A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXII. KÖTET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1974

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXII. kötet 1. szám

Szerkesztőség: 1051 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: 1054 Budapest, Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1054 Budapest, Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, 1011 Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Mathematicarum Hungarica.

TARTALOMJEGYZÉK

$\boxed{\text{Hajós György}}$ 1
Ecsedi István: Az $f\{(ax+by)g(cx+dy)\}=h(x)k(y)$ függvényegyenlet nem folytonos megoldásainak egy osztályáról 3
Major Péter és *Tusnády Gábor:* Normalitás-vizsgálat 257
Márki László és *Wolfgang Vogel:* A lokális gyűrűk elméletéhez, I. D. A. Buchsbaum egy problémájáról 55
Ruda Mihály: Egy felezősokszögekre vonatkozó tétel 201
Sonnevend György: L. Sz. Pontrjagin, a Magyar Tudományos Akadémia tiszteletbeli tagja 185
Szász Ferenc: Vizsgálatok algebrai struktúrák radikál-elméletében (I) 215
Szász Pál: A hiperbolikus trigonometria egyszerűbb előállítása a klasszikus úton 11
Tusnády Gábor (lásd *Major Péter*nél) 257
Vogel, Wolfgang (lásd *Márki László*nál) 55

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

Safarjevics, I. R.: Az algebrai geometria alapjai (I) 79
(II) (oroszból magyarra fordította *Buzási Károly*) 283

KÖNYVSZEMLE

Pogány Csaba: KÁRTESZI FERENC: *Bevezetés a véges geometriákba* 361

INDEX

$\boxed{\text{Hajós György}}$ 1
Ecsedi, I.: On a class of the non-continuous solution of the functional equation $f\{(ax+by)g(cx+dy)=h(x)k(y)$ 3
Major, P.—Tusnády, G.: Testing for normality 257
Márki, L.—Vogel, W.: To the theory of local rings. On a problem of D. A. Buchsbaum, I. 55
Ruda, M.: A theorem on "halving-polygons" 201
Sonnevend, G.: L. Sz. Pontrjagin — Honorary Member of the Hungarian Academy of Sciences 185
Szász, F.: Investigations in the radical theory of algebraic structures (I) 215
Szász, P.: Über die Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie durch den klassischen Weg .. 11
Tusnády, G. (see at *Major, P.*) 257
Vogel, W. (see at *Márki, L.*) 55

FROM THE FOREIGN LITERATURE

Safarjevics, I. R.: The basis of the algebraic geometry (I) 79
(II) (Translated from Russian to Hungarian by *K. Buzási*) 283

BOOK REVIEWS

Pogány, Cs.: KÁRTESZI FERENC: *Introduction to the finite geometries* 361

77-431 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXII. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1977

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XXII. kötet

Szerkesztőség: 1051 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: 1054 Budapest, Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1063 Budapest, Alkotmány u. 21 Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, 1011 Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Mathematicarum Hungarica.

HAJÓS GYÖRGY

Eredményekben gazdag — és csak kivételeseknek osztályrészül jutó — életpályát tört meg a súlyos betegség és a korai halál. 1972. március 17-én elhunyt Hajós György akadémikus, kétszeres Kossuth-díjas, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Geometria Tanszékének tanszékvezető egyetemi tanára, a Bolyai János Matematikai Társulat elnöke.

Számos elméleti és alkalmazott matematikai diszciplína kimagasló kutatója volt. Fiatal műegyetemi tanársegéd korában oldotta meg a Minkowski-sejtést s ezzel egycsapásra a legnagyobbak sorába emelkedett. Személyében a geometria, algebra, gráfelmélet, statisztika, nomográfia és numerikus matematika kiváló művelőjét veszítettük el.

Oktatói munkáját odaadással és lelkiismeretesen végezte. „Bevezetés a geometriába" című könyvét végtelen gonddal és precizitással írta meg. Hallgatói, munkatársai csodálták páratlan logikáját, amelynek kimagasló tudományszervezői tevékenységében is nagy hasznát vette.

Több mint tíz éven át tagja volt a Magyar Tudományos Akadémia elnökségének, éveken keresztül látta el a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának osztálytitkári teendőit, irányította az osztályvezetőség munkáját. Az Acta Mathematica folyóiratnak megindulása óta főszerkesztője, több hazai — így az MTA III. Osztály Közleményeinek — és nemzetközi tudományos lapnak szerkesztő bizottsági tagja volt.

Több éven át tevékenykedett a Bolyai János Matematikai Társulat elnökeként s nagy gonddal szerkesztette a Matematikai Lapok feladatrovatát.

Az említetteken kívül sok más társadalmi és közéleti funkciót is betöltött. 1964 óta tagja volt az Állami- és Kossuth-díj Bizottságnak, megalakulása óta az Akadémia Matematikai Bizottságának; az International Mathematical Union alelnökévé választotta.

Valamennyi tisztségét lelkiismeretesen, nagy kötelezettségtudással és fegyelemmel látta el. Sok éven át kifejtett tudományos, oktató és közéleti tevékenysége tovább él műveiben, hallgatói elméjében és munkásságában, az intézmények, testületek szellemében és tevékenységében, amelyek egyik szervezője, vezetője, tagja volt.

AZ $f(ax+by)g(cx+dy)=h(x)k(y)$ FÜGGVÉNYEGYENLET NEM FOLYTONOS MEGOLDÁSAINAK EGY OSZTÁLYÁRÓL

Írta: ECSEDI ISTVÁN

1. Jelölje R a valós számok halmazát és legyen $R_0=R-\{0\}$. A dolgozat az

$$f(ax+by)g(cx+dy) = h(x)k(y) \tag{1}$$

függvényegyenlet

$$f(x)g(x) \neq 0 \quad \text{minden } x\in R\text{-re} \tag{2}$$

feltételt kielégítő megoldásainak meghatározásával foglalkozik adott-zérustól különböző — valós a, b, c, d állandók esetén. Evidens az alábbi

I. TÉTEL. *Az* (1) *függvényegyenlet* (2) *feltételt kielégítő valamennyi megoldása*

$$f(x) = \alpha F(x), \quad g(x) = \beta G(x) \tag{3.1—3.4}$$

$$h(x) = \gamma H(x), \quad k(x) = \delta K(x)$$

alakban állítható elő, ahol F, G, H, K az

$$F(ax+by)G(cx+Dy) = H(x)K(y) \tag{4}$$

függvényegyenlet

$$F(x)G(x) \neq 0 \quad \textit{minden } x\in R\textit{-re} \tag{5}$$

$$F(0) = G(0) = H(0) = K(0) = 1 \tag{6}$$

feltételeket kielégítő megoldásait jelölik. α, β, γ, δ pedig tetszőleges, zérustól különböző

$$\alpha\beta-\gamma\delta = 0 \tag{7}$$

egyenletet kielégítő valós állandók.

Az (1), *ill. a* (4) *függvényegyenletből, valamint a* (2), *ill. az* (5) *feltételből következik, hogy*

$$f(x)g(x)h(x)k(x) \neq 0 \quad \textit{minden } x\in R\textit{-re} \tag{8}$$

$$F(x)G(x)H(x)K(x) \neq 0 \quad \textit{minden } x\in R\textit{-re,} \tag{9}$$

ezért $f, g, h, k, F, G, H, K\colon R\to R_0$.

2. A további vizsgálatokban alapvető szerepe lesz a $G\colon R\to R_0$ függvények alábbi definíciójával bevezetett S halmazának.

DEFINÍCIÓ. Legyen

$$M(x, y, z) = \frac{G(x+y+z)G(z)}{G(x+z)G(y+z)}, \tag{10}$$

ahol $G: R \to R_0$. A $G: R \to R_0$ függvény akkor, és csak akkor eleme az *S halmaznak*, ha a (10) egyenlet által értelmezett $M(x, y, z)$ függvény csak az x, y változóktól függ, azaz

$$M(x, y, z) = \overline{M}(x, y) \tag{11}$$

alakú.

1. LEMMA. Ha a folytonos $G: R \to R_0$ a (4) függvényegyenlet (5), (6) feltételt kielégítő megoldása a zérustól különböző adott a, b, c, d valós számokból álló konstans rendszer esetén, melyre

$$ad \pm bc \neq 0, \tag{12}$$

akkor $G \in S$.

Bizonyítás. A (4)-ből $x=0$, $y=0$ helyettesítésekkel és a (6) egyenlet alkalmazásával kapjuk, hogy

$$F(ax)G(cx) = H(x), \tag{13}$$

$$F(by)G(dy) = K(y). \tag{14}$$

A (13), (14) (4) függvényegyenletbe helyettesítése adja az alábbi egyenletet:

$$F(ax+by)G(cx+dy) = F(ax)F(by)G(cx)G(dy). \tag{15}$$

Az $u=ax$, $v=by$ $(ab \neq 0)$ új változók bevezetésével írhatjuk a fenti egyenlet helyett, hogy

$$\frac{F(u+v)}{F(u)F(v)} = \frac{G\left(\frac{c}{a}u\right)G\left(\frac{d}{b}v\right)}{G\left(\frac{c}{a}u+\frac{d}{b}v\right)}. \tag{16}$$

$F: R \to R_0$ eliminálása érdekében vegyük az alábbi egyenleteket:

$$\frac{F(u+v+w)}{F(u+v)F(u)} = \frac{G\left[\frac{c}{a}(u+v)\right]G\left(\frac{d}{b}w\right)}{G\left[\frac{c}{a}(u+v)+\frac{d}{b}w\right]}, \tag{17}$$

$$\frac{F(u+v+w)}{F(u)F(v+w)} = \frac{G\left(\frac{c}{a}u\right)G\left[\frac{d}{b}(v+w)\right]}{G\left[\frac{c}{a}u+\frac{d}{b}(v+w)\right]}. \tag{18}$$

A (18), (17) hányadosából kapjuk a (19)-et, ha felhasználjuk, hogy fennáll a (16):

$$\tag{19} \frac{G\left(\frac{c}{a}u+\frac{c}{a}v+\frac{d}{b}w\right)G\left(\frac{c}{a}v\right)}{G\left(\frac{c}{a}u+\frac{c}{a}v\right)G\left(\frac{d}{b}w+\frac{c}{a}v\right)} = \frac{G\left(\frac{c}{a}u+\frac{d}{b}v+\frac{d}{b}w\right)G\left(\frac{d}{b}v\right)}{G\left(\frac{c}{a}u+\frac{d}{b}v\right)G\left(\frac{d}{b}v+\frac{d}{b}w\right)}.$$

Legyen

$$u = \frac{a}{c}x, \quad v = \frac{a}{c}z, \quad w = \frac{b}{d}y \quad \text{és} \quad \lambda = \frac{ad}{bc}.$$

E változókkal (19) az alábbi

$$\tag{20} \frac{G(x+y+z)G(z)}{G(x+z)G(y+z)} = \frac{G(x+y+\lambda z)G(\lambda z)}{G(x+\lambda z)G(y+\lambda z)}$$

alakra hozható. (20) tömören a (10) alatt bevezetett M segítségével

$$\tag{21} M(x, y, z) = M(x, y, \lambda z)$$

alakba írható. A (21)-ben z helyébe ismételten λz-t írva kapjuk az

$$\tag{22} M(x, y, z) = M(x, y, \lambda z) = M(x, y, \lambda^2 z) = \ldots = M(x, y, \lambda^n z) = \ldots$$

egyenletet. $\lambda^{-1}z$ ismételt helyettesítésével pedig az

$$\tag{23} M(x, y, z) = M(x, y, \lambda^{-1}z) = M(x, y, \lambda^{-2}z) = \ldots = M(x, y, \lambda^{-n}z) = \ldots$$

egyenletet nyerjük. Felhasználva, hogy $G\colon R \to R_0$ folytonos és hogy $|\lambda| \neq 1$, a fenti egyenletekből $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk az *1. Lemma* bizonyítását.

2. Lemma. S bármely $G\colon R \to R_0$ eleme

$$\tag{24} G(x) = \exp[m(x)+n(x)]$$

alakban állítható elő, ahol $m(x)$ az

$$\tag{25} m(x+y)+m(x-y) = 2m(x)+2m(y)$$

normanégyzet függvényegyenlet egy tetszőleges megoldását, $n(x)$ pedig az

$$\tag{26} n(x+y) = n(x)+n(y)$$

Cauchy-féle függvényegyenletet kielégítő tetszőleges additív függvényt jelöl.

Bizonyítás. A (10) és (11) egyenletek alapján írhatjuk, ha $G \in S$, hogy

$$\tag{27} \frac{G(x+y+z)G(z)}{G(x+z)G(y+z)} = \frac{G(x+y)}{G(x)G(y)},$$

azaz

$$\tag{28} \frac{G(x+y+z)}{G(x+y)G(z)} = \frac{G(x+z)}{G(x)G(z)}\,\frac{G(y+z)}{G(y)G(z)}.$$

Legyen

$$\Phi = \Phi(x, y) = \frac{G(x+y)}{G(x)G(y)}, \tag{29}$$

ahol $G: R \to R_0$ a (28) függvényegyenletet elégíti ki. A (28) egyenletet a (29) jelölésmóddal felírva

$$\Phi(x+y, z) = \Phi(x, z)\Phi(y, z) \tag{30}$$

lesz. A fenti függvényegyenlet és a (29) alapján a következő megjegyzéseket tehetjük:

$$\Phi(x, 0) = \Phi(0, y) = 1, \tag{31.1}$$

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x), \tag{31.2}$$

$$\Phi(x, -y) = \Phi(-x, y) = \Phi(x, y)^{-1}, \tag{31.3}$$

$$\Phi(x, y) = \Phi(-x, -y), \tag{31.4}$$

$$\Phi(x, y) > 0 \quad \text{minden } x, y \in R\text{-re}. \tag{31.5}$$

(31.1) következménye, hogy minden $G \in S$-re $G(0) = 1$. (31.5)-ből pedig a

$$G(2x) = \Phi(x, x)G(x)^2 \tag{32}$$

egyenlet alapján

$$G(x) > 0 \quad \text{minden } x \in R\text{-re} \tag{33}$$

következik $G \in S$-re. A (31.3) egyenlet G-vel felírva

$$G(x+y)G(x-y) = G(x)^2 G(y)G(-y) \tag{34}$$

lesz. Legyen $\bar{G} = \ln G$, $G \in S$. E $\bar{G}$ függvényre (34)-ből a

$$\bar{G}(x+y) + \bar{G}(x-y) = 2\bar{G}(x) + \bar{G}(y) + \bar{G}(-y) \tag{35}$$

függvényegyenlet következik. Keressük (35) megoldását

$$\bar{G}(x) = m(x) + n(x) \tag{36}$$

alakban, ahol

$$m(x) = \frac{1}{2}[\bar{G}(x) + \bar{G}(-x)], \tag{37}$$

$$n(x) = \frac{1}{2}[\bar{G}(x) - \bar{G}(-x)]. \tag{38}$$

A fenti felbontásnál szereplő $m(x)$ és $n(x)$ függvényekre biztosan igaz, hogy

$$m(x) = m(-x), \tag{39}$$

$$n(x) = -n(-x), \tag{40}$$

valamint

$$m(0) = n(0) = 0. \tag{41}$$

A (36) összefüggést (35)-be helyettesítve kapjuk a (42) függvényegyenletet:

(42) $$m(x+y)+m(x-y)-2m(x)-2m(y) = -[n(x+y)+n(x-y)-n(x)].$$

Írjunk a fenti egyenletbe x és y helyébe $-x$-et, $-y$-t, majd az így kapott egyenleteket adjuk össze és alkalmazzuk a (39), (40) egyenleteket, így kapjuk, hogy

(43) $$m(x+y)+m(x-y) = 2m(x)+2n(y).$$

A (43) összefüggést (42)-be helyettesítve, $n(x)$ függvényre azt kapjuk, hogy

(44) $$n(x+y)+n(x-y) = 2n(x),$$

ami az $n(0)=0$ feltétel miatt $n(x)$ additivitását jelenti. A *2. Lemma* állítását ezzel bebizonyítottuk.

3. LEMMA. Tetszőleges racionális a, b-vel, ha $M:R\to R$ kielégíti a (25) normanégyzet egyenletet igaz az

(45) $$m(ax+by) = a^2m(x)+b^2m(y)+ab[m(x+y)-m(x)-m(y)]$$

azonosság.

Bizonyítás. Ismeretes, hogy — lásd pl. [4] — a (25) függvényegyenlet általános megoldása egy szimmetrikus biadditív kétváltozós függvényből nyerhető az

(46) $$m(x) = \frac{1}{2}T(x,x)$$

egyenlet alapján, ahol $T:R\times R\to R$ az alábbi egyenleteket elégíti ki:

(47.1) $$T(x+y,z) = T(x,z)+T(y,z),$$

(47.2) $$T(x,y+z) = T(x,y)+T(x,z),$$

(47.3) $$T(x,y) = T(y,x).$$

A fenti $T:R\times R\to R$ és $m:R\to R$ között — lásd [4] — a

(48) $$T(x,y) = m(x+y)-m(x)-m(y)$$

egyenlet érvényes. A (46)-ból és a (48)-ból *racionális a, b*-vel írhatjuk, hogy

(49) $$m(ax+by) = \frac{1}{2}T(ax+by,\ ax+by) =$$
$$= \frac{1}{2}[T(ax,ax)+T(by,by)+T(ax,by)+T(by,ax)] =$$
$$= a^2m(x)+b^2m(y)+ab[m(x+y)-m(x)-m(y)],$$

mivel *racionális a, b*-vel mindkét változóban additív $T(x,y)$-ra

(50) $$T(ax,by) = abT(x,y)$$

igaz.

II. TÉTEL. *Ha $G \in S$, akkor a* (4) *függvényegyenlet* (5), (6) *feltételeket kielégítő megoldásai zérustól különböző valós a, b, c, d esetén az alábbi függvények:*

$$F(x) = \exp[p(x)+q(x)], \tag{51.1}$$

$$G(x) = \exp[m(x)+n(x)], \tag{51.2}$$

$$H(x) = \exp[p(ax)+m(cx)+q(ax)+n(cx)], \tag{51.3}$$

$$K(x) = \exp[p(bx)+m(dx)+q(bx)+n(dx)], \tag{51.4}$$

ahol $m(x)$ és $p(x)$ az

$$m(x+y)+m(x-y) = 2m(x)+2m(y), \tag{52.1}$$

$$p(x+y)+p(x-y) = 2p(x)+2p(y) \tag{52.2}$$

normanégyzet függvényegyenlet megoldásait jelöli, $q(x)$ és $n(x)$ pedig tetszőleges ún. additív függvények:

$$q(x+y) = q(x)+q(y), \tag{53.1}$$

$$n(x+y) = n(x)+n(y). \tag{53.2}$$

Ilyen alakú megoldások akkor, és csak akkor léteznek, ha

$$R(ax, by)+T(cx, dy) = 0, \tag{54}$$

ahol

$$R(x, y) = p(x+y)-p(x)-p(y), \tag{55.1}$$

$$T(x, y) = m(x+y)-m(x)-m(y). \tag{55.2}$$

Bizonyítás. Mivel $G \in S$, ezért $G\colon R \to R_0$ csak az (51.2) által adott függvény lehet (lásd 2. Lemma). Az (51.2) (15)-be való helyettesítésével az alábbi egyenletet írhatjuk:

$$F(ax+by)\exp[m(cx+dy)-m(cx)-m(dy)] = F(ax)F(by). \tag{56}$$

A fenti egyenletből $u=ax$, $v=by$ $(ab \neq 0)$ helyettesítésével kapjuk az

$$F(u+v)\exp\left[m\left(\frac{c}{a}u+\frac{d}{b}v\right)-m\left(\frac{c}{a}u\right)-m\left(\frac{d}{b}v\right)\right] = F(u)F(v) \tag{57}$$

egyenletet. Az (57)-ből $u=v$ helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$F(2u)\exp\left[\left(\frac{cb+ad}{ab}u\right)-m\left(\frac{c}{a}u\right)-m\left(\frac{d}{b}u\right)\right] = F(u)^2. \tag{58}$$

Innen pedig — mivel $F(u) \neq 0$ $u \in R$-re — lásd az (5) feltételt — kapjuk, hogy

$$F(u) > 0 \quad \text{minden } u \in R\text{-re}. \tag{59}$$

Írjunk (57)-ben v helyébe $-v$-t:

$$F(u-v)\exp\left[m\left(\frac{c}{a}u-\frac{d}{b}v\right)-m\left(\frac{c}{a}u\right)-m\left(\frac{d}{b}v\right)\right] = F(u)F(-v). \tag{60}$$

A (60) és (57) szorzatából kapjuk a (61) egyenletet, ha felhasználjuk, hogy $m:R\to R$ kielégíti az (52.1) normanégyzet egyenletet:

$$F(u+v)F(u-v) = F(u)^2F(v)F(-v). \tag{61}$$

A fenti egyenlet $F(u)>0$, $u\in R$ feltételt kielégítő megoldása — lásd a (34)-es egyenletet:

$$F(x) = \exp[p(x)+q(x)], \tag{62}$$

ahol $p(x)$ az (52.2), $q(x)$ pedig az (53.2) egyenletet elégíti ki. A (13) és (14), valamint az (51.2) és (62) egyenletek alapján írhatjuk, hogy

$$H(x) = \exp[p(ax)+q(ax)+m(cx)+n(cx)], \tag{63}$$

$$K(x) = \exp[p(bx)+q(bx)+m(dx)+m(dx)]. \tag{64}$$

Az (51.1), (62) és (64) által adott megoldások — mint arról közvetlen behelyettesítéssel meggyőződhetünk — akkor, és csak akkor elégíti ki a (4) függvényegyenletet, ha

$$p(ax+by)-p(ax)-p(by)+m(cx+dy)-m(cx)-m(dy) = 0 \tag{65}$$

fennáll minden valós x, y-ra.

A *II. Tétel* és az *1. Lemma* következménye a

III. TÉTEL. *Ha $G:R\to R_0$ folytonos függvény, akkor a zérustól különböző $ad\pm bc\neq 0$ tulajdonságú valós a, b, c, d konstans rendszer esetén a* (4) *függvényegyenlet* (5), (6) *feltételeket kielégítő megoldásai az alábbi függvények:*

$$F(x) = \exp[px^2+q(x)], \tag{66.1}$$

$$G(x) = \exp[mx^2+nx], \tag{66.2}$$

$$H(x) = \exp[(p^2a^2+m^2c^2)x^2+q(ax)+cnx], \tag{66.3}$$

$$K(x) = \exp[(p^2b^2+m^2d^2)x^2+q(bx)+dnx], \tag{66.4}$$

ahol $q(x)$ az (53.2) *Cauchy-féle függvényegyenletet kielégítő tetszőleges additív függvény, n pedig tetszőleges valós állandó. Továbbá a fenti alakú megoldások akkor, és csak akkor léteznek, ha az m, p valós állandók kielégítik az*

$$abp+cdm = 0 \tag{67}$$

egyenletet.

MEGJEGYZÉS. Ha a *II. Tételben* az *a, b, c, d racionális* számok, akkor az (54)-es egyenlet által adott feltétel a *3. Lemma* alkalmazásával felírható az

$$abp(x)+cdm(x) = 0 \tag{67}$$

alakban is. Továbbá ez esetben

$$H(x) = \exp\,[a^2 p(x) + c^2 m(x) + aq(x) + cn(x)]; \tag{68}$$

$$K(x) = \exp\,[b^2 p(x) + d^2 m(x) + bq(x) + dn(x)]. \tag{69}$$

IRODALOM

[1] J. Aczél: *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, New York, and London, 1966.
[2] J. Aczél: 5 Problem (P 78), *Aequationes mathematicae*, Vol. 6. No. 1. 1971. 107 p.
[3] J. Baker: On the Functional Equation $f(x)g(y) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(a_i x + b_i y)$, *International Colloquium on Functional Equation in Roma* 1971.
[4] J. Aczél: The General Solution of Two Functional Equations by Reduction to Functions Additive in Two Variables with Aid of Hamel Bases, *Glasnik Mat. Fiz. Astronom. Društvo, Mat. Fiz. Hrxatske* **2** (20) 65—73, 1965.

ON A CLASS OF THE NON CONTINUOUS SOLUTION OF THE FUNCTIONAL EQUATION $f(ax+by)g(cx+dy)=h(x)k(y)$

by

I. Ecsedi (Miskolc)

Summary

The paper deals with the solution of the functional equation

$$f(ax+by)g(cx+dy)=h(x)k(y), \tag{1}$$

where f, g, h, k are real-valued functions. Here we give the noncontinuos solution of (1) in some special cases.

(Beérkezett: 1972. I. 18.)

A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIA EGYSZERŰBB ELŐÁLLÍTÁSA A KLASSZIKUS ÚTON

Írta: SZÁSZ PÁL

TARTALOM

Bevezetés

I. Elpattanó egyenesek

1. §. Elpattanó félegyenes; elpattanási szög. Egy segédtétel.
2.—4. §. Az elpattanó félegyenesek alaptulajdonságai.
5. §. Elpattanó irányított egyenesek: $a \| b$.
6. §. Elpattanó egyenesek homolog pontjai és középvonala.
7. §. Végtelen távoli pontok.

II. Elpattanó háromél

8. §. Elpattanó egyeneseken átmenő két sík metszésvonala ezektől elpattanó.
9. §. Ha $l \| m$ s az l egyenesen át az (l, m) síkra merőleges α, m-en át viszont az (l, m)-re nem merőleges β síkot fektetjük, akkor α és β metszik egymást.
10. §. Ha $a \| b$ s az a egyenesen átmenő α sík különbözik az (a, b) síktól, akkor b-n át egy és csak egy olyan β sík fektethető, amely α-t nem metszi.
11. §. Elpattanó háromél; ennek külső szöge nem lehet egyenlő vele átellenes belső szöggel.
12. §. Ha $a \| b$ s az ezeken rendre átmenő α, β síkok az (a, b) síkkal annak egyik oldalán olyan belső szögeket alkotnak, amelyeknek összege $<180°$, akkor α és β metszik egymást.
13. §. Elpattanó háromél szögeinek összege 180°.
14. §. Ha α, β az (a, b, c) elpattanó háromél a, ill. b élén átmenő síkok, amelyek rendre merőlegesek az (a, c), resp. (b, c) oldalra, akkor α és β metszik egymást.
15. §. Három egymástól elpattanó egyenesen a homolog pontok vonatkozása tranzitív.

III. Paraciklus és paraszféra

16. §. Paraciklus; elemi tulajdonságok.
17. §. Ha az $\widehat{AC}$ paraciklus-ívnek B valamely közbülső pontja, akkor $\overline{AB} < \overline{AC}$. Paraciklus-ívbe beírt nyílt poligon hossza bizonyos korlát alatt marad.
18. §. Paracikluson az ívekre érvényes az *Eudoxus*- és a *Cantor*-féle folytonossági axióma.
19. §. Paraszféra; elemi tulajdonságok.
20. §. A paraszférán az euklideszi síkgeometria érvényes.

IV. A hiperbolikus trigonometria alapképletei

21. §. Derékszög szárainak végtelen távoli pontjait összekötő egyenes létezése. A paraciklus-ívek S egysége. Paraciklus-ív a magasságának, resp. az érintőjének mint távolságnak megfelelő elpattanási szöggel kifejezve.
22. §. A derékszögű háromszög szögtrigonometriájának alapképletei.
23. §. Az általános háromszög szögtrigonometriai alapképletei.
24. §. A koncentrikus paraciklusok megfelelő íveinek viszonyára vonatkozó tétel.
25. §. Az elpattanási szög a távolsággal kifejezve. A k természetes hosszegység. A hiperbolikus trigonometria alapképletei.

V. Paraciklus-ívek rektifikációja

26. §. Ha az $\widehat{AP}$ paraciklus-íven Q a P-től különböző pont, és H a $\widehat{PQ}$ ív felezőpontja, akkor

$$2\overline{AH} > \overline{AP}+\overline{AQ}.$$

27. §. Ha a paracikluson a $\sigma>\sigma'$ ívek húrja rendre s és s', akkor

$$\frac{\sigma'}{\sigma} < \frac{s'}{s}.$$

28. §. Ha α a paraciklus valamely rögzített íve és a változó σ ív húrja s, akkor $\frac{\alpha}{\sigma} s$ meghatározott pozitív határértékhez tart, midőn $\sigma \to 0$.

29. §. Az $\widehat{AB}$ paraciklus-ív rektifikálható és ívhosszúsága

$$p = \frac{\widehat{AB}}{\alpha} L,$$

ahol α megadott paraciklus-ív és a változó σ ív húrját s-sel jelölve

$$L = \lim \frac{\alpha}{\sigma} s \quad (\sigma \to 0).$$

30. §. A k természetes hosszegység a paraciklus-ívek S egységének ívhossza.
31. §. Az r sugarú kör kerületének leolvasása a paraszféráról. BOLYAI JÁNOS abszolút sinustétele.

Bevezetés

Az úgynevezett *hiperbolikus geometria* vagy *Bolyai—Lobacsevszkij*-féle geometria alapfeltevését, EUKLIDESZ párhuzamossági axiómájával ellentétben (de a többi axióma megtartásával), egyik lehetséges alakjában kifejezi a következő

AXIÓMA. *Van olyan e_0 egyenes és rajta kívül fekvő P_0 pont, amelyek síkjában P_0-on át nem csak egy olyan egyenes fektethető, amely e_0-t nem metszi. (Nem-metszési axióma.)*

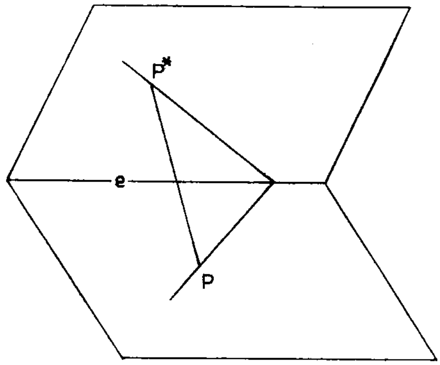
Ebből már következik, hogy ugyanez bármely e egyenes és rajta kívüli P pont esetében is igaz, vagyis fennáll a következő

TÉTEL. *Bármely e egyenes és rajta kívül fekvő P pont síkjában nem csak egy olyan egyenes fektethető, amely e-t nem metszi. (Nem-metszési tétel.)*

Ezt következőképp láthatjuk be.[1] Fektessünk az e egyenesen át egy az (e, P) síktól különböző síkot (1. ábra). Nyilvánvaló, hogy a fenti axiómában szereplő P_0 pontnak megfelelően ez utóbbi síkban is van bizonyos P^* pont az e egyenesen kívül, amelyen át nem csak egy olyan egyenes fektethető, amely e-t nem metszi. A PP^* egyenesen átmenő síkok és az (e, P^*) síkban a P^* ponton átmenő egyenesek között nyilván kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesíthetünk azáltal, hogy min-

[1] Vö. *szerzőtől,* Az elliptikus, az euklideszi és a hiperbolikus geometria szétválasztása. *Matematikai és Fizikai Lapok,* **48** (1941), 243—271, spec. 261—263.

den ilyen síkhoz az (e, P^*) síkkal való metszésvonalát rendeljük. Ekkor minden szóban forgó síknak, amely e-t metszi, nyilván e-t metsző egyenes felel meg és fordítva. Ugyanígy létesíthetünk kölcsönösen egyértelmű vonatkozást a PP^* egyenesen átmenő síkok és az (e, P) síkban P-n átmenő egyenesek között, amikor is e-t metsző síknak szintén e-t metsző egyenes felel meg és fordítva. Ennélfogva az (e, P^*) sík P^*-on átmenő egyenesei és az (e, P) sík P-n átmenő egyenesei között olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozás van, hogy e-t metsző egyenesnek ugyancsak e-t metsző egyenes felel meg. Tehát az (e, P) síkban is P-n át nem csak egy olyan egyenes fektethető, amely e-t nem metszi. Ezt kellett megmutatnunk.



1. ábra

A fenti axióma logikailag megengedett voltát, vagyis a hiperbolikus geometria *ellentmondásmentességét* sem BOLYAI JÁNOS sem N. J. LOBACSEVSZKIJ nem bizonyította be. Ezt csak jóval később F. KLEIN[2] majd utána más módszerrel H. POINCARÉ[3] tette meg.[4]

Az alábbiakban a hiperbolikus trigonometriának az eredeti klasszikus úton való előállítását mutatjuk be elejétől kezdve, lényeges egyszerűsítéssel. Ez az egyszerűsítés egyéb részletek mellett főleg abban áll, hogy először a *hiperbolikus szögtrigonometriát* vagyis a háromszög szögei és az oldalainak megfelelő *elpattanási szögek* közötti egyenleteket állítjuk elő, s ezekből jutunk azután, az elpattanási szög meghatározásával, az oldalak és a szögek között fennálló egyenletekhez.[5] Alkalmazásképp, a paraciklus-ívek rektifikációjával,[6] s ennek alapján az r sugarú kör kerületének meghatározásával fejezzük be a tárgyalást.

I. Elpattanó egyenesek

1.§. TÉTEL. *Ha megadjuk a síkban a P és Q pontokat, s a PQ egyenes egyik oldalán a Q-ból kiinduló QY félegyenest, P-ből a PQ egyenes ugyanazon oldalán húzható egy és csak egy PX félegyenes úgy, hogy*

1° *PX nem metszi a QY félegyenest,*

2° *P-ből a $QPX_{\sphericalangle}$ belsejébe húzott bármely félegyenes metszi QY-t.*

[2] F. KLEIN, Über die sogenannte Nicht-euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen,* 4 (1871), 573—625.

[3] H. POINCARÉ, Mémoire sur les groupes kleinéens. *Acta Mathematica,* 3 (1883), 49—92, spec. 55—56.

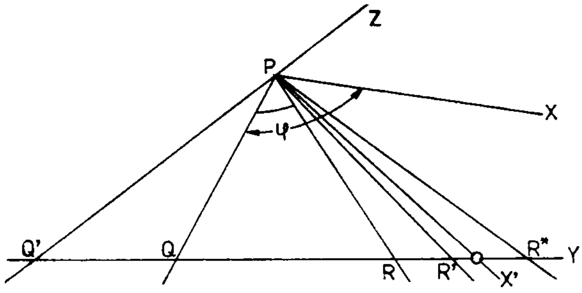
[4] Az utóbbi módszernek elemigeometriai tárgyalását illetően lásd *szerzőtől,* Elementargeometrischer Beweis der Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Raumgeometrie mit Hilfe des Poincaréschen Halbraumes. *Acta Mathematica Acad. Sci. Hungaricae,* 5 (1954), 255—261.

[5] Vö. *szerzőtől,* Ein bequemer Weg zur Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie mit Hilfe der Grenzkugel. *Annales Universitatis Sci. Budapestinensis etc., Sectio Math.,* V (1962), 87—93.

[6] Vö. *szerzőtől,* A ciklus-ívek rektifikációjáról. *MTA III. Osztályának Közleményei,* 5 (1955), 145—148.

Bizonyítás. Legyen Q' (2. ábra) a QY félegyenes kiegészítőjének valamely pontja, s PZ az a félegyenes a PQ' egyenesben, amely nem tartalmazza e Q' pontot. Akkor a QY félegyenes bármelyik Q-tól különböző R pontjára nyilván

$$QPR_{\sphericalangle} < QPZ_{\sphericalangle}.$$



2. ábra.

Eszerint a P-ből húzott és a QY félegyenest metsző PR félegyenesekre a $QPR_{\sphericalangle}$ felülről korlátos. Legyen ennek *Weierstrass*-féle felső határa φ. Akkor az a PX félegyenes a PQ egyenes szóban forgó oldalán, amelyre

$$QPX_{\sphericalangle} = \varphi,$$

a fenti 1° és 2° tulajdonsággal bír. Ezt következőképp láthatjuk be.

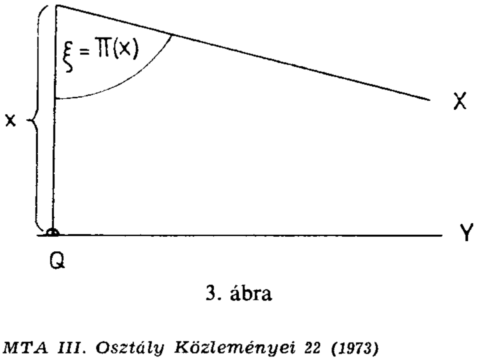
Először is PX nem metszheti a QY félegyenest, mert az ilyen metsző PR félegyeneshez (2. ábra) mindig található olyan PR', amelyre $QPR'_{\sphericalangle} > QPR_{\sphericalangle}$, már pedig a felső határnál nagyobb szög nincs a szóban forgó szögek halmazában.

Legyen most PX' egy a $QPX_{\sphericalangle}$ belsejébe húzott félegyenes. Ekkor

$$QPX'_{\sphericalangle} < QPX_{\sphericalangle} = \varphi,$$

amely φ szög a kérdéses halmaz felső határa, tehát a $QPX'_{\sphericalangle}$-nél nagyobb már van a halmazban, vagyis a QY félegyenesen az R^* pont úgy választható, hogy $QPR^*_{\sphericalangle} > QPX'_{\sphericalangle}$. Eszerint a PX' félegyenes a PQR^* háromszög belsejébe hatol, tehát metszi a QR^* oldalt, s így a QY félegyenest.

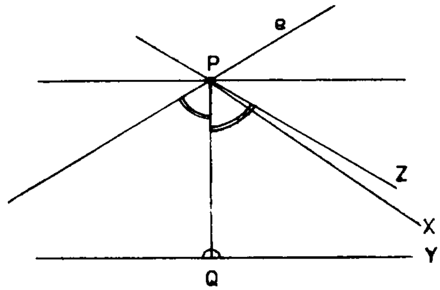
Ezzel kimutattuk, hogy a PX félegyenes valóban a mondott tulajdonságú. Más ilyen félegyenes pedig nyilván nincsen. Q. e. d.



3. ábra

DEFINÍCIÓ. A fenti tételben szereplő PX félegyenest a *P-ből húzott és a QY félegyenestől „elpattanó félegyenesnek"* nevezzük, az elpattanás jelölésére szolgáljon $PX \| QY$ (olv. PX „elpattanó" QY-tól). Ha $PQ \perp QY$ (3. ábra), akkor a $QPX_{\sphericalangle}$-et az $x = \overline{PQ}$ távolságnak megfelelő ξ *„elpattanási szögnek"* mondjuk, jele $\xi=\Pi(x)$.

1. KOROLLÁRIUM. *Az elpattanási szög mindig hegyesszög.*

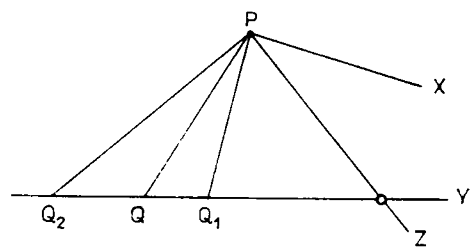


4. ábra

Ugyanis a P-ben PQ-ra állított merőleges (4. ábra) tudvalevőleg nem metszi a QY egyenest, tehát a nem-metszési tétel értelmében (Bev.) P-n át fektethető egy a PQ-ra nem merőleges e egyenes, amely ugyancsak nem metszi QY-t. Ennek vagy a PQ egyenesre vonatkozó tükörképének arra a PZ felére, amely PQ-nak a QY félegyenest tartalmazó oldalán van, a $QPZ_\sphericalangle$ hegyesszög, s minthogy a PX elpattanó félegyenesre ennek fogalma szerint

$$QPX_\sphericalangle \leqq QPZ_\sphericalangle,$$

annál inkább a $QPX_\sphericalangle$ is hegyesszög.



5. ábra

2. KOROLLÁRIUM. *Ha $PX \| QY$ és Q_1 a QY félegyenesnek, Q_2 pedig a kiegészítőjének pontja, akkor egyben $PX \| Q_1Y$, valamint $PX \| Q_2Y$* (5. ábra).

Mert először is PX nem metszvén a QY félegyenest, nyilván nem metszi sem Q_1Y-t, sem pedig Q_2Y-t. Ha mármost PZ a $Q_1PX_\sphericalangle$-nek közbülső egyenese, akkor a fortiori ilyen egyenese a $QPX_\sphericalangle$-nek is, tehát a feltevés folytán metszi a QY félegyenest, s a metszéspont evidenter a Q_1Y félegyenes pontja. Ha viszont PZ a $Q_2PX_\sphericalangle$-nek közbülső egyenese, akkor vagy a $Q_2PQ_\sphericalangle$-nek, vagy a $QPX_\sphericalangle$-nek is ilyen egyenese, vagy pedig összeesik a PQ félegyenessel. Az első esetben PZ metszi a PQ_2Q háromszög $\overline{Q_2Q}$ oldalát, s ezzel a Q_2Y félegyenest, a másodikban pedig feltevés szerint metszi a QY félegyenest, amely Q_2Y-nak része, végül a harmadik esetben metszi Q_2Y-t a Q pontban.

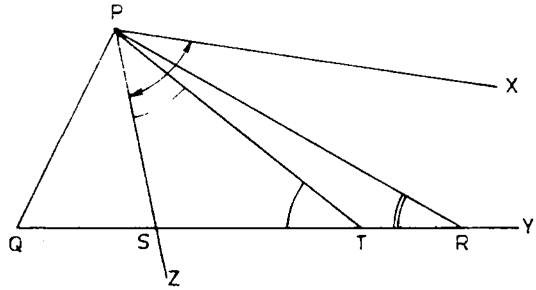
Az alábbiakban alkalmazásra kerül még a következő

SEGÉDTÉTEL. *Ha a PQR háromszögben rögzített $\overline{PQ}$ oldal és $PQR_\sphericalangle$ mellett $\overline{QR}\to+\infty$, akkor $QRP_\sphericalangle\to 0$.*

Ezt így láthatjuk be. Tekintsük a $\overline{QR}$ oldal meghosszabbítását képező QY, és az ettől elpattanó PX félegyenest (6. ábra). Adatván $\varepsilon>0$, a $QPX_\sphericalangle$ közbülső PZ félegyenesét válasszuk úgy, hogy $ZPX_\sphericalangle<\varepsilon$ legyen. Minthogy $PX \| QY$, e PZ félegyenes metszi QY-t valamely S pontban. Ha mármost az SY félegyenesre felrakva $\overline{SP}=\overline{ST}$, akkor

$$STP_\sphericalangle = SPT_\sphericalangle < ZPX_\sphericalangle,$$

tehát PZ választása folytán $STP_\sphericalangle<\varepsilon$. És ha $\overline{QR}>\overline{QT}$, akkor a külső szög tétele értelmében $QRP_\sphericalangle<STP_\sphericalangle$, s így még inkább $QRP_\sphericalangle<\varepsilon$. Ezzel kimutattuk, hogy $QRP_\sphericalangle\to 0$, midőn $\overline{QR}\to+\infty$.



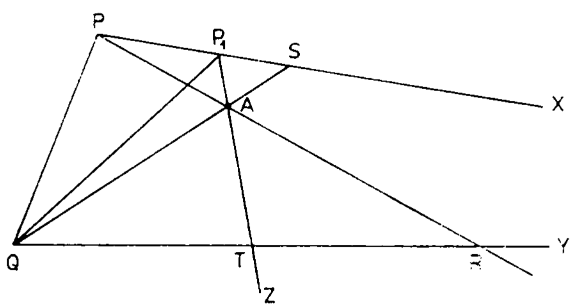
6. ábra

2. §. Az elpattanó félegyenes megrövidítésével vagy meghosszabbításával az elpattanási tulajdonság megmarad. Ezt fejezi ki a következő

1. TÉTEL. *Ha $PX \| QY$ és a P_1 pont a PX félegyenesen, P_2 pedig ennek a kiegészítőjén van, akkor $P_1X \| QY$ valamint $P_2X \| QY$.*

Bizonyítás. A feltevés folytán P_1X nem metszi a QY félegyenest. Ki kell még mutatnunk, hogy P_1-ből a $QP_1X_{\sphericalangle}$ belsejébe húzott bármely P_1Z félegyenes már metszi QY-t.

Válasszunk evégből a P_1X félegyenesen valamely közbülső S pontot (7. ábra). Minthogy ekkor P_1Z a $QP_1S_{\sphericalangle}$-nek közbülső félegyenese, azért metszi a QP_1S



7. ábra

háromszög $\overline{QS}$ oldalát valamely közbülső A pontban. S mivel PA a $QPX_{\sphericalangle}$-nek nyilván közbülső félegyenese és a feltevés értelmében $PX \| QY$, azért PA metszi QY-t valamely R pontban, s A evidenter P és R közé esik. Minthogy pedig P_1 a P és S között van, azért P_1Z a $PAS_{\sphericalangle}$-nek közbülső egyenese, tehát az $RAQ_{\sphericalangle}$-nek is közbülső egyenese, s így metszi az RAQ háromszög $\overline{QR}$ oldalát valamely közbülső T pontban, szóval a P_1Z félegyenes metszi QY-t.

Ugyancsak a feltevés folytán a P_2X félegyenes sem metszi QY-t. Be kell még bizonyítanunk, hogy P_2-ből a $QP_2X_{\sphericalangle}$ belsejébe húzott bármely P_2U félegyenes már metszi QY-t.

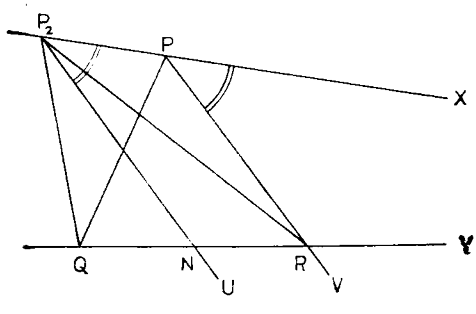
Legyen átrakva (8. ábra)

$$UP_2X_\sphericalangle = VPX_\sphericalangle.$$

Ekkor a PV félegyenes P-ből a $QPX_\sphericalangle$ belsejébe hatol, mert a külső szög tétele értelmében $QPX_\sphericalangle > QP_2X_\sphericalangle$, tehát még inkább

$$QPX_\sphericalangle > UP_2X_\sphericalangle = VPX_\sphericalangle,$$

s mivel feltevés szerint $PX \| QY$, ennélfogva PV metszi a QY félegyenest valamely R pontban. Minthogy pedig ismét a külső szög tétele értelmében $RP_2P_\sphericalangle < RPX_\sphericalangle$ vagyis $RP_2P_\sphericalangle < UP_2X$,



8. ábra

azért P_2U a $QP_2R_\sphericalangle$ közbülső félegyenese, tehát metszi a QP_2R háromszög QR oldalát valamely közbülső N pontban, szóval valóban metszi a QY félegyenest. Qu. e. d.

Ennek felhasználásával bebizonyítható még a következő

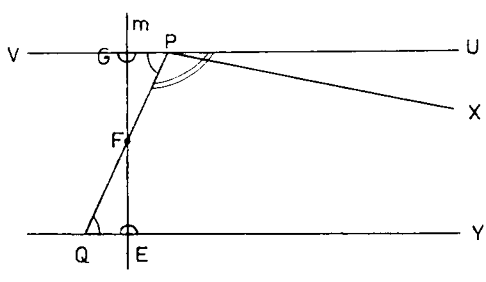
2. TÉTEL. *Ha a PQ egyenesnek a QY félegyenest tartalmazó oldalán a PU félegyeneset úgy választjuk, hogy*

$$QPU_\sphericalangle + PQY_\sphericalangle = 180°, \tag{1}$$

akkor PU nem metszi QY-t, de attól nem is elpattanó.

Bizonyítás. Ha $PQY = 90°$, akkor az állítás következik az előbbi § 1. tételének 1. korolláriumából. Feltehetjük tehát, hogy $PQY \neq 90°$ (9. ábra).

A PU félegyenes nem metszheti QY-t a külső szög tétele folytán. Az elpattanás lehetetlenségét bebizonyítandó, fektessük a $\overline{PQ}$ egyenesdarab F felezőpontján át a QY egyenesre merőleges m egyenest, amely azt E-ben messe, és legyen PU kiegészítője a PV félegyenes. Akkor (1)-ből folyólag $PQY_\sphericalangle = QPV_\sphericalangle$, s így nyilvánvaló, hogy m merőlegesen metszi az UV egyenest is valamely G pontban. Ha mármost $PU \| QY$ állana, akkor az előbbi tétel szerint egyben $GU \| QY$ volna, s ebből következnék (1. §, 2. Korollárium), hogy $GU \| EY$. Ez azonban lehetetlen (1. §, 1. Korollárium), miután $EGU_\sphericalangle$ derékszög. Tehát $PU \nparallel QY$, q. e. d.



9. ábra

KOROLLÁRIUM. *Ha $PX \| QY$, akkor*

$$QPX_\sphericalangle + PQY_\sphericalangle < 180°.$$

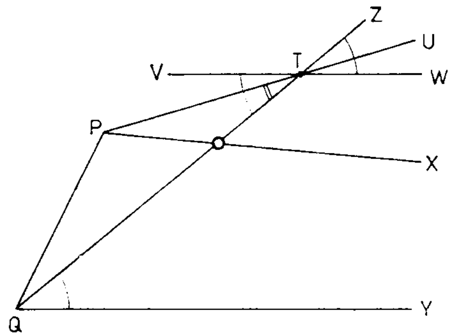
Ugyanis a tételből folyólag PX szükségképp közbülső félegyenese a $QPU_\sphericalangle$-nek (9. ábra).

3. §. Az elpattanás relációja *szimmetrikus,* vagyis fennáll a következő

TÉTEL. *Ha $PX \| QY$, akkor egyben $QY \| PX$.*

Bizonyítás.[7] A feltevés szerint QY nem metszi PX-et. Ki kell még mutatnunk, hogy a $PQY_{\sphericalangle}$ bármely közbülső QZ félegyenese metszi PX-et.

E QZ félegyenesen a T pontot úgy választhatjuk (1. §. Segédtétel), hogy $QTP_{\sphericalangle} < YQZ_{\sphericalangle}$. Legyen a P-ből T felé húzott félegyenes PU, és a QT egyenes másik oldalára átrakva $YQZ_{\sphericalangle} = VTQ_{\sphericalangle}$, s a TV félegyenes kiegészítője TW (10. ábra). Akkor T választása folytán TU a $WTZ_{\sphericalangle}$ közbülső félegyenese. Mivel pedig TW nem metszi a QY félegyenest, de attól nem is elpattanó (2. §. 2. Tétel), azért a TU félegyenes is ilyen tulajdonságú. Ennélfogva PU is a QY-t nem metsző, de attól nem is elpattanó félegyenes (2. §. 1. Tétel). Következőleg a QY-tól elpattanó PX félegyenes a $QPU_{\sphericalangle}$ közbülső félegyenese, tehát metszi a PQT háromszög $\overline{QT}$ oldalát, s ezzel a QZ félegyenest. Q. e. d.

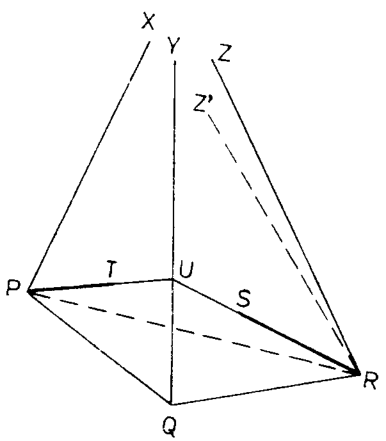


10. ábra

4. §. Az elpattanás relációja nemcsak szimmetrikus, mint éppen láttuk, hanem *tranzitív* is, azaz érvényes a következő

TÉTEL. *Ha $PX \| QY$ és $QY \| RZ$, de R nincs a PX félegyenesen vagy kiegészítőjén, akkor $PX \| RZ$.*

Bizonyítás. Először tekintsük azt az esetet, midőn a PX, QY, RZ félegyenesek nincsenek egy síkban. Ez esetben P, Q és R nyilván nincsenek egy egyenesben, és PX, QY, RZ egyike sem fekszik a PQR síkban, tehát mindhárman nyilván e sík ugyanazon oldalára esnek (11. ábra).



11. ábra

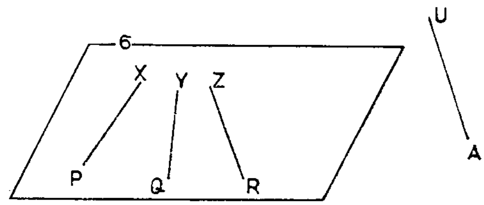
Megmutatjuk, hogy RZ és PX egy síkban vannak, vagyis RZ az RPX síkban van. Tekintsük evégből az RPX és RQY síkok metszésvonalának azt az RZ' félegyenesét, amely a PQR síknak a PX, QY, RZ félegyeneseket tartalmazó oldalán van. Minthogy PX és QY nem metszik egymást, azért az $XPQY$ sík evidenter nem metszheti RZ'-t. Tehát RZ' nem metszi QY-t. De tőle elpattanó! Mert legyen RS a $QRZ'_{\sphericalangle}$ valamely közbülső félegyenese. Akkor az SRP sík metszi a QPX síknak a PQR sík szóban forgó oldalára eső felét olyan PT félegyenesben, amely a $QPX_{\sphericalangle}$-

[7] Ez BOLYAI JÁNOSnak a hátrahagyott irataiban talált bizonyítása, amely egyszerűbb az *Appendix*ben közöltnél. Vö. STÄCKEL PÁL, *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai,* ford. RADOS IGNÁC, Budapest, 1914, II. köt., 291.

nek közbülső félegyenese. De mivel $PX \| QY$, e PT metszi QY-t valamely U pontban, s így RS is metszi azt U-ban. Eszerint csakugyan $RZ' \| QY$. Minthogy azonban $QY \| RZ$, azért egyben $RZ \| QY$ (3. §.), következőleg RZ' összeesik RZ-vel, tehát RZ az RPX síkban van, vagyis RZ és PX tényleg egy síkban vannak.

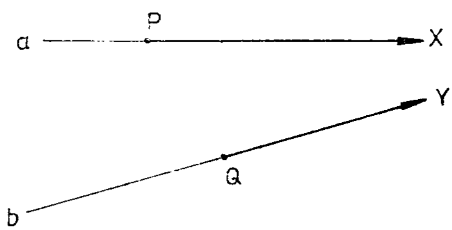
Most az előbbihez analóg okoskodással következik, hogy $RZ \| PX$, tehát egyszersmind $PX \| RZ$ (3. §.).

Az éppen tárgyalt térbeli esetre visszavezethető az az eset, midőn PX, QY és RZ ugyanazon σ síkba esnek. Ugyanis egy a σ síkon kívüli A pontból húzzuk az AU félegyenest úgy, hogy $AU \| QY$ (12. ábra). Ekkor AU nem esik a σ síkba. S mivel $AU \| QY \| RZ$, az előbbiek szerint $AU \| RZ$. De mivel $PX \| QY$, azért egyszersmind $QY \| PX$ (3. §), tehát AU választása folytán fennáll $AU \| QY \| PX$, s így szintén az előbbiek szerint $AU \| PX$, következőleg $PX \| AU$. Szóval $PX \| AU \| RZ$, tehát ismét a fentebbiek értelmében $PX \| RZ$. Q. e. d.



12. ábra

5. §. Fentebbiek alapján (1. §, 2. Kor; 2. §, 1. Tét.), irányított egyenesekre vonatkozólag az *elpattanás* fogalmát megadja a következő



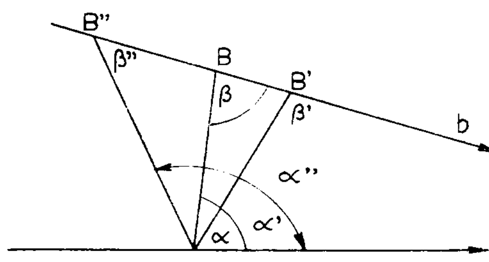
13. ábra

DEFINÍCIÓ. Az irányított a, b egyenesekről azt mondjuk, hogy *a elpattanó b-től, jelben* $a \| b$, ha ez egyenesekben rendre az adott irányba eső PX, QY félegyeneseket választván, $PX \| QY$ (13. ábra).

1. KOROLLÁRIUM. *Ha $a \| b$, akkor a és b egy síkban vannak, s egymást nem metszik.*

2. KOROLLÁRIUM. *Ha $a \| b$, akkor egyben $b \| a$* (3. §.).

3. KOROLLÁRIUM. *Ha $a \| b$ és $b \| c$, s c az a-tól különbözik, akkor $a \| c$* (4. §.).

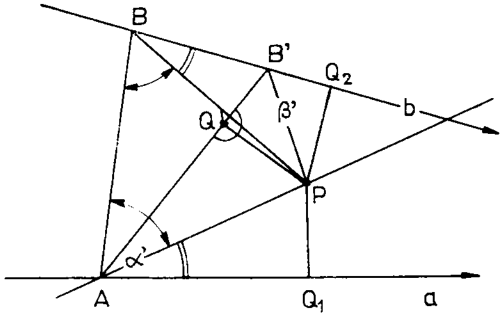


14. ábra

6. §. TÉTEL. *Ha $a \| b$, akkor az a egyenes bármely A pontjához egy és csak egy B pont található a b egyenesen úgy, hogy a és b az AB egyenessel annak ugyanazon az oldalán egyenlő belső szögeket alkossanak.*

Bizonyítás. Először is A-hoz mindenesetre legföljebb egy ilyen B pont található. Ha ugyanis (14. ábra) a és b-re $\alpha = \beta$, akkor a b egyenesen a b utáni B' és a B előtti B'' pontot választván, az ábra jelöléseivel a külső szög tételét alkalmazva

$$\beta' > \beta = \alpha > \alpha',$$
$$\alpha'' > \alpha = \beta > \beta'',$$



15. ábra

következőleg

$$\beta' > \alpha', \quad \alpha'' > \beta''.$$

Most megmutatjuk, hogy A-hoz valóban található ilyen B pont. Válasszunk evégből a b egyenesen tetszés szerint valamely B' pontot, s felezzük (15. ábra) az α' és β' szöget. Minthogy $a \| b$, azért az α' szög felezője metszi a b egyenest, tehát nyilván metszi a β' szög felezőjét is valamely P pontban, amely az a, b egyenesek közti sávban fekszik. Bocsássuk P-ből a-ra a $\overline{PQ_1}$, b-re a $\overline{PQ_2}$, AB'-re a $\overline{PQ}$ merőlegest. Akkor

$$\overline{PQ_1} = \overline{PQ} = \overline{PQ_2},$$

tehát $\overline{PQ_1} = \overline{PQ_2}$. Ha mármost b-re a Q_2-ből B' felé felrakva $\overline{Q_1A} = \overline{Q_2B}$, akkor $PAQ_{1\triangle} \equiv PBQ_{2\triangle}$ (két oldal és a közbezárt derékszög megegyezése folytán), s így

$$PAQ_{1\sphericalangle} = PBQ_{2\sphericalangle}, \quad \overline{AP} = \overline{BP}.$$

Utóbbiból folyólag

$$PAB_{\sphericalangle} = PBA_{\sphericalangle},$$

tehát előbbire tekintettel

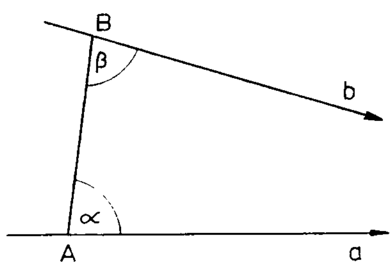
$$Q_1AB_{\sphericalangle} = Q_2BA_{\sphericalangle},$$

vagyis a B pont a kívánt tulajdonságú. Q. e. d.

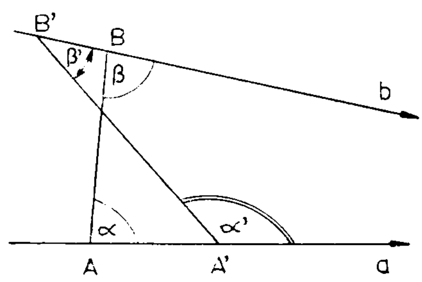
1. Definíció. A fenti tételben szereplő A és B pontról azt mondjuk, hogy B az a egyenes A pontjához *homológ pont* a b egyenesen és fordítva.

1. Korollárium. *Ha $a \| b$, s ezeknek A és B homológ pontjai, akkor az AB egyenesnek az elpattanás felé első oldalán az $\alpha = \beta$ szög* (16. ábra) *hegyesszög* (2. §, 2. Tétel, Korollárium).

2. Korollárium. *Ha $a \| b$, s A és B valamint A' és B', ezeknek homológ pontjai, akkor A' és B' az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak.* Mert ha pl. A' az A



16. ábra



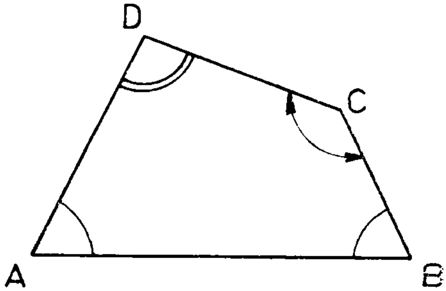
17. ábra

ponttól az elpattanás irányába, B' viszont B-től az ellenkező irányba esnék (17. ábra), akkor a külső szög tétele szerint

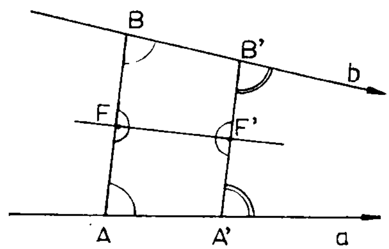
$$\alpha' > \alpha = \beta > \beta'$$

állana, tehát $\alpha' > \beta'$ volna ellentétben azzal, hogy A' és B' homológ pontok.

3. KOROLLÁRIUM. *Ha $a \| b$, s ezeknek A és B, valamint A' és B' homológ pontjai, akkor $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.* Ez nyilvánvaló azon ismert tétel alapján, hogy ha az $ABCD$ konvex négyszögben $A_\sphericalangle = B_\sphericalangle$ és $\overline{AD} > \overline{BC}$, akkor $D_\sphericalangle < C_\sphericalangle$ (18. ábra).



18. ábra



19. ábra

4. KOROLLÁRIUM. *Ha $a \| b$, s ezeknek A és B, valamint A' és B' homológ pontjai, akkor az $\overline{AB}$ és $\overline{A'B'}$ egyenesdaraboknak közös felező merőlegese van.* Ugyanis az $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ egyenesdarabok felezőpontját rendre F-, F'-vel jelölve (19. ábra), az előbbi 3. korollárium alapján nyilvánvaló, hogy $AFF'A' \equiv BFF'B'$, tehát

$$AFF'_\sphericalangle = BFF'_\sphericalangle, \quad A'F'F_\sphericalangle = B'F'F_\sphericalangle,$$

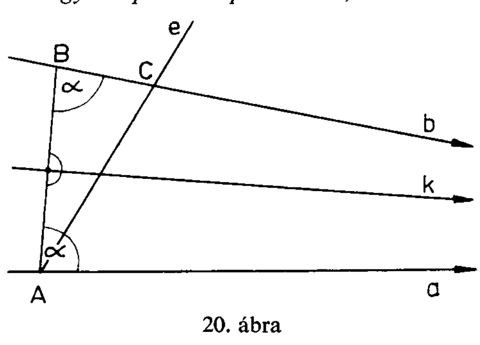
vagyis ezek derékszögek.

2. DEFINÍCIÓ. Ha $a \| b$, s ezeken A és B homológ pontok, akkor az $\overline{AB}$ egyenesdarab felező merőlegesét *az (a, b) elpattanó egyenespár középvonalának* nevezzük.

1. KOROLLÁRIUM. *Minden elpattanó egyenespárnak egy és csak egy középvonala van* (1. Definíció, 4. Korollárium).

2. KOROLLÁRIUM. *Ha az (a, b) elpattanó egyenespár középvonala k, akkor a és b egymásnak k-ra vonatkozó tükörképei.*

3. KOROLLÁRIUM. *Ha az (a, b) elpattanó egyenespár középvonala k, akkor $a \| k$ és $b \| k$.* Mert először is az a egyenes nem metszheti k-t, minthogy ekkor b is metszené k-t ugyanabban a pontban (előbbi 2. Korollárium), tehát a és b metszenék egymást. És hasonlóképp b sem metszheti k-t. Ha továbbá e az A csúcsú α belső szög közbülső egyenese (20. ábra), akkor ez metszi b-t va-



20. ábra

lamely C pontban, minthogy $a \| b$. Tehát ez e egyenes metszi k-t is, miután a és b, s ezzel A és C is k-nak nyilván két különböző oldalán vannak. Ezek szerint $a \| k$, és ugyanígy $b \| k$.

7. §. Az elpattanó félegyenesek alaptulajdonságaiból folyólag (2. §, 1. Tétel; 3., 4. §§) *a tér félegyeneseit osztályokba sorolhatjuk úgy, hogy minden félegyenes egy és csak egy osztályba tartozzék, s két különböző félegyenes akkor és csak akkor soroltassék ugyanabba az osztályba, ha vagy elpattanók, vagy egyik a másik meghosszabbítása.*

Ez osztályozás szem előtt tartásával, egyszerűbb kifejezésmódot enged meg a következő

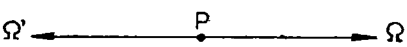
1. DEFINÍCIÓ. Az előbbi félegyenes-osztályok mindegyikéhez rendelünk egy *végtelen távoli pontot,* s erről azt mondjuk, hogy az osztály félegyenesein *rajta van.* A különböző osztályokhoz rendelt végtelen távoli pontokat különbözőeknek tekintjük.

1. KOROLLÁRIUM. *Két félegyenesen akkor és csak akkor van rajta ugyanaz a végtelen távoli pont, ha azok vagy elpattanók, vagy egyik a másik meghosszabbítása.*

2. KOROLLÁRIUM. *Az egy pontból kiinduló összes félegyenesek végtelen távoli pontjai mind különbözők, s ezek a végtelen távoli pontok összességét alkotják.*

2. DEFINÍCIÓ. Az Ω végtelen távoli pontról azt mondjuk, hogy az e egyenesen, ill. a σ síkon rajta van, ha az e, resp. σ valamely P pontját Ω-val összekötő $P\Omega$ félegyenes e-be, ill. σ-ba esik.

1. KOROLLÁRIUM. *Minden egyenesen két végtelen távoli pont van* (21. ábra).



21. ábra

2. KOROLLÁRIUM. *Elpattanó egyeneseknek egy és csak egy közös végtelen távoli pontja van* (2. §, 2. Tétel, Korollárium).

3. KOROLLÁRIUM. *Ha két különböző egyenesnek van közös végtelen távoli pontja, akkor azok elpattanók.*

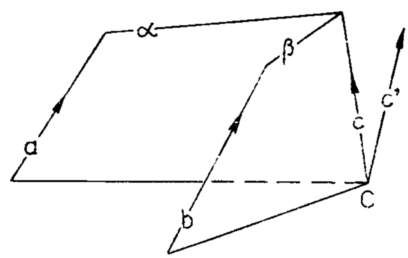
4. KOROLLÁRIUM. *Ha az e egyenes rajta van a σ síkon, akkor végtelen távoli pontjai is rajta vannak ezen a síkon.*

3. DEFINÍCIÓ. Ha a síkban az Ω végtelen távoli pont nincs rajta az e egyenesen, akkor azt mondjuk, hogy Ω ez e egyenesnek *azon az oldalán van,* amelyen az e valamely P pontjából húzott $P\Omega$ félegyenes. (E megállapítás nyilván független a P pont speciális választásától.)

II. Elpattanó háromél

8. §. TÉTEL. *Ha $a \| b$, s az a egyenesen átmenő α sík a b egyenesen átfektetett β síkot egy harmadik c egyenesben metszi, akkor megfelelően irányítva $c \| a$, és $c \| b$.*

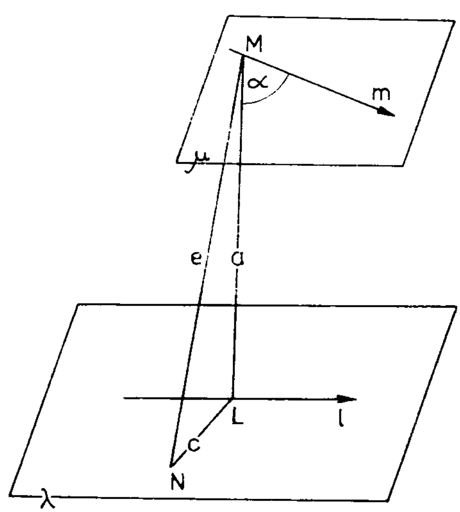
Bizonyítás. Válasszunk a c egyenesen valamely C pontot, s fektessük ezen át az a-tól elpattanó c' egyenest (22. ábra). Minthogy C az α síkban van, azért c' is α-ba esik. De $c' \| a \| b$ folytán $c' \| b$ (5. §, 3. Korollárium), s mivel C a β síknak is pontja, azért c' a β síkon is rajta van. Vagyis c' az α és β síkok metszésvonala, azaz összeesik c-vel. Tehát $c \| a$ és $c \| b$. Q. e. d.



22. ábra

9. §. *Ha $l \| m$, s az l egyenesen át az (l, m) síkra merőleges λ síkot, m-en át viszont az (l, m)-re nem merőleges μ síkot fektetjük, akkor e λ, μ síkok metszik egymást.*

Bizonyítás.[8] Bocsássuk az m egyenes valamely M pontjából l-re az $\overline{ML}=a$ merőlegest (23. ábra). A μ sík nem merőleges az LM egyenesre, mert az $\alpha=(a, m)_{\sphericalangle}$ éppen az a távolságnak megfelelő elpattanási szög, tehát hegyesszög (1. §, 1. Korollárium). Legyen mármost az LM egyenes vetülete a μ síkon e. Ez különbözik m-től, miután az m-et és LM-et tartalmazó (l, m) sík feltevés szerint nem merőleges a μ síkra. Tudvalevőleg[9] $(a, e)_{\sphericalangle} < (a, m)_{\sphericalangle} = \alpha$, tehát ha az L pontban LM-re a c merőlegest állítjuk az (LM, e) síkban, akkor az e egyenes metszi c-t valamely N pontban, lévén α az a távolságnak megfelelő elpattanási szög. De mivel a λ sík feltevés szerint merőleges az (l, m) síkra, a szerkesztésből folyólag $LM \perp \lambda$, tehát a c egyenes a λ síkba esik. Ennélfogva az e és c egyenesek N metszéspontja a λ, μ síkoknak közös pontja, vagyis ezek metszik egymást. Q. e. d.



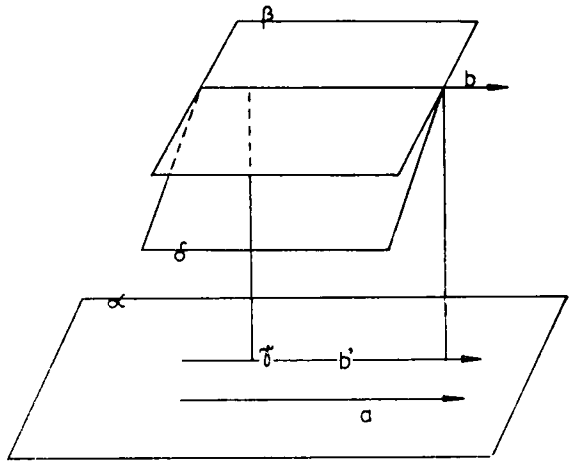
23. ábra

10. §. TÉTEL. *Ha $a \| b$, s az a egyenesen átmenő α sík különbözik az (a, b) síktól, akkor b-n át egy és csak egy olyan sík fektethető, amely α-t nem metszi.*

Bizonyítás. Fektessük a b egyenesen át az α síkra merőleges γ síkot, azután ez utóbbira merőleges β síkot (24. ábra). E β sík nyilván különbözik α-tól. De

[8] Vö. R. BONOLA, Über die Parallelentheorie und über die nichteuklidischen Geometrien, lásd F. ENRIQUES, *Fragen der Elementargeometrie* I, Deutsche Ausgabe von H. THIEME, 2. Aufl. Leipzig—Berlin 1923, 246—363, spec. 307.

[9] Lásd pl. KERÉKJÁRTÓ BÉLA, *A geometria alapjairól* I, Szeged, 1937, 162., 155., tét.



24. ábra

nem metszi α-t. Mert ha metszené, akkor az α-ra és β-ra egyaránt merőleges γ sík merőleges volna α és β metszésvonalára, tehát az α, β, γ síkoknak volna közös P pontja, amely eo ipso közös pontja volna α-nak és a β, γ síkok b metszésvonalának. De mivel az a, b egyenesek a feltevés folytán egy síkban vannak, azért a b egyenes és az α sík közös P pontja az (a, b) és α síkoknak közös pontja volna, vagyis az a egyenesre esnék, s így a és b metszenék egymást a feltevéssel ellentétben.

A b egyenesen átmenő másik δ sík azonban már metszi α-t! Legyen ugyanis az α, γ síkok metszésvonala b'. Ha ez összeesik a-val, akkor feltevés szerint b-től elpattanó. Ha pedig b' különbözik a-tól, akkor mint az egymástól elpattanó a, ill. b egyeneseken átmenő α, γ síkok metszésvonala, megfelelően irányítva b-től ugyancsak elpattanó (8. §). Tehát mindenképpen $b' \| b$. Mivel pedig szerkesztés szerint az α sík merőleges γ-ra, δ viszont nem, azért az α, δ síkok metszik egymást (9. §).

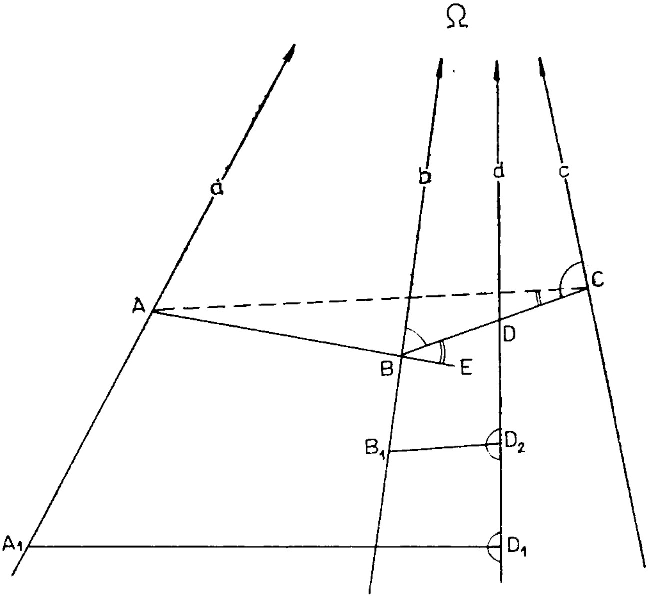
Látjuk, a szerkesztett β sík az egyetlen a b egyenesen átmenő síkok közül, amely α-t nem metszi. Q. e. d.

11. §. Definíció. A nem egy síkban fekvő és egymástól páronként elpattanó a, b, c egyenesek az (a, b, c) *elpattanó hároméIt* alkotják, amelynek a, b, és c az *élei*, az (a, b), (b, c), (c, a) egyenespárok közötti síkrészek az *oldalai*, s ez oldalak közötti lapszögek a *szögei (belső szögei)*, ezek supplementumai a *külső szögei*.

Tétel. *Elpattanó hároméI külső szöge nem lehet egyenlő vele átellenes belső szöggel.*

Bizonyítás. Legyen az a, b, c élek közös végtelen távoli pontja Ω (7. §), az éleknek megfelelő belső szögek rendre α, β, γ. Megmutatjuk, hogy pl. $180° - \beta = \gamma$ lehetetlen.

Tekintsük a (b, c) elpattanó egyenespár d középvonalát (6. §, 2. Definíció), amely megfelelően irányítva b és c-től elpattanó (6. §, 2. Definíció, 3. Korollárium), és bocsássuk d-re az a él valamely A_1 pontjából az $\overline{A_1 D_1}$, a b él bizonyos B_1 pontjából pedig a $\overline{B_1 D_2}$ merőlegest (25. ábra). Továbbá válasszuk a d egyenesen a D pontot



25. ábra

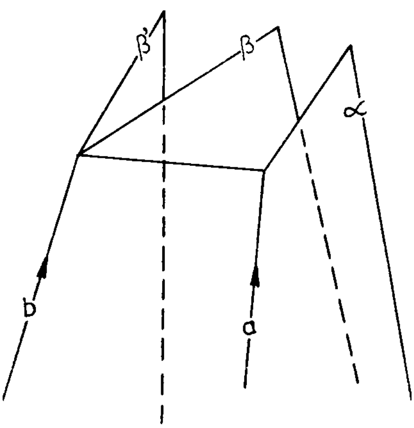
úgy, hogy mind D_1-től mind D_2-től az elpattanás irányába essék. Akkor a D-ben d-re állított merőleges sík nyilván metszi az a élt valamely A, a b és c éleket pedig bizonyos B, C homológ pontokban. Legyen mármost az $\overline{AB}$ egyenesdarab meghosszabbítása a B végponton túl a BE félegyenes, és tekintsük a

$$B(B\Omega, BE, BD), \quad C(C\Omega, CA, CD)$$

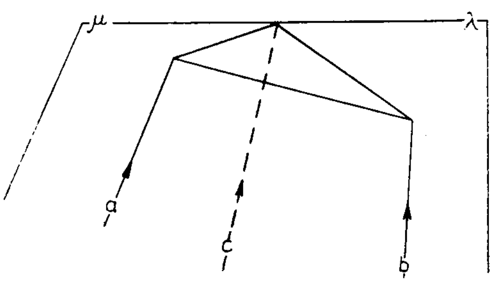
hároméleket. Ezekben $DB\Omega_{\sphericalangle} = DC\Omega_{\sphericalangle}$, miután B és C homológ pontok a b, c egyeneseken. Az első háromél BD élű lapszöge derékszög, éppen úgy, mint a másiknak CD élű lapszöge, minthogy a szerkesztés folytán az ABC sík merőleges a (b, c) síkra. Továbbá a $180°-\beta=\gamma$ feltevés azt jelentené, hogy az első háromélnek $B\Omega$ élű lapszöge egyenlő a másiknak $C\Omega$ élű lapszögével. Ekkor tehát a két háromélben egy oldal és a két rajta fekvő szög rendre egyenlő volna a neki megfelelővel, s így e háromélek kongruensek volnának. Ennélfogva $EBD_{\sphericalangle} = ACD_{\sphericalangle}$ állana, miután ezek a $B\Omega$, ill. a $C\Omega$ élű lapszöggel szemben fekvő oldalak a két háromélben. Eszerint az ABC háromszögben a külső $EBD_{\sphericalangle}$ egyenlő volna az átellenes belső $ACD_{\sphericalangle}$-gel, ami tudjuk lehetetlen. Tehát valóban nem lehet $180°-\beta=\gamma$. Q. e. d.

12. §. Tétel. *Ha $a\|b$, s az ezeken rendre átmenő α, β síkok az (a, b) síkkal annak egyik oldalán olyan belső szögeket alkotnak, amelyeknek összege $<180°$, akkor α és β metszik egymást.*

Bizonyítás. Fektessük a b egyenesen át a β' síkot úgy (26. ábra), hogy az (a, b) sík α-val és β'-vel a szóban forgó oldalon alkotott belső szögeinek összege $180°$ legyen. Ekkor β és β' a feltevésnél fogva különbözők. De α és β' nem metszik egy-



26. ábra



27. ábra

mást, mert különben a c metszésvonalra megfelelő irányítás mellett $a \| c \| b$ állana (8. §), s az (a, b, c) elpattanó hárómélben az a élű külső szög egyenlő volna a vele átellenes b élű belső szöggel, ami a megelőző § szerint lehetetlen. Minthogy pedig a b egyenesen át csakis egy olyan sík fektethető, amely α-t nem metszi (10. §), azért β metszi az α síkot. Q. e. d.

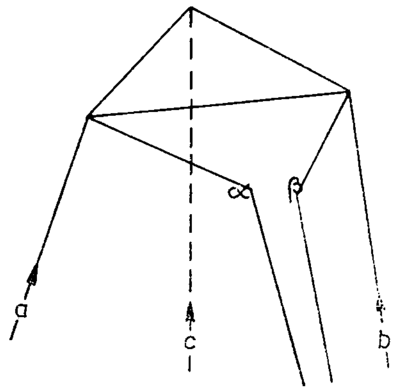
13. §. TÉTEL. *Elpattanó hároméI szögeinek összege* 180°.

Bizonyítás. Az (a, b, c) elpattanó hároméI (b, c) oldalára rakjuk fel a c él mentén kifelé a b élű lapszöggel kongruens lapszöget, melynek másik lapja a λ félsík, az (a, c) oldalra pedig hasonlóképp az a élű lapszöggel kongruens lapszöget, amelynek másik lapja a μ félsík (27. ábra). Akkor sem a λ, sem a μ félsíkot tartalmazó sík nem metszi az (a, b) síkot. Mert ha pl. a λ-t tartalmazó sík metszené (a, b)-t l-ben, akkor megfelelő irányítás mellett $b \| l \| c$ állana (8. §), s a (b, c, l) elpattanó hárómélben külső szög egyenlő volna vele átellenes belső szöggel, ami lehetetlen (11. §). Mivel pedig a c egyenesen át csakis egy olyan sík fektethető, amely az (a, b) síkot nem metszi (10. §), azért a λ, μ félsíkok ugyanabban a síkban feküsznek, vagyis az (a, b, c) elpattanó hároméI szögeinek összege 180°. Q. e. d.

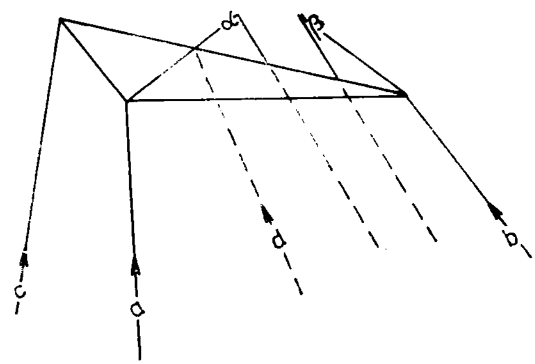
14. §. TÉTEL. *Ha az (a, b, c) elpattanó hároméI a élén keresztül az (a, c) oldalra merőleges α, b élén keresztül pedig a (b, c) oldalra merőleges β síkot fektetjük, akkor α és β metszik egymást.*

Bizonyítás. Ha a hárómélben az a és b élű lapszögek mindketten hegyesszögek, akkor az α, β síkok az (a, b) síkkal annak a c éllel átellenes oldalán olyan belső szögeket alkotnak, amelyek mindketten szintén hegyesszögek (28. ábra), tehát összegük $<180°$. Ekkor tehát α és β metszik egymást (12. §). Ha pedig pl. az a élű lapszög derékszög, akkor α összeesik az (a, b) síkkal, s így az állítás triviális.

Legyen most pl. az a élű lapszög tompaszög, mikor is a b élű már szükségképp hegyesszög (13. §). Ekkor az α sík nyilván metszi a (b, c) síkot valamely d egyenesben (29. ábra), s ez megfelelő irányítás mellett az a, b, c egyenesektől elpattanó (8. §) és a (b, c) egyenespár közötti síkrészben fekszik. Minthogy most az (a, c, d) elpattanó hárómélben az a élű lapszög a feltevés szerint derékszög, azért a d élű hegyesszög (13. §). Ezek szerint a d egyenesen át az α, a tőle elpattanó b egyenesen



28. ábra



29. ábra

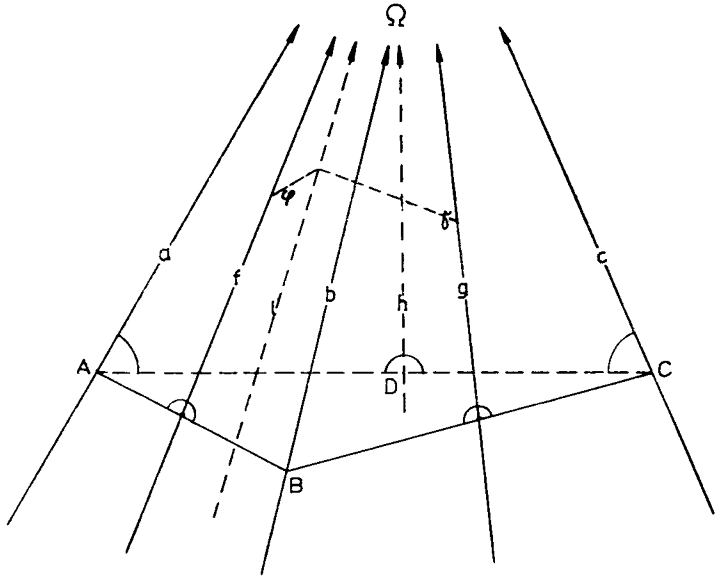
át pedig a β sík úgy van fektetve, hogy a (d, b) síkkal annak ugyanazon az oldalán mindkettő belső hegyesszöget képez, tehát (12. §) α és β ismét metszik egymást. Q. e. d.

15. §. TÉTEL. *Ha $a \| b \| c$ és c különbözik az a egyenestől, s ezeken rendre a A, B, C pontokat választjuk úgy, hogy A és B valamint B és C homológ pontok, akkor A és C is homológ pontok.* (BOLYAI JÁNOS[10] tétele.)

Bizonyítás.[11] Tegyük föl először, hogy a, b, c nem egy síkban feküsznek, s jelöljük ezek közös végtelen távoli pontját Ω-val (30. ábra). Legyen az (a, b) elpattanó egyenespár középvonala f, a (b, c) egyenespáré g, mikor is f az $\overline{AB}$, g pedig a $\overline{BC}$ egyenesdarab felező merőlegese és $f \| b \| g$ (6. §), tehát f és g is átmennek az Ω végtelen távoli ponton. Az $\overline{AB}$-t merőlegesen felező φ sík átmegy f-en, a $\overline{BC}$-t merőlegesen felező γ sík pedig g-n. S mivel f, b és g nyilván nincsenek egy síkban és a φ sík evidenter merőleges a (b, f), γ pedig a (b, g) síkra, azért φ és γ metszik egymást bizonyos l egyenesben (14. §), amelyre $f \| l \| g$ (8. §), tehát egyben $a \| l \| c$ (6. §, 3. Kor.). A szerkesztésből folyólag l pontjai egyenlő távolságra vannak a A és B, valamint a B és C pontoktól, tehát egyenlő távolságra vannak A és C-től is, következőleg az $\overline{AC}$ egyenesdarabot merőlegesen felező sík átmegy az l egyenesen. Legyen e síknak az (a, c) síkkal való metszése h. Minthogy előbbiek szerint $a \| l \| c$, azért $a \| h \| c$ (8. §). S mivel h nyilván merőleges $\overline{AC}$-re annak D felezőpontjában, azért $\Omega AD_{\sphericalangle} = \Omega CD_{\sphericalangle}$, lévén mindkettő a $\overline{DA} = \overline{DC}$ távolságnak megfelelő elpattanási szög. Eszerint A és C az a, c elpattanó egyenesek homológ pontjai (6. §).

[10] JOHANNES BOLYAI DE EADEM, *Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens etc.*, Marosvásárhely 1832, § 10. Magyarul lásd STÄCKEL PÁL i. m. (18. old.) II. köt. 197—232, spec. 201, vagy BOLYAI JÁNOS, *Appendix.* KÁRTESZI FERENC bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel, Budapest, 1952, 71—124, spec. 81.

[11] Vö. J. BOLYAI, i. h. 201—202, resp. 81—82.

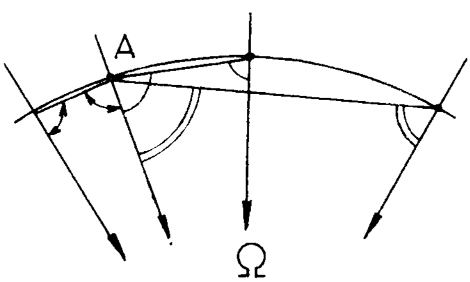


30. ábra

Legyenek most a, b, c egy síkban. Válasszunk valamely e egyenest, amely e síkon kívül fekszik, s ez egyenesektől elpattanó (5. §, 3. Korollárium). Ha az e egyenesen a B-vel homológ pont E, akkor a feltevésnél fogva az előbbiek szerint az a, e egyeneseken A és E, az e, c egyeneseken pedig E és C homológ pontok. Tehát ismét az előbbiek szerint az a, c egyeneseken A és C szintén homológ pontok. Q. e. d.

III. Paraciklus és paraszféra

16. §. 1. Definíció. Megadván a síkban a A valóságos és az Ω végtelen távoli pontot, a *A ponton átmenő Ω középpontú paraciklus* alatt a sík pontjainak azt az összességét értjük, amely áll A-ból és az Ω-n átmenő, $A\Omega$-tól különböző egyeneseknek A-val homológ pontjaiból (31. ábra).



31. ábra

Korollárium. *A paraciklusok kongruensek.*

Nyilvánvaló (5., 6. §§), hogy más szóval *az A-n átmenő Ω középpontú paraciklus áll A-nak az Ω-n átmenő egyenesekre vonatkozó tükörképeiből.* Eszerint a paraciklus a körrel rokon alakzat, minthogy az A ponton átmenő O középpontú kört hasonlóképp A-nak az O ponton átmenő egyenesekre vonatkozó tükörképei alkotják.

Alapvető a következő

1. TÉTEL. *Ha az A ponton átmenő Ω középpontú paraciklusnak valamely más pontja B, akkor e paraciklus azonos a B ponton átmenő Ω középpontú paraciklussal.*

Bizonyítás. Ki kell mutatnunk, hogy az első paraciklus pontjai a második paracikluson vannak és fordítva. Ez a A és B pontokról nyilvánvaló, minthogy ezek a $A\Omega$, $B\Omega$ egyeneseknek homológ pontjai. Legyen most C az első paraciklusnak A- és B-től különböző valamely pontja. Ekkor C és A a $A\Omega$, $C\Omega$ egyenesek homológ pontjai. De A és B a $A\Omega$, $B\Omega$ egyeneseken szintén homológ pontok, miután B az első paraciklus pontja. Ennélfogva (15. §) B és C a $B\Omega$, $C\Omega$ egyeneseken ugyancsak homológ pontok, tehát C a második paracikluson is rajta van. Hasonlóképp, a második paraciklus pontjai az elsőnek is pontjai. Q. e. d.

Tekintettel az előbbi korolláriumra, e tétel alapján azt mondjuk, hogy *a paraciklus önmagában eltolható.*

2. DEFINÍCIÓ. A síkban a paraciklus középpontján átmenő egyeneseket a paraciklus *tengelyeinek* nevezzük.

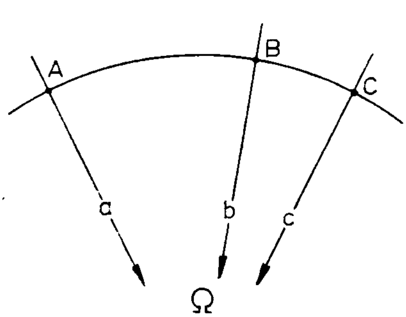
1. KOROLLÁRIUM. *A paraciklus bármelyik tengelyére szimmetrikus.*

2. KOROLLÁRIUM. *Ha P és Q valamely paraciklus pontjai, akkor a $\overline{PQ}$ egyenesdarab felező merőlegese e paraciklusnak tengelye* (6. §, 2. Def., 3. Kor.).

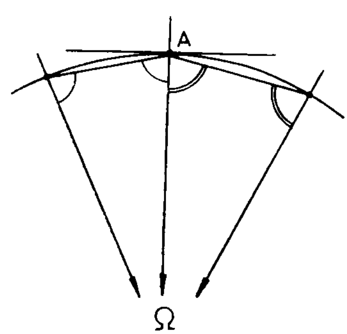
3. DEFINÍCIÓ. Ha a paraciklus A, B, C pontjain átmenő a, b, c tengelyek közül b az a és c között van, akkor azt mondjuk, hogy a paracikluson B az A és C *közé* esik (32. ábra). A C és A közötti paraciklus-pontok A-val és C-vel együtt a $\widehat{AC}$ *paraciklusívet* alkotják.

A 6. §-beli 1. Definíció 1. Korolláriuma alapján nyilvánvaló (7. §, 3. Definíció) az alábbi két tétel.

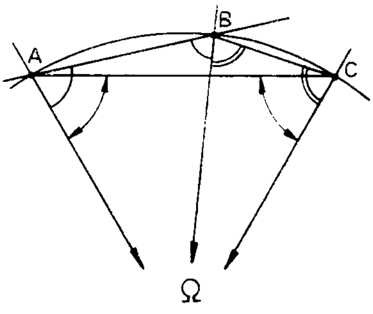
2. TÉTEL. *Az A ponton átmenő Ω középpontú paraciklusnak A-tól különböző pontjai az A-ban $A\Omega$-ra állított merőlegesnek azon az oldalán vannak, amelyen* Ω (33. ábra).



32. ábra



33. ábra



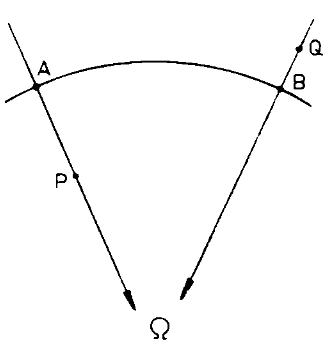
34. ábra

3. TÉTEL. *Ha valamely Ω középpontú paracikluson B az A és C közé esik, akkor C az AB egyenesnek azon az oldalán van, amelyen Ω* (34. ábra), *vagyis* $\Omega AB_{\sphericalangle} > \Omega AC_{\sphericalangle}$.

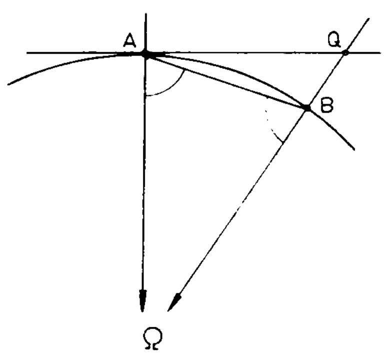
Az utóbbi tétel más szóval azt mondja, hogy *valamely* $\widehat{AC}$ *paraciklus-ív közbülső pontjai az AC egyenesnek a paraciklus Ω középpontjával átellenes oldalán vannak.* Ezt úgy fejezhetjük ki, hogy *a paraciklus a középpontjából nézve konkáv.*

KOROLLÁRIUM. *Egyenesnek legföljebb két közös pontja van a paraciklussal.*

4. DEFINÍCIÓ. A sík valamely P pontja az Ω középpontú paraciklus *belsejében van,* ha a paraciklusnak a $P\Omega$ tengelyen fekvő A pontja P-től az Ω-val átellenes irányba esik, viszont a Q pont a paraciklus *külsejében van,* ha a paraciklusnak a $Q\Omega$ tengelyen fekvő B pontja Q-tól az Ω irányába esik (35. ábra).



35. ábra



36. ábra

5. DEFINÍCIÓ. Valamely Ω középpontú paraciklus A pontjában a $A\Omega$ tengelyre állított merőlegest e görbe A-beli *érintőjének* nevezzük.

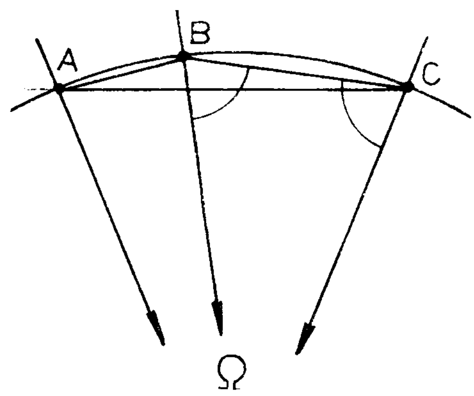
KOROLLÁRIUM. *A paraciklus A-beli érintőjének A-tól különböző pontjai a görbe külsejében feküsznek.* Ez nyilvánvaló abból, hogy az ilyen Q ponton átmenő $Q\Omega$ paraciklus-tengelynek a paraciklusra eső B pontjára (36. ábra) az $\Omega AB_{\sphericalangle}$ hegyesszög, míg az $\Omega AQ_{\sphericalangle}$ derékszög.

17. §. SEGÉDTÉTEL. *Ha az AC paraciklus-ívnek B valamely közbülső pontja, akkor* $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Ugyanis a paraciklus középpontját Ω-val jelölve (37. ábra), feltevés szerint az ΩB tengely ΩA és ΩC közé esik (16. §, 3. Definíció) és B az AC egyenesnek Ω-val átellenes oldalán van (16. §, 3. Tétel), minélfogva

$$ABC_{\sphericalangle} > \Omega BC_{\sphericalangle}, \quad \Omega CB_{\sphericalangle} > ACB_{\sphericalangle}.$$

De B és C a $B\Omega$, $C\Omega$ tengelyek homológ pontjai lévén $\Omega BC_{\sphericalangle}=\Omega CB_{\sphericalangle}$, s így előbbiből folyólag az ABC háromszögben $ACB_{\sphericalangle}<ABC_{\sphericalangle}$, amiből tudvalevőleg következik, hogy $\overline{AB}<\overline{AC}$.



37. ábra

TÉTEL. *Valamely paraciklus-ívbe beírt nyílt sokszög hossza bizonyos korlát alatt marad.*

Bizonyítás. Legyen egy az $\overset{\frown}{AB}$ paraciklus-ívbe beírt nyílt sokszög

$$AP_1P_2\ldots P_{n-1}B$$

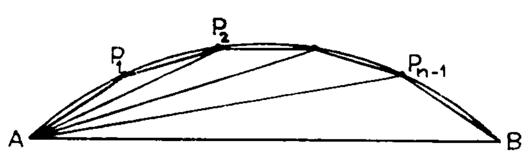
(38. ábra). A fenti segédtétel szerint

$$\overline{AP_1}<\overline{AP_2}<\ldots<\overline{AP_{n-1}}<\overline{AB},$$

tehát az A mint középpont körül $\overline{AB}$ sugárral leírt kör magába zárja ez $AP_1P_2\ldots$ $\ldots P_{n-1}B$ nyílt sokszöget. Mivel pedig ez az $\overline{AB}$ egyenesdarab hozzácsatolásával mint zárt sokszög nyilván konvex (16. §, 3. Tétel), a mondott kör pedig befoglalható valamely Σ sokszögbe, azért az $AP_1P_2\ldots P_{n-1}B$ zárt sokszög kerülete ismert tétel szerint kisebb Σ kerületénél. Annál inkább az

$$\overline{AP_1}+\overline{P_1P_2}+\ldots+\overline{P_{n-1}B}$$

összeg kisebb Σ kerületénél. Q. e. d.



38. ábra

18. §. DEFINÍCIÓ. Két paraciklus-ívet akkor mondunk *kongruensnek (egyenlőnek),* ha a húrjaik kongruensek.[12] Ha pedig a $\overset{\frown}{PQ}$ paraciklus-ívhez található az $\overset{\frown}{AB}$ íven olyan közbülső C pont, amelyre $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{PQ}$, akkor azt mondjuk, hogy $\overset{\frown}{PQ}$ kisebb mint $\overset{\frown}{AB}$ vagy $\overset{\frown}{AB}$ nagyobb mint $\overset{\frown}{PQ}$, jelben $\overset{\frown}{PQ}<\overset{\frown}{AB}$ vagy $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{PQ}$.

1. KOROLLÁRIUM. *Az* $\overset{\frown}{AB}$ *paraciklus-ív* $\overline{AB}$ *húrjának felező merőlegese ez ívet felezi.*

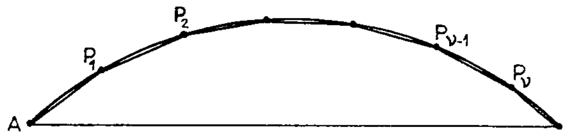
2. KOROLLÁRIUM. *A paraciklus-ívekre fennállanak az egyenesdarabokra vonatkozó Hilbert-féle* III_1, III_2, III_3 *kongruencia-axiómák.*[13]

[12] Könnyen be is látható, hogy az ilyen ívek kongruens leképezéssel egymásba átvihetők.
[13] Vö. D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie,* 9. Aufl., Stuttgart 1962, 11—12.

1. TÉTEL. *Az $\overset{\frown}{AB}$ és $\overset{\frown}{PQ}$ paraciklus-ívekhez van olyan n természetes szám, amelyre $n\overset{\frown}{PQ} > \overset{\frown}{AB}$.*

Bizonyítás. Ha bármely ν természetes számra $\nu\overset{\frown}{PQ} < \overset{\frown}{AB}$ állana, akkor az $\overset{\frown}{AB}$ ívbe nyilván beírható volna olyan $AP_1P_2\ldots P_\nu B$ nyílt sokszög (39. ábra), amelyben

$$\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \ldots = \overline{P_{\nu-1}P_\nu} = \overline{PQ},$$



39. ábra

akármilyen nagy is a ν szám. De ennek hossza

$$\overline{AP_1} + \overline{P_1P_2} + \ldots + \overline{P_{\nu-1}P_\nu} + \overline{P_\nu B} > \nu\overline{PQ}$$

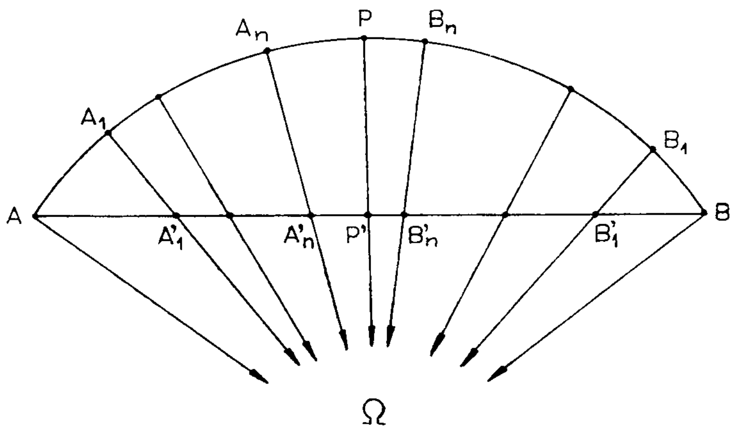
volna, tehát nem lenne korlátos, ellentétben a megelőző § tételével. Tehát kell lennie olyan ν-nek, amelyre $\nu\overset{\frown}{PQ} \geqq \overset{\frown}{AB}$, mikor is az $n=\nu+1$ számra $n\overset{\frown}{PQ} > \overset{\frown}{AB}$. Q. e. d.

E tétel szerint a paraciklus-ívekre érvényes az egyenesdarabokra vonatkozó *Eudoxus*-féle axióma. Megmutatjuk, hogy a *Cantor*-féle folytonossági axióma is érvényes, vagyis fennáll a következő

2. TÉTEL. *Ha az*

$$\overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{A_1B_1},\ \ldots,\ \overset{\frown}{A_nB_n},\ \ldots$$

paraciklus-ívek mindegyike tartalmazza a reá következőt, akkor ezeknek van közös P pontja (40. ábra).



40. ábra

Bizonyítás. Legyen az $\widehat{AB}$ ívet tartalmazó paraciklus középpontja Ω. Minthogy az A_n, B_n pontok az AB egyenesnek Ω-val átellenes oldalán vannak (16. §, 3. Tétel), azért az $A_n\Omega$, $B_n\Omega$ paraciklus-tengelyek metszik az AB egyenest bizonyos A_n', B_n' pontokban, s világos, hogy (16. §, 3. Def.) az

$$\overline{AB},\ \overline{A_1'B_1'},\ \dots,\ \overline{A_n'B_n'},\ \dots$$

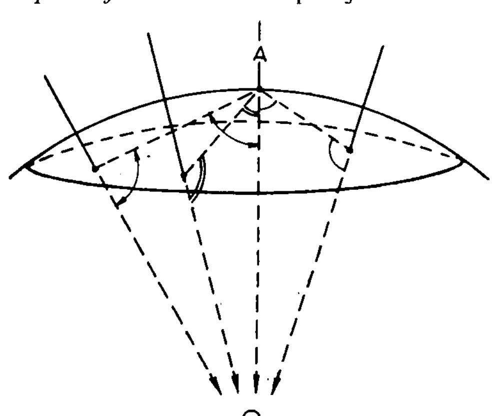
egyenesdarabok mindegyike tartalmazza az utána következőt. Ennélfogva a *Cantor*-féle axióma értelmében van olyan P' pont, amely ezek mindegyikének pontja. Ebből pedig nyilván következik, hogy a paraciklusnak a $P'\Omega$ paraciklus-tengelyen fekvő P pontja az $\widehat{A_nB_n}$ paraciklus-íveknek közös pontja. Q. e. d.

19. §. 1. DEFINÍCIÓ. Megadván a térben az A valóságos és az Ω végtelen távoli pontot, az *A ponton átmenő Ω középpontú paraszféra* alatt a tér pontjainak azt az összességét értjük, amely áll A-ból és az Ω-n átmenő, $A\Omega$-tól különböző egyeneseknek A-val homológ pontjaiból (41. ábra).

1. KOROLLÁRIUM. *A paraszférák kongruensek.*

2. KOROLLÁRIUM. *A paraszférát egy az $A\Omega$ egyenesen átfektetett sík olyan paraciklusban metszi, amely átmegy A-n és középpontja Ω.*

3. KOROLLÁRIUM. *Egy az A ponton átmenő Ω középpontú paraciklust az $A\Omega$ tengely körül forgatva, előáll az A ponton átmenő Ω középpontú paraszféra.*



41. ábra

Éppen úgy, mint a paraciklusnál (16. §), itt is nyilvánvaló, hogy más szóval az *A ponton átmenő Ω középpontú paraszféra áll A-nak az Ω-n átmenő egyenesekre vonatkozó tükörképeiből.* Eszerint a paraszféra a gömbbel rokon alakzat, minthogy az A ponton átmenő O középpontú gömböt hasonlóképp A-nak az O ponton átmenő egyenesekre vonatkozó tükörképei alkotják.

Alapvető a következő

TÉTEL. *Ha az A ponton átmenő Ω középpontú paraszférának valamely más pontja B, akkor e paraszféra azonos a B ponton átmenő Ω középpontú paraszférával.*

Ez a 15. § tétele alapján hasonlóképp látható be, mint a paraciklusra vonatkozó megfelelő tétel (16. §, 1. Tétel).

Tekintettel a fenti 1. Korolláriumra, e tétel alapján azt mondjuk, hogy *a paraszféra önmagában eltolható.*

2. DEFINÍCIÓ. A paraszféra középpontján átmenő egyeneseket a paraszféra *tengelyeinek* nevezzük.

1. KOROLLÁRIUM. *A paraszféra bármelyik tengelyén átmenő síkra szimmetrikus.*

2. KOROLLÁRIUM. *A paraszféra bármelyik tengelye forgástengely.*

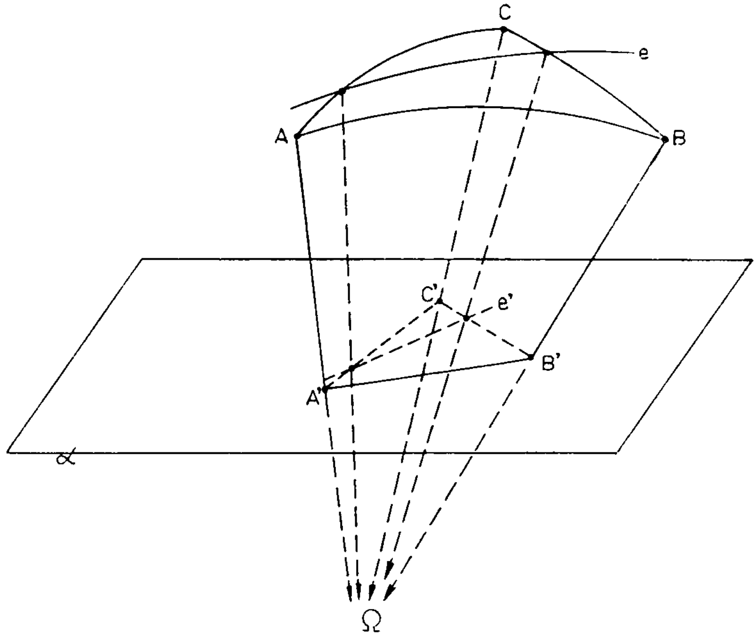
20. §. Alapvető fontosságú tény, hogy *a paraszférán az euklideszi síkgeometria érvényes, ha*

1° *pont alatt a paraszférán levő pontot, egyenes alatt paraciklust értünk, amelyet egy a paraszféra valamely tengelyén átmenő sík metsz ki a paraszférából,*

2° *az* $\widehat{AB}$ *és* $\widehat{A'B'}$ *paraciklus-íveket (egyenesdarabokat) kongruenseknek mondjuk, ha* $\overline{AB}=\overline{A'B'}$,

3° *a* $BAC\sphericalangle$ *alatt azt a lapszöget értjük, amelynek éle az A ponton átmenő paraszfératengely, s lapjai a B, ill. C ponton átmenő félsíkok.*

Ugyanis e megállapodások után a paraszférán érvényesek az euklideszi síkgeometria összes axiómái. Ezt következőképp láthatjuk be.



42. ábra

Először is nyilvánvaló, hogy az illeszkedés és a rendezés *Hilbert*-féle síkbeli axiómái[14] érvényesek. Jelesen a II_4 *Pasch*-féle axióma fennállása következik a síkbeli *Pasch*-féle axiómából (42. ábra), ha a paraszféra középpontját Ω-val jelölvén, az ABC paraszféra-háromszögnek megfelelő ($A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$) elpattanó háromélt átmetszük valamely α síkkal.

A kongruencia-axiómák közül nyilván fennállnak a III_1, III_2, III_3 axiómák

[14] D. HILBERT, i. m. (31. old.), 3—5.

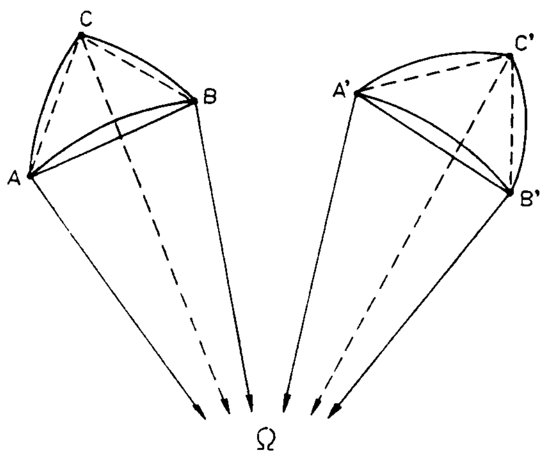
(18. §, Def., 2. Kor.), s evidenter érvényes a szögátrakásra vonatkozó III_4 axióma[15] is. Megmutatjuk, hogy a *Hilbert*-féle III_5 kongruencia-axióma[16] is érvényes, vagyis fennáll a következő

TÉTEL. *Ha a paraszférán az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben*

$$\widehat{AB} \equiv \widehat{A'B'}, \quad \widehat{AC} \equiv \widehat{A'C'}, \quad A_\sphericalangle \equiv A'_\sphericalangle,$$

akkor

$$B_\sphericalangle \equiv B'_\sphericalangle, \quad C_\sphericalangle \equiv C'_\sphericalangle.$$



43. ábra

Bizonyítás. Legyen a paraszféra középpontja ismét Ω (43. ábra). Minthogy a feltevés szerint $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ és $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, azért (6. §, 2. Definíció, 3. Korollárium)

$$\Omega AB_\sphericalangle \equiv \Omega A'B', \quad \Omega AC_\sphericalangle \equiv \Omega A'C'_\sphericalangle.$$

S mivel a feltevés értelmében még az

$$A(A\Omega, AB, AC), \quad A'(A'\Omega, A'B', A'C')$$

háromélekben az $A\Omega$ élű lapszög kongruens az $A'\Omega$ élűvel, azért e két háromél kongruens (két oldal és a közbezárt szög rendre kongruens lévén a neki megfelelővel), tehát

$$BAC_\sphericalangle \equiv B'A'C'_\sphericalangle.$$

Ennélfogva az ABC és $A'B'C'$ egyenesvonalú háromszögek kongruensek (két oldal és a közbezárt szög rendre kongruens lévén a neki megfelelővel), tehát

$$ABC_\sphericalangle \equiv A'B'C'_\sphericalangle$$

és

$$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$$

[15] D. HILBERT, i. m. (31. old.), 13—14.
[16] D. HILBERT, i. m. 14.

s ez utóbbiból következik (6. §, 2. Definíció, 3. Korollárium), hogy

$$\Omega BC_{\sphericalangle} \equiv \Omega B'C'_{\sphericalangle}.$$

Mivel pedig $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ folytán még

$$\Omega BA_{\sphericalangle} \equiv \Omega B'A'_{\sphericalangle},$$

azért a

$$B(B\Omega, BA, BC), \quad B'(B'\Omega, B'A', B'C')$$

háromélek kongruensek (három oldal rendre kongruens lévén a neki megfelelővel). Tehát a $B\Omega$ élű lapszög kongruens a $B'\Omega$ élűvel, vagyis a paraszférán az ABC és $A'B'C'$ háromszögekben $B_{\sphericalangle} \equiv B'_{\sphericalangle}$. Hasonlóképp $C_{\sphericalangle} \equiv C'_{\sphericalangle}$. Q. e. d.

Továbbá a 18. § 1. és 2. tételei szerint az *Eudoxus*- és a *Cantor*-féle folytonossági axióma is érvényes.

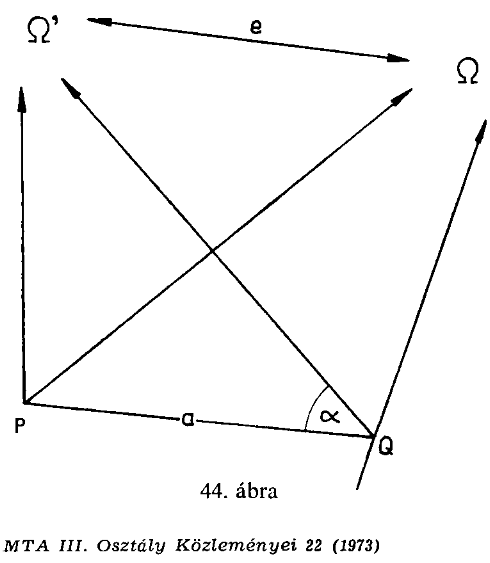
Végül a 10. § tétele értelmében a paraszférán az euklideszi párhuzamossági axióma is fennáll.

Ezzel kimutattuk, hogy a fenti 1°—3° megállapodások mellett a paraszférán érvényesek az euklideszi síkgeometria összes axiómái, tehát e felületen így valóban az euklideszi síkgeometria van érvényben.

IV. A hiperbolikus trigonometria alapképletei

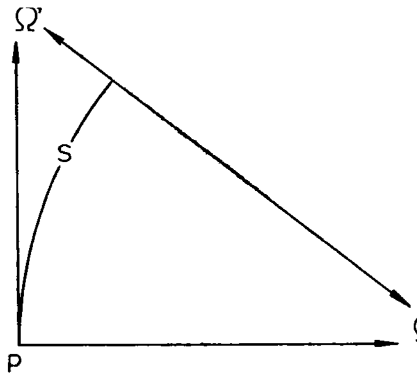
21. §. SEGÉDTÉTEL. *A derékszög szárainak Ω, Ω' végtelen távoli pontjait összekötő $\Omega\Omega'$ egyenes létezik.*

Legyen ugyanis (44. ábra) a derékszög csúcsa P, s tekintsünk a P-ben $P\Omega'$-re merőleges síkban (amely tehát a $P\Omega$ egyenest tartalmazza) egy a $P\Omega$-tól elpattanó egyenest, melyen P vetülete Q. Húzzuk Q-ból a $P\Omega'$-től elpattanó $Q\Omega'$ félegyenest. Minthogy a szerkesztés folytán $PQ \perp P\Omega'$, $PQ\Omega'_{\sphericalangle} = \alpha$ a $\overline{PQ} = a$ távolságnak megfelelő elpattanási szög. S mivel ugyancsak a szerkesztés szerint $PQ \perp Q\Omega$ és nyilván $Q\Omega' \perp Q\Omega$, azért a $PQ\Omega'_{\sphericalangle} = \alpha$ éppen az ΩPQ és $\Omega' Q\Omega$ síkok hajlásszöge, ez utóbbi tehát hegyesszög (1. §, Definíció, 1. Korollárium). Mivel viszont a szerkesztés értelmében $\Omega P\Omega' \perp \Omega PQ$, azért az $\Omega P\Omega'$ és $\Omega' Q\Omega$ síkok metszik egymást (9. §). Az e metszésvonal mint a $P\Omega$, $Q\Omega$ elpattanó egyeneseken átmenő síkok metszése, ez egyenesektől elpattanó (8. §), vagyis szintén átmegy az Ω végtelen távoli ponton, s mint a $P\Omega'$, $Q\Omega'$ elpattanó egyeneseken átmenő síkok metszése, hasonlóképp átmegy Ω'-n is. Ez e metszésvonal tehát éppen az Ω, Ω' végtelen távoli pontokat összekötő egyenes.



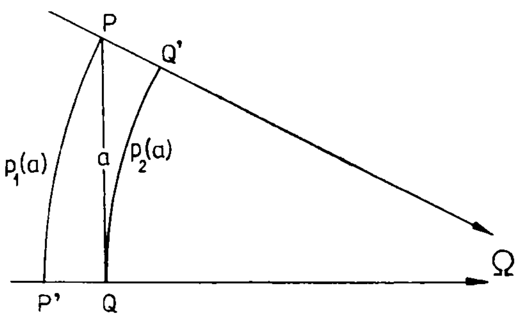
44. ábra

1. DEFINÍCIÓ. A P csúcsú derékszög szárainak végtelen távoli pontjait Ω, Ω'-vel jelölve, a P ponton átmenő Ω középpontú paraciklusnak a $P\Omega$ és $\Omega\Omega'$ tengelyek közé eső S ívét a *paraciklus-ívek egységének* nevezzük (45. ábra).



45. ábra

2. DEFINÍCIÓ. A $\overline{PQ}$ egyenesdarab Q végpontjában reá állított merőlegesnek egyik végtelen távoli pontját Ω-val jelölve, a P ponton átmenő Ω középpontú paraciklusnak a $P\Omega$ és $Q\Omega$ tengelyek közé eső $\widehat{PP'}$ ívét a $\overline{PQ} = a$ *magasságú* $p_1(a)$ *paraciklus-ívnek*, a Q ponton átmenő Ω középpontú paraciklusnak ugyanezen tengelyek közé eső $\widehat{QQ'}$ ívét pedig a $\overline{PQ}=a$ *érintőjű* $p_2(a)$ *paraciklus-ívnek* nevezzük (46. ábra).



46. ábra

TÉTEL. *A* $\overline{PQ}=a$ *távolságnak megfelelő* α *elpattanási szöggel kifejezve*

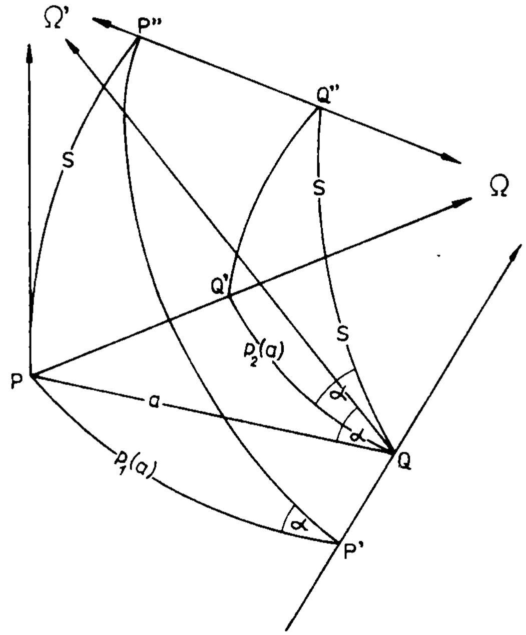
$$p_1(a) = S \operatorname{ctg} \alpha, \quad p_2(a) = S \cos \alpha, \tag{1}$$

ahol S a paraciklus-ívek egysége.

Bizonyítás.[17] Állítsunk P-ben az ΩPQ síkra merőlegest, amelynek egyik végtelen távoli pontja Ω', mikor is $P\Omega' \perp P\Omega$ és messe a P ponton átmenő Ω középpontú paraszféra a segédtétel szerint létező $\Omega\Omega'$ egyenest P''-ben, a Q ponton átmenő Ω középpontú paraszféra pedig Q''-ben (47. ábra). Minthogy $P\Omega' \perp P\Omega$ valamint nyilván $Q\Omega' \perp Q\Omega$, azért (1. Definíció)

$$\widehat{PP''} = S = \widehat{QQ''}. \tag{2}$$

[17] Vö. *szerzőtől,* A simpler determining of the angle of parallelism after the method of János Bolyai, *Annales Univ. Sci. Budapestinensis etc., Sect. Math.* t. III—IV., 327—328.



47. ábra

S mivel $Q\Omega' \perp Q\Omega$ mellett egyben $PQ \perp Q\Omega$, azért a $PQ\Omega'_{\sphericalangle}$ az ΩPQ és $\Omega' Q\Omega$ síkok hajlásszöge és ez $PQ \perp P\Omega'$ folytán éppen a $\overline{PQ}=a$ távolságnak megfelelő α elpattanási szög (amint a segédtétel bizonyításánál is láttuk). Tehát a szerkesztett két paraszférán

$$(3) \qquad PP'P''_{\sphericalangle} = \alpha, \quad Q'QQ''_{\sphericalangle} = \alpha.$$

Továbbá az $\Omega P\Omega'$ és ΩPQ síkok hajlásszöge derékszög lévén, e paraszférákon

$$(4) \qquad P'PP''_{\sphericalangle} = 90^\circ = QQ'Q''_{\sphericalangle}.$$

Végül a 2. definíció értelmében a P és P', ill. a Q és Q' pontokat ezeken a paraszférákon összekötő paraciklus-ívek

$$(5) \qquad \widehat{PP'} = p_1(a), \quad \widehat{QQ'} = p_2(a).$$

Mármost a paraszférán érvényes euklideszi síkgeometria szerint (20. §) a $PP'P''$ és $QQ'Q''$ paraszféra-háromszögekben a (2)—(5) relációkból folyólag fennáll (1). Q. e. d.

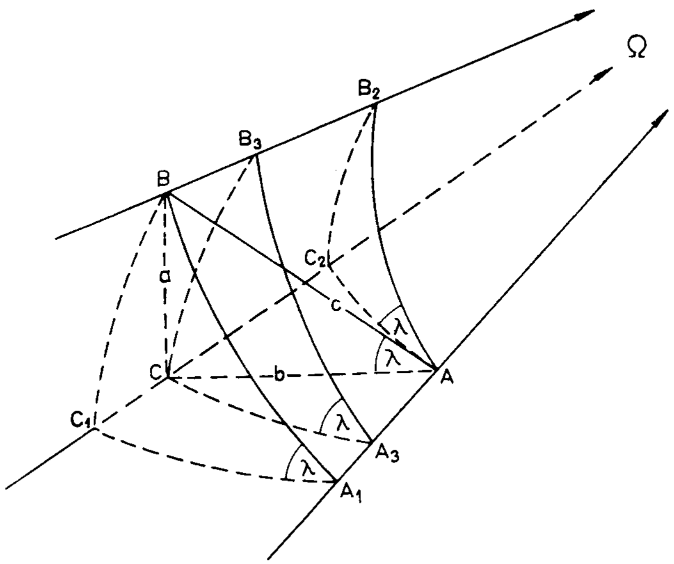
22. §. A megelőző § (1) alatti képleteinek birtokában a derékszögű háromszög hiperbolikus szögtrigonometriájának *Lobacsevszkij*-féle alapképleteit,[18] vagyis a két

[18] Vö. F. Engel, *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen.* Erster Teil, Leipzig, 1898, 20, (14).

hegyesszög és az oldalaknak megfelelő elpattanási szögek között fennálló egyenleteket, leolvashatjuk az alábbi térbeli konfigurációból.[19]

Legyen ABC derékszögű háromszög ($C_{\sphericalangle}=90°$), amelynek alkatrészei (48. ábra)

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c, \quad A_{\sphericalangle} = \lambda, \quad B_{\sphericalangle} = \mu.$$



48. ábra

(Ez utóbbi nincs berajzolva, hogy az ábrát feleslegesen ne terheljük.) Állítsunk e háromszög síkjára A-ban merőlegest, amelynek egyik végtelen távoli pontját jelöljük Ω-val. A B, A, C pontokon át fektessünk rendre Ω középpontú paraszférát. Az ($A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$) elpattanó háromél e paraszférákból rendre az A_1BC_1, AB_2C_2, A_3B_3C paraszféra-háromszögeket vágja ki. Ezekben a szerkesztésből folyólag nyilván

$$BA_1C_{1\sphericalangle} = B_2AC_{2\sphericalangle} = B_3A_3C_{\sphericalangle} = \lambda,$$

míg

$$A_1C_1B_{\sphericalangle} = AC_2B_{2\sphericalangle} = A_3CB_{3\sphericalangle} = 90°.$$

Továbbá (21. §, 2. Def.)

$$\widehat{BC_1} = p_1(a), \quad \widehat{A_1B} = p_1(c), \quad \widehat{AC_2} = p_2(b),$$

$$\widehat{AB_2} = p_2(c), \quad \widehat{B_3C} = p_2(a), \quad \widehat{A_3C} = p_1(b).$$

[19] Vö. *szerzőtől*, i. h. (13. old.), 89—90.

Tehát a paraszférán érvényes euklideszi síkgeometria szerint (20. §)

$$\sin\lambda = \frac{\widehat{BC_1}}{\widehat{A_1B}} = \frac{p_1(a)}{p_1(c)}, \quad \cos\lambda = \frac{\widehat{AC_2}}{\widehat{AB_2}} = \frac{p_2(b)}{p_2(c)},$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\widehat{B_3C}}{\widehat{A_3C}} = \frac{p_2(a)}{p_1(b)}.$$

Ennélfogva az a, b, c egyenesdaraboknak megfelelő elpattanási szögeket rendre α-, β-, γ-val jelölve, nyerjük (21. §, (1)), hogy

(I) $$\sin\lambda = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\gamma},$$

(II) $$\cos\lambda = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

(III) $$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}.$$

(I) és (II) alapján (III)-ból

(IV) $$\sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma.$$

(II) és a μ szögre vonatkozó (I)-hez hasonló képletből (IV) felhasználásával

(V) $$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Végül ebből és a β elpattanási szögre vonatkozó analóg képletből (IV)-re tekintettel

(VI) $$\operatorname{ctg}\lambda\operatorname{ctg}\mu = \frac{1}{\sin\gamma}.$$

(I)—(VI) a jelzett alapképletek, amelyek a derékszögű háromszög két hegyesszöge és a három oldalnak megfelelő elpattanási szögek közül, három-három között fennállanak.

23. §. Tekintsük most az általános háromszöget, amelyben a szögek λ, μ, ν, az ezekkel rendre szemben fekvő a, b, c oldalaknak megfelelő elpattanási szögek pedig α, β, γ.[20]

A háromszöget két derékszögű háromszög összegére vagy különbségére bontva fel, a megelőző § (I) tételéből rögtön következik, hogy

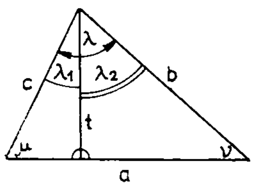
(1) $$\sin\lambda : \sin\mu = \operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta.$$

Ez a háromszög két szöge és a velük szemben fekvő oldalaknak megfelelő elpattanási szögek között fennálló egyenlet.

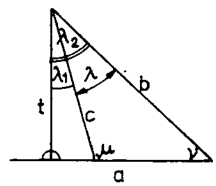
[20] Vö. *szerzőtől*, A hiperbolikus trigonometriáról, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **48** (1941), 401—409, spec. 1. §.

Most előállítjuk a λ, μ, ν szögek és az egyik, mondjuk a ν szöggel szemben fekvő c oldalnak megfelelő γ elpattanási szög közti egyenletet.

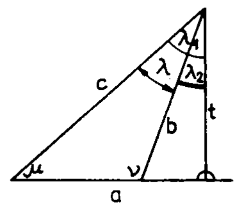
Jelöljük az a oldalhoz tartozó magasságot t-vel, s ossza ez a λ szöget a λ_1 és λ_2 részekre (49a, 49b, 49c ábra), ahol is $\lambda_1 \gtrless 0$ aszerint, amint $\mu \lessgtr 90^\circ$ és $\lambda_2 \gtrless 0$ aszerint,



49a. ábra



49b. ábra



49c. ábra

amint $\nu \lessgtr 90^\circ$. A t magassághoz tartozó elpattanási szöget τ-val jelölve, az előbbi (V) tétel szerint $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$ folytán az előjelek szem előtt tartásával

$$\cos \nu = \frac{\sin \lambda_2}{\sin \tau} = \frac{\sin \lambda \cos \lambda_1 - \cos \lambda \sin \lambda_1}{\sin \tau},$$

s mivel ugyancsak (V) értelmében

$$\frac{\sin \lambda_1}{\sin \tau} = \cos \mu,$$

(II) szerint pedig

$$\cos \lambda_1 = \frac{\cos \tau}{\cos \gamma},$$

innen

$$\cos \nu = -\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \frac{\operatorname{ctg} \tau}{\operatorname{ctg} \gamma} \frac{1}{\sin \gamma}.$$

De az előbbi (I) tétel szerint

$$\sin \mu = \frac{\operatorname{ctg} \tau}{\operatorname{ctg} \gamma},$$

tehát végül nyerjük, hogy

(2) $$\cos \nu = -\cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu \frac{1}{\sin \gamma}.$$

A λ, ν szögek és az egyiket, pl. a λ-t bezáró b, c oldalaknak megfelelő β, γ elpattanási szögek között fennálló egyenlethez most már kiküszöbölés útján juthatunk.

Nevezetesen $\cos \mu$ és $\sin \mu$ értékét a λ, μ, ν, β, ill. μ, ν, β, γ közti (2)-höz, ill. (1)-hez hasonló egyenletekből (2) alatt behelyettesítve

$$\cos \nu = \cos \nu \cos^2 \lambda - \sin \nu \sin \lambda \cos \lambda \frac{1}{\sin \beta} + \sin \lambda \frac{\sin \nu}{\cos \gamma} \operatorname{ctg} \beta,$$

honnan adódik

(3) $$\sin\beta \sin\lambda \operatorname{ctg} \nu = -\cos\lambda + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Végül az egyik szög, mondjuk ν, és az a, b, c oldalaknak megfelelő α, β, γ elpattanási szögek közötti egyenlet a következő kiküszöböléssel nyerhető.

(3)-at $\sin\lambda$-val végigosztva, s $\operatorname{ctg}\lambda$ és $\sin\lambda$ értékét a ν, λ, β, α, ill. λ, ν, α, γ között fennálló, (3)-hoz, ill. (1)-hez hasonló egyenletekből behelyettesítve

$$\sin\beta \operatorname{ctg}\nu = \frac{\operatorname{ctg}\nu}{\sin\beta} - \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\sin\nu\cos\alpha} + \frac{\cos\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\sin\nu}\,\frac{1}{\sin\gamma},$$

honnan előáll

(4) $$\frac{1}{\sin\gamma} = \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta} - \cos\nu \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta.$$

Az előbbi §-nak a derékszögű háromszögre vonatkozó (I)—(VI) képletei ez általános képleteknek speciális esetei.

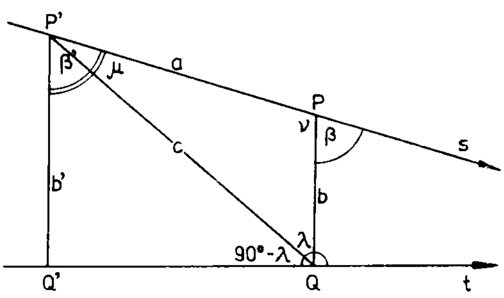
24. §. TÉTEL. *Ha $s \parallel t$ és az s egyenesen a P pont P'-től az elpattanás irányába esik' továbbá e pontok vetülete a t egyenesen rendre Q, Q', akkor a*

$$\overline{PP'} = a, \quad \overline{PQ} = b, \quad \overline{P'Q'} = b'$$

jelöléssel a b, b' távolságoknak megfelelő β, β' elpattanási szögekre

(1) $$\frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

ahol α az a távolsághoz tartozó elpattanási szög (50. ábra).



50. ábra

Bizonyítás.[21] Legyen

$$\overline{QP'} = c, \quad PQP'\sphericalangle = \lambda, \quad PP'Q\sphericalangle = \mu, \quad P'PQ\sphericalangle = \nu.$$

Akkor $\beta = 180° - \nu$ folytán a $PP'Q$ háromszögben a megelőző § (1) alatti tétele szerint

$$\frac{\sin\beta}{\sin\lambda} = \frac{\sin\nu}{\sin\lambda} = \frac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha},$$

míg a $QP'Q'$ háromszögben $Q'QP'\sphericalangle = 90° - \lambda$ folytán

$$\cos\lambda = \sin(90° - \lambda) = \frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\gamma}.$$

[21] *Szerzőtől*, i. h. (13. old.), 90—91.

Ezek összeszorzásával

$$\sin\beta \operatorname{ctg}\lambda = \frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

De a megelőző § (3) alatti tételét a v, λ szögekre és a v szöget bezáró b, a oldalaknak megfelelő β, α elpattanási szögekre alkalmazva

$$\sin\beta \sin v \operatorname{ctg}\lambda = -\cos v + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

s mivel itt most $\sin v = \sin\beta$, $\cos v = -\cos\beta$, ezt $\sin\beta$-val végigosztva

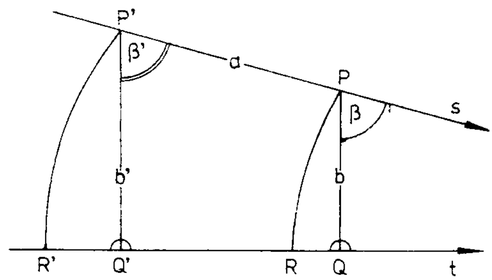
$$\sin\beta \operatorname{ctg}\lambda = \operatorname{ctg}\beta + \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}.$$

Ennélfogva az előbbi képlet a

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg}\beta + \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\cos\alpha}$$

alakot ölti. Innen pedig

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$



51. ábra

amivel az (1) képlet be van bizonyítva.

Minthogy a $\overline{PQ}$, ill. $\overline{P'Q'}$ magasságú $\widehat{PR}$ és $\widehat{P'R'}$ paraciklus-ívek (51. ábra) az S ívegységgel kifejezve (21. §. (1))

$$\widehat{PR} = S \operatorname{ctg}\beta, \quad \widehat{P'R'} = S \operatorname{ctg}\beta',$$

azért a fenti tétel más szóval azt mondja, hogy

egymástól a távolságban haladó koncentrikus paraciklusokra a külső valamely ívének a belső ugyanazon tengelyek közti ívéhez való viszonya $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, *ahol* α *az a távolságnak megfelelő elpattanási szög.*

25. §. Az előbbi tételnek folyománya következő

TÉTEL. *Az* a_1, a_2 *és* $a = a_1 + a_2$ *távolságoknak megfelelő* α_1, α_2, α *elpattanási szögekre*

(1) $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2}.$$ [22]

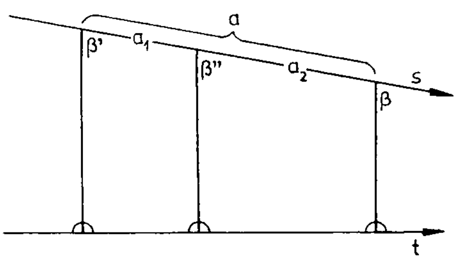
[22] E *Lobacsevszkij*-féle klasszikus függvényegyenletet illetően vö. F. ENGEL, i. m. (38. old.), 20, (11).

Ugyanis az 52. ábra jelöléseivel a megelőző § (1) képlete értelmében

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\beta''} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}, \quad \frac{\operatorname{ctg}\beta''}{\operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2}$$

s ezek összeszorzásával

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta'}{\operatorname{ctg}\beta} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2},$$



52. ábra

tehát az idézett képletre tekintettel (1) valóban fennáll.

A

(2) $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \varphi(a)$$

jelöléssel (1) a

(1*) $$\varphi(a_1+a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$$

függvényegyenlet. Ebből a (2) függvény tüstént meghatározható. Minthogy ugyanis $0 < \frac{\alpha_2}{2} < 45°$ folytán $\operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2} > 1$, azért (1)-ből látható, hogy $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ az a növesztésénél folyvást növekedik, tehát (1*)-ból mint egyetlen monoton megoldás tudvalevőleg adódik

(3) $$\varphi(a) = e^{\frac{a}{k}},$$

ahol k bizonyos meghatározott távolság, az úgynevezett *természetes hosszegység*, amely azonban egyelőre előttünk ismeretlen.

(2)- és (3)-ból látjuk, hogy *az a távolságnak megfelelő α elpattanási szögre*

(4) $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{a}{k}},$$

ahol k a természetes hosszegység.

E (4) képlet más alakjai

(4*) $$\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{a}{k}}, \quad \cos\alpha = \operatorname{th}\frac{a}{k}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{sh}\frac{a}{k}.$$

A szögtrigonometria alapképleteiből (23. §, (1)—(4)) most már megkapjuk a hiperbolikus trigonometria általános alapképleteit, amelyek az a, b, c oldalakkal és ezekkel rendre szemben fekvő λ, μ, ν szögekkel bíró háromszögre vonatkoznak. Nevezetesen a 23. § (1) képletéből (4*) alapján a *sinus-tétel*

(5) $$\sin\lambda : \sin\mu = \operatorname{sh}\frac{a}{k} : \operatorname{sh}\frac{b}{k},$$

az ottani (2) képletből a *második cosinus-tétel*

$$\cos\nu = -\cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\sin\mu \operatorname{ch}\frac{c}{k}, \tag{6}$$

az ottani (3) képletből a *cotangens-tétel*

$$\sin\lambda \operatorname{ctg}\nu = -\cos\lambda \operatorname{ch}\frac{b}{k} + \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{cth}\frac{c}{k}, \tag{7}$$

végül az ottani (4) képletből az *első cosinus-tétel*

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \cos\nu \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}. \tag{8}$$

Speciálisan *az a, b, c, λ, μ alkatrészekkel bíró derékszögű háromszögre* ($\nu=90°$) *vonatkozólag az alapképletek* (22. §, (I)—(VI)) *átmennek a következőkbe:*

$$\sin\lambda = \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}, \tag{I}$$

$$\cos\lambda = \frac{\operatorname{th}\frac{b}{k}}{\operatorname{th}\frac{c}{k}}, \tag{II}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{th}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}, \tag{III}$$

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}, \tag{IV}$$

$$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}, \tag{V}$$

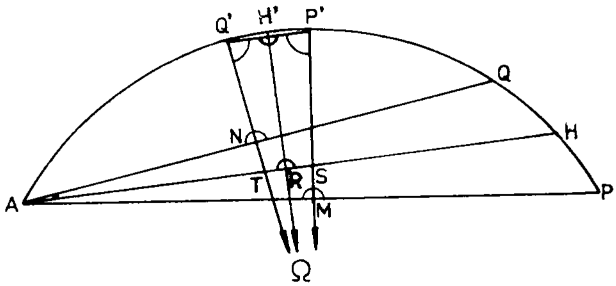
$$\operatorname{ctg}\lambda\operatorname{ctg}\mu = \operatorname{ch}\frac{c}{k}. \tag{VI}$$

V. Paraciklus-ívek rektifikációja

26. §. SEGÉDTÉTEL. *Ha az* $\overset{\frown}{AP}$ *paraciklus-íven* Q *a* P*-től különböző pont és* H *a* $\overset{\frown}{PQ}$ *ív felezőpontja, akkor*

$$2\overline{AH} > \overline{AP} + \overline{AQ}. \tag{1}$$

Ezt következőképp láthatjuk be. Feltehető, hogy Q nem esik össze A-val sem, s így $\overline{AQ} \neq 0$, mert különben $\overline{AH} = \overline{HP}$ (18. §, Definíció) és (1) evidens. Legyenek (53. ábra) az $\overset{\frown}{AP}$, $\overset{\frown}{AQ}$, $\overset{\frown}{AH}$ ívek felezőpontjai rendre P', Q', H', s ezeket a paraciklus



53. ábra

Ω középpontjával összekötő egyenesek messék az $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{AH}$ húrokat rendre az M, N, R pontokban. Ekkor (18. §, Definíció, 1. Korollárium) nyilván

$$2\overline{AM} = \overline{AP}, \quad 2\overline{AN} = \overline{AQ}, \quad 2\overline{AR} = AH \tag{2}$$

és

$$AMP'_{\sphericalangle} = ANQ'_{\sphericalangle} = ARH'_{\sphericalangle} = 90^\circ. \tag{3}$$

AH messe a $P'\Omega$, ill. $Q'\Omega$ egyenest S, resp. T-ben. A H' pont a szerkesztésből folyólag nyilván felezi a $\overset{\frown}{Q'P'}$ ívet, ezért $H'\Omega$ a $\overline{P'Q'}$ egyenesdarab felező merőlegese. Továbbá P' és Q' a $P'\Omega$ és $Q'\Omega$ elpattanó egyenesek homológ pontjai (16. §) azaz $P'Q'\Omega_{\sphericalangle} = Q'P'\Omega_{\sphericalangle}$. S mivel még AH a $H'\Omega$ egyenest R-ben (3) szerint derékszögben metszi, a szimmetria folytán

$$\overline{RS} = \overline{RT}.$$

Ennélfogva

$$2\overline{AR} = \overline{AS} + \overline{AT}.$$

De (3) alapján

$$\overline{AS} > \overline{AM}, \quad \overline{AT} > \overline{AN},$$

tehát előbbiből

$$2\overline{AR} > \overline{AM} + \overline{AN}$$

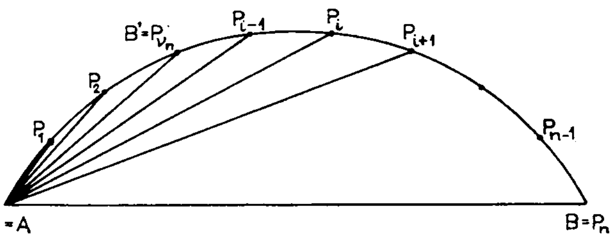
s ezzel (2)-re tekintettel (1) be van bizonyítva.

27. §. TÉTEL. *Ha a paraciklus $\sigma > \sigma'$ íveinek húrja rendre s és s', akkor*

(1) $$\frac{\sigma'}{\sigma} < \frac{s'}{s}.$$

Bizonyítás. Legyen a paraciklus $\widehat{AB} = \sigma$ ívén B' az a pont, amelyre $\widehat{AB'} = \sigma'$ (18. §, Definíció), mikor is $\overline{AB} = s$, $\overline{AB'} = s'$. Tegyük fel először, hogy $\widehat{AB}$ és $\widehat{AB'}$ összemérhetők. Akkor $\widehat{AB}$ egyenlő részekre osztható úgy, hogy valamelyik osztópont B'-vel összeesik. Legyenek e felosztás ívei

$$\widehat{P_0P_1} = \widehat{P_1P_2} = \ldots = \widehat{P_{n-1}P_n} \quad (P_0 = A,\ P_n = B)$$



54. ábra

és P_{ν_n} essék össze B'-vel (54. ábra). Az előbbi segédtétel értelmében

(2) $$2\overline{AP_i} > \overline{AP_{i-1}} + \overline{AP_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ez egyenlőtlenségekből következik, hogy

(3) $$\overline{AP_1} > \frac{\overline{AP_2}}{2} > \ldots > \frac{\overline{AP_n}}{n}.$$

Ugyanis az $i = 1$-nek megfelelő egyenlőtlenség szerint

$$\overline{AP_1} > \frac{\overline{AP_2}}{2},$$

s ha fennáll

$$\frac{\overline{AP_{i-1}}}{i-1} > \frac{\overline{AP_i}}{i},$$

akkor (2) alapján

$$2\overline{AP_i} > \frac{i-1}{i}\overline{AP_i} + \overline{AP_{i+1}},$$

honnan

$$\frac{\overline{AP_i}}{i} > \frac{\overline{AP_{i+1}}}{i+1},$$

tehát egymás után adódnak a (3) alatti egyenlőtlenségek. Mármost (3)-ból folyólag

$$\frac{\overline{AB'}}{\nu_n} = \frac{\overline{AP_{\nu_n}}}{\nu_n} > \frac{\overline{AP_n}}{n} = \frac{\overline{AB}}{n},$$

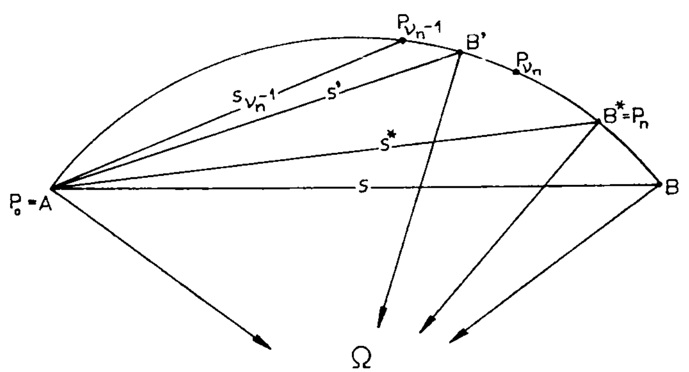
vagyis

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} > \frac{\nu_n}{n} = \frac{\widehat{AB'}}{\widehat{AB}},$$

amivel (1) ez esetre be van bizonyítva.

Legyenek most $\widehat{AB}$ és $\widehat{AB'}$ összemérhetetlenek. Válasszuk a $\widehat{B'B}$ íven (55. ábra) a közbülső B^* pontot úgy, hogy $\widehat{AB}$ és $\widehat{AB^*}$ összemérhetők legyenek (ami a 18. §-ban mondottak alapján lehetséges), s legyen

$$\widehat{AB^*} = \sigma^*, \quad \overline{AB^*} = s^*.$$



55. ábra

Az $\widehat{AB'}$ és $\widehat{AB^*}$ ívek a feltevésből folyólag nyilván összemérhetetlenek. Az $\widehat{AB^*}$ ívet n egyenlő részre osztván a $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ osztópontokkal, essék B' a P_{ν_n-1} és P_{ν_n} közé ($P_0=A$, $P_n=B^*$) és legyen

$$\widehat{AP}_{\nu_n-1} = \sigma_{\nu_n-1} \quad \overline{AP}_{\nu_n-1} = s_{\nu_n-1}.$$

Ha n elég nagy, akkor $1<\nu_n<n$, tehát $\sigma_{\nu_n-1}\neq 0$ és $s_{\nu_n-1}\neq 0$. Az előbbiek szerint

$$\frac{\sigma_{\nu_n-1}}{\sigma^*} < \frac{s_{\nu_n-1}}{s^*},$$

s minthogy $\sigma_{\nu_n-1}<\sigma'$ folytán $s_{\nu_n-1}<s'$ (17. §, Segédtétel), még inkább áll

$$\frac{\sigma_{\nu_n-1}}{\sigma^*} < \frac{s'}{s^*}.$$

Ebből az $n \to +\infty$ határátmenettel, mikor is $\sigma_{\nu_n - 1} \to \sigma'$, következik, hogy

$$\frac{\sigma'}{\sigma^*} \leqq \frac{s'}{s^*}.$$

De mivel $\widehat{AB}$ és $\widehat{AB}^*$ összemérhetők, a fentebbiek értelmében egyszersmind

$$\frac{\sigma^*}{\sigma} < \frac{s^*}{s}$$

s a két utóbbi egyenlőtlenségből összeszorzással adódik (1). Q. e. d.

28. §. Tétel. *Ha α a paraciklus valamely rögzített íve és a változó σ ív húrja s, akkor $\frac{\alpha}{\sigma} s$ meghatározott pozitív határértékhez tart, midőn $\sigma \to 0$.*

Bizonyítás.[23] Az előbbi tétel alapján σ csökkentésénél $\frac{\alpha}{\sigma} s$ folyvást növekedik. Ugyanis $\sigma' < \sigma$ esetén e tétel felhasználásával

$$\frac{\alpha}{\sigma} s = \frac{\alpha}{\sigma'} \frac{\sigma'}{\sigma} s < \frac{\alpha}{\sigma'} \frac{s'}{s} s = \frac{\alpha}{\sigma'} s'.$$

Tehát csak azt kell még megmutatnunk, hogy $\frac{\alpha}{\sigma} s$ bizonyos korlát alatt marad.

Megadva bármely σ paraciklus-ívet, az α ív felbontható az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ részekre úgy, hogy mindegyik $\alpha_i < \sigma$. A megfelelő húrokat rendre $a_1, a_2, \dots, a_n$-nel jelölve

$$\min \frac{a_i}{\frac{\alpha_i}{\alpha}} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha}}.$$

De mivel $\alpha_i < \sigma$, az éppen mondottak szerint

$$\frac{\alpha}{\sigma} s < \frac{\alpha}{\alpha_i} a_i = \frac{a_i}{\frac{\alpha_i}{\alpha}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

s így előbbi mellett még inkább áll

$$\frac{\alpha}{\sigma} s < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha}},$$

vagyis $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha$ folytán

$$\frac{\alpha}{\sigma} s < a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

[23] Vö. *szerzőtől,* i. h. (13. old.), 145—146.

Tudjuk azonban (17. §), hogy itt a jobb oldal bizonyos p korlát alatt marad az α ív felbontásától függetlenül. Ennélfogva ez egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{\alpha}{\sigma}s < p$$

bármely σ paraciklus-ívre. Q. e. d.

