/2,$$

ahol $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_{A-\lambda_0 I}$ és $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_{A+B-\lambda_0 I}$.

Alkalmazva $\mathfrak{R}_1$ és $\mathfrak{R}_2$-re a 6.3. tételt, azt kapjuk, hogy

$$\dim \mathfrak{R}_1^{\perp} = \dim \mathfrak{R}_2^{\perp},$$

azaz

$$\beta_{A+B-\lambda_0 I} = \beta_{A-\lambda_0 I}.$$

A bebizonyított tételből speciálisan az is következik, hogy a tetszőleges A lineáris operátor összes reguláris típusú pontjainak az összessége nyílt halmazt alkot. Valóban, ha λ_0 az A operátor reguláris típusú pontja, akkor az $|\lambda-\lambda_0| < m_{\lambda_0}/3$ kör összes λ pontja szintén reguláris típusú pontja ennek az operátornak.

A 9.1. tételből közvetlenül adódik a

9.2. TÉTEL. *Az A operátor reguláris típusú pontjai halmazának bármely összefüggő komponensében a $\beta_A(\lambda)$ függvény ugyanazt az értéket veszi fel.*

2. Ismertetjük a bizonyított tételek néhány alkalmazását a *Hermite*-féle operátorok elméletében.

Legyen H a $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben definiált tetszőleges *Hermite*-féle operátor, azaz H olyan lineáris operátor, hogy

$$(Hx, y) = (x, Hy) \quad (x, y \in \mathfrak{D}_H).$$

Az általánosan elfogadott definíciótól eltérően mi nem követeljük meg a *Hermite*-féle operátortól $\mathfrak{D}_H$ értelmezési tartományának sűrűségét $\mathfrak{H}$-ban.

Az összes nem valós λ pont reguláris típusú pontja a H operátornak, ugyanis mint ismeretes,

$$(9.1) \qquad |(H-\lambda I)x| \geqq |\operatorname{Im} \lambda||x| \quad (x \in \mathfrak{D}_H).$$

[12] Abban az esetben, ha $\beta_A(\lambda_0)$ véges, feltehető $\varrho = m_{\lambda_0}/2$.

Következésképp, a H operátor összes reguláris típusú pontjainak a halmaza két összefüggő komponensből áll (felső és alsó félsíkból), ha a valós tengelyen nincs egyetlen reguláris típusú pontja sem a H operátornak; és egyetlen komponensből áll ellenkező esetben.

A 9.2. tételből következik, hogy a felső félsík minden λ pontjára a $\beta_H(\lambda)$ ugyanazt az értéket veszi fel: $\beta_H(\lambda)=m(\mathrm{Im}\,\lambda>0)$, és az alsó félsík minden λ pontjára $\beta_H(\lambda)=n$ $(\mathrm{Im}\,\lambda<0)$.

Az (m, n) rendezett számpárt a H operátor *defektus párjának*[13] fogjuk nevezni. Nyilvánvaló, hogy ha a H operátornak van legalább egy valós reguláris típusú pontja, akkor $m=n$.

9.3. TÉTEL. *Ha B egy korlátos önadjungált operátor, akkor a Hermite-féle H és $H+B$ operátorok defektus párjai egybeesnek.*

Bizonyítás. Valóban, legyen λ_0 az $|\mathrm{Im}\,\lambda_0|>3|B|$ egyenlőtlenséget kielégítő komplex szám.

Akkor a 9.1. tétel miatt

$$\beta_{H+B}(\lambda_0)=\beta_H(\lambda_0)=m, \quad \beta_{H+B}(\bar\lambda_0)=\beta_H(\bar\lambda_0)=n.$$

A tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. A 9.3. tétel érvényben marad, ha feltételeit a következőkkel cseréljük fel: H egy zárt *Hermite*-féle operátor, B pedig egy H-teljesen folytonos *Hermite*-féle operátor. A megjegyzés jogossága következni fog az alábbi általános tételből.

9.4. TÉTEL. *Legyen H egy zárt Hermite-féle operátor, B pedig egy tetszőleges H-teljesen folytonos operátor. Akkor az összes nem valós pontok, kivéve, esetleg bizonyos izolált pontokat, a $H+B$ operátor reguláris típusú pontjai lesznek, és azokban a H és $H+B$ operátorok defektus számai egybe fognak esni.*

Az említett izolált pontokban pedig a

$$(H+B-\lambda I)\varphi=0$$

egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma véges, méghozzá

$$\beta_{H+B}(\lambda)-\alpha_{H+B}(\lambda)=\beta_H(\lambda).$$

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy a 3.4. és 8.3. tételek szerint a $H+B$ és H operátorok Φ_--halmazai, ugyanígy a Φ_+-halmazai is, egybeesnek. Tehát csak azt kell bizonyítani, hogy létezik olyan λ_0 pont, amely a $\bar\lambda_0$ ponttal együtt a $H+B$ operátor reguláris típusú pontja.

Emlékeztetünk arra, hogy — a *Najmark—Krasznoszelszkij*- ([40], [41], [42]) tétel szerint — bármely zárt *Hermite*-féle operátornak létezik a térből kivezető önadjungált bővítése, azaz létezik olyan $\tilde{\mathfrak{H}}$ *Hilbert*-tér, amely tartalmazza a $\mathfrak{H}$-t, és abban olyan $\tilde{\mathfrak{H}}$ önadjungált operátor, amely a H-nak folytatása.

[13] Ez a terminológia különbözik a *Hermite*-féle operátorok elméletében elfogadottól, amely szerint az (m, n) párt a H operátor *defektus indexének* nevezik.

Vezessünk be a $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$-ban egy új skalárszorzatot

$$[f, g] = (f, g)+(\tilde{H}f, \tilde{H}g),$$

és ennek megfelelően új normát

$$|f|_{\tilde{H}}=[f, f]^{1/2} \quad (f \notin \mathfrak{D}_{\tilde{H}}), \tag{9.2}$$

amely topológiailag ekvivalens a

$$|f| = |f|+|\tilde{H}f| \quad (f \in \mathfrak{D}_{\tilde{H}})$$

normával.

Ezek után a $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$ teljes *Hilbert*-térré válik (l. 2. § 5. pont).

A $\mathfrak{D}_H$ lineáris sokaság a $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$ zárt lineáris altere a (9.2) metrikában. Jelöljük $\mathfrak{N}$-nel a $\mathfrak{D}_H$-hoz ortogonális alteret $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$-ban. Definíció szerint (l. 2. § 5. pont), a B operátor H-teljes folytonossága azt jelenti, hogy B definiálva van az egész $\mathfrak{D}_H$ altéren, és abban teljesen folytonos a (9.2) metrikában.

Folytatjuk a B operátort az egész $\mathfrak{D}_{\tilde{H}}$ térre, feltételezve, hogy

$$\tilde{B}(f+g) = Bf \quad (f \in \mathfrak{D}_H, \ g \in \mathfrak{N}).$$

Nyilvánvaló, hogy az így keletkező $\tilde{B}$ operátor zárt a $\tilde{\mathfrak{H}}$-ban és $\tilde{H}$-teljesen folytonos. Ebben az esetben, amint azt az 5.1. tétel bizonyítása során már megmutattuk,

$$\lim_{\eta \to \infty} |\tilde{B}\tilde{R}_{i\eta}| = 0,$$

ahol $\tilde{R}_{i\eta}$ a $\tilde{H}$ operátor rezolvense: $\tilde{R}_{i\eta}=(\tilde{H}-i\eta I)^{-1}(\eta>0)$.

Jelöljük λ_0-val az $i\eta$ számot, ahol η-t olyan nagynak vettük, hogy

$$|\tilde{B}\tilde{R}_{\lambda_0}| = q < 1, \quad |\tilde{B}\tilde{R}_{\bar{\lambda}_0}| < 1.$$

Legyen most $f=\tilde{R}_{\lambda_0}g$ tetszőleges $\mathfrak{D}_H$-beli elem. Akkor

$$|Bf| = |B\tilde{R}_{\lambda_0}g| \leqq q|g| = q|(H-\lambda_0 I)g|,$$

azaz

$$|Bf| \leqq q|(H-\lambda_0 I)g|.$$

Ilyen módon

$$|(H+B-\lambda_0 I)f| \geqq (1-q)|(H-\lambda_0 I)f| \geqq (1-q)m_{\lambda_0}|f|, \quad (f \in \mathfrak{D}_H),$$

és ezért a λ_0 pont a $H+B$ operátor reguláris típusú pontja. Analóg módon bizonyítható, hogy a $\bar{\lambda}_0$ pont is reguláris típusú pont a $H+B$ operátorra nézve.

A tételt bebizonyítottuk.

9.1. Megjegyzés. A tétel feltételei teljesülnek, ha B egy tetszőleges korlátos operátor, H-nak pedig létezik diszkrét spektrummal rendelkező önadjungált folytatása.

Valóban, legyen a $\tilde{H}$ a H *Hermite*-féle operátornak olyan folytatása, amely diszkrét spektrummal rendelkezik, és legyen λ_0 a H operátor valamely valós reguláris pontja. Akkor az $\tilde{R}_{\lambda_0}=(\tilde{H}-\lambda_0 I)^{-1}$ operátor teljesen folytonos, és ezért a $B\tilde{R}_{\lambda_0}$ szorzat is olyan lesz. Utóbbi magával vonja a B operátor H-teljes folytonosságát.

9.2. MEGJEGYZÉS. A 9.4. tétel feltételei teljesülnek, ha B egy tetszőleges korlátos operátor, H pedig véges defektuspárral rendelkező olyan *Hermite*-féle operátor, amelyre minden valós pont reguláris típusú.

Valóban, ebben az esetben tetszőleges valós λ_0-hoz található olyan $m_{\lambda_0} > 0$, hogy

$$|(H-\lambda_0 I)f| \geqq m_{\lambda_0}|f| \quad (f \in \mathfrak{D}_H).$$

A [43] terminológiáját használva azt mondhatjuk, hogy a

$$\lambda_0 - m_{\lambda_0} < \lambda < \lambda_0 + m_{\lambda_0} \tag{9.3}$$

intervallum a H operátorra nézve *spektrál hézag*. A H operátor bármely önadjungált folytatásának a (9.3) intervallumban nem lehet több mint m sajátértéke (l. [43], 7. §).

A λ_0 pont tetszőleges volta miatt leszögezhetjük, hogy az operátor bármely önadjungált folytatásának a spektruma diszkrét, tehát, a 9.1. megjegyzés alapján a B operátor H-teljesen folytonos.

9.3. MEGJEGYZÉS. Ha a B operátor olyan, hogy

$$\operatorname{Im}(Bf, f) \geqq 0 \quad (f \in \mathfrak{D}_H),$$

akkor az összes olyan nem valós pont, amelyben a

$$(H+B-\lambda I)\varphi = 0$$

egyenletnek van nullától különböző megoldása, a felső síkon helyezkedik el. Következésképp, az egész alsó félsík a $H+B$ operátor reguláris típusú pontjaiból áll.

9.4. MEGJEGYZÉS. Ha a H *Hermite*-féle operátor maximális, például $m=0$, a B pedig H-teljesen folytonos operátor, akkor a $H+B$ operátor egész spektruma a felső félsíkban izolált olyan sajátértékekből áll, amelyeknek véges dimenziós normálisan leválasztható gyök-alterek felelnek meg.

10. §. Alkalmazás a Wiener—Hopf-típusú félegyenesen adott integrálegyenletekhez

1. Ebben a paragrafusban illusztrálni fogunk egy sor bizonyított általános tételt az

$$\int_0^\infty k(t-s)g(s)\,ds - g(t) = f(t) \quad (0 \leqq t < \infty)$$

alakú integrálegyenleteken, megfelelő típusú egyenletrendszerekben, és utóbbiak esetében néhány új tényt állapítunk meg.

Egyszerűség kedvéért először a függvények alapereként az

$$|f|_{\mathfrak{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

módon definiált normájú összes komplex mérhető abszolút integrálható $f(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ függvények $\mathfrak{C}=L_1(-\infty, \infty)$ terét fogjuk tekinteni.

Mint ismeretes, $\mathfrak{C}$ tekinthető teljes kommutatív normált gyűrűnek, ha abban két f_1 és f_2 elem szorzatát a következő szabállyal definiáljuk

$$f=f_1*f_2, \quad \text{azaz} \quad f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-s)f_2(s)\,ds=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)f_2(t-s)\,ds \quad (-\infty<t<\infty).$$

Ha most minden $k(t)\in\mathfrak{C}$ függvénynek megfeleltünk a $\mathfrak{C}$-ben értelmezett valamely K operátort a

$$Kg(t)=\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)g(s)\,ds=(k*g)(t)$$

képlettel, akkor annak normája, amint könnyen belátható, egybeesik a k normájával.

$$|K|=|k|_{\mathfrak{C}}.$$

Ilyen módon, a $k\to K$ leképezés izomorfizmus lesz, és a $\mathfrak{C}$ gyűrű izometrikus leképezése a $\mathfrak{C}$-ben definiált operátorok valamely $\mathfrak{R}$ kommutatív gyűrűjébe.

Feltételezve, hogy $k\in\mathfrak{C}$ és $f\in\mathfrak{C}$, először megvizsgáljuk a $\mathfrak{C}$ osztályban a

$$Kg-g=f \tag{10.1}$$

egyenletet.

Alkalmazva a *Fourier*-transzformációt a (10.1) egyenlőség mindkét oldalára, azt kapjuk, hogy

$$(\mathscr{K}(\xi)-1)\mathscr{G}(\xi)=\mathscr{F}(\xi) \quad (-\infty<\xi<\infty), \tag{10.2}$$

ahol a $\mathfrak{C}$-beli függvények *Fourier*-transzformáltját a megfelelő írott betűvel jelöljük, úgy hogy, például:

$$\mathscr{K}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}k(t)\,dt \quad (-\infty<\xi<\infty).$$

Ha teljesül a

$$\mathscr{K}(\xi)-1\neq 0 \quad (-\infty<\xi<\infty) \tag{10.3}$$

feltétel, akkor WIENER [32] ismert tétele szerint található olyan $q\in\mathfrak{C}$ függvény, hogy

$$[\mathscr{K}(\xi)-1]^{-1}=\mathscr{Q}(\xi)-1=-1+\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}q(t)\,dt \quad (-\infty<\xi<\infty).$$

Akkor a (10.2)-ből kapjuk, hogy

$$\mathscr{G}(\xi)=[\mathscr{K}(\xi)-1]^{-1}\mathscr{F}(\xi)=[\mathscr{Q}(\xi)-1]\mathscr{F}(\xi) \quad (-\infty<\xi<\infty),$$

vagy, ami ezzel ekvivalens,

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} q(t-s)f(s)\,ds-f(t) \quad (-\infty<t<\infty). \tag{10.4}$$

Könnyen belátható, hogy megfordítva, tetszőleges $f \in \mathfrak{C}$ esetén a (10.4) képlettel előállított g függvény a (10.1) egyenlet megoldása lesz.

Ilyen módon a (10.3) feltétel teljesítése mellett a $\lambda = 1$ pont a K operátor reguláris pontja. Másrészt, ha valamely valós ξ_0-ra

$$\mathscr{K}(\xi_0) - 1 = 0,$$

akkor, kiválasztva $f_0 \in \mathfrak{C}$-t, úgy, hogy $\mathscr{F}_0(\xi_0) \neq 0$, a (10.2)-ből leszögezhetjük, hogy $f = f_0$ mellett a (10.1) egyenletnek nem lesz $\mathfrak{C}$ osztálybeli megoldása. Következésképp, ebben az esetben a $\lambda = 1$ pont a K operátor spektrumához fog tartozni.

Alkalmazva a kapott eredményt a $\lambda_0^{-1} K$ $(\lambda_0 \neq 0)$ operátorra, azt találjuk, hogy a λ_0 pont a K operátor spektrumának a pontja abban és csakis abban az esetben, ha az a

$$\lambda = \mathscr{K}(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

komplex λ-sík Γ görbéjére illeszkedik.

Mivel a K operátor S_K spektruma zárt, így a $0 = \lim_{\xi \to \pm\infty} \mathscr{K}(\xi)$ pont mindig benne van a K operátor spektrumában.

Ilyen módon, a $\lambda = 0$ pontot a Γ görbéhez csatolva, az ilyen módon mindig zárt lesz, és így állíthatjuk, hogy

1°. A K operátor spektruma egybeesik a Γ görbe pontjainak a halmazával.

Ezt az állítást kiegészíthetjük a következővel:

2°. Az S_K spektrum egyetlen pontja sem Φ — vagy $\Phi_\pm$ — pont a K operátorra nézve.

Ezt az állítást elegendő bizonyítani az S_K spektrum olyan pontjaira, amelyek véges ξ-knek felelnek meg.

Tételezzük fel, hogy a Γ görbe valamely $\lambda_0 = K\ (\xi_0)$ $(-\infty < \xi_0 < \infty)$ pontja Φ- vagy $\Phi_\pm$-pontja a K operátornak.

Először feltételezzük, hogy a Γ sima görbe. Akkor a λ_0 tetszőleges környezetében léteznek olyan pontok, amelyek nem tartoznak a Γ-hoz, azaz a K operátor reguláris pontjai. Következésképp, a 2.4. és 7.1. tételek alapján állíthatjuk, hogy létezik olyan $\varrho > 0$, hogy az „átlyukasztott" $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varrho$ kör összes pontja reguláris pontja a K operátornak.

Másrészt, ez az átlyukasztott kör a folytonos Γ görbe végtelen sok pontját fogja tartalmazni, vagyis az S_K spektrumát. Ellentmondáshoz jutottunk.

Tekintsük most az általános esetet, amikor a Γ görbe viselkedését semmilyen újabb követelmény nem korlátozza.

A 2.4., 7.1., 7.2. tételek miatt minden esetben található olyan $\delta > 0$, hogy bármely K_1 lineáris korlátos olyan operátor esetében, amely eleget tesz a

$$|K - K_1| < \delta$$

feltételnek, a λ_0 pont Φ-, vagy $\Phi_\pm$-pont.

Legyen

$$k_N(t) = \begin{cases} k(t), & \text{ha} \quad |t| < N, \\ 0, & \text{ha} \quad |t| \geqq N, \end{cases}$$

és tekintsük a $k_N(t)$ függvénynek megfelelő K_N operátort.

Nyilvánvaló, hogy elég nagy N esetén

$$|K-K_N| = \Big(\int_{-\infty}^{-N} + \int_{N}^{\infty}\Big)|k(t)|\,dt < \frac{\delta}{2}. \tag{10.5}$$

Mivel a

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} k_N(t)\,dt = \int_{-N}^{N} e^{i\xi t} k(t)\,dt \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

görbe analitikus, ezért a már bizonyítottak szerint a

$$\lambda_0' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi_0} k_N(t)\,dt$$

pont a K_N operátor spektrumának olyan pontja lesz, amely nem tartozik annak Φ-, vagy $\Phi_\pm$-halmazához, és ezért, a λ_0 pont nem fog a

$$K' = K_N + (\lambda - \lambda_0')I$$

operátor Φ-, vagy $\Phi_\pm$-halmazához tartozni.

Másrészt a (10.5)-nek megfelelően

$$|\lambda_0 - \lambda_0'| < \delta/2$$

és

$$|K-K'| \leqq |K-K_N| + |\lambda_0 - \lambda_0'| < \delta.$$

Ellentmondáshoz jutottunk.

2. Jelöljük $\mathfrak{C}_+$-szal az $L_1(0, \infty)$ teret. Bármely $k \in \mathfrak{C}$ függvényhez hozzá fogunk rendelni két operátort:

$$K_{11} g(t) = \int_0^{\infty} k(t-s) g(s)\,ds,$$

$$K_{12} g(t) = \int_0^{\infty} k(t+s) g(s)\,ds,$$

amelyek $\mathfrak{C}_+$-t önmaga részébe képezik le. Nem nehéz belátni, hogy a K_{11} és K_{12} operátorok korlátosak, mégpedig

$$|K_{11}| = |k|_{\mathfrak{C}} \quad \text{és} \quad |K_{12}| \leqq \int_0^{\infty} |k(t)|\,dt.$$

Kiderül, hogy ezen kívül:

3°. A K_{12} operátor teljesen folytonos.