29. §. Jelöljük az előbbi tételben szereplő pozitív határértéket L-lel, vagyis legyen

$$L = \lim \frac{\alpha}{\sigma} s \quad (\sigma \to 0), \tag{1}$$

ahol α valamely megadott paraciklus-ív és s a változó σ ív húrja. (E határérték természetesen függ az s mérésére szolgáló hosszegység választásától.)

TÉTEL. *Az $\overset{\frown}{AB}$ paraciklus-ív rektifikálható és ívhosszúsága*

$$p = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\alpha} L, \tag{2}$$

ahol α valamely megadott paraciklus-ív és $L > 0$ az (1) *alatti határérték.*

Bizonyítás.[24] Bontsuk az $\overset{\frown}{AB}$ ívet a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ívekre, amelyeknek húrja rendre $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Tudjuk, hogy

$$\min \frac{\alpha}{\sigma_i} s_i \leqq \frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{\frac{\sigma_1}{\alpha}+\frac{\sigma_2}{\alpha}+\ldots+\frac{\sigma_n}{\alpha}} \leqq \max \frac{\alpha}{\sigma_i} s_i. \tag{3}$$

Ha $\max \sigma_i \to 0$, akkor (1) szerint

$$\min \frac{\alpha}{\sigma_i} s_i \to L, \quad \max \frac{\alpha}{\sigma_i} s_i \to L,$$

tehát (3)-ból $\overset{\frown}{AB} = \sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n$ folytán következik, hogy ugyanekkor

$$s_1+s_2+\ldots+s_n \to \frac{\overset{\frown}{AB}}{\alpha} L.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy az $\overset{\frown}{AB}$ ív rektifikálható és ívhosszúsága a (2) alatti érték. Q. e. d.

1. KOROLLÁRIUM. *$\overset{\frown}{AB}$ ívhossza nagyobb az $\overline{AB}$ húrnál.*

2. KOROLLÁRIUM. *Ha P az $\overset{\frown}{AB}$ ív közbülső pontja, akkor*

$$\overset{\frown}{AB}\text{ ívh.} = \overset{\frown}{AP}\text{ ívh.} + \overset{\frown}{PB}\text{ ívh.}$$

[24] Vö. *szerzőtől*, i. h. (13. old.), 146—147.

3. KOROLLÁRIUM. *Ha* $\widehat{AB}\to 0$, *akkor* $\widehat{AB}$ ívh.$\to 0$.

4. KOROLLÁRIUM. *Paraciklus-ív hossza az ívvel arányos.*

5. KOROLLÁRIUM. *Ha a paraciklus valamely* σ *ívének ívhossza* p *és húrja* s, *akkor*

$$\frac{p}{s}\to 1, \quad \textit{midőn} \quad \sigma\to 0. \tag{4}$$

Ugyanis (2) értelmében a p ívhosszúság

$$p=\frac{\sigma}{\alpha}L,$$

tehát ennek az s húrhoz való viszonya

$$\frac{p}{s}=\frac{L}{\dfrac{\alpha}{\sigma}s},$$

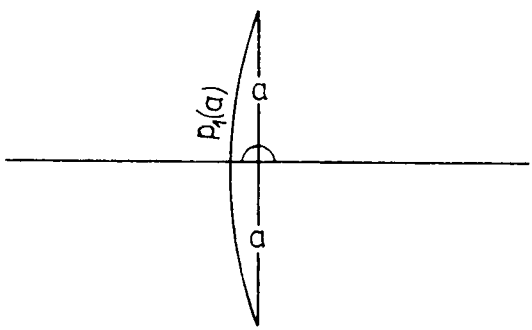
ebből pedig az $L>0$ határérték (1) alatti definíciójára tekintettel folyik (4).

30. §. TÉTEL. *A paraciklus-ívek* S *egységének ívhossza a* k *természetes hossz-egységgel egyenlő.*

Bizonyítás. Jelöljük S ívhosszát s_0-lal, valamely a magasságú $p_1(a)$ paraciklus-ívét pedig s-sel. Akkor (29. §, 4. Korollárium, 21. §, (1))

$$\frac{s}{s_0}=\frac{p_1(a)}{S}=\operatorname{ctg}\alpha, \tag{1}$$

ahol α az a távolságának megfelelő elpattanási szög. Tudjuk azonban (25. §, (4*)), hogy



56. ábra

$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{sh}\frac{a}{k}, \tag{2}$$

tehát (1)-ből

$$s_0=\frac{s}{\operatorname{sh}\dfrac{a}{k}}.$$

Írjuk e képletet az

$$(3)\qquad s_0 \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\frac{a}{k}} = k\frac{s}{a}$$

alakban. Ha $p_1(a)\to 0$, akkor $s\to 0$ (29. §, 3. Korollárium) és mint az ív kétszerese húrjának fele (56. ábra), a fortiori $a\to 0$ (29. §, 1., 2. Korollárium), s mivel ekkor (29. §, 5. Korollárium)

$$\frac{s}{a} = \frac{2s}{2a} \to 1$$

és tudvalevőleg

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\frac{a}{k}} \to 1,$$

(3)-ból következik, hogy

$$s_0 = k.$$

Q. e. d.

E tétel az eddig ismeretlen k természetes hosszegységet geometriailag meghatározza.

1. Korollárium. *Az a magasságú paraciklus-ív hossza*

$$(4)\qquad s_1 = k\operatorname{sh}\frac{a}{k}.$$

Ez a tétel alapján következik (2)-ből.

2. Korollárium. *Az a érintőjű paraciklus-ív hossza*

$$(5)\qquad s_2 = k\operatorname{th}\frac{a}{k}.$$

(29. §, 4. Korollárium; 21. §, (1); 25. §, (4*).)

31. §. Az előbbi § (4) képlete alapján a paraszféráról leolvashatjuk az r sugarú kör kerületét, amelyre Bolyai János[25] a „$\bigcirc r$" jelet vezette be, s amelyet bonyodalmasabban számított ki.

Állítsunk ugyanis a kör O középpontjában a kör síkjára merőlegest, amelynek egyik végtelen távoli pontja Ω legyen, s tekintsük (19. §, 1. Definíció, 3. Korollárium) az Ω középpontú és a kerület pontjain átmenő paraszférát (57. ábra). Ezen az r sugarú kör O' középpontú és ϱ sugarú paraszférabeli kör, ahol is O' a paraszférának az $O\Omega$ tengelyen levő pontja, ϱ pedig nyilván az r magasságú paraciklus-ív. Írjunk a körbe ennek síkjában konvex n-szöget, amelynek oldalai $s_1, s_2, \ldots, s_n$, az ezeknek

[25] J. Bolyai, i. m. (27. old.), § 30.

mint húroknak megfelelő ívek a körön $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, a paraszférán pedig $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_n$. Ha $\max \omega_i \to 0$, akkor nyilván $\max s_i \to 0$ és ennélfogva mint $\frac{\max s_i}{2}$ magasságú paraciklus-ív kétszerese egyben $\max \sigma_i \to 0$ (21. §, (1); 25. § (4*)). A paraszféra euklideszi geometriája szerint (20. §) a ϱ sugarú paraszféra-beli kör kerülete $2\pi\varrho$, vagyis

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n \to 2\pi\varrho \quad (\max \sigma_i \to 0),$$

tehát mondhatjuk, hogy

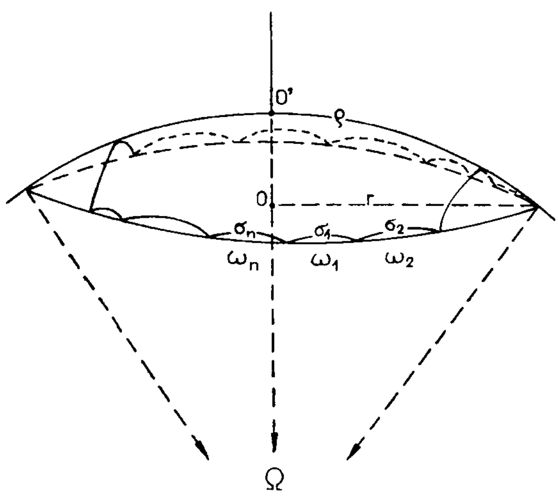
$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n \to 2\pi\varrho, \quad \text{midőn} \quad \max \omega_i \to 0. \tag{1}$$

A σ_i paraciklus-ív hosszát p_i-vel, a ϱ ívét pedig p-vel jelölve, (1)-ből következik (29. §, 4. Korollárium), hogy egyben

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \to 2\pi p \quad (\max \omega_i \to 0). \tag{2}$$

De

$$\min \frac{p_i}{s_i} \leqq \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} \leqq \max \frac{p_i}{s_i}$$



57. ábra

s minthogy itt (29. §, 5. Korollárium)

$$\max \frac{p_i}{s_i} \to 1, \quad \min \frac{p_i}{s_i} \to 1 \quad (\max \sigma_i \to 0)$$

és mint láttuk $\max \omega_i \to 0$ esetén egyben $\max \sigma_i \to 0$, azért

$$\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} \to 1 \quad (\max \omega_i \to 0). \tag{3}$$

Mármost (2)- és (3)-ból

$$s_1+s_2+\ldots+s_n\to 2\pi p \quad (\max\omega_i\to 0). \tag{4}$$

A megelőző § (4) képlete szerint azonban az r magasságú ϱ paraciklus-ív hossza

$$p = k\,\mathrm{sh}\,\frac{r}{k},$$

tehát (4)-gyel nyertük, hogy

$$s_1+s_2+\ldots+s_n\to 2\pi k\,\mathrm{sh}\,\frac{r}{k} \quad (\max\omega_i\to 0).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy *az r sugarú kör kerülete*

$$\circ r = 2\pi k\,\mathrm{sh}\,\frac{r}{k}. \tag{5}$$

Tekintettel a hiperbolikus trigonometria sinus-tételére (25. §, (5)), (5) alapján kimondhatjuk, hogy

az a, b, c oldalakkal és ezekkel rendre szemben fekvő λ, μ, ν szögekkel bíró háromszögben

$$\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu = \circ a : \circ b : \circ c.$$

Ez BOLYAI JÁNOS[25] híres *abszolút sinus-tétele,* amely az euklideszi geometriában is érvényes.

(Beérkezett: 1972. VII. 6.)

[25] J. BOLYAI i. h. (27. old.), § 25.

A LOKÁLIS GYŰRŰK ELMÉLETÉHEZ, I.

D. A. Buchsbaum egy problémájáról

Írta: WOLFGANG VOGEL és MÁRKI LÁSZLÓ

ELŐSZÓ

Ez a munka annak az előadásnak az anyagát tartalmazza, amelyet az elsőként megnevezett szerző 1972 őszén tartott a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Nem objektív okokból a dolgozat két részben jelenik meg. Az előadás célja az volt, hogy bevezessen az algebrai geometria egy ágába, és arról áttekintést nyújtson. Erre a célra klasszikus témakört választottunk: a multiplicitáselméletet. Felépítésünkben a lokális algebra újabb módszereivel dolgoztunk, anélkül azonban, hogy explicite felhasználtuk volna a multiplicitáselméletben J-P. SERRE által meghonosított homologikus számításmódot. Az előadás „vezérmotívumául" D. A. BUCHSBAUM egy problémája szolgált, amelyet 1965-ben a varennai nyári iskolán vetett fel. Közvetlen célunk e probléma megoldása volt az elsőként megnevezett szerző dolgozatai ([20], [26] és [30]) alapján. (Ezek a számok a második rész irodalomjegyzékére utalnak.)

Munkánk első része a kommutatív és a lokális algebra alapjairól szól. Az itt szereplő anyag nagy része jól ismert, és megtalálható O. ZARISKI és P. SAMUEL: *Commutative algebra* I—II. című könyvében. A mi felépítésünk azonban más, hiszen már a 0. fejezetben is az előadás közvetlen célját, a *Buchsbaum*-probléma megoldását tartottuk szem előtt. A 0. fejezet 2. és 3. paragrafusában olyan eredményeket is közlünk, amelyek eddig csak egyes dolgozatokban szerepeltek, vagy pedig egyáltalán nem voltak publikálva (lásd pl. a 2.11., a 3.10. vagy a 3.16. tételt és a 2.6. definíció utáni gyakorlatot). Egy részükre pillanatnyilag csak homologikus módszereket igénylő bizonyítások ismeretesek. Számos példával és gyakorlattal kívántuk e fejezet tömörségét feloldani és anyagát illusztrálni.

Munkánk második részében (I. és II. fejezet) kizárólag D. A. BUCHSBAUM problémájával foglalkozunk. A problémát az I. fejezet 1. §-ában fogalmazzuk meg — igyekszünk ezt úgy megtenni, hogy legalább maga a probléma érthető legyen a 0. fejezet elolvasása nélkül is. Ezután megmutatjuk, hogy a problémának általában nincsen megoldása. A 2. §-ban a probléma geometriai interpretációját adjuk — ez további nyitott kérdésekre vezet.

A II. fejezetben megadjuk azokat a lokális gyűrűket, amelyekben BUCHSBAUM kérdésére pozitív a válasz. A lokális gyűrűknek ez az új osztálya bővebb, mint a (lokális) *Cohen—Macaulay*-gyűrűké. Ezek a vizsgálataink újabb érdekes problémákat vetnek fel.

MÁRKI LÁSZLÓ az előadás anyagát saját ötleteivel kritikusan átdolgozta.

Köszönet illeti a *Halle—Wittenberg-i Martin-Luther Egyetemet* (NDK), a *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetét* és a budapesti *Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karát*. Ezek az intézmények teremtették meg számomra annak a feltételeit, hogy többek között ezt az előadást is megtarthassam.

W. Vogel

TARTALOM*

0. fejezet: A kommutatív algebra alapjai
1. §: Ideálelmélet *Noether*-gyűrűkben
2. §: Ideálelmélet test fölötti polinomgyűrűkben
3. §: Lokális gyűrűk
I. fejezet: D. A. Buchsbaum egy problémájáról
1. §: Első ellenpélda a *Buchsbaum*-problémára
2. §: A *Buchsbaum*-probléma geometriai interpretációja. Példák
3. §: M. Auslander és D. A. Buchsbaum néhány lokális multiplicitáselméleti eredménye
II. fejezet: Lokális gyűrűk egy új osztálya
1. §: A *Cohen—Macaulay*-gyűrűk egy általánosítása
2. §: A *Buchsbaum*-probléma megoldása
3. §: Példák, problémák

0. FEJEZET

A KOMMUTATÍV ALGEBRA ALAPJAI

Ebben a fejezetben röviden bevezetjük azokat a segédeszközöket, amelyekre a következőkben szükségünk lesz. Részben bizonyítás nélkül közöljük őket, de akkor megadjuk, hol található az irodalomban a szóban forgó eredmények teljes bizonyítása.

A hallgatóság várható összetételének megfelelően csak Fuchs L. *Algebra* [2] c. egyetemi jegyzetének anyagát tételezzük fel ismertnek. Ezért először is a *Noether*-gyűrűk ideálelméletéről ejtünk röviden szót, körülbelül úgy, amint az B. L. van der Waerden [13] 13. fejezetében olvasható; ugyanott található az 1. §-ban szereplő tételek teljes bizonyítása.

Dolgozatunkban végig gyűrűn (melyet általában R-rel jelölünk) kommutatív egységelemes gyűrűt értünk, ahol az egységelem nem egyezik meg a zéruselemmel. Azt, hogy A az R gyűrű egy ideálja, így jelöljük: $A \lhd R$; az egész gyűrűt nem tekintjük ideálnak.

1. §. Ideálelmélet Noether-gyűrűkben

Emlékeztetőül:

1.1. Definíció. Az R gyűrű *Noether*-féle, ha teljesül rá a következő ekvivalens állítások egyike:

1) R ideáljainak bármely, nem üres halmazában van maximális elem.

2) R ideáljainak minden növő lánca megszakad, azaz ha $A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq \ldots \subseteqq A_i \subseteqq \subseteqq A_{i+1} \subseteqq \ldots$, akkor valamilyen n-től kezdve a tagok mind egyenlők: $A_n = A_{n+1} = \ldots$.

3) R minden ideálja véges sok elemmel generálható, azaz ha $A \lhd R$, akkor $A = (a_1, \ldots, a_t)$.

Az 1. §-ban R mindig *Noether*-gyűrűt jelöl.

$Q \lhd R$ *primér*, ha bármely $a, b \in R$ esetén:

$a \cdot b \in Q$, $a \notin Q \Rightarrow$ létezik olyan n természetes szám, hogy $b^n \in Q$.

$Q \lhd R$ primér $\Leftrightarrow$ az R/Q maradékosztálygyűrűben minden nullosztó nilpotens. ($b \in R$ *nilpotens*, ha valamelyik hatványa eltűnik: $\exists n\ b^n = 0$.)

* A cikk jelen első része a 0. fejezetet, második része az I. és II. fejezetet foglalja magában. Ez utóbbi részt az *MTA III. Osztály Közleményei* 22(1973) 3. füzete tartalmazza.

1.2. SEGÉDTÉTEL. *Minden $Q \lhd R$ primér ideálhoz tartozik egy $P \supseteqq Q$ prímideál, amely így definiálható: P az olyan $b \in R$ elemek összessége, amelyeknek valamilyen b^n hatványa Q-ba esik.*

A *bizonyítás* a következő lépésekben történik: P ideál; P prímideál (azaz R/P-ben nincs 0-tól különböző nullosztó); $Q \subseteqq P$.

Elnevezések. P a Q-hoz tartozó prímideál, Q egy P-hez tartozó primér ideál. Röviden: Q P-primér.

A fenti definíciók szerint minden $A, B \lhd R$-re:

$$(A \cdot B \subseteqq Q \quad \text{és} \quad A \nsubseteq Q) \Rightarrow B \subseteqq P,$$

ahol $A \cdot B$ az $a \cdot b$ $(a \in A, b \in B)$ elemek által generált ideál.

1.3. SEGÉDTÉTEL. *Ha Q P-primér, akkor van olyan ϱ természetes szám, hogy $P^\varrho \subseteqq Q$.*

A bizonyítás vázlata: Legyen $(p_1, \ldots, p_r)$ P egy bázisa. Alkalmas $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$ természetes számokkal $p_1^{\varrho_1}, \ldots, p_r^{\varrho_r} \in Q$. Legyen most

$$\varrho =: \sum_{i=1}^{r} (\varrho_i - 1) + 1,$$

akkor $P^\varrho \subseteqq Q$.

A legkisebb olyan ϱ számot, amelyre fennáll $P^\varrho \subseteqq Q \subseteqq P$, *$Q$ kitevőjének* nevezzük.

GYAKORLATOK. 1) Ha $Q \lhd R$ primér, $P \lhd R$ prím és van olyan ϱ, hogy $P^\varrho \subseteqq Q \subseteqq P$, akkor Q P-primér; P a legkisebb, Q-t tartalmazó prímideál.

2) Ha $P, Q \lhd R$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. ha $ab \in Q$ és $a \notin Q$, akkor $b \in P$,
2. $Q \subseteqq P$,
3. ha $b \in P$, akkor van olyan ϱ, hogy $b^\varrho \in Q$, akkor Q primér, és P a hozzá tartozó prímideál.

3) Igazoljuk, hogy egy prímideál hatványai nem föltétlenül primérek. (Útmutatás: Tekintsük a következő példát: legyen $R = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n;\ a_i \text{ egész},\ 3 \mid a_1\}$; $P = (3x, x^2, x^3) \lhd R$ prímideál, de P^2 nem primér.)

$A \lhd R$ irreducibilis, ha

$$A = B \cap C,\ B, C \lhd R \Rightarrow (A = B \quad \text{vagy} \quad A = C).$$

1.4. SEGÉDTÉTEL. *Minden $A \lhd R$ véges sok irreducibilis ideál metszete.*

1.5. SEGÉDTÉTEL. *Minden irreducibilis ideál primér.*

Eszerint minden ideál előállítható véges sok primér ideál metszeteként. Ezt az eredményünket tovább élesíthetjük az alábbi két tétel segítségével:

1. Véges sok, ugyanazon prímideálhoz tartozó primér ideál metszete ismét primér, és szintén ugyanahhoz a prímideálhoz tartozik.

Primér ideálok egy $Q_1 \cap \ldots \cap Q_t$ metszetét *nem rövidíthetőnek* nevezzük, ha egyetlen Q_i sem tartalmazza a többiek metszetét.

2. Véges sok primér ideál metszete nem primér, ha a szóban forgó primér ideálok nem tartoznak mind ugyanahhoz a prímideálhoz.

Ha egy $R \rhd A = Q_1 \cap \ldots \cap Q_t$ nem rövidíthető előállításban a Q_i-k mind különböző prímideálokhoz tartoznak, úgyhogy sehogyan sem vonhatunk össze közülük kettőt (vagy esetleg többet) egyetlen primér ideállá, akkor azt mondjuk, hogy A-t *primér komponensekkel* állítottuk elő. Végeredményben tehát a következő tételt nyertük.

FELBONTÁSI TÉTEL. *Minden ideál előállítható véges sok primér komponens nem rövidíthető metszeteként úgy, hogy ezek a primér komponensek mind különböző prímideálokhoz tartoznak.*

Az ilyen felbontást egyszerűen primér felbontásnak fogjuk nevezni.

PÉLDÁK. Tekintsünk egy tetszőleges K test fölötti $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ polinomgyűrűt. Ennek néhány, geometriai szempontból érdekes ideálját állítjuk most elő primér felbontással. Az itt szereplő geometriai fogalmakkal csak motiválni akarjuk a felbontandó ideálok választását; definiálni később fogjuk őket.

1) A $P =: (x_0^2x_2 - x_1^3, x_0x_3 - x_1x_2, x_0x_2^2 - x_1^2x_3, x_1x_3^2 - x_2^3)$ prímideál negyedrendű térgörbét definiál a 3-dimenziós projektív térben.

(P, x_3) primér felbontása a következő:

$$(P, x_3) = (x_3, x_1x_2, x_2^2, x_0^2x_2 - x_1^3) \cap (x_0, x_1, x_2^3, x_3) =: Q_1 \cap Q_2,$$

ahol Q_1 (x_1, x_2, x_3)-primér és kitevője 4. (Gyakran alkalmazzuk azt az eljárást, hogy nem közvetlenül P-t vizsgáljuk, hanem először pl. (P, x_3)-at. Erről bővebben is lesz majd szó a 2. §-ban.)

2) A következő ideál egy egyenespárra szétesó kúpszeletet és egy azt nem metsző egyenest állít elő.

$$A =: (x_0x_1, x_0x_2, x_1^2x_2 - x_1x_3^2, x_1x_2^2 - x_2x_3^2) = (x_0, x_1x_2 - x_3^2) \cap (x_1, x_2).$$

3) Három, közös pont nélküli (páronként kitérő) egyenest definiál

$$A =: (x_0x_2 - x_1x_2, x_0^2x_2 - x_1x_3^2, x_0^2x_3 - x_0x_3^2, x_1^2x_2 - x_1x_2^2, x_0x_1x_2 - x_1x_2x_3) =$$

$$= (x_0, x_1) \cap (x_2, x_3) \cap (x_0 - x_3, x_1 - x_2).$$

Most pedig röviden kitérünk a primér felbontás komponenseinek egyértelműségére. Amint azt a következő egyszerű példa mutatja, nem várhatjuk, hogy maguk a komponensek egyértelműen meghatározottak legyenek:

$$K[x_0, x_1] \rhd A =: (x_0^2, x_0x_1) = (x_0) \cap (x_0^2, x_1) =$$

$$= (x_0) \cap (x_0^2, x_0x_1, x_1^2) = (x_0) \cap (x_0^2, x_1 + k \cdot x_0)$$

a K test tetszőleges k elemére.

Két unicitás-tételt mondunk ki:

1. Egy ideál bármely két primér felbontásában a komponensek száma és (ha a komponensek maguk nem is) a hozzájuk tartozó prímideálok megegyeznek.

Primér ideálokra az állítás triviális. Ezután a bizonyítás a primér komponensek minimális száma szerinti teljes indukcióval történik.

Tételünk szerint egyértelműen meghatározottak azok a prímideálok, amelyek egy A ideál $A=Q_1\cap\ldots\cap Q_t$ primér felbontásának a komponenseihez tartoznak. Ezeket a prímideálokat az A ideálhoz tartozó prímideáloknak nevezzük.

Az $A=Q_1\cap\ldots\cap Q_t$ primér felbontás egy Q_i komponensét *beágyazott*nak nevezzük, ha a hozzá tartozó P_i prímideálra $P_i\supset P_j$, ahol P_j valamelyik másik, az A-hoz tartozó prímideál; ha Q_i nem beágyazott, akkor azt mondjuk, hogy Q_i *izolált*. Ugyanígy a P_i prímideált is az első esetben beágyazottnak (mégpedig P_j-be beágyazottnak), a második esetben pedig izoláltnak nevezzük. (A beágyazottság fogalmát az algebrai geometriából vettük; geometriailag azt jelenti, hogy a $P(\supset P')$ beágyazott prímideál által definiált $V(P)$ algebrai sokaság (lásd az I. fejezet) részsokasága $V(P')$-nek. Innen ered tehát az a furcsa szóhasználat, hogy a tartalmazó ideált hívjuk beágyazottnak.)

PÉLDA. Egy primér komponens több másik komponensbe is be lehet ágyazva. Legyen például $A=:(x_0^2x_1, x_0x_1^2)=(x_0)\cap(x_1)\cap(x_0^2, x_1^2)$; itt az (x_0) és az (x_1) primér komponens izolált, (x_0^2, x_1^2) pedig mindkettőbe be van ágyazva.

2. *A primér felbontás izolált komponensei egyértelműen meghatározottak.*

Most ideálok között bevezetünk néhány műveletet.

Az A és a B ideál *összegén* az egyesítésük által generált (A, B) ideált értjük. Ha tehát $A=(a_1, \ldots, a_n)$ és $B=(b_1, \ldots, b_m)$, akkor (A, B) egy bázisa $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$ — ez a bázis persze általában rövidíthető.

Ha egy A ideál elemeit összeszorozzuk egy B ideál elemeivel, akkor az így kapott ab szorzatok (az összegekkel ellentétben) általában nem alkotnak ideált; legyen például $K[x_0, x_1]\rhd A=:(x_0, x_1)$, $B=:(x_0^2, x_1)$, akkor x_0^3 is, x_1^2 is ab alakú szorzat, $x_0^3-x_1^2$ viszont nem az. Az ab szorzatok által generált ideált nevezzük A és B *szorzat*ának, és így jelöljük: $A\cdot B$ vagy AB. Ez az ideál a $\sum a_ib_i$ alakú összegekből áll, ahol $a_i\in A$ és $b_i\in B$.

1.6. DEFINÍCIÓ. $A, B\lhd R$. Az $A:B$ ideálhányadoson az olyan $r\in R$ elemek összességét értjük, amelyekre $r\cdot b\in A$ minden $b\in B$-vel.

$A:B$ ideál R-ben.

Könnyen igazolhatók, de fontosak a következő összefüggések ($A_1, \ldots, A_n, B\lhd R$):

$$(A_1\cap\ldots\cap A_n):B = (A_1:B)\cap\ldots\cap(A_n:B)$$

$$(A_1:A_2):A_3 = A_1:A_2\cdot A_3 = (A_1:A_3):A_2$$

$$A_1:(A_2, A_3) = (A_1:A_2)\cap(A_1:A_3).$$

GYAKORLAT. Minden $A, B\lhd R$ esetén

$$A\cdot B \subseteq A\cap B \quad \text{és} \quad B\cdot(A:B) \subseteq A.$$

Mutassunk példát arra, hogy ezekben az összefüggésekben egyenlőség általában nem áll fenn.

Minden $A, B\lhd R$ esetén $A:B\supseteq A$, és a 2. §-ban látni fogjuk, hogy különösen érdekes az az eset, amikor $A:B=A$. Ez esetben azt mondjuk, hogy B relatív prím

A-hoz. (Vigyázzunk! Ha B relatív prím A-hoz, akkor A általában nem relatív prím B-hez.)

1.7. TÉTEL. *Legyen $A, B \lhd R$. Akkor $A:B=A \Leftrightarrow$ egyetlen, A-hoz tartozó prímideál sem tartalmazza B-t.*

Bizonyítás. Legyen $A=Q_1 \cap \ldots \cap Q_t$ A egy primér felbontása. Tegyük fel, hogy $B \nsubseteq P_i$, $i=1, \ldots, t$, ahol P_i a Q_i-hez tartozó prímideál. Láttuk, hogy $Q_i:B \supseteq Q_i$. Tegyük fel, hogy létezik olyan $r \in R$, $r \notin Q_i$, melyre $r \cdot B \subseteq Q_i$. Minthogy Q_i P_i-primér, azért innen következik, hogy $B \subseteq P_i$, ami ellentmond a feltevésünknek. Eszerint $Q_i:B=Q_i$, $i=1, \ldots, t$. Akkor viszont $A:B=(Q_1 \cap \ldots \cap Q_t):B=(Q_1:B) \cap \ldots \cap (Q_t:B)= =Q_1 \cap \ldots \cap Q_t=A$.

Fordítva, legyen $A:B=A$. Tegyük fel, hogy van olyan i, $1 \leq i \leq t$, melyre $B \subseteq P_i$; például $B \subseteq P_1$. Most ha ϱ a Q_1 kitevőjét jelöli, akkor $B^\varrho \subseteq Q_1$, azaz $B^\varrho \cdot (Q_2 \cap \ldots \cap Q_t) \subseteq \subseteq B^\varrho \cap (Q_2 \cap \ldots \cap Q_t) \subseteq Q_1 \cap \ldots \cap Q_t=A$. Innen $Q_2 \cap \ldots \cap Q_t \subseteq A:B^\varrho=(A:B):B^{\varrho-1}= =A:B^{\varrho-1}=\ldots=A$. Ezért $A=Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_t \subseteq Q_2 \cap \ldots \cap Q_t \subseteq A$, vagyis $A=Q_2 \cap \ldots \ldots \cap Q_t$, ami ellentmond annak, hogy A felbontása nem rövidíthető, q. e. d.

Az 1. § anyagáról l. még: O. ZARISKI—P. SAMUEL: *Commutative Algebra* I [14], III. és IV. fejezet.

2. §. Ideálelmélet test fölötti polinomgyűrűkben

Legyen $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]=: R$ egy tetszőleges K test fölötti $n+1$ határozatlanú polinomgyűrű. Minden $F \in R$ elem előállítható $F=F_0+F_1+\ldots+F_j+\ldots$ véges összegként, ahol F_j nulla vagy pedig homogén j-edfokú polinom. A továbbiakban a homogén polinomokat egyszerűen *alak*oknak nevezzük. Az F_j alakok neve: *F homogén komponensei.*

2.1. DEFINÍCIÓ. Az $A \lhd R$ ideált *homogén*nek nevezzük, ha $F \in A$ esetén F homogén komponensei is A-hoz tartoznak.

Ebben a paragrafusban R homogén ideáljainak az elméletéből vezetünk be néhány segédeszközt. A homogén ideálok elmélete és a projektív geometria közti összefüggésről lásd pl. O. ZARISKI—P. SAMUEL: *Commutative Algebra* II. [15], VII. fejezet.

A homogén ideálok rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

1) $A \lhd R$ homogén $\Leftrightarrow$ A-nak van alakokból álló bázisa: $A=(a_1, \ldots, a_s)$. (Lásd az 1. §-ban a primér felbontásnál szereplő példákat.)

2) Legyen $A, B \lhd R$ homogén. Akkor (A, B), $A \cdot B$, $A \cap B$ és $A:B$ is homogén ideál.

3) Minden homogén ideálnak van homogén komponensekből álló primér felbontása, és a komponensekhez tartozó prímideálok is homogének.

Ez utóbbi állításunk bizonyításának a vázlata: Legyen A egy (tetszőleges) primér felbontása $A=Q_1 \cap \ldots \cap Q_t$. Jelölje Q_j^* a Q_j-beli alakok által generált ideált; Q_j^* a legnagyobb, Q_j-ben fekvő homogén ideál. $Q_1^* \cap \ldots \cap Q_t^*$ éppen az A kívánt homogén primér felbontása.

Ideálok dimenzióelmélete többféleképpen is fölépíthető. Mi most azt az utat követjük, amely W. GRÖBNER: *Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen* [3] c. művének 3. §-ában vagy [4], [5]-ben található. 0. fejezetünk

3. §-ában szó lesz majd *(Noether-)*gyűrűk dimenzióelméletéről is, polinomgyűrűkre azonban e két dimenziófogalom lényegében megegyezik (ld. 3.1. definíció utáni megjegyzéseket).

2.2. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az $x_1, \dots, x_d$ határozatlanok *függetlenek* az $A \lhd R$ (homogén) ideáltól, ha $A \cap K[x_1, \dots, x_d] = (0)$. Az $A \lhd R$ homogén ideál *dimenziója*, hdim A eggyel kevesebb az A-tól független határozatlanok maximális számánál. (Erre az egy különbségre projektív geometriai okokból van szükség. A $K[x_0, x_1, x_2]$-vel reprezentált projektív síkban ugyanis az $x_1 = 0$ egyenes dimenziója egy, és ez megfelel a 2.2. definíciónak, hiszen $(x_1) \cap K[x_0, x_2] = (0)$.) Ebben a paragrafusban (ahol más dimenziófogalom nem szerepel) hdim A helyett röviden ezt írjuk: dim A.

Definíciónkból azonnal következnek az alábbi tulajdonságok:

1) Ha $A, B \lhd R$, $\dim A = d$ és $\dim B \leqq d$, akkor $\dim A \cap B = d$.
2) Ha $A \subseteq B$, akkor $\dim A \geqq \dim B$.
3) Ha Q P-primér, akkor $\dim Q = \dim P$.

Legyen $A \lhd R$ egy primér felbontása $A = Q_1 \cap \dots \cap Q_t$; akkor a fenti tulajdonságok szerint A dimenziója a $\dim Q_i$ számok (vagy, ami ugyanaz, a $\dim P_i$ számok) legnagyobbikával egyenlő.

A homogén ideálként tekintett nullideál dimenziója n. R lényegtelen ideáljainak a dimenziója -1 — *lényegtelen ideálok*nak nevezzük azokat a primér ideálokat, amelyekhez az $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ prímideál tartozik. (Lényegtelenek az algebrai geometria szempontjából, minthogy ezeket az ideálokat figyelmen kívül hagyhatjuk, ha algebrai sokaságokra térünk át.) Az egységideált (azaz az egész gyűrűt) nem tekintjük (homogén) ideálnak; ha annak tekintenénk, és következetesek akarnánk lenni, akkor a dimenziója -2 kellene, hogy legyen.

GYAKORLAT. Legyen P és P' két prímideál R-ben, $P \subset P'$. Bizonyítsuk be, hogy $\dim P > \dim P'$.

Az $A \lhd R$ ideált *egyneműnek* nevezzük, ha a primér komponensei mind azonos dimenziójúak; ellenkező esetben A neve: *vegyes ideál.* Speciálisan tehát a prím- és a primér ideálok mind egyneműek. Ebben a paragrafusban megismerünk még két másik fontos ideálosztályt, amelyek csupa egynemű ideálból állanak.

Az $A \lhd R$ ideál *rang*ját (melyet rang A-val jelölünk) így definiáljuk: rang $A = n - \dim A$.

A következőkben igen lényeges lesz az, hogy meghatározzuk (A, F) dimenzióját, ahol A d-dimenziós homogén ideál, F pedig alak. Ilyen vizsgálatoknál a homogenitás rendkívül sokat jelent. A nem homogén esetben pl. az $A =: (x_1^2 + x_1, x_1 x_2, \dots, x_1 x_r) = (x_1) \cap (x_1 + 1, x_2, \dots, x_r)$ ideál $(n-1)$-dimenziós $K[x_0, x_1, \dots, x_n]$-ben, ezzel szemben $(A, x_1 + 1) = (x_1 + 1, x_2, \dots, x_r)$ dimenziója $n - r$, és itt r tetszőleges lehet: $2 \leqq r \leqq n$. A homogén esetben viszont egész más a helyzet:

2.3. TÉTEL. *(A dimenziócsökkentés tétele): Legyen A d-dimenziós homogén ideál, $F \in R$ alak. Akkor:*

$\dim (A, F) = d - 1 \Leftrightarrow$ *F nem eleme egyetlen A-hoz tartozó, d-dimenziós prímideálnak sem.*

$\dim (A, F) = d \Leftrightarrow$ *F eleme valamely A-hoz tartozó, d-dimenziós prímideálnak. Speciálisan, ha F relatív prím A-hoz, akkor* $\dim (A, F) = \dim A - 1$.

E tétel eddig közölt bizonyításai igen bonyolultak. Elemi és önmagában zárt bizonyítását adja viszont O.-H. KELLER (Halle/S.) algebrai geometriáról és topológiáról írt új tankönyvében [6] (amely remélhetőleg 1974-ben jelenik meg).

GYAKORLATOK. 1) Legyen A és F olyan, mint a 2.3. tételben, $\dim(A, F)=d-1$. Legyen P egy A-hoz tartozó, d-dimenziós prímideál. Bizonyítsuk be, hogy ha a $(d-1)$-dimenziós P' prímideál hozzátartozik (P, F)-hez, akkor (A, F)-hez is hozzátartozik (lásd [3], 133. 13.).

2) Legyen P a $K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ polinomgyűrű alábbi prímideálja:

$$P =: (x_1^2x_3-x_2^3,\ x_1x_4-x_2x_3,\ x_1x_3^2-x_2^2x_4,\ x_2x_4^2-x_3^3).$$

(Ezt a sok szempontból igen érdekes prímideált F. S. MACAULAY 1916-ban konstruálta.)

Igazoljuk, hogy $\dim P=2$. (Trükk: válasszunk alkalmas $F_1, \dots, F_t$ alakokat, és határozzuk meg először $(A, F_1, \dots, F_t)$ dimenzióját.)

3) Olykor hasznos a következő tétel ([3], 135. 8.):

Legyen A vegyes homogén ideál $K[x_0, \dots, x_n]$-ben, $\operatorname{rang} A=r<n$, A legmagasabb rangú primér komponensének a rangja ϱ $(r<\varrho\leqq n)$. Ha az F alak relatív prím A-hoz (azaz $A:F=A$), akkor $\operatorname{rang}(A, F)=r+1$, továbbá (A, F)-nek van legalább $\varrho+1$ rangú primér komponense; tehát (A, F) is vegyes.

Utalunk még egy dimenzió tételre, amelynek első bizonyítását B. L. VAN DER WAERDEN adta 1932-ben.

2.4. TÉTEL. *Legyen P és P' homogén prímideál R-ben, dimenziójuk a, ill. b. Akkor (P, P') valamennyi izolált primér komponensének a dimenziója $\geqq a+b-n$.*

A tétel bizonyítását lásd [15] VII. fejezetének 8. §-ában.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha A és B homogén ideál R-ben, akkor*

$$\dim(A, B) \geqq \dim A+\dim B-n.$$

(Lásd még B. RENSCHUCH, *Sitzungsberichte der sächs. Akad. d. Wiss., math.-nat. Klasse,* Band 107, Heft 4 (1966); Renschuch a fenti következményt közvetlenül, a 2.4. tétel fölhasználása nélkül bizonyítja.)

GYAKORLAT. Legyen $A\lhd R$, $B=: (F_1, \dots, F_k)\lhd R$. Igazoljuk, hogy ha $\dim(A, B)=\dim A-k$, akkor $\dim B=n-k$. (Ez a gyakorlat a 2.5. és a 2.6. definíció illusztrálásául szolgál.)

2.5. DEFINÍCIÓ. Legyen $A, B\lhd R$. Azt mondjuk, hogy A és B *globálisan nem elfajulóan metszi egymást,* ha $\dim(A, B)=\dim A+\dim B-n$. (Ez is geometriai fogalom, magyarázatát lásd a 3.9. definíciónál.)

A következőkben igen fontos lesz két ideáltípus. Most megadjuk ezek definícióját és néhány tulajdonságukat.

2.6. DEFINÍCIÓ. R egy homogén, $d=: n-\varrho$ dimenziós B ideálja a ϱ *főosztályhoz* tartozik, ha B-nek van ϱ elemű bázisa, azaz, ha $B=(F_1, \dots, F_\varrho)$.

Az 1 főosztályhoz tehát a főideálok tartoznak.

A „főosztály" elnevezés L. KRONECKERtől, 1881-ből származik; a főosztályhoz tartozó ideálok részletes vizsgálatát F. S. MACAULAY adta 1916-ban.

A dimenziócsökkentés tétele (2.3.) és az utána szereplő 3) gyakorlat felhasználásával igazolható, hogy minden, főosztályhoz tartozó ideál egynemű. Sőt, az ilyen ideálok hatványai is mind egyneműek. (Lásd W. GRÖBNER [3], 135.)

PÉLDA. $A=(x_1x_3+x_1x_2, x_2x_3+x_1x_2, x_3)$ a 2 főosztályhoz tartozik, hiszen azonnal látszik, hogy

$$A = (x_1x_2, x_3) = (x_1, x_3)\cap(x_2, x_3).$$

A következő gyakorlat állítása a főosztályhoz tartozó ideálok egy új, még nem publikált jellemzése:

GYAKORLAT. Az $A\lhd R$ homogén ideál akkor és csak akkor tartozik egy főosztályhoz, ha van olyan $F\in R$ alak, melyre $A:F=A$ és (A, F) főosztályhoz tartozik. (Útmutatásul lásd E. D. DAVIS, *Pacific J. of Math.* 36 (1971), 323—326, Corollary 1 és § 3.)

Most pedig egy újabb, a főosztályoknál általánosabb ideálosztályt definiálunk. Az itt következő fogalmat F. S. MACAULAY vezette be 1916-ban, és ugyanő ismerte fel zseniálisan e fogalom nagy jelentőségét (lásd még 0. fejezet, 3. §.). Előadásunk során bevezetünk majd egy további ideálosztályt, amely a *Macaulay*-féle ideáloknál is általánosabb.

2.7. DEFINÍCIÓ. Legyen az $A\lhd R$ homogén ideál rangja r. Az A ideált perfektnek nevezzük, ha

a) $r=n+1$

vagy ha

b) már tudjuk, hogy (A, F) perfekt, ahol F valamilyen A-hoz relatív prím alak (ebből az is következik, hogy bármely, A-hoz relatív prím F alakra (A, F) perfekt — ez azonban egyáltalán nem triviális).

Ezt is mondhatjuk:

A d-dimenziós A homogén ideál akkor és csak akkor perfekt, ha megadható d alak: $F_1, \ldots, F_d$ úgy, hogy

$$A:F_1 = A, \quad (A, F_1):F_2 = (A, F_1), \ldots, (A, F_1, \ldots, F_{d-1}):F_d = (A, F_1, \ldots, F_{d-1})$$

és $(A, F_1, \ldots, F_d)$ egynemű.

GYAKORLATOK. 1) a) Igazoljuk, hogy a 2.7. definíció két alakja ekvivalens.

b) Igazoljuk, hogy a 2.7. definícióban szereplő ideálok közül $A, (A, F_1), \ldots$ $\ldots, (A, F_1, \ldots, F_{d-1})$ is egynemű.

Az F_i-k megadásához időnként hasznos lehet a következő lemma:

2) Legyen R tetszőleges gyűrű, $A, P_1, \ldots, P_n\lhd R$; $P_1, \ldots, P_n$ prímideál. Ha $A\nsubseteq P_i$, $i=1, \ldots, n$, akkor létezik olyan $a\in A$, hogy $a\notin P_i$ egyetlen i-re sem $(1\leqq i\leqq n)$.

3) A 2.3. tétel utáni 2) gyakorlatban szereplő P prímideál nem perfekt.

4) $A=: (x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3)\lhd K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ nem perfekt.

5) Minden olyan ideál, amely főosztályhoz tartozik, perfekt.

6) Adjunk meg olyan perfekt ideált, amely nem tartozik főosztályhoz (lásd pl. W. GRÖBNER, *Arch. Math.* (Basel) 24 (1965), 257—264).

A következőkben a (klasszikus) *Hilbert*-függvény elméletének néhány módszerét írjuk le. (Ezekre egyrészt a 0. fejezet 3. §-ában lesz szükségünk, másrészt pedig akkor, amikor a *Buchsbaum*-sejtésre konstruálunk ellenpéldát.) A *Hilbert*-függvény elméletének alapjait HILBERT fektette le 1890-ben. Mi itt lényegében W. GRÖBNER [3] 4. §-ának tárgyalásmódját követjük.

Legyen ismét $R =: K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ és $A \lhd R$ homogén ideál. Rögzített t-vel az R t-edfokú alakjai egy $F(t)$-vel jelölt K-modulust alkotnak. Legyen most $H(t, A) =: l_K(F(t)/A \cap F(t))$ az $F(t)/A \cap F(t)$ K-modulus *l hossza*, ahol a hosszúságot a következő értelemben vesszük: Csoportokhoz hasonlóan modulusokra is konstruálhatunk kompozícióláncot. Legyen S tetszőleges gyűrű, M S-modulus. Az M részmodulusaiból álló leszálló láncot:

$$M = M_0 \supseteqq M_1 \supseteqq \ldots \supseteqq M_r = (0)$$

M normálláncának nevezzük. Ha itt a tartalmazások mind valódiak, és a lánc tovább már nem finomítható, akkor beszélünk kompozícióláncról. Két kompozíciólánc mindig ugyanannyi részmodulusból áll, és ezt a számot nevezzük az M S-modulus $l_S(M)$-mel jelölt *hosszá*nak. Ha M-nek nincs kompozíciólánca, akkor $l_S(M)$-et ∞-nek vesszük. Esetünkben $H(t, A) < \infty$, és ezt a függvényt (amely csupa nem negatív egész értéket vesz fel) nevezzük az *A Hilbert-függvény*ének. A *Hilbert*-függvény egyik jelentősége abban rejlik, hogy megadja azoknak a homogén lineáris egyenleteknek — az úgynevezett „*Hilbert*-egyenleteknek" — a számát, amelyeket kielégítenek az A-hoz tartozó t-edfokú alakok együtthatói.

2.8. GYAKORLAT. Bizonyítsuk be, hogy a *Hilbert*-függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1) Ha $A \subseteqq B$, akkor $H(t, A) \geqq H(t, B)$.

2) Minden $A, B \lhd R$-re: $H(t, (A, B)) = H(t, A) + H(t, B) - H(t, A \cap B)$.

3) Ha az $F \in R$ alak foka τ, akkor

$$H(t, A \cap (F)) = H(t, (F)) + H(t - \tau, A : F).$$

4) A fenti F-fel:

$$H(t, (A, F)) = H(t, A) - H(t - \tau, A : F).$$

5) Ha $A = A_1 \cap A_2$, ahol A_2 lényegtelen ideál, akkor $H(t, A) = H(t, A_1)$ elég nagy t-kre; vagyis az A_2 lényegtelen komponens csak egy bizonyos fokszámig befolyásolja az A ideál Hilbert-függvényét.

Speciálisan, ha A lényegtelen ideál, akkor elég nagy t-kre $H(t, A) = 0$.

Ha azt akarjuk kimutatni, hogy egy ideálnak van lényegtelen komponense, hasznos lehet a következő állítás:

6) Ha az $A \lhd R$ ideálnak nincs lényegtelen komponense, akkor $H(t, A) \leqq H(t+1, A)$, $t = 0, 1, \ldots$.

Most pedig bebizonyítjuk HILBERT alapvető tételét.

2.9. TÉTEL. *Legyen $A \lhd R$ d-dimenziós homogén ideál. Elég nagy t értékekre az A ideál Hilbert-függvénye t-nek d-edfokú polinomja, melyet így írunk fel:*

$$H(t, A) = h_0 \binom{t}{d} + h_1 \binom{t}{d-1} + \ldots + h_d.$$

Itt $h_0 > 0$, $h_1, \ldots, h_d$ egész szám; nevük: az A ideál Hilbert-együtthatói. (Ha fel akarjuk tüntetni, hogy az A ideálhoz tartoznak, akkor ezt írjuk: $h_0(A), \ldots, h_d(A)$.)

Különösen érdekes lesz számunkra a $h_0(A)$ együttható, melyet A *rendjének* nevezünk.

A tétel bizonyítása. A bizonyítást d szerinti teljes indukcióval végezzük. Feltehetjük, hogy az A ideálnak nincs lényegtelen komponense, hiszen az $H(t, A)$ értékét elég nagy t-kre már nem befolyásolja (lásd 2.8., 5. állítás). Legyen $d=0$. Akkor van olyan $L \in R$ alak, hogy $A:L=A$ (pl. $L=x_0+x_1+\ldots+x_n$ ilyen). Így a 2.8. gyakorlat 4. állítása szerint

$$H(t,(A, L)) = H(t, A)-H(t-1, A),$$

ez pedig elég nagy t-kre eltűnik, hiszen a dimenziócsökkentési tétel szerint az (A, L) ideál lényegtelen. Eszerint elég nagy t-kre $0 \leqq H(t, A)=h_0$ konstans. Végül $h_0>0$; $H(t, A)=0$ esetén ugyanis $A \supset F(t)$ lenne, amiből $\dim A=-1$ következik, és ez ellentmond a feltevésünknek.

Tegyük most fel, hogy tételünk igaz minden olyan A homogén ideálra, melyre $\dim A<d$.

Legyen A d-dimenziós homogén ideál; A egy primér felbontása $A=Q_1 \cap \ldots \cap Q_l$. Most újabb teljes indukciót végzünk, ezúttal l szerint.

$l=1$ esetén ismét van olyan $L \in R$ alak, hogy $A:L=A$; ezzel

$$H(n,(A, L)) = H(n, A)-H(n-1, A).$$

Minthogy a dimenziócsökkentési tétel szerint $\dim (A, L)=d-1$, azért az indukciós feltevés értelmében $n \geqq n_0$ esetén

$$H(n,(A, L)) = h_0\binom{n}{d-1}+\ldots+h_{d-1}.$$

Utolsó két eredményünkből az $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ összefüggés többszöri felhasználásával kapjuk, hogy

$$H(n, A)-H(n_0, A) = h_0\left[\binom{n+1}{d}-\binom{n_0+1}{d}\right]+\ldots+h_{d-1}(n-n_0).$$

Ha most a konstansok összegét h_d-vel jelöljük, akkor az $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ összefüggés újbóli felhasználásával éppen a keresett előállítást kapjuk. Az indukciós feltevés szerint a $h_0, h_1, \ldots, h_{d-1}$ együtthatók egész számok, $H(n_0, A)$ szintén egész, ezért az új együtthatók is egészek lesznek; $\binom{n}{d}$ új együtthatója is h_0, ez pedig >0 az indukciós feltevés szerint.

Tegyük fel végül, hogy a tétel igaz minden olyan d-dimenziós homogén ideálra, amelynek l-nél kevesebb primér komponense van.

Legyen $A=Q_1 \cap \ldots \cap Q_l=B \cap Q_l$, ahol $B=: Q_1 \cap \ldots \cap Q_{l-1}$ és $\dim Q_l=d$. A 2.8. gyakorlat 2. állítása szerint

$$H(n, A) = H(n, Q_l)+H(n, B)-H(n,(B, Q_l)).$$

Az indukciós feltevések értelmében $H(n, Q_l)$ és $H(n, B)$ a kívánt alakú $\big(H(n, B)$ esetén ehhez meg kellett különböztetnünk két esetet: $\dim B=d$ vagy $\dim B \leqq d-1\big)$.

Most akkor elegendő még azt megmutatnunk, hogy dim $(B, Q_l) \leqq d-1$. A dimenziócsökkentési tétel szerint ehhez azt kell igazolnunk, hogy $B \subsetneqq P_l$, ahol P_l a Q_l-hez tartozó prímideál. Tegyük fel, hogy $B \subseteqq P_l$; akkor

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_{l-1} \subseteqq Q_1 \cap \ldots \cap Q_{l-1} \subseteqq P_l,$$

így van olyan i, $1 \leqq i \leqq l-1$, hogy $P_i \subseteqq P_l$ (P_i a Q_i-hez tartozó prímideál). Most $P_i = P_l$ ellentmond a primér felbontás tulajdonságainak, $P_i \subset P_l$ esetén pedig a 2.2. definíció utáni gyakorlat szerint $d \geqq \dim P_i > \dim P_l = d$ lenne, ami szintén ellentmondás, q. e. d.

Végezetül pedig ideálok rendjéről ejtünk néhány szót. Ha F τ-adfokú alak, akkor az (F) főideálra

$$(*) \qquad H(t, (F)) = \binom{t+n}{n} - \binom{t-\tau+n}{n} \qquad (t \geqq \tau - n).$$

Ez az összefüggés következik az alábbi, könnyen igazolható állításokból: $F(t) \cap \cap (F) \cong F(t-\tau)$ (a két oldalon szereplő K-modulusok izomorfak); $H(t, (F)) = = l_K(F(t)) - l_K(F(t-\tau))$; $l_K(F(t))$ az $x_0, \ldots, x_n$ határozatlanokból képezhető t-edfokú hatványszorzatok (azaz: az $x_0^{t_0} x_1^{t_1} \ldots x_n^{t_n}$ $(0 \leqq t_i,\ t_0 + t_1 + \ldots + t_n = t)$ alakú kifejezések) száma.

A $(*)$ összefüggésből következik, hogy $h_0(F) = \tau$. Most a 2.8. gyakorlat 4. állítása segítségével ezt az eredményt általánosítjuk főosztályhoz tartozó ideálokra.

2.10. GYAKORLAT. 1) Legyen $A = (F_1, \ldots, F_\varrho)$ a ϱ főosztályhoz tartozó ideál, a bázispolinomok foka $\tau_1, \ldots, \tau_\varrho$. Igazoljuk, hogy

$$h_0(A) = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_\varrho.$$

2) Legyen $A = A_1 \cap A_2$, $\dim A_1 = d$, $\dim A_2 = d - \delta - 1$. Igazoljuk, hogy

$$h_0(A) = h_0(A_1), h_1(A) = h_1(A_1), \ldots, h_\delta(A) = h_\delta(A_1);$$

más szóval az A első δ *Hilbert*-együtthatóját nem befolyásolják a $d-\delta-1$-nél kisebb vagy azzal egyenlő dimenziójú primér komponensek. (Lényeges lesz majd a $\delta = 0$ eset!)

BEZOUT (ideálelméleti) tétele azt mondja ki, hogy bizonyos $A, B \lhd R$ ideálokra

$$h_0(A, B) = h_0(A) \cdot h_0(B).$$

A következő gyakorlat rámutat a perfekt ideálok nagy jelentőségére:

3) *Általánosított Bezout-tétel* (W. GRÖBNER, 1949.):

Legyen $A \lhd R$, $B = (F_1, \ldots, F_k) \lhd R$, $\dim (A, B) = \dim A - k$. Ha az A ideál perfekt, akkor

$$h_0(A, B) = h_0(A) \cdot h_0(B).$$

(Útmutatás: Ha $A \lhd R$ és az F alakra $A : F = A$, akkor

$$h_0(A, F) = h_0(A) \cdot h_0((F)).$$

Innen a 2.8. gyakorlat 4. állítása felhasználásával, k szerinti teljes indukcióval következik az általánosított Bezout-tétel.)

Ennek a tételnek lényeges élesítését adja a következő

2.11. TÉTEL. *Legyen* $A \lhd R$, $B=(F_1, \dots, F_k) \lhd R$, $\dim(A, B)=\dim A-k$. *Ekkor ekvivalensek az alábbi állítások:*

(i) $h_0(A, B)=h_0(A) \cdot h_0(B)$.

(ii) $h_1(A, F_1, \dots, F_v)=h_1((A, F_1, \dots, F_v): F_{v+1})$, $v=0, 1, \dots, k-1$ ($v=0$ *esetén legyen* $(A, F_1, \dots, F_v)=: A$).

(iii) F_{v+1} *nem eleme egyetlen* $(d-v-1)$*-dimenziós,* $(A, F_1, \dots, F_v)$*-hez tartozó prímideálnak sem;* $v=0, 1, \dots, k-1$.

(Lásd W. VOGEL, *Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss.* Berlin **8** (1966), 1—7. és J. STÜCKRAD—W. VOGEL, *Beitr. zur Alg. und Geom.* **1** (1971), 73—76.)

Most az ideálelméleti multiplicitás fogalmát definiáljuk:

2.12. DEFINÍCIÓ. A P prímideálhoz tartozó Q primér ideál *multiplicitása* egy, a Q-ból P-be vezető kompozíciólánc elemeinek a száma; itt a kompozíciólánc olyan $Q=: Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_n =: P$ láncot jelent, ahol a Q-k mind P-hez tartozó primér ideálok, a tartalmazások mind valódiak és a lánc tovább már nem finomítható.

Ha most hányadosgyűrűkre térünk át, akkor a következő, igen hasznos tételt nyerjük (ld. 0. fejezet, 3. §, gyakorlatok).

2.13. TÉTEL. *Legyen* Q *P-primér,* Q *multiplicitása* μ. *Akkor*

$$h_0(Q) = \mu \cdot h_0(P).$$

(Lásd W. GRÖBNER [3], 143. 5.)

MEGJEGYZÉSEK. A 2.13. tételből következik, hogy minden $A \lhd R$-re:

$$h_0(A) = \sum \mu_i \cdot h_0(P_i),$$

ahol a P_i-k az A-hoz tartozó maximális dimenziójú prímideálok, μ_i pedig az A P_i-hez tartozó Q_i primér komponensének a multiplicitása.

A *Bezout*-tétel állítása tehát az, hogy bizonyos $A, B \lhd R$-ekre

$$\sum \mu_i \cdot h_0(P_i) = h_0(A) \cdot h_0(B),$$

ahol a μ_i-k és a P_i-k az (A, B) ideálhoz tartoznak.

Az I. fejezetben látjuk majd a fent definiált multiplicitás geometriai jelentését.

2.14. PÉLDA. Legyen $P=(x_1^2 x_3 - x_2^3,\ x_1 x_4 - x_2 x_3,\ x_1 x_3^2 - x_2^2 x_4,\ x_2 x_4^2 - x_3^3)$ és $B=(x_1, x_4)$ a $K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ polinomgyűrűben. Akkor

$$5 = h_0(P, B) \neq h_0(P) \cdot h_0(B) = 4.$$

Bizonyítás. A 2.10. gyakorlat 1. állítása szerint $h_0(B)=1$. Megmutatjuk, hogy $h_0(P)=4$. $P: x_1 = P$, $h_0(x_1)=1$, így a korábbiak szerint $h_0(P, x_1)=h_0(P)$. Az 1. §-ban láttuk, hogy

$$\begin{aligned}(P, x_1) &= (x_1, x_2^3, x_2 x_3, x_2^2 x_4, x_2 x_4^2 - x_3^3) = \\ &= (x_1, x_2^2, x_2 x_3, x_2 x_4^2 - x_3^3) \cap (x_1, x_2^3, x_3, x_4) =: Q_1 \cap Q_2.\end{aligned}$$

Minthogy $\dim Q_1=1$ és $\dim Q_2=0$, azért a 2.10. gyakorlat 2. állítása értelmében

$$h_0(P, x_1) = h_0((x_1, x_2^2, x_2x_3, x_2x_4^2-x_3^3)).$$

Most a 2.13. tételt akarjuk alkalmazni, ezért megkonstruáljuk Q_1 egy kompozíció-láncát:

$$(x_1, x_2^2, x_2x_3, x_2x_4^2-x_3^3) \subset (x_1, x_2, x_3^3) \subset (x_1, x_2, x_3^2) \subset (x_1, x_2, x_3);$$

így $h_0(P, x_1)=4\cdot h_0(x_1, x_2, x_3)$, tehát $h_0(P)=4$.

Végül $(P, B)=(P, x_1, x_4)=(x_1, x_4, x_2x_3, x_2^3, x_3^3)$. Most ismét a 2.13. tételt alkalmazva kapjuk, hogy $h_0(P, B)=5$.

x_4-re valóban nem teljesül a 2.11. tétel (iii) feltétele.

2.15. GYAKORLAT. 1) Legyen P ugyanaz, mint a fenti példában, de most $B=(x_0, x_4)$. Igazoljuk, hogy

$$h_0(P, B) = h_0(P)\cdot h_0(B) = 4.$$

2) Legyen P a $K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ polinomgyűrű alábbi prímideálja:

$$P =: (x_1x_3^2-x_2^2x_4,\ x_1x_4^2-x_2x_3^2,\ x_1^2x_4-x_2^3,\ x_2x_4^3-x_3^4).$$

Határozzuk meg $\dim P$-t és $h_0(P)$-t, valamint adjunk meg két olyan határozatlant: x_i-t és x_j-t $(i,j=0, 1, \dots, 4)$, melyekkel $\dim(P, x_i, x_j)=\dim P-2$ és

$$h_0(P, x_i, x_j) \neq h_0(P)\cdot h_0(x_i, x_j).$$

(A következő fejezetben fogjuk majd látni, hogy P miért prímideál.)

3. §. Lokális gyűrűk

Ebben a paragrafusban a lokális algebra néhány definíciója és eredménye szerepel. Ez az anyag viszonylag röviden O. ZARISKI és P. SAMUEL: *Commutative algebra* c. könyve II. kötetének [15] VIII. fejezetében található meg — általában mi is e könyv alapján fogunk haladni. A lokális gyűrűk elméletének legalapvetőbb műve M. NAGATA: *Local rings* c. könyve [9], amely explicite nem használ homologikus módszereket. J.-P. SERRE kitűnő jegyzete, az *Algèbre locale — Multiplicités* [12] a homologikus algebra eszközeivel történő tárgyalásmódot nyújt. A lokális algebra rövid, elemi bevezetését találhatjuk D. G. NORTHCOTT: *Ideal theory* c. könyvében [10]. Az alábbi szerzők kitűnő, kommutatív algebráról szóló könyvei is foglalkoznak lokális algebrával: M. F. ATIYAH—I. G. MACDONALD [1], I. KAPLANSKY [7], H. MATSUMURA [8].

1. *Dimenzióelmélet*

Legyen R gyűrű, azaz kommutatív és egységelemes, de nem föltétlen Noether-féle.

Szeretnénk fölhívni rá az Olvasó figyelmét, hogy a dimenzióelméleti részben szereplő fogalmak definíciója az irodalomban nem egységes; a definíciók, elnevezések szinte könyvenként változnak.

3.1. DEFINÍCIÓ. *R dimenziója d,* ha van R-ben prímideálokból álló

$$P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_d$$

lánc, de $(d+1)$-nél több prímideált tartalmazó ilyen lánc nincsen. Ha ilyen d nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy R dimenziója végtelen. R dimenzióját így jelöljük: $\dim R$.

Az az eset lesz majd számunkra érdekes, amikor R nem nullosztómentes. Ekkor $\dim R=0$ pontosan azt jelenti, hogy R-ben minden prímideál maximális.

Legyen $P \lhd R$ prímideál. *P rangja h* (ZARISKI és SAMUEL könyvében [14] a rang neve: „height"), ha létezik prímideálok egy

$$P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_{h-1} \subset P_h = P$$

lánca, de $(h+1)$-nél több prímideált tartalmazó ilyen lánc nincsen. P rangját így jelöljük: $h(P)$. Hasonlóan *P dimenzió*ját (ZARISKI—SAMUELnél: „depth") prímideálok P-ből kiinduló maximális növő láncának a hosszaként definiáljuk:

$$P = P_d \subset P_{d-1} \subset \dots \subset P_1 \subset P_0 (\subset R).$$

Jelölése: $d(P)$.

Legyen most R *Noether*-gyűrű, $A \lhd R$, $P_1, \dots, P_t$ az A-hoz tartozó prímideálok. Akkor *A rangját* $h(A)=: \min \{h(P_i) | i=1, \dots, t\}$-vel definiáljuk, *A dimenzióját* pedig $d(A)=: \max \{d(P_i) | i=1, \dots, t\}$-vel.

MEGJEGYZÉSEK. Ha $R=K[x_0, \dots, x_n]$, $A \lhd R$ homogén ideál, akkor $\operatorname{hdim} A = = d(A)-1$.

Ha R *Noether*-gyűrű, $P \lhd R$ prímideál, akkor $h(P)$ véges, ezzel szemben $d(P)$ nem okvetlenül. Ha viszont R-nek csak véges sok maximális ideálja van, akkor már $d(P)$ is mindig véges.

Azt sejthetnénk, hogy ha P, P' két prímideál, $P \subset P'$ és nincs olyan P'' prímideál, melyre $P \subset P'' \subset P'$, akkor $h(P')=h(P)+1$. Ez azonban nem igaz; a kérdés mindig visszavezethető a nullosztómentes esetre, ott pedig M. NAGATA megadott egy ellenpéldát (*Nagoya Math. J.* **10** (1956), 51—64.).

A dimenzióelmélet egy fontos tétele W. KRULLTÓL, 1928-ból származik (l. [15], IV. fejezet, 14. §): Legyen R *Noether*-gyűrű, és tegyük fel, hogy az A ideálnak r elemű bázisa van. Ha most P minimális, A-t tartalmazó prímideál (azaz nincs olyan P' prímideál, melyre $P \supset P' \supset A$; más szóval, P A-hoz tartozó izolált prímideál), akkor $h(P) \leqq r$.

3.2. GYAKORLAT. Legyen R *Noether*-gyűrű, $P \lhd R$ prímideál, $h(P)=h$. Akkor létezik olyan, h elemmel generált $A \lhd R$, hogy P egy, az A-hoz tartozó izolált prímideál.

Most a 3. § leglényegesebb részéhez értünk.

2. *A Hilbert—Samuel polinom*

8.3. DEFINÍCIÓ. Az R *Noether*-gyűrűt *szemilokális*nak nevezzük, ha véges sok maximális ideálja van: $M_1, \dots, M_n$. Ha $n=1$, akkor R neve: *lokális gyűrű.* A maximális ideálok metszetét a gyűrű *Jacobson-radikál*jának nevezzük.

MEGJEGYZÉS. Explicite W. KRULL foglalkozott először lokális gyűrűkkel 1938-ban. Ő így hívta őket: „Stellenringe". Az angol nyelvű irodalomban később a „local ring" elnevezés terjedt el. Ezt a nevet azért kapták, mert az ilyen gyűrűk struktúrájának az ismerete információt nyújt algebrai sokaságok lokális viselkedéséről (ilyen lesz pl. a 3.16. tételünk). Ezért mi is a „lokális gyűrű" elnevezésnél maradunk. 1951-ben P. SAMUEL a lokális algebrában bevezetett egy a *Hilbert*-függvényhez hasonló függvényt.

Legyen a következőkben R lokális gyűrű, R (egyetlen) maximális ideálja M. Legyen Q M-primér ideál, azaz dim $R/Q=0$. Tekintsük most minden n természetes számra az R/Q^{n+1} R-modulus $l_R(R/Q^{n+1})$ hosszát. Erre igaz a

3.4. TÉTEL. *n elég nagy értékeire $l_R(R/Q^{n+1})=: P_Q(n)$ polinomja n-nek; $P_Q(n)$ foka, d, független Q-tól, és az R dimenziójával egyenlő: $d=\dim R$. Ezt az ún. Hilbert—Samuel polinomot a következő alakban írjuk fel:*

$$P_Q(n) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^d e_d;$$

itt az együtthatók mind egész számok, és $e_0>0$. Ha fel akarjuk tüntetni, hogy az R gyűrűhöz és a Q primér ideálhoz tartoznak, akkor ezt írjuk: $e_0(Q, R), \ldots, e_d(Q,R)$. Ezeket az együtthatókat a Q Hilbert—Samuel együtthatóinak nevezzük. $e_0(Q, R)$ neve: Q multiplicitása. $Q=M$ esetén azt is mondjuk, hogy $e_0(M, R)$ az R multiplicitása.

Bizonyítás. Először megkonstruálunk egy, a Q ideálhoz tartozó gyűrűt. Az $A=: R/Q$ maradékosztálygyűrű *Artin*-féle, azaz A ideáljainak minden csökkenő lánca:

$$A \supseteqq A_1 \supseteqq A_2 \supseteqq \ldots \supseteqq A_n \supseteqq \ldots$$

véges sok lépés után megszakad: egy bizonyos n-től fogva $A_n = A_{n+1} = \ldots$. (AKIZUKI tétele szerint ugyanis egy gyűrű akkor és csak akkor *Artin*-gyűrű, ha olyan *Noether*-gyűrű, amelyben minden prímideál maximális.) Legyen $Q^0=R$, és tekintsük a $Q^i/Q^{i+1}=: F(Q, i)$ A-modulusokat. Jelölje $F(Q)$ az $F(Q, i)$-k diszkrét direkt összegét (tehát az $F(Q)$ elemei pontosan azok az $(a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ sorozatok, ahol minden i-re $a_i \in F(Q, i)$ és véges sok i kivételével $a_i=0$). Alkalmas szorzás bevezetésével gyűrű struktúrával látjuk el $F(Q)$-t. Legyen $x_1, \ldots, x_s$ Q egy (minimális) bázisa, tehát $Q=(x_1, \ldots, x_s)$. Az x_i-khez tartozó, Q^2 szerinti maradékosztályokat jelölje rendre $x_1', \ldots, x_s'$; ezek $F(Q, 1)$ elemei. Az $a' \in F(Q, i)$ és a $b' \in F(Q, j)$ elemhez válasszunk R-ből egy-egy a, ill. b reprezentánst. Most az $a' \cdot b'$ szorzat legyen az $a \cdot b$-nek megfelelő, $F(Q, i+j)$-beli mellékosztály. Ezzel a szorzással $F(Q)$ gyűrű; $F(Q)$ neve: a Q-hoz tartozó *alakgyűrű*; $F(Q)$-t, mint A fölötti algebrát $x_1', \ldots, x_s'$ generálja (ez utóbbi állításunk igazolását az Olvasóra bízzuk). Ekkor létezik az A fölötti s határozatlanú F polinomgyűrűnek egy

$$\Phi: F = A[X_1, \ldots, X_s] \to F(Q)$$

algebra-homomorfizmusa az $F(Q)$-ra. Ez a homomorfizmus az $X_i \leadsto x_i'$ leképezéssel adható meg. $B=:$ Ker Φ homogén ideál F-ben. Ez azért van így, mert a polinomok különböző fokszámú tagjait a Φ az $F(Q)$ különböző direkt összeadandóiba képezi le. Más szóval Φ minden n-re indukál egy olyan Φ_n homomorfizmust, amely az $F(n)$ A-modulust (az F-beli n-edfokú alakokat) $F(Q, n)$-be viszi. Φ_n magja tehát $B \cap F(n)$, így létezik egy A-modulusok közti

$$F(n)/B \cap F(n) \cong F(Q, n)$$

izomorfizmus. Ekkor persze a két A-modulus hossza is megegyezik. A bal oldali modulus hossza viszont $H(n, B)$, a B (klasszikus) *Hilbert*-függvényének értéke az n helyen (l. 0. fejezet, 2. §), tehát $H(n, B) = l_A(F(Q, n))$, csakhogy most az alapstruktúra nem test, hanem *Artin*-gyűrű. A 2. §-ban látott módszerhez hasonlóan ebben az általánosabb esetben is fölépíthető a *Hilbert*-függvények elmélete; speciálisan, elég nagy n-ekre $H(n, B)$ itt is egész együtthatós „binomiális polinom". $H(n, B)$ foka ismét B dimenziója, de itt a dimenzió fogalmát a 3.1. definíció második része értelmében (tehát prímideál-láncokkal) kell vennünk, azaz $H(n, B)$ foka $d(B)$. (*Artin*-gyűrűkben a *Hilbert*-függvény elméletéről l. W. VOGEL, *Math. Nachr.* **33** (1967), 39—60. Satz 1.) Eszerint elég nagy n-ekre $l_A(F(Q, n))$ n-nek egész együtthatós „binomiális polinomja".

Könnyen igazolható, hogy tetszőleges R gyűrű mellett, ha M R-modulus, $N \lhd R$ és $N \subseteq \mathrm{Ann}\,(M) =: \{r \in R \mid r \cdot M = 0\}$, akkor M egyben R/N-modulus is, és $l_R(M) = l_{R/N}(M)$. Esetünkben az R gyűrűben $\mathrm{Ann}\,(F(Q, n)) = Q$, tehát $l_R(F(Q, n)) = l_A(F(Q, n))$. Minthogy $l_R(R/Q^{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} l_R(F(Q, n))$, azért a fentiekből következik, hogy elég nagy n-ekre $P_Q(n) =: l_R(R/Q^{n+1})$ n-nek egész együtthatós „binomiális polinomja", és mivel minden $l_R(F(Q, n))$ polinom főegyütthatója pozitív, azért pozitív a $P_Q(n)$ főegyütthatója, e_0 is.

Legyen most Q' az R egy másik M-primér ideálja. Akkor van olyan a és b természetes szám, hogy

$$Q \supseteq Q'^a \quad \text{és} \quad Q' \supseteq Q^b;$$

innen

$$P_Q(n) \leqq P_{Q'}(an) \quad \text{és} \quad P_{Q'}(n) \leqq P_Q(bn).$$

Ebből a két egyenlőtlenségből következik, hogy a $P_Q(n)$ és a $P_{Q'}(n)$ polinom foka ugyanaz a d szám. $P_Q(n)$ foka tehát független Q-tól.

A $d = \dim R$ összefüggést bizonyíthatnánk új fogalmak bevezetésével, de nem akarjuk az Olvasót túl sok definícióval terhelni, ezért inkább a jelen paragrafus 3.6.-tal jelzett, ún. dimenziótételére utalunk. Ott igazoljuk majd, hogy $d = \dim R$, és eközben a 3.4. tételünknek csak a ténylegesen bebizonyított részét fogjuk fölhasználni.

A *Hilbert—Samuel* polinomot és az erre vonatkozó tételt a lokális gyűrűknél általánosabb gyűrűosztályokra is ki lehet terjeszteni. Számtalan ilyen tárgyú dolgozat közül mi csak az egyik legutolsót adjuk meg: C. P. L. RHODES: *The Hilbert—Samuel polynomial in a filtered module,* J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 73—85. Egy ennél gyengébb általánosításra viszont részletesebben is kitérünk:

Legyen S szemilokális gyűrű, S *Jacobson*-radikálja M. Az $A \lhd S$ ideált *nyílt*nak nevezzük, ha $A \subseteq M$ és valamilyen ϱ természetes számra $M^\varrho \subseteq A$. (Ez az elnevezés onnan származik, hogy pontosan ezek az ideálok lesznek nyíltak az S ún. m-adikus topológiájában.) Legyen E végesen generálható, unitér S-modulus. E *annullátor*a, $\mathrm{Ann}\,(E) =: \{s \in S \mid s \cdot E = 0\}$ ideál S-ben. Az $S/\mathrm{Ann}\,(E)$ maradékosztálygyűrű dimenzióját nevezzük E dimenziójának, és így jelöljük: $\dim E$.

A következő eredmények azt mutatják, hogy a nyílt ideálok viselkedése sok szempontból hasonló a lokális gyűrűk M-primér ideáljaihoz: ha $A \lhd S$ nyílt, akkor egyrészt A nem generálható dim S-nél kevesebb elemmel, azaz $A=(x_1, \ldots, x_t)$ esetén $t \geqq \dim S$, másrészt pedig $l_S(E/A \cdot E) < \infty$ és elég nagy n-ekre $l_S(E/A^{n+1} \cdot E)$ szintén egész együtthatós „binomiális polinomja" n-nek, és a foka dim E. Jelöljük e polinom főegyütthatóját $e_0(A, E)$-val. M. AUSLANDER és D. A. BUCHSBAUM vizsgálta az $e_0(A, E)$ együtthatót. (Erről szóló dolgozatuk az *Ann. of Math.*-ben jelent meg: **68** (1958), 625—657.) Igen érdekes eredményeikre később még visszatérünk.

A *Hilbert—Samuel* polinom többi együtthatója sem érdektelen. Az utolsó, erről szóló dolgozatok: C. P. L. RHODES fent idézett cikke és W. VOGEL: Über die Hilbert—Samuel Koeffizienten von lokalen Ringen der Multiplizität 1, *Beitr. zur Alg. und Geom.* **3** (1974), 37—39.

3. *Paraméterrendszerek*

Legyen R lokális gyűrű, M az R maximális ideálja. Ebben a részben M-primér ideálok egy fontos osztályával foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy az ehhez tartozó ideálok *Hilbert—Samuel* polinomja jól kezelhető, ami nagy szó, hiszen általában távolról sem ez a helyzet.

A következőkben ahelyett, hogy: R lokális gyűrű és M az R maximális ideálja, egyszerűen ezt mondjuk: (R, M) lokális gyűrű.

Legyen (R, M) d-dimenziós lokális gyűrű. A 3.2. gyakorlat szerint létezik M-ben d elem: $a_1, \ldots, a_d$ úgy, hogy $Q=: (a_1, \ldots, a_d)$ M-primér ideál, a 3.1. definíció utáni *Krull*-tétel értelmében viszont d-nél kevesebb elem nem generálhat M-primér ideált.

3.5. DEFINÍCIÓ. Legyen (R, M) d-dimenziós lokális gyűrű. Ha $a_1, \ldots, a_d \in M$ és $Q=: (a_1, \ldots, a_d)$ M-primér ideál, akkor azt mondjuk, hogy $\{a_1, \ldots, a_d\}$ *paraméterrendszer* R-ben, Q pedig *paraméterideál*. A fenti megjegyzésünk szerint ilyen mindig létezik.

3.6. TÉTEL *(dimenziótétel). Legyen (R, M) lokális gyűrű; akkor az alábbi három szám megegyezik:*

(i) dim R,
(ii) *tetszőleges M-primér Q ideál esetén a $P_Q(n)$ polinom fokszáma: $d(R)$,*
(iii) *R legkevesebb elemű paraméterrendszerének az elemszáma: $\delta(R)$.*

A bizonyítás vázlata. A fenti megjegyzésünk szerint $\dim R = \delta(R)$, míg a 3.4. tétel bizonyításából következik, hogy $\delta(R) \geqq d(R)$. Ezért már csak azt kell megmutatnunk, hogy $d(R) \geqq \dim R$. Ezt két lépésben végezzük el: 1) Ha $x \in R$ nem nullosztó, akkor $\dim R/R \cdot x \leqq \dim R - 1$ (sőt, a két oldal mindig egyenlő, lásd pl. [15], VIII. fejezet, 9. §). 2) Innen d szerinti teljes indukcióval bizonyítható a kívánt $\dim R \leqq d(R)$ összefüggés (lásd pl. [1], 11. fejezet, 11.10. állítás).

Később majd foglalkozunk D. A. BUCHSBAUM egy problémájával, melyben paraméterideálok multiplicitása is szerepel, ezért most erről a multiplicitásról ejtünk néhány szót. Ezt a fogalmat C. CHEVALLEY vezette be 1943-ban, de csak egy speciális esetben: testet tartalmazó bizonyos lokális gyűrűkben.

A paraméterideálok jelentőségét a multiplicitások vizsgálatában jól mutatja P. SAMUEL alábbi, 1951-ből származó tétele:

3.7. TÉTEL. *Legyen Q M-primér ideál az (R, M) lokális gyűrűben. Akkor van olyan $Q' \subset Q$ paraméterideál, hogy*

$$e_0(Q', R) = e_0(Q, R).$$

A bizonyítást lásd pl. [15], VIII. fejezet, 10. §-ában. (Újabb eredmények szerint itt az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy R/M-nek végtelen sok eleme van.)

Fontos lesz majd számunkra a következő tétel, ezért a teljes bizonyítását is megadjuk:

3.8. TÉTEL. *Legyen Q paraméterideál az (R, M) lokális gyűrűben. Akkor*

$$e_0(Q, R) \leqq l_R(R/Q),$$

és itt $e_0(Q, R) = l_R(R/Q) \Leftrightarrow$ az $F(Q)$ alakgyűrű izomorf az R/Q fölötti (dim R)*-határozatlanú polinomgyűrűvel.*

Bizonyítás. Ugyanazokat a jelöléseket használjuk, mint a 3.4. tétel bizonyításában, és átveszünk onnan néhány részeredményt is. Az R fölötti modulusok hosszában az R-t általában nem tüntetjük föl; de ha más alapgyűrűt veszünk, azt minden esetben kiírjuk.

$$l_R(F(Q, i)) = l_A(F(i)/B \cap F(i)) \leqq l_A(F(i)) = l_R(R/Q) \cdot \binom{i+d-1}{d-1};$$

itt az utolsó egyenlőséget a következő módon nyertük: Legyen A egy kompozíciólánca $A \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n$, akkor $n = l_A(R/Q) = l_R(R/Q)$. Most akkor az $F(i)$ A-modulus egy kompozíciólánca olyan modulusokból áll, amelyeket $A_j \cdot P^{(i)}$ alakú részmodulusok generálnak, ahol a $P^{(i)}$-k az $x_1, \ldots, x_d$ határozatlanokból alkotott i-edfokú hatványszorzatok (monomok); ezen $P^{(i)}$-k száma $\binom{i+d-1}{d-1}$. Ekkor

$$P_Q(n) = \sum_{i=0}^{n} l(F(Q, i)) \leqq l(R/Q) \sum_{i=0}^{n} \binom{i+d-1}{d-1} = l(R/Q) \binom{n+d}{d}.$$

Innen a főegyütthatók összehasonlításával kapjuk, hogy $e_0(Q, R) \leqq l(R/Q)$.

A 3.4. tétel bizonyításából következik az is, hogy

$$l_A(F(n)/B \cap F(n)) = P_Q(n+1) - P_Q(n).$$

Tegyük most fel először, hogy $B = \operatorname{Ker} \Phi \neq (0)$. Akkor van olyan $f \in B$ alak, melynek a foka $c \geqq 1$. $B \cap F(n)$ tartalmazza az összes olyan $f \cdot X_1^{n_1} \ldots X_d^{n_d}$ alakot, amelyre $\sum_{i=1}^{d} n_i = n - c$. Ezek az alakok $B \cap F(n)$ egy $\binom{n-c+d-1}{d-1}$ hosszúságú részmodulusát alkotják. Ekkor

$$l_A(F(n)/B \cap F(n)) = l_A(F(n)) - l_A(B \cap F(n)) \leqq l_R(R/Q) \binom{n+d-1}{d-1} - \binom{n-c+d-1}{d-1} =$$

$$= l_R(R/Q) \cdot \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}) - \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} - O(n^{d-2}) =$$

$$= (l_R(R/Q) - 1) \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} + O(n^{d-2}).$$

Ezt $P_Q(n+1)-P_Q(n)=l_A(F(n)/B\cap F(n))$-be beírva az együtthatók összehasonlításával

$$e_0(Q, R) \leqq l(R/Q)-1$$

adódik.

Ha pedig $B=\text{Ker}\ \Phi=(0)$, akkor

$$P_Q(n) = \sum_{i=0}^{n} l_R(F(Q, i)) = \sum_{i=0}^{n} l_A(F(i)/B\cap F(i)) = \sum_{i=0}^{n} l_A(F(i)) =$$

$$= l_R(R/Q) \sum_{i=0}^{n} \binom{i+d-1}{d-1} = l_R(R/Q)\binom{n+d}{d},$$

innen $e_0(Q, R)=l(R/Q)$, q. e. d.

Most pedig a multiplicitások lokális elmélete és a 2. §-ban megismert rend globális elmélete közti összefüggésre akarunk rámutatni. Megadunk egy lokális-globális elvet, amelyet ilyen alakban eddig még nem fogalmaztak meg.

Mindehhez szükségünk lesz hányadosgyűrű képzésére — ezt a hányadostest képzéséhez hasonlóan végezzük.

Legyen adott az R gyűrűben egy, a nullelemet nem tartalmazó, a szorzásra nézve zárt S részhalmaz. Jelölje U az R azon elemeinek a halmazát, amelyek nem nullosztók. Legyen A az olyan $a\in R$ elemek halmaza, amelyekhez létezik olyan $s\in S$, hogy $a\cdot s=0$. Mivel S szorzásra zárt, azért A ideál R-ben. Tekintsük a Φ: $R\to R/A$ természetes homomorfizmust. Ha a eleme az U és S által generált, szorzásra nézve zárt halmazúak, akkor $\Phi(a)$ nem nullosztó R/A-ban.

Most akkor a következő konstrukciót végezzük: A $P=A\times U$ halmazban bevezetjük az alábbi ekvivalenciarelációt: (a, u) akkor és csak akkor ekvivalens (b, v)-vel, ha $av=bu$. (a, u) ekvivalenciaosztályát így jelöljük: a/u. Az ekvivalenciaosztályok Q halmaza gyűrű a következő műveletekkel:

$$a/u+b/v = (av+bu)/uv \quad \text{és} \quad a/u\cdot b/v = ab/uv.$$

Q-t az R *teljes hányadosgyűrűjének* nevezzük. Az $a\in R$ elemeket az $a/1\in Q$ osztályokkal azonosíthatjuk, így Q tartalmazza R-et. Q-t az R elemei és az $u\in U$ elemek $1/u$ inverzei generálják.

A fenti megjegyzésünk szerint $\Phi(S)$ nullosztómentes. Q konstrukciója szerint tehát jól definiált a $\Phi(R)$ teljes hányadosgyűrűjének az a részgyűrűje, amelyet a $\Phi(R)$ elemei és a $\Phi(S)$-beli elemek inverzei generálnak. Ezt a részgyűrűt az *R S szerinti hányadosgyűrűjének* nevezzük, és R_S-sel jelöljük. Tehát

$$R_S = \{\Phi(a)/\Phi(s)\,|\,a\in R, s\in S\}.$$

Legyen most $P\lhd R$ prímideál, és végezzük el a fenti konstrukciót abban az igen fontos speciális esetben, amikor $S=R\setminus P$. Ekkor R_S-t az *R P szerinti* hányadosgyűrűjének nevezzük, és így jelöljük: R_P.

Ha $A\subset R$, akkor R_S-nek a $\Phi(A)$ által generált ideálját jelölje $A\cdot R_S$. Most felsorolunk az R_S gyűrű ideálelméletéből néhány eredményt:

Ha R *Noether*-gyűrű, akkor R_S is az.

Legyen az $A \lhd R$ egy primér felbontása $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$. Ha $i = m+1, \ldots$ $\ldots, n$-re $P_i \cap S \neq \emptyset$, míg $i = 1, \ldots, m$-re $P_i \cap S = \emptyset$, akkor $i = 1, \ldots, m$-re $Q_i \cdot R_S$ primér, és $A \cdot R_S$ egy primér felbontása

$$A \cdot R_S = Q_1 \cdot R_S \cap \ldots \cap Q_m \cdot R_S.$$

Ha tehát $S = R \setminus P$, akkor R_P lokális gyűrű, és R_P egyetlen maximális ideálja $P \cdot R_P$. Ezzel megismertünk egy fontos olyan eljárást, amellyel lokális gyűrűket konstruálhatunk. Erre az eljárásra szükségünk lesz majd a lokális-globális elvünkhöz.

Ugyanúgy, mint a 2. §-ban, tekintsük most ismét a $K[x_0, x_1, \ldots, x_n] =: L$ polinomgyűrűt. Legyen $A \lhd L$, $B =: (F_1, \ldots, F_\varrho) \lhd L$, $\dim A = d$, $\dim B = n - \varrho$, tehát B a ϱ főosztályhoz tartozik. Ezenkívül feltesszük még azt is, hogy A és B lokálisan nem elfajulóan metszi egymást az alábbi definíció értelmében.

Legyen (A, B) primér felbontása

$$(A, B) = Q_1 \cap \ldots \cap Q_t \cap R(A, B),$$

ahol a Q_v-k $(v = 1, \ldots, t)$ az (A, B) legmagasabb dimenziójú primér komponensei, a hozzájuk tartozó prímideálok rendre $P_1, \ldots, P_t$, $R(A, B)$ pedig a többi primér komponens metszete. Jelölje $v = 1, \ldots, t$-re L_v az L_{P_v} lokális gyűrűt.

3.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy A és B *lokálisan nem elfajulóan metszi egymást,* ha $v = 1, \ldots, t$-re:

$$\dim L_v / A \cdot L_v + \dim L_v / B \cdot L_v = \dim L_v.$$

Ez a fogalom az irodalomban eddig még nem szerepelt. Úgy tűnik, szükség van rá (l. 3.16. tétel), hiszen attól még, hogy A és B globálisan nem elfajulóan metszi egymást, a metszetük lokálisan elfajulhat, lásd a következő gyakorlatokat. Ezek a metszetre vonatkozó követelmények is az algebrai geometriából származnak. Azt akarjuk velük elérni, hogy az A, ill. a B ideállal definiált két algebrai sokaság (l. I. fejezet) metszete ne tartalmazzon elfajuló komponenseket — B. L. van der Waerden dimenziótétele (2.4. tétel) szerint egyébként ilyenek még lehetnének.

Gyakorlatok. 1) Igazoljuk, hogy ha A és B lokálisan nem elfajulóan metszi egymást, akkor a metszetük globálisan sem elfajuló.

2) Legyen a $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ polinomgyűrűben $A =: (x_1 x_2, x_1 x_3)$ és $B =: (x_3)$. Igazoljuk, hogy A és B globálisan nem elfajulóan metszi egymást, lokálisan viszont elfajuló a metszetük.

3) Ha két egynemű ideál globálisan nem elfajulóan metszi egymást, akkor a metszetük lokálisan sem elfajuló.

Különösen érdekes lesz majd számunkra az $R =: L_v / A \cdot L_v$ lokális gyűrű. Mivel A és B lokálisan nem elfajulóan metszi egymást, azért

$$\dim R = \dim L_v - \dim L_v / B \cdot L_v = h(P_v) - (h(P_v) - \varrho) = \varrho.$$

Jelöljük rendre $f_1, \ldots, f_\varrho$-val az $F_1, \ldots, F_\varrho$ maradékosztályát modulo A; akkor $Q =: (f_1, \ldots, f_\varrho) \cdot R$ paraméterideál R-ben.

P. Samuel ún. redukciótétele (P. Samuel: *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*. Ergebn. der Math., Heft 4, Springer, 1955.; II. fejezet, § 7, b,

83. o.) azt mutatja, hogy az algebrai geometria metszetelméletében igen fontos az $e_0((f_1, \ldots, f_\varrho), L_v/A \cdot L_v)$ szám. Ezt fejezi ki a következő tétel is:

3.10. TÉTEL. *Legyen $A, B \lhd L$ olyan, mint fent. Akkor*

$$h_0(A) \cdot h_0(B) = \sum_{v=1}^{t} e_0((f_1, \ldots, f_\varrho), L_v/A \cdot L_v) \cdot h_0(P_v).$$

Ez a tétel L. BUDACHtól és W. VOGELtól származik (*Monatsh. Math.* **73** (1969), 97—111.), és csak részeredmény a 3. §-unk 4. pontjának a végén szereplő 3.16. tétel bizonyítása során. Mindkét tétel bizonyítása homologikus módszereket igényel, ezért itt nem térünk ki rájuk. Különösen a $t=1$ esetben érdekes a 3.10. tétel, hiszen akkor lehetőséget nyújt az e_0 multiplicitás kiszámítására.

Később majd idézzük M. AUSLANDER és D. A. BUCHSBAUM néhány eredményét. Ehhez azonban szükségünk lesz paraméterrendszerek egy újabb tulajdonságára.

3.11. TÉTEL. *Legyen A szemilokális gyűrű, A Jacobson-radikálja M, N pedig végesen generálható A-modulus. Legyenek továbbá a P_i-k mindazok a prímideálok A-ban, amelyekre $P_i \supseteqq \mathrm{Ann}\,(N)$ és $\dim A/P_i = \dim N$. Akkor minden $x \in M$-re*

$$\dim N/(x) \cdot N \geqq \dim N - 1,$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $x \notin P_i$ egyetlen i-re sem.

Ezt az eredményt paraméterrendszerekre is kiterjeszthetjük a következő módon (az $x_1, \ldots, x_s \in M$ elemeket N egy *paraméterrendszeré*nek nevezzük, ha $s = \dim N = \dim A$ és ha az $N/(x_1, \ldots, x_s) \cdot N$ A-modulus hossza véges; $N = A$ esetén egyszerűen csak paraméterrendszerről beszélünk):

Legyen $x_1, \ldots, x_k \in M$. Akkor

$$\dim N/(x_1, \ldots, x_k) \cdot N + k \geqq \dim N,$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $x_1, \ldots, x_k$ kiegészíthető N egy paraméterrendszerévé. (Lásd J-P. SERRE [12], III. fejezet, B.)

GYAKORLAT. Bizonyítsuk be a 3.11. tételt abban a speciális esetben, amikor A lokális gyűrű és $N = A$ (lásd hozzá a 3.6. tétel bizonyítását).

3.11a. KÖVETKEZMÉNY. Legyen (A, M) lokális gyűrű, $a \in M$, és tegyük fel, hogy $a_1, \ldots, a_k$ $(0 \leqq k < d)$ kiegészíthető paraméterrendszerré. Ekkor ekvivalensek a következő állítások:

(i) $a_1, \ldots, a_k$, a kiegészíthető paraméterrendszerré,

(ii) $\dim (a_1, \ldots, a_k, a) = \dim (a_1, \ldots, a_k) - 1$,

(iii) a nem eleme egyetlen $(a_1, \ldots, a_k)$-hoz tartozó maximális dimenziójú prímideálnak sem.

A 3. § utolsó részéhez értünk. Ebben a lokális gyűrűk egy fontos osztályát ismerjük meg. Ezt az osztályt F. S. MACAULAY vezette be még 1916-ban, bár a lokális gyűrűket W. KRULL csak 1938-ban definiálta.

4. *Cohen—Macaulay gyűrűk*

Legyen (A, M) lokális gyűrű.

3.12. DEFINÍCIÓ. Az $a_1, \dots, a_t \in M$ elemek rendszerét *prímsorozat*nak vagy *A-sorozat*nak nevezzük, ha az a_i elem nem nullosztó $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$-ben egyetlen i-re ($i=1, \dots, t$) sem. ($i=0$-ra legyen definíció szerint $(a_1, \dots, a_i)=(0)$.)

Az ideálhányados tulajdonságai szerint ezzel a feltétellel ekvivalens a következő: $(a_1, \dots, a_{i-1}):a_i=(a_1, \dots, a_{i-1})$, $i=1, \dots, t$. Az a tulajdonság tehát, hogy $a_1, \dots, a_t$ prímsorozatot alkot, invariáns az $1, \dots, t$ számok minden permutációjával szemben.

Ha $a_1, \dots, a_t$ prímsorozat, és a P prímideál $(a_1, \dots, a_t)$-hez tartozik, akkor

$$h(P) \geqq t,$$

és itt a 3.1. definíció után szereplő *Krull*-tétel és a 3.2. gyakorlat szerint egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha P izolált. A-ban tehát létezik maximális prímsorozat, azaz olyan $a_1, \dots, a_t$ prímsorozat, hogy minden további $b \in M$ elem már nullosztó $A/(a_1, \dots, a_t)$-ben. Igazolható, hogy bármely két maximális prímsorozat ugyanannyi elemből áll. A maximális prímsorozatok elemszámát *A homologikus kodimenziójá*nak nevezzük, és így jelöljük: $\operatorname{codh} A$. (A homologikus kodimenzióját nevezik egyszerűen A kodimenziójának vagy A fokának is.)

A fentiek szerint tehát $\operatorname{codh} A \leqq h(M) = \dim A$.

3.13. DEFINÍCIÓ. *A Cohen—Macaulay gyűrű,* ha $\operatorname{codh} A = \dim A$.

Most felsorolunk még néhány, a *Cohen—Macaulay* gyűrűkre vonatkozó eredményt. Ezzel kapcsolatban O. ZARISKI—P. SAMUEL [14] 6. függelékére utalunk.

Legyen A *Cohen—Macaulay* gyűrű, $\dim A = d$, $B=(a_1, \dots, a_t) \lhd A$. Ha $\dim A/B = d-t$, akkor $a_1, \dots, a_t$ prímsorozat, és minden, B-hez tartozó P prímideálra $h(P)=t$ és $\dim A/P = d-t$. Tehát A-hoz nem tartozik beágyazott prímideál, és A *egynemű* (azaz: az A-hoz tartozó prímideálok dimenziója megegyezik).

Ha A *Cohen—Macaulay* gyűrű, akkor minden $P \lhd A$ prímideálra

$$h(P) + \dim A/P = \dim A,$$

és A_P szintén *Cohen—Macaulay* gyűrű.

A *Cohen—Macaulay* gyűrűk így jellemezhetők:

3.14. TÉTEL. *Legyen A lokális gyűrű. Akkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(a) *A Cohen—Macaulay gyűrű*

(b) *létezik olyan* $Q \lhd A$ *paraméterideál, melyre* $e_0(Q, A) = l_A(A/Q)$

(b′) *minden* $Q \lhd A$ *paraméterideálra* $e_0(Q, A) = l_A(A/Q)$

(c) *létezik olyan* $Q \lhd A$ *paraméterideál, hogy az* $F(Q)$ *alakgyűrű izomorf az* A/Q *fölötti* ($\dim A$)*-határozatlanú polinomgyűrűvel*

(c′) (*c*) *minden paraméterideálra teljesül*

(d) *létezik A-ban olyan paraméterrendszer, amely prímsorozat*

(d′) *A-ban minden paraméterrendszer prímsorozat.*

PÉLDA. Legyen az $R =: K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ gyűrűben

$$P =: (x_1^2 x_3 - x_2^3,\ x_1 x_4 - x_2 x_3,\ x_1 x_3^2 - x_2^2 x_4,\ x_2 x_4^2 - x_3^3).$$

Akkor
$$A =: R_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}/P \cdot R_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$
nem *Cohen—Macaulay* gyűrű.

Bizonyítás. A 2.3. tétel utáni 2) gyakorlatból tudjuk, hogy $\dim P=2$, és most könnyen látszik, hogy $\dim A=2$.

x_1 nem nullosztó A-ban, és (P, x_1) primér felbontásából következik, hogy ezt a prímsorozatot nem lehet „meghosszabbítani" (ne feledjük, hogy x_0 egység A-ban), tehát x_1 maximális prímsorozat, vagyis $\operatorname{codh} A = 1 < \dim A$.

3.15. GYAKORLATOK. 1) Legyen $R =: K[x_0, \dots, x_4]$, akkor $A =: R_{(x_0, x_2, x_3, x_4)}/P \cdot \cdot R_{(x_0, x_2, x_3, x_4)}$ *Cohen—Macaulay* gyűrű.

2) A fenti R-rel $R_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}/(x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4) \cdot R_{(x_1, x_2, x_3, x_4)}$ nem *Cohen—Macaulay* gyűrű.

3) Igazoljuk, hogy $A \lhd R =: K[x_0, \dots, x_n]$ akkor és csak akkor perfekt, ha $R_{(x_0, \dots, x_n)}/A \cdot R_{(x_0, \dots, x_n)}$ *Cohen—Macaulay* gyűrű.

4) Igazoljuk, hogy ha A *Cohen—Macaulay* gyűrű és a $B \lhd A$ ideál generálható prímsorozattal, akkor minden n természetes számra a B^n ideál egynemű.

A 3.10. tételben látott lokális-globális elvet egészíti ki a következő

3.16. TÉTEL. *Legyen $K[x_0, \dots, x_n] =: R$, $A \lhd R$, $B =: (F_1, \dots, F_\varrho) \lhd R$, $\dim B = = n - \varrho$, és tegyük fel, hogy A és B lokálisan nem elfajulóan metszi egymást. Akkor a Bezout-tétel állítása: $h_0(A, B) = h_0(A) \cdot h_0(B)$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden, az (A, B)-hez tartozó legmagasabb dimenziójú P_v prímideálra $R_{P_v}/A \cdot R_{P_v}$ és $R_{P_v}/B \cdot R_{P_v}$ Cohen—Macaulay gyűrű.*

GYAKORLAT. Igazoljuk a fenti tétel állítását abban a speciális esetben, amikor A és B a 3.9. definíció utáni 2) gyakorlatban megadott két ideál.

TANKÖNYVEK A 0. FEJEZET ANYAGÁHOZ

[1] ATIYAH, M. F.—MACDONALD, I. G.: *Introduction to commutative algebra*, Addison—Wesley, London, 1969.

[2] FUCHS L.: *Algebra*, egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

[3] GRÖBNER, W.: *Moderne algebraische Geometrie. Die Idealtheoretischen Grundlagen.* Springer, Wien—Innsbruck, 1949.

[4] GRÖBNER, W.: *Algebraische Geometrie* I, B. I., Mannheim, 1968.

[5] GRÖBNER, W.: *Algebraische Geometrie* II, B. I., Mannheim, 1970.

[6] KELLER, O.-H.: *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (sajtó alatt).

[7] KAPLANSKY, I.: *Commutative rings*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[8] MATSUMURA, H.: *Commutative algebra*, W. A. Benjamin, New York, 1970.

[9] NAGATA, M.: *Local rings*, Intersc. Publ., New York, 1962.

[10] NORTHCOTT, D. G.: *Ideal theory*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, No. 42, University Press, Cambridge, 1960.

[11] NORTHCOTT, D. G.: *Lessons on rings, modules and multiplicities*, University Press, Cambridge, 1968.

[12] SERRE, J—P.: *Algèbre locale — Multiplicités*, Lect. Notes in Math., No. 11, Springer, Berlin—New York, 1965.

[13] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra* II, 4. kiadás, Springer, Berlin—Heidelberg, 1959.

[14] ZARISKI, O.—SAMUEL, P.: *Commutative algebra* I, D. van Nostrand, New York, 1958.

[15] ZARISKI, O.—SAMUEL, P.: *Commutative algebra* II, D. van Nostrand, New York, 1960.

(Beérkezett: 1972. X. 23.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

AZ ALGEBRAI GEOMETRIA ALAPJAI

Írta: I. R. SAFARJEVICS*

TARTALOM

Algebrai apparátus
I. Fejezet. Alapfogalmak
1. §. Síkbeli algebrai görbék
2. §. Affin terek zárt részhalmazai
3. §. Racionális függvények
4. §. Kváziprojektív sokaságok
5. §. Szorzatok és kváziprojektív sokaságok leképezései
6. §. Dimenzió
II. Fejezet. Lokális tulajdonságok
1. §. Egyszerű és szinguláris pontok
2. §. Hatványsorba fejtés
3. §. Egyszerű pontok tulajdonságai
4. §. Biracionális izomorfizmusok szerkezete
5. §. Normális sokaságok
III. Fejezet. Divizorok és differenciál formák
1. §. Divizorok
2. §. Divizorok görbéken
3. §. Algebrai csoportok
4. §. Differenciál formák
5. §. Példák és a differenciál formák alkalmazásai
IV. Fejezet. Metszet indexe
1. §. Definíciók és alapvető tulajdonságok
2. §. A metszet indexének alkalmazásai
3. §. Felületek biracionális izomorfizmusai

Algebrai apparátus

Az algebrai geometria szisztematikus leírására tett bármely kísérlet alkalmával felvetődik az az alapvető kérdés, milyen terjedelemben használjunk algebrai apparátust. Elvileg nem lehet határt megjelölni a kommutatív algebra és az algebrai geometria között, és a kommutatív algebra fogalmainak és eredményeinek teljes sokfélesége alkalmazásra talál az algebrai geometria ilyen vagy olyan kérdéseiben. Ugyanakkor elég mélyen be lehet hatolni az algebrai geometriába, különösen annak geometriai kérdéseibe, csupán szerény algebrai alapokra támaszkodva. Itt ilyen szempontot fogunk követni. Néhány helyen hivatkozni fogunk a kommutatív algebra

* И. Р. Шафаревич: Основы алгебраической геометрии, Успехи Мат. Наук т. XXIV. вып. 6 (150), 1969, ст. 3—184.

A fordítás itt közölt része az eredeti cikk I. és II. fejezetét tartalmazza. A cikk III. és IV. fejezetét magyarra fordítva az MTA III. Osztály Közleményei XXII. kötete 2. füzete tartalmazza.

bizonyos izolált eredményeire. Ezek közül legkomolyabb a prímtényezőkre bontás egyértelműségének bizonyítása reguláris lokális gyűrűben és a gyűrű egész lezárásáról szóló tétel a gyűrű kvocienstestének véges bővítésében. Mindkét esetben a bizonyítást odáig fejlesztjük itt, hogy annak hátra maradó részét elolvasva Zariszkij és Szamuel „Kommutatív algebra" c. könyvéből, azt meg lehet érteni függetlenül ezen könyv más részeitől.

Ezen kívül csak az egyetemi tananyagban szereplő algebrai és analitikus geometriai ismeretekre fogunk támaszkodni, valamint bizonyos adatokra a gyűrűkről, testekről és modulusokról, amelyek jegyzékét közöljük.

1. Gyűrűk és ideálok általános tulajdonságai. Ван-дер-Варден «*Современная алгебра*», I. kötet, III. fejezet.

2. Polinomok. Ван-дер-Варден, I. kötet, IV. fejezet.

Az 1. és 2.-ról még Зарисский и Самюэль «*Коммутативная алгебра*», I. kötet, I. fejezet.

3. HILBERT tétele a bázisról. Ван-дер-Варден. II. kötet, 8. §.

4. HILBERT tétele a gyökökről. Ван-дер-Варден, II. kötet 77—79. §, vagy Зарисский и Самюэль, II. kötet, VII. fejezet 3. §. 195—198. oldal.

5. Algebrai és transzcendens elemek és bővítések. Ван-дер-Варден, I. kötet, V. fejezet 31., 35. §, vagy Зарисский и Самюэль, I. kötet, II. fejezet, 1., 2., 3. §§.

6. A transzcendensség foka. Ван-дер-Варден, I. kötet, VIII. fejezet, 64 §, vagy Зарисский и Самюэль, I. kötet, II. fejezet 12. §.

7. Szeparábilitás, a primitív elemről szóló tétel. Ван-дер-Варден, I. kötet, V. fejezet, 38., 39., 40. §, vagy Зарисский и Самюэль, I. kötet, II. fejezet, 5., 9. §.

8. Modulusok. *Jordan—Hölder* tétele (csak egy helyen alkalmaztuk, a IV. fejezetben). Зарисский и Самюэль, I. kötet, III. fejezet, 11. §.

9. Főideálgyűrűk feletti modulusok (csak egy helyen, a III. fejezetben használjuk). Ван-дер-Варден, II. kötet, 108., 109. §.

Semminemű nemalgebrai apparátust nem használunk. Jelentéktelen kivételként előfordulnak elemi fogalmak a topologikus gyűrűk elméletéből a formális hatvány sorok gyűrűjével kapcsolatosan, valamint az implicit függvény egzisztencia tétele, amelyet egyetlen helyen használunk (nem is lényeges a következők megértése szempontjából).

I. FEJEZET

ALAPFOGALMAK

1. §. Síkbeli algebrai görbék

Az első fejezetet az algebrai geometria egy sor fogalmának szenteljük. Ebben a paragrafusban néhány példát fogunk felhozni, amelyek előkészítik ezen fogalmak bevezetését.

1. *Racionális görbék*

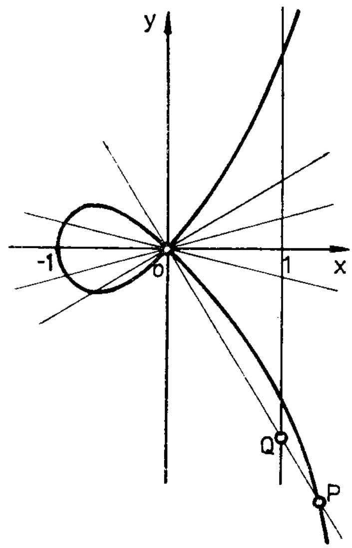
Mint ismeretes, az

$$y^2 = x^2 + x^3 \tag{1}$$

egyenlettel megadott görbe azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy pontjainak koordinátái kifejezhetők egy paraméteres racionális függvény alakjában. Annak érdekében, hogy levezessük ezt a kifejezést, megjegyezzük, hogy az origón áthaladó $y=tx$ egyenes az (1) görbét az origón kívül egyetlen pontban metszi. Valóban, helyettesítsük be az $y=tx$ egyenletet (1)-be. Azt kapjuk, hogy $x^2(t^2-x-1)=0$. Az $x=0$ gyök az $O=(0,0)$ pontnak felel meg. Ezen kívül még van egy $x=t^2-1$ gyök. Az egyenes egyenletéből azt kapjuk, hogy $y=t(t^2-1)$. Ilyen módon az

(2) $$x = t^2-1, \quad y = t(t^2-1)$$

parametrizálást kapjuk, amelynek a geometriai értelmét is megvilágítottuk: t azon egyenes iránytényezője, amely az (x, y) és O pontokon megy át, a t-nek megfelelő x és y pedig az $y=tx$ egyenes és (1. görbe) O-tól különböző metszéspontjának a koordinátái. Még szemléletesebben képzelhetjük ezt el magunkban, ha olyan egyenest húzunk, amely nem megy át az O ponton (például az $x=1$ egyenlettel megadott egyenest), és megfeleltetjük a P pontnak az OP egyenesnek ezzel az egyenessel való metszéspontját (a görbe projektálása az O pontból) (1. ábra). Ekkor a paraméter szerepét a kiválasztott egyenesen való koordináta játssza. Ebből a geometriai interpretációból, de a (2) képletekből is látható, hogy a t paramétert ($x\neq 0$ mellett) egyértelműen meghatározza az (x, y) pont.



1. ábra

Most egy általános definícióját adjuk az olyan síkbeli algebrai görbéknek, amelyekre ilyen előállítás lehetséges. Előzetesen bevezetünk néhány fogalmat. Rögzítsünk egy k testet. Ponton a következőkben az (x, y) sík olyan pontjait fogjuk érteni, amelyek koordinátái a k testből valók.

Síkbeli algebrai görbének nevezzük az összes olyan pontok halmazát, amelyek koordinátái eleget tesznek az

(3) $$f(x, y) = 0$$

egyenletnek, ahol $f(x, y)$ k test feletti polinom.

A következőkben a k testet algebrailag zártnak fogjuk tekinteni. Ez azzal kapcsolatos, hogy ellenkező esetben előfordulhatna, hogy az algebrai görbének túlságosan kevés pontja van. Például valós koordinátájú pontokra szorítkozva azt kellene mondanunk, hogy az $x^2+2y^2=0$ és $x^4+y^4=0$ egyenletek ugyanazt a „görbét" határozzák meg: az origót. Ha viszont a komplex koordinátájú pontokat tekintjük, akkor két különböző görbét kapunk. Ez nem jelenti azt, hogy mi egyáltalán nem fogunk vizsgálni algebrailag nem zárt testből való koordinátájú pontokat is. Ellenkezőleg, ilyen esethez sok kérdés vezet.

Íme néhány *példa*.

Ha k a valós számok teste, akkor az algebrai görbék „szokásos" geometriájához jutunk.

Ha k a racionális számok teste, akkor az a kérdés, hogy hogyan keressük meg a

(3) görbe pontjait, azaz a megfelelő egyenlet racionális gyökeit, a határozatlan egyenletek elméletének egyik alapvető kérdése.

Ha k egy p elemű test (p-prímszám), akkor az $f(x, y) \equiv 0 \pmod p$ kongruencia megoldásának kérdésével van dolgunk.

Ezen esetek mindegyikében — amint az kiderült — igen fontos azon pontok vizsgálata, amelyek koordinátái a megfelelő k test algebrai lezártjában vannak.

Ha az $f(x, y)$ polinom felbomlik két tényező szorzatára: $f = g \cdot h$, akkor az általa meghatározott görbe egyesítése lesz két görbének, amelyeket a $g(x, y) = 0$ és $h(x, y) = 0$ egyenletek határoznak meg. Ha f polinom irreducibilis, akkor az általa meghatározott görbét irreducibilisnek nevezzük. Mivel minden polinom irreducibilis polinomok szorzata, minden síkgörbe véges sok irreducibilis görbe egyesítése.

Az $f(x, y) = 0$ egyenlettel megadott irreducibilis síkgörbét racionálisnak nevezzük, ha létezik két olyan $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ racionális függvény, amelyek közül legalább az egyik konstanstól különböző, hogy az

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = 0 \tag{4}$$

azonosan teljesül t-re. Nyilvánvaló, hogy ha $t = t_0$ olyan paraméter érték, amely különbözik a φ és ψ nevezőit 0-vá tevő véges sok érték bármelyikétől, akkor a $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ pont az X görbére illeszkedik. Később meg fogjuk mutatni, hogy ha alkalmas módon választjuk meg a φ és ψ parametrizációját, akkor a t paraméterértékek és a görbe pontjai között ilyen módon létesített megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, amennyiben a paraméter értékek, úgyszintén a görbe pontjai közül bizonyos véges halmazokat kizárunk. Eközben a t paraméter kifejezhető az x és y koordináták $\chi(x, y)$ racionális függvényeként. Ha a φ és ψ racionális függvények koordinátái benne vannak a k test valamely k_0 résztestében és $t_0 \in k_0$, akkor a $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ pont koordinátái k_0-ból valók. Utóbbi körülmény rámutat a racionális görbe fogalmának egy lehető alkalmazására. Legyenek $f(x, y)$ polinom együtthatói racionális számok. Ha ismert, hogy a (3) görbe racionális, a φ és ψ függvények együtthatói pedig racionális számok, akkor az $x = \varphi(t)$ és $y = \psi(t)$ parametritáció megadja a görbe minden pontját, kivéve talán azok közül véges sokat, ha a t befutja az összes racionális értéket. Például az (1) határozatlan egyenlet minden megoldását megadja a (2) képlet, ha t befutja az összes racionális értéket.

A racionális görbék másik alkalmazása az integrálszámítással kapcsolatos. Fel fogjuk tételezni, hogy a racionális görbe (3) egyenlete meghatározza y-t az x algebrai függvényeként. Akkor bármely $g(x, y)$ racionális függvény az x (összetett) függvénye. A (3) görbe racionális voltából a következő fontos körülmény adódik: bármely $g(x, y)$ racionális függvény esetén a

$$\int g(x, y)\, dx \tag{5}$$

határozatlan integrál kifejezhető elemi függvényekkel. Valóban, a (3) görbe racionális volta miatt lehetséges annak $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametrizációja, ahol φ és ψ racionális függvények. Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket az (5) integrálba, átalakítjuk azt $\int g(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\,dt$ alakra, amely már racionális függvény integrálja. Mint ismeretes, ilyen integrál kifejezhető elemi függvényekkel. Behelyettesítve azokba a paraméternek a koordinátáktól függő $t = \chi(x, y)$ kifejezését, megkapjuk az (5) integrálnak az előállítását a koordináták elemi függvényeivel.

Ismertetünk most néhány *példát* racionális görbékre. Az elsőfokú görbék, azaz egyenesek nyilván racionális görbék.

Bebizonyítjuk, hogy az irreducibilis másodrendű görbe racionális. Válasszunk ki egy (x_0, y_0) pontot az X görbén. Tekintsük az (x_0, y_0) ponton átmenő t irányegyütthatójú egyenest. Ennek egyenlete

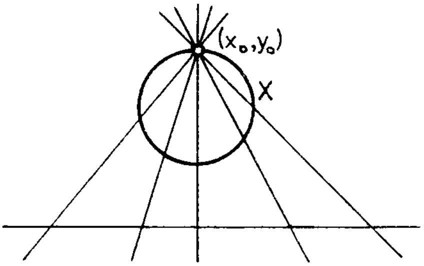
$$y-y_0 = t(x-x_0) \tag{6}$$

alakú. Keressük meg a görbe és egyenes metszéspontjait. Ennek érdekében elegendő a (6)-ból kifejezett y-t behelyettesíteni az X görbe egyenletébe. Így x-re az

$$f(x, y_0+t(x-x_0)) = 0 \tag{7}$$

egyenletet kapjuk, amelynek foka $\leqq 2$, mivel az $f(x, y)$ polinám foka 2. Az X görbe irreducibilitását felhasználva könnyű megmutatni, hogy a (7) egyenlet foka pontosan 2. Számunkra ismert a másodfokú egyenlet egyik gyöke, az $x=x_0$, mivel a feltétel szerint az (x_0, y_0) pont rajta van a görbén. Osszuk az egyenletet az x^2 együtthatójával és jelöljük A-val az x együtthatóját a kapott egyenletben. Akkor az egyenlet másik gyökére az $x+x_0=-A$, $x=-x_0-A$ kifejezést kapjuk. Mivel a (7) egyenlet együtthatóiban szerepel t, így A racionális függvénye t-nek. Behelyettesítve x-nek ezt a kifejezését (6)-ba, megkapjuk y-nak a kifejezését a t racionális függvényeként. Amint a fejtegetések menetéből látszik, ezek a kifejezések kielégítik a görbe egyenletét, és így megmutatják, hogy a görbe racionális.

A bemutatott parametrizációnak nyilvánvaló geometriai értelme van. Az (x, y) pontnak azon egyenes irányegyütthatója felel meg, amely azt az (x_0, y_0) ponttal köti össze, a t paraméternek pedig a görbének azon egyenessel való metszéspontja, amely átmegy az (x_0, y_0) ponton és irányegyütthatója t. Ez a pont egyértelműen van meghatározva éppen amiatt, mert másodrendű görbével van dolgunk. Ugyanúgy, amint azt az (1) görbével kapcsolatosan tettük, ezt a parametrizációt interpretálhatjuk úgy is, mint az X görbének az (x_0, y_0) pontból egy olyan egyenesre való projektálását, amely nem megy át ezen a ponton (2. ábra).



2. ábra

Megjegyezzük, hogy a parametrizáció konstruálásánál az X-görbén levő (x_0, y_0) pontot használtuk. Ha az $f(x, y)$ polinom együtthatói és ennek a pontnak az x_0, y_0 koordinátái a k-test valamely k_0 résztestéből valók, akkor a parametrizációt adó függvények együtthatói is k_0-ban vannak. Például megkereshető a határozatlan másodfokú egyenlet racionális megoldásainak általános alakja, ha ismert legalább egy megoldás.

Legalább egy megoldás létezésének a kérdése elég komplikált. Ezt a kérdést megoldja az úgynevezett *Legendre*-tétel (l. pl. З. И. Боревич és И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, I. fejezet, § 7, 2. pont).

Tekintsünk egy más alkalmazást. Amint láttuk, az $y^2=ax^2+bx+c$ másodfokú egyenlet racionális görbét határoz meg. Innen következik, hogy bármilyen legyen a $g(x, y)$ racionális függvény, az $\int g\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ integrál kifejezhető elemi függvényekkel. Az általunk levezetett parametrizáció explicit behelyettesítési módot is ad, amellyel ez az integrál elemi függvényekkel kifejezhető integrálhoz vezethető vissza. Könnyű belátni, hogy ilyen módon az ismert *Euler*-féle helyettesítéshez jutunk.

Áttérünk most a harmadrendű görbékre. Ezen paragrafus elején már láttunk példát harmadrendű racionális görbére. Megmutatjuk, hogy léteznek nem racionális harmadrendű görbék is. Példa egy ilyen görbére az $x^3+y^3=1$ egyenlettel megadott görbe. Egy általánosabb eredményből következik, hogy az

$$x^n+y^n=1 \tag{8}$$

egyenlettel megadott görbe nem racionális $n>2$ esetén, ha n nem osztható a k-test p karakterisztikájával.

Legyen a (8) görbe racionális és $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ annak parametrizációja. Felírjuk a φ és ψ racionális függvényeket

$$\varphi(t)=\frac{p(t)}{r(t)}, \quad \psi(t)=\frac{q(t)}{r(t)}$$

alakban, ahol p, q és r polinomok, amelyeket együttesen relatív prímeknek feltételezhetünk. Feltétel szerint a

$$(p(t))^n+(q(t))^n-(r(t))^n=0 \tag{9}$$

egyenlőségnek azonosan kell teljesülni. Differenciáljuk ezt az egyenlőséget és osztjuk n-nel (ez lehetséges, mert n nem osztható a k test karakterisztikájával). A következő egyenlőséget kapjuk:

$$p^{n-1}\cdot p'(t)+q^{n-1}\cdot q'(t)-r^{n-1}\cdot r'(t)=0. \tag{10}$$

Tekintsük a (9) és (10) egyenleteket, mint a p^{n-1}, q^{n-1}, $-r^{n-1}$ lineáris egyenletrendszerét, amelynek mátrixa

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \end{pmatrix}.$$

Kiszámítva a szokásos módon az egyenletrendszer megoldásait, azt látjuk, hogy a p^{n-1}, q^{n-1}, $-r^{n-1}$ megfelelően arányos a $qr'-rq'$, $rp'-pr'$, és $pq'-qp'$-vel. Mivel p, q és r együttesen relatív prímek, innen következik, hogy

$$p^{n-1}|(qr'-rq'), \quad q^{n-1}|(rp'-pr'), \quad r^{n-1}|(pq'-qp').$$

Jelöljük a p, q és r hatványait a, b és c-vel. Legyen például $a\geqq b\geqq c$. Akkor az első összefüggésből $(n-1)a\leqq b+c-1$ adódik, ami a $b\leqq a$, $c\leqq a$, $n\geqq 3$ összefüggésekkel ellentmondáshoz vezet.

A megvizsgált példák a következő általános kérdéshez vezetnek: hogyan lehet eldönteni, hogy egy tetszőleges algebrai síkgörbe racionális-e? Ez a kérdés — amint később látni fogjuk — az algebrai geometria elég finom fogalmaival van kapcsolatban.

2. *Kapcsolat a testelmélettel*

Most meg fogjuk mutatni, hogy az előző pont végén feltett kérdést meg lehet fogalmazni testelméleti kérdésként. Ennek érdekében minden irreducibilis algebrai síkgörbével kapcsolatba hozunk egy testet, azzal analóg módon, ahogyan minden irreducibilis polinommal kapcsolatban van egy test — az a legszűkebb bővítés, amelyben a polinomnak van gyöke.

Legyen az X görbe az 1. pont (3) egyenletével megadva. Tekintsük az olyan $u(x, y)=\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ racionális függvényeket (p és q k test feletti polinomok), ahol a $q(x, y)$ polinom nem osztható $f(x, y)$-nal. Az ilyen függvényeket az X görbén értelmezett függvényeknek fogjuk nevezni. Az X-en értelmezett két $\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ és $\frac{p_1(x, y)}{q_1(x, y)}$ függvényt az X görbén egyenlőknek nevezzük, ha a $p(x, y)q_1(x, y)-q(x, y)p_1(x, y)$ polinom osztható $f(x, y)$-nal. Könnyen ellenőrizhető, hogy az X görbén értelmezett, a fenti értelemben különböző racionális függvénynek halmaza test. Ezt a testet az X feletti racionális függvények testének nevezzük és $k(X)$-szel jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy a $k(X)$ test minden eleme kifejezhető az x és y racionális függvényeként. Közben x és y algebrailag függenek — az $f(x, y)=0$ relációval vannak összekapcsolva. Ebből kiindulva könnyen belátható, hogy a $k(X)$ test transzcendencia foka 1.

Ha X egy egyenes, amely például az $y=0$ egyenlettel van megadva, akkor bármely $\varphi(x, y)$ racionális függvény az X-en egyenlő a csak az x-től függő $\varphi(x, 0)$ függvénnyel, és ezért az egyenes feletti racionális függvények teste egybeesik az egy x változós racionális függvények testével: $k(X)=k(x)$.

Feltételezzük most, hogy az X görbe racionális és parametrizációja $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Megfeleltetjük minden $u=\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ racionális függvénynek a t-től függő $U(\varphi(t), \psi(t))$ racionális függvényt, amelyet a φ és ψ-nek az x és y helyett való helyettesítésével kapunk. Először is meggyőződünk arról, hogy ennek a helyettesítésnek van értelme, azaz hogy a $q(\varphi(t), \psi(t))$ nevező t szerint nem azonosan 0. Tételezzük fel, hogy $q(\varphi(t), \psi(t))=0$. Hasonlítsuk össze ezt az egyenlőséget az 1. pont (4) egyenlőségével. Azt kapjuk, t-nek különböző k-testbeli értékeket adva, hogy az $f(x, y)=0$ és $q(x, y)=0$ egyenleteknek végtelen sok közös megoldásuk van (emlékeznünk kell arra, hogy a test algebrailag zárt, tehát végtelen). Ez viszont csak akkor lehetséges, ha f- és q-nak van közös tényezőjük — a bizonyítás könnyen adódik a kizárás elméletből* (l. Ван-дер-Варден, *Современная алгебра,* § 27).

Ilyen módon a behelyettesítés meghatározott eredménnyel jár bármely, az X görbén értelmezett $u(x, y)$ függvény esetében. Sőt, mivel φ és ψ kielégítik az 1. pont (4) egyenletét, így az X-en egyenlő u és u_1 függvények behelyettesítés után azonos t-től függő racionális függvényt adnak. Ilyen módon a $k(X)$ test minden elemének megfelel egy meghatározott eleme a $k(t)$ testnek. Ez a megfeleltetés nyilvánvalóan izomorfizmus a $k(X)$ test és a $k(t)$ valamely részteste között. Ezen izomorfizmus hatására a k test elemei önmagukba mennek át.

Itt most egy tételt fogunk használni a racionális függvényekről. Ez az úgyneve-

* Теория исключений.

zett *Lüroth* tétel, amely azt állítja, hogy a racionális függvények $k(t)$ testének k testet tartalmazó részteste $k(g(t))$ alakú, ahol $g(t)$ valamely racionális függvény, azaz ez a test a $g(t)$ függvény összes racionális függvényeiből áll. Ha a $g(t)$ függvény nem konstans, akkor az $f(u)\to f(g(t))$ megfeleltetés nyilván egy izomorfizmust határoz meg a racionális függvények $k(u)$ teste és a $k(g(t))$ test között. Ezért *Lüroth* tételét a következő módon is meg lehet fogalmazni: a racionális függvények $k(t)$ testének k-t tartalmazó és k-tól különböző részteste maga is izomorf a racionális függvények testével. *Lüroth* tételét be lehet bizonyítani a testbővítések egyszerű tulajdonságainak a felhasználásával (l. Ван-дер-Варден, *Современная алгебра*, I. kötet, 63 §). Alkalmazva *Lüroth* tételét a mi esetünkre, látjuk, hogy ha az X görbe racionális, akkor a $k(x)$ test izomorf a racionális függvények $k(t)$ testével. Tételezzük fel, hogy fordítva, az 1. pont (3) egyenletével megadott valamely X görbe esetében a $k(x)$ test izomorf a racionális függvények $k(t)$ testével. Ebben az izomorfizmusban x-nek és y-nak feleljenek meg a $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ függvények. Mivel $k(x)$-ben teljesül az $f(x, y)=0$ összefüggés, azért az izomorfizmus miatt $f(\varphi(t), \psi(t))=0$ teljesül $k(t)$-ben, ami éppen azt jelenti, hogy az X görbe racionális.

Könnyű belátni, hogy bármely $K\supset k$ test, amelynek k feletti transzcendencia foka 1, és amelyet két x és y elem generál, izomorf egy $k(x)$ testtel, ahol X valamely irreducibilis sík algebrai görbe. Valóban, mivel a K test k feletti transzcendencia foka 1, így az x és y-nak algebrai reláció szerinti kapcsolatban kell lenniük. Ha $f(x, y)=0$ az x és y-t összekapcsoló reláció egy irreducibilis f polinommal, akkor X gyanánt választható az az algebrai görbe, amelyet ez az egyenlet meghatároz. Innen következik, hogy az 1. pont végén megfogalmazott kérdés a racionális görbékről ekvivalens a következő testelméleti kérdéssel: a k felett 1 transzcendencia fokú, k felett két elemmel generált $K\supset k$ test mikor izomorf az egyváltozás racionális polinomok $k(t)$ testével? Az a követelmény, hogy K test k felett két elemmel legyen generálva, algebrai szemszögből kevésbé természetes. Természetesebb lenne olyan bővítéseket vizsgálni, amelyek tetszőleges véges számú elemmel vannak generálva. Viszont később meg fogjuk mutatni, hogy ilyen módon nem jutunk általánosabb fogalomhoz.

Befejezésül megjegyezzük, hogy a megelőző vizsgálatok lehetővé teszik megoldani a racionális görbe parametrizációja egyértelműségének kérdését. Legyen X egy racionális görbe. *Lüroth* tétele szerint a $k(X)$ test izomorf a racionális függvények $k(t)$ testével. Ebben az izomorfizmusban x és y-nak feleljenek meg a $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ függvények. Akkor az X görbe következő parametrizációját kapjuk: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Bebizonyítjuk, hogy ez a parametrizáció rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1) Bármely $(x_0, y_0)\in X$ pont — kivéve esetleg véges sokat közülük — előállítható $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\varphi(t_0)$ alakban valamely t_0 mellett.

2) Minden pont esetében — kivéve esetleg véges sokat közülük — az ilyen előállítás egyértelmű.

A $k(X)\to k(t)$ izomorfizmusban t-be a $\chi(x, y)$ függvény menjen át. Akkor a $k(t)\to k(X)$ inverz izomorfizmus az $u(t)\to u(\chi(x, y))$ képlettel van megadva. Felírva azt, hogy a két megfeleltetés egymás inverze, a következő relációkhoz jutunk:

$$x = \varphi(\chi(x, y)), \quad y = \psi(\chi(x, y)), \tag{1}$$

$$t = \chi(\varphi(t), \psi(t)). \tag{2}$$

Az első relációk az 1) állítást adják. Valóban, ha $\chi(x, y)=\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ és $q(x_0, y_0)\neq 0$ (olyan $(x_0, y_0)\in X$ pont, amelyre $q(x_0, y_0)=0$, véges sok van, ugyanis a $q(x, y)$ és $f(x, y)$ polinomok relatív prímek), akkor tekinthetjük a $\chi(x_0, y_0)$ értéket. Legyen az (x_0, y_0) pont olyan, hogy $\chi(x_0, y_0)$ különbözzön a $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ függvények nevezőinek a gyökeitől (ilyen (x_0, y_0) pont, amelyre ez nem teljesül, az előbbi gondolatok alapján, véges sok van). Akkor az (1) képletek az (x_0, y_0) pont számára a kívánt előállítást adják. Analóg módon (2)-ből következik, hogy a t paraméter értéke, ha az létezik, egyértelműen meg van határozva (x_0, y_0) ponttal, kivéve esetleg véges sok pontot, amelyekre $q(x_0, y_0)=0$.

Megjegyezzük, hogy az 1) és 2) tulajdonságot a racionális görbe nem tetszőleges parametrizációjára bizonyítottuk, hanem valamely speciálisan konstruált esetben. Tetszőleges parametrizációra a 2) tulajdonság nem is mindig teljesül, például az 1. pontban az (1) görbe az 1. pont (2) képletével megadotton kívül még ellátható $x=t^4-1$, $y=t^2(t^4-1)$ parametrizációval is, amelyet az 1. pont (2) képletében t-nek t^2-tel való helyettesítésével kapunk. Nyilvánvaló, hogy abban a t és $-t$ paraméter értékeknek a görbe ugyanazon pontja felel meg.

3. *Görbék biracionális izomorfizmusa*

Ha a sík algebrai görbe nem racionális, akkor gyakran mégis ki lehet fejezni pontjainak koordinátáit egy másik — lehetséges, hogy egyszerűbb — görbe pontjainak koordinátáival. Tekintsük például az

$$y^2=f(x) \tag{1}$$

alakú görbét, ahol $f(x)$ páros, $2n$ fokszámú polinom, és legyen $f(x)=g(x)(x-\alpha)$ ahol a $g(x)$ polinom foka $2n-1$. Osszuk az (1) egyenlet két oldalát $(x-\alpha)^{2n}$-nel és vezessük be a következő jelöléseket:

$$x-\alpha=u^{-1}, \quad \frac{y}{(x-\alpha)^n}=v. \tag{2}$$

Akkor $\frac{g(x)}{(x-\alpha)^{2n-1}}=f_1(u)$, ahol f_1 foka $2n-1$ és az (1) egyenlet

$$v^2=f_1(u) \tag{3}$$

alakot ölt.

Nyilvánvaló, hogy megfordítva, az (1) görbe pontjainak a koordinátái is kifejezhetők racionálisan a (3) görbe pontjainak koordinátáival. Valóban, a (2) képletből következik, hogy

$$x=u^{-1}+\alpha, \quad y=v\cdot u^{-n}. \tag{4}$$

A (2) és (4) leképezések egymás inverzei. Ilyen módon az (1) és (3) görbék átalakíthatók egymásba, ami néha hasznos lehet, mivel az f_1 polinom foka eggyel kevesebb az f polinom fokánál.

Itt mi most egy új, az algebrai görbék között fennálló kapcsolat típussal állunk szemben. A racionális görbe fogalma beletartozik ebbe az általánosabb elképzelésbe. A 2. pont végén levezetett (1) és (2) képletek úgy interpretálhatók, hogy azt mondjuk: az X görbe átalakul egy egyenessé, amelyet az $s=0$ egyenlet ad meg az (s, t) síkon.

Pontos definíciókat adunk. Legyenek az X és Y irreducibilis görbék az $f(x, y)=0$ és $g(u, v)=0$ egyenletekkel megadva. Az X görbe Y görbébe való racionális leképezésének nevezzük az X-en értelmezett $\varphi(x, y)$ és $\psi(x, y)$ racionális függvénypárt, amelyre $g(\varphi(x, y), \psi(x, y))=0$ az X görbén. A 2. pontban alkalmazott fejtegetések alapján könnyű ellenőrizni, hogy — végesszámú kivételtől eltekintve — minden $(x_0, y_0)\in X$ pont esetén a $\varphi(x_0, y_0)$ és $\psi(x_0, y_0)$ értékek értelmezve vannak és $(\varphi(x_0, y_0), \psi(x_0, y_0))\in Y$.

X és Y görbéket biracionálisan izomorfaknak nevezzük, ha léteznek X-nek Y-ba és Y-nak X-be való racionális leképezései, amelyek egymás inverzei. Más szóval, léteznie kell X-nek Y-ba való — a $\varphi(x, y)$ és $\psi(x, y)$ függvénypárral megadott — olyan leképezésének, valamint Y-nak X-be való — $\xi(u, v)$ és $\eta(u, v)$ függvénypárral megadott — olyan leképezésének, hogy

$$\left.\begin{aligned} \xi(\varphi(x, y), \psi(x, y)) &= x \\ \eta(\varphi(x, y), \psi(x, y)) &= y \end{aligned}\right\} \; X\text{-en},$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\xi(u, v), \eta(u, v)) &= u \\ \psi(\xi(u, v), \eta(u, v)) &= v \end{aligned}\right\} \; Y\text{-on}.$$

Például az (1) és (3) görbék biracionálisan izomorfak és (2) és (4) a megfelelő leképezések.

Elérkeztünk az algebrai geometria egyik centrális feladatához: hogyan írhatók le a sík algebrai görbék a biracionális izomorfiáig terjedő pontossággal? Aligha lehet azt mondani, hogy ma létezik kimerítő megoldása ennek a feladatnak. Ennek ellenére egy sor olyan komoly eredményt fogunk a későbbiek során bizonyítani, amelyek a feladat megoldása irányában haladnak.

Nyilvánvaló, hogy ebből a szempontból a legegyszerűbb típusú algebrai görbék az egyenessel biracionálisan izomorf görbék, azaz a racionális görbék. Megkonstruálva a 2. pontban egy példát a nemracionális görbére, egyúttal azt is bebizonyítottuk, hogy a fent kitűzött feladatnak létezik nemtriviális megoldása, ugyanis nem minden görbe biracionálisan izomorf egymással.

Legyen X és Y két biracionálisan izomorf irreducibilis sík algebrai görbe, és azok egymásba való leképezései legyenek megadva a

$$(u, v) = (\varphi(x, y), \psi(x, y)), \quad (x, y) = (\xi(u, v), \eta(u, v))$$

képletekkel. Ugyanúgy, mint a racionális görbék vizsgálatánál, kapcsolatot tudunk létesíteni a görbék feletti $k(X)$ és $k(Y)$ racionális függvénytestek között. Ennek érdekében megfeleltetjük az X görbén értelmezett $\omega(x, y)$ tetszőleges racionális függvénynek az Y görbén tekintett $\omega(\xi(u, v), \eta(u, v))$ függvényt. Könnyen belátható, hogy ilyen módon a $k(X)$ testnek egy leképezését kapjuk a $k(Y)$ testbe, amely leképezés izomorfizmusa ezeknek a testeknek. Megfordítva, ha a $k(X)$ és $k(Y)$ testek izomorfak, akkor az x és $y\in k(X)$ függvényeknek ezen izomorfizmus szerint meg kell hogy feleljenek a $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)\in k(Y)$ függvények, az $u, v\in k(Y)$ függvényeknek pedig a $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)\in k(X)$ függvények, és triviális módon ismét ellenőrizhető, hogy a φ, ψ és ξ, η függvénypárok az X és Y görbék biracionális izomorfizmusát határozzák meg. Ilyen módon két görbe biracionálisan izomorf akkor és csakis akkor, ha azok racionális függvényteste izomorf.

Látjuk, hogy az algebrai görbék biracionális izomorfia erejéig való leírásának a feladata egyszerűen geometriai aspektusa egy természetes algebrai klasszifikációs feladatnak, a k test olyan bővítései leírásának (az izomorfizmus erejéig), amelyek k feletti transzcendencia foka 1, és amelyek véges sok elemmel vannak generálva. Az utóbbi feladatban természetesebb volna nem elégedni meg csupán az 1. transzcendencia fokú testekkel, hanem tetszőleges véges transzcendencia fokú testeket vizsgálni. A későbbiekben látni fogjuk, hogy a kérdés ilyen általánosabb felvetésének is van geometriai jelentése. Akkor viszont nem maradhatunk meg az algebrai görbék elméletének határai között, hanem tetszőleges dimenziósszámú algebrai sokaságot kell vizsgálnunk.

Feladatok

1. Számítsuk ki a *Descartes*-féle hurok szalag* területét.

2. Bizonyítsuk be a $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ egyenlettel megadott lemniszkáta racionális voltát. (Útbaigazítás. Tekintsük a lemniszkáta és az $x^2+y^2=t(x-y)$ kör nyaláb metszéspontjait.)

3. Bizonyítsuk be, hogy az $y^2=x^2+Ax+B$ harmadrendű görbe akkor és csakis akkor racionális, ha az x^3+Ax+B polinomnak van többszörös gyöke (az alaptest karakterisztikája $\neq 2$).

4. Határozzuk meg az $x^2+y^2=1$ kör racionális parametrizációját.

5. Keressük meg a 4. feladat egyenletében a racionális megoldások általános alakját, és ebből vezessük le a *Pythagorasz* számok ismert képletét (l. például Н. М. Виноградов, *Основы теории чисел*), azaz az $x^2+y^2=z^2$ egész számú megoldásainak képletét.

6. Bizonyítsuk be, hogy a trigonometrikus függvények teste, azaz a $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ összes racionális függvényeinek a teste, izomorf a racionális függvények testével. Speciálisan: minden trigonometrikus egyenlet átalakítható algebrai egyenletté.

7. Bizonyítsuk be, hogy a poláris koordináta-rendszerben $r=\sin 3\varphi$, a *Descartes*-féle koordináta-rendszerben $(x^2+y^2)^2=y(3x^2-y^2)$ egyenlettel megadott görbe irracionális.

8. Adva van $2n$ darab α_i $(i=1, 2, \ldots, 2n)$, $\alpha_i\neq 0$ szám. Legyen $\alpha_i+\dfrac{1}{\alpha_i}=a_i$. Bizonyítsuk be, hogy az $u=x+\dfrac{1}{x}$, $v=\dfrac{y}{x^n}$ függvények az

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2n} (x-\alpha_i)(x-\alpha_i^{-1})$$

görbének a

$$v^2 = \prod_{i=1}^{2n} (u-a_i)$$

görbébe való leképezését határozzák meg. Biracionális izomorfizmus-e ez a leképezés?

* Петля декартового листа.

9. Bizonyítsuk be, hogy az $f_{n-1}(x, y)+f_n(x, y)=0$ egyenlettel megadott görbe racionális, ha az irreducibilis. Itt az f_{n-1} és f_n megfelelően $n-1$, ill. n-edfokú homogén polinomok.

10. Bizonyítsuk be, hogy az $u=\frac{x}{1-y}$, $v=\frac{3-y}{y-1}$ függvények az $x^3+y^3=1$ görbének a $v^2=4u^3-1$ görbébe való racionális leképezését határozzák meg. Biracionális izomorfizmus-e ez a leképezés? Az alaptest karakterisztikája $\neq 2, 3$.

11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges harmadfokú görbe biracionálisan izomorf a 2. pont (1) görbéjével $n=2$ mellett. Eközben a parametrizáció függvényeinek együtthatói k_0 testből valók, ha a görbének van k_0-beli koordinátákkal rendelkező x pontja. (Útbaigazítás: Húzzunk x-en egy egyenes nyalábot és vizsgáljuk meg a nyaláb egyeneseinek a görbével való x-től különböző metszéspont párjait. Az alaptest karakterisztikája $\neq 2$.)

12. Bizonyítsuk be, hogy az a harmadfokú görbe, amelynek van k_0-ból való koordinátákkal rendelkező y pontja, biracionálisan izomorf a 3. pont (3) görbéjével $n=2$ mellett, és a parametrizációs függvények együtthatói benne vannak k_0-ban. (Útbaigazítás: Húzzunk az y ponton keresztül érintőt, és annak a görbével alkotott y-tól különböző metszéspontjára alkalmazzuk a 13. feladatban követett konstrukciót.) Mutassuk meg, hogy az így keletkezett görbéhez alkalmazható a 3. pont elején levő okoskodás.

2. §. Affin terek zárt részhalmazai

A továbbiakban állandóan ugyanazzal az algebrailag zárt k testtel dolgozunk, amelyet alaptestnek fogunk nevezni.

1. *Zárt részhalmazok definíciója*

Az algebrai geometria fejlődésének különböző szakaszain annak alapvető objektumáról, az „algebrai sokaság természetes fogalmáról", változott az elképzelés. Annak tartották a projektív és kváziprojektív sokaságokat, absztrakt algebrai sokaságokat, sémákat*, algebrai tereket.

Ebben a dolgozatban az algebrai geometriát fokozatosan mind nagyobb általánosságban fogjuk vizsgálni. Az első fejezetekben a legáltalánosabb fogalom, amely magában foglalja az összes ott vizsgált algebrai sokaságot, a kváziprojektív sokaság fogalma lesz. Az utolsó fejezetekben ilyen szerepet a sémák* fognak játszani. Most az algebrai sokaságok egy olyan osztályát definiáljuk, amely alapvető szerepet játszik az összes következő definíciókban. Mivel a sokaság szót általánosabb fogalmak számára tartjuk fenn, más elnevezéssel fogunk élni.

Jelöljön A^n egy k test feletti n-dimenziós affin teret. Következésképp annak pontjai $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in k$ alakúak.

DEFINÍCIÓ. A^n-ben *zárt részhalmaznak* nevezzük azt az $X \subset A^n$ részhalmazt, amely véges számú k feletti polinom összes közös zérushelyeiből áll. Néha röviden zárt halmazról fogunk beszélni.

* Схемы.

A $T_1, \ldots, T_n$ változók n-változós polinomját a következőkben $F(T)$ alakban fogjuk írni, T alatt a változók $T_1, \ldots, T_n$ rendszerét értve. Ha a zárt X halmaz az $F_1(T), \ldots, F_m(T)$ polinomok összes közös zérushelyeiből áll, akkor az $F_1(T) = \ldots$ $\ldots = F_m(T) = 0$ egyenlőségeket az *X halmaz egyenleteinek nevezzük.*

Az az X halmaz, amelyet végtelen $F_\alpha(T) = 0$ egyenletrendszer határoz meg, szintén zárt. Valóban, a $T_1, \ldots, T_n$ változók polinomjainak gyűrűjében az az $\mathcal{I}$ ideál, amelyet az összes $F_\alpha(T)$ polinom generál, véges bázissal rendelkezik: $\mathcal{I} = (G_1, \ldots, G_m)$. Könnyű belátni, hogy X a $G_1 = \ldots = G_m = 0$ egyenletrendszerrel van meghatározva.

Ebből következik, hogy tetszőleges számú zárt halmaz metszete zárt. Valóban, ha X_α zárt halmaz, akkor az $X = \bigcap X_\alpha$ halmazt definiáló egyenletrendszer megkeresése érdekében elegendő egyesíteni az összes X_α halmazt definiáló egyenletrendszereket.

Véges sok zárt halmaz egyesítési halmaza szintén zárt. Nyilvánvalóan ezt elegendő ellenőrizni két halmaz esetére. Ha $X = X_1 \cup X_2$, X_1-et az $F_i(T) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ egyenletrendszer határozza meg, az X_2-t a $G_j(T) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ egyenletrendszer, akkor könnyen belátható, hogy X-et az $F_i(T) \cdot G_j(T) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, l)$ egyenletrendszer határozza meg.

Legyen X az affin tér zárt részhalmaza. Egy $U \subset X$ halmazt nyíltnak nevezünk, ha $X - U$ komplementere zárt. Tetszőleges nyílt $U \ni x$ halmazt az x pont környezetének nevezünk. Nyilvánvaló, hogy a zárt halmazok tetszőleges rendszerének a metszete zárt, véges sok zárt halmaz egyesítési halmaza zárt, nyílt halmazok tetszőleges rendszerének uniója nyílt és véges sok nyílt halmaz metszete nyílt. Az X halmaz adott $M \subset X$ részhalmazt tartalmazó összes zárt részhalmazainak a metszete tehát zárt. Ezt a halmazt az M halmaz lezártjának nevezzük és $\overline{M}$-sal jelöljük. M részhalmazt X-ben sűrűnek nevezzük, ha $\overline{M} = X$. Ez azt jelenti, hogy M nincs benne egyetlen olyan zárt Y részhalmazban sem, amelyre $Y \subset X$, $Y \neq X$.

Példák zárt halmazokra

1. PÉLDA. Az egész A^n affintér zárt — az egyenletek üres halmazával vagy $0 = 0$ egyenlettel van megadva.

2. PÉLDA. Az A^1 olyan $X \subset A^1$ részhalmaza, amely az A^1 összes 0-tól különböző pontjából áll, nem zárt — az összes $F(T)$ polinom, amely 0-val egyenlő az összes $T \neq 0$ változókra, azonosan egyenlő kell legyen 0-val.

3. PÉLDA. Meghatározzuk az A^1 összes zárt $X \subset A^1$ részhalmazát. Ez a halmaz az $F_1(T) = 0, \ldots, F_m(T) = 0$ egyismeretlenes egyenletrendszerrel adható meg. Ha az összes F_i azonosan egyenlő 0-val, akkor $X = A^1$. Ha az $F_i(T)$ polinomok relatív prímek, akkor azoknak nincs közös gyökük, és X nem tartalmaz egy pontot sem. Ha viszont a polinomok legnagyobb közös osztója $\mathcal{D}(T)$, akkor $\mathcal{D}(T) = (T - \alpha_1) \cdot \ldots$ $\ldots \cdot (T - \alpha_n)$ és X a $T = \alpha_1, \ldots, T = \alpha_n$ véges sok pontból áll.

4. PÉLDA. Határozzuk meg az A^2 összes zárt $X \subset A^2$ részhalmazát. Ezeket meghatározza az

$$F_1(T) = 0, \ldots, F_m(T) = 0 \tag{1}$$

egyenlet, ahol most $T=(T_1, T_2)$. Ha az összes F_i azonosan 0, akkor $X=A^2$. Tételezzük fel, hogy ez nem így van. Ha az $F_1, \ldots, F_m$ polinomoknak nincs közös osztójuk, akkor, amint azt az 1. § 2. pontjában láttuk, az (1) rendszernek csak véges (esetleg üres) megoldás halmaza van. Legyen végül, az összes $F_i(T)$ polinomok legnagyobb közös osztója $\mathscr{D}(T)$. Akkor $F_i(T)=\mathscr{D}(T)\cdot G_i(T)$, ahol a $G_i(T)$ polinomoknak már nincs közös osztójuk. Nyilvánvaló, hogy $X=X_1\cup X_2$, ahol az X_1 a $G_1=\ldots=G_m=0$ egyenletrendszerrel, az X_2 a $\mathscr{D}=0$ egyetlen egyenlettel vannak megadva. Amint láttuk, X_1 véges ponthalmaz. Az A^2-ben egy egyenlettel megadott zárt halmazok sík algebrai görbék. Ilyen módon az $X\subset A^2$ zárt halmaz vagy pontok véges (esetleg üres) halmaza, vagy egyesítése egy sík algebrai görbének és véges ponthalmaznak, vagy egybeesik A^2-vel.

5. PÉLDA. Megfeleltetünk az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ koordinátájú $\alpha\in A^r$ pontnak és a $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ koordinátájú $\beta\in A^s$ pontnak egy $(\alpha, \beta)\in A^{r+s}$ pontot, amelynek koordinátái $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s)$. Ilyen módon azonosítjuk A^{r+s}-t az (α, β) alakú párok halmazával, ahol $\alpha\in A^r$, $\beta\in A^s$. Legyenek $X\in A^r$, $Y\in A^s$ zárt halmazok. Az $(x, y)\in A^{r+s}$, $x\in X$, $y\in Y$ párok halmazát az X és Y *szorzatának* nevezzük és $X\times Y$-nal jelöljük. Utóbbi szintén zárt halmaz. Valóban, ha X az $F_i(T)=0$, az Y a $G_j(u)=0$ egyenletrendszerrel van megadva, akkor az $X\times Y$ az A^{r+s}-ben az $F_i(T)\cdot G_j(u)=0$ egyenletekkel van megadva.

6. PÉLDA. Azt az $X\subset A^n$ halmazt, amelyet egyetlen $F(T_1, \ldots, T_n)=0$ egyenlet határoz meg, hiperfelületnek nevezzük.

2. *Reguláris függvények zárt halmazon*

Legyen X egy zárt halmaz az A^n affin térben, k az alaptest.