Valóban, ha $f = K_{12} g$ $(g \in \mathfrak{C}_+)$, akkor

$$\int_0^{\infty} |f(t+h) - f(t)|\,dt \leqq \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |k(t+s+h) - k(t+s)||g(s)|\,ds\,dt \leqq$$

$$\leqq |g|_{\mathfrak{C}_+} \int_{-\infty}^{\infty} |k(t+h) - k(t)|\,dt \quad (h > 0).$$

Ilyen módon, a K_{12} operátor az $|g|_{\mathfrak{C}_+}=1$ egység szférát egy olyan $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{C}_+$ korlátos halmazba képezi le, amelyre tetszőleges $\varepsilon>0$-nak megfelel egy olyan $\delta>0$, hogy $0\leqq h<\delta$ esetén

$$\int_0^\infty |f(t+h)-f(t)|\,dt<\varepsilon \quad (f\in\mathfrak{E}).$$

Mivel, ezen kívül, elég nagy N-re az összes $f\in\mathfrak{E}$ esetén fennáll az

$$\int_N^\infty |f(t)|\,dt \leqq \int_{-N}^\infty \int_0^\infty |k(t+s)||\varphi(s)|\,ds \leqq \int_N^\infty |k(t)|\,dt<\varepsilon$$

egyenlőtlenség, ezért RIESZ FRIGYES [34] ismert kompaktsági kritériuma szerint az $\mathfrak{E}$ halmaz kompakt a $\mathfrak{C}_+$-ban. A 3° állítást bebizonyítottuk.

4°. Bármely olyan pont, amely nincs rajta a Γ görbén, a K_{11} operátor Φ-pontja.

Valóban, ha $\lambda_0\notin\Gamma$, akkor λ_0 a $\mathfrak{C}$ térben difiniált K operátor reguláris pontja.

Tekintsük, másrészt azt a $\mathfrak{C}_+''$ teret, amely az $f_j\in\mathfrak{C}_+$ $(j=1,2)$ koordinátájú kétdimenziós $f(t)=\{f_1(t),f_2(t)\}$ vektor-függvényekből áll, a norma következő definíciója mellett:

$$|f|=|f_1|_{\mathfrak{C}_+}+|f_2|_{\mathfrak{C}_+}=\int_0^\infty (|f_1(t)|+|f_2(t)|)\,dt.$$

A $\mathfrak{C}_+''$ tér ekvivalens a $\mathfrak{C}$ térrel a következő izomorfizmus miatt: bármely $f\in\mathfrak{C}$-hez hozzá van rendelve egy $f\in\mathfrak{C}_+''$ az

$$f_1(t)=f(t),\quad f_2(t)=f(-t)\quad (0\leqq t<\infty)$$

törvény szerint.

Ezen ekvivalencia miatt a K operátor felfogható $\mathfrak{C}_+''$-ben definiált operátorként, miközben ha

$$f=Kg,$$

akkor

$$\left\{\begin{aligned} f_1(t)&=\int_0^\infty k(t-s)g_1(s)\,ds+\int_0^\infty k(t+s)g_2(s)\,ds,\\ f_2(t)&=\int_0^\infty k(-t-s)g_1(s)\,ds+\int_0^\infty k(s-t)g_2(s)\,ds,\end{aligned}\right. \tag{10.6}$$

vagy, egyszerűsített írásmódban

$$\begin{cases} f_1=K_{11}g_1+K_{12}g_2\\ f_2=K_{21}g_1+K_{22}g_2,\end{cases}$$

vagy még másként

$$K=\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{pmatrix}.$$

A K operátorral párhuzamosan tekintsük még a

$$D=\begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix} 0 & K_{12} \\ K_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

egyenlőségekkel definiált D és T operátorokat.

A K_{22} operátornak a magja a K_{11} operátor magjának a transzponáltja. A K_{21} operátor ugyanolyan típusú, mint a K_{12} operátor. Nyilvánvaló, hogy a 3° állítás miatt, a T operátor teljesen folytonos.

Következésképp a D és K operátorok Φ-halmazai egybeesnek. Ezért, ha $\lambda_0 \notin \Gamma$, akkor, lévén az az 1° állítás miatt a K operátor reguláris pontja, egyben a D operátor Φ-pontja lesz $\varkappa_D(\lambda_0)=0$ indexszel.

Mivel pedig a D operátor a K_{11} és K_{22} operátorok direktösszege, amely operátorok mindegyike $\mathfrak{C}_+$ térben definiált, így a λ_0 a K_{11} és K_{22} operátorok mindegyikének szintén Φ-pontja lesz, miközben

$$\varkappa_D(\lambda_0) = \varkappa_{K_{11}}(\lambda_0)+\varkappa_{K_{22}}(\lambda_0) = 0.$$

A 4° állítást bebizonyítottuk.

Bizonyos analitikus eszközöket felhasználva, pontosabb állítást is megfogalmazhatunk (l. [44]).

5°. Ha a λ_0 pont nincs rajta a Γ görbén, akkor az nem Φ-pontja a K_{11} operátornak

$$\varkappa(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\xi \arg\left(\mathscr{K}(\xi)-\lambda_0\right)$$

indexszel, eközben, ha $\varkappa=\varkappa(\lambda_0)\geqq 0$, akkor a $K_{11}-\lambda_0 I$ operátor d-karakterisztikája $(0, \varkappa)$ alakú, ha pedig $\varkappa<0$, akkor a $K_{11}-\lambda_0 I$ operátor d-karakterisztikája $(-\varkappa, 0)$ alakú.

Ilyen módon, ha $\varkappa(\lambda_0)<0$, akkor a

$$\int_0^\infty k(t-s)g(s)\,ds-\lambda_0 g(t) = f(t) \tag{10.7}$$

inhomogén egyenlet tetszőleges $f\in L_1^-(0, \infty)$ esetén megoldható az $L_1(0, \infty)$ osztályban, miközben a homogén

$$\int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\,ds-\lambda_0\varphi(t) = 0 \tag{10.8}$$

egyenletnek ugyanabban az osztályban pontosan $-\varkappa(\lambda_0)$ lineárisan független megoldása lesz. Ha viszont $\varkappa(\lambda_0)>0$, akkor a homogén

$$\int_0^\infty k(s-t)\psi(s)\,ds-\lambda_0\psi(t) = 0 \tag{10.9}$$

egyenletnek pontosan $\varkappa(\lambda_0)$ lineárisan független ψ_j $(j=1, 2, \ldots, \varkappa)$ megoldása lesz, a (10.7) inhomogén egyenletnek pedig akkor és csakis akkor fog létezni $g\in \in L_1(0, \infty)$ megoldása, ha teljesülni fognak a

$$\int_0^\infty f(s)\psi_j(s)\, ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

feltételek.

Ezen feltételek teljesülése mellett a $g\in L_1(0, \infty)$ megoldás egyetlen lesz.

Meg lehet mutatni [44], hogy a (10.8) és (10.9) egyenletek mindegyikének ugyanazok a megoldásai úgy az $L_1(0, \infty)$-ben, mint a konjugált $M(0, \infty)$ térben (az összes korlátos mérhető függvények terében). Mivel pedig a K_{11} operátor bármely korlátos függvényt folytonosba visz át, így a (10.8) és (10.9) egyenletek említett megoldásai folytonos függvények. [14]

Amíg a K operátor spektruma a Γ görbe pontjainak a halmazából áll, a K_{11} operátor spektruma a Γ görbe pontjainak a halmazából és Φ-pontok olyan egész tartományaiból áll, amelyeket a Γ görbe hurkai határolnak.

A komplex térben a Γ halmaz által kimetszett különböző tartományok indexének a meghatározása során szerepet játszhat az, hogyan futja be azt a $\lambda=\mathscr{K}(\xi)$ pont, amint a ξ befutja a $(-\infty, \infty)$ intervallumot.

Az 1. és 2. ábrán két különböző olyan Γ_1 és Γ_2 görbét mutatunk be, amelyek pontjainak a halmazai egybeesnek, viszont amelyeknek a komplex térnek különböző Φ-komponensekre való felbontása felel meg.

A Φ-komponensekben számokkal jelöltük azok indexét.

10.1. Megjegyzés. Legyen most $\mathfrak{C}_+$ a következő terek egyike:

$$(10.10) \qquad L_p(0, \infty)\ (p \geqq 1), \quad M(0, \infty), \quad M_C(0, \infty), \quad C(0, \infty), \quad C_0(0, \infty),$$

ahol $M_C(0, \infty)\,(\subset M(0, \infty))$ — az összes folytonos korlátos $f(t)$ $(0\leqq t<\infty)$ függvények tere, $C(0, \infty)$ pedig az összes olyan folytonos $f(t)$ $(0\leqq t<\infty)$ függvények tere, amelyek határértéke $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, és végül, $C_0(0, \infty)$ a $C(0, \infty)$ olyan része, amely az $f(\infty)=0$ egyenlőségnek eleget tevő függvényekből áll.

Könnyű belátni, hogy a (10.6) és (10.7) egyenlőségek ezen terek bármelyikében korlátos operátorokat határoznak meg, méghozzá a második közülük teljesen folytonos. Eközben szem előtt kell tartani azt, hogy az $L_p(0, \infty)\,(p>1)$ tér esetében a (10.6) és (10.7) intervallumokat úgy kell érteni, mint az

$$\int_0^N k(t-s)g(s)\, ds, \qquad \int_0^N k(t+s)g(s)\, ds$$

integrálok határértékét $N\to\infty$ mellett az $L_p(0, \infty)$ metrikájában.

Kiderül [44], hogy a 4° és 5° állítások és az utánuk következők teljes mértékben érvényben maradnak, ha a $\mathfrak{C}_+$ tér helyett a (10.10) terek egyikét vesszük.

[14] Sőt, meg lehet mutatni [44], hogy ha $\varkappa=\varkappa(\lambda_0)<0$, akkor a (10.8) egyenlet megoldásaihoz konstruálható abszolút folytonos $\varphi_1, \ldots, \varphi_\varkappa$ függvényekből olyan bázis, hogy

$$\varphi_{j+1} = \frac{d}{dt}\varphi_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa+1).$$

A $\mathfrak{C}_+ = L_2(0, \infty)$ térben a (10.7) egyenletet először J. M. RAPOPORT [31] vizsgálta, aki, más módszerekkel, és a $k(t)$ függvényekre tett bizonyos pótlólagos megszorítások mellett, bebizonyította erre az 5° állítást (l. úgyszintén a [62]).

3. Részletesen foglalkoztunk a (10.7) skaláris egyenletre vonatkozó egész sor eredmény levezetésével (amelyet bizonyos analitikus apparátus segítségével részletesebben is meg lehet vizsgálni), azzal a céllal, hogy egy egyszerű eseten illusztráljuk azokat az általános eredményeket, amelyek eredményben maradnak a (10.7) típusú integrál egyenletek rendszereire is, ha az említett analitikus apparátus alkalmazhatatlanná válik.

Tekintsük most az egyszerűsített formában

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)g(s)\,ds - \lambda g(t) = f(t) \quad (-\infty < t < \infty) \tag{10.11}$$

alakban leírt integrál egyenlet rendszert, ahol

$$k(t) = \|k_{jl}(t)\|_1^n \quad (-\infty < t < \infty)$$

egy matrix $L_1(-\infty, \infty)$-beli elemekkel, a g és f valamely n-dimenziós vektorfüggvények $L_1(-\infty, \infty)$-beli koordinátákkal.

Az utóbbi vektor-függvények terét $\overset{n}{\mathfrak{C}}$-el fogjuk jelölni, feltéve

$$|f|_{\mathfrak{C}}^n = |f_1|_{\mathfrak{C}} + |f_2|_{\mathfrak{C}} + \ldots + |f_n|_{\mathfrak{C}}.$$

Részletesen leírva a (10.11) rendszer így néz ki:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} k_{je}(t-s)g_e(s)\,ds - \lambda g_j(t) = f_j(t) \quad (j = 1, \ldots, n; \; -\infty < t < \infty).$$

Amint a skaláris esetben is (feltételezve először $\lambda = 1$-et), alkalmazzuk a (10.11) egyenletre a *Fourier*-transzformációt, és azt kapjuk, hogy

$$[\mathscr{K}(\xi) - 1]\mathscr{G}(\xi) = \mathscr{F}(\xi), \quad (-\infty < \xi < \infty), \tag{10.12}$$

ahol

$$\mathscr{K}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{i\xi t}\,dt = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} k_{je}(t)e^{i\xi t}\,dt \right\|_1^n \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

matrix-függvény, a $\mathscr{G}(\xi)$ és $\mathscr{F}(\xi)$ pedig vektor-függvények:

$$\mathscr{G}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\xi t}\,dt, \quad \mathscr{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\xi t}\,dt.$$

Ha $\det(\mathscr{K}(\xi) - I_n) \neq 0$, akkor, használva WIENER említett tételét, azt állíthatjuk, hogy létezik olyan

$$q(t) = \|q_{je}(t)\|_1^n \quad (-\infty < t < \infty)$$

matrix, hogy

$$(\mathscr{K}(\xi) - I_n)^{-1} = \mathscr{Q}(\xi) - I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} q(t)\,dt \quad (-\infty < \xi < \infty),$$

akkor pedig a (10.12)-ből azt kapjuk, hogy

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t-s)f(s)\,ds - f(t) \quad (-\infty < t < \infty).$$

K-n most a $\overset{n}{\mathfrak{C}}$-ben definiált olyan korlátos operátort értve, amelyet a

$$Kg = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)g(s)\,ds$$

egyenlőség határoz meg, nem nehéz arra bebizonyítani az 1°-el analóg állítást.

1′. A K operátor spektruma egybeesik az összes olyan pontok halmazával, amelyekre

$$\Delta(\xi;\lambda) = \det\big(\mathscr{K}(\xi) - \lambda I_n\big) = 0$$

valamely ξ $(-\infty \leqq \xi < \infty)$ esetén.

A K operátorra érvényes marad az ugyanolyan okoskodással bizonyított 2° állítás.

Legyen $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$ az n-dimenziós olyan $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ függvények tere, amelyek komponensei a $\mathfrak{C}_+$-ból valók. Az előbbieknek megfelelően K_{11}-el jelölve a

$$K_{11}g = \int_0^{\infty} k(t-s)g(s)\,ds$$

operátort, ahol $g \in \overset{n}{\mathfrak{C}}_+$, az $n=1$ esetben felhasznált fejtegetésekhez teljesen hasonlóan be lehet látni a következő állítás részét.

10.1. Tétel. *Legyen $\lambda(\neq 0)$ a komplex sík olyan pontja, hogy*

$$\Delta(\xi;\lambda) \neq 0 \quad (-\infty < \xi < \infty). \tag{10.13}$$

Akkor λ a K_{11} operátor Φ-pontja és indexe kiszámítható a

$$\varkappa_{K_{11}}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d_\xi \arg \Delta(\xi;\lambda) \tag{10.14}$$

képlettel.

Az utóbbi állítás a következő módon bizonyítható be.

Abban az esetben, ha $\mathscr{K}(\xi)$ egy olyan matrix, amelynek elemei a ξ racionális függvényei, a képlet ellenőrizhető a

$$\int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds - \lambda\varphi(t) = 0, \tag{10.15}$$

$$\int_0^{\infty} \psi'(s)k(s-t)\,ds - \lambda\psi'(t) = 0^{15} \quad (0 \leqq t < \infty) \tag{10.16}$$

homogén egyenletek lehető megoldásainak közvetlen kiszámításával.

[15] A $\psi(t)$ vektort mi úgy képzeljük el, mint egy olyan matrixot, amely egy oszlopból áll; $\psi'(t)$-vel ugyanazt a vektort jelöljük, de amelyet olyan matrix ábrázol, amely egy sorból áll.

Mivel a $k(t)$ matrix elemei az $L_1(-\infty, \infty)$ tér normájában tetszőleges pontossággal approximálhatók ezen tér olyan elemeivel, amelyek *Fourier*-transzformáltjai racionális függvények, így, felhasználva az index stabilitásáról szóló 2.4. tételt, könnyen beláthatjuk a (10.14) képlet igaz voltát általános esetben is.

A 10.1. tétel azt jelenti, hogy a (10.13) feltétel teljesülése mellett a (10.15), (10.16) egyenletek mindegyikének véges számú lineárisan független megoldása lesz a $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$-ben, és úgyszintén az $\overset{n}{\mathfrak{M}}_+$ konjugált térben, amely a mérhető korlátos komponensű összes n-dimenziós vektor-függvényekből áll a $(0,\infty)$ intervallumban. A (10.14) képlettel kapott $\varkappa(\lambda)$ index a $\beta_{K_{11}}(\lambda)-\alpha_{K_{11}}(\lambda)$ különbséget adja, ahol $\alpha_{K_{11}}(\lambda)$ a (10.15) egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma a $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$ térben, a $\beta_{K_{11}}(\lambda)$ pedig a (10.16) egyenlet lineárisan független megoldásainak a száma az $\overset{n}{\mathfrak{M}}_+$ térben.

Viszont, mint a skaláris esetben, egy sor pótlólagos okoskodás segítségével meg lehet győződni arról, hogy a (10.15) és (10.16) egyenleteknek a $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$ és $\overset{n}{\mathfrak{M}}_+$ osztályokban ugyanazok a megoldásai.

Az inhomogén $\int_0^\infty k(t-s)g(s)ds-\lambda g(t)=f(t)$ $(f\in\overset{n}{\mathfrak{C}}_+)$ egyenletnek lesz megoldása $\overset{n}{\mathfrak{C}}_+$-ben akkor és csakis akkor, ha $\int_0^\infty \psi'(s)f(s)ds=0$, ahol ψ a (10.16) egyenlet tetszőleges korlátos megoldása, miközben

$$\psi'(s)f(s) = \sum_{j=1}^{n} f_j(s)\varphi_j(s).$$

A (10.16) egyenlet vonatkozásában a 10.1 megjegyzéssel analóg megjegyzés tehető $n=1$ esetére.

A (10.17)-re vonatkozó további részleteket l. a [46]-ban.

Kiegészítő megjegyzések és irodalmi utalások

1. §. Két altér *nyílásának* a fogalmát a [19] vezeti be. Ebből a cikkből vettük át a 1.1. tételt. Megjegyezzük, hogy az 1.1. tétel bizonyításában használt K. Borszuk tétel ekvivalens L. A. Lusztyernyik és Z. G. Snirelman a projektív terek kategóriájáról szóló tételének bizonyításában a fő lemmával [47]. Ezen lemma elemi bizonyítását adják M. A. Krasznoszelszkij és Sz. G. Krejn [48]. K. Borszuk tételének részletes leírást l. [49]-ben.

2. §. a) *A normális feloldhatóságnak* fogalmát a korlátos operátorokra F. Hausdorff a [38] cikkben vezette be, ugyanott mutat rá az operátoroknak a normális feloldhatósággal ekvivalens különböző tulajdonságaira. (l. úgyszintén a [28]-at).

b) A 2.1. lemmát *Hilbert*-terekre J. M. Glazman [50] bizonyította be. Ennek általánosítását *Banach*-terekre a [18] cikk adja.

c) Az ismert típusú szinguláris integrál egyenletekre vonatkozó 2.1. tétel közvetlen következménye volt F. Noether analitikus képletének az indexről (l. [6]).

A 2.1. tételt *Banach*-térbeli korlátos operátorokra először F. V. ATKINSZON [12] bizonyította be. A tételnek más, sokkal áttetszőbb bizonyítását, amely egyben annak általánosítását is lehetővé teszi a nem korlátos operátorok esetére, a [18]-ban találjuk. Ezt a bizonyítást itt ismertettük.

d) A Φ-operátoroknak véges dimenziós bővítéséről szóló 2.2. lemmát a [16] adja.

e) A *Hilbert*-térben definiált korlátos operátorokról szóló 2.3. tételt, és feltételeinek olyannal való felcserélhetőségét, hogy β_A véges és az A operátor regularizálható, SZ. G. MIHLIN bizonyította [8]. Később a [13]-ban tisztázódott, hogy ezek a feltételek ekvivalensek az A operátor normális feloldhatóságával és d-karakterisztikájának végességével.