DEFINÍCIÓ. Az X-en megadott k-beli értékű f függvényt regulárisnak nevezzük, ha létezik olyan k feletti $F(T)$ polinom, hogy $f(x)=F(x)$ minden $x\in X$ pontban. Adott f függvény esetén az F polinom általában nem egyértelműen van meghatározva. Például ahhoz hozzáadható bármely olyan polinom, amely az X-et meghatározó egyenletrendszerben szerepel, és attól az f függvény nem változik.

Az adott zárt X halmazon értelmezett reguláris függvények halmaza gyűrű és k test feletti algebra, ha az összeadás, szorzás és a k test elemeivel való szorzást az analízisben szokásos módon értelmezzük — ezen műveletek segítségével a függvényértékek között minden $x\in X$ pontban. A kapott gyűrűt $k[X]$-szel jelöljük és az X zárt halmaz koordináta gyűrűjének nevezzük.

Jelölje $k[T]$ a $T_1, \ldots, T_n$ változók k test feletti polinomjainak gyűrűjét. Minden $F\in k[T]$ polinomhoz nyilván hozzárendelhető egy $f\in k[X]$ függvény, ha F-et az X pontjain értelmezett függvényként tekintjük. Ilyen módon a $k[T]$ gyűrű homomorfizmusát kapjuk a $k[X]$ gyűrűre. Ennek a homomorfizmusnak a magja az összes olyan $F\in k[T]$ polinomok halmaza, amelyek az összes $x\in X$ pontban 0-val egyenlők. Mint minden homomorfizmus magja, ez a halmaz is ideál a $k[T]$ gyűrűben. Ezt az ideált az X zárt halmaz ideáljának nevezzük és $\mathscr{I}_X$-szel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy

$$k[X] = k[T]/\mathscr{I}_X.$$

Ilyen módon az $\mathscr{I}_X$ ideál meghatározza a $k[X]$ gyűrűt.

1. PÉLDA. Ha X egy k-beli koordinátájú pont, akkor $k[X]=k$.

2. PÉLDA. Ha $X=A^n$, akkor $\mathscr{I}_X=0$, $k[X]=k[T]$.

3. PÉLDA. Legyen $X\subset A^2$ megadva a $T_1\cdot T_2=1$ egyenlettel. Akkor $k[X]=$ $=k[T_1, T_1^{-1}]$ és az összes $\dfrac{G(T)}{T_1^n}$ alakú T_1-változójú racionális függvényekből áll, ahol $n\geqq 0$, $G(T_1)$ polinom.

Mivel $k[X]$ gyűrű homomorf képe a $k[T]$ polinomgyűrűnek, azért abban teljesül az ideálok bázisának végességéről szóló tétel. Ugyancsak teljesül abban a gyökökről szóló *Hilbert* tételnek következő analógja: ha az $f\in k[X]$ függvény nullával egyenlő, az összes olyan $x\in X$ pontokban, ahol a $g_1, \ldots, g_m$ függvények 0-val egyenlők, akkor $f^r\in(g_1, \ldots, g_m)$ valamely $r>0$ kitevőre. Valóban, legyen f az $F(T)$ polinommal megadva, a g_i-k pedig a $G_i(T)$ polinomokkal. Legyenek $F_j=0$ ($j=1, \ldots, l$) az X egyenletei. Akkor az $F(T)$ polinom értéke 0 az összes olyan $\alpha\in A^n$ pontban, ahol a $G_1, \ldots, G_m, F_1, \ldots, F_l$ polinomok 0-val egyenlők. Mivel $F_j(\alpha)=0$, azért $\alpha\in X$, viszont akkor $F(\alpha)=0$ a feltételek szerint. Alkalmazva *Hilbert* tételét a polinomok gyűrűjéhez, azt kapjuk, hogy $F^r\in(G_1, \ldots, G_m, F_1, \ldots, F_l)$, tehát $f^r\in(g_1, \ldots, g_m)$ a $k[X]$-ben.

Milyen kapcsolatban áll X zárt halmaz $\mathscr{I}_X$ ideálja ezen halmaz $F_1=\ldots=F_m=0$ egyenletrendszerével? Az $\mathscr{I}_X$ ideál definíciója szerint $F_i\in\mathscr{I}_X$, ezért $(F_1, \ldots, F_m)\in\mathscr{I}_X$. Viszont nem teljesül mindig $(F_1, \ldots, F_m)=\mathscr{I}_X$. Például, ha $X\subset A^1$ és a $T^2=0$ egyenlettel van megadva, azaz a $T=0$ pontból áll, akkor $\mathscr{I}_X$ a konstans tag nélküli polinomokból áll. Ilyen módon $\mathscr{I}_X=(T)$, de $(F_1, \ldots, F_m)=(T^2)$. Meg lehet viszont adni ugyanazt a halmazt olyan $G_1=\ldots=G_l=0$ egyenletrendszerrel, hogy $(G_1, \ldots, G_m)=\mathscr{I}_X$. Ennek érdekében elegendő visszaemlékezni arra, hogy a $k[T]$ gyűrűben minden ideálnak van véges bázisa. Legyen $G_1, \ldots, G_l$ az $\mathscr{I}_X$ ideál bázisa, azaz $(G_1, \ldots, G_l)=\mathscr{I}_X$. Akkor a $G_1=\ldots=G_l=0$ egyenletek nyilván ugyanazt az X halmazt határozzák meg, és így a kívánt tulajdonságúak. Néha egyenesen kényelmes azt feltételezni, hogy a sokaságot az $F=0$ egyenletek végtelen rendszere határozza meg, ahol F az $\mathscr{I}_X$ ideál összes polinomjait futja be. Valóban, ha $(F_1, \ldots, F_m)=\mathscr{I}_X$, akkor ezek az egyenletek mind következményei az $F_1=\ldots=F_m=0$ egyenleteknek.

A zárt halmazok közötti relációk gyakran tükröződnek azok ideáljain is. Például, ha X és Y az A^n affin tér zárt halmazai, akkor $X\supset Y$ akkor és csakis akkor, ha $\mathscr{I}_X\subset\mathscr{I}_Y$. Innen következik, hogy bármely sokasághoz, amelyet X tartalmaz (vagyis, amint azt mondani fogjuk, az X sokaság részrokonságához) hozzá lehet rendelni a $k[X]$ gyűrű egy $\mathfrak{a}_Y$ ideálját, amely ideál az $F\in\mathscr{I}_Y$ polinomok $k[T]\to k[X]$ homomorfizmus szerinti képeiből áll. Megfordítva, a $k[X]$ gyűrű bármely $\mathfrak{a}$ ideálja meghatároz egy $\mathscr{I}$ ideált a $k[T]$ gyűrűben; $\mathscr{I}$ az $\mathfrak{a}$ elemeinek a $k[T]\to k[X]$ homomorfizmus szerinti összes őstképeiből áll. Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{I}\supset\mathscr{I}_X$. Az $F=0$ egyenletek, ahol F az $\mathscr{I}$ összes polinomjai, meghatározzák az $Y\subset X$ zárt halmazt. Ha $u\in k[X]$, akkor azon $x\in X$ elemek halmaza zárt, amelyekben $u(x)=0$. Ezt a halmazt X_u-val jelöljük és hiperfelületnek nevezzük X-ben.

3. *Reguláris leképzések*

Legyenek $X \subset A^n$ és $Y \subset A^m$ zárt halmazok.

DEFINÍCIÓ. Egy $f: X \to Y$ leképezést regulárisnak nevezünk, ha létezik m olyan $f_1, \ldots, f_m$ reguláris függvény X-en, hogy $f(a) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ minden $x \in X$-re. Ilyen módon minden $f: X \to A^n$ reguláris leképezést $f_1, \ldots, f_m \in k[X]$ m függvény határoz meg. Annak érdekében, hogy ellenőrizzük azt, hogy az $f: X \to Y$ (Y az A^m tér zárt részhalmaza) leképezéssel van dolgunk, nyilván elegendő meggyőződni arról, hogy az $f_1, \ldots, f_m$ függvények mint a $k[X]$ gyűrű elemei eleget tesznek az Y halmaz egyenleteinek.

1. PÉLDA. Az X-en értelmezett reguláris függvény fogalma egybeesik az X reguláris leképezésének a fogalmával az A^1-ben.

2. PÉLDA. A lineáris transzformáció reguláris leképezés.

3. PÉLDA. Az $f(x, y) = x$ projektálás reguláris leképezése az $xy = 1$ egyenlettel megadott görbének az A^1-ben.

4. PÉLDA. Az előbbi feladatot a következő módon általánosíthatjuk: Legyen $X \subset A^n$ egy zárt halmaz és F reguláris függvény az X-en. Tekintsük az $F_i(T_1, \ldots, T_n) = 0$ egyenletekkel megadott $X' \subset A^{n+1}$ halmazt, ahol $F_i = 0$ az X egyenletei A^n-ben, és $T_{n+1} \cdot F(T_1, \ldots, T_n) = 1$. A $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$ projektálás egy $\varphi: X \to Y$ reguláris leképezést határoz meg.

5. PÉLDA. Az $f(t) = (t^2, t^3)$ reguláris leképezése az A^1 egyenesének az $x^3 = y^2$ görbébe.

6. PÉLDA. Felhozunk egy — a számelmélet számára igen fontos — példát. Tételezzük fel, hogy az $X \subset A^n$ zárt halmaz $F_c(T)$ egyenleteinek együtthatói a p prímszámú elemből álló F_p testből valók.

Amint azt az 1. § 1. pontjában kifejtettük, X halmaz azon pontjai, amelyek koordinátái benne vannak az F_p-ben, az $F_i(T) \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia rendszer megoldásainak felelnek meg. Tekintsük az A^n tér

$$\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p)$$

képlettel megadott φ leképezését. φ nyilvánvalóan reguláris leképezés. Lényeges, hogy a leképezés X-et önmagába viszi át. Valóban, ha $\alpha \in X$, azaz $F_i(\alpha) = 0$, akkor a p-karakterisztikájú testek tulajdonságai alapján és azért, mert $F_i(T) \in F_p$, teljesül $F_i(\alpha_1^p, \ldots, \alpha_n^p) = (F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))^p = 0$. A kapott $\varphi: X \to X$ leképezést *Frobenius-féle leképezésnek* nevezzük. Ennek a leképezésnek a jelentősége abban áll, hogy X azon pontjai, amelyek koordinátái az F_p-ből valók, az X elemei közül azzal tűnnek ki, hogy a φ leképezés fix pontjai. Valóban, az $\alpha_i^p = \alpha_i$ egyenlet megoldásai kimerítik az F_p test összes elemeit.

Tisztázzuk, hogyan hat a reguláris leképezés a zárt halmazon értelmezett reguláris függvények gyűrűjére. Egy olyan megjegyzéssel kezdjük, amely tetszőleges halmazokra és leképezésekre vonatkozik. Ha $f: X \to Y$ az X halmaznak Y halmazba való leképezése, akkor az Y-on értelmezett minden u függvénynek (tetszőleges Z halmazbeli értékkészlettel) meg lehet feleltetni egy X-en értelmezett v függvényt a következő módon: $v(x) = u(f(x))$. Nyilvánvaló, hogy a v függvénnyel meghatározott

$v\colon X \to Z$ leképezés szorzata lesz a $u\colon Y \to Z$ és $f\colon X \to Y$ leképezéseknek. Jelölje $f^*(u)$ a v függvényt. Akkor f^* leképezése az Y-on értelmezett függvényeknek az X-en értelmezett függvényekbe. Legyen most $f\colon X \to Y$ egy reguláris leképezés. Az f^* leképezés az Y-on értelmezett reguláris függvényeket az X-en értelmezett reguláris függvényekbe viszi át. Valóban, ha u az $F(T_1, \dots, T_n)$ polinommal van megadva, az f leképezés pedig az $F_1, \dots, F_m$ polinomokkal, akkor $v = f^*(u)$ egyszerűen F-ben a T_i-nek F_i-vel való helyettesítésével áll elő, azaz az $F(F_1, \dots, F_m)$ polinommal van megadva. Sőt, a reguláris leképezéseket úgy lehet jellemezni, mint olyan leképezéseket, amelyek reguláris függvényeket regulárisokba visznek át. Valóban, tételezzük fel, hogy a zárt halmazok $f\colon X \to Y$ leképezése olyan, hogy az Y-on reguláris tetszőleges u függvény esetén $f^*(u)$ függvény szintén reguláris. Akkor ez speciálisan vonatkozni fog a t_i függvényekre is, amelyek a T_i $(i = 1, \dots, m)$ koordinátákkal vannak meghatározva Y-on. Ezért az $f^*(t_i)$ függvények regulárisak X-en és az $F_i(T)$ polinomokkal vannak megadva. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy az f leképezés az $F_1(T), \dots, F_m(T)$ polinomokkal van megadva, azaz reguláris.

Láttuk, hogy ha egy f leképezés reguláris, akkor az f^* leképezésre $f\colon k[Y] \to k[X]$. Ennek a leképezésnek a definíciójából könnyen következik, hogy f^* homomorfizmusa a $k[Y]$ algebrának a $k[X]$ algebrába. Megmutatjuk, hogy megfordítva, az algebrák tetszőleges $\varphi\colon k[Y] \to k[X]$ homomorfizmusa $\varphi = f^*$ alakú, ahol f valamely reguláris leképezése X-nek Y-ba. Legyenek $t_1, \dots, t_m$ koordináták az Y-t tartalmazó A^m térben és tekintsük őket Y-on értelmezett függvényeknek. Nyilvánvaló, hogy $t_i \in k[Y]$, tehát $\varphi(t_i) \in k[X]$. Legyen $\varphi(t_i) = s_i$ és tekintsük az $f(x) = (s_1(x), \dots, s_m(x))$ képletekkel megadott f leképezést. Természetesen f reguláris. Bebizonyítjuk, hogy $f(x) \subset Y$. Valóban, ha $H \subset \mathscr{I}_Y$, akkor $H(t_1, \dots, t_m) = 0$ a $k[Y]$-ban tehát $\varphi(H) = 0$ az X-en. Legyen $x \in X$. Akkor $H(f(x)) = \varphi(H)(x) = 0$, ami azt jelenti, hogy $f(x) \subset Y$.

DEFINÍCIÓ. Zárt halmazok $f\colon X \to Y$ reguláris leképezését izomorfizmusnak nevezzük, ha annak létezik inverze, azaz ha létezik olyan $g\colon Y \to X$ reguláris leképezés, hogy $f \cdot g = 1$, $g \cdot f = 1$.

Az X és Y sokaságokat ebben az esetben izomorfaknak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az izomorfizmus kölcsönösen egyértelmű leképezés. A fent mondottakból következik, hogy f^* izomorfizmusa a $k[X]$ és $k[Y]$ algebráknak. Könnyű meggyőződni arról, hogy az állítás megfordítása is igaz, tehát zárt halmazok akkor és csakis akkor izomorfak, ha azok reguláris függvényeinek gyűrűi k felett izomorfak.

Az előbb bebizonyított tények megmutatják, hogy az $X \to k[X]$ hozzárendelés ekvivalenciát határoz meg az affin terek zárt részhalmazainak kategóriája (és azok reguláris leképezései) és a k feletti kommutatív algebrák kategóriájának valamely részkategóriája (és azok homomorfizmusai) között. Hogy milyenek ezek a kategóriák, azaz milyen algebráknak van $k[X]$ alakjuk, kiderül az 1. és 2. feladatokból.

7. PÉLDA. Az $y = x^k$ egyenlettel megadott parabola izomorf egy egyenessel, és az $f(x, y) = x$, $g(t) = (t, t^k)$ leképezések izomorfizmust határoznak meg.

8. PÉLDA. Az $xy = 1$ parabola $f(x, y) = x$ projekciója az X tengelyre nem izomorfizmus, mivel ez a leképezés nem kölcsönösen egyértelmű. A hiperbolán ugyanis nincs olyan (x, y) pont, amelyre $f(x, y) = 0$. Lásd úgyszintén a 7. feladatot.

9. PÉLDA. Az egyenes $f(t) = (t^2, t^3)$ leképezése az $x^3 = y^2$ egyenlettel megadott görbére — amint azt könnyű belátni — kölcsönösen egyértelmű. Viszont a leképezés

mégsem izomorfizmus, mert az inverz leképezés $g(x, y)=\frac{y}{x}$ alakú, az $\frac{y}{x}$ függvény pedig nem reguláris az origóban (l. az 5. feladatot).

10. PÉLDA. Legyenek X és $Y\subset A^r$ zárt halmazok. Tekintsük az $X\times Y\subset A^{2r}$ (l. pont 6. példa) halmazt és a $t_1=u_1, \ldots, t_r=u_r$ egyenletekkel megadott $\Delta\subset A^{2r}$ lineáris alteret, amelyet diagonálisnak nevezünk. Minden $z\in X\cap Y$ elemhez hozzárendelünk egy $\varphi(z)=(z, z)\in A^{2r}$ pontot, amely nyilván benne van $(X\times Y)\cap\Delta$-ban. A kapott $\varphi: X\cap Y\to(X\times Y)\cap\Delta$ leképezés — amint az könnyen belátható — az $X\cap Y$ és $(X\times Y)\cap\Delta$ izomorfizmusa. Ezt felhasználva két zárt halmaz metszetének a vizsgálata mindig visszavezethető egy másik zárt halmaz és egy lineáris altér metszetének a vizsgálatára.

A következőkben minket főleg a zárt halmazok olyan tulajdonságai és olyan fogalmak fognak érdekelni, amelyek invariánsak az izomorfizmusra nézve. A halmazt megadó egyenletrendszer nyilvánvalóan nem ilyen fogalom, ugyanis különböző A^r terekben megadott, különböző egyenletrendszerekkel definiált halmazok is lehetnek izomorfak. Ezért természetes volna megkísérelni a zárt halmaznak olyan invariáns definícióját adni, amely független annak valamely affin térben való realizálásától. Ilyen definíciót adunk később a sémák fogalmával kapcsolatosan.

Most tisztázni fogjuk, milyen az az $f: X\to Y$ reguláris leképezésnek megfelelő $f^*: k[Y]\to k[X]$ homomorfizmus, amelynek nincs magja, azaz f^* mikor határozza meg $k[Y]$-nak $k[X]$-be való izomorf beágyazását. Vizsgáljuk meg, mikor lesz $u\in k[Y]$ esetén $f^*(u)=0$. Ez azt jelenti, hogy $u(f(x))=0$ minden $x\in X$ pontra. Más szóval u az X halmaz $f(x)$ képének minden pontjában 0 lesz az f leképezésnél. Azon $y\in Y$ pontok halmaza, amelyekre $u(y)=0$, nyilván zárt, és ezért, ha tartalmazza $f(x)$-et, akkor annak $\overline{f(X)}$ lezártját is. Ugyanazt a fejtegetést ellenkező irányban végig folytatva azt látjuk, hogy $f^*(u)=0$ akkor és csakis akkor, ha $u=0$ az $\overline{f(X)}$-en, vagy, ami ugyanaz, $u\in\mathfrak{a}$. Innen speciálisan az is következik, hogy az f^* homomorfizmus magja egyenlő 0-val akkor és csakis akkor, ha $\overline{f(X)}=Y$, azaz mikor $f(X)$ sűrű Y-ban. Ez automatikusan teljesül, ha $f(X)=Y$, de lehetséges olyan eset is, mikor $f(X)\neq Y$, de $\overline{f(X)}=Y$ (l. 3. példa).

Feladatok

1. Legyen $\mathfrak{a}$ az A gyűrű ideálja. Azon $a\in\mathfrak{a}$ elemek halmazát, amelyek mindegyikére létezik olyan n_a egész szám, hogy $a^{n_a}=0$, az $\mathfrak{a}$ *ideál radikáljának* nevezzük és $\sqrt{\mathfrak{a}}$-val jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{\mathfrak{a}}$ szintén ideál! Bizonyítsuk be, hogy $\mathfrak{a}\subset k[T_1, \ldots, T_n]$ akkor és csakis akkor ideálja az A^n affin tér valamely zárt halmazának, ha $\sqrt{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy k test feletti A algebra akkor és csakis akkor $k[X]$ alakú valamely X zárt halmazra, ha annak véges generátor rendszere van k felett, és nem tartalmaz nilpatens elemeket (azaz $a^n=0$, $a\in A$-ból következik $a=0$).

3. Adva van egy $X\subset A^2$ halmaz az f: $x^2+y^2=1$ és g: $x=1$ egyenleteknek. Határozzuk meg az $\mathcal{I}_X$ ideált! Igaz-e $\mathcal{I}_X=(f, g)$?

4. Legyen $X\subset A^2$ sík algebrai görbe az $y^2=x^3$ egyenlettel megadva. Bizonyítandó, hogy a $k[X]$ gyűrű minden eleme egyértelműen felírható $P(x)+Q(x)y$ alakban, ahol $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok.

5. Legyen X a 4. feladat görbéje, $f(t)=(t^2, t^3)$ az $A^1 \to X$ reguláris leképezés. Bizonyítsuk be, hogy f nem izomorfizmus. (Útbaigazítás: Felhasználva a 4. feladat eredményeit, kíséreljük meg az inverz leképezés megkonstruálását!)

6. Legyen X az $y^2=x^2+x^3$ egyenlettel meghatározott görbe és az f: $A^1 \to X$ leképezést adja meg az $f(x)=(t^2-1, t(t^2-1))$ képlet. Bizonyítsuk be, hogy a megfelelő f^* homomorfizmus izomorf módon képezi le a $k[X]$ gyűrűt a $k[t]$ polinomgyűrű azon részgyűrűjére, amely a $g(1)=g(-1)$ összefüggésnek eleget tevő $g(t)$ polinomokból áll.

7. Bizonyítsuk be, hogy az $xy=1$ egyenlettel meghatározott hiperbola és és A^1 egyenes nem izomorfak.

8. Keressük meg $f(A^2)$-et, ha $A^2 \to A^2$ az $f(x, y)=(x, xy)$ képlettel megadott reguláris leképezés! Nyílt lesz-e ez a halmaz A^2-ben? Sűrű lesz-e az? Zárt lesz-e?

9. Válaszoljunk a 8. feladat kérdéseire, az f: $A^3 \to A^3$ és $f(x, y, z)=(x, xy, xyz)$ esetében.

10. Egy zárt X halmaznak önmagába való f: $X \to X$ izomorf leképezését automorfizmusnak nevezzük. Bizonyítandó, hogy az A^1 egyenes minden automorfizmusa $f(x)=ax+b$, $a \neq 0$ alakú.

11. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x, y)=(x, y+P(x))$ leképezés automorfizmusa A^2-nek tetszőleges $P(x)$ polinom esetén. Bizonyítsuk be, hogy ezek az automorfizmusok csoportot alkotnak.

12. Bizonyítandó, hogy ha $f(x_1, \ldots, x_n)=(P_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, P_n(x_1, \ldots, x_n))$ automorfizmusa A^n-nek, akkor a $\left|\frac{\partial P_i}{\partial x_i}\right|$ *Jacobi*-féle determináns a k testbe esik. Ha a *Jacobi*-féle determináns értékét $\mathcal{J}(f)$-fel jelöljük, bizonyítandó, hogy az $f \to \mathcal{J}(f)$ megfeleltetés az A^n összes automorfizmusainak csoportját homomorf módon képezi le a k test nullától különböző elemeinek csoportjába.

13. Álljon X két pontból. Bizonyítandó, hogy $k[X]$ gyűrű izomorf a k test két példányának direktösszegével.

14. Legyen f: $X \to Y$ egy reguláris leképezés. Az $(x, f(x))$ alakú elemek $T \subset X \times Y$ halmazát az f grafikonjának nevezzük. Bizonyítandó, hogy a) T — zárt részhalmaz $X \times Y$-ban és b) T izomorf X-szel.

15. A $P_Y(x, y)=y$ képlettel meghatározott P_Y: $X \times Y \to Y$ leképezést projekciónak nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy $Z \subset X$ és reguláris f: $X \to Y$ leképezés esetén teljesül $f(Z)=P_Y((Z \times Y) \cap T)$, ahol T az f grafikonja, $Z \times Y$ az összes (x, y), $z \in Z$, $y \in Y$ pontok halmaza.

16. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges f: $X \to Y$ reguláris leképezéshez létezik olyan g: $X \to Y$ reguláris leképezés, amely izomorfizmusa X-nek az $X \times Y$ sokaság zárt részhalmazára, amelyre $f=P_Y \cdot g$ (tetszőleges reguláris leképezés felbomlik beágyazásra és projekcióra).

17. Bizonyítandó, hogy ha $X=\bigcup U_\alpha$ egy lefedése X zárt halmaznak nyílt halmazokkal, akkor létezik olyan véges számú $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_r}$ halmazrendszer, amelyre teljesül $X=U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_r}$.

18. Bizonyítsuk be, hogy a *Frobenius*-féle φ leképezés kölcsönösen egyértelmű. Izomorfizmus lesz-e az, ha például $X=A^1$?

3. §. Racionális függvények

1. *Irreducibilis halmazok*

Az 1. paragrafus 1. pontban már találkoztunk az irreducibilis sík algebrai görbe fogalmával. Analóg fogalmat vezetünk most be általános esetre.

DEFINÍCIÓ. Egy X zárt halmazt *reducibilisnek* nevezünk, ha léteznek olyan $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$, $X_1 \neq X$, $X_2 \neq X$ zárt halmazok, hogy $X = X_1 \cup X_2$. Ellenkező esetben X-et irreducibilisnek nevezzük.

1. TÉTEL. *Bármely zárt halmaz irreducibilisek véges halmazának az uniója.*

Bizonyítás. Legyen egy X zárt halmazra a tétel nem igaz. Akkor X reducibilis: $X = X_1 \cup X_1'$, viszont vagy az X_1, vagy az X_1'-re a tétel nem igaz. Legyen ez éppen X_1, így X_1 reducibilis és két zárt halmaz egyesítése, amelyek egyike reducibilis. Így zárt halmazoknak egy végtelen

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots, \quad X \neq X_1, X_1 \neq X_2, \ldots$$

láncát konstruáljuk. Bizonyítjuk, hogy ilyen lánc nem létezhet. Valóban, a megfelelő ideálokra

$$\mathscr{I}_X \subset \mathscr{I}_{X_1} \subset \mathscr{I}_{X_2} \subset \ldots, \mathscr{I}_X \neq \mathscr{I}_{X_1}, \quad \mathscr{I}_{X_1} \neq \mathscr{I}_{X_2}, \ldots$$

teljesülne. Viszont ilyen lánc nem létezhet, ugyanis a polinomgyűrűben minden ideál végesen generált, tehát az ideálok minden növekvő lánca megszakad. A tételt bizonyítottuk.

Ha az $X = \bigcup X_i$ előállításban valamely $i \neq j$ indexekre $X_i \subset X_j$, akkor ebből a felbontásból kidobhatjuk X_i-t. Elvégezve néhányszor ezt a műveletet, egy olyan $X \bigcup X_i$ előállításhoz jutunk, ahol $i \neq j$ indexek esetén $X_i \not\subset X_j$. Az ilyen előállítást az X-nek irreducibilis zárt halmazokra való nem egyszerűsíthető felbontásának nevezzük, és az X_i-ket az X irreducibilis komponenseinek hívjuk.

2. TÉTEL. *Zárt halmaz nem egyszerűsíthető előállítása egyértelmű.*

Legyen $X = \bigcup\limits_i X_i = \bigcup\limits_j Y_j$ — két nem egyszerűsíthető előállítás. Akkor $X_i = X_i \cap$ $\cap X = X_i \cap (\bigcup\limits_j Y_j) = \bigcup\limits_j (X_j \cap Y_j)$. Mivel feltétel szerint X_i irreducibilis, így valamely j-re $X_i \cap Y_j = X_i$, azaz $X_i \subset Y_j$. Felcserélve az első és második előállítás helyét, azt kapjuk, hogy j-re létezik olyan i', hogy $Y_j \subset X_{i'}$. Következésképp $X_i \subset Y_j \subset X_{i'}$, tehát a felbontás nem egyszerűsíthető volta miatt $i' = i$ és $Y_j = X_i$. A tételt bebizonyítottuk.

Most a zárt halmaz irreducibilitásának a fogalmát a $k[X]$ gyűrű nyelvén fogjuk megfogalmazni. Ha X reducibilis és $X = X_1 \cup X_2$, akkor $X \supset X_1$, $X \neq X_1$ miatt létezik olyan F_1 polinom, amely X_1-en 0, de X-en nem 0, ugyanúgy F_2 polinom az X_2-re. Akkor $F_1 \cdot F_2$ egyenlő 0-val X_1-en és X_2-n is, tehát az X-en. A megfelelő $f_1, f_2 \in k[X]$ reguláris függvények azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$, $f_1 \cdot f_2 = 0$. Más szóval f_1 és f_2 zérusosztók $k[X]$-ben. Megfordítva, létezzenek $k[X]$-ben zérusosztók: $f_1 \cdot f_2 = 0$, $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$. Jelöljük X_1 és X_2-vel az (f_1) és (f_2) főideáloknak megfelelő zárt részhalmazokat. Más szóval, X_i az X azon x pontjaiból áll, amelyekre $f_i(x) = 0$ $(i = 1, 2)$. Nyilvánvaló, hogy $X_i \neq X$, mivel $f_i \neq 0$ az X-en és

$X = X_1 \cup X_2$, mivel $f_1 \cdot f_2 = 0$ az X-en, tehát az X minden x pontjában vagy $f_1(x) = 0$, vagy $f_2(x) = 0$. Ilyen módon az X zárt halmaz irreducibilis akkor és csakis akkor, ha $k[X]$ gyűrű zérusosztó mentes. Ez viszont ekvivalens azzal, hogy $\mathcal{I}_X$ ideál prímideál.

3. TÉTEL. *Irreducibilis zárt halmazok szorzata irreducibilis.*

Tételezzük fel, hogy X és Y irreducibilisek, de $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$, $Z_i \neq X \times Y$ $(i = 1, 2)$. Akkor tetszőleges $x \in X$ pontra az (x, y) pontokból álló $x \times Y$ zárt halmaz izomorf Y-nal, tehát irreducibilis. Mivel $x \times Y = ((x \times Y) \cap Z_1) \cup ((x \times Y) \cap Z_2)$, így vagy $x \times Y \in Z_1$, vagy $x \times Y \subset Z_2$. Tekintsük az olyan $x \in X$ pontokból álló $X_1 \subset X$ halmazt, amelyekre $x \times Y \subset Z_1$ és megmutatjuk, hogy ez a halmaz zárt. Valóban, bármely $y \in Y$ pontra az olyan $x \in X$ pontok X_y halmaza zárt, amelyekre $x \times y \in Z_1$, ugyanis ez a halmaz jellemezhető az $(X \times y) \cap Z_1 = X_y \times y$ egyenlőséggel, az $X \times y$ és Z_1 zárt halmazok metszete pedig zárt. Mivel $X_1 = \bigcap_{y \in Y} X_y$, így X_1 is zárt. Analóg módon az olyan $x \in X$ pontok X_2 halmaza, amelyekre $x \times Y \subset Z_2$, szintén zárt halmaz. Láttuk tehát, hogy $X_1 \cup X_2 = X$, így az X irreducibilis volta miatt ebből következik, hogy vagy $X_1 = X$, vagy $X_2 = X$. Előbbi esetben $X \times Y = Z_1$, utóbbiban $X \times Y = Z_2$. Ez az ellentmondás bizonyítja a tételt.

2. *Racionális függvények*

Mint ismeretes, bármely zérusosztó mentes gyűrű beágyazható egy testbe — a gyűrű kvocienstestébe.

DEFINÍCIÓ. Ha egy X zárt halmaz irreducibilis, akkor a $k[X]$ gyűrű kvocienstestét az X-en adott *racionális függvények* testének nevezzük.

Visszaemlékezve a hányadosok testének definíciójára, azt mondhatjuk, hogy $k[x]$ az olyan $\frac{F(T)}{G(T)}$ racionális függvények halmaza, ahol $G(T) \notin \mathcal{I}_X$, miközben feltételezzük, hogy $\frac{F}{G} = \frac{F_1}{G_1}$, ha $FG_1 - F_1 G \in \mathcal{I}_X$. Ez azt jelenti, hogy $k[X]$ test a következő módon is konstruálható. Tekintsük az $O_X \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ részgyűrűt, amely olyan $f = \frac{P}{Q}$; $P, Q \in k[T]$ függvényekből áll, amelyekre $Q \notin \mathcal{I}_X$. Azok az f függvények, amelyekre $P \in \mathcal{I}_X$, egy M_X ideált alkotnak és $k(X) = O_X / M_X$.

A zárt halmazon értelmezett reguláris függvénytől eltérően a racionális függvénynek nem mindig lehet meghatározott értéket tulajdonítani a halmaz valamely pontjában, például az $\frac{1}{x}$ függvénynek a 0 pontban, vagy $\frac{x}{y}$-nak a $(0, 0)$ pontban. Tisztázzuk, mikor lehetséges ez.

DEFINÍCIÓ. $\varphi \in k(X)$ racionális függvényt regulárisnak nevezzük az $x \in X$ pontban, ha felírható $\varphi = \frac{f}{g}$; $f, g \in k[X]$, $g(x) \neq 0$ alakban. Ebben az esetben a k test $\frac{f(x)}{g(x)}$ elemét a φ függvény értékének nevezzük az x pontban és $\varphi(x)$-szel jelöljük.

4. TÉTEL. *Ha egy φ racionális függvény reguláris egy zárt halmaz minden pontjában, akkor reguláris függvény ezen a halmazon.*

Legyen $\varphi \in k(X)$ reguláris az összes $x \in X$ pontban. Ez azt jelenti, hogy bármely x pont esetén léteznek olyan $f_x, g_x \in k[X]$, $g_x(x) \neq 0$ elemek, hogy $\varphi = \frac{f_x}{g_x}$. Tekintsük az összes g_x, $x \in X$ függvényekkel generált $\mathfrak{a}$ ideált. Annak nyilván véges bázisa van, azaz létezik olyan véges sok $x_1, \dots, x_N$ pont, hogy $\mathfrak{a} = (g_{x_1}, \dots, g_{x_N})$. A g_{x_i} függvényeknek nem létezhet közös $x \in X$ zérushelyük, akkor ugyanis az $\mathfrak{a}$ ideál minden függvénye 0 lenne ebben a pontban, ugyanakkor viszont $g_x(x) \neq 0$. HILBERT gyökökről szóló tételének analógjából következik, hogy $\mathfrak{a} = 1$, azaz léteznek olyan $u_1, \dots, u_N \in$ $\in k[X]$ függvények, hogy $\sum_{i=1}^{N} u_i g_{x_i} = 1$. Az egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk φ-vel és felhasználjuk azt, hogy $\varphi = \frac{f_{x_i}}{g_{x_i}}$. Azt kapjuk, hogy $\varphi = \sum_{i=1}^{N} u_i f_{x_i}$, azaz $\varphi \in k[X]$.

A tételt bebizonyítottuk.

Azon pontok halmaza, amelyekben a φ racionális függvény az X zárt halmazon reguláris, nem üres és nyílt. Az első állítás abból következik, hogy φ előállítható $\varphi = \frac{f}{g}$ alakban, ahol $f, g \in k[X]$, $g \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $x \in X$ pont, hogy $g(x) \neq 0$. Nyilvánvaló, hogy ebben a pontban φ reguláris. A második állítás bizonyítása érdekében tekintsük φ összes lehetséges $\varphi = \frac{\psi_i}{g_i}$ előállításait. Tetszőleges g_i reguláris függvény esetén az az $Y_i \subset X$ halmaz, amely azon $x \in X$ pontokból áll, amelyekre $g_i(x) = 0$, nyilvánvalóan zárt, tehát $U_i = X - Y_i$ nyílt. Azon elemek U halmaza, amelyekben φ függvény definíció szerint reguláris, $U = \bigcup U_i$ alakú, tehát nyílt. Ezt a nyílt halmazt a φ függvény értelmezési tartományának nevezzük. Racionális függvények tetszőleges $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ véges rendszere esetén azon $x \in X$ pontok halmaza, amelyekben minden φ_i reguláris, szintén nyílt és nem üres. Az első állítás abből következik, hogy véges sok nyílt halmaz metszete nyílt, a második állítás pedig a következő hasznos tulajdonságból: irreducibilis zárt halmaz véges sok nem üres nyílt halmazának a metszete nem üres. Valóban, legyen $U_i = X - Y_i$, $i = 1, \dots, m$; $\bigcap U_i \neq \Phi$. Akkor $Y_i \neq X$ és $\bigcup Y_i = X$. Viszont Y_i zárt halmazok, és így ellentmondáshoz jutunk az X irreducibilitásával.

Ilyen módon a racionális függvények tetszőleges véges halmazát össze lehet hasonlítani valamely nem üres nyílt halmazon. Ez a megjegyzés hasznos, ugyanis egy $\varphi \in k(X)$ racionális függvény egyértelműen meg van határozva valamely $U \subset X$ nem üres nyílt részhalmazon való megadásával. Valóban, ha $\varphi(x) = 0$ minden $x \in U$ pontban és $\varphi \neq 0$ az X-en, akkor egy valamilyen $\varphi = \frac{f}{g}$; $f, g \in k[X]$ előállítást véve azt kapjuk, hogy X uniója két zárt halmaznak: $X = X_1 \cup X_2$, ahol $X_1 = X - U$, X_2 pedig az $f = 0$ egyenlettel van meghatározva. Ez viszont ellent mond X irreducibilis voltának.

3. *Racionális leképezések*

Legyen $X \subset A^n$ zárt halmaz. Egy $X \to A^m$ racionális leképezés tetszőleges m számosságú $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in k(X)$ függvényrendszerrel adható meg. Most a $\varphi: X \to Y$ racionális leképezés fogalmát fogjuk definiálni, ahol Y az A^m tér zárt részhalmaza.

DEFINÍCIÓ. $\varphi: X \to Y \subset A^m$ *racionális leképezésnek* nevezzük azt az m számosságú $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in k(X)$ függvény rendszert, amelyre minden olyan $x \in X$ pont esetén, ahol az összes φ_i reguláris, teljesül $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) \in Y$. A φ leképezést az ilyen x pontban *regulárisnak* nevezzük, a $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ pontot pedig az x pont *képének* nevezzük és $\varphi(x)$-szel jelöljük.

A $\varphi(x)$ alakú pontok halmazát, ahol az x-ek az X azon pontjai, amelyekben φ reguláris, az X *képének* nevezzük és $\varphi(X)$-szel jelöljük. Ilyen módon a racionális leképezés nem az egész X halmaz leképezése az Y halmazba, viszont leképezése valamely $U \subset X$ nem üres nyílt halmaznak Y-ba.

Az olyan függvények és leképezések vizsgálata, amelyek nem minden pontban vannak értelmezve, az algebrai geometria lényeges különbözőségét jelenti a geometria más ágazataitól, például a topológiától.

Amint azt az előző pont végén bebizonyítottuk, az összes φ_i függvény, tehát a $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ racionális leképezés is, valamely nem üres nyílt $U \subset X$ halmazon van értelmezve. Ezért a racionális leképezéseket tekinthetjük nyílt halmazok leképezéseinek, viszont eközben figyelemmel kell lennünk arra, hogy különböző leképezéseknek különböző értelmezési tartományuk lehet. Ugyanez érvényes természetesen a racionális függvényekre is. Hogy meggyőződjünk arról, hogy a $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ függvények racionális $\varphi: X \to Y$ leképezést határoznak meg, ellenőrizni kell, hogy a $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ függvények mint a $k(X)$ test elemei eleget tesznek az Y halmaz egyenleteinek. Valóban, ha ez a tulajdonság teljesül, akkor tetszőleges $U(T_1, \ldots, T_m) \in \mathscr{I}_Y$ függvény esetén $U(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0$ az Y-on. Ennek megfelelően tetszőleges x pontban, ahol az összes φ_i reguláris, teljesül $U(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)) = 0$, azaz $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$. Megfordítva, ha adva van egy $\varphi: X \to Y$ leképezés, akkor tetszőleges $u \in \mathscr{I}_Y$ esetén $U(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in k(X)$ függvény egyenlő 0-val valamely nem üres nyílt $U \subset X$ halmazon, tehát 0 az X-en is. Innen következik az is, hogy $U(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0$ a $k(X)$-ben.

Megvizsgáljuk, hogyan hat a racionális leképezés a racionális függvényekre zárt halmazon. Tételezzük fel, hogy egy $\varphi: X \to Y$ racionális leképezés esetén $\varphi(X)$ sűrű Y-ban. Vizsgáljuk φ-t mint az $U \to \varphi(X)$ halmazok leképezését, ahol U a φ értelmezési tartománya, és megkonstruáljuk a függvények megfelelő leképezését. Bármely $f \in k[Y]$ függvényre $\varphi^*(f)$ racionális függvény az X-en. Valóban, ha $Y \subset A^m$ és az $U(T_1, \ldots, T_m)$ polinommal van megadva, akkor $\varphi^*(f)$-et az $U(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ racionális függvény határozza meg. Ilyen módon van egy $\varphi^*: k[Y] \to k(X)$ leképezésünk, amely nyilván homomorfizmusa a $k[Y]$ gyűrűnek a $k(X)$ testbe. Sőt, ez a homomorfizmus izomorf beágyazása $k[Y]$-nak $k(X)$-be. Valóban, ha $\varphi^*(u) = 0$ az $u \in k[Y]$-ra, akkor ez azt jelenti, hogy $u = 0$ a $\varphi(x)$-en. Ha viszont $u \neq 0$ az Y-on, akkor az $u = 0$ egyenlet egy zárt $Y_u \subset Y$ részhalmazt határoz meg, amely különbözik Y-tól. Akkor $\varphi(X) \subset Y_u$, ez viszont ellentmondásban van azzal, hogy $\varphi(X)$ sűrű Y-ban. $k[Y]$ gyűrűnek $k(X)$-testbe való φ^* beágyazása nyilván folytatható a $k[Y]$ gyűrű $k(Y)$ kvocienstestének $k(X)$-be való izomorf beágyazásáig. Tehát ha $\varphi(X)$ sűrű Y-ban, akkor a φ racionális leképezés meghatározza a $k(Y)$ testnek $k(X)$ testbe való izomorf φ^* beágyazását. Ha adva van két $\varphi: X \to Y$ és $\psi: Y \to Z$ leképezés, és $\varphi[X]$ sűrű Y-ban, akkor — amint azt könnyű belátni — definiálható a $\psi \cdot \varphi: X \to Z$ szorzat, méghozzá ha $\varphi(Y)$ sűrű Z-ben, akkor $(\psi \cdot \varphi)(X)$ szintén sűrű Z-ben. Akkor a testek beágyazásaira érvényes a $(\psi\varphi)^* = \varphi^* \psi^*$ összefüggés.

DEFINÍCIÓ. Egy $\varphi: X \to Y$ racionális leképezést *biracionális izomorfizmusnak* nevezzük, ha létezik inverze. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $\psi: Y \to X$ racionális leképezés, hogy $\varphi(X)$ sűrű Y-ban és $\psi(Y)$ X-ben, valamint $\psi\varphi=1$, $\varphi\cdot\psi=1$. Ebben az esetben X és Y-t biracionálisan izomorfaknak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha $\varphi: X\to Y$ racionális leképezés biracionális izomorfizmus, akkor a $\varphi^*: k(Y)\to k(X)$ beágyazás izomorfizmus. Könnyű belátni, hogy megfordítva is igaz (a sík algebrai görbékre ezt az 1. §-ban elvégeztük). Ily módon X és Y zárt halmazok akkor és csakis akkor biracionálisan izomorfak, ha $k(X)$ és $k(Y)$ k-felett izomorfak.

PÉLDÁK. Az 1. §-ban egy sor példát elemeztünk a sík algebrai görbék biracionális izomorfizmusára. Az izomorf zárt halmazok nyilván biracionálisan izomorfak. A 2. § 3. pont 8. és 9. példáiban a leképezések nem izomorfizmusok, mégis biracionális izomorfizmusok.

Azokat a zárt halmazokat, amelyek biracionálisan izomorfak valamely affin térrel, racionálisaknak nevezzük. Az 1. §-ban racionális algebrai görbékkel találkoztunk. Bemutatunk néhány egyéb példát.

1. PÉLDA. Az A^n-ben $F(T_1, \ldots, T_n)=0$ másodfokú egyenlettel megadott X irreducibilis hiperfelület racionális. Az 1. § 1. pontban $n=2$ esetére ismertetett bizonyítás általános esetben is alkalmas. A megfelelő leképezés ismét interpretálható X projekciójaként valamely $x\in X$ pontból az X-re nem illeszkedő $l\subset A^n$ hipersíkra. Csupán úgy kell kiválasztani x-et, hogy az ne legyen „csúcs" X-en, azaz hogy $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\neq 0$ legalább egy $i=1, \ldots, n$-re.

2. PÉLDA. Tekintsük A^3-ban az $x^3+y^3+z^3=1$ harmadfokú egyenlettel meghatározott X hiperfelületet, és tételezzük fel, hogy az alaptest karakterisztikája $\neq 3$. X-re illeszkedik néhány egyenes, például a következő egyenletrendszerekkel megadott L_1 és L_2 egyenesek:

$$L_1: \begin{matrix} x+y=0 \\ z=1 \end{matrix} \qquad L_2: \begin{matrix} x+\varepsilon y=0 \\ z=\varepsilon, \end{matrix}$$

ahol ε harmadik egységgyök és $\varepsilon\neq 1$. Az L_1 és L_2 kitérő egyenesek. X-nek a síkra való leképezését geometriailag fogjuk leírni és az olvasóra bízzuk a képletek felírását, valamint annak az ellenőrzését, hogy biracionális izomorfizmussal van dolgunk. Kiválasztunk egy E síkot A^3-ban, amely nem tartalmazza az L_1 és L_2 egyeneseket. Az $x\in X-L_1-L_2$ ponthoz — amint könnyen belátható — létezik egyetlen olyan egyenes, amely átmegy x-en és metszi L_1 és L_2-t. Az $L_1\cap E$ metszéspontot jelöljük $f(x)$-szel. Ez lesz éppen a keresett $X\to E$ racionális leképezés.

Az algebrai geometriában két ekvivalencia relációval van dolgunk, az izomorfizmussal és a biracionális izomorfizmussal. Nyilvánvaló, hogy a biracionális izomorfizmus durvább reláció, mint az izomorfizmus, vagyis nem izomorf zárt halmazok lehetnek biracionálisan izomorfak. Ezért gyakran a zárt halmazoknak a biracionális izomorfizmus szempontjából történő leírása egyszerűbb és áttekinthetőbb, mint az izomorfizmus szempontjából. Az izomorfizmus — lévén értelmezve minden pontban — közelebb áll az olyan geometriai fogalmakhoz, mint a homeomorfizmus, vagy diffeomorfizmus és ezért kényelmesebb. Lényeges kérdés a két ekvivalenciareláció közötti kapcsolat tisztázása. Arról van szó, hogy mennyivel durvább a biracionális izomorfizmus az izomorfizmusnál, azaz mennyire sok — az izomorfizmus szemszögéből különböző — zárt halmaz tartozik a biracionális izomorfizmus szemszögéből ugyanahhoz a típushoz. Ezzel a kérdéssel a következőkben gyakran fogunk találkozni.

Mindkét ekvivalenciarelációnak van tisztán algebrai ekvivalense: X és Y zárt halmazok izomorfak akkor és csakis akkor, ha a $k[X]$ és $k[Y]$ gyűrűk izomorfak, viszont biracionálisan izomorfak akkor és csakis akkor, ha a $k(X)$ és $k(Y)$ testek izomorfak. Ezzel kapcsolatosan fontos tisztázni, melyek a $k[X]$ alakú gyűrűk, és melyek a $k(X)$ alakú testek, ahol X valamely irreducibilis zárt halmaz. A válasz nagyon egyszerű:

5. TÉTEL. *Egy k test feletti A algebra akkor és csakis akkor izomorf a $k[X]$ gyűrűvel, ahol X irreducibilis zárt halmaz, ha A zérusosztó mentes, és k felett végesen generált. k test K bővítése akkor és csakis akkor izomorf $k(X)$ testtel, ha az végesen generált.*

A feltételek mindegyikének szükségessége nyilvánvaló. Ha A algebrát a $t_1, \ldots, t_n$ véges elemrendszer generálja, akkor $A \cong k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{J}$, ahol $\mathcal{J}$ a $k[T_1, \ldots, T_n]$ polinomgyűrű ideálja. Mivel A zérusosztó mentes, így $\mathcal{J}$ prímideál. Legyen $\mathcal{J}=(F_1, \ldots, F_m)$. Tekintsük az $F_1=\ldots=F_m=0$ egyenletekkel definiált $X \subset A^n$ zárt halmazt, és bebizonyítjuk, hogy $\mathcal{J}_X=\mathcal{J}$, akkor viszont $k[X] \cong k[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{J}_X \cong A$.

Ha $F \in \mathcal{J}_X$, akkor a gyökökről szóló *Hilbert* tétel miatt $F^r \in \mathcal{J}$ valamely $r>0$-ra. Mivel $\mathcal{J}$ prímideál, így $F \in \mathcal{J}$. Ezért $\mathcal{J}_X \subset \mathcal{J}$, tehát nyilván $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_X$ is igaz, vagyis $\mathcal{J}_X=\mathcal{J}$.

Ha K végesen generált k felett a $t_1, \ldots, t_n$ elemekkel, akkor az $A=k[t_1, \ldots, t_n]$ algebra eleget tesz a tétel feltételeinek, és a már bizonyítottak szerint $A=k[X]$ Mivel K az A kvociensteste, így $K=k(X)$.

Befejezésül bizonyítunk egy tételt, amely illusztrálja a biracionális izomorfizmus fogalmát.

6. TÉTEL. *Bármely X irreducibilis zárt halmaz biracionálisan izomorf valamely A^m affintér egy hiperfelületével.*

Bizonyítás. $k(X)$ test k felett végesen generált, például a $t_1, \ldots, t_n$ elemekkel — A^n-beli koordinátákkal, amelyeket függvényeknek tekintünk X-en.

Legyen d a $t_1, \ldots, t_n$ közötti k felett algebrailag függetlenek maximális száma, és legyenek $t_1, \ldots, t_d$ algebrailag függetlenek. Akkor bármely más $y \in k(X)$ elem algebrailag függ $t_1, \ldots, t_d$-től, méghozzá létezik olyan $f(t_1, \ldots, t_d, y)=0$ reláció is, hogy $f(T_1, \ldots, T_d, T_{d+1})$ irreducibilis k felett.

Legyen $f(T_1, \ldots, T_{d+1})=0$ egy ilyen reláció $t_1, \ldots, t_{d+1}$-re. Állítjuk, hogy $f_{T_i}(T_1, \ldots, T_{d+1}) \neq 0$ legalább egy i-re $(i=1, \ldots, d+1)$. Valóban, ha ez nem volna így, akkor az összes f a T_i-ben olyan hatványon szerepelne, amely többszöröse a k test p karakterisztikájának, azaz f-nek $f=\sum a_{i_1 \ldots i_{d+1}} T_1^{p^{i_1}} \cdot \ldots \cdot T_{d+1}^{p^{i_{d+1}}}$ alakja volna. Jelölje $a_{i_1 \ldots i_{d+1}}=b^p_{i_1 \ldots i_{d+1}}$, $g=\sum b_{i_1 \ldots i_{d+1}} T_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot T_{d+1}^{i_{d+1}}$. Azt kapjuk, hogy $f=g^p$, ami ellentmond f irreducibilis voltának.

Ha $f'_{T_i} \neq 0$, akkor a d számú $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1}$ elem algebrailag független k-felett. Valóban, t_i elem algebrai a $k(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1})$ test felett, mivel $f'_{T_i} \neq 0$, tehát T_i szerepel f polinomban. Ezért ha a $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{d+1}$ elemek függők volnának, akkor a $k(t_1, \ldots, t_{d+1})$ test transzcendencia foka kevesebb volna d-nél, ami ellentmond $t_1, \ldots, t_d$ függetlenségének.

Ilyen módon mindig átindexelhetjük a $T_1, \ldots, T_n$-eket úgy, hogy $t_1, \ldots, t_d$ függetlenek lesznek k felett, és az f polinomban $f'_{T_{d+1}} \neq 0$. Ez azt mutatja meg, hogy a t_{d+1} elem szeparábilis a $k(t_1, \ldots, t_d)$ test felett. Mivel t_{d+2} algebrai ezen test felett, a primitív elemről szóló tétel miatt található olyan y elem, hogy $k(t_1, \ldots, t_{d+2}) = k(t_1, \ldots, t_d, y)$. Ismételve a $t_{d+1}, \ldots, t_n$ elemek adjungálásának folyamatát, a $k(X)$ testet előállítjuk $k(z_1, \ldots, z_{d+1})$ alakban, ahol $z_1, \ldots, z_d$ algebrailag függetlenek k felett, és az

$$f(z_1, \ldots, z_d, z_{d+1}) = 0 \tag{1}$$

polinom irreducibilis k felett és $f'_{T_{d+1}} \neq 0$. Nyilvánvaló, hogy a racionális függvények $k(Y)$ teste az (1) egyenlettel megadott zárt Y halmazon izomorf ugyanazzal a testtel. Ez azt jelenti, hogy X és Y biracionálisan izomorfak. A tételt bebizonyítottuk.

1. MEGJEGYZÉS. Az $f'_{T_{d+1}} \neq 0$ feltétel miatt (1)-ben z_{d+1} elem szeparábilis volt $k(z_1, \ldots, z_d)$ test felett. Ezért a $k(X)/k(z_1, \ldots, z_d)$ bővítés véges szeparábilis bővítés.

2. MEGJEGYZÉS. A 6. tétel bizonyításából és a primitív elemről szóló tételből következik, hogy $z_1, \ldots, z_{d+1}$ kiválasztható a kiinduló $x_1, \ldots, x_n$ koordináták $z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$ $(i = 1, \ldots, d+1)$ lineáris kombinációja alakjában. Az ezekkel a képletekkel megadott $(x_1, \ldots, x_n) \to (z_1, \ldots, z_{d+1})$ leképezés az A^n projekciója a $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = 0$ $(i = 1, \ldots, d+1)$ egyenletekkel definiált lineáris altérrel párhuzamosan. Ez rámutat a biracionális leképezés geometriai értelmére, amelynek létezését a 6. tétel mondja ki.

Feladatok

1. Legyen k egy $\neq 2$ karakterisztikájú test. Bontsuk fel az $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$ egyenletekkel megadott zárt $X \subset A^3$ halmazt irreducibilis komponensekre.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha X a 2. § 4. feladatban szereplő zárt halmaz, akkor a $k(X)$ test elemei egyértelműen előállíthatók $U(x) + v(x)y$ alakban, ahol $U(x)$ és $v(x)$ tetszőleges racionális függvények.

3. Bizonyítsuk be, hogy az 1. § 5., 6., 7. feladataiban említett f leképezés biracionális izomorfizmus.

4. Biracionális izomorfizmus lesz-e az A^3-ban az $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - z^2 = 1$ egyenletekkel megadott X zárt halmaz projekciója az (x, y) síkra: a) a z-tengellyel párhuzamosan, b) az $x = z$, $y = 0$ egyenessel párhuzamosan, c) az $x = y = z$ egyenessel párhuzamosan? Határozzuk meg a kép lezártját.

5. Bontsuk fel az A^3-ban az $y^2 = xz$, $z^2 = y^3$ egyenletekkel megadott X zárt halmazt irreducibilis komponensekre. Bizonyítsuk be, hogy minden irreducibilis komponense biracionálisan izomorf A^1-gyel.

6. Biracionálisan izomorf-e A^1-gyel a 4. feladatban adott zárt halmaz?

7. Bizonyítandó, hogy ha X zárt halmaz az A^n-ben egyetlen $f_{n-1}(T_1, \ldots, T_n) + f_n(T_1, \ldots, T_n) = 0$ egyenlettel van megadva, ahol f_{n-1} és f_n megfelelően $n-1$, ill. n-edfokú homogén polinomok, és X irreducibilis, akkor az biracionálisan izomorf az A^{n-1}-gyel. (Az ilyen zárt halmazt monoidnak nevezzük.)

8. Az $x^2+y^2=1$ egyenlettel megadott kör milyen pontjaiban reguláris az $\frac{1-y}{x}$ racionális függvény?

9. Az $y^2=x^2+x^3$ egyenlettel megadott X görbe milyen pontjaiban reguláris a $t=\frac{y}{x}$ függvény? Bizonyítandó, hogy $t \notin k[X]$.

4. §. Kváziprojektív sokaságok

1. *Projektív tér zárt részhalmazai*

Legyen P^n egy n-dimenziós projektív tér, amelynek $\xi \in P^n$ pontját egy k test $(\xi_0:\ldots:\xi_n)$ elem $n+1$-ese adja meg, ahol nem minden ξ_i egyenlő 0-val. Két $(\xi_0:\ldots:\xi_n)$ és $(\eta_0:\ldots:\eta_n)$ pontot akkor és csakis akkor tekintünk azonosnak, ha létezik olyan $\lambda \neq 0$, hogy $\eta_i=\lambda\xi_i$ $(i=0, 1, \ldots, n)$. Bármely $(\xi_0:\ldots:\xi_n)$ rendszert, amely a ξ pontot határozza meg, ezen pont homogén koordinátáinak fogjuk nevezni.

Azt fogjuk mondani, hogy egy $f(S)=k[S_0, \ldots, S_n]$ valamely $\xi \in P^n$ pontban 0, ha $f(\xi_0, \ldots, \xi_n)=0$, bárhogyan is választjuk ki a ξ pont ξ_i koordinátáit. Nyilvánvaló, hogy akkor $f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n)=0$ minden $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$-ra. Felírjuk f-et $f=f_0+f_1+\ldots+f_r$ alakban, ahol f_i az összes i-edfokú tag összege f-ben. Akkor

$$f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n) = f_0(\xi_0, \ldots, \xi_n)+\lambda f_1(\xi_0, \ldots, \xi_n)+\ldots+\lambda^r f_r(\xi_0, \ldots, \xi_n).$$

Mivel a k test végtelen, az összes $\lambda \neq 0$, $\lambda \in k$-ra teljesülő $f(\lambda\xi_0, \ldots, \lambda\xi_n)=0$ egyenlőség magával vonja az $f_i(\xi_0, \ldots, \xi_n)=0$ egyenlőségeket. Tehát, ha az f polinom 0 valamely ξ pontban, akkor ugyanabban a pontban 0-val egyenlő annak minden homogén összeadandója.

DEFINÍCIÓ. Egy $X \subset P^n$ részhalmazt zártnak nevezünk, ha az összes olyan pontból áll, amelyekben egyidejűleg 0-val egyenlő a k feletti polinomok egy véges halmazának minden polinomja.

Azon $f \in k[S_0, \ldots, S_n]$ polinomok összessége, amelyek 0-val egyenlők minden $x \in X$ pontban, a $k[S]$ gyűrű ideálját alkotja, amelyet a zárt X halmaz ideáljának nevezünk és $\mathscr{I}_X$-szel jelölünk. A fent említettek alapján az $\mathscr{I}_X$ rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha abban benne van egy f polinom, akkor a polinom minden homogén összeadandóját is tartalmazza. Az ezzel a tulajdonsággal rendelkező ideálokat homogéneknek nevezzük. Ilyen módon a projektív tér zárt részhalmazának az ideálja homogén. Ebből következik, hogy annak létezik homogén polinomokból álló bázisa. Ebből a célból elegendő venni egy tetszőleges bázist és a bázis összes polinomjainak homogén összeadandóiból álló rendszert tekinteni. Speciálisan, a projektív tér bármely zárt részhalmaza megadható homogén egyenletrendszerrel.

Tehát minden $X \in P^n$ zárt részhalmaznak megfelel egy $\mathscr{I}_X \subset k[S_0, \ldots, S_n]$ homogén ideál. Megfordítva, bármely $\mathscr{I} \subset k[S]$ homogén ideál meghatároz egy $X \subset P^n$ zárt részhalmazt. Éspedig, ha $F_1, \ldots, F_n$ az $\mathscr{I}$ homogén bázisa, akkor X-et az $F_1=0, \ldots, F_n=0$ egyenletrendszer határozza meg. Ha ennek az egyenletrendszernek k-ban nincs 0-tól különböző megoldása, akkor X-et természetes üres halmaznak tekinteni.

Az affin tér részhalmazai esetében $\mathscr{I} \subset k[T]$ ideál csak akkor határoz meg üres halmazt, ha $\mathscr{I}=(1)$, ami *Hilbert* gyökökről szóló tételének az állítása. A projektív tér zárt részhalmazai esetében ez nem így van, ugyanis például az $(S_0, \ldots, S_n)$ ideál is nyilván üres halmazt határoz meg. Jelölje I_S a $k[S]$ gyűrű azon ideálját, amely olyan polinomokból áll, amelyeknek csak $\geqq s$ fokszámú tagjai vannak. Nyilvánvaló, hogy az I_S ideál üres halmazt határoz meg, ugyanis abban benne vannak például az S_i^s polinomok is, amelyek együttesen csak a nulla pontban egyenlők 0-val.

1. Lemma. *Egy $\mathscr{I} \subset k[S]$ homogén ideál akkor és csakis akkor határoz meg üres halmazt, ha tartalmaz I_s ideált valamely $s>0$ esetén.*

Már láttuk, hogy az I_s ideál üres halmazt határoz meg. Annál inkább igaz ez, az őt tartalmazó ideálra. Határozzon meg az $\mathscr{I} \in k[S]$ homogén ideál üres halmazt. Legyen $F_1, \ldots, F_n$ az $\mathscr{I}$ ideál homogén bázisa és deg $F_i = n$. Akkor a feltétel szerint az $F_i(1, T_1, \ldots, T_n)$ polinomoknak, ahol $T_j = \frac{S_j}{S_0}$, nincs közös gyökük. Valóban, ezek $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ közös gyöke az $F_1, \ldots, F_n$ polinomok $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ közös gyökét adná. Következésképp *Hilbert* tétele szerint létezni kell olyan $G_i(T_1, \ldots, T_n)$ polinomoknak, hogy $\sum_i F_i(1, T_1, \ldots, T_n) G_i(T_1, \ldots, T_n) = 1$. Behelyettesítve ebbe az egyenlőségbe $T_j = \frac{S_j}{T_0}$ kifejezést és megszorozva az $S_0^{m_0}$ alakú közös nevezővel, azt kapjuk, hogy $S_0^{m_0} \in \mathscr{I}$. Analóg módon tetszőleges $i = 1, \ldots, n$ esetében található olyan $m_i > 0$ szám, hogy $S_i^{m_i} \in \mathscr{I}$. Ha most $m = \max(m_0, \ldots, m_n)$ és $S = (m-1)(n+1)+1$, akkor bármely $S_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot S_n^{a_n}$ tagban és $a_0 + \ldots + a_n \geqq S$ esetén legalább egy S_i-nek tartalmaznia kell a kitevőjében $a_i \geqq m \geqq m_i - t$ és mivel $S_i^{m_i} \in \mathscr{I}$, így ez a tag is benne van $\mathscr{I}$-ban. Ez már meg is mutatja, hogy $I_S \subset \mathscr{I}$.

A következőkben egyidejűleg affin és projektív terek részhalmazait fogjuk tekinteni. Ezeket affin és projektív zárt halmazoknak is fogjuk nevezni.

A projektív zárt halmazokra ugyanazt a terminológiát fogjuk használni, mint az affin halmazokra, éspedig ha $Y \subset X$ két zárt halmaz, akkor $X - Y$-t nyíltnak nevezzük X-ben. Az előbbiekhez hasonlóan tetszőleges számú nyílt halmaz uniója és véges számú nyílt halmaz metszete nyílt, valamint véges számú zárt halmaz uniója és tetszőleges számú zárt halmaz metszete zárt. Az olyan $\xi = (\xi_0 : \ldots : \xi_n)$ pontok A_0^n halmaza, amelyekre $\xi_0 \neq 0$, nyilvánvalóan nyílt. Pontjait kölcsönösen egyértelműen meg lehet feleltetni az n-dimenziós affin tér pontjainak, ha $\alpha_i = \frac{\xi_i}{\xi_0}$ $(i = 1, \ldots, n)$ és a $\xi \in A_0^n$ pontnak megfeleltetjük az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A^n$ pontot. Ezért az A_0^n halmazt affin nyílt részhalmaznak fogjuk nevezni. Analóg módon az A_i^n $(i = 0, \ldots, n)$ halmaz azon pontokból áll, amelyekre $\xi_i \neq 0$. Nyilvánvaló, hogy $P^n = \bigcup A_i^n$.

Bármely $X \subset P^n$ projektív zárt halmaz esetén az $U_i = X \cap A_i^n$ halmazok nyíltak X-ben. Mint az A_i^n tér részhalmazai azonban ezek zártak. Valóban, ha X az $F_0 = \ldots$ $\ldots = F_m = 0$ homogén egyenletrendszerrel van megadva és deg $F_j = n_j$, akkor például U_0 az

$$S_0^{-n_j} F_j = F_j(1, T_1, \ldots, T_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

$$T_i = \frac{S_i}{S_0} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszerrel van megadva.

Az U_i-ket az X halmaz affin nyílt részhalmazainak fogjuk nevezni. Nyilvánvaló, hogy $X=\bigcup U_i$. Az $U\subset A_0^n$ zárt részhalmaz meghatároz egy zárt projektív $\bar{U}$ halmazt, amely az U-t tartalmazó összes zárt projektív halmazok metszete, és amelyet U lezártjának nevezünk. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\bar{U}$ halmaz homogén egyenletei az előbb leírt folyamat megfordításával nyerhetők: ha $F(T_1, \dots, T_n)$ az $\mathscr{I}$ ideál tetszőleges polinomja és deg $F=k$, akkor az $\bar{U}$ egyenletei $S_0^k F\left(\frac{S_1}{S_0}, \dots, \frac{S_n}{S_0}\right) = 0$ alakúak. Innen következik, hogy

$$(1) \qquad U = \bar{U} \cap A_0^n.$$

Eddig két olyan objektumot vizsgáltunk, amelyek számot tarthattak arra, hogy azokat algebrai sokaságoknak nevezzük — az affin és projektív zárt halmazokat. Természetes megkísérelni egy olyan egységes fogalom bevezetését, amelynek speciális esete lenne az előbbi két sokaság típus. A legteljesebben ezt később tesszük meg, a séma fogalmával kapcsolatosan. Most egy speciálisabb fogalmat vezetünk be, amely magában foglalja a projektív és affin zárt halmazokat.

DEFINÍCIÓ. Kváziprojektív sokaságnak nevezzük a zárt projektív halmaz nyílt részhalmazát.

Nyilvánvaló, hogy a zárt projektív halmaz kváziprojektív. Affin zárt halmazokra ez következik (1)-ből.

Kváziprojektív sokaság zárt részhalmazának nevezzük annak metszetét a projektív tér zárt halmazával. Analóg módon definiáljuk a nyílt halmazt és a pont környezetét is. Az irreducibilis sokaság fogalma és a sokaságnak irreducibilis sokaságokra való felbontásáról szóló tétel szó szerint áthozható az affin zárt halmazok esetéből.

Kváziprojektív $X\subset P^n$ sokaság Y részsokaságának fogunk most nevezni minden olyan $Y\subset X$ részhalmazt, amely maga is kváziprojektív sokaság P^n-ben. Ez nyilvánvalóan ekvivalens azzal, hogy $Y=Z-Z_1$, ahol $Z\supset Z_1$, Z és Z_1 zárt Y-ban.

2. *Reguláris függvények*

Áttérve a kváziprojektív sokaságokon értelmezett függvények vizsgálatára, a P^n projektív térrel kezdjük. Itt egy fontos különbözőséggel találkozunk a homogén változós és inhomogén változós függvények között. Az

$$(1) \qquad f(S_0, \dots, S_n) = \frac{P(S_0, \dots, S_n)}{Q(S_0, \dots, S_n)}$$

homogén koordinátáktól függő racionális függvény ugyanis nem tekinthető az $x\in P^n$ pont függvényeként még a $Q(x)\neq 0$ esetében sem, mert az $f(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ függvény értéke változik az összes homogén koordinátának közös tényezővel való szorzatával. Viszont a nullafokú homogén függvények, azaz olyan $f=\frac{P}{Q}$ függvények, hogy P és Q azonos fokszámú homogének, már tekinthetők a pont függvényének.

Ha X-kváziprojektív sokaság, $X\subset P^n$, $x\in X$ az $f=\frac{P}{Q}$ nulla fokú homogén függvény és $Q(x)\neq 0$, akkor f az x pont valamely környezetében egy függvényt határoz meg k-beli értékekkel. Az ilyen függvényt regulárisnak nevezzük az x pont környezetében, vagy egyszerűen az x pontban. Az X-en megadott, az összes $x \in X$ pontban reguláris függvényt regulárisnak nevezzük az X-en. Az X-en reguláris függvények halmaza gyűrűt alkot, amelyet $k[X]$-szel jelölünk.

Az affin zárt halmazoktól eltérő módon a $k[X]$ gyűrű állhat csupán konstansokból is. Az 5. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy így áll a helyzet mindig, ha X zárt projektív halmaz. Ezt könnyű közvetlenül ellenőrizni, ha $X = P^n$. Valóban, ha $f = \frac{P}{Q}$, ahol P és Q azonos fokszámú formák, akkor feltételezhetjük, hogy P és Q relatív prímek. Akkor azokban az x pontokban, amelyekben $Q(x) = 0$, az f függvény irreguláris. Másrészt a $k[X]$ gyűrűről kiderülhet az is, hogy váratlanul nagy. Éspedig, ha X affin zárt halmaz, akkor $k[X]$ mint gyűrű végesen generált k felett. RIESZ és NAGATA konstruáltak példát olyan kváziprojektív sokaságokra, amelyekre ez nem így van.

Áttérünk a leképezésekre. Az X kváziprojektív sokaság tetszőleges leképezése az A^n affin térbe megadható n függvénnyel, amelyek az X-en vannak értelmezve és értékkészletük k-beli. Ha ezek a függvények X-en regulárisak, akkor a leképezést regulárisnak nevezzük.

DEFINÍCIÓ. Legyen $f \colon X \to Y$ kváziprojektív sokaságok leképezése és $Y \subset P^m$. Ezt a leképezést regulárisnak nevezzük, ha az $f(x)$ pontot tartalmazó A_i^m nyílt affin halmaz bármely $x \in X$ pontjához létezik olyan $U \ni x$ környezet, hogy $f(U) \subset A_i^m$ és az $f \colon U \to A_i^m$ leképezés reguláris.

Ellenőrizzük, hogy a regularitás tulajdonsága nem függ attól, hogy az $f(x)$ pontot tartalmazó A_i^m nyílt affin halmazok közül melyiket választjuk. Ha $f(x) = (y_1, \dots, y_m) \in A_i^m$ benne van A_j^m-ben is, akkor $y_j \neq 0$ és ennek a pontnak a koordinátái A_j^m-ben $\left(y_1 \frac{y_i}{y_j}, \dots, y_m \frac{y_i}{y_j}\right)$ alakúak. Ezért, ha az $f \colon U \to A_i^m$ leképezés az $f_1, \dots, f_m$ függvényekkel van megadva, akkor az $f \colon U \to A_j^m$ leképezést az $f_1 \frac{f_i}{f_j}, \dots$ $\dots, f_m \frac{f_i}{f_j}$ függvények adják meg. Feltétel szerint $f_j(x) \neq 0$ és az U pontjainak azon U' halmaza, amelyekben $f_j \neq 0$, nyílt. Az U'-n az $f_1 \frac{f_i}{f_j}, \dots, f_m \frac{f_i}{f_j}$ függvények regulárisak, tehát az $f \colon U' \to A_j^m$ leképezés reguláris.

Amint az affin zárt halmazoknál is, az $f \colon X \to Y$ reguláris leképezés meghatározza az $f^* \colon k[Y] \to k[X]$ leképezést.

Nézzük most meg, milyen képletekkel adható meg a reguláris leképezés homogén koordinátákban. Legyen például $f(x) \in A_0^m$ és az $f \colon U \to A_0^m$ leképezést adják meg az $f_1, \dots, f_m$ reguláris függvények. Definíció szerint $f_i = \frac{P_i}{Q_i}$, ahol P_i, Q_i az x pont homogén koordinátáitól függő azonos fokszámú formák, és $Q(x) \neq 0$. Közös nevezőre hozva ezeket a törteket, azt kapjuk, hogy $f = \frac{F_i}{F_0}$, ahol az összes $F_0, \dots, F_m$ azonos fokszámú formák és $F_0(x) \neq 0$. Más szóval $f(x) = (F_0(x) : \dots : F_m(x))$, mint a P^m pontja. Ezen helyettesítésnél emlékeznünk kell arra, hogy a reguláris függvénynek két forma hányadosaként való előállítása nem egyértelmű. Ezért két

(2) $$f(x) = \big(F_0(x): \dots : F_m(x)\big), \quad g(x) = \big(G_0(x): \dots : G_m(x)\big)$$

képlet megadhatja ugyanazt a leképezést. Ez akkor és csakis akkor történik meg, ha X-en

(3) $$F_i G_j = F_j G_i, \quad 0 \leqq i, j \leqq m.$$

Eljutottunk a reguláris leképezés definíciójának második alakjához.

Egy kváziprojektív sokaság $f\colon X \to P^m$ reguláris leképezése megadható az $x \in P^m$ pont homogén koordinátáitól függő azonos fokszámú formák

(4) $$(F_0: \dots : F_m)$$

rendszerével. A (2) leképezéseket egyformáknak nevezzük, ha teljesülnek a (3) feltételek. Szükségeltetik, hogy tetszőleges $x \in X$ ponthoz létezzen az f leképezésnek olyan (4) alakú felírása, hogy legalább egy i-re $F_i(x) \neq 0$ teljesüljön. Akkor az $\big(F_0(x): \dots : F_m(x)\big)$ pontot $f(x)$-szel jelöljük.

Hogy a reguláris leképezés összes (4) alakú felírását fontos megvizsgálni, jól illusztrálja egy másodfokú görbének az egyenesre való projektálásának a példája.

Ha a görbe az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ kör, a projektálás középpontja pedig az $(1, 0)$ pont, akkor a leképezést a $t = \dfrac{x_2}{x_1 - 1}$ képlet adja meg. Vezessük be az $x_1 = \dfrac{u_1}{u_0}$, $x_2 = \dfrac{u_2}{u_0}$, $t = \dfrac{v_1}{v_0}$ projektív koordinátákat. Akkor a leképezést $f(u_0 : u_1 : u_2) = (u_2 : u_1 - u_0)$ alakban írhatjuk fel. Az $(1:1:0)$ pontban mindkét u_2 és $u_1 - u_2$ forma 0. Viszont a körön $u_2^2 = (u_0 - u_1)(u_0 + u_1)$ és ezért ugyanazt a leképezést az $f(u_0 : u_1 : u_2) = (u_1 + u_0 : -u_2)$ képlettel adhatjuk meg. Az $u_1 + u_0$ és $-u_2$ formák az $(1:1:0)$ pontban nem egyenlők 0-val, ami az f leképezés regularitását bizonyítja.

Miután a kváziprojektív sokaságok reguláris leképezését definiáltuk, természetes módon definiálhatjuk az izomorfizmust, mint olyan reguláris leképezést, amelyhez létezik inverz reguláris leképezés.

Azt a kváziprojektív X' sokaságot, amely izomorf az affin tér zárt részhalmazával, affin sokaságnak fogjuk nevezni. Eközben kiderülhet, hogy $X \subset A^n$, de abban nem zárt. Például a kváziprojektív, de A^1-ben nem zárt halmaz izomorf egy az A^2-ben nem zárt hiperbolával (a 2. § 3. pont 3. példa). Ilyen módon az affin zárt halmaz fogalma nem invariáns az izomorfizmussal szemben, ugyanakkor az affin sokaság fogalma definíció szerint invariáns.

Analóg módon a zárt projektív halmazzal izomorf kváziprojektív sokaságot projektív sokaságnak nevezzük. Az 5. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy ha $X \subset P^n$ projektív, akkor az zárt P^n-ben, úgy hogy a zárt projektív halmaz és a projektív sokaság fogalma egybeesik és invariáns az izomorfizmussal szemben.

Léteznek olyan kváziprojektív sokaságok, amelyek sem nem affinok, sem projektívok (l. az 5. feladatot és az 5. §-ban a 4., 5. és 6. feladatokat).

A következőkben fogunk találkozni az X sokaság olyan tulajdonságaival, amelyeket elegendő ellenőrizni egy tetszőleges $x \in X$ pont valamely U környezetében. Más szóval, ha $X = \bigcup U_\alpha$, ahol U_α tetszőleges nyílt halmazok, akkor ezt a tulajdonságot elegendő ellenőrizni az U_α-k mindegyikére. Ezeket a tulajdonságokat lokálisaknak fogjuk nevezni.

Felhozunk egy példát erre a tulajdonságra.

2. LEMMA. *Egy $Y \subset X$ részhalmaz zárt voltának tulajdonsága az X kváziprojektív sokaságban lokális tulajdonság.*

Ez az állítás azt jelenti, hogy ha $X = \bigcup U_\alpha$, U_α nyílt és $Y \cap U_\alpha$ zárt minden U_α-ban, akkor Y zárt. A nyílt halmazok definíciója szerint $U_\alpha = X - Z_\alpha$ ahol Z_α zárt, a zárt halmazok definíciója szerint viszont $U_\alpha \cap Y = U_\alpha \cup T_\alpha$ ahol a T_α-k zártak. Nyilvánvaló, hogy az $X = \bigcup U_\alpha$ egyenlőségből $Y = \bigcap (Z_\alpha \cup T_\alpha)$ következik. Ezért Y zárt. A lokális tulajdonságok vizsgálatánál elgendő affin sokaságok vizsgálatára szorítkoznunk.

3. LEMMA. *Bármely $x \in X$ pontnak van olyan környezete, amely izomorf egy affin sokasággal.*

A feltétel szerint $X \subset P^n$. Ha $x \in A_0^n$ (azaz az x pont u_0 koordinálja nem 0), akkor $x \in X \cap A_0^n$ és a kváziprojektív sokaság definíciója szerint $X \cap A_0^n = Y - Y_1$, ahol Y és $Y_1 \subset Y$ az A_0^n zárt halmazai. Mivel $x \in Y$, így létezik olyan A_0^n-beli koordinátáktól függő F polinom, hogy $F=0$ az Y_1-en, $F(x) \neq 0$. Jelöljük Y_F-fel az Y sokaság azon pontjainak halmazát, amelyekben $F=0$. Nyilvánvaló, hogy $U^F = Y - Y_F$ az x pont környezete. Megmutatjuk, hogy ez a környezet izomorf egy affin sokasággal. Legyenek $F_1=0, \ldots, F_m=0$ az Y egyenletei A_0^m-ben. Megadjuk a Z sokaságot A^{n+1}-ben az

$$\left.\begin{aligned} F_1(T_1, \ldots, T_n) = \ldots = F_m(T_1, \ldots, T_n) = 0 \\ F_1(T_1, \ldots, T_n) \cdot T_{n+1} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

egyenletekkel. A $\varphi\colon (x_1, \ldots, x_{n+1}) \to (x_1, \ldots, x_n)$ leképezés nyilván reguláris leképezését határozza meg Z-nek U^F-ba, a $\psi\colon (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_n, F(x_1, \ldots, (x_n^{-1})$ pedig reguláris leképezése U^F-nek Z-be, mégpedig a φ inverze. Ez bizonyítja a lemmát.

Ha $Y = A^1$, $F = T$ akkor a Z egy hiperbola és az általunk konstruált izomorfizmus egybeesik azzal a leképezéssel, amelyet a 2. § 3. pontjának 3. feladatában vizsgáltunk.

DEFINÍCIÓ. Az $U^f = X - X_f$ nyílt halmazt, amely az X affin sokaság összes olyan pontjából áll, amelyekre $f(x) \neq 0$ ($f \in k[X]$), fő nyílt halmaznak nevezzük.

Ezeknek a halmazoknak a jelentősége abban áll, hogy azok — amint láttuk — affin halmazok és számukra könnyű megmutatni $k[U_f]$ gyűrűjüket. Mégpedig, konstrukció szerint $f \neq 0$ az U_f-en, úgy hogy $f^{-1} \in k[U^f]$, az (5) egyenletek pedig megmutatják, hogy $k[U^f] = k[X]\left[\frac{1}{f}\right]$.

A 2. és 3. lemmák például megmutatják, hogy izomorfizmus hatására zárt részhalmazok zártakba mennek át. Sőt megmutatjuk, hogy tetszőleges $f\colon X \to Y$ reguláris leképezés esetén bármely $Z \subset Y$ zárt halmaz $f^{-1}(Z)$ inverz képe zárt X-ben.

A reguláris leképezés definíciója szerint bármely $x \in X$ pont és $f(x) \in Y$ pont rendelkezik olyan $U \ni x$ és $V \ni f(x)$ környezettel, hogy $f(U) \subset V \subset A^m$ és az $f_1\colon U \to V$ leképezés reguláris. A 3. lemma értelmében U-t tekinthetjük affin sokaságnak. A 2. lemma szerint elegendő ellenőriznünk, hogy $f^{-1}(Z) \cap U = f_1^{-1}(Z \cap V)$ zárt U-ban. Mivel $Z \cap V$ zárt V-ben, így az a $g_1 = \ldots = g_m = 0$ egyenletekkel van megadva, ahol

g_i-k reguláris függvények V-n. Akkor viszont $f_1^{-1}(Z\cap V)$ az $f_1^*(g_1)=\ldots=f_1^*(g_m)=0$ egyenletekkel van meghatározva, tehát szintén zárt.

A bizonyítottakból következik, hogy nyílt halmaz ősképe is nyílt. Könnyen ellenőrizhető, hogy a reguláris leképezés olyan $f\colon X\to Y$ leképezésként definiálható, ahol tetszőleges nyílt halmaz ősképe nyílt (folytonosság), és bármely $x\in X$ pont és tetszőleges — az $f(x)\in Y$ pont környezetében reguláris — φ függvény esetén $\varphi^*(f)$ függvény reguláris az x pont környezetében.

3. *Racionális függvények*

Racionális függvényeknek kváziprojektív sokaságokon való értelmezése közben összeütközésbe kerülünk azzal a körülménnyel, hogy az általános eset lényegesen különbözik az affin sokaságok esetétől. Az X affin sokaság esetén ugyanis a racionális függvényeket X-en úgy definiáltuk, mint az egész X-en reguláris függvények hányadosait. Az általános esetben viszont — amint láttuk — előfordulhat, hogy a sokaságon nincsenek mindenütt reguláris függvények a konstansokon kívül, akkor viszont konstanstól különböző racionális függvények sincsenek. Ezért a kváziprojektív $X\subset P^n$ sokaságon úgy értelmezzük a racionális függvényeket, mint a P^n-en homogén függvényekkel meghatározott függvényeket X-en. Pontosabban megfogalmazva, tekintsük az irreducibilis kváziprojektív $X\subset P^n$ sokaságot és jelöljük (analóg módon a 3. § 2. pontjával) O_X-szel az $S_0, \ldots, S_n$ homogén koordinátáktól függő $f=\frac{P}{Q}$ alakú racionális függvények halmazát, ahol P és Q azonos fokszámú formák és $Q\notin\mathcal{I}_X$. Ugyanúgy, mint az affin sokaságok esetében, az X irreducibilitásából következik, hogy O_X gyűrű. Jelölje M_X azon $f\in O_X$ függvények halmazát, amelyekre $P\in\mathcal{I}_X$. Nyilvánvaló, hogy az O_X/M_X gyűrű test. Ezt a testet az X sokaság racionális függvényei testének nevezzük és $k(X)$-szel jelöljük. Mivel a forma az X irreducibilis kváziprojektív sokaságon ugyanakkor 0, amikor annak valamely U nyílt részhalmazán is az, ezért $k(X)=k(U)$. Speciálisan $k(X)=k(\bar{X})$, ahol $\bar{X}$ az X lezártja a projektív térben. Ezért a racionális függvények testének vizsgálata esetén megelégedhetünk a kívánalomnak megfelelően affin vagy projektív sokaságokkal.

Könnyű ellenőrizni, hogy ha X affin sokaság, akkor a fent adott definíció megegyezik azzal, amelyet a 3. §-ban bevezettünk. Valóban, elosztva a nullafokú $f=\frac{P}{Q}$, $\deg P=\deg Q=m$ homogén függvény számlálóját és nevezőjét S_0^m-mel, felírjuk azt a $T_i=\frac{S_i}{S_0}$ $(i=1, \ldots, u)$ változók racionális függvényeinek alakjában. Ilyen módon izomorfizmus létesül az $S_0, \ldots, S_n$ változóktól függő nullafokú homogén racionális függvények teste és a $k(T_1, \ldots, T_n)$ test között. Nyilvánvaló ellenőrzéssel belátható, hogy ezek mellett a 3. § 2. pontjában O_X és M_X-szel jelölt $k(T_1, \ldots, T_n)$-beli gyűrű és test egybeesik azokkal az objektumokkal, amelyeket ebben a pontban azonos betűkkel jelöltünk.

Egy $f\in k(X)$ függvényt regulárisnak nevezünk az $x\in X$ pontban, ha előállítható $f=\frac{F}{G}$ alakban, ahol F és G azonos fokszámúak és homogének, valamint $G(x)\neq 0$. Akkor $f(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$-et az f értékének nevezzük az x pontban. Ugyanúgy, mint az affin sokaságok esetén, azon pontok halmaza, amelyekben az adott f racionális függvény reguláris, egy nem üres nyílt U részhalmazát képezi az X sokaságnak. Ezt az U halmazt az f függvény értelmezési tartományának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a racionális függvények értelmezhetők az $U \subset X$ nyílt halmazokon reguláris függvényekként is.

Az $f \colon X \to P^n$ racionális leképezés (a reguláris leképezéseknek a 2. pontban adott második definíciójának analógiájára) megadható $n+1$ számú $(F_0 : \ldots : F_m)$ formával, amelyek az X-et tartalmazó P^n projektív tér $n+1$ homogén koordinátájától függenek. Két $(F_0 : \ldots : F_m)$ és $(G_0 : \ldots : G_m)$ leképezést egyenlőnek nevezünk, ha $F_i G_j = F_j G_i$ az X-en. Elosztva mindegyik F_i formát valamelyikkel közülük, amely 0-tól különböző, megadhatjuk a racionális leképezést $n+1$ racionális függvénnyel az X-en, a leképezések egyenlőségének hasonló fogalma mellett. Ha az f racionális leképezést meg lehet adni olyan $(f_0 : \ldots : f_m)$ függvényekkel, ahol az összes f_i reguláris az $x \in X$ pontban és nem mindegyikük 0 ebben a pontban, akkor a leképezés reguláris az x pontban. Ekkor a leképezés az x pont valamely környezetének reguláris leképezése lesz P^n-be. Helyettesítve az összes f_i-t azonos fokszámú formák hányadosaival, azt látjuk, hogy a reguláris leképezés megadható olyan $(F_0 : \ldots : F_m)$ formákkal, amelyek egyszerre nem egyenlők 0-val az x_0 pontban.

Azon pontok halmaza, amelyekben a racionális leképezés reguláris, nyílt halmaz. Ezért a racionális leképezés definiálható még mint valamely $U \subset X$ nyílt halmaz leképezése. Ha $Y \subset P^m$ egy kváziprojektív sokaság és $f \colon X \to P^m$ racionális leképezés, akkor azt mondjuk, hogy f leképezi X-et Y-ba, ha létezik olyan $U \subset X$ nyílt halmaz, amelyben f reguláris és $f(U) \subset Y$. Az összes ilyen nyílt halmaz $\tilde{U}$ unióját az f regularitási tartományának nevezzük, az $f(\tilde{U})$-t pedig az X képének Y-ban.

Ugyanúgy, mint az affin sokaságok esetében, ha az $f \colon X \to Y$ racionális leképezés képe sűrű Y-ban, akkor f meghatároz egy $f^* \colon k(Y) \to k(X)$ beágyazást a testeknél. Ha az $f \colon X \to Y$ racionális leképezésnek létezik inverz racionális leképezése, akkor f-et biracionális izomorfizmusnak, az X és Y-t pedig biracionálisan izomorfaknak nevezzük. Ebben az esetben az $f^* \colon k(Y) \to k(X)$ beágyazás izomorfizmus.

Most már világosabbá tehető a kapcsolat az izomorfizmus és biracionális izomorfizmus között.

Állítás: Az irreducibilis X és Y sokaságok biracionálisan izomorfak akkor és csakis akkor, ha azok tartalmaznak egymással izomorf $U \subset X$ és $V \subset Y$ nyílt halmazokat.

Valóban, legyen $f \colon X \to Y$ biracionális izomorfizmus és $g \colon Y \to X$, $g = f^{-1}$ racionális leképezés, $U_1 \subset X$ és $V_1 \subset Y$ az f és g regularitási tartományai. Mivel feltétel szerint $f(U_1)$ sűrű X-ben, így $f^{-1}(V_1) \cap U_1$ nem üres, tehát — amint azt a 2. pontban bebizonyítottuk — nyílt. Legyen $U = f^{-1}(V_1) \cap U_1$, $V = g^{-1}(U_1) \cap V_1$. Egyszerű ellenőrzéssel megmutathatjuk, hogy $f(U) = V$, $g(V) = U$, $fg = 1$, $gf = 1$, azaz U és V izomorfak.

4. *Példák reguláris leképezésekre*

1°. *Projektálás.* Legyen E a P^n projektív tér d-dimenziós altere, amely legyen megadva az $L_1=L_2=\ldots=L_{n-d}=0$ lineárisan független $n-d$ darabból álló lineáris egyenletrendszerrel, ahol L_i lineáris forma. Projektálásnak nevezzük a $\pi(x)= =(L_1(x):\ldots:L_{n-d}(x))$ racionális leképezését. Ez a leképezés reguláris a P^n-E-n, mivel a halmazpontjain az L_i $(i=1,\ldots,n-d)$ formák egyidejűleg nem egyenlők 0-val. Ezért π meghatározza a $\pi\colon X\to P^{n-d-1}$ reguláris leképezést, ahol X-tetszőleges olyan zárt részhalmaza P^n-nek, amely nem metszi E-t. A projektálás geometriai értelme a következő. A P^{n-d-1} modelljeként vegyünk egy tetszőleges $n-d-1$ dimenziós $H\subset P^n$ olyan részteret, amely nem metszi E-t. Tetszőleges $x\in P^n-E$ ponton és E-n keresztül egyetlen $n-d+1$ dimenziós E_x lineáris altér húzható. Ez az altér H-t egyetlen pontban metszi, amely éppen a $\pi(x)$. Ha X metszi E-t, de nincs benne, akkor a projektálás racionális leképezés. A $d=0$ esettel, vagyis a pontból való projektálás esetével nemegyszer találkoztunk.

2°. *Veronese* leképezés. Tekintsük az $S_0,\ldots,S_n$ változók összes m-ed fokú homogén F polinomjainak a halmazát. Ezek lineáris teret alkotnak, amelynek a dimenziója — amint az könnyen kiszámítható — $\binom{n+m}{m}$-mel egyenlő. Minket a P^n-ben az $F=0$ egyenlettel megadott sokaságok fognak érdekelni. Ezeket a sokaságokat projektív hiperfelületeknek nevezzük. Mivel az arányos polinomok egy hiperfelületet határoznak meg, a hiperfelületek a $P^{\nu_{n,m}}$ projektív tér pontjainak felelnek meg, amely tér dimenziója $\nu_{n,m}=\binom{n+m}{m}-1$. Jelölje $v_{i_0,\ldots,i_n}$ a $P^{\nu_{n,m}}$ tér homogén koordinátáit, ahol $i_0,\ldots,i_n$ tetszőleges olyan nem negatív számok, hogy teljesül $i_0+\ldots+i_n$. Tekintsük a

$$v_{i_0\ldots i_n}=u_0^{i_0}\cdot\ldots\cdot u_n^{i_n},\quad i_0+\ldots+i_n=m \tag{1}$$

képletekkel definiált v_m leképezését a P^h térnek $P^{\nu_{n,m}}$ térbe. A leképezés nyilván reguláris, mivel az (1) jobb oldalain levő egytagok között az u_i^m is szerepelnek, amelyek csak akkor egyenlők 0-val, ha minden $u_i=0$. A v_m leképezést *Veronese*-leképezésnek, a $v_m(P^n)$-t *Veronese*-sokaságnak nevezzük. Az (1) képletekből következik, hogy a $v_m(P^n)$-en teljesülnek a

$$v_{i_0\ldots i_n}\cdot v_{j_0\ldots j_n}=v_{k_0\ldots k_n}\cdot v_{l_0\ldots l_n} \tag{2}$$

összefüggések, ha $i_0+j_0=k_0+l_0,\ldots,i_n+j_n=k_n+l_n$. Megfordítva, a (2) összefüggésből könnyű levezetni, hogy legalább egy $v_{0\ldots m-0}$ alakú koordináta különbözik 0-tól, és azt, hogy például $v_{m0\ldots 0}\not\subset 0$ nyílt halmazban az

$$u_0=v_{m0\ldots 0},\ u_1=v_{m-1,1,0\ldots 0},\ \ldots,\ u_n=v_{m-1,0,\ldots,1}$$

leképezés inverze lesz v_m-nek. Ezért $v_m(P^n)$-t a (2) egyenletek meghatározzák és v_m izomorf beágyazása P^n-nek $P^{\nu_{n,m}}$-be.

A *Veronese*-leképezés jelentősége abban áll, hogy ha $F=\sum a_{i_0\ldots i_n}u_0^{i_0}\cdot\ldots\cdot u_n^{i_n}$ az $x\in P^n$ pont homogén koordinátáitól függő m-fokú forma és H az $F=0$ egyenlettel megadott hiperfelület P^n-ben, akkor $v_m(H)$ metszete lesz a $v_m(P^n)$-nek és a $P^{\nu_{n,m}}$-ben a $\sum a_{i_0\ldots i_n}v_{i_0\ldots i_n}=0$ egyenlettel megadott hipersíknak. Ezért a *Veronese*-leképezés lehetővé teszi a hiperfelületekkel kapcsolatos némely kérdések vizsgálatát visszavezetni a hipersíkok esetére.

Feladatok

1. Bizonyítandó, hogy az U affin sokaság ugyanakkor irreducibilis, ha annak $\bar{U}$ lezártja is az a projektív térben.

2. Az A_0^n-ben levő tetszőleges U affin sokasághoz hozzárendeljük annak $\bar{U}$ lezártját a P^n projektív térben. Bizonyítandó, hogy ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk az A_0^n-beli affin sokaságok és a P^n-beli olyan projektív sokaságok között, amelyeknek nincs komponensük az $S_0=0$ hipersíkban.

3. Bizonyítsuk az $x_1x_3=x_2^2$, $x_0x_2=x_1^2$, $x_0x_3=x_1x_2$ egyenletekkel megadott P^3-beli részsokaság irreducibilitását (a görbét térbeli kubikos görbének nevezzük).

4. A 3. feladat két egyenletével megadott sokaságot bontsuk fel irreducibilis komponensekre.

5. Bizonyítsuk be, hogy az $X=A^2-x$ sokaság, ahol $x=(0, 0)$, nem izomorf affin sokasággal. (Útmutatás: Számítsuk ki $k[X]$-et és használjuk fel azt, hogy affin sokaság esetén bármely $\mathcal{I}\subset k[X]$ valódi ideál nem üres részsokaságot határoz meg.)

6. Bizonyítandó, hogy bármely kváziprojektív sokaság nyílt saját lezártjában a projektív térben.

7. Bizonyítandó, hogy bármely $\varphi\colon P'\to P^n$ racionális leképezés reguláris.

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\varphi\colon P'\to A^n$ reguláris leképezés P^1-et egy pontba képezi le.

9. 3. § 3. pont 1. példájának analógiájára határozzuk meg a P^3-beli X másodrendű irreducibilis felület és a P^2 sík f biracionális izomorfizmusát. (Sztereografikus projekció.) Az f leképezés milyen pontokban nem reguláris? Mely pontokban nem reguláris f^{-1}?

10. Keressünk a 9. feladatban olyan $U\subset X$ és $V\subset P^2$ nyílt halmazokat, amelyek izomorfak.

11. Bizonyítandó, hogy az $y_0=x_1x_2$, $y_1=x_0x_2$, $y_2=x_0x_1$ leképezés biracionális izomorfizmusa a P^2 síknak önmagával. Ez az f leképezés mely pontokban és az f^{-1} mely pontokban nem reguláris? Mely nyílt halmazok izomorfizmusát határozza meg f?

12. Bizonyítandó, hogy a $v_m(P^n)$ sokaság nincs benne a $P^{\nu_{n,m}}$ tér egyetlen lineáris alterében sem.

13. Bizonyítandó, hogy a 3. feladatban szereplő sokaság egybeesik a $v_3(P^1)$-gyel.

14. Bizonyítandó, hogy a P^2-X sokaság, ahol X egy másodrendű görbe P^2-ben, affin sokaság. Utasítás: Használjuk fel a v_2 *Veronese*-leképezést.

5. §. Szorzatok és kváziprojektív sokaságok leképezései

1. *Szorzatok*

Affin sokaságok szorzatának definíciója (2. § 1. pont 5. példa) olyan természetes volt, hogy az semmi magyarázatot nem kívánt. Tetszőleges kváziprojektív sokaság esetében a dolog valamelyest komplikáltabb. Ezért először tekintsük az affin terek kváziprojektív részsokaságait. Ha $X\subset A^n$, $Y\subset A^m$ ilyen sokaságok, akkor az $X\times Y=\{(x, y); x\in X, y\in Y\}$ halmaz kváziprojektív részsokaság az $A^n\times A^m=A^{n+m}$-ben. Valóban, ha $X=X_1-X_0$, $Y=Y_1-Y_0$, ahol X_1, X_0 és Y_1, Y_0 zárt részsokaságai az A^n és A^m ternek, akkor az $X\times Y=X_1\times Y_1-(X_1\times Y_0\cup Y_1\times Y_0)$ előállítás megmutatja, hogy $X\times Y$ kváziprojektív. Ezt a kváziprojektív sokaságot az X és Y direkt szorzatának fogjuk nevezni. Itt meg kell győződnünk arról, hogy ha X és Y-t helyettesítjük velük izomorf sokaságokkal, akkor az $X\times Y$ is izomorf sokaságra cserélődik fel. Ez könnyen ellenőrizhető. Legyenek $\varphi: X\to X'\subset A^p$ és $\psi: Y\to Y'\subset A^q$ izomorfizmusok. Akkor $(\varphi\times\psi): X\times Y\to X'\times Y'$, ahol $(\varphi\times\psi)(x,y)=(\varphi(x),\varphi(y))$, reguláris leképezés és (φ^{-1},ψ^{-1}) annak inverze.

Térjünk most vissza a kváziprojektív sokaságokhoz és tisztázzuk, mit is akarunk a szorzat fogalmától. Legyen $X\subset P^n$ és $Y\subset P^m$ két kváziprojektív sokaság. Jelölje $X\times Y$ az (x,y), $x\in X$, $y\in Y$ párok halmazát. Mi ezt a halmazt kváziprojektív sokaságként akarjuk vizsgálni, aminek érdekében meg kell adnunk a halmaz olyan φ beágyazását egy P^N projektív térbe, hogy $\varphi(X\times Y)$ kváziprojektív részsokaság legyen P^N-ben. Közben természetes megkövetelni, hogy a kapott definíció lokális legyen, azaz hogy bármely $x\in X$ és $y\in Y$ pontoknak létezzenek olyan affin $X\supset U\ni x$ és $Y\supset V\ni y$ környezetei, hogy $\varphi(U\times V)$ nyílt legyen $\varphi(X\times Y)$-ban és φ izomorfizmust határozzon meg az U és V affin sokaságok direkt szorzata (annak definíciója már ismert) és a $\varphi(U\times V)\subset\varphi(X\times Y)$ sokaság között. Könnyen látható, hogy a lokalitás tulajdonságával a beágyazás lényegében egyértelműen meg van határozva, pontosabban, ha $\psi: X\times Y\to P^M$ egy másik ugyanolyan beágyazás, akkor a $\psi^{-1}\varphi$ izomorfizmust határoz meg $\varphi(X\times Y)$ és $\psi(X\times Y)$ között. Valóban, ennek érdekében elég bebizonyítani, hogy bármely $x\in X$ és $y\in Y$-hoz léteznek olyan $\varphi(X\times Y)\supset W_1\ni\varphi(x,y)$ és $\psi(X\times Y)\supset W_2\ni\psi(x,y)$ környezetek, hogy $\psi^{-1}\varphi$ izomorfizmust határoz meg W_1 és W_2 között. Ebből a célból tekintsük az $X\supset U\ni x$ és $Y\supset V\ni y$ affin környezeteket, amelyek létezése a lokális tulajdonsággal garantált. Közben feltételezhetjük, hogy $U\times V$ izomorf $\varphi(U\times V)$-vel és $\psi(U\times V)$-vel is, és elegendő áttérni a kisebb affin környezetekre. Akkor $\varphi(U\times V)=W_1$ és $\psi(U\times V)=W_2$ a nekünk szükséges affin környezetek, ugyanis — a feltételezésnek megfelelően — mindkettő izomorf az U és V affin sokaságok $U\times V$ direkt szorzatával.

Áttérünk a szükséges tulajdonságokkal rendelkező φ beágyazás konstruálására. Közben rögtön szorítkozhatunk arra az esetre, amikor $X=P^n$, $Y=P^m$, ugyanis ha a $\varphi(P^n\times P^m)\to P^N$ beágyazást már megkonstruáltuk, akkor — amint egyszerű ellenőrzéssel beláthatjuk — annak szűkítése az $X\times Y\subset P^n\times P^m$-re már rendelkezik a szükséges tulajdonságokkal.

A φ beágyazás konstruálása érdekében tekintsük a $P^{(n+1)(m+1)-1}$ teret, amelyben az $\omega_{i,j}$ homogén koordináták két i és j indexszel vannak ellátva ($i=0,\dots,n$; $j=0,\dots,m$). Ha

$$x=(u_0:\dots:u_n)\in p^n,\quad y=(v_0:\dots:v_m)\in p^m,$$

akkor legyen

$$\varphi(x\times y)=(\omega_{i,j}),\quad \omega_{i,j}=u_iv_j\quad (i=0,\dots,n;\ j=0,\dots,m). \tag{1}$$

Nyilvánvaló, hogy az x (vagy y) pont homogén koordinátáinak egy közös szorzóval való szorzása nem változtatja meg a $\varphi(x,y)\in P^{(n+1)(m+1)-1}$ pontot. Hogy megmutassuk, hogy a $\varphi(P^n\times P^m)$ zárt halmaz $P^{(n+1)(m+1)-1}$-ben, felírjuk az egyenleteit:

$$\omega_{ij}\cdot\omega_{kl}=\omega_{kj}\cdot\omega_{il}\quad (i,k=0,\dots,n;\ j,l=0,\dots,m). \tag{2}$$

Behelyettesítéssel megmutathatjuk, hogy az (1)-ben definiált ω_{ij}-k kielégítik (2)-t. Fordítva, ha az $\omega_{ij}\in k$ kielégítik a (2) egyenleteket, és pl. $\omega_{00}\neq 0$, akkor, feltételezve

(2)-ben $k=l=0$-t, azt kapjuk, hogy $\omega_{ij}=\varphi(x,y)$, ahol $x=(\omega_{00}:\ldots:\omega_{n0})$, $y=(\omega_{00}:\ldots:\omega_{0m})$. Ez egyúttal azt is megmutatja, hogy a $\varphi(x,y)$ egyértelműen meghatározza x és y-t, azaz φ beágyazása $P^n\times P^m$-nek $P^{(n+1)(m+1)-1}$-be. Tekintsük az $A_0^n(u_0\neq 0)$ és $A_0^m(v_0\neq 0)$ nyílt halmazokat a P^n és P^m-ben. Nyilvánvaló, hogy

$$\varphi(A_0^n\times A_0^m) = W_{00} = A_{00}^{(n+1)(m+1)}\cap\varphi(p^n\times p^m),$$

ahol

$$A_{00}^{(n+1)(m+1)} = \{\omega_{00}\neq 0\}.$$

Ha

$$(\omega_{ij}) = \varphi(x,y) \quad \text{és} \quad z_{ij}=\frac{\omega_{ij}}{\omega_{00}},\quad x_i=\frac{u_i}{u_0},\quad y_j=\frac{v_j}{v_0}$$

inhomogén koordináták, akkor, amint azt épp az előbb láttuk,

$$z_{i0}=x_i,\quad z_{0j}=y_j,\quad z_{ij}=x_iy_j=z_{i0}z_{0j},\quad \text{ha}\quad i>0,\quad j>0.$$

Innen következik, hogy W_{00} izomorf az $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ koordinátájú A^{n+m} affin térrel és φ meghatározza az $A_0^n\times A_0^m\to W_{00}=\varphi(A_0^n\times A_0^m)$ izomorfizmust. Ez bizonyítja konstrukciónk lokális tulajdonságát.

1. MEGJEGYZÉS. A (ω_{ij}) pontok interpretálhatók $(n+1, m+1)$ típusú mátrixokkal, a (2) egyenletek $\begin{vmatrix}\omega_{ij} & \omega_{il}\\ \omega_{kj} & \omega_{kl}\end{vmatrix}=0$ alakban írhatók fel és azt jelentik, hogy a (ω_{ij}) mátrix rangja 1, az (1) egyenletek azt mutatják meg, hogy egy ilyen mátrix egy $(1, n+1)$ típusú sor és egy $(m+1, 1)$ típusú oszlop szorzata.

2. MEGJEGYZÉS. A legegyszerűbb, az $n=m=1$, esetnek egyszerű geometriai értelme van. Egyetlen (2) egyenletünk van, az $\omega_{11}\omega_{00}=\omega_{01}\omega_{10}$, így $\varphi(P^1\times P^1)$ egybeesik egy másodfokú nem elfajuló Q felülettel a P^3-ban. A $\varphi(\alpha\times P^1)$ halmaz, ahol $\alpha=(\alpha_0:\alpha_1)$, P^3-ban az $\alpha_1\omega_{00}=\alpha_0\omega_{10}$, $\alpha_1\omega_{01}=\alpha_0\omega_{11}$ egyenletekkel van megadva és egyenest határoz meg P^3-ban. Analóg módon $\varphi(P^1\times\beta)$ is, ahol $\beta\in P^1$ egy egyenes. Mikor α befutja az egész P^1-et, az első típusú egyenesek megadják a Q felület egyenesei egy generátor rendszerének összes egyenesét. A másik típusú egyenesek második rendszert adnak. Miután adva van a direkt szorzat definíciója a $P^n\times P^m$-nek $P^{(n+1)(m+1)-1}$-be való φ beágyazásának segítségével, ésszerű interpretálni bizonyos fogalmakat, amelyeket előzőleg ennek a beágyazásnak a segítségével vezettünk be, a $P^n\times P^m$ terminológiájában. Tisztázzuk például, a $P^n\times P^m$-ben milyen részhalmazok mennek át a φ leképezés hatására algebrai sokaságokba. Az $\mathscr{L}\subset P^{(n+1)(m+1)-1}$ részsokaságokat az $F_i(\omega_{00}:\ldots:\omega_{nm})=0$ egyenletek határozzák meg, ahol az F_i-k homogén polinomok. Az (1) behelyettesítés után az u_i és v_j koordinátákkal ez $G_i(u_0:\ldots:u_n;\, v_0:\ldots:v_m)$ alakban írható fel, ahol a G_i-k homogének úgy az $u_0,\ldots,u_n$, mint a $v_1,\ldots,v_m$-re nézve, és a homogenitás foka mindkét változó rendszerre nézve egybeesik. Megfordítva, amint azt könnyű belátni, a homogenitás ilyen tulajdonságaival rendelkező polinom mindig előállítható az u_iv_j szorzatok polinomjaként. Viszont ha az egyenletek homogének úgy az u_i, mint a v_j-kre nézve, akkor azok $P^n\times P^m$-ben mindig algebrai sokaságot határoznak meg, ha még a homogenitás fokai különbözők is. Például, ha a $G(u_0:\ldots:u_n;\, v_0:\ldots:v_m)$ polinom u_i szerinti foka v, a v_j szerinti pedig s, és például $r>s$, akkor a $G=0$ egyenlet ekvivalens a $v_i^{r-s}\cdot G=0$ $(i=0,\ldots,m)$ rendszerrel, amelyről már számunkra ismert, hogy algebrai sokaságokat határoz meg.

Később fogunk találkozni egy analóg kérdéssel a $P^n \times A^m$ szorzat esetében. Legyen $A^m = A_0^m \subset P^m$ a $v_0 \neq 0$ feltétellel megadva. A zárt halmazok egyenletei $G_i(u_0 : \ldots : u_n;\, v_0 : \ldots : v_m) = 0$ alakúak. Legyen G_i foka $v_0, \ldots, v_m$ szerint r_i. Elosztva az egyenleteket $v_0^{r_i}$-vel és behelyettesítve $y_j = \frac{v_j}{v_0}$-t, a $g_i(u_0 : \ldots : u_n;\, y_1, \ldots, y_m) = 0$ egyenleteket kapjuk, ahol a g_i-k homogének az $u_0, \ldots, u_n$-re nézve, és általában véve inhomogének az $y_1, \ldots, y_m$-re nézve. Bebizonyítottuk a következő eredményt.

1. TÉTEL. *Egy $\mathscr{L} \subset P^n \times P^m$ részhalmaz akkor és csakis akkor zárt, ha*

$$G_i(u_0 : \ldots : u_n;\, v_0 : \ldots : v_m) = 0 \quad (i = 1, \ldots, t)$$

egyenletrendszerrel van megadva, amely egyenletek homogének az u_i és v_j változó rendszerekre nézve külön-külön. Minden $P^n \times A^m$-beli zárt részhalmaz

$$g_i(u_0 : \ldots : u_n;\, y_1, \ldots, y_m) = 0 \quad (i = 1, \ldots, t) \tag{3}$$

egyenletrendszerrel van megadva, amelyben az egyenletek homogének az $u_0, \ldots, u_n$ változókra nézve.

Természetesen, analóg módon áll a dolog tetszőleges számú tér szorzata esetében is. Például egy $P^{n_1} \times \ldots \times P^{n_k}$-beli sokaság olyan egyenletrendszerrel adható meg, amelyben minden egyenlet homogén a változóknak mind a k csoportjára nézve.

2. *Projektív sokaság képének zártsága*

Egy affin sokaságnak egy reguláris leképezés szerinti képe lehet nem zárt is. Affin sokaságoknak affinba való leképezése esetében ezt bizonyítják a 2. § 3. pont 3. és 4. példái. Affin sokaságnak projektívba való leképezése esetében ez még nyilvánvalóbb: jó példa erre A^n-nek P^n-be való beágyazása esetében nyílt halmazként az A_0^n. Ebben a tekintetben a projektív sokaságok gyökeresen különböznek az affinoktól.

2. TÉTEL. *Projektív sokaságnak reguláris leképezés szerinti képe zárt.*

A *bizonyítás* felhasznál egy olyan fogalmat, amellyel később fogunk találkozni. Legyen $f\colon X \to Y$ tetszőleges kváziprojektív sokaságok reguláris leképezése. Egy $X \times Y$ sokaságnak egy olyan Γ_f részhalmazát, amely az $(x, f(x))$ alakú pontokból áll, az f leképezés grafikonjának nevezzük.

1. LEMMA. *Reguláris leképezés grafikonja zárt $X \times Y$-ban.*

Először is, elegendő feltételezni, hogy Y projektív tér. Valóban, $Y \subset P^m$, tehát $X \times Y \subset X \times P^m$, f meghatározza az $\bar{f}\colon X \to P^m$ leképezést és $\Gamma_f = \Gamma_{\bar{f}} \cap (X \times Y)$. Ezért legyen $Y = P^m$. Legyen i a P^m-nek önmagába való identikus leképezése. Tekintsük az $(f, i)\colon X \times P^m \to P^m \times P^m$, $(f, i)(x, y) = (f(x), y)$ reguláris leképezést. Nyilvánvaló, hogy Γ_f ősképe Γ_i-nek az (f, i) reguláris leképezésre nézve. A 4. § 2. pontban ellenőriztük, hogy zárt halmaznak reguláris leképezés szerinti ősképe zárt. Ezért minden a Γ_i-nek $P^m \times P^m$-beli zártságának ellenőrzésére vezethető vissza. Viszont Γ_i az $(x, y) \in P^m \times P^m$, $x = (u_0 : \ldots : u_n)$, $y = (v_0 : \ldots : v_n)$ pontokból áll, amelyeknél az

$(u_0 : \ldots : u_n)$-ek arányosak a $(v_0 \cdot \ldots \cdot v_n)$-ekkel. Ez felírható $u_i v_j = u_j v_i$; $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ $(i, j = 0, \ldots, n)$ alakban. A Γ_i zártsága az 1. tételből következik, így a lemma be van bizonyítva.

Térjünk vissza a tétel bizonyításához. Legyen Γ_f az f leképezés grafikonja, a $p \colon X \times Y \to Y$ pedig a $p(x, y) = y$ feltétellel megadott projekció. Nyilván $f(X) = p(\Gamma_f)$. Az 1. lemma alapján ezért a 2. tétel az általánosabb állításból következik:

3. TÉTEL. *Ha X egy projektív, Y pedig egy kváziprojektív sokaság, akkor a $p \colon X \times Y \to Y$ projekció zárt halmazokat zárt halmazokba visz át.*

A tétel bizonyítása visszavezethető annak igen egyszerű esetéhez. Először is, ha X zárt részhalmaza P^n-nek, akkor, bebizonyítva a tételt P^n-re, ezzel együtt bebizonyítjuk X-re is ($X \times Y$ zárt $P^n \times Y$-ban, és ha Z zárt $X \times Y$-ban, akkor zárt $P^n \times Y$-ban is). Ezért feltételezhetjük, hogy $X = P^n$. Másrészt, a zártság fogalmának lokális tulajdonsága miatt, lefedhetjük Y-t affin nyílt U_i halmazokkal és bebizonyíthatjuk a tételt ezek mindegyikére. Ezért tekinthetjük Y-t affin sokaságnak. Végül, ha Y zárt A^m-ben, akkor $P^n \times Y$ zárt $P^n \times A^m$-ben, így elegendő a tételt arra az esetre bizonyítani, mikor $X = P^n$, $Y = A^m$. Lássuk, mit jelent a tétel ebben az esetben. Az 1. tétel szerint bármely $\mathscr{L} \subset P^n \times A^m$ zárt részhalmaz az 1. pont (3) egyenleteivel adható meg, amelyeket $g_i(u, y) = 0$ $(i = 1, \ldots, t)$ alakban írunk fel. Nyilvánvaló, hogy ha $y_0 \in A^m$, akkor $p^{-1}(y_0)$ a $g_i(u, y_0) = 0$ rendszer összes nullától különböző megoldásaiból áll, tehát $y_0 \in p(\mathscr{L})$ akkor és csakis akkor, ha a $g_i(u, y_0) = 0$ egyenletrendszernek létezik nullától különböző megoldása. A 3. tétel tehát azt állítja, hogy bármely 1. pontbeli (3) rendszer esetén azon $y_0 \in A^m$ pontok T halmaza, amelyekre a $g_i(u, y_0) = 0$-nak van nullától különböző megoldása, zárt halmaz. A 4. § 1. pont 1. lemma szerint a $g_i(u, y_0) = 0$ $(i = 1, \ldots, t)$ rendszernek akkor és csakis akkor van nullától különböző megoldása, ha $(g_1(u, y_0), \ldots, g_t(u, y_0)) \not\supset I_s$ az összes $s = 1, 2, \ldots$-re. Most ellenőrizni fogjuk, hogy tetszőleges adott $s \geqq 1$-re azon $y_0 \in A^m$ pontok, amelyekre $(g_1(u, y_0), \ldots, g_t(u, y_0)) \not\supset I_s$, zárt T_s halmazt alkotnak. Akkor a $T = \bigcap T_s$ szintén zárt. Jelölje k_i a $g_i(u, y)$ homogén polinom $u_0, \ldots, u_n$ változók szerinti fokát. Legyenek $M^{(\alpha)}$-k valamilyen módon átindexelt s fokú egytagú kifejezések az $u_0, \ldots, u_n$ változóktól. A $(g_1(u, y_0), \ldots, g_t(u, y_0)) \supset I_s$ feltétel azt jelenti, hogy az összes $M^{(\alpha)}$ előáll

$$M^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{t} g_i(u, y_0) F_{i,\alpha}(u) \tag{1}$$

alakban. Összehasonlítva az s-ed fokú homogén összeadandókat, azt látjuk, hogy analóg egyenlőségnek kell fennállnia, amelyben $\deg F_{i,\alpha} = s - k_i$ (és $F_{i,\alpha} = 0$, ha $k_i > s$). Jelöljük $N_i^{(\beta)}$-val az $s - k_i$ fokú valamilyen módon átindexelt egytagokat. Látjuk, hogy az (1) összefüggés ekvivalens azzal, hogy az összes $M^{(\alpha)}$ egytag lineáris kombinációja a $g_i(u, y_0) N_i^{(\beta)}$ polinomoknak. Ez természetesen ekvivalens azzal, hogy a $g_i(u, y_0) N_i^{(\beta)}$ polinomok generálják az $u_0, \ldots, u_n$ változók s-ed fokú homogén polinomjainak az egész S lineáris vektorterét. Megfordítva, a $(g_1(u, y_0), \ldots, g_t(u, y_0)) \not\supset I_s$ feltétel azt jelenti, hogy az összes $g_i(u, y_0) N_i^{(\beta)}$ polinomok nem generálják az S teret. Hogy ezeket a feltételeket leírhassuk, a $g_i(u, y_0) N_i^{(\beta)}$ polinomok együtthatóit ki kell írnunk egy kvadratikus mátrixba és a mátrix minden $\delta = \dim S$-rendű minorát egyenlővé kell tennünk 0-val. Ezek a minorok nyilván a $g_i(u, y_0)$ polinomok együtthatóinak polinomjai, tehát az y_0 pont koordinátáinak a polinomjai. Éppen ezek adják a T_s halmaz egyenleteit. Ezzel a 3. tétel, tehát a 2. tétel is, be van bizonyítva.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha φ függvény reguláris az irreducibilis projektív sokaságon, akkor $\varphi \in k$, azaz φ konstans.*

Bizonyítás. Tekinthetjük a φ függvényt $f\colon X \to A^1$ leképezésnek, és így $\bar{f}\colon X \to P^1$ leképezésnek is. A φ regularitása az f leképezés regularitását is jelenti. Annál inkább reguláris az $\bar{f}$ leképezés, tehát — a 2. tétel szerint — annak képe zárt. Viszont, mivel f már reguláris leképezés és $f(X)=\bar{f}(X)$, így $\bar{f}(X)$ halmaz zárt és benne van A^1-ben, azaz nem tartalmaz végtelen távoli $x_\infty \in P^1$ pontot. Innen következik, hogy vagy $f(X)=A^1$, vagy $f(X)$ egybeesik az S véges halmazzal (2. § 1. pont. 3. példa). Az első eset nem lehetséges, mivel $f(X)$-nek zártnak kell lennie P^1-ben is. A^1 pedig nem zárt abban. Tehát $f(X)=S$. Ha S az $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ pontokból áll, akkor $X=\bigcup f^{-1}(\alpha_i)$ és ha $t>1$, akkor ez ellentmond az X irreducibilitásának. Ezért S egy pontból áll, ez pedig azt jelenti, hogy φ konstans.

Az 1. következmény és a 3. § 4. tétele jó példák arra, hogy az affin és projektív sokaságoknak homlokegyenest ellenkező tulajdonságai vannak. Affin sokaságon rengeteg reguláris függvény van, azok az egész $k[X]$ gyűrűt alkotják, viszont az irreducibilis projektív sokaságokon csak konstansok vannak. Íme az affin és projektív sokaságok ellentétességének egy másik példája.

2. KÖVETKEZMÉNY. *Projektív irreducibilis X sokaság Y affin sokaságba való $f\colon X \to Y$ reguláris leképezése X-et pontba viszi át.*

Legyen $Y \subset A^m$. Az f leképezés $f(x)=(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ függvénnyel adható meg. Az 1. következmény alapján a $\varphi_i(x)$ függvények mindegyike konstans: $\varphi_i=\alpha_i \in k$. Ezért $f(x)=(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Felhozunk még egy példát a 2. tétel alkalmazására. Ennek érdekében használni fogjuk az $n+1$ változós m-ed fokú formáknak a $P^{\nu_{n,m}}$ tér pontjaiként való ábrázolását (4. § 4. pont).

ÁLLÍTÁS. *Azon $\xi \in P^{\nu_{n,m}}$ pontok, amelyeknek reducibilis polinomok felelnek meg, zárt halmazt alkotnak.*

Az állítás azt mondja ki, hogy a polinom reducibilitásának a tulajdonságát fel lehet írni algebrai reláció alakjában annak együtthatói között. A másodrendű görbék esetében, azaz az $m=n=2$ esetben ez az összefüggés ismert az analitikus geometriából: ha $F=\sum_{i=0}^{2} a_{ik}u_i u_k$, akkor F reducibilis akkor és csakis akkor, ha $|a_{ik}|=0$.

Áttérve az állítás *bizonyítására,* jelöljük X-szel azon $\xi \in P^{\nu_{n,m}}$ pontok halmazát, amelyeknek reducibilis polinomok felelnek meg, X_k $(k=1, \dots, m-1)$ pedig jelölje azon pontok halmazát, amelyeknek olyan F polinomok felelnek meg, amelyek felbomlanak k és $m-k$ fokú tényezőkre. Nyilván $X=\bigcup X_k$ és elegendő bizonyítanunk minden X_k zárt voltát.

Tekintsük a $P^{\nu_{n,k}}$ és $P^{\nu_{n,m-k}}$ projektív tereket. Két — k és $m-k$ fokú — polinom szorzása meghatározza az $f\colon P^{\nu_{n,k}} \times P^{\nu_{n,m-k}} \to P^{\nu_{n,m}}$ leképezést, amely, amint azt könnyű belátni, reguláris. Nyilván $X_k=f(P^{\nu_{n,k}} \times P^{\nu_{n,m-k}})$. Mivel projektív terek szorzata projektív sokaság (amint azt az 1. pontban láttuk), így az X_k zárt volta következik a 2. tételből.

3. *Véges leképezések*

A 4. § 4. pontjában bevezetett projektálási leképezés egy fontos tulajdonsággal rendelkezik, amelynek megfogalmazásához felidézünk néhány algebrai fogalmat. Legyen A egy B gyűrűt tartalmazó gyűrű. Egy $a \in A$ elemet egésznek nevezünk B felett, ha kielégíti az $a^k + b_1 a^{k-1} + \ldots + b_k = 0$ egyenletet. A gyűrűt egésznek nevezzük B felett, ha bármely eleme B felett egész. Könnyű bebizonyítani (lásd pl. Зарисский и Самюэль, *Коммутативная алгебра,* 1. kötet V. fejezet 1. §), hogy az olyan A gyűrű, amely mint gyűrű végesen generált B felett, akkor és csakis akkor egész B felett, ha az véges típusú B feletti modulus.

Legyenek X és Y affin sokaságok és $f: X \to Y$ olyan reguláris leképezés, hogy $f(X)$ sűrű Y-ban. Akkor f^* a $k[Y]$-nak $k[X]$-be való izomorf beágyazását határozza meg. Ezt felhasználva $k[Y]$-t részgyűrűnek fogjuk tekinteni $k[X]$-ben.

1. Definíció. Az f leképezést végesnek nevezzük, ha $k[X]$ véges $k[Y]$ felett.

Az egész gyűrűk fent említett tulajdonságaiból következik, hogy két egész leképezés kompozíciója egész leképezés.

Tipikus példája a nem véges leképezésnek a 2. § 3. pont 3. példája.

Ha f véges leképezés, akkor bármely $y \in Y$ pontnak nem több mint véges számú őssképe van. Valóban, legyen $X \subset A^n$ és $t_1, \ldots, t_n - A^n$-beli koordináták mint függvények X-en. Elegendő bebizonyítanunk, hogy bármely t_i koordináta csak véges számú értéket vesz fel az $f^{-1}(y)$ halmazon. Definíció szerint t_i eleget tesz a $t_i^k + b_1 t_i^{k-1} + \ldots + b_k = 0$; $b_i \in k[Y]$ egyenletnek. Az $x \in f^{-1}(y)$, $y \in Y$ esetén olyan

$$t_i(x)^k + b_1(y) t_i(x)^{k-1} + \ldots + b_k(y) = 0 \tag{1}$$

egyenletet kapunk, amelynek véges számú gyöke van.

A végesség fogalmának a lényege abban áll, hogy amint y az Y-on változik, az (1) egyenlet egyetlen gyöke sem tart a végtelenhez, mivel a főegyüttható nem lesz 0. Ezért az y-nak Y-on való változásakor az $f^{-1}(y)$ pontok összefolyhatnak, de nem „tűnhetnek el". Ennek a megjegyzésnek a pontosítását célozza a

4. Tétel. *A véges leképezés epimorfizmus.*

Legyen $f: X \to Y$ véges leképezése X-nek és Y-affin sokaság, $y \in Y$. Jelölje $\mathfrak{M}_y$ a $k(Y)$ gyűrű olyan ideálját, amely azon függvényekből áll, amelyek 0 értéket vesznek fel az y pontban. Ha $t_1, \ldots, t_n$ koordináták mint függvények a sokaságon, és $y = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ akkor $\mathfrak{M}_y = (t_1 - \alpha_1, \ldots, t_n - \alpha_n)$. Az $f^{-1}(y)$ sokaság egyenletei $f^*(t_1) = \alpha_1, \ldots, f^*(t_n) = \alpha_n$ alakúak és az $f^{-1}(y)$ halmaz üres akkor és csakis akkor, ha

$$(f^*(t_1) - \alpha_1, \ldots, f^*(t_n) - \alpha_n) = k[X].$$

A következőkben nem fogunk különbséget tenni az $u \in k[Y]$ és $f^*(u) \in k[X]$ függvények között, $k[Y]$-t a $k[X]$ részgyűrűjének tekintve. Akkor az előbbi feltétel $(t_1 - \alpha_1, \ldots, t_n - \alpha_n) = k[Y]$, vagyis $\mathfrak{M}_y k[X] = k[Y]$ alakban írható fel. Abból, hogy $k[X]$ egész $k[Y]$ felett, következik, hogy $k[X]$ véges típusú $k[Y]$ feletti modulus. Ennek alapján a 4. tétel következik a tisztán algebrai állításból.

2. Lemma. *Ha B gyűrű A (egységelemes) részgyűrű feletti véges típusú modulus, akkor bármely valódi $\mathfrak{a} \in A$ ideálra $\mathfrak{a}B \neq B$.*

Legyen $B=A\omega_1+\ldots+A\omega_n$; akkor abból, hogy $\mathfrak{a}B\neq B$, következik, hogy $\omega_i\in\mathfrak{a}\omega_1+\ldots+\mathfrak{a}\omega_n$, azaz $\omega_i=\sum\alpha_{ij}\omega_j$, $\alpha_{ij}\in\mathfrak{a}$. Innen következik, hogy $\sum_j(\alpha_{ij}-\delta_{ij})\omega_j=0$ és így $d\omega_j=0$ $(j=1,\ldots,n)$, $d=|\alpha_{ij}-\delta_{ij}|$. Ezért $dB=0$, tehát $d=0$. Mivel $\alpha_{ij}\in\mathfrak{a}$, az $|\alpha_{ij}-\delta_{ij}|=0$ egyenlőségből következik, hogy $\mathfrak{a}=A$. Az ellentmondás bizonyítja a tételt.

A végesség tulajdonsága lokális.

5. TÉTEL. *Ha $f\colon X\to Y$ reguláris leképezése az affin sokaságoknak és bármely $x\in Y$ pontnak van olyan affin $U\ni x$ környezete, hogy $V=f^{-1}(U)$ affin és $f\colon V-U$ véges, akkor f is véges.*

Jelölje $k[X]=B$, $k[Y]=A$. Bármely pontnál vehetjük a tétel feltételeinek eleget tevő U fő affin környezetet (l. a 11. feladatot).

Legyen U^{g_α} ilyen nyílt halmazok rendszere, amelyek számát tekinthetjük végesnek. Akkor $Y=\bigcup U^{g_\alpha}$, azaz az összes g_α által generált ideál egyenlő A-val. Esetünkben

$$V_\alpha=f^{-1}(U^{g_\alpha})=Vf^*(g_\alpha),\quad k[U^{g_\alpha}]=A\left[\frac{1}{g_\alpha}\right];\quad k[V_\alpha]=B\left[\frac{1}{g_\alpha}\right].$$

Feltétel szerint $B\left[\frac{1}{g_\alpha}\right]$-nek véges $\omega_{i,\alpha}$ bázisa van $A\left[\frac{1}{g_\alpha}\right]$ felett. Közben feltételezhetjük, hogy $\omega_{i,\alpha}\in B$; ha ugyanis a bázis $\frac{\omega_{i,\alpha}}{g_\alpha^{m_i}}$ elemekből állna, ahol $\omega_{i,\alpha}\in B$, akkor az $\omega_{i,\alpha}$ elemek is bázist alkotnának. Tekintsük az összes $\omega_{i,\alpha}$ bázisok unióját és bebizonyítjuk, hogy az B-nek A-feletti bázisa.

Bármely $b\in B$ előállítható

$$b=\sum_i\frac{a_{i,\alpha}}{g_\alpha^{n_\alpha}}\omega_{i,\alpha}$$

alakban, minden α-ra. Mivel a $g_\alpha^{n_\alpha}$ elemek egység ideált generálnak A-ban, léteznek olyan $h_\alpha\in A$ elemek, hogy $\sum_\alpha g_\alpha^{n_\alpha}h_\alpha=1$. Ezért

$$b=b\sum_\alpha g_\alpha^{n_\alpha}h_\alpha=\sum_i\sum_\alpha a_{i,\alpha}h_\alpha\omega_{i,\alpha},$$

ami bizonyítja a tételt.

2. DEFINÍCIÓ. Kváziprojektív sokaságok $f\colon X\to Y$ reguláris leképezését végesnek nevezzük, ha bármely $y\in Y$ pontnak van olyan affin V környezete, hogy az $U=f^{-1}(V)$ halmaz affin, és az affin sokaságok $f\colon U\to V$ leképezése véges.

Nyilvánvaló, hogy bármely véges f leképezés esetén az $f^{-1}(y)$ halmaz véges bármely $y\in Y$-ra.

A 4. tételből következik, hogy bármely véges leképezés epimorfizmus.

6. TÉTEL. *Ha X zárt P^n-ben és $X\subset P^n-E$, ahol E egy d dimenziós lineáris altér, akkor a $\pi\colon X\to P^{n-\alpha-1}$ projekció meghatároz egy véges $X\to\pi(X)$ leképezést.*

Bizonyítás. Legyenek $y_0,\ldots,y_{n-d-1}$ homogén koordináták P^{n-d-1}-ben és legyen π az $y_j=L_j(x)$, $x\in X$ $(j=0,\ldots,n-d-1)$ képletekkel megadva. Nyilvánvaló, hogy $U_i=\pi^{-1}(A_i^{h-d-1})\cap X$ az $L_i(x)\neq 0$ feltétellel adható meg és affin nyílt részhalmaz X-ben. Bebizonyítjuk, hogy $\pi: U_i \to A_i^{n-d-1}\cap\pi(X)$-véges leképezés. Bármely $g\in k[U_i]$ függvény $g=\dfrac{G_i(U_0\dots U_n)}{L_i^m}$ alakú, ahol G_i-m-ed fokú formák. Tekintsük a $\pi_1: X\to P^{n-d}$: $z_j=L_j^m(x)$ $(j=0, \dots, n-d-1)$, $z_{n-d}=G_m(x)$ leképezést, ahol $z_0, \dots$ $\dots, z_{n-d}$ a P^{n-d} homogén koordinátái. Ez reguláris leképezés és $\pi_1(X)$ képe zárt P^{n-d}-ben a 2. tétel alapján. Legyen $F_1=\dots=F_s=0$ ennek az egyenlete. Mivel $X\subset P^n-E$, így az L_i $(i=0, \dots, n-d-1)$ formáknak nincs közös nullhelyük X-en. Ez azt jelenti, hogy a $0=(0:\dots:1)$ pont nincs a $\pi_1(X)$-en, más szóval, hogy a $z_0=\dots$ $\dots=z_{n-d-1}=F_1=\dots=F_s=0$ egyenletnek csak nulla megoldásuk van P^{n-d}-ben. A 4. § 1. pont 1. lemmája alapján ebből következik, hogy $(z_0, \dots, z_{n-d-1}, F_1, \dots, F_s)\supset$ $\supset I_k$ valamely $k>0$-ra. Speciálisan $(z_0, \dots, z_{n-d-1}, F_1, \dots, F_s)\ni z_{n-a}^k$. Ez azt jelenti, hogy

$$z_{n-d}^k=\sum_{j=0}^{n-d-1} z_j H_j+\sum_{j=1}^{s} F_j P_j,$$

ahol H_j és P_j polinomok. H^q-val jelölve a H polinom q-ad fokú homogén összeadandóját, innen azt kapjuk, hogy

$$\Phi(z_0, \dots, z_{n-d}) = z_{n-d}^k-\sum z_j H_j^{(k-1)}=0 \text{ a } \pi_1(X)\text{-en.} \tag{2}$$

A Φ homogén polinom foka k és mint a z_{n-d} polinomjának a főegyütthatója 1:

$$\Phi = z_{n-d}^k-\sum_{j=0}^{k-1} A_{k-j}(z_0, \dots, z_{n-d-1})\cdot z_{n-d}^j. \tag{3}$$

Behelyettesítve (2)-be a π transzformáció képletét, azt kapjuk, hogy $\Phi(L_0^m, \dots, L_{n-d-1}^m, G_m)=0$ az X-en, és a Φ (3) alakú. Elosztva ezt az összefüggést L_i^m-mel, megkapjuk a kívánt

$$g^k+\sum_{j=0}^{k-1} A_{k-j}(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-d-1})g^j=0$$

összefüggést, ahol $x_r=\dfrac{y_r}{y_i}$ — koordináták A_i^n-ben. A tételt bebizonyítottuk.

Veronese leképezésének alkalmazása az eredmény lényeges általánosítására ad lehetőséget.

7. TÉTEL. *Legyenek $F_0, \dots, F_s$ m-edfokú lineárisan független formák P^n-en, amelyeknek nincs közös zérushelyük az $X\subset P^n$ zárt sokaságon. Akkor a $\varphi(x)=(F_0(x):\dots$ $\dots: F_s(x))$ leképezés véges $X\to\varphi(X)$ leképezést határoz meg.*

Legyen $v_m: P^n\to P^{\nu_{n,m}}$ *Veronese*-féle leképezés és L_i-lineáris formák $P^{\nu_{n,m}}$-en, amelyek a P^n-en adott F_i formáknak felelnek meg. Nyilvánvaló, hogy akkor $\varphi=\pi\cdot v_m$, ahol π az $L_0, \dots, L_s$ formákkal definiált projekció. Mivel v_m izomorfizmus az X és $v_m(X)$ között, így a tétel a 6. tételből következik.

4. *Normalizációs tételek*

Tekintsük az egész P^n-től különböző $X \subset P^n$ irreducibilis projektív sokaságot. Akkor létezik olyan $x \in P^n$ pont, $x \notin X$, hogy az X-nek x pontból való φ projektáló leképezése reguláris. A 2. tételnek megfelelően a $\varphi(\bar{X}) \subset P^{n-1}$ sokaság projektív, a $\varphi: X \to \varphi(X)$ leképezés pedig véges a 8. tétel miatt. Ha $\varphi(X) \neq P^{n-1}$, akkor ahhoz alkalmazhatjuk ugyanazokat az okoskodásokat. Végül olyan $X \to P^n$ leképezéshez jutunk, amely véges lesz, mint véges leképezések kompozíciója. Az általunk bizonyított eredményt normalizációs tételnek nevezzük.

8. TÉTEL. *Bármely X irreducibilis projektív sokasághoz létezik $\varphi: X \to P^m$ véges leképezés a projektív térre.*

Analóg eredmény igaz az affin sokaságokra is. Bizonyítás céljából tekintsünk egy $X \subset A^n$ affin sokaságot. Tételezzük fel, hogy A^n nyílt P^n-ben és jelöljük $\bar{X}$-el az X lezártját P^n-ben. Legyen $X \neq A^n$. Kiválasztunk egy $x \in P^n - A^n$, $x \notin \bar{X}$ pontot, és tekintjük a $\varphi: X \to P^{n-1}$ projekciót ebből a pontból. Eközben X a P^{n-1} „véges" pontjaiba projektálódik, azaz az $A^{n-1} = P^{n-1} - \varphi(L)$ affin tér pontjaiba. Ezt az eljárást addig folytathatjuk, amíg $X \neq A^n$ és végeredményben olyan $\varphi: \bar{X} \to P^n$ projekciót kapunk, amelyre $\varphi(X) = A^n$. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt.

9. TÉTEL. *Bármely X irreducibilis affin sokasághoz létezik $\varphi: X \to A^m$ véges leképezés az affin térre.*

A 8. és 9. tétel lehetőséget ad a projektív és affin sokaságok némely (nagyon durva) tulajdonsága vizsgálatának visszavezetésére a projektív, ill. affin terek vizsgálatára. $m = 1$ esetében ez *Riemann* szemlélete, aki az algebrai görbéket a *Riemann*-féle szférák lefedéseként tekintette (P^1 a komplex számok teste felett).

A 9. tétel azt jelenti, hogy a zérusosztó mentes k test felett végesen generált A gyűrű véges a polinomgyűrűvel izomorf test felett. Ezt az eredményt közvetlenül is könnyű bizonyítani. Ebből könnyű levezetni *Hilbert* tételét a gyökökről (l. Зарисский и Самюэль, *Коммутативная алгебра* II. kötet, VII. fejezet. 3. §).

Feladatok

1. Bizonyítandó, hogy a $\varphi(P^r \times P^s)$ sokaság nincsen benne a $P^{(r+1)(s+1)-1}$ tér egyetlen valódi alterében sem.

2. Tekintsük a sokaságok $P^1 \times P^1 \to P^1: p_1(x, y) = x;\ p_2(x, y) = y$ leképezését. Bizonyítandó, hogy $p_1(X) = p_2(X) = P^1$ teljesül bármely zárt irreducibilis $X \subset P^1 \times P^1$ sokaságra, ha X a következő típusok egyikéhez sem tartozik: a) az $(x_0, y_0) \in P^1 \times P^1$ pont, b) az $x_0 \times P^1$ halmaz, ahol x_1 a P^1 rögzített pontja, c) a $P^1 \times y_0$ halmaz.

3. Ellenőrizzük közvetlenül az 1. tétel 1. következményét az $X = P^n$ esetében.

4. Legyen $X = A^2 - x$, ahol x egy pont. Bizonyítandó, hogy X nem izomorf sem affin, sem projektív sokasággal (hasonlítsuk össze a 4. § 5. feladatával).

5. Bizonyítsuk be ugyanazt, mint a 4. feladatban, a $P^2 - x$-re.

6. Bizonyítsuk be ugyanazt, mint a 4. és 5. feladatban, a $P^1 \times A^1$-re.

7. Véges-e az f: $A^1 \to X$ leképezés, ahol X az $y^2 = x^3$, $(t) = (t^2, t^3)$ egyenlettel van megadva?

8. Legyen X hiperfelület P^r-ben, L egy egyenes, amely áthalad az origón, és φ_L projektálási leképezése X-nek L-lel párhuzamosan valamely $r-1$ dimenziós altérre, amely nem tartalmazza L-et. Jelöljük S-sel az olyan L egyenesek halmazát, amelyekre φ_L nem véges. Bizonyítsuk, hogy S algebrai sokaság. Határozzuk meg S-t, ha $r=2$ és X az $xy=1$ egyenlettel van megadva.

9. Bizonyítandó, hogy nyílt affin részhalmazok metszete affin. (Használjuk fel a 2. § 3. pont 10. példáját.)

10. Bizonyítandó, hogy az $n+1$ változós $m=k \cdot l$-ed fokú olyan formák, amelyek formák l-edik hatványai, a $P^{\nu_{m,n}}$ valamely zárt részhalmaza pontjainak felelnek meg.

6. §. Dimenzió

1. *A dimenzió definíciója*

A 2. §-ban láttuk, hogy a zárt algebrai $X \subset A^2$ részsokaságok a pontok véges halmazai, sík algebrai görbék és maga az A^2. Ez a felosztás három típusra megfelel a dimenzió intuitív fogalmának — 0,1 és 2 dimenziós sokasággal van dolgunk. Most definiálni fogjuk tetszőleges algebrai sokaság dimenziójának a fogalmát.

Hogyan lehet eljutnni az ilyen definícióhoz? Először is az n-dimenziós projektív, ill. affin tér dimenzióját természetes n-nel egyenlőnek tekinteni. Másodsorban, ha létezik véges $X \to Y$ leképezés, akkor természetes úgy tekinteni, hogy X és Y dimenziója egyenlő. Mivel — a normalizációs tételeknek (5. § 8. és 9. tételei) megfelelően — bármely X projektív vagy affin sokaságnak létezik véges leképezése valamely P^m vagy A^m térre, természetes ezt az m-et venni a sokaság dimenziójának a fogalmául. Közben azonban felvetődik a kérdés ezen definíció korrekt voltáról, azaz nem létezhet-e két $f\colon X \to A^m$ és $g\colon X \to A^n$ véges leképezés, ahol $m \neq n$? Tételezzük fel, hogy X irreducibilis. Akkor az $f\colon X \to A^n$ leképezés végességéből következik, hogy a racionális függvények $k(X)$ teste véges bővítése az $f^* k(A^n)$ testnek, amely viszont izomorf a $k(T_1, \dots, T_n)$ testtel. Ezért a $k(X)$ transzcendencia foka n, ami az n szám olyan jellemzését adja, amely független az $f\colon X \to A^n$ véges leképezés kiválasztásától. Ezzel bizonyos mértékig megindokoltuk a dimenzió definícióját.

DEFINÍCIÓ. Egy irreducibilis kváziprojektív X sokaság dimenziójának a $k(X)$ test transzcendencia fokát nevezzük.

Reducibilis sokaság dimenziójának a sokaság irreducibilis komponensei dimenzióinak a maximumát nevezzük.

Az X sokaság dimenzióját $\dim X$-szel jelöljük.

Ha Y egy zárt részsokaság X-ben, akkor a $\dim X - \dim Y$ számot az Y kodimenziójának nevezzük X-ben és $\operatorname{codim} Y$ vagy $\operatorname{codim}_X Y$ jellel jelöljük.

Megjegyezzük, hogy ha X irreducibilis sokaság és U nyílt Y-ban, akkor $k(U) = k(X)$ tehát $\dim U = \dim X$.

1. PÉLDA. $\dim A^n = \dim P^n = n$, mivel a $k(A^n)$ test egybeesik az n-változós racionális függvények testével. Mivel definíció szerint a dimenzió invariáns a biracionális izomorfizmussal szemben, így látjuk, hogy A^n és A^m biracionálisan nem izomorfak, ha $n \neq m$.

2. PÉLDA. A sík algebrai görbe dimenziója 1, amint azt az 1. §-ban láttuk.

3. PÉLDA. Ha X egy pontból áll, akkor nyilván $\dim X=0$, tehát ugyanez igaz, ha X véges halmaz. Megfordítva, ha $\dim X=0$, akkor X véges halmaz. Elegendő ezt ellenőrizni irreducibilis affin X sokaságra. Legyen $X\subset A^n$ és $t_1, \dots, t_n$ az A^n koordinátái, mint az X-en értelmezett függvények, azaz mint a $k[X]$ elemei. Feltétel szerint t_i algebra k felett, tehát csak véges sok értéket vehet fel. Innen már következik, hogy X véges.

4. PÉLDA. Bebizonyítjuk, hogy ha X és Y irreducibilis sokaságok, akkor $\dim(X\times Y)=\dim X+\dim Y$.

Elegendő megvizsgálni azt az esetet, mikor X és Y affin sokaságok, $X\subset A^N$, $Y\subset A^M$. Legyen $\dim X=n$ és $\dim Y=m$, $t_1, \dots, t_N$ és $u_1, \dots, u_M$ az A^N és A^M-beli koordináták, amelyeket megfelelően az X-en, ill. Y-on értelmezett függvényeknek tekintünk. $t_1, \dots, t_n$ a $k(X)$-ben algebrailag függetlenek, az $u_1, \dots, u_m$ pedig a $k(Y)$-ban. Definíció szerint $k[X\times Y]$ generálható a $t_1, \dots, t_N$, $u_1, \dots, u_M$ elemekkel és mindezen elemek feltételezésünk alapján algebrailag függenek a $t_1, \dots, t_n$, $u_1, \dots, u_m$ elemektől. Elegendő bebizonyítanunk, hogy az utóbbi elemek függetlenek. Tételezzük fel, hogy közöttük létezik egy $F(T; U)=F(T_1, \dots, T_n, U_1, \dots, U_m)=0$ összefüggés az $X\times Y$-on. Akkor bármely $x\in X$ pont esetén $F(x, u_1, \dots, u_m)=0$ az Y-on. Mivel $u_1, \dots, u_m$ függetlenek Y-on, azért az $F(x, U)$ polinom minden együtthatója 0. Ez azt jelenti, hogy az $a_i(T_1, \dots, T_n)$ polinom egyenlő 0-val az X-en. Most felhasználjuk a $t_1, \dots, t_n$ elemek függetlenségét X-en és innen azt kapjuk, hogy minden $a_i(T_1, \dots, T_n)=0$, vagyis azonosan teljesül $F(T, U)=0$ is.

Az egydimenziós algebrai sokaságokat görbéknek, a kétdimenziósokat felületeknek nevezzük.

1. TÉTEL. *Ha* $X\subset Y$, *akkor* $\dim X\leqq\dim Y$. *Ha* Y *irreducibilis*, $X\subset Y$ *és* $\dim X=\dim Y$, *akkor* $X=Y$.

Elegendő *bebizonyítani* a tételt arra az esetre, amikor X és Y affinok és irreducibilisek.

Legyen $X\subset Y\subset A^N$ és $\dim Y=n$. Akkor a $t_1, \dots, t_N$ koordináták között minden $n+1$ algebrailag függ mint a $k[Y]$ elemei, azaz az Y-on egy $F(t_{i_1}, \dots, t_{i_{n+1}})=0$ összefüggéssel vannak összekapcsolva. Annál inkább teljesül az az X-en. Ez pedig azt jelenti, hogy a $k(X)$ test transzcendencia foka nem nagyobb n-nél, azaz $\dim X\leqq\dim Y$.

Legyen $\dim X=\dim Y=n$. Akkor valamely n számosságú részrendszer a $t_1, \dots, t_N$ koordinátáktól független X-en. Legyen ez éppen $t_1, \dots, t_n$. Annál inkább függetlenek ezek Y-on. Legyen $u\in k[Y]$, $u\neq 0$ az Y-on. Akkor u algebrailag függ a $t_1, \dots, t_n$-től Y-on, azaz teljesül az

$$a_0(t_1, \dots, t_n)u^k+\dots+a_k(t_1, \dots, t_n)=0 \text{ az } Y\text{-on} \tag{1}$$

összefüggés.

Az (1) bal oldalán a polinomot irreducibilisnak választhatjuk, és akkor $a_k(t_1, \dots, t_n)\neq 0$ az Y-on. Annál inkább igaz az (1) összefüggés az X-en. Tételezzük fel, hogy $u=0$ az X-en. Akkor (1)-ből következik, hogy $a_k(t_1, \dots, t_n)=0$ az X-en, azonban mivel $t_1, \dots, t_n$ feltétel szerint független X-en, így $a_k(T_1, \dots, T_n)=0$ az egész A^N-en. Ez ellentmond annak, hogy $a_k(t_1, \dots, t_n)\neq 0$ az Y-on. Vagyis ha $u=0$ az X-en, akkor $u=0$ az Y-on is, ez pedig azt jelenti, hogy $X=Y$.

Amint láttuk, az irreducibilis sík algebrai görbe dimenziója 1.

Ennek a ténynek az általánosítása a következő eredmény.

2. TÉTEL. *Az A^N vagy P^N-beli hiperfelület minden irreducibilis komponensének kodimenziója* 1.

Bizonyítás. Elegendő megvizsgálni az A^N-beli hiperfelület esetét. Legyen az $X \subset A^N$ sokaság az $F(T)=0$ egyenlettel megadva. Az $F=F_1 \cdot \ldots \cdot F_k$ irreducibilis tényezőkre való bontásnak megfelel az $X=X_1 \cup \ldots \cup X_k$ előállítás, ahol X_i az $F_i=0$ egyenlettel van megadva. Nyilvánvaló, hogy a tételt elég bizonyítani az X_i sokaságokra. Bebizonyítjuk, hogy azok irreducibilisek. Ha X_i reducibilis volna, akkor léteznének olyan G és H polinomok, hogy $G \cdot H=0$ az X_i-n, $G \neq 0$, $H \neq 0$ az X_i-n. *Hilbert* tételéből a gyökökről következik, hogy valamely $l>0$ esetén $F_i/(G \cdot H)^l$. Az F_i irreducibilis volta miatt innen az következik, hogy vagy F_i/G vagy F_i/H, ami ellentmond a $G \neq 0$, $H \neq 0$ az X_i-*n* feltételnek.

Tételezzük fel, hogy az $F_i(T)$ polinomban szerepel a T_N változó, és bebizonyítjuk, hogy a $t_1, \ldots, t_{N-1}$ koordináták algebrailag függetlenek X_i-n. Valóban, az X_i-n teljesülő $G(t_1, \ldots, t_{N-1})=0$ összefüggésből az következne, hogy valamely $l>0$-ra F_i/G^l, ami lehetetlen, mivel G nem tartalmazza T_N-t. Ilyen módon dim $X \geqq N-1$, és mivel $X \neq A^N$, az 1. tételből következik, hogy dim $X_i=N-1$.