A *Banach*-térben definiált korlátos operátorokról szóló 2.3. tételt először J. V. ATKINSZON bizonyította be [12] dolgozatában, amely nagy késéssel jelent meg (bemutatva 1948. IX. 2. és publikálva 1951-ben). Ezzel egyidőben jelent meg J. C. GOHBERG dolgozata (bemutatta 1950. XII. 4), amelyben szintén szerepel a 2.3. tétel.

Nem korlátos operátorok esetében a bázissal rendelkező terekben ezt a tételt bebizonyították a [16] dolgozatban, általános esetben pedig egymástól függetlenül a [18] és [17]-ben, mégpedig utóbbiban a tétel további általánosítása található (l. lejjebb a *f)*-et).

f) A 2.4. tételt nem korlátos operátorokra a (2.7) egyenlőtlenség nélkül először J. V. ATKINSZON bizonyította be már említett [12] dolgozatában. Tőle függetlenül J. C. GOHBERG [15] dolgozatában kevésbé általános megfogalmazásban ismerteti a tételt (bár a bizonyításból következik a tétel az F. V. ATKINSZON-féle megfogalmazásban is). A (2.7) egyenlőtlenség a tételnek a nemkorlátos operátorokra való általánosításával együtt M. G. KREJN és M. A. KRASZNOSZELSZKIJ [16] nevéhez fűződik. A (2.7) egyenlőtlenség bizonyítását a [16] dolgozatból vettük át.

g) Amint már megjegyeztük, a 2. § 5. pontban leírt egyszerű fogás, amely lehetővé tette a 2.3, és 2.4. tételek általánosítását nem korlátos A operátor A-korlátos vagy A-teljesen folytonos operátorral való perturbációjának az esetére SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA [21] érdeme.

3. §. a) A 3.2. tétel valószínűleg új.

b) A 3.3. tételt korlátos operátorokra és azon feltételezésben, hogy a tekintett G komponensben létezik legalább egy reguláris pont, SZ. M. NIKOLSZKIJ [10] fedezte fel. Általános esetben korlátos operátorokra a tétel a [18]-ban található. Utóbbi dolgozatban megtalálható úgyszintén a 3.5. tétel és a 3.6. tétel korlátos operátorokra.

c) A 3.7. tételt abban a speciális esetben, amikor az A_λ a λ polinomja és legalább egy λ értékre az A_λ operátor invertálható, az [51] és [17] dolgozatokban bizonyították. Erre a speciális esetre a tételt korábban, mellesleg, a [26] dolgozatban mutattak ki.

4. §. a) A 4.2. tétel korlátos operátorok esetében implicite benne van SZ. M. NIKOLSZKIJ [10] dolgozatában. Az itt ismertetetthez közeli megfogalmazásban a tételt M. A. GOLDMAN és SZ. N. KRACSKOVSZKIJ [22] bizonyították. A tétel további általánosítást nyert a [23], [24], [25], [45], [52], [53] dolgozatokban.

b) A 4.3. tételt, valószínűen itt fogalmaztuk meg először, bár az egyszerű következménye az 1.2. és 4.1. tételeknek. Az 1.2. tétel segítségével SZŐKEFALVI-NAGY B. korábban a [21] dolgozatban a 4.3. tétellel rokon állításokat talált a $\mathfrak{B}$ *Banach*-

térben definiált lineáris zárt A_0 operátor olyan perturbációjáról, amelyek mellett az átmegy

(1) $$A_\varepsilon x = A_0 x + \varepsilon A_1 x + \varepsilon^2 A_2 x + \ldots + \varepsilon^n A_n x + \ldots$$

alakú A_ε operátorba, ahol az $A_n (n=1, 2, \ldots)$ lineáris A_0-korlátos operátorok, az ε pedig egy szám, mégpedig az (1) sor konvergens minden $x \in \mathfrak{D}_{A_0}$-ra valamely $|\varepsilon| < r$ körben.

5. §. a) Az 5.1. tétel valószínűen új. Abban a speciális esetben, amikor a H operátor korlátos, B pedig teljesen folytonos, ezt a tételt M. Sz. Brodszkij bizonyította be 1954-ben (aki azonban nem publikálta azt), és szűkebb megfogalmazásban ugyanabban az időben J. L. Smulján [54] is bebizonyította. Az 5.1. tétel lehetővé teszi J. M. Gelfand [32] egy eredményének a pontosítását és általánosítását.

b) Lehetséges, hogy az 5.2. és 5.4. tételek újak.

6. §. Ezt a paragrafust teljes egészében M. G. Krejn, M. A. Krasznoszelszkij és D. P. Milman [19] dolgozatából vettük át.

7. §. Ennek a paragrafusnak minden eredményét, kivéve az [52]-ből vett 7.3. lemmát, először publikáljuk. A paragrafus eredményeinek vannak bizonyos érintkezési pontjai F. V. Atkinszon [55] dolgozatának eredményeivel.

8. §. A 8.2. tételt korlátos operátorokra Sz. N. Kracskovszkij bizonyította a [25]-ben, a *Hilbert*-tér zárt operátoraira pedig az [52]-ben. Az itt alkalmazott bizonyítási módszerek sokkal egyszerűbbek és világosabbak, mint a [25], [52]-ben alkalmazottak. Ennek a tételnek a továbbfejlesztését l. [45]-ben. A paragrafus végén tett megjegyzést illetően l. a [25], [45], [56], [57]-et.

9. §. a) A $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-tér és zárt operátor speciális esetére a 9.2. tételt M. A. Krasznoszelszkij [58] bizonyította be. Azután az [59] dolgozatban egyszerű bizonyítást kapunk a tételre *Hilbert*-térben értelmezett tetszőleges lineáris operátor esetében.

Banach-terekben 9.2. tétel bizonyítását a [19] adja.

b) A 9.3. tételt (abban a feltételezésben, hogy a H *Hermite*-féle operátor értelmezési tartománya sűrű), M. A. Najmark [60] vette észre.

c) A 9.4. tétel, valószínűleg új.

10. §. a) Az 1. és 2. pontok eredményei benne vannak a [44] cikkben, azonban itt új megközelítésükkel van dolgunk.

b) A 3. pont eredményei újak. Azok további fejlesztése a [46]-ban található.

IRODALOM

[1] F. Noether, Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen, *Math. Ann.* **82** (1921), 42—63.
[2] T. Carleman, *Sur les équations intégrales singuliéres á noyau réel symetrique*, Uppsala, 1923.
[3] J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.* **102** (1929), 49—131.
[4] T. Carleman, Sur la résolution de certaines équations intégrales, *Aktiv för matem., astr. et fysik* **16**, № 26 (1922).
[5] Ф. Д. Гахов, О краевой задаче Римана, *Матем. Сб.* **2** (44): 4 (1947), 673—683.

[6] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интергальные уравнения*, М.—Л., Гостехиздат, 1946.
[7] В. Д. Купрадзе, *Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения*, Гостехиздат, 1950.
[8] С. Г. Михлин, Сингулярные интегральные уравнения, *УМН* 111, вын. **3** (1948), 30—111.
[9] С. Г. Михлин, О разрешимости линейных уравнений в гильбертовом пространстве, *ДАН* **57**, № (1947), 11—12.
[10] С. М. Никольский, Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, *Изв. АН, сер. матем.* **7** № 3 (1943) 147—166.
[11] З. И. Халилов, Линейные сингулярные уравнения в нормированном кольце, *Изв. АН, серия матем.* **13**, № 2 (1949), 163—176.
[12] Ф. В. Аткинсон, Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, *Матем. сб.* **28** (70): **1** (1951), 3—14.
[13] И. Ц. Гохберг, О линейных уравнениях в пространстве Гильберта, *ДАН* **76**, № 1 (1951), 9—12.
[14] И. Ц. Гохберг, О линейных уравнениях в нормированных пространствах, *ДАН* **76**, № 4 (1951), 477—480.
[15] И. Ц. Гохберг, О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, *ДАН* **78**, № 4 (1951), 629—632.
[16] М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Устойчивость индекса неограниченного оператора, *Матем. сб.* **30** (72): 1 (1952), 219—224.
[17] B. Sz.-Nagy, On the stability of the index of unbounded linear transformations, *Acta Math. Sci. Hungaricae* **3**, 1—2 (1952), 49—52.
[18] И. Ц. Гохберг, Об индексе неограниченного оператора, *Матем. сб.* **33** (75): 1 (1953), 193—198.
[19] М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман, О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, *Сб. трудов ин-та матем. АН УССР*, № **11**, 97—112.
[20] B. Sz.-Nagy, Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Comm. Math. Helvetici* **19** (1947), 347—366.
[21] B. Sz.-Nagy, Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sci. Math.* **14**, 2 (1951), 125—137.
[22] М. А. Гольдман, С. Н. Крачковский, О нуль-элементах линейного оператора в его области фредгольма, *ДАН* **86**, № 1 (1952).
[23] С. Н. Крачковский, Каноническое представление нуль-элементов линейного оператора в его области фредгольма, *ДАН* **88**, № **2** (1953).
[24] С. Н. Крачковский, О свойствах линейного оператора, связанных с его обобщенной областью фредгольма, *ДАН* **91**, № **5** (1953).
[25] С. Н. Крачковский, О расширенной области сингулярности оператора $T_\lambda = E - \lambda A$, *ДАН* **96**, № **6** (1954).
[26] М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов самосопряженных уравнений, *ДАН* **77**, № 1 (1951), 11—14.
[27] М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных самосопряженных операторов, *Матем. сб.* **34** (76): 1 (1954), 145—199.
[28] С. Банах, *Курс функціонального аналізу*, Київ, 1948.
[29] K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphär, *Fundamenta Math.* **20** (1933).
[30] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, М.—Л. Гостехиздат, 1950.
[31] И. М. Рапопорт, Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, *ДАН* **59**, № 8 (1948), 1403—1406.
[32] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, *УМН* **1**, выл **2** (1946), 48—146.
[33] Ф. Рисс и Б. С.—Надь, *Лекции по функциональному анализу*, М., ИЛ, 1954.
[34] Ф. Рисс, О линейных функциональных уравнениях, *УМН*, вып. **1** (1936), 175—199.
[35] М. А. Наймарк, О некоторых признаках плотноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве, *ДАН* **98**, № 5 (1954), 727—730.
[36] Б. Р. Мукминов, О разложении по собственным функциям диссипативных ядер, *ДАН* **99**, № 4, 499—502.

[37] M. KREIN, V. SMULIAN, On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, *Ann. of Math.* **41**, № 3 (1930), 556—583.
[38] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, (Дополнение), М.—Л., ОНТИ, 1936.
[39] М. А. Гольдман, Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных уравнений, *ДАН* **100**, № 2 (1955).
[40] М. А. Наймарк, Спектральные функции симметрического оператора, *Изв. АН. серия матем.* **4**, № 13 (1940), 277—318.
[41] М. А. Наймарк, О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора, *Ив. АН, серия матем.* **4**, № 1 (1940), 53—104.
[42] М. А. Красносельский, О самосопряженных расширения эрмитовых операторов, *Украинск. матем. журнал* **1**, № 1 (1949), 21—38.
[43] М. Г. Крейн, Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, *Матем. сб.* **20** (62): 3 (1947).
[44] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, *УМН* (печатается).
[45] И. Ц. Гохберг, Некоторые свойства нормально разрешимых операторов, *ДАН* **104**, № 1 (1955), 9—12.
[46] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, О некоторых основных положениях теории систем интегральных уравнений на полуоси с ядрами, зависящими от разности аргументов, *Труды* III. *всесоюзного математического сьезда*, **2** (1956), 37—38.
[47] Л. А. Люстреник, Л. Г. Шнирельман, *Топологические методы в вариационных задачах*, М.—Л., ОНТИ, 1930.
[48] М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, Об одном доказательстве теоремы о категории проективного пространства, *Украинск. матем. журнал* **1**, № 2 (1949).
[49] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, 1956.
[50] И. М. Глазман, К теории сингулярных дифференциальных операторов, *УМН* **V**, вып. 6 (1950), 102—135.
[51] F. ATKINSON, A spectral problem for completely continuons operators, *Acta Math. Sci. Hungaricae* **3**, 1—2 (1952), 53—60.
[52] И. Ц. Гохберг, О нулях и нуль-элементах неограниченных операторов, *ДАН* **101**, № 1 (1955), 9—12.
[53] А. С. Маркус, Об одной теореме Ф. Рисса, *Учен. зап. Кишиневск. гос. университета* **17** (физико-матем.) (1955), 73—76.
[54] Ю. Л. Шмульян, Вполне непрерывные возмущения операторов, *ДАН* **101**, № 1 (1955), 35—38.
[55] F. ATKINSON, On relatively regular operators. *Acta Sci. Math.* **15**, 1 (1953), 38—56.
[56] И. Ц. Гохберг и А. С. Маркус, Об одном характеристическом свойстве ядра линейного оператора, *ДАН* **105**, № 5 (1955), 893—896.
[57] А. С. Маркус, О характеристическом свойстве ядра линейного оператора, *ДАН* **105**, № 6 (1955), 1144—1146.
[58] М. А. Красносельский, О дефектных числах замкнутого оператора, *ДАН* **56**, № 6 (1947), 559—561.
[59] М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, *УМН* **11**, вып. 3 (19) (1947), 597—626.
[60] М. А. Наймарк, Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, *ДАН* **82**, № 4 (1952), 517—520.
[61] И. М. Гельфанд, О спектре самосопряженных дифференциальных операторов, *УМН* **VII**, вып. 6 (1952), 183—184.
[62] И, Ц. Гохберг, О границах применимости теории Ф. Нетера, *Учен. зап. Кишиневск. гос. УНИ верситета* **17** (физико—матема) (1955), 35—44.
[63] М. Г. Крейн, О формуле следов в теории возмущений, *Матем. сб.* **33** (75): 3 (1953), 597—626.
[64] B. SZ.-NAGY, On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Sci. Hungaricae* **3**, 1—2 (1952), 62—66.

Fordította: Buzási Károly

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA RENDES ÉS LEVELEZŐ TAGJAINAK 1971 ÉS 1972-BEN MEGJELENT PUBLIKÁCIÓI JEGYZÉKE

DETRE LÁSZLÓ rendes tag

Note on BY Draconis, *Inf. Bull. Variable Stars* No. 520. 1971. 1 oldal.

Presidential Report on the Meeting of Commission 27 at Birghton, 19 and 21 August 1970. *Trans. IAU* XIV. 185. 1971. 32 oldal.

On the Nature of the 41-day Period of RR Lyrae, *Proc. Toronto IAU Colloquium* (T.: Szeidl). 1972. 6 oldal.

Report on RR Lyrae Variables and Dwarf Cepheids. 1970—72., *Trans. IAU XV.* 4 oldal.

A Magyar Tudományos Akadémia Csillagvizsgáló Intézetének működése 1970. április 1-től 1971. április 15-ig, *Csillagászati Évkönyv 1972.*

Ugyanez 1971. április 15-től 1972. május 1-ig, *Csillagászati Évkönyv 1973.*

A csillagászat legújabb eredményei, *Csillagászati Évkönyv* 1972. és 1973.

ERDŐS PÁL rendes tag

On the fundamental problem of mathematics, *American Math. Monthly*, **79** (1972) 149.

Unsolved and solved problems in set theory, 1972. (HAJNAL ANDRÁSsal).

A remark on polynomials and the transfinite diameter, *Technion Israel Inst. of Technology, Haifa.* 1972. Preprint. (E. NETANYANUval).

On a problem of Grünbaum, *Canadian Mathematical Bulletin*, **15** (1) (1972) 23—25.

Problems and results on combinatorial number theory, North Holland Publishing Comp. 1—22. 1972.

On Sums of Fibonacci numbers, *The Fibonacci Quarterly*, **10** (1972) 249—254. (R. L. GRAHAMmal).

On some general properties of chromatic numbers, *Israel Math. Journal*, 1972. (A. HAJNALlal és S. SHELAHal).

Osculation vertices in arrangements of curves, 1972. (B. GRÜNBAUMmal).

An extremal graph problem, *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **22** (1972) 275—282. (SIMONOVITS M.-al).

Ramsey numbers for cycles in graphs, 1972. (J. A. BONDYval).

On problems of Moser and Hanson. Lectures Notes in Math., Springer Verlag, Berlin 303 (1972) 75—79. (S. SHELAL-al).

On the number of solutions of $m=\sum_{i=1}^{k} x_i^k$, 1972. (E. SZEMERÉDI-vel).

On the Number of Unique Subgraphs of a Graph, *Journal of Combinatorial Theory*, (8) **13** (1972) 112—115.

Simple one-point expensions of tournaments, *Mathematika* **19** (1972) 57—62. (A. HAJNAL és E. C. MILNERrel).

Separability properties of almost-disjoint families of sets, *Israel Journal of Mathematics*, **12** (1972) 207—214. (S. SHELAHal).

On a Ramsey type theorem, *Periodica Math. Hung.*, **2** (1972) 295—299. (A. SZEMERÉDIvel).

On some problems of a statistical group theory VII., *Periodica Math. Hung.*, **2** (1972) 149—163. (P. TURÁNnal).

Some problems on consecutive prime numbers, *Mathematika (London)*, **19** (1972) 91—95.

Some remarks on simple tournaments, *The Univ. of Calgary Dept. of Math.*, **2** (1972) 238—245. (E. FRIED, A. HAJNAL és E. C. MILNERrel) Reprint.

Imbalances in k-Colorations, *Networks*, **1** (1972) 379—385. (J. SPENCERrel).

GÁSPÁR REZSŐ levelező tag

Many-Electron Problems III. Scaling of the Density Distributions and the Potential Fields, *Int. J. Quant. Chem.*, **5** (1971) 311—317.

Pál Gombás, 1909—1971 (Nekrolog), *Acta Phys. Hung.*, **30** (1971) 109—113.

Explicit Atomic Number Dependent Theories of Atomic Systems, *Acta Phys. Chim. Debr.*, XVII/IV, (1971) 7—57.

Deformed Atomic Number Model. Solution of the Basic Equation I., *Acta Phys. Chim. Debr.*, XVII/IV, (1971) 75—94. (J. B. SZABÓval).

Relativistic Corrections to the Universal Potential, *Acta Phys. Hung.*, **32** (1972) 17—41. (G. ERDŐS—GYARMATIval).

JÁNOSSY LAJOS rendes tag

The Hydrodinamical Model of Wave Machanics VII. The Stern-Gerlach Effect of the H-Atom, *Acta Phys. Hung.*, **30** (1971) 131—137.

The Hydrodinamical Model of Wave Mechanics VIII. Some Limitations of the One Body Treatment, *Acta Phys. Hung.*, **30** (1971) 139—143.

A new approach to the theory of relativity II. The general theory of relativity. *Foundations of Physics*, **1** (1971) No. 3. 251—267.

Emlékezés Gombás Pál akadémikusra, *Magyar Nemzet* 1971. V. 30.

Még egyszer a tömeg és az energia, *Magyar Nemzet* 1971. VI. 13.

Meggondolások a tömeg és energia viszonyáról, *Magyar Nemzet* 1971. IV. 4.

Elgondolások a középiskolai oktatásról, *Magyar Nemzet* 1971. XII. 13.

A középiskolai oktatás eredményesebbé tételének néhány kérdése, *Köznevelés*, **27** (1971) 17/18. 12—16.

A fotoeffektus, *Magyar Tudomány*, **16** (1971) No. 10, 616—623.

A laser, *Magyar Tudomány*, **16** (1971) No. 1. 17—24.

Fizika. Kisérleti tankönyv a gimnáziumok szakosított tantervű IV. osztálya számára. III. kötet: *Atomfizika.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971. (FŐZY ISTVÁN és DR. KULIN GYÖRGYgyel).

Fizika. Kisérleti tankönyv a gimnáziumok szakosított tantervű IV. osztálya részére. I. kötet. I. rész: *Elektromosságtan.* II. kiadás 1971. (HOLICS LÁSZLÓval).

Theory of Relativity Based on Physical Reality, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.

$E=Mc^2$. Tények és tévedések, *Természet Világa* 1971. No. 1. 24—25.

On some effects connected with Einstein's principle of equivalence, *Acta Phys. Hung.*, **31** (1972) 367—374. 1972. (H. J. TREDERrel).

The Aberration of components of double starts, *Acta Phys. Hung.*, **31** (1972) 353—359.

A New Approach to the Theory of Relativity. III. Problem of the Ether, *Foundations of Phys.*, **2** (1972) No. 1, 9—25.