3. TÉTEL. *Bármely olyan $X \subset A^N$ sokaság, amelynek minden komponense 1 kodimenziós, hiperfelület, és az $\mathscr{I}_X$ ideál főideál.*

Elegendő megvizsgálni azt az esetet, amikor X irreducibilis. Mivel $X \neq A^N$ (mivel dim $X=N-1$), így létezik nullától különböző olyan F polinom, amely egyenlő 0-val az X-en. X sokaság irreducibilis volta miatt létezik az F polinomnak olyan H irreducibilis tényezője, amely szintén egyenlő 0-val X-en. Bebizonyítjuk, hogy $\mathscr{I}_X=(H)$. Valóban, ha $G=0$ az X-en, akkor HILBERT gyökökről szóló tétele szerint H/G^k valamely $k>0$ esetén. H irreducibilis volta miatt innen következik H/G, azaz $G \in (H)$.

Analóg módon bizonyítható, a 3. tétel második variánsa.

3'. TÉTEL. *Bármely olyan $X \subset P^{N_1} \times \ldots \times P^{N_k}$ részsokaság, amelynek minden komponense egydimenziós, megadható egy egyenlettel, amely homogén a változók k csoportjának mindegyikére nézve.*

Mindössze a polinomok irreducibilis tényezőkre való bontásának egyértelműsége helyett a minden változó csoportjára nézve homogén polinomok ugyanilyen polinomokra való felbontásának egyértelműségét kell felhasználni. Ez abból következik, hogy ha $F(x_0, \ldots, x_{N_1}, y_0, \ldots, y_{N_2}, \ldots, u_0, \ldots, u_{N_k})$ homogén minden $(x_0, \ldots, x_{N_1}), \ldots, (u_0, \ldots, u_{N_k})$ változó csoportra nézve, és $F=G \cdot H$ akkor G és H is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

2. *Hiperfelülettel való metszet dimenziója*

Ha megkíséreljük vizsgálat tárgyává tenni az olyan sokaságot, amely egynél több egyenlettel van meghatározva, akkor rögtön a sokaság hiperfelülettel való metszetének dimenziója kérdéséhez jutunk el. Ezt a kérdést először a projektív sokaságok esetén fogjuk vizsgálni. Ha X zárt P^N-ben és az F formára $F \neq 0$ az X-en, akkor X_F-fel fogjuk jelölni azt az X zárt részsokaságot, amelyet az $F=0$ feltétel határoz meg.

Bármely $X\subset P^N$ projektív sokasághoz található olyan $G(U_0, \ldots, U_N)$ tetszőleges előre megadott m fokú forma, amely nem egyenlő 0-val az X_i komponensek egyikén sem. Ennek érdekében elegendő kiválasztani az X minden X_i komponensében egy $x_i \in X_i$ pontot és meghatározni azt az L lineáris formát, amely nem egyenlő 0-val ezen pontok egyikén sem. Így G gyanánt elegendő venni L-nek megfelelő hatványát. Legyen X zárt P^N-ben és $F\neq 0$ az X-en. Az 1. tétel miatt $\dim X_F < \dim X$. Legyen $X_F = X^{(i)}$ és alkalmazva rá ugyanazt az okoskodást, meghatározzuk az F_1 formát, ahol $\deg F_1 = \deg F$, amely nem egyenlő 0-val az $X^{(i)}$ egyetlen komponensén sem. Így az $X^{(i)}$ sokaságoknak és az F_i $(i=0, \ldots)$ formáknak egy olyan sorozatát kapjuk, amelyre

$$X = X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset \ldots \supset X^{(i+1)} = X^{(i)}_{F_i}, \; F_0 = F. \tag{1}$$

Az 1. tétel szerint $\dim X^{(i+1)} < \dim X^{(i)}$. Ezért, ha $\dim X = n$, akkor $X^{(n+1)}$ üres. Más szóval $F_0 = F, F_1, \ldots, F_n$-nek nincs közös nullapontjuk X-en.

Legyen most X irreducibilis sokaság. Tekintsük a $\varphi\colon X \to P^n$ leképezést:

$$\varphi(x) = \big(F_0(x) : \ldots : F_n(x)\big). \tag{2}$$

Ez a leképezés eleget tesz az 5. § 7. tétel feltételeinek, így a tétel miatt az $X \to \varphi(x)$ leképezés véges. Viszont ha az $X \to Y$ leképezés véges, akkor, amint láttuk, $\dim X = \dim Y$. Ezért $\dim \varphi(X) = \dim X = n$, és mivel az 5. § 2. tétel miatt $\varphi(X)$ zárt P^n-ben, így $\varphi(x) = P^n$ az 1. pont 1. tétel alapján. Tételezzük most fel, hogy $\dim X^{(1)} = \dim X_F < n-1$. Akkor az (1) sorozatban már $X^{(n-1)}$ üres. Más szóval az $F_0, \ldots, F_{n-1}$ formáknak nincs közös zérus helyük X-en. Ez azt jelenti, hogy a $(0:0:\ldots:0:1)$ pont nincs a $\varphi(X)$-en, ez pedig ellentmond annak, hogy $\varphi(X) = P^n$. Ezzel bebizonyítottuk a következő eredményt.

4. TÉTEL. *Ha az F forma nem egyenlő 0-val az irreducibilis projektív X sokaságon, akkor* $\dim X_F = \dim X - 1$.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Az X projektív sokaságon léteznek tetszőleges $s < \dim X$ dimenziójú részsokaságok.*

2. KÖVETKEZMÉNY. *(A dimenzió induktív definíciója.) Az X irreducibilis projektív sokaságra* $\dim X = 1 + \sup \dim Y$, *ahol Y az összes valódi részsokaság X-ben.*

3. KÖVETKEZMÉNY. *Az irreducibilis projektív X sokaság dimenziója definiálható úgy, mint olyan legnagyobb n szám, amelyre létezik olyan $X \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots \supset Y_n$ lánc, ahol $Y_i \neq Y_{i+1}$, $X \neq Y_1$ és az Y_i-k irreducibilisek.*

4. KÖVETKEZMÉNY. *Egy X projektív sokaság n dimenziója definiálható mint $N-s-1$, ahol s az X-et nem metsző P^N-beli lineáris alterek dimenziójának a maximuma.*

Legyen $E \subset P^N$ lineáris altér és $\dim E = s$. Ha $s \geqq N-n$, akkor E megadható nem több mint n egyenlettel, és a 4. tétel egymásutáni alkalmazásával belátható, hogy $\dim (X \cap E) = 0$, tehát $X \cap E$ nem üres (az üres halmaz dimenziója -1!). Behelyettesítve $m=1$-et, az (1) sorozat konstrukciója során $N-n-1$ lineáris formát kapunk: $L_0, \ldots, L_{N-n}$, amelyeknek nincs közös zérushelyük X-ben. Ha E az ezekkel meghatározott altér, akkor $\dim E = N-n-1$ és $X \cap E$ üres.

5. KÖVETKEZMÉNY. *Az r darab $F_1, \ldots, F_r$ forma zérushelyeinek a halmaza egy n dimenziós sokaságon legalább $n-r$ dimenziós.*

A bizonyítást a 4. tétel $r-1$-szeres alkalmazásával kapjuk.

MEGJEGYZÉS. Az 5. következmény egy elég erős egzisztencia tételt ad: ha $r \leqq n$, akkor r formának van közös zérushelye az n dimenziós sokaságon. Például ($X=P^n$ esetben) n darab $n+1$ ismeretlenes homogén egyenletnek létezik nemtriviális megoldása. Ezen egzisztencia tételből egy sor fontos következtetést lehet levonni.

1°. P^2-en bármely két görbe metszi egymást (mivel bármely görbe egy homogén egyenlettel van megadva). A $Q \subset P^3$ másodrendű felületen léteznek nem metsző görbék, például ugyanazon generátor család* egyenesei. Ezért P^2 és Q nem izomorfak. Mivel ezek biracionálisan izomorfak (3. § 3. pont 1. példa), egy példát kaptunk két biracionálisan izomorf, de nem izomorf projektív sokaságra. Ezzel a példával később még találkozni fogunk.

2°. A 3. tétel nem igaz már a másodrendű Q felületek görbéire sem: bármely görbe nem határozható meg egy P^3-beli formának nullával való egyenlővé tételével. Valóban, feltételezve, hogy mindkét egymást nem metsző görbe, amelyeket fentebb meghatároztunk a Q-n, az $F_1=0$ és $F_2=0$ egyenlettel van megadva, ellentmondásba kerülünk az 5. következménnyel, amely szerint az $F_1=0$, $F_2=0$, $G=0$ ($G=0$ a Q egyenlete) rendszernek van megoldása.

5. TÉTEL. *A 4. tétel feltételei mellett az X_F sokaság minden komponensének egyenlő a dimenziója* dim $X-1$*-gyel.*

Tekintsük a $\varphi: X \to P^n$ ($n=\dim X$) véges leképezést, amelyet a 4. tétel bizonyítása közben konstruáltunk. Legyenek A_i^n a P^n-t lefedő nyílt affin halmazok, akkor $\varphi^{-1}(A_i^n)=U_i$ nyílt affin halmaz X-ben, amint azt könnyű belátni *Veronese* leképezésének alkalmazásával $m=\deg F$ mellett. Nyilvánvalóan elegendő bebizonyítani, hogy az $X_F \cap U_i$ affin sokaság minden komponensének a dimenziója $n-1$ az összes $i=1, \ldots, n$-re. A következőkben okoskodásunk valamely rögzített U_i-re fog vonatkozni, amelyet U-val fogunk jelölni. Nyilván $X_F \cap U = U_f$, ahol $f=\frac{F}{F_i}$, azaz az U-n megegyezik az $f \in k[U]$ reguláris függvények zérushelyeinek a halmazával. Megkonstruáltuk a $\varphi: U \to A^n$ véges leképezést, amelyet n reguláris $f_1, \ldots, f_n$ függvény határoz meg, ahol $f_1=f$.

Annak bebizonyítására, hogy az U_f minden komponensének dimenziója $n-1$, elegendő megmutatni, hogy azok dimenziója nem kevesebb $n-1$-nél. Be fogjuk bizonyítani, hogy az $f_2, \ldots, f_n$ függvények ezen komponensek mindegyikén algebrailag függetlenek. Legyen $P \in \varkappa[T_2, \ldots, T_n]$. Annak bizonyítása érdekében, hogy $R=P(f_2, \ldots, f_n)$ nem egyenlő 0-val az U_f halmaz egyetlen komponensén sem, elegendő megmutatnunk, hogy az $R \cdot Q=0$ összefüggésből az U_f-en, $Q \in \varkappa[U]$, következik, hogy $Q=0$ az U_f-en. Valóban, ha $U=U^{(1)} \cup \ldots \cup U^{(t)}$ nem redukálható felbontás irreducibilis komponensekre és $R=0$ az $U^{(1)}$-en, akkor Q gyanánt lehet venni bármely olyan függvényt, amely nulla az $U^{(1)} \cup \ldots \cup U^{(t)}$-n, de nem az az $U^{(1)}$-en. Akkor $R \cdot Q=0$ az U_f-en, de $Q \neq 0$ az U_f-en. *Hilbert* gyökökről szóló tétele szerint állításunkat átfogalmazhatjuk így: ha $f/(R(Q))^l$ valamely $l>0$-ra, akkor f/Q^k valamely $k>0$-ra.

* Семейство

Ilyen módon az 5. tétel következik az alábbi tisztán algebrai tényből.

LEMMA. *Legyen* $B=k[T_1, \ldots, T_r]$ és $A\supset B$ *egy B felett egész zérusosztómentes gyűrű,* $x=T_1$, $y=P(T_2, \ldots, T_n)\neq 0$, *és* $u\in A$. *Ha* $x/(yu)^l$ *az A-ban valamely* $l>0$*-ra, akkor* x/u^k *valamely* $k>0$*-ra.*

Egyetlen olyan tulajdonsága az x és y polinomoknak, amelyet fel fogunk használni, hogy azok relatív prímek a $k[T_1, \ldots, T_r]$ gyűrűben. Megjegyezzük, hogy helyettesíthetjük y^l-t z-vel és u^l-t v-vel, és akkor elegendő bebizonyítani, hogy ha x és z relatív prímek $k[T_1, \ldots, T_r]$-ben, akkor x/zv-ből A-ban következik, hogy x/v^k A-ban valamely $k>0$-ra. Ilyen módon a lemma azt állítja, hogy bizonyos értelemben a z és $x\in B$ polinomok relatív prím voltának a tulajdonsága megmarad a B felett egész A gyűrűre való áttérés közben.

Jelöljük K-val a B gyűrű kvocienstestét. Ha $t\in A$ elem egész B felett, akkor ezzel együtt algebrai K felett. Jelöljük $F(T)\in K[T]$-vel azt a legkisebb fokú 1 főegyütthatójú polinomot, amelyre $F(t)=0$. Ezt az $F(t)$ polinomot a t elem minimális polinomjának nevezzük. A maradékos osztás megmutatja, hogy bármely olyan $G(T)\in K(T)$ polinom, amelyre $G(t)=0$, osztható F-fel $K[T]$-ben. Innen azt következtethetjük, hogy t elem akkor és csakis akkor egész B felett, ha $F(T)\in B[T]$. Valóban, ha t egész és $G(t)=0$, ahol $G\in B[T]$ és a G főegyütthatója 1, akkor $G(T)=$ $=F(T)\cdot H(T)$ a $K[T]$-ben. Viszont abból, hogy B-ben a prímtényezők szorzatára való bontás egyértelmű ($B=K[T_1, \ldots, T_r]$!), következik, hogy akkor $F(T)\in B[T]$ és $H(T)\in B[T]$, ami egyszerű következménye a *Gauss*-lemmának.

Most már könnyű befejezni a lemma bizonyítását. Legyen $zv=x\omega$, $v, \omega\in A$ és $F(T)=T^k+b_1T^{k-1}+\ldots+b_k$ az ω elem minimális polinomja. Mivel ω egész B felett, így $b_i\in B$. Könnyű belátni, hogy a v elem $G(T)$ minimális polinomja $\frac{z^k}{x^k}F\left(\frac{z}{x}T\right)$ alakú. Ezért

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned} G(T) &= T^k+\frac{zb_1}{x}T^{k-1}+\ldots+\frac{z^kb_k}{x^k}, \\ v^k&+\frac{zb_1}{x}v^{k-1}+\ldots+\frac{z^kb_k}{x^k}=0. \end{aligned}\right\}$$

Mivel v egész B felett, így $\frac{z^ib_i}{x^i}\in B$, viszont, tekintettel arra, hogy z és x relatív prímek, x^i/b_i. Akkor (3)-ból következik, hogy z/v^k. Ezzel a lemma, következésképp az 5. tétel is, be van bizonyítva.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha* $X\subset P^N$ *kváziprojektív irreducibilis sokaság,* F *az X-en azonosan* 0*-val nem egyenlő forma és az* X_F *sokaság nem üres, akkor annak minden komponense* 1 *kodimenziós.*

Bizonyítás. Definíció szerint X nyílt a P^N tér valamely $\bar{X}$ zárt részhalmazában. Mivel X irreducibilis, így $\bar{X}$ is irreducibilis, tehát $\dim\bar{X}=\dim X$. Az 5. tétel szerint $(\bar{X})_F=\bigcup Y_i$, $\dim Y_i=\dim X-1$. Viszont, amint könnyen belátható, $X_F=(\bar{X})_F\cap X$, ahonnan az következik, hogy $X_F=\bigcup(Y_i\cap X)$, mégpedig vagy $Y_i\cap X$ üres, vagy $Y_i\cap X$ nyílt Y_i-ben és ezért $\dim(Y_i\cap X)=\dim X-1$.

Általában olyan speciális esetével szoktunk találkozni ennek a következmény-nek, amikor $X \subset A^n$ affin sokaság. Ha $A^n \subset P^n$, $A^n = A_0^n$, akkor $X_F = X_f$, ahol $f = \frac{F}{u_0^m}$, $m = \deg F$, tehát X_F egybeesik valamely $f \in k[X]$ reguláris függvény zérushelyeinek a halmazával.

2. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $X \subset P^N$ kváziprojektív irreducibilis n-dimenziós sokaság, Y egybeesik az X-en adott m forma zérushelyeinek a halmazával és nem üres, akkor bármely komponensének a dimenziója nem kevesebb mint $n-m$.*

Nyilvánvaló a bizonyítás m szerinti indukcióval. Affin sokaság esetében ismét beszélhetünk az X-en adott m reguláris függvény zérushelyeinek a halmazáról. Ha X projektív és $m \geqq n$, akkor állíthatjuk, hogy Y nem üres.

6. TÉTEL. *Ha X és $Y \subset P^N$ kváziprojektív irreducibilis sokaságok,* $\dim X = n$, $\dim Y = m$, $N < n+m$ és $X \cap Y \neq \emptyset$, *akkor az X sokaság bármely Z komponensére* $\dim Z \geqq n+m-N$.

A tétel nyilvánvalóan lokális jellegű, ezért elegendő affin sokaságokra bizonyítani. Legyen $X, Y \subset A^N$. Akkor $X \cap Y$ izomorf az $(X \times Y) \cap \Delta \subset A^{2N}$ sokasággal. (2. § 3. pont 10. példa.) A tétel most következik az 5. tétel 2. következményéből, ugyanis Δ N egyenlettel van megadva. Projektív sokaságok esetében, mint előbb is, az $X \cap Y$ halmaz nem üres, ha $N \leqq n+m$.

3. *A rétegek* dimenziójáról szóló tétel*

Ha adva van a kváziprojektív sokaságoknak egy reguláris $f: X \to Y$ leképezése, $y \in Y$, akkor az $f^{-1}(y)$ halmazt az y pont feletti rétegnek nevezzük. A réteg nyilvánvalóan zárt részsokaság X-ben.

Ez a terminológia azért indokolt, mert az X különböző $y \in f(X)$ pontok páronként idegen rétegeire „rétegeződik".

7. TÉTEL. *Ha $f: X \to Y$ irreducibilis sokaságok reguláris leképezése, $f(X) = Y$,* $\dim X = n$, $\dim Y = m$, *akkor $m \leqq n$ és*

1) *Bármely $y \in Y$ pontra* $\dim f^{-1}(y) \geqq n-m$,

2) *Y-ban létezik olyan nem üres nyílt U halmaz, hogy $y \in U$-ra* $\dim f^{-1}(y) = n-m$.

Az 1) *tulajdonság bizonyítása.* Nyilvánvaló, hogy y-ra nézve lokális tulajdonságról van szó, ezért elegendő bizonyítani úgy, hogy Y-ként tetszőleges nyílt $U \subset Y$, $U \ni y$ halmazt, X-ként pedig az $f^{-1}(U)$ sokaságot vesszük. Ezért Y-t affin sokaságnak tekinthetjük. Legyen $Y \subset A^N$. A 2. pont (1) sorozatában az Y sokaságra $Y^{(m)}$-ként véges halmazt kapunk: $Y^{(m)} = Y \cap Z$, ahol Z m egyenlettel van meghatározva és $y \in Z$. U-t kiválaszthatjuk úgy, hogy $Z \cap U \cap Y = y$ és ezért azt fogjuk feltételezni, hogy $Z \cap Y = y$. A Z alteret meg lehet adni a $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$ m egyenlettel. Tehát a $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$ egyenletrendszer Y-on az y pontot határozza meg. Ez azt jelenti, hogy X-en az $f^*(g_1) = 0, \ldots, f^*(g_m) = 0$ egyenletrendszer az $f^{-1}(y)$ részsokaságot határozza meg. Most már az 1) tulajdonság következik az 5. tétel 2. következményéből (affin eset).

* Слой

A 2. tulajdonság bizonyítása. Y-t helyettesíthetjük annak nyílt affin W részhalmazával, X-et pedig a $V \subset f^{-1}(W)$ nyílt affin halmazzal. Mivel V sűrű $f^{-1}(V)$-ben, így $f(V)$ sűrű W-ben. Ezért f meghatározza az $f^*: k[W] \to k[V]$ beágyazást. A következőkben fel fogjuk tételezni, hogy $k[W] \subset k[V]$ és így $k[W] \subset k[V)$. Legyen $k[W] = k[w_1, \ldots, w_N]$, $k[V] = k[v_1, \ldots, v_M]$. Mivel dim $W = n$, dim $V = m$, így a $k(V)$ test $k(U)$ feletti transzcendicia foka $n-m$. Tételezzük fel, hogy $v_1, \ldots, v_{n-m}$ algebrailag függetlenek $k(W)$ felett, a v_i $(i = n-m+1, \ldots, M)$ elemek pedig kapcsolatban állnak velük az $F_1(v_i; v_1, \ldots, v_{n-m}; \omega_1, \ldots, \omega_N) = 0$ összefüggéssel. Jelöljük $\bar{v}_i$-vel az $f^{-1}(y) \cap V$-re szűkített v_i függvényeket. Akkor

$$(1) \qquad k[f^{-1}(y)] = k[\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_M].$$

Tekintsük F_i-t a $v_i, v_1, \ldots, v_{n-m}$ polinomjának, hozzácsatolva az $\omega_1, \ldots, \omega_N$ változókat a polinom együtthatóihoz, és jelöljük Y_i-vel a W azon részsokaságát, amelyet azon egyenletek határoznak meg, amelyeket a polinomok összes főegyütthatójának 0-val való egyenlővé tételével kapunk. Legyen $Y_0 = \bigcup Y_i$, $U = W - Y_0$. Nyilvánvaló, hogy U nyílt és nem üres. Ha $y \in U$, akkor az $F_i(T_i, T_1, \ldots, T_{n-m}, \omega_1(y), \ldots, \omega_N(y))$ polinomok egyike sem egyenlő 0-val, azaz az összes $\bar{v}_i$ algebrailag függ a $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{n-n}$ elemektől. (1)-gyel összevetve ez megmutatja, hogy $\dim f^{-1}(y) \leqq n-m$, az 1) tulajdonság miatt viszont innen már következik a 2. tulajdonság. A tétel be van bizonyítva.

Azt, hogy a 2. tulajdonság nem feltétlenül teljesül minden y-ra, azaz a réteg dimenziója valóban lejjebb ugorhat, már a következő pontban látni fogjuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Az $Y_k = \{y \in Y, \dim f^{-1}(y) \geqq k\}$ halmazok zártak Y-ban.*

A 7. tétel szerint $Y_{n-m} = Y$, és létezik olyan zárt $Y' \subset Y$ részhalmaz, $Y_0 \neq Y$, hogy $Y_k \subset Y'$, ha $k > n-m$.

Ha a Z_i-k az Y' irreducibilis komponensei, akkor $\dim Z_i < \dim Y$ és az $f^{-1}(Z_i) \to Z_i$ leképezésekhez dim Y szerinti indukciót alkalmazhatunk.

A 7. tételből a sokaságok irreducibilitásának egy gyakran hasznos kritériuma következik.

8. TÉTEL. *Ha $f: X \to Y$ projektív sokaságok reguláris leképezése, $f(X) = Y$, Y és az összes $f^{-1}(y)$ rétegek irreducibilisek, és az összes rétegek dimenziója azonos, akkor X irreducibilis.*

Legyen $\dim f^{-1}(y) = n$. Tételezzük fel, hogy X reducibilis és $X = \bigcup X_i$ nem redukálható felbontás irreducibilis komponensekre. Az 5. § 2. tétel szerint az összes $f(X_i)$ zárt. Mivel $Y = \bigcup f(X_i)$, az Y pedig irreducibilis, így $f(X_i) = Y$ valamely X_i-kre. Kidobjuk Y-ból azon zárt $f(X_i)$ halmazok unióját, amelyek Y-tól különböznek, és a megmaradt nyílt halmazt Y'-vel jelöljük. Legyen $f'(Y') = X'$ és $X' = \bigcup X_j$, ahol az X_j' nyílt részhalmazok azokban az X_j-kben, amelyekre $f(X_j) = Y$. Jelöljük f_j-vel az f leképezés $f_j: X_j' \to Y'$ szűkítését, és m_j-vel a $\dim\limits_{y \in Y'} f_j^{-1}(y)$ számok minimumát. A 7. tétel szerint ez a minimum valamely nyílt $U \subset Y'$ halmazon realizálódik, viszont mivel $\bigcup f_j^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ irreducibilis és n dimenziós, ezért $\max m_j = n$ és valamely $j = j_0$ értékre $\dim f_{j_0}^{-1}(y) = n$ az $y \in U$-ra, tehát az összes $y \in Y$-ra is. Akkor viszont tetszőleges $y \in Y$-ra $f^{-1}(y) = \bigcup f_j^{-1}(y)$, $\dim f_j^{-1}(y) \leqq n$, $\dim f_{j_0}^{-1}(y) = n$ és az

$f^{-1}(y)$ irreducibilitásából következik, hogy $f^{-1}(y)=f_{j_0}^{-1}(y)$. Ez azt jelenti, hogy $X_{j_0}=X$.

Nagyon speciális esete a 8. tételnek az irreducibilis sokaságok direktszorzatának irreducibilitása, amelyet a 3. §-ban bizonyítottunk.

4. *Egyenesek felületeken*

Azon erőfeszítések után, amelyeket a metszetek dimenziójáról szóló tételek bizonyítására kifejtettünk, természetes óhaj ezen tételek némely alkalmazását is megismerni. Ezt most meg fogjuk tenni az egyenesek P^3-beli felületeken való elhelyezkedése egyszerű kérdésének a példáján.

A dimenzió fogalma általában akkor hasznos, ha pontosan akarjuk érzékeltetni azt a tényt, hogy egy halmaz valamely eleme függ egy megadott számú paramétertől. Ennek érdekében a halmazt azonosítani kell valamely algebrai sokasággal és alkalmazni a bevezetett dimenzió fogalmat.

Láttuk például, hogy az m egyenlettel megadott P^n-beli hiperfelületeket kölcsönösen egyértelmű módon meg lehet feleltetni a $P^{\nu_{n,m}}$ projektív tér pontjainak, ahol $\nu_{n,m}=\binom{n+m}{m}-1$ (l. 4. § 4. pont).

Áttérünk az olyan részsokaságokra, amelyek nem hiperfelületek, és a közülük legegyszerűbbekre, a P^3-beli egyenesekre.

A P^3 pontja megfelel a négydimenziós E vektortér egyeneseinek, a P^3-beli egyenesek pedig kétdimenziós lineáris altereknek, azaz síkoknak az E-ben. Az n-dimenziós E térben minden $F\subset E$ sík bázisa két x, y vektorból áll, amelyek viszont egy $\omega=x\wedge y\in\Lambda^2 E$ bivektort határoznak meg. Ha az x és y vektorok valamely bázisra vonatkozó koordinátái $(x_1, \dots, x_n)$ és $(y_1, \dots, y_n)$, akkor az $x\wedge y$ bivektor koordinátái $p_{ij}=x_i y_j-y_i x_j$ $(i, j=1, \dots, n)$. Mint ismeretes, az $x\wedge y$ bivektor egyértelműen meghatároz egy F síkot és a bázis változásakor x, y szorzódik a test valamely 0-tól különböző elemével. Ezért a projektív tér p_{ij} koordinátájú pontja egyértelműen meg van határozva és egyértelműen meghatározza az F síkot.

Esetünkben $n=4$ és a p_{ij} bivektornak $16\, p_{ij}$ $(i, j=0, \dots, 3)$ koordinátája van, amelyek a $p_{ii}=0$, $p_{ji}=-p_{ij}$ összefüggések útján vannak relációban. Ilyen módon hat koordináta, a $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ független. Minden $L\subset P^3$ egyenes meghatároz egy $(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{12}:p_{13}:p_{23})\in P^5$ pontot, a p_{ij}-ket $(0\leqq i<j\leqq 3)$ az L egyenes *Plücker*-féle koordinátáinak nevezzük.

Mint ismeretes, nem minden (p_{ij}) $(0\leqq i<j\leqq 3)$ pont felel meg valamilyen egyenesnek. Ehhez szükséges és elegendő teljesülnie a $p_{01}p_{23}+p_{02}\cdot p_{13}+p_{03}\cdot p_{12}=0$ összefüggésnek. Az (1) összefüggésnek eleget tevő pontok egy másodrendű hiperfelületet alkotnak P^5-ben. Ezt a hiperfelületet Π-vel fogjuk jelölni. Nyilván $\dim \Pi=4$. Ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthettünk az $L\subset P^3$ egyenesek és a Π hiperfelület pontjai között.

A felületeken elhelyezkedő egyenesek vizsgálata szempontjából fontos a következő eredmény.

LEMMA. *Annak a feltételei, hogy a p_{ij} Plücker-féle koordinátájú L egyenes illeszkedik az $F=0$ egyenlettel megadott X felületre, olyan algebrai relációk a p_{ij} és az F polinom együtthatói között, amelyek homogének mind a p_{ij}-kre, mind az F együtthatóira nézve.*

Az L egyenes pontjainak koordinátáit előállíthatjuk paraméteres alakban annak *Plücker*-féle koordinátáival. Legyen x és y az $F\subset E$ sík bázisa. Akkor az

$$xf(y)-yf(x) \tag{2}$$

alakú vektorok halmaza, amint az könnyen látható, egybeesik F-fel, ha f befutja az E-n értelmezett összes lineáris formát. Ha az f koordinátái $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ alakúak, azaz $f(x)=\sum \alpha_i x_i$, akkor a (2) vektor koordinátái $z_i=\sum_j \alpha_j p_{ij}$, $p_{ij}=x_i y_j - y_i x_j$. Ezért az L egyenes p_{ij} *Plücker*-féle koordinátájú pontjai $u=\sum_j \alpha_j p_{ij}$ koordinátákkal rendelkeznek. Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket az $F(u_0, u_1, u_2, u_3)$ egyenletbe és egyenlővé téve 0-val az együtthatókat az α_i összes egytagú kifejezésében, megkapjuk annak a feltételét, az F együtthatói és a p_{ij} koordináták közötti algebrai reláció alakjában, hogy $L\subset X$.

Most áttérünk a minket érdeklő kérdésre a P^3-beli felületeken elhelyezkedő egyenesekről. Adott m-hez tekintsük azt a P^ν teret, $\nu=\nu_{2,3}=\dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}-1$, amelynek pontjai kölcsönösen egyértelmű módon megfelelnek az m-edrendű felületeknek (azaz amelyek m-ed fokú homogén egyenletekkel vannak megadva) P^3-ban. Jelölje Γ_m azon $(\xi, \eta)\in P^\nu\times\Pi$ párok részhalmazát, amelyekre az $\eta\in\Pi$ pontnak megfelelő L egyenes rajta van a $\xi\in P^\nu$ pontnak megfelelő X felületen. A lemma alapján Γ_m projektív sokaság. Meghatározzuk a Γ_m dimenzióját. Ennek érdekében tekintsük a $\varphi(P^\nu\times\Pi)\to P^\nu$ és $\psi(P^\nu\times\Pi)\to\Pi$: $\varphi(\xi,\eta)=\xi$, $\psi(\xi,\eta)=\eta$ projektáló leképezéseket. Nyilván φ és ψ reguláris leképezések. A következőkben csak a Γ_m-en fogjuk őket tekinteni. Megjegyezzük, hogy $\psi(\Gamma_m)=\Pi$. Ez egyszerűen azt jelenti, hogy bármely egyenesen keresztül legalább egy m-edrendű felület halad át, amely legalább reducibilis.

Meghatározzuk a ψ leképezés $\psi^{-1}(\eta)$ rétegeinek a dimenzióját. Elvégezve a projektáló leképezést, fel lehet tételezni, hogy az η-nak megfelelő egyenes az $u_0=0$, $u_1=0$ egyenletekkel van meghatározva. Azon $\xi\in P^\nu$ pontoknak, amelyekre $(\xi,\eta)\in \in\psi^{-1}(\eta)\subset\Gamma_m$, ezen egyenesen áthaladó m-edrendű felületek felelnek meg. Ezek egyenletei $F=0$ alakúak, ahol $F=U_0G+U_1H$, a G és H pedig tetszőleges $m-1$ fokú formák. Az ilyen formák halmaza természetesen egy P^ν-beli lineáris altérnek felel meg, amelynek dimenzióját könnyű kiszámítani. Ez a dimenzió

$$\mu = \frac{m(m+1)(m+5)}{6}-1. \tag{3}$$

Ilyen módon

$$\dim\psi^{-1}(\eta) = \frac{m(m+1)(m+5)}{6}-1.$$

A 8. tételből következik, hogy Γ_m irreducibilis. Alkalmazva a 7. tételt, azt kapjuk, hogy

$$\dim\Gamma_m = \dim\psi(\Gamma_m)+\dim\psi^{-1}(\eta) = \frac{m(m+1)(m+5)}{6}+3. \tag{4}$$

Tekintsük most a $\varphi:\Gamma_m\to P^\nu$ leképezést. Az 5. § 2. tétel szerint ennek a képe zárt részhalmaza P^ν-nek. Nyilván $\dim\varphi(\Gamma_m)\leqq\dim\Gamma_m$. Ezért ha $\dim\Gamma_m<\nu$, akkor

$\varphi(\Gamma_m)\neq P^\nu$, ez pedig azt jelenti, hogy nem tetszőleges m-edrendű felületre illeszkedik egyenes. A dim $\Gamma_m<\nu$ egyenlőtlenség (4) miatt azt jelenti, hogy $\frac{m(m+1)(m+5)}{6}+3<$ $<\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}-1$. Ez teljesül, ha $m>3$. A következő eredményt kaptuk.

9. TÉTEL. *Tetszőleges $m>3$ esetén léteznek olyan m-edrendű felületek, amelyek nem tartalmaznak egyetlen egyenest sem. Ilyen felületeknek a P^ν térben nyílt halmaz felel meg.*

Léteznek tehát olyan nemtriviális algebrai relációk az m-edfokú $F(u_0, u_1, u_2, u_3)$ forma együtthatói között, amelyek szükségesek és elegendők ahhoz, hogy az $F=0$ egyenlettel megadott felületen létezzen legalább egy egyenes.

A fennmaradt $m=1, 2, 3$ esetek közül az $m=1$ eset triviális. Tekintsük az $m=2$ esetet, bár a válasz előre ismert az analitikus geometriából.

$m=2$ esetén $\nu=9$, dim $\Gamma_m=10$. A 7. tételből következik, hogy $\varphi^{-1}(\xi)\geqq 1$. Ez egy jólismert tény: bármely másodrendű felületen végtelen sok egyenes fekszik.

Megjegyezzük, nem bocsátkozva a bizonyítás részleteibe, hogy itt már találkozunk a rétegek dimenziója megugrásának a jelenségével, amelyről az 5. pontban volt szó. Valóban, ha a másodrendű felület irreducibilis, akkor a neki megfelelő pontra dim $\varphi^{-1}(\xi)=1$, ha viszont két síkra esik szét, akkor természetesen dim $\varphi^{-1}(\xi)=2$.

Tekintsük most az $m=3$ esetet. Ekkor dim $\Gamma_m=\nu=19$. Könnyű konstruálni olyan harmadrendű $X\subset P^3$ felületet, amelyen csak véges számú egyenes fekszik. Például, ha X inhomogén koordinátákban a

$$T_1\cdot T_2\cdot T_3 = 1 \tag{5}$$

egyenlettel van megadva, akkor A^3-ban X-re nem illeszkedik egyetlen egyenes sem.

Valóban, felírva az egyenes egyenletét $T_i=a_i t+b_i$ $(i=1, 2, 3)$ paraméteres alakban, és behelyettesítve (5)-be, ellentmondáshoz jutunk. Viszont a végtelen távoli X síkkal való metszetén három egyenes van. Tehát P^{19}-ben léteznek olyan ξ pontok, amelyekre $\varphi^{-1}(\xi)=0$. A 8. tétel miatt ez csak akkor lehetséges, ha dim $\varphi(\Gamma_3)=19$. Alkalmazva az 1. tételt, azt látjuk, hogy $\varphi(\Gamma_3)=P^{19}$.

Bebizonyítottuk a következő eredményt.

10. TÉTEL. *Bármely harmadrendű felületen van legalább egy egyenes. A P^{19} térben, amelynek pontjai az összes harmadrendű felületnek felelnek meg, létezik olyan nyílt részhalmaz, hogy a pontjainak megfelelő felületekre végesszámú egyenes illeszkedik.*

Olyan harmadrendű felületek, amelyekre végtelen sok egyenes illeszkedik, valóban léteznek, például a harmadrendű kúpok. Ilyen módon a rétegek dimenziója itt is megugorhat.

5. *Projektív sokaság, Chao koordináták*

A metszetek dimenzió tételeinek egyik leglényegesebb alkalmazása a rögzített n-dimenziójú $X\subset P^N$ részsokaság koordinátákkal való megadásának lehetőségében áll. Mi már találkoztunk ilyen feladattal a hiperfelületek esetében: az m fokú formákkal meghatározott P^n-beli hiperfelületek megfelelnek a $P^{\nu}_{m,n}$ projektív tér pontjainak. Másik példa a P^3-beli egyenesek leírása azok *Plücker*-féle koordinátáival.

Természetes megpróbálni valamilyen módon a tetszőleges X sokaság esetét visszavezetni a hiperfelület esetére és ennek érdekében kapcsolatba hozni X-szel a hiperfelületet. Legyen például X egy görbe P^3-ban. Tekintsük az X-et metsző P^3-beli egyenesek Y halmazát. Könnyű ellenőrizni, hogy Y-nak megfelel az összes P^3-beli egyenest leíró Π sokaságon egy $\tilde{Y}$ algebrai részsokaság. Mivel az adott $x \in P^3$ ponton átmenő összes egyenesek Y_x halmazának megfelel — amint az könnyen belátható — egy kétdimenziós $\tilde{Y}_x \subset \Pi$ részsokaság, viszont a $\dim X = 1$, így a 7. tételből könnyen levezethető, hogy $\dim \tilde{Y} = 3$. Ezért az $\tilde{Y}$ kodimenziója Π-ben 1. Ha tudnánk, hogy Π-ben, úgy mint P^n-ben, bármely 1 kodimenziós részsokaság egy egyenlettel adható meg, akkor ezen egyenletek együtthatóit választhatnánk az X koordinátáinak. Az itt fellépő nehézséget meg lehet kerülni, ha az X-et metsző egyenesek helyett E_1, E_2 sík párokat tekintünk, amelyekre $E_1 \cap E_2 \cap X$ nem üres. Mivel a P^3-beli síkok P^3-beli ($\nu_{3,1} = 3$) pontoknak felelnek meg, az E_1, E_2 pár a 6 dimenziós $P^3 \times P^3$ sokaság pontjainak felelnek meg. Az $E_1 \cap E_2 \cap X \neq \emptyset$ összefüggésnek eleget tevő párok halmaza egy 5 dimenziós $Y \subset P^3 \times P^3$ részsokaságnak felel meg, és most már alkalmazhatjuk a 3. tételt. Ezt a tervet akkurátusan végigvisszük tetszőleges $X \subset P^n$ sokaságokra.

Az összes $\xi \subset P^N$ hipersík összessége kölcsönösen egyértelmű módon megfelel az N-dimenziós projektív tér pontjainak, amelyet $\tilde{P}^N$-nel fogunk jelölni, hogy megkülönböztessük a kiinduló P^N-től. A ξ hipersík és a $\tilde{P}^N$ megfelelő pontját ugyanazzal a betűvel fogjuk jelölni.

Tekintsük az $X \subset P^N$, $\dim X = n$ projektív sokaságot. A $\underbrace{\tilde{P}^N \times \ldots \times \tilde{P}^N}_{n+1} \times X$ szorzatban, amelyet $X \times (\tilde{P}^N)^{n+1}$-gyel fogunk jelölni, tekintsük az olyan $(\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)}, x)$ rendszerek Γ halmazát, ahol az összes $\xi^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, n)$ hiperfelület tartalmazza az $x \in X$ pontot. Γ zárt részhalmaz és arra értelmezve vannak: a $\varphi: \Gamma \to (\tilde{P}^N)^{n+1}$ és $\psi: \Gamma \to X$ reguláris leképezések.

Nyilvánvaló, hogy $\psi(\Gamma) = X$. Meghatározzuk a $\psi^{-1}(x_0)$ dimenzióját, ahol $x_0 \in P^N$. A $\psi^{-1}(x_0)$ halmaz olyan $(\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)}, x_0)$ rendszerekből áll, amelyekre $\xi^{(i)} \ni x_0$. Az összes olyan $\xi \in \tilde{P}^N$, amelyekre $\xi \ni x_0$, egy $\tilde{P}^{N-1} \subset \tilde{P}^N$ hipersíkot alkot. Ezért $\psi^{-1}(x_0) = (\tilde{P}^{N-1})^{n-1}$ és $\dim \psi^{-1}(x_0) = (N-1)(n+1)$. A 7. tételből következik, hogy $\dim \Gamma = (N-1)(n+1) + n = N(n+1) - 1$, viszont a 8. tételből következik, hogy Γ irreducibilis.

Léteznek olyan $y \in (\tilde{P}^N)^{n+1}$ pontok, hogy $y \in \varphi(\Gamma)$ és $\varphi^{-1}(y)$ egyetlen pont. Ez azonnal nyilvánvaló a 2. pontbeli (1) sorozat konstrukciójából, ha F_i-ként olyan lineáris formát választunk, amely valamely $x \in X$ pontban 0-val egyenlő. Most alkalmazhatjuk a 7. tételt és ebből adódik, hogy $\dim \varphi(\Gamma) = \dim \Gamma = N(n+1) - 1$. Mivel $\varphi(\Gamma) \subset (\tilde{P}^N)^{n+1}$ és $\dim (\tilde{P}^N)^{n+1} = N(n+1)$, így alkalmazhatjuk a 3'. tételt. Ebből következik, hogy a $\varphi(\Gamma)$ egyetlen olyan F_X formával van meghatározva, amely $n+1$ csoport — mindegyikben $N+1$ — változótól függ. Az F_X forma homogén a változók minden csoportjára nézve. Nyilvánvalóan ezt a formát kiválaszthatjuk úgy, hogy ne tartalmazzon többszörös tényezőket. Akkor ezt a formát az X sokaság egyértelműen meghatározza — konstans tényező pontossággal. Az F_X formát asszociált formának, együtthatóit pedig az X sokaság *Chao*-féle koordinátáinak nevezzük. Bebizonyítjuk, hogy az X sokaság egyértelműen meg van határozva az F_X formával.

Ennek érdekében elegendő ellenőriznünk, hogy egy $x \in P^N$ pont akkor és csakis akkor van az X-en, ha bármely $n+1$ őt tartalmazó $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)}$ hipersík eleget tesz a

$$(1) \qquad F_X(\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)}) = 0$$

relációnak. Valóban, ha $x \in X$, akkor (1) teljesül az F_X definíciója értelmében. Ha pedig $x \notin X$, akkor található $n+1$ olyan x-et tartalmazó $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)}$ hipersík, hogy $\xi^{(0)} \cap \ldots \cap \xi^{(n)} \cap X = \emptyset$, ami ismét azonnal adódik a 2. pont (1) sorozatának a konstrukciójából. Az ilyen $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)}$ nem tesznek eleget az (1) relációnak.

Az F_X formáknak van „diszkrét" invariánsuk: a fokszám, és adott fokszám mellett „folytonos" invariánsai: az együtthatók. Tisztázzuk először is az F_X forma fokszámának az értelmét. Pontosabban kifejezve, ennek, $n+1$ fokszáma van: $d_0, \ldots, d_n$ a változók minden rendszere szerint. Viszont ezen fokszámok mind egybeesnek. Valóban, mivel az (1) feltétel szimmetrikus a $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)}$-re nézve, ez a feltétel pedig az F_X forma zérushelyeinek a halmazát határozza meg, így a $\xi^{(i)}$-k egymás közötti felcserélésétől az F_X forma legfeljebb konstans tényezővel szorzódhat (könynyen belátható, hogy ez a konstans vagy 1 vagy -1). Ezért az összes d_i szám egybeesik. Ezek közös értékét d-vel fogjuk jelölni.

Kiválasztunk n olyan $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)} \in P^N$ hipersíkot, hogy azok X-szel való metszete véges számú pontból álljon (a 2. pont (1) sorozata alapján ez mindig lehetséges). Legyen

$$\eta^{(1)} \cap \ldots \cap \eta^{(n)} \cap X = \{x^{(1)}, \ldots, {}^{(c)}\},$$

$$x^{(j)} = (u_0^{(j)}, \ldots, u_N^{(j)}) \quad (j = 1, \ldots, c).$$

Ha felírjuk a $\xi^{(0)}$ egyenletét $\sum_{i=0}^{N} v_i u_i = 0$ alakban, akkor kiderül, hogy az $F_X(\xi^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ forma fokszáma a $v_0, \ldots, v_N$-re nézve d és ez a forma egyenlő 0-val akkor és csakis akkor, ha legalább egy $j=1, \ldots, c$-re teljesül

$$\sum_{i=0}^{N} v_i u_i^{(j)} = 0.$$

Innen következik, hogy

$$(2) \qquad F_X(\xi^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}) = \alpha \prod_{j=1}^{c} (\sum v_i u_i^{(j)})^{r_j},$$

ahol $r_j \geqq 1$ egész számok. Innen látható, hogy $c \leqq d$ mindig, és ha az $F_X(\xi^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ forma nem tartalmaz többszörös tényezőket, akkor $c=d$. Megmutatjuk, hogy az $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}$ hipersíkok megfelelő kiválasztása esetén az $F_X(\xi^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ forma nem tartalmaz többszörös tényezőket.

LEMMA. *Ha az $F(x, y)$ polinom nem tartalmaz többszörös szorzó tényezőket, akkor vagy léteznek olyan y_0 pontok, hogy $F(x, y_0)$-nak nincs többszörös szorzó tényezője, vagy $F_2(x, y) = 0$.*

Utóbbi eset csak akkor lehetséges, ha a k test karakterisztikája $p > 0$ és akkor $F(x, y) = G(x^P, y)$.

A lemma egyszerű bizonyítását az olvasóra bízzuk.

A lemmából és abból, hogy az $F_X(\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)})$ formának nincsenek többszörös tényezői, következik, hogy vagy az $\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}$ valamely megválasztása mellett az $F_X(\xi^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ formának nincs többszörös tényezője, vagy az összes $v_i^{(0)}$ $(i=0, \ldots, N)$ változó az F kifejezésben olyan hatványon szerepel, amely többszöröse p-nek. Akkor viszont az F_X szimmetriája miatt (a különböző változócsoportokra nézve) az összes változó rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, és így F_X egy polinom p-edik hatványa — feltételezésünkkel ellentétben.

A 4. tétel bizonyításánál használt módszerek segítségével könnyű ellenőrizni, hogy azok az $(\eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}) \in (\tilde{P}^N)^n$ pontok, amelyekre az $F_X(\xi^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)})$ formának nincs többszörös tényezője, egy nem üres nyílt halmazt alkotnak $(\tilde{P}^N)^n$-ben. Ugyanezzel a tulajdonsággal rendelkeznek azok a pontok, amelyekre $F_X(\xi^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(n)}) \neq 0$. Ezért valamely nem üres nyílt halmaz pontjára a (2) egyenlőségben $r_j=1$ és $c=d$.

A kapott eredmény az X sokaság asszociált formájának d fokszámára a következő jellemzést adja: d egyenlő az $X \cap E$ metszet pontjai számának maximumával, ahol E-lineáris altér, $\dim E = N-n$ és $X \cap E$ véges. A d számot az X sokaság fokának nevezzük és $\deg X$-szel jelöljük.

Azon összes $F(\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(n)})$ formák halmaza, amelyek $n+1$ csoport — mindegyikben $N+1$ — változótól függenek és fokszámuk minden változó csoportra nézve d, egy projektív $P^{\nu_{N,n,d}}$ teret alkot, ha a formákat konstans szorzó erejéig való pontossággal tekintjük. Tetszőleges n-dimenziós d-edfokú $X \subset P^N$ sokaságnak megfeleltetünk egy F_X formát, tehát egy $C(X)$ pontot $P^{\nu_{N,n,d}}$-ben. Jelöljük $C_{N,n,d} \subset \subset P^{\nu_{N,n,d}}$-vel az így kapott pontok halmazát. Felvetődik az alapvető kérdés ezen halmaz leírásáról. Bizonyítás nélkül megemlítjük az ide vonatkozó eredményt. Ez azt állítja, hogy $C_{N,n,d}$ egy kváziprojektív sokaság, ezen felül pontosítja a kapcsolatot az X és F_X között.

Először bevezetünk egy fontos fogalmat. Legyen S kváziprojektív sokaság, Γ egy zárt részsokaság $S \times P^N$-ben és $\varphi: \Gamma \to P^N$, $\psi: \Gamma \to S$ annak természetes projekciói.

Ha az összes $s \in S$-re az $X_s = \varphi\psi^{-1}(s)$ részsokaságoknak ugyanaz a dimenziójuk, akkor a $\{X_s;\ s \in S\}$ részsokaság családot algebrainak nevezzük. Azt fogjuk mondani, hogy S és Γ meghatározzák ezt a családot.

ÁLLÍTÁS. *Az összes olyan zárt $X \subset P^N$ részsokaságok családja, amelyekre* $\dim X = n$, $\deg X = d$, *algebrai. Létezik olyan $C_{N,n,d} \subset P^{\nu_{N,n,d}}$ sokaság és ezt a tulajdonságot meghatározó zárt $\Gamma \subset C_{N,n,d} \times P^N$, hogy $y \in C_{N,n,d}$ asszociált forma a $\varphi\psi^{-1}(y)$-ra nézve.*

Nyilván az $F \in P^{\nu_{N,n,d}}$ forma akkor és csakis akkor van benne $C_{N,n,d}$-ben, ha $F = F_X$, $\dim X = n$, $\deg X = d$.

A $C_{N,n,d}$ halmaz általában nem zárt $P^{\nu_{N,n,d}}$-ben. Például az $F(x_0, x_1, x_2)$ kvadratikus forma — amint az könnyen belátható — asszociált formája az $F=0$ másodrendű görbének akkor és csakis akkor, ha F nem négyzete egy lineáris formának. Viszont meg lehet valamelyest változtatni a definíciót úgy, hogy zárt sokaságokhoz jussunk. Ennek érdekében bevezetik az n-dimenziós ciklus fogalmát, értve ezalatt az $X_i \subset P^N$ n-dimenziós részsokaságok $\mathscr{D} = m_1 X_1 + \ldots + m_k X_k$ formális lineáris kombinációját, ahol $m_i > 0$ egészek. Legyen

$$\deg \mathscr{D} = m_1 \deg X_1 + \ldots + m_k \deg X_k,$$

$$F_{\mathscr{D}} = F_{X_1}^{m_1} \cdot \ldots \cdot F_{X_k}^{m_k}.$$

A ciklus így bevezetett asszociált formája rendelkezik a sokaság asszociált formájának minden tulajdonságával, azonban itt a $\mathcal{D}\subset P^N$, dim $\mathcal{D}=n$, deg $\mathcal{D}=d$ ciklusok összes asszociált formáinak $\bar{C}_{N,n,d}$ halmaza zárt.

Az asszociált forma fogalma lehetőséget ad megközelíteni a projektív tér részsokaságai és ciklusai rendszerezésének a problémáját. Ugyanis a $C_{N,n,d}$ algebrai sokaság általában reducibilis. Ennek irreducibilis komponensei, azok száma és dimenziója információt adnak az adott dimenziójú és fokszámú P^N-beli részsokaságok összességéről. Aláhúzzuk, hogy közben a P^N-beli részsokaságokat nem az izomorfiáig terjedő pontossággal tekintjük, hanem különbözőknek tekintjük őket, ha azok mint halmazok különbözők.

Befejezésképpen néhány példát ismertetünk. A hiperfelületek esete még nagyon egyszerű (13. feladat) ezért az első nem triviális példák a P^3-beli görbék, azaz az $N=3$, $n=1$ eset. Ismertetjük a $d=1, 2, 3$-ra vonatkozó eredményeket.

$d=1$, $C_{3,1,1}=\bar{C}_{3,1,1}=\Pi$ *Plücker*-féle másodrendű hiperfelület. Ez irreducibilis és dimenziója 4 (l. úgyszintén a 14. feladatot).

$d=2$, $\bar{C}_{3,1,2}$ reducibilis $\bar{C}_{3,1,2}=C'\cup C''$. A C' és C'' komponensek irreducibilisek és dim $C'=$dim $C''=8$.

A C' pontjai másodrendű sík görbéknek felelnek meg, a C'' pontjai egyenes pároknak (általában kitérőeknek) felelnek meg:

$$d = 3;\ \bar{C}_{3,1,3} = C^{\mathrm{I}}\cup C^{\mathrm{II}}\cup C^{\mathrm{III}}\cup C^{\mathrm{IV}},$$

$$\dim C^{\mathrm{I}} = \dim C^{\mathrm{II}} = \dim C^{\mathrm{III}} = \dim C^{\mathrm{IV}} = 12.$$

A C' pontjai egyenes hármasoknak felelnek meg, a C'' pontjai irreducibilis — másodrendű sík görbéből és egyenesből (általában más síkban levő) álló — görbéknek, a C^{III} pontjai 3-adrendű sík görbéknek felelnek meg. Végül a C^{IV} pontjai harmadrendű nem sík görbéknek felelnek meg. Meg lehet mutatni, hogy mindezek a görbék a $v_3(P^1)$ görbéből (l. 18. feladatot) adódnak különböző lineáris transzformációkkal.

Mindazon esetekben, amelyeket eddig sikerült kiszámolni, a $C_{3,1,d}$ sokaság irreducibilis komponensei nem túlságosan bonyolultaknak bizonyultak. Pontosabban mondva, mind racionális sokaságoknak bizonyultak, azaz biracionálisan izomorfaknak projektív terekkel. Hogy ez így van-e általános esetben, valószínű nagyon nehéz és nagyon elvi jellegű kérdés.

Feladatok

1. Legyen L egy $(n-1)$-dimenziós lineáris altér P^n-ben, $X\subset L$ irreducibilis zárt sokaság és $y\notin L$. Összekötjük y-t egyenesekkel az összes $x\in X$ ponttal. Az összes ilyen egyenesen levő pontok halmazát Y-nal jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy Y irreducibilis projektív sokaság és dim $Y=$dim $X+1$.

2. Legyen $X\subset A^3$ egy reducibilis görbe, amelynek komponensei a három koordináta tengely. Bizonyítsuk be, hogy az Y_X ideál nem generálható két elemmel.

3. Legyen $X\subset P^2$ egy reducibilis nulldimenziós olyan sokaság, amelynek komponenseit három olyan pont jelenti, amelyek nem esnek egy egyenesre. Bizonyítandó, hogy az Y_X ideál nem generálható két elemmel.

4. Bizonyítsuk be, hogy pontok bármely véges $S\subset A^2$ halmaza meghatározható két egyenlettel. (Útbaigazítás. Válasszuk ki az x, y koordináta-rendszert A^2-ben úgy,

hogy az S halmaz elemeinek különböző x koordinátái legyenek. Ezután adjuk meg S-t $y=f(x)$, $\Pi(x-\alpha_i)=0$ egyenlettel, ahol $f(x)$ polinom.)

5. Bizonyítsuk be, hogy pontok bármely véges $S\subset P^2$ halmaza megadható két egyenlettel.

6. Legyen $X\subset A^3$ egy algebrai görbe, x, y, z az A^3-beli koordináták. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $f(x, y)$ polinom, amely 0-tól különböző, és az X minden pontjában egyenlő 0-val. Bizonyítsuk be, hogy az összes ilyen polinom $(g(x, y))$ főideált alkot, a $g(x, y)=0$ görbe pedig az X görbe (x, y) síkra a z tengellyel párhuzamos projekciójának a lezártja.

7. Használjuk a 6. feladat jelöléseit. Legyen $h(x, y, z)=g_0(x, y)z^n+\ldots+g_n(x, y)$ a legkisebb pozitív z-szerinti fokszámú, polinom az Y_X ideálban. Bizonyítsuk be, hogy ha $f\in Y_X$ és f-nek z-szerinti foka m, akkor $f\cdot g_0^m=h\cdot u+v(x, y)$ és $v(x, y)$ osztható $g(x, y)$-nal. Vezessük le innen, hogy a $h=0$, $g=0$ egyenletek azt a reducibilis görbét határozzák meg, amely az X-ből és a z-tengellyel párhuzamos végesszámú a $g_0(x, y)=g(x, y)=0$ egyenletekkel megadott egyenesekből áll.

8. A 6. és 7. feladat felhasználásával bizonyítsuk be, hogy bármely $X\subset A^3$ görbe megadható három egyenlettel.

9. A 6—8. feladatok analógiájára bizonyítsuk be, hogy bármely $X\subset P^3$ görbe megadható három egyenlettel.

10. Megadható-e tetszőleges $X\subset A^3$ (vagy $X\subset P^3$) irreducibilis görbe két egyenlettel? A kérdésre a válasz nem ismert.

11. Legyenek az $F_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_0, \ldots, x_n)$ formák $m_0, \ldots, m_n$ fokúak. Jelöljük Γ-val azon $(F_0, \ldots, F_n, x)$ rendszerek halmazát $P^n\times\Pi P^{\nu_{n,m_i}}$-ben, amelyekre $F_0(x)=\ldots=F_n(x)=0$. A $\varphi\colon \Gamma\to\Pi P^{\nu_{n,m_i}}$ és $\psi\colon \Gamma\to P^n$ projekciókat tekintve bizonyítsuk be, hogy $\dim\Gamma=\dim\varphi(\Gamma)=\sum_i \nu_{n,m_i}-1$. Vezessük le ebből, hogy létezik az $F_0, \ldots, F_n$ formák együtthatóitól függő olyan $R(F_0, \ldots, F_n)$ polinom, hogy $R=0$ szükséges és elegendő arra, hogy az $n+1$ ismeretlenes $n+1$ darabból álló $F_0=\ldots=F_n=0$ egyenletrendszernek létezzen nemtriviális megoldása. Mivel egyenlő az R polinom, ha az $F_0, \ldots, F_n$ formák lineárisak?

12. Bizonyítsuk be, hogy az $(u_0:\ldots:u_N)$ pont asszociált formája $\sum_{i=0}^N v_iu_i$ alakú.

13. Bizonyítsuk be, hogy ha X hiperfelület és $Y_X=(G(u_0, \ldots, u_N))$, akkor $F_X=G(\Delta_0, \ldots, \Delta_N)$, ahol $(-1)^i\Delta_i$ a $(v_j^{(i)})$ mátrix olyan minorja, amely az i-edik oszlop elhagyásával keletkezik.

14. Legyen $X\subset P^3$ egy p_{ij} $(0\leq i, j\leq 3)$ *Plücker*-féle koordinátájú egyenes. Bizonyítandó, hogy $F_X=\sum_{i,j} p_{ij}v_i^{(0)}\cdot v_j^{(1)}$.

15. Legyen $Y\subset P^n$ egy adott zárt részsokaság. Bizonyítsuk be, hogy az $X\subset Y$ feltétel egyenértékű valamely algebrai relációkkal az F_X forma együtthatói között.

16. Bizonyítsuk be, hogy a $G=0$ egyenlettel megadott hiperfelület rendje egyenlő a G forma fokával, ha G nem tartalmaz többszörös tényezőt.

17. Bizonyítsuk be, hogy az 1-rendű $X\subset P^n$ részsokaságok lineáris alterek.

18. Legyen $v_m\colon P^1\to P^m$ *Veronese*-féle leképezés, $X=v_m(P^1)$. Bizonyítsuk be, hogy az X rendje m. (Útmutatás. Használjuk fel a 4. § 4. pontban említett kapcsolatot a $v_m(P^1)$ hipersík metszetei és a P^1-beli formák között.)

19. Bizonyítsuk be, hogy a P^n-beli másodrendű X görbe vagy benne van a síkban és abban másodfokú egyenlettel adható meg, vagy két egyenesre bomlik fel.

20. Legyen $X=X_1 \cup \ldots \cup X_t$ irreducibilis komponensekre való felbontás, ahol a komponensek dimenziója egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy $\deg X = \sum \deg X_i$. Milyen kapcsolat áll fenn az F_X forma és a F_{X_i} formák között?

21. Bizonyítsuk be, hogy a d-edrendű irreducibilis $X \subset P^n$ görbe benne van valamely d-dimenziós lineáris altérben.

22. Bizonyítsuk be, hogy a Π *Plücker*-féle hiperfelületre kétdimenziós lineáris alterek két rendszere illeszkedik. Az első rendszer altere a $\xi \in P^3$ ponttal van meghatározva és a ξ ponton átmenő $L \subset P^3$ egyeneseknek megfelelő Π-beli pontokból áll. A másik rendszer altere a $Q \subset P^3$ síkkal határozható meg és a Q-beli $L \subset P^3$ egyeneseknek megfelelő összes Π-beli pontból áll. Más kétdimenziós altér nincs Π-ben.

23. Legyen $F(x_0, x_1, x_2, x_3)$ tetszőleges negyedfokú forma. Bizonyítsuk be, hogy létezik az F forma együtthatóitól függő olyan Φ polinom, hogy a $\Phi=0$ feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy az $F=0$ egyenlettel megadott felületen létezzen egyenes.

24. Legyen $X \subset P^3$ egy másodrendű nemelfajuló felület és $\Lambda_X \subset \Pi$ az X-en levő egyeneseknek megfelelő Π-beli pontok halmaza. Bizonyítsuk be, hogy Λ_X két egymást nem metsző egyenesből áll.

25. Bizonyítsuk be, hogy a másodrendű elfajuló felületeknek megfelelő $P^{\nu_{3,2}}$ térben levő pontok hiperfelületet alkotnak.

II. FEJEZET
LOKÁLIS TULAJDONSÁGOK

1. §. Egyszerű és szinguláris pontok

1. *Pont lokális gyűrűje*

Ebben a fejezetben algebrai sokaságok pontjainak lokális tulajdonságait fogjuk vizsgálni, azaz az $x \in X$ pontok olyan tulajdonságait, amelyek nem változnak attól, hogy X-et helyettesítjük az x pont tetszőleges környezetével. Mivel minden pontnak van affin környezete, így a pontok lokális tulajdonságainak vizsgálata során elegendő affin sokaságokra szorítkozni.

Az X sokaság x pontjának legfőbb lokális invariánsa a pont O_x lokális gyűrűje. Ez a gyűrű az összes olyan függvényekből áll, amelyek regulárisak az x pont valamely környezetében. Viszont, mivel a különböző függvények különböző környezetekben regulárisak, ez a definíció bizonyos óvatosságot igényel.

Ha az X sokaság irreducibilis, akkor az O_x a $k(X)$ test azon részgyűrűje, amely az összes olyan függvényből áll, amelyek regulárisak az x pontban. Visszaidézve a $k(X)$-nek mint az x pont valamely U affin környezete $k[U]$ koordináta gyűrűje hányadostestének a definícióját, az O_x gyűrű következő leírásához jutunk.

Ez a gyűrű az olyan $(f, g), f, g \in k[U]$, $g(x) \neq 0$ párokból áll, amelyek a következő egyenlőségi relációnak

$$(f_1 g) = (f_1, g_1), \quad \text{ha} \quad f \cdot g_1 = g \cdot f_1, \tag{1}$$

és az

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned}(f_1g)+(f_1, g_1) &= (fg_1+gf_1, gg_1),\\ (f_1g)\cdot(f_1, g_1) &= (ff_1, gg_1)\end{aligned}\right\}$$

műveleti szabályoknak tesznek eleget.

Ez a definíció átvihető a reducibilis sokaságokra is, megtartva a (2) műveleti definíciót és az egyenlőségi relációt felcserélve a következővel:

$$(f, g) = (f_1, g_1), \quad \text{ha létezik olyan} \quad h\in k[U],$$

hogy

$$h(x) \neq 0, \quad h(fg_1-gf_1) = 0.$$

Az O_x gyűrű elemét meghatározó bármely (f, g) párra az $\frac{f}{g}$ függvény reguláris az x pont U^g környezetében. A (3) szabály azt jelenti, hogy O_x-ben azonosítjuk azokat a függvényeket, amelyek az x pont valamely környezetében egybeesnek (esetünkben U^h-ban). Ilyen módon O_x definiálható mint olyan gyűrű, amelynek elemei az x pont különböző környezetében reguláris függvények, amelyek között az említett egyenlőségi reláció érvényes. Ez a definíció már független az x pont valamely U affin környezetének a kiválasztásától.

Az $f\to(f, 1)$ leképezés meghatározza a $\varphi: k[U]\to O_x$ homomorfizmust, amelynek értelme az, hogy az összes $f\in k[U]$ függvény reguláris az x pont U környezetében.

Speciálisan válasszuk ki az U sokaságot úgy, hogy annak összes irreducibilis komponense menjen át az x ponton. Akkor az x pont valamely $V\subset U$ környezetében 0-val egyenlő f függvény 0-val lesz egyenlő az egész U-n. Ezért a φ homomorfizmus beágyazás, és mi azonosítani fogjuk $k[U]$-t az O_x részgyűrűjével. Analóg módon elhagyható a h szorzó a (3) egyenlőségi relációban. Más szóval, O_x az U-n értelmezett függvényekből áll — minden azonosítás nélkül — és minden $\varphi\in O_x$ függvény $\frac{f}{g}$, $f, g\in k[U]$, $g(x)\neq 0$ alakú.

Az O_x gyűrű *Noether*-féle. Valóban, mint fentebb, kiválasztjuk az $U\ni x$ környezetet úgy, hogy $k[U]\subset O_x$. Tekintsük az $\mathfrak{a}\subset O_x$ ideált és annak $\bar{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}\cap k[U]$ metszetét. Mivel a $k[U]$ *Noether*-féle gyűrű, így $\bar{\mathfrak{a}}$-nek véges bázisa van: $\mathfrak{a}=(g_1, \ldots, g_r)$. Most ellenőrizzük, hogy $\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{a}}\cdot O_x$, és így O_x ideálnak ugyanaz a $g_1, \ldots, g_r$ bázisa van. Valóban, ha $\varphi\in\mathfrak{a}$, akkor $\varphi=\frac{f}{g}$, $f, g\in k[U]$, $g(x)\neq 0$. Akkor $f=\varphi\cdot g\in\mathfrak{a}$ és így $f\in\bar{\mathfrak{a}}$. Továbbá, $g^{-1}\in O_x$ és ezért $\varphi=f\cdot g^{-1}\in\bar{\mathfrak{a}}O_x$.

Az O_x lokális gyűrű a következő fő tulajdonsággal rendelkezik: abban van egy olyan $\mathfrak{M}_x$ ideál, amely az összes további ideált (O_x-től különbözőt) tartalmazza. Éspedig $\mathfrak{M}_x$ az összes olyan $f\in O_x$ függvényből áll, amelyek az x pontban 0-val egyenlők. Hogy bebizonyítsuk, hogy bármely $\mathfrak{a}\subset O_x$ ideál benne van $\mathfrak{M}_x$-ben, elegendő ellenőrizni, hogy bármely $f\notin\mathfrak{M}_x$ elemnek létezik O_x-ben inverze. Ez viszont nyilvánvaló, mert ha $f\notin\mathfrak{M}_x$, akkor $f(x)\neq 0$ és $f^{-1}\in O_x$. Itt most a kommutatív algebra egyik alapfogalmának speciális esetével van dolgunk. Tetszőleges O gyűrűt lokálisnak nevezünk, ha az *Noether*-féle és létezik olyan $\mathfrak{M}\subset 0$, $\mathfrak{M}\neq 0$ ideálja, amely az összes többi ideált tartalmazza.

2. *Érintő tér*

Az X affin sokaság x pontjában úgy definiáljuk az érintő teret, mint az x ponton átmenő X-et érintő egyenesek összességét. Hogy definiálhassuk az $L \subset A^N$ egyenesnek az $X \subset A^N$ sokasággal való érintkezését, feltételezzük, hogy az A^N-ben a koordináta-rendszer úgy van kiválasztva, hogy $x=(0, \ldots, 0)=0$. Akkor $L=\{ta, t \in k\}$, ahol a rögzített pont, $a \neq 0$. Az X és L metszetének vizsgálata érdekében fel fogjuk tételezni, hogy X az $F_1=\ldots=F_m=0$ egyenletrendszerrel van megadva, méghozzá $\mathscr{I}_X=(F_1, \ldots, F_m)$.

Akkor az $X \cap L$ halmazt az $F_1(ta)=\ldots=F_m(ta)=0$ egyenletek határozzák meg. Mivel most az egy t változótól függő polinomokkal van dolgunk, akkor azok gyöke azok legnagyobb közös osztójának a gyökei. Legyen

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} f(t) = \text{L.n.k.o.}\,(F_1(ta), \ldots, F_m(ta)) \\ f(t) = c \prod (t-\alpha_i)^{k_i}. \end{cases}$$

A $t=\alpha_i$ értékek az L egyenes és az X sokaság metszete pontjainak felelnek meg. Megjegyezzük, hogy (1)-ben a $t=\alpha_i$ értékek k_i multiplicitással szerepelnek, amelyeket természetes úgy interpretálni, mint az L és X metszetének a multiplicitását. Speciálisan, mivel $L \cap X \ni 0$, így (1)-nek van $t=0$ gyöke. Így a következő definícióhoz jutunk.

DEFINÍCIÓ. Az L egyenes és X sokaság metszetének a multiplicitásán 0 pontban az $f(t)=\text{L.n.k.o.}\,(F_1(ta), \ldots, F_m(ta))$ legnagyobb közös osztó polinom $t=0$ gyökének a multiplicitását értjük.

Ilyen módon ez a multiplicitás egyenlő t azon legmagasabb hatványával, amellyel osztható az összes $F_i(ta)$ polinom. Definíció szerint ez nem kisebb egynél.

Ha az $F_i(ta)$ polinomok azonosan egyenlők 0-val, akkor a metszet multiplicitását $+\infty$-nek tekintjük.

DEFINÍCIÓ. Az L egyenes érinti az X sokaságot 0 pontban, ha metszetük multiplicitása ebben a pontban nagyobb egynél.

Felírjuk az L egyenes és az X érintkezésének feltételét. Mivel $X \ni 0$, így az összes $F_i(T)$ konstans tagja egyenlő O-val. Jelöljük L_i-vel azok lineáris részét, úgy hogy $F_i=L_i+G_i$ $(i=1, \ldots, m)$, ahol G_i csak $a \geqq 2$ fokú tagokat tartalmazza. Akkor $F_i(at)=tL_i(a)+G_i(ta)$, és $G_i(ta)$ osztható t^2-tel. Ezért $F_i(at)$ osztható t^2-tel akkor és csakis akkor, ha $L_i(a)=0$. Az érintés feltétele

$$\text{(2)} \qquad L_1(a) = \ldots = L_m(a) = 0$$

alakú.

DEFINÍCIÓ. Azon egyenesek pontjainak mértani helye, amelyek X-et érintik az x pontban, érintő térnek nevezzük az x pontban. Ezt a teret Θ_x-szel jelöljük, vagy $\Theta_{x,X}$-szel, ha alá kell húznunk, hogy milyen X sokaságról van szó.

A (2) egyenletek tehát az érintőtér egyenletei. Ezek azt mutatják meg, hogy Θ_x lineáris tér.

1. PÉLDA. Az A^n-hez annak bármely pontjában vett érintő tér egybeesik A^n-nel.

2. PÉLDA. Legyen $X \subset A^n$ hiperfelület és $\mathscr{I}_X=(F)$. Ha $X \ni 0$ és $F=L+G$ (a fentebb elfogadott jelölésekben), akkor Θ_0 az $L(T_1, \ldots, T_n)=0$ egyetlen egyenlettel van meghatározva. Ezért, ha $L \neq 0$, akkor $\dim \Theta_0 = n-1$, ha viszont $L=0$, akkor $\Theta_0 = A^n$ és $\dim \Theta_0 = n$. Amikor a második eset áll fenn; arra egy példa ($n=2$-re) az $x^2-y^2+x^3=0$ egyenlettel adott görbe.

3. *Az érintő tér invarianciája*

A 2. pontban adott definíció az X sokaság egyenleteinek a nyelvén van megadva. Ezért nem nyilvánvaló, hogy az $f\colon X \to Y$ izomorfizmus mellett az x és $f(x)$ pontokban vett érintő terek izomorfak (vagyis azonos dimenziójúak). Megmutatjuk, hogy ez így van, és ennek érdekében átfogalmazzuk az érintő tér fogalmát úgy, hogy az csak a $k[X]$ algebrától függjön.

Emlékeztetünk néhány definícióra. Az $F(T_1, \ldots, T_N)$ polinomra és $x=(x_i, \ldots, x_N)$ pontra fennáll az $F(T)=F(x)+F_1(T)+\ldots+F_k(T)$ *Taylor*-féle felbontás, ahol az F_i-k i-edfokú T_j-x_j-től függő homogén polinomok. Az F_1 lineáris formát az F polinom x pontbeli differenciáljának nevezzük, és dF-fel vagy d_xF-fel jelöljük. Emellett

$$d_xF = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial T_i}\right)(x)(T_i-x_i).$$

A definícióból következik, hogy

$$d_x(F+G) = d_xF+d_xG, \quad d_x(F \cdot G) = F(x)d_xG+G(x)\cdot d_xF. \tag{1}$$

Ezt a jelölést használva az X sokaság x pontjában vett érintő tereknek az 1. pont (2) egyenletét

$$d_xF_1 = \ldots = d_xF_m = 0, \tag{2}$$

vagy

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F_j}{\partial T_i}\right)(x)(T_i-x_i) = 0 \quad (j=1, \ldots, m) \tag{3}$$

alakban írhatjuk fel, ahol $\mathscr{I}_X=(F_1, \ldots, F_m)$. Legyen $g \in k[X]$ és legyen meghatározva az X-re szűkített valamely G polinommal. Ha felírnánk $d_xg=d_xG$-t, akkor a válasz a G polinom választásától függne, és, pontosabban mondva, csak a d_xF, $F \in \mathscr{I}_X$ összeadandóig terjedő pontossággal volna meghatározva. Mivel $\mathscr{I}_X=(F_1, \ldots, F_m)$, így $F=G_1F_1+\ldots+G_mF_m$ és (1) miatt és azért, hogy $F_i(x)=0$, azt kapjuk, hogy $d_xF=G_1(x)dxF_1+\ldots+G_m(x)dxF_m$. Figyelembe véve (2)-t, azt látjuk, hogy az összes d_xF, $F \in \mathscr{I}_X$ lineáris forma egyenlő 0-val a Θ_x-en, ezért, ha d_xg-vel jelöljük a d_xG lineáris forma szűkítését Θ_x-re:

$$d_xg = d_xG|\Theta_x, \tag{4}$$

akkor tetszőleges $g \in k[X]$ függvénynek egyértelműen meghatározott lineáris formát feleltetünk meg a Θ_x-en.

DEFINÍCIÓ. A (4) egyenlőséggel meghatározott $d_x g$ lineáris formát a g függvény differenciáljának nevezzük az x pontban. Nyilvánvaló, hogy

$$d_x(f+g) = d_x f + d_x g, \quad d_x(fg) = f(x) d_x g + g(x) d_x f. \tag{5}$$

Ilyen módon van egy $d_x\colon k[X] \to \Theta_x^*$ homomorfizmusunk, ahol Θ_x^* a Θ_x-en tekintett lineáris formák tere. Mivel $d_x \alpha = 0$ az $\alpha \in k$ esetén, ezért az előbbi izomorfizmus vizsgálatát helyettesíthetjük a $d_x\colon \mathfrak{M}_x \to \Theta_x^*$ vizsgálatával, ahol $\mathfrak{M}_x = \{f \in k[X], f(x) = 0\}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{M}_x$ a $k[X]$ gyűrű ideálja.

1. TÉTEL. *A d_x homomorfizmus meghatározza az $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ és Θ_x^* terek izomorfizmusát.*

Be kell bizonyítanunk, hogy $\operatorname{Im} d_x = \Theta_x^*$, $\operatorname{Ker} d_x = \mathfrak{M}_x^2$. Előbbi nyilvánvaló, ugyanis tetszőleges φ lineáris forma a Θ_x-en valamely f lineáris függvénnyel van indukálva az A^n-en és $d_x f = \varphi$. A második állítás bizonyítására feltételezzük, hogy $d_x g = 0$, $g \in \mathfrak{M}_x$. Legyen g a $G \in k[T_1, \dots, T_N]$ polinommal indukálva. Feltétel szerint a $d_x G$ lineáris forma egyenlő 0-val a Θ_x-en, tehát ezen lineáris tér (2) egyenleteinek

$$d_x G = \lambda_1 d_x F_1 + \dots + \lambda_m d_x F_m$$

lineáris kombinációja. Legyen $G_1 = G - \lambda_1 F_1 - \dots - \lambda_m F_m$. Azt látjuk, hogy G_1 nem tartalmaz a $T_1, \dots, T_n$-től függő 0 és 1 fokú tagokat, tehát $G_1 \in (T_1, \dots, T_n)^2$. Továbbá $G_1/x = G/x = g$, tehát $g \in (t_1, \dots, t_N)^2$, ahol $t_i = T_i/x$. Mivel nyilvánvalóan $\mathfrak{M}_x = (t_1, \dots, t_N)$, így ez bizonyítja is a tételt.

Mint ismeretes, ha L lineáris tér és $M = L^*$ az L-en értelmezett lineáris függvények tere, akkor L-t azonosítani lehet az M-en értelmezett lineáris függvények terével, azaz $L = M^*$. Alkalmazva ezt a mi esetünkhöz, a következőket kapjuk.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Az x pontban vett érintő tér izomorf az $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$-en értelmezett lineáris függvények terével.*

Innen következtetni lehet az érintő terek viselkedésére a sokaságok racionális leképezései közben. Legyen $f\colon X \to Y$ egy ilyen leképezés és $f(x) = y$. Ez meghatározza az $f^*\colon k[Y] \to k[X]$ leképezést, méghozzá nyilván $f^*(\mathfrak{M}_y) \subset \mathfrak{M}_x$, $f^*(\mathfrak{M}_y^2) \subset \mathfrak{M}_x^2$, és így meg van határozva az $f^*\colon \mathfrak{M}_y/\mathfrak{M}_y^2 \to \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ leképezés. A lineáris függvények — mint bármely függvények — ellenkező irányban képeződnek le, viszont mivel az 1. következmény miatt a $\Theta_{x,X}$ és $\Theta_{y,Y}$ terek megfelelően izomorfak az $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ és $\mathfrak{M}_y/\mathfrak{M}_y^2$-en értelmezett lineáris függvények terével, így a $\Theta_{x,X} \to \Theta_{y,Y}$ leképezéshez jutunk. Ezt a leképezést az f leképezés differenciáljának nevezzük és $d_x f$-fel jelöljük.

Könnyű ellenőrizni, hogy ha $g\colon Y \to Z$ egy másik reguláris leképezés és $z = g(y)$, akkor a $d(g \cdot f)\colon \Theta_{x,X} \to \Theta_{z,Z}$ leképezésre fennáll a $d(gf) = dg \cdot df$ összefüggés. Ha f identikus $X \to X$ leképezés, akkor bármely $x \in X$ pontra $d_x f$ is identikus leképezése a Θ_x térnek. Ezen megjegyzésekből következik a

2. KÖVETKEZMÉNY. *Sokaságok izomorfizmusa hatására a megfelelő pontokban vett érintő terek is izomorf módon képeződnek le. Speciálisan az érintő tér dimenziója invariáns az izomorfizmussal szemben.*

2. TÉTEL. *A $\Theta_{x,X}$ érintő tér lokális invariánsa az X sokaság x pontjának.*

Megmutatjuk, hogyan kell meghatározni Θ_x-et az x pont O_x lokális gyűrűjének a nyelvén. Emlékeztetünk arra, hogy az $\frac{F}{G}$, $F, G \in k[T_1, \dots, T_n]$ racionális függvény differenciálját a következő módon határozzuk meg: $d_2\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{G(x) d_x F - F(x) d_x G}{G^2(x)}$, $G(x) \neq 0$.

Az $f \in O_x$ függvényt úgy is lehet tekinteni, mint az $\frac{F}{G}$ racionális függvény szűkítését az X-re, és definiálni a differenciált mint $d_x f = d_x \left(\frac{F}{G}\right) / \Theta_x$-et. Az 1. tételt megelőző eszmefuttatások, úgyszintén a bizonyítás, érvényben marad, és azt kapjuk, hogy a d_x a $d_x : \mathfrak{M}_x / \mathfrak{M}_x^2 \to \Theta_x^2$ izomorfizmust határozza meg, ahol most $\mathfrak{M}_x$ az O_x gyűrű maximális ideálját jelenti: $\mathfrak{M}_x = \{f \in O_x, f(x) = 0\}$. Ez bizonyítja a 2. tételt.

Meghatározzuk tetszőleges kváziprojektív X sokaságban az x pontbeli Θ_x érintő teret mint $(\mathfrak{M}_x / \mathfrak{M}_x^2)^*$-ot, ahol $\mathfrak{M}_x$ az x pont O_x lokális gyűrűjének maximális ideálja. A 2. tétel miatt ez szintén érintő tér lesz az x pontban annak tetszőleges affin környezetéhez.

Ilyen módon az érintő tér mint „absztrakt" vektortér van definiálva, amely nem valamely nagyobb tér valamilyen altere alakjában realizálódik. Viszont ha X affin és $X \subset A^N$, akkor az X sokaság A^N-be való i beágyazása a $di: \Theta_{x,X} \to \Theta_{x,A^N}$ beágyazást határozza meg. Mivel a Θ_{x,A^N} azonosítható A^N-nel, így $\Theta_{x,X}$-et tekinthetjük beágyazottnak A^n-be és visszatérünk a 2. pontban adott definícióhoz.

Ha X projektív és $X \subset P^N$, $x \in X$ és $x \in A_i^N$, akkor $\Theta_{x,X}$ benne van A_i^N-ben. A $\Theta_{x,N}$ lezártja P^N-ben nem függ az affin A_i^N nyílt halmaz kiválasztásától. Bár ekkor ugyanaz az elnevezés két különböző $\bar{Q}_{x,N} \subset P^N$ objektumra is vonatkozik, néha szintén érintő térnek nevezzük az X-hez az x pontban.

Az érintő tér invariáns volta lehetőséget nyújt a sokaságoknak affin terekbe való beágyazására vonatkozó néhány kérdés megválaszolására. Például, ha az $x \in X$ pont olyan, hogy dim $\Theta_x = N$, akkor X nem izomorf az A^n affin tér semmilyen részsokaságával sem, ahol $n < N$ ugyanis az $f: X \to Y \subset A^m$ izomorfizmus átvinné Θ_x-et egy izomorf $\Theta_{f(x)} \subset A^n$ térbe. Ebből kiindulva tetszőleges $n > 1$-re lehet konstruálni példát olyan $X \subset A^n$ görbére, amely nem izomorf az $Y \subset A^m$ görbével, ahol $m < n$. Éspedig X az A^1 képe az

(6) $$x_1 = t^n,\ x_2 = t^{n+1},\ \dots,\ x_n = t^{2n-1}$$

leképezésben. Elegendő bebizonyítani, hogy az $x = (0, \dots, 0)$-ra $\Theta_{x,X} = A^n$. Ez azt jelenti, hogy az összes $F \in \mathscr{I}_X$ polinom nem tartalmaz $T_1, \dots, T_n$-re nézve lineáris tagokat. Legyen $F \in \mathscr{I}_X$ és $F = \sum_{i=1}^{n} a_i T_i + G$, $G \in (T_1, \dots, T_n)^2$.

Behelyettesítve F-be az (1) egyenletet, azt kaphatjuk, hogy t-re azonosan teljesül $\sum_{1}^{n} a_i t^{n+i-1} + G(t^n, t^{n+1}, \dots, t^{2n+1}) = 0$. Ez viszont lehetetlen, ha legalább egy $a_i \neq 0$, mivel az $a_i t^{n-i+1}$ tagok fokszáma $\leqq 2n-1$, a $G(t^n, \dots, t^{2n-1})$-ből keletkező tagok foka viszont $\geqq 2n$, tehát azok nem tűnhetnek el.

Amint az a bemutatott bizonyításból következik, az X görbe x pontjának egyetlen környezete sem izomorf az A^m-beli kváziprojektív részsokasággal $m < n$ esetén.

4. *Szinguláris* pontok*

Most tisztázni fogjuk, mit lehet mondani az irreducibilis kváziprojektív X sokaság pontjaiban vett érintő terek dimenziójáról. Eredményünk lokális jellegű lesz, ezért affin sokaságok vizsgálatára fogunk szorítkozni.

Legyen $X \subset A^n$ irreducibilis sokaság. Az $A^N \times X$ direktszorzatban tekintsük az (a, x), $a \in A^N$, $x \in X$ párok olyan Θ halmazát, hogy $a \in \Theta_x$. A 2. pont (2) egyenletei megmutatják, hogy Θ zárt $A^N \times X$-ben. Jelöljük π-vel a $\Theta \to X$: $\pi(a, x) = x$ projekciót. Nyilvánvaló, hogy $\pi(\Theta) = X$, $\pi^{-1}(x) = \{\pi(a, x),\ a \in \Theta_x\}$. Ilyen módon Θ felbomlik X-hez érintő terekre különböző $x \in X$ pontokban. A Θ sokaságot az X sokaság érintő rétegeződésének nevezzük. Alkalmazva Θ-ra a leképezés rétegeiről szóló tételt (I. fejezet 5. § 7. tétel és következménye), azt látjuk, hogy létezik olyan s szám, hogy $\dim \Theta_x \geqq s$, és azok az $y \in X$ pontok, amelyekre $\dim \Theta_y > s$, az X-től különböző X-beli zárt részhalmazt alkotnak (azaz alacsonyabb dimenziószámú részsokaságot).

DEFINÍCIÓ. Az X irreducibilis sokaság azon x pontjait, amelyekre $\dim \Theta_x = s = \min \dim \Theta_y$, *egyszerű** pontoknak*, a többi pontot *szingulárisnak* nevezzük. Azt a sokaságot, amelyre az x pont egyszerű, nem szingulárisnak nevezzük ebben a pontban. Azt a sokaságot, amelynek minden pontja egyszerű, simának nevezzük. Amint az imént láttuk, az egyszerű pontok nem üres nyílt részhalmazt, a szingulárisak pedig zárt valódi részhalmazt alkotnak az X sokaságban.

Megvizsgáljuk a hiperfelületek esetét (2. pont 2. példa). Ha $\mathscr{I}_X = (F)$, akkor az x pontbeli érintő tér egyenlete:

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial F}{\partial T_i}\right)(x)(T_i - x_i) = 0$$

alakú. Bebizonyítjuk, hogy ebben az esetben $s = \min \dim \Theta_y = n-1$. Nyilván ez ekvivalens azzal, hogy $\frac{\partial T}{\partial T_i}$ nem egyenlő egyidejűleg 0-val X-en. 0 karakterisztika mellett ez azt jelentené, hogy F konstans, a $p > 0$ karakterisztika esetében viszont azt, hogy az összes változó az F-ben p többszöröseivel egyenlő hatványon szerepel. Akkor viszont (a k test algebrailag zárt volta miatt) $F = F_1^p$ ez pedig ellentmond annak, hogy $\mathscr{I}_X = (F)$. Ilyen módon példánkban az egyszerű $x \in X$ pontokra $\dim \Theta_x = \dim X = n-1$. Meg fogjuk mutatni, hogy ugyanez a helyzet tetszőleges irreducibilis sokaság esetében is, és hogy az általános eset visszavezethető a hiperfelület példájához.

3. TÉTEL. *Egyszerű pontban vett érintő tér dimenziója egyenlő a sokaság dimenziójával.*

Az egyszerű pont definíciójának értelmében a tétel azt állítja, hogy az irreducibilis X sokaság minden x pontjára $\dim \Theta_x \geqq \dim X$, és azon x pontok halmaza, amelyekre $\dim \Theta_x = \dim X$, nyílt és nem üres. Nyilvánvaló, hogy ez lokális állítás, és számunkra elegendő az affin sokaság esetét megvizsgálni. Láttuk, hogy létezik olyan s szám, hogy $\dim \Theta_x \geqq s$ az összes $x \in X$-re és azon pontok halmaza, amelyekre $\dim \Theta_x = s$,

* Особые точки.
** Простые точки.

nyílt és nem üres. Be kell bizonyítanunk, hogy $s = \dim X$. Alkalmazzuk most az 1. fejezet 3. § 6. tételét, amely azt állítja, hogy X biracionálisan izomorf egy Y hiperfelülettel. Legyen $\varphi\colon X \to Y$ a megfelelő biracionális izomorfizmus. Az 1. fejezet 4. § 3. pont állításának megfelelően léteznek olyan nyílt nem üres $U \subset X$ és $V \subset Y$ halmazok, hogy φ izomorfizmust határoz meg közöttük. A tétel megfogalmazása előtt tett megjegyzések értelmében az Y sokaság egyszerű pontjainak W halmaza nyílt és az $y \in W$-re $\dim \Theta_y = \dim Y = \dim X$. A $W \cap V$ halmaz szintén nyílt és nem üres, tehát nyílt és nem üres a $\varphi^{-1}(W \cap V) \subset U$ halmaz is. Mivel az érintő tér dimenziója az izomorfizmustól nem változik, így $x \in \varphi^{-1}(W \cap U)$-ra $\dim \Theta_x = \dim X$. A tétel bizonyítva van.

Most vizsgáljuk meg a reducibilis sokaságokat. Azok esetében megszűnik igaz lenni még a $\dim \Theta_x \geqq \dim X$ egyenlőtlenség is. Ha például $X = X_1 \cup X_2$, $\dim X_1 = 1$, $\dim X_2 = 2$, $x \notin X_2$, $x \in X_1$ és x az X_1-en egyszerű pont, akkor $\dim \Theta_x = 1$ és $\dim X = 2$. Ez természetes is, hiszen az X sokaságnak az x ponton át nem haladó komponensei hatással vannak az X dimenziójára, ugyanakkor nem változtatják meg a Θ_x teret. Ezért természetes bevezetni a következő fogalmat. Az X sokaság x pontbeli $\dim_x X$ dimenzióján az X sokaság x ponton átmenő irreducibilis komponensei dimenziójának a maximumát értjük. Nyilván $\dim X = \max\limits_{x \in X} \dim_x X$.

DEFINÍCIÓ. Az X affin sokaság x pontját egyszerűnek nevezzük, ha $\dim \Theta_x = \dim_x X$.

A 3. tételből következik, hogy bármely $x \in X$ pont esetén $\dim \Theta_x \geqq \dim_x X$. Valóban, ha X^i $(i = 1, \ldots, s)$ az X sokaság x ponton átmenő irreducibilis komponensei, a Θ_x^i pedig ebben a pontban az X^i-khez vett érintő terek, akkor $\dim \Theta_x^i \geqq \dim X^i$, $\Theta_x^i \subset \Theta_x$, és ezért $\dim \Theta_x \geqq \max\limits_i \dim \Theta_x^i \geqq \max \dim X^i = \dim_x X$.

Ugyanígy következik a 3. tételből, hogy a szinguláris pontok az X sokaság kisebb dimenziószámú részsokaságaiban vannak.

5. *Érintő kúp*

A legegyszerűbb invariáns, amellyel mérhető a szinguláris pontnak az egyszerűktől való eltérése, ez a pont érintő terének dimenziója. Viszont létezik sokkal finomabb invariáns — az X-hez vett érintő kúp a szinguláris x pontban. A következőkben erre a fogalomra nem lesz szükségünk. Ezért a következő eszmefuttatások részletes lefolytatását (nagyon egyszerű) gyakorlatként az olvasóra bízzuk.

Legyen X irreducibilis affin sokaság. Az $x \in X$ pontban az X-hez húzott érintő kúp azokból az x-en átmenő egyenesekből fog állni, amelyeket a differenciál geometriából ismert szelők határeseteinek az analógiájára fogunk definiálni.

Tételezzük fel, hogy $X \subset A^N$, $x = (0, \ldots, 0)$ és A^N vektortérré van alakítva az origónak az x pontban való elhelyezésével. Tekintsük az $A^{N+1} = A^N \times A^1$-ben az olyan (a, t), $a \in A^N$, $t \in A^1$ párok $\tilde{X}$ halmazát, amelyekre $a \cdot t \in X$. Mint mindig, adva van két $\varphi\colon \tilde{X} \to A^1$ és $\psi\colon \tilde{X} \to A^N$ projekció. Nyilvánvaló, hogy $\tilde{X}$ zárt A^{N+1}-ben. Könnyű belátni, hogy az reducibilis (ha $X \neq A^N$) és két komponensből áll: $\tilde{X} = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$, $\tilde{X}_2 = \{(a, 0),\ a \in A^N\}$, $\tilde{X}_1$ egybeesik a $\varphi^{-1}(A^1 - (0))$ lezártjával $\tilde{X}$-ban. Jelöljük φ_1 és ψ_1-gyel a φ és ψ szűkítését az $\tilde{X}_1$-ra. A $\varphi_1(\tilde{X}_1)$ halmaz lezártja az X sokaság x ponton átmenő összes szelői pontjai halmazának. A $T_x = \psi_1 \varphi_1^{-1}(0)$ halmazt az X-hez az x pontban húzott *érintő kúpnak* nevezzük.

Könnyű felírni az érintő kúp egyenleteit. Az $\tilde{X}$ egyenletei

$$F(at)=0, \quad F\in\mathcal{I}_X$$

alakúak. Legyen $F=F_k+F_{k+1}+\ldots+F_l$, ahol F_j j-edfokú forma, $F_k\neq 0$. Akkor $F(at)=t^k F_k(a)+\ldots+t^l F_l(a)$. Mivel $F(0)=0$, így mindig $k\geq 1$ és az $\tilde{X}_2$ komponens egyenlete $t=0$. Könnyű belátni, hogy a T_x egyenletei $F_k=0$, $F\in\mathcal{I}_X$ alakúak. Az F_k formát az *F polinom kezdő formájá*nak* nevezzük. Ilyen módon T_x definiálható az $\mathcal{I}_X$ ideál polinomjaiban az összes kezdő formának 0-val egyenlővé tételével. Mivel T_x homogén egyenletekkel van megadva, ezért az olyan kúp, amelynek csúcsa az x pontban van. Könnyű belátni, hogy $T_x\subset\Theta_x$, és $T_x=\Theta_x$ akkor, ha az x pont egyszerű.

Tekintsük egy sík algebrai $X\subset A^2$ görbe esetét. Ha $\mathcal{I}_X=(F(x,y))$ és F_k az F polinom kezdő formája, akkor a T_x egyenlete $F_k(x,y)=0$ alakú. Mivel F_k kétváltozós forma, a k test pedig algebrailag zárt, így F_k felbomlik lineáris formák szorzatára: $F_k(x,y)=\Pi(\alpha_i x+\beta_i y)^{l_i}$. Ezért ebben az esetben T_x felbomlik néhány $\alpha_i x+\beta_i y=0$ egyenesre. Ezeket az egyeneseket az X érintőinek nevezzük az x pontban, az l_i-ket pedig az érintők multiplicitásának. Ha $k>1$, akkor $\Theta_x=A^2$. A k számot az *x szinguláris pont multiplicitásának*** nevezzük. $k=2$-nél a pontot kétszeresnek, $k=3$-nál háromszorosnak nevezzük.

Például, ha $F=x^2-y^2+x^3$, $x=(0,0)$, akkor T_x két egyenesből áll: $x+y=0$, $x-y=0$; ha $F=x^2y-y^3+x^4$, $x=(0,0)$, akkor T_x három egyenesből áll: $y=0$, $x+y=0$, $x-y=0$; ha $F=y^2-x^3$, $x=(0,0)$, akkor $y=0$ kétszeres érintő.

Ugyanúgy, mint az érintő tér általunk eredetileg adott definíciója, az érintő kúp érintett definíciója is felhasznál olyan fogalmat, amely nem invariáns az izomorfizmussal szemben. Viszont meg lehet mutatni, hogy a T_x érintő kúp invariáns az izomorfizmussal szemben és az x pont lokális invariánsa.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az irreducibilis X sokaság x pontjának lokális gyűrűje uniója ($k(X)$-ben) az összes $k[U]$ gyűrűknek, ahol U az x pont környezetei.

2. Bizonyítsuk be, hogy az olyan racionális számok halmaza, amelyek nevezője relatív prím egy adott p prímszámmal, lokális gyűrűt alkot.

3. Legyen A *Noether*-féle gyűrű és p annak prímideálja. Megkonstruáljuk a hányadosok Ap gyűrűjét, amely az $\frac{a}{b}$, $a\in A$, $b\in P$ párokból áll az egyenlőség és a műveletek szokásos definíciója mellett. Bizonyítsuk be, hogy Ap-lokális gyűrű.

4. A $\varphi(t)=(t^2,t^3)$ leképezés az $y^2=x^3$ görbe és az A^1 egyenes biracionális izomorfizmusát határozza meg. t-nek milyen racionális függvényei felelnek meg a $(0,0)$ pont O_x lokális gyűrűje függvényeinek?

5. Ugyanaz a feladat az A^1 és az 1. fejezet 1. § 1. pontban adott (1) görbe közötti biracionális izomorfizmusra.

6. Bizonyítsuk be, hogy az $xy=0$ görbe $(0,0)$ pontjának O_x lokális gyűrűje

* Начальная форма.

** Кратность.

izomorf az $Q \subset O' \oplus O'$ (O' az A'-beli 0 pont lokális gyűrűje) részgyűrűvel, amely olyan (f, g), $f, g \in O'$ függvényekből áll, amelyekre $f(0)=g(0)$.

7. Határozzuk meg azon görbe $(0, 0)$ pontjának a lokális gyűrűjét, amely a három koordináta tengelyből áll az A^3-ban.

8. Határozzuk meg az $xy(x-y)=0$ görbe $(0, 0)$ pontjának a lokális gyűrűjét.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in X$ és $y \in Y$ egyszerű pontok, akkor az $(x, y) \in X \times Y$ is egyszerű pont.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $X = X_1 \cup X_2$, $x \in X_1 \cap X_2$; $\Theta_{x,X}$, Θ_{x,X_1}, Θ_{x,X_2} érintő terek, akkor $\Theta_{x,X} \subset \Theta_{x,X_1} + \Theta_{x,X_2}$. Mindig igaz-e ez az egyenlőség?

11. Bizonyítsuk be, hogy a szinguláris ponttal rendelkező másodrendű hiperfelület egy kúp.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha a harmadrendű hiperfelületnek van két szinguláris pontja, akkor az őket összekötő egyenes rajta van a hiperfelületen.

13. Bizonyítsuk be, hogy ha a harmadrendű sík görbének van három szinguláris pontja, akkor három egyenesre bomlik.

14. Bizonyítsuk be, hogy az $F(x_0, \ldots, x_n)=0$ egyenlettel megadott P^n-beli hiperfelület szinguláris pontjait az $F(x_0, \ldots, x_n)=0$, $F_{x_i}(x_0, \ldots, x_n)=0$ $(i=0, \ldots, n)$ egyenletrendszer határozza meg.

Ha az F forma fokszáma nem osztható a test karakterisztikájával, akkor az első egyenlet a többi következménye.

15. Bizonyítsuk be, hogy ha a P^n-beli hiperfelület tartalmaz $r \geqq \frac{n}{2}$ dimenziójú L alteret, akkor vannak szinguláris pontjai. (Utasítás: Válasszuk ki a koordináta rendszert úgy, hogy L-t az $x_{r+1}=0, \ldots, x_n=0$ egyenletek adják meg, és keressük az L-beli szinguláris pontokat.)

16. Az a milyen értékei mellett van az $x_0^3+x_1^3+x_2^3+a(x_0+x_1+x_2)^3=0$ görbének szinguláris pontja? Milyenek akkor a szinguláris pontok? Reducibilis-e a görbe?

17. Határozzuk meg a *Steiner*-felület szinguláris pontjait P^3-ban: $x_1^2x_2^2+x_2^2x_0^2+$ $+x_0^2x_1^2-x_0x_1x_2x_3=0$.

18. Határozzuk meg a *Kummer*-féle harmadrendű felület szinguláris pontjait P^3-ban: $x_0x_1x_2+x_0x_1x_3+x_0x_2x_3+x_1x_2x_3=0$.

19. Bizonyítsuk be, hogy 0-karakterisztikájú test felett a $P^{\nu_{n,m}}$ (1. fejezet 5. § 2. pont) tér azon pontjai, amelyek szinguláris ponttal rendelkező hiperfelületeknek felelnek meg, hiperfelületet alkotnak $P^{\nu_{n,m}}$-ben. (Útmutatás: Használjuk fel az 1. fejezet 6. § 11. feladat eredményeit.)

20. Bizonyítsuk be, hogy ha a harmadrendű görbének van szinguláris pontja, akkor az a görbe racionális. (Útmutatás: Használjunk projekciót a szinguláris pontból.)

21. Legyen $F(x_0, x_1, x_2)=0$ az irreducibilis $X \subset P^2$ görbe egyenlete. Tekintsük az $u_i=\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, x_1, x_2)$ $(i=0, 1, 2)$ képletekkel megadott $\varphi: X \to P^2$ racionális leképezést. Bizonyítsuk be, hogy a) $\varphi(x)$ akkor és csakis akkor pont, ha X egyenes; b) ha X nem egyenes, akkor φ az $x \in X$ pontban akkor és csakis akkor reguláris, ha ez a pont egyszerű. A $\varphi(X)$ görbét az X görbe *duálisának* nevezzük.

22. Bizonyítsuk be, hogy ha X másodrendű görbe, akkor $\varphi(X)$ is másodrendű görbe.

23. Keressük meg az $x_0^3+x_1^3+x_2^3=0$ görbe duálisát.

24. Bizonyítsuk be, hogy ha $X \subset P^n$ hiperfelületnek nincsenek szinguláris pontjai és nem hipersík, akkor a Θ_x, $x \in X$ lineáris terek halmaza hiperfelületet képez $\tilde{P}^n = P^{\gamma_{n,1}}$ duális térben.

25. Legyen φ az $X \subset A^n$ sokaság reguláris leképezése, amely valamely altérre való projektálásból áll. Határozzuk meg a Θ_x, $x \in X$ lineáris tér $d\varphi$ leképezését.

26. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $t > 0$ egész szám esetén az $\mathfrak{M}_x^t/\mathfrak{M}_x^{t+1}$ csoport végesdimenziós vektortér k test felett, és a tér dimenziója az x pont lokális invariánsa.

2. §. Hatványsorba fejtés

1. *Lokális paraméterek a pontban*

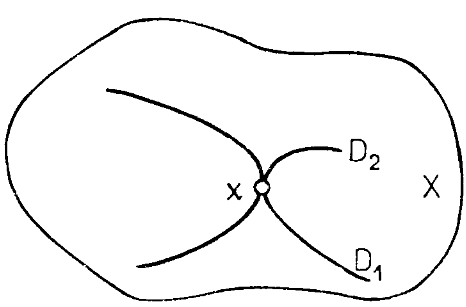
Megvizsgáljuk az n-dimenziós X sokaság egyszerű x pontját.

DEFINÍCIÓ. Az $u_1, \ldots, u_n \in \Theta_x$ függvényeket lokális paramétereknek nevezzük az x pontban, ha $u_i \in \mathfrak{M}_x$ és $u_1, \ldots, u_n$ az $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ bázist képezi.

A $d_x: \mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2 \to \Theta_x^*$ izomorfizmus miatt $u_1, \ldots, u_n$ akkor és csakis akkor alkot lokális paraméter rendszert, ha a $d_x u_1, \ldots, d_x u_n$ lineáris formák lineárisan függetlenek Θ_x-en. Mivel $\dim \Theta_x^* = n$, így utóbbi ekvivalens azzal, hogy az

$$d_x u_1 = \ldots = d_x u_n = 0 \tag{1}$$

egyenleteknek csak triviális megoldásai vannak Θ_x-ben. X-et felcserélhetjük az x pont X' affin környezetével, amelyen az $u_1, \ldots, u_n$ függvények regulárisak. X_i'-vel jelöljük az X'-ben az $u_i = 0$ egyenlettel megadott hiperfelületet. Legyen U_i az X'-n az u_i függvényt meghatározó polinom, és $\mathscr{I}_i = \mathscr{I}_{X_i'}$, $\mathscr{I} = \mathscr{I}_{X'}$. Akkor $\mathscr{I}_i \supset (\mathscr{I}, U_i)$, és az érintő tér definíciójából következik, hogy $\Theta_i \subset L_i$, ahol Θ_i az x pontban az X_i'-höz húzott érintő tér, $L_i \subset \Theta_x$ pedig a $d_x u_i = 0$ egyenlettel van megadva. Abból, hogy az (1) rendszernek csak triviális megoldása van, következik, hogy $L_i \neq \Theta_x$, azaz $\dim L_i = n-1$, a metszet dimenziójáról szóló tétel és a $\dim \Theta_i \geqq \dim X_i'$ egyenlőtlenségből pedig az következik, hogy $\dim \Theta_i \geqq n-1$. Ezért $\dim \Theta_i = n-1$, ami pedig azt jelenti, hogy az x pont egyszerű az X_i'-n. Az X_i' sokaságok metszete egybeesik az x ponttal ezen pont valamely környezetében, ugyanis ha x-en áthaladna a $\bigcap X_i'$ metszet Y komponense, $\dim Y > 0$, akkor az Y-nak az x pontbeli érintő tere benne volna az összes Θ_i-ben, ez viszont ismét ellentmond annak, hogy az (1) rendszernek csak triviális megoldása van.



3. ábra

Bebizonyítottuk a következő állítást.

1. TÉTEL. *Ha $u_1, \ldots, u_n$ lokális paraméterek az x pontban, $u_1, \ldots, u_n$ reguláris az X-en és $X_i = X_{u_i}$, akkor az x pont egyszerű az X_i-k mindegyikén és $\bigcap \Theta_i = 0$, ahol Θ_i érintő tere az X_i-nek az x pontban.*

Az 1 kodimenziós $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$ sokaságokat, amelyek rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, azaz $\mathscr{D}_i \ni x$, ahol x egyszerű a $\mathscr{D}_i$-n és $\bigcap_{i=1,\dots,n} \Theta_{x,\mathscr{D}_i} = x$, *tranzverzálisoknak* nevezzük x pontban. Például tranzverzális két görbe az X felületen, ha az x pont mindkettőn egyszerű és azok érintőegyenesei ebben a pontban különbözők (3. ábra).

Legyen X' az x pont affin környezete, amelyben $\bigcap X_i = x$. Az x pontot a $t_1 = \dots$ $\dots = t_N = 0$ egyenletek határozzák meg, ha $X \subset A^N$ és t_i koordináták, a $\bigcap U_i$-t pedig az $u_1 = \dots = u_n = 0$ egyenletek definiálják. HILBERT gyökökről szóló tétele miatt innen az következik, hogy $(t_1, \dots, t_N)^k \subset (u_1, \dots, u_N)$ valamely $k > 0$-ra. Itt $(t_1, \dots, t_N)$ és $(u_1, \dots, u_n)$ a $k[X']$ gyűrű ideáljai. Annál inkább igaz ez a $(t_1, \dots, t_N)$ és $(u_1, \dots, u_n)$ ideálokra a Θ_x gyűrűben. Megjegyezzük, hogy $(t_1, \dots, t_N) = \mathfrak{M}_x$, és így $\mathfrak{M}_x^k \subset$ $\subset (u_1, \dots, u_n)$. Egy pontosabb állítást fogunk bebizonyítani.

2. TÉTEL. *A lokális paraméterek egy $\mathfrak{M}_x$ maximális ideált generálnak O_x lokális gyűrűben.*

Amint már láttuk, $\mathfrak{M}_x = (t_1, \dots, t_N)$. Be kell bizonyítanunk, hogy az összes $t_i \in (u_1, \dots, u_n)$. $N-i$ szerinti indukcióval be fogjuk bizonyítani, hogy

$$t_i \in (u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_{i-1}).$$

Feltételezés szerint

$$\mathfrak{M}_x = (u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_N) = (u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_k). \tag{2}$$

A lokális paraméterek definíciójából következik, hogy

$$t_k \equiv \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j (\mathfrak{M}_x^2), \quad \alpha_j \in k. \tag{3}$$

(2) miatt az $\mathfrak{M}_x^2$ minden eleme felírható

$$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n + \mu_1' t_1 + \dots + \mu_k' t_k, \quad \mu_j, \mu_j' \in \mathfrak{M}_x$$

alakban. Ezért (3) azt jelenti, hogy

$$t_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j + \sum_{j=1}^{n} \mu_j u_j + \sum_{s=1}^{k} \mu_s' t_s,$$

vagy

$$(1 - \mu_k') t_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j + \sum_{s=1}^{k-1} \mu_s' t_s \in (u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_{k-1}). \tag{4}$$

Mivel $\mu_k' \in \mathfrak{M}_x$, így $1 - \mu_k' \notin \mathfrak{M}_x$, és ezért $(1 - \mu_k')^{-1} \in \Theta_x$. Ezért (4)-ből az következik, hogy $t_k \in (u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_{k-1})$.

MEGJEGYZÉS. A leírt fejtegetések bizonyítják a következő általános tényt a lokális gyűrűkről.

NAKAIAMA-FÉLE LEMMA. *Legyen M egy $\mathfrak{M}$ maximális ideállal rendelkező véges típusú O lokális gyűrű feletti modulus. Ha az $u_1, \dots, u_n \in M$ elemek olyanok, hogy azok $M/\mathfrak{M}M$-beli képei generálják ezt a modulust, akkor az $u_1, \dots, u_n$ elemek generálják M-et.*

2. *Hatványsorba fejtés*

Az O_x lokális gyűrű elemeihez hatványsorok megfeleltetése a következő elképzelésen alapul. Tetszőleges $f \in O_x$ függvény esetén legyen $f(x) = \alpha_0$, $f_1 = f - \alpha_0$. Akkor $f_1 \in \mathfrak{M}_x$. Legyen $u_1, \dots, u_n$ lokális paraméterek rendszere az x pontban. Definíció szerint $u_1, \dots, u_n$ elemek generálják az egész $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ vektorteret. Tehát léteznek olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ elemek, hogy $f_1 - \sum_1^n \alpha_i u_i \in \mathfrak{M}_x^2$. Legyen $f_2 = f_1 - \sum_1^n \alpha_i u_i = f - \alpha_0 - \sum_1^n \alpha_i u_i$. Mivel $f_2 \in \mathfrak{M}_x^2$, így $f_2 = \sum g_j h_j$, $g_j, h_j \in \mathfrak{M}_x$. Mint fentebb is, léteznek olyan $\beta_{ij}, \gamma_{ij} \in k$ elemek, hogy

$$g_j - \sum_{i=1}^n \beta_{ji} u_i \in \mathfrak{M}_x^2, \quad h_j - \sum_{i=1}^n \gamma_{ji} u_i \in \mathfrak{M}_x^2.$$

Legyen

$$\sum_j \Big(\sum_i \beta_{ji} u_i\Big)\Big(\sum_i \gamma_{ji} u_i\Big) = \sum_{1 \leq l, k \leq n} \alpha_{lk} u_l u_k.$$

Akkor

$$f_2 - \sum \alpha_{lk} u_l u_k \in \mathfrak{M}_x^3,$$

és így

$$f - \alpha_0 - \sum \alpha_i u_i - \sum \alpha_{lk} u_l u_k \in \mathfrak{M}_x^3.$$

Így folytatva nyilván találkoztunk olyan $F_i \in k[T_1, \dots, T_n]$, deg $F_i = i$ formákkal, hogy $f - \sum_{i=0}^k F_i(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{M}_x^{k+1}$.

Definíció. *A* $(T_1, \dots, T_n) = T$ *változók formális hatványsorai gyűrűjének* nevezzük azt a gyűrűt, amelynek elemei az

$$\Phi = F_0 + F_1 + F_2 + \dots \tag{1}$$

alakú végtelen kifejezések, ahol $F_i \in k[T]$ i-edfokú forma, a műveleti szabályok pedig $\psi = G_0 + G_1 + G_2 + \dots$ mellett

$$\Phi + \psi = (F_0 + G_0) + (F_1 + G_1) + (F_2 + G_2) + \dots$$

$$\Phi \cdot \psi = H_0 + H_1 + H_2 + \dots, \quad H_i = \sum_{j+l=i} G_j F_l.$$

A formális hatványsorok gyűrűjét $k[[T]]$-vel jelöljük. Ez tartalmazza k-t (olyan hatványsorok, amelyekben $F_i = 0$, ha $i > 0$). Ha i az első olyan index, amelyre $F_i \neq 0$, akkor F_i-t az (1) sor kezdő formájának nevezzük. Szorzat kezdő tagja egyenlő a kezdő tagok szorzatával, ezért $k[[T]]$ nem tartalmaz zérusosztókat.

Az előbbi fejtegetések lehetőséget adnak hozzárendelni az $f \in O_x$ függvényhez egy $\Phi = F_0 + F_1 + F_2 + \dots$ hatványsort.

A következő definícióhoz jutottunk el.

Definíció. Egy Φ formális hatványsort az $f \in O_x$ *függvény Taylor-sorának* nevezzük, ha minden $k \geqq 0$-ra,

$$f - S_k(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{M}_x^{k+1}, \quad S_k = \sum_{i=0}^k F_i. \tag{2}$$

PÉLDA. Legyen $X=A^1$ és x a $t=0$ koordinátaértéknek megfelelő pont. Akkor $\mathfrak{M}_x=(t)$ és az $f(t)=\frac{P(t)}{Q(t)}$, $Q(0)\neq 0$ racionális függvénynek megfeleltethető egy olyan $\sum_0^\infty \alpha_m t_m$ hatványsor, hogy

$$\frac{P(t)}{Q(t)}-\sum_0^k \alpha_m t^m \equiv 0 \quad (t^{k+1}),$$

vagyis

$$P(t)-Q(t)\left(\sum_{m=0}^k \alpha_m t^m\right) \equiv 0 \quad (t^{k+1}).$$

Ez éppen a szokásos eljárás a racionális függvény hatványsora együtthatóinak a megkeresésére a határozatlan együtthatók módszerével. Például

$$\frac{1}{1-t} \sum_{m=0}^{\infty} t^m,$$

mivel

$$\frac{1}{1-t}-\sum_0^k t^m = \frac{t^{k+1}}{1-t} \equiv 0 \quad (t^{k+1}).$$

Az $f\to\Phi$ megfeleltetés lényegesen függ az $u_1, \ldots, u_n$ lokális paraméterrendszer kiválasztásától.

A fent folytatott fejtegetések bebizonyítják a következő állítást.

3. TÉTEL. *Minden f függvénynek létezik legalább egy Taylor-sora.*

Eddig sehol sem használtuk azt fel, hogy az x pont egyszerű. $u_1, \ldots, u_n$-ként ki lehetett választani az O_x gyűrű tetszőleges olyan elemrendszerét, amelynek képei generálják $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$-et. Most fel fogjuk használni az x egyszerűségét.

4. TÉTEL. *Ha az x pont egyszerű, akkor a függvénynek egyetlen Taylor-sora van.*

Nyilván elegendő bebizonyítani, hogy az $f=0$ függvény bármely *Taylor*-sora egyenlő 0-val. (2) alapján ez ekvivalens a következő állítással: ha $F_k(T_1, \ldots, T_n)$ egy k-adfokú forma, $u_1, \ldots, u_n$ az egyszerű x pont lokális paraméterei és

$$F_k(u_1, \ldots, u_n)\in \mathfrak{M}_x^{k+1}, \tag{3}$$

akkor

$$F_k(T_1, \ldots, T_n) = 0.$$

Tételezzük fel, hogy ez nem így van. A nemelfajuló lineáris transzformáció biztosítja annak elérhetőségét, hogy az F_k formában a T_n^k együtthatója ne legyen egyenlő 0-val. Valóban, ez az együttható egyenlő $F_k(0, \ldots, 0, 1)$-gyel és ha $F_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)\neq 0$ (ilyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ létezik amennyiben $F_k\neq 0$), akkor elegendő végrehajtani egy olyan lineáris transzformációt, amely $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ vektort a $(0, \ldots, 0, 1)$-be viszi át. Ilyen módon feltételezhetjük, hogy $F_k(T_1, \ldots, T_n)=\alpha T_n^k+G_1(T_1, \ldots, T_{n-1})T_n+\ldots$ $\ldots+G_k(T_1, \ldots, T_{n-1})$, ahol $\alpha\neq 0$ és G_i i-edfokú forma.

Az 1. pont 2. tételéből következik, hogy az $\mathfrak{M}_x^{k+1}$ ideál tetszőleges eleme felírható, egy az $u_1, \dots, u_n$-től függő k-adfokú forma alakjában $\mathfrak{M}_x$-beli együtthatókkal. Ezért a (3) egyenlőség felírható.

$$\alpha u_n^k + G_1(u_1, \dots, u_{n-1})u_n^{k-1} + \dots + G_k(u_1, \dots, u_{n-1}) = \tag{4}$$
$$= \mu u_n^k + H_1(u_1, \dots, u_{n-1})u_n^{k-1} + \dots + H_k(u_1, \dots, u_{n-1})$$

alakban, ahol $\mu \in \mathfrak{M}_x$, H_i — i-ed fokú forma. Innen következik, hogy $(\alpha - \mu)u_n^k \in \in (u_1, \dots, u_{n-1})$. Mivel $\alpha \neq 0$, így $\alpha - \mu \notin \mathfrak{M}_x$ és $(\alpha-\mu)^{-1} \in O_x$, és ezért $u_n^k \in (u_1, \dots, u_{n-1})$. Látjuk, hogy az 1. § jelölései mellett $X_{u_n} \supset X_{u_1} \cap \dots \cap X_{u_{n-1}}$. Innen következik, hogy $\Theta_n \supset \Theta_1 \cap \dots \cap \Theta_{n-1}$ (Θ_i az X_{u_i} érintő tere az x pontban), és így $\Theta_1 \cap \dots \cap \Theta_n = = \Theta_1 \cap \dots \cap \Theta_{n-1}$. Ezért $\dim(\Theta_1 \cap \dots \cap \Theta_n) \geqq 1$, ami ellentmond az 1. pont 1. tételének. A tételt bebizonyítottuk.

Ilyen módon van egy egyértelműen meghatározott $\tau\colon O_x \to k[T]$ leképezésünk, amely minden függvényhez hozzárendeli annak *Taylor*-sorát. A τ leképezés (2) definícióján alapuló egyszerű ellenőrzés megmutatja, hogy τ homomorfizmus. Ezt az ellenőrzést az olvasóra bízzuk.

Milyen a τ leképezés magja? Ha az $f \in \Theta_x$ függvényre $\tau(f) = 0$, akkor (2) miatt ez azt jelenti, hogy $f \in \mathfrak{M}_x^{k+1}$ az összes k-ra. Más szóval ez azt jelenti, hogy $f \in \mathfrak{M}_x^k$. Következésképp olyan függvényekről van szó, amelyek analógjai az olyan analízisbeli függvényeknek, amelyek összes deriváltjai egyenlők 0-val. Be fogjuk bizonyítani, hogy esetünkben az ilyen függvénynek egyenlőnek kell lenni 0-val. Ez a következő általánosabb tételből fog adódni, ha visszaemlékezünk arra, hogy az 1. § 1. pontban már bebizonyítottuk az O_x gyűrű *Noether*-féle voltát.

5. TÉTEL. *A Noether-féle gyűrűben bármely olyan $\mathfrak{a} \subset A$ ideálra, amelyekre az $1+\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{a}$ elemek nem zérusosztók A-ban, teljesül $\bigcap_k \mathfrak{a}^k = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathfrak{a}^k$ tetszőleges $k > 0$-ra és $\mathfrak{a} = (u_1, \dots, u_n)$. Ez azt jelenti, hogy α előállítható $\alpha = F_k(u_1, \dots, u_n)$ alakban, ahol $F_k \in A[T_1, \dots, T_n]$ egy k-ad fokú forma.

Tekintsük az összes $F_k(T)$ $(k = 1, 2, \dots)$ formák által generált ideált az $A[T]$ gyűrűben. Mivel az A gyűrű, tehát az $A[T]$ gyűrű is, *Noether*-féle, így ennek az ideálnak véges bázisa van és kiválasztható végesszámú F_k forma — mondjuk $F_1, \dots, F_m$- amelyek az ideált generálják. Akkor

$$F_{m+1}(T) = \sum_{i=1}^{m} G_i(T) F_i(T), \tag{5}$$

ahol $G_i \in A[T]$ egy $m+1-i$ fokú forma. Helyettesítsük be ebbe az egyenlőségbe $T_1 = u_1$, $T_2 = u_2, \dots, T_n = u_n$-eket. Mivel a G_i forma fokszáma pozitív, így $\mu_i = = G_i(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{a}^{m+1-i} \subset \mathfrak{a}$. (5) miatt azt kapjuk, hogy $\alpha = \mu\alpha$, $\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \in \mathfrak{a}$. Innen következik, hogy $(1-\mu)\alpha = 0$, és mivel $\mu \in \mathfrak{a}$, így az $\mathfrak{a}$-ra tett feltételezés miatt $\alpha = 0$. A tételt bebizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Az $f \in O_x$ függvényt egyértelműen meghatározza annak tetszőleges Taylor-sora.* Más szóval, a τ leképezés izomorf beágyazása az O_x lokális gyűrűnek a formális hatványsorok $k[[T]]$ gyűrűjébe.

Emlékeztetünk arra, hogy ebben a paragrafusban sehol sem használtuk ki azt a körülményt, hogy az X sokaság irreducibilis. Ellenkezőleg, az 5. tételből és annak következményéből bizonyos következtetést lehet levonni az irreducibilitást illetően.

6. TÉTEL. *Ha az x pont egyszerű, akkor azon keresztül az X sokaság egyetlen komponense halad.*

X-et helyettesítjük az x pont U környezetével, $X' = X - \bigcup Z_i$, ahol a Z_i-k az X összes olyan komponensei, amelyek nem haladnak át x-en. Akkor $k[X'] \subset O_x$. Az 5. tétel következményének megfelelően O_x izomorf a formális hatványsorok $k[[T]]$ gyűrűjének részgyűrűjével. Mivel a $k[[T]]$ gyűrűnek nincsenek zérusosztói, ez igaz a $k[X']$ gyűrűre is, amely annak részgyűrűjével izomorf. Ezért X' irreducibilis, amit a tétel állított.

KÖVETKEZMÉNY. *Az X algebrai sokaság szinguláris pontjainak a halmaza zárt.*

Legyen $X = \bigcup X_i$ irreducibilis komponensekre való felbontás. A 6. tételből következik, hogy a sokaság szinguláris pontjainak a halmaza az $X_i \cap X_j$ $(i \neq j)$ halmazok és az X_i sokaságok szinguláris pontjai halmazának az uniója. Mint véges számú zárt halmaz uniója a kérdéses halmaz tehát zárt.

3. *Valós és komplex számok teste feletti sokaságok*

Tételezzük fel, hogy a k test egybeesik a valós számok vagy a komplex számok testével. Meg fogjuk mutatni, hogy ebben az esetben az $f \in O_x$ függvények formális *Taylor*-sorai konvergálnak a $T_1, \dots, T_n$ kis értékeire.

Legyen $\mathfrak{a}_X = (F_1, \dots, F_m)$, $X \subset A^N$ és $\dim_x X = n$. Ha $x \in X$ egyszerű pont, akkor az

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)\right) \quad (i = 1, \dots, m; \; j = 1, \dots, N)$$

mátrix rangja egyenlő $N-n$-nel. Feltételezzük, hogy

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)\right| \neq 0 \quad (i = 1, \dots, N-n; \; j = n+1, \dots, N), \tag{1}$$

x essen egybe az origóval. Akkor $t_1, \dots, t_n$ (az X-re szűkített koordináták) az x pont lokális paraméter rendszerét alkotják. Jelöljük X'-vel az

$$F_1 = 0, \dots, F_{N-n} = 0$$

egyenletekkel megadott sokaság x ponton átmenő komponenseinek az összegét.

Az (1) feltétel miatt annak x pontbeli Θ' érintő tere n-dimenziós, a metszet dimenziójáról szóló tétel alapján viszont $\dim_x X' \geqq n$. Mivel $\dim \Theta' \geqq \dim_x X'$, így $\dim_x X' = n$, és az x pont egyszerű az X'-n. Innen a 6. tétel miatt az következik, hogy X' irreducibilis. Nyilvánvaló, hogy $X' \supset X$, abból pedig, hogy $\dim X' = \dim X$, az következik, hogy $X' = X$.

Látjuk, hogy X definiálható az x pont valamely környezetében $N-n$ számú (2) egyenlettel, miközben teljesül az (1) feltétel.

Az implicit függvényekről szóló tétel miatt (l. pl. Гурса, *Курс математического анализа*) létezik a $T_1, \dots, T_n$ n-változós olyan $\Phi_1, \dots, \Phi_{N-n}$ hatványsor rendszer és olyan $\varepsilon > 0$, hogy a $\Phi_j(T_1, \ldots, T_n)$-ek konvergensek az összes T_i, $|T_i| < \varepsilon$-re, és

$$F_i(T_1, \ldots, T_n, \Phi_1(T), \ldots, \Phi_{N-n}(T)) = 0, \tag{3}$$

méghozzá a $\Phi_1, \ldots, \Phi_{N-n}$ hatványsorok együtthatói egyértelműen meghatározhatók a (3) összefüggésből.

Viszont a $\tau(T_{n+1}), \ldots, \tau(T_N)$ formális hatványsorok (ha lokális paraméterként a $t_1, \ldots, t_n$-ek vannak választva) szintén eleget tesznek (3)-nak, ezért egybe kell essenek a $\Phi_1, \ldots, \Phi_{N-n}$-nel, ahonnan az következik, hogy $\tau(T_i)$ $(i=n+1, \ldots, N)$ konvergensek $|T_j| < \varepsilon$ $(j=1, \ldots, n)$ mellett.

Tetszőleges $f \in O_x$ függvény előállítható $f = \dfrac{P(T_1, \ldots, T_N)}{Q(T_1, \ldots, T_n)}$, $Q(x) \neq 0$ alakban és

$$\tau(t) = \frac{P(\tau(T_1), \ldots, \tau(T_N))}{Q(\tau(T_1), \ldots, \tau(T_N))}.$$

A $\tau(f)$ sor konvergenciája ezért következik a sorok konvergenciájáról szóló szokványos tételekből.

Analóg módon meg lehet mutatni, hogy ha $u_1, \ldots, u_n$ a lokális paramétereknek egy tetszőleges másik rendszere, akkor

$$\left| \frac{\partial \tau(u_i)}{\partial T_j}(0, \ldots, 0) \right| \neq 0 \quad (i = 1, \ldots, n; \, j = 1, \ldots, n)$$

és a *Taylor*-sorok a $t_1, \ldots, t_n$-ekre az $u_1, \ldots, u_n$ lokális paramétereken keresztül a $\tau(u_i) = \Phi_i(T_1, \ldots, T_n)$ $(i=1, \ldots, n)$ sorok megfordításából adódnak, és ezért szintén pozitív konvergenciasugárral rendelkeznek. Innen következik, hogy a $\tau(f)$, $f \in O_x$ sornak a lokális paraméterek tetszőleges kiválasztása mellett pozitív konvergencia sugara van.

Az implicit függvényekről szóló tétel nemcsak a létezését állítja a konvergens $\Phi_1, \ldots, \Phi_{N-n}$ soroknak, hanem azt is, hogy valamely $\eta > 0$ esetén tetszőleges $(t_1, \ldots, t_N) \in X$, $|t_i| < \eta$ $(i=1, \ldots, N)$ pontnak $t_{n+i} = \Phi_i(t_1, \ldots, t_n)$ $(i=1, \ldots, N-n)$ alakja van. Innen következik, hogy a $(t_1, \ldots, t_N) \to (t_1, \ldots, t_n)$ leképezés a $(t_1, \ldots, t_N) \in X$, $|r_i| < \eta$ halmazt kölcsönösen egyértelműtlen és kölcsönösen folytonosan képezi le az n-dimenziós tér tartományára.

A k feletti P^N tér (abban az esetben, ha a k valós vagy a komplex számok teste) topologikus tér. Az X algebrai sokaság ebben a térben szintén egy topológikus tér. Ezt a topológiát X-ben valósnak vagy komplexnek fogjuk nevezni attól függően, hogy k valós vagy komplex test. Ezt ne keverjük össze azokkal a topológiai fogalmakkal — zártság, nyíltság —, amelyeket korábban használtunk.

Az előbbi fejtegetések megmutatják, hogy az X sokaság valós topológiájában bármely egyszerű pontnak van olyan környezete, amely homomorf az n-dimenziós valós tér egy tartományával. Ezért, ha az X összes pontja egyszerű, akkor X egy n-dimenziós sokaság ennek a szónak topológiai értelmében. Ha k a komplex számok teste, akkor a komplex topológiában az egyszerű $x \in X$ pontnak létezik az n-dimenziós komplex, tehát a $2n$-dimenziós valós tér egy tartományával izomorf környezete. Ezért, ha az X minden pontja egyszerű, akkor $2n$-dimenziós sokaság.

Amint azt könnyű megmutatni, a P^N tér kompakt a valós és a komplex topológiában. Ezért, ha X projektív, akkor az kompakt. Ha k a komplex számok teste, akkor a megfordítás is igaz, azaz a kváziprojektív, a saját komplex topológiájában kompakt, X sokaság projektív sokaság. Ennek a ténynek a bizonyítását nem fogjuk elvégezni.

Befejezésül megjegyezzük, hogy az ebben a pontban mondottak mind (az utolsó bekezdés kivételével) szó szerint átvihetők arra az esetre, ha k a p-adikus számok teste.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy azon pontok halmaza, amelyekben az adott n függvény az n-dimenziós X sokaságon nem alkot lokális paraméter rendszert, zárt halmaz.

2. Bizonyítsuk be, hogy az $f \in k[T]=k[A^1]$ polinom akkor és csakis akkor lokális paraméter a $T=\alpha$ pontban, ha α annak egyszerű gyöke.

3. Bizonyítsuk be, hogy a $\Phi=F_0+F_1+\dots$ formális hatványsornak akkor és csakis akkor létezik inverze a $k[[T]]$ gyűrűben, ha $F_0 \neq 0$.

4. Tekintsük az $\alpha_{-n}T^{-n}+\alpha_{n+1}T^{-n+1}+\dots+\alpha_0+\alpha_1 T+\dots$ alakú kifejezésekből álló $k\{T\}$ gyűrűt, ahol T változó, n pedig tetszőleges egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $k\{T\}$ test, amely izomorf a $k[[T]]$ gyűrű kvocienstestével.

5. Legyen $X \subset A^2$ az $X^2+Y^2=1$ egyenlettel megadott kör, x a (0, 1) pont. Bizonyítsuk be, hogy X lokális paraméter az x pontban, és

$$\tau(Y) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right):\dots:\left(\frac{1}{2}-n+1\right)X^{2n}.$$

Az alaptest karakterisztikája 0.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha x szinguláris pont, akkor bármely $f \in O_x$ függvénynek végtelen sok különböző *Taylor*-sora van.

7. Legyen $X=A^1$, $x \in X$. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(O_x)$ nem esik egybe az egész gyűrűvel.

3. §. Egyszerű pontok tulajdonságai

1. *1-kodimenziós* részsokaságok*

A lokális gyűrűk elmélete lehetővé teszi a sima sokaságok egy fontos, az I. fejezet 6. § 3. tételével analóg, tulajdonságának a bizonyítását. Az 1-dimenziós $Y \subset X$ részsokaság egyetlen egyenlettel való meghatározásáról van szó. Általános esetben egy ilyen állítás nem igaz (az I. fejezet 6. § 2. pont 5. következménye után tett 2. megjegyzés). Viszont meg fogjuk mutatni, hogy a nemszinguláris sokaságokon ez lokálisan igaz. Az eredmény megfogalmazása érdekében bevezetjük a következő fogalmat.

Az $f_1, \dots, f_m \in O_x$ függvényeket az $Y \subset X$ részsokaság lokális egyenletének nevezzük az x környezetében, ha létezik az x pontnak olyan X' affin környezete, hogy $\mathfrak{a}_{Y'}=(f_1, \dots, f_m)$ a $k[X']$-ben, ahol $Y'=Y \cap X'$, $f_i \in k[X']$. Ezt a fogalmat kényel-

* Коразмерность.

mesebb átfogalmazni az x pont O_x lokális gyűrűjének a nyelvén. Ennek érdekében tekintsük az olyan $f \in O_x$ függvényekből álló $\mathfrak{a}_{x,Y} \subset O_x$ ideált, amelyek 0-val egyenlők az Y-on az x pont valamely környezetében.

Nyilvánvaló, hogy az X affin sokaságra

$$\mathfrak{a}_{x,Y} = \left\{f = \frac{u}{v};\ u, v \in k[X],\ v(x) \neq 0,\ u \in \mathfrak{a}_Y\right\},$$

és ha az Y összes komponense átmegy az x ponton, akkor $\mathfrak{a}_Y = \mathfrak{a}_{x,Y} \cap k[X]$.

LEMMA. *Az $f_1, \dots, f_m$ függvények akkor és csakis akkor lokális egyenletei Y-nak az x pont környezetében, ha*

$$\mathfrak{a}_{x,y} = (f_1, \dots, f_m).$$

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathfrak{a}_Y = (f_1, \dots, f_m)$ a $k[X]$-ben, akkor úgyszintén $\mathfrak{a}_{x,Y} = (f_1, \dots, f_m)$ a Q_x-ben. Legyen $\mathfrak{a}_{x,Y} = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i \in O_x$, $\mathfrak{a}_Y = (g_1, \dots, g_s)$, $g_i \in k[X]$.

Mivel $g_i \in \mathfrak{a}_{x,Y}$, így,

$$g_i = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} f_j \quad (i = 1, \dots, s), \quad h_{ij} \in O_x. \tag{1}$$

Az f_i, h_i függvények regulárisak az x pont valamely affin környezetében. Legyen $U = X - Z$ és $g \in k[X]$ olyan függvény, hogy $g(x) \neq 0$, $g = 0$ a Z-n. Az $X' = X - X_g$ halmaz a pont fő affin környezete (I. fejezet 4. § 2. pont), mégpedig a $k[X']$ gyűrű $\frac{u}{g^k}$, $u \in k[X]$, $k \geqq 0$ alakú elemeiből áll. Akkor (1) miatt $(g_1, \dots, g_s) = \mathfrak{a}_Y \cdot k[X'] \subset \subset (f_1, \dots, f_m)$.

Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathfrak{a}_Y k[X'] = \mathfrak{a}_{Y'}$. Innen következni fog, hogy $\mathfrak{a}_{Y'} \subset \subset (f_1, \dots, f_m)$, és mivel $f_i \in \mathfrak{a}_{Y'}$, így a lemma állítása is.

Ellenőriznünk kell tehát, hogy $\mathfrak{a}_Y \cdot k[X'] = \mathfrak{a}_{Y'}$. Az $\mathfrak{a}_Y k[X'] \subset \mathfrak{a}_{Y'}$ kapcsolat nyilvánvaló. Legyen $v \in \mathfrak{a}_{Y'}$. Akkor $v = \frac{u}{g^k}$, $u \in k[X]$, tehát $u = vg^k$, következésképp $u \in \mathfrak{a}_Y$, viszont mivel $\frac{1}{g^k} \in k[X']$, így $v = \frac{u}{g^k} \in \mathfrak{a}_Y k[X']$.

Célunk a következő eredmény bebizonyítása.

1. TÉTEL. *Az 1-kodimenziós $Y \subset X$ irreducibilis részsokaságnak egyetlen lokális egyenlete van bármely $x \in X$ nemszinguláris pont környezetében.*

A bizonyítás pontosan követi az I. fejezet 6. § 6. tétel bizonyításának a menetét. Igaz, ott az irreducibilis tényezőkre való bontás egyértelműségét használtuk fel a $k[T]$ gyűrűben. Itt ehhez a gyűrűhöz analóg szerepet az O_x gyűrű játszik. Annak analóg tulajdonságai vannak.

2. TÉTEL. *Az egyszerű pont lokális gyűrűjében a prímtényezőkre bontás egyértelmű.*

Most be fogjuk bizonyítani az 1. tételt, igaznak elfogadva a 2. tételt. A 2. tétel bizonyításával kapcsolatosan lásd a 2. pontot.

Amint említettük, az 1. tétel bizonyítása egybeesik az I. fejezet 6. § 3. tétel bizonyításával. Az állítás lokális jellegére való tekintettel X-et affinnak tekinthetjük. Legyen g tetszőleges olyan függvény az O_x-ben, amely 0-val egyenlő az Y-on. Felbont-juk prímtényezőkre O_x-ben. A prímtényezők egyike az Y irreducibilis volta miatt szintén egyenlő 0-val az Y-on. Jelöljük ezt g-vel és bebizonyítjuk, hogy az az Y lokális egyenlete. Helyettesítve X-et kisebb affin környezettel, feltételezhetjük, hogy g reguláris X-en.

Mivel $X_g \supset Y$ és mindkét részsokaság kodimenziója egyenlő 1-gyel, így $X_g = Y \cup Y'$. Ha $Y' \ni x$, akkor léteznek olyan h és h' függvények, hogy $h \cdot h' = 0$ az X_g-n, mégpedig $h \neq 0$ az X_g-n és $h' \neq 0$ az X_g-n. Ez azt jelenti, hogy valamely $r > 0$-ra $(h \cdot h')^r$ osztható g-vel a $k[X]$-ben, annál inkább O_X-ben. A prímtényezőkre való bontás O_X-beli egyértelműségéből következik, hogy akkor h és h' osztható g-vel O_x-ben. Innen következik, hogy h vagy h' egyenlő 0-val az Y-on az x valamely környezetében, tehát az egész X-en is. Ez ellentmond a feltételnek. Ilyen módon $Y' \ni x$ és, helyettesítve X-et ismét az x pont elég kicsi affin környezetével, feltételezhetjük, hogy $X_g = Y$. Ha most u egyenlő 0-val az Y-on, akkor valamely $s > 0$-ra u^s osztható g-vel a $k[X]$-ben, tehát annál inkább az O_X-ben. Innen következik, hogy u osztható g-vel O_x-ben. Ilyen módon $\mathfrak{a}_{x,Y} = (g)$ és a tétel be van bizonyítva.

Az 1. tételnek sok alkalmazása van. Íme közülük az első.

3. TÉTEL. *Ha X egy sima sokaság és $\varphi: X \to P^N$ annak racionális leképezése a projektív térbe, akkor azon pontok halmazának a kodimenziója, amelyekben φ nem reguláris, nem kevesebb kettőnél.*

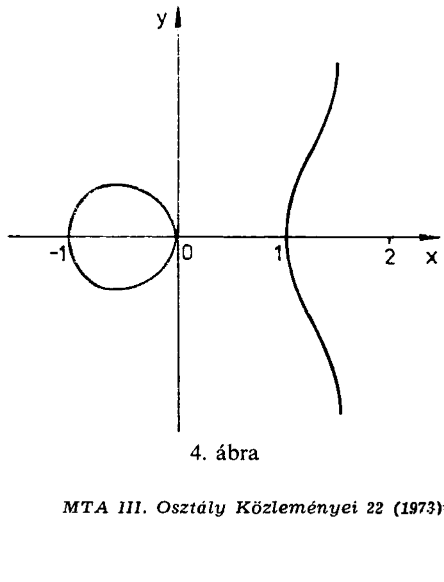
Emlékeztetünk arra, hogy a racionális leképezés irregularitási pontjainak halmaza zárt. A tétel állítása lokális jellegű, és elegendő azt ellenőrizni az $x \in X$ egyszerű pont valamely környezetében, φ-t felírhatjuk $\varphi = (f_0 : \ldots : f_n)$, $f_i \in k[X]$ alakban, és φ-t nem változtatva, megszorozhatjuk f_i-t egy olyan közös szorzóval, hogy minden $f_i \in O_x$ és azoknak ne legyen közös osztójuk O_x-ben. Közben φ nem reguláris csak az olyan pontokban lehet, ahol $f_0 = f_1 = \ldots = f_n = 0$. Viszont semmilyen 1-kodimenziós Y-részsokaság sem lehet benne az ezen egyenletekkel meghatározott sokaságban. Valóban az 1. tétel miatt $\mathfrak{a}_{x,Y} = (g)$ és az összes f_i-nek O_x-ben közös g tényezőjüknek kellene lenni, a feltételezéssel ellentétben. A tétel be van bizonyítva.

1. KÖVETKEZMÉNY. *Sima görbének projektív térbe való bármely racionális leképezése reguláris.*

2. KÖVETKEZMÉNY. *Ha két sima projektív görbe biracionálisan izomorf, akkor azok izomorfak.*

Legyen k a komplex számok teste. A 2. következményből adódik, hogy az X' és X'' pontjainak halmaza homeomorf azok komplex topológiájában, ha az X' és X'' görbe biracionálisan izomorf. Valóban, a reguláris függvények, tehát a reguláris leképezések is, ebben az esetben konvergens hatványsorokkal vannak meghatározva és ezért ismert módon folytonosak.

Ugyanez igaz a görbék valós pontjainak a halmazára (amelyek valós együtthatós egyenletekkel vannak megadva), ha



4. ábra

a $\varphi: X \to X'$ biracionális izomorfizmus a valós test felett van meghatározva, azaz valós koordinátákra vonatkozó képletekkel van megadva. Ebből néha könnyű megállapítani, hogy a két görbe nem biracionálisan izomorf a valós test felett. Például az $y^2 = x^3 - x$ görbének (4. ábra) a grafikonja két komponensből áll. Ezért az nem racionális (a valós test felett) $-P^1$ homeomorf egy körrel és egy komponensből áll.

2. *Sima részsokaságok*

Az 1. tétel nem általánosítható az 1-nél nagyobb kodimenziójú részsokaságokra (l. pl. az I. fejezet 6. § 2. feladat). Viszont az x pontban nem szinguláris részsokaságokra analóg állítás igaz. Bebizonyítunk egy valamivel pontosabb tényt. Egy segéd állítással kezdjük.

4. TÉTEL. *Legyen X egy affin sokaság, x annak egyszerű pontja, az $u_1, \dots, u_n$ függvények regulárisak X-en és az x pontban lokális paraméter rendszert alkotnak. Akkor az $u_1 = \dots = u_m = 0$ $(m \leqq n)$ egyenletekkel meghatározott Y részsokaság x pontban nem szinguláris, és az x pont valamely affin környezetében $\mathfrak{a}_Y = (u_1, \dots, u_m)$, az $u_1, \dots, u_m$ pedig az x pont lokális paraméter rendszerét alkotják az Y-on.*

A *bizonyítás* m szerinti indukcióval történik. $m=1$ esetében az 1. tétel megmutatja, hogy az x pont valamely affin környezetében $\mathfrak{a}_Y = (f)$. Legyen $u_1 = fv$. Akkor $d_x u_1 = v(x) d_x f$. Mivel u_1 benne van az x pont lokális paraméter rendszerében, így $d_x u_1 \neq 0$. Ezért $v(x) \neq 0$ és így egy kisebb nyílt halmazban $\mathfrak{a}_Y = (u_1)$. Mivel $d_x u_1 \neq 0$, így x egyszerű pont az Y-on.

Nyilvánvaló, hogy az Y-hoz x pontban húzott $\Theta_{x,Y}$ érintő tér $\Theta_{x,X}$-ből a $d_x u_1 = 0$ megszorítással adódik. Ezért $d_x u_2, \dots, d_x u_n$ bázisa $\Theta_{x,Y}$-nak, azaz $u_2, \dots, u_n$ lokális paraméterek az x pontban az Y-on.

Legyen az általános esetben $X' = X_{u_1}$. Akkor Y az X'-n az $u_2 = \dots = u_m = 0$ egyenletekkel van meghatározva és alkalmazhatjuk az indukciót.

Most meg fogjuk mutatni, hogy az x pontban nem szinguláris bármely Y részsokaság megkapható a 4. tételben leírt módon az egyszerű pont valamely környezetében.

5. TÉTEL. *Legyen X egy sokaság, $Y \subset X$ és x egyszerű pont az Y-on és az X-en. Kiválaszthatók az $u_1, \dots, u_n$ lokális paraméterek az x pontban az X-en, és az x pont U affin környezete úgy, hogy $\mathfrak{a}_Y = (u_1, \dots, u_m)$ az U-ban.*

Bizonyítás. Az érintő terek $\Theta_{x,Y} \to \Theta_{x,X}$ beágyazásának megfelel a konjugált terek olyan $\varphi: \mathfrak{M}_{x,X}/\mathfrak{M}_{x,X}^2 \to \mathfrak{M}_{x,Y}/\mathfrak{M}_{x,Y}^2$ epimorfizmusa, amely az X-beli függvényeknek Y-ra való szűkítésével áll elő. Kiválaszthatjuk $\mathfrak{M}_{x,X}/\mathfrak{M}_{x,X}^2$-ben az $u_1, \dots, u_n$ bázist úgy, hogy $u_1, \dots, u_m \in \mathfrak{a}_Y$, az Y-ra szűkített $u_{m+1}, \dots, u_n$ pedig $\mathfrak{M}_{x,Y}/\mathfrak{M}_{x,Y}^2$ bázisát alkotják. Tekintsük az x pont olyan affin környezetét, amelyben az összes u_i reguláris és tekintsük abban az $u_1 = \dots = u_m = 0$ egyenletekkel meghatározott Y' részsokaságot. Konstrukció szerint $Y' \supset Y$. Be fogjuk bizonyítani, hogy $Y' = Y$, ahonnan a 4. tétel miatt következni fog a tétel állítása.

A 4. tétel miatt Y' nem szinguláris az x pontban, tehát a 2. § 6. tétel szerint az irreducibilis az x pont környezetében. A 4. tételből következik, hogy dim $Y' = n - m$. A konstrukcióból világos, hogy dim $\Theta_{x,Y} = n - m$, és így dim $Y = n - m$. Ezért $Y = Y'$, viszont, mivel a 4. tétel miatt $\mathfrak{a}_{Y'}=(u_1, \ldots, u_m)$, így ugyancsak $\mathfrak{a}_Y=(u_1, \ldots, u_m)$ az x pont valamely környezetében. A tételt bebizonyítottuk.

Az $X=A^m$ speciális esetben már bebizonyítottunk egy analóg tényt a 2. § 3. pontban.

3. *Tényezőkre bontás egyszerű pont lokális gyűrűjében*

A 2. tétel általunk elvégzendő bizonyítása a $\tau\colon O_x \to k[[T]]$ beágyazáson alapul, ahol $k[[T]]$ a $(T_1, \ldots, T_n)=T$ n-változós formális hatványsorok gyűrűje.

Azzal kezdjük, hogy megemlítjük a $k[[T]]$ gyűrű és a τ beágyazás néhány tulajdonságát. A formális hatványsor nem tekinthető tagjainak összegeként, ha csupán a $k[[T]]$ gyűrű struktúrájára támaszkodunk, ugyanis abban nincs definiálva végtelen számú tag összege. Hogy ez lehetővé váljon, be kell vezetni a konvergencia fogalmát, vagy ami ugyanaz, topológiát a formális hatványsorok gyűrűjében. Jelölje M a $k[[T]]$ gyűrű azon ideálját, amely olyan Φ sorokból áll (a 2. § 2. pont (1) képlet jelöléseivel élve), amelyekre $F_0=0$. Nyilván $M=(T_1, \ldots, T_n)$ és M^k olyan Φ sorokból áll, amelyekben $F_i=0$ $i<k$-ra. A $k[[T]]$ gyűrűben azzal definiáljuk a topológiát, hogy az M^k ideálokat választjuk a 0 környezetéül. Más szóval a Φ_m hatványsorok sorozata konvergál Φ-hez, ha a $\Phi_m-\Phi$ sor kezdő formájának a fokszáma korlátlanul nő m-mel. Ezt a tényt $\Phi_m \to \Phi$ vagy $\Phi=\lim \Phi_m$ módon írjuk. Könnyű ellenőrizni, hogy ebben a topológiában a $k[[T]]$ gyűrű topologikus gyűrű (a topologikus gyűrűk definícióját és egyszerűbb tulajdonságait illetően l. Понтрягин, *Непрерывные группы*, §. 25.)

A $\sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m$, $\Phi_m \in k[[T]]$ sort konvergensnek nevezzük a Φ összeghez, ha $S_k \to \Phi$, ahol $S_k=\sum_{m=0}^{k} \Phi_N$. Ebben az esetben $\Phi=\sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m$-et írunk.

Például a 2. § 2. pont (1)-ben $S_k=F_0+\ldots+F_k$ és $S_k \to \Phi$, mivel a $\Phi-S_k$ sor kezdő formájának a foka $k+1$. Ezért minden formális hatványsor ebben az értelemben saját tagjainak az összege.

Az O_x gyűrű $\tau(O_x)$ képe mindenütt sűrű $k[[T][$-ben. Valóban, ha $u_1, \ldots, u_n$ az $\mathfrak{M}_x$ ideál olyan generátorrendszere, amelynek segítségével a τ leképezést definiáltuk, akkor $\tau(u_i)=T_i$ és $\tau(P(u_1, \ldots, u_n))=P(T_1, \ldots, T_n)$, ahol P egy polinom. Mivel tetszőleges hatványsorra $\Phi=\lim S_k$, $S_k \in k[T]$, így $\Phi=\lim S_k(u_1, \ldots, u_n)$, azaz Φ határértéke O_x-beli elemeknek.

A 2. tétel bizonyítása azon alapul, hogy a prímtényezőkre bontás egyértelműségét először a $k[[T]]$ gyűrűkre fogjuk megállapítani. Ez eléggé elemi tény, amely analóg a polinomgyűrűk megfelelő eredményével. Csak a bizonyítás főbb mozzanataira mutatunk rá. Teljesen elemi (és a könyv többi részétől független) bizonyítást lehet találni a Зарисский и Самюэль, *Коммутативная алгебра* könyv 2. kötet, VII. fejezet 1. §-ban.