A kopernikuszi világkép kialakulása, *Népszava* 1972. nov. 6.

Az erő és a tömeg fogalma a mechanika oktatásban, *Fizikai Szemle*, **22**/12, (1972) 379—383. (PÁRKÁNYI LÁSZLÓval).

Klasszikus fizika modern szemmel, *Magyar Tudomány*, **17**, (1972) No. 11. 687—690.

A természettudományos ismeretterjesztésről, *Népszava* 1972. július 29.

Az oktatás és túlterhelés, *Magyar Nemzet* 1972. július 23.

Kapcsolatok a gravitáció és az atomok között, *Magyar Nemzet* 1972. május 7.

A tudományos ismeretek népszerűsítéséről, *Népszabadság* 1972. február 12.

Meggondolások a mennyiség problémájáról, *Magyar Tudomány*, **17** (1972) No. 2, 83—91.

Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972. Élő Matematika sorozat 2. (TASNÁDI PÉTERrel közösen).

KOVÁCS ISTVÁN rendes tag

General theory of the rotational structure of $^4\Sigma$ states of diatomic molecules I., *J. Phys. B.*, **4** (1971) 759—775. (V. M. KORWARral).

Centrifugal distortion of the spin-orbit and spin-rotation interaction for doublet terms, *J. Phys. B.*, **4** (1971) 1123—1128. (B. VUJISICcsal közösen).

Az Európai Fizikai Társaság 1970 októberében Budapesten tartott tanácsülése, *Fizikai Szemle*, **21** (1971) 33—34.

General theory of the rotational structure of $^4\Sigma$ states of diatomic molecules II., *J. Phys. B.*, **4** (1971) 1633—1639. (P. PACHERrel).

„L. D. Landau, A. I. Achieser, F. M. Lifschitz: Mechanik und Molekularphysik," *Acta Phys. Hung.*, **30** (1971) 337. *(Könyvszemle).*

"John Pechan and the Science of Optics", *Acta Phys. Hung.*, **30** (1971) 405—406. *(Könyvszemle).*

Centrifugal Distortions and Multiplet Structure, *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **32** (1972).

Gerhard Herzberg, az 1971-es kémiai Nobel-díj nyertese, *Fizikai Szemle*, **22** (1972) 94.

Mindennapi világképünk és az atomfizika, *Rádió és Televízió Szemle*, **4** (1972) 57.

MARX GYÖRGY levelező tag

Kvantummechanika III. (átdolgozott és bővített kiadás). Műszaki Könyvkiadó, 1971. 291 oldal.

Terrestrial Neutrino Flux, *Accademia Nazionale dei Lincei, Roma*, 1971. p. 11—113.

Tracking the CP Breakdown, *Proceedings of the Conference on Nucleons and Weak Interactions, Zagreb*, 1971. Intitute Ruder Boskovic, p. 29—60.

Responsibility of Scientists for the Future Development of Human Society, *ESNA Proceedings, Hannover*, 1971. p. 22—27.

An Insoluble Task: Teaching Physics, Published in The MIT Press, Cambridge, Mass. and London, England, 1971. Edited by S. C. Brown, F. J. Kedves, E. J. Wenham, p. 148—155.

Negyvenes szemszögből a huszonévesek, *Filmkultúra* 1 (1971) 37—39.

Galaktikus Klub, *Valóság* **14** (1971) 51.

Gyorsuló idő, Kritérion, Bukarest, 1972. 153 oldal.

Checking Microscopic Causality and Reversibility in K. Meson Decay, *Acta Physica Hungarica*, **31** (1972) 232—245.

Neutrino'72 — opening address, Technoinform, Bp. 1972. p. 1—4. *Proceedings of the "Neutrino'72" Conference, Balatonfüred.*

Cosmological Limit on Neutretto Mass, Technoinform Bp. 1972. p. 191—195. *Proceedings of the "Neutrino' 72" Conference, Balatonfüred.*

Lepton Charge Conservation, Technoinform Bp. 1972. 123—134. *Proceedings of the "Neutrino' 72" Conference, Balatonfüred.*

Neutrino Mass and Astrophysics, Batavia, 1972. *Proceedings of the International High Energy Conference.*

Iskolák a tudományos-technikai forradalomban, *Társadalmi Szemle*, **27** (1972) 51—61.

Hozzászólás: Tudományos-technikai forradalom ankét, *Társadalmi Szemle*, **27** (1972) 57—58.

Atomok az iskolában, *Fizikai Szemle*, **22** (1972).

Eötvös és a gravitáció, *Fizikai Szemle*, **22** (1972).

Eötvös és a gravitáció, *Vasi Szemle*, 72.

PÁL LÉNÁRD rendes tag

Investigation of the local behaviour of the DO_3-type ordered FeAl alloys, *Proc. Conf. Appl. of the Mössbauer Effect, Tihany* 1971. p. 419 (társszerzőkkel közösen).

Thermoelectric power and electrical resistivity of Ni and Fe near the Curie point, *J. de Physique*, **32** (1971) C1—531. (társszerzőkkel közösen).

Impurities in antiferromagnets at lattice sites of zero exchange field, *J. de Physique*, **32** (1971) C1—862. (társszerzőkkel közösen).

Neutron diffraction study of ordered Mn-alloys, *J. de Physique*, **32** (1971) C1—980. (társszerzőkkel közösen).

Magnetic field induced unidirectional anisotropy in antiferromagnets with ferromagnetic impurities, *J. de Physique*, **32** (1971) C1—107. (társszerzőkkel közösen).

Примнси в магнитных кристаллах, физ. эл. частиц и ат. ядра. **2** (1971) № 4.

Előszó a „Neutronfizika" c. könyvhöz, *Neutronfizika*, Szerk. KISS DEZSŐ és QUITTNER PÁL, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1971. p. 7.

Fremdatome in magnetischen Kristallen, *Reinstoffe in Wissenschaft und Technik, Int. Symp., Dresden* 1970; S. 103 (1972).

Electronic specific heat of iron-rhodium and iron-rhodium-iridium alloys, *Phys. Rev. Lett.*, **29** (1972) 288. (társszerzőkkel közösen).

The magnetic field dependence of the antifferomagnetic-ferromagnetic transition temperature in FeRh, *Acta Phys. Hung.*, **32** (1972) 135. (társszerzőkkel közösen).

"P. A. Egelstaff—M. J. Poole: Experimental neutron thermalisation", *Acta Phys. Hung.*, **30** (1971) 327. (könyvszemle).

Mágneses anyagok fizikájának időszerű kérdései, *Magy. Fiz. Folyóirat*, **19** (1971) 427.

Новые направления в исследованиях материалов для запоминающих устройств ЭВМ, Координационный центр Межправительственной комиссии по сотрудничеству социалистических стран в области вычислительной техники, *Информация Выпуск* **1** (1971).

Engels és a természettudományok, *MTA II. Oszt. Közl.*, **20** (1971) 18.

A távlati tudományos terv és a KFKI feladatai I., *Magyar Nemzet*, 1971. december 25.

A távlati tudományos tervek és a KFKI feladatai II., *Magyar Nemzet*, 1972. január 1.

Наука служит прогрессии, *Известия*, 1971. augusztus 28.

A következő évek egyik kiemelt kutatási területe: a szilárdtestkutatás, *Élet és Tudomány*, **27** (1972) 1020.

Zentralinstitut für Physikalische Forschungen, *Budapester Rundschau*, 1972. január 17.

Magyar tudósok segítsége a vietnami fizikusoknak, *Magyar Nemzet*, 1972. február 13.

Gondolatok a tudományos-technikai forradalom néhány aktuális kérdéséről, Társadalmi Szemle, **27** (1972) 75.

Célpont: minden mozgó lény, Ország Világ, **17** (1972) 6

Két sebességgel — a szépség nyomában, *Nők Lapja*, 1972. szeptember 30.

Sötét folt az Egyesült Államok történetében: brutális környezetpusztítás, *Magyar Hírlap*, 1972. november 11.

RÉDEI LÁSZLÓ rendes tag

Eine Vektorrechnung mit Anwendung in der Theorie der endlichen p-Gruppen, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* **6**. *Rings, Modules and Radicals, Keszthely* (Hungary), 1971. 423—445.

Endliche p-Gruppen, *Studien zur Algebra und Ihre Anwendungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1972. 144—146.

SZALAY SÁNDOR rendes tag

Néhány láptalaj és azon termett takarmány nyomtápelem vizsgálata, (Sámsoni Z., és Szilágyi M., társszerzőkkel), *Agrokémia és Talajtan*, **20** (1971) No. 3, pp. 353—360.

Neutral Atom Component of High Frequency Ion Source Beam, (Bódizs D., és Koltay E. társszerzőkkel), *Nuclear Instruments and Methods*, **94** (1971) pp. 537—539.

Fission Products in the Atmospheric Precipitation in Debrecen, Hungary, during 1968 and 1969, (Csongor É. társszerzővel), *Acta Physica Hung.*, **29** (1971) pp. 407—413.

Mikroelempermetezéses szabadföldi kísérlet az Enying környéki láptalajon, (Landy L., Sámsoni Z., és Szilágyi M. társszerzőkkel), *Agrokémia és Talajtan*, **21** (1972) No. 1—2, pp. 193—196.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA rendes tag

The "Lifting Theorem" for intertwining operators and some new applications. *Indiana University Mathematics Journal*, **20** (1971), 901—904. (C. Foiaşsal közösen).

Local characterization of operators of class C_0, *Journal of Functional Analysis*, **8** (1971), 76—81. (C. Foiaşsal közösen).

Vecteurs cycliques et commutativité des commutants, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **32** (1971), 177—183. (C. Foiaşsal közösen).

Sous-espaces invariants d'un opérateur et factorisations de sa fonction caractéristique. *Actes du Congrès International des Mathematiciens, Nice, Septembre 1970*, Gauthier-Villars (Paris, 1971), Tome II., p. 459—465.

Quasi-similarity of operators of class C_0, *Colloquia Math. Soc. János Bolyai*. 5. *Hilbert space operators, Tihany (Hungary), 1970.* North-Holland (Amsterdam, 1971); p; 513—517.

Compléments à l'étude des opérateurs de classe C'. II., *Acta Sci. Math.*, **33** (1972), 113—116. (C. Foiaşsal közösen).