A $\Phi(T_1, \ldots, T_n)$ hatványsort a T_n változóra nézve regulárisnak nevezzük, ha annak kezdő formája (legyen fokszáma m) tartalmazza a $C_m T_n^m$, $C_m \neq 0$ tagot.

A $T_1, \ldots, T_n$ változók lineáris transzformációja nyilván magával vonja a $k[[T]]$ gyűrű automorfizmusát. Speciálisan, végrehajthatunk egy olyan lineáris transzformációt, hogy az adott sor a T_n változóra nézve reguláris legyen.

1. LEMMA. *(Weierstrass előkészítő tétele.) Ha a $\Phi \in k[[T]]$ hatványsor reguláris a T_n változóra nézve és annak kezdő formája m-edfokú, akkor létezik egy 0-tól különböző konstans taggal rendelkező olyan $u \in k[[T]]$ sor, hogy $\Phi \cdot u$ egy polinomja T_n-nek $k[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$ gyűrű felett:*

$$\Phi U = T_n^m + R_1(T_1, \ldots, T_{n-1}) T_n^{m-1} + \ldots + R_m(T_1, \ldots, T_{n-1}),$$

$$R_i(T_1, \ldots, T_{n-1}) \in k[[T_1, \ldots, T_{n-1}]].$$

A *bizonyítást* l. Зарисский и Самюэль 2. kötet, 174. old.

2. LEMMA. *A formális hatványsorok gyűrűjében az elemek prímtényezők szorzatára való felbontása egyértelmű.*

Az 1. lemma lehetővé teszi az állítás bizonyítását a $T_1, \ldots, T_n$ változók száma szerinti indukcióval, visszavezetve azt a T_n változó $k[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$ gyűrű feletti polinomjaira vonatkozó analóg állításra. A bizonyítás részletes leírását az olvasó megtalálja a Зарисский и Самюэль könyv 2. kötet, VII. fejezet 1. § 6. tételben (177. old.).

Áttérünk a 2. tétel bizonyítására. Az egész számok felbontásának egyértelműségét a legnagyobb közös osztó létezésére alapítva bizonyítjuk és a tétel igaz bármely zérusosztómentes gyűrűben, amelyben két a és b elemhez létezik d legnagyobb közös osztó. A legnagyobb közös osztó helyett lehet az m legkisebb közös többszörös létezését is bizonyítani, mivel $d = \frac{a \cdot b}{m}$. Továbbá az, hogy m az a és b elemek legkisebb közös többszöröse, azt jelenti, hogy $(a) \cap (b) = (m)$. Ezért elegendő bebizonyítanunk, hogy az O_x gyűrűben főideálok metszete főideál. Ennek érdekében felhasználjuk azt, hogy a $k[[T]]$ gyűrűben ugyanez a tulajdonság ismert a 2. lemmából. Az O_x és $k[[T]]$ ideálok között kapcsolatot lehet létesíteni a τ beágyazás felhasználásával. A következőkben azonosítani fogjuk az $f \in O_x$ és $\tau(f)$ elemeket. Bármely $\mathfrak{a} \in O_x$ ideálhoz definiálva van annak $\bar{\mathfrak{a}}$ lezártja $k[[T]]$-ben, azaz olyan Φ hatványsorok halmaza, amelyek határértékei a $\tau(f_k)$, $f_k \in \mathfrak{a}$ sorozatoknak.

A fent mondottak miatt a 2. tétel az és $\mathfrak{a}$ ideálok közötti következő összefüggésekből következik:

1. $\overline{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}}$

2. $\bar{\mathfrak{a}}$ ideál $k[[T]]$-ben akkor és csakis akkor főideál, ha $\mathfrak{a}$ főideál O_x-ben.

Ezen állítások bizonyítása szintén benne van a Зарисский и Самюэль említett könyvében (II. kötet, VIII. fejezet). Hogy az olvasónak segítsünk a bizonyítás megértésében, ismertetjük itt annak rövid vázlatát, a részletes lebonyolításért utalni fogunk az említett könyvre (az utalások a II. kötet, VIII. fejezetre fognak vonatkozni). Az O_x gyűrűt A-val, a $k[[T]]$-t $\hat{A}$-val fogjuk jelölni.

Az alapot az A gyűrű feletti E modulus teljes lezárásának* a fogalma képezi. Ez az operáció analóg az A-ról $\hat{A}$-ra való áttéréssel. E tetszőleges A-modulusra definiáljuk azt a topológiát, amelyben a 0 környezetei az $M^k E$ részmodulusok, és konstruáljuk azt az $\hat{E}$ $\hat{A}$-modulust, amelybe A mindenütt sűrű halmazként ágyazódik, és amelyben teljesül a *Cauchy*-féle konvergencia kritérium: ha $\alpha_n \in \hat{E}$ az elemek olyan sorozata, hogy $\alpha_n - \alpha_m \to 0$ ha $m \to \infty$, akkor α_n konvergál a határértékhez $\hat{E}$-ben

* Пополнение.

(ezt a tulajdonságot teljességnek nevezzük). Az $\hat{E}$ modulust *Cauchy*-féle sorozatokból építjük, azaz olyan $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in E$ sorozatokból, amelyekre $\alpha_n - \alpha_m \to 0$, ha $n, m \to \infty$. Itt az $\{\alpha_n\}$ és $\{\beta_n\}$ sorozatokat azonosítjuk, ha $\alpha_n - \beta_n \to 0$. Minden $E \xrightarrow{f} F$ homomorfizmus generál egy $\hat{E} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{F}$ homomorfizmust. Abban a speciális esetben, ha $E = A (= O_x)$, akkor $\hat{E}$ egybeesik $\hat{A}(=k[[T]])$-val. Ha viszont E az $\mathfrak{a} \subset A$ ideál, akkor $\hat{E}$ egybeesik annak $\bar{\mathfrak{a}}$ lezártjával $\hat{A}$-ban. Ha E véges típusú A-feletti modulus, akkor $\hat{E}$-t mint $\hat{A}$-modulust generálja az E halmaz:

$$\hat{E} = E \cdot \hat{A} \tag{1}$$

(Зарисский и Самюэль, 2. § 5. tétel).

A teljes lezárások fő tulajdonsága: ha az $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ véges A-modulusok sorozata, f és g leképezések pontosak, akkor az igaz az $\hat{E} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{F} \xrightarrow{\hat{g}} \hat{G}$ sorozatra is (Зарисский и Самюэль, 4. § 11. tétel). Ezt a tulajdonságot úgy fejezik ki, hogy azt mondják, hogy $\hat{A}$ sík az A felett.

Az 1. *állítás bizonyítására* először az analóg

$$\overline{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}} \tag{2}$$

tulajdonságot ellenőrizzük. Ez rögtön következik az (1) összefüggésből. Tekintsük most a

$$0 \to \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \to 0,$$

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a} \to 0$$

pontos sorozatokat. Mivel $\hat{A}$ sík A-felett, így ezekből a következő

$$0 \to \overline{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \to \mathfrak{b} \to \widehat{\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \to 0,$$

$$0 \to \bar{\mathfrak{a}} \to \overline{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \to (\widehat{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}}) \to 0$$

pontos sorozatokat kapjuk. A $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ izomorfizmus tétel megmutatja, hogy úgyszintén

$$\mathfrak{b}/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \cong \widehat{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{a}}, \quad (\overline{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}})/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}/\overline{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}.$$

A (2) egyenlőség és a most $\bar{\mathfrak{a}}$ és $\bar{\mathfrak{b}}$-re alkalmazott izomorfia tétel a $\bar{\mathfrak{b}}/\overline{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \cong$ $\cong \bar{\mathfrak{b}}/\bar{\mathfrak{a}} \cap \bar{\mathfrak{b}}$ izomorfizmust adja, amelyből könnyen adódik, hogy $\bar{\mathfrak{a}} \cap \bar{\mathfrak{b}} = \overline{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}}$.

A 2. *állítás bizonyítása* érdekében feltételezzük, hogy $\bar{\mathfrak{a}} = (\alpha)$. Mivel $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\hat{A}$, az (1) miatt, így

$$\alpha = \sum a_i \xi_i, \quad a_i \in \mathfrak{a}, \quad \xi_i \in \hat{A}, \tag{3}$$

és mivel $a_i \in \mathfrak{a}$, azért

$$\mathfrak{a}_i = \eta_i \alpha. \quad \eta_i \in \hat{A}. \tag{4}$$

Behelyettesítve (4)-et (3)-ba és egyszerűsítve α-val, azt kapjuk, hogy $\sum \xi_i \eta_i = 1$. Ezért nem az összes η_i van benne M-ben, ha viszont $\eta_i \notin M$, akkor $\eta_i^{-1} \in \hat{A}$ és $\bar{\mathfrak{a}} = (a_i)$. Ilyen módon $\bar{\mathfrak{a}} = \overline{a_i A}$, abból pedig, hogy $\hat{A}$ sík A-felett, könnyen következik, hogy $\mathfrak{a} = a_i A$.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha t egy algebrai görbe egyszerű pontjainak lokális paramétere, akkor bármely $f \in O_x$ függvény előáll $f = t^n u$ alakban és $n \geqq 0$, u pedig invertálható O_x-beli elem. Vezessük le innen a 2. tételt a görbék esetére.

2. Bizonyítsuk be a 2. § 1. tétel megfordítását: ha a $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ 1-kodimenziós részsokaságok transverzálisan metszik egymást x pontban és $u_1, \ldots, u_n$ azok lokális egyenletei az x pontban, akkor $u_1, \ldots, u_n$ lokális paraméter rendszert alkot az x pontban.

3. Igaz-e a 3. tétel 2. következménye a simaság feltételezése nélkül?

4. Bizonyítsuk be, hogy az X algebrai görbe x pontja akkor és csakis akkor egyszerű, ha van lokális egyenlete.

5. Az $X \subset A^3$ kúp az $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ egyenlettel van megadva. Bizonyítsuk be, hogy a kúp $x = 0$, $y = z$ egyenletekkel megadott L alkotója nem rendelkezik lokális egyenlettel a $(0, 0, 0)$ pont egyetlen környezetében sem.

6. Egy $\varphi: P^2 \to P^2$ racionális leképezést a $\varphi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1)$ képlet határoz meg. Legyen $x = (1:0:0)$ és $C \subset P^2$ nem szinguláris görbe az x pontban. A 3. tétel miatt a C-re szűkített φ leképezés reguláris x pontban és ezért x-et egy pontba viszi át, amelyet mi $\varphi_c(x)$-szel jelölünk. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi_{c_1}(x) = \varphi_{c_2}(x)$ akkor és csakis akkor, ha a C_1 és C_2 görbék érintik egymást az x pontban, azaz $\Theta_{x, c_1} = \Theta_{x, c_2}$.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi = \dfrac{f}{g}$ racionális függvény, f és g regulárisak az egyszerű x pontban és a $\tau(f)$ hatványsor osztható $\tau(g)$-vel, akkor φ reguláris az x pontban. (Útmutatás: Használjuk fel a kapcsolatot az O_x gyűrű $\mathfrak{a}$ ideáljai és annak $\bar{\mathfrak{a}}$ lezártjai között a formális hatványsorok gyűrűjében.)

8. Legyen $X \subset A^n$ és $Y \subset A^m$ két affin sokaság, amelyek átmennek az $O \in A^n$, ill. $O' \in A^m$ origón. A formális hatványsorok valamely $\Phi_1(T), \ldots, \Phi_m(T)$ $(T = (T_1, \ldots, T_n))$ rendszerét az X-nek Y-ba való formális leképezésének nevezzük az O, ill. O' környezetében, ha $\Phi_i(0) = 0$ és $F(\Phi_1, \ldots, \Phi_m) \in \bar{\mathfrak{a}}_X \subset k[[T]]$ az összes $F \in \mathfrak{a}_Y$-ra. A formális leképezések kompozícióját a sorok permutációjával definiáljuk. Két $(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ és $(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ formális leképezést egyenlőnek nevezünk, ha $\Phi_i - \psi_i \in \mathfrak{a}_X$ $(i = 1, \ldots, m)$, X és Y-t formálisan izomorfaknak nevezzük az O és O' környezetében, ha léteznek az X-nek Y-ba való olyan $\varphi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ és Y-nak X-be való olyan $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ formális leképezése, hogy $\psi \cdot \varphi$ és $\varphi \cdot \psi$ identikus leképezések. Bizonyítsuk be, hogy ha az origó egyszerű pont X-ben, akkor X formálisan izomorf egy affin térrel.

9. Bizonyítsuk be, hogy A^n-nek önmagával való formális izomorfizmusa (automorfizmus) az O környezetében olyan konstans tag nélküli $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ hatványsorokkal adható meg, amelyekre a lineáris tagokból képzett determináns nem egyenlő 0-val.

10. Bizonyítsuk be, hogy az $F = 0$ és $G = 0$ egyenletekkel megadott két olyan görbe, amely az $O \in A^2$ origón megy át, akkor és csakis akkor formálisan izomorf az O környezetben, ha létezik az A^2-nek Φ_1 és Φ_2 sorokkal megadott olyan formális automorfizmusa, hogy $F(\Phi_1, \Phi_2) = G \cdot U$, ahol U egy 0-tól különböző konstans taggal rendelkező hatványsor.

11. Bizonyítsuk be, hogy azok a sík algebrai görbék, amelyeknek az O origó kétszeres szinguláris pontja különböző érintőkkel, formálisan izomorfak az O környe-

zetében az $xy=0$ görbével. (Útmutatás: Használjuk fel a 10. feladatot. Keressük Φ_1 és Φ_2-t az (x, y) ideál mind magasabb hatványai szerint.)

12. Adjunk formális jellemzést a sík algebrai görbék kettős szinguláris pontjaira O-karakterisztikájú k test felett.

13. Legyen X az $F=F_2(T)+F_3(T)+\ldots+F_k(T)$ egyenletű hiperfelület A^3-ban, ahol $F_2(T)$ egy n-edrangú kvadratikus forma. Bizonyítsuk be, hogy X formálisan izomorf a $T_1^2+\ldots+T_n^2=0$ kúppal a 0 környezetében.

14. Jelöljük $k[[X]]$-szel a $k[[T]]/\bar{\mathfrak{a}}_X$ gyűrűt. Bizonyítsuk be, hogy X és Y formálisan izomorf akkor és csakis akkor, ha $k[[X]]$ és $k[[Y]]$ izomorfak.

15. Konstruáljuk meg a $\tau\colon O_x\to k[[X]]$ leképezést, és bizonyítsuk be, hogy az O_x és $k[[T]]$ közötti — a 3. pontban kifejtett — kapcsolat fennáll az O_x és $k[[X]]$ között is, még ha x pont szinguláris is.

16. Konstruáljunk végtelen sok olyan sima projektív görbét, amelyek páranként nem izomorfak egymással a valós számok teste felett.

4. §. A biracionális izomorfizmusok szerkezete

1. *σ-eljárás a projektív térben*

Az előbbi paragrafusban bebizonyítottuk (3. tétel 2. következménye), hogy a biracionális izomorfizmus projektív görbék között izomorfizmus. Magasabb dimenziószámú sokaságokra ez nem igaz, például a stereografikus projekció, amely biracionális izomorfizmust létesít a nemelfajuló másodrendű felület és a projektív sík között, nem reguláris leképezés (az I. fejezet 4. § 9. feladata és az I. fejezet 6. § 4. tétel 5. következménye után tett megjegyzés). Ebben a paragrafusban definiálni fogjuk és megvizsgáljuk a legegyszerűbb és legtipikusabb biracionális de nem reguláris izomorfizmust, a σ-eljárást.

Tekintsük az $x_0, \ldots, x_n$ homogén koordinátájú P^n projektív teret és az $y_1, \ldots, y_n$ homogén koordinátájú P^{n-1}-et.

A $P^n\times P^{n-1}$-térben az $x\times y$, $x=(x_0:\ldots:x_n)$, $y=(y_1:\ldots:y_n)$ pontot jelölni fogjuk még $(x_0:\ldots:x_n; y_1:\ldots:y_n)$-nel. Tekintsük az

$$x_iy_j = y_ix_j, \quad 1 \leqq i, \quad j \leqq n \tag{1}$$

egyenlettel meghatározott $\Pi\subset P^n\times P^{n-1}$ zárt részsokaságot.

1. DEFINÍCIÓ. A $P^n\times P^{n-1}\to P^n$ projekcióval meghatározott $\sigma\colon \Pi\to P^n$ leképezést *σ-eljárásnak nevezzük.*

Jelöljük az $(1:0:\ldots:0)\in P^n$ pontot ξ-vel. Ha $(x_0:\ldots:x_n)\neq\xi$ akkor az (1) egyenletből következik, hogy $(y_1:\ldots:y_n)=(x_1:\ldots:x_n)$, tehát a

$$(x_0:\ldots:x_n) \to (x_0:\ldots:x_n;\ x_1:\ldots:x_n) \tag{2}$$

leképezés σ-nak az inverze. Ha viszont $(x_0:\ldots:x_n)=\xi$, akkor az egyenleteknek eleget tesznek az y_i tetszőleges értékei. Ilyen módon $\sigma^{-1}(\xi)=\xi\times P^{n-1}$ és σ izomorfizmust határoz meg $P^n-\xi$ és $\Pi-(\xi\times P^{n-1})$ között. A ξ pontot a σ-eljárás centrumának nevezzük.

Most leírjuk a Π struktúráját a $(\xi, y_1:\ldots:y_n)$ alakú pontok környezetében. Valamely i-re $y_i\neq0$ és így a kiválasztott pont benne van az $x_0\neq0$, $y_i\neq0$ feltétellel meghatározott U_i nyílt halmazban. Ebben a halmazban feltételezhetjük, hogy $x_0=1$, $y_i=1$. Akkor az (1) egyenletek $x_j=y_i x_i$, $1 \leq j \neq i \leq n$ alakúak lesznek. Innen következik, hogy u_i izomorf az $y_1, \ldots, x, \ldots, y_n$ koordinátájú affin térrel.

Speciálisan Π-ről azt is látjuk, hogy nem szinguláris, tehát a 2. § 6. tétel szerint irreducibilis minden pontjának környezetében. Hamarosan meglátjuk, hogy Π irreducibilis.

Annak érdekében, hogy világosabban el tudjuk képzelni a σ-eljárás működését, tekintsük azt a ξ ponton átmenő valamely L egyenesen. Legyen $x_i=\alpha_i x_0$ $(i=1, \ldots, n)$ ennek az egyenesnek az egyenlete. L-en a (2) leképezés $\sigma^{-1}(x_0:\ldots:x_n)=$ $=(x_0:\ldots:x_n;\ \alpha_0:\ldots:\alpha_n)$ alakot ölt. Azt látjuk, hogy σ^{-1} reguláris L-en és átviszi azt egy olyan $\sigma^{-1}(L)$ görbébe, amely metszi $\xi \times P^{n-1}$-et a $(\xi;\ \alpha_1:\ldots:\alpha_n)$ pontban. Ezt az eredményt a következő módon illusztrálhatjuk. A σ^{-1} leképezés nem reguláris a ξ pontban, de az L egyenesen tekintve azt, egy reguláris σ^{-1}: $L \to \Pi$ leképezést kapunk. Ezt felhasználva pótlólag értelmezhetjük σ^{-1}-et a ξ pontban (a valós vagy a komplex számok teste felett ez azt jelentené, hogy értelmezzük $\sigma^{-1}(x)$-et $x \in L$ esetén és futtatjuk $x \to \xi$-t az L irányban). Viszont az eredmény függ az L megválasztásától (a határérték kiszámítása függ attól az iránytól, amely mentén azt megvalósítjuk). Különböző L-eket kiválasztva megkapjuk az összes lehetséges pontot a $\xi \times P^{n-1}$-en. Ilyen módon, bár σ^{-1} nem reguláris a ξ pontban, feloldva a keletkező határozatlanságot, a Π nem tetszőleges pontjához jutunk, hanem csak a $\xi \times P^{n-1}$-beli pontokhoz. Ezt szem előtt tartva azt mondják, hogy σ^{-1} felduzzasztja ξ-t a $\xi \times P^{n-1}$-be.

Megjegyezzük, hogy egyúttal bebizonyítottuk a Π irreducibilitását. Valóban,

$$\Pi = (\xi \times p^{n-1}) \cup (\Pi - (\xi \times p^{n-1})).$$

Mivel $\Pi - (\xi \times P^{n-1})$ izomorf $P^n - \xi$-vel, így az irreducibilis, tehát irreducibilis $\overline{\Pi - (\xi \times P^{n-1})}$ is. Csak meg kell győződnünk arról, hogy

$$\xi \times p^{n-1} \subset \overline{\Pi - (\xi \times p^{n-1})}.$$

Viszont jó előre igaz

$$\sigma^{-1}(L) \subset \overline{\Pi - (\xi \times p^{n-1})},$$

tehát

$$\sigma^{-1}(L) \cap (\xi \times p^{n-1}) \subset \overline{\Pi - (\xi \times p^{n-1})}.$$

Láttuk, hogy az L megfelelő kiválasztása mellett megkapható a $\xi \times P^{n-1}$ bármely pontja.

$n=2$ esetén szemléletesen elképzelhetjük a $\sigma: \Pi \to P^2$ leképezést és annak hatását az L egyenesekre: a $\sigma^{-1}(L)$ görbék metszik a $\xi \times P^1$ egyenest azon pontokban, amelyek annak mértékében változnak, amint L a P^2-ben a ξ körül elfordul. Ilyen módon Π hasonlóan néz ki a csavar egy menetéhez.

2. *Lokális σ-eljárás*

Most tetszőleges kváziprojektív X sokaság és annak egyszerű x pontja esetében konstruálni fogjuk az Y sokaságot és a σ: $Y \to X$ leképezést annak analógiájára, ahogyan az történt az 1. pontban $X=P^n$ esetén.

Kezdjük egy segéd konstrukcióval.

Legyen X egy kváziprojektív sokaság, ξ egy egyszerű pontja és $u_1, \dots, u_n$ az egész X-en reguláris olyan függvények, hogy

a) az $u_1 = \dots = u_n = 0$ egyenleteknek X-en egyetlen ξ megoldásuk van;

b) az $u_1, \dots, u_n$ függvények ξ-ben lokális koordináta rendszert alkotnak.

Tekintsük az $X \subset P^{n-1}$ sokaságot és abban az olyan $(x; t_1 : \dots : t_n)$, $x \in X$, $(t_1 : \dots : t_n) \in P^{n-1}$ pontokból álló Y részsokaságot, ahol $u_i(x)t_j = u_j(x)t_i$, $1 \leqq i, j \leqq n$. Azt a σ: $Y \to X$ reguláris leképezést, amely az $X \times P^{n-1} \to X$ projekció Y-ra való szűkítése, lokális σ-eljárásnak nevezzük ξ-beli centrummal.

Megjegyezzük, hogy ez a konstrukció általában nem alkalmazható arra az esetre, mikor X projektív, ugyanis megköveteljük az X-en nem konstans, mindenütt reguláris $u_1, \dots, u_n$ függvények létezését. Ezért az új fogalom nem foglalja magában a korábban bevezetett σ-eljárás fogalmát $X = P^n$ esetében. A közöttük levő kapcsolat a következőkben áll.

Jelölje X azt az affin részsokaságot, amelyet P^n-ben az $x_0 \neq 0$ feltétel határoz meg és legyen $Y = \Theta^{-1}(X)$. Akkor a σ: $Y \to X$ leképezés, amelyet Y-on a $\Pi \to P^n$ σ-eljárás indukál, lokális σ-eljárás lesz.

Megemlítünk egy nyilvánvaló, de fontos speciális esetet: $n=1$ mellett a σ egy izomorfizmus.

Az 1. pontban a σ-eljárásra bizonyított következő tulajdonságok szóról szóra ugyanúgy bizonyíthatók a lokális σ-eljárásra: a σ $Y \to X$ leképezés reguláris és meghatározza az

$$Y - (\xi \times p^{n-1}) \to X - \xi$$

izomorfizmust.

Az $y \in \sigma^{-1}(\xi)$ pontban valamely i-re teljesül $t_i \neq 0$ és feltehetjük, hogy $s_j = \dfrac{t_j}{t_i}$, $j \neq i$. Az Y egyenletei $u_j = u_i s_j$ $(j = 1, \dots, n)$, $j \neq i$ alakot öltenek. Innen láthatjuk, hogy az y pont ideálja

$$\mathfrak{M}_y = (u_1 - u_1(y), \dots, u_n - u_n(y), s_1 - s_1(y), \dots, s_n - s_n(y)) =$$

$$= (s_1 - s_1(y), \dots, u_i - u_i(y), \dots, s_n - s_n(y))$$

alakú.

Ezért $\dim \Theta_{y,Y} \leqq n$, viszont mivel $\dim \sigma^{-1}(X - \xi) = n$, ezért a tetszőleges $y \in \sigma^{-1}(X - \xi)$ pontban az Y sokaság sima. Mivel

$$Y = \sigma^{-1}(X - \xi) \cup (\xi \times p^{n-1}),$$

így Y vagy irreducibilis és egybeesik a $\sigma^{-1}(X - \xi)$ sokaság lezártjával, vagy van még egy komponense, amely izomorf P^{n-1}-gyel. A második esetben a két komponens metszi egymást, ugyanis ellenkező esetben $\sigma^{-1}(X - \xi)$ zárt volna, akkor viszont zárt volna — az I. fejezet 5. § 3. tétel miatt — annak $X - \xi$ képe is. A két komponens metszéspontja egyszerű volna, ami ellentmond a 2. § 6. tételnek. Ilyen módon Y irreducibilis és sima, az

$$s_1 - s_1(y), \dots, u_i - u_i(y), \dots, s_n - s_n(y)$$

pedig lokális paraméterek abban az $y \in \sigma^{-1}(x)$ pontban, amelyre $t_i \neq 0$.

Most bebizonyítjuk azt a tulajdonságot, amelyet a lokális σ-eljárás függetlenségének nevezhetünk az $u_1, \dots, u_n$ függvények választásától.

LEMMA. *Ha $v_1, \ldots, v_n$ az* a) *és* b) *tulajdonságoknak eleget tevő másik függvényrendszer az X-en, és Y' a segítségével kapott sokaság, $\sigma' : Y' \to X$ pedig a megfelelő σ-eljárás, akkor Y' és Y izomorfak.*

Sőt létezik olyan f: $Y \to Y'$ izomorfizmus, hogy a

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & Y' \arrow[dl, "\sigma'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

diagramma kommutatív.

Bizonyítás. Legyen $Y' \subset X \times P^{n-1}$ és a P^{n-1}-beli homogén koordinátákat legyenek $t'_1, \ldots, t'_n$. Az $Y - \sigma^{-1}(\xi)$ és $Y' - \sigma^{-1}(\xi)$ nyílt halmazokban legyen

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x; t_1 : \ldots : t_n) &= (x; v_1(x); \ldots; v_n(x)), \\ \psi(x; t'_1 : \ldots : t'_n) &= (x; u_1(x) : \ldots : u_n(x)). \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Az u_i függvények a) tulajdonságából következik, hogy φ és ψ regulárisak és $\varphi(Y - \sigma^{-1}(\xi)) \subset Y'$, $\psi(Y - \sigma'^{-1}(\xi)) \subset Y$.

Tekintsük most azt a nyílt halmazt, amelyben $t_i \neq 0$, és legyen abban $s_j = \frac{t_j}{t_i}$. Mivel $v_k(\xi) = 0$, az $u_1, \ldots, u_n$ pedig az $\mathfrak{M}_\xi$ ideál bázisa, így

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} h_{k_j} u_j, \quad h_{k_j} \in O_\xi. \tag{2}$$

Mivel a mi nyílt halmazunkban $u_j = u_i s_j$ így,

$$\left\{\begin{aligned} v_k &= u_i \sum_{j=1}^{n} \sigma^*(h_{k_j}) s_j = u_i g_k, \\ g_k &= \sum_{j=1}^{n} \sigma^*(h_{k_j}) s_j. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Legyen $\varphi(x; t_1 : \ldots : t_n) = (x; g_1 : \ldots : g_n)$. Nyilvánvaló, hogy a mi leképezésünk egybeesik (1)-gyel mindkettőjük értelmezési tartományában, mivel ott $g_k = \frac{v_k}{u_i}$. Ellenőrizzük, hogy φ reguláris. Ennek érdekében be kell bizonyítanunk, hogy $g_1, \ldots, g_n$ nem egyenlő egyidejűleg 0-val egyetlen $\eta \in \sigma^{-1}(\xi)$ pontban sem. Legyen az összes $g_k(\eta) = 0$. Mivel nem minden $t_j(\eta) = 0$ $(t_i = 1)$, így (3)-ból következik, hogy $|h_{kj}(\xi)| = 0$. Viszont $v_k \equiv \sum h_{kj}(\xi) u_j (\mathfrak{M}_\xi^2)$, és innen az következne, hogy a v_k-k lineárisan függenek $\mathfrak{M}_\xi / \mathfrak{M}_\xi^2$-ben, mikor pedig azok lokális paraméter rendszert alkotnak a ξ pontban. Ilyen módon definiáljuk az egyetlen $\varphi : Y \to Y'$ leképezést és analóg módon a $\psi : Y' \to Y$-t. Azt, hogy ezek egymás inverzei, elegendő ellenőrizni egy olyan nyílt halmazon, ahol az (1) képletek teljesülnek. Ott pedig ez nyilvánvaló.

3. *Sokaságok viselkedése σ-eljárás hatására*

Legyen X egy kváziprojektív részsokaság P^N-ben, $\sigma: \Pi \to P^N$ pedig az 1. pontban definiált σ-eljárás. Meg fogjuk vizsgálni az X sokaság $\sigma^{-1}(X)$ inverz képét, amely természetesen kváziprojektív részsokaság Π-ben.

1. TÉTEL. *Ha $X \subset P^N$, X nem szinguláris a ξ pontban és $X \neq P^N$, akkor a ξ középpontú σ-eljárásra nézve $\sigma^{-1}(X)$ őskép irreducibilis és két*

$$\sigma^{-1}(X) = (\xi \times p^{N-1}) \cup Y \tag{1}$$

komponensből áll. Az Y komponensen a $\sigma: Y \to X$ leképezés reguláris leképezést határoz meg. Ez izomorfizmusa az $x \in X$ pont valamely U környezetének és a $\sigma^{-1}(U)$-nak, ha $x \neq \xi$, és $\sigma^{-1}(u) \to u$ lokális σ-eljárás, ha $x = \xi$.

Bizonyítás. Jelöljük Y-nal a $\sigma^{-1}(X-\xi)$ halmaz $\overline{\sigma^{-1}(X-\xi)}$ lezártját. Mivel σ^{-1} izomorfizmus a $P^N-\xi$-be, így $\sigma^{-1}(X-\xi)$ izomorf $X-\xi$-vel, és így irreducibilis. Következésképp Y is irreducibilis. A definícióból nyilvánvaló, hogy (1) teljesül; ha $x \in X-\xi$, akkor

$$\sigma^{-1}(x) \in Y, \quad \sigma^{-1}(\xi) = \xi \times p^{N-1}.$$

Azt már említettük, hogy $\sigma: Y \to X$ izomorfizmus a tetszőleges $x \in X$ környezetében, kivéve az $x=\xi$-t. Hátra van még megvizsgálni ezt a leképezést a ξ pont környezetében.

Közben fel fogjuk használni azt a tényt, hogy a ξ pontot tartalmazó affin térben a σ-eljárás leírható lokális σ-eljárásként, és azt, hogy a lokális σ-eljárás nem függ a lokális koordináták kiválasztásától. Mégpedig, a 3. § 5. tétel szerint az $u_1, \dots, u_N$ lokális koordináta-rendszert a $\xi \in P^N$ pontban kiválaszthatjuk úgy, hogy ezen pont valamely környezetében az X sokaságot az

$$u_{n+1} = \dots = u_N = 0 \tag{2}$$

egyenletek határozzák meg, az $u_1, \dots, u_n$ függvények pedig a ξ pontbeli lokális koordináta rendszert határoznak meg az X-en. Kiválasztjuk a ξ pont olyan $U \subset P^N$ környezetét, hogy az $u_1, \dots, u_N$ függvények eleget tesznek az 1. pont lemmája a) és b) feltételeinek, s ezért a tétel bizonyítását arra a speciális esetre vezettük vissza, amikor X a (2) egyenletekkel van megadva.

Az a) és b) feltételekből, valamint $u_i t_j = u_j t_i$-ből azt kapjuk, hogy $x \neq \xi$ esetén $u_{n+1}(x) = \dots = u_N(x) = 0$. Ezért Y benne van abban az $X \times P^{N-1}$-beli Y' részsokaságban, amelyet az

$$u_{n+1} = \dots = u_n = 0 \tag{3}$$

$$u_i t_j = u_j t_i, \quad 1 \leqq i, \quad j = N \tag{4}$$

egyenletek határoznak meg. Ha P^{n-1}-gyel jelöljük a P^N projektív tér (3) egyenletekkel megadott alterét, akkor látni fogjuk, hogy $Y \subset X \times P^{n-1}$ és a (4) egyenletekkel van meghatározva. Ilyen módon Y' egybeesik azzal a sokasággal, amelyet a lokális σ-eljárás során kapunk. Bebizonyítottuk, hogy $Y' = \overline{\sigma^{-1}(X-\xi)}$. Ezért $Y = Y'$, ami bizonyítja a tételt.

Most megadhatjuk a σ-eljárás legáltalánosabb definícióját. Ha X egy kvázi-projektív sokaság, $X\subset P^n$, ξ annak egyszerű pontja és Y az a sokaság, amit az 1. tétel megfogalmazásában vezettünk be, akkor $\sigma: Y\to X$ leképezést ξ-középpontú σ-eljárásnak nevezzük. Abból, amit a lokális σ-eljárásról bebizonyítottunk, következik, hogy Y irreducibilis és a $\sigma^{-1}(\xi)$ összes pontja egyszerű az Y-on, továbbá $\sigma^{-1}(\xi)\cong\xi\times P^{n-1}$. A lokális σ-eljárás definícióját követő megjegyzés miatt a σ-eljárás izomorfizmus, ha X egy görbe. Ilyen módon a nemtriviális σ-eljárás léte jellemző a többdimenziós algebrai geometriára.

4. *Különleges* részsokaságok*

A σ-eljárás példája rámutat egy elvi különbségre az algebrai görbék és az $n>1$ dimenziójú sokaságok között. Amíg a biracionális izomorfizmus nem szinguláris projektív görbék esetében izomorfizmus, addig a σ-eljárás megmutatja, hogy ez lehet másként nagyobb dimenziószám esetén.

Megemlítjük a σ-eljárás egy sajátosságát, hogy az reguláris leképezés és csak azért nem izomorfizmus, mert a racionális σ^{-1} leképezés nem reguláris (a ξ pontban).

Ebben a pontban vizsgálni fogjuk az $f: X\to Y$ leképezést, ahol f reguláris leképezés és biracionális izomorfizmus, azaz $f^{-1}=g$ racionális, de nem reguláris $Y\to X$ leképezés. A σ-eljárás példáján láttuk, hogy az 1-kodimenziós Y-beli részsokaság egy ξ pontba szűkül. Meg fogjuk mutatni, hogy analóg tulajdonság teljesül mindig az ilyen körülmények között.

2. TÉTEL. *Legyen $f: X\to Y$ egy reguláris leképezés és biracionális izomorfizmus, $x\in X$, $y=f(x)$ egyszerű pont Y-on és a $g=f^{-1}$ leképezés nem reguláris az y pontban. Akkor létezik olyan $Z\subset X$ részsokaság, hogy* codim $Z=1$, codim $f(Z)\geqq 2$.

Bizonyítás. Szükség esetén helyettesíteni tudjuk X és Y-t az x és y pontok affin környezetével és ezért X-et és Y-t affinoknak tekinteni. Legyen $X\subset A^N$ és $g=f^{-1}$ legyen megadva a $t_i=g_i$ $(i=1, \dots, N)$, $g_i\in k(Y)$ képletekkel, ahol $t_1, \dots, t_N$ koordináták A^N-ben.

Nyilvánvaló, hogy $g_i=g^*(t_i)$ és mivel g irreguláris az y pontban, ezért legalább egy a g_i függvények közül nem reguláris y-ban. Legyen ez éppen g_1, úgy hogy $g_1\notin O_y$. Előállíthatjuk g_1-et $g_1=\frac{u}{v}$, $u, v\in O_y$, $v(y)=0$ alakban, és az egyértelmű prímfaktorizáció miatt O_y-ban (feltétel szerint az y pont egyszerű) kiválaszthatjuk u-t és v-t relatív prímeknek. Mivel $g=f^{-1}$, így $t_1=f^*(g_1)=f^*\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{f^*(u)}{f^*(v)}$, és ezért

$$f^*(v)t_1=f^*(u). \tag{1}$$

Nyilvánvaló, hogy $f^*(v)(x)=0$ és így $x\in X_{f^*(v)}$. Legyen $Z=X_{f^*(v)}$. A metszet dimenziójáról szóló tétel miatt codim $Z=1$ mivel $x\in Z$ és ezért az nem üres. Az (1)-ből következik, hogy $f^*(u)=0$ a Z-n, mivel a t_1 reguláris függvény. Ezért az $f(Z)-n$ teljesül $u=0$ és $v=0$ is, tehát $f(Z)\subset Y_u\cap Y_v$.

Hátra maradt ellenőriznünk, hogy codim $(Y_u\cap Y_v)\geqq 2$. Viszont ha $Y_u\cap Y_v$ tartalmazna $Y'\ni y$, codim $Y'=1$ komponenst, akkor Y'-nek a 3. § 1. tétel szerint lenne

* Исключительные.

h lokális egyenlete. Ez azt jelenti, hogy $u \in (h)$, $v \in (h)$, ez pedig ellentmond annak, hogy u és v-nek nincs közös tényezőjük az O_y gyűrűben.

DEFINÍCIÓ. Legyen $f: X \to Y$ reguláris leképezés, amely egyben biracionális izomorfizmus. Egy $Z \subset X$ részsokaságot különlegesnek nevezünk, ha codim $Z=1$, kodim $f(Z) \geqq 2$.

2. TÉTEL. 1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha a sima sokaságok $f: X \to Y$ reguláris leképezése biracionális izomorfizmus, de nem izomorfizmus, akkor annak van különleges részsokasága.*

2. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $f: X \to Y$ egy reguláris leképezés és biracionális izomorfizmus, X és Y görbék, és Y sima, akkor $f(X)$ nyílt Y-ban és f izomorfizmust határoz meg az X és $f(X)$ között.*

Az, hogy $f(X)$ nyílt Y-ban, következik abból, hogy X és Y-nak léteznek izomorf U és V nyílt részhalmazai. Mivel $f(U)=V$ az X-ből végesszámú pont kidobásával keletkezik, ezért annál inkább így kapható meg $f(X)$, vagyis az nyílt Y-ban. Ha az $f: X \to f(X)$ leképezés nem volna izomorfizmus, akkor ellentmondásba kerülnénk a 2. tétellel, mivel esetünkben csak az üres halmaznak van $\geqq 2$ kodimenziója.

5. *Izomorfizmus és biracionális izomorfizmus*

Tekintsük az összes egymással biracionálisan izomorf kváziprojektív algebrai sokaságok osztályát. Ezen osztáy összes reprezentánsát az osztály modelljeinek fogjuk nevezni.

A következő paragrafusban be fogjuk bizonyítani, hogy a biracionálisan izomorf görbék minden osztályában létezik projektív sima X_0 modell. A 3. § 3. tétel 2. következménye azt állítja, hogy ilyen modell az izomorfizmus erejéig csak egyetlen létezik. Ezért ha minden osztályhoz hozzárendeljük a benne levő egyetlen nemszinguláris projektív modellt, akkor az algebrai görbék biracionális izomorfizmus pontossággal való rendszerezésének a kérdését visszavezettük a nemszinguláris projektív görbék izomorfizmus pontossággal való rendszerezésének kérdéséhez.

Az algebrai görbéken adott függvények testei a k test 1 transzcendencia fokú olyan bővítései, amelyek végesen generáltak k felett. Ezért kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést tudunk létesíteni az ilyen K testek és a nemszinguláris projektív görbék között. Ebben a megfeleltetésben $K=k(X)$. X-et a K test modelljének is fogjuk nevezni.

Meg lehet próbálni közvetlenül meghatározni X-et, kiindulva a K test algebrai tulajdonságaiból. Pontosítjuk ezt a kérdést, megkérdezve, hogyan jellemezhetők a K testen belül az X görbe összes pontjainak lokális gyűrűi. Könnyű ellenőrizni, hogy az $x \in X$ pont minden O_x lokális gyűrűje rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1) O a K test részgyűrűje, $k \subsetneqq O \subsetneqq K$,
2) O lokális gyűrű és $\mathfrak{M}$ maximális ideálja főideál, azaz $\mathfrak{M}=(u)$.
3) Az O gyűrű kvociensteste egybeesik K-val.

Be lehet bizonyítani (7., 8., 9. feladatok), hogy az 1), 2), 3) tulajdonságoknak eleget tevő O részgyűrű a K testben egybeesik valamely $x \in X$ pont O_x lokális gyűrűjével. Ilyen módon az X modell univerzális, ugyanis tartalmazza a K test összes olyan lokális gyűrűit, amelyek eleget tesznek az 1), 2) és 3) természetes feltételeknek.

Hogyan oldhatók meg ezek a kérdések az $n>1$ dimenziós sokaságokra? A projektív nemszinguláris modell létezésével a dolog aránylag szerencsésen áll, ugyanis annak létezését bebizonyították az $n=2, 3$ esetekre (WALKER, ZARISKI a 0 karakterisztikájú testekre és ABHYANKAR tetszőleges esetre) és 0 karakterisztika esetében tetszőleges n-re (HIRONAKA). Tetszőleges test és tetszőleges n esetében is nagyon valószínűnek látszik annak létezése. Viszont a nemszinguláris projektív modell unicitása már kizárólagos jellegzetessége az $n=1$ esetnek. Ez látható a P^2 projektív síknak és a másodrendű felületeknek a példáján, amelyek biracionálisan izomorfak, de nem izomorfak.

Fel lehet tenni a kérdést a biracionálisan izomorf sokaságok minden osztályában olyan modell létezéséről, amely univerzális lenne olyan értelemben, hogy pontjainak lokális gyűrűi, mint az $n=1$ esetben is, kimerítenék a $K=k(X)$ test összes olyan lokális részgyűrűjét, amelyek eleget tesznek az 1), 2) és 3) feltételeknek (felcserélve a 2) feltételt az $\mathfrak{M}=(u_1, \ldots, u_n)$-nel). Viszont ilyen modell szintén nem lehetséges ugyanazon okok miatt. Mégpedig ha $\sigma: X' \to X$ egy $\xi \in X$ középpontú σ-eljárás, akkor az $y \in \sigma^{-1}(\xi)$ pontok lokális gyűrűi nem esnek egybe az O_x, $x \in X$ lokális gyűrűk egyikével sem. Az olvasó ezt könnyen bebizonyíthatja, gyakorlásképpen. Igaz, hogy egyesítve egy osztály összes nemszinguláris modelljét, kaphatunk egy olyan objektumot, amely rendelkezik az univerzálisság tulajdonságaival, viszont az nem lesz végesdimenziós algebrai sokaság. Egyet és mást lehet olvasni erről a „végtelen modellről" a Зарисский и Самюэль könyv 2. kötet, VI. fejezet 17. §-ban.

Egy kiemelt modell hiányában felvetődik a feladat megvizsgálni a kapcsolatokat a biracionálisan izomorf sokaságok egy osztályának különböző nemszinguláris projektív modelljei között. Bizonyítás nélkül le fogjuk írni az idevonatkozó főbb eredményeket.

A következőkben minden sokaságot irreducibilisnak, simának és projektívnak fogunk feltételezni.

Két fogalommal kezdjük. Az X' modell *dominálja* X-et, ha létezik $f: X' \to X$ biracionális reguláris leképezés.

Egy sokaságot *relatív minimális modellnek* nevezünk, ha az nem dominál egyetlen vele nem izomorf sokaságot sem.

Például a sima projektív görbe mindig relatív minimális modell. A 2. tétel miatt egy sokaság akkor relatív minimális modell, ha nem rendelkezik különleges részsokaságokkal.

Be lehet bizonyítani, hogy minden sokaság dominál legalább egy relatív minimális modellt. Ilyen módon a biracionálisan izomorf sokaságok minden osztályában létezik legalább egy relatív minimális modell.

Felmerül a fontos kérdés annak unicitásáról. Ha minden osztályban létezne egyetlen ilyen modell, akkor ez ismét elvezetne a biracionális rendszerezés, az izomorfia pontossággal való rendszerezésig.

Viszont $n>1$ esetén ez nem így van. Példát adnak erre a P^2 projektív sík és a Q másodrendű felület, amelyek — mint ismeretes — biracionálisan izomorfak, úgy hogy a biracionálisan izomorf felületek ugyanazon osztályának a modelljei. Bebizonyítjuk, hogy P^2 és Q relatív minimális modellek, vagyis nincsenek különleges görbéik. Mivel P^2 és Q nem izomorfak (I. fejezet 6. § 2. pont 1. megjegyzés), így ez a szükséges példát adja.

Esetünkben a $C \subset X$ irreducibilis különleges görbének az $f: X \to Y$ reguláris biracionális leképezés hatására az $y \in Y: f(C) = y$ pontba kell zsugorodnia. Itt X és Y projektív felületek. Az ilyen görbék egy sor speciális tulajdonsággal rendelkeznek (amivel a „különleges" elnevezés magyarázható). Mi csak egyet hozunk fel közülük.

A 3. § 3. tétel szerint az f^{-1} leképezés csak véges számú $y_i \in Y$ pontban nem reguláris. Legyen U az y pont olyan kis affin környezete, hogy f^{-1} reguláris az U minden y-tól különböző pontjában. Legyen $V = f^{-1}(U)$, $C = f^{-1}(y)$. Nyilvánvalóan V nyílt részhalmaza X-nek és $V \supset C$. Meg fogjuk mutatni, hogy V nem tartalmaz egyetlen olyan Y-ban zárt irreducibilis C' görbét sem, amely nincs benne C-ben. Valóban, C' projektív görbe és annak $f(C')$ képe is projektív. Viszont $f(C') \subset U$, amely affin. Az I. fejezet 5. § 2. tétel 2. következmény szerint ez csak akkor lehetséges, ha $f(C') = y'$ egy pont. Ha $y' \neq y$, akkor — mivel y-on kívül f^{-1} izomorfizmus U-ban — C is pont kell legyen. Ha viszont $y' = y$, akkor $C' \subset f^{-1}(y) = C$.

Ilyen módon C izoláltan helyezkedik el Y-ban, azaz annak valamely V környezetében nem létezik egyetlen olyan irreducibilis projektív görbe sem, amely nincs benne C-ben. Más szóval C-t nem lehet „kissé megmozgatni". Innen le lehet vezetni, hogy sok felület nem tartalmaz különleges görbét.

Legyen például $X = P^2$, $V = P^2 - \mathscr{D} \supset C$, ahol C egy különleges görbe. Akkor dim $\mathscr{D} = 0$ mivel különben C és $\mathscr{D}$ metszenék egymást a metszet dimenziójáról szóló tétel szerint. Viszont ha dim $\mathscr{D} = 0$, azaz $\mathscr{D}$ véges ponthalmaz, akkor létezik tetszőleges számú olyan C görbe, amelyek nem metszik $\mathscr{D}$-t, például egyenesek.

Legyen $X = Q$. Itt ki fogjuk használni a Q-t önmagába leképező projektív transzformációk G csoportjának létét. Emlékeztetünk arra, hogy a G-ből való transzformációk negyedrendű olyan A mátrixokkal adhatók meg, amelyek eleget tesznek az $A^* FA = F$ összefüggésnek, ahol F a Q felület egyenletének a mátrixa. Innen következik, hogy G egy algebrai részsokaságot alkot az összes negyedrendű mátrixok terében. Ezért a következőkben G-t algebrai affin sokaságnak fogjuk tekinteni.

Ha C egy görbe és $C \subset Q - \mathscr{D}$, akkor konstruálunk egy olyan $\varphi \in G$ transzformációt, hogy $\varphi(C) \not\subset C$, $\varphi(C) \subset Q - \mathscr{D}$, ellentmondásban a különleges görbék fenti tulajdonságával. Ennek érdekében elegendő bebizonyítani, hogy azon $\varphi \in G$-k halmaza, amelyekre $\varphi(C) \cap \mathscr{D} \neq \emptyset$, zárt. Akkor rendelkezésünkre áll az $e \in G$ identikus transzformációnak egy egész környezete, amely a szükséges tulajdonságú pontokból áll. Annak érdekében, hogy leírjuk azon $\varphi \in G$ transzformációk S halmazát, amelyekre $\varphi(C) \cap \mathscr{D} \neq 0$, tekintsük a $G \times Q$-ban az olyan (φ, x) párok Γ halmazát, ahol $x \in C$ és $\varphi(x) \in \mathscr{D}$. Nyilvánvaló, hogy Γ zárt. Ha $f: G \times Q \to G$ projekció, akkor $S = f(\Gamma)$, az $f(\Gamma)$ pedig zárt az I. fejezet 5. § 2. tétel szerint. Ezzel befejeztük két különböző minimális modell létezésének a bizonyítását.

Annál meglepőbb, hogy mégis igaz a minimális modell unicitása az algebrai felületekre, csak ki kell zárnunk néhány speciális típust. Mégpedig, amint ENRIQUES megmutatta, a felületek osztályában a minimális modell egyetlen, ha ebben az osztályban nincs $C \times P^1$ alakú felület, ahol C egy görbe. (A felülettel biracionálisan izomorf felületeket vonalazottaknak nevezzük.)

ENRIQUES tételének bizonyítása megtalálható az «*Алгебраические поверхности*», könyvben, Труды Математического института АН СССР 75. kötet, II. fejezet.

Az $n \geqq 3$ dimenziójú sokaságok minimális modelljeiről semmi sem ismert.

Feladatok

1. Legyen $\dim X=2$, ξ egyszerű pont X-ben, C_1 és $C_2 \subset X$ két olyan görbe, amelyek átmennek ξ-n és nemszingulárisak abban, $\sigma: Y \to X$ egy ξ középpontú σ-eljárás, $C_i' = \overline{\sigma^{-1}(C_i - \xi)}$, $Z = \sigma^{-1}(\xi)$. Bizonyítsuk be, hogy $C_1' \cap Z = C_2' \cap Z$ akkor és csakis akkor, ha C_1 és C_2 érintik egymást a ξ pontban.

2. Legyen $\dim X=2$, ξ egyszerű pont X-ben, $C \subset X$ egy görbe, $C \ni \xi$ és f a C lokális egyenlete a ξ környezetében. Legyen

$$f \equiv \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i u + \beta_i v)^{l_i} (\mathfrak{M}_\xi^{k+1}), \quad \sum l_i = k,$$

ahol u és v lokális paraméterek ξ-ben.

Amint az 1. feladatban is, $\sigma: Y \to X$, $C' = \overline{\sigma^{-1}(C - \xi)}$. Bizonyítsuk be, hogy $C' \cap Z$ r pontból áll.

3. A 2. feladat jelöléseit használjuk, azon kívül $f \equiv (\alpha_1 u + \beta_1 v)(\alpha_2 u + \beta_2 v)$ $(\mathfrak{M}_\xi^3)$ és az $\alpha_1 u + \beta_1 v$ és $\alpha_2 u + \beta_2 v$ nem arányosak. Bizonyítsuk be, hogy a $C' \cap Z$ mindkét pontja egyszerű a C'-n.

4. Tekintsük a

$$\varphi(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 x_1 : x_0 x_2 : x_1^2 : x_1 x_2 : x_2^2)$$

képlettel megadott $\varphi: P^2 \to P^4$ racionális leképezést. Bizonyítsuk be, hogy φ biracionális izomorfizmus, a $\overline{\varphi(P^2)} \to P^2$ pedig egybeesik a σ-eljárással.

5. A 4. feladathoz hasonlóan vizsgáljuk meg az összes harmadfokú egytagú kifejezéssel (x_0^3, x_1^3 és x_2^3 kivételével) meghatározott $P^2 \to P^6$ leképezést.

6. Konstruáljunk példát olyan $X \to Y$ biracionális izomorfizmusra, amelynek hatására az 1-kodimenziós különleges részsokaság 2-kodimenziós részsokaságba megy át ($\dim X = n-1$ tetszőleges).

7. Legyen O az 5. pont 1)—3) feltételeinek eleget tevő $k(X)$ test lokális gyűrűje (X-projektív algebrai görbe). Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $u \in k(X)$-re teljesül vagy $u \in O$ vagy $u^{-1} \in O$. Legyen $X \subset P^n$, $x_0, \dots, x_n$ homogén koordináták P^n-ben. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan i, amelyre $\frac{x_j}{x_i} \in O$ $(j=0, \dots, n)$.

8. A 7. feladat jelöléseit használjuk. Legyen X' egy affin görbe, $X' = X \cap A_i^n$. Bizonyítsuk be, hogy $k[X'] \subset O$, a $k[X] \cap \mathfrak{M}$ ideál valamely $x \in X'$ pont ideálja és $O_x \subset O$.

9. Bizonyítsuk be, hogy ha az O_1 és O_2 két gyűrű eleget tesz az 5. pont 1)—3) feltételeinek, valamint $O_1 \subset O_2$, akkor $O_1 = O_2$. Vezessük le innen, valamint a 7. és 8. feladatokból azt, hogy $O = O_x$ (a 8. feladat jelölései).

5. §. Normális sokaságok

1. *Normalitás*

Emlékeztetünk először egy algebrai fogalomra. Egy zérusosztómentes A gyűrűt egész-zártnak* nevezünk, ha az A gyűrű K kvocienstestének minden A-ra nézve zárt eleme benne van A-ban.

DEFINÍCIÓ. Egy irreducibilis affin X sokaságot *normálisnak* nevezünk, ha a $k[X]$ gyűrű egész-zárt. Egy irreducibilis projektív X sokaságot normálisnak nevezünk, ha annak bármely pontja rendelkezik affin normális környezettel.

Hamarosan be fogjuk bizonyítani, hogy a sima sokaságok normálisak. (1. tétel.) Íme egy példa a nem normális sokaságokra. Az $y^2=x^2+x^3$ egyenlettel megadott X görbén a $t=\frac{y}{x}\in k(X)$ függvény egész $k[X]$ felett, mivel $t^2=1+x$, viszont $t\notin k[X]$ (I. fejezet. 3. § 9. feladat).

Az ismertetett példák azt mutatják, hogy a normalitás fogalmának bizonyos vonatkozása van a sokaság szinguláris pontjaira. Felhozunk egy példát olyan sokaságra, amelynek vannak szinguláris pontjai, de normális. Ilyen az $x^2+y^2=z^2$ egyenlettel megadott kúp A^3-ban (feltételezzük, hogy az alaptest karakterisztikája $\neq 2$).

Bebizonyítjuk, hogy a $k[X]$ gyűrű egész-zárt a $k(X)$ testben. Közben csak az egész elemek egyszerűbb tulajdonságaira fogunk támaszkodni (l. Зарисский и Самюэль, I. kötet, V. fejezet, 1. §). A $k(X)$ test $u+vz$, $u, v\in k(x, y)$ alakú elemekből áll, ahol x és y független változók. Analóg módon a $k[X]$ a $k(X)$ test olyan elemeiből áll, amelyekre $u, v\in k[x, y]$, ezért $k[X]$ véges $k[x, y]$ feletti modulus, és így a $k[X]$ gyűrű minden eleme egész a $k[x, y]$ felett. Ha $\alpha=u+vz\in k(X)$ egész $k[X]$ felett, akkor az egész kell legyen $k[x, y]$ felett is. Annak minimális polinomja $T^2-2uT+ +(u^2-(x^2+y^2)v^2)$ alakú, ezért $2u\in k[x, y]$ és $u\in k[x, y]$. Analóg módon $u^2-(x^2+y^2)v^2\in \in k[x, y]$, tehát $(x^2+y^2)\cdot v^2\in k[x, y]$. Mivel $x^2+y^2=(x+iy)(x-iy)$, azaz két relatív prím elem szorzata, ezért $v\in k[x, y]$, ami pedig azt jelenti, hogy $\alpha\in k[X]$.

A normális sokaságok néhány egyszerű tulajdonságát fogjuk bebizonyítani.

LEMMA. *Egy X sokaság normális akkor és csakis akkor, ha minden pontjának O_x lokális gyűrűi egész-zártak.*

Mivel a normalitás definíciója lokális jellegű, így elegendő arra az esetre szorítkozni, amikor X affin. Legyen X normális, $x\in X$. Bebizonyítjuk az O_x egész-zárt voltát. Legyen $\alpha\in k(X)$ és α egész O_x felett, azaz

$$\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_n = 0. \tag{1}$$

Itt $a_i\in O_x$ és ezért $a_i=\frac{b_i}{c_i}$, b_i, $c_i\in k[X]$, $c_i(x)\neq 0$. Legyen $d_0=c_1\cdot\ldots\cdot c_n$ és beszorozzuk (1)-et d_0-val. Azt kapjuk, hogy

$$d_0\alpha^n+d_1\alpha^{n-1}+\ldots+d_n = 0, \tag{2}$$

ahol $d_i\in k[X]$, $d_0(x)\neq 0$. Megszorozzuk (2)-t d_0^{n-1}-gyel és, behelyettesítve $d_0\alpha=\beta$-t, azt kapjuk, hogy β egész $k[X]$ felett. Feltételezés szerint $k[X]$ egész-zárt, így $d_0\alpha=$

* Целозамкнуто.

$=\beta\in k[X]$. Akkor $\alpha=\frac{\beta}{d_0}\in O_x$, mivel $d_0(x)\neq 0$. Legyen az összes O_x egész-zárt. Bebizonyítjuk, hogy $k[X]$ egész-zárt. Ha $\alpha\in k(X)$ és α egész $k[X]$ felett, akkor $\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_n=0$, $a_i\in k[X]$. Akkor viszont méginkább $a_i\in O_x$ bármely $x\in X$-re, de mivel feltételezés szerint O_x egész-zárt, így $\alpha\in O_x$. Ezért $\alpha\in\bigcap_{x\in X} O_x$. Az I. fejezet 3. § 4. tétel szerint $\bigcap_{x\in X} O_x=k[X]$, és így $\alpha\in k[X]$.

1. TÉTEL. *A sima sokaságok normálisak.*

A lemma miatt elegendő bebizonyítanunk, hogy ha x egyszerű pont, akkor az O_x gyűrű egész-zárt. Ismert, hogy O_x-ben a prímtényezőkre bontás egyértelmű (3. § 7. tétel). Tetszőleges $\alpha\in k(X)$ elem felírható $\alpha=\frac{u}{v}$ alakban, ahol $u, v\in O_x$ és azoknak nincs közös osztójuk. Ha α egész az O_x felett, akkor $\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_n=0$, $a_i\in O_x$. Innen $u^n+a_1u^{n-1}v+\ldots+a_nv^n=0$. Látjuk, hogy v/u^n. Ez ellentmond az u és v relatív prím voltának és a prímtényezőkre bontás egyértelműségének.

Az 1. tétel megmutatja, hogy a normalitás fogalma bizonyos enyhítése a simaság fogalmának. Ez megmutatkozik a normális sokaságok tulajdonságaiban is. Speciálisan meg fogjuk mutatni, hogy a normális sokaságokra átvihetők enyhített formákban a sima sokaságok főbb tulajdonságai (3. § 1. tétel).

2. TÉTEL. *Ha X egy normális sokaság, $Y\subset X$ és* codim $Y=1$, *akkor létezik olyan nyílt $X'\subset X$ halmaz, hogy $X'\cap Y\neq\emptyset$ és az $Y'=X'\cap Y$ sokaság ideálja $k[X']$ gyűrűben főideál.*

Természetesen feltételezhetjük, hogy X affin. Legyen $f\in k[X], f\neq 0, f\in\mathfrak{a}_Y$. Akkor $Y\subset X_f$ és mivel codim $Y=1$, codim $X_1=1$ (a metszetek dimenziójáról szóló tétel miatt), így Y az X_f sokaság komponenseiből áll. Legyen $X_f=Y\cup\overline{Y}$, $Y\not\subset\overline{Y}$. Behelyettesítve $\overline{X}=X-\overline{Y}$-t, azt kapjuk, hogy $Y\cap\overline{X}\neq\emptyset$, $Y\cap\overline{X}=\overline{X}_f$. Ezért mi azonnal fel fogjuk tenni, hogy $Y=X_f$.

Bebizonyítani azt, hogy az $\mathfrak{a}_Y$ ideál egy főideál, annyit jelent, mint meghatározni egy olyan $u\in\mathfrak{a}_Y$ elemet, amellyel az $\mathfrak{a}_Y$ összes eleme osztható, azaz $\mathfrak{a}_Yu^{-1}\subset k[X]$. Ilyen elem létezik (lehetséges, hogy X-nek nyílt halmazzal való felcserélése után), ha létezik olyan $v\in k(X)$ elem, amely eleget tesz az

$$\mathfrak{a}_Y\cdot v\subset k[X], \tag{3}$$

$$\mathfrak{a}_Yv\not\subset\mathfrak{a}_Y \tag{4}$$

tulajdonságoknak. Valóban, akkor létezik olyan $u\in\mathfrak{a}_Y$, hogy $\omega=uv\notin\mathfrak{a}_Y$. Helyettesítve X-et $X-X_\omega$-val, elérjük azt, hogy ω invertálhatóvá válik (a $k[X-X_\omega]$ gyűrűben). Mivel $\omega\notin\mathfrak{a}_Y$, így $Y\not\subset X_\omega$ és $(X-X_\omega)\cap Y\neq\emptyset$. A megkeresett elem rendelkezik mindkét szükséges tulajdonsággal: $u\in\mathfrak{a}_Y$ konstrukció szerint, és $\mathfrak{a}_Yu^{-1}=\mathfrak{a}_Yv\omega^{-1}=$ $=\mathfrak{a}_Yv\subset k[X-X_\omega]$, mivel ω invertálható a $k[X-X_\omega]$-ban.

Végül (4) teljesül, ha $v\in k[X]$. Valóban, $\mathfrak{a}_Y$-nak véges bázisa van $k[X]$ felett, és abból, hogy $\mathfrak{a}_Yv\subset\mathfrak{a}_Y$, következik, hogy v egész $k[X]$ felett, hiszen ez az egész elemek egyik legegyszerűbb tulajdonsága. Ezen a helyen felhasználjuk az X normális voltát és leszögezzük, hogy akkor $v\in k[X]$.

Ilyen módon elegendő megkonstruálni egy olyan $v \in k[X]$ elemet, hogy $v \notin k[X]$, $\mathfrak{a}_Y v \subset k[X]$. Visszaemlékezünk arra, hogy $\mathfrak{a}_Y = X_f$. HILBERTnek a gyökökről szóló tétele szerint ebből az következik, hogy valamely $k>0$-ra $\mathfrak{a}_Y^k \subset (f)$, azaz tetszőleges $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathfrak{a}_Y$ k-db tényező szorzata osztható f-fel. Kiválasztjuk k-t a legkisebb ilyen tulajdonságú számnak. Akkor léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathfrak{a}_Y$, hogy $g = \alpha_1 \cdot \ldots$ $\ldots \cdot \alpha_{k-1} \notin (f)$ és bármely $\alpha \in \mathfrak{a}_Y$-ra $g_\alpha \in (f)$, azaz $g\mathfrak{a}_Y \subset (f)$. Látjuk, hogy fel lehet tételezni $v = gf^{-1}$-et.

3. TÉTEL. *A normális sokaság szinguláris pontjai halmazának kodimenziója nem kisebb mint* 2.

Legyen X normális, $\dim X = n$, S az X szinguláris pontjainak halmaza. Láttuk, hogy S zárt X-ben. Tételezzük fel, hogy S tartalmaz $n-1$-dimenziós irreducibilis Y komponenst. Legyen X' az a nyílt halmaz, amelynek létezését a 2. tétel biztosítja, $Y' = Y \cap X'$. Az Y' sokaságnak van legalább egy egyszerű pontja (mint az Y' pontja, de nem feltétlenül mint az X' pontja). Jelöljük azt y-nal. Legyen $O_{y,X'}$ annak lokális gyűrűje Y'-n és $u_1, \ldots, u_{n-1}$ lokális paraméterek. A 2. tétel szerint $\mathfrak{a}_{Y'} = (u)$ és így $k[Y'] = k[X']/(u)$. Analóg módon $O_{y,Y'} = O_{y,X'}/(u)$. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{M}_{y,X'}$ egybeesik az $O_{y,X'} \to O_{y,Y'}$ természetes homomorfizmus szerinti $\mathfrak{M}_{y,Y'}$ ősképpel. Jelöljük $v_1, \ldots, v_{n-1}$-gyel az $u_1, \ldots, u_{n-1}$ elemek tetszőleges ősképeit. Akkor $\mathfrak{M}_{y,X'} = (v_1, \ldots, v_{n-1}, u)$. Ez megmutatja, hogy $\dim \mathfrak{M}_{y,X'}/\mathfrak{M}_{y,X'}^2 \leqq n$, és ezért az y pont egyszerű X-en az $y \in Y \subset S$ feltételezéssel ellentétben. A tételt bebizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Algebrai görbék esetén a simaság és normalitás fogalmai egybeesnek.*

2. *Affin sokaságok normalizációja*

Tekintsünk egy egyszerű példát a nem normális sokaságra, az $y^2 = x^2 + x^3$ egyenlettel meghatározott X görbét. Az X azon parametrizációja, amely felhasználja a $t = \frac{y}{x}$ paramétert, az $f\colon A^1 \to X$ leképezést határozza meg, vagy ami ugyanaz, a $k[X] \subset k[t]$ beágyazást. Az f leképezés biracionális izomorfizmus, és ezért $k[X] \subset k[t] \subset k(X) \subset k(t)$. Az A^1 egyenes már normális és annak megfelelően a $k[t]$ polinomgyűrű egész-zárt. Sőt, a $k[t]$ gyűrű jellemezhető úgy, mint az összes, $k[X]$-re nézve egész, $u \in k(X)$ elemek összessége. Valóban, $t^2 = 1 + x$ és így t egész $k[X]$ felett, ezért a $k[t]$ gyűrű összes eleme is egész $k[X]$ felett. Ha viszont $u \in k(X)$ egész $k[X]$ felett, akkor az egész $k[t]$ felett is, és mivel $k[t]$ egész-zárt, így $u \in k[t]$. Végül az, hogy a $k[t]$ gyűrű egész $k[X]$ felett, geometriai nyelven azt jelenti, hogy az f leképezés véges. Meg fogjuk mutatni, hogy tetszőleges irreducibilis affin X sokaság esetén létezik X' sokaság és $X' \to X$ leképezés ugyanazokkal a tulajdonságokkal. Kezdjük egy definícióval, amely tetszőleges irreducibilis sokaságra vonatkozik.

DEFINÍCIÓ. *Egy X irreducibilis sokaság normalizációjának* nevezzük azt az X^ν irreducibilis normális sokaságot, amely rendelkezik egy olyan reguláris $\nu\colon X^\nu \to X$ leképezéssel, amely véges és biracionális izomorfizmus.

4. TÉTEL. *Affin irreducibilis sokaságnak van olyan normalizációja, amely szintén affin.*

Bizonyítás. Jelöljük A-val a $k[X]$ egész lezártját $k(X)$-ben, azaz a $k[X]$ gyűrűre nézve egész összes $u \in k(X)$ elemek összességét. Az egész elemek egyszerűbb tulajdonságaiból következik, hogy A egy gyűrű és egész-zárt. Tételezzük fel, hogy találtunk egy olyan X' affin sokaságot, hogy $A = k[X']$. Akkor X' normális és a $k[x] \subset \subset k[x']$ kapcsolat egy $f \colon X' \to X$ reguláris leképezést határoz meg. Nyilvánvaló, hogy X' normalizációja X-nek.

Az I. fejezet 3. § 5. tétel szerint ilyen X' sokaság létezik, ha A-nak nincsenek zérusosztói és véges generátor rendszere van. Az első feltétel teljesül, mivel $A \subset k(X)$. A tétel be lesz bizonyítva, ha megmutatjuk, hogy A végesen generált. Mi többet fogunk bebizonyítani, éspedig azt, hogy A mint modulus a $k[X]$-en véges generátor rendszerrel rendelkezik. Ha $A = k[X]\omega_1 + \ldots + k[X]\omega_m$, akkor az $\omega_1, \ldots, \omega_m$ a $k[X]$ algebra K-feletti generátoraival együtt generátor rendszerét adják A-nak, mint k feletti algebrának. Ennek érdekében fel fogjuk használni az I. fejezet, 5. § 10. tételét. Ezen tétel szerint létezik olyan $B \subset k[X]$ gyűrű, amely felett $k[X]$ egész, és amely izomorf a polinomok gyűrűjével: $B \cong k[T_1, \ldots, T_r]$. Felírjuk az előforduló gyűrűket és testeket:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
B \arrow[drr, dash] & \subset & k(X) & \subset & A & \subset & k(X) \arrow[dll, dash] \\
 & & & k(T_1, \ldots, T_r). & & &
\end{tikzcd}$$

Ebből a diagrammából és az egész elemek egyszerű tulajdonságaiból látható, hogy A egybeesik a B gyűrű egész lezártjával a $k(X)$ testben. Továbbá $K = k(X)$ test véges bővítése a $k(T_1, \ldots, T_r)$ testnek, mivel $T_1, \ldots, T_n$ a $k(X)$ test transzcendencia bázisa. Végül a B gyűrű egész-zárt (az A^r sokaság normális, sőt sima). Ezért a számunkra szükséges végleges eredmény következik az alábbi állításból.

ÁLLÍTÁS. *Legyen $B = k[T_1, \ldots, T_r]$, $L = k(T_1, \ldots, T_r)$, K az L test véges bővítése, A a B egész lezártja K-ban. Akkor A egy véges típusú B modulus.*

Az állítás bizonyítása különböző attól függően, hogy a K/L bővítés szeparábilis vagy nem. Megmutatjuk, hogy lehet visszavezetni mindet a szeparábilis bővítés esetére.

Legyen $K = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Ha α_1 nem szeparábilis L-felett, akkor annak minimális polinomja $\alpha_1^{p^s m} + a_1 \alpha_1^{p^{s(m-1)}} + \ldots + a_m = 0$, alakú, ahol $a_i \in k(T_1, \ldots, T_r)$ és $\alpha_1^{p^s}$ szeparábilis L-felett. Ezért $a_i = b_i^{p^s}$, ahol $b_i \in k\left(T_1^{\frac{1}{p^s}}, \ldots, T_r^{\frac{1}{p^s}}\right)$. Legyen $L' = k\left(T_1^{\frac{1}{p^s}}, \ldots, T_r^{\frac{1}{p^s}}\right)$, $K' = k\left(T_1^{\frac{1}{p^s}}, \ldots, T_r^{\frac{1}{p^s}}\right)$, $B' = k\left[T_1^{\frac{1}{p^s}}, \ldots, T_r^{\frac{1}{p^s}}\right]$, A' és B' egész lezártja K'-ben. Akkor $K' = L'(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ és $\alpha_1^m + b_1 \alpha_1^{m-1} + \ldots + b_m = 0$, úgy, hogy α_1 szeparábilis L'-felett. Másrészt $A \subset A'$ és ha az állítás be van bizonyítva az A'-re, akkor A' egy B'-feletti véges típusú modulus. Viszont maga B' egy B feletti véges típusú modulus; annak bázisa a $T_1^{i_1}, \ldots, T_r^{i_r}, 0 \leqq i_1, \ldots, i_r < P$ változók egytagú kifejezéseiből áll. Ezért akkor A', tehát A is, véges típusú modulus B felett.

Látjuk, hogy az állítás bizonyítását visszavezettük ahhoz az esethez, amikor α_1 szeparábilis. A primitív elemről szóló tétel szerint akkor $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = L(\alpha_2',$

$\alpha_3, \dots, \alpha_r)$. Megismételve ugyanazokat a fejtegetéseket $r-1$-szer, a bizonyítást visszavezetjük a szeparábilis bővítés esetére.

A bizonyítás érdekében hivatkozunk Зарисский и Самюэль könyvének I. kötet, V. fejezet 4. § 7. tételére. Ez a bizonyítás nem függ a könyv többi részétől, kivéve a véges bővítések elméletének elemeit.

5. TÉTEL. *Ha $g: Y \to X$ egy véges leképezés, amely biracionális izomorfizmus, akkor létezik olyan $h: X^v \to Y$ reguláris leképezés, hogy a*

$$\begin{tikzcd} & X^v \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "v"] & \\ Y \arrow[rr, "g"'] & & X \end{tikzcd}$$

diagramma kommutatív. Ha $g: Y \to X$ reguláris leképezés, $g(Y)$ sűrű X-ben és Y normális, akkor létezik olyan $h: Y \to X^v$ reguláris leképezés, hogy a

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^v \arrow[rr, "v"'] & & X \end{tikzcd}$$

diagramma kommutatív.

Az első állítás bizonyítása. Feltétel szerint a $k[X] \subset k[Y] \subset k(X)$, mégpedig $k[Y]$ egész $k[X]$ felett. Az egész lezárt definíciója szerint $k(Y) \subset k[X^v]$, ami meg is adja a szükséges $h: X^v \to Y$ reguláris leképezést.

A második állítás bizonyítása. A $k[X^v]$ gyűrű u eleme egész $k[X]$ felett és benne van $k(X) \subset k(Y)$-ban. Mivel $k[Y] \supset k[X]$, így u annál inkább egész $k[Y]$ felett, mivel pedig $k[Y]$ egész-zárt, így $u \in k[Y]$. Ezért $k[X^v] \subset k[Y]$, ami meg is adja a szükséges tulajdonsággal rendelkező $h: Y \to X^v$ reguláris leképezést.

KÖVETKEZMÉNY. *Affin sokaság normalizációja egyetlen.* Pontosabban, ha $v: X^v \to X$ és $\bar{v}: \bar{X}^v \to X$ két normalizáció, akkor létezik olyan $g: X^v \to \bar{X}^v$ izomorfizmus, hogy a

$$\begin{tikzcd} X^v \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "v"'] & & \bar{X}^v \arrow[dl, "\bar{v}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

diagramma kommutatív.

Ez következik a tétel két állításának bármelyikéből.

Nem fogjuk bizonyítani a normalizáció létezését tetszőleges kváziprojektív sokaságokra. Megjegyezzük, hogy azon sokaságok esetén, amelyeknek létezik normalizációjuk, azok rendelkeznek az 5. tételben megállapított tulajdonságokkal, amint az rögtön adódik az affin lefedések vizsgálatával.

3. *Görbék normalizációja*

6. TÉTEL. *Kváziprojektív irreducibilis X görbe rendelkezik $\overline{X}_v$ normalizációval (amely szintén kváziprojektív).*

Bizonyítás. Legyen $X=\bigcup U_i$ az X lefedése affin nyílt halmazokkal. Jelöljük U_i^v-vel az U_i normalizációját, amely a 4. tétel szerint létezik, és f_i-vel az $f_i:U_i^v\to U_i$ természetes reguláris leképezést, amely biracionális izomorfizmus. Beágyazzuk az U_i^v-t tartalmazó affin teret projektív térbe és jelöljük V_i-vel az U_i^v lezártját ebben a projektív térben. Megjegyezzük, hogy az eddig előfordult sokaságok biracionálisan izomorfak. Legyen $\varphi_{ij}:U_i^v\to V_j$ a megfelelő leképezés. A 3. tétel következménye miatt U_i^v sima görbe, mivel pedig a V_j görbe projektív, így φ_{ij} reguláris a 3. § 3. tétel szerint. Legyen

$$W=\prod_j V_j,\quad \varphi_i=\prod_j \varphi_{ij},\quad \text{azaz}\quad \varphi_i(u)=(\varphi_{i1}(u),\varphi_{i2}(u),\ldots).$$

Jelöljük X'-vel az összes $\varphi_i(U_i^v)$-k unióját W-ben. Azt állítjuk, hogy $X'=X^v$. Ebből a célból be kell bizonyítanunk, hogy: a) X' kváziprojektív, b) X' irreducibilis, c) X' normális, d) létezik olyan véges $v: X'\to X$ leképezés, amely biracionális izomorfizmus.

A bizonyítás érdekében legyen $u_0=\bigcap u_i$ nyílt részhalmaz X-ben. A φ_i leképezés konstrukciójából könnyen adódik, hogy $U_0^v\subset U_i^v$ és az összes φ_i egybeesik az U_0^v-n. Jelöljük azok U_0^v-re való szűkítését φ-vel. Akkor $\varphi(U_0^v)\subset\varphi_i(U_i^v)\subset\overline{\varphi(U_0^v)}$, ahol a $\overline{\varphi(U_0^v)}$ a $\varphi(U_0^v)$ lezártja W-ben. Nyilvánvaló, hogy $\varphi(U_0^v)$ irreducibilis kváziprojektív görbe, a $\overline{\varphi(U_0^v)}-\varphi(U_0^v)$ pedig véges sok pontból áll. Konstrukció szerint $\varphi(U_0^v)\subset X'\subset\subset\overline{\varphi(U_0^v)}$, ezért a $\overline{\varphi(U_0^v)}-X'$ véges számú pontból áll. Ez bebizonyítja az a) és b) állításokat.

Legyen $x\in X'$. Akkor $x\in\varphi(U_i^v)$ valamely i-re és $\varphi(U_i^v)$ az x pont környezete. Bebizonyítjuk, hogy φ_i izomorfizmus, mivel pedig U_i^v normális, így innen az X' normalitása, tehát a c) fog következni. Ennek céljából megjegyezzük, hogy konstrukció szerint φ_i az U_i^v izomorf beágyazása saját V_i lezártjába. Ezért az $(u_1,u_2,\ldots)\to\to\varphi_i^{-1}(u_i)$ leképezés inverze φ_i-nek, ami utóbbi izomorf jellegét bizonyítja.

Végül a d) bizonyítása érdekében megkonstruáljuk a $g:\varphi_i(U_i^v)\to X$, $g_i=f_i\varphi_i$ leképezést. Az előbbiek miatt az összes g_i véges leképezés. Megmutatjuk, hogy az összes g_i az X'-n ugyanazt az $f: X'\to X$ véges leképezést határozza meg. Ebből a célból megjegyezzük, hogy az összes g_i egybeesik az U_0^v-n ugyanis ha $g: U_0^v\to U_0$ normalizációs leképezés, akkor $g_i=g$ az U_0^v-n. Ezért a g_i és g_j leképezések egybeesnek a $\varphi(U_i^v)\cap\varphi_j(U_j^v)$-ben levő $\varphi(U_0^v)$ nyílt részhalmazon. Viszont két olyan reguláris leképezés, amely egy nem üres nyílt részhalmazon egybeesik, egybeesik mindenütt. Ez következik a függvények megfelelő tulajdonságából. Ilyen módon g_i és g_j egybeesik azokban a pontokban, ahol mindketten definiálva vannak, ez pedig azt jelenti, hogy az összes g_i egy $v: X'\to X$ reguláris leképezést határoz meg. Nyilvánvaló, hogy v egy biracionális izomorfizmus. A tételt bebizonyítottuk.

7. TÉTEL. *Projektív görbe normalizációja projektív.*

Legyen X egy projektív görbe, X^ν annak normalizációja és $\nu\colon X^\nu \to X$ a normalizációs leképezés. Tételezzük fel, hogy az X^ν görbe nem projektív és jelöljük $\bar{X}$-sal annak lezártját a projektív térben. Legyen $x \in \bar{X} - X^\nu$, U az x pont valamely affin környezete $\bar{X}$-n, U^ν az U normalizációja és $\nu'\colon U^\nu \to U$ a normalizációs leképezés. A következő

$$\begin{tikzcd}
 & & U^\nu \arrow[dll, "h"'] \arrow[d, "\nu'"] \\
X^\nu \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\nu"'] & \bar{X} & U \arrow[l, "\psi"] \\
X & &
\end{tikzcd}$$

diagrammát kapjuk, ahol φ és ψ izomorf beágyazások. A $\nu\varphi^{-1}\psi\nu'$ biracionális izomorfizmus, és a 3. § 3. tétel 1. következménye, valamint az U^ν görbe sima volta miatt ez a leképezés reguláris. Az 5. tétel alapján létezik a diagrammán feltüntetett h reguláris leképezés. Erre igaz $\varphi h = \psi\nu'$. Viszont annak létezése a $\varphi h(U^\nu) \subset X^\nu$, de $\psi^{\nu'}(U^\nu) \ni x$ ellentmondáshoz vezet, mivel a normalizációs leképezés véges, és így epimorf az I. fejezet 5. § 4. tétel értelmében. Ez be is bizonyítja a tételt.

KÖVETKEZMÉNY. *Az irreducibilis algebrai görbe biracionálisan izomorf egy sima projektív görbével.*

Ez összekapcsolása a 3. tétel és a 7. tétel következményeinek.

Az algebrai görbe normalizációjának a létezése lehetővé teszi a szinguláris pontok bizonyos hasznos geometriai jellemzéseit.

Legyen X egy görbe, x annak egy — esetleg szinguláris — pontja, $\nu\colon X^\nu \to X$ az X normalizációja és $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ az x pont ősképei X^ν-n. Az $\bar{x}_i$ pontokat az X görbe x ponton átmenő ágainak nevezzük. Ez az elnevezés azzal magyarázható, hogy ha k a komplex (vagy valós) számok teste, u_i az $\bar{x}_i$ pontok elég kis komplex (vagy valós) környezetei, akkor az x pont valamely környezete a $\nu(u_i)$ „ágainak” az uniója. Jelöljük Θ_i-vel az X^ν-höz az $\bar{x}_i$ pontban húzott érintő egyenest. A $d_{\bar{x}_i}\nu$ leképezés Θ_i-t átviszi az X-hez az x pontban húzott érintő tér lineáris alterébe. Nyilvánvaló, hogy $(d_{\bar{x}_i}\nu)(\Theta_i)$ vagy az x pont, vagy egyenes. A második esetben az $\bar{x}_i$ ágat lineárisnak nevezzük, a $(d_{\bar{x}_i}\nu)(\Theta_i)$-t pedig az ezen ághoz húzott érintőnek.

Az $\bar{x}_i$ ág lineáris akkor és csakis akkor, ha a ν^* leképezés $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$-et átviszi az egész $\mathfrak{M}_{\bar{x}_i}/\mathfrak{M}_{\bar{x}_i}^2$ térbe. Essen egybe x az origóval a $t_1, \ldots, t_n$ koordinátájú A^n térben. Akkor $\nu^*(t_1) + \mathfrak{M}_{\bar{x}_i}^2, \ldots, \nu^*(t_n) + \mathfrak{M}_{\bar{x}_i}^2$ generálják $f(\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2)$-et. Mivel az $\bar{x}_i$ pont egyszerű, így $\dim \mathfrak{M}_{\bar{x}_i}/\mathfrak{M}_{\bar{x}_i}^2 = 1$ és ezért az $\bar{x}_i$ ág lineáris akkor és csakis akkor, ha $\nu^*(t_s) \notin \mathfrak{M}_{\bar{x}_i}^2$ legalább egy $s = 1, \ldots, n$-re. Más szóval $\nu^*(t_s)$ lokális paraméter kell legyen az $\mathfrak{M}_{\bar{x}_i}$ pontban. Mivel $\mathfrak{M}_x = (t_1, \ldots, t_n)$, akkor invariáns formában a linearitásnak ez a feltétele $\nu^*(\mathfrak{M}_x) \not\subset \mathfrak{M}_{\bar{x}_i}^2$ alakot ölt. Az $\bar{x}_i$ ágnak a lineáristól való eltérése mértékéül el lehet fogadni azt a k számot, amelyre teljesül $\nu^*(\mathfrak{M}_x) \subset \mathfrak{M}_{\bar{x}_i}^k$, $\nu^*(\mathfrak{M}_x) \not\subset$ $\not\subset \mathfrak{M}_{\bar{x}}^{k+1}$. Ezt a számot az $\bar{x}_i$ ág multiplicitásának nevezzük.

Az $y^2=x^2+x^3$ görbe $(0, 0)$ pontja példát ad az $y=x$ és $y=-x$ érintővel rendelkező két lineáris ágra, az $y^2=x^3$ parabola $(0, 0)$ pontja pedig kétszeres nem lineáris ágra.

Ha az x pont centruma az egyetlen ágnak, amely ráadásul lineáris, akkor az x egyszerű pont. Ez következménye annak a lemmának, amelyet a következő pontban fogunk bebizonyítani. Ilyen módon a pont „szingularitásának" legegyszerűbb jellemzésére szolgál a neki megfelelő ágak száma, és ezen ágak multiplicitása.

Egy sík algebrai görbe szinguláris pontját legegyszerűbbnek (vagy elválasztott érintőkkel rendelkező pontnak) nevezzük, ha annak csak lineáris ágak felelnek meg, és a különböző ágakhoz húzott érintők különbözők.

4. *Sima sokaságok projektív beágyazása*

Az előbbi pont utolsó részében ismertetett sima projektív algebrai görbe modellje valamely P^n projektív térben helyezkedik el. Felvetődik a természetes kérdés, mennyire kicsinek kell választani az n-t. Válaszolunk erre a kérdésre, bebizonyítva egy általános eredményt tetszőleges dimenziószámú sokaságokra.

8. TÉTEL. *Az n-dimenziós sima projektív sokaság izomorf a P^{2n+1} tér egy részsokaságával.*

Legyen X sima projektív sokaság, $X\subset P^n$. A 8. tétel be lesz bizonyítva, ha $N>2n+1$ esetén ki tudunk választani olyan $\xi\in P^N-X$ pontot, hogy a ξ pontból való projektálás izomorf beágyazása lesz X-nek P^{N-1}-be. Ezért annak tisztázásával kezdjük, mikor izomorf beágyazás egy projektálás.

LEMMA. *Ha a ξ ponton átmenő tetszőleges egyenes metszi X-et nem több mint egy pontban, és az X-hez annak bármely pontjában húzott érintő altér nem tartalmazza ξ-t, akkor a ξ középpontú projektálás izomorfizmus.*

Legyen π az $X\to P^{N-1}$ projektálás. Legyen $\pi(X)=Y$. A lemma első feltételéből következik, hogy π kölcsönösen egyértelmű. Jelölje $\varphi=\pi^{-1}$. A lemma be lesz bizonyítva, ha megmutatjuk, hogy φ reguláris. Ez az állítás lokális jellegű. Legyen $y\in Y$ és $\pi(x)=y$, $x\in X$. Az I. fejezet 5. § 6. tétel szerint π véges leképezés. Jelöljük U és V-vel az x és y pontok olyan affin környezetét, hogy $\pi(U)=V$ és $k[U]$ egész $k[V]$ felett. A π szűkítését U-ra szintén π-vel fogjuk jelölni.

Elegendő bebizonyítanunk, hogy az U és V megfelelő kiválasztása mellett π izomorfizmus. Akkor $\varphi=\pi^{-1}$ reguláris az y pontban.

A lemma második állítása azt jelenti, hogy a $d_x\pi\colon \Theta_x\to\Theta_y$ leképezésnek nincs magja. Visszaemlékszünk arra, hogy a Θ_x tér duálisa az $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$-nek, ahol $\mathfrak{M}_x$ az O_x lokális gyűrű maximális ideálja. Innen következik, hogy $\pi^*\colon \mathfrak{M}_y/\mathfrak{M}_y^2\to\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ leképezés epimorfizmus. Más szóval, ha $\mathfrak{M}_y=(u_1, \dots, u_k)$, akkor $\pi^*(u_i)+\mathfrak{M}_x^2$ osztályok generálják $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$-et. Alkalmazzuk NAKAYAMA lemmáját (2. § 1. pont) az $\mathfrak{M}_x$-re mint O_x feletti modulusra. Ebből következik, hogy akkor $\mathfrak{M}_x=(\pi^*(u_1), \dots, \pi^*(u_k))$, vagy pedig

$$\mathfrak{M}_x = \pi^*(\mathfrak{M}_y)O_x. \tag{1}$$

Most alkalmazzuk *Nakayama* lemmáját O_x-re mint $\pi(O_y)$ feletti modulusra. A véges típusság abból következik, hogy $k[U]$-nak véges típusa van $\pi k[V]$ felett. Az

(1) egyenlőség megmutatja, hogy $O_x/\pi^*(\mathfrak{M}_y)O_x=O_x/\mathfrak{M}_x=k$, és így az egyetlen 1 elemmel van generálva. A *Nakayama*-lemmából most az következik, hogy $O_x=\pi^*(O_y)$. Legyen $u_1, \ldots, u_l$ a $k[U]$-nak $k[V]$ feletti bázisa. Feltétel szerint $u_i \in O_x = = O_y$. Jelöljük $V'=V-V_f$-vel az y pont olyan fő affin környezetét, amelyre az összes $(\pi^*)^{-1}(u_i)$ reguláris $U'=U-U_{\pi^*(f)}$-ben. Akkor $k[U']=\sum \pi^* k[V']v_i$. Feltétel szerint $u_i \in \pi^*[V']$, ahonnan következik, hogy $k[U']=k[V']$, ez pedig azt jelenti, hogy π izomorfizmus az U és V között. A lemmát bebizonyítottuk.

Most már áttérhetünk a 8. tétel bizonyítására. Elegendő bebizonyítanunk, hogy ha X sima sokaság, $\dim X=n$, $X\subset P^N$, $N>2n+1$, akkor található olyan ξ pont, amely eleget tesz a lemma feltételeinek.

Jelöljük U_1 és U_2-vel az olyan $\xi \in P^N$ pontok halmazát, amelyekre nézve ξ nem tesz eleget a lemma első, illetve megfelelően a második feltételének.

Tekintsük a $P^N\times X\times X$-beli olyan (a, b, c), $a\in P^N$, $b, c\in X$ elemek Γ halmazát, ahol a, b és c egy egyenesre illeszkednek. Nyilvánvalóan Γ zárt halmaz $P^N\times X\times X$-ben. $P^N\times X\times X$-nek P^N-re és $X\times Y$-ra való projekciói $\varphi\colon \Gamma\to P^N$ és $\psi\colon \Gamma\to X\times Y$ reguláris leképezéseket határoznak meg. Nyilvánvaló, hogy ha $y\in X\times X$, $y=(b, c)$, $b, c\in X$ és azonfelül $b\neq c$, akkor $\psi^{-1}(y)$ olyan (a, b, c) pontokból áll, ahol a tetszőleges pont a, b és c pontokon átmenő egyenesen. Ezért $\dim \psi^{-1}(y)=1$ és az I. fejezet 6. § 7. tételből következik, hogy $\dim \Gamma=2n+1$. Definíció szerint $U_1=\varphi(\Gamma)$ és ugyanabból a tételből az következik, hogy $\dim U_1 \leqq \dim \Gamma = 2n+1$.

Analóg módon az U_2 halmaz vizsgálata céljából tekintjük a $P^N\times X$-ben az olyan (a, b) pontokból álló Γ halmazt, ahol $a\in \Theta_b$. Teljesen analóg módon konstruáljuk a $\psi\colon \Gamma\to X$ és $\varphi\colon \Gamma\to P^N$ leképezéseket. Az $x\in X$-re $\dim \psi^{-1}(x)=n$ és ezért $\dim \Gamma = =2n$, viszont mivel $U_2=\varphi(\Gamma)$, így $\dim U_2\leqq 2n$.

Látjuk, hogy $\dim U_1\leqq 2n+1$, $\dim U_2 \leqq 2n$, és ezért ha $N>2n+1$, akkor $U_1\cup U_2\neq \neq P^N$, amit bizonyítanunk kellett.

KÖVETKEZMÉNY. *Bármely kváziprojektív sima görbe izomorf a háromdimenziós projektív térben elhelyezkedő valamely görbével.*

Később meg fogjuk látni, hogy nem tetszőleges görbe izomorf a projektív síkban levő valamely görbével. Ezért nem bármilyen algebrai görbének van sima sík projektív modellje.

Feladatok

1. Legyen X affin sokaság, K a $k(X)$ test véges bővítése. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan Y affin sokaság és $f\colon Y\to X$ leképezés, amelyek eleget tesznek a következő feltételeknek: 1) f véges, 2) Y normális, 3) $k(Y)=K$ és $f^*\colon k(X)\to k(Y)$ meghatározza az adott $k(X)\to K$ beágyazást. Bizonyítsuk be, hogy Y-t egyértelműen meghatározzák ezek a feltételek. Y-t az X normalizációjának nevezzük a k testben.

2. Legyen X a $z^2=xy$ kúp. Bizonyítsuk be, hogy az X normalizációja a $k(X)(\sqrt{x})$ testben egybeesik az affin síkkal, a normalizációs leképezés pedig $x=u^2$, $y=v^2$, $z=uv$ alakú.

3. Az 1. feladattal analóg állításokat bizonyítsuk be tetszőleges X kváziprojektív görbe esetén. Bizonyítsuk be, hogy ha X projektív, akkor Y is az.

4. Milyen kapcsolatban van $X\times Y$ normalizációja az X és Y normalizációjával?

5. Bizonyítsuk be, hogy az x pont normális, ha $k[[x]]$ (l. a 3. § 14. feladatot)

gyűrű zérusosztó mentes és normális. (Útmutatás: Használjuk fel a 3. § 15. feladat eredményeit. Vigyük át a 3. § 7. feladatot a szinguláris pontra és alkalmazzuk azt.)

6. Bizonyítsuk be, hogy az $x_1^2+\ldots+x_n^2=0$ egyenlettel megadott $X\subset A^n$ kúp normális.

7. Bizonyítsuk be, hogy a 4. § 13. példában szereplő X hiperfelületen az origó normális pont.

8. Normális-e a *Steiner*-féle felület? És a *Kummer*-féle? (1. § 17. és 18. feladatai.)

9. Bizonyítsuk be, hogy bármely algebrai görbének van olyan sík projektív modellje, amelynek szinguláris pontjai csak lineáris ágakkal rendelkeznek.

Fordította: Buzási Károly

TARTALOMJEGYZÉK

| Hajós György |

Ecsedi István: Az $f(ax+by)g(cx+dy)=h(x)k(y)$ függvényegyenlet nem folytonos megoldásainak egy osztályáról 3

Szász Pál: A hiperbolikus trigonometria egyszerűbb előállítása a klasszikus úton........ 11

Wolfgang Vogel és Márki László: A lokális gyűrűk elméletéhez, I. D. A. Buchsbaum egy problémájáról 55

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

I. R. Safarjevics: Az algebrai geometria alapjai (I) 79
(magyarra fordította: *Buzási Károly*)

INDEX

Gy. Hajós

I. Ecsedi: On a Class of the Non-Continuous Solution of the Functional Equation $f(ax+by)g(cx+dy)=h(x)k(y)$ 3

P. Szász: Über die Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie durch den klassischen Weg .. 11

W. Vogel—L. Márki: To the Theory of Local Rings, I. On a problem of D. A. Buchsbaum ... 55

FROM THE FOREIGN LITERATURE

И. Р. Шафаревич: Основы алгебраической геометрии (I). (Translated by *K. Buzási.*) 79

Ára: 35,— Ft

Megjelent 1974. XII. 31.

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXII. KÖTET
2—4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1974

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XXII. kötet 2—4. szám

Szerkesztőség: 1051 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: 1054 Budapest, Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadlémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
II. Osztályának Közleményei
1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1054 Budapest, Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jezlzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, 1011 Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám 218-10990.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Mathematicarum Hungarica.

L. SZ. PONTRJAGIN, A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TISZTELETBELI TAGJA

Írta: SONNEVEND GYÖRGY

1. A Magyar Tudományos Akadémia ez évben tiszteletbeli tagjául választotta Lev Szemjonovics Pontrjagint, akit már most világszerte a matematikai tudományok XX. századbeli legkiválóbb mesterei, úttörői közé sorolnak.

Ez alkalommal illő és tanulságos közelebbről megismerkedni több szempontból egyedülálló, példamutató matematikai munkásságával, tudós egyéniségével. A jelen ismertetés keretében igyekszünk időrendi sorrendben követni L. Sz. Pontrjagin munkásságát, az általa elért főbb eredmények rövid, nem formális ismertetése mellett részletesebben kitérve a tudós gondolkodás és alkotásmódjának, tudományfilozófiai elveinek néhány jellegzetes vonására. Reméljük, hogy példája a magyar tudósok széles rétegei számára lesz tanulságos, ösztönző.

A magyar matematikusok szellemi kapcsolata Pontrjagin munkáival a 30-as évek elejére nyúlik vissza, Kerékjártó Béla topológiai és algebrai vizsgálatai tanúskodnak arról, hogy Pontrjagin munkáit alaposan tanulmányozta. Az [54], [88], [96] könyvei magyar nyelven való kiadása révén sokak ismerkedhettek meg a modern matematika ma már klasszikusnak számító fontos fejezeteivel a kiváló tudós mintaszerű előadásában.

Természetesen a jelen ismertetés keretein belül nincs mód teljességében bemutatni L. Sz. Pontrjagin eddigi munkásságát. Ki merné állítani, hogy le tudja mérni az általa bevezetett új fogalomalkotások, módszerek matematikára és annak alkalmazásaira gyakorolt és ezután elvárható hatását; hogy a tudós alkotóerejének, egyéniségének mély forrásaira rá tudna látni.

A mellékelt irodalomjegyzék, mely tartalmazza L. Sz. Pontrjagin összes megjelent munkáit 1972-ig, lehetőséget nyújt matematikai tevékenységével való megismerkedésre. Filozófiai elveinek bemutatásakor igyekszünk, ahol csak lehet, pontosan idézni őt, ehhez anyagot a [92] interjú nyújtott, továbbá e sorok írójának Lev Szemjonovics Pontrjagin vezetése alatti, a Moszkvai Sztyeklov Matematikai Intézetben 1969—72-ig eltöltött, aspiranturán szerzett tapasztalatai.

2. L. Sz. Pontrjagin 1908-ban született az Orlov tartománybeli Trubcsevszka kisvárosban. Élete távolról sem mondható az elméleti tudós semmitől sem zavart életének, sokkal inkább illik arra a drámai jelző, kitölti a megfeszített, nehéz külső körülmények között végzett, felelősségérzettől áthatott munka. Szülei anyagi helyzete nem tette lehetővé, hogy gimnáziumba járhasson, jóval alacsonyabb színvonalú (a régi magyar polgári iskolának megfelelő) iskolában tanulhatott csak. 14 éves korában baleset következtében mindkét szemére megvakul. Édesanyja, aki Moszkvába költözésük után mint szabónő keresni kenyerét (apja 1927-ben meghalt), ettől kezdve határtalan gondoskodással, figyelemmel és nagy szigorúsággal veszi körül, mindenben segítségére van. Tatjana Andrejevnának többek között meg kellett tanulnia az idegen nyelvű matematikai szövegek és szimbólumok olvasását, írását.

De ne siessünk. Idézzünk az [98] interjúból. „Lehet-e beszélni romantikus elvágyódásról, az életút megválasztásának szabadságáról?" L. Sz. PONTRJAGIN válasza határozott nem. „Egészen élesen emlékszem azon évek kétségeire. Ez a válaszút ideje volt. Az élet ismert vak zenészeket, irodalmárokat, szónokokat... Alkalmas vagyok-e én a matematikára?" — „Nemde tévedett EINSTEIN, mikor egy tehetséges fiú szüleinek azt ajánlotta, hogy fiukat adják lakatosnak, ha fizikus rejtőzik benne, akkor az úgyis megmutatkozik majd."

„Nem értek egyet EINSTEINnel" — mondta határozottan PONTRJAGIN. „Lehet, hogy igaza volt a leírt esetben, mégis ezt az elvet az ifjúság széles rétegeire nem szabad alkalmazni. Az embereket olyan feltételek közé kell állítani, amelyekben felismerhetik és kifejleszthetik képességeiket. Ez nagyon lényeges. Íme nálunk a tehetséges gyerekek számára matematikai iskolákat szerveztek. Ez gyönyörű kezdet. Igaz, bennem felmerül a kétség, hogy a matematikusok természetes kiválasztása helyett nem lép-e be ezekbe az iskolákba olyan gyakorlat, hogy a gyerekek oda a szülők elhatározásából kerülnek, mely azokból a meggondolásokból indul ki, hogy nálunk a tudománnyal foglalkozni megbecsült, a társadalomban szélesen elismert, anyagilag jól megjutalmazott, és a forradalom előtti múlthoz képest könnyen elérhető dolog. Ideje, hogy a matematikai neveléssel olyan teljes komolysággal foglalkozzunk, amilyent az megérdemel."

3. A Moszkvai Állami Egyetemre 1925-ben került, itt P. Sz. ALEKSZANDROV tanítványa lett. Ő fedte fel számára a topológia titkait. És a matematika ekkor meghódította szilárdságával, logikájával, következetességével.

Az egyetemen kitünt matematikai képességeivel, tudományos érdeklődésének széleskörűségével. Meglepő volt, hogy bonyolult számításokat (pl. tenzoranalízis) fejben tudott tartani minden jegyzetelés nélkül. Ez természetesen csak azért volt lehetséges, mert erősen filozófikus, mély, nem technikai, nem külső és nem felületes megismerésre törekedett. HINCSIN sok apró trükköt használó analitikus számelméleti előadását hidegnek találta, míg P. Sz. ALEKSZANDROV jóval koncepciózusabb topológiai előadásain szabadon, otthonosan érezte magát. Széleskörűen képezte magát. Visszaemlékezése szerint fiatal korában nagyon sokat tanult H. POINCARÉ tudományfilozófiai munkáiból (ha nem is értett egyet teljesen e könyvek sokszor ellentmondásos filozófiájával). Ebben az időben a moszkvai egyetemen sokféle speciális előadás volt, sok, később világhírt szerzett fiatal matematikus tanult. A velük való kapcsolat természetesen ösztönzően hatott.

Itt említhetjük meg, hogy munkássága során ha tanúságot is tett önálló gondolkodásról és kérdésfeltevéseit, kutatásait később egyre inkább önálló, szuverén módon alakította ki; abban, hogy már fiatal korában milyen nagy eredményeket ért el, a személyes tehetségén kívül ugyanannyira jelentős szerepe volt annak a matematikai környezetnek, melynek jelenlétét, ösztönzését élvezhette. (Például az 1934-ben Moszkvában rendezett nemzetközi algebrai topológiai konferencián találkozhatott kora igen sok kiváló külföldi tudósával, akik közül többel személyes kapcsolatot is tartott fenn.)

L. Sz. PONTRJAGIN hangsúlyozta, hogy a tudomány határait, melyek mögött a felfedezések során egyre újabbak, még jobban elcsodálkoztatók nyílnak, nem egyedüliek nyitják meg, hanem tudósok kollektívái, akik teremtő erejüket a társadalmi közegből merítik.

4. Térjünk vissza az [98] interjúban közölt emlékezéseihez.

„Természetesen mindez nem volt egyszerű. Nekem úgy tűnik, hogy egyetlen ember sem születik avval a képességgel, hogy számolásokat végezzen az agyában. Ezt a képességet a környező világgal való összeütközései során szerzi. Más dolog az, hogy a gyakorlat megszerzésének képessége individuálisan magasabb lehet az agy születési sajátosságainak megfelelően.” Továbbfejlesztve a gondolatot még határozottabban így folytatja: „Nos, hagyjuk el mára a romantikát és beszéljünk arról a tudatról, mely megmondja az embernek, mit kell tennie neki a nemzet érdekében. Ez mindennél fontosabb. Íme ez az a kialakult világnézet, amely gyakran hiányzik fiatal embereinknél. Nekem úgy tűnik, hogy jelentős részüknél valahogy későn következik be a polgári érettség. A fiatalok felkészítése nálunk elmarad az idő követelményeitől. A program telezsúfolt szükségtelen anyaggal, mely gátolja, hogy a tudomány titkait jobban megismerjék, hogy leküzdjék a bonyolult gondolkodási folyamatok technikai akadályait. Ma mint soha eddig, meg kell gyorsítanunk a gondolkodásbeli fejlődést. Csak így tudjuk megemelni a fiatal emberek intellektuális fejlettségét.”

„Önnel dolgoznak fiatal tudósok, sok közülük ma már kandidátus, a tudományok doktora. Mi határozza meg sikerüket a tudományban?”

„Nincs a világon nagyobb erő, mint a munkaszeretet és önfeláldozás. A tudósoknak néha több tonna ércet kell feldolgozniuk, hogy egy kis csepp aranyat kapjanak.”

„És melyek az ilyen munka belső rugói? Vannak-e ilyenek?”

„Igen, természetesen. E rugók földiek. Ne gondolja, hogy én ezen az anyagi érdekeltséget értem, habár az is fontos. A tudomány emberei dolgoznak, kutatnak azért, mert bennük lángoló gondolat él: dolgozni a földi jobb életért.”

5. Lehetetlen lenne e néhány oldalon nem szakemberek számára ismertetni L. Sz. Pontrjagin által munkássága első szakaszában az algebrai topológiában, ill. a topologikus algebrában elért alapvető jelentőségű eredményeket. Ezt itt egész röviden tesszük annál is inkább, mivel a tudós érdeklődési köre később egyre közelebb került a kevésbé elméleti, alkalmazással közvetlen kapcsolatban levő kérdésekhez.

„Én a matematika egysége mellett vagyok. De hozzám közelebb esnek azon ágak, melyeket a fizikával, kémiával és technikával együtt kell kidolgozni, és melyeknek lényeges befolyásuk lehet e területek fejlődésére. Bennük kimeríthetetlen eszközöket látok a megismerés és a természet meghódítása céljára.”

(Itt megjegyezhetjük, hogy az algebrai topológia és a topologikus algebra (*Lie*-csoportok) az elméleti fizika, sőt a gyakorlat ma már nélkülözhetetlen eszközeivé váltak.)

Az algebrai topológia a klasszikus analízis szükségleteiből keletkezett tudományág, melynek tárgya felületek és azok egymásra való leképezéseinek vizsgálata, osztályozása, melynél két objektumot ekvivalensnek (egy osztályba tartozónak) tekintünk, ha létezik közöttük bizonyos adott tulajdonsággal rendelkező megfeleltetés. Pontosabban a felület fogalmát definiálhatjuk, mint olyan topologikus teret, melynek pontjaihoz lokálisan (egy egy pont környezetében) n valós számot, „belső koordinátát”, rendelhetünk úgy, hogy az így definiált lokális koordinátarendszerek egymásból kölcsönösen egyértelmű és folytonos „koordináta-transzformációval" kaphatók. Ha e transzformációkat differenciálható, ill. analitikus függvények segítségével végezhetjük, melyek függvény-determinánsa nem 0, akkor differenciálható, ill. analitikus sokaságról beszélünk. Két sokaságot topologikusan ekvivalensnek (ill. diffeomorfnak) nevezünk, ha létezik közöttük kölcsönös egyértelmű és mindkét irányban folytonos (ill. differenciálható) leképzés. Felületekre vonatkozó egyik alapvető operáció a határképzés, amely segítségével n dimenziós sokasághoz $n-1$ dimenziós sokaságot rendelünk; az analízisben ez pl. a több dimenziós *Stokes*-féle integrál formulák megfogalmazásánál lényeges. E művelet és a felületek határuk mentén való egymáshoz ragasztásának művelete révén a sokaságokhoz bizonyos véges algebrai struktúrákat, az ún. *Betti*-féle vagy homológia csoportokat rendelhetünk, amelyek a felület topológiai invariánsai. Az algebrai topológiában alkalmazott egyik tipikus módszer abban áll, hogy a felületek, ill. ezek egymásba való leképezésére vonatkozó kérdést sikerül a hozzájuk rendelhető algebrai invariánsokra vonatkozó ekvivalens, de könnyebben kezelhető kérdésben megfogalmazni, és így megválaszolni.

Kezdetben a *Betti*-féle csoportok definiálásához a felület ún. topologikus szimplexekre, azaz többdimenziós lineáris szimplexek (n dimenziós térben fekvő $n+1$ általános helyzetű pont konvex burkai) folytonos képeire, bontották. A fent említett algebrai problémák így kombinatorikus problémákként jelentkeztek, e miatt kapta ez az elmélet a kombinatorikus topológia elnevezést. L. Sz. PONTRJAGIN magyarul is megjelent könyve mintaszerű bevezetést nyújt e módszerhez. A többi hasonló témájú könyv közül kiemelkedik a használt fogalmak, gondolatok rendkívüli ökonómiájával, a kombinatorikai (sokszor nem a lényeget illető) nehézségek minimumra csökkentésével.

E könyvben megtalálható következő híres tételének NÖBELINGgel egyidőben, tőle függetlenül adott bizonyítása: minden n dimenziós kompaktum kölcsönösen egyértelműen és folytonosan beágyazható egy legfeljebb $2n+1$ dimenziós euklideszi térbe. Később analóg tételt bizonyít be differenciálható sokaságok differenciálható beágyazására. A dimenzió fogalmát sokoldalúan vizsgálja további munkáiban.

Első publikált eredménye, mely a POINCARÉ és ALEXANDER által először kimondott dualitástételek messzemenő általánosítását adja, megállapít egy, az n-dimenziós térben fekvő korlátos zárt halmaz (S) és az őt kiegészítő nyílt halmaz ($R^n \setminus S$) homológia csoportjai közötti összefüggést. Ebben a BROUWER által bevezetett, egy k és egy $n-k-1$ dimenziós egymást nem metsző felület összeláncoltsági együtthatóját használja, így azt a negatív fogalmat, hogy egy felület határa nem 0, avval a pozitívval helyettesítheti, hogy van egy másik vele összeláncolt felület. Ezen eredménye kitűnik egy új algebrai jellegű fogalom, a duális vagy karaktercsoport (egy adott csoportnak az egységkör csoportba való folytonos homomorfizmusainak csoportja) felhasználásával. Ezt a fogalmat később a kommutatív folytonos csoportok elméletének kidolgozásánál alapvető jelentőséggel szerepelteti, ez utóbbi elmélete a XX. századi matematika fejlődésének egyik mérföldköve lett.

6. Ezzel már át is tértünk a topologikus algebra témakörébe vágó, alapvető munkásságára. E témakör jellegzetessége az adott halmazon értelmezett kétféle struktúrának topológiai (differenciálhatósági) és az algebrai tulajdonságoknak összekapcsolása abban a követelményben, hogy az algebrai műveletek legyenek folytonosak (differenciálhatók) az adott topológiában. Az így keletkezett objektumok egészen általános axiómák kielégítése következtében meglepően konkrétek. Ezen elv realizálásaként PONTRJAGIN megmutatta, hogy a lokálisan kompakt, összefüggő testek a következők: a valós számok, a komplex számok, a kvaterniók teste. Ő tisztázta a kompakt és lokálisan kompakt topologikus csoportok szerkezetét is, mely eredménye végleges a kommutatív esetben. HILBERT 5. problémájára válaszolva megadta azokat a feltételeket, melyek teljesülése esetén a csoporton nemcsak folytonos, hanem differenciálható és ekkor már szükségképpen(!) analitikus struktúra vezethető be, vagyis megadta a *Lie*-csoportok absztrakt: algebrai—topológiai, differenciálhatóságot nem feltételező jellemzését.

Topologikus algebrai vizsgálatainak eredményeit összegzi a „*Folytonos csoportok*" c. monográfiája. A második, orosz nyelvű kiadásban az első kiadás (1936) olyan tökéletesítését találjuk, mely teljes mértékben megérdemli a klasszikus jelzőt, mint olyan könyv, mely megőrzi jelentőségét évtizedeken keresztül és amely alapján tudósok generációi alakítják ki matematikai világnézetüket. Valóban nehéz találni szebben megírt matematikai könyvet.

7. Emeljük ki itt e könyv példája alapján is a szerző jellegzetes előadási, és általánosabb kutatási elveit.

Legelőször maga a kérdésfeltevés, kutatási irány. L. SZ. PONTRJAGIN szerint egy jó matematikai kérdésfeltevés már a megoldásával kapott eredmény „90%-ával" egyenértékű, vagyis az igazán nehéz dolog, mely sok előzetes munkát követel, a megválaszolható, lényegre tapintó kérdésben a valóság helyes idealizálása.

Természetesen miként a művészetekben, itt sem lehet általános szabályokat adni. Követelmény, hogy a kérdés elég egyszerűen megfogalmazható legyen, se túl szűk, se túl általános. Azt lehet mondani, hogy általánosan megfogalmazott kérdésekre válaszolni könnyebb. Munkásságát vizsgálva látszik, hogy kiindulásként mindig volt előtte egy-egy egészen konkrét kérdés, példa, feladat, melynek sajátosságai diktálták az alkalmazandó elmélet, vagy módszer jóval absztraktabb jellegzetességeit. Ez a kutatási módszer az évek folyamán egyre inkább sajátjává vált. Ennek köszönhető, hogy munkái az általuk bevezetett kérdésfeltevések, módszerek, fogalmak eredetisége, újdonsága (melyet a konkrét, régi módszerekkel meg nem oldható feladat követelt meg) miatt később egész kutatási irányok, matematikai szakágak kiindulásaként, alapjaként szolgáltak. Pontosabban szólva, kérdésfeltevései bizonyos egészen általános filozófiai meggondolásból, elképzelésből indulnak ki, melyeket igyekszik konkrét feladat által pontosabbá, határozottabbá tenni úgy, hogy láthatóvá váljék az általános kérdés igazi matematikai tartalma, lehetővé váljék precíz vizsgálata. Mint látni fogjuk később, ez az általános filozófia iránya egyre inkább az élet követelményei által diktált kérdések felé fordul.

Idézzük ismét őt magát. „Fejlődése során a matematika számtalan sok problémával találkozik. De azt jelenti-e ez, hogy mindegyiket meg kell oldanunk? Nem, közöttük a legaktuálisabbakat kell keresnünk, csak azokat a fontos törvényszerűségeket kell kikeresnünk, melyekben a kutatás igazán hathatós eszközei vannak."

E szempontból PONTRJAGIN élesen bírálja a kutató laboratóriumok egy részét, melyek elszakadnak az élettől.

Könyveinek, előadásainak sajátossága még az is, hogy azok önmagukban érthető egészek, bennük minden állítás bizonyítva van pontosan. Hosszabb bizonyításokat felbont (a bennük szereplő önálló gondolatok szerint) részekre úgy, hogy az alkalmazott új módszerek alapgondolatai, lényeges pontjai kiemelkedjenek. Bennük nem találunk látszólag tetszetős, félig kész gondolatsorokat. Minden állításnak megvan a súlya, mint tégla illeszkedik bele az épületbe. Általános, de nem átgondolt, nem megalapozott meggondolásokkal nem díszítget.

Kiemelendő előadásmódjának mondhatni aszketikus tömörsége, minden felesleges kolonctól való mentessége, mely megmutatja igényességét abban, hogy a lényegre koncentráljon. A jelölések megválasztására mintaszerűen ügyel. Előadásai és könyveinek egészen pontos követése nagyfokú koncentrációt kívánnak, de egyben rendkívül tanulságosak is. Ő maga cikkeit végleges megfogalmazásukig több lépcsőn keresztül tökéletesíti. Ebben a magnetofon van segítségére.

Talán nem érdektelen itt megemlíteni azt az elvét is, hogy egy-egy előadásban törekedni kell minél kevesebb különálló, új gondolat közlésére; azok az előadások hasznosak a hallgatók számára, melyekben valamely új, lényeges gondolatot frappáns módon közölnek. Az első ilyen gondolat értékét a további gondolatok halmozása, erőltetése rontja. Ez sajnos igen kevesek által követett elv, ami miatt a konferenciák jó része túlságosan megterhelő, illetve kevéssé eredményes. Ugyanez vonatkozik a matematikai cikkek írására. Gyakran előfordul, hogy PONTRJAGIN visszaküldi a hozzá véleményadásra, lektorálásra érkezett cikkeket, disszertációkat, ha bennük nem talál fontos, új gondolatot. Hasonlóképpen szigorú szemináriumain is.

8. Az algebrai topológia és topologikus algebra területein végzett vizsgálatai összekapcsolásaként L. SZ. PONTRJAGIN 1936-ban kiszámítja a klasszikus *Lie*-csoportok homológia csoportjait, megoldva evvel egy E. CARTAN által felvetett kérdést egészen más módszerrel, mint azt E. CARTAN feltételezte. E munka jelentősége a kapott konkrét eredményen kívül abban van, hogy benne a felület topológiai tulajdonságait nem a nehézkes (és egyenletekkel implicit módon meghatározott felületeknél majdnem irreális) szimplex felbontás segítségével, hanem valamely alkalmas, a felületen értelmezett differenciálható $f(z)$ függvény szingularitási helyeinek (ahol $df(z)=0$) és e függvény szinthelyeire — ($f(z)=c$ halmazoknak megfelelő hyperfelületek) — merőleges trajektóriák segítségével vizsgálja. A felület topológiájának és a felületen értelmezett differenciálható függvény szingularitásainak kapcsolatára már korábban rámutattak M. MORSE munkái. Később L. SZ. PONTRJAGIN H. WHITNEYvel együtt megteremtőjévé vált a differenciáltopológiának, észrevéve azt, hogy a felületen (differenciálható sokaságon) értelmezett differenciálhatósági struktúra segítségével sok topológiai és egyéb hasznos invariáns definiálható, egyszerűbben vizsgálható, mint a szimplex felbontásokkal. Jegyezzük meg itt, hogy míg minden differenciálható sokaságnak létezik szimplex felbontása, nem minden topologikus sokaságon lehet bevezetni differenciálható struktúrát, illetve egy adott sokaságon (pl. a 7. dimenziós gömbön) értelmezhető több egymással nem diffeomorf differenciálhatósági struktúra, mégis az általuk definiálható invariánsokról sok esetben bizonyítható, hogy azok egyben a sokaság topologikus invariánsai is.

A differenciálható struktúra jelenléte lehetővé teszi az analízis erős módszereinek, objektumainak (pl. differenciálegyenletek) alkalmazását.

L. SZ. PONTRJAGIN 1935-től a negyvenes évek végéig a modern algebra és differenciáltopológia, ezen belül a homotópia elmélet számos egészen alapvető fogalmát és módszerét dolgozza ki, ide tartoznak a rétegezett terek, klasszifikáló tér, karakterisztikus osztályok, kohomologikus operációk, é.í.t.

Tanulságos kiemelni itt, hogy vizsgálatai kezdetén mindig teljesen konkrét feladatokat állít maga elé, fent említett felfedezéseire, fogalomalkotásaira is részben azon konkrét és nehéz kérdés megoldási kísérletei során jutott el, mely az S_{n+k}

dimenziós gömbfelületnek az n dimenziós gömfelületbe való leképezéseinek homotopikus invariánsaira, vagyis e leképezések osztályozására vonatkozik. (Két leképezés $\varphi_0: X \to Y$ és $\varphi_1: X \to Y$ homotopikusan ekvivalens egy osztályba tartozik, ha egymásba folytonosan deformálhatók valamely $\varphi_t: X \to Y$, $0 \leqq t \leqq 1$ leképezés seregen keresztül.)

9. Az 1930-as évek elején L. Sz. Pontrjagin kapcsolatot teremtett néhány fizikussal, elsősorban A. A. Andronovval, akivel a rezgéselmélet és az automatikus irányítás problémáiról folytatott évenként többször megbeszéléseket. Így születtek meg első, a differenciálegyenletek körébe vágó munkái.

A differenciálegyenlet megoldásainak statisztikus, valószínű viselkedését elemzi olyan esetben, mikor a jobboldal egy folytonos valószínűségi változótól függ ([16] munka.)

Úttörő jelentőségű az 1932-ben kapott eredmény az úgynevezett durva, vagy strukturálisan stabil differenciálegyenlet rendszerekről. Egy differenciálegyenlet rendszert durvának nevezünk, ha a jobboldal minden elég kicsi (annak első deriváltjait is beleértve) megváltoztatása esetén az új rendszer trajektóriái a régi rendszer trajektóriáival topológiailag ekvivalensen helyezkednek el abban az értelemben, hogy létezik a síknak olyan mindkét irányban folytonos és kölcsönösen egyértelmű önmagába való leképezése, mely a régi rendszer trajektóriáit az új rendszer trajektóriáiba viszi. Erre a [32] munka szükséges és elégséges feltételt ad kétdimenziós fázistér esetére az eredeti differenciálegyenlet szingularitási helyeire vonatkozó feltételek formájában, és minőségileg leírja e rendszerek trajektóriáinak viselkedését.

E feladat filozófiai háttere az, hogy a fizika törvényeit, ill. a konkrét fizikai rendszereket, amiket differenciálegyenletekkel írunk le, mindig csak bizonyos pontossággal ismerjük. Felmerül tehát az a kérdés, mikor kapunk a közelítő törvény alapján mégis minőségileg helyes képet az adott rendszerről. 1942-ben jelent meg munkája bizonyos típusú transzcendens függvények nullhelyeiről, ez időre esik ugyancsak rezgéselméleti kérdések által indított vizsgálata az indefinit metrikájú *Hilbert*-terekről ([45], [48]).

10. Az ötvenes évek elején L. Sz. Pontrjagin, abbahagyva topológiai kutatásait, figyelmét teljes egészében a rezgéselmélet és az automatikus irányítás területe felé fordítja. Ezzel teljesen új témába kezdett. Rendkívüli belső ereje nyilvánul itt meg, hiszen a „minden kezdet nehéz" igazságához járult nála a vakságából eredő információszerzés nehézsége is. Későbbi munkássága során is gyakran mutatta példáját bátor önkritikának, eredményeinek ünneplése nem tartotta vissza attól, hogy azokat, korábbi felfogását kifogásolja, elvesse. A kezdeti nehézségektől nem visszariadó kutató szellemének másik oldala abban nyilvánul meg, hogy kutatásait képes az adott területen abbahagyni, amikor másik területen érdekesebb, fontosabb problémát lát meg. Ebben is kifejezésre jut az az igénye, kívánsága, hogy hazája építéséhez, fejlődéséhez azon a területen, ahol az élet szükségletei leginkább kívánják, járuljon hozzá!

„De ne gondolja, hogy ezen külső körülményektől tudományos tevékenységem szabadsága kisebb lett" — mondja az [98], interjúban. „Nem, éppen abból eredt, hogy az élet szükségletei általi felhívásnak eleget tegyek".

„Igaz, hogy habár matematikussá tisztán elméleti területen végzett munkámmal lettem, most nem kezdenék el olyan elméleti kutatással foglalkozni, melyben nincs meg az alkalmazás lehetősége. Az orosz matematikai iskola mindig sürgető problémák megoldásával tűnt ki."

Tegyünk itt rövid kitérőt, felhíva a figyelmet L. Sz. Pontrjagin magyarul is megjelent közönséges differenciálegyenletekről szóló tankönyvére. E könyv egyik jellegzetessége, hogy a szokástól eltérően a differenciálegyenletek elméletét nem a mechanikából vett példáktól, kérdésfeltevésektől inspirálva tárgyalja, hanem az elektrotechnika, automatikus irányítás konkrét technikai berendezéseinek mozgásegyenleteit vizsgálja, kifejezve azt is, hogy az utóbbi területek által a matematikának felvetett kérdések sokasága összehasonlíthatatlanul változatosabb, fontosabb. Egy kérdés, mellyel az 50-es évektől kezdve rendszeresen foglalkozik az ún. kis paramétereket tartalmazó differenciálegyenletek aszimptotikus viselkedésére vonatkozik, ha a paraméter, mely a magasabbrendű differenciálegyenlet legmagasabb fokú tagjában lép fel, 0-hoz tart. Eredményei, melyek nemcsak meghatározták a trajektóriák minőségi viselkedésének sokszor meglepő és addig meg nem értett sajátosságait, hanem az aszimptotikus közelítések pontos magyságrendjét is megadták, fényt derítettek az elektrotechnikai berendezésekben jelenlevő parazita paraméterek szerepére. — Adjuk át ismét neki a szót!

„Amíg annak idején a differenciál- és integrálszámítás lehetővé tette sok törvény meghatározását a mechanikában és a hőnek szilárd és folyékony testekben való terjedését illetően, az utóbbi időben a matematikai módszerek hatalmasan benyomultak az automatikus irányítás folyamataiba. Minden ország technikai potenciálja most attól függ, mennyire gyorsulnak meg a termelési folyamatok, csökkennek a nyersanyag és energia ráfordítások.

„Nem is olyan régen e kérdéseket gyakran találomra oldották meg és természetesen e megoldások kezdetlegesek voltak, kevéssé effektívek. A felszereléseket a lehetséges rezsim egész kis hányada erejéig használták ki. Természetesen a matematika nem mehetett el a problémák mellett. De hogy lehet megoldani ezt a feladatot? Ez azt jelentette, hogy új utakat keressünk, különbözőket, mint amelyet sok matematikus használt, megkísérelve, hogy a klasszikus variációszámítás módszereit alkalmazza. A gyakorlat ellentmondott e módszernek, mivel egyszerűen nem lehetett őket alkalmazni. Így született az optimális termelésirányítás feladataira új, nem klasszikus variációs módszer.

„A feladat abban áll — folytatja —, hogy megtaláljuk egyik vagy másik gép optimális rezsimét. Nem kevés nehézség vetődött fel. Ismert, hogy technikai berendezések munkáját jellemezhetjük fázis állapotukkal, pl. koordinátákkal és sebességekkel. A berendezés viselkedését a matematika nyelvére kellett lefordítani. A géptől nemcsak működésének gyorsaságát kívánhatjuk meg, hanem azt is, hogy más értékek, pl. a minőség vagy a ráfordítási költség, vegyenek fel optimális értéket. Országos méretekben az optimális rezsimtől való jelentéktelen eltérések is óriási veszteségekhez vezethetnek. A tudomány nem ismert ilyen módszereket. Többé vagy kevésbé szerencsésen, kísérleti úton határozták meg ezeket, mintegy «ránézésre».”

11. Az ilyen irányú kutatások előmozdítására L. Sz. Pontrjagin 1952-ben szemináriumot szervez a Sztyeklov intézetben. Kezdetben itt főként mérnökök adták elő problémáikat. Ezek eredménye lett néhány pontos matematikai kérdésfeltevés kidolgozása. Pontrjagin megértette, hogy határozott előrehaladás érdekében komoly és igen lényeges, de nem tisztán matematikai munkát kell végezni a matematikusnak itt abban az irányban, hogy kidolgozza a helyes kérdésfeltevést, a technikai folyamat megfelelő idealizációját. Már maga az is jelentős eredmény volt, hogy L. Sz. Pontrjaginnak sikerült matematikailag megfogalmaznia az irányítható rendszer fogalmát és e rendszer optimális irányításának a feladatát. Ezután sikerült megtalálnia az optimalitás szükséges feltételét, amely a „maximum elv" elnevezést kapta. Adjuk itt meg e fontos eredmény rövid megfogalmazását:

Egy objektumot irányíthatónak nevezünk, ha változása leírható egy

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad x = (x^1, \ldots, x^n), \quad u(t) = \left(u^1(t), \ldots, u^{(r)}(t)\right)$$

differenciálegyenlet-rendszerrel, ahol x az objektum állapotát jellemző fázis-vektor, az $u(t)$ függvény pedig ún. irányítási „paraméter", amely értékeit az r dimenziós euklideszi tér valamely rögzített — legtöbbször kompakt — U részhalmazából veheti fel. Reális az optimális irányítás feladatát sok esetben úgy megfogalmazni, mint olyan $u(t)$ irányítás megtalálását (a szakaszonként folytonos függvények osztályában), amelyre a rendszer adott $x(t_0)=x_0$ állapotából az $x(t_1)=x_1$ állapotába jut el úgy, hogy az

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t))\, dt$$

funkcionál minimumot vesz fel; $x(t)$ a fenti rendszer megoldása $u(t)$ mellett.

L. Sz. Pontrjagin szükséges feltétele lényegében a következő: Minden problémához konstruálhatunk egy $H(\psi, x, u)$ valós függvényt (ψ $n+1$ dimenziós vektor), valamint minden $u(t)$ irányításhoz egy lineáris differenciálegyenletet úgy, hogy teljesüljön a következő:

$$\text{ha} \quad u(t) \quad (t \in [t_0, t_1])$$

optimális irányítás, akkor létezik a szóban forgó lineáris rendszernek olyan nem triviális $\psi(t) = \left(\psi^1(t), \ldots, \psi^{n+1}(t)\right)$ megoldása, hogy minden rögzített $t \in [t_0, t_1]$ esetében az U-n értelmezett

$$u \to H(\psi(t), x(t), u)$$

függvény abszolút maximumot vesz fel az $u=u(t)$ pontban. E feltételből látható, hogy az optimális irányítás kiválasztása céljából nem elégséges csak az egymáshoz közel eső irányításokat összehasonlítani. Ebben rejlik a tétel ereje, különbözősége a klasszikus variációszámítás tételeitől és a bizonyítás nehézsége.

Tanulságos megemlíteni itt L. Sz. Pontrjagin kissé humoros bevallását: „Bizonyára nem fedeztük volna fel a maximum elvet, ha jól tudtuk volna a klasszikus variációszámítást." E megjegyzésből kitűnik, hogy habár a matematikai tudomány széles területein jól tájékozott, ismereteit nem elsősorban olvasással szerezte, hanem minden eredményt önállóan igyekezett bizonyítani, alapjaiban gondolt át.

A matematikai cikkektől, előadásoktól minden esetben megkívánja az eredetiséget, tanítványait igyekezett önálló gondolkodásra nevelni.

A továbbiakban a maximum elv az optimális irányítás elméletének központi magjává vált, különböző irányú általánosításokat nyert. A [93] monográfia, mely tartalmazza L. Sz. Pontrjagin iskolájának idevágó eredményeit 1962-ig, az egész világon ismertté vált. Ma már, a technika legkülönbözőbb ágaiban, a gazdaság globális tervezésének gyakorlatában, a maximum elv konkrét irányítási feladatok megoldásának alapjává vált, minthogy a belőle kiinduló numerikus módszerek számítógéppel realizálhatók.

De L. Sz. Pontrjagin nem elégszik meg eredményeivel. Figyelme az idealizáció következő, a valósághoz közelebb álló fokán jelentkező problémája felé fordul.

Sok irányítható folyamat esetében annak menetére az u paraméteren kívül még más befolyásoló tényezők is hatnak, melyeknek értékeit a v paraméterrel jelölve

$$\dot{z} = f(z, u, v)$$

alakban idealizálhatjuk a rendszer működését, ahol u a P, v a Q korlátos zárt halmazokból vehetik fel értékeiket. Lényeges új körülmény abban jelentkezik, hogy a t időpillanatban az $u(t)$ kiválasztásánál a $v(s)$ paraméter értékei $s > t$-re nem tekinthetők ismertnek. E folyamatok lényegesen bonyolultabbak. Jellegzetes példájuk az ún. üldözési feladatok, ahol az első játékos célja a $z(t)$ pontnak egy adott zárt, $M \subset R^n$ ún. terminális, részhalmazra juttatása, minél rövidebb idő alatt a $z(0) = z_0$ kiindulási helyzetből. A második játékos (melynek szerepét adott esetben maga a természet is játszhatja) céljaként a $z(t)$ pontnak az M halmazra való kerülésének elodázását, elkerülését adhatjuk meg. Ekkor beszélünk az ún. elfutási feladatról.

A fenti, úgynevezett differenciáljátékok vizsgálatával először R. ISAACS kezdett foglalkozni részletesebben. Vizsgált sok konkrét feladatot és javasolt megoldásukra általános módszert, melyben az optimális irányításokat $u(t) = U(z(t))$, ill. $v(t) = V(z(t))$ alakban kereste. Minthogy azonban az „optimális" $U(z)$, $V(z)$ függvények már egészen egyszerű esetekben is nem differenciálhatóak folytonosan, ez a módszer leküzdhetetlen nehézségekbe ütközött.

E feladat egy konkrét esete, mely az L. Sz. PONTRJAGIN által kifejlesztett első általános módszer megalkotásához vezetett, (melynek elemzésével több éven keresztül foglalkozott), két rakéta üldözési feladata, melyet az

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = \varrho u, \quad |u| \leqq 1,$$

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} = \sigma v, \quad |v| \leqq 1,$$

$$M = \{x, \dot{x}, y, \dot{y} \,|\, x = y\}, \quad \alpha, \beta, \varrho, \sigma > 0,$$

lineáris egyenletek írnák le. Eredményeiből a feladat teljes megoldása következik ([97], [100], [107], [108]). Az elfogás minden pontból lehetséges előre megadható legrövidebb idő alatt, ha $\varrho/\alpha \geqq \sigma/\beta$ és $\varrho \geqq o$ egyenlőtlenségek fennállnak úgy, hogy egyikük szigorú egyenlőtlenség. Elfutás lehetséges, ha $o > \varrho$.

L. Sz. PONTRJAGIN elsőként valósította meg azt az elvet, hogy az üldözési feladatot két részre kell osztani attól függően, hogy az első vagy a második játékos szempontjából vizsgáljuk azt, ellenkező esetben analitikus nehézségekbe ütközünk, melyek nem valódiak, hanem a helytelen idealizáció következményei. A fent említett feladatra adott első megoldási módszerben az $u(t)$ irányítást

$$u(t) = U(z(t), v(t), t)$$

típusú, a változóknak csak lokálisan egyértelmű függvényeként építi fel, nehéz analitikus apparátust használva. Most nem elemezhetjük ezen elméletének további sajátosságait. A benne kapott eredmények a differenciáljátékok lényeges nehézségeire mutattak rá, illetve küzdötték le azokat bizonyos idealizáció és feladatosztály esetében. Megemlítendő viszont az, hogy később, PONTRJAGIN erősen kritizálta saját módszerét, mint túl „finom" idealizációt és túl általános kérdésfeltevést.

Következő lépésként ezen hibák kiküszöbölésére az ún. lineáris differenciáljátékok jóval konkrétabb esetével foglalkozott, melyek

$$\dot{z} = Cz + u - v, \quad u \in P, \quad v \in Q$$

alakban írhatók fel, ahol C négyzetes, konstans mátrix, P, Q konvex kompakt halmazok R^n-ben, a terminális halmaz lineáris altér, vagy általánosabb módszere esetén tetszőleges konvex zárt halmaz. (Pl. a fent említett üldözési feladat lineáris.) A linearitás tulajdonsága minimumra csökkentette a számolási nehézségeket, így a figyelem a $v(s)$ irányításról való információ szerzés és az $u(t)$ irányítás ezek alapján történő konstruálására fordítódhatott. Az L. Sz. PONTRJAGIN által javasolt megoldási módszer kitűnik egyszerűségével, új algebrai-analitikai konstrukciójával (alternáló integrál fogalma), mely világosan kifejezi azt a fölényt az irányítási képességben, amelyre alapozva az üldözés befejezhető előre megadható időpontban. Az információszerzés folyamatának diszkretizálása, azaz kis lépésben történő végrehajtása, az adott feladattípusra helyes idealizáció megtalálása felé vezető fontos lépés volt.

L. Sz. PONTRJAGIN utolsó idézett munkájában a lineáris játékokra vonatkozó elfutási feladat megoldására ajánl módszert. E munka is többéves kitartó, rendszeres, mélyen filozófikus elemzés, nagyfokú koncentráció eredménye [108].

12. L. Sz. PONTRJAGIN matematikai eredményeiről és tevékenységéről szóló ismertetésünk távolról sem volna teljes, ha nem szólnánk arról a kiterjedt pedagógiai tevékenységről, melyet mint egyetemi előadó, mint aspiránsvezető és mint a Sztyeklov intézet tudományos osztályának vezetője az évek hosszú során át kifejtett. Nagyon sok eredményről, melyet tanítványai publikáltak nehéz volna eldönteni, kit kell azok szerzőjének tekintenünk. PONTRJAGIN nagyon sokat, szigorúan, de lelkiismeretesen és önzetlenül foglalkozott tanítványaival.

Mint vak emberrel, természetesen vele is többen megpróbáltak visszaélni; a másokra utaltság kényelmetlenségeit nem kerülhette el. Az utóbbi évtizedben krónikus álmatlanság gyötörte, ezt súlyosbította felesége gyakori betegeskedése, akivel kettesben élnek. De ezek a nehézségek sohasem törték le, hiszen nem saját személyét tartotta legértékesebbnek, hanem hivatását.

Hasonlóképpen a teljesség igénye megköveteli, hogy utaljunk L. Sz. PONTRJAGIN társadalmi tevékenységére. A Szovjet Tudományos Akadémián belül fontos tudományszervezői munkát végez, többek között részt vesz a Szovjet Akadémiai Kiadó könyvkiadási politikájának irányításában. E tevékenységet nagyon fontosnak tartja, tudományos igényessége, felelősségérzete megköveteli, hogy csökkentse az értéktelen, szürke, sokszor kommersz célokból írt, gondolkodást ölő könyvek kiadását, ugyanakkor elősegítse a diákok számára írt jól használható könyvek terjesztését.

L. Sz. PONTRJAGIN szerkesztőségi tagja több szovjet és külföldi folyóiratnak, tagja nemzetközi matematikai és irányításelméleti szervezeteknek, bizottságoknak, mint a szovjet és az orosz matematikai tudomány képviselője. E minőségben és mint meghívott előadó az utóbbi években gyakran járt Amerikában, Nyugat-Európában.

Kívánjuk, hogy jó egészségben folytathassa kutató, alkotó munkáját a matematikai tudományok és így az élet szebbé tétele, fejlődése érdekében.

L. Sz. Pontrjagin megjelent munkáinak jegyzéke

1927

1. Zum Alexanderschen Dualitätssatz, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen,* 315—322; Literatur in Fussnoten.
2. Zum Alexanderschen Dualitätssatz, Zweite Mitteilung,—*Ibidem* 446—456; Literatur in Fussnoten.

1930

3. Sur une hypothése fondamentale de la théorie de la dimension, *Compt. Rend.* **190**, 1105—1107; Littérature en notes de pied.
4. Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensiontheorie, *Math. Ann.* **102**, № 5, 785—789; Literatur in Fussnoten (совместно с Ф. Франклем).

1931

5. Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze, *Math. Ann.* **105**, № 2, 165—205; Literatur in Fussnoten.
6. Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes, *Math. Ann.* **105**, № 5, 734—745; Literatur in Fussnoten (совместно с Г. Толстовой).
7. Einfacher Beweis eines dimensionstheoretischen Überdeckungssatzes, *Ann. Math.*, Princeton, **32**, № 4, 761—762; Literatur in Fussnoten.

1932

8. Sur une propriété métruque de la dimension, *Ann, Math.*, Princeton, **33**, № 1, 156—162; Littérature en notes de pied (совместно с Л. Шнирельманом).
9. Über stetige algebraische Körpes, *Ibidem*, 163—174; Literatur in Fussnoten.
10. Der allgemeine Dualitätssatz für abgeschlossene Menger, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses,* Zürich, Zürich—Lpz., Orrel Füssli Brig., Bd. 2, 195—197.

1933

11. Les fonctions presque-périodiques et l'Analisis situs, *Compt. Rend.* **196**, 1201—1203; Littérature en notes de pied.

1934

12. О динамических системах, близких к гамильтоновым, Журн. эксп. и теор. физ. 4, выш. 9, 883—885. Über Autoschwingssysteme die den Hamiltonschen nahe liegen, *Phys. Zs. Sowjet.* **6**, № 1/2, *25—28.*
13. Структура непрерывных групп, Бюлл. II Всесоюзн. съезда математиков в Ленинграде 24—30 июня 1934 г., Л., изд. АН СССР, 11 (тезисы доклада).
14. Структура компактных топологических групп, Там же, 77—78 (тезисы доклада).
15. Структура локально-компактных коммутативных групп. Там же, 78 (тезисы доклада).
16. Statistische Auffassung dynamischer Systeme, *Phys. Zs. Sowjet.* **6**, № 1/2, 1—24 (совместно с. А. Андроновым и А. Виттом).
17. The thehory of topological commutative groups, *Ann. Math.*, Princeton, **35**, № 2, 361—388; Literature in footnotes.
18. The general topological theorem of duality for closed sets, *Ann. Math.*, Princeton, **35**, № 4, 904—914; Literature in footnotes.
19. Sur les groupes topologiques compacte et le cinquième problème de M. Hilbert, *Compt. Rend.* **198**, 238—240; Littérature en notes de pied.
20. Sur les groupes abéliens continus, *Ibidem*, 328—330; Littérature en notes de pied.

1935

21. Структура непрерывных групп, В кн. Труды II Всесоюзного математического съезда, т. 1, Л. изд. АН СССР, 237—257; Литература 15 назв. на иностр. яз.
22. Числа Бетти компактных грипп Ли, ДАН **1**, № 7/3, 433—435. On Betti numbers of compact Lie's groupe, *Ibidem*, 435—437; Literature 3 names.
23. Sur les nombres de Betti des groupes de Lie, *Compt. Rend.* **200**, 1277—1280; Littérature en notes de pied.

1936

24. Проблематика теории топологических групп, УМН, вып. II, 118—120; Литература в подстр. прим.
25. Линейные представления топологических групп, УМН, вып. II, 121—143; Литература в подстр. прим.
26. Теория топологических коммутативных групп, УМН, вып. II, 177—195; Литература в подстр. прим. (Перевод статьи: The theory of topological commutative gronps, *Ann. Math.*, Princeton, **35**, № 2, 361—388).

27. Структура компактных топологических групп, В кн. Труды II Всесоюзного математического съезда, т. 2, Л.—М., изд. АН СССР, 135.
28. Структура локально компактных коммутативных групп, Там же, 136.
29. Linear representations of compact topological groups, Матем. сб. **1** (43): 3, 257—272; Литература в подстр. прим.; Резюме на русск. яз.
30. Les variétés à n-dimensions généralisées, *Compt. Rend.* **202**, 1327—1329; Littérature en notes de pied (совместно с П. Александровым).

1937

31. Sur les transformations des sphères en sphères, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiquens,* Oslo, vol. 2, Oslo, Broggers Boktrykkert, 140.
32. Грубые системы, ДАН **14**, № 5, 250; Литература 4 назв. на иностр. яз. (совместно с А. Андроновым). Systèmes grossiere, *Compt. Rend. de l'URSS,* **14**, № 5, 247—250.
33. Über den Browerschen Dimensionsbegriff, *Comp. math.* **2**, 2, 239—255 (совместно с А. Александровым и Х. Хопфом).

1938

34. Непрерывные группы, М.—Л., ГОНТИ; Литература 36 назв., из них 33 на иностр. яз.
35. Группы Ли. УМН, вып. IV, 163—200.
36. Классификация непрерывных отображений комплекса на сферу. I, ДАН **19**, № 3, 147—149.
37. Классификация непрерывных отображений комплекса на сферу. II, ДАН **19**, № 5, 361—363. *Idem.* 2, Compt. Rend. de l'URSS, **19**, № 5, 361—363.
38. Classification des transformations d'un complexe dimensionnel dans une sphère n-dimensionalle, *Compt. Rend.* **206**; Littérature en notes de pied.

1939

39. *Topological groups.* Transl. from the russian by Emma Lehmer, Princeton, Princ. univ. press, IX, 299 p. (*Princeton mathematical series.* 2; Литература: стр. 295—296.
40. Homologies in compact Lie groups, *Матем. сб.* **6** (48): 3, 389—422; Литература: 6 назв.; Резюме на русск. яз.

1941

41. Products in complexes, *Матем. сб.* **9** (51): 2, 321—330; Резюме на русск. яз.
42. A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere, *Матем. сб.* **9** (51): 2, 331—363.

1942

43. Отображения трехмерной сферы в n-мерный комплекс, ДАН **34**, № 2.
44. Характеристические циклы многообразий, ДАН **35**, № 2.
45. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций, Изв. АН **6**.
46. Über die topologische Struktur der Lieschen Gruppen, *Commentarii Mathematici Helvetici* **13**, 277—283.
47. A method of calculation of homology groups, *Матем. сб.* **11** (53): 1—2.

1944

48. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, Изв. АН **8**, 243—280.
49. Некоторые топологические инварианты римановых многообразий, ДАН, № 3.

1945

50. Характеристические циклы, ДАН № 4.
51. Классификация некоторых косых произведений, ДАН, № 5.

1947

52. Пересечения в многообразиях, УМН II, вып. 1(17) (совм. с М. Глезерманом).
53. Характеристические циклы дифференцируемых многообразий, *Матем. сб.* **21** (63): 2.
54. Основы комбинаторой топологии, М.—Л., Гостехиздат.
55. Топологическе теоремы двойственности, УМН II, вып. 2 (18).
56. Общая топологическая теорема двойственности для замкнутых множеств (перевод с англ. см. выше, 18), УМН II, вып. 2 (18).

1949

57. Векторные поля на многообразиях, *Матем. сб.* **24** (66): 2.
58. Некоторые топологические инварианты замкнутых римановых многообразий, Изв. АН **13**, 125—162.
59. Об одной связи между гомологиями и гомотопиями, Изв. АН **13**, 193—200.
60. Гомотопическая группа $\pi^{n+1}(K_n)$, $n>2$ размерности связанного конечного полиздра K_n произвольной размерности, фундаментальная группа которого и группы Бетти размерностей $2, \ldots, n-1$ тривиальны, ДАН № 6.

1950

61. Гомотопическая классификация отображений $(n+2)$-мерной сферы в n-мерную, ДАН 957—959.
62. Классификация отображений $(n+1)$-мерной сферы в полиэдр K_n, фундаментальная группа которого и группы Бетти размерностей $2, \ldots, n-1$ тривиальны, Изв. АН **14**, 7—44.

1952

63. Основы комбинаторной топологии (перевод на английск. яз.). Нью-Йорк.

1953

64. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций, ДАН **91**, № 6.

1954

65. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопии, Труды Матем. ин-та им. Стеклова.
66. Непрерывные группы, 2 изд., М., Гостехиздат.
67. Основы комбинаторной топологии (перевод на китайский язык Фын-кана), Пекин.

1955

68. Основы комбинаторной топологии (перевод на венг.), Будапешт.
69. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным, ДАН **102**, № 5, 889—891 (совместно с Е. Ф. Мищенко).

1956

70. Основы комбинаторной топологии (перевод на нем.), Берлин.
71. К теории оптимальных процессов, ДАН **100**, № 1 (совместно с В. Г. Болтянским и Р. В. Гамкрелидзе).
72. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при высших производных, Труды III Всесоюзн. матем. съезда, Москва, т. II.
73. Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Труды III Всесоюзи. матем, съезда, т. 1, Москва (совместно с В. Г. Болтянским).
74. К теории оптимальных процессов, Труды III Всесоюзн. матем. съезда, т. 1, Мoскав (совместно с В. Г. Болтянским и Р. В. Гамкрелидзе).

1957

75. Topologische Gruppen, 1 (перевод книги «Непрерывные группы», изд. 2, на нем. яз.), изд. B. C. Teubner, Лейпциг.
76. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, Изв. АН **21**, 605—626.
77. Некоторые математические задачи, возникающие в связи с теорией оптимательных систем автоматического регулирования, Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации пр-ва, 15—20 X 1956, т. II, Москва.

1958

78. Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром. ДАН **120**, № 5, 967—969 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
79. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при высших производных, Труды III Всесоюзн. матем. съезда, т. 3, 570—557.

1959

80. Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, Изв. АН, серия матем. **23**: 5, 643—660 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
81. Одна статистическая задача оптимального управления, ДАН **128**, № 5, 890—892 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
82. Оптимальные процессы регулирования, УМН **14**, виш. 1, 3—20.

1960

83. Оптимальные процессы регулирования, Proc. Intern. Congress Math., 1958, Cambridge. 182—202.
84. Периодическое решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, ДАН **132**, № 3, 537—540 (совм. с Л. В. Родыгиным).
85. Приближенное решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, ДАН **131**, № 2, 255—258 (совм. с Л. В. Родыгиным).

86. Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума, Изв. АН, серия матем. **24**: 1, 3—42 (совм. с В. Г. Болтянским и Р. В. Гамкрелидзе).
87. Differential equations with a small parameter attached to the higher derivatives and some probleme in the theory of oscillation, IRE Trans. on Circuit Theory, CT-7, 527—535 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
1961
88. Математическая теория оптимальных процессов, М. (совм. с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко).
89. Об одной статистической задаче оптимального управления, Изв. АН, серия матем. **25**: 4, 477—498 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
90. Принцип максимума в теории оптимальных процессов управления, Труды I Междунар. конгресса ИФАК, Теория дискретных оптимальных и самонастраивающихся систем, М., 457—470 (совм. с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко)
1962
91. Об одной вероятностной задаче оптимального управления, ДАН, **145**, № 5, 993—995 (совм. с А. Н. Колмогоровым и Е. Ф. Мищенко).
92. A statistical problem in the theory of optimal control. Abstracts of short Communications, Intern. Congress Math., Stockholm, 3—15.
1963
93. Математическая теория оптимальных процессов, Труды IV Всесоюзн. матем. съезда, т. I, 214—218 (совм. с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко).
94. Relaxation oscillations and differential equations containing a small parameter with the senior derivative, Calcutta Math. Soc. Golden Jubilee Commemoration Volsme 1958/1959, 1, Calcutta, 141—150 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
1964
95. О некоторых дифференциальных играх, ДАН **156**, № 4, 738—741.
1965
96. Обыкновенные дифференциальные уравнения, изд. 2-е, перераб., М., «Наука».
1966
97. К теории дифференциальных игр, УМН **21**, вып. 4, 219—274.
98. Поэтические будни математики (Беседа с акад. Л. С. Понтрягиным. Записал В. Мякушев), Научно-техн. о-во СССР, 1, 48—51.
1967
99. Линейные дифференциальные игры, ДАН **174**, № I, 27—29 (совм. с Е. Ф. Мищенко).
100. О линейных дифференциальных играх. I, ДАН **174**, № 6, 1278—1280.
101. О линейных дифференциальных играх. II, ДАН **175**, № 4, 764—766.
102. Linear differential games. Mathematical theory of control, Pros. Conf. Univ. Southern California, Los Angeles, 330—334.
1969
103. Математическая теория оптимальных процессов, изд. второе, Москва, «Наука».
104. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого, ДАН **189**, № 4.
1970
105. Линейная дифференциальная игра убегания, ДАН **191**, № 2.
106. Linear differential games, *Proc. Intern. Congr. Math.*, Nizza
1971
107. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого, Дифферен. уравн. 7, № 3.
108. Линейная дифференциальная игра убегания, Труды ин-та им. В. А. Стеклова, т. CXII. стр 30—62.

L. SZ. PONTRJAGIN

by

G. SONNEVEND

Summary

In the year 1973 the Hungarian Academy of Sciences elected L. S. PONTRJAGIN as a honorary member.

At this occasion we give a brief survey on his path-breaker and many sided mathematical work. Greater attention is given to his activity in the applied mathematics, chiefly in the theory of optimal control.

We tried to present his views on the philosophy of mathematical research, on the unity of theory and application, on the education of young scientific cadres, especially in the socio-ethical dimension.

(Beérkezett: 1973. július 30).

EGY FELEZŐSOKSZÖGEKRE VONATKOZÓ TÉTEL

Írta: RUDA MIHÁLY

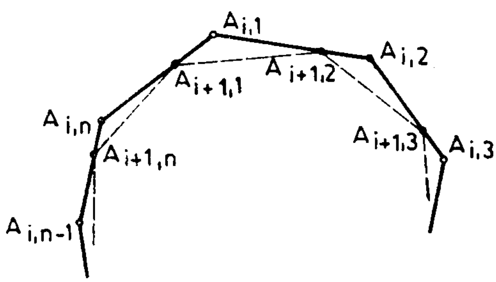
1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban egy olyan sokszögsorozat vizsgálatával foglalkozunk, mely a következő módon adható meg:

A sorozat $(i+1)$-edik elemeként szereplő $\mathbf{A}_{i+1}$ sokszög csúcsait az i-edik $\mathbf{A}_i$ sokszög oldalfelező pontjaiban adjuk meg úgy, hogy az $(i+1)$-edik sokszög szomszédos csúcsai az i-edik sokszög szomszédos oldalainak felezőpontjai legyenek. Ezt az eljárást egy adott, n-szögből kiindulva végezzük. Az eljárást magát *felezésnek*, a felezési eljárás iterációját pedig *felezési iterációnak* nevezzük. A sorozat $(i+1)$-edik eleme így az i-edik sokszög *felező sokszöge* lesz.

Nyilvánvaló, hogy a felezési iteráció lépései nem változtatják meg a sokszög csúcsainak számát és a sokszög csúcsainak súlypontját sem. Az is rögtön belátható (például a következő szakaszban szereplő 2. segédtétellel), hogy a fent megadott sokszögsorozat elemeinek megfelelő csúcspontjai egyetlen ponthoz, az egyes $\mathbf{A}_i$ tagok közös súlypontjához tartanak.

Természetesen a sorozat elemeinek más tulajdonságai — például alaki szempontok — is vizsgálhatók; így igen érdekes eredményekhez juthatunk. A következőkben éppen azt bizonyítjuk be, hogy bizonyos, r-dimenziós euklideszi térbeli sokszögeket a felezési iteráció „alakilag" affin szabályos sokszögbe visz, azaz a sokszögsorozat elemeire rendre megfelelő affinitásokat alkalmazva, szabályos n-szöghöz tartó sorozathoz jutunk.



1. ábra

Meg kell jegyezni, hogy az adott bizonyítás néhány, a következőkben pontosan meghatározott kivételtől eltekintve, bármilyen sokszögre érvényes.

A felezési iterációs sorozat konvergenciájának bizonyításán kívül megadunk egy eljárást is, melynek segítségével a sorozat határhelyzeteként adódó sokszögek affin képét megszerkeszthetjük. Természetesen ez is csak úgy lehetséges, ha a sorozat egyes tagjait megfelelő mértékben kinagyítjuk úgy, hogy határhelyzetként nem ponttá fajuló idomot kapunk. A fent említett kivételes esetekben azonban ez az eljárás nem alkalmazható.

Az általunk vizsgált probléma megoldását több szerző tárgyalja különböző formában CADWELL, J. H. [1], [2], FEJES TÓTH LÁSZLÓ [5], KÁRTESZI FERENC [6], KORCHMÁROS GÁBOR [7], LŰKŐ GÁBOR [8], RUDA MIHÁLY [10], SZÉP ANDRÁS

[11]. Az itt említett szerzők nem csak a felezősokszögek sorozatával, hanem más típusú transzformáció-sorozatokkal is foglalkoznak. Például az $i+1$-edik sokszög csúcsai λ, $(1-\lambda)$ arányban is oszthatják az i-edik sokszög oldalait (l. például az 1. ábrát, amikor $\lambda=1/3$). Ezekről az eredményekről részletesebben a 4. pontban szólunk.

A következőkben egy elemi módszereket alkalmazó bizonyítást adunk a fent leírt feladat megoldására.

2. A konvergenciatétel bizonyítása

A bevezetésben leírt problémát először *nem elfajult*, *konvex* sokszögek esetén vizsgáljuk. Egy konvex sokszögre itt akkor mondjuk, hogy nem elfajult, ha nincs három kollineáris csúcspontja.

Az alábbiakban először néhány jelölést és definíciót adunk meg.

Jelöljük az **A** n-szög csúcsait A_j-vel $(j=1, \dots, n)$, (az indexezés mindig egy adott körüljárás szerint történik). Az iteráció i-edik lépése után nyert $\mathbf{A}_i$ sokszög csúcsait $A_{i,j}$-vel jelöljük $(j=1, 2, \dots)$. Az $A_{i,k}$ és $A_{i,l}$ csúcs azonos, ha $k \equiv l$ mod (n) (az tehát lehetséges, hogy $j>n$). Az $A_{i,j}$ pontokba mutató vektorokat $\mathbf{a}_{i,j}$-vel jelöljük. Egy $\mathbf{A}_i$ sokszög két különböző indexű (de esetleg geometriailag egybeeső) $A_{i,k}$, $A_{i,l}$ csúcsát összekötő vektort $\mathbf{b}_{i,j}$-vel jelöljük.

1. DEFINÍCIÓ. Egy sokszög egy átlóját *k-adrendű átlónak* nevezzük, $\left(k \leqq \left[\frac{n}{2}\right]\right)$, ha végpontjait a sokszög kerületén $k-1$ (illetve $n-k-1$) csúcspont választja el egymástól.

Eszerint például a sokszög egy oldala elsőrendű átlónak nevezhető, ezért a következőkben ha átlóról lesz szó, ez egyúttal oldal is lehet.

2. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy tetszőleges n-szög i_1 és i_2, illetve i_3 és i_4 indexű csúcsát összekötő két szakasz (átló vagy oldal) *kongruens indexösszegű*, ha $i_1+i_2 \equiv i_3+i_4$ mod (n).

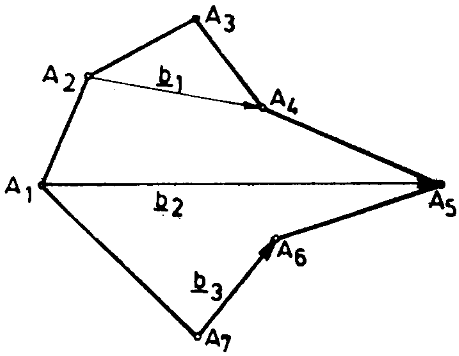
MEGJEGYZÉS. A kongruens indexösszeg fogalmának segítségével egy tetszőleges n-szög átlóit, illetve oldalait alkotó szakaszokat n diszjunkt osztályba sorolhatjuk. Egy osztályba tartozik két szakasz, ha kongruens indexösszegű. Beszélni fogunk ilyen értelemben egy osztályba tartozó kongruens indexösszegű átlókról, illetve oldalakról.

Egy-egy ilyen osztályban $(n-3)/2$ átló és egy oldal (összesen $(n-1)/2$ szakasz) van, ha n páratlan (l. pl. a 2. ábrát, ahol $n=7$ és így egy osztályban $\frac{n-3}{2}+1=3$ szakasz van, például a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ vektorok), illetve $(n-4)/2$ átló és két oldal ($n/2$ szakasz) vagy $(n-2)/2$ átló, ha n páros (l. pl. a 3. ábrát, ahol $n=6$, tehát egy osztályban vagy $\frac{n-2}{2}=2$ vagy $\frac{n-4}{2}+2=3$ irányított szakasz van, például a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ vagy a $\mathbf{b}_{11}, \mathbf{b}_{12}$ vektorok).

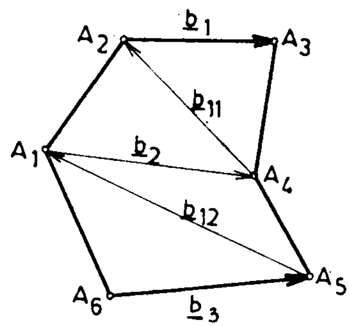
Megjegyezhető, hogy az affin szabályos sokszögekben az egy kongruens indexösszegű osztályba tartozó átlók és oldalak (és ha a sokszög nem elfajult, akkor csak ezek) párhuzamosak.

3. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy tetszőleges n-szög kielégíti a párhuzamossági feltételt, ha bármely két olyan átló (oldal), amely egy kongruens indexösszegű osztályba tartozik párhuzamos.

A következőkben egy n-szögben, egy kongruens indexösszegű osztályba tartozó szakaszokat (átlókat, oldalakat) úgy irányítjuk, hogy egy azonosan indexelt affin szabályos n-szögben a megfelelő irányított átlók és oldalak nem csak párhuzamosak, hanem egyirányúak is legyenek. Másrészt, ezeket az átlókat és oldalakat meghatározó $\mathbf{b}_{i,j}$ vektorok j indexét az affin szabályos sokszögben elfoglalt természetes sorrendjüknek megfelelően adjuk meg (l. pl. 2. és 3. ábrát).



2. ábra



3. ábra

Ezek után rátérünk a (nem elfajult) konvex sokszögek vizsgálatára.

1. TÉTEL. *Egy* $\mathbf{A}=A_1, A_2, \dots, A_n$ *nem elfajult, konvex n-szögre alkalmazva a felezési iterációt, az egyes n-szögek sorozata alakilag affin szabályos n-szöghöz tart, azaz a sorozat elemeire megfelelő affinitásokat alkalmazva, határesetben egy szabályos n-szöghöz jutunk.*

Bizonyítás. Nézzük meg, hogy az egyes sokszögeknél hogyan kaphatunk meg egy $\mathbf{b}_{i,j}$ átlót (vagy oldalt) a sokszögsorozat előző tagjainak ismeretében.

Jelöljük az i-edik sokszög egy kongruens indexösszegű osztályába tartozó tagokat $\mathbf{b}_{i,1}, \mathbf{b}_{i,2}, \dots, \mathbf{b}_{i,k}$-val; $k=(n-1)/2$ ha, n páratlan, $k=n/2$ vagy $(n-2)/2$, ha n páros. Ilyenkor az $(i+1)$-edik sokszögben van egy kongruens indexösszegű átlókból (és oldalakból) álló $\mathbf{b}_{i+1,1}, \mathbf{b}_{i+1,2}, \dots$ osztály, melyre ha n páratlan, akkor

vagy $\quad \mathbf{b}_{i+1,1} = 1/2(\mathbf{b}_{i,1}+\mathbf{b}_{i,2})$

$$\mathbf{b}_{i+1,2} = 1/2(\mathbf{b}_{i,2}+\mathbf{b}_{i,3})$$

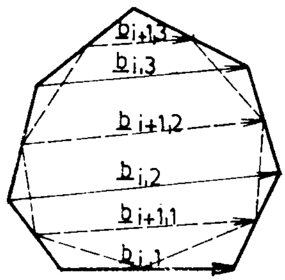
(1) $\quad \vdots$

$$\mathbf{b}_{i+1,k-1} = 1/2(\mathbf{b}_{i,k-1}+\mathbf{b}_{i,k})$$

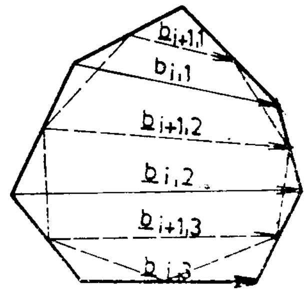
$$\mathbf{b}_{i+1,k} = 1/2\cdot\mathbf{b}_{i,k} \quad \text{(l. a 4a. ábrát, ahol } n=7 \text{ és így } k=3)$$

$$\text{vagy} \qquad \begin{aligned} \mathbf{b}_{i+1,1} &= 1/2 \cdot \mathbf{b}_{i,1} \\ \mathbf{b}_{i+1,2} &= 1/2(\mathbf{b}_{i,1} + \mathbf{b}_{i,2}) \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_{i+1,k} &= 1/2(\mathbf{b}_{i,k-1} + \mathbf{b}_{i,k}) \end{aligned} \tag{2}$$

(l. a 4b. ábrát, ahol $n=7$, $k=3$),



4a. ábra



4b. ábra

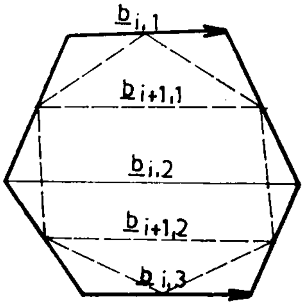
ha pedig n páros, akkor

$$\text{vagy} \qquad \begin{aligned} \mathbf{b}_{i+1,1} &= 1/2(\mathbf{b}_{i,1} + \mathbf{b}_{i,2}) \\ \mathbf{b}_{i+1,2} &= 1/2(\mathbf{b}_{i,2} + \mathbf{b}_{i,3}) \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_{i+1,k-1} &= 1/2(\mathbf{b}_{i,k-1} + \mathbf{b}_{i,k}) \end{aligned} \tag{3}$$

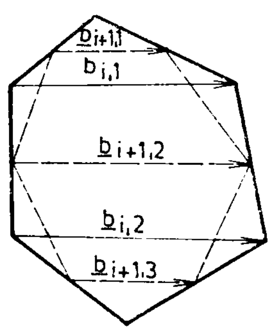
(l. az 5a. ábrát, ahol $n=6$, $k=3$)

$$\text{vagy} \qquad \begin{aligned} \mathbf{b}_{i+1,1} &= 1/2 \cdot \mathbf{b}_{i,1} \\ \mathbf{b}_{i+1,2} &= 1/2(\mathbf{b}_{i,1} + \mathbf{b}_{i,2}) \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_{i+1,k} &= 1/2(\mathbf{b}_{i,k-1} + \mathbf{b}_{i,k}) \\ \mathbf{b}_{i+1,k+1} &= 1/2 \cdot \mathbf{b}_{i,k} \end{aligned} \tag{4}$$

(l. az 5b. ábrát, ahol $n=6$, $k=2$).



5a. ábra



5b. ábra

A fentiekből látható, hogy a $\mathbf{b}_{i,l}$ vektorokat (melyek kongruens indexösszegű, irányított átlók, illetve oldalak az i-edik n-szögben) az eredeti $\mathbf{A}_0$ sokszög kongruens indexösszegű átlóinak és oldalainak egyetlen $\mathbf{b}_{0,1}, \mathbf{b}_{0,2}, \ldots, \mathbf{b}_{0,k}$ osztályából előállíthatjuk úgy, hogy

$$\mathbf{b}_{i,l} = \sum_{j=1}^{k} c_{i,j} \mathbf{b}_{0,j}, \tag{5}$$

ahol $c_{i,j} > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k$, ha $i \geqq n-2)$.

A továbbiakban az 1. tétel bizonyítása az alábbi segédtételek egyszerű következményeként adódik:

1. SEGÉDTÉTEL. *Ha egy nem elfajult, konvex n-szögre alkalmazzuk a felezési iterációt, akkor ha az egyes lépésekben létrejövő sokszögeket olyan mértékben nagyítjuk, hogy az illető sokszög leghosszabb* $\mathbf{b}_{i,m}$ *oldala például egységnyi legyen, akkor nincs olyan* $\mathbf{b}_{i,j}$ *átló vagy oldal a sokszögsorozatban, melyre* $\lim_{i \to \infty} |\mathbf{b}_{i,j}| = 0$. *Létezik tehát (a nagyításoktól függetlenül) egy K konstans, hogy minden i-re* $1/K < \dfrac{|\mathbf{b}_{i,k}|}{|\mathbf{b}_{i,l}|} < K$ *(ahol* $\mathbf{b}_{i,k}$ *és* $\mathbf{b}_{i,l}$ *tetszőleges két különböző csúcsot összekötő szakasz).*

Az 1. segédtétel bizonyítása. A sokszögsorozat fent adott módon felnagyított i-edik tagjának egy $\mathbf{b}_{i,l}$ átlóját vagy oldalát az (5)-höz hasonlóan

$$\mathbf{b}_{i,l} = c_i \sum_{j=1}^{k} c_{i,j} \mathbf{b}_{0,j} \tag{6}$$

alakba írhatjuk, ahol c_i adja a megfelelő mértékű nagyítást.

Nyilvánvaló, hogy az (5)-ben a $c_{i,j}$, illetve a (6)-ban a $c_i \cdot c_{i,j}$ együtthatók csak az i-től, valamint attól függnek, hogy hányadrendű átjó a $\mathbf{b}_{i,l}$. Másrészt egy nem elfajult, konvex sokszög kongruens indexösszegű átlóinak bármely osztályához található egy irány, melyre az adott átlók vetülete egyirányú és nullától különböző vektor. Így a (6) lineáris kombinációnak ebbe az irányba eső vetülete — és így a teljes vektor is — csak úgy lehet tetszőlegesen kicsi, ha valamennyi $c_i c_{i,j} > 0$ együttható is nullához tart (ha $i \to \infty$). Tehát, ha található a sokszögsorozat tagjaiban egy-egy $\mathbf{b}_{i,l}$ k-adrendű átló úgy, hogy ezeknek az átlóknak a sorozata nullvektorhoz tart, akkor a sokszög valamennyi k-adrendű átlója null-vektorhoz tart a felezési iteráció folyamán.

A c_i együtthatókat éppen úgy választottuk meg, hogy a maximális oldalhosszúság (mint egy elsőrendű átló hossza) egységnyi, tehát egyetlen oldal hossza sem tarthat 0-hoz.

Tegyük fel, hogy a k-adrendű és alacsonyabbrendű átlók halmazából nem választható ki nullához tartó sorozat. Ekkor a $(k+1)$-edrendű átlók közül sem választható ki olyan sorozat, melynek tagjai tetszőleges kicsinnyé válhatnak, hiszen egy nem elfajult, konvex sokszögben (ezt a tulajdonságot a felezési iteráció lépései nem változtatják meg) nem lehetséges, hogy minden $(k+1)$-edrendű átló tetszőlegesen kicsiny, míg az összes alacsonyabbrendű átlók hossza egy rögzített értéknél nagyobb. Ez könnyen belátható például abból kiindulva, hogy egy $(k+1)$-edrendű átló két végpontját két egymáshoz csatlakozó alacsonyabbrendű átló köti össze.

Ezzel az 1. segédtétel bizonyítását be is fejeztük, hiszen a fenti feltétel $k=1$-re valóban teljesül, nagyobb k értékekre pedig indukcióval kimutatható.

2. SEGÉDTÉTEL. *Legyen adott egy korlátos* $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$ *számhalmaz. Ebből a szám n-esből kiindulva képezünk egy szám n-esekből álló sorozatot a következő két rekurziós formula valamelyikének segítségével (a c egy rögzített érték lesz, és* $0<c\leqq 1/2$*):*

1/a. *ha i páratlan, akkor az* $a_{i+1,j}$ $(j=1, 2, \ldots, n-1)$ *az* $a_{i,j}$ *és* $a_{i,j+1}$ *érték között van úgy, hogy* $\min(|a_{i+1,j}-a_{i,j}|, |a_{i+1,j}-a_{i,j+1}|)\geqq c|a_{i,j}-a_{i,j+1}|$ *(ha* $a_{i,j}=a_{i,j+1}$, *akkor* $a_{i+1,j}=a_{i,j}=a_{i,j+1}$*) és* $a_{i+1,n}=a_{i,n}$;

1/b. *ha i páros, akkor az* $a_{i+1,j}$ $(j=2, 3, \ldots, n)$ *az* $a_{i,j-1}$ *és* $a_{i,j}$ *között van úgy, hogy* $\min(|a_{i+1,j}-a_{i,j-1}|, |a_{i+1,j}-a_{i,j}|)\geqq c|a_{i,j-1}-a_{i,j}|$ *(ha* $a_{i,j-1}=a_{i,j}$, *akkor* $a_{i+1,j}=a_{i,j-1}=a_{i,j}$*) és* $a_{i+1,1}=a_{i,1}$;

2/a. *ha i páratlan, akkor* $a_{i+1,j}$ $(j=1,2,\ldots,n-1)$ *az* $a_{i,j}$ *és* $a_{i,j+1}$ *között van úgy, mint az* 1/a.*-ban, és az* $a_{i+1,n}$ *nincs értelmezve;*

2/b. *ha i páros, akkor* $a_{i+1,j}$ $(j=2, 3, \ldots, n-1)$ *az* $a_{i,j-1}$ *és* $a_{i,j}$ *között van úgy, mint az* 1/b.*-ben, és* $a_{i+1,1}=a_{i,1}$, $a_{i+1,n}=a_{i,n-1}$.

A fenti formulák segítségével az 1/a–b. esetben n-elemű $\{a_{i,j}, j=1, 2, \ldots, n\}$ halmazok egy sorozatát $(i=1, 2, \ldots)$, a 2/a–b. esetben váltakozva n és $n-1$ elemű halmazok sorozatát nyerhetjük. Minden ilyen sorozathoz egy nem negatív Δ_i $(i=1, 2, \ldots)$ valós számsorozatot rendelünk a következő módon:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{k} |a_{i,j}-a_{i,j+1}|,$$

ahol $k=n-1$, kivéve a 2. rekurziónál azt az esetet, amikor az i páros, ilyenkor $k=n-2$.

ÁLLÍTÁS. *A* Δ_i *sorozat monoton fogy, és*

$$\lim_{i\to\infty} \Delta_i = 0.$$

(Megjegyezzük, hogy egy nagyon hasonló tétel bizonyítása található [9]-ben is.)

A 2. segédtétel bizonyítása. Jelöljük m-mel az egyes $a_{i,j}$ $(i=1, 2, \ldots, i=1, 2, \ldots, m)$ halmazokban levő elemek számát. Tehát $m=n$, illetve $m=n-1$, ha az i páros és a 2. rekurziós formulát alkalmazzuk.

Felhasználva azt a tényt, hogy egy összeg abszolút értéke sohasem lehet nagyobb, mint az egyes tagok abszolút értékeinek összege, az 1/a., 1/b., 2/a és 2/b. formulákra rendre adódnak a következő egyenlőtlenségek:

$$
\begin{array}{lll}
 & 1/\mathrm{a}. & \Delta_{i+1}+c|a_{i,1}-a_{i,2}| \leqq \Delta_i, \\
 & 1/\mathrm{b}. & \Delta_{i+1}+c|a_{i,m-1}-a_{i,m}| \leqq \Delta_i, \\
(7) & 2/\mathrm{a}. & \Delta_{i+1}+c|a_{i,1}-a_{i,2}|+c|a_{i,m-1}-a_{i,m}| \leqq \Delta_i, \\
 & 2/\mathrm{b}. & \Delta_{i+1} \leqq \Delta_i.
\end{array}
$$

Ezek alapján

(8) $$\Delta_{i+2}+c^2(|a_{i,1}-a_{i,2}|+|a_{i,m-1}-a_{i,m}|) \leqq \Delta_i.$$

Már a (7) egyenlőtlenségből is látható, hogy a Δ_i sorozat monoton fogy. Mivel a Δ_i értékek nem negatívok, ezért alulról korlátos monoton fogyó sorozatot alkotnak. Létezik tehát egy (nem negatív) alsó határuk. Jelöljük ezt H-val.

A (8) egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy

(9) $$\lim_{i\to\infty}|a_{i,1}-a_{i,2}| = \lim_{i\to\infty}|a_{i,m-1}-a_{i,m}| = 0,$$

hiszen ellenkező esetben nem létezhetne a H alsó határ.

Ezután már teljes indukció segítségével kimutatható, hogy bármely j-re $(1 \leqq j \leqq m-1)$

(10) $$\lim_{i\to\infty}|a_{i,j}-a_{i,j+1}| = 0.$$

Tegyük fel ugyanis, hogy minden j értékre, ha $1 \leqq j \leqq l \leqq m$, teljesül a (10) feltétel, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ értékre

$$|a_{i,j}-a_{i,j+1}| < \varepsilon,$$

hacsak $i > i_0(\varepsilon)$ és $1 \leqq j \leqq l$. Ekkor azonban, ha $i > i_0(\varepsilon)$ és az i páros, igaz a következő egyenlőtlenség:

$$|a_{i,j+1}-a_{i,j+2}| < 1/c \cdot 2\varepsilon,$$

hiszen ha az i páros, akkor

$$|a_{i+1,j}-a_{i+1,j+1}| \geqq c|a_{i,j+1}-a_{i,j+2}|-(1-c)|a_{i,j}-a_{i,j+1}|,$$

vagyis mivel $i > i_0(\varepsilon)$

$$2\varepsilon > |a_{i+1,j}-a_{i+1,j+1}|+(1-c)|a_{i,j}-a_{i,j+1}| \geqq c|a_{i,j+1}-a_{i,j+2}|.$$

Így minden páros i indexre, ha $i > i_0(\varepsilon)$.

(11) $$\Delta_i < (m-1)(2/c)^{m-2}\varepsilon.$$

A Δ_i monotonitása miatt ugyanez elmondható minden páratlan i indexre is (ha $i > i_0+1$).

Ezzel a 2. segédtétel bizonyítását befejeztük, hiszen a (9) egyenlőtlenség szerint $j=1$-re az indukciós feltétel valóban teljesül.

MEGJEGYZÉSEK. Az eljárás végrehajtása közben — ahogy $\Delta_i \to 0$ — az $a_{i,j}$ elemek is egy a értékhez tartanak, melyre

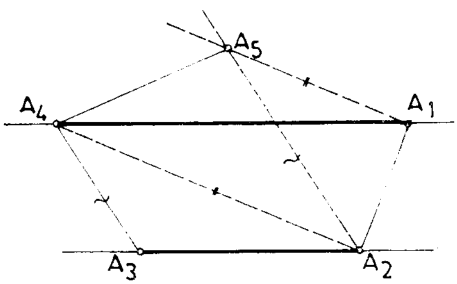
(12) $$\min_j a_{1,j} \leqq a \leqq \max_j a_{1,j}.$$

A 2. segédtétel bizonyítását a fentiekhez hasonló módon nem csak az 1/a—2/b. formulák mellett végezhetjük el, hanem más hasonló rekurziós eljárások mellett is bizonyítható a Δ_i sorozat nullához való konvergálása.

Végül megjegyezzük, hogy a felhasznált transzformációs formulákban nem szükséges a c érték rögzítése. Az egyes i-edik $(a_{i,j})$ halmazokhoz különböző $c_i \leq 1/2$ értékeket is rendelhetünk. Ekkor a $\lim_{i\to\infty} \Delta_i = 0$ teljesülésének egy elégséges feltétele a $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ sor divergenciája is.

3. SEGÉDTÉTEL. *Ha egy ponttá vagy szakasszá el nem fajult, r-dimenziós euklideszi térbeli n-szög kielégíti a párhuzamossági feltételt (3. definíció), akkor az n-szög konvex burka egy affin szabályos n-szög* $(n > 4)$.

A 3. segédtétel bizonyítása. A sokszög síkbelisége a párhuzamossági feltételből azonnal adódik. Másrészt az is nyilvánvaló, hogy a konvex burkot adó sokszög oldalainak belsejében nem lehet az eredeti sokszögnek csúcsa, mert ilyenkor — ugyancsak a párhuzamossági feltétel miatt — egy szakasszá fajulna a sokszög.



6. ábra

Válasszuk ki a konvex burok egyik oldalát (mely az eredeti sokszög egy oldala vagy átlója) és egy vele kongruens indexösszegű átlót vagy oldalt az eredeti sokszögből (mely a párhuzamossági feltétel teljesülése miatt párhuzamos a konvex burok kiválasztott oldalával) úgy, hogy az így nyert két párhuzamos egyenes között ne legyen a kiválasztott két szakasszal kongruens indexösszegű szakasz. A kiválasztott szakaszok A_1, A_2, A_3 és A_4 végpontja egy konvex négyszöget, trapézt feszít ki (6. ábra).

Ebből a trapézből a párhuzamossági feltétel alapján már megszerkeszthető a sokszög többi csúcsa is: például $\overline{A_2A_4}$ párhuzamos az $\overline{A_1A_5}$ szakasszal és $\overline{A_3A_4}$ az $\overline{A_2A_5}$ egyenessel.

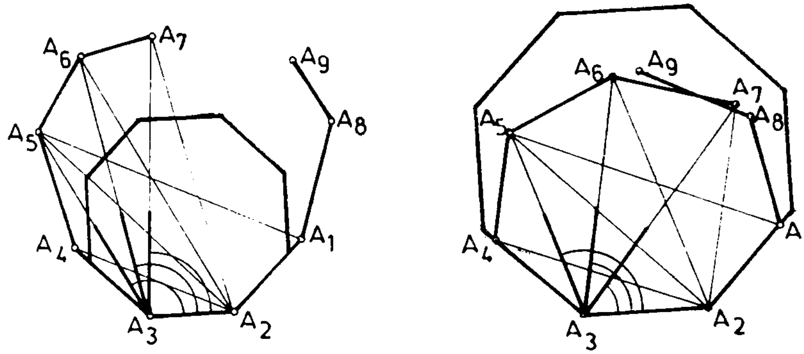
Az ábrából is jól látható, hogy ha A_2A_3 a konvex burok egy oldala, akkor $\overline{A_4A_1} > \overline{A_3A_2}$, azaz például $A_2A_3A_4\sphericalangle > \pi - A_1A_2A_3\sphericalangle$, különben az A_5 csúcsot az A_1A_2 egyenes elválasztaná a sokszögtől, ami lehetetlen. Megadható tehát egy olyan affinitás, hogy $A_2A_3A_4\sphericalangle = A_1A_2A_3\sphericalangle = \pi - \frac{2\pi}{n}$. Ilyen módon az $A_1A_2A_3A_4$ trapéz szimmetrikussá válik. Ebből viszont a teljes sokszögnek az $\overline{A_2A_3}$ szakasz felező merőlegesére vonatkozó szimmetriája is adódik.

Ha ilyenkor $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4}$, akkor a fenti módon transzformált n-szög konvex burka egy szabályos n-szög lesz. (l. a 7. ábrát egy nyolcszög esetén).

Ha $\overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4}$ hosszabb, mint az $\overline{A_2A_3}$, akkor a sokszög további A_i csúcsait ($i = 5, 6, 7, \ldots$, l. a 7a. ábrát) szerkesztve (úgy, hogy $\overline{A_2A_5} \| \overline{A_3A_4}$, $\overline{A_1A_5} \| \overline{A_2A_4}$; $\overline{A_3A_6} \| \overline{A_4A_5}$, $\overline{A_2A_6} \| \overline{A_3A_5}$; $\overline{A_3A_7} \| \overline{A_4A_6}$, $\overline{A_2A_7} \| \overline{A_3A_6}$ ...) az $A_iA_3A_2$ szög mindig nagyobb lesz, mint a szabályos n-szögben levő megfelelő szögek (7a ábra), így legalább $n+1$ különböző csúcspontot lehet előállítani, ami ellentmondás.

Meg kell jegyezni, hogy a fentiekben a csúcspontok indexezése nem feltétlenül egy adott körüljárás szerint monoton növekvő sorrendben történt — mint általában, — hanem szerkesztési sorrend szerint.

Abban az esetben, ha $\overline{A_1A_2}$ (és $\overline{A_3A_4}$) rövidebb, mint $\overline{A_2A_3}$, akkor az $A_iA_3A_2$ szögek mindegyike kisebb, mint a szabályos n-szög esetén szereplő megfelelő értékek (7b ábra). Emiatt vagy újból több mint n különböző csúcspont állítható elő, vagy egy $n-k$ $(k=1, 2, ..., n-5)$ csúcspontú sokszög keletkezik, melyről (az előbbi gondolatmenet megismétlésével) már kimutatható, hogy affin szabályos sokszög, ami a párhuzamossági feltétel teljesülésének figyelembevételével azt jelenti, hogy összesen is csak $n-k$ csúcspont szerepel az ilyen módon nyert sokszögben.



a. b.

7. ábra

Mivel pontosan n különböző csúcspontnak kell lennie, ha a sokszög nem fajul szakasszá (a többszörös pontok előfordulását kizárja a párhuzamossági feltétel), ezért elmondható, hogy csak az az eset lehetséges, amikor $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}$, vagyis az előzőleg leírt módon transzformált sokszög konvex burka szabályos n-szög. Ezzel a segédtétel bizonyítása teljessé vált.

MEGJEGYZÉS. A fenti segédtétel bizonyítása után már könnyen belátható, hogy a párhuzamossági feltételt csak affin szabályos sokszögek vagy affin szabályos csillagsokszögek teljesítik (nem beszélve a szakasszá fajult sokszögek triviális esetéről). Ennek a segédtételnek a bizonyítása megtalálható FEJES TÓTH LÁSZLÓ [4] könyvében is.

Az előző, 1—3. segédtételek birtokában már azonnal adódik az 1. tétel bizonyítása.

Az 1. segédtétel szerint a nem elfajult, konvex sokszög oldalainak és átlóinak egymáshoz viszonyított aránya a felezési iteráció tetszőleges sok lépése után is egy korlátos érték marad. Tehát az i-edik sokszög egy kongruens indexösszegű osztályába tartozó $\mathfrak{b}_{i,k}$ átlók, illetve oldalak irányainak a felezési iteráció során történő változására (melyet az (1)—(4) formulák adnak meg) alkalmazhatjuk a 2. segédtételt (hiszen minden ilyen osztályhoz adható egy irány, mellyel a hozzá tartozó irányított szakaszok $0<\alpha<\pi$ szöget zárnak be). Tehát az egy kongruens indexösszegű osztályba tartozó átlók és oldalak iránya egy közös irány felé tart, vagyis a határhelyzetként aódó sokszög kielégíti a párhuzamossági feltételt. A 3. segédtétel szerint így affin szabályos sokszöget kell kapnunk. Elvileg lehetséges az is, hogy egy nem affin szabályos, szakasszá fajult sokszög jön létre — ugyanis ez szintén kielégíthetné a párhuzamossági feltételt — azonban figyelembe véve, hogy egy nem elfajult konvex sokszögből indulunk ki, a 2. segédtételnél szereplő (12) formula alapján a különböző kongruens indexösszegű osztályba tartozó átlók (oldalak) iránya a határhelyzetben is különböző lesz, így tehát a szakasszá elfajulás lehetetlen.

Ezzel tételünk bizonyítását befejeztük.

Ezután rátérünk annak vizsgálatára, hogy a határhelyzetként adódó sokszög (vagy sokszögek) megfelelő nagyítás után az eredeti sokszögből hogyan szerkeszthető meg. A kapott eredményből azonnal adódik, hogy a felező sokszögek sorozatának affin szabályos sokszöghöz való konvergálása tetszőleges sokszögekre teljesül. Határhelyzetként azonban nem csak konvex affin szabályos sokszög, hanem affin szabályos csillagsokszög és olyan, szakasszá fajuló sokszögek is adódhatnak, melyek szabályos n-szög vagy szabályos csillag n-szög egyenesre vonatkozó vetületei.

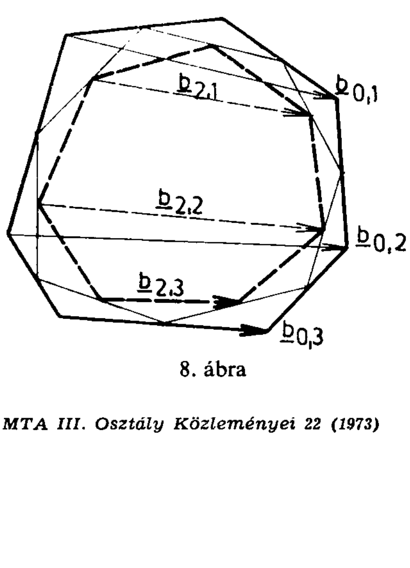
Vannak azonban olyan kivételes esetek — melyekről a bevezetésben már szóltunk, és amelyeket a következőkben pontosan meghatározunk — amikor az itt felhasznált módszerrel nem lehet a konvergencia teljesülését bizonyítani.

3. A határsokszögek szerkesztése, a konvergencia bizonyítása nem konvex sokszögekre

Az 1. tétel bizonyításában már szerepelt, hogy az i-edik felezősokszög egy kongruens indexösszegű osztályába tartozó átlókat és oldalakat az eredeti sokszög egyetlen kongruens indexösszegű osztályának tagjaiból az (5) lineáris kombináció segítségével, illetve megfelelő nagyítások alkalmazása után a (6) lineáris kombinációval állíthatjuk elő.

Tekintsük a felezősokszögek sorozatának minden második elemét, pl. a páros $i=0, 2, 4, \ldots$ indexű tagokat! Ilyenkor az eredeti (nulladik) és az $i=2l$ indexű sokszög kongruens indexösszegű átlóinak és oldalainak egy-egy $\mathbf{b}_{0,1}, \mathbf{b}_{0,2}, \ldots, \mathbf{b}_{0,k}$, illetve $\mathbf{b}_{i,1}, \mathbf{b}_{i,2}, \ldots, \mathbf{b}_{i,k}$ osztálya kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egymásnak $\mathbf{b}_{0,j} \leftrightarrow \mathbf{b}_{i,j}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ módon úgy, hogy bármely $\mathbf{b}_{i,j}$ vektor (6) alakú előállításában a $\mathbf{b}_{0,j}$ vektorok szerepelnek (l. pl. a 8. ábrát, ahol $i=2$ és $n=7$, azaz $k=3$; $\mathbf{b}_{2,1}=\frac{1}{2}\mathbf{b}_{0,1}+\frac{1}{4}\mathbf{b}_{0,2}$, $\mathbf{b}_{2,2}=\frac{1}{4}\mathbf{b}_{0,1}+\frac{1}{2}\mathbf{b}_{0,2}+\frac{1}{4}\mathbf{b}_{0,3}$, $\mathbf{b}_{2,3}=\frac{1}{4}\mathbf{b}_{0,2}+\frac{1}{4}\mathbf{b}_{0,3}$).

Természetesen ugyanilyen módon a páratlan i indexekhez tartozó $\mathbf{A}_i$ sokszögekben is van egy kongruens indexösszegű átlókból álló osztály, melyből a páros indexű tagok egy $\mathbf{b}_{i,1}, \ldots, \mathbf{b}_{i,k}$ osztálya is előállítható (6) alakú lineáris kombinációk formájában (és fordítva). Például a 8. ábrán szereplő $\mathbf{A}_2$ sokszög $\mathbf{b}_{2,1}, \mathbf{b}_{2,2}, \mathbf{b}_{2,3}$ átlói előállíthatók az $\mathbf{A}_1$ sokszög $\mathbf{b}_{1,1}=\frac{1}{2}\mathbf{b}_{0,1}$, $\mathbf{b}_{1,2}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}_{0,1}+\mathbf{b}_{0,2})$, $\mathbf{b}_{1,3}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}_{0,2}+\mathbf{b}_{0,3})$ átlóiból is. Igaz, itt nem mindig lehetséges az egyes átlók kölcsönösen egyértelmű megfeleltetése (mint az azonos paritású indexek esetén).



8. ábra

Könnyen belátható, hogy egy affin szabályos sokszöget két egymásutáni felezés

— megfelelő nagyítást alkalmazva — önmagára képezi le. Elmondható tehát, felhasználva az 1. tétel eredményeit is, hogy a felezési iteráció során a páros, illetve páratlan indexű sokszögek sorozata (megfelelő nagyításokat alkalmazva) egy-egy affin szabályos sokszöghöz tart, ha nem elfajult konvex sokszögből indultunk ki. Létezik tehát a (6) lineáris kombinációkban szereplő $c_i c_{i,j}$ együtthatók $\lim_{i \to \infty} c_i c_{i,j} = c_j^*$ határértéke. Vizsgáljuk meg, milyen értékeket vehetnek fel a c_j^* együtthatók, illetve hogyan aránylanak egymáshoz!

Egyrészt a határsokszögekben az egy kongruens indexösszegű osztályba tartozó $\mathbf{b}_j^*$ vektorok párhuzamosak és hosszuknak aránya rögzített (a megfelelő szabályos sokszög megfelelő átlóhosszainak aránya), ezért a *különböző* $\mathbf{b}_j^*$ vektorokat előállító különböző $\sum c_j^* \mathbf{b}_{0,j} = \mathbf{b}_l^*$ lineáris kombinációkban az azonos j indexű c_j^* együtthatók aránya is állandó, és éppen a megfelelő $\mathbf{b}_l^*$ átlók hosszának arányával egyezik meg.

Másrészt, az (5) lineáris kombinációk szimmetriájából következik, hogy egy $\mathbf{b}_{i,j}$ kongruens indexösszegű osztály egy l indexű ($\mathbf{b}_{i,l}$) tagját előállító lineáris kombináció m-edik komponensének együtthatója egyenlő az adott osztály m-edik ($\mathbf{b}_{i,m}$) tagját előállító lineáris kombináció l-edik komponensének együtthatójával. Ez az állítás az $i=2$ értékre könnyen igazolható, nagyobb (páros) i értékekre pedig indukcióval bizonyítható.

Természetesen ugyanez elmondható a $c_i c_{i,j}$ és a $c_j^* = \lim_{i \to \infty} c_i c_{i,j}$ együtthatókról is.

Ezek után már nyilvánvaló, hogy egy $\mathbf{b}_l^*$ vektort előállító lineáris kombinációkban szereplő $\mathbf{b}_{0,j}$ vektorok c_j^* együtthatóinak aránya is egy megfelelő szabályos sokszögnek a $\mathbf{b}_{0,j}$ vektorokkal topologikusan azonos átlóinak hosszarányával egyezik meg. Egy konstans szorzótól eltekintve, ismerjük tehát a c_j^* együtthatókat. Ezek birtokában már megszerkeszthetjük a határhelyzetként adódó (illetve a hozzájuk hasonló) két sokszöget.

Ha figyelembe vesszük, hogy a (6) lineáris kombinációk együtthatói — egy konstans szorzótól eltekintve — függetlenek az eredetileg adott sokszögtől, akkor rögtön kimondhatjuk a következő tételt.

2. TÉTEL. *Egy r-dimenziós euklideszi térbeli, tetszőleges n-szögre alkalmazva a felezési iterációt — megfelelő nagyításokkal — határhelyzetként két affin szabályos sokszöghöz jutunk, melyek esetleg szakasszá fajulnak, és amelyeket a fent leírt módon lehet megszerkeszteni. Kivételt képeznek azok az esetek, amikor a* (6) *alakú lineáris kombinációk — melyekben az együtthatók egy affin szabályos sokszög átlóinak és oldalainak hosszértékei (vagy azokkal arányos értékek) — mind null-vektort adnak. A bevezetésben éppen ezekről a kivételes esetekről beszéltünk.*

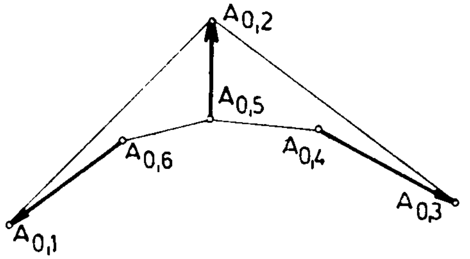
Bizonyítás. Az előzők alapján nyilvánvalóan adódik.

Ezek után megvizsgáljuk még, hogy általában a felezési iterációval kapcsolatban, milyen különböző típusú esetek fordulhatnak elő.

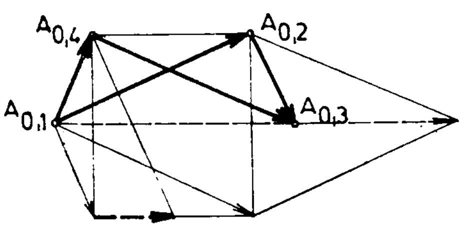
Ha a (6) alakú lineáris kombinációk között van két különböző irányú $\mathbf{b}_l^*$ és $\mathbf{b}_m^*$ vektort szolgáltató kombináció, akkor határhelyzetként nem elfajult affin szabályos u-szöget kapunk.

Ha az eredeti sokszög kongruens indexösszegű átlóinak és oldalainak egy osztályából egy szabályos sokszög megfelelő átlóhosszaival, mint együtthatókkal képzett (6) alakú lineáris kombináció null-vektort ad, de a többi nem, akkor szakasszá fajuló (affin szabályos) n-szöget nyerünk határhelyzetként. Ebben a sokszögben a null-vektort szolgáltató lineáris kombináció által adott $\mathbf{b}_j^*$ $(j=1, 2, \dots, k)$ átlók hossza nulla lesz (l. pl. 9. ábra, ahol $n=6$ és $\overrightarrow{A_{0,6}A_{0,1}}+2\overrightarrow{A_{0,5}A_{0,2}}+\overrightarrow{A_{0,4}A_{0,3}}=\mathbf{0}$)

Hasonlóan, minden esetben szakasszá fajuló affin szabályos sokszöghöz jutunk ha a (6) lineáris kombinációk a határsokszög két különböző (nem kongruens) indexösszegű osztályába tartozó átlókra egyirányú vektorokat adnak. (l. 10. ábra, ahol $\overrightarrow{A_{0,1}A_{0,2}}+\overrightarrow{A_{0,4}A_{0,3}}=c(\overrightarrow{A_{0,1}A_{0,4}}+\overrightarrow{A_{0,2}A_{0,3}})$. Egyébként ez a lehetőség magába foglalja az előző esetet is, hiszen a null-vektor tetszőleges irányúnak tekinthető.



9. ábra



10. ábra

Megjegyezhető, hogy a fenti esetekben a szakasszá fajult határsokszög „affin szabályossága" éppen az adott szerkesztési eljárásból következik.

Abban az esetben, amikor két különböző kongruens indexösszegű osztályba tartozó $\mathbf{b}_{0,j}$ vektorokból képzett (6) alakú lineáris kombináció is $(i\to\infty)$ határhelyzetben null-vektort ad, akkor nyilvánvaló, hogy az előzőekben adott szerkesztési eljárást alkalmazva, egyetlen ponttá zsugorodó sokszöget nyerhetünk. Ez annyit jelent, hogy az a nagyítási arány, melyet pl. konvex sokszögekből kiindulva alkalmaztunk, bizonyos esetekben nem elég nagymértékű. Tehát különböző sokszögek a felezési iteráció során (nagyságrendben) különböző „sebessséggel" zsugorodhatnak saját súlypontukká.

Az eredeti szerkesztési eljárással ponttá fajuló sokszöget kapunk, ha affin szabályos csillagsokszögből (vagy annak egy vetületéből) indulunk ki, hiszen különben egy affin szabályos sokszöghöz jutnánk, ami lehetetlen; mivel egy affin szabályos csillag n-szög felezősokszöge is affin szabályos csillag n-szög.

Megjegyezhető, hogy ha r-dimenziós tér esetén n elég nagy, könnyen megadható olyan n-szög, amelyből egy, vagy két különböző (és ilyenkor bármely két különböző) osztályba tartozó, nullával egyenlő $\mathbf{b}_j^*$ vektor szerkeszthető még akkor is, ha megköveteljük, hogy a sokszög ne legyen affin szabályos csillagsokszög. Például ha $r=2$, akkor ötszögnél az adott szerkesztési eljárás hatására csak az affin szabályos csillagból keletkezhet egyetlen ponttá zsugorodó sokszög, hiszen két vektor összegeként kell ilyenkor null-vektort előállítani. Hatszög esetén ez már nem igaz (ha $r=2$, l. pl. 9. ábra), de ha a hatszög nem síkbeli, akkor szintén nem állítható elő bármely, egy kongruens indexösszegű osztályba tartozó átlóinak lineáris kombinációjából null-vektor. Hasonló eset áll fenn magasabb dimenziós tereket kifeszítő sokszögeknél is.

A fenti tételek bizonyítása után tehát kérdéses még, hogy azokban az esetekben, amikor az adott szerkesztési eljárással egy olyan sokszögből kapunk ponttá fajuló határsokszöget, amely nem affin szabályos csillagsokszög (vagy annak vetülete) akkor teljesül-e erre a sokszögre a felezősokszögek sorozatának affin szabályos csillagsokszöghöz (vagy annak egy vetületéhez) való konvergálása. Egyébként konvex, affin szabályos n-szög (mely akár szakasszá is fajulhat) nem lehet a határhelyzet, mert ez ellentmond a megfelelő lineáris kombinációk nullával való egyenlőségének, ugyanis ez az utóbbi tulajdonság nyilvánvalóan invariáns a felezési iteráció lépéseivel szemben.

4. Összefoglalás

Befejezésként összefoglaljuk dolgozatunk témakörében, a bevezetésben említett szerzők által elért eredményeket.

J. H. CADWELL [1], [2] általános formában vizsgálja a kérdést. Tetszőleges, r-dimenziós euklideszi térbeli n-szögre mutatja meg a konvergencia teljesülését nem csak a felezősokszögek sorozatára, hanem tetszőleges rögzített λ, $(1-\lambda)$ osztásarány mellett is. Megadja a határsokszöghöz való konvergencia sebességét is.

SZÉP ANDRÁS [11] a fentiekhez hasonló eredményeket ér el.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ [5] és KÁRTESZI FERENC [6] a felezősokszögek konvergenciáját síkbeli öt és hatszögekre bizonyítja.

KÁRTESZI módszerét alkalmazva KORCHMÁROS GÁBOR [7] tetszőleges, síkbeli hétszögre, LÜKŐ GÁBOR [8] pedig általában n-szögre, tetszőleges λ osztásarány mellett mutatja meg a konvergencia teljesülését.

Térbeli négyszögekre tetszőlegesen változó λ osztásarány esetén a szerző bizonyította a határnégyszög affin-szabályosságát [10].

Elmondható még, hogy számos érdekes probléma merül fel egyrészt a fenti iterációs eljárás további általánosításával kapcsolatban, másrészt egyéb hasonló eljárások vizsgálatakor is. Ilyen kérdésekkel foglalkozik J. H. CADWELL [1], [2], FEJES TÓTH GÁBOR [3], FEJES TÓTH LÁSZLÓ [5], LÜKŐ GÁBOR [8] és SZÉP ANDRÁS [11].

IRODALOM

[1] J. H. CADWELL (1953), A Property of Linear Cyclic Transformations, *Math. Gaz.*, **37**, 85. o.

[2] J. H. CADWELL (1966), *Topics in Recreational Mathematics*, University Press, Cambridge.

[3] FEJES TÓTH GÁBOR (1972), Szabályos sokszöghöz vezető iterációs eljárások, *Matematikai Lapok*, **23**, 135. o.

[4] FEJES TÓTH LÁSZLÓ (1953), *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg.

[5] FEJES TÓTH LÁSZLÓ (1969), Sokszögekre vonatkozó iterációs eljárások, *Matematikai Lapok*, **20**, 15. o.

[6] KÁRTESZI FERENC (1969), Konvex ötszögből származtatott affin-szabályos ötszögpár, *Matematikai Lapok*, **20**, 7. o.

[7] KORCHMÁROS GÁBOR (1969), Egy affin-szabályos sokszögekhez vezető iterációs eljárás, *Matematikai Lapok*, **20**, 405. o.

[8] LÜKŐ GÁBOR (1973), Certain sequences of inscribed polygons, *Periodica Mathematica Hung.* **3**, 255. o.

[9] RUDA MIHÁLY (1968), Relaxációs pontelhelyezési eljárások, *MTA III Osztály Közleményei*, **18**, 253. o.

[10] RUDA MIHÁLY (1969), Fejes Tóth László egy sejtéséről, *MTA III Osztály Közleményei*, **19**, 375. o.

[11] SZÉP ANDRÁS (1970), Sokszögek lineáris iteráltjai, *Matematikai Lapok*, **21**, 363. o.

(Beérkezett: 1973. VIII. 10).

VIZSGÁLATOK ALGEBRAI STRUKTÚRÁK RADIKÁLELMÉLETÉBEN (I)*

Írta: SZÁSZ FERENC

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés 216

I. FEJEZET 219

ASSZOCIATÍV ÉS ALTERNATÍV GYŰRŰK, VALAMINT KATEGÓRIA-OBJEKTUMOK ÁLTALÁNOS RADIKÁLJAIRÓL 219

1. §. Gyűrűk általános radikáljai *Amitsur—Kuros*-féle axióma-rendszerének relatív függetlensége és STEINFELD OTTÓ egy problémájának a megoldása 219
2. §. A *Fuchs*-féle zeroid pseudoradikál általánosításai, mint további fontos példák az *Amitsur—Kuros* axiómák relatív függetlenségére 222
3. §. A radikál és féligegyszerűség dualitása és ekvivalenciája az asszociatív és alternatív gyűrűk kategóriájában 228
4. §. A szubdirekt beágyazás dualizálása kategóriákban és alkalmazások alternatív és asszociatív gyűrűkre, csoportokra és modulusokra 233
5. §. Kritériumok és elegendő feltételek arra, hogy egy felső radikál öröklődő legyen 235
6. §. WIEGANDT RICHÁRD egy problémájának a megoldása homomorfan zárt nemtriviális féligegyszerű gyűrűosztály létezéséről 239
7. §. STEINFELD OTTÓ egy eredményének analogonja részmodulusok gyűrűbeli általános radikáljával és modulushányadosokkal kapcsolatban 242

II. FEJEZET 245

GYŰRŰK GYENGÉN SZUBIDEMPOTENS RADIKÁLJAIRÓL 245

8. §. Egy *Kertész*-probléma redukciójával kapcsolatban kritériumok arra, hogy a *Divinsky*-radikálgyűrűk osztályának egy részosztályába eső gyűrűk egységelemesek legyenek 245
9. §. Gyűrűkről, amelyeknek minden homomorf képe balannihilátor-mentes 248
10. §. A *Neumann*-reguláris és erősen reguláris gyűrűkről 251

III. FEJEZET

GYŰRŰK GYENGÉN SZUPERNILPOTENS RADIKÁLJAIRÓL

11. §. Az antiegyszerű gyűrűkről
12. §. Négy kritérium arra, hogy egy konkrét F-radikál a *Brown—McCoy*-féle radikál legyen
13. §. Gyengén szupernilpotens radikálok és idealizátorok

IV. FEJEZET

A *JACOBSON*-RADIKÁL TETSZŐLEGES (ASSZOCIATÍV) GYŰRŰKBEN

14. §. A *Jacobson*-radikál jellemzése *Green*-ekvivalenciával
15. §. KERTÉSZ ANDOR egy problémájának és KERTÉSZ ANDOR és WIEGANDT RICHARD egy közös problémájának megoldása modulusok egy radikáljáról

* Doktori értekezés, Budapest, 1972. Az értekezés itt közölt része az I. és a II. fejezetet, valamint a teljes tartalom- és irodalomjegyzéket tartalmazza. Az értekezés további fejezetei az *MTA III. Osztály Közleményei* 23/1—2 füzetében jelennek meg.

16. §. KERTÉSZ ANDOR egy problémájának megoldása kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris jobbideálok létezéséről
17. §. KERTÉSZ ANDOR egy problémájának megoldása moduláris jobbideálok metszetéről
18. §. STEINFELD OTTÓ két problémájának a megoldása és egy eredményének az élesítése
19. §. Bizonyos egyszerű *Jacobson* radikálgyűrűkről

V. FEJEZET

A *JACOBSON*-RADIKÁL NEMZÉRUS JOBBTALPÚ GYŰRŰKBEN

20. §. SZELE, FUCHS és KERTÉSZ közös problémájának a megoldása jobbartin-féle gyűrűk széthasíthatóságáról
21. §. SZELE, RÉDEI és KERTÉSZ egy közös problémájának a megoldása olyan gyűrűk létezéséről, amelyeknek csak véges sok jobbideáljuk, de végtelen sok balideáljuk van
22. §. HANS-JÜRGEN HOEHNKE egy problémájának megoldása bizonyos nemzérus jobbtalpú primitív gyűrűknek a körműveléttel való jellemzéséről
23. §. További eredmények nemzérus jobbtalpú gyűrűkkel és a *Jacobson* radikállal kapcsolatban

VI. FEJEZET

ZÉRUSELEMES FÉLCSOPORTOKNAK ÉS BIZONYOS AUTOMORFIZMUS-CSOPORTOKNAK A RADIKÁLJAIRÓL

24. §. Zéruselemes félcsoportok radikáljairól
25. §. Bizonyos *Hashimoto*-féle univerzális algebrák automorfizmus-csoportjának egy féligegyszerűségéről

Irodalomjegyzék

BEVEZETÉS

Doktori értekezésem témája az alapkutatásokhoz, pontosabban az absztrakt algebrához tartozik. Értekezésemben igyekszem áttekintést nyújtani (bár olykor, helykímélés végett, csak vázlatosan) a legutóbbi tizenkét évben végzett olyan kutatásaimról, amelyek bizonyos algebrai struktúrák általános vagy konkrét radikáljainak a vizsgálatát tűzték ki céljukul. Megjegyzem, hogy korábban írtam *Radikale der Ringe* (Gyűrűk radikáljai) címmel az Akadémiai Kiadó részére egy monográfiát, amely nemsokára meg fog jelenni. Disszertációm anyaga azonban lényegesen különbözik a monográfiám anyagától, mert utóbbi főleg kompilatív munka, viszont értekezésemben saját kutatásokról van szó, bár az értkezésem 3., 4. és 5. §-ai WIEGANDT RICHARDdal közösen végzett kutatásaimról, a 10. § egy része pedig részben LAJOS SÁNDORral közösen végzett kutatásaimról számolnak be. Másfelől, míg a monográfiámban csak asszociatív gyűrűk és alternatív gyűrűk radikáljai szerepelnek, addig az értekezésemben megemlítem a gyűrűk radikáljai mellett a kategóriáknak, *Hashimoto*-féle univerzális algebrák (így pl. nem kommutatív csoportok, gyűrűk vagy a *Higgins*-féle multi-operátor csoportok, vagy alulról korlátos, relatív komplementumos, disztributív hálók) automorfizmus-csoportjainak, vagy tetszőleges csoportoknak vagy zéruselemes félcsoportoknak a körében végzett bizonyos radikálelméleti vizsgálataimat is. (Ezekhez lássuk az értekezés irodalomjegyzékében a [24] és [25] dolgozatokat, továbbá a [36], [37], [38] stb. jelzésűektől egészen a [85], [86] és [87] jelzésűekig terjedő, tehát összesen kb. ötvenöt idevágó tartalmú dolgozatot.[1] Megjegyzem, hogy disszertációim jobb megértéséhez az olvasó esetleg tanulmányozza a magyar nyelvű összefoglaló [57], [58] és [59] dolgozataimat, amelyek

[1] Lásd még a 7. §. 3. lábjegyzetét is.

úgy is tekinthetők, mint a már említett német nyelvű monográfiámnak magyar nyelvű vázlata (a monográfiából tartalmazva az összes definíciót és bizonyítás nélkül az összes tételt).

Gyűrűk általános és konkrét radikáljairól, mint jól ismert, N. DIVINSKY [9] bevezető angol könyve adta az első (teljességre nem törekvő) összefoglalást. Ezt a könyvet az olvasó szintén haszonnal tanulmányozhatja. Megjegyzem azonban, hogy értekezésemben definiálni fogok minden nem közismertnek tekinthető fogalmat, éspedig ezt nem egy külön §-ban teszem, hanem a különböző §-okban mindig ott definiálom őket, ahol először szükség van rájuk. Az értkezésben felhasznált általános és alapvető fogalmak pl. RÉDEI LÁSZLÓ [26], FUCHS LÁSZLÓ [11], KERTÉSZ ANDOR [23] és SZÁSZ GÁBOR [88] könyveiben megtalálhatók. (Újabban érkezett meg — ti. a monográfiám elfogadás óta — Magyarországra MARY GRAY, *A Radical Approach to Algebra*, Washington, Addison—Wesley Publ. Comp. (1970) érdekes könyve).

Miként ismeretes, a radikálok történetileg először egy kommutatív test felett vett végesrangú-algebrában úgy jelentek meg, mint a gyűrű szingularitását, a szabályostól, a „jótól" való eltérést bizonyos értelemben lemérő ideálok. Ebben az esetben WEDDERBURN úgy definiálta a radikált, mint a gyűrű összes nilpotens ideáljának az összegét. A radikálmentes végesrangú algebrákat WEDDERBURN féligegyszerűeknek nevezte, és ezekről kimutatta, hogy egyszerű algebráknak a direkt összegei, és hogy minden végesrangú egyszerű algebra izomorf egy ferdetest felett vett teljes mátrixgyűrűvel. HOPKINS észrevette azt, hogy az így definiált radikál maga is nilpotens lesz minden, a jobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűben. ARTIN pedig azt mutatta meg, hogy a végesrangú féligegyszerű algebrákról szóló *Wedderburn*-féle két struktúra-tétel is általánosítható a jobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk szélesebb osztályára. Ebben az esetben a féligegyszerű jobbartin-féle gyűrűk invariánsokkal írhatók le, ahol az invariánsrendszer véges sok ferdetestből és véges sok természetes számból áll (utóbbiak a ferdetest felett vett teljes mátrixgyűrűk típusai).

A jobbartin-féle gyűrűknél azt láttuk tehát, hogy a gyűrű szerkezete szép és jó bizonyos értelemben (ti. a gyűrű invariánsokkal izomorfia erejéig egyértelműen jellemezhető), ha a radikál a lehető legkisebb, ti. éppen (0), másfelől a gyűrű szerkezete kevésbé szép és jó, ha a radikál a lehető legnagyobb, ti. maga a gyűrű. (Ebben az esetben SZELE és WIEGANDT jól ismert tételei, illetve a szerző jelen disszertációjának 51. és 52. Korolláriumai mondanak ki valamit a gyűrű szerkezetéről, de az olyan nem jobbartin-féle vagy nem balartin-féle gyűrűkről, amelyek egybeesnek nilpotens ideáljaik összegével, strukturális szempontból általánosságban alig ismert valami, hiszen e gyűrűk még annihilátor-mentesek is lehetnek.)

A radikálelmélet fejlődésének következő láncszeme (1943-tól 1953-ig) az a korszak volt, amikor a radikált, mint a gyűrű szingularitását bizonyos módon lemérni igyekvő bizonyos ideált, végességi feltételek nélküli tetszőleges (asszociatív) gyűrűkben nilpotencia, nil, jobbkváziregularitás és más konkrét regularitás-fogalmakkal definiálták. Így jött létre a *Baer*-féle alsó és felső nilradikál, a *Koethe*-féle, a *Levitzki*-féle, a *Jacobson*-féle és a *Brown—McCoy*-féle radikál a gyűrűkben (vö. B. BROWN—N. H. MCCOY [7], N. DIVINSKY [9], N. JACOBSON [19]).

Később, 1953-ban, egymástól függetlenül, AMITSUR és KUROS általánosan, axiómákkal definiálta (lásd. az 1. §-t) a gyűrűk radikáljait. Ezek az általános radikálok már nem feltétlenül mérik le a gyűrű bizonyos szigularitását, hiszen az is előfordulhat, hogy bizonyos, egy radikálra nézve féligegyszerű gyűrűk éppen radikálgyűrűk lesznek egy másik radikálra nézve. Sőt P. N. STEWART [33] (ehhez lásd az értkezés 6. §-át is) olyan nemtriviális gyűrűosztályt is megadott, amely egyrészt gyűrűknek egy teljes radikálosztálya, másrészt pedig ugyanakkor gyűrűknek egy teljes féligegyszerű osztálya is[2]. Egyébként az *Amitsur—Kuros*-féle radikálfogalom gyűrűkre olyan általános már, hogy bármely gyűrűosztály beágyazható egy teljes radikálosztályba, és beágyazható egy másik gyűrűosztályba is, amely viszont egy teljes féligegyszerű osztály lesz egy másik radikálra nézve. Gyűrűk általános radikálelméletének igen nagy irodalma jött létre, ennek legkiválóbb kutatói közül pl. AMITSUR, KUROS ANDRUNAKIEVIČ, RJABUCHIN, DIVINSKY, SULIŃSKI, LEAVITT stb. nevei említhetők!

Az általános radikálelmélet gyűrűk esetében tehát abból a célból jött létre, hogy megvalósítsuk a gyűrűelmélet célját: az összes gyűrű leírását, meghatározását vagy jellemzését.

Ilyen módon a radikálelmélet az algebra igen fontos és modern ágává vált, amit még jobban megerősített az a tény, hogy A. G. KUROS (majd később B. I. PLOTKIN) csoportokban, majd SULGEIFER, DICKSON, LIVSIC, SULIŃSKI, RJABUCHIN stb. pedig, még általánosabban, kategóriákban is vizsgálni kezdtek általános és konkrét radikálokat. Szerző [77], [79] és [80] dolgozatai pedig a zéruselemes félcsoportok általános radikál-elméletét kezdték meg kiépíteni. (Megjegyzendő, hogy korábbi nagyszámú konkrét radikált zéruselemes félcsoportok esetében más szerzők vizsgáltak, ezek [77], [79] és [80] irodalomjegyzékében szerepelnek, de ilyen p. szerző [47] dolgozata is).

Az értekezésben felhasznált kutatási módszerek változóak, mindig a vizsgált témához idomulnak, de általában axiómatikus módszerek. Elég sok az értekezésben az explicit példakonstrukció is, ami az érintett eredmény természetéből adódik. Újra kiemelem, hogy a 3., 4. és 5. §-ok eredményeit csak 50—50%-ban vallom magaménak, a 10. § eredményeit pedig kb. 80%-ban tekintem saját eredményeimnek, mert ezek teljesen vagy részben társszerzővel közösen végzett kutatásokról szólnak. A többi paragrafus anyaga teljesen a saját kutatásaim eredménye.

Az értekezésemben nem minden eredményt bizonyítok be, hanem, több kollégajavaslatára és helykímélés végett, bizonyos eredményeket bizonyítás nélkül ismertetek, de megjelölöm ilyenkor azt a dolgozatomat, ahol a bizonyítás megtalálható. Egyébként minden §-t azon dolgozataim megemlítésével kezdek, amelyekben az illető § anyaga részletesebben szerepel.

Minthogy az olvasó, a disszertáció teljes értékeléséhez úgysem elégedhetik meg pusztán csak a bevezetes elolvasásával, megemlítem, hogy az egyes §-ok eredményeinek mások korábbi eredményeihez való viszonyát, illetve egy-egy megoldott probléma történetét az olvasó az egyes §-ok elején részletesen megtalálhatja. Továbbá igyekeztem az egyes §-oknak a címeit részletesebben megfogalmazni, hogy már abból is viszonylag sok dolog kiderüljön a § tartalmára vonatkozólag. Ezért ebben a bevezetésben csak a következő igen vázlatos tartalmi ismertetést emelem ki:

Az első fejezet általános radikálokat vizsgál gyűrűkben, kategóriákban, így pl. a 4. § a transz-szabad képként előálló radikálobjektumokat, és a 7. § egy rész-

[2] Korábban V. A. ANDRUNAKIEVICS, *Dokladü AN SzSzSzR* **113**:3 (1975) 490. oldalon és a *Mat. Szbor.* **55** (1961) 344. oldalán adott példát ilyen osztályra.

modulus gyűrűben vett általános radikálját is elemzi, mégpedig főképpen a primér részmodulusokat tárgyalva.

A II. fejezet a gyűrűk gyengén szubidempotens radikáljait, a III. fejezet pedig a gyűrűk gyengén nilpotens radikáljait vizsgálja.

A disszertációnak a szerintem talán legmélyebb eredményei a IV. és V. fejezetekben találhatók, tehát ezek a *Jacobson*-radikállal kapcsolatban állanak, és KERTÉSZ, FUCHS, SZELE, RÉDEI, STEINFELD, HAJNAL és WIEGANDT egyesével különkülön, vagy párosával vagy hármasával közösen felvetett bizonyos problémáira adnak választ. Megemlítem, hogy pl. a 17. §-ban egy példakonstrukcióm szimultán megoldást ad Rédei egy félcsoportelméleti és KERTÉSZ egy gyűrűelméleti problémájára.

Végül a VI. fejezetben bizonyos *Hashimoto*-féle univerzális algebrák automorfizmus-csoportjának, valamint a zéruselemes félcsoportoknak a radikáljait tárgyalom. A VI. fejezet tanulmányozásához tehát előnyös dolog ismeretekkel rendelkezni multioperátorcsoportokról és hálókról is.

Természetesen, a bevezetés eme vázlatos tartalmi ismertetésénél már az előbb közölt tartalomjegyzék is többet közöl, amely az egyes §-ok részletesebb címeit is tartalmazza.

Még többet tudhat meg az olvasó az értekezés tartalmáról az összes huszonöt § bevezetésének és az értekezés összes százhárom tételének (illetve korolláriumának) alaposabb megnézéséből. A bizonyítások áttanulmányozása pedig arra is fényt vethet, hogy a használt többféle bizonyítási módszer tényleg eléggé függ a bizonyítandó állítás természetétől.

I. FEJEZET

ASSZOCIATÍV ÉS ALTERNATÍV GYŰRŰK, VALAMINT KATEGÓRIA-OBJEKTUMOK ÁLTALÁNOS RADIKÁLJAIRÓL

1. §. Gyűrűk általános radikáljai Amitsur—Kuros-féle axióma-rendszerének relatív függetlensége és Steinfeld Ottó egy problémájának a megoldása

Ennek a §-nak az anyaga részletesebben megtalálható a szerző [67] dolgozatában. Alternatívnak nevezünk egy A gyűrűt, ha A bármely két eleme asszociatív részgyűrűt generál. Ezért bármely asszociatív gyűrű alternatív. Másfelől a valós számtest felett vett *Cayley* számok nyolcdimenziós algebrája alternatív, de nem asszociatív gyűrű. Mint jól ismert, a *Cayley* számok bázisa $B=[1, e_0, e_1, \dots, e_6]$ nyolcelemű halmaz, amelyre a szorzás definíciója:

$$1e_i = e_i 1 = e_i$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j$$

$$e_i^2 = -1$$

$$e_i e_{i+1} = e_{i+3}, \quad e_{i+3} e_i = e_{i+1}, \quad e_{i+1} e_{i+3} = e_i.$$

Másfelől egy A gyűrű E részgyűrűjét elérhetőnek nevezzük, ha van olyan véges hosszú részgyűrűlánc

$$E = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = A,$$

amelynél A_i ideál A_{i+1}-ben ($i=0, 1, \ldots, n-1$). R. BAER [6] igazolta, hogy egy asszociatív gyűrű bármely nilpotens elérhető részgyűrűje beágyazható egy nilpotens ideálba.

Legyen S tetszőleges gyűrűosztály, amely bármely $A \in S$ gyűrűvel együtt tartalmazza A-nak az $A\varphi$ izomorf képét is. Ha $A \in S$, akkor az A gyűrűt S-gyűrűnek nevezzük. Ha az A gyűrű egy I ideálja S-gyűrű, akkor azt mondjuk, hogy I egy S-ideál A-ban. Ha A tartalmaz olyan, $S(A)$-val jelölt, S-ideált, amely tartalmazza a gyűrű minden más S-ideálját, akkor az $S(A)$ ideált az A gyűrű S-radikáljának nevezzük. Látható, hogy az S-radikál általában nem létezik, ha S éppen az összes véges gyűrű osztálya, ezért nem teljesül automatikusan minden S osztályra, hogy az $S(A)$ radikál minden A gyűrűben létezik. Ha az A gyűrűben (0) az egyetlen S-ideál, akkor A-t S-féligegyszerűnek nevezzük. Nyilván, ha S az összes gyűrű osztálya, és ha $A^2=A$, akkor A-nak az S-féligegyszerűsége éppen A egyszerűségét jelenti.

Az R gyűrűosztály *Amitsur—Kuros*-féle radikál-gyűrűk osztálya, ha az alábbi (I), (II) és (III) axióma teljesül:

(I) Ha $A \in R$, akkor A bármely $A\varphi$ homomorf képe is az R osztályhoz tartozik.

(II) Az $R(A)$ radikál létezik minden A gyűrűben, vagyis minden A gyűrű tartalmaz olyan $R(A) \in R$ ideált, amelyben benne van A összes többi R-ideálja.

(III) Az $A/R(A)$ faktorgyűrű R-féligegyszerű, vagyis

$$R\big(A/R(A)\big) = (0) \text{ érvényes.}$$

Jelölje x mármost az (I), (II) vagy (III) axióma valamelyikét, $\bar{x}$ pedig az x logikai tagadását. Jelöljön u, v, w az x és $\bar{x}$ jelekből álló háromelemű sorozatot, és $(u, v, w) = \uparrow$ jelölje azt, hogy az (u, v, w) axiómarendszer ellentmondástalan, $(u, v, w) = \downarrow$ pedig jelentse azt, hogy az (u, v, w) axiómarendszer ellentmondásos. Az világos, hogy (II) és (III) nem függetlenek, mert (III) felhasználja az (II) axiómában szereplő $R(A)$ ideál fogalmát. Ha egy u, v axiómapárra

$$(u, v) = (\bar{u}, v) = (u, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}) = \uparrow$$

teljesül, akkor u és v teljesen független egymástól.

1. Először megmutatjuk, hogy $(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) = \uparrow$, vagyis, hogy létezik legalább egy radikálosztály. Ilyen modell a radikálaxiómák teljesülésére pl. az összes *Jacobson* radikálgyűrű $R=J$ osztálya, tehát $A \in R = J$ akkor és csak akkor, ha $A = J(A)$, ahol $J(A)$ jelenti A *Jacobson*-radikálját. Másik, talán egyszerűbb példa az, hogy $A \in R$ legyen akkor és csak akkor, ha $A^2=A$. Ugyanis (I) nyilván teljesül akkor R-re, továbbá, minthogy idempotens ideálok összege maga is idempotens ideál, nyilván (II) is teljesül. Végül (III) az izomorfia-tételek miatt teljesül.

2. Most azt igazoljuk, hogy $(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \uparrow$. Legyen S mindazoknak az A gyűrűknek az osztálya, amelyek egybeesnek nilpotens elérhető részgyűrűik összegével. (I) nyilván teljesül, tovább (II) is érvényes, mert egyrészt „elérhető részgyűrűnek lenni" tranzitív reláció, másrészt, minthogy BAER [6] szerint minden nilpotens elérhető részgyűrű beágyazható egy nilpotens ideálba, az elérhető részgyűrűk $S(A)$ összege éppen az A gyűrű összes nilpotens ideáljának az összege lesz. Legyen most δ_{ij} a *Kronecker*-féle szimbólum, és A az a gyűrű, amelyet az a_0 és a_{ijk} elemek ($1 \leqq i \leqq 2$;

$1 \leqq j \leqq 2$; $k=1, 2, 3, 4, \ldots$) generálnak az alábbi definiáló relációkkal:

$$a_0^2 = a_{i'i''k}^2 = a_{iik}^{2k} = a_0 a_{ijk} + \delta_{1i} a_{2jk} =$$
$$= a_{ijk} \cdot a_0 + \delta_{2j} a_{ijk} = a_{i_1 j_1 k_1} \cdot a_{i_2 j_2 k_2} + \delta_{j_1 i_2} \delta_{k_1 k_2} a_{i_1 j_2 k_1}^2 =$$
$$= 2a_0 = 2a_{ijk} = 0,$$

ahol $i' \neq i''$. Közvetlen számolás igazolja, hogy A asszociatív nilgyűrű (azaz minden elem nilpotens), sőt A egy MHR-gyűrű is lesz (vagyis teljesül a főjobbideálok minimum feltétele) és minden $y_i = x_1 \cdot x_2 \ldots x_i$ $(x_i \in A)$ szorzat egy elég nagy indextől kezdve csupa 0.

Minthogy

$$a_{22k}^{2k-1} \neq 0 \quad \text{és} \quad a_{2jk} \in (a_0)_r,$$

ezért az $(a_0)_r$ főjobbideál nem nilpotens, és ezért a_0 nincs benne az összes nilpotens ideál összegében. Tehát már asszociatív MHR-gyűrűk esetében is érvényes lehet, hogy

$$S(A/S(A)) \neq 0,$$

ami tényleg $(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$ fennállását mutatja. Ez a példa megoldja STEINFELD OTTÓ egy problémáját, aki azt kérdezte, hogy a nilpotens ideálok összege nilpotens-e minden MHR-gyűrűben.

3. Mutassuk meg azt, hogy $(\bar{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$. Legyen S mindazoknak az A gyűrűknek az osztálya, amelyek egy rögzített p prímre mindazon E_α nilpotens elérhető részgyűrűiknek az összegei, amelyekre $p^2 E_\alpha = 0$, de legalább egy β indexre $pE_\beta \neq 0$, ahol $kE = \{ke;\ e \in E, k$ rögzített egész szám$\}$. Világos, hogy $A \in S$ esetén $A/pA \notin S$, ezért (I) nem teljesül. Legyen $S(A)$ az összes S-ideál összege A-ban. Minthogy $S(A) \in S$, és $S(A)$ az A minden S-ideálját tartalmazza, érvényes (II). Legyen most A olyan gyűrű, amelyre $A^2 = 0$ és amelynek az additív csoportja p^4-rendű ciklikus csoport. Ekkor

$$S(A/S(A)) = A/S(A) \neq (0)$$

miatt $(\overline{\mathrm{III}})$ teljesül, mert $S(A) = p^2 A$, és így $(\bar{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$.

4. Hogy $(\mathrm{I}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$ is érvényes, következik abból, ha S vagy az összes nilpotens gyűrű osztálya, vagy az összes véges gyűrű osztálya. Ha pl. S_∞ az összes nilpotens gyűrű osztálya, legyen $A = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus B_n$, ahol $B_n^{n+1} = 0$, de $B_n^n \neq 0$. Ekkor B_n nilpotens ideál, és ezek A direkt összege olyan nilgyűrű, amely nem nilpotens.

5. Igazoljuk azt, hogy $(\bar{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) = \dagger$. Ha már pozitív irányban eldöntött volna az a még nyitott probléma, hogy a *Fuchs*-féle Z_0 zeroid pseudoradikálra mindig teljesülne

$$(*) \qquad Z_0(A/Z_0(A)) = (0),$$

akkor S lehetne mindazon A gyűrűk osztálya, amelyre $Z_0(A) = A$, ugyanis ekkor az (I) axióma nem teljesül. Ezt a zeroid pseudoradikált, általánosításait és ezek dualizálásait a 2. §-ban részletesebben vizsgáljuk majd. Minthogy azonban $(*)$ nincs még sem bizonyítva, sem cáfolva, másik példát választunk. Legyen S, további céljaink érdekében, mindazon gyűrűk osztálya, amelyek nem izomorfok a K kételemű testtel. Ekkor (I) nyilván nem teljesül, mert $A=K\oplus K\in S$, hiszen A és K egymással nem izomorfok, viszont $A/K\cong K\notin S$. Továbbá (II) nyilván teljesül. Ekkor K egy S-féligegyszerű gyűrű lesz, és az összes $K+I$ ideál összege, ahol I befutja A ideáljait maga A lesz és $K\neq I\neq 0$ esetén $K+I\in S$ miatt $A\in S$, tehát $S(A/S(A))=(0)$ miatt (III) teljesül. Ezért tényleg $(\overline{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \mathrm{III})=\uparrow$.

6. Végül bebizonyítjuk, hogy $(\overline{\mathrm{I}}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}})=\uparrow$ is lehetséges. Legyen ehhez S az összes nullosztómentes gyűrű osztálya. Ha Z a racionális egész számok gyűrűje, akkor

$$Z\in S \quad \text{de} \quad Z/4Z\notin S$$

miatt (I) nem teljesül. Másfelől az $A=Z\oplus Z$ direkt összegben nem létezik az S-radikál, mert ez tartalmazná A-t, de $A\notin S$. Ezért (II) és (III) sem teljesül.

Láttuk tehát, hogy az *Amitsur—Kuros* axiómák relatív függetlenek már az asszociatív gyűrűk és ezért még inkább az alternatív gyűrűk osztálya felett.

2. §. A Fuchs-féle zeroid pseudoradikál általánosításai, mint további fontos példák az Amitsur—Kuros axiómák relatív függetlenségére

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható a szerző [37], [81] dolgozataiban.

FUCHS LÁSZLÓ [10] definiált asszociatív gyűrűben egy zeroid pseudoradikált, amely minden zérus-osztómentes gyűrűben (0). Viszont pseudo-radikálgyűrű lesz minden olyan gyűrű, amelynek minden eleme egyidejűleg balnullosztó és jobbnullosztó. FUCHS [10] igazolta azt is, hogy direkt összeg pseudoradikálja, ha egyik direkt összeadandó sem pseudo-radikálgyűrű, egybeesik a direkt összeadandók pseudoradikáljainak a direkt összegével. Ha pedig legalább egyik direkt összeadandó pseudo-radikálgyűrű, akkor maga a direkt összeg is pseudo-radikálgyűrű.

FUCHS [10] legutóbb említett eredményéből adódik, hogy *bármely* gyűrű előáll úgy, mint bizonyos pseudo-radikálgyűrűnek egy alkalmas homomorf képe, ezért az 1. §-ban említett *Amitsur—Kuros*-féle (I) axióma nem teljesül a *Fuchs*-féle zeroid pseudo-radikálgyűrűk Z_0 osztályára. Tehát a *Fuchs*-féle zeroid pseudo-radikálgyűrűket tartalmazó *Amitsur—Kuros*-féle legszűkebb radikálosztály az *összes* gyűrűt tartalmazza. Másfelől már négyelemű olyan $A=\{a\}$ gyűrű is létezik, ahol $2a=a^3+a^2=0$ $(a^2\neq 0)$, úgy, hogy A pseudo-radikálgyűrű, bár $e=a^2\neq 0$ idempotens elem a gyűrűben.

A *Fuchs*-féle [10] zeroid pseudoradikált itt nem definiáljuk, hanem ennek egy többlépcsős általánosítását fogjuk értelmezni, és majd megmutatjuk, hogy a többféle speciális eset közt melyik lesz éppen a *Fuchs*-féle zeroid pseudoradikál.

Legyen T egy teljes háló, 0 a legkisebb eleme, i a legnagyobb eleme. T-nek egy F részhalmazát felső halmaznak nevezzük, ha $x\in F$ és $x\leqq y$ esetén mindig $y\in F$. Világos, hogy $0\in F$ akkor és csak akkor teljesül, ha $F=T$. Egy F felső halmazt végesjellegűnek nevezünk, ha $\bigvee_{\alpha\in A} x_\alpha\in F$ esetén létezik A-nak olyan véges B részhalmaza, hogy már $\bigcup_{\beta\in B} x_\beta\in F$ is teljesül. Ezeket röviden v-felső halmazoknak hívjuk. Véges sok v-felső halmaznak halmazelméleti metszete és tetszőleges sok v-felső halmaznak a halmazelméleti egyesítése szintén v-felső halmaz.

Legyen $x\in T$ tetszőleges olyan elem, amelyre $x\notin F$, ahol F egy v-felső halmaz. Azt mondjuk, hogy $y\in T$ egy (F, x)-elem, ha $y\cup x\notin F$. Továbbá $z\in T$ erősen (F, x)-

elem, ha $z \cup y \cup x \notin F$ teljesül minden olyan y elemmel, amely (F, x)-elem T-ben. Nyilván maga x erősen (F, x)-elem, és minden erősen (F, x)-elem még inkább (F, x)-elem.

1. Tétel. *T összes erősen (F, x)-elemének a $z(F, x)$ egyesítése szintén erősen (F, x)-elem, amely egybeesik az összes maximális (F, x)-elem metszetével.*

Bizonyítás. Minthogy a hálóegyesítés asszociatív művelet, véges sok erősen (F, x)-elem egyesítése erősen (F, x)-elem. A végtelen egyesítés erősen (F, x)-elem pedig a v-felső halmaz definíciója miatt lesz, ugyanis ha

$$\bigvee_{\alpha \in A} z_\alpha \cup y \cup x \in F$$

volna egy bizonyos $y\,(F, x)$-elemmel és ha $w_\alpha = z_\alpha \cup y \cup x$ akkor $\bigvee_{\alpha \in A} w_\alpha \in F$ miatt van olyan véges $B \subseteqq A$, hogy $\bigcup_{\beta \in B} w_\beta \in F$ tehát $\left(\bigcup_{\beta \in B} z_\beta\right) \cup y \cup x \in F$, ami lehetetlen. Ezért $\bigvee_{\alpha \in A} z_\alpha$ is erősen (F, x)-elem.

Zorn lemmája szerint minden $y\,(F, x)$-elemhez van olyan $m \geqq y$ elem T-ben, amely maximális (F, x)-elem. Legyen m_0 a maximális (F, x)-elemek metszete, és meg fogjuk mutatni, hogy

$$m_0 = z(F, x)$$

Ha y egy tetszőleges (F, x)-elem, és m olyan maximális (F, x)-elem, amelyre $m \geqq y$, akkor

$$m_0 \cup y \cup x \leqq m \cup m \cup x = m \cup x \notin F$$

miatt m_0 erősen (F, x)-elem, tehát $m_0 \leqq z(F, x)$.

Megfordítva, ha m egy maximális (F, x)-elem, akkor $z(F, x) \cup m$ szintén (F, x)-elem, tehát $z(F, x) \leqq m$, és így $z(F, x) \leqq m_0$. Tehát valóban $m_0 = z(F, x)$.

Legyen most T egy negatívan rendezett teljes hálógrupoid, vagyis egy teljes háló, amely ugyanakkor grupoid is, amelyben teljesülnek az alábbi axiómák:

1. $a \cdot b \leqq a \cap b$
2. $a(b \cup c) = ab \cup ac$
3. $(a \cup b)c = ac \cup bc$

T-nek egy F v-felső részhalmaza v-felső részgrupoid, ha F egyszersmind részgrupoid is T-ben. Az üres halmazt v-felső részgrupoidnak tekintjük. Minthogy

$$f_1 \cdot f_2 \leqq f_1 \cap f_2 \quad \text{és} \quad f_1 \cdot f_2 \in F,$$

ezért az Fv-felső részgrupoid a T háló duális ideálja.

T-ben egy p elemet prímelemnek nevezünk, ha $ab \leqq p$ esetén $a \leqq p$ vagy $b \leqq p$ teljesül.

2. Tétel. *Legyen T negatívan rendezett teljes hálógrupoid, amelyben az* 1., 2. *és* 3. *axiómák teljesülnek. Ekkor minden maximális (F, x)-elem, ahol $x \notin F$ és F egy v-felső részgrupoid T-ben, prímelem, tehát az* 1. *Tétel szerint létező $m_0 = z(F, x)$ elem prímelemek metszete.*

Bizonyítás. Legyen m egy maximális (F, x)-elem és $a \not\leqq m$, valamint $b \not\leqq m$. Ekkor

$$(a \cup m) \cup x \in F \quad \text{és} \quad (b \cup m) \cup x \in F,$$

tehát, minthogy F részgrupoid is:

$$f = (a \cup m \cup x) \cdot (b \cup m \cup x) \in F.$$

De 1., 2. és 3. miatt

$$f \leqq ab \cup m \cup x$$

és minthogy $f \in F$, és F felső halmaz, azért $ab \cup m \cup x \in F$. Igy, minthogy m maximális (F, x)-elem, $ab \cup m \geqq m$ és $ab \cup m$ nem (F, x)-elem, ezért $ab \not\leqq m$.
Tehát p prímelem.

Legyen most $\mathfrak{M}$ a T negatívan rendezett hálógrupoidban F v-felső részgrupoidoknak egy tetszőleges halmaza. Ekkor definiálunk egy $z(\mathfrak{M}, x) \in T$ elemet a következőképpen:

$$z(\mathfrak{M}, x) = \bigwedge_{x \notin F \in \mathfrak{M}} z(F, x).$$

Világos, hogy mindig $x \leqq z(\mathfrak{M}, x) \leqq i$ teljesül. Ezt a $z(\mathfrak{M}, x)$ elemet az x elem $\mathfrak{M}$-presudo-radikáljának nevezzük.

Mint alkalmazások említhetők a következő példák:

3. TÉTEL. *Legyen A egy nem feltétlen asszociatív gyűrű, és $I = \bigcap_{\beta \in B} P_\beta$ prímideáloknak egy tetszőleges metszete A-ban. Ekkor I előállítható $\mathfrak{M}$-pseudoradikál alakban.*

Bizonyítás. Legyen T az A összes kétoldali ideáljának a teljes hálója, amelyben A a legnagyobb, (0) a legkisebb elem. Az $I_1 \cdot I_2$ szorzat legyen az összes $i_1 \cdot i_2$ szorzatot tartalmazó ideál metszete, ahol $i_1 \in I_1$ és $i_2 \in I_2$. Ekkor T grupoid is lesz, és teljesülnek az 1., 2. és 3. axiómák, hiszen pl. $I_1 \cdot I_2 \subseteqq I_1 \cap I_2$ miatt T negatívan rendezett lesz. Ha $I = \bigwedge_{\beta \in B} P_\beta$, ahol P_β tetszőleges prímideál A-ban (tehát $CD \subseteqq P_\beta$ esetén $C \subseteqq P_\beta$ vagy $D \subseteqq P_\beta$, ahol C és D ideálok A-ban), legyen $K_\beta = A \setminus P_\beta$. Tehát $x \in K_\beta$ $(x \in A)$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha $x \notin P_\beta$. Legyen F_β mindazoknak az $I_{\alpha\beta}$ ideáloknak a halmaza, (tehát $F_\beta \subseteqq T$), amelyekre $K_\beta \cap I_{\alpha\beta}$ *nem üres*. Ekkor F_β nyilván egy v-felső halmaz T-ben, és legyen $\mathfrak{M}$ az összes ilyen F_β halmaza. Belátható, hogy

$$I = \bigwedge_{\beta \in B} P_\beta = z(\mathfrak{M}, 0),$$

amivel a tételt igazoltuk.

4. TÉTEL. *Minden speciális radikál (tehát prímgyűrűk V. A. Andrunakievič-féle speciális osztályával meghatározott felső radikál* (lásd N. DIVINSKY [9], VII. Fejezet), *tehát pl. a Baer-féle alsó és felső nilradikál, a Levitzki-féle, a Jacobson-féle, a Brown—McCoy-féle, Thierrin-féle radikál, vagy az ún. antiegyszerű radikál és Fuchs zeroid pseudradikálja egyaránt $\mathfrak{M}$-pseudoradikál.*

Bizonyítás. A 3. Tétel, N. DIVINSKY [9] és L. FUCHS [10] művei alapján nyilvánvaló.

Most néhány definíciót ismertetünk.

1. DEFINÍCIÓ. Az A (nem feltétlenül asszociatív) gyűrű gyenge blokkján olyan B_1 részhalmazt ($B_1 \subseteq A$) értünk, amelyre az alábbi két feltétel teljesül:

(i) $0 \notin B_1$, ahol 0 az A zéruseleme;

(ii) Ha az I_1 és I_2 ideálokra $I_1 \cap B_1 \neq \emptyset$ és $I_2 \cap B \neq \emptyset$, ahol $\emptyset$ az üres halmaz, akkor

$$I_1 \cdot I_2 \cap B_1 \neq \emptyset.$$

2. DEFINÍCIÓ. Blokkon olyan B_2 gyenge blokkot értünk, amelyre $x \in B_2$ esetén $x^n \in B_2$ teljesül minden n természetes számmal, x^n értékét bármilyen zárójelezéssel is tekintjük.

3. DEFINÍCIÓ. Erős blokk A-nak olyan B_3 multiplikatív részgrupoidja, amelyre $0 \notin B_3$.

Nyilván minden erős blokk egyszersmind blokk és minden blokk egyszersmind gyenge blokk.

Egy P prímideál $K = A \setminus P$ komplementer halmaza gyenge blokk, amely általában nem blokk. Fordítva, egy B_1 gyenge blokk $L = A \setminus B_1$ komplementer halmaza általában nem ideál, de ha L ideál, akkor L prímideál A-ban. Ha A egy ferdetesttől különböző nemzérus jobbtalpú egyszerű gyűrű, akkor $B_1 = A \setminus 0$ biztosan olyan gyenge blokk, amely nem blokk, mert B_1 tartalmaz $\neq 0$ nilpotens elemet. Test felett vett kétváltozós polinom gyűrűben pedig van olyan blokk, amely nem erős blokk.

5. TÉTEL. *Ha B_1 tetszőleges gyenge blokk az A (nem feltétlenül asszociatív) gyűrűben, akkor mindazoknak az I ideáloknak az F halmaza, amelyekre nézve $B_1 \cap I \neq \emptyset$, egy v-felső részgrupoidot alkotnak A ideáljainak a T hálógrupoidjában.*

Bizonyítás. B_1 definíciójából és a T háló kompaktul való generáltságából adódik.

6. TÉTEL. *Legyen T az A gyűrű ideáljainak hálógrupoidja. Bármely I ideálra és T v-felső részhalmazainak bármely $\mathfrak{M}$ halmazára $Z(\mathfrak{M}, I)$ tartalmazza a B Baer-féle alsó nilradikált. Ha pedig $\mathfrak{M}$-ből minden F_β v-felső részhalmaz* (az 5. Tétel szerint) *egy $B_2^{(\beta)}$ blokk által van meghatározva, akkor $Z(\mathfrak{M}, I)$ mindig tartalmazza a K Baer—Koethe-féle felső nilradikált is.*

Bizonyítás. $B \subseteq Z(\mathfrak{M}, I)$ a definícióból adódik. Legyen most adva a $B_2^{(\beta)}$ blokkok $\mathfrak{M}$ halmaza, és F_β mindazon ideáloknak a halmaza, amelyek metszete $B_2^{(\beta)}$-val nem üres. Legyen I tetszőleges ideál. Ha $I \in F_\beta$, akkor legyen definíció szerint (mint üres metszet) $Z(F_\beta, I) = A$. Ha pedig $I \notin F_\beta$, akkor legyen $Z(F_\beta, I)$ az összes erősen (F_β, I)-ideál összege, amely az 1. Tétel szerint egyszersmind az összes maximális (F_β, I)-ideál metszete is, és az $\mathfrak{M}$-pseudoradikál az összes $Z(F_\beta, I)$ metszete.

Megmutatjuk, hogy $K \subseteq Z(\mathfrak{M}, I)$, ahol K a *Baer—Koethe* felső nilradikál. Legyen J tetszőleges (F_β, I)-ideál az A gyűrűben. Elég megmutatni, hogy

$$K + J + I \notin F_\beta$$

érvényes. Ellenkező esetben ugyanis $K + J + I \in F_\beta$, és ha F_β-hoz éppen a $B_2^{(\beta)}$ blokk tartozik (az 5. Tételben leírtak szerint), akkor

$$(K + J + I) \cap B_2^{(\beta)} \neq \emptyset.$$

Van tehát olyan $b \in B_2^\beta$ elem és olyan $k \in K, j \in J$ és $i_1 \in I$ elemek, hogy fennáll

$$b = i_1 + j + k.$$

Minthogy pedig K nilideál, van olyan m kitevő, hogy $k^m = 0$. A nemkommutatív polinomiális tételt alkalmazva, és minthogy I és J ideál,

$$b^m = (i_1 + j + k)^m \in (I + J) \cap B_2^{(\beta)},$$

mert B_2^β blokk. Ezért $J + I \in F_\beta$, ellentétben azzal, hogy J egy (F_β, I)-ideál. Ezért K erősen (F_β, I)-ideál, amivel a 6. Tételt teljesen igazoltuk.

Példák erős blokkokra

1. Az A asszociatív gyűrű összes nem balnullosztójának $B_3^{(l)}$ halmaza nyilván félcsoport és $0 \notin B_3^{(l)}$. Hasonló igaz A összes nem jobbnullosztójának $B_3^{(r)}$ halmazára is. Legyen F_l a $B_3^{(l)}$-hez, F_r pedig a $B_3^{(r)}$-hez tartozó egy-egy v-felső halmaz az A ideáljainak T hálógrupoidjában, és legyen $\mathfrak{M}$ az $[F_l, F_r]$ kételemű halmaz. Ekkor a $Z(\mathfrak{M}, 0)$ pseudoradikál éppen FUCHS zeroid pseudoradikálja lesz.

2. Legyen L_2 az A asszociatív gyűrű összes balegységelemének a halmaza.

3. Legyen L_3 az A asszociatív gyűrű összes olyan elemének a halmaza, amelyek balról minden elemnek osztói.

Világos, hogy L_2 és L_3 egy-egy multiplikatív félcsoport és $0 \notin L_2$, $0 \notin L_3$. Bal-jobb dualitás alapján R_2 és R_3 is definiálható. Ez a négy halmaz tehát erős blokk A-ban.

4. Minden $e \neq 0$ idempotens elemből $(e^2 = e)$ álló, egyelemű halmaz is erős blokk.

5. Legyen A asszociatív gyűrű, M egy A-jobbmodulus, N egy nemzérus A-részmodulus M-ben, továbbá H_1 és H_2 az M olyan részhalmazai, hogy $0 \notin H_2 \supseteqq H_1$. Ekkor további négy erős blokk definiálható A-ban a következőképpen:

5.1. Mindazoknak az $x \in A$ elemeknek a halmaza, amelyekre $Nx = N$ teljesül;

5.2. Mindazoknak az $x \in A$ elemeknek a halmaza, amelyekre minden $n \in N$ elemmel fennáll $nx = n$;

5.3. Mindazoknak az $x \in A$ elemeknek a halmaza, amelyekre $H_2 x \subseteqq H_1$ érvényes;

5.4. Mindazoknak az $x \in A$ elemeknek a halmaza, amelyekre teljesül $H_2 x \supseteqq H_1$.

Szerző [37] igazolta az alábbi eredményét is:

7. TÉTEL. *Jobbegységelemes és főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűben Fuchs zeroid pseudoradikálja egybeesik a B Baer-féle alsó nilradikállal, a J Jacobson-radikállal és a G Brown—McCoy radikállal.*

A *bizonyítást*, bár nemtriviális, helykímélés végett mellőzzük.

Szerző [37] szintén bebizonyította az alábbi tételt.

8. TÉTEL. *Kétoldali egységelemes Neumann-reguláris gyűrűben Fuchs zeroid pseudoradikálja egybeesik a G Brown—McCoy radikállal.*

Bizonyítás. Legyen M maximális valódi (kétoldali) ideál A-ban, $m \in M$ és $x \in A$ olyan elem, hogy $m = mxm$. Ha e az A kétoldali egységeleme, akkor $m(e - xm) = 0$ és $(e - mx)m = 0$. Továbbá $e - xm \notin M$ és $e - mx \notin M$ miatt M minden nemzérus eleme egyszerre balnullosztó és jobbnullosztó. Így a maximális $(F_r, 0)$-ideálok és maximális $(F_l, 0)$-ideálok metszete egyaránt a maximális ideálok metszete, és ez a metszet $e \in A$ miatt éppen G.

Példa FUCHS egy (általa [10] bizonyítottnak vélt) sejtésének a cáfolatára. FUCHS LÁSZLÓ azt sejtette, hogy zeroid pseudoradikálja (0) minden egységelemes A *Neumann*-reguláris gyűrűben, de ez nem így van. Legyen ugyanis V egy F ferdetest felett vett $\aleph_\nu$-dimenziós vektorétér, és A pedig V összes lineáris transzformációjának a gyűrűje. Ekkor A kétoldali egységelemes *Neumann*-reguláris gyűrű, amelynek egyetlen nemzérus I maximális ideálja van, amely a zeroid pseudoradikál, és ez az összes olyan $a \in A$ elemből áll, amelyekre a Va képtér dimenziója $< \aleph_\nu$. Minthogy I végtelen, biztosan $I \neq 0$, amit bizonyítani akartunk. Ha $\aleph_\nu$ elég nagy, akkor ebben az A gyűrűben igen sok (pl. $\aleph_\mu$-számú) olyan $\mathfrak{M}$-pseudoradikál van, amelyek egymástól és Fuchs zeroid pseudoradikáljától is különböznek. Ennél a ν rendszám számossága legyen legalább $\aleph_\mu$.

E § befejezéseképpen megemlítjük az $\mathfrak{M}$-pseudoradikál egy duálisát (lásd szerző [81]). Legyen T teljes háló és az $A \subseteq T$ részhalmazt alsó halmaznak nevezzük, ha $x \leqq y$ és $y \in A$ esetén mindig $x \in A$. Az A alsó halmaz v-alsó halmaz, ha $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \in A$ esetén a Γ indexhalmaznak van olyan véges Δ részhalmaza, hogy már $\bigcap_{\delta \in \Delta} x_\delta \in A$ is teljesül. Nyilván akkor és csak akkor $A = T$, ha $i \in A$, ahol i jelenti a T háló maximális elemét. A $\emptyset$ üres halmazt v-alsó halmaznak tekintjük.

Legyen $x \in T$ és $x \notin A$, ahol A egy v-alsó részhalmaz. Ekkor egy $y \in T$ elemet (x, A)-elemnek nevezünk, ha

$$y \cap x \notin A.$$

Továbbá azt mondjuk, hogy $z \in T$ erősen (x, A)-elem, ha

$$z \cap y \cap x \notin A$$

teljesül minden olyan $y \in T$ elemmel, amely (x, A)-elem. Nyilván x maga erősen (x, A)-elem és minden erősen (x, A)-elem egyszersmind (x, A)-elem is.

9. TÉTEL. *Az összes erősen (x, A)-elem metszete szintén erősen (x, A)-elem és ez a metszet egybeesik az összes minimális (x, A)-elem egyesítésével.*

Bizonyítás mellőzhető, mert ez az 1. Tétel bizonyításának a duálisa. Csak azt jegyezzük meg, hogy minden $y (x, A)$-elemhez létezik olyan $m \in T$, hogy $m \leqq y$ és m minimális (x, A)-elem.

Probléma. Legyen T negatívan rendezett (lásd 1. feltételt) hálógrupoid, de a 2. és 3. teltételek általában ne teljesüljenek. Mi annak egy nemtriviális kritériuma, hogy minden erősen (x, A)-elem prímelem legyen?

3. §. A radikál és féligegyszerűség dualitása és ekvivalenciája az asszociatív és alternatív gyűrűk kategóriájában

Ennek a §-nak az eredményei részletesebben megtalálhatók a szerző és WIEGANDT RICHÁRD közös [85] és [86] dolgozatában. E § anyagát csak vázlatosan ismertetem.

Legyen C egy tetszőleges kategória, amelyre azonban később több feltételt kiszabunk. Legyen C^* az a kategória, amelynek ugyanazok az objektumai, mint C objektumai, de $\alpha^*: b \to a$ akkor és csak akkor legyen C^* leképezése, ha $\alpha: a \to b$ leképezés C-ben. C^* lesz C duális kategóriája. Nyilván $(C^*)^* = C$. Legyen $H(a, b)$ az összes olyan leképezés C-ben, amely a-t b-be képezi le. Ha $H(a, 0)$ és $H(0, a)$ egyaránt egyelemű halmazok, akkor 0-t C zérusobjektumának nevezzük.

Feltesszük, hogy teljesül:

(C_1) Van C-ben zérus objektum.

Világos, hogy C^*-ban is van zérus objektum.

Azt mondjuk C zérus leképezésű kategória, ha minden a, b rendezett objektumpárhoz van olyan $\omega_{ab}: a \to b$ leképezés, hogy minden $\alpha: c \to a$ és $\beta: b \to d$ leképezésre $\alpha\omega_{ab} = \omega_{cb}$ és $\omega_{ab}\beta = \omega_{ad}$.

Egy $\alpha: a \to c$ leképezés monomorfizmus, ha $\varrho: b \to a$, $\sigma: b \to a$, $\varrho\alpha = \sigma\alpha$ esetén mindig $\varrho = \sigma$.

Egy $\alpha: c \to a$ leképezés epimorfizmus, ha $\varrho: a \to b$, $\sigma: a \to b$ és $\alpha\varrho = \alpha\sigma$ esetén mindig $\varrho = \sigma$.

α akkor és csak akkor monomorfizmus (epimorfizmus) C-ben, ha α^* epimorfizmus (monomorfizmus) C^*-ban. Ha létezik két monomorfizmus (epimorfizmus) szorzata, akkor ez szintén monomorfizmus (epimorfizmus). Ha $\alpha\beta$ monomorfizmus (epimorfizmus), akkor α monomorfizmus (β epimorfizmus).

Most definiáljuk a részobjektumot, faktorobjektumot és az ilyenek közt levő részbenrendezést.

Legyenek $\beta_1: b_1 \to a$ és $\beta_2: b_2 \to a$ monomorfizmusok. Ha létezik olyan ϱ monomorfizmus, hogy $\varrho\beta_1 = \beta_2$, akkor legyen $(b_1, \beta_1) \geqq (b_2, \beta_2)$. Ha $(b_1, \beta_1) \geqq (b_2, \beta_2)$ és egyidejűleg $(b_2, \beta_2) \geqq (b_1, \beta_1)$ is fennáll, akkor a (b_1, β_1) és (b_2, β_2) párok ekvivalensek. E reláció ekvivalencia-osztályait nevezzük az a objektum részobjektumainak. Ha két pár nem ekvivalens, de $\geqq$, akkor legyen köztük $>$ reláció.

Hasonlóan, legyenek $\beta_1: a \to b_1$ és $\beta_2: a \to b_2$ epimorfizmusok. Ha létezik olyan ϱ epimorfizmus, hogy $\beta_1\varrho = \beta_2$, akkor legyen $(\beta_2, b_2) \leqq (\beta_1, b_1)$. Ha $(\beta_2, b_2) \leqq (\beta_1, b_1)$ és egyidejűleg $(\beta_1, b_1) \leqq (\beta_2, b_2)$ akkor ez a két pár ekvivalens. E reláció ekvivalencia-osztályait nevezzük a faktorobjektumainak. Ha két pár nem ekvivalens, de $\leqq$, akkor legyen köztük $<$ reláció.

A továbbiakban definiáljuk a visszahúzás (pullback), kilökés (pushout), mag és ko-mag fogalmát.

Egy kommutatív

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "\chi_1"] \arrow[d, "\chi_2"'] & d_1 \arrow[d, "\delta_1"] \\ d_2 \arrow[r, "\delta_2"] & a \end{tikzcd}$$

diagram visszahúzás a δ_1 és δ_2 leképezésekre nézve, ha minden $c \in C$ objektumhoz és minden kommutatív

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & d_1 \arrow[d, "\delta_1"] \\
d_2 \arrow[r, "\delta_2"] & a
\end{tikzcd}$$

diagramhoz létezik egyetlen olyan $\gamma: c \to k$ leképzés úgy, hogy

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "\gamma_1"] \arrow[dd, "\gamma_2"'] \arrow[dr, "\gamma"] & & d_1 \arrow[dd, "\delta_1"] \\
& k \arrow[ur, "\chi_1"] \arrow[dl, "\chi_2"] & \\
d_2 \arrow[rr, "\delta_2"'] & & a
\end{tikzcd}$$

szintén kommutatív diagram.

A kilökés δ_1 és δ_2 leképezésekre nézve a homologikus nyilaknak mindenhol való megfordításával definiálható.

Az a objektum (k, χ) részobjektuma az $\alpha: a \to b$ leképezés magva, ha

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r] \arrow[d, "\chi"'] & 0 \arrow[d] \\
a \arrow[r, "\alpha"'] & b
\end{tikzcd}$$

visszahúzási diagram. Itt a χ leképezés normál monomorfizmus és $\ker \alpha = (k, \chi)$ pedig a ideálja.

Az a objektum (χ, k) faktorobjektuma ko-magva az $\alpha: b \to a$ leképezésnek, ha

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & a \arrow[d, "\chi"] \\
0 \arrow[r] & k
\end{tikzcd}$$

kilökési diagram.

Itt χ normális epimorfizmus és $\operatorname{Coker} \alpha = (\chi, k)$ pedig a normális faktorobjektuma.

A csoportok és gyűrűk kategóriájában minden epimorfizmus normális, de nem minden monomorfizmus lesz normális.

Sőt, két normális monomorfizmus szorzata sem normális.

Ha $\alpha\beta$ normális monomorfizmus és ha β monomorfizmus, akkor α (KUROS szerint) normális monomorfizmus lesz.

A továbbiakban feltesszük:

(C_2) Minden leképezésnek van magva és ko-magva.

(C_3) Minden a objektum részobjektumainak az osztálya és faktorobjektumainak az osztálya halmazok, amelyek az előzőkben definiált $\leqq$ részben rendezésre egy L_a illetve L_a^*, teljes hálót alkotnak.

(C_4) Minden $a \in C$ objektum ideáljai és normális faktorobjektumai L_a-nak, illetve L_a^*-nak teljes részhálóját alkotják.

Bebizonyítható, hogy

Ker Coker Ker α = Ker α és Coker Ker Coker α = Coker α.

Megjegyezzük a (C_4) axiómával kapcsolatban, hogy a (d_1, δ_1) és (d_2, δ_2) ideálok metszete olyan (k, χ) ideál lesz, hogy

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\chi"] & d_1 \arrow[d, "\delta_1"] \\ d_2 \arrow[r, "\delta_2"] & a \end{tikzcd}$$

visszahúzási diagram. Továbbá a (δ_1, d_1) és (δ_2, d_2) normális faktorobjektumok metszete olyan (χ, k) normális faktorobjektum lesz, hogy

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_2"'] \arrow[dr, "\chi"] & d_1 \arrow[d] \\ d_2 \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

kilökési diagram. A (d_1, δ_1) és (d_2, δ_2) ideálok (l, λ) egyesítése pedig olyan ideál, hogy egyrészt

$$\begin{tikzcd} l & d_1 \arrow[l] \arrow[d, "\delta_1"] \\ d_2 \arrow[u] \arrow[r, dash, "\delta_2"'] & a \arrow[ul, "\lambda"'] \end{tikzcd}$$

kommutatív diagram, másrészt minden $\gamma : c \to a$ leképezésre és minden

$$\begin{tikzcd} l & & d_1 \arrow[ll] \arrow[dl] \\ & c \arrow[dr, "\gamma"] & \\ d_2 \arrow[uu] \arrow[ur] & & a \end{tikzcd}$$

diagramra nézve létezik olyan $\lambda' : l \to c$ monomorfizmus, hogy $\lambda' \gamma = \lambda$, és a kibővített diagramm is kommutatív.

Két normális faktorobjektum egyesítését duálisan (tehát a nyilak megfordításával) definiáljuk.

Szerző és WIEGANDT RICHÁRD [85] igazolta, hogy L_a^* duálisan izomorf L_a-val, és a Ker $\alpha \leftrightarrow$ Coker Ker α leképzés kölcsönösen egyértelmű.

Legyen $\alpha: a\to b$ egy leképezés. Ha $\mu: a\to m$ epimorfizmus és $\nu: m\to b$ monomorfizmus, továbbá $\alpha=\mu\cdot\nu$, akkor b-nek az (m, ν) részobjektuma α-nak *képe* lesz. Ha μ ráadásul normális epimorfizmus, akkor (m, ν) *normális képe* lesz α-nak. Legyen (k, χ) az a részobjektuma és $\alpha: a\to b$ epimorfizmus. Ha $\chi\alpha$-nak egy képe (m, ν), akkor (m, ν) a (k, a) egy képe lesz az α epimorfizmus által. Duálisan definiálható α-nak a *ko-képe, normális ko-képe,* és (χ, k)-nak az α *monomorfizmus által való ko-képe* is.

A kép és ko-kép nincs egyértelműen meghatározva, de a normális kép és normális ko-kép mindig egyértelműen meghatározottak.

A csoportok és gyűrűk kategóriájában $\operatorname{Im}\alpha$ és $\operatorname{Coim}\alpha$ mindig létezik és $\operatorname{Im}\alpha$ mindig normális kép, de $\operatorname{Coim}\alpha$ általában nem lesz normális ko-kép.

Feltesszük, hogy teljesülnek:

(C_5) Minden α leképezéshez létezik $\operatorname{Im}\alpha$ és $\operatorname{Coim}\alpha$ (ezek általában nem normálisak).

(C_6) Minden ideálnak a képe bármely normális epimorfizmus által mindig ideál és minden normális faktorobjektumnak a ko-képe bármely normális monomorfizmus által mindig normális faktorobjektum.

Az első izomorfia-tétellel belátható, hogy $(C_1), (C_2), \ldots, (C_6)$ axiómák mind teljesülnek a csoportok és a gyűrűk kategóriájában.

Ha van α-nak normális képe és ha $\operatorname{Ker}\alpha=(0, \omega)$, akkor α monomorfizmus. (Ez KUROS eredménye).

Azt mondjuk, hogy egy g objektum az a_α $(\alpha\in A)$ objektumok direkt szorzata, ha léteznek olyan $\pi_\alpha: g\to a_\alpha$ leképezések (ezeket g-nek a_α-ra való projekcióinak nevezzük) úgy, hogy minden $h\in C$ objektumra és a $B_\alpha: h\to a_\alpha$ $(\alpha\in A)$ leképezések bármely rendszerére létezik egyetlen *kanonikus leképezés* $\gamma: h\to g$ úgy, hogy $\gamma\pi_\alpha=\beta_\alpha$ minden $\alpha\in A$ indexre. Ekkor ezt így írjuk:

$$g=\prod_{\alpha\in A} a_\alpha(\pi_\alpha).$$

Az f szabad szorzat duálisan definiálható. Feltesszük, hogy érvényes:

(C_7) Objektumok bármely halmazának létezik a direkt szorzata és a szabad szorzata.

Legyen az a objektum (k_α, χ_α) ideáljainak egy halmaza megadva, és legyenek $\beta_\alpha: a\to a_\alpha$ epimorfizmusok a $\operatorname{Ker}\beta_\alpha=(k_\alpha, \chi_\alpha)$ magokkal. Legyen a $g=\prod_{\alpha\in A} a_\alpha(\pi_\alpha)$ direkt szorzathoz tartozó kononikus leképezés $\gamma: a\to g$, ahol $\gamma\pi_\alpha=\beta_\alpha$ $(\alpha\in A)$. Ekkor $\operatorname{Ker}\gamma=\bigwedge_{\alpha\in A}(k_\alpha, \chi_\alpha)$ érvényes. Feltesszük annak érvényességét, hogy

(C_8) Minden epimorfizmus normális.

Az ilyen C kategóriákban bebizonyítható a két izomorfia tétel (ezek sorszámozása a szokásos, tehát eltér [86]-tól).

ELSŐ IZOMORFIA-TÉTEL. *Legyenek (k, χ), (d_1, δ_1) és (d_2, δ_2) az a objektum ideáliai úgy, hogy*

$$(k, \chi)=(d_1, \delta_1)\cap(d_2, \delta_2) \quad \textit{és} \quad (a, \varepsilon_a)=(d_1, \delta_1)\cup(d_2, \delta_2).$$

Ha $0\to k\to d_1\to b_1\to 0$ *és* $0\to d_2\to a\to b_2\to 0$

exakt sorozatok, akkor exakt és kommutatív a következő diagram is (azaz b_1 és b_2 ekvivalensek):

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r] \arrow[d] & d_1 \arrow[r] \arrow[d] & b_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & d_2 \arrow[r] & a \arrow[r] & b_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

MÁSODIK IZOMORFIA-TÉTEL. *Legyen (k, χ) ideál az a objektumban és (m, μ) ideál a b objektumban és legyen*

$$0 \to k \xrightarrow{\chi} a \xrightarrow{\alpha} b \to 0$$

exakt sorozat. Legyen (d, δ) az (m, μ) teljes inverz képe az α epimorfizmus mellett. Ekkor léteznek olyan B és γ leképezések, hogy

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r] & d \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & m \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & b \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & c \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

exakt és kommutatív diagram.

A C kategória objektumainak egy R osztálya radikál-osztály, ha teljesül a következő három feltétel:

(a) Ha $a \in R$ és ha $\alpha : a \to b$ normális epimorfizmus, akkor $b \in R$.

(b) Minden $a \in C$ objektumra, az olyan (k, χ) ideálok e egyesítése, amelyekre $k \in R$, szintén R-hez tartozik, vagyis $e \in R$. Ekkor $e = R\text{-rad}\, a$, amelyet R-radikáljának nevezünk

(c) Ha $\alpha : a \to b$ olyan normál epimorfizmus, hogy $\ker \alpha = R\text{-rad}\, a$, akkor $R\text{-rad}\, b = (0, \omega)$.

Az R-hez duális S osztályt féligegyszerű osztálynak nevezzük. Tehát S féliegegyszerű osztály, ha teljesülnek:

(a*) Ha $a \in S$ és ha $\alpha : b \to a$ normális monomorfizmus, akkor $b \in S$.

(b*) Minden $a \in C$ objektumra az összes olyan (λ, l) normális faktorobjektumnak az f egyesítése, amelyekre $l \in S$, az S-hez tartozik, vagyis $f \in S$. Ekkor $f = S\text{-ses}\, a$, amelyet az a S-féligegyszerű képének nevezünk.

(c*) Ha $\alpha : b \to a$ normális monomorfizmus, ahol $\operatorname{Coker} \alpha = S\text{-ses}\, a$, akkor $S\text{-ses}\, b = (\omega, 0)$ S-normális faktorobjektum olyan (λ, l) normális faktorobjektum, amelyre $l \in S$.

Ha R radikálosztály, legyen R^* mindazon $a \in C$ objektumoknak az osztálya, amelyek R-radikálja zérus objektum. Hasonlóan, ha S félieggyszerű osztály, legyen S^* mindazon $a \in C$ objektumoknak az osztálya, amelyekre $S\text{-ses}\, a$ zérus objektum. Világos, hogy $R \cap R^*$ és $S \cap S^*$ egyaránt csak a zérus objektumból állhat.

Bizonyítás nélkül kimondható a nemtriviális:

9. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a C kategóriában bármely két normális epimorfizmus szorzata normális epimorfizmus. Ha S féligegyszerű osztály C-ben, akkor S^* radikálosztály.*

Megjegyezzük, hogy E. P. ARMENDARIZ—W. G. LEAVITT [3] szerint az összes nemasszociatív gyűrű kategóriájában az R^* osztály nem mindig teljesíti az (a^*) feltételt. Viszont az alternatív gyűrűknek vagy az asszociatív gyűrűknek a kategóriájában (a^*) mindig teljesül az R^* osztályra.

10. TÉTEL. *Legyen minden R radikálosztályra R^* féligegyszerű osztály, és legyen minden S féligegyszerű osztályra S^* radikálosztály a C kategóriában. Ekkor $R^{**}=R$ és $S^{**}=S$.*

4. §. A szubdirekt beágyazás dualizálása kategóriákban és alkalmazások alternatív és asszociatív gyűrűkre, csoportokra és modulusokra

Ennek a §-nak az anyaga részletesen megtalálható a szerző és WIEGANDT RICHARD [85] közös dolgozatában. Feltesszük, hogy a C kategóriára teljesülnek a $(C_1), (C_2), \dots, (C_7)$ axiómák, amelyeket az előző, 3. §-ban fogalmaztunk meg.

Egy $a \in C$ objektum a $g = \prod_{\alpha \in A} a_\alpha(\pi_\alpha)$ direkt szorzatba *szubdirekt módon van beágyazva*, ha létezik olyan, $\gamma: a \to g$ monomorfizmus úgy, hogy az összes $\beta_\alpha: a \to a_\alpha$ leképezés, ahol $\beta_\alpha = \gamma\pi_\alpha$, normális epimorfizmus.

Dualizálással adódik, hogy egy $a \in C$ objektum az $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(\varrho_\alpha)$ szabad szorzatnak egy *transz-szabad képe*, ha létezik olyan $\sigma: f \to a$ epimorfizmus, hogy minden $\beta_\alpha: a_\alpha \to a$ $(\alpha \in A)$ leképezés, ahol $\beta_\alpha = \varrho_\alpha\sigma$, normális monomorfizmus.

G. BIRKHOFF szubdirekt összegekről szóló ismert tétele kategória-elméleti általánosításának nem triviálisan bizonyítható dualisaként igaz:

11. TÉTEL. *Egy $a \in C$ objektum az $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(\varrho_\alpha)$ szabad szorzatnak akkor és csak akkor egy transz-szabad képe, ha létezik $(\lambda_\alpha, l_\alpha)$ normális faktorobjektumoknak olyan halmaza, hogy mindegyik $(\lambda_\alpha, l_\alpha)$ ko-magva a $\beta_\alpha: a_\alpha \to a$ normális monomorfizmusnak $(\alpha \in A)$ és $\bigwedge_{\alpha \in A} (\lambda_\alpha, l_\alpha) = (\omega, 0)$.*

Egy $a \in C$ objektum transz-szabad módon irreducibilis, ha az összes *nemzérus* normális faktorobjektumának a metszete egy *nemzérus* normális faktorobjektum.

Bizonyítás nélkül említjük az alábbi tételt.

12. TÉTEL. *Legyen az $a \in C$ objektum összes normális faktorobjektumának L_a^* teljes hálója kompaktul generált. Ekkor a az $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(\varrho_\alpha)$ szabad szorzatnak egy transz-szabad képe a γ epimorfizmus mellett, úgy hogy $\varrho_\alpha\gamma = \beta_\alpha$ és $\beta_\alpha: a_\alpha \to a$ normális monomorfizmus minden $\alpha \in A$ indexre. Ebben a felbontásban egy a_α komponens akkor és csak akkor transz-szabad módon irreducibilis, ha a következő feltétel teljesül:*

(F) *a_α-nak minden $(m, \chi) \neq (a_\alpha, \varepsilon_{a_\alpha})$ ideáljához (amely a-nak nyilván egy (m, χ_1) részobjektuma, létezik a-nak olyan (d, δ) ideálja, hogy $(m, \chi_1) \leqq (d, \delta) \subsetneqq (a_\alpha, \beta_\alpha)$.*

Az (F) feltétel más szóval azt jelenti, hogy az a_α objektumnak pontosan egy (d, δ') valódi maximális ideálja van (itt $\delta = \delta' B_\alpha$ és (d, δ) ideál az a objektumban).

Most interpretálni fogjuk a 12. Tételt. Egy L teljes háló k elemét ko-kompaktnak nevezzük, ha $k \geqq \bigwedge_{\beta \in B} l_\beta$ esetén a B index-halmaznak van olyan véges Γ részhalmaza, hogy már $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} l_\gamma \leqq k$ is teljesül. Minthogy L_a és L_a^* duálisan izomorfok, L_a^* akkor és csak akkor kompaktul generált, ha L_a ko-kompaktul generált, vagyis L_a minden eleme ko-kompakt elemek metszeteként állítható elő.

13. TÉTEL. *Az L háló minden eleme akkor és csak akkor ko-kompakt, ha L-ben teljesül a minimum-feltétel.*

14. TÉTEL. *Ha az A gyűrű olyan A_α gyűrűknek a diszkrét direkt összege, hogy mindegyik A_α jobbegységelemes vagy balegységelemes, és A_α kétoldali ideáljaira teljesül a minimum-feltétel, akkor A kétoldali ideáljainak az L teljes hálója ko-kompaktul generált.*

Az (F) feltétel gyűrűkre pl. az alábbi speciális esetekben teljesül:
1. Minden elérhető részgyűrű ideál.
2. Minden részgyűrű ideál.
3. Minden ideál idempotens.

15. TÉTEL. *Legyen A tetszőleges* 1., 2. *vagy* 3. *típusú olyan gyűrű, amely balegységelemes gyűrűknek és jobbegységelemes gyűrűknek a diszkrét direkt összege úgy, hogy ezekben a direkt komponensekben a minimum-feltétel teljesül a kétoldali ideálokra. Ekkor léteznek A-ban olyan A_β $(\beta \in B)$ ideálok, hogy*

(i) *mindegyik A_β-nak egyetlen valódi ideálja van, amely A-nak is ideálja;*

(ii) *mindegyik A_β olyan típusú, mint A;*

(iii) *A homomorf képe a $\sum B_\beta$ szabad összegnek, ahol $B_\beta \cong A_\beta$ és a $\sum B_\beta$ szabad összeg az összes formális $\sum n_r \varphi_r$ végessok-tagú összeg halmaza, ahol $n_r \in Z$ racionális egész szám, és φ_r pedig bizonyos B_β gyűrűkből vett végessok-tényezős szorzat.*

KIEGÉSZÍTÉS. A 2. eset fontos alesete: 2.1. *Minden részgyűrű direkt összeadandó.* A 3. eset fontos alesetei:

3.1. *A Neumann-reguláris;*
3.2. *A erősen reguláris, azaz $a \in a^2 A$ minden $a \in A$ elemre;*
3.3. *A bireguláris, azaz minden főideál egységelemes;*
3.4. *A gyengén reguláris, azaz minden jobbideál idempotens.*

MEGJEGYZÉS. A 15. Tétel igaz akkor is, ha az 1., 2. és 3. típusok helyett a 2.1., 3.1., 3.2., 3.3. és 3.4. gyűrű típusokat vesszük.

16. TÉTEL. *Legyen a G csoport normálosztóinak az L hálója ko-kompaktul generált, és legyen G-ben tranzitív a „normálosztónak lenni" reláció. Ekkor léteznek G-nek olyan G_α normálosztói, hogy teljesül az alábbi két feltétel:*

(i) *Mindegyik G_α-nak egyetlen maximális normálosztója van;*

(ii) *G homomorf képe a $\prod^* F_\alpha$ szabad szorzatnak, ahol $F_\alpha \cong G_\alpha$ $(\alpha \in A)$.*

MEGJEGYZÉS. A 16. TÉTEL megfelelője kimondható volna egy A gyűrű felett vett M A-jobbmodulusra is.

Asszociatív gyűrűk egy R radikálosztálya öröklődő, ha abból, hogy $A\in R$, és hogy I ideál A-ban, következik $I\in R$ is.

17. TÉTEL. *Legyen A egy öröklődő R-radikálgyűrű, amelynek az L ideálhálója ko-kompaktul generált. Ekkor A bizonyos R-radikál I_α ideáljainak egy transz-szabad képe. I_α akkor és csak akkor lesz transz-szabad módon irreducibilis, ha az* (F) *feltétel teljesül az I_α ideálra.*

Példa adható meg arra, hog egy a objektum kétoldali ideáljainak L_a hálója nem ko-kompaktul generált. Legyen ugyanis A zérusosztómentes, egységelemes és kommutatív főideálgyűrű. Ekkor léteznek irreducibilis elemek A-ban, amelyek prímelemek, érvényes A-ban a számelmélet alaptétele, és bármely két elemnek létezik a legnagyobb közös osztója. Ha I tetszőleges nem zérus ideál A-ban, van olyan $a\in A$ elem, hogy $I=(a)$. Létezik olyan $p(\neq 1)$ prímelem A-ban, hogy $(a,p)=1$. Minthogy $\bigwedge_{k=1}^{\infty} (p^k)=0\subset(a)$, de minden k-ra $(p^k)\subsetneqq(a)$, ezért I nem ko-kompakt elem az A gyűrű L ideálhálójában. Minthogy I tetszőlegesen volt választva, L nem ko-kompaktul generált.

5. §. Kritériumok és elegendő feltételek arra, hogy egy felső radikál öröklődő legyen

E §-nak az anyaga a szerző és WIEGANDT RICHARD [87] közös dolgozatában található meg.

Az öröklődő radikálok már az előző §-ban levő 17. Tételben is előfordultak. Ebben a §-ban, többek közt, megmutatjuk azt, hogy az öröklődő radikálok igen gyakran lépnek fel abban az értelemben, hogy minden $\mathfrak{m}$ végtelen számosságához megadható olyan P és Q öröklődő radikál, hogy P és Q közt pontosan $2^{\mathfrak{m}}$ számosságú öröklődő R radikál létezik, tehát: $P\leqq R\leqq Q$. Példát adunk még arra is, hogy a P és Q öröklődő radikálok közt nincs más öröklődő radikál. Azt többen vizsgálták (pl. ARMENDARIZ—LEAVITT [4]) korábban, hogy egy alsó radikál öröklődő legyen, ezért célszerű most a felső radikál öröklődőségét vizsgálni.

Legyen F testeknek egy osztálya, amely nem halmaz a *Zermelo—Fraenkel*-halmazelmélet szerint. Legyen UF az F által meghatározott felső radikál, és legyen $F(\mathfrak{m})$ az F osztálynak egy $\mathfrak{m}$-számosságú részhalmaza.

18. TÉTEL. *Legyen $P(\subseteqq UF)$ tetszőleges radikálosztály és Q pedig $P\cup F(\mathfrak{m})$ osztállyal meghatározott $\mathscr{L}(P\cup F(\mathfrak{m}))$ alsó radikál. Ekkor a $[P, Q]$ intervallumban pontosan $2^{\mathfrak{m}}$ számú radikálosztály van. $[P, Q]$ minden radikálosztálya akkor és csak akkor öröklődő, ha P öröklődő.*

Bizonyítás. Legyen $R\in[P, Q]$, tehát R a $[P, Q]$ intervallumból egy radikálosztály. Legyen $F(\mathfrak{n})$ az $F(\mathfrak{m})$ halmazból mindazon testeknek a halmaza, amelyek R-beli bizonyos gyűrűknek az ideáljai. (Itt $\mathfrak{n}$ jelenti $F(\mathfrak{n})$ számosságát). Ezért $B\in F(\mathfrak{n})$ esetén B direkt összeadandója egy R-beli gyűrűknek, és így $P\cup F(\mathfrak{n})\subseteqq R$ miatt $\mathscr{L}(P\cup F(\mathfrak{n})\subseteqq R.)$)

Ha $A \in R$, de $A \notin P$, akkor $A_1 = A/P(A) \neq 0$ és $R(A_1) = A_1$. Minthogy $Q = \mathcal{L}(P \cup F(\mathfrak{m}))$, ezért $Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$, ahol $N_1 = P \cup F(\mathfrak{m})$ és N_k mindazon gyűrűk halmaza, amelyeknek minden nemzérus homomorf képében van nemzérus ideál N_l-ből, ahol $l < k$. Ezért $Q(A_1) = A_1$, és van SULINSKI—ANDERSON—DIVINSKY [35] 1. Lemmája szerint A_1-nek olyan nemzérus elérhető A_n részgyűrűje, amely $N_1 = P \cup F(\mathfrak{m})$ eleme. Ha $A_n \in P$, akkor $P(A_{n-1})$ ideál A_{n-2}-ben, és $0 \neq A_n \subseteq P(A_{n-1})$. Ezért az $A_{n-3}, \ldots, A_2, A_1$ elérhető részgyűrűknek nemzérus P-radikáljaik vannak, ami lehetetlen. Ezért A_1-nek egy A_n nemzérus elérhető részgyűrűje $F(\mathfrak{m})$ eleme. Ezért A_n test. Legyen A_n^* az A_n által A_1-ben generált ideál. Ekkor $A_n = A_n^3 \subseteq (A_n^*)^3 \subseteq A_n$ miatt $A_n \in F(\mathfrak{n})$, tehát $R \subseteq \mathcal{L}((P \cup F(\mathfrak{n}))$ következik. Minthogy pedig $F(\mathfrak{m})$-ben pontosan $2^{\mathfrak{m}}$ számú olyan $F(\mathfrak{n})$ részhalmaz van, amelyekre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$, ezért a 18. Tétel első felét bebizonyítottuk. A másik fele ARMENDARIZ—LEAVITT [4] 3. Lemmájából adódik, amely szerint, ha N öröklődő, akkor $\mathcal{L}(N)$ is öröklődő.

19. TÉTEL. *Legyen $P \subseteq UF$, és legyen F-nek a $\mathcal{G}$ részosztálya nem halmaz* (jelölések megegyeznek a 18. Tételével), *legyen továbbá $Q = \mathcal{L}(P \cup \mathcal{G})$. Ekkor a $[P, Q]$ intervallumba eső radikálok osztályt, de nem halmazt alkotnak. Ha P öröklődő, akkor $[P, Q]$-ba eső minden radikál öröklődő.*

Bizonyítás. A bizonyítás módszere ugyanaz, mint a 18. Tételé.

20. TÉTEL. *Minden R radikálhoz tartozik egyetlen maximális öröklődő H szubradikál.*

Bizonyítás. Legyen $\ddot{O}$ mindazon öröklődő radikálosztályok egyesítése, amelyekre $\ddot{O} \leqq R$. Ekkor $\ddot{O}$ szintén öröklődő, és $H = \mathcal{L}(\ddot{O}) \leqq R$ kívánt szubradikál, amely öröklődő.

21. TÉTEL. *A 20. tétel jelöléseit megtartva H mindazon A gyűrűkből áll, amelyeknek egyik nemzérus elérhető részgyűrűje sem képezhető le homomorf módon az SR féligegyszerű osztály egy nemzérus gyűrűjére.*

Bizonyítás. Világos, hogy R éppen az USR felső radikál. Legyen C mindazon gyűrűk osztálya, amelyeknek egyik nemzérus elérhető részgyűrűjük sem képezhető le homomorf módon az SR osztály egy nemzérus gyűrűjére. Igazolni fogjuk, hogy $C = H$. Minthogy C öröklődő, és homomorf zárt, ezért $\mathcal{L}C$ is öröklődő, és:

$$C \subseteq \mathcal{L}C \subseteq R = USR.$$

Másfelől, ha $A \in H \subseteq R$, akkor $SR \subseteq SH$, és minthogy H öröklődő, A minden elérhető részgyűrűje H eleme, és így homomorf módon nem képezhető le SR egy nemzérus gyűrűjére. Ezért $A \in C$, tehát $H \subseteq C$. Így $H \subseteq \mathcal{L}C$, tehát $H = \mathcal{L}C$.

Példa. Megmutatjuk, hogy az is lehet, hogy P és Q öröklődő radikálok, de a $[P, Q]$ intervallum minden más radikálja nem öröklődő. Legyen $P = \{(0)\}$ és Q a $Z(p)$ prímszámrendű zérógyűrűvel meghatározott alsó radikál. Legyen $(H \neq P)$ öröklődő radikál a $[P, Q]$ intervallumból. Ekkor minden $A \in H$ gyűrűre $A \in Q$, tehát van A-nak egy $Z(p)$-vel izomorf elérhető részgyűrűje. Minthogy H öröklődő, $Z(p) \in H$, és így $Q = \mathcal{L}(Z(p)) \subseteq H$. Másfelől a $Z(p^\infty)$ kváziciklikus additív csoportú zérógyűrűvel meghatározott $\mathcal{L}(Z(p^\infty))$ alsó radikálosztály pontosan azon zérógyűrűkből áll, amelyeknek az additív csoportja $C(p^\infty)$ csoportok diszkrét direkt összege. Minthogy $\mathscr{L}(Z(p^\infty))\neq Q$, ezért $\mathscr{L}(Z(p^\infty))$ nem öröklődő, bár $\mathscr{L}(Z(p^\infty))$ benne van a $[P, Q]$ intervallumban.

Minden $R\in[P, Q]$ radikálhoz legyen $\bar{R}$ a $[P, Q]$ intervallumba eső, R-et tartalmazó öröklődő radikálok metszete. Ez az $\bar{R}$ radikál $[P, Q]$-ban R öröklődő lezártja lesz. Nyilván $\overline{R_1\cup R_2}=\bar{R}_1\cup\bar{R}_2$ tehát $R\to\bar{R}$ topologikus lezárás.

22. TÉTEL. *Ha az R radikál nem öröklődő, léteznek olyan $P\subseteq R$ és $Q\supseteq R$ öröklődő radikálok, hogy sem $[P, R]$ sem $[R, Q]$ nem tartalmaz öröklődő radikált, csak P-t és Q-t.*

Bizonyítás. Legyen $P=H$ és $Q=\bar{R}$, ekkor nyilván teljesülnek a tétel állításai.

23. TÉTEL. *Legyen M tetszőleges öröklődő gyűrű-osztály. Az UM felső radikál akkor és csak akkor öröklődő, ha UM pontosan azokból a gyűrűkből áll, amelyeknek egyik nemzérus elérhető részgyűrűjének sincs nemzérus homomorf képe az M gyűrűosztályban.*

Bizonyítás. UM a 21. Tétel szerint akkor és csak akkor öröklődő, ha UM tartalmazza mindazokat a gyűrűket, amelyeknek egyik nemzérus elérhető részgyűrűjének sincs nemzérus homomorf képe az $\bar{M}=SUM$ féligegyszerű gyűrűosztályban. Ezért, ha $A\in UM$, akkor $M\subseteq\bar{M}$ miatt M-ben sincs nemzérus homomorf képe A nemzérus elérhető részgyűrűjének. Ha pedig $A\notin UM$, akkor van olyan $B\neq 0$ elérhető részgyűrű, amelynek egy nemzérus S homomorf képe $\bar{M}$-ben fekszik, és S homomorf leképezhető M egy nemzérus gyűrűjére is.

A továbbiakban elegendő feltételeket adunk meg arra, hogy az UM felső radikál öröklődő legyen. Feltesszük, hogy M öröklődő osztály, és még a további feltételeket szabhatjuk ki M-re:

(i) M homomorf zárt.

(ii) Ha I ideál A-ban, és L olyan ideál I-ben, hogy $I/L\in M$, akkor L ideál A-ban.

(iii) Ha K ideál A-ban, és $K\in M$, akkor létezik olyan N valódi ideál A-ban, hogy $K+N=A$.

(iv) Jelölje I_0 az I ideál kétoldali A-beli annihilátorát. Ha $I\in M$, akkor $A/I_0\in M$.

(v) Ha I és L az A gyűrű ideáljai és $I\supseteq L$, továbbá $I/L\in M$, akkor $(L:I)\cap J=L$.

Megjegyezzük, hogy egységelemes egyszerű gyűrűk bármely osztálya homomorf zárt, és eleget tesz az (i), (ii), ..., (v) feltételeknek. Másfelől az összes (*Jacobson*-féle) primitív gyűrű M osztályával meghatározott felső radikál éppen a J *Jacobson*-radikál, amely nyilván öröklődő radikál, bár ez az M osztály nem homomorfan zárt. Létezik ui. olyan primitív gyűrű, amelynek minden valódi homomorf képe nilpotens, tehát e homomorf képek *Jacobson*-radikálgyűrűk.

24. TÉTEL. *Legyen M homomorfan zárt és öröklődő olyan gyűrűosztály, amelyre teljesül* (i), (ii) *és* (iii). *Ekkor az UM felső radikál öröklődő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A\in UM$ és A egy I ideáljára $I\notin UM$. Ekkor van I-nek olyan L ideálja, hogy $0\neq I/L\in M$, és (ii) alapján L ideál A-ban is. Ezért I/L az A/L gyűrű M-ideálja, ezért (iii) alapján van olyan N/L ideál A/L-ben, hogy $N/L\neq A/L$, és

$$A/L = I/L+N/L.$$

Ekkor $L \subseteq I \cap N$ és $A = I + N$, továbbá az első izomorfiatétel szerint $A/N \cong I/I \cap N$, és így A/N homomorf képe, $L \subseteq I \cap N$ miatt, $I/L (\in M)$-nek, ezért M homomorf zártsága miatt $A/N \in M$, ami $A \in \overline{U}M$ miatt lehetetlen. Ezért UM tényleg öröklődő radikál.

25. TÉTEL. *Ha M homomorfan zárt és öröklődő olyan gyűrűosztály, amelyre teljesül* (ii) *és* (iv), *akkor az UM felső radikál öröklődő.*

Bizonyítás. Legyen $A \in UM$ és I az A gyűrű olyan ideálja, hogy $I \notin UM$. Ekkor $UM(I)$ ideálja A-nak is, továbbá $0 \neq I' = I/UM(I) \in SUM = \overline{M}$. Minthogy I'-nek bármely nemzérus ideálja homomorfan leképezhető M egy nemzérus gyűrűjére, van I'-nek olyan L' ideálja, hogy $I'/L' \in M$. A második izomorfia-tétel szerint van olyan L ideál I-ben, hogy $I/L \cong I'/L' \in M$, és az (ii) feltétel miatt L ideál A-ban. Legyen $A'' = A/L$ és $I'' = I/L$, továbbá I_0'' kétoldali annihilátora I''-nek A''-ben. Ekkor az (iv) feltétel alapján $0 \neq A/(I_0 \cong (A/L)/I_0/L) = A''/I_0'' \in M$, ellentétben azzal, hogy $A \in UM$. Ezért UM tényleg öröklődő radikál.

26. TÉTEL. *Legyen M olyan homomorfan zárt és öröklődő gyűrűosztály, amelyre a* (ii), (iv) *és* (v) *feltételek teljesülnek. Ekkor az $\overline{M} = SUM$ féligegyszerű osztályból minden gyűrű M-ből vett gyűrűknek lesz egy szubdirekt összege.*

Bizonyítás. Ha $A \in \overline{M}$, van olyan I ideál A-ban, hogy $0 \neq A/I \in M$. Legyen $\{I_\alpha\}$ mindazon ideáloknak a halmaza, amelyekre $0 \neq A/I_\alpha \in M$. Legyen $K = \cap I_\alpha$. Elég megmutatni azt, hogy $K = 0$. Minthogy $\overline{M}$ is öröklődő osztály, $A \in \overline{M}$ miatt $K \in \overline{M}$. Ezért van K-nak olyan L ideálja, hogy $K/L \in M$, és (ii) alapján L ideál A-ban is. Nyilvánvaló, hogy K/L-nak A/L-beli kétoldali annihilátora $(L: K)/L$. Ezért a (iv) feltétel alapján

$$A/(L:K) \cong (A/L)/(L:K)/L \in M,$$

tehát $L:K \in \{I_\alpha\}$. Ezért $K \subseteq (L:K)$, és (v) alapján

$$K \subseteq (L:K) \cap K = L \subseteq K,$$

ami ellentmond K megválasztásának. Ezért a 26. Tételt indirekt bebizonyítottuk.

Példa. Legyen R az összes *Neumann*-reguláris gyűrű osztálya. R nyilván öröklődő radikálosztály, és $R = USR$, pedig az SR osztályra (ii), (iii) és (iv) egyike sem teljesül. Legyen ugyanis $A = \{a_1, a_2\}$, ahol $2a_i = 0$, és a szorzási tábla

	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_2	0

Világos, hogy $A_2 = \{a_2\}$ nilpotens minimális ideál, ezért $A_2 \in SR$, de (ii) nem teljesül. Minthogy nincs olyan N valódi ideál, hogy $N + A_2 = A$, ezért (iii) sem teljesül. Továbbá A_2 annihilátora maga A_2, és minthogy $A/A_2 \cong \{a_1\}$ test, ezért $A/A_2 \in R$ és $A/A_2 \notin SR$. Tehát (iv) sem teljesül.

6. §. Wiegandt Richárd egy problémájának a megoldása homomorfan zárt nemtriviális féligegyszerű gyűrűosztály létezéséről

Ennek a §-nak az anyag megtalálható a szerző [55], [56] és [73] dolgozataiban. Az öröklődő radikáloknak kategória-elméletileg duálisai azok a féligegyszerű gyűrűosztályok, amelyek homomorfan zártak. Az ilyen féligegyszerű gyűrűk szubdirekt irreducubilis féligegyszerű gyűrűknek lesznek szubdirekt összegei. Ilyen féligegyszerű S gyűrűosztályra van két triviális példa:

1. S az összes gyűrűt tartalmazza;
2. S csak a $\{0\}$ gyűrűt tartalmazza.

Wiegandt Richárd kérdezte, hogy létezik-e nemtriviális, homomorfan zárt féligegyszerű S osztály. Megmutatjuk, hogy létezik ilyen nemtriviális osztály. Megadjuk továbbá ennek az osztálynak hat ekvivalens feltétellel való jellemzését, és azt is igazoljuk, hogy az $I \to US(I)$ megfeleltetés asszociatív és alternatív gyűrűk esetében a kétoldali ideálok hálójának egyesítés-endomorfizmusa.

Egy R-féligegyszerű gyűrű erősen féligegyszerű, ha a gyűrű minden homomorf képe R-féligegyszerű. E fogalom V. A. Andrunakievič [2] és A. Sulinski [34] dolgozataiban más vonatkozásban szerepelt.

27. Tétel. *Minden $n \geqq 2$ természetes számhoz létezik olyan R_n radikál, amelyik speciális* (v.ö. Divinsky [9], VII fejezet), *és minden R_n-féligegyszerű gyűrű erősen féligegyszerű és kommutatív.*

Bizonyítás. Rögzített $n \geqq 2$ természetes számra legyen K_n mindazon A_n testeknek az osztálya, amelyekre $a^n = a$ teljesül minden $a \in A_n$ esetén. Legyen továbbá L_n mindazon B_n gyűrűknek az osztálya, amelyekre $b^n = b$ teljesül minden $b \in B_n$ esetén. N. Jacobson ([19] Theorem 10.1.1) szerint minden B_n kommutatív, és minthogy minden B_n *Jacobson*-féligegyszerű, ezért B_n a K_n-ből vett bizonyos testeknek lesz egy szubdirekt összege. Fordítva, K_n-ből vett bizonyos testeknek bármely szubdirekt összege L_n-hez tartozik, mert az $a^n = a$ feltétel öröklődik részgyűrűkre, homomorf képre és komplett direkt összegre is.

Ahhoz, hogy megmutassuk azt, hogy UK_n speciális radikál, igazolni kell (vö. Divinsky [9], VII. fejezet), hogy

1. K_n-ből minden gyűrű prímgyűrű;
2. K_n-beli gyűrű minden nemzérus ideálja is K_n-beli;
3. Ha I_0 jelenti az I ideál A-beli kétoldali annihilátorát, és ha $I \in K_n$, akkor $A/I_0 \in K_n$.

A K_n osztályra 1. és 2. triviálisan teljesülnek, mert minden test egyszerű és prímgyűrű. Legyen I ideál A-ban, $I \in K_n$, $i \in I$ és $a \in A$. Ekkor

$$(ai)^n = ai \quad \text{és} \quad (ia)^n = ia,$$

továbbá I kommutativitása miatt k szerinti teljes indukcióval belátható $(ai)^k = a^k i^k$ és $(ia)^k = i^k a^k$. Ezért $i^n = i$ miatt nyilvánvalóan:

$$(a^n - a)i = i(a^n - a) = 0,$$

tehát $a^n - a \in I_0$ minden $a \in A$ elemre. Ennélfogva

$$A/I_0 \in L_n.$$

Minthogy azonban $I \in K_n$, I egységelemes ideál A-ban, tehát $A = I \oplus I_1$ és $I_1 = I_0$, tehát $A/I_0 \cong I \in K_n$. Ezért UK_n speciális radikál, tehát UK_n öröklődő. Belátható, hogy $L_n = SUK_n$, és L_n nyilván homomorfan zárt.

MEGJEGYZÉS. P. N. STEWART [33] megoldotta azt a problémát, hogy létezik nemtriviális olyan féligegyszerű gyűrűosztály, amely ugyanakkor radikálosztály is egy másik radikálra nézve. P. N. STEWART nemcsak adott egy ilyen megoldást, hanem módszeresen meg is határozta az összes ilyen megoldást. Érdekes viszont, hogy P. N. STEWART megoldásai egybeesnek éppen a 27. Tétel bizonyításában szereplő L_n osztályokkal.

28. TÉTEL. *Egy A gyűrűre ekvivalens az alábbi hat feltétel:*
1. *A minden S részgyűrűje idempotens;*
2. *A minden S részgyűrűjének minden homomorf képe balannihilátormentes;*
3. *A minden S részgyűrűje Neumann-reguláris;*
4. *A minden S részgyűrűje erősen reguláris;*
5. *A-nak az A^+ additív csoportja torzió-csoport, és minden elem rendje négyzetmentes szám. Továbbá minden $a \in A$ elemmel generált részgyűrű véges, és $\{a\}$ véges testek direkt összege A kommutatív.*
6. *Minden $a \in A$ elemhez létezik olyan $n = n(a) \geqq 2$ kitevő, hogy*

$$a^n = a.$$

Bizonyítás. 6.-ból következik 5. Ugyanis

$$2^n a = 2^n a^n = (2a)^n = 2a$$

miatt $(2^n - 2)a = 0$. Továbbá 6. miatt minden részgyűrű idempotens, tehát ha $A = \sum_p \oplus A_p$, akkor $A_p^2 = A_p$ és

$$p^2 A_p = p^2 A_p^2 = (pA_p)^2 = pA_p$$

miatt pA_p^+ osztható. Ha $pA_p^+ \neq 0$, akkor $pA_p^+ \sum C(p^\infty)$, amiből $p^2 A_p^2 = pA_p = 0$ adódik. Ezért $pA_p = 0$, és így minden elem rendje négyzetmentes szám. Továbbá $a^n = a$ miatt $\{a\}$ véges féligegyszerű gyűrű, tehát alkalmazva N. JACOBSON ([19], Theorem 10.1.1) eredményét, 5. adódik.

5.-ből 4. következik. Legyen ugyanis

$$\{a\} = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n,$$

ahol F_i véges test. Legyen $a = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, ahol $f_i \in F_i$. Ha $f_i = 0$, legyen $g_i = 0$. Ha pedig $f_i \neq 0$, legyen g_i az f_i inverz eleme F_i-ben. Ekkor

$$a = (f_1 + \ldots + f_n)(f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n) =$$
$$= a^2 (g_1 + g_2 + \ldots + g_n) \in a^2 \cdot \{a\}.$$

4. triviálisan adódik 3.-ból.