Accretive operators. Corrections, *Acta Sci. Math.*, **33** (1972), 117—118. (C. Foiaşsal közösen).

Echelles continues de sous-espaces invariants. II, *Acta Sci. Math.*, **33** (1972), 355—356. (C. FOIAŞsal közösen).

Cyclic vectors and commutants, *Linear operators and approximation*, Birkhäuser Verlag (Basel, 1972), pp. 62—67.

TANDORI KÁROLY levelező tag

Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **22** (1971), 215—226.

Über die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **32** (1971), 11—40.

Über das Maximum der Summen orthogonaler Funktionen, *Acta Sci. Math.*, **12** (1971), 317—326.

Bemerkung zum Gesetz der grossen Zahlen, *Periodica Math. Hungarica*, **2** (1972), 33—39.

Eine Frage über die trigonometrischen Summen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **23** (1972), 207—218.

TARJÁN IMRE levelező tag

Effect of Antibiotics on the Ion-exchange of Bacteria. *Acta Biochim. et. Biophys. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1971) 173—178. (Társsz.: SZŐGYI M., TAMÁS GY.)

Nyekotorüe voproszü modeliroványija kinetiki lucsevovo povrezsgyenyija, *Biofizika* **16** (1971) 381. (Társsz.: RONTÓ GY.)

Effect of antibiotics on the ion-exchange of bacteria, *First European Biophysics Congress* (14th to 17th September 1971, Baden near Vienna), *Proceedings*, Vol. III, 231—235. (Társsz.: SZŐGYI M., TAMÁS GY.)

The comparative analysis of UV effect on bacteriophages containing DNA and RNA, *First European Biophysics Congress* (14th to 17th September 1971, Baden near Vienna), *Proceedings*, Vol. II, 263—267. (Társsz.: KARCZAG A., RONTÓ GY.)

The dislocationa photoconduction spectrum, *International Conference on Colour Centres in Ionic Crystals.* (From 6th—10th September 1971, Reading), 171. (Társsz.: TURCHÁNYI Gy., JANSZKY J., MÁTRAI M.)

Egykristályok előállítása (1971. máj. 3-án tartott Akadémiai Székfoglaló előadás). *M. Biofiz. Társaság Értesítője*, 1972. 79—101.

The Connection of Structure and Function in the Radiation Injury of T7 Phages, *Acta Biochim. et. Biophys. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1972) 461. (Társsz.: RONTÓ GY.)

A struktúra és funkció kapcsolata T7 fágok sugársérülésében, *M. Biofiz. Társ. Értesítője*, 1972. 27. (Társsz.: RONTÓ GY.)

Relationship between Structure and Function in the Radiaton Injuries of T7 Phages, *Acta Biochim. et Biophys. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1972) 251—254. (Társsz.: RONTÓ GY.)

Examination of the Effect of UV Irradiation on MS2 Phages, *Acta Biochim. et Biophys. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1972) 461. (Társsz.: KARCZAG A., RONTÓ GY.)

Az ultraibolya fény hatásának vizsgálata MS2 fágokon, *M. Biofiz. Társ. Értesítője*, 1972. 28. (Társsz.: KARCZAG A. RONTÓ GY.)

Study of the UV Effect on MS2 Phages, *Acta Biochim. et Biophys. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1972) 173—177. (Társsz.: KARCZAG A., RONTÓ GY.)

Az E. coli „B" klóramfenikol-megkötése, *Acta Pharmaceutica Hung.*, 42 (1972) 87—91. (Társsz.: TAMÁS GY., SZŐGYI M.)

Ein kinetisches Modell zur Strahlenschädigung von viraler und bakterieller DNS, *Studia biophysica*, **33** (1972) 121—130 (Társsz.: RONTÓ GY., KARCZAG A.)

Ob iszkazsenyijah krisztallicseszkoj resetki pod gyejsztvijem krajevüh gyiszlokacij, *Krisztallografija*, XVII. (1972) 426—428. (Társsz.: TURCHÁNYI GY., JANSZKY J., MÁTRAI M.)

Fizika orvosok és biológusok számára, Medicina, (Harmadik változatlan kiadás) 1971.

Természettudományi Kis Lexikon (részletek), Akadémiai Kiadó, 1971.

Laboratory Manual on Crystal Growth (Szerkesztő és társszerző), Akadémiai Kiadó, 1972.

TURÁN PÁL akadémikus

On some applications of graph theory II., (Társszerzők: ERDŐS PÁL, A. MÉIR, VERA T. SÓS), *Studies in Pure Mathematics Papers presented to Richard Rado*, edited by L. Mirsky, Acad. Press. 1971. p. 89—100.

On some recent results in the analytical theory of numbers, *Proc. of Sympos, in Pure Math.* Vol. XX. 1969. Institute on Number Theory. p. 359—374.

On some problems of a statistical group theory, V. *Periodica Math.*, **1** (1), (1971) 5—13. (ERDŐS PÁLlal közösen).

A general inequality of potential theory, *Proc. of the NRL Conference on Class, Funct, Theory*, 1970., p. 137—141.

On some general problems in the theory, of partitions 1., (ERDŐS PÁLlal), *Acta Arith.*, XVIII. (1971) 53—62.

Megjegyzés az egységgömb felületének pakolási állandóiról, *Matem. Lapok*, XXI. 1—2. (1970) 39—44.

Diophantine approximation and analysis, *Actes du Congrès Internat. des Mathématiciens*, Gauthier-Villars, 1971. p. 519—528.

On a trigonometric inequality, *Proc. of the Conference on Constr. Theory of Functions*, 1969. p. 505—512.

On some problems of a statistical grap theory, VI., (ERDŐS PÁLlal), *Indian Math. Soc. S. (Minakshi-shundaram emlékkötet)* **34** (1970) 175—192.

Commemoration on Stanislas Knapowski, *Colloq. Math. Vol.*, XXIII. Easc **2** (1971) 309—321.

On some applications of graph theory to analysis, *Proc. of the Internat. Conference on Const. Function Theory*, Várna 1970. p. 351—358.

On some problems of a statistical group theory, VI,, *Journ. of Indian Math. Soc.* **34** (1970). 175—192.

On some applications of graph theory, III., (Társszerzők: P. ERDŐS, A. MÉIR and V. T. SÓS) *Canad. Math. Bulletin*, **15** (No. 1) (1972). 27—32.

On some applications of graph theory, I., (Társszerzők: P. ERDŐS, A. MÉIR and V. T. SÓS), *Discrete Math.*, **2** (1972) 207—228.

On some problems of a statistical graphtheory, VII., (ERDŐS PÁLlal), *Periodica Math. Hung.*, **2** (1972) 149—163.

Further developments in the comperative prime number theory, VII., (S. KNAPOWSKIval) *Acta Arith.*, XXI. (1972) 193—201.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

1951—1975

ÖSSZESÍTETT TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

c. folyóirat összesített tartalomjegyzéke*
(az 1951. évi I. kötettől az 1974. évi XXIII. kötetig).

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei című folyóirat megszűnik és helyébe az Alkalmazott Matematikai Lapok c. folyóirat lép, ezért készült ez a tartalomismertetés.

Az ismertetés szerkesztési szempontjai a következők:

Az I. fejezet tartalmazza a matematikai és fizikai tárgyú cikkeket szerzők szerinti alfabetikus sorrendben. A cikk címe után a kötetszám (római számjegyekkel), az évszám, füzetszám és az oldalszám (mellette az old. rövidítés) szerepel. Ha egy szerzőnek több dolgozata van, akkor a felsorolás a folyóiratban való megjelenési sorrendet követi.

A II. fejezet az akadémiai nagygyűléseken, ankétokon és vitaüléseken elhangzott előadásokat és hozzászólásokat tartalmazza. A felolvasóüléseken és más előadásokon elhangzott tudományos közlemények nem itt szerepelnek, ezeket az I. fejezet tartalmazza.

A III. fejezetben szerepelnek a tudománytörténeti tárgyú cikkek.

A IV. fejezet tartalmazza a Külföldi Szakirodalom c. rovatban megjelent fordításokat, a szerzők szerinti ábécé sorrendben.

Az V. fejezet a méltatásokat, megemlékezéseket, munkásságok ismertetését tartalmazza.

A VI. fejezetben az osztálybeszámolók és az azokkal kapcsolatos hozzászólások, valamint az osztály hírei szerepelnek.

A VII. fejezet tartalmazza a könyvismertetéseket, kritikákat.

A VIII. fejezetben szerepelnek a Tudományos Minősítő Bizottság hírei.

A IX. fejezet tartalmazza az egyéb közleményeket.

I. Matematikai és fizikai tudományos közlemények

* Az összesítést Takácsy Ildikó készítette.

II. Akadémiai nagygyűléseken, ankétokon és vitaüléseken elhangzott előadások és viták

III. Tudománytörténeti közlemények

IV. A külföldi szakirodalomból

V. Méltatások, megemlékezések, munkásságok ismertetése

VI. Osztálybeszámolók, hozzászólások és válaszok, a III. osztály hírei*

* A felsorolás csoportosítása azonos vagy hasonló témájú közlemények szerint történt. Egy csoporton belül a közlemények megjelenési sorrendben következnek. A cím után a szerző, illetve a szerzői kollektíva nevében szereplő neve áll. Az osztály tudományos életéről szóló beszámolók és hírek összeállításában *Dobos Lajos* és *Hazai László* vettek tevékenyen részt. Az Osztály tagjai publikációs jegyzékét *László Teréz* állította össze.

VII. Könyvismertetések, kritikák, referátumok*

* A felsorolás az ismertetett könyvek szerzői szerinti ábécé sorrendben történt, az ismertetés írójának neve zárójelben szerepel a cím után.

VIII. A Tudományos Minősítő Bizottság hírei*

* Zárójelben szerepel a vita ismertetőjének a neve.

IX. Egyéb közlemények

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

FROM THE FOREIGN LITERATURE

Technikai szerkesztő: dr. Ziermann Margit
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Agócs András
A kézirat nyomdába érkezett: 1974. XII. 15. — Ívterjedelem: 26,25 (A/5) ív

77-431 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

Ára: 57,— Ft

Megjelent 1977. VIII. 20.

Index: 26 498