2. is következik 3.-ból, mert *Neumann*-reguláris gyűrű minden homomorf képe is ilyen, és balannihilátormentes.

2.-ből következik 1., mert S/S^2 balannihilátormentes, tehát $S \subseteqq S^2$. De $S^2 \subseteqq S$, és így $S^2 = S$.

1.-ből következik 6. Minthogy $\{a\}^2=\{a\}$, van olyan $a_1\in\{a\}$, hogy $a=aa_1$. Ekkor $a=a\cdot a_1^2$, és legyen $a_1^2=a\cdot a_2$, ahol $a_2\in\{a\}$. Ekkor $a=a^2\cdot a_2$, tehát A nilpotens elem nélküli gyűrű. Minthogy $(a_1^2-a_1)^2=0$, ezért $a_1=a_1^2\neq 0$ idempotens elem. Miként előbb láttuk, A^+ minden elemének a rendje négyzetmentes szám, és $a\in\{a\}^2$ miatt A_p algebrai algebra a K_p véges prímtest felett. Minthogy $\{a\}$ féligegyszerű, és véges, $\{a\}$ véges sok véges test direkt összege, és így van olyan n, hogy $a^n=a$.

Ismeretes, hogy ha I ideál az A gyűrűben, és ha R tetszőleges radikál, akkor $R(I)$ ideál A-ban is. Most ezt a

$$\varphi: I\to R(I)$$

leképezést fogjuk vizsgálni.

29. TÉTEL. (1) *A φ leképzés monoton, vagyis $I_1\subseteqq I_2$ esetén $\varphi(I_1)\subseteqq\varphi(I_2)$.*

(2) *Ha az SR féligegyszerű osztály homomorfan zárt, akkor bármely asszociatív vagy alternatív gyűrűben bármely két ideálra:*

$$\varphi(I_1+I_2)=\varphi(I_1)+\varphi(I_2)$$

teljesül, vagyis $\varphi: I\to R(I)$ az ideálhálónak egyesítés-endomorfizmusa.

Bizonyítás. (1) Legyen $I_1\subseteqq I_2$. Nyilván $\varphi(I_1)\subseteqq I_2$. Továbbá az első izomorfia-tétel alapján

$$(*)\qquad \varphi(I_1)+\varphi(I_2)/\varphi(I_2)\cong\varphi(I_1)/\varphi(I_1)\cap\varphi(I_2).$$

Itt $(*)$ baloldalán az R-féligegyszerű $I_2/\varphi(I_2)$ gyűrűnek egy ideálja szerepel, amely tehát R-féligegyszerű. Viszont $(*)$ jobboldalán a $\varphi(I_1)$ R-radikálgyűrűnek egy homomorf képe áll, ez viszont szintén R-radikálgyűrű. Ezért $(*)$ mindkét oldala 0, tehát

$$\varphi(I_1)=\varphi(I_1)\cap\varphi(I_2)\subseteqq\varphi(I_2),$$

amivel a tétel (1) részét igazoltuk.

(2) igazolására megjegyezzük, hogy R-féligegyszerű gyűrűnek R-féligegyszerű gyűrűvel vett bármely *Everett*-bővítése mindig R-féligegyszerű. Ez az első izomorfia-tétellel látható be.

Csak mostantól fogva fogjuk kihasználni, hogy az SR gyűrűosztály homomorfan zárt.

Minthogy $I_2\supseteqq\varphi(I_2)$ és A ideálhálója moduláris, ezért

$$I_2\cap(\varphi(I_1)+\varphi(I_2))=\varphi(I_2)+(I_2\cap\varphi(I_1)).$$

Tehát $I_2/(I_2\cap(\varphi(I_1)+\varphi(I_2)))$ homomorf képe az R-féligegyszerű $I_2/\varphi(I_2)$ gyűrűnek, ezért $I_2/(I_2\cap(\varphi(I_1)+\varphi(I_2)))$ is R-féligegyszerű. Ezért az első izomorfia-tétel alapján

$$(\varphi(I_1)+I_2)/(\varphi(I_1)+\varphi(I_2))\cong I_2(I_2\cap(\varphi(I_1)+\varphi(I_2)))$$

is R-féligegyszerű.

Másfelől $I_1\supseteqq\varphi(I_1)$, és az ideálháló modularitása miatt

$$I_1\cap(\varphi(I_1)+I_2)=\varphi(I_1)+(I_1\cap I_2).$$

Tehát $I_1/(I_1\cap(\varphi(I_1)+I_2))$ homomorf képe az R-féligegyszerű $I_1/\varphi(I_1)$ gyűrűnek, ezért $I_1/(I_1\cap(\varphi(I_1)+I_2))$ is R-féligegyszerű. Az első izomorfia-tétel alapján:

$$(I_1+I_2)/(\varphi(I_1)+I_2)\cong I_1/(I_1\cap(\varphi(I_1)+I_2))$$

is R-féligegyszerű. Az *Everett*-bővítésekről szóló megjegyzés alapján $(I_1+I_2)/(\varphi(I_1)+$ $+\varphi(I_2))$ is R-féligegyszerű. Ezért az első izomorfia-tétel alapján

$$(**) \qquad \varphi(I_1+I_2) \subseteqq \varphi(I_1)+\varphi(I_2).$$

Minthogy pedig $I_k \subseteqq I_1+I_2$ és a tétel (1) része alapján $\varphi(I_k) \subseteqq \varphi(I_1+I_2)$, ahol $k=1$ vagy 2, nyilván

$$\varphi(I_1)+\varphi(I_2) \subseteqq \varphi(I_1+I_2).$$

Ennek $(**)$-gal való összehasonlításával pedig

$$\varphi(I_1+I_2) = \varphi(I_1)+\varphi(I_2).$$

Tehát $\varphi: I \to R(I)$ az ideálhálónak tényleg egyesítés-endomorfizmusa, amivel a (2) részt is igazoltuk.

Példa. Megmutatjuk, hogy $I \to R(I)$ nem minden R radikálra lesz egyesítés-endomorfizmus. Legyen R az összes idempotens gyűrűből álló radikálosztály. Ekkor a racionális egészek Z gyűrűjére $Z \in R$. Legyen p és q két olyan prímszám, hogy $(p, q)=1$. Ekkor $(p)+(q)=Z$, továbbá (p) és (q) R-féligegyszerű gyűrűk. Tehát

$$Z = R(Z) = R((p)+(q)) \neq R((p))+R((q)) = 0+0 = 0.$$

Nyilván SR nem homomorfan zárt gyűrűosztály.

7. §. Steinfeld Ottó egy eredményének analogonja részmodulusok gyűrűbeli általános radikáljával és modulushányadokkal kapcsolatban

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [83] dolgozatában található meg.

Miként jól ismert, A. KERTÉSZ [23], könyve 141. oldalán az 5.28. Feladatban, egy M A-jobbmodulus radikálját így definiálja:

$$I(M) = [x;\, x \in A,\ Mx \subseteqq \Phi(M)],$$

ahol $\Phi(M)$ jelenti az M *Frattini*-féle részmodulusát. Tehát $\Phi(M)$ az M összes maximális részmodulusának a metszete, és $M=\Phi(M)$, ha nincs maximális részmodulus M-ben. $I(M)$ ideál az A operátorgyűrűben, és $I(M) \supseteqq J(A)$, ahol $J(A)$ az A *Jacobson*-radikálja.

Másfelől STEINFELD [30] bebizonyította, hogy ha I ideál az A gyűrűben és P prímideál az I gyűrűben, akkor a

$$(*) \qquad P:I = [x;\, x \in A,\ Ix+xI \subseteqq P]$$

ideál-hányados prímideál lesz A-ban. STEINFELD [31] vizsgálta hálószerűen rendezett félcsoportban az $x \to x:y$ leképezés néhány tulajdonságát. Szerző [84] pedig arra adott elegendő feltételt, hogy hálószerűen rendezett jobbreziduumos grupoidban $(x_1: y_1)$ és $(x_2: y_2)$ egyesítése szintén $(x_3: y_3)$ alakú legyen. (A kapott grupoid kapcsolatban van főideálgyűrűkkel és főnormálosztó-csoportokkal.)

Ebben a §-ban a modulus gyűrűbeli *Kertész*-féle radikálját két lépcsőben általánosíthatjuk úgy, hogy közben általánosítjuk ION D. ION [18] bizonyos eredményeit is, és megadjuk STEINFELD [30] gyűrűelméleti eredményének egy moduluselméleti analogonját.

Egy M A-jobbmodulus L_1 és L_2 A-részmodulusaira legyen

$$L_1 : L_2 = [a;\, a \in A,\ L_2 a \subseteq L_1].$$

Ezt az $L_1 : L_2$ szimbólumot modulushányadosnak nevezzük. $L_1 : L_2$ ideál A-ban. Legyen most R egy *Amitsur—Kuros*-féle általános gyűrűradikál, és N egy A-részmodulus az M A-jobbmodulusban. Az

$$R(N)/(N : M) = R(A/(N : M))$$

egyenlőséggel definiált (maximális) $R(N)$ részhalmaz N radikálja lesz az A gyűrűben. $R(N)$ ideál A-ban, és nyilván $R(N) \supseteq (N : M)$[3]. Ha $(N:M) = R(A)$, akkor $R(N) = R(A)$. Ha pedig $R = J$, a *Jacobson*-radikál, és ha $N = \Phi(M)$, akkor $J(N) \supseteq J(A)$ (vö. KERTÉSZ A. [23] 5.28. Feladattal).

DEFINÍCIÓ. Ha R gyűrűknek egy *Amitsur—Kuros* radikálja, és N A-részmodulus az M A-jobbmudulusban, és ha A minden I ideáljára és minden $m \in M$ elemre

$$mI \subseteq N$$

esetén $m \in N$ vagy pedig $I \subseteq R(N)$ teljesül, akkor az N részmodulust R-primérnek nevezzük M-ben.

30. TÉTEL. *N akkor és csak akkor R-primér M-ben, ha minden K A-részmodulusra, és minden $a \in A$ elemre $Ka \subseteq N$ esetén $K \subseteq N$ vagy pedig $a \in R(N)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $k \in K$ és $k \notin N$, továbbá (a) az a által A-ban generált főideál. Minthogy

$$k(Aa) = (kA)a \subseteq Ka \subseteq N$$

miatt $k(a) \subseteq N$, ezért $I = (a)$ esetén $(a) \subseteq R(N)$, tehát $a \in R(N)$.

Fordítva, legyen $m \in M$, $I = (a)$ és $K = mA \nsubseteq N$. Minthogy

$$KI = mAI \subseteq mI \subseteq N$$

miatt $Ka \subseteq N$, adódik $a \in R(N)$, tehát $I \subseteq R(N)$.

31. TÉTEL. *Legyen $R(A/J)$ nilpotens A minden J ideáljára. Ha N egy R-primér részmodulus M-ben, akkor $R(N) = P$ prímideál az A gyűrűben.*

Bizonyítás. Legyenek I_1 és I_2 olyan ideálok, hogy $I_1 I_2 \subseteq P$ és $I_1 \nsubseteq P$. Ekkor van olyan e kitevő, hogy

$$M(I_1 I_2)^e \subseteq N \quad \text{és} \quad M(I_1 I_2)^{e-1} \nsubseteq N.$$

Legyenek $K_1 = M(I_1 I_2)^{e-1}$, $k_1 \in K_1$ és $k_1 \notin N$. Ekkor

$$(k_1 I_1) I_2 \subseteq K I_1 I_2 \subseteq N$$

és $I_1 \nsubseteq P$ miatt $k_1 I_1 \nsubseteq N$. Legyen k_2 tetszőleges elem $K_2 = k_1 I_1$-ben, úgy, hogy $k_2 \notin N$. Ekkor $k_2 I_2 \subseteq N$ és $k_2 \notin N$ miatt $I_2 \subseteq R(N) = P$, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

[3] $R(N)$ felhasználható a *Jacobson*-radikál egy modulus-elméleti jellemzésére is, F. SZÁSZ, Rings with radical maximal submodules, *Monatshefte, f. Math.* (sajtó alatt).

32. TÉTEL. *Legyen R a Baer—Koethe felső nilradikál és A jobbnoether-féle vagy jobbartin-féle gyűrű. Ha N egy R-primér-részmodulus M-ban, akkor $R(N)=P$ primideál A-ban.*

Bizonyítás. Minthogy $R(A/I)$ mindkét esetben nilpotens, elég a 31. Tételt alkalmazni.

DEFINÍCIÓ. Ha $R(N)=P$ prímideál A-ban, akkor N-et P-primér részmodulusnak nevezzük.

33. TÉTEL. *Legyen $R(A/I)$ nilpotens minden I ideálra. P akkor és csak akkor prímideál A-ban és N akkor és csak P-primér M-ben, ha az alábbi három feltétel teljesül:*

1. *A minden I ideáljára és minden $m \in M$ elemre $mI \subseteqq N$ esetén $m \in N$ vagy $I \subseteqq P$ érvényes;*
2. *Fennáll az $N \colon M \subseteqq P$ tartalmazás;*
3. *Minden $(x) \subseteqq P$ főideálhoz van olyan e kitevő, hogy $M(x)^e \subseteqq N$ érvényes.*

Bizonyítás. Ha N egy P-primér részmodulus, akkor 1. és 2. az előző definícióból, 3. pedig abból következik, hogy $R(A/I)$ minden I ideálra nilpotens. — Fordítva, tegyük fel, hogy 1., 2. és 3. teljesülnek. Megmutatjuk, hogy $P=R(N)$ és P prímideál A-ban.

Legyen $x \in K$ tetszőleges elem. Ekkor 3. alapján $M(x)^e \subseteqq N$ alkalmas e kitevővel. Ha P_α tetszőleges olyan prímideál, hogy $N \colon M \subseteqq P_\alpha$, akkor $\bigwedge\limits_\alpha P_\alpha = R(N)$, és van olyan e_α kitevő, hogy $(x)^{e_\alpha} \subseteqq P_\alpha$. Ezért $x \in R(N)$, tehát $P \subseteqq R(N)$. Megmutatjuk, hogy $R(N) \subseteqq P$ is teljesül. Legyen ugyanis $y \in R(N)$ tetszőleges elem. Ekkor van olyan e kitevő, hogy teljesül:

$$M(y)^e \subseteqq N \quad \text{és} \quad M(y)^{e-1} \nsubseteqq N.$$

Ha itt minden y elemre $e=1$, akkor $(y) \subseteqq N \colon M$, ahonnan 2. alapján $(y) \subseteqq P$, tehát $R(N) \subseteqq P$. Ha viszont van olyan $y \in R(N)$, hogy $e \geqq 2$, akkor legyen $K = M(y)^{e-1}$, $k \in K$ és $k \notin N$. Minthogy

$$k(y) \subseteqq M(y)^e \subseteqq N,$$

ezért 1. alapján $(y) \subseteqq P$, tehát $y \in P$ és így $R(N) \subseteqq P$.

34. TÉTEL. *Legyen R a Baer—Koethe-féle felső nilradikál és A jobbnoether-féle vagy jobbartin-féle gyűrű. Ekkor a* 33. *Tétel* 1., 2. *és* 3. *feltétele szükséges és elégséges ahhoz, hogy P prímideál legyen A-ban és N P primér legyen M-ben.*

Bizonyítás. $R(A/I)$ nilpotens, és elég a 33. Tételt alkalmazni.

MEGJEGYZÉS. A racionális egészek Z gyűrűje *Noether*-féle, de nem *Artin*-féle. $Z(p^\infty)$ viszont *Artin*-féle, de nem *Noether*-féle gyűrű.

35. TÉTEL. *Legyen $R(A/I)$ nilpotens A minden I ideáliára, és legyen P rögzített, tetszőleges prímideál A-ban és N_j $(f=1, 2, \ldots, k)$ véges sok P-primér részmodulus az M A-jobbmodulusban. Ekkor $N = \bigcap\limits_{j=1}^{k} N_j$ szintén P-primér M-ben.*

Bizonyítás, bár nem egészen triviális, elvégezhető a 33. Tétel alkalmazásával, ugyanis igazolni kell, hogy az 1., 2. és 3. feltételek teljesülnek N-re.

36. TÉTEL. *Legyen $R(A/J)$ nilpotens A minden I ideáljára, P prímideál A-ban, N egy P-primér részmodulus M-ben és K olyan ideál A-ban, hogy $K \nsubseteq P = R(N)$. Ha*

$$N^* = [m;\ m \in M,\ mK \subseteq N],$$

akkor N^* A-részmodulus M-ben és N^* K-primér M-ben.

Bizonyítás. Nyilván $N \subseteq N^*$. Legyen $x \in (N^* : M)$ tetszőleges elem. Ekkor $Mx \subseteq N^*$ és $MxK \subseteq N$. Minthogy $K \nsubseteq P$, ezért $Mx \subseteq N$, tehát $x \in N : M$ és így

$$(N^* : M) \subseteq (N : M) \subseteq P$$

miatt a 2. feltétel teljesül N^*-ra. Legyen B olyan ideál A-ban és $m \in M$ olyan elem, hogy

$$mB \subseteq N^*, \quad \text{de } m \notin N^*.$$

Ekkor $mBK \subseteq N$ miatt $mBK \subseteq N^*$, és minthogy $K \nsubseteq P$, ezért 1. alapján $B \subseteq P$. Tehát az 1. feltétel N^*-ra is teljesül. Végül 3. alapján minden $(x) \subseteq P$ főideálhoz van olyan e kitevő, hogy $M(x)^e \subseteq N$, és $N \subseteq N^*$ miatt nyilván $M(x)^e \subseteq N^*$, tehát 3. teljesül N^*-ra is. Ennélfogva N^* tényleg P-primér A-részmodulus M-ben.

MEGJEGYZÉS. A 36. Tétel STEINFELD [30] eredményének egy moduluselméleti analogonja.

II. FEJEZET

GYŰRŰK GYENGÉN SZUBIDEMPOTENS RADIKÁLJAIRÓL

8. §. Egy Kertész-probléma redukciójával kapcsolatban kritériumok arra, hogy a Divinsky-radikálgyűrűk osztályának egy részosztályába eső gyűrűk egységelemesek legyenek

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [46] és [50] dolgozatában szerepel.

Legyen D mindazon A gyűrűk osztálya, amelyekben $a \in aA$ teljesül minden $a \in A$ elemre. D-beli gyűrűket DIVINSKY előtt többen vizsgáltak (pl. JOHN VON NEUMANN vagy REINHOLD BAER), és N. DIVINSKY [8] megmutatta, hogy D radikálosztály, és vizsgálta e radikál több tulajdonságát.

Másfelől KERTÉSZ ANDOR [23] könyve igazolja, hogy A akkor és csak akkor egységelemes gyűrű, ha minden M A-jobbmodulusra $M = M_0 \oplus MA$ érvényes, ahol M_0 az M-nek maximális olyan N részmodulusa, amelyre $NA = 0$ teljesül. Az ilyen N részmodulusokat triviálisnak nevezzük. Ezzel kapcsolatban veti fel KERTÉSZ ANDOR [23] 1. *Problémája* a következő kérdést:

Egységelemes-e minden olyan A gyűrű, amelyre minden M A-jobbmodulusban az M_0 maximális triviális részmodulus direkt összeadandó?

Az ilyen tulajdonságú gyűrűket, követve szerző [46] dolgozatát (ahol E_0-, E_1-, E_2-, E_3-, E_4- és E_5-gyűrűk is szerepelnek) röviden E_2-gyűrűknek fogjuk nevezni. (A *Divinsky*-radikálgyűrűk éppen az E_3-gyűrűk lesznek.)

Szerző [46] dolgozata 2.3.2. Tételének bizonyítási módszerével igazolható:

37. Tétel. *Minden E_2-gyűrű Divinsky-radikálgyűrű, vagyis minden A E_2-gyűrűben $a \in aA$ teljesül minden $a \in A$ elemre, tehát nemzérus E_3-gyűrű nem lehet Jacobson radikálgyűrű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan $a \in A$, hogy $a \notin aA$. Legyen R az A maximális olyan jobbideálja, amelyre $a \notin R$ és $R \supseteq aA$. Ilyen R a *Zorn*-lemma alapján létezik. Ekkor az A/R A-jobbmodulus szubdirekt irreducibilis, és legyen M/R a szíve A/R-nek. Nyilván $(a)_r + R = M$, és $MA \subseteq R$. Tehát M/R benne van A/R-nek az A_0/R maximális triviális jobbideáljában. Minthogy A egy E_2-gyűrű, ezért A_0/R direkt összeadandója az A/R A-jobbmodulusnak, minthogy pedig A/R szubdirekt irreducibilis, ezért $A_0/R = A/R$, tehát $A_0 = A$. Ezért $A^2 \subseteq R$. Ha majd igazoltuk azt (lásd 38. Tételt), hogy minden E_2-gyűrű balannihilátormentes, és hogy minden E_2-gyűrűnek minden homomorf képe is E_2-gyűrű, akkor $A^2 = A$, és így az $A \subseteq R \subsetneqq A$ ellentmondás adódik, ugyanis A/A^2 balannihilátort tartalmazó E_2-gyűrű volna $A^2 \neq A$ esetén.

Továbbá, ha $a = ab$ és $b + c - bc = 0$, akkor $a = a - a(b + c - bc) = a - ab - (a - ab)c = 0$.

38. Tétel. (1) *Bármely A E_2-gyűrűnek bármely A homomorf képe szintén E_2-gyűrű és* (2) *bármely A E_2-gyűrű balannihilátormentes.*

Bizonyítás. (1) Legyen M' egy A'-jobbmodulus, és $(M')_0$ az M' maximális triviális részmodulusa. Az $ma = ma'$ előírással M' egy A-jobbmodulus is lesz, ahol $a\varphi = a'$ és $\varphi \colon A \to A'$ az A egy homomorfizmusa A'-re. Ekkor $M_0 = (M')_0$ lesz az így kapott $M = M'$ A-jobbmodulus maximális triviális részmodulusa, és minthogy M_0 direkt összeadandó M-ben, $(M')_0$ is direkt összeadandó M'-ben, tehát A' egy E_2-gyűrű.

(2) Legyen A_1 az A *Dorroh*-bővítése, vagyis az összes

$$(a, m) \qquad (a \in A,\ m \in Z)$$

rendezett pár halmaza a megszokott egyenlőségi éss összeadási definícióval. Legyen egy tetszőleges $b \in A$ elemre

$$(a, m)b = (ab + mb, 0).$$

Ekkor A_1 egy A-jobbmodulus, tehát $A_1 = A_0 \oplus A_2$, ahol A_0 az A_1 maximális triviális A-részmodulusa, mert A egy E_2-gyűrű. Legyen $(0, 1) = (a, m) + (-a, 1 - m)$, ahol $(a, m) \in A_0$. Ezért $A_0 A = 0$ miatt $ab + mb = 0$ teljesül minden $b \in A$ elemre. Ezért

$$(b, 0) = (0, 1)b = (-a, 1 - m)b \in A_2,$$

tehát $(b, 0)A = (bA, 0) \neq 0$ miatt A tényleg balannihilátor-mentes gyűrű.

Definíció. Egy nullától különböző $a \in A$ gyűrű elemet balmultiplikátornak nevezünk, ha van olyan $n \in Z$ racionális egész szám, hogy minden $x \in A$ elemre $ax = nx$ teljesül.

39. Tétel. (1) *Egy A gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha A egy balmultiplikátoros E_2-gyűrű.* (2) *A akkor és csak akkor egységelemes gyűrű, ha A olyan jobbmultiplikátoros E_2-gyűrű, amely jobbannihilátor-mentes.*

Bizonyítás. (1) Ha $e \in A$ az A kétoldali egységeleme, akkor e nyilván balmultiplikátor és

$$Me \supseteqq MeA = (MeA)e = MA$$

miatt Me egy A-részmodulus. $M(1-e)$ az M maximális triviális A-részmodulusa, és $M = Me \oplus M(1-e)$. Legyen most, megfordítva, A egy balmultiplikátoros E_2-gyűrű. Ekkor $(b+n)A=0$ teljesül egy $0 \neq b \in A$ és egy $n \in Z$ elempárra. Ezért $(b, n) \in A_0$, ahol A_0 jelenti az A_1 *Dorroh*-bővítésnek, mint A-jobbmodulusnak, a maximálistriviális részmodulusát. Minthogy A a 38. Tétel (2) szerint balannihilátormentes, minden n-hez legfeljebb egy b elem tartozik, úgy, hogy $(b, n) \in A_0$. Legyen $(a, m) \in A_0$ olyan pár, amelyben $|m|$ minimális pozitív szám. *Euklides*-i osztással belátható, hogy A_0 additív csoportja ciklikus, és (a, m) egy generátorelem. Minthogy $(0, 1) = k(a, m) + (-ka, 1-km)$, ahol $A_1 = A_0 \oplus A_2$; $k(a, m) \in A_0$; $(-ka, 1-km) \in A_2$ és k alkalmas racionális egész szám, továbbá $A_0 \neq 0$ miatt $k \neq 0$. Minthogy

$$(x, 0) = (0, 1)x = (-ka, 1-km)x \in A_2$$

érvényes minden $x \in A$ esetén, ezért $\big(0, (1-km)\big) \in A_2$. Tehát

$$(1-km)(a, m) = \big((1-km)a, 0\big) + m(0, 1-km) \in A_0 \cap A_2 = 0$$

miatt $km=1$. Ha $m=1$, akkor $e = -a$ lesz egy balegységelem A-ban, míg $m = -1$ esetén pedig maga $e=a$ lesz egy balegységelem. Ekkor $A(1-e)$ balannihilátor A-ban, tehát a 38. Tétel (2) szerint $A(1-e)=0$, és így e kétoldali egységelem.

(2) Legyen $a \neq 0$ most egy jobbmultiplikátor az E_2-gyűrűben. Ekkor $xa=nx$ teljesül rögzített $n \in Z$ számmal minden $x \in A$ elemre. Minthogy $(xy)a = nxy$, ezért

$$x(ya) = (xy)a = nxy = (nx)y = (xa)y = x(ay),$$

tehát $A(ya-ay)=0$ miatt $ya-ay=0$, mert feltétel szerint jobbannihilátor-mentes. Ezért $ay=ya=ny$ miatt a egyszersmind balmultiplikátor is és így elegendő a 39. Tétel (1) részét erre az esetre alkalmazni.

Láttuk a 37. Tételben, hogy nemzérus E_2-gyűrű nem lehet *Jacobson*-radikálgyűrű. Bizonyítás nélkül mondjuk ki a szerző [50] dolgozatában bebizonyított eredményt:

40. TÉTEL. *Tegyük fel azt, hogy létezik olyan A nemzérus E_2-gyűrű, amely egyszersmind Brown—McCoy radikálgyűrű is. Ekkor:*

1. *A választható jobbprimitív gyűrűnek, tehát prímgyűrűnek is;*
2. *A minden eleme balnullosztó és ha A prímgyűrű, akkor $axa=0$, ahol $xa \neq 0$, tehát xa nilpotens;*
3. *A minden a elemére $A(1-a)A = A$;*
4. *A minden $a \neq 0$ elemére $aA \subsetneqq Aa$, tehát A centruma 0, továbbá $Aa \neq A$ minden elemre;*
5. *Minden $a \in A$ elemre és minden $n \in Z$ racionális egész számra: $a \in (a+n)A + A(a+n)A$;*
6. *A-ban léteznek L maximális balideálok, amelyekre mindig $LA = A$ teljesül;*
7. *Nem teljesül a maximum-feltétel az*

$$L_a = [x;\, x \in A,\, xa = x]$$

alakú balideálokra, tehát A nem balnoether-féle gyűrű.

9. §. Gyűrűkről, amelyeknek minden homomorf képe balannihilátor-mentes

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható a szerző [46] és [68] dolgozataiban. — A 38. Tételben láttuk azt, hogy minden E_2-gyűrű minden homomorf képe balannihilátor-mentes. Ha E_5-gyűrűnek nevezzük e § címében szereplő gyűrűket, akkor *minden E_2-gyűrű E_5-gyűrű.*

41. TÉTEL. (1) *E_5-gyűrű bármely homomorf képe is E_5-gyűrű.* (2) *$L \subseteq LA$ érvényes bármely E_5-gyűrű bármely L balideáljára.* (3) *$a \in aA + AaA$ akkor és csak akkor érvényes A minden $a \in A$ elemére, ha A egy E_5-gyűrű.* (4) *Bármely A E_5-gyűrűben a J Jacobson-radikál egybeesik A-nak, mint A-balmodulusnak, a Frattini-féle részmodulusával.*

Bizonyítás. (1) Triviális.

(2) $A/L+LA$ balannihilátor-mentes, ezért $L \subseteq LA$.

(3) Ha A egy E_5-gyűrű és $L=(a)_l=Za+Aa$, akkor $L \subseteq LA$ miatt $a \in aA+AaA$. Ha pedig az utóbbi feltétel minden $a \in A$ elemre teljesül, akkor minden homomorf kép balannihilátor-mentes, tehát A E_5-gyűrű.

(4) E. HILLE ([16], Theorem 22.15.3]) szerint $JA \subseteq \Phi_l \subseteq J$ és minthogy Φ_l kétoldali ideál, és A/Φ_l-ben J/Φ_l balannihilátor, ezért $J=\Phi_l$ valóban.

Most további kritériumokat (vö. 39. Tétel) adunk meg (az E_5-gyűrűk segítségével) arra, hogy A egységelemes gyűrű legyen. E kritériumok típusa is különbözik R. BAERétől [5].

42. TÉTEL. (1) *Egy A gyűrű akkor és csak akkor jobbegységelemes, ha A olyan E_5-gyűrű, amelynek van olyan jobbmultiplikátora, amely nem jobbnullosztó.* (2) *Egy A gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha A olyan E_5-gyűrű, amelynek van olyan balmultiplikátora, amely nem balnullosztó.* (3) *Egy torziómentes A gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha A egy balmultiplikátoros E_5-gyűrű.*

Bizonyítás. (1) Ha a jobbmultiplikátor, amely nem jobbnullosztó, az A E_5-gyűrűben, akkor $xa=nx \neq 0$ teljesül alkalmas $n \in Z$ egész számmal minden elemre. Minthogy a 41. Tétel (3) alapján $a \in aA+AaA$, léteznek olyan $b \in A$ és $c \in A$ elemek, hogy $a=ab+nc$, hiszen most $Aa=nA$. Ezért

$$nx = xa = xab+nxc = nx(b+c) = x(b+c)a.$$

Minthogy pedig a nem jobbnullosztó, ezért

$$x = x(b+c)$$

érvényes minden $x \in A$ elemre, tehát $e=b+c$ jobbegységelem.

(2) Legyen az A E_5-gyűrűben a olyan balmultiplikátor, amely nem balnullosztó. Minthogy ekkor van olyan $n \in Z$ szám, hogy $ax=nx$ minden $x \in A$ elemre fennáll, $aA=nA$ miatt

$$AaA = A(nA) = nA^2 = nA$$

és az $a \in aA+AaA$ miatt $a \in nA$. Tehát van olyan $b \in A$, hogy $a=nb$, amiből $nbx = nx \neq 0$ miatt $abx=ax$, tehát $bx=x$ adódik minden $x \in A$ elemre, ezért $e=b$ balegységelem. Minthogy pedig $A(1-e)$ balannihilátor az A E_5-gyűrűben, nyilván $A(1-e)=0$, tehát e kétoldali egységelem.

(3) Ha A torziómentes E_5-gyűrű, amelyben a balmultiplikátor, akkor van olyan $n \in Z$, hogy $ax=nx$ érvényes minden $x \in A$ elemre. Ekkor (2)-höz hasonlóan

van olyan $b \in A$, hogy $n(bx-x)=0$, amiből a torziómentesség alapján adódik, hogy b balegységelem, és minthogy a nem balnullosztó, (2) alapján van kétoldali egységelem is A-ban.

43. TÉTEL. (1) *Egy A gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha E_5-gyűrű, és ha van olyan a nem-balnullosztója, amelyre $Aa \subseteq aA$ teljesül.* (2) *Minden olyan A E_5-gyűrűnek, amelynek a C centruma nem nulla, van egységelemes A' homomorf képe.*

Bizonyítás. (1) Legyen A egy E_5-gyűrű és a olyan elem, amelyre $Aa \subseteq aA$, és a nem balnullosztó. Minthogy $AaA \subseteq aA$ és $a \in aA + AaA$, ezért van olyan $b \in A$ elem, hogy $a=ab$, amiből $ax=abx$ adódik minden $x \in A$ elemre és ebből pedig $bx=x$. Tehát b balegységelem. Minthogy $A(1-b)$ balannihilátor az E_5-gyűrűben, ezért $A(1-b)=0$ és $e=b$ kétoldali egységelem.

(2) Legyen $0 \neq c \in C$ centrumelem. Ekkor $c \in cA + AcA$ miatt $c=bc=cb$ teljesül bizonyos $b \in A$ elemmel. Legyen $K=(1-b)A+A(1-b)+A(1-b)A$. Ekkor $b+K$ kétoldali egységelem A/K-ban.

44. TÉTEL. (1) *Az A gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha A olyan E_5-gyűrű, amelynek van olyan nemzérus c centrumeleme, amely nem nullosztó.* (2) *A akkor és csak akkor egységelemes gyűrű, ha olyan E_5-gyűrű, amelynek egy a elemére $aA=A$ és a felcserélhető minden $(1-b)A$ alakú jobbideállal, azaz az $a(1-b)A= =(1-b)Aa$.*

Bizonyítás. (1) Ha $c \neq 0$ centrumelem, akkor $c \in cA + AcA = cA = Ac$ miatt elég a 43. Tétel (1) részét alkalmazni.

(2) Ha $aA=A$, van olyan $c \in A$, hogy $ac=a$, tehát $a(1-c)=0$. Minthogy a felcserélhető az $(1-c)A$ jobbideállal, $(1-c)Aa=0$, és $aA=A$ miatt, valamint $A^2=A$ miatt $(1-c)A=0$. Tehát c balegységelem, és minthogy $A(1-c)$ balannihilátor, ezért $A(1-c)=0$. Ezért c kétoldali egységelem.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy az összes E_5-gyűrű R osztálya radikálosztály, és vizsgálni fogjuk az R-féligegyszerű gyűrűket. Legyen $R(a)=aA+AaA$.

Egy T radikál gyengén szubidempotens, ha minden T-radikálgyűrű idempotens. Az öröklődő gyengén subidempotens radikálokat nevezzük szubidempotensnek.

45. TÉTEL. *Az összes E_5-gyűrű R osztálya gyengén szubidempotens radikálosztályt alkot Maranda—Michler értelemben*. Minden (Maranda—Michler értelemben) R-féligegyszerű A gyűrű olyan szubdirekt irreducibilis és R-féligegyszerű S_α gyűrűknek egy szubdirekt összege, hogy $H_\alpha S_\alpha=0$ teljesül S_α-nak a H_α szívére.***

Bizonyítás. Az $x \in R(x)$ reláció egy *Brown—McCoy*-féle [7] F-regularitást definiál, ahol

$$F(x) = R(x) = xA + AxA.$$

Legyen $R(A)$ mindazon $y \in A$ elemek halmaza, hogy az (y) főideál minden z elemére $z \in R(z)$. Ekkor $R(A)$ kétoldali ideál, amely minden R-reguláris ideált tartalmaz, és

$$R(A/R(A)) = 0.$$

* *Trans. Amer. Math. Soc.* **110** (1964) 98—135. és *Math. Annalen* **167** (1966) 1—48.

** Megjegyezzük a korrektúra olvasásakor (1976. I. 5), hogy a szerző 1973-ban azt is igazolta, hogy R *Amistur—Kuros* értelemben is radikálosztály.

$R(A)$ egybeesik mindazon M_α ideálok metszetével, amelyekre $A/M_\alpha = S_\alpha$ szubdirekt irreducibilis és R-féligegyszerű. Ezért van S_α-nak a H_α szívében olyan $h_\alpha \neq 0$ elem, amelyre $h_\alpha S_\alpha + S_\alpha h_\alpha S_\alpha = 0$, amiből $H_\alpha S_\alpha = 0$ adódik.

46. KOROLLÁRIUM. *A bármely B ideáljára* $R(B) \subseteq B \cap R(A)$ *teljesül.*

MEGJEGYZÉS. Ha $A = Z$ a racionális egész számok gyűrűje, és B a páros számok ideálja, akkor

$$0 = R(B) \subsetneqq B \cap R(A) = B \cap Z = B \neq 0.$$

47. KOROLLÁRIUM. $R(A)$ *tartalmazza minden A gyűrűben a maximális Neumann-reguláris ideált* (B. BROWN—N. H. MCCOY), *az N. Divinsky-féle D-radikált* [8] *és a B. de la Rosa-féle λ-radikált* (Doktori téziseiben).

48. KOROLLÁRIUM. *Minden nilpotens gyűrű R-féligegyszerű.*

49. KOROLLÁRIUM. *Minden erősen R-féligegyszerű gyűrű antiegyszerű.*

50. KOROLLÁRIUM. (1) *Minden erősen R-féligegyszerű, kétoldali főideálokra minimum-feltételű gyűrű nilgyűrű.* (2) *Minden erősen R-féligegyszerű és az összes kétoldali ideálra minimum-feltételű gyűrű nilpotens.*

51. KOROLLÁRIUM. *Egy A jobbartin-féle gyűrűre ekvivalens az alábbi két feltétel:*

1. *A nilpotens;*
2. *A olyan R-féligegyszerű gyűrű, hogy az összes* A^n *hatvány* A^ω *metszetében nincs A-nak nemzérus balannihilátora.*

Bizonyítási vázlat: 1.-ből 2. triviálisan adódik. Feltesszük, hogy 2. teljesül és 1. nem teljesül. Ekkor

$$A = \sum e_i A + N,$$

ahol $e_i^2 = e_i \neq 0$, $e_i A$ direkt felbonthatatlan és N nilpotens jobbideál. Hosszasabb számolással 2. alapján ellentmondás vezethető le.

Legyen R' az R radikálhoz bal-jobb duális radikál. Ekkor érvényes az

52. KOROLLÁRIUM. *Legyen A jobbartin-féle és balartin-féle gyűrű. Ekkor egymással ekvivalens az alábbi két feltétel:*

1. *A nilpotens;*
2. *A R-féligegyszerű és R'-féligegyszerű, és az összes* A^n *hatvány* A^ω *metszetében nincs A-nak nemzérus kétoldali annihilátora.*

MEGJEGYZÉS. Legyen A a kételemű test felett az a és b elemekkel generált algebra, ahol a szorzási tábla:

	a	b
a	a	0
b	b	0

Ekkor $A = R(A) \neq R'(A) = 0$ teljesül a négyelemű gyűrűben.

10. §. A Neumann-reguláris és erősen reguláris gyűrűkről

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható a szerző [60], [61], [69] és [71] dolgozataiban, továbbá LAJOS SÁNDOR és a szerző közös [24] és [25] dolgozataiban.

Az olvasót emlékeztetjük arra, hogy az A gyűrű *Neumann*-reguláris akkor, ha $a \in aAa$, és erősen reguláris akkor, ha $a \in a^2A$, minden $a \in A$ elemre. Mind a *Neumann*-reguláris, mind az erősen reguláris gyűrűk egy-egy szubidempotens radikálosztályt alkotnak.

KERTÉSZ ANDOR igazolta, hogy egy M teljesen reducibilis A-jobbmodulus operátor-endomorfizmusainak a gyűrűje *Jacobson*-féligegyszerű. Szerző [60] ezt az eredményt élesítette, miközben JOHNSON és KIOKEMEISTER egy jól ismert [19] tételét általánosította is a következőképpen:

53. TÉTEL. *Legyen M egy teljesen reducibilis A-jobbmodulus. Ekkor M operátor-endomorfizmusainak az $E(M)$ gyűrűje Neumann-reguláris.*

Bizonyítás. Legyen először M homogén. Ha $\gamma \in E(M)$, van olyan K A-részmodulus, hogy $M = \gamma M \oplus K$. Legyen

$$L_\gamma = [m, \ m \in M, \ \gamma m = 0].$$

Ekkor van olyan N A-részmodulus, hogy $M = L_\gamma \oplus N$. Ha $N = \sum \{n_\alpha\}$, akkor γM-nek az összes γn_α bázisa lesz, ha $\{n_\alpha\}$ minimális A-részmodulus. Ez számolással látható be. Legyen k_β bázisa K-nak, és legyen δ olyan endomorfizmus, hogy

$$\delta(\gamma n_\alpha) = n_\alpha \quad \text{és} \quad \delta k_\beta = 0.$$

Ha $\vartheta = \gamma\delta\gamma - \gamma$, akkor $\vartheta M = 0$, tehát $\gamma = \gamma\delta\gamma$. Ha pedig M nem homogén, akkor $E(M)$ a homogén komponensek *Neumann*-reguláris endomorfizmus-gyűrűinek komplett direkt összege, tehát $E(M)$ ekkor is *Neumann*-reguláris.

Bizonyítás nélkül mondjuk ki szerző [61] alábbi eredményét, amely JACOBSON—WOLFSON egyik eredményének egy általánosítása:

54. TÉTEL. *Legyen M homogén teljesen reducibilis A-jobbmodulus, és $E(M)$ az M operátorendomorfizmusainak a gyűrűje. Ekkor $E(M)$ minden nemzérus kétoldali I ideáljához van olyan $\mathfrak{m}$ végtelen számosság, hogy I éppen az összes olyan γ halmaza, amelyekre* rang $\gamma M < \mathfrak{m}$.

Az A gyűrű egy B részgyűrűjét biideálnak nevezzük, ha $BAB \subseteq B$. Az A^+ csoport egy B additív részcsoportja általánosított biideál, ha $BAB \subseteq B$. Gyűrűk biideáljainak általános vizsgálata LAJOS S.—SZÁSZ F. [25] közös dolgozatában, a minimális biideálok és általánosított biideálok vizsgálata szerző [69], [70] és [71]. dolgozatában történt meg. Erősen reguláris gyűrűben minden általánosított biideál kétoldali ideál [71].

55. TÉTEL.[4] *Egy A gyűrűre a következő tizenkét feltétel egymással ekvivalens:*
1. *A Neumann-reguláris;*
2. *$R \cap L = R \cdot L$ minden R jobbideálra és minden L balideálra;*
3. *$(a)_r \cap (b)_l = (a)_r \cdot (b)_l$ minden $a, b \in A$ elemre;*

[4] Az 55. és 56. Tételben szereplő feltételek egy része korábbról ismert.

4. $(a)_r \cap (a)_l = (a)_r (a)_l$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
5. $(a)_q = (a)_r \cdot (a)_l$ *minden* $(a)_q$ *főkváziideálra;*
6. $(\bar{a})_{(1,1)} = (a)_r \cdot (a)_l$ *minden* $(\bar{a})_{(1,1)}$ *főbiideálra;*
7. $(a)_{(1,1)} = (a)_r (a)_l$ *minden* $(a)_{(1,1)}$ *általánosított főbiideálra;*
8. $(\bar{a})_{(1,1)} = aAa$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
9. $(a)_{(1,1)} = aAa$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
10. $QAQ = Q$ *minden* Q *kváziideálra;*
11. $\bar{B}A\bar{B} = \bar{B}$ *minden* $\bar{B}$ *biideálra;*
12. $BAB = B$ *minden* P *általánosított biideálra.*

A *bizonyítást* itt mellőzzük.

56. TÉTEL. *Egy A gyűrűre az alábbi harmincegy feltétel ekvivalens:*

1. *A erősen reguláris gyűrű;*
2. *A Neumann-reguláris gyűrű, amelyben minden egyoldali ideál kétoldali ideál;*
3. *A szubkommutatív Neumann-reguláris gyűrű (tehát* $aA = Aa$ *minden* $a \in A$ *elemre);*
4. $B^2 = B$ *minden* B *általánosított biideálra;*
5. $\bar{B}^2 = \bar{B}$ *minden* $\bar{B}$ *biideálra;*
6. $Q^2 = Q$ *minden* Q *kváziideálra;*
7. $RL = R \cap L \subseteqq LR$ *minden* L *balideálra és minden* R *jobbideálra;*
8. $L \cap R = L \cdot R$ *minden* L *balideálra és minden* R *jobbideálra;*
9. $L_1 \cap L_2 = L_1 \cdot L_2$ *és* $R_1 \cap R_2 = R_1 R_2$ *minden* L_i *balideálra és minden* R_i *jobbideálra* $(i = 1, 2)$*;*
10. $L \cap T = LT$ *és* $R \cap T = TR$ *minden* L *balideálra, minden* R *jobbideálra és minden* T *kétoldali ideálra;*
11. *A Neumann-reguláris és ferdetesteknek egy szubdirekt összege;*
12. *A nilpotens elemek nélküli Neumann-reguláris gyűrű;*
13. $L_1 \cap L_2 = L_1 \cdot L_2$ *bármely* L_1 *és* L_2 *balideálra;*
14. $R_1 \cap R_2 = R_1 R_2$ *bármely* R_1 *és* R_2 *jobbideálra;*
15. $L \cap T = LT$ *bármely* L *balideálra és* T *ideálra;*
16. $R \cap T = TR$ *bármely* R *jobbideálra és* T *ideálra;*
17. $Q_1 \cap Q_2 = Q_1 \cdot Q_2$ *bármely* Q_1 *és* Q_2 *kváziideálra;*
18. $\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 = \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2$ *bármely* $\bar{B}_1$ *és* $\bar{B}_2$ *biideálra;*
19. $B_1 \cap B_2 = B_1 \cdot B_2$ *bármely* B_1 *és* B_2 *általánosított biideálra;*
20. *A multiplikatív félcsoportja csoportok félhálója;*
21. *Minden egyoldali ideál centrális idempotenssel generálható;*
22. $(ab)_r = (a)_r \cap (b)_r$ *minden* $a, b \in A$ *elemre;*
23. $(ab)_l = (a)_l \cap (b)_l$ *minden* $a, b \in A$ *elemre;*
24. $(a)_r = (a^2)_r$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
25. $(a)_l = (a^2)_l$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
26. *Minden* R *jobbideálhoz van olyan* $m = m(R) \geqq 2$ *kitevő, és minden* L *balideálhoz van olyan* $n = n(L) \geqq 2$ *kitevő, hogy fennállnak:*

$$R = (R + AR)^m \quad \text{és} \quad L = (L + LA)^n;$$

27. *A nilpotens elem nélküli és az alábbi öt aleset egyike fennáll:*
(i) $aA = aAa$ *minden* $a \in A$ *elemre,*
(ii) $Aa = aAa$ *minden* $a \in A$ *elemre,*

(iii) *$aA = a^2A$ minden $a \in A$ elemre,*

(iv) *$Aa = Aa^2$ minden $a \in A$ elemre,*

(v) *minden $a \in A$ elemhez létezik olyan $n = n(a) \geqq 2$ kitevő, hogy $aAa = a^nAa^n$ érvényes.*

A *bizonyítást* itt mellőzzük.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] V. A. ANDRUNAKIEVICS, Antiegyszerű erősen idempotens gyűrűk (oroszul), *Izveszt. Akad. Nauk SzSzSzR, Szer. Mat.* **21** (1957) 125—144.

[2] V. A. ANDRUNAKIEVICS, Asszociatív gyűrűk radikáljai (oroszul), *Mat. Szbornik N. Sz.* **44** (86) (1958) 179—212.

[3] E. P. ARMENDARIZ—W. G. LEAVITT, Nonhereditary semisimple classes, *Proc. Amer. Math. Soc.* **18** (1967) 1114—1117.

[4] E. P. ARMENDARIZ—W. G. LEAVITT, The hereditary property in the lower radical construction, *Canadian Jour. Math.* **20** (1967) 474—476.

[5] R. BAER, Kriterien für die Existenz eines Einselements in Ringen, *Math. Zeitschrift* **56** (1952) 1—17.

[6] R. BAER, Metaideals, *Reports of a conference on linear algebras,* National Acad. Sci., Washington (1957).

[7] B. BROWN—N. H. MCCOY, Radicals and subdirect sums, *Amer. Journ. Math.* **69** (1947) 46—58.

[8] N. DIVINSKY, *D*-regularity, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958) 62—71.

[9] N. DIVINSKY, *Rings and Radicals,* London (1965)

[10] L. FUCHS, On a new type of radical, *Acta Sci. Math. Szeged* **16** (1955) 43—53.

[11] L. FUCHS, *Abelian Groups,* Budapest (1958).

[12] L. FUCHS—T. SZELE, On artinian rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956) 30—40.

[13] J. HASHIMOTO, Ideal theory for lattices, *Math. Japonicae* **2** (1952) 149—186.

[14] J. N. HERSTEIN, On torsion free Artin rings, *Annales Univ. Budapest R. Eötvös, Sectio Math.* 7 (1964) 97—98.

[15] P. J. HIGGINS, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.* **6** (1956) 366—416.

[16] E. HILLE, *Funktional-Analysis and Semigroups,* Providence (1948).

[17] H. J. HOEHNKE, Zur Strukturtheorie der Halbgruppen, *Math. Nachrichten* **26** (1963) 1—13.

[18] ION D. ION, O prezentare simpla a teoriei descompunerilor primare in necomutativ, *Analele Universitatii Bucuresti, Ser. Matemat.* **16** (1967) 109—112.

[19] N. JACOBSON, *Structure of Rings,* Providence (1964)

[20] KERTÉSZ ANDOR, Vizsgálatok az operátormodululsok elméletében, III., *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **9** (1959) 105—120.

[21] A. KERTÉSZ, A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963) 595—597.

[22] A. KERTÉSZ, Zur Frage der Spaltbarkeit von Ringen, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III, **12** (1964) 91—93.

[23] A. KERTÉSZ, *Vorlesungen über Artinsche Ringe,* Budapest, (1968).

[24] S. LAJOS—F. SZÁSZ, Characterizations of strongly regular rings, I., *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 38—40; II., *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 287—289.

[25] S. LAJOS—F. SZÁSZ, Bi-ideals in associative rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **32** (1971) 185—193.

[26] L. RÉDEI, *Algebra,* I. Leipzig (1959)

[27] H. SEIDEL, Über das Radikal einer Halbgruppe, *Math. Nachr.* **29** (1965) 255—263.

[28] H. SEIDEL, Eine Charakterisierung des 0-Radikals einer Halbgruppe, *Math. Nachr.* **34** (1967) 163—166.

[29] R. SHULKA, Nilpotens elemek, ideálok és radikálok félcsoportokban (oroszul), *Matematicko-Fyzikalny Casopis* SAV **13**:3 (1963) 209—222.

[30] O. STEINFELD, On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **4** (1953) 289—298.

[31] O. STEINFELD, On residuals in partially ordered semigroups, *Publ. Math. Debrecen,* **12** (1965) 107—116.

[32] O. STEINFELD, Eine Charakterisierung der primitiven Ideale eines Ringes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **19** (1968) 219—220.
[33] P. N. STEWART, Semisimple radical classes, *Pacific Jour. Math.* **32** (1970) 249—254.
[34] A. SULINSKI, A classification of semisimple rings, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III, **9** (1961) 1—6.
[35] A. SULINSKI—T. ANDERSON—N. DIVINSKY, Lower radical properties for associative and alternative rings, *Journal London Math. Soc.* **41** (1966) 417—424.
[36] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, II., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **12** (1961) 417—439.
[37] F. SZÁSZ, Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchs'schen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe, *Archiv der Math.* **12** (1961) 282—289.
[38] F. SZÁSZ, An observation on the Brown—McCoy radical, *Proc. Japan Acad.* **37** (1961) 413—416.
[39] F. SZÁSZ, Bemerkungen zu assoziativen Hauptidealiringen, *Indagationes Math.* **23** (1961) 577—583.
[40] F. SZÁSZ, Ringe, deren endlich erzeugbare Unterringe Hauptrechtsideale sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **13** (1962) 115—132.
[41] F. SZÁSZ, Über Ringe, deren endlich erzeugbare Unterringe streng zyklische Rechsideale sind, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **8**/A (1964) 443—453.
[42] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsidale, III., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963) 447—461.
[43] F. SZÁSZ, Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, *Monatshefte für Math.* **67** (1963) 359—362.
[44] F. SZÁSZ, Über Artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III., **11** (1963) 351—354.
[45] F. SZÁSZ, Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967) 261—272.
[46] F. SZÁSZ, Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring, *Acta Sci. Math. Szeged* **28** (1967) 31—37.
[47] F. SZÁSZ, Radikalbegriffe für Halbgruppen mit Nullelement, die dem Jacobsonschen ringtheoretischen Radikal änlich sind, *Math. Nachr.* **34** (1967) 157—161.
[48] F. SZÁSZ, Eine Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Bull. Acad. Polon, Sci. Classe* III, **15** (1967) 53—56.
[49] F. SZÁSZ, The sharpening of a result concerning the primitive ideals of an associative ring, *Proc. Amer. Math. Soc.* **18** (1967) 910—912.
[50] F. SZÁSZ, Reduktion eines Problems bezüglich der Brown—McChoyschen Radikalringe, *Acta Sci. Math. Szeged* **31** (1970) 167—172.
[51] F. SZÁSZ, Die Lösung eines Problems bezüglich des Durchschnittes zweier modularer Rechtsideale in einer Ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969) 211—216.
[52] F. SZÁSZ, Simultane Lösung eines halbgruppentheoretischen und eines ringtheoretischen Problems, *Acta Sci. Math. Szeged* **30** (1969) 289—294.
[53] F. SZÁSZ, Ideals of a ring with modular intersection, *Revue Roumaine Math. Pures Appl.* **16** (1971) 609—616.
[54] F. SZÁSZ, Äquivalenzrelation für eine Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **22** (1971) 85—86.
[55] F. SZÁSZ, Ein radikaltheoretischer Vereinigungsendomorphismus des Idealverbandes der Ringe, *Annales Univ. Sci. Budapest R. Eötvös* **12** (1969) 73—75.
[56] F. SZÁSZ, Beiträge zur Radikaltheorie der Ringe, *Publ. Math. Debrecen* **17** (1970) 267—271.
[57] SZÁSZ F., Gyűrűk radikáljairól, I., *Mat. Lapok* **19** (1968) 259—302.
[58] SZÁSZ F., Gyűrűk radikáljairól, II., *Mat Lapok* **20** (1969) 99—116.
[59] SZÁSZ F., Gyűrűk radikáljairól, III., *Mat. Lapok* **20** (1969) 311—346.
[60] F. SZÁSZ, Notes on modules, I., *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 349—350.
[61] F. SZÁSZ, Notes on modules, II., *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 351—353.
[62] F. SZÁSZ, Notes on modules, III., *Proc Japan Acad.* **46** (1970) 354—357.
[63] F. SZÁSZ, On Frattini one-sided ideals and subgroups, *Math. Nachr.* **46** (1970) 235—241.
[64] F. SZÁSZ, Almost right quasiregular adjoint semigroups of rings, *Math. Nachr.* **48** (1971) 309—314.
[65] F. SZÁSZ, On some weakly supernilpotent radicals of rings, *Colloquium Math.* **28** (1973) 195—201.
[66] F. SZÁSZ, Further characterizations of strongly regular rings, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III. **22** (1974) 243—245.

[67] F. SZÁSZ, Unabhängigkeitsfragen des Kurosch-schen Axiomensystems für die Radikale der Ringe, *Publ. Math. Debrecen* **15** (1964) 287—292.
[68] F. SZÁSZ, The radical property of rings such that every homomorphic image has no nonzero left annihilators, *Math. Nachrichten* **48** (1971) 371—375.
[69] F. SZÁSZ, On minimal biideals of rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **32** (1971) 333—336.
[70] F. SZÁSZ, On generalized biideals of rings, I., *Math. Nachr.* **47** (1970) 355—360.
[71] F. SZÁSZ, On generalized biideals of rings, II., *Math. Nachr.* **47** (1970) 361—365.
[72] F. SZÁSZ, On the idalizer of a subring, *Monatshefte für Math.* **75** (1971) 65—68.
[73] F. SZÁSZ, A class of regular rings, *Monatshefte für Math.* **75** (1971) 168—172.
[74] F. SZÁSZ, Rings, which are radical modules, *Math. Japonicae* **16** (1971) 103—104.
[75] F. SZÁSZ, On left magnifying elements and quasimodular right ideals of rings, *Math. Japonicae* **18** (1973) 221—224.
[76] F. SZÁSZ, On some simple Jacobson radical rings, *Proc. Japan Acad.* **18** (1973) 225—228.
[77] F. SZÁSZ, On radicals of semigroups with zero, *Proc. Japan Acad.* **46** (1971) 595—598.
[78] F. SZÁSZ, On the adjoint semigroups of rings, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 773—775.
[79] F. SZÁSZ, On hereditary radicals with zero, *Proc. Japan Acad.* (sajtó alatt).
[80] F. SZÁSZ, On strong semisimplicities of semigroups with zero, *Periodica Math. Hungar.* **5** (1974) 145—148.
[81] F. SZÁSZ, The join-reprezentation of some intersections in complete lattices, *Proc. Japan Acad.* (sajtó alatt).
[82] F. SZÁSZ, On Hashimotoian universal algebras with some properties of Hopf, *Math. Japonicae* **18** (1973) 229—234.
[83] F. SZÁSZ, Das im Operatorring enthaltene allgemeine Radikal eines Untermoduls, *Acta Sci. Math. Szeged* **34** (1973) 371—376.
[84] F. SZÁSZ, On right residuals in lattice ordered groupoids, *Math. Nachrichten* **48** (1971) 1—7.
[85] F. SZÁSZ—R. WIEGANDT, On the dualization of subdirect embedlings, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969) 289—302.
[86] F. SZÁSZ—R. WIEGANDT, On the duality of radical and semisimple objects in categories, *Acta Math, Acad. Sci. Hungar.* **21** (1970) 175—182.
[87] F. SZÁSZ—R. WIEGANDT, On hereditary radicals, *Periodica Math. Hungar.* **3** (1973) 235—241.
[88] SZÁSZ GÁBOR, *Bevezetés a hálóelméletbe,* Budapest, 1959.
[89] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin stiintific Bucuresti* **1** (1949) 783—789.
[90] J. SZÉP, Über endliche Gruppen, die nur einen echten Normalteiler besitzen, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956) 45—48.
[91] SZÉP JENŐ, Véges egyszerű csoportokról, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei,* Budapest, 1950. 451—453.
[92] L. A. SZKORNYAKOV, Komplementumos Dedekind-féle hálók és reguláris gyűrűk (oroszul). Moszkva, 1961.

(Beérkezett: 1973. I. 24.)

NORMALITÁS-VIZSGÁLAT

Írta: MAJOR PÉTER és TUSNÁDY GÁBOR

BEVEZETÉS

Ez a tanulmány az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézetének a felkérésére az MTA Matematikai Kutató Intézetének Matematikai statisztikai osztályán készült. Célja a normalitás-vizsgálat irodalmának az ismertetése, és az egyes módszerek összehasonlítása.

A normalitás-vizsgálat alapja a következő

MODELL. A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, egyforma eloszlásúak, és közös eloszlásfüggvényük, $F(x)$ folytonos.

Ebben a modellben azt kívánjuk eldönteni, hogy igaz-e a következő

HIPOTÉZIS. A ξ_i változók normális eloszlásúak, azaz

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

alkalmas (de ismeretlen) μ és σ mellett, ahol $\Phi(u)$ a standard normális eloszlásfüggvény:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Lényeges, az egész vizsgálatot meghatározó körülmény, hogy az eloszlás várható értéke, μ, és szórása, σ ismeretlen. Ha ez nem volna így, feladatunk speciális esete volna az ún. tiszta illeszkedés-vizsgálati feladatnak, amely szerint azt kell eldöntenünk, hogy a fenti modellben igaz-e az a hipotézis, hogy

$$F(x) = F_0(x),$$

ahol $F_0(x)$ tetszőleges, adott (folytonos) függvény.

A normalitás-vizsgálat természetes általánosítása a következő. Döntsük el, hogy a fenti modellben igaz-e a következő

HIPOTÉZIS. A ξ_i változók közös eloszlásfüggvénye

$$F(x) = F(x; \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k)$$

alakú, ahol $(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k)$ ismeretlen paraméterek. Ezt a feladatot becsléses illeszkedés-vizsgálatnak nevezzük. Már ez az elnevezés is sejteti, hogy a megoldást legtermészetesebb a következő irányban keresni. A tiszta illeszkedés-vizsgálat megoldása általában valamilyen

$$\Delta_n = \delta(F_n(x), F_0(x))$$

alakú statisztikán alapszik, ahol $F_n(x)$ az empirikus eloszlásfüggvény:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i:\xi_i<x} 1 = \frac{\nu_n(x)}{n},$$

($\nu_n(x)$ az x-nél kisebbek száma a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mintaelemek között), és $\delta(G(x), H(x))$ a G és H függvények eltérését mérő alkalmas funkcionál. Ezt figyelembe véve a becsléses illeszkedés-vizsgálati feladat megoldását kereshetjük a következő alakban. Adjuk meg először a ϑ_i paraméterek alkalmas

$$\hat{\vartheta}_i = \hat{\vartheta}_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

becsléseit, majd mérjük a vizsgált hipotézis teljesülésének a mértékét a

$$\hat{\Delta}_n = \delta(F_n(x), F(x; \hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \dots, \hat{\vartheta}_k))$$

statisztikával. A normalitás-vizsgálat esetében a paraméterek becsléséül nyilván a

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

mintaátlagot, és az

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2}$$

tapasztalati szórást választjuk. Mint ismeretes, ezek a μ, σ paraméterpár torzítatlan becslései között a legkisebb szórásúak (σ-nál egy konstans szorzótól eltekintve).

Bármennyire természetes is ez a megoldás, sok szempontból nem látszik megnyugtatónak. Az első szempont esztétikai. Akik a tiszta illeszkedés-vizsgálati módszereket ismerik, tudják, milyen nehéz e módszerek közül a legjobbat kiválasztani. A normális eloszlásnak az egész valószínűségszámításban elfoglalt központi szerepe arra vezette a statisztikusokat, hogy önálló, a tiszta illeszkedés-vizsgálattól független módszereket dolgozzanak ki, amelyektől — ha egzaktul ezt róluk bizonyítani nem is lehet — legalább heurisztikusan azt várhatjuk, hogy közvetlenül az eloszlás normalitását, normális voltát ellenőrzik. Hogy ez a törekvés milyen régi a statisztikusok között, azt talán legjobban PEARSON 1930-as(!) cikke [16] bizonyítja (címe: A further development of tests for normality, amiből a „further” jelzőt külön érdemes kiemelni). Először a megoldást a momentumok módszerével kívánták megadni. Ennek az irányzatnak a legjobban kidolgozott eredményeit GEARY [7] cikke tartalmazza. Hamarosan kiderült azonban, hogy azzal, hogy az eloszlás ferdeségét, csúcsosságát teszteljük, tulajdonképpen nem az eloszlás normalitását ellenőrizzük. Hiszen számtalan eloszlás van, amelynek ferdesége, vagy csúcsossága 0, és az eloszlás mégis igen messze van a normálistól.

A becsléses illeszkedés-vizsgálati módszerek lényegesebb hiányossága a fenti, esztétikai kifogáson túl az, hogy nem ad megoldást a következő feladatra. Ennek alapja az alábbi

TÖBBMINTÁS-MODELL. A $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in_i}$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ valószínűségi változók függetlenek, az azonos kezdő indexű $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in_i}$ változók egyforma eloszlásúak, és közös eloszlásfüggvényük, $F_i(x)$ folytonos $(i=1, 2, \ldots, k)$.

Ebben a modellben azt vizsgáljuk, hogy igaz-e a következő

HIPOTÉZIS. A ξ_{ij} változók normális eloszlásúak, azaz

$$F_i(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

alkalmas (de ismeretlen) μ_i, σ_i paraméterekkel.

A statisztikai gyakorlatban ugyanis az esetek többségében nem egyetlen minta normalitását kell megvizsgálnunk, hanem sok kis mintáról együtt kell eldöntenünk, hogy normális-e az eloszlásuk, vagy sem. Ezek a kis minták sokszor csak a lokációs és a skála paraméterekben különböznek egymástól, vagyis az eredeti modell helyettesíthető egy speciálisabb változatával:

SPECIÁLIS TÖBBMINTÁS MODELL. A többmintás modell feltevésein túl feltesszük, hogy a ξ_{ij} változók eloszlása lineáris transzformációval kapható meg az $F_0(x)$ eloszlásból, azaz

$$F_i(x) = F_0\left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

alkalmas (de ismeretlen) μ_i, σ_i paraméterekkel (ahol $F_0(x)$ folytonos eloszlásfüggvény).

Ebben a speciális modellben elsősorban az $F_0(x)$ eloszlásfüggvény érdekel minket, a μ_i, σ_i paraméterek értéke közömbös, emiatt e paramétereket szokás zavaró paramétereknek is nevezni. Természetes gondolat ebben az esetben az, hogy valamilyen módon megszabaduljunk a zavaró paraméterektől, szemléletes kifejezéssel élve alkalmas transzformációval „kidobjuk" a paramétereket. Ilyen eljárást a normális eloszlás esetében DURBIN [6], SARKADI [21], és STÖRMER [27] adott meg, és ezzel megalapozták a normalitás-vizsgálat új, és szerintünk leghatásosabb módszerét.

Dolgozatunk első és második része a tiszta és a becsléses illeszkedés-vizsgálattal foglalkozik, a harmadik részben pedig ezeket a transzformációs módszereket ismertetjük.

1. TISZTA ILLESZKEDÉS-VIZSGÁLAT

MODELL. A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, egyforma eloszlásúak, és közös eloszlásfüggvényük, $F(x)$ folytonos.

HIPOTÉZIS. A ξ_i változók közös eloszlásfüggvénye az ismert $F_0(x)$, azaz

$$F(x) = F_0(x),$$

(ahol F_0 természetesen folytonos).

Ennek a hipotézisnek a fenti modellben történő ellenőrzését tiszta illeszkedés-vizsgálatnak nevezzük. A tiszta illeszkedés-vizsgálat módszereit SAHLER [20] cikke alapján ismertetjük, ebben a cikkben található meg e témakör részletes irodalomjegyzéke is.

Hipotézisünket statisztikai próbával ellenőrizhetjük. A statisztikai próba alapja — a fenti modell esetében — egy n-változós függvény, jelöljük $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-nel, amelynek lehetséges értékei 0 és 1 közöttiek:

$$0 \leqq \pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq 1.$$

Ennek alapján eljárásunk a következő: $\pi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ valószínűséggel elutasítjuk a vizsgált hipotézist, $1-\pi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ valószínűséggel pedig elfogadjuk azt. Az esetek többségében π csak 0-val, vagy 1-gyel egyenlő, ekkor az n dimenziós térnek azt a részét, ahol $\pi=0$, elfogadási tartománynak, a $\pi=1$ feltétellel definiált részt pedig elutasítási, vagy kritikus tartománynak nevezzük. A $\pi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ függvény maga is valószínűségi változó, ennek a várható értéke a ξ_i-k eloszlásfüggvényétől, F-től függ. Jelöljük ezt a várható értéket $\beta_\pi(F)$-fel:

$$\beta_\pi(F) = E_F \pi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Ezt az értéket a π próba erejének nevezzük, $\beta_\pi(F_0)$ adja meg annak a valószínűségét, hogy a vizsgált hipotézis igaz, mégis elutasítjuk azt. Ezt a hibát elsőfajú hibának, az elsőfajú hiba $\beta_\pi(F_0)$ valószínűségét pedig a próba terjedelmének nevezzük, és ε-nal jelöljük:

$$\varepsilon = \beta_\pi(F_0).$$

Tetszőleges szintű próbát kapunk, ha valamilyen (folytonos) $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt veszünk alapul, és T alapján π-t a

$$\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad T(x_1, x_2, \ldots, x_n) < c \\ 1, & \text{ha} \quad T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq c \end{cases}$$

összefüggéssel definiáljuk, ahol c értékét úgy határozzuk meg, hogy a próba szintje ε legyen, azaz

$$P_{F_0}\big(T(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < c\big) = 1-\varepsilon$$

teljesüljön.

A statisztikai próbák elméletében fontos szerepet játszik az invariancia: bizonyos transzformációkkal ugyanis a legtöbb hipotézis-vizsgálati feladatot átfogalmazhatjuk; előnyben részesítjük azokat az eljárásokat, amelyek e transzformációk hatására érzéketlenek, illetve amelyekre a transzformációk természetes módon hatnak. Esetünkben a transzformáció alapja tetszőleges monoton növő $g(x)$ függvény lehet, ennek segítségével az eredeti mintához az

$$\eta_i = g(\xi_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

mintát rendelhetjük. Hipotézisünk teljesülése esetén az η_i-k eloszlásfüggvénye

$$G_0(x) = P(\eta_i < x) = P\big(g(\xi_i) < x\big) = P\big(\xi_i < g^{-1}(x)\big) = F_0\big(g^{-1}(x)\big).$$

Jelöljük az F_0 eloszlás ellenőrzésére szolgáló próbafüggvényt $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n; F_0)$-lal. Természetes követelmény a π próbával szemben, hogy ha a mintát a g függvénnyel transzformáljuk, akkor a transzformált G_0 eloszlást a transzformált $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$

mintán ugyanígy ellenőrizze, mint az eredeti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mintán F_0-t, azaz

$$\pi(g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n); G_0) = \pi(x_1, x_2, \dots, x_n; F_0) \tag{1}$$

legyen, ahol $G_0(x) = F_0(g^{-1}(x))$.

DEFINÍCIÓ. A $\pi(x_1, x_2, \dots, x_n; F_0)$ próbafüggvényt — és a megfelelő próbát — eloszlásmentesnek nevezzük, ha π-re teljesül (1) minden monoton növekvő g függvény mellett.

Eloszlásmentes eljárást kapunk, ha a próbához az

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i:\xi_i < x} 1$$

empirikus eloszlásfüggvény alapján a

$$T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \delta(F_n(x), F_0(x))$$

statisztikát használjuk, ahol $\delta(G, H)$ a G és H eloszlásfüggvények távolságát mérő tetszőleges funkcionál.

Az eloszlásmentes próbák vizsgálatánál mindig feltehetjük, hogy a ξ_i-k a vizsgált hipotézis szerint a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlásúak, hiszen a $g = F_0$ transzformáció tetszőleges F_0 mellett erre az esetre vezet. Emiatt a továbbiakban feltehetjük, hogy

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0; \\ x, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1; \\ 1, & \text{ha} \quad x > 1. \end{cases}$$

Annak érdekében, hogy az ε szinthez tartozó c szignifikancia-határt megkapjuk, meg kell határoznunk a $\delta(F_n(x), F_0(x))$ statisztika eloszlását abban az esetben, ha a ξ_i-k a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlásúak. Vannak δ-k, amelyekre ez zárt formában megadható, vannak, amikre csak a határeloszlás adható meg, és vannak, amelyekre csak Monte-Carlo-módszerrel készíthetjük el (vagy készítették el) a szükséges táblázatokat. Az alábbiakban áttekintjük a legfontosabb funkcionálokat — ezzel együtt a legfontosabb tiszta illeszkedés-vizsgálati módszereket.

1.1. A Kolmogorov—Szmirnov próba

A próba statisztikája egyoldali esetben

$$D_n^+ = \sup_{-\infty < x < \infty} [F_n(x) - F_0(x)],$$

kétoldali esetben

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_0(x)|.$$

A próba általánosítása a tetszőleges pozitív ψ-hez tartozó

$$D_n^+(\psi) = \sup_{a < F_0(x) < b} \psi(F_0(x)) [F_n(x) - F_0(x)],$$

illetve

$$D_n(\psi) = \sup_{a<F_0(x)<b} \psi(F_0(x))\,|F_n(x)-F_0(x)|$$

statisztikákon alapszik. Ennek speciális esete a *Rényi*-próba, amelynél

$$\psi(x) = \frac{1}{x}, \quad a = \alpha, \quad b = 1;$$

vagy

$$\psi(x) = \frac{1}{1-x}, \quad a = 0, \quad b = 1-\alpha;$$

ahol $0<\alpha<1$.

E statisztikák közül sokáig csak D_n^+ eloszlása volt ismeretes, D_n eloszlására csak igen bonyolult összegezéseket tartalmazó formulák voltak. Könnyen látható, hogy az összes *Kolmogorov—Szmirnov*-típusú próba-statisztika eloszlása meghatározható STECK [25] alábbi eredménye alapján.

TÉTEL. *Legyenek a ξ_i-k a* (0, 1)*-ben egyenletes eloszlású, független valószínűségi változók* $(i=1, 2, \dots, n)$, *és ξ_i^* legyen közöttük a nagyság szerint i-edik. Legyen továbbá*

$$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_n \leqq 1,$$

$$0 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \dots \leqq b_n \leqq 1,$$

$$a_i \leqq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Akkor

$$P(a_i \leqq \xi_i^* \leqq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n) =$$

$$= n!\,\det\left[(b_i-a_j)_+^{j-i+1}/(j-i+1)!\right] =$$

$$= n!\begin{vmatrix} (b_1-a_1)_+ & \dfrac{(b_1-a_2)_+^2}{2!} & \dots & \dfrac{(b_1-a_n)_+^n}{n!} \\ 1 & (b_2-a_2)_+ & \dots & \dfrac{(b_2-a_n)_+^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (b_n-a_n)_+ \end{vmatrix}$$

(ahol $(a)_+ = a$, *ha* $a>0$, *és* $(a)_+ = 0$, *ha* $a \leqq 0$, és $0^0 = 1$*).*

Erre a tételre igen egyszerű bizonyítást adott SARKADI [22]. A tétel alapján D_n kis n-ek melletti eloszlása számítógépen könnyen meghatározható.

Az eredeti D_n^+ és D_n, valamint a *Rényi*-féle $D_n^+(\psi)$ és $D_n(\psi)$ statisztikák határeloszlására zárt formulák ismeretesek, ezekre az eloszlásokra táblázatok is találhatók, például a [2], [14], [17] táblázat-gyűjteményekben. A konvergencia gyorsasága kiolvasható az alábbi lemmából.

LEMMA.

$$P(\sqrt{n}\,D_n \leqq z) = K(z) + \frac{1}{6\sqrt{n}}K'(z) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ahol

$$K(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2 z^2}.$$

Itt említjük meg a

$$V_n = \sup_{-\infty<x<\infty} [F_n(x) - F_0(x)] + \sup_{-\infty<x<\infty} [F_0(x) - F_n(x)]$$

statisztikát, amelynek határeloszlása

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\, V_n \leqq z\right) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (2 - 8j^2 z^2) e^{-2j^2 z^2},$$

(természetesen itt is, és az előbbi lemmában is z pozitív). Úgy gondoljuk, puszta véletlen, hogy a D_n statisztika terjedt el a gyakorlatban, a magunk részéről V_n és D_n között semmi különbséget nem látunk.

1.2. A Cramér—Mises-próba

A próba statisztikája

$$\Omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left[F_0(\xi_i^*) - \frac{2i-1}{2n}\right]^2,$$

ahol ξ_i^* a rendezett minta i-edik eleme. A próba általánosítása a tetszőleges pozitív $\psi(x)$ súlyfüggvényhez tartozó

$$\Omega_n^2(\psi) = n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(F_0(x)) [F_n(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x)$$

statisztikán alapszik. Ennek speciális esete az *Anderson—Darling*-próba, amelynél

$$\psi(x) = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Ezeknek a statisztikáknak az egzakt eloszlása nem ismeretes, de a határeloszlásuk igen. E határeloszlások ugyanis, akárcsak az előző pontban szereplő határeloszlások, meghatározhatók a következő tétel segítségével.

TÉTEL (DONSKER). *Legyen $\psi(f)$ a* [0, 1]*-beli, szakaszonként folytonos függvényeken értelmezett, folytonos funkcionál.* (Ez az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy tetszőleges, a [0, 1]-ben szakaszonként folytonos f_0 függvényhez, és tetszőleges pozitív ε-hoz van olyan pozitív δ, hogy

$$|\psi(f) - \psi(f_0)| < \varepsilon,$$

teljesül minden olyan, a [0, 1]-ben szakaszonként folytonos f függvényre, amelyre

$$|f(x) - f_0(x)| < \delta$$

minden $0 \leqq x \leqq 1$ mellett.) *Legyenek továbbá a* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *valószínűségi változók függetlenek, és a* (0, 1)*-ben egyenletes eloszlásúak. Akkor a*

$$\Delta_n = \psi(\sqrt{n}\,[F_n(x)-x])$$

statisztika határeloszlása egyenlő a $\Delta = \psi(W(t))$ *változó határeloszlásával, azaz*

$$\lim_{n=\infty} P(\Delta_n < x) = P(\Delta < x);$$

ahol $F_n(x)$ *az empirikus eloszlásfüggvény, és* $W(t)$ *az ún. Brown-bridge, azaz* $W(t)$ *olyan Gauss-folyamat, amelyre* $EW(t) = 0$, *és* $EW(t)W(s) = t(1-s)$, *ha* $0 \leqq t \leqq s \leqq 1$.

E tétel alapján tetszőleges ψ funkcionállal generálhatunk próbát, hiszen a tétel alapján ahhoz, hogy a próba-statisztika határeloszlását meghatározzuk, „csak" a $\Delta = \psi(W(t))$ valószínűségi változó eloszlását kell meghatároznunk. Amíg azonban a *Kolmogorov—Szmirnov*-típusú statisztikák esetében ezeknek az eloszlásoknak a meghatározására nem ismerünk általános módszert, a *Cramer—Mises*-típusú statisztikák határeloszlása előállítható a következő, KAC—SIEGERTtől [9] származó lemma alapján.

LEMMA. *Legyen* $\xi(t)$ *a* $0 \leqq t \leqq 1$ *szakaszon értelmezett Gauss folyamat, a várható értéke legyen* 0, *és jelöljük a kovariancia függvényét* $B(s, t)$*-vel:*

$$B(s,t) = E\xi(s)\xi(t).$$

Akkor az

$$\eta = \int_0^1 \xi^2(t)\,dt$$

valószínűségi változó eloszlása megegyezik az

$$\tilde{\eta} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}\eta_i^2$$

összeg eloszlásával, ahol az η_i*-k függetlenek, standard eloszlásúak, és a* λ_i *számok az*

$$\int_0^1 \psi(s)B(s,t)\,ds = \lambda\psi(t)$$

integrálegyenlet sajátértékei.

1.3. Elemi statisztikák

Mint láttuk, feltehetjük, hogy az a hipotézis, hogy a ξ_i-k a (0, 1)-ben egyenletes eloszlásúak, és a ξ_i-k értékkészlete a modell szerint is része a (0, 1) szakasznak. Azt kell tehát ellenőriznünk, hogy a (0, 1)-beli

$$0 = \xi_0^* \leqq \xi_1^* \leqq \xi_2^* \leqq \ldots \leqq \xi_n^* \leqq \xi_{n+1}^* = 1$$

n elemű rendezett minta (ξ_0^*, ξ_{n+1}^* szerepeltetése csak a jelöléseket egyszerűsíti) mennyire egyenletesen osztja fel a (0, 1) intervallumot, azaz az

$$F_n(x) = \frac{i}{n}, \quad \text{ha} \quad \xi_i^* < x \leqq \xi_{i+1}^* \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

empirikus eloszlásfüggvény milyen mértékben közelíti meg az $F_0(x)=x$ függvényt, vagyis a

$$W_n(x) = \sqrt{n}\,[F_n(x)-x]$$

függvény mennyire tér el 0-tól. Az eddigi statisztikák W_n nagyságát vizsgálták: a *Kolmogorov—Szmirnov*-típusú statisztikák a lcgnagyobb értéket, a *Cramér—Mises*-típusú statisztikák a globális eltérést ellenőrizték. Elvileg azonban akármilyen funkcionált használhatunk, a további lehetőségek közül mutatunk be itt néhányat.

a) *Az eloszlásfüggvény árnyéka*

Képzeljük azt, hogy az origóban egy fényforrás van, és az $(x, F_n(x))$ görbe árnyékát az $y=1$ egyenesen látjuk: jelöljük az árnyék kezdőpontját α_n^+-szal:

$$\alpha_n^+ = \min_{0<x<1} \frac{x}{F_n(x)},$$

és legyen e statisztika párja, α_n^- az (1, 1) pontbeli fényforrásból származó árnyék az x tengelyen:

$$\alpha_n^- = \min_{0<x<1} \frac{1-x}{1-F_n(x)}.$$

Mindkettő egyenletes eloszlású (0, 1)-ben, és mindkettőnek a nagy értékei szólnak a hipotézis teljesülése ellen. A D_n, W_n statisztikák mintájára ezekből is előállíthatjuk a

$$\alpha_n = \max(\alpha_n^+, \alpha_n^-), \quad \tilde{\alpha}_n = \alpha_n^+ + \alpha_n^-$$

statisztikákat, ezek eloszlása azonban már bonyolultabb, és függ a mintaelemszámtól.

b) *Pozitív szakaszok*

Ez a statisztika azt méri, mennyire szimmetrikus a $W_n(t)$ folyamat értékkészlete a 0-ra: a statisztika értéke annak a halmaznak a mértéke, ahol $W_n(t)$ pozitív:

$$\pi_n = \int_0^1 P(W_n(t))\,dt,$$

ahol

$$P(u) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad u > 0; \\ 0, & \text{ha} \quad u \leqq 0. \end{cases}$$

A π_n statisztika értéke tehát azoknak a szakaszoknak az összhossza, amelyek felett $W_n(t)$ pozitív, vagyis $F_n(x) > x$, az empirikus eloszlásfüggvény az $F_0(x)=x$ eloszlás felett van. A π_n statisztika eloszlása egyenletes, túl kicsi és túl nagy értékei a hipotézis ellen szólnak.

c) *Átmetszések száma*

A statisztika értéke azoknak a (0, 1)-beli x-eknek a száma, amelyekre $F_n(x)=x$, azaz $W_n(x)=0$ teljesül. A statisztika eloszlása, általánosításai, és megfelelő határeloszlások megtalálhatók a [4] dolgozatban. A statisztika alacsony értékei szólnak a hipotézis teljesülése ellen.

d) *Kvázi—Cramér—Mises-statisztikák*

A *Cramér—Mises*-statisztika kissé módosított változata a

$$\beta_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left| \xi_i^* - \frac{i}{n+1} \right|^{\lambda}$$

statisztika, ahol $\lambda \geqq 1$. Ez a statisztika azt méri, mennyire maradnak a ξ_i^* rendezett mintaelemek a várható értékük, $i/n+1$ közelében. Előnye, hogy az értéke könnyen kiszámítható, és a határeloszlása egyszerű: ugyanis a tetszőleges $\lambda \geqq 1$ mellett a határeloszlás normális. Hibája viszont, hogy nem veszi figyelembe azt a tényt, hogy a különböző rendezett minta elemek szórása igen eltérő lehet. Ezt a hibát küszöböli ki a

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\xi_i^* - \frac{i}{n+1}\right)^2}{i(n+1-i)}$$

statisztika, amely már a szórásokat is figyelembe veszi. Ebből a szempontból még egzaktabb a

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\xi_i^* - \frac{i}{n+1}\right) \left(\xi_j^* - \frac{j}{n+1}\right)$$

statisztika felépítése, ahol az $A=(a_{ij})$ mátrix a rendezett minta elemek C kovarianciamátrixának az inverze: $A=C^{-1}$. A $C=(c_{ij})$ mátrix elemei tehát

$$c_{ij} = \frac{i(n+1-j)}{(n+1)^2}, \quad \text{ha} \quad 1 \leqq i \leqq j \leqq n;$$

(és természetesen C szimmetrikus).

e) *A Moran-statisztikák*

Ismeretes, hogy ha pozitív számok összege állandó, négyzetösszegük akkor minimális, ha egyenlőek. Ennek alapján mérhetjük a minta egyenletes eloszlását a

$$\mu_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} |\xi_{i+1}^* - \xi_i^*|^{\lambda}$$

statisztikával, ahol $\lambda \geqq 0$. E statisztikák sok szempontból hasonlítanak a kvázi-*Cramér—Mises*-statisztikákra, határeloszlásuk normális, és éppúgy lehetne őket továbbfejleszteni, mint a β statisztikákat.

Ezzel korántsem ért véget a lehetséges statisztiák felsorolása, ez nem is volt célunk, csak a lehetőségeket akartuk érzékeltetni. E statisztikák inkább színező jellegűek, valamely „fő" próba mellett kiegészítésül használhatjuk őket. Utalunk ezzel kapcsolatban VINCZE [28] cikkére, aki azt vizsgálta, milyen mértékben lehet a *Kolmogorov—Szmirnov*-próba erejét növelni az első maximum hely (index) figyelembevételével.

1.4. Sűrűségfüggvények

Eddigi próbáink mind azt ellenőrizték valamilyen formában, milyen közel van az F_n empirikus eloszlásfüggvény a hipotetikus F_0 eloszlásfüggvényhez. Most olyan próbákról lesz szó, amelyek a sűrűségfüggvényt ellenőrzik. A sűrűségfüggvényt lényegében háromféleképpen becsülhetjük:

— hisztogrammal,

— ortogonális sorfejtéssel,

— Parzen-féle magfüggvénnyel.

Ebben a sorrendben tárgyaljuk tehát a lehetséges próbákat.

a) *Gyakorisági hisztogram: χ^2-próba*

Legyen

$$-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1} = \infty$$

egy beosztása a számegyenesnek, és jelöljük a j-edik intervallumot I_j-vel: $I_j = (a_j, a_{j+1})$ ($j=0, 1, 2, \dots, k$), a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mintának az I_j-be eső elemeinek a számát pedig ν_j-vel:

$$\nu_j = \sum_{i:\xi_i \in I_j} 1 = \nu(a_{j+1}) - \nu(a_j),$$

ahol $\nu(x)$ az x-nél kisebb mintaelemek számát jelöli. A beosztáshoz tartozó gyakorisági hisztogram

$$f_n(x) = \frac{\nu_j}{n(a_{j+1} - a_j)}, \quad \text{ha} \quad x \in I_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k).$$

(Eszerint I_0-ban és I_k-ban f_n értéke definíció szerint 0.) Azt, hogy ez a sűrűségfüggvény milyen közel van a teoretikus

$$f_0(x) = F_0'(x)$$

sűrűségfüggvényhez (amelynek a létezését ebben a pontban feltételezzük) az előzőek alapján a

$$d_n^+ = \sup_{-\infty < x < \infty} [f_n(x) - f_0(x)],$$

$$d_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |f_n(x) - f_0(x)|,$$

$$\omega_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x) - f_0(x)]^2 f_0(x)\, dx,$$

statisztikákkal mérhetnénk. Ezek azonban általában nem eloszlásmentesek: vagy a beosztást kell F_0 figyelembevételével alkalmasan megválasztani, vagy a

$$d_n^+(\psi) = \sup_{-\infty<x<\infty} \psi(f_0(x))\,[f_n(x)-f_0(x)],$$

$$d_n(\psi) = \sup_{-\infty<x<\infty} \psi(f_0(x))\,|f_n(x)-f_0(x)|,$$

$$\omega_n^2(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(f_0)\,[f_n(x)-f_0(x)]^2 f_0(x)\,dx$$

általánosításukban szereplő ψ súlyfüggvényt kell alkalmasan megválasztani. A d-típusú statisztikákkal először RÉVÉSZ foglalkozott, eredményeivel kapcsolatban [18] alatti cikkére hivatkozunk. Az ω^2-típusú statisztikák között központi szerepet játszik az, amelyik lényegében a $\psi(t)=1/t^2$ súlyfüggvénynek felel meg, és amelyiket χ^2-próbaként ismerünk:

$$\chi_k^2 = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\nu_j-np_j)^2}{np_j},$$

ahol

$$p_j = F_0(a_{j+1})-F_0(a_j) = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f_0(x)\,dx.$$

Ez a próba ugyan egzaktul nem eloszlásmentes, de a határeloszlása már az: ha n tart a végtelenbe, a statisztika határeloszlása a k szabadságfokú χ^2-eloszlás. A próba legrészletesebb elemzését COCHRAN [3] dolgozatában találjuk meg. MANN és WALD [12] a χ^2-próba és a *Kolmogorov—Szmirnov*-próba erejét hasonlította össze.

b) *Ortogonális sorfejtés: Neyman—Barton-próba*

Módosítsuk most úgy a modellt, hogy még azt is a feltevések közé számítjuk, hogy a közös sűrűségfüggvény:

$$f(x) = f_0(x) \sum_{j=0}^{k} a_j \psi_j(x)$$

alakú, ahol az a_j-k alkalmas együtthatók, a ψ_j-k pedig az f_0 súlyfüggvényre nézve ortonormált rendszert alkotnak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(x)\psi_j(x) f_0(x)\,dx = \delta_{ij},$$

ahol δ_{ij} értéke 1, vagy 0 aszerint, hogy i egyenlő-e j-vel, vagy sem. Feltesszük továbbá, hogy $\psi_0(x)=1$. Ebben a modellben az a_j együtthatók torzítatlan becslése

$$\alpha_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi_j(\xi_i) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

hiszen a ψ rendszer ortonormált volta miatt

$$E\psi_j(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(x)f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(x) \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \psi_\nu(x) f_0(x)\,dx =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu \delta_{\nu j} = a_j.$$

(Mivel $\psi_0 \equiv 1$, $a_0 = \alpha_0 = 1$, így csak $j \geqq 1$ mellett kell az a_j-ket becsülnünk.)
A vizsgált hipotézis most ekvivalens azzal, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 = 0,$$

azaz a_0 kivételével az összes együttható 0 (mivel f is sűrűségfüggvény, ebből már következik, hogy $a_0 = 1$). Ha ez a hipotézis teljesül, az α_j becslések korrelálatlanok, és a szórásnégyzetük $1/n$:

$$\operatorname{cov} \alpha_i, \alpha_j = \frac{1}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{cov} \psi_i(\xi_\nu), \psi_j(\xi_\nu) =$$

$$= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(x)\psi_j(x) f_0(x)\,dx = \delta_{ij}.$$

Mindegyik α_j független valószínűségi változók számtani közepe, tehát a

$$B_k^2 = n \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \psi_j(\xi_i) \right\}^2$$

statisztika határeloszlása k szabadságfokú χ^2 eloszlás.

Ez a statisztika lényegében NEYMANtól származik (vö.: [13]), aki azt az esetet vizsgálta, amikor f_0 a (0, 1)-ben azonosan 1, és a ψ függvényrendszer a *Hermite*-polinomrendszer. Később BARTON foglalkozott sokat e statisztikákkal (vö. pl. [1]), jelenleg a sűrűségfüggvények becslésének az aszimptotikus viselkedésének a vizsgálatánál ismét az érdeklődés középpontjába került. Ezzel kapcsolatban hivatkozunk még a KENDALL—STUART [10] könyvre, mint az egyetlen nem hazai statisztikakézikönyvre, ahol a normalitásvizsgálatról szó esik.

c) *A sűrűségfüggvény Parzen-féle becslése*

A módszer inkább PARZEN nevéhez fűződik (vö. [15]), bár PARZEN előtt már ROSENBLATT is foglalkozott vele. Legyen g tetszőleges sűrűségfüggvény, b_n alkalmasan választott 0-hoz tartó sorozat, akkor a sűrűségfüggvény *Parzen*-féle becslése az

$$f_n(x) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{x - \xi_i}{b_n}\right)$$

függvény. Sokan ezt tartják a sűrűségfüggvény egyetlen becslésének, amit vitathatatlan egyszerűsége, áttekinthetősége, kezelhetősége indokol. Rögzített n mellett b_n természetesen egyetlen szám, értékét tanácsos $n^{-1/5}$ közelében választani. Szemléletesen szólva b_n annak a perturbáló tényezőnek, mesterséges hibának a szórása, amelyet a mintához rendelünk, hogy a diszkrét elemekből álló minta helyett folytonos, összemosott görbét kapjunk. Ezért b_n se túl kicsi nem lehet (ekkor a mintaelemek izoláltak maradnának), se túl nagy (ekkor a valódi f helyett a becsléshez használt g hatása dominálna a becslésben).

A becslés illeszkedésvizsgálati célokra való felhasználásának elvi alapjait Rosenblatt adta meg a [19] cikkben.

2. BECSLÉSES NORMALITÁS-VIZSGÁLAT

MODELL. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, egyforma eloszlásúak, és közös eloszlásfüggvényük, $F(x)$ folytonos.

HIPOTÉZIS. A ξ_i változók normális eloszlásúak, azaz

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

alkalmas (de ismeretlen) μ és σ mellett.

Ennek a hipotézisnek a fenti modellben történő ellenőrzését normalitás-vizsgálatnak nevezzük. Mint a bevezetőben már láttuk, ez a feladat két különböző módon vezethető vissza a tiszta illeszkedés-vizsgálatra: becsléssel és transzformációval. Ebben a fejezetben a becsléses illeszkedés-vizsgálati módszerrel foglalkozunk. Becslésül a

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

mintaátlagot, és az

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2}$$

tapasztalati szórást használjuk. Azt fogjuk ellenőrizni, milyen közel van az

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i:\xi_i<x} 1$$

tapasztalati eloszlásfüggvény a $\bar{\xi}$ várható értékű, s szórású normális eloszláshoz, vagyis azt, hogy mennyire marad a 0 közelében a

$$w_n(x) = \sqrt{n}\left[F_n(x) - \Phi\left(\frac{x-\bar{\xi}}{s}\right)\right]$$

folyamat.

2.1. A Donsker-tétel megfelelője

Ha most is az előző pontban definiált ψ funkcionálokat kívánjuk használni, felmerül a kérdés, milyen mértékben befolyásolja a határeloszlásukat az a körülmény, hogy az eloszlás paramétereit becsültük. Ezt a kérdést először a *Cramér—Mises*-próbával kapcsolatban DARLING [5] vizsgálta, nem sokkal utána KAC, KIEFER, WOLFOWITZ [8] a becsléses *Kolmogorov—Szmirnov*-próba határeloszlását határozta meg. Dolgozataikban néhány — *Monte-Carlo*-módszerrel készített — táblázatot is megadnak, ezeket csak itt, az eredeti cikkekben lehet megtalálni. Könnyen látható, hogy a

$$W_n(x) = w_n\big(\Phi^{-1}(sx+\bar{\xi})\big)$$

folyamat eloszlása nem függ a μ, σ paraméterektől, tehát a $\psi\big(W_n(x)\big)$ statisztika eloszlása sem függ μ, σ értékétől egyetlen ψ funkcionál mellett sem, így kellő számú szimulálással — standard normális eloszlásból kiindulva — a

$$P\big(\psi(W_n(x)) < \lambda\big)$$

valószínűségek *Monte-Carlo*-módszerrel meghatározhatók. (Minket ez elsősorban az általunk választott ψ, valamint a mintabeli n és λ mellett érdekel, úgy látjuk, kis mintaelemszám mellett ez a *Monte-Carlo*-módszer a legjobb.)

Visszatérve a határeloszlás meghatározására, mint láttuk, a kérdés az, hogy az ismert határeloszlások változtatás nélkül használhatók-e, vagy sem. Várható ugyanis, hogy a becsült paraméterekhez tartozó normális eloszlás jobban meg tudja közelíteni az empirikus eloszlást, mint maga a teoretikus eloszlás, hiszen a paraméterek becslése épp olyan irányban tér el a valódi értékektől, ahogy azt a minta diktálja. A kérdés csak az, hogy ez a hatás lényeges-e a határeloszlás szempontjából, vagy sem. Az említett szerzők azt találták, hogy ez a hatás lényeges, eredményük a következő tételben foglalható össze.

TÉTEL. *Legyen $\Psi(f)$ a* [0, 1]*-beli, szakaszonként folytonos függvényeken értelmezett folytonos funkcionál. Legyenek továbbá a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, normális eloszlásúak μ, σ paraméterekkel. Legyen $\bar{\xi}$, és s a minta átlaga, és szórása, az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ minta pedig legyen az eredeti minta standardizáltja:*

$$\eta_i = \frac{\xi_i - \bar{\xi}}{s} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Jelöljük $G_n(x)$-szel az η_i mintához tartozó empirikus eloszlásfüggvényt:

$$G_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i:\eta_i<x} 1 = F_n(sx+\bar{\xi}),$$

ahol F_n az erdeti empirikus eloszlásfüggvény. Akkor a

$$\Delta_n = \Psi\big(\sqrt{n}\,[G_n(x) - \Phi(x)]\big)$$

statisztika határeloszlása egyenlő a $\Delta = \psi\big(W(t)\big)$ változó eloszlásával, azaz

$$\lim_{n\to\infty} P(\Delta_n < x) = P(\Delta < x),$$

ahol $W(t)$ olyan Gauss-folyamat, amelyre $EW(t) = 0$, és

$$EW(t)W(s) = \Phi(t)\big(1-\Phi(s)\big) - \frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{st}{2}\right)e^{-\frac{s^2+t^2}{2}},$$

ha $-\infty < t \leqq s < \infty$.

Ez persze csak a kérdés egyik fele, a konkrét funkcionálok esetében még meg kell határozni a Δ változó eloszlását. A *Kolmogorov—Szmirnov*-statisztikára ez nem ismeretes, a *Cramér—Misesre* viszont DARLING a már ismert *Kac—Siegert*-lemma alapján megadta a teoretikus eloszlást.

Összehasonlítás céljából megadjuk a következő táblázatokat:

Kolmogorov—Szmirnov-próba $P(\sqrt{n}D_n \leq z) = \alpha$

Elfogadási szint	Kritikus érték (tiszta illeszkedésvizsgálat)	Kritikus érték (becsléses illeszkedésvizsgálat)
$\alpha = 0{,}9$	$z = 1{,}23$	$z = 0{,}82$
$\alpha = 0{,}95$	$z = 1{,}36$	$z = 0{,}90$
$\alpha = 0{,}99$	$z = 1{,}63$	$z = 1{,}04$

Cramér—Mises-próba $P(\Omega_n^2 \leq z) = \alpha$

Elfogadási szint	Kritikus érték (tiszta illeszkedésvizsgálat)	Kritikus érték (becsléses illeszkedésvizsgálat)
$\alpha = 0{,}9$	$z = 0{,}35$	$z = 0{,}10$
$\alpha = 0{,}95$	$z = 0{,}46$	$z = 0{,}13$
$\alpha = 0{,}99$	$z = 0{,}75$	$z = 0{,}18$

2.2. A Wilk—Shapiro-próba

Külön figyelmet érdemel az így kapott eljárások közül az, amelyet lényegében az 1.3.d. pontban δ_n-nel jelölt statisztikából kapunk. Ez a módszer WILKtől és SHAPIROtól (vö.: [23]) származik, akik később a [24] dolgozatukban *Monte-Carlo*-módszerrel összehasonlították az eljárásukat más normalitásvizsgálati próbákkal és azt kapták, hogy az egyértelműen jobb minden más eljárásnál. Igaz ugyan, hogy csak a próbák erejét vizsgálták, a szükséges gépidőt nem, és az is elképzelhető, hogy ez az eredmény csak az általuk figyelembe vett alternatívák speciális választásától függ, mégis elfogadható volna a módszerük, ha kiterjeszthető volna a többmintás feladatra. A szerzők ezt meg is kísérelték a [29] dolgozatukban, úgy gondoljuk azonban, ez a kérdés a módszer esetleges alkalmazása előtt további vizsgálatot igényelne.

A *Wilk—Shapiro*-statisztika formálisan a következő:

$$W_n = \frac{1}{s^2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\xi_i^*\right)^2,$$

ahol az a_{ni} együtthatókat a szerzők $2 \leq n \leq 50$ mellett táblázatosan megadják. Ugyanezekre a mintaelemszámokra adják meg a megfelelő szignifikancia-határokat is.

2.3. Sűrűségfüggvények: χ^2 próba

Ha valaki nagyon keveset tud a normalitás-vizsgálattal kapcsolatban felmerülő nehézségekről, a „Hogyan teszteljük a normalitást" kérdésre valószínűleg a következő választ adja: „A *Kolmogorov—Szmirnov*-próba ugyanúgy használható, csak a paramétereket a becsült értékükkel kell helyettesíteni, a χ^2 próbában pedig 2-vel kell csökkenteni a szabadságfokot." Láttuk már, hogy ennek a válasznak az első fele mennyire nem igaz, most arról lesz szó, hogy a második fele sem igaz. Pedig ennek látszatra még teoretikus alapja is van: a maximum-likelihood becsléseknél megadható a χ^2-próba megfelelő általánosítása, és itt azt a körülményt, hogy néhány paramétert a mintából becsülünk, valóban a szabadságfok csökkentésével vehetjük figyelembe. A baj csak az, hogy ha valamely beosztáshoz tartozó f_n empirikus sűrűségfüggvényt veszünk alapul, a paraméterek maximum-likelihood becslése már nem $\bar{\xi}$ és s lesz, és a helyes becsléseket igen nehéz numerikusan meghatározni. KOLLER [11] megad ugyan könnyebben kiszámolható, a maximum likelihood becslésekkel ekvivalens becsléseket, ezek azonban jelen formájukban nem használhatók, hiszen a szerző fix beosztást vesz alapul, pedig a normálitás-vizsgálatnál a beosztást is célszerű volna a minta függvényében megválasztani.

Több szempontból előnyösebbnek látszik a másik két sűrűségfüggvény-becslési eljárásból normalitás-vizsgálati módszert kifejleszteni. A *Neyman—Barton*-próbának $k=4$ mellett a legősibb normalitás-vizsgálati módszer felel meg: a ferdeség és a csúcsosság ellenőrzése. A mintából kiszámolható

$$\beta_n = \frac{1}{s^3} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^3$$

empirikus ferdeség, és

$$\gamma_n = \frac{1}{s^4} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^4 - 3$$

empirikus csúcsosság értéke ugyanis normális eloszlás esetén várható közel van 0-hoz. Ennek az ellenőrzésére szolgáló szignifikancia-határok megtalálhatók például a [17] táblázatban. Itt említjük még meg az ún. *Geary*-indexet:

$$\alpha_n = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \bar{\xi}|,$$

amelyre szintén található [17]-ben táblázat.

Ezekkel a táblázatokkal persze csak külön-külön ellenőrizhetjük az egyes momentumokat, az együttes ellenőrzés csak egy megfelelő ortogonális függvényrendszer alapján volna lehetséges. Ilyet azonban az irodalomban nem találtunk, előállítása nem látszik könnyű feladatnak.

Lényegében a *Wilk—Shapiro*-próbához hasonló kvadratikus kifejezést kapunk, ha a *Parzen*-féle sűrűségfüggvényre becsléses *Cramér—Mises*-próbát kívánunk alkalmazni. Ez az eljárás nincs kidolgozva, bár a *Wilk—Shapiro*-módszerrel szemben kétségtelen előnye volna, hogy alkalmazása esetén nem kell a rendezett mintát előállítani.

2.4. Összefoglalás

A becsléses normalitás-vizsgálati módszerekről összefoglalva elmondhatjuk, hogy a lehetőségek száma igen nagy, de a megvalósításuk, különösen a minket érdeklő többmintás esetben nem látszik könnyűnek. A feladattal foglalkozó statisztikusok túlnyomó többsége ebben az irányban kereste a megoldást. Ez sok szempontból érthető is. Olyan mérőszámot kívántak előállítani, amely valamilyen értelemben optimálisan méri a minta normalitását, és így a többmintás esetben jó képet adna arról, milyen mértékben távolodik el a minta egyik vagy másik része a normális eloszlástól. A nehézségek, amikkel szembetalálták magukat, a következők voltak:

— nincs egyértelműen megadható optimalitási kritérium;

— a javasolt statisztikák értékének a kokrét kiszámolása sokszor igen bonyolult;

— a javasolt statisztikák eloszlása és határeloszlása nehezen meghatározható.

Nem tartjuk kizártnak, hogy a megoldást ebben az irányban meg lehet találni. Sok szempont szól amellett, hogy az ismertetett törekvések, vizsgálatok helyes irányban haladnak, és a szükséges gépi tapsztalatok megszerzése után sikerül majd a számítógépen gyorsan realizálható, statisztikai szempontból egzakt módszert megtalálni. A jelen körülmények között azonban elsősorban a következő fejezetben ismertetésre kerülő transzformációs módszer realizálását javasoljuk.

A teljesség kedvéért mégis megjegyezzük, hogy elvileg semmi akadálya nincs annak, hogy a fenti módszerek bármelyikét a többmintás feladat megoldására használjuk. Legyen ugyanis egy tetszőleges módszer alapja az S_n statisztika, amelynek a

$$H_n(x) = P(S_n < x)$$

eloszlása nem függ a μ, σ paraméterektől, ha a minta normális eloszlású, és amelynek nagy értékei szólnak a normalitás ellen. Definiáljuk a ϱ változót a

$$\Phi(\varrho) = H_n(S_n)$$

összefüggéssel, ahol Φ a standard normális eloszlás. Ez a ϱ — mint az könnyen látható — normális eloszlású, és a nagy értékei szólnak a hipotézis teljesülése ellen. Ha tehát a többmintás feladat esetében mindegyik minta-egységből meghatározzuk ennek a változónak az értékét, és a kapott számokat összegezzük, egyszerű u-próbával ellenőrizhetjük a minta-egységek együttes normalitását.

3. NORMALITÁSVIZSGÁLAT TRANSZFORMÁCIÓVAL

Ugyanazt a hipotézist vizsgáljuk ugyanabban a modellben, mint a 2. fejezetben, csak a módszer lesz más: alkalmas transzformációval fogunk megszabadulni a zavaró paraméterektől.

Definíció. Az n-változós $\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ függvényeket megengedhető transzformációnak (MT) nevezzük, ha az

$$\eta_i = \psi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

valószínűségi változók a vizsgált modellben függetlenek, és standard normális eloszlásúak. Az $(n+t)$-változós $\tilde{\psi}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; Z_1, \ldots, Z_t)$ $(i=1, 2, k)$ függvényeket megengedhető randomizált transzformációknak nevezzük (MRT), ha az

$$\tilde{\eta}_i = \tilde{\psi}_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

valószínűségi változók a vizsgált modellben alkalmasan választott, a ξ_i-ktől független ζ_i változók mellett függetlenek, és standard normális eloszlásúak.

Definíciónkkal kapcsolatban megjegyezzük, hogy nincs különösebb jelentősége benne annak a feltételnek, hogy az η_i-k eloszlása éppen standard normális legyen: lehetne az η_i-k közös eloszlása bármilyen ismert eloszlás, hiszen az MT-k és az MRT-k szerepe az, hogy a normalitás-vizsgálatot visszavezesse a tiszta illeszkedés-vizsgálatra, ott viszont — mint láttuk — nincs semmilyen jelentősége, hogy a vizsgált, ellenőrizni kívánt F_0 eloszlás milyen alakú, hiszen az ellenőrzést mindig eloszlásmentes módszerrel végezzük.

Az alábbiakban felsorolunk néhány MT-t és MRT-t. Ezek helyes voltának a bizonyításában szükségünk lesz a normális eloszlásnak a következő tulajdonságára.

TÉTEL. *Ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változók függetlenek, normális eloszlásúak μ, σ paraméterekkel, akkor az*

$$\alpha = \frac{\bar{\xi}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}, \quad \beta = \frac{s^2}{\sigma^2}(n-1)$$

változók függetlenek egymástól, és a

$$\gamma_i = \frac{\xi_i - \bar{\xi}}{s} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

koordinátájú $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ vektorváltozótól; és α, β, γ eloszlása nem függ a μ, σ paraméterektől. (Nevezetesen α standard normális eloszlású β pedig χ^2 eloszlású $(n-1)$ szabadságfokkal.)

Célszerűbb a transzformációkat két lépésben megadni: MTA-nak vagy MRTA-nak nevezzük a transzformációt, ha független μ, σ paraméterű normálisakhoz független, $0, \sigma$ paraméterű normálisakat rendel, és MTB-nek, vagy MRTB-nek nevezzük, ha független, $0, \sigma$ paraméterű normálisakhoz független, 0, 1 paraméterű normálisakat rendel. (Ha egy MRTA után MRTB-t hajtunk végre — e két transzformáció együtt nyilván MRT.)

Az MTA-kat a lineáris függvények között keressük: legyen

$$\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Ez akkor és csakis akkor MTA, ha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{\nu j} = \delta_{i\nu} \qquad (i, \nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Emiatt, ha $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$ lineáris MTA, akkor $k \leq n-1$, és ha $k = n-1$, az $A = a_{ij}$ mátrix az $a_{nj} = 1/\sqrt{n}$ kiegészítő sorral ortonormált négyzetes mátrix: $AA' = I$.

Ezzel természetesen A nincs egyértelműen meghatározva. Ilyen például az ún. *Helmert*-mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 0 & \dots & 0 \\ 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & -3/\sqrt{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1/\sqrt{n(n-1)} & 1/\sqrt{n(n-1)} & 1/\sqrt{n(n-1)} & 1/\sqrt{n(n-1)} & \dots & -(n-1)/\sqrt{n(n-1)} \\ 1/\sqrt{n} & 1/\sqrt{n} & 1/\sqrt{n} & 1/\sqrt{n} & \dots & 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}.$$

Megfelelő A mátrixot kapunk, ha az a, b, c paramétereket úgy határozzuk meg, hogy

$$\psi_i = ax_i + b\bar{x} + cx_n \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

MTA legyen $\left(\text{ahol } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$. A fentiek szerint ekkor

$$a+b+c = 0,$$

$$a^2 + \frac{b^2}{n} + c^2 + \frac{2ab}{n} + \frac{2bc}{n} = 1,$$

$$\frac{2ab}{n} + \frac{b^2}{n} + \frac{2bc}{n} + c^2 = 0,$$

amiből $a = 1$, $b = -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$, $c = \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ következik:

$$\psi_i = x_i - \tilde{x}, \quad \text{ahol} \quad \tilde{x} = \frac{\sqrt{n}\,\bar{x} - x_n}{\sqrt{n}-1}.$$

Ez a transzformáció szemléletesen úgy mondható el, hogy az x_i mintaelemekből levonjuk — lényegében — a mintaátlagot, hogy a μ paramétertől megszabaduljunk. Hogy mégsem pontosan az $\bar{x}$ mintaátlagot vonjuk le, annak az az oka, hogy úgy a transzformált elemek nem volnának függetlenek: a legutolsó mintaelemet tehát arra használjuk fel, hogy a vele módosított átlagot már levonhassuk, vagyis hogy az $x_i - \bar{x}$ különbségek függetlenek legyenek. Ezzel elvesztünk egy mintaelemet — de hát úgyis csak $(n-1)$ transzformált mintaelemet kaphatunk. Ez a transzformáció SARKADItól [21] származik.

Nem vesztünk el mintaelemet, és a transzformáció is szimmetrikussá válik, ha felhasználunk egy normális eloszlású, $0, \sigma$ paraméterű, a mintától független ζ valószínűségi változót. Az előbb kimondott tétel állításai alapján ugyanis könnyen belátható, hogy az

$$\eta_i = \xi_i - \bar{\xi} + \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

változók függetlenek, és normális eloszlásúak 0, σ paraméterekkel. Ez a transzformáció DURBINtől származik (vö. [6]). Érdemes megjegyezni, hogy ebből a transzformációból visszakaphatjuk az előző transzformációt: ha ugyanis csak az első $(n-1)$ mintaelemet használjuk, a

$$\hat{\xi} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i$$

mintaátlag független a $\{\xi_i - \hat{\xi}\}_{i=1}^{n-1}$ vektortól, tehát

$$\zeta = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} (\xi_n - \hat{\xi})$$

is független a $\{\xi_i - \hat{\xi}\}_{i=1}^{n-1}$ vektortól, és normális eloszlású 0, σ paraméterekkel, és ezek szerint

$$\eta_i = \xi_i - \hat{\xi} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \zeta = \xi_i - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \hat{\xi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \xi_n = \xi_i - \frac{\sqrt{n}\, \bar{\xi} - \xi_n}{\sqrt{n} - 1},$$

ami valóban azonos az előző transzformációval.

SARKADI megmutatta, hogy az általa használt transzformáció esetében a transzformált, és az eredeti mintaelemek közti korrelációs együttható maximális az alábbi értelemben.

LEMMA. *Ha $\bar{\Psi}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ tetszőleges MTA, és ψ_i a Sarkadi-féle transzformáció, akkor*

$$\min_{1 \le i \le n-1} R(\xi_i, \bar{\eta}_i) \le \min_{1 \le i \le n-1} R(\xi_i, \eta_i),$$

ahol $R(\xi, \eta)$ a ξ, η változók korrelációs együtthatóját jelöli, és $\eta_i = \Psi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\bar{\eta}_i = \bar{\psi}_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Rátérünk az MTB-k és MRTB-k konstrukciójára. A fenti tétel szerint, ha ξ_1 és ξ_2 normális eloszlásúak $(0, \sigma)$ paraméterekkel, akkor az

$$\eta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad \zeta = \frac{1}{\sigma^2} [\xi_1^2 + \xi_2^2]$$

változók függetlenek, η egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ szakaszon, ζ pedig exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel. Ha tehát n páros, a mintaelemekből képezett párokból $n/2$ ilyen η-t és $n/2$ ilyen ζ-t kapunk. Az η-kból alkalmas transzformációval normális eloszlású változókat állíthatunk elő, a ζ-kra pedig alkalmazhatjuk STÖRMER [26] módszerét.

DURBIN [6] a következő módszert javasolta: legyen most (mivel $\mu=0$)

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

akkor a

$$\left(\frac{\xi_1}{s}, \frac{\xi_2}{s}, \ldots, \frac{\xi_n}{s}\right)$$

hányadosok függetlenek s-től, és eloszlásuk nem függ σ-tól. Ha tehát ζ a ξ_i-któl független χ-eloszlású valószínűségi változó n szabadságfokkal, akkor az

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{s}\zeta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

változók függetlenek, és standard normális eloszlásúak.

Ebből az MRTB-ből ugyanúgy kaphatjuk meg a *Sarkadi*-féle MTB-t, mint ahogy az előbb előállítottuk a *Sarkadi*-féle MTA-t a *Durbin*-féle MRTA-ból (megjegyezzük, hogy a visszavezetés is SARKADItól származik). Legyen

$$z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2,$$

akkor a

$$\left(\frac{\xi_1}{z}, \frac{\xi_2}{z}, \ldots, \frac{\xi_{n-1}}{z}\right)$$

hányadosok függetlenek Z-től, és eloszlásuk nem függ σ-tól. Emiatt ezek a hányadosok függetlenek a ξ_n/Z hányadostól is, és ξ_n/Z eloszlása $(n-1)$-szabadságfokú t-eloszlás. Ha tehát G_{n-1}-gyel jelöljük a $|\xi_n|/Z$ hányados eloszlásfüggvényét:

$$G_{n-1}(x) = P\left(\frac{1}{z}|\xi_n| < z\right) = 2F_{n-1}(x) - 1,$$

(ahol $F_t(x)$ az $(n-1)$ szabadságfokú t-eloszlást jelöli), és H_{n-1}-gyel az $(n-1)$ szabadságfokú χ-eloszlást, akkor a

$$G_{n-1}\left(\frac{1}{z}|\xi_n|\right) = H_{n-1}(\zeta)$$

összefüggéssel definiált változó χ eloszlású $(n-1)$ szabadságfokkal. Így ez a ζ alkalmazható a *Durbin-féle* transzformációhoz: az

$$\eta_i = \frac{\xi}{z}\zeta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

változók független standard normálisak lesznek.

A fenti *Sarkadi*-féle MTA és MTB egymás után való alkalmazásából kapjuk a *Sarkadi-féle* MT-t. Legyen tehát $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ az eredeti minta, ebből először

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-2} \xi_i, \quad \bar{\xi}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=n-1}^{n} \xi_i, \quad \bar{\bar{\xi}} = (\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2)\sqrt{\frac{2}{n}}$$

átlagokat és az

$$\eta_i = \xi_i - \bar{\xi}_1 + \bar{\bar{\xi}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

transzformált mintaelemeket határozzuk meg. Ezektől eltérő módon határozzuk meg a transzformált minta utolsó elemét, az

$$\eta_{n-1} = \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\sqrt{2}}$$

számot. Az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ mintára ezután a *Sarkadi*-féle MTB-t alkalmazzuk: legyen

$$z^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}\eta_i^2,$$

és legyen u a

$$H_{n-2}(u) = 1 - G_{n-2}\left(\frac{1}{z}|\eta_{n-1}|\right)$$

egyenlettel definiált szám, ahol H_f az f szabadságfokú χ-eloszlás, G_f az f szabadságfokú t-eloszlás abszolút értékének az eloszlásfüggvénye. Akkor a

$$\zeta_i = \frac{\eta_i}{z}u \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2)$$

változók függetlenek és standard normálisak.

A *Durbin*-féle MRT nem kapható meg közvetlenül a fenti MRTA és MRTB egymás utáni alkalmazásából, hiszen a *Durbin*-féle MRTA-hoz σ szórású normális eloszlású véletlen szám kellene, viszont σ ismeretlen. Visszatérünk az eredeti tételhez, annak alapján könnyen látható, hogy ha ζ_1 a mintától független, standard normális eloszlású véletlen szám, és ζ_2 a mintától, és ζ_1-től független, $(n-1)$ szabadságfokú χ^2-eloszlású véletlen szám, akkor az

$$\eta_i = \frac{\xi_i - \bar{\xi}}{s}\sqrt{\frac{\zeta_2}{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta_1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

transzformált elemek független standard normálisak.

Foglalkozzunk az eljárás hatékonyságával. Arra vagyunk kíváncsiak mi történik akkor, amikor a hipotézis nem teljesül. E célból fogalmazzuk meg az eljárást általánosabban.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mintáról el akarjuk dönteni, hogy az elemei $F(x, \vartheta)$ eloszlásúak-e, ϑ ismeretlen paraméter. E célból alkalmazzunk egy $y_1 = T_1(x_1, \ldots, x_n)$ $y_2 = T_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = T_m(x_1, \ldots, x_n)$ transzformációt, mely az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $F(x, \vartheta)$ eloszlású független mintát valamely $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ismert $G(x)$ eloszlású független vagy esetleg rendezett mintába viszi át. Ezután például *Kolmogorov—Szmirnov*-próbával ellenőrizzük, hogy $y_1, \ldots, y_m$ valóban $G(x)$ eloszlású minta-e Itt azonban a következő kérdés merül fel:

Amikor az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ minta nem $F(x, \vartheta)$ eloszlású, tehát a hipotézist el kellene utasítanunk, meg fogjuk-e ezt tenni nagy valószínűséggel? A következő példa azt mutatja, hogy ily módon a rossz eloszlású mintát nagy minta esetén is nagy valószínűséggel jónak fogadhatjuk el.

Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ exponenciális eloszlású minta (eloszlásfüggvénye $1 - e^{-\lambda x}$, ha $x < 0$) ismeretlen λ paraméterrel. Ismeretes, hogy ekkor az $y_i = (x_1 + \ldots + x_i)/$ $/(x_1 + \ldots + x_n)$ valószínűségi változók a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású rendezett mintát alkotnak. Ha azonban az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elfajult eloszlású, azaz $P(x_i = a) = 1$, $i = 1, \ldots, n$, ahol a rögzített konstans, akkor $y_i = \frac{i}{n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ 1 valószínűséggel, és a *Kolmogorov—Szmirnov*-próbát alkalmazva a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mintát még kis n esetén is elfogadjuk exponenciális eloszlásúnak, noha nem az. E hibát elkerülendő bevezetjük a konzisztens transzformáció fogalmát, és a továbbiakban konzisztens transzformációkkal foglalkozunk.

DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy MT, vagy MRT konzisztens, ha az $\eta_i (i=1, 2, \ldots, k)$ változók G_n empirikus eloszlásfüggvénye $n \to \infty$ mellett tart a vizsgált modellben (ha tehát a ξ_i mintaelemek függetlenek, és egyforma eloszlásúak) a

$$G(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

eloszlásfüggvényhez, ahol F a ξ_i-k közös eloszlásfüggvénye, és $\mu = E\xi_i$, $\sigma = D\xi_i$.

Megjegyezzük, hogy a fenti definíció pontatlan, nem tartalmazza, milyen értelemben kell G_n-nek G-hez tartania. Erős vagy gyenge konzisztenciáról beszélünk aszerint, hogy a

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |G_n(x) - G(x)|$$

valószínűségi változó 1 valószínűséggel, vagy sztochasztikusan tart-e 0-hoz.

Ez a tulajdonság, amely a *Sarkadi*- és a *Durbin*-féle transzformációt kiemeli a többi közül, hiszen amint azt STÖRMER [27] lényegében megmutatta, mind a két transzformáció konzisztens.

A kérdés tehát az, hogy e két transzformáció közül melyik jobb. SARKADI a fenti lemma állításához hasonló optimális tulajdonságot bizonyított az általa javasolt MTB, és MT transzformációkról is. Mi viszont az általa használt optimalitási kritériumot nem tartjuk elég meggyőzőnek, és a *Sarkadi*-módszer lényeges hiányosságának tartjuk, hogy nem szimmetrikus. Azt mondhatjuk tehát, hogy pusztán elméleti szempontból nem tudunk különbséget tenni a két módszer között, így a számítástechnikai szempontot kell alapul vennünk. Ez viszont egyértelműen DURBIN módszere mellett szól, ezért mi ezt a módszert javasoljuk.

IRODALOM

[1] BARTON, D. E.: Neyman's ψ_k^2 test of goodness of fit when the null hypothesis is composite. *Skand. Aktuarietidskr.* **38** (1956) 216—245.

[2] BOLSEV, L. N.—SZMIRNOV, N. W.: *Matematikai statisztikai táblázatok* (oroszul), Nauka, Moszkva 1965.

[3] COCHRAN, W. G.: The χ^2 test of goodness of fit. *Ann. Math. Stat.* **23** (1952) 315—345.

[4] CSÁKI, E.—TUSNÁDY, G.: On the number of intersections and the ballot theorem. *Periodica Math. Hung.* **2** (1972) 5—13.

[5] DARLING, D. A.: The Cramér—Smirnov test in the parametric case. *Ann. Math. Stat.* **26** (1955). 1—20.

[6] DURBIN, S.: Some methods of constructing exact tests. *Biometrika* **48** (1961) 41—55.

[7] GEARY, R. C.: Testing for normality. *Biometrika* **34** (1947) 209—242.

[8] KAC, M.—KIEFER, J.—WOLFOWITZ, J.: On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods. *Ann. Math. Stat.* **26** (1955) 189—211.

[9] KAC, M.—SIEGERT, A. J. F.: An explicit representation of a stationary Gaussian proces. *Ann. Math. Stat.* **18** (1947) 438—442.

[10] KENDALL, M. G.—STUART, A.: *The advanced theory of statistics.* Vol. 2. Griffin, London 1967.

[11] KOLLER, D.: Prüfung der Normalität einer Verteilung. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **2** (1964) 147—166.

[12] MANN, H. B.—WALD, A.: On the choice of the number of class intervals in the application of the chi-square test. *Ann. Math. Stat.* **13** (1942) 306—317.

[13] NEYMAN, J.: „Smooth test" for goodness of fit. *Skand. Aktuarietidskr.* **20** (1937) 149—199.

[14] OWEN, D. B.: *Handbook of statistical tables.* Addison—Wesley, 1962.
[15] PARZEN, E.: On estimation of a probability density function and mode. *Ann. Math. Stat.* **33** (1962) 1065—1076.
[16] PEARSON, E. S.: A further development of tests for normality. *Biometrika* **22** (1930) 239—249.
[17] PEARSON, E. S.—HARTLEY, H. O.: *Biometrika tables for statisticians.* Vol. I. Cambridge University Press 1954.
[18] RÉVÉSZ, P.: On empirical density functions. *Periodica Math. Hung.* **2** (1972) 85—110.
[19] ROSENBLATT, M.: Curve estimates. *Ann. Math. Stat.* **42** (1971) 1815—1842.
[20] SAHLER, W.: A survey on distribution-free statistics based on distances between distribution functions. *Metrika* **13** (1968) 149—169.
[21] SARKADI, K.: On testing for normality. *Proc. of the Fifth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. I.* 1967. 373—387.
[22] SARKADI, K.: On the exact distribution of statistics of Kolmogorov—Smirnov type. *Periodica Math. Hung.* **3.** (1973) 9—12.
[23] SHAPIRO, S. S.—WILK, M. B.: An analysis of variance test for normality (complete samples) *Biometrika* **52** (1965) 591—611.
[24] SHAPIRO, S. S.—WILK, M. B.—CHEN, H. J.: A comparative study of various tests for normality. *Jour. Amer. Stat. Assoc.* **63** (1968) 1343—1372.
[25] STECK, G. P.: Rectangle probabilities for uniform order statistics and the probability that the empirical distribution function lies between two distribution functions. *Ann. Math. Stat.* **42** (1971) 1—11.
[26] STÖRMER, H.: Ein Test zum Erkennen von Exponentialverteilungen. *Metrika* **5** (1962) 128—137.
[27] STÖRMER, H.: Ein Test zum Erkennen von Normalverteilungen. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstehorie und verwandte Gebiete* **2** (1964) 420—428.
[28] VINCZE, I.: On some questions connected with two-sample tests of Smirnov-type. *Proc. of the Fifth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. I.* (1967) 657—666.
[29] WILK, M. B.—SHAPIRO, S. S.: The joint assessment of normality of several independent samples. *Technometrics* **10** (1968) 825—840.
[30] PEARSON, E. S. HARTLEY, H. O.: *Biometrika Tables for statisticians,* Vol. II. Cambridge, The University Press 1972.

TESTING FOR NORMALITY

by

P. MAJOR and G. TUSNÁDY

Summary

The first part of the paper investigates the goodness of fit testing a simple hypothesis. Then different methods for testing normality with unknown parameters are considered. One of these is to estimate the parameters, another method is to eliminate the unknown parameters by transformation. The goodness of these methods is investigated.

(Beérkezett: 1973. I. 25.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

AZ ALGEBRAI GEOMETRIA ALAPJAI (II)*

Írta: I. R. SAFARJEVICS

A fordítás első része, amely az eredeti cikk I. és II. fejezetét tartalmazza, az *MTA III. Osztály Közlemények* XXII. kötet I. számában jelent meg. (79—184. oldal).

III. FEJEZET

DIVIZOROK ÉS DIFFERENCIÁL FORMÁK

1. §. Divizorok

1. *Függvény divizora*

Egy egyváltozós polinom konstans szorzótényező erejéig egyértelműen meg van határozva, ha meg vannak adva gyökei, és azok multiplicitásai, azaz pontok $x_1, x_2, \ldots, x_r \in A^1$ rendszerével és $k_1, \ldots, k_r$ multiplicitásukkal. Egy $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f, g \in k[X]$ racionális függvényt meghatároznak az f és g polinomok zérushelyei, azaz azon pontok, amelyekben az 0-val egyenlő vagy nem reguláris. Hogy a g gyökeit az f gyökeitől megkülönböztessük, azok multiplicitását negatív előjellel vesszük. Tehát a φ függvényt az $x_1, \ldots, x_r$ pontokkal és azok tetszőleges egész $k_1, \ldots, k_r$ multiplicitásával adhatjuk meg. Most azt a célt tűzzük ki, hogy analóg módon megadjunk egy racionális függvényt egy tetszőleges algebrai sokaságon.

Abból fogunk kiindulni, hogy — a metszet dimenziójáról szóló tételnek megfelelően — azon pontok halmaza, amelyekben egy reguáris függvény 0-val egyenlő, 1-kodimenziós részsokaságot alkot. Ezért az az objektum, amelyet meg fogunk feleltetni a függvénynek, az 1-kodimenziós irreducibilis részsokaságok rendszere lesz, multiplicitást tulajdonítva azoknak. A multiplicitásoknak úgy pozitív, mint negatív értékeket fogunk adni.

Definíció. Egy irreducibilis X sokaság 1-kodimenziós irreducibilis részsokaságainak $C_1, \ldots, C_r$ rendszerét a nekik tulajdonított $k_1, \ldots, k_r$ egész multiplicitásokkal *divizornak* nevezzük.

Egy D divizor felírható

(1) $$D = k_1 C_1 + \ldots + k_r C_r$$

* И. Р. Шафаревич: Основы алгебраической геометрии, Усхепи Мат. Наук, Т. XXIV. вып. 6. (150), 1969. pp 1—184.

alakban. Ha az összes $k_i=0$, akkor $D=0$-t írunk, ha az összes $k_i>0$, akkor $D>0$ és ekkor D-t *effektívnek* nevezzük. Az 1-gyel egyenlő együtthatóval vett 1-kodimenziós irreducibilis C_i részsokaságokat egyszerű divizoroknak nevezzük. Ha (1)-ben az összes $k_i \neq 0$, akkor a $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$ sokaságot a D divizor *hordozójának* nevezzük és Supp D-vel jelöljük.

Definiáljuk a divizorok összeadását. Evégből megjegyezzük, hogy ha az (1)-beli együtthatóknak megengedjük a 0 érték felvételét, akkor bármely két divizor felírható

$$D = k_1' C_1 + \ldots + k_r' C_r, \quad D'' = k_1'' C_1 + \ldots + k_r'' C_r$$

alakban közös $C_1, \ldots, C_r$-ekkel. Definíció szerint akkor

$$D' + D'' = (k_1' + k_1'') C_1 + \ldots + (k_r' + k_r'') C_r.$$

Ilyen módon az X-en értelmezett divizorok csoportot alkotnak, amely izomorf azzal a Z feletti szabad modulussal, amelynek generátorai az X-beli 1-kodimenziós irreducibilis részsokaságok. Ezt a csoportot Div (X)-szel jelöljük.

Most az $f \in k[X]$, $f \neq 0$ függvényeknek divizort fogunk megfeleltetni. Legyen C egy egyszerű divizor. Először minden $f \in k(X)$, $f \neq 0$ függvénynek megfeleltetünk egy $v_C(f)$ egész számot. Ha $X = A^1$, akkor ez a zérushely, vagy a pólus rendjének az analógja.

Ezt a megfeleltetést csak az X sokaságra tett bizonyos megszorítással végezhetjük el. Mégpedig fel fogjuk tételezni, hogy X sima az 1-kodimenzióban, azaz hogy az X sokaság singuláris pontjai halmazának a kodimenziója $\geqq 2$. Legyen $C \subset X$ egy irreducibilis 1-kodimenziós részsokaság és U az egyszerű pontokból álló valamely olyan nyílt affin halmaz, amely metszi C-t, és olyan, hogy a C az U-ban lokális egyenlettel adható meg. Ilyen U halmaz létezik az X-re tett megszorítás és a II. fejezet 3. §. 1. tétel miatt. Ilyen módon $k[U]$-ban teljesül $\mathfrak{a}_C = (\pi)$. Bebizonyítjuk, hogy bármely $f \in k[U]$, $f \neq 0$ függvényekhez létezik olyan $k \geqq 0$ szám, hogy $f \in (\pi^k)$, $f \notin (\pi^{k+1})$. Ha ez nem így lenne, azaz $f \in (\pi^k)$ az összes $k>0$-ra, akkor $f \in \bigcap (\pi^k)$, és ezért $f=0$ volna a II. fejezet 2. §. 5. tétel miatt.

A meghatározandó számot $v_C(f)$-fel jelöljük. Ez a szám a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\left.\begin{array}{l} v_C(f_1 \cdot f_2) = v_C(f_1) + v_C(f_2), \\ v_C(f_1 + f_2) \geqq \min\left(v_C(f_1);\, v_C(f_2)\right), \\ \text{ha} \quad f_1 + f_2 \neq 0, \end{array}\right\} \tag{2}$$

amelyek könnyen következnek a definícióból és a C irreducibilitásból.

Ha X irreducibilis, akkor bármely $f \in k(X)$ függvény előállítható $f = \frac{g}{h}$, $g, h \in k[U]$ alakban. Az $f \neq 0$-ra legyen $v_C(f) = v_C(g) - v_C(h)$. A (2)-ből azonnal adódik, hogy $v_C(f)$ nem függ az f-nek $\frac{g}{h}$ alakban való előállításától, és hogy (2) igaz az összes $f \in k(X)$ és 0-tól különbözőkre.

Az általunk adott definícióban a $v_C(f)$ szám egyelőre függ az U nyílt halmaz kiválasztásától, ezért $v_C^U(f)$-et fogunk írni $v_C(f)$ helyett. Megmutatjuk, hogy valójában $v_C^U(f)$ nem függ U-tól.

Először feltételezzük, hogy V-affin nyílt halmaz, $V \subset U$ és $V \cap C \neq \emptyset$. Akkor π lokális egyenlete f-nek a V-ben is, és nyilván $v_C^V(f) = v_C^U(f)$. Ha pedig V tetszőleges nyílt olyan halmaz, amely az U-val azonos tulajdonságokkal rendelkezik, akkor $U\cap C$ és $V\cap C$ nyíltak C-ben és nem üresek, mivel pedig C irreducibilis, így azoknak nem üres a metszetük. W-ként véve valamely $x\in U\cap V\cap C$ pont $U\cap V$-beli affin környezetét, azt kapjuk, hogy az előbbi megjegyzés alapján $v_C^U(f)=v_C^W(f)$, $v_C^V(f)=$ $=v_C^W(f)$, tehát $v_C^U(f)=v_C^V(f)$. Ilyen módon a $v_C(f)$ jelölés korrekt voltát beláttuk. Megjegyezzük, hogy ha $X=A^1$, $C=x$ egy α-koordinátájú pont, $f\in k[A^1]=k[T]$, akkor $v_x(f)$ egybeesik az $f(T)$ polinom α gyökének multiplicitásával, az általános definíció pedig lényegében lemásolja ezt a speciális esetet.

Ha $v_C(f)=k>0$, akkor azt mondják, hogy az f függvénynek k-adrendű zérushelye van a C-n; ha $v_C(f)=-k<0$, akkor f-nek k-adrendű pólusa van C-n. Megjegyezzük, hogy ezek a fogalmak 1-kodimenziós részsokaságokra, nem pedig pontokra vannak értelmezve. Például az A^2-n értelmezett $\frac{x}{y}$ függvény esetén a $(0,0)$ pont benne van a függvény zérushelyeinek $(x=0)$ részsokaságában is, és a pólusainak $(y=0)$ a részsokaságában is.

Most bebizonyítjuk, hogy adott $f\in k(X)$ függvénynek csupán véges számú irreducibilis 1-kodimenziós olyan részsokaság felel meg, amely kielégíti a $v_C(f)=0$ feltételt. Először azt az esetet tekintjük, amikor az X affin sokaság és $f\in k[X]$. A definícióból folyik, hogy ha C nem komponense az X_f részsokaságnak, akkor $v_C(f)=0$. Ha X továbbra is affin, de $f\in k(X)$, akkor $f=\frac{g}{h}$, $g, h\in k[X]$, és világos, hogy $v_C(f)=0$, ha C nem komponense az X_g vagy X_h-nak. Végül az általános esetben legyen $X=\bigcup U_i$ az X véges affin nyílt lefedése. Ekkor minden C-nek legalább egy U_i-vel való metszete nem üres, és ezért $v_C(f)$ csak azon C esetén teljesül, amely olyan $\tilde{C}\subset U_i$ irreducibilis részsokaság lezártja, amelyre $v_{\tilde{C}}(f)\neq 0$ fennáll U_i-ben. Mivel az U_i halmazok és bármely U_i-ben a $\tilde{C}$ halmazok száma véges, így véges számú olyan C van, amelyre $v_C(f)\neq 0$. Ilyen módon tekinthetjük a

$$\sum v_C(f)C$$

divizort, ahol az összegzés az összes olyan irreducibilis 1-kodimenziós részsokaságra vonatkozik, amelyre $v_C(f)\neq 0$. Ezt az f függvény divizorának nevezzük és (f)-fel jelöljük.

A $D=(f)$, $f\in k(X)$ alakú divizort födivizornak nevezzük. Ha $(f)=\sum k_iC_i$, akkor az $(f)_0=\sum\limits_{i,\,k_i>0} k_iC_i$, illetve az $(f)_\infty=-\sum\limits_{i,\,k_j<0} k_jC_i$ divizorokat az f függvény zérus-divizorának, illetve pólusdivizorának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $(f)_0\geqq 0$, $(f)_\infty\geqq 0$, $(f)=(f)_0-(f)_\infty$. Kiemelünk néhány egyszerű tulajdonságot:

$$(f_1\cdot f_2)=(f_1)+(f_2)$$

$$(f)=0,\quad \text{ha}\quad f\in k,\qquad (f)\geqq 0,\quad \text{ha}\quad f\in k[X].$$

Bebizonyítjuk, hogy a sima irreducibilis X sokaságra a megfordítás is teljesül: ha $f\geqq 0$, akkor f reguláris X-en. Legyen az $x\in X$ pontban az f függvény nem reguláris. Akkor $f=\frac{g}{h}\notin O_x$, $h, g\in O_x$. Mivel O_x-ben egyértelműen végezhető el a prímtényezőkre való bontás (II. fejezet 3. §-nak 2. tétele), a g és h relatív prímnek választható. Legyen π az O_x olyan prímeleme, amely h-nak tényezője, de g-nek nem. Az x pont valamely affin U környezetében az U_π sokaság irreducibilis és 1-kodimenziós. Legyen C az U_π lezártja X-ben. Ekkor nyilvánvalóan teljesül $v_C(f)<0$. Az állítás igaz normális sokaság esetén is, de itt ezt nem bizonyítjuk.

Mivel a projektív irreducibilis X sokaság minden pontjában reguláris függvény konstans (az I. fejezet 5. §-a 2. tételének 1. következménye), így a fentebb bebizonyított eredményből következik, hogy $f \geqq 0$ esetén $f=\alpha \in k$, ha X sima projektív sokaság. Speciálisan, egy sima projektív irreducibilis sokaságon értelmezett racionális függvényt konstans tényezőtől eltekintve egyértelműen határozza meg a függvény divizora: ha $(f)=(g)$, akkor $(f \cdot g^{-1})=0$ és $f=\alpha \cdot g$, $\alpha \in k$.

1. PÉLDA. $X=A^n$. Az I. fejezet 6. §-a 3. tétele szerint bármely 1-kodimenziós irreducibilis C részsokaságot egy egyenlet meghatároz: $I_C=(F)$, $F \in k(X)$. Innen $C=(F)$, vagyis minden egyszerű divizor, tehát általában minden divizor valójában ődivizor.

2. PÉLDA. $X=P^n$. Bármely 1-kodimenziós irreducibilis C részsokaságot egy homogén F egyenlet határoz meg, emellett $I_C=(T^{i-k}F)$ teljesül az affin nyílt U_i halmazban, ha az F fokszáma k. Ezért az $f \in k(P^n)$ függvény divizorát az alábbi módon konstruálhatjuk. Hozzuk az f függvényt $f=\frac{F}{G}$ alakra, ahol F és G azonos fokszámú formák; bontsuk fel ezeket irreducibilis formák szorzatára: $F=\Pi H_i^{k_i}$, $G=\Pi L_j^{m_j}$, ekkor $(f)=\sum k_i C_i - \sum m_j D_j$, ahol C_i, ill. D_j a $H_i=0$, ill. $L_j=0$ egyenletekkel meghatározott irreducibilis divizorok.

Jelöljük az F forma fokszámát deg F-fel. Mivel

$$\deg F = \deg G, \quad \text{így} \quad \sum k_i \deg H_i = \sum m_j \deg L_j.$$

Emlékezhetünk arra, hogy abból, ahogyan definiáltunk az I. fejezet 6. §-a 5. pontjában a projektív sokaság fokszámát, következik a $\deg C_i = \deg H_i$ egyenlőség. Ezért (4)-ben

$$\sum k_i \deg C_i = \sum m_j \deg D_j.$$

A $D=\sum k_i C_i$ divizor fokszámát $\deg D = \sum k_i \deg C_i$ számmal definiáljuk. Kimutattuk tehát, hogy D ődivizor esetén $\deg D=0$.

Könnyen ellenőrizhető a megfordított állítás is: ha $\sum k_i \deg C_i=0$ és C_i egyenlete H_i, ahol H_i egy forma, akkor az $f=\Pi H_i^{k_i}$ függvény 0-adfokú homogén és $\sum k_i C_i=(f)$.

3. PÉLDA. Analóg módon tárgyalható az $X=P^{n_1}x \ldots xP^{n_k}$ eset. Az 1-kodimenziós C részsokaságot megint egyetlen $H=0$ egyenlet határozza meg (I. fejezet 6. §. 3. tétel), viszont H a P^{n_i} terek koordináta csoportjainak mindegyike szerint külön homogén, ennek megfelelően k-nak különböző fokszáma van: $\deg_i H$ $(i=1, \ldots, k)$. A 2. példához hasonlóan bevezethetők X-en a D divizor $\deg_i D$ fokszámai és a D divizor akkor és csak akkor ődivizor, ha $\deg_i D=0$ $(i=1, \ldots, k)$.

A ődivizorok az összes divizorok Div (X) csoportjában $P(X)$ alcsoportot képeznek. A Div $(X)/P(X)$ faktorcsoportot a divizorosztályok csoportjának nevezzük és $Cl\,(X)$-szel jelöljük. A Div $(X)/P(X)$ egy mellékosztályába tartozó divizorokat ekvivalenseknek mondjuk: $D_1 \sim D_2$, ha $D_1 - D_2 = (f)$, $f \in k(X)$. A Div $(X)/P(X)$ mellékosztályait divizorosztályoknak nevezzük.

A tárgyalt példákban

$$1.\ Cl(X) = 0. \quad 2.\ Cl(X) = Z. \quad 3.\ Cl(X) = Z^k.$$

2. *Lokális fődivizorok*

Legyen az X sokaság sima. Ekkor minden egyszerű $C \subset X$ divizor és minden $x \in X$ pont esetén megadható olyan nyílt $U \ni x$ halmaz, amelyben C-t lokális π egyenlet határoz meg. Ha $D = \sum k_i C_i$ egy tetszőleges divizor és minden C_i-t π_i lokális egyenlet határoz meg U-ban, akkor U-ban $D = (f)$, $f = \Pi \pi_i^{k_i}$. Következésképpen minden x pontnak van olyan környezete, amelyben a D divizor fődivizor. Ezekből a környezetekből kiválasztható $X = \cup U_i$ véges lefedés, ahol minden U_i-ben $D = (f_i)$. Nyilvánvaló, hogy az f_i függvények kiválasztása nem történhet megszorítások nélkül: az f_i-k nem lehetnek azonosan nullával egyenlő függvények, továbbá az $U_i \cap U_j$-ben az (f_i) és (f_j) divizorok egybeesnek. Ahogyan az 1. pontban már láttuk, ebből következik, hogy az $f_i \cdot f_j^{-1}$ függvény reguláris és nem egyenlő 0-val, az $U_i \cap U_j$-ben. Ha az $\{U_i\}$ lefedésnek megfelelő $\{f_i\}$ függvények rendszere esetén $f_i \cdot f_j^{-1}$ reguláris és nem nullértékű, akkor azt koordinált rendszernek fogjuk nevezni.

Megfordítva, függvények tetszőleges koordinált rendszere meghatároz egy divizort X-en. Valóban, bármely egyszerű C divizor esetén legyen $k_C = v_C(f_i)$, ha $U_i \cap C \neq \emptyset$, ahol f_i-t, ill. C-t függvénynek, illetve egyszerű divizornak tekintjük az U_i sokaságban. Mivel a függvényrendszer koordinált, ez a szám nem függ az U_i kiválasztásától. Nyilvánvaló, hogy csupán véges számú olyan C létezik, amelyre $k_C \neq 0$, nevezetesen az (f_i) divizorok irreducibilis komponenseinek a lezártjai. Így értelmezhető $D = \sum k_C C$ divizor. Nyilvánvaló, hogy D-nek az adott $\{f_i\}$ függvényrendszer felel meg.

Végül könnyen eldönthető, mikor definiálják ugyanazt a divizort az $\{U_i\}$ lefedésnek megfelelő $\{f_i\}$ függvényrendszer és a $\{V_j\}$ lefedésnek megfelelő $\{g_j\}$ függvényrendszer. Ehhez szükséges és elegendő, hogy $U_i \cap V_j$-ben az $f_i \cdot g_j^{-1}$ függvények mindenhol regulárisak és $\neq 0$ legyenek. Az olvasóra bízzuk az állítás egyszerű ellenőrzését.

Divizorok függvényrendszerekkel történő meghatározása lehetővé teszi a divizorok viselkedésének tanulmányozását reguláris leképezéseknél. Legyen $\varphi : X \to Y$ sima irreducibilis sokaságok reguláris leképezése és D divizor Y-on. Tegyük fel, hogy $\varphi(X) \not\subset \mathrm{Supp}\, D$. Kimutatjuk, hogy ilyenkor a D divizor $\varphi^*(D)$ ősképét meghatározhatjuk a reguláris függvény ősképének meghatározásával analóg módon. Mindenekelőtt megvizsgáljuk, mikor határozható meg az Y-on értelmezett racionális f függvény ősképe, és az mikor nem azonosan nullértékű X-en. Ehhez elegendő, hogy létezzen legalább egy $y \in \varphi(X)$ pont, amelyben f reguláris és $f(y) \neq 0$. Ekkor ezek a pontok egy nem üres nyílt V halmazt képeznek. Az f függvény V-n reguláris, tehát $\varphi^*(f)$ szintén reguláris, a $\varphi^{-1}(V)$-n nem azonosan, (sőt sehol sem) nullértékű függvény. Mivel $\varphi^{-1}(V)$ nyílt X-en, így a $\varphi^*(f)$ racionális függvényt határoz meg X-en. A φ leképezésre és az f függvényre kapott feltételünk divizorok nyelvén a $\varphi(X) \not\subset$ $\not\subset \mathrm{Supp}\,(f)$-re redukálódik.

Legyen most a D divizor egy koordinált f_i függvényrendszerrel és $\{U_i\}$ lefedéssel adott. Tekintsük azokat az U_i-ket, amelyekre $\varphi(X) \cap U_i$ nem üres, és bebizonyítjuk, hogy $\varphi(X)\cap U_i \not\subset \operatorname{Supp}(f_i)$. Valóban az X sokaság irreducibilitása maga után vonja a $\overline{\varphi(X)}$ irreducibilitását Y-ban. Ha $\varphi(X)\cap U_i \subset \operatorname{Supp}(f_i)$, akkor abból, hogy $\overline{\varphi(X)}$ irreducibilis és $\varphi(X)\cap U_i$ nem üres, következik, hogy $\overline{\varphi(X)}\subset \operatorname{Supp}(f_i)$. Végül, a $\operatorname{Supp}(f_i)\cap U_i = \operatorname{Supp} D\cap U_i$ egyenlőség, a $\overline{\varphi(X)}$ irreducibilitása és $\overline{\varphi(X)}\cap U_i\neq\emptyset$ maga után vonja a $\varphi(X)\subset \operatorname{Supp} D$ tartalmazást, ami ellentmond a feltételeknek.

Ezek miatt a $\varphi(X)$-szel nem üres metszetű összes U_i esetén a racionális $\varphi^*(f_i)$ függvények értelmezve vannak a $\varphi^{-1}(U_i)$-ben. Azok a $\varphi^{-1}(U_i)=V_i$ halmazok, amelyekre $\varphi(X)$-nek van nem üres metszete U_i-vel, nyíltak és lefedik X-et, a $\varphi^*(f_i)$ függvények pedig koordinált függvényrendszert alkotnak, amely egy divizort határoz meg X-en. Nyilvánvaló, hogy ez a divizor nem változik, ha D-t egy másik függvényrendszerrel adjuk meg. A megkonstruált divizort a D divizor ősképének nevezzük és $\varphi^*(D)$-vel jelöljük.

Speciálisan, ha $\varphi(X)$ sűrű Y-ban, akkor minden $D\in \operatorname{Div}(Y)$ divizornak az ősképe értelmezve van.

Ha D és D' az Y-on értelmezett divizorok, amelyeket az $\{f_i\}$ és $\{g_i\}$ függvényrendszerek, és a megfelelő $\{U_i\}$ és $\{V_i\}$ lefedések határoznak meg, akkor a $D+D'$ divizort az $\{f_i\cdot g_j\}$ függvényrendszer és az $\{U_i\cap V_j\}$ lefedés határozzák meg. Innen rögtön következik, hogy $\varphi^*(D+D')=\varphi^*(D)+\varphi^*(D)$, és így, ha $\varphi(X)$ sűrű Y-ban, akkor a φ^* meghatározza a $\varphi^*\colon \operatorname{Div} Y\to \operatorname{Div} X$ homomorfizmust.

Az (f) fődivizort az $f_i=f$ függvényrendszer határozza meg és ezért $\varphi^*((f))= =(\varphi^*(f))$.

Speciálisan, φ^* leképezi $P(Y)$-t a $P(X)$-be és meghatározza a $\varphi^*\colon Cl(Y)\to Cl(X)$ homomorfizmust.

A divizorok koordinált függvényrendszerekkel történő meghatározásának alkalmazásaként megmutatjuk, hogyan feleltethető meg divizor nem függvénynek, hanem a sima projektív sokaságon értelmezett, koordinátáktól függő formának. Legyen $X\subset P^n$ és F koordinátáktól függő olyan forma P^N-ben, amely nem azonosan nullértékű X-en. Minden $x\in X$ pont esetén tekintsük G formát, amelynek a fokszáma a G fokszámával megegyezik és amelyre $G(x)\neq 0$. Ilyen formák léteznek: ha például $x=(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ és $\alpha_i\neq 0$, akkor $G=x_i^{\deg F}$ választható. Akkor az $f=\dfrac{F}{G}$ függvény racionális X-en és reguláris egy olyan nyílt halmazban, amelyben $G\neq 0$.

Könnyű belátni, hogy léteznek olyan G_i formák, hogy az $U_i=X-X_G$ nyílt halmazok az X lefedését alkotják. Úgyszintén könnyen látható, hogy az $f_i=\dfrac{F}{G_i}$ függvények és az U_i nyílt halmazok koordinált függvényrendszert alkotnak, tehát divizort határoznak meg X-en. A G_i formák másik megválasztása nem változtatja meg ezt a divizort, és így az csak az F formától függ. Ezt a divizort az F forma divizorának nevezzük és (F)-vel jelöljük. Mivel az f_i függvények regulárisak az U_i halmazokon, így $(F)\geqq 0$.

Ha F_1 egy másik forma, $\deg F_1=\deg F$, akkor az $(F)-(F_1)$ divizor az $\dfrac{F}{F_1}$ racionális függvény divizora. Ezért $(F)\sim(F_1)$, ha $\deg F=\deg F_1$.

Speciálisan, az összes (L) divizor, ahol L lineáris forma, egymással ekvivalens. Nyilvánvaló, hogy $\operatorname{Supp}(L)=X_L$ nem más, mint az X metszete az $L=0$ hipersíkkal. Emiatt ezeket a divizorokat a hipersíkmetszet divizorainak nevezzük.

Ha a fentiekben az F_1 helyett az $L^{\deg F}$ formát vesszük, azt kapjuk, hogy $(F) \sim \deg F \cdot (L)$, ahol (L) a hipersíkmetszet divizora.

A divizorok koordinált függvényrendszer segítségével történő meghatározása kiterjeszthető tetszőleges, nem feltétlenül sima sokaságok esetére is. Azonban ekkor a divizor megadása koordinált függvényrendszerrel a divizor definíciójának tekintendő. Azt az objektumot, amihez így jutunk, lokális fődivizornak nevezzük.

Pontosabban, az irreducibilis sokaságon értelmezett lokális fődivizor nem más, mint olyan racionális f_i függvények rendszere, amelyek az $\{U_i\}$ nyílt lefedés halmazainak felelnek meg és kielégítik az alábbi feltételeket:

1. f_i nem azonosan nullértékűek és
2. $f_i \cdot f_j^{-1}$ és a $f_j \cdot f_i^{-1}$ regulárisak $U_i \cap U_j$-n.

Emellett az f_i függvények és az $\{U_i\}$ lefedés ugyanazt a divizort határozzák meg, mint a g_j függvények és a $\{V_j\}$ lefedés, ha $f_i g_j^{-1}$ és $f_i^{-1} g_j$ regulárisak $U_i \cap V_j$-ben.

Minden $f \in k(X)$ függvény meghatároz egy lokális fődivizort, ha feltesszük, hogy $f_i = f$. Az ilyen divizorokat fődivizoroknak nevezzük.

Az f_i függvényekkel és $\{U_i\}$ lefedéssel, valamint a g_j függvényekkel és $\{V_j\}$ lefedéssel adott lokális fődivizorok szorzatán azt a divizort értjük, amelyet az $f_i \cdot g_j$ függvények és az $\{U_i \wedge V_j\}$ lefedés határoznak meg. Az összes lokális fődivizor csoportot alkot, a fődivizorok pedig ennek egy alcsoportját. A faktorcsoportot az X sokaság *Picar*-csoportjának nevezzük és Pic (X)-szel jelöljük.

Minden lokális fődivizornak van hordozója, mégpedig az a zárt részsokaság, amely azon U_i-beli pontokból áll, amelyekben f_i nem reguláris vagy nullértékű. Ugyanúgy, mint a sima sokaságokon tekintett divizorok esetén, meghatározható az Y-on vett D lokális fődivizornak a $\varphi: X \to Y$ reguláris leképezésre vonatkozó ősképe, ha a $\varphi(X)$ nem része Supp D-nek.

Rámutatunk egy fontos speciális esetre. Ha X egy sima sokaság és Y annak egy nem feltétlenül sima részsokasága, akkor az X-en vett bármely olyan D divizor, amelyre $D \not\supset Y$, meghatároz Y-on egy $\tilde{D}$ lokális fődivizort. Ehhez meg kell vizsgálni a φ: $Y \to X$ beágyazó leképezést és ekkor $\tilde{D} = \varphi^*(D)$. A $\tilde{D}$-t a D-nek Y-ra való szűkítésének fogjuk nevezni, és $\varrho_Y(D)$-vel jelöljük. A definícióból következik, hogy a fődivizorok esetén $\varrho_Y((D)) = (\tilde{f})$, ahol $\tilde{f}$ az f függvény Y-ra való szűkítése.

Természetes, hogy a divizorok és a lokális fődivizorok közötti különbségek csak a nem sima sokaságok esetén jelentkeznek.

3. *Hogyan mozdíthatjuk el a divizor hordozóját a pontokról*

1. TÉTEL. *A sima X sokaságon vett tetszőleges D divizor és véges számú $x_1, \ldots, x_m \in X$ pont esetén megadható olyan D' divizor, hogy $D' \sim D$, $x \notin$ Supp D' $(i = 1, \ldots, m)$.*

A D vehető egyszerű divizornak, különben elegendő lenne a tételt mindegyik komponenséhez alkalmazni. Válasszunk X-ben egy az $x_1, \ldots, x_m$ pontokat tartalmazó affin nyílt halmazt. Elegendő bebizonyítani a tételt, erre a halmazra, tehát az X tekinthető affin sokaságnak. Az m szám szerinti indukciót alkalmazva, feltehetjük, hogy $x_1, \ldots, x_i \notin D$, $x_{i+1} \in D$. Meg kell konstruálnunk egy olyan D' divizort, amelyre $D' \sim D$, $x_1, \ldots, x_{i+1} \notin$ Supp D'. Tekintsük a D egyszerű divizor egy lokális π' egyenletét az x_{i+1} pont környezetében. Kimutatjuk, hogy π' kiválasztható olyannak, amelyre $\pi' \in k[X]$ (feltételünk szerint X affin). Valóban, π' reguláris az x_{i+1} pontban és így ha $(\pi')_\infty = \sum k_l F_l$, akkor $F_l \not\ni x_{i+1}$. Ezért minden l-re létezik olyan $f_l \in k[X]$ függvény, amely az F_l-en nullértékű és $f_l(x_{i+1}) \neq 0$. A $\pi = \pi' \Pi f_l^{k_l}$ függvény nyilván reguláris X-en és D-nek az x_{i+1} pont környezetében lokális egyenlete. Mivel a feltétel szerint

$$x_j \notin D \cup x_1 \cup \ldots \cup x_{j-1} \cup x_{j+1} \cup \ldots \cup x_i \qquad (j = 1, \ldots, i),$$

így minden $j = 1, \ldots, i$ esetén létezik olyan $g_i \in k[X]$ függvény, hogy $g_i|_D = 0$, $g_j(x_l) = 0$ $(l = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, i)$, $g_j(x_j) \neq 0$.

Tekintsük az

$$f = \pi + \sum_{j=1}^{i} \alpha_j g_j^2, \quad \alpha_j \in k$$

függvényt és az α_j állandókat válasszuk ki úgy, hogy

(1) $$f(x_j) \neq 0 \qquad (j = 1, \ldots, i).$$

Ehhez elegendő az $\alpha_i \neq -\dfrac{\pi(x_j)}{g_j(x_j)^2}$ teljesítése. Mivel minden $g_{j|D} = 0$, így az $O_{x_{i+1}}$ lokális gyűrűben $g_j \equiv 0$ (π) és

$$\sum \alpha_j g_j^2 = \pi^2 h, \quad h \in O_{x_{i+1}}, \quad f = \pi(1 + \pi h).$$

Mivel $(1 + \pi h)(x_{i+1}) = 1$, így innen következik, hogy f a D divizor lokális egyenlete az x_{i+1} pont környezetében. Ezért $(f) = D + \sum r_s D_s$, amellett a D_s divizorok egyike sem megy át az x_{i+1} ponton. Ez azt jelenti, hogy $D' = D - (f)$ feltevésből $\mathrm{Supp}\, D' \not\ni x_{i+1}$ következik. Továbbá, az (1) azt mutatja, hogy $\mathrm{Supp}\,(f) \not\ni x_j$ $(j = 1, \ldots, i)$, és ezért a D' divizor kielégíti a tétel feltételeit.

Íme az 1. tétel első alkalmazása. A 2. pontban meghatároztuk az X sokaság D divizorának $f^*(D)$ ősképét, ahol az $f\colon Y \to X$ leképezés reguláris és $f(Y) \not\subset \mathrm{Supp}\, D$.

Az 1. tétel lehetővé teszi a D divizor vele ekvivalens olyan D' divizorral való felcserélését, hogy $\mathrm{Supp}\, D' \not\ni x$, ahol x az $f(Y)$-ból tetszőlegesen kiválasztott pont. Akkor automatikusan $f(Y) \not\subset \mathrm{Supp}\, D'$ és az $f^*(D')$ őskép meghatározott. Ez megmutatja, hogy nem szükséges megszorításoknak alávetni az f reguláris leképezést ahhoz, hogy a $C \in Cl(f)$ divizorosztály ősképét meghatározzuk. Ki kell választani C-ben olyan D divizort, amelyre $f(Y) \not\subset \mathrm{Supp}\, D$, és megvizsgálni Y-on az $f^*(D)$ divizort tartalmazó osztályt. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezzel az

$$f^*\colon Cl(X) \to Cl(Y)$$

homomorfizmust nyerjük.

Más szóval, a $Cl(X)$ az irreducibilis sima algebrai sokaságok kategóriájának az Ábel-féle csoportok kategóriájába való funktora.

4. *Divizorok és racionális leképezések*

A divizorok megfeleltetése függvényeknek hasznos a sokaságok projektív térbe való racionális leképezéseinek vizsgálatakor. Legyen X sima sokaság és $\varphi\colon X \to P^n$ egy racionális leképezés. Vizsgáljuk meg, milyen pontokban nem reguláris a φ.

A racionális leképezést a

(1) $$\varphi = (f_0 : \ldots : f_n), \quad f_i \in k(X)$$

képletekkel határozzuk meg, emellett feltételezhető, hogy egyetlen f_i sem azonosan nullértékű X-en. Legyen

$$(f_i) = \sum_{j=1}^{m} k_{ij} C_j,$$

ahol C_j egyszerű divizorok. Megengedjük, hogy $k_{ij}=0$ is teljesüljön.

Hogy megvizsgáljuk, reguláris-e a φ az $x \in X$ pontban, megadjuk C_j-t a π_j lokális egyenlettel az x pontban. Ekkor

$$f_i = (\prod_j \pi_j^{k_{ij}}) \cdot u_i, \quad u_i \in O_x, \quad u_i(x) \neq 0.$$

Mivel O_x-ben a prímtényezőkre való bontás egyértelmű, az $f_0, \ldots, f_n$ elemeknek létezik d legnagyobb közös osztója, vagyis olyan $d \in k(X)$ elem, hogy $f_i d^{-1} \in O_x$ és a $d_1 \in k(X)$, $f_i \cdot d_1^{-1} \in O_x$ maga után vonja a d_1/d-t, vagyis $dd_1^{-1} \in O_x$ teljesítését. Mivel az irreducibilis sokaságok lokális egyenletei az O_x prímelemei, így

$$d = \prod \pi_j^{l_j}, \quad l_j = \min_{i=0, \ldots n} k_{ij}.$$

A φ leképezés reguláris az x pontban, ha létezik olyan $g \in k(X)$ függvény, hogy $f_i g_1^{-1} \in O_x$ $(i=0, \ldots, n)$, és nem az összes $(f_i g^{-1})(x)$ egyenlő nullával.

A legnagyobb közös osztó definíciója miatt innen következik, hogy g/d. Ha $d=g \cdot h$, $h \in O_x$ és $h(x)=0$, akkor $h/(f_i \cdot g^{-1})$ és ezért minden $(f_i g^{-1})(x)=0$. És így a kívánt feltételeket csak az olyan g függvény elégíti ki, amelyre $d=g \cdot h$, $h(x) \neq 0$. Ekkor $f \cdot g^{-1} = (f_i d^{-1}) \cdot h$, vagyis

$$f_i g^{-1} = (\prod_j \pi_j^{(k_{ij}-l_j)}) \cdot (u_i h),$$

és a φ leképezés akkor és csak akkor reguláris, ha nem az összes $\prod_j \pi_j^{(k_{ij}-l_j)}$ függvény nullértékű az x pontban. Hogy divizorok nyelvére lefordítsuk ezt a feleletet, nevezzük a $D_i = \sum k_{ij} C_j$ $(i=1, \ldots, n)$ divizorok legnagyobb közös osztójának a

$$\text{L.n.k.o.}\,(D_1, \ldots, D_n) = \sum l_j C_j, \quad l_j = \min_{i=1, \ldots, n} k_{ij}$$

divizort. Nyilvánvaló, hogy $D_i' = D_i - \text{L.n.k.o.}\,(D_1, \ldots, D_n) > 0$, és a D_i' divizoroknak nincs közös komponensük. Speciálisan, tegyük fel, hogy

$$D = \text{L.n.k.o.}\,((f_0), \ldots, (f_n)), \quad D_i' = (f_i) - D.$$

Ekkor az x pont valamely környezetében

$$(\prod_j \pi_j^{(k_{ij}-l_j)}) = D_i',$$

és mondhatjuk, hogy a φ leképezés akkor és csak akkor reguláris az x pontban, ha nem az összes Supp D_i' sokaság megy át ezen a ponton.

Ezzel bebizonyítottuk a következő eredményt.

2. TÉTEL. *Az* (1) *racionális leképezés pontosan a*

$$\cap \operatorname{Supp} D_i', \quad D_i' = (f_i) - \text{L.n.k.o.}\,((f_0), \ldots, (f_n)) \qquad (i = 0, \ldots, n)$$

halmaz pontjaiban nem reguláris.

Mivel a D_i' divizoroknak nincsen közös irreducibilis komponensük, ezért a $\bigcap \mathrm{Supp}\, D_i'$ halmaz kodimenziója $\geqq 2$. Ilyen módon az 1. tétel a II. fejezet 3. §-ban szereplő 3. tételének élesítése.

5. *Divizorral asszociált tér*

Az a tény, hogy az összes legfeljebb n-edfokú $f(t)$ polinom véges dimenziójú vektorteret alkot, a következő módon interpretálható a divizorok nyelvén. Jelöljük x_∞-nel a P^1 egyenes t koordinátájú végtelen távoli pontját. A t k-adfokú polinomjának az x_∞ pontban k-adrendű pólusa van és nincs több pólusa. Emiatt a $\deg f \leqq n$ feltétel kifejezhető úgy is: az $f+nx_\infty$ divizor effektív.

Analóg módon az X sima sokaságon adott tetszőleges D divizor esetén tekinthetjük a nullából és olyan $f\in k(X)$, $f\neq 0$ függvényekből álló halmazt, amelyekre

$$(f)+D \geqq 0. \tag{1}$$

Ez a halmaz a függvényekre értelmezett szokásos műveletekre nézve k test feletti lineáris tér. Valóban, ha $D=\sum n_i C_i$, akkor az (1) ekvivalens azzal, hogy

$$v_{C_i}(f) \geqq -n_i, \quad v_C(f) \geqq 0, \quad \text{ha} \quad C \neq C_i,$$

és emiatt az állításunk rögtön következik az 1. pont képleteiből.

Az (1) feltételt kielégítő függvényteret a D divizorral asszociált térnek nevezzük és $\mathscr{L}(D)$-vel jelöljük.

Annak az analógja, hogy a legfeljebb n-edfokú polinomok tere véges dimenziójú, az a tény, hogy az $\mathscr{L}(D)$ tér véges dimenziójú, ha D tetszőleges divizor és X projektív sokaság.

Ezt a tételt a 2. §-ban fogjuk bebizonyítani az algebrai görbék esetére. Az általános eset bizonyítása különösebb nehézség nélkül nyerhető innen a dimenzió szerinti indukcióval. Azonban a tétel jelentősége világosabbá válik, ha az algebrai koherens nyalábokra vonatkozó jóval általánosabb állításból vezetjük le speciális esetként. Éppen ebben az alakban fogjuk a tételt bebizonyítani.

Az $\mathscr{L}(D)$ tér dimenzióját a D divizor dimenziójának is nevezzük és $l(D)$-vel jelöljük.

3. TÉTEL. *Az ekvivalens divizorok dimenziója megegyezik.*

Legyen $D_1 \sim D_2$, ami azt jelenti, hogy $D_1-D_2=(g)$; $g\in k(X)$. Ha $f\in\mathscr{L}(D)$, akkor $(f)+D_1\geqq 0$. Innen következik, hogy $(f\cdot g)+D_2=f+D_1\geqq 0$, vagyis $f\cdot g\in\mathscr{L}(D_2)$, $g\cdot\mathscr{L}(D_1)=\mathscr{L}(D_2)$. Ilyen módon, az összes $f\in\mathscr{L}(D)$ függvénynek a g függvénnyel való szorzása meghatározza az $\mathscr{L}(D_1)$ és $\mathscr{L}(D_2)$ terek egy izomorfizmusát, ami bizonyítja a tételt.

Most láthatjuk, hogy beszélhetünk a C divizorosztály $l(C)$ dimenziójáról, ha ezalatt az osztály összes divizorának közös dimenzióját értjük. Ez a szám a következő értelemmel bír. Ha $D\in C, f\in\mathscr{L}(D)$, akkor a $D_f=(f)+D$ divizor effektív. Nyilvánvaló, hogy $D_f\sim D$ és ezért $D_f\in C$. Megfordítva, bármely effektív $D'\in C$ divizor D_f alakú, ahol $f\in\mathscr{L}(D)'$. Nyilván, ha X projektív, akkor a D_f divizor egy konstans tényezőtől eltekintve egyértelműen meghatározza az f függvényt. Ezen az úton kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk a C osztály effektív divizorai és a D divizornak megfelelő 1-dimenziós projektív $P(\mathscr{L}(D))$ tér $l(C)$ pontjai között. (Emlékeztetünk arra, hogy az L vektortérnek megfelelő $P(L)$ projektív tér az L összes egyeneseiből áll.)

Az $\mathscr{L}(D)$ tér hasznos, amikor a racionális leképezéseket divizorokkal adjuk meg, ahogyan a 4. pontban leírtuk. Ha

$$\varphi = (f_0 : \dots : f_n) : X \to P^n \tag{2}$$

racionális leképezés, és amint a 4. pontban,

$$D = \text{L.n.k.o.}\,((f_0), \dots, (f_n)), \quad D_i = (f_i) - D, \tag{3}$$

akkor $D_i \geqq 0$, és ezért az összes $f_i \in \mathscr{L}(-D)$.

Az f_i függvények kiválasztása függött a P^n projektív koordinátarendszerének kiválasztásától. Ezért invariáns módon a φ leképezésnek az $\sum\limits_1^n \lambda_i f_i$ függvények összessége felel meg, amelyek az összes f_i függvények lineáris kombinációi. Ezek a függvények egy $M \subset \mathscr{L}(-D)$ lineáris alteret képeznek. A továbbiakban feltesszük, hogy a $\varphi(X)$ a P^n egyetlen saját alterének sem része. Ekkor $\sum \lambda_i f_i \neq 0$ az X-en, ha nem az összes $\lambda_i = 0$. Az olyan effektív divizorok rendszerét, melyek a függvények ilyen összességének felelnek meg, vagyis az $M(g) + D$, $g \in M$ divizorok rendszerét, a divizorok lineáris rendszerének nevezzük. Ha $M = \mathscr{L}(-D)$, akkor a lineáris rendszert teljesnek nevezzük. Az $(f) + D$, $f \in M$ divizorok értelme nagyon egyszerű — ezek a P^n-beli hipersíkok divizorainak ősképei a φ leképezés mellett. Tehát az adott sima X sokaság különböző projektív terekbe való összes racionális leképezése megkonstruálható. Ehhez tekintsük a tetszőleges D divizort és az $\mathscr{L}(-D)$ térben egy véges dimenziós M lineáris alteret. Ha annak bázisa $f_0, \dots, f_n$, akkor a (2) képletek megadják a keresett leképezést. Megjegyezzük, hogy a $D_i \in \mathscr{L}(-D)$ divizorok még egy tulajdonsággal rendelkeznek: nincs közös komponensük.

Mivel az összes f_i függvénynek egy $g \in k(X)$ közös tényezővel való szorzása nem változtatja meg a φ leképezést, a D divizor pedig a vele ekvivalens $(g) + D$ divizorba megy át, így a racionális leképezés invariánsa a D divizor osztálya. Ezzel az X sokaságnak a P^m projektív térbe való összes olyan racionális φ leképezésének konstruálási módszerét kapjuk, hogy a $\varphi(X)$ nem része a P^m egyetlen saját alterének sem: kiválasztjuk a divizorok tetszőleges osztályát X-en és az osztály tetszőleges D divizorához az $\mathscr{L}(-D)$ térben olyan véges dimenziós M lineáris alteret, hogy az $(f) - D$ effektív divizoroknak nincs közös komponensük. Ha $f_0, \dots, f_n$ az M bázisa, akkor a leképezésünket a (2)-es képlet határozza meg. Természetesen előfordulhat, hogy $\mathscr{L}(-D) = 0$, vagy hogy az összes $(f) - D$, $f \in \mathscr{L}(-D)$ divizornak van közös komponense, akkor ez a divizorosztály nem vezet leképezéshez.

Felhívjuk a figyelmet a létrejött kép egyik érdekes tulajdonságára. Az adott C osztálynak megfelelő összes racionális leképezés között van egy maximális: az, amelyet az $M = \mathscr{L}(-D)$, $D \in C$ feltételek mellett kapunk (itt felhasználjuk a még be nem bizonyított tételt arról, hogy az $\mathscr{L}(-D)$ tér véges dimenziós).

Ennek az osztálynak megfelelő minden más leképezést megkapunk, ha a fenti leképezést különböző projektáló leképezésekkel komponáljuk. Valóban, ha $\varphi = (f_0 : \dots : f_N)$ és mondjuk $\psi = (f_0 : \dots : f_n)$, $n < N$, akkor $\psi = \pi \cdot \varphi$, ahol $\pi(x_0 : \dots : x_N) = (x_0 : \dots : x_n)$ egy projektálás, amelyet most racionális leképezésnek tekintünk.

Vizsgáljuk meg, hogyan működik ez a séma, ha X-nek a P^m projektív teret vesszük. Tudjuk, hogy $Cl(P^m)\cong Z$ és a k egész számnak megfelelő C_k osztály k-adrendű divizorokból áll.

Nyilvánvaló, hogy ha $k>0$, $D\in C_k$, akkor $\mathscr{L}(-D)=0$. Ha $k\leqq 0$, akkor $-D$-nek vehetjük a kE divizort, ahol E az $x_0=0$ végtelen távoli hipersík divizora. Ebben az esetben az $\mathscr{L}(kE)$ az $\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}$ inhomogén koordináták legfeljebb k-adfokú polinomjaiból áll (lásd a 15. feladatot). Ha a kapott leképezés képleteit beszorozzuk x_0^k-val, megkapjuk a $v_k\colon P^m\to P^{v_{k,m}}$ *Veronese*-féle leképezést. Tehát azt tapasztaljuk, hogy a P^m tér tetszőleges racionális leképezése megkapható a *Veronese*-féle és a projektáló leképezés komponálása útján.

Feladatok

1. Határozzuk meg az $\frac{x}{y}$ függvény divizorát az $xy-zt=0$ másodrendű felületen P^3-ban.

2. Határozzuk meg az $x-1$ függvény divizorát az $x_1^2+x_2^2=x_0^2$, $x=\frac{x_1}{x_0}$ körvonalon.

3. Határozzuk meg az $f^*(D_a)$ ősképet, ahol $f(x, y)=x$ az $x^2+y^2=1$ körvonal projekciója az X tengelyre, és D_a divizor az A^1 egyenesen, $D_a=p$, $p\in A^1$, és koordinátája a.

4. Legyen X sima projektív görbe, $f\in k(X)$. Tekintsük f-et az $f\colon X\to P^1$ reguláris leképezésnek és bizonyítsuk be, hogy $(f)=f^*(D)$, ahol $D=0-\infty$ divizor P^1-en.

5. Legyen X sima affin sokaság. Bizonyítandó, hogy $Cl(X)=0$ akkor és csak akkor, ha a $k[X]$ gyűrűben a prímtényezőkre való bontás egyértelmű.

6. Legyen X sima projektív sokaság, $X\subset P^N$, legyen $k[S]$ a P^N-beli homogén koordináták polinomjainak gyűrűje, és $I_X\subset k[S]$ ideál X-ben. Bizonyítsuk be, hogy ha a $k[S]/I_X$ gyűrűben a prímtényezőkre való bontás egyértelmű, akkor $Cl(X)=Z$ és hipersíkmetszeteinek osztálya által van generálva.

7. Keressük meg $Cl(P^n\times A^n)$-t.

8. A $p\colon X\times A^1\to X$ projekció meghatározza a $p^*\colon Cl(X)\to Cl(X\times A^1)$ homomorfizmust. Bizonyítsuk be, hogy a p^* epimorfizmus. (Útmutató. Használjuk fel a $q^*\colon Cl(X\times A^1)\to Cl(X)$ leképezést, ahol a $q\colon X\to X\times A^1$ azzal van megadva, hogy $q(x)=x\times 0$.)

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $X\times A^1$-en értelmezett divizorra letezik olyan $U\subset X$ nyílt halmaz, hogy az $U\times A^1$-en ez ődivizor. (Útmutató. X-et affinnak lehet tekinteni, a divizort pedig irreducibilisnek. Akkor az megadható egy $k[X\times A^1]=$ $=k[X][T]$-beli prímideáliai. Használjuk fel azt, hogy minden $k(X)[T]$-beli ideál főideál, majd helyettesítsük X-et valamely fő affin nyílt részhalmazzal.)

10. Bizonyítsuk be, hogy $Cl(X\times A^1)\cong Cl(X)$. Használjuk fel a 8. és 9. feladatok eredményeit.

11. Legyen X az $y^2=x^2+x^3$ görbe. Bizonyítandó, hogy tetszőleges lokális ődivizor X-en ekvivalens az olyan divizorral, amelynek hordozója nem tartalmazza a $(0, 0)$ pontot. Felhasználva ezt és olyan normálizáló $\varphi\colon A^1\to X$ leképezést, amelynél a $\varphi^{-1}(0, 0)$ az $x_1, x_2\in A^1$ pontokból áll, írjuk le $\mathrm{Pic}\,(X)$-et, mint D/P-t, ahol D az A^1-en tekintett összes olyan divizorok csoportja, amelyeknek a hordozói nem

tartalmazzák x_1 és x_2-t, P az olyan (f) fődivizorok csoportja, amelyekre f reguláris x_1 és x_2-ben, és $f(x_1)=f(x_2)\neq 0$.
Bizonyítsuk be, hogy a $\mathrm{Pic}(X)$ csoport izomorf a k testbeli nulltól különböző elemek multiplikatív csoportjával.

12. Határozzuk meg $\mathrm{Pic}(X)$-et, ahol X az $y^2=x^2$ egyenletű görbe.

13. Legyen X kvadratikus kúp. A II. fejezet 5. §-ban szereplő 2. feladathoz megkonstruált $\varphi\colon A^2\to X$ leképezés segítségével határozzuk meg a $\varphi^*(\mathrm{Div}(X))$ képet $\mathrm{Div}\,A^2$-ben. Bizonyítsuk be, hogy $D=(F)\in\mathrm{Div}\,A^2$ akkor és csak akkor tartozik $\varphi^*(\mathrm{Div}(X))$-hez, ha $F(-u,-v)=\pm F(u,v)$, vagyis az F páros vagy páratlan függvény. Bizonyítsuk be, hogy fődivizorok X-en páros függvényeknek felelnek meg. Bizonyítsuk be, hogy $Cl(X)\cong Z/2Z$.

14. A 2. tétel segítségével állapítsuk meg, milyen pontokban nem reguláris a biracionális $\varphi\colon X\to P^2$ leképezés, ahol X egy másodrendű felület P^3-ban, φ az $x\in X$ pontból való proiciálás. Ugyanez φ^{-1} esetére is elvégezhető.

15. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_0=0$-hipersík P^4-ben, akkor az $\mathscr{L}(kF)$ tér az $\frac{x_1}{x_0},\dots,\frac{x_n}{x_0}$ inhomogén koordináták legfeljebb k-adfokú polinomjaiból áll. (Útmutató. Felhasználható az a tény, hogy $f\in\mathscr{L}(kE)$-ből következik $f\in k[P_0^n]$.)

16. Legyen $\sigma\colon X\to Y$ σ-eljárás $y\in Y$ centrummal, Y legyen sima. Bizonyítandó, hogy $Cl(X)\cong Cl(Y)\oplus Z$.

2. §. Divizorok görbéken

1. *Görbén értelmezett divizor fokszáma*

Legyen X projektív sima görbe. Ekkor az X-en tekintett divizor az $x_i\in X$ pontok lineáris kombinációja: $D=\sum k_i x_i$, $k_i\in Z$. A D divizor fokszáma alatt a $\deg D=\sum k_i$ számot értjük.

Az 1. § 1. pontjának 2. példája az $n=1$ esetben azt mutatja, hogy az $X=P^1$-en a D divizor akkor és csak akkor fődivizor, ha $\deg D=0$. Kimutatjuk, hogy a $\deg D=0$ egyenlőség teljesül bármely sima projektív görbén értelmezett fődivizor esetén. Ehhez szükségünk lesz egy új fogalomra.

Tegyük fel, hogy X és Y megegyező dimenziójú sokaságok és az $f\colon X\to Y$ reguláris leképezésnél az $f(X)$ sűrű Y-ban. Ekkor értelmezve van a $f^*\colon k(Y)\to k(X)$ beágyazás, amelyet figyelembe véve, a $k(Y)$-t gyakran tekintjük majd a $k(X)$ test résztestének (vagyis $u\in(Y)$ esetén a $f^*(u)$ helyett u-t írunk, amikor ez nem vezet félreértéshez). Abból, hogy $\dim Y=\dim X$, következik, hogy a $k(X)/k(Y)$ bővítés véges. Ennek a fokszámát az f leképezés fokszámának nevezzük

$$\deg f=[k(X):k(Y)]. \tag{1}$$

1. TÉTEL. *Ha $f\colon X\to Y$ a sima projektív görbék reguláris leképezése és $f(X)=Y$, akkor minden $y\in Y$ pontra* $\deg f=\deg f^*(y)$.

A tételben szereplő $f^*(y)$ divizor X-en, amely az 1 együtthatóval vett y pontból álló Y menti divizor ősképe. Emiatt a $\deg f$ egyenlő tetszőleges $y\in Y$ pont ősképeinek a számával (ezek multiplicitásaikkal veendők). Ez jobban megvilágítja az f leképezés fokszámának intuitív értelmét — a fokszám megmutatja, hányszor fedi le az X görbe Y-t az f leképezésnél.

KÖVETKEZMÉNY. *A sima projektív görbén értelmezett divizor fokszáma nullával egyenlő.*

Valóban, bármely nem konstans $f \in k(X)$ függvény meghatároz egy $f\colon X \to P^1$ reguláris leképezést. Emellett a $0 \in P^1$ pontra $f^*(0) = (f)_0$, ami azonnal következik a két divizor definíciójából. Hasonlóan $f^*(\infty) = (f)_\infty$. Az 1. tétel szerint

$$\deg(f) = \deg(f)_0 - \deg(f)_\infty = \deg f^*(0) - \deg f^*(\infty) = \deg f - \deg f = 0.$$

Az 1. tétel két eredményből következik. Ezek megfogalmazása érdekében bevezetjük a következő jelölést. Legyenek $x_1, \ldots, x_r$ az X görbe pontjai. Legyen

$$\tilde{O} = \bigcap_{i=1,\ldots,r} O_{x_i} \tag{2}$$

Az $\tilde{O}$ tehát olyan függvényekből áll, amelyek az összes $x_1, \ldots, x_r$ pontban regulárisak. Ha $(x_1, \ldots, x_r) = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, akkor az O_y gyűrű, amelyet a fenti megállapodásnak megfelelően a $k(X)$ test részgyűrűjének tekintünk, az $\tilde{O}$ része.

2. TÉTEL. *Az $\tilde{O}$ véges számú egyszerű ideált tartalmazó főideálgyűrű. Léteznek olyan $t_i \in \tilde{O}$ elemek, hogy*

$$v_{x_i}(t_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqq i, \quad j \leqq r. \tag{3}$$

Ha $u \in \tilde{O}$, akkor

$$u = t_2^{k_1} \cdot \ldots \cdot t_r^{k_r} \cdot v, \tag{4}$$

ahol $k_i = v_{x_i}(u)$, a v pedig invertálható $\tilde{O}$-ban.

3. TÉTEL. *Ha $\{x_1, \ldots, x_r\} = f^{-1}(y)$, akkor az $\tilde{O}$ szabad modulus az O_y felett és $\tilde{O} \cong O_y^n$, ahol $n = \deg f$.*

Kimutatjuk, hogy az 1. tétel következik a 2. és 3. tételekből. Legyen t lokális paraméter az y pontban, $\{x_1, \ldots, x_r\} = f^{-1}(y)$. A 2. tétel szerint $t = t_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot t_r^{k_r} \cdot v$, ahol $k_i = v_{x_i}(t)$. Felidézve a divizor ősképének meghatározását, látjuk, hogy

$$f^*(y) = \sum k_i x_i \quad \text{és} \quad \deg(f)_0 = \sum_1^r k_i.$$

Mivel a $t_1, \ldots, t_r$ elemek páronként relatív prímek $\tilde{O}$-ban, így

$$\tilde{O}/(t) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \tilde{O}/(t_i^{k_i}).$$

Könnyen belátható, hogy bármely $\omega \in \tilde{O}$ elem egyértelműen előállítható az

$$\omega \equiv \alpha_0 + \alpha_1 t_i + \ldots + \alpha_{k_i - 1} t_i^{k_i - 1} \pmod{t_i^{k_i}}, \quad \alpha_i \in k \tag{5}$$

alakban.

Valóban, ha az

$$\omega \equiv \alpha_0 + \alpha_1 t_i + \ldots + \alpha_{r-1} t_i^{r-1} \pmod{t_i^r},$$

előállításunk megvan, akkor

$$v = t_i^{-r}(\omega - \alpha_0 - \ldots - \alpha_{r-1} t_i^{r-1}) \in \tilde{O} \subset O_{x_i}.$$

Legyen $v(x_i)=\alpha_r$. Akkor $v_{x_i}(v-\alpha_r)>0$ és a 2. tételből következik, hogy $v\equiv\alpha_r \pmod{t_i}$, vagyis

$$\omega \equiv \alpha_0+\alpha_1 t_i+\ldots+\alpha_{r-1}t_i^{r-1}+\alpha_r t_i^r \pmod{t_i^{r+1}}.$$

Az (5) előállításból következik, hogy $\dim \tilde{O}/(t_i^{k_i})=k_i$. Ezért

$$\dim \tilde{O}/(t) = \sum_{i=1}^{r} k_i. \tag{6}$$

Most alkalmazzuk a 3. tételt. Belőle következik, hogy $\tilde{O}/(t)\cong(O_y/(t))^n$. Viszont t-lokális paraméter az a pontban és ezért

$$O_y/(t) \cong k, \quad \dim \tilde{O}/(t) = n = \deg f. \tag{7}$$

A (6) és (7) egyenlőségek bizonyítják az 1. tételt.

A 2. tétel bizonyítása. Jelöljük u_i-vel a lokális paramétert az x_i pontban. Akkor az x_i együtthatója az (u_i) divizorban 1, vagyis $(u_i)=x_i+D$, az x_i nem szerepel D-ben. Az 1. § 1. tétele szerint a D divizor hordozója elmozdítható az $x_1, \ldots, x_r$ pontokról, vagyis található olyan f_i függvény, hogy ezek a pontok nem szerepelnek a $D+(f_i)$-ben. Ez azt jelenti, hogy $t_i=u_if$-re a (3) összefüggések érvényesek. Legyen $u\in\tilde{O}$, $v_{x_i}(u)=k_i$. Feltétel szerint $k_i\geqq 0$. A $v=u\cdot t_1^{-k_1}\cdot\ldots\cdot t_r^{-k_r}$ elemre $v_{x_i}(v)=0$ minden $i=1, \ldots, r$-re, ahonnan $v\in\tilde{O}$ és $v^{-1}\in\tilde{O}$ következik. Így megkapjuk az u-nak a (4) előállítását.

Még ellenőrizni kell, hogy $\tilde{O}$ valóban főideálgyűrű. Legyen $\mathfrak{a}$ az $\tilde{O}$ ideálja. Bevezetjük a $k_i=\inf_{u\in\mathfrak{a}} v_{x_i}(u)$, $a=t_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot t_r^{k_r}$ jelöléseket. Akkor $ua^{-2}\in\tilde{O}$, vagyis $\mathfrak{a}\subset(a)$. Kimutatjuk, hogy $\mathfrak{a}=(a)$. Evégett jelöljük az ua^{-1}, $u\in\mathfrak{a}$ függvények halmazát $\mathfrak{a}'$-vel. Nyilvánvaló, hogy az $\mathfrak{a}'$ ideál $\tilde{O}$-ban és $\inf_{u\in\mathfrak{a}} v_{x_i}(u)=0$. Tehát minden $i=1, \ldots, r$ esetén létezik olyan $u_i\in\mathfrak{a}'$, amelyre $v_{x_i}(u_i)=0$, vagyis $u_i(x_i)\neq 0$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $c=\sum_{j=1}^{r} u_j t_1\cdot\ldots\cdot\hat{t}_j\cdot\ldots\cdot t_r\in\mathfrak{a}$ elemre (a $\hat{t}_j$ jel arra utal, hogy elhagyjuk a megfelelő tényezőt) $v_i(c)=0$ $(i=1, \ldots, r)$. Ez azt jelenti, hogy $c^{-1}\in\tilde{O}$, és ezért $\mathfrak{a}'=\tilde{O}$, $\mathfrak{a}=(a)$. A tételt bebizonyítottuk.

Rátérünk a 3. tétel bizonyítására. Legelőször bebizonyítjuk, hogy $\tilde{O}$ véges típusú modulus O_a felett. Jelöljük az y pont affin környezetét Y-ban V-vel és a $k[V]$ gyűrű egész lezártját a $k(X)$ testben A-val. A normalizáció létezésének bizonyításakor használt főeredmény azt állítja, hogy A-véges típusú modulus a $k[Y]$ felett.

LEMMA. *Az előbbi jelölések mellett $\tilde{O}\subset AO_y$ még akkor is, ha Y nem normális.*

Jelöljük U-val azt az affin sokaságot, amelynek koordináta gyűrűje izomorf az A-val. Ennek létezése következik abból, hogy A-nak véges generátor rendszere van k felett. Ezt tisztáztuk a normalizáció létezésének bizonyítása közben. Mivel U normális görbe és biracionálisan izomorf X-szel, így a II. fejezet 4. § 2. tétel 2. következménye miatt U-t nyílt részhalmaznak lehet tekinteni X-ben. Ezért a

$$\begin{array}{ccc} X & \supset & U \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \supset & V \end{array}$$

diagrammával van dolgunk, amelyből az következik, hogy $g^{-1}(y)\subset f^{-1}(y)=$ $=\{x_1, \ldots, x_r\}$.

Legyen $u\in\tilde{O}$, azaz az u függvény reguláris az összes $x_1, \ldots, x_r$ pontokban. Tételezzük fel, hogy annak $k_1, \ldots, k_s$ multiplicitású $\xi_1, \ldots, \xi_s$ pólusai vannak U-n. Akkor $\xi\neq x_j$, ezért $g(\xi_i)=y_i\neq y$ $(i=1, \ldots, s)$. Legyen a $h_i\in k[V]$ függvény értéke 0 az y_i pontban, de $h_i(y)\neq 0$. A $v=h\cdot u$ függvény, ahol $h(t)=\prod h_{h_i}^{k_i}$, reguláris az U összes pontjában, azaz $v\cdot h\in k[u]=A$. Továbbá $h(y)\neq 0$, mivel az összes $y_i\neq y$ és ezért $h^{-1}\in O_y$. Az $u=h^{-1}v$ egyenlőség bizonyítja, hogy $\tilde{O}\subset A\cdot O_y$. A lemmát bebizonyítottuk.

Most már könnyű befejezni a 3. tétel bizonyítását. Nyilvánvaló, hogy a $k[V]$ feletti A modulus generátorai egyúttal generátorai az O_y feletti AO_y modulusnak is. Ezért $\tilde{O}$ benne van az O_y főideálgyűrű feletti véges típusú modulusban, tehát maga is véges típusú modulus.

A főideálgyűrűk feletti modulusok alaptétele szerint $\tilde{O}$ egy szabad modulus és egy torzió modulus direktösszege. Viszont O_y és $\tilde{O}$ benne vannak a $k(X)$ testben, ahonnan következik, hogy ez a torzió modulus egyenlő nullával és $\tilde{O}\cong O_y^m$ valamely m-re.

Meg kell még határozni m-et, azaz az $\tilde{O}$ modulus rangját. Ez egyenlő az $\tilde{O}_y$-beli O_y felett lineárisan független elemek maximális számával. Mivel a gyűrű feletti és a kvociens test feletti lineáris függetlenség ugyanaz, az O_y gyűrű kvociensteste pedig egybeesik $k(Y)$-ban, ezért m egyenlő a $k(Y)$ felett lineárisan független $\tilde{O}$ gyűrűbeli elemek maximális számával.

Feltétel szerint $[k(X): k(Y)]=n$ és ezért eleve $m\leqq n$. Hátravan megmutatnunk, hogy $\tilde{O}$-ban van n $k(Y)$-ra nézve lineárisan független elem. Legyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ a $k(X)/k(Y)$ bővítés bázisa. Jelöljük k-val az α_i függvények pólusai rendjének a maximumát az x_j pontokban, t-vel pedig az y pont lokális paraméterét. Nyilvánvaló, hogy az $\alpha_i t^k$ függvények regulárisak ezekben a pontokban, és így benne vannak $\tilde{O}$-ban. Következésképp azok lineárisan függetlenek $k(Y)$ felett. A tételt bebizonyítottuk.

2. *Bèzout-tétel a görbén*

Most rámutatunk a fődivizor fokáról szóló tétel egyszerűbb alkalmazásaira. Ezek egészen speciális esetei általánosabb tételeknek, amelyeket a metszetek index elméletével kapcsolatosan fogunk bizonyítani. Viszont helyes ezeket az egyszerű eseteket már most leírni, mivel azok hasznosak lesznek a következő pontban.

Legyen X sima projektív görbe, $X\subset P^n$, F a P^n pontjainak koordinátáitól függő olyan forma, amely nem azonosan 0 az X-en, és x egy pont az X-en.

Az 1. § 2. pontban bevezettük az F forma (F) divizorát X-en. Ennek a divizornak $\deg(F)$ fokszámát (X, F)-fel is szokás jelölni és az X-nek a P^n_F hiperfelülettel való metszete indexének nevezzük.

Az 1. tételből azonnal következik a fontos következmény: ez a szám ugyanaz az összes azonos fokszámú formára.

Valóban, ha $\deg F=\deg F_1$, akkor $f=\frac{F}{F_1}\in k(X)$. Az (F) divizor definíciójából azonnal adódik, hogy $(F)=(F_1)+(f)$, ahonnan $(F)\sim(F_1)$.

Az 1. tétel következménye miatt $\deg(F)=\deg(F_1)$.

Hogy tisztázzuk az (X, F) számnak az F forma fokszámától való függőségét, elegendő F-ként egy tetszőleges $m=\deg F$ fokszámú formát venni. Speciálisan, vehetjük $F=L^m$-et, ahol L lineáris forma. Akkor

$$(1) \qquad (X, F) = m(X, L) = (\deg F)\,(X, L).$$

Végül tisztázzuk az (X, L) szám értelmét. Az I. fejezetben bevezettük az X görbe $\deg X$ fokszámát mint az X-nek az X-et nem tartalmazó hipersíkkal való metszete pontjainak a maximumát.

Mivel $(X, L)=\sum_{L(x)=0} v_x((L))$, így $\deg X \leqq (X, L)$. Tisztázzuk tetszőleges F forma esetében, mikor teljesül $v_x((F))=1$.

A $v_x((F))$ függvény additív volta miatt elegendő az irreducibilis forma esetét megvizsgálnunk.

LEMMA. *Legyen $X\subset P^n$, F irreducibilis forma, $Y=P^n_F$. A $v_x((F))=1$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $F(x)=0$ és $\Theta_{x,Y}\not\supset\Theta_{x,X}$. Ezen két teret Θ_{x,P^n}-beli altereknek tekintjük.*

A bizonyítást a II. fejezet néhány definíciójának az összevetésével kapjuk. Legyen G olyan forma, hogy $G(x)\neq 0$, $\deg G=\deg F$. Definíció szerint $v_x((F))=$ $=v_x(f)$, ahol $f=\left(\frac{F}{G}\right)\Big|_X$. Ismert, hogy $v_x((f))>1$ ekvivalens azzal, hogy $f\in\mathfrak{M}_x^2$, vagy, ami ugyanaz, $d_x f=0$. Viszont $d_x f\in\Theta^*_{x,X}$ és a $\Theta_{x,X}$-re való szűkítése a P^n-en racionális és az x-ben reguláris $\frac{F}{G}$ függvény $d_x\left(\frac{F}{G}\right)$ differenciáljának. Ilyen módon a $v_x((F))>1$ ekvivalens azzal, hogy $d_x\left(\frac{F}{Q}\right)=0$ a $\Theta_{x,X}$-en. Továbbá $\frac{F}{G}$ az Y lokális egyenlete abban az x pontban, ahol $G\neq 0$. Ezért $d_x\left(\frac{F}{G}\right)=0$ a $\Theta_{x,Y}$ egyenlete és $d_x\left(\frac{F}{G}\right)=0$ a Θ-en akkor és csakis akkor, ha $\Theta_{x,Y}\supset\Theta_{x,Y}$.

Alkalmazzuk ezt a metszet (X, L) indexének a kiszámítására.

Mivel az (X, L) szám ugyanaz az összes L lineáris formára, így azon $x\in X$ pontok száma, amelyekre $L(x)=0$, akkor éri el maximumát, ha az összes $v_x(L)=1$. A lemma szerint ez ekvivalens azzal, hogy az L hipersík egyetlen pontban sem érinti az X görbét. L-ként véve egy ilyen lineáris formát, azt kapjuk, hogy

$$\deg X = (X, L).$$

Csak azt kell ellenőriznünk, hogy a szükséges tulajdonsággal rendelkező lineáris formák valóban léteznek. Ezt könnyű elérni azzal a módszerrel, amelyet már sokszor használtunk, mégpedig az $X\times\tilde{P}^n$ ($\tilde{P}^n$ a P^n-beli hipersíkok tere) szorzatban tekintjük azon (x, ξ) párok Γ halmazát, ahol ξ érinti X-et az x pontban. A leképezések rétegeinek dimenziójáról szóló tétel szokásos alkalmazása akkor azt adja, hogy a Γ képe az $X\times\tilde{P}^n\to\tilde{P}^n$ projekció szerint $\geqq 1$ kodimenzióval rendelkezik. Összevetve az (1) és (2) egyenlőséget, az

$$(2) \qquad (X, F) = \deg F\cdot\deg X$$

összefüggést kapjuk, amely a Bèzout-tétel nevet viseli. Ennek a tételnek sok elemi geometriai alkalmazása van, amelyekkel pl. WOLKER „Алгебраические кривые" c. könyvének III. fejezetéből ismerkedhetünk meg.

3. *Harmadrendű görbék*

Az 1. tétel következményéből adódik, hogy az összes ekvivalens divizor a sima projektív görbén ugyanazon fokszámú. Ezért beszélhetünk a divizorok osztályának a fokáról. Van tehát a

$$\deg Cl(X) \to Z$$

homomorfizmusunk, amelynek képe az egész Z csoport, a magja pedig a 0 fokú osztályokból áll, amelyet $Cl^{\circ}(X)$-szel jelölünk. Ennek a csoportnak a szerepe már a következő eredményből is kiderül.

4. TÉTEL. Egy X sima projektív görbe akkor és csakis akkor racionális, ha $Cl^{\circ}(X)=0$.

Valóban, ha $X \cong P^1$, akkor az 1. § 2. pontból ismert példával van dolgunk ($n=1$ mellett). Ott láttuk, hogy $Cl^{\circ}(P^1)=Z$ és így $Cl^{\circ}(P^1)=0$. Fordítva, legyen $Cl^{\circ}(X)=0$. Ez azt jelenti, hogy bármely nullafokú divizor fődivizor. Speciálisan, ha $x, y \in X$, $x \neq y$, akkor létezik olyan $f \in k(X)$ függvény, hogy $x-y=(f)$. f-et az $X \to P^1$ leképezésnek tekintve, az 1. tételből azt kapjuk, hogy $k(X)=k(f)$, azaz f biracionális izomorfizmus. Mivel X és P^1 sima projektív görbék, így f izomorfizmus.

Most megvizsgáljuk azt az egyszerű esetet, amikor $Cl^{\circ}(X) \neq 0$. Ezek sima sík projektív harmadrendű görbék. Az I. fejezet 1. §-ban láttuk, hogy ilyen görbék lehetnek nem racionálisak, például nem racionális az $x^3+y^3=1$ egyenletű görbe. Be fogjuk bizonyítani az 5. § 3. pontban, hogy az összes sík sima projektív harmadrendű görbe nem racionális. Most fel fogjuk használni ezt a tényt.

5. TÉTEL. Kiválasztunk egy tetszőleges x_0 pontot a sima projektív harmadrendű X görbén és tetszőleges $x \in X$ pontnak megfeleltetünk egy olyan C_x osztályt, amely az $x-x_0$ divizort tartalmazza. Az $x \to C_x$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az $x \in X$ pontok és a $C \in Cl^{\circ}(X)$ osztályok között.

Ha $C_x=C_y$, akkor $x-x_0 \sim y-y_0$ és $x \sim y$. A 4. tétel bizonyításából következik, hogy $x \neq y$ esetén innen az X görbe racionalitása adódna, amely X-ről viszont ismert, hogy nem racionális.

Már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy tetszőleges 0-fokú C osztályban van $x-x_0$ alakú divizor. Legyen először D egy tetszőleges effektív divizor. Bebizonyítjuk, hogy létezik olyan $x \in X$ pont, hogy

$$D \sim x+kx_0. \tag{1}$$

Ha $\deg D=1$, akkor (1) igaz $k=0$ mellett. Ha $\deg D>1$, akkor $D=D'+y$, $\deg D'= =\deg D-1$, $D'>0$. Alkalmazva az indukciót, feltételezhetjük, hogy (1) be van bizonyítva D': $D' \sim z+lx_0$ esetére. Akkor $D \sim y+z+lx_0$. Ha találunk olyan x pontot, hogy

$$y+z \sim x+x_0, \tag{2}$$

akkor innen már következik (1).

Legyen először $y \neq z$. Húzzunk egy $L=0$ egyenletű egyenest ezeken a pontokon. Bèzout tétele szerint $(L, X)=3$, és így

$$(3) \qquad (L) = y+z+u, \quad u \in X.$$

Azonkívül feltételezzük, hogy $u \neq x_0$, és az u és u_0 pontokon keresztül húzunk egy $L_1=0$ egyenletű egyenest. A (3)-hoz hasonlóan azt kapjuk, hogy $(L_1)=u+x_0+x$. Mivel $(L) \sim (L_1)$, így $y+z+u \sim u+x+x_0$, ahonnan (2) következik.

Meg kell még vizsgálni azokat az eseteket, amikor $y=z$, vagy $u=x_0$. Ha $y=z$, akkor húzunk egy érintőt X-hez az y pontban. Legyen $L=0$ annak az egyenlete. A 2. pont lemmája szerint $v_y((L)) \geqq 2$, és ezért $(L)=2y+u$. Ilyen módon (3) igaz ebben az esetben is. Analóg módon vizsgálható meg az $u=x_0$ eset.

Legyen most $\deg D=0$. Akkor $D=D_1-D_2$, $D_1 \geqq 0$, $D_2 \geqq 0$, $\deg D_1 = \deg D_2$. Alkalmazva (1)-et a D_1 és D_2-höz, azt kapjuk, hogy $D_1 \sim y+kx_0$, $D_2 \sim z+kx_0$ ugyanazzal a k-val, mivel $\deg D_1 = \deg D_2$. Ezért $D=D_1-D_2 \sim y-z$ és elegendő egy olyan x pontot találnunk, hogy $y-z \sim x-x_0$. Ez ekvivalens azzal, hogy $y+x_0 \sim z+x$ és egybeesik (2)-vel a jelölések erejéig.

4. *A divizor dimenziója*

Az 1. § 5. pontban a D divizornak egy sima sokaságon megfeleltettünk egy $\mathcal{L}(D)$ vektorteret.

6. TÉTEL. *Az $\mathcal{L}(D)$ tér véges dimenziójú bármely D divizor esetén a projektív sima algebrai görbén.*

Legelőször is könnyű a tétel állítását visszavezetni a $D \geqq 0$ esetre. Valóban, legyen $D=D_1-D_2$, $D_1 \geqq 0$, $D_2 \geqq 0$. Akkor $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D_1)$, ugyanis ha $f \in \mathcal{L}(D)$, akkor $f+D_1+D_2=D' \geqq 0$, és így $(f)+D_1=D'+D_2 \geqq 0$, azaz $f \in \mathcal{L}(D_1)$. Innen már adódik a kívánt redukció.

Legyen $D \geqq 0$, $D=\sum_{i=1}^{r} n_i x_i$, $n_i \geqq 0$. Kiválasztjuk az x_i pontokan a t_i lokális paramétereket. Az $(f) \in \mathcal{L}(D)$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $v_{x_i}(f) \geqq -n_i$ $(i=1, \ldots, r)$ $v_x(f) \geqq 0$ az $x \neq x_i$ mellett, azaz $f \in t_i^{-n_i} O_{x_i}$ $(i=1, \ldots, r)$, $f \in O_x$ az $x \neq x_i$ esetén.

Ezért tekinthetjük a $\varphi\colon \mathcal{L}(D) \to \bigoplus_{i=1}^{r} t_i^{-n_i} O_{x_i} | O_{x_i}$ lineáris leképezést, amely szerint $f \in \mathcal{L}(D)$ függvénynek megfelelnek annak összes maradékosztályai a $t_i^{-n_i} O_{x_i} / O_{x_i}$ terekben. Ha $\varphi(f)=0$, akkor $f \in O_{x_i}$ $(i=1, \ldots, r)$, mivel pedig $f \in \mathcal{L}(D)$, ezért $f \in O_x$, ha $x \neq x_i$. Így az f függvény reguláris az összes $x \in X$ pontban. Mivel az X görbe projektív, így az ilyen függvénynek konstansnak kell lennie. Ilyen módon a φ leképezés magja egybeesik k-val, azaz egydimenziós. Hogy bebizonyítsuk az $\mathcal{L}(D)$ véges dimenziós voltát, meg kell még mutatnunk, hogy $\bigoplus t_i^{-n_i} O_{x_i} / O_{x_i}$ tér véges dimenziós. Nyilvánvaló, hogy $t_i^{n_i}$-vel való szorzás egy $t_i^{-n_i} O_{x_i} / O_{x_i} \simeq O_{x_i} / t_i^{n_i} O_{x_i}$ izomorfizmust határoz meg, a 2. tétel bizonyítása során viszont láttuk, hogy a $O_{x_i} / t_i^{n_i} O_{x_i}$ térnek véges n_i dimenziója van. Ilyen módon a $\bigoplus t_i^{-n_i} O_{x_i} / O_{x_i}$ tér végesdimenziós terek direkt összege, tehát véges dimenziójú.

A bizonyítás közben egyúttal a $\dim \mathcal{L}(D) \leqq \deg D+1$ értékelést is kaptuk a $D \geqq 0$-ra.

Feladatok

1. Legyen X sima affin görbe, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Bizonyítsuk be, hogy a t_i függvények gyanánt a 2. tételben választhatók az E_i olyan hiperfelületek bal oldalai, ahol $E_i \ni x_i$, $E_i \not\ni x_j$ az $i \neq j$-re és $E_i \not\supset \Theta_{x_i, X}$ (azaz nem érinti X-et az x_i pontban).

2. Bizonyítsuk be, hogy ha az X görbe nem racionális, akkor a 6. tétel $l(D) \leqq \deg D+1$ közelítés finomítható $l(D) \leqq \deg D$-ig tetszőleges $D \geqq 0$-ra.

3. Legyen X az $y^2 = x^3+Ax+B$ affin görbe projektív lezártja, ahol az x^3+Ax+B polinomnak nincs többszörös gyöke, a k test karakterisztikája pedig nem 2. Bizonyítsuk be, hogy X sima görbe és annak metszete a végtelen távoli egyenessel egy x_0 pontból áll. Keressük meg a lokális paramétert az x_0 pontban és a $v_{x_0}(x)$, $v_{x_0}(y)$ számokat.

4. A 3. feladat feltételei mellett keressük meg az $\mathscr{L}(kx_0)$ függvényeinek általános alakját. Speciálisan bizonyítsuk be, hogy $l(kx_0)=k$. Használjuk fel azt a tényt, hogy bármely $f \in k(X)$ függvény felírható $P(x)+Q(x)y$, $P, Q \in k[X]$ alakban, és tisztázzuk, mikor teljesül $f \in \mathscr{L}(kx_0)$.

5. A 3. feladat feltételei mellett határozzuk meg, hogyan fejezhető ki a Cl^0-beli osztályok összeadása a nekik az 5. tétel szerint megfelelő pontok nyelvén. Pontosabban, ha $x_1, x_2 \in X$, $C_{x_3} = C_{x_1} + X_{x_2}$, meghatározandó, hogyan fejezhetők ki az x_3 pont koordinátái az x_1 és x_2 pont koordinátáival. x_0-ként egy végtelen távoli pontot vettünk az X-en.

6. A 4. feladat jelölései mellett bizonyítsuk be, hogy $C_{x_1}+C_{x_2}+C_{x_3}=0$ akkor és csakis akkor, ha az x_1, x_2 és x_3 pontok egy egyenesre esnek.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $x=(\alpha, \beta)$, $-C_x = C_y$, akkor $y=(\alpha, -\beta)$. Bizonyítsuk be, hogy a Cl^0 csoportnak pontosan négy másodrendű eleme van. Határozzuk meg a nekik megfelelő pontokat X-en.

8. Egy X sík görbe valamely $x \in X$ egyszerű pontját inflexiós pontnak nevezzük, ha $v_x\big((\Theta_{x, X})\big) \geqq 3$. Bizonyítsuk be, hogy a 3, 4, 5 feladatok feltételei mellett egy x pont akkor és csakis akkor inflexiós pont, ha $3C_x=0$.

9. Bizonyítsuk be, hogy a 3—7. feladatok X görbéje két inflexiós pontján átmenő egyenes X-et egy harmadik inflexiós pontban metszik.

3. §. Algebrai csoportok

Az előbbi paragrafusok eredményei elvezetnek az algebrai geometria érdekes területére, az algebrai csoportok elméletéhez. Mi nem fogunk elmélyedni ebben az irányban, viszont, hogy az olvasónak valamelyes képet adhassunk erről, ebben a paragrafusban ismertetünk néhány alapvető eredményt, elhagyva a bizonyítások nagyobb részét.

1. *Pontok összeadása sík harmadrendű görbén*

A 2. § 5. tétele kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a sima projektív sík harmadrendű X görbe pontjai és a $Cl^0(X)$ csoport elemei között. Eközben az $x \in Y$ pontnak az $x - x_0$ divizort tartalmazó C_x osztály felel meg, ahol x_0 egy rögzített pont, amely a megfeleltetés meghatározására szolgál.

Ennek felhasználásával a csoport műveletet átvihetjük a $Cl^0(X)$ csoportról magára az X halmazra. Az X görbe pontjai között így keletkező műveletet összeadásnak fogjuk nevezni és $\oplus$ jellel jelöljük. Definíció szerint $x \oplus y = z$, ha $C_x + C_y = C_z$, azaz

$$x + y \sim z + x_0. \tag{1}$$

Közben, nyilvánvalóan, az x_0 pont a nulla. A következőkben ezt 0-val fogjuk jelölni, úgy hogy (1) átírható

$$x + y \sim (x \oplus y) + 0. \tag{2}$$

alakra.

A 2. § 5. tétel bizonyítása lehetővé teszi a $\oplus$ művelet és a $\ominus$ inverzképzés műveletének elemi geometriai nyelven való leírását. Mégpedig, ha az X-hez a 0 pontban húzott görbe X-et egy p pontban metszi, a p és x-en átmenő egyenes pedig X-et az x' pontban, akkor

$$2o + p \sim p + x + x', \quad x + x' \sim 2o, \tag{3}$$

ez pedig azt jelenti, hogy $x' = \ominus x$ (5. ábra). Eközben ha $x = p$, akkor az x ponton keresztül az egyenes húzása helyett érintőt kell húzni a p ponton keresztül.

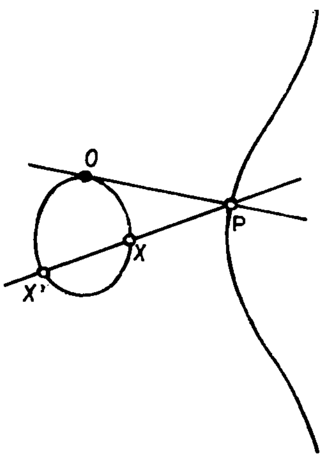
Analóg módon a $\oplus$ művelet leírása céljából egyenest húzunk az x és y pontokon keresztül. Legyen z' annak harmadik metszés pontja az X-szel, a z pedig az X-nek a z' és 0 pontokon átmenő egyenessel való harmadik metszéspontja. Akkor

$$\left.\begin{aligned} & x + y + z' \sim z' + z + 0, \\ & x + y \sim z + 0, \\ & z = x \oplus y \quad \text{(6. ábra)}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

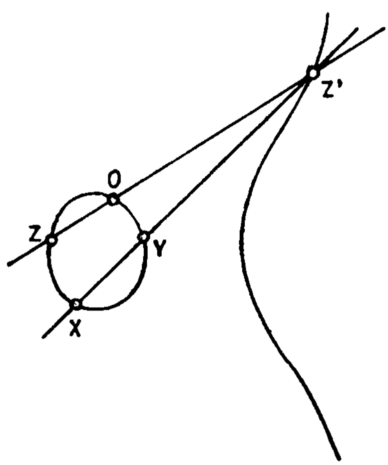
Ha $x = y$ (vagy $z' = 0$), az x és y-on átmenő szelő húzása helyett érintőt kell húzni az x (vagy z') pontban.

Most bebizonyítjuk az általunk X-en definiált csoportművelet egy fontos „algebrai" tulajdonságát.

A következő pontban ez fogja képezni az algebrai csoport definíciójának az alapját.



5. ábra



6. ábra

1. TÉTEL. *A $\varphi: X \to X$, $\varphi(x) = \ominus x$ és $\psi: X \times X \to X$, $\psi(x, y) = x \oplus y$ leképezések regulárisak.*

LEMMA. *Legyen $a \in X$ és $s_a: X \to X$ olyan leképezés, amely az x pontnak egy L egyenes és az X harmadik metszéspontját felelteti meg, ahol L az x és a pontokon átmenő egyenes, ha $x \neq a$ és az a ponton áthaladó érintő, ha $x = a$. Az s_a leképezés reguláris.*

Először megmutatjuk, hogy az s_a leképezés reguláris az összes $x \neq a$ pontban. Ebből a célból kiválasztjuk a koordinátarendszert úgy, hogy az a pont legyen az origó, az x és a pontokon átmenő L egyenesnek az X-szel való harmadik metszéspontja pedig a sík véges részére essen. Utóbbi feltétel — amint azt könnyű belátni — azt jelenti, hogy ha $x = (\xi, \eta)$ és $f(u, v) = f_3(u, v) + f_2(u, v) + f_1(u, v)$ az X egyenlete, akkor $f_3(\xi, \eta) \neq 0$. Az L egyenlete $u = t\xi$, $v = t\eta$ alakú. Behelyettesítve ezt az X egyenletébe, az $t^3 f_3(\xi, \eta) + t^2 f_2(\xi, \eta) + t f_1(\xi, \eta) = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek ismert két gyöke: a $t = 0$ és $t = 1$, amelyek az a és x metszéspontoknak felelnek meg. Ezért a harmadik metszéspontnak megfelelő t érték az $1 + t = -\dfrac{f_2}{f_1}$ összefüggésből adódik. Azt látjuk, hogy

$$s_a(x) = \left(-\frac{f_3(\xi, \eta) + f_2(\xi, \eta)}{f_3(\xi, \eta)}\xi, \ -\frac{f_3(\xi, \eta) + f_2(\xi, \eta)}{f_3(\xi, \eta)}\eta\right).$$

Mivel $f_3(\xi, \eta) \neq 0$, így ez be is bizonyítja az s_a leképezés regularitását $x \neq a$-ra.

Hogy ezt bebizonyítsuk $x = a$-ra is, megjegyezzük, hogy sima projektív görbének önmagába való racionális leképezése reguláris. Ezért létezik olyan $\tilde{s}_a$ reguláris leképezés, amely egybeesik s_a-val $x \neq a$ esetén. Mivel $s_a^2 = 1$, így s_a és $\tilde{s}_a$ kölcsönösen egyértelműek. Viszont mivel azok egybeesnek minden pontban, kivéve talán egyet, ezért azoknak egybe kell esniük ebben a pontban is. Tehát $s_a = \tilde{s}_a$, ez pedig pont azt jelenti, hogy s_a reguláris.

Az 1. tétel bizonyítása. A φ leképezésről szóló állítás közvetlenül kijön a lemmából, mivel (3)-nak megfelelően $\varphi = s_p$. A $\psi(x, y)$ leképezés $x \neq y$ mellett az x és y pontokon átmenő szelő meghúzásánál. Könnyű belátni, hogy a ψ leképezés racionális. Tetszőleges $a \in X$ pont esetén a t_a, $t_a(x) = a \oplus x$ leképezés reguláris, mivel a (4) szerint $t_a = s_0 \cdot s_a$. Nyilvánvalóan igaz a

$$\psi(x, y) = t_{a \oplus b}^{-}\psi\big(t_a(x), t_b(y)\big)$$

összefüggés tetszőleges $a, b \in X$-re. Ezért, ha a ψ leképezés reguláris az x_0, y_0 pontban, akkor az reguláris a $\big(t_a(x_0), t_b(y_0)\big)$ pontban is. Viszont az reguláris valamilyen pontokban, mivel racionális. Innen következik, hogy mindenütt reguláris.

2. *Algebrai csoportok*

A sík harmadrendű görbék az egyik legfontosabb példái annak az általános fogalomnak, amelyet most vezetünk be.

Algebrai csoportnak nevezünk egy G algebrai sokaságot, ha az egyúttal csoport, amelyben teljesülnek a következő feltételek: a $\varphi: G \to G$, $\varphi(g) = g^{-1}$ és $\psi: G \times G \to G$, $\psi(g_1, g_2) = g_1 g_2$ leképezések regulárisak. (g^{-1} és $g_1 \cdot g_2$ inverz elem, illetve szorzat a G csoportban.)

Példák algebrai csoportokra

1. PÉLDA. Sík harmadrendű görbe a $\oplus$ csoportművelettel. Azt, hogy az algebrai csoport definíciójának a feltételei teljesülnek, garantálja az 1. tétel.

2. PÉLDA. Az A^1 affin egyenes, amelyen a csoportműveletet a pontok koordinátáinak az összeadásával definiáljuk. Ezt a csoportot additívnak nevezzük.

3. PÉLDA. Az A^1-0 sokaság, ahol 0 a nullapont. A csoportműveletet a koordináták szorzásával adjuk meg. Ezt a csoportot multiplikatívnak nevezzük.

4. PÉLDA. Az n-edrendű kvadratikus mátrixok A^{n^2} terében a nem elfajuló mátrixok nyílt halmaza a szokásos szorzásra nézve. Ezt a csoportot teljes lineáris csoportnak nevezzük.

5. PÉLDA. Az A^{n^2} térben az ortogonális mátrixok zárt halmaza. A szorzás természetesen ugyanaz, mint a 4. példában.

Megmutatjuk a legegyszerűbb példán, hogyan hat a G sokaság geometriájára az a tény, hogy G algebrai csoport.

2. TÉTEL. Algebrai csoport sokasága sima.

Az algebrai csoport definíciójából következik, hogy tetszőleges $h \in G$-re a

$$t_h : G \to G, \quad t_h(g) = hg$$

leképezés a G sokaság automorfizmusa.

Mivel $t_h(g_1)=g_2$ bármely $g_1, g_2 \in G$ esetén $h=g_2 \cdot g_1^{-1}$ mellett, a pont singularitásának tulajdonsága pedig invariáns az automorfizmussal szemben, így, ha legalább egy pont a G-ben singuláris, akkor az összes pont singuláris. Ez viszont ellentmond annak, hogy bármely algebrai sokaságban a singuláris pontok zárt saját részsokaságot alkotnak. Ezért a G-nek nem lehetnek singuláris pontjai.

3. *Faktor-csoportok. Chevalley tétele*

Ez a pont néhány alapvető tétel megfogalmazását tartalmazza az algebrai csoportok elméletéből. Ezen tételek bizonyításait nem fogjuk adni.

Egy G algebrai csoport *részcsoportjának* a G csoport olyan részcsoportját nevezzük, amely zárt részhalmaz G-ben.

Egy $H \subset G$ részcsoportot *normálosztónak* nevezünk, éppúgy, mint az absztrakt csoportok elméletében, ha $g^{-1}Hg=H$ minden $g \in G$ esetén. Végül algebrai csoportok $\varphi: G_1 \to G_2$ *homomorfizmusának* nevezzük azt a reguláris leképezést, amely az absztrakt csoportok homomorfizmusa.

Adott N normálosztó szerinti faktorcsoport konstruálásának problémája nagyon finom. A nehézség természetesen abban áll, hogy hogyan alakítsuk át a G/N halmazt algebrai sokasággá.

Á. TÉTEL. *Egy absztrakt G/N csoport algebrai csoporttá alakítható úgy, hogy teljesülnek a következő feltételek:*

1. A $\varphi: G \to G/N$ természetesen leképezés az algebrai csoportok homomorfizmusa lesz.

2. Az algebrai csoportok bármely olyan $\psi: G \to G_1$ homomorfizmusára, amelynek magja tartalmazza N-t, létezik olyan $f: G/N \to G_1$ homomorfizmus, hogy $\psi = f \cdot \varphi$.

Nyilvánvaló, hogy a G/N algebrai csoportot egyértelműen meghatározzák a 2. és 3. feltételek. Ezt a *G-nek N-szerinti faktor-csoportjának* nevezzük.

Egy G algebrai csoportot *affinnak* nevezünk, ha a G algebrai sokaság affin, és *Abel-féle sokaságnak*, ha a G algebrai sokaság projektív és irreducibilis.

B. TÉTEL. *Egy affin algebrai csoport izomorf a teljes lineáris csoport* (2. pont 4. példa) *részcsoportjával.*

Nyilvánvaló, hogy a teljes lineáris csoport, tehát annak minden részcsoportja is, affin.

C. TÉTEL. *(Chevalley tétele). Bármely G algebrai csoportnak létezik olyan N normálosztója, hogy N affin csoport, a G/N pedig Abel-féle sokaság. Ezzel a tulajdonsággal N egyértelműen meg van határozva.*

4. *Abel-féle sokaságok*

Egy G algebrai csoport sokaságának projektivitási feltétele, amely az *Abel*-féle sokaságot definiálja, meglepően sok információt tartalmaz. Belőle igen sok meglepő tulajdonsága következik az *Abel*-féle sokaságoknak. A legegyszerűbbeket ezek közül itt most ki fogjuk fejteni, ugyanis azok bizonyításához csak egyszerű, még az I. fejezetben bizonyított tételekre van szükség.

Szükségünk lesz a tetszőleges projektív sokaságoknak egy tulajdonságára. Az X sokaság Z-be való leképezései családjának nevezzük az $f: X \times Y \to Z$ leképezést, ahol Y valamely algebrai sokaság, amelyet a család bázisának nevezünk. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $y \in Y$-ra van $f_y(x) = f(x, y)$ leképezésünk, ami indokolja terminológiánkat.

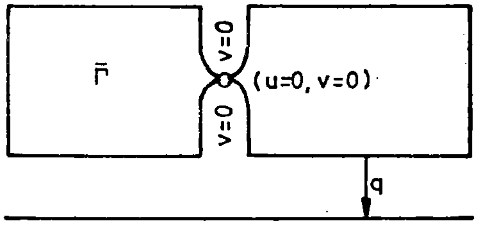
LEMMA. *Ha az X és Y sokaságok irreducibilisek, az X pedig projektív és az Y-bázisú Z-be való leképezések f családja és valamely $y_0 \in Y$ pont esetén $f(X \times y_0)$ egyetlen $z_0 \in Z$ pont, akkor bármely $y \in Y$ pontra is az $f(X \times y)$ egyetlen pont.*

Bizonyítás. Tekintsük az f leképezés Γ grafikonját. Nyilvánvaló, hogy $\Gamma \subset X \times Y \times Z$ és Γ izomorf az $X \times Y$-nal. Jelöljük p-vel az $X \times Y \times Z \to Y \times Z$ projekciót és $\bar{\Gamma}$-val a $p(\Gamma)$ halmazt. Mivel X projektív, így $\bar{\Gamma}$ zárt az I. fejezet 5. § 3. tétel miatt. Jelöljük q-val azt a $\bar{\Gamma} \to Y$ leképezést, amelyet az $Y \times Z \to Y$ projekció határoz meg. A q leképezés y pont feletti rétege nyilván $(y, f(x, y))$ alakú, és így nem üres, úgy hogy $q(\bar{\Gamma}) = Y$. Másrészt, feltétel szerint, az $y = y_0$-ra a réteg egy pontból, az (y_0, z_0)-ból áll. Alkalmazva az I. fejezet 5. § 7. tételt, látjuk, hogy az összes réteg 0-dimenziós és $\dim \bar{\Gamma} = \dim Y$.

Kiválasztunk egy tetszőleges $x_0 \in X$ pontot. Nyilvánvalóan $\bar{\Gamma} \supset \{(y, f(x_0, y)),\ y \in Y\}$, utóbbi sokaság pedig izomorf Y-nal. Mivel mindkét sokaság irreducibilis és dimenziójuk azonos, így azok egybeesnek, ami pedig azt jelenti, hogy

$$f(X, y) = f(x_0, y).$$

MEGJEGYZÉS. Az X sokaság projektív voltának feltételezése nélkül a lemma nem igaz, amint azt az $f: A^1 \times A^1 \to A^1$, $f(x, y) = xy$ leképezés példája mutatja. Ennek oka abban áll, hogy a $\bar{\Gamma}$ halmaz nem lesz zárt, ezért arra nem alkalmazható az I. fejezet 6. § 7. tétele. A mi példánkban $\bar{\Gamma} \subset A^1 \times A^1 = A^2$ és az összes (u, v) pontokból áll, az $u=0$, $v \neq 0$-nak eleget tevő pontok nélkül. Ez egy sík, amelyből ki van dobva az $u=0$ egyenes, de megmarad az $u=0$, $v=0$ pont. A $q: (u, v) \to u$ projekcióra valóban nem igaz az I. fejezet 6. § 7. tétel, ugyanis az $u=0$ pont feletti réteg dimenziója egyenlő 0-val, a kép dimenziója 1, a leképezendő sokaság dimenziója pedig 2 (7. ábra).



7. ábra

3. TÉTEL. *Az Abel-féle sokaság kommutatív.*

Tekintsük G-nek G-be való leképezéseinek G bázisú családját: $f: G \times G \to G$, $f(g, g') = g^{-1} g' g$. Nyilvánvaló, hogy $f(g, e) = e$, és így, a lemma szerint, $f(G, g')$ egy pontból áll. Ezért $f(g, g') = f(e, g') = g'$, ami éppen azt jelenti, hogy G kommutatív.

4. TÉTEL. *Ha $\psi: G \to H$ a G Abel-féle sokaságnak algebrai csoportba való reguláris leképezése, akkor $\psi(g) = \psi(e)\varphi(g)$, ahol $e \in G$ egységelem, a $\varphi: G \to H$ pedig homomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi(g) = \psi(e)^{-1}\psi(g)$ és bebizonyítjuk, hogy φ homomorfizmus. Ennek érdekében tekintjük a G sokaság H-ba való leképezésének azt az $f: G \times G \to H$, $f(g', g) = \varphi(g')\varphi(g)\varphi(g'g)^{-1}$ családját, amelynek bázisa egybeesik G-vel. Mivel a $\varphi(e) = e'$ a H csoport egységeleme, így $f(g', g) = f(e, g) = e'$, ami pedig éppen azt jelenti, hogy φ homomorfizmus.

5. *Picar-féle sokaság*

Egyetlen példák *Abel*-féle sokaságokra, amelyekkel eddig találkoztunk, a sík harmadrendű görbék. Definiáltunk ezeken csoportműveletet, kiindulva divizoraik osztályainak csoportjából. Ez a példa tipikus sokkal általánosabb szituáció esetén is. Egy tetszőleges sima projektív X sokaságból kiindulva, konstruálni lehet egy *Abel*-féle sokaságot, amely pontjainak csoportja a $Cl(X)$ csoport (a $Cl^0(X)$ csoport harmadrendű görbe esetén) valamely részcsoportjával izomorf. Ismertetjük ezt a definíciót, elengedve az összes általunk tekintett állítás bizonyítását.

Célunk a divizorok vizsgálata sima sokaságokon, de a közbeeső vizsgálatokban elő fognak fordulni divizorok tetszőleges sokaságokon. Ilyen esetben divizorokon csak lokális fődivizorokat fogunk érteni.

Most egy új ekvivalencia relációt fogunk definiálni a divizorok között, az algebrai ekvivalenciát. Ez durvább annál az ekvivalenciánál (azaz következik belőle), amelyet korábban tekintettünk.

Legyen X és T két tetszőleges irreducibilis sokaság. Tetszőleges $t \in T$ pont esetén a $j_t: x \to x \times t$ leképezés az X-nek $X \times T$-be való beágyazását határozza meg. Minden olyan C divizor az $X \times T$-n, amelyre Supp $C \not\supset X \times t$, meghatároz egy $j_t^*(C)$ divizort az X-en. Azt fogjuk mondani ebben az esetben, hogy $j_t^*(C)$ divizor definiálva van.

Az X-en vett T bázisú divizor családnak fogunk nevezni bármely $f\colon T \to \mathrm{Div}\, X$ leképezést. Az f családot algebrainak fogjuk nevezni, ha létezik olyan $C \in \mathrm{Div}\,(X \times T)$ divizor, hogy a $j_t^*(C)$ divizor definiálva van minden $t \in T$-re és $j_t^*(C) = f(t)$.

Az X-en értelmezett két D_1 és D_2 divizort *algebrailag ekvivalensnek* fogjuk nevezni, ha létezik az X-en olyan T bázisú f algebrai divizor család és olyan két $t_1, t_2 \in T$ pont, hogy $f(t_1) = D_1, f(t_2) = D_2$. Ezt a relációt $D_1 \approx D_2$ módon jelöljük. Ilyen módon a divizorok algebrai ekvivalenciája lehetőséget jelent „algebrailag deformálni" azokat egymásba. Nyilvánvaló, hogy az algebrai ekvivalencia reflexív és szimmetrikus. Könnyű bebizonyítani, hogy tanzitív is. Ha a D_1 és D_2 divizorok ekvivalenciája a C divizorral realizálódik $X \times T$-n, a D_2 és D_3-é pedig a C' divizorral az $X \times T'$-n, akkor, hogy a D_1 és D_3 ekvivalenciáját bebizonyítsuk, tekinteni kell a $(C \times T') + (C' \times T)$ divizort a $X \times T \times T'$-n. A részletes ellenőrzést az olvasóra bízzuk. Végül könnyű belátni, hogy az algebrai ekvivalencia összhangban áll a Div X csoportbeli összeadással: azok a D divizorok, melyekre $D \approx 0$, részcsoportot alkotnak. Jelölni fogjuk ezt $\mathrm{Div}^a\,(X)$-szel.

A divizorok ekvivalenciájából következik azok algebrai ekvivalenciája. Elegendő ezt ellenőrizni a 0-val ekvivalens divizorra. Legyen $D \in \mathrm{Div}\, X$, $D \approx 0$, azaz $D = (g)$, $g \in k(X)$. Tekintsük a $T = A^2 - (0, 0)$ sokaságot és jelöljük u és v-vel az A^2-beli koordinátákat. A g, u és v-t függvényeknek fogjuk tekinteni az $X \times T$-n, azt értve ezalatt, mint szokásos, hogy $p^*(g)$, $q^*(u)$ és $g^*(v)$, ahol $p\colon X \times T \to X$ és $q\colon X \times T \to T$ projekciók. Legyen $C = (u + vg)$ és tekintsük a C divizorral definiált algebrai családot az $X \times T$-n. Könnyű ellenőrizni, hogy $f(1, 0) = 0$ (nulla divizor), $f(0, 1) = D$, és így, $D \approx 0$.

Végül megvizsgáljuk az algebrai ekvivalencia fogalmát a sima projektív X görbe példáján. Tetszőleges két $x, y \in X$ pontra $x \approx y$. Ebből a célból elegendő tekinteni azt az f divizorcsaládot, amely magával az X görbével van parametrizálva és amely az $X \times X$-beli diagonálissal van meghatározva. Könnyű ellenőrizni, hogy $f(x) = x$ minden $x \in X$-re. Ezért tetszőleges $D = \sum n_i x_i$ divizorra és bármely $x_0 \in X$ pontra $D \approx (\sum n_i) x_0$, azaz két azonos fokszámú divizor algebrailag ekvivalens.

Kissé nehezebb bebizonyítani a fordított állítást: algebrailag ekvivalans divizorok sima projektív görbén azonos fokszámmal rendelkeznek. Nem fogjuk a bizonyítást itt ismertetni. Ilyen módon a sima projektív X görbén értelmezett divizorok esetén a divizorok algebrai ekvivalenciája egyenértékű fokszámuk egyenlőségével. Ezért $\mathrm{Div}\, X / \mathrm{Div}^a\,(X) = Cl(X)/Cl^\circ(X) = Z$. Ennek általánosítása a következő tétel, amelyet SEVERRI (0 karakterisztikájú testekre) és NERON (általános esetre) bizonyították.

D. TÉTEL. *Sima projektív X sokaság esetén a* $\mathrm{Div}\, X/\mathrm{Div}^a(X)$ *csoport végesen generált.*

Meg lehet mutatni, hogy az $X = \Pi\, P^{n_i}$ esetén az algebrai ekvivalencia egybeesik a divizorok ekvivalenciájával. Ez a példa megmutatja, hogy a $\mathrm{Div}\, X/\mathrm{Div}^a(X)$ csoport komplikáltabb lehet Z-nél.

Sík harmadrendű X görbe esetén a $Cl^\circ(X) = \mathrm{Div}^a\,(X)/P(X)$ csoport egydimenziós *Abel*-féle sokaság. Ennek analógiájára tetszőleges projektív sima sokasághoz létezik G *Abel*-féle sokaság, amely pontjainak csoportja izomorf a $\mathrm{Div}^a\,(X)/P(X)$ csoporttal és amely a következő tulajdonsággal rendelkezik.

Az X-en értelmezett T bázisú f algebrai divizor család esetén létezik olyan $\varphi\colon T \to G$ reguláris leképezés, hogy $f(t) - f(t_0) \in \varphi(t)$, ahol t_0 a T valamely rögzített pontja (G-t azonosítjuk a $\mathrm{Div}^a(X)/P(X)$-vel, és ezért $\varphi(t)$-t divizor osztálynak tekintjük).

Az *Abel*-féle G sokaság egyértelműen meg van határozva ezzel a tulajdonsággal. Ezt az X sokaság *Picar*-féle sokaságának nevezzük.

Sima projektív algebrai X görbe *Picar*-féle sokaságát úgyszintén a görbe *Jacobi*-féle sokaságának nevezzük. Ennek dimenziója az X fajával egyenlő.

4. §. Differenciál formák

1. *Egydimenziós reguláris differenciál formák*

A II. fejezetben bevezettük az X algebrai sokaság x pontjában reguláris f függvény $d_x f$ differenciáljának a fogalmát. Definíció szerint $d_x f$ egy lineáris forma az x pont Θ_x érintő terén, azaz $d_x f \in \Theta_x^*$. Most meg fogjuk vizsgálni ennek a fogalomnak az x ponttól való függését.

Ha az f függvény rögzített és reguláris az egész X-en, akkor a $d_x f$ annak az x-től való függvényében egy olyan objektum típus, amellyel eddig még nem találkoztunk: ez egy megfeleltetés minden $x \in X$ ponthoz az ezen pontban vett érintő tér Θ_x^* duális terében egy vektornak. A következőkben ehhez analóg természetű objektumokkal lesz állandóan dolgunk. A következő magyarázat talán segít. A lineáris algebrában találkozunk konstansokkal, de más mennyiségekkel is, mint vektorokkal, lineáris formákkal és tetszőleges tenzorokkal. Geometriában a konstansok analógja a függvény (amelynek értékei konstansok). A vektorok, lineáris formák stb. analógjai az olyan „függvények”, amelyek az algebrai (vagy differenciálható) X sokaság minden x pontjának vektort, lineáris formát stb. feleltetnek meg ezen x pont Θ_x érintő terében.

Tekintsük az összes lehetséges olyan φ leképezések $\Phi[X]$ halmazát, amelyek tetszőleges $x \in X$ pontnak megfeleltetnek egy $\varphi(x)$ vektort, a Θ_x^* térben: Ez, természetesen túlságosan nagy halmaz, ugyanúgy, mint az X-en értelmezett k-beli értékű összes függvények halmaza túlságosan nagy ahhoz, hogy érdekes legyen. Ahhoz hasonlóan, ahogyan az összes függvények közül kiemeltük a regulárisokat, a $\Phi[X]$ halmazban is kiemeljük azt a részt, amely szorosabb kapcsolatban van a sokaság struktúrájával. Evégből megjegyezzük, hogy a $\Phi[X]$ *Abel*-féle csoport, ha bevezetjük a $(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ műveletet. Azonkívül $\Phi[X]$ egy modulus lesz az X-en értelmezett k-beli értékű függvények gyűrűje felett, ha az X-en értelmezett f függvényre és a $\varphi \in \Phi[X]$-re bevezetjük az $(f \cdot \varphi)(x)=f(x) \cdot \varphi(x)$ műveletet. Speciálisan, $\Phi[X]$-et tekinthetjük az X-en értelmezett összes reguláris függvények $k[X]$ gyűrűje feletti modulusnak.

Amint láttuk, tetszőleges X-en értelmezett reguláris függvény meghatározza a $d_x f \in \Phi[X]$ differenciált.

Ezért tetszőleges $f \in k[X]$ függvény meghatároz egy $\varphi \in \Phi[X]$ függvényt: $\varphi(x)=d_x f$. Jelöljük ezt a függvényt df-fel.

DEFINÍCIÓ. Egy $\varphi \in \Phi[X]$ elemet az *X-en reguláris differenciál formának* nevezzük, ha tetszőleges $x \in X$ pontnak van olyan U környezete, hogy a φ-nek U-ra való szűkítése benne van a $\Phi[U]$ modulus olyan részmodulusában, amelyet a $k[U]$ gyűrű felett a df, $f \in k[U]$ elemek generálnak.

Nyilvánvaló, hogy az összes X-en reguláris differenciál formák $k[X]$ feletti modulust alkotnak. Ezt a modulust $\Omega[X]$-szel jelöljük. Ilyen módon, $\varphi \in \Omega[X]$, ha bármely $x \in X$ pont környezetében lehetséges a

$$(1) \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{m} f_i \, dg_i$$

előállítás, ahol $f_1, \ldots, f_m$, $g_1, \ldots, g_m$ regulárisak az x pont környezetében.

A függvény differenciálása meghatározza a $d: k[X] \to \Omega[X]$ leképezést. A II. fejezet 1. § 3. pont 1 tulajdonságai most

$$(2) \qquad d(f+g) = df + dg, \quad d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df.$$

alakot öltenek.

Ezekből a leképezésekből könnyen kapható a következő, bármely $F \in k[T_1, \ldots, T_m]$ polinom és $f_1, \ldots, f_m \in k[X]$ függvényre igaz, azonosság:

$$(3) \qquad d(F(f_1, \ldots, f_m)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial T_i}(f_1, \ldots, f_m) \, df_i.$$

Ennek érdekében a bizonyítást a (2) felhasználásával vissza kell vezetni egytag esetére, majd ismét alkalmazva (2)-t, az egytag fokszáma szerinti indukcióval bizonyítani. Az ellenőrzés részleteit az olvasóra bízzuk.

Miután a (3) összefüggést bebizonyítottuk polinomok esetére, azonnal általánosíthatjuk racionális F függvényekre. Közben szem előtt kell tartani azt, hogy ha egy F függvény reguláris az x pontban, akkor az összes $\dfrac{\partial F}{\partial T_i}$ függvény is reguláris ebben a pontban. Valóban, akkor $F = \dfrac{P}{Q}$, ahol P és Q polinomok, $Q(x) \neq 0$. Ezért

$$\frac{\partial F}{\partial T_i} = Q^{-2} \left(Q \frac{\partial P}{\partial T_i} - P \frac{PQ}{\partial T_i} \right),$$

ahonnan következik is annak regularitása.

1. PÉLDA. $X = A^n$. Mivel tetszőleges $x \in A^n$ pontban a $d_x t_1, \ldots, d_x t_n$ differenciál koordináták a Θ_x^* tér bázisát képezik, így minden $\varphi \in \Phi[A^n]$ elem egyértelműen előáll $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, dt_i$ alakban, ahol ψ_i függvény az A^n-en k-beli értékekkel.

Ha $\varphi \in \Phi[A^n]$, akkor tetszőleges pont környezetében teljesül az (1) felbontás. Alkalmazva f_i-re a (3) összefüggést, a $\varphi = \sum h_i \, dt_i$ felbontást kapjuk, amelyben a h_i-k regulárisak az x pontban. Mivel az ilyen előállítás egyértelmű, így a ψ_i-knek regulárisaknak kell lenni tetszőleges $x \in A^n$ pontban, azaz $\psi_i \in k[A^n]$. Ezért $\Omega[A^n] = \oplus k[A^n] dt_i$.

2. PÉLDA. Legyen $X = P^1$ és t-koordináták az X-en.

Akkor $X = P_0^1 \cup P_1^1$, mégpedig $P_0^1 \cong P_1^1 \cong A^1$. Az 1. példa eredményeinek megfelelően tetszőleges $\varphi \in \Omega[P^1]$ elem előáll $\varphi = P(t) dt$ alakban a P_0^1-en és $\varphi = Q(u) du$ alakban a P_1^1-en, ahol $u \cdot t = 1$. Utóbbi összefüggésből következik, hogy $du = -\dfrac{dt}{t^2}$

és $P_0^1 \cap P_1^1$-ben igaz

$$P(t)\,dt = -\frac{Q\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt, \quad \text{azaz} \quad P(t) = -\frac{Q^*(t)}{t^{n+2}},$$

ha $\deg Q = n$. Közben $Q^*(t) = t^n Q\left(\frac{1}{t}\right)$ és $Q^*(0) \neq 0$.

Polinomok között ilyen összefüggés csak akkor állhat fenn, ha $P=Q=0$. Ezért $\Omega[P^1]=0$.

3. PÉLDA. Legyen X az $x_0^3+x_1^3+x_2^3=0$ egyenlettel megadva.

Jelöljük U_{ij}-vel azt a nyílt halmazt, amelyben $x_i \neq 0$, $x_j \neq 0$. Akkor $X=U_{01} \cup U_{12} \cup U_{20}$. Legyen

$$U_{01}\text{-ben} \quad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad \varphi = \frac{dy}{x^2},$$

$$U_{12}\text{-ben} \quad u = \frac{x_2}{x_1}, \quad v = \frac{x_0}{x_1}, \quad \psi = \frac{dv}{u^2},$$

$$U_{20}\text{-ben} \quad s = \frac{x_0}{x_2}, \quad t = \frac{x_1}{x_2}, \quad \chi = \frac{dt}{s^2}.$$

Nyilvánvaló, hogy $\varphi \in \Omega[U_{01}]$, $\psi \in \Omega[U_{12}]$, $\chi \in \Phi[U_{20}]$. Könnyű ellenőrizni, hogy $\varphi=\psi$ az $U_{01} \cap U_{12}$-ben, $\varphi=\chi$ az $U_{01} \cap U_{20}$-ban és $\psi=\chi$ az $U_{12} \cap U_{20}$-ban. Ezért ezek a képletek egyetlen $\omega \in \Omega[X]$ formát határoznak meg. Ez a példa azért érdekes, mert $\Omega[X] \neq 0$, ugyanakkor X projektív sokaság és azon nincs nem konstans reguláris függvény.

Általános esetben bebizonyítható egy az 1. példában ismertetetthez analóg, de annál gyengébb állítás.

1. TÉTEL. *Az algebrai X sokaság tetszőleges x pontjának létezik olyan $U \ni x$ környezete, hogy $\Omega[U]$ a $k[U]$ felett szabad modulus, amelynek rangja* $\dim_x X$.

Bizonyítás. Legyen $X \subset A^N$ és $F_1, \ldots, F_m$ függvények az X sokaság ideáljának a bázisát képezik. Akkor $F_i=0$ az X-en, és ezért a (3) miatt

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial T_j}\,dt_j = 0. \tag{4}$$

Ha x egyszerű pont és $\dim_x X=n$, akkor $rg\left(\frac{\partial F_i}{\partial T_j}(x)\right)=N-n$. Legyenek például $t_1, \ldots, t_r$ lokális paraméterek az x pontban. Akkor (4)-ből következik, hogy az összes dt_j kifejezhető a $dt_1, \ldots, dt_n$-nel olyan együtthatókkal, amelyek az x pontban reguláris racionális függvények.

Tekintsük az x pontnak azt az U környezetét, amelyben ezek a függvények mind regulárisak. Ebben a $d_y t_1, \ldots, d_y t_n$ a tetszőleges $y \in U$ pontban vett Θ_y bázisát képezik. Legyen $\varphi \in \Phi[X]$. A fent mondottak alapján U-ban létezik

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\,dt_i \tag{5}$$

egyértelmű előállítás, ahol ψ_i az U-n értelmezett k-beli értékű függvények. Az (1) előállításból és a (3) képletből következik, hogy φ a tetszőleges $y \in U$ pont környezetében kifejezhető a $dt_1, \ldots, dt_N$ lineáris kombinációjaként olyan együtthatókkal, amelyek U-ban reguláris függvények. Amint láttuk, $dt_1, \ldots, dt_N$ analóg módon kifejezhető a $dt_1, \ldots, dt_n$ elemekkel. Ezért $\varphi = \sum_{i=1}^{n} g_i dt_i$, ahol a g_i-k regulárisak az y pont környezetében. Az (5) előállítás egyértelműségéből következik, hogy $\psi_i = g_i$ az y pont környezetében, és így $\psi_i \in k[U]$. Látjuk, hogy $\Omega[U] = \sum_{i=1}^{n} k[U] dt_i$. Tételezzük fel, hogy a $dt_1, \ldots, dt_n$ között $\sum_{i=1}^{n} g_i dt_i = 0$ összefüggések állnak fenn, és például $g_n \neq 0$. Akkor abban a nyílt halmazban, ahol $g_n \neq 0$, a $dt_1, \ldots, dt_n$ lineárisan függenek, ami pedig ellentmond annak, hogy a $d_y t_i$-k függetlenek Θ_y^*-ben az összes $y \in U$ esetén. A tételt bebizonyítottuk.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha $u_1, \ldots, u_n$ egy tetszőleges lokális paraméter rendszer az x pontban, akkor az x pont valamely U környezetében a $du_1, \ldots, du_n$ generálják az $\Omega[U]$ modulust.*

Legyen $dt_1, \ldots, dt_n$ az $\Omega[U]$ szabad modulus bázisa az $U \ni x$ környezetben, amely az 1. tétel szerint létezik. Akkor $du_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} dt_j$, mivel pedig az u_i-k lokális paraméterek, így $|g_{ij}(x)| \neq 0$. Ezért abban az U' környezetben, amelyben $|g_{ij}| \neq 0$, a $du_1, \ldots, du_n$ generálja az $\Phi(U)$ modulust.

2. *A differenciál modulus algebrai leírása*

Láttuk az I. fejezetben, hogy az affin sokaságok kategóriája ekvivalens egy speciális típusú gyűrűk kategóriájával. Ezért az affin sokaságok egész elméletére lehet tisztán algebrai szempontból nézni, és speciálisan, megkísérelni a differenciál formák modulusának algebrai értelmét felfogni.

Tekintsünk egy X affin sokaságot, jelöljük A-val a $k[X]$ gyűrűt és Ω-val az $\Omega[X]$ modulust. A differenciálás az A-modulusok $d: A \to M$ homomorfizmusát határozza meg.

1. ÁLLÍTÁS. *Az M modulust A felett a $df, f \in A$ elemek generálják.*

Ez az I. fejezet 3. § 4. tétel analógja és teljes analóg módon bizonyítható. Ha $\omega \in \Omega$, akkor definíció szerint tetszőleges $x \in X$ pont esetén létezik $\omega = \sum f_{i,x} dg_{i,x}$, $f_{i,x}, g_{i,x} \in O_x$ előállítás. Bármely $u \in O_x$ függvényhez létezik $u = \frac{v}{w}$, $v, w \in A$, $w(x) \neq 0$. Felhasználva az ilyen előállítást az $f_{i,x}$ és $g_{i,x}$ esetére, és az összes tört közös nevezőjét véve, olyan p_x függvényt kapunk, hogy $p_x(x) \neq 0$

$$p_x \cdot \omega = \sum r_{i,x} dh_{i,x}, \quad r_{i,x}, h_{i,x} \in A.$$

Mivel $p_x(x) \neq 0$, így léteznek olyan $q_x \in A$ függvények, hogy $\sum p_x q_x = 1$, ahonnan $\omega = \sum q_x r_{i,x} dh_{i,x}$.

Ez bizonyítja az 1. állítást.

Az 1. állítás sugalmazza a gondolatot, hogy adjuk meg az Ω modulus leírását annak dt, $f \in A$ generátorai segítségével. Nyilvánvaló, hogy teljesülnek a következő feltételek

$$(1) \qquad d(f+g) = df+dg, \quad dfg = f\,dg+g\,df, \quad d\alpha = 0 \quad \text{az} \quad \alpha \in k \quad \text{mellett.}$$

2. ÁLLÍTÁS. *Ha X egy sima affin sokaság, $A=k[X]$, akkor az $\Omega[X]$ A-modulust definiálják az* (1) *összefüggések.*

Bizonyítás. Jelöljük R-rel az A gyűrű felett az olyan df elemekkel generált modulust, amelyek kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben vannak az A elemeivel és az (1) összefüggésekkel. Fennál a nyilvánvaló $\xi: R \to \Omega$ homorfizmus, és az 1 állítás megmutatja, hogy ξ-epimorfizmus.

Meg kell még mutatnunk, hogy ξ-nek nincs magja. Legyen $\varphi \in R$ és $\xi\ (\varphi)=0$. Megjegyezzük, hogy az 1. tétel bizonyításában csak az (1) összefüggéseket használtuk fel. Ezért azok a fejtegetések alkalmazhatók az R modulusra is, és megmutatják, hogy tetszőleges $x \in X$ ponthoz létezik olyan $D \in A$ függvény, hogy $D(x) \neq 0$ és $D \cdot \varphi \in \sum g_i\, dt_i$, $g_i \in A$, ahol most a t_i lokális paramétereket az A gyűrű elemeiként választottuk. Ha $\xi(\varphi)=0$, akkor $\sum g_i\, dt_i = 0$ az Ω modulusban, és az 1. tételből következik, hogy az összes $g_i=0$. Ilyen módon $D \cdot \varphi = 0$. Látjuk, hogy tetszőleges x ponthoz létezik olyan $D \in A$ függvény, hogy $D(x) \neq 0$, $D \cdot \varphi = 0$. Ugyanúgy okoskodva, mint az 1. állítás bizonyításánál, azt kapjuk, hogy $\varphi=0$. Az állítást bebizonyítottuk.

Ilyen módon ebben az esetben az $\Omega[X]$ modulus leírható tisztán algebrai úton, kiindulva a $k[X]$ gyűrűből. Ez ösztönöz arra a gondolatra, hogy tetszőleges olyan A gyűrű esetén, amely egy A_0 részgyűrű feletti algebra, tekintsük az analóg modulust. A da generátorokkal és az (1) összefüggésekkel (természetesen, utóbbiban $\alpha \in A_0$) definiált R modulust az A gyűrű A_0 feletti differenciálmodulusának nevezzük.

Ha az X sokaság nem sima, akkor az ilyen tisztán algebrai úton definiált R differenciálmodulus általában nem esik egybe az $\Omega[X]$-szel (l. 9. feladat). Az 1. állítás, amely a nem sima sokaságokra is igaz, megmutatja, hogy az R modulus több információt tartalmaz az X sokaságról, mint az $\Omega[X]$ modulus. Viszont a következőkben főleg sima sokaságokkal lesz dolgunk, és ez a különbség számunkra nem lesz fontos.

3. *Magasabbrendű differenciál formák*

Azok a differenciál formák, amelyeket az 1. pontban vizsgáltunk, minden $x \in X$ pontnak megfeleltették az Θ_x^* tér egy elemét. Most általánosabb differenciál formákat fogunk vizsgálni, amelyek az $x \in X$ pontnak lineáris ferde-szimmetrikus formákat feleltetnek meg a Θ_x téren, azaz a Θ_x^* tér r-edik külső fokú $\Lambda^r \Theta_x^*$ elemét.

A definíció teljesen analóg az előbbi pontban vizsgálttal. Jelöljük $\Phi^r[X]$-szel az $x \in X$ ponthoz az $\Lambda^r \Theta_x^*$ tér elemét hozzárendelő összes megfeleltetések halmazát. Tehát ha $\omega \in \Phi^r[X]$, $x \in X$, akkor $\omega(x) \in \Lambda^r \Theta_x^*$. Speciálisan $\Phi^0[X]$ a tetszőleges $X \to k$ leképezések gyűrűje; $\Phi^1[X]$ az előbbi pontban vizsgált $\Phi[X]$. Ezért az $f \in k[X]$-re $df \in \Phi^1[X]$.

Emlékeztetünk arra, hogy tetszőleges L vektortérre értelmezve van a Λ külső szorzat művelete: ha $\varphi \in \Lambda^r L$, $\psi \in \Lambda^s L$, akkor $\varphi \wedge \psi \in \Lambda^{r+s} L$, ahol a $\varphi \wedge \psi$ disztributív, asszociatív és $\psi \wedge \varphi = (-1)^{r \cdot s} \varphi \wedge \psi$. Ha $e_1, \ldots, e_n$ az L bázisa akkor az $\Lambda^r L$

bázisa az összes $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_r}$, $i_1<\ldots<i_r$ szorzatokból áll. Ezért $\dim \Lambda^r L=\binom{n}{r}$, speciálisan $\dim \Lambda^r L=1$, $\Lambda^r L=0$ az $r>n$ esetén.

Definiáljuk a külső szorzat műveletét az $\Phi^r[X]$ halmazokban, feltételezve az $\omega_r\in\Phi^r[X]$, $\omega_s\in\Phi^s[X]$-re, hogy $\omega=\omega_r\wedge\omega_s$, $\omega(x)=\omega_r(x)\wedge\omega_s(x)$ minden $x\in X$-re. Nyilvánvaló, hogy $\omega\in\Phi^{r+s}[X]$. Ha $r=1, s=0$, akkor az $\Phi^1[X]=\Phi[X]$ elemeinek függvényekkel való szorzásához jutunk. Feltételezve $s=0$ és r-t tetszőlegesnek, azt látjuk, hogy definiálva van $\Phi^r[X]$-nek az X-en értelmezett függvényekkel való szorzása. Speciálisan, az összes $\Phi^r[X]$-ek $k[X]$ gyűrű feletti modulusok.

DEFINÍCIÓ. Egy $\varphi\in\Phi^r[X]$ elemet *r-dimenziós reguláris differenciál formának nevezünk X-en,* ha a tetszőleges $x\in X$ pontnak van olyan U környezete, hogy az U-n a φ benne van a $k[U]$ felett a $df_1\wedge\ldots\wedge df_r$, $f_1,\ldots,f_r\in k[U]$ elemekkel generált $\Phi^r[U]$ modulusban.

Az X-en értelmezett összes r-dimenziós reguláris differenciál forma $k[X]$ felett modulust képez. Ezt a modulust $\Omega^r[X]$-szel jelöljük.

Ilyen módon az $\omega\in\Phi^r[X]$ elem a tetszőleges $x\in X$ pont környezetében felírható

(1) $$\omega = \sum g_{i_1\ldots i_r}\, df_{i_1}\wedge\ldots\wedge df_{i_r}$$

alakban, ahol a $g_{i_1\ldots i_r}, f_{i_1},\ldots,f_{i_r}$-k regulárisak az x pontban.

A külső szorzat definiálva van az $\Omega^r[X]$-ben és nyilvánvaló, hogy az $\omega_r\in\Omega^r[X]$, $\omega_s\in\Omega^s[X]$-re $\omega_r\wedge\omega_s\in\Omega^{r+s}[X]$. Speciálisan, bármely $\Omega^r[X]$ egy modulus a $k[X]$ felett.

Az előbbi pontban vizsgált differenciál formák az új definíció szemszögéből nézve egydimenziós differenciál formák.

Az 1. tételnek létezik analógja az $\Omega^r[X]$ formáira tetszőleges r esetén.

2. TÉTEL. *Az n-dimenziós sokaság tetszőleges pontjának van olyan U környezete, hogy az $\Omega^r[U]$ egy szabad modulus $k[U]$ felett, és rangja* $\binom{n}{r}$.

Bizonyítás. Az 1. tétel bizonyítása során láttuk, hogy az x egyszerű pontnak van olyan U környezete és az U-n reguláris n olyan $u_1,\ldots,u_n$ függvény, hogy a $d_y u_1,\ldots,d_y u_n$ a Θ_y^* bázisát képezi tetszőleges $y\in U$ esetén. Innen következik, hogy bármely $\varphi\in\Phi^r[U]$ elem előáll

$$\varphi = \sum \psi_{i_1\ldots i_r}\, du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}$$

alakban, ahol a $\psi_{i_1\ldots i_r}$ az U-n értelmezett k-beli értékű függvények.

Ha $\varphi\in\Omega^r[U]$, akkor tetszőleges $y\in U$ pont esetén φ előállítható (1) alakban. Alkalmazva a df_i formákra az 1. tételt, azt látjuk, hogy $\psi_{i_1\ldots i_r}$ függvények regulárisak az y pontban. Mivel y az U tetszőleges pontja, így ezek a függvények regulárisak az U-ban. Tehát a $du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r}$, $i_1<\ldots<i_r$ formák generálják a $\Omega^r[X]$ modulust. Meg kell még mutatnunk, hogy ezek a formák lineárisan függetlenek $k[X]$ felett. Viszont bármely

$$\sum g_{i_1\ldots i_r}\, du_{i_1}\wedge\ldots\wedge du_{i_r} = 0$$

összefüggés az $x\in X$ pontban egy

(2) $$\sum g_{i_1\ldots i_r}(x)\, d_x u_{i_1}\wedge\ldots\wedge d_x u_{i_r} = 0$$

relációt ad. Mivel a $d_x u_1,\ldots,d_x u_n$ a Θ_x^* tér bázisa, így a $d_x u_{i_1}\wedge\ldots\wedge d_x u_{i_r}$ a $\Lambda^r\Theta_x^*$

bázisát képezik. Ezért (2)-ből következik, hogy $g_{i_1 \dots i_r}(x)=0$ az összes $x \in X$ esetén, azaz $g_{i_1 \dots i_r}=0$.

Különösen fontos az $\Omega^n[U]$ modulus, amelynek a 2. tétel feltételei mellett a rangja $k[U]$ felett egyenlő 1-gyel. Ilyen módon, ha $\omega \in \Omega^n[U]$, akkor

$$\omega = g \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n, \quad g \in k[U]. \tag{3}$$

Az ω felírás ilyen alakban lényegesen függ az $u_1, \dots, u_n$ lokális paraméterek kiválasztásától. Tisztázzuk, milyen ez az összefüggés. Legyen $v_1, \dots, v_n$ olyan másik n reguláris függvény az X-en, hogy a $v_1-v_1(x), \dots, v_n-v_n(x)$ lokális paraméterek a tetszőleges $x \in U$ pontban. Akkor

$$\Omega^1[U] = k[U]\,dv_1 + \dots + k[U]\,dv_n$$

és speciálisan az összes du_i előáll

$$du_i = \sum_{j=0}^{n} h_{ij}\,dv_j \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{4}$$

alakban.

Mivel a $d_x u_1, \dots, d_x u_n$ az Ω_x^* tér bázisa az összes $x \in U$-ra, így (4)-ből következik, hogy $|h_{ij}(x)| \neq 0$. Az analízis analógiájára a $|h_{ij}|$ determinánst az $u_1, \dots, u_n$ függvények $v_1, \dots, v_n$ szerinti *Jacobi*-féle determinánsának nevezzük. Jelöljük ezt $J\left(\frac{u_1, \dots, u_n}{v_1, \dots, v_n}\right)$ jellel. Amint láttuk, $J\left(\frac{u_1, \dots, u_n}{v_1, \dots, v_n}\right) \in k[U]$ és az összes $x \in U$-ra

$$J\left(\frac{u_1, \dots, u_n}{v_1, \dots, v_n}\right)(x) \neq 0. \tag{5}$$

A (4) behelyettesítése az ω kifejezésébe, és egyszerű számítások megmutatják, hogy

$$\omega = g \cdot J\left(\frac{u_1, \dots, u_n}{v_1, \dots, v_n}\right) dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n. \tag{6}$$

Tehát, bár az $\omega \in \Omega^n[U]$ formát a $g \in k[U]$ függvény határozza meg, viszont ez a meghatározás csak a lokális paraméterek megválasztásával lehetséges és lényegesen függ ettől a megválasztástól.

Emlékeztetünk arra, hogy a (3) előállítás majdnem mindig csak lokálisan lehetséges (l. az 1. és 2. tételek megfogalmazását). Ha $X = \bigcup U_i$ és ilyen előállítás minden U_i-ben lehetséges, akkor az egész X-en az ω-hoz nem tudunk hozzárendelni egyértelműen egy g függvényt, ugyanis azok a g_i-k, amelyeket a különböző U_i-kben kapunk, nem esnek egybe. Ennek példájával már találkoztunk az 1. pontban (2. példa).

4. *Racionális differenciál formák*

Az 1. pont 2. példája megmutatja, hogy az X algebrai sokaságon nagyon kevés reguláris differenciál forma van (Ω^1, $[P^1]=0$), ugyanakkor azok nyílt részhalmazain már elég sok ilyen forma van ($\Omega^1[U]=k[U]du$). Analóg jelenséggel már találkoztunk a reguláris függvény fogalmával kapcsolatban, és éppen ebből kiindulva vezettük be a racionális függvény fogalmát mint olyan függvényt, amely reguláris valamely nyílt részhalmazon. Most analóg fogalmat vezetünk be a differenciál formákra.

Továbbra is sima irreducibilis kváziprojektív X sokaságot fogunk vizsgálni. Legyen ω egy r-dimenziós differenciál forma X-en. Emlékeztetünk arra, hogy van értelme arról beszélni, hogy ω nulla értéket vesz fel az $x \in X$ pontban: $\omega(x) \in \Lambda^r \Theta_x^*$, és, speciálisan, lehet nulla is.

LEMMA. *Azon pontok halmaza, amelyekben egy ω differenciál forma* 0 *értékű, zárt halmaz.*

Legyen Y az ω forma zérushelyeinek a halmaza. Mivel a zártság lokális tulajdonság, így megelégedhetünk egy tetszőleges $x \in X$ pont elég kis U környezetének vizsgálatával. Speciálisan, kiválasztjuk U-t úgy, hogy abban teljesüljön az 1. és 2. tétel. Akkor léteznek olyan $u_1, \ldots, u_n \in k[U]$ függvények, hogy $\Omega^r[U]$ a $du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$, $i_1 < \ldots < i_r$ elemek által generált szabad modulus. Ezért ω egyértelműen előáll $\omega = \sum g_{i_1 \ldots i_r} du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$ alakban és az $\omega(x) = 0$ egyenlőség ekvivalens a $g_{i_1 \ldots i_r}(x) = 0$ egyenlőségekkel, amelyek zárt halmazt határoznak meg.

A lemmából speciálisan az is következik, hogy ha $\omega(x) = 0$ az U nyílt halmaz összes x pontjára, akkor $\omega = 0$ az egész X-en.

Bevezetünk most egy új objektumot, amely az $U \subset X$ nyílt halmazból és az $\omega \in \Omega^r[U]$ differenciál formából áll. Az ilyen (ω, u) párokra definiáljuk az $(\omega, u) \sim \sim (\omega', u')$ ekvivalenciát, amely akkor áll fenn, ha $\omega = \omega'$ az $U \cap U'$-n. A fent tett megjegyzés szerint elegendő megkövetelnünk, hogy ω és ω' egybeessenek az U és U'-ben levő valamelyik nyílt halmazban. Innen következik a reláció tranzitivitása. Az ezen ekvivalencia reláció által létesített osztályt racionális differenciál formának nevezzük X-en. Az összes r-dimenziós racionális differenciál formák halmazát X-en $\Omega^r(X)$-szel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $\Omega^0(X) = k(X)$.

Az osztályok reprezentáns elemei közötti műveletek átvihetők az osztályokra és meghatározzák a szorzás műveletét: ha $\omega_r \in \Omega^r(X)$, $\omega_s \in \Omega^s(X)$, akkor $\omega_r \wedge \omega_s \in \in \Omega^{r+s}(X)$. $s = 0$ esetén azt látjuk, hogy $\Omega^r(X)$ egy $k(X)$ feletti modulus.

Ha az ω racionális differenciál forma (amely ekvivalens párok osztálya) tartalmazza az $(\bar{\omega}, U)$ párt, akkor ω-t regulárisnak nevezzük U-ban. Azon összes nyílt halmazok uniója, amelyekben ω reguláris, egy U_ω nyílt halmaz, amelyet az ω regularitási tartománynak nevezünk. Nyilvánvaló, hogy ω meghatároz egy $\Omega^r[U_\omega]$-beli formát. Ha $x \in U_\omega$, akkor azt mondjuk, hogy ω reguláris az x pontban. Nyilvánvaló, hogy az $\Omega^r(X)$ nem változik attól, hogy X-et felcseréljük annak valamely nyílt részhalmazával, azaz biracionális invariáns.

Megvizsgáljuk a $k(X)$ test feletti $\Omega^r(X)$ modulus struktúráját.

3. TÉTEL. *$\Omega^r(X)$ egy $\binom{n}{r}$ dimenziós $k(X)$ feletti vektortér.*

Tekintsünk egy tetszőleges olyan $U \subset X$ nyílt halmazt, amelyre az $\Omega^r[U]$ szabad modulus $k[U]$ felett (1. és 2. tétel). Akkor létezik n olyan $u_1, \ldots, u_n \in k[U]$ függvény, hogy a

$$du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}, \quad 1 \leqq i_1 < \ldots < i_r \leqq n \tag{1}$$

szorzatok $k[U]$ felett $\Omega^r[U]$-nak egy bázisát képezik. Tetszőleges $\omega \in \Omega^r(X)$ forma reguláris valamely $U' \subset U$ nyílt halmazban, amelyre az (1) formák továbbra is bázist határoznak meg $k[U']$ felett az $\Omega^r(U')$-ben. Ezért ω' egyértelműen előáll

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} g_{i_1 \ldots i_r} du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$$

alakban, ahol a $g_{i_1 \ldots i_r}$-ek regulárisak valamely $U' \subset U$ nyílt halmazban, azaz racionálisak X-en. Ez éppen azt jelenti, hogy az (1) formák bázisát képezik az $\Omega^r(X)$-nek $k(X)$ felett.

Milyen n-számú $u_1, \ldots, u_n \in k(X)$ függvény rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy $du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n)$ az $\Omega^r(X)$ bázisa $k(X)$ felett? Mi erre egy elegendő feltételt fogunk adni. Ez a feltétel egyúttal szükséges is, de nekünk erre a tényre nem lesz szükségünk.

4. TÉTEL. *Ha $u_1, \ldots, u_n$ egy szeparábilis transzcendens bázisa a $k(X)$ testnek, akkor a $du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ formák az $\Omega^r(X)$-nak $k(X)$ feletti bázisát alkotják.*

Mivel az $\Omega^r(X)$ és $k(X)$ biracionális invariánsok, így X-et affinnak tekintjük: $X \subset A^N$.

Legyen $u_1, \ldots, u_n$ a $k(X)$ test egy szeparábilis transzcendens bázisa. Akkor bármely $v \in k(X)$ elem eleget tesz a v-re nézve szeparábilis $F(v, u_1, \ldots, u_n) = 0$ relációnak.

Speciálisan, az összes A^N-beli t_i koordináta esetén teljesülnek a

$$F_i(t_i, u_1, \ldots, u_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

összefüggések. Ezekből következik, hogy X-en $F'_{i,t_i} dt_i + \sum_{j=1}^{n} F'_{i,y_j} du_j = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$. Az F_i polinomok t_i szerinti szeparábilitása miatt $F'_{i,t_i} \neq 0$ az X-en. Ezért

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{F'_{i,u_j}}{F'_{i,t_i}} \right) du_j. \tag{2}$$

Valamely nyílt $U \subset X$ halmazban az összes $-\dfrac{F'_{i,u_j}}{F'_{i,t_i}}$ függvény és U_i regulárisak, akkor viszont a (2) megmutatja, hogy bármely $y \in U$ pontban a $d_y u_j$ differenciálok generálják a Θ_y^* teret. Mivel ezen differenciálok száma egyenlő a tér dimenziójával, ezért azok bázist képeznek. Ezért a du_i-k az $\Omega^1[U]$ modulus bázisát képezik $k[U]$ felett, az (1) szorzatok az $\Omega^r[U]$ bázisát $k[U]$ felett, tehát annál inkább az $\Omega^r(X)$ bázisát $k(X)$ felett.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 + y^2 = 1$ affin körön a racionális differenciál forma reguláris. Feltételezzük, hogy az alaptest karakterisztikája $\neq 2$.

2. Az 1. feladat jelölései mellett bizonyítsuk be, hogy $\Omega^1[X] = k[X] \dfrac{dx}{y}$. (Utasítás: A tetszőleges $\omega \in \Omega^1[X]$ formát írjuk fel $\omega = f \cdot \dfrac{dx}{y}$ alakban, és használjuk fel azt, hogy $\dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x}$.)

3. Bizonyítsuk be, hogy az 1. pont 3. példájában $\dim \Omega^1[X]=1$.
4. Bizonyítsuk be, hogy $\Omega^n[P^n]=0$.
5. Bizonyítsuk be, hogy $\Omega^1[P^n]=0$.
6. Bizonyítsuk be, hogy $\Omega^r[P^n]=0$, ha $r>0$.
7. Legyen $\omega=\dfrac{P(t)}{Q(t)}$ egy racionális forma P^1-en (t a P^1 koordinátája), ahol P és Q polinomok, $\deg P=m$, $\deg Q=n$. Milyen $x\in P^1$ pontokban nem reguláris az ω forma?
8. Bizonyítsuk be, hogy az X sima sokaság II. fejezet 1. §. 4. pontjában bevezetett érintő rétegeződése biracionálisan izomorf az $X\times A^n$ direkt szorzattal. (Utasítás: Az 1. tételbeli U nyílt halmazra konstruáljuk meg az $U\times A^n$-en az U-hoz húzott érintő rétegződés $(x,\xi)\to x\times((d_xu_1)(\xi),\dots,(d_xu_n)(\xi))$, $\xi\in\Theta_x$ izomorfizmusát.)
9. Számítsuk ki a 2. pont 2. állításának bizonyításában konstruált R modulust az $y^2=x^3$ görbére, és bizonyítsuk be, hogy $\xi(3y\,dx-2x\,dy)=0$. (Utasítás: Használjuk fel azt, hogy $k[X]=k[X]+k[X]y$.)
10. Legyen K a k test bővítése. K test k-feletti differenciálásának nevezzük azt a k-lineáris $D\colon K\to K$ transzformációt, amely eleget tesz a $D(xy)=D(x)y+xD(y)$, $x,y\in K$ feltételnek. Bizonyítsuk be, hogy ha $u\in K$ és D egy differenciálás, akkor a $D_1(x)=uD(x)$ szintén differenciálás, úgy hogy a K test k feletti összes differenciálása egy K feletti vektortér, amelyet $D_k(K)$-val jelölünk.
11. Legyen D a $K=k(X)$ test k feletti differenciálása, $\omega\in\Omega^1(X)$, $\omega=\sum f_i\,dg_i$. Bizonyítsuk be, hogy a $(D,\omega)=\sum f_iD(g_i)$ függvény nem függ az ω-nak $\sum f_i dg_i$ alakban való előállításától. Bizonyítsuk be, hogy ez a skaláris szorzat a $D_k(K)=(\Omega^1(X))^*=\mathrm{Hom}_{k(X)}(\Omega^1(X),k(X))$ izomorfizmust létesíti.

5. §. Példák és a differenciál formák alkalmazása

1. *Viselkedés leképezések közben*

Először megvizsgáljuk a differenciál formák viselkedését reguláris leképezések hatására. Ha $\varphi\colon X\to Y$ egy ilyen leképezés és $x\in X$, akkor $d_x\varphi$ meghatározza a $\Theta_{x,X}\to\Theta_{\varphi(x),Y}$ leképezést, a $(d_x\varphi)^*$ konjugált leképezés pedig a $\Theta^*_{\varphi(x),Y}$-t a $\Theta^*_{x,X}$-be viszi át. Ezért az $\omega\in\Phi[Y]$-ra $\varphi^*(\omega)\in\Phi[X]$, ahol $\varphi^*(\omega)(x)=((d_x\varphi)^*\omega)(\varphi(x))$.

A definícióból könnyen adódik, hogy a $(d_x\varphi)^*$ koordinálva van a differenciálással, azaz $(d_x\varphi)^*(d_{\varphi(x)}f)=d_x(\varphi^*(f))$ az $f\in k[Y]$-ra. Innen következik, hogy ha $\omega\in\Omega^1[Y]$, akkor $\varphi^*(\omega)\in\Omega^1[X]$ és φ^* meghatározza a $\varphi^*\colon\Omega^1[Y]\to\Omega^1[X]$ leképezést, amely koordinálva van a differenciálással $f\in k[Y]$-ra.

Végül a lineáris algebrából ismert, hogy a lineáris terek $\varphi\colon L\to M$ lineáris leképezése meghatározza a $\Lambda^r\varphi\colon\Lambda^rL\to\Lambda^rM$ lineáris leképezést. Alkalmazva ezt a $(d_x\varphi)^*$ leképezésre, a $\Lambda^r(d_x\varphi)^*\colon\Lambda^r\Theta^*_{\varphi(x),Y}\to\Lambda^r\Theta^*_{x,X}$ leképezést kapjuk, és a $\Phi^r[Y]\to\Phi^r[X]$, valamint az $\Omega^r[Y]\to\Omega^r[X]$ leképezéseket. Utóbbit szintén φ^*-gal fogjuk jelölni.

A fent mondottakból következik, hogy a φ^* művelet hatásának a tulajdonképpeni kiszámítása a differenciál formákra igen egyszerű. Ha

$$\omega=\sum g_{i_1\dots i_r}\,du_{i_1}\wedge\dots\wedge du_{i_r},$$

akkor

$$(1) \qquad \varphi^*(\omega) = \sum \varphi^*(g_{i_1 \dots i_r})\, d(\varphi^*(u_{i_1})) \wedge \dots \wedge d(\varphi^*(u_{i_r})).$$

Legyen most X irreducibilis, $\varphi: X \to Y$ racionális leképezés és $\varphi(X)$ sűrű Y-ban. Mivel φ az $U \subset X$ nyílt halmaznak Y-ba való reguláris leképezése és tetszőleges $V \subset Y$ nyílt halmaz metszi a $\varphi(U)$-t, így az előbbi fejtegetések meghatározzák a $\varphi^*: \Omega^r(Y) \to \Omega^r(X)$ leképezést. Ezt a leképezést szintén az (1) képlet adja meg.

Tudjuk, hogy $r=0$, azaz függvények esetén, a φ^* leképezés beágyazás. Differenciál formákra ez nem mindig igaz. Legyen például $X=Y=P^1$, $k(X)=k(t)$, $k(Y)=k(u)$, k-nak véges p karakterisztikája van és φ az $u=t^p$ képlettel van megadva. Akkor $\varphi^*(f(u))=f(t^p)$ és $\varphi^*(df)=d(f(t^p))=0$, $(f \in k(u))$, úgy, hogy $\varphi^* \Omega^1(Y)=0$. A helyzetet a következő eredmény tisztázza.

1. TÉTEL. *Ha a $k(X)$ testnek $k(Y)$ felett szeparábilis transzcendens bázisa van, akkor a $\varphi^*: \Omega^r(Y) \to \Omega^r(X)$ leképezés beágyazás.*

Itt azonosítjuk a $k(Y)$ testet a $k(X)$ test résztestével.

Legyen $k(X)/k(Y)$-nak szeparábilis transzcendens bázisa $v_1, \dots, v_s$. Ez azt jelenti, hogy a $v_1, \dots, v_s$ algebrailag független $k(Y)$ felett és $k(X)$ véges szeparábilis bővítése a $k(Y)(v_1, \dots, v_s)$ testnek. Jelöljük a $k(Y)$ test k feletti valamely szeparábilis transzcendens bázisát $u_1, \dots, u_r$-rel. Akkor az $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ a $k(X)$ test k feletti szeparábilis transzcendens bázisa.

Felírva a tetszőleges $\omega \in \Omega^r(Y)$ differenciál formát

$$(2) \qquad \omega = \sum g_{i_1 \dots i_r}\, du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$$

alakban és alkalmazva arra (1)-et, a $\varphi^*(\omega)$-nak a $d\varphi^*(u_{i_1}) \wedge \dots \wedge d\varphi^*(u_{i_r})$ szorzatokkal való felírását kapjuk, amely szorzatok az $\Omega^r(X)$ bázisának egy részét képezik $k(X)$ felett, mivel a $\varphi^*(u_i)$ az $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s$ szeparábilis transzcendens bázisnak egy része (4. §. 4. tétel). Ezért $\varphi^*(\omega)=0$ csak akkor teljesül, ha az összes $\varphi^*(g_{i_1 \dots i_r})=0$, ami pedig csak $g_{i_1 \dots i_r}=0$ esetén teljesül, azaz $\omega=0$.

Az egész eddigi rész többé kevésbé nyilvánvaló volt. Most viszont egy váratlan tényhez érkeztünk.

2. TÉTEL. *Ha X és Y sima projektív sokaságok és $\varphi: X \to Y$ olyan racionális leképezés, hogy $\varphi(X)$ sűrű Y-ban, akkor $\varphi^* \Omega^r[Y] \subset \Omega^r[X]$.*

Más szóval φ^* reguláris differenciál formákat regulárisokba visz át. Mivel a φ csak racionális, ez teljesen valószínűtlennek látszik még függvények esetén is, azaz $r=0$-ra. Ebben az esetben a helyzetet az menti meg, hogy az X és Y projektív volta miatt az ezeken értelmezett reguláris függvények konstansok és így a tétel triviális.

Általános esetben a tétel kevésbé nyilvánvaló. Fel fogjuk használni azt, hogy a II. fejezet 3. § 3. tétel miatt a φ leképezés reguláris az $X-Z$-n, ahol Z zárt az X-ben és $\operatorname{codim}_X Z \geqq 2$. Ha $\omega \in \Omega^r[Y]$, akkor $\varphi^*(\omega)$ reguláris az $X-Z$-n. Be fogjuk bizonyítani, hogy innen már következik a regulárítás az egész X-en. Ebből a célból felírjuk $\varphi^*(\omega)$-t valamely nyílt U halmazban a szokásos (2) alakban (felcserélve ω-t $\varphi^*(\omega)$-ra), ahol most az $u_1, \dots, u_n$ olyan reguláris függvények az U-n, hogy $du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$ az $\Omega^r[u]$ bázisa $k[u]$ felett. Akkor a $\varphi^*(\omega)$ regularitásából az $X-Z$-n következik az összes $g_{i_1 \dots i_r}$ függvény regularitása az $U-(Z \cap U)$-n. Viszont codim $(Z\cap U)\geqq 2$, és ez azt jelenti, hogy azon pontok halmaza, amelyekben a $g_{i_1\dots i_r}$ nem reguláris, $\geqq 2$ kodimenziós. Továbbá, ez a halmaz egy $(g_{i_1\dots i_r})_\infty$ divizor. Ez csak akkor lehetséges, ha $(g_{i_1\dots i_r})_\infty=0$, vagyis a $g_{i_1\dots i_r}$ függvény reguláris.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha a sima projektív X és Y sokaságok biracionálisan izomorfak, akkor az $\Omega^r[X]$ és $\Omega^r[Y]$ vektorterek is izomorfak a k test felett.*

A 2. tétel és következményének a jelentőségét növeli az a tény, hogy projektív X sokaság esetén az $\Omega^r[X]$ tér véges dimenziós k felett. Ez az eredmény következménye az algebrai koherens nyalábok kohomológiáiról szóló általános tételeknek. Görbék esetére a következő pontban adunk bizonyítást. Legyen $h^r=\dim\Omega^r[X]$. A 2. tétel következménye azt jelenti, hogy a h^r $(r=0, 1, \dots, n)$ számok a sima projektív X sokaság biracionális invariánsai.

2 *Kanonikus osztály*

Most n-dimenziós racionális differenciál formákat fogunk vizsgálni az n-dimenziós sima X sokaságon. Az $x\in X$ pont valamely környezetében az ilyen forma előáll $\omega=g\,du_1\wedge\dots\wedge du_n$ alakban. Lefedjük az egész X-et olyan U_i affin halmazokkal, hogy azok mindegyikében igaz az $\omega=gdu_1^{(i)}\wedge\dots\wedge du_n^{(i)}$ előállítás. A 2. pont 6. tétel szerint az $U_i\cap U_j$ metszetben azt kapjuk, hogy

$$g^{(j)}=g^{(i)}J\left(\frac{u_1^{(j)}\dots u_n^{(j)}}{u_1^{(i)}\dots u_n^{(i)}}\right).$$

Mivel a J *Jacobi*-féle determináns 0-tól különböző az $U_i\cap U_j$-ben (l. 4. § 3. pont (5) összefüggést), így a $g^{(i)}$ függvényrendszer az U_i-ben koordinált függvényrendszer az 1. § 2. pont értelmében, és ezért egy divizort határoz meg X-en. Ezt a divizort az ω forma divizorának nevezzük és (ω)-val jelöljük.

Az n-dimenziós sokaságon értelmezett n-dimenziós differenciál forma divizorának következő tulajdonságai a definícióból azonnal következnek:

a) $(f\cdot\omega)=(f)+(\omega)$, ha $f\in k(X)$.

b) $(\omega)\geqq 0$ akkor és csakis akkor, ha $\omega\in\Omega^n[X]$.

A 4. § 3. tétel szerint ($r=n$ mellett) az $\Omega^n(X)$ tér egydimenziós $k(X)$ felett. Ezért ha $\omega_1\in\Omega^n(X)$, $\omega_1\neq 0$, akkor tetszőleges $\omega\in\Omega^n(X)$ forma előáll $\omega=f\omega_1$ alakban. Az a) tulajdonság ezért megmutatja, hogy az összes $\omega\in\Omega^n(X)$ formák divizorai egymással ekvivalensek és a divizoroknak egy osztályát képezik X-en.

A divizorok ezen osztályát az X kanonikus osztályának nevezzük és K-val vagy K_X-szel jelöljük.

Legyen ω_1 egy rögzített $\Omega^n(X)$-beli forma, amelynek segítségével bármely forma kifejezhető $\omega=f\cdot\omega_1$ alakban. A b) tulajdonság megmutatja, hogy ω akkor és csakis akkor reguláris X-en, ha $(f)+(\omega_1)\geqq 0$. Más szóval $\Omega^n[X]\cong\mathscr{L}((\omega_1))$, ha használjuk a divizorral asszociált tér fogalmát, amelyet az 1. § 5. pontban vezettünk be.

Ilyen módon $h^n=\dim_k\Omega^n[X]=l((\omega_1))=l(K)$. Látjuk, hogy az 1. pontban bevezetett h^n invariáns egybeesik a kanonikus osztály dimenziójával.

A 2. §-ban bebizonyítottuk az $l(D)$ szám végességét tetszőleges D divizor esetén a sima projektív algebrai görbén. Innen speciálisan az is következik, hogy a $h^1=\dim_k\Omega^1(X)$ szám véges bármely sima projektív algebrai X görbére. Ezt a számot a görbe fajának nevezzük és $g(X)$-szel, vagy $g: h^1=g$-vel jelöljük, ha $\dim X=1$.

Abban az esetben, ha $\dim X=1$, ismert, hogy egy osztály összes divizorának ugyanaz a foka, úgyhogy lehet beszélni a C osztály $\deg C$ fokáról, speciálisan a kanonikus osztály $\deg K_X$ foka az X görbe biracionális invariánsa.

Az általunk bevezetett $g(X)$ faj és a $\deg K_X$ invariánsok nem függetlenek. Bebizonyítható, hogy közöttük fennáll a $\deg K_X=2g(X)-2$ összefüggés. Ez az összefüggés speciális esete a *Riemann—Roch*-tételnek, amely azt állítja, hogy bármely g-fajú D divizorra az X görbén igaz

$$l(D)-l(K-D) = \deg D-g+1.$$

Ennek a tételnek a bizonyítása az algebrai görbék elméletének részleteibe való nagyobb elmélyedést kíván és azt itt nem ismertetjük. Viszont néhány következményére rámutatunk.

1°. Feltételezve $D=K$-t, azt kapjuk, hogy $l(K-K)=l(0)=1$, $l(K)=g$, és így $\deg K=2g-2$.

2°. Ha $\deg D>2g-2$, akkor $l(K-D)=0$. Valóban, ellenkező esetben létezne olyan $D'\sim K-D$ divizor, hogy $D'\geqq 0$, ami nem lehetséges, mivel $\deg D'=$ $=\deg K-\deg D<0$. Ilyen módon a *Riemann—Roch*-tételből azt kapjuk, hogy $l(D)=\deg D-g+1$, ha $\deg D>2g-2$.

3°. Ha $g=0$, akkor előbbi feltétel teljesül $\deg D\geqq -1$ esetén. Speciálisan, ha $D=x$ egy pont az X-en, akkor $l(D)=2$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathscr{L}(D)$ tér konstansokon kívül nem konstans f függvényt is tartalmaz. Az ilyen függvényre $(f)_\infty=x$, azaz ha f-et egy $f\colon X\to P^1$ leképezésként interpretáljuk, akkor $\deg f=1$ a 2. § 1. tétel miatt. Innen következik, hogy $X\cong P^1$, azaz hogy a $g=0$ egyenlőség nemcsak szükséges, hanem elegendő is arra, hogy az X görbe racionális legyen.

3. *Hiperfelületek*

Most kiszámítjuk a kanonikus osztályt és meghatározzuk h^n-t arra az esetre, amikor X sima hiperfelület P^N-ben, $n=\dim X=N-1$. Legyen az X egyenlete $F(x_0:\ldots:x_N)=0$, $\deg F=\deg X=m$. Tekintsük azt az U affin nyílt halmazt, amelyben $x_0\neq 0$. Ebben X az $G(y_1,\ldots,y_n)=0$, $G(y_1,\ldots,y_N)=F(1,y_1,\ldots,y_N)$ egyenlettel adható meg, ahol $y_i=x_i/x_0$.

Abban az $U_i\subset U$ nyílt részhalmazban, amelyben $G'_{y_i}\neq 0$, a lokális paraméterek az $y_1,\ldots,\hat{y}_i,\ldots,y_N$ és az $\Omega^n[U_i]$-nek $dy_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_i}\wedge\ldots\wedge dy_N$ a bázisa $k[U_i]$ felett. Viszont kényelmesebb bázisként venni az

$$\omega_i = \frac{1}{G'_{y_i}}\,dy_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_i}\wedge\ldots\wedge dy_N$$

formát (ami lehetséges, mivel $G'_{y_i}\neq 0$ az U_i-ben). Ugyanis az $\omega_1,\ldots,\omega_N$ formák nagyon egyszerű kapcsolatban állnak egymással: megszorozva a

$$\sum_{i=1}^{N} G'_{y_i}\,dy_i = 0$$

összefüggést $dy_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_i}\wedge\ldots\wedge\widehat{dy_j}\wedge\ldots\wedge dy_N$-nel, azt látjuk, hogy

$$\omega_j = (-1)^{i+j-1}\omega_i. \tag{1}$$

Mivel az X sima, így $U=\bigcup U_i$ és az (1)-ből következik, hogy az összes ω_i forma reguláris az egész U-n és hogy ezeknek a formáknak a divizora U-ban egyenlő 0-val.

Meg kell még vizsgálni az U-hoz nem tartozó pontokat. Tekintsük például, azt a V nyílt részhalmazt, amelyben $x_1\neq 0$. Ebben az affin sokaságban a koordináták $z_1, \ldots, z_N$: $z_1=\frac{1}{y_1}$, $z_i=\frac{y_i}{y_1}$ $(i=2, \ldots, N)$. Nyilvánvaló, hogy

$$y_1=\frac{1}{z_1}, \quad y_i=\frac{z_i}{z_1} \quad (i=2, \ldots, N). \tag{2}$$

Ezért

$$dy_1=-\frac{dz_1}{z_1^2}, \quad dy_i=\frac{z_1 dz_i-z_i dz_1}{z_1^2} \quad (i=2, \ldots, N).$$

Behelyettesítjük ezeket a kifejeséseket az ω_N-be. Felhasználva azt, hogy $dz_1\wedge dz_1=0$, azt kapjuk, hogy

$$\omega_N=-\frac{1}{z_1^N G'_{y_N}} dz_1\wedge\ldots\wedge dz_{N-1}.$$

Az X egyenlete V-ben

$$H(z_1, \ldots, z_N)=0$$

alakú, ahol

$$H=z_1^m G\left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_N}{z_1}\right).$$

A

$$H'_{z_N}=z_1^{m-1} G'_{y_n}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1} \ldots, \frac{z_N}{z_1}\right)=z_1^{m-1} G'_{y_N}(y_1, \ldots, y_N)$$

összefüggésből következik, hogy

$$\omega_N=-\frac{1}{z_1^{N-m+1} H_{z_N}} dz_1\wedge\ldots\wedge dz_{N-1}. \tag{3}$$

Az U-ra alkalmazott összes fejtegetés alkalmas V-re is és megmutatja, hogy

$$\Omega^n[V]=k[V]\cdot\frac{1}{H'_{z_N}} dz_1\wedge\ldots\wedge dz_{N-1}. \tag{4}$$

Ezért V-ben $(\omega_n)=-(N-m+1)(z_1)$. Nyilvánvaló, hogy a (z_1) divizor V-ben az X-en értelmezett x_0 forma divizora, amint azt az 1. § 2. pontban értelmeztük. Végül is azt kapjuk, hogy az X-en $(\omega_N)=(m-N-1)\cdot(x_0)=(m-n-2)\cdot(x_0)$. Ilyen módon a K_X az $(m-n-2)L$ divizort tartalmazó divizor osztály, ahol L az X metszete a hiperfelülettel.

Meghatározzuk most $\Omega^n[X]$-et. Ismeretes, hogy $\Omega^n[U]=k[U]\omega_N$. Legyen $\omega=P(y_1, \ldots, y_N)\omega_N$, $P\in k[y_1, \ldots, y_N]$. Behelyettesítve (2)-t és felhasználva a (3) képletet, azt kapjuk, hogy a V-ben.

$$\omega=-\frac{\tilde{P}(z_1, \ldots, z_n)}{z_1^{k+N-m+1}}\cdot\frac{1}{H'_{z_N}} dz_1\wedge\ldots\wedge dz_{N-1}, \quad k=\deg P,$$

$$\tilde{P}(z_1, \ldots, z_N)=z_1^k P\left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_N}{z_1}\right).$$

A (4)-ből most már azonnal kijön, hogy $(\omega)\geqq 0$ V-ben akkor és csakis akkor, ha $\frac{\tilde{P}}{z_1^{k+N-m+1}}\in k[V]$, azaz, amikor $k+N-m+1\leqq 0$, vagyis $k\leqq m-N-1$. Ilyen módon $\omega\in\Omega^n[X]$ akkor és csakis akkor, ha $\omega=P\cdot\omega_i$,

$$\deg P \leqq m-N-1 = m-n-2. \tag{5}$$

Innen könnyű kiszámítani az $\Omega^n[X]$ dimenzióját. Éspedig az (5) feltételnek eleget tevő két különböző $P, Q\in k[y_1, \ldots, y_N]$ polinom a $k[X]$ test különböző elemeit határozzák meg, ellenkező esetben $P-Q\equiv 0$ (G), ami ellentmond (5)-nek. Ilyen módon az $\Omega^n[X]$ dimenziója egybeesik az (5) feltételnek eleget tevő P polinomok terének dimenziójával. Ez a dimenzió egyenlő

$$\frac{(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-N)}{N!} = \binom{m-1}{N}.$$

Ilyen módon

$$h^n(X) = \binom{m-1}{n+1}. \tag{6}$$

Ennek a képletnek legegyszerűbb esete $N=2$, $n=1$ mellett

$$g(X) = \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

az m-edrendű sima sík görbe fajának a képlete.

A (6) képletből azonnal levonhatunk egy fontos következtetést. Mégpedig, az $\binom{m-1}{n+1}$-et, mint a kombinációk számát interpretálva azt kapjuk, hogy $m>m'>$ $>n+1$ esetén

$$\binom{m-1}{n+1} > \binom{m'-1}{n+1}.$$

Ezért a (6) képlet megmutatja, hogy különböző $m, m'>n+1$ rendű hiperfelületek biracionálisan nem izomorfak. Látjuk, hogy végtelen sok egymással biracionálisan nem izomorf adott dimenziójú algebrai sokaság létezik.

Speciálisan, $N=2$, $m=3$ mellett azt kapjuk, hogy $g(X)=1$, mivel pedig $g(P^1)=0$, így azt látjuk, hogy a harmadrendű sima projektív görbe nem racionális.

A (6) képletből következik, hogy $h^n(X)=0$, ha $m\leqq N$. Speciálisan, $h^n(P^n)=0$. $n=1$ esetben ezt közvetlenül ellenőriztük a 2. pontban.

Részletesebben megvizsgáljuk az $m\leqq N$ esetet. Ha $N=2$, akkor ez azt jelenti, hogy $m=1, 2$. Az $m=1$, $X=P^1$ mellett a $h^1(P^1)=0$ már ismert. Ha $m=2$, akkor egy olyan sima másodrendű görbével van dolgunk, amely izomorf P^1-el, úgy hogy a $h^1(X)=0$ egyenlőség ebben az esetben sem ad újat.

Legyen $N=3$. Ha $m=1$, akkor a P^2-t kapjuk, és a $h^2(X)=0$ már ismert. Ha $m=2$, akkor az X egy sima másodrendű felület, amely biracionálisan izomorf P^2-vel, úgy hogy a $h^2(X)=0$ egyenlőség következménye a $h^2(P^2)=0$ egyenlőségnek és a 2. tételnek. $m=3$-nál az X egy harmadrendű felület. Ha ezen a felületen van két kitérő egyenes, akkor az biracionálisan izomorf P^2-vel (l. az I. fejezet 3. § 2. pont 2. feladatot). Meg lehet mutatni, hogy két kitérő egyenes mindig van bármely sima harmadrendű felületen, úgy hogy a $h^2(X)=0$ egyenlőség ismét következménye a 2. tételnek és annak, hogy $h^2(P^2)=0$.

A tekintett példák egy érdekes kérdéshez vezetnek el az alacsony rendű sima hiperfelületekkel kapcsolatban, azaz $X\subset P^N$, $m=\deg X\leqq N$. Látjuk, hogy $N=2, 3$ esetén az X biracionálisan izomorf a P^{N-1} projektív térrel, ami „magyarázatot" ad a $h^n(X)=0$, $n=N-1$ egyenlőségre.

Ha $N=4$, akkor itt egy új jelenségre bukkanunk $m=3$ esetén, például, már az

$$x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 = 0 \tag{7}$$

hiperfelületre sem ismert, izomorf-e az a P^3-mal. Viszont meg lehet mutatni, hogy létezik olyan $\varphi\colon P^3\to X$ racionális leképezés, hogy $\varphi(P^3)$ sűrű X-ben és $k(P^3)$ szeparábilis $k(X)$ felett (l. 16. példát). Már ez, a $h^3(P^3)=0$ egyenlőséggel és a 2. tétellel együtt eredményezi a $h^3(X)=0$-t. Ezzel kapcsolatban a következő terminológiát szokás használni: az X sokaságot racionálisnak nevezzük, ha biracionálisan izomorf P^n-nel, $n=\dim X$, és uniracionálisnak, ha létezik olyan $\varphi\colon P^n\to X$ racionális leképezés, hogy $\varphi(P^n)$ sűrű X-ben és a $k(P^n)/k(X)$ szeparábilis. A 2. tételből és a 4. § 6. példájából következik, hogy az uniracionális X sokaságra az összes $h^i(X)=0$.

Az algebrai geometriában előforduló egész sor nehézségre jellemző a kérdés, egybeesnek-e a racionális és uniracionális sokaságok fogalmai. Ezt a kérdést Lürot-féle problémának nevezik és a válasz ez ideig nem ismeretes. Nyilvánvaló, hogy a probléma átfogalmazható testelméleti feladattá: legyen K a racionális függvények $k(T_1, \ldots, T_n)$ testének olyan részteste, hogy $k(T_1, \ldots, T_n)/K$ véges és szeparábilis. A kérdés: K izomorf-e a racionális függvények testével?

$n=1$ esetén a válasz pozitív, méghozzá a k test algebrailag zárt voltának és a $k(T)/K$ szeparábilitásának megkövetelése nélkül.

$n=2$ esetében ezeknek a megszorításoknak a hiányában a válasz negatív, viszont azok teljesülése mellett pozitív, azonban a bizonyítás nagyon finom. A bizonyítás megtalálható például az „*Алгебраические поверхносми*" című könyvben (Труды Математического института А.Н. СССР, Т. 75). $n=3$-ra a válasz ismeretlen. A legegyszerűbb olyan példa egy uniracionális sokaságra, amelynek racionalitása sem nem cáfolt, sem nem bizonyított, a (7) hiperfelület.

4. *Hiperelliptikus görbék*

Második példaként tekintsünk egy görbe típust. Jelöljük Y-nal az $y^2=F(x)$ egyenlettel megadott affin sík görbét, ahol $F(x)$ egy $n=2m+1$ páratlan fokú olyan polinom, amelynek nincs többszörös gyöke. (Az I. fejezet 1. §-ban bebizonyítottuk, hogy a páros fokszám esete visszavezethető páratlanhoz.) Tételezzük fel, hogy a k test karakterisztikája $\neq 2$. Az Y görbe X sima projektív modelljét hiperelliptikus görbének nevezzük. Kiszámítjuk az X görbe kanonikus osztályát és faját.

Az Y görbe $Y\to A^1\colon (x, y)\to x$ racionális leképezése meghatározza az $f\colon X\to P^1$ reguláris leképezést. Nyilvánvaló, hogy $\deg f=2$, úgy, hogy az 1. § 1. tétele miatt az $\alpha\in P^1$-re $f^{-1}(\alpha)$ vagy két x', x'' pontból áll, amelyek mindegyikében $v_{x'}(u)=v_{x''}(u)=1$ az α pontbeli u lokális paraméterre, vagy pedig $f^{-1}(\alpha)=x$ és $v_x(u)=2$.

Amint azt könnyű belátni, az Y affin görbe sima. Ha $\bar{Y}$ annak projektív lezártja, akkor X az $\bar{Y}$ normalizációja, és egy $\varphi\colon X\to\bar{Y}$ leképezéshez jutunk, amely Y-nak és $\varphi^{-1}(Y)$-nak izomorfizmusa. Innen következik, hogy ha $\xi\in A^1$ pont koordinátája α és $F(\alpha)\neq 0$, akkor $f^{-1}(\xi)=(x', x'')$, ha pedig $F(\alpha)=0$, akkor $f^{-1}(\xi)=x$.

Tekintjük az $\alpha_\infty \in P^1$ végtelen távoli pontot. Ha a P^1-beli koordinátát x-szel jelöljük, akkor az α_∞-ben a lokális paraméter $u=x^{-1}$. Ha az $f^{-1}(\alpha_\infty)$ két x', x'' pontból állna, akkor például az x' pontban az u függvény lokális paraméter volna. Innen következik, hogy $v_{x'}(x)=1$, $v_{x'}(F(x)) = -n$. Viszont mivel n páratlan, ez ellentmond annak, hogy $v_{x'}(F(x))=2v_{x'}(y)$.

Ilyen módon $f^{-1}(x_\infty)$ egy pontból áll, amelyet x_∞-nel jelölünk, és $v_{x_\infty}(x) = -2$, $v_{x_\infty}(y) = -n$. Innen következik, hogy

$$X = \varphi^{-1}(Y) \cup x_\infty.$$

Áttérünk most az X-en értelmezett differenciál formákra. Tekintsük például az $\omega = \frac{dx}{y}$ formát. Ha $y(\xi) \neq 0$, akkor a $\xi \in Y$ pontban a lokális paraméter x és $v_\xi(\omega)=0$. Ha viszont $y(\xi)=0$, akkor a lokális paraméter az y és $v_\xi(x)=2$, ahonnan ismét az következik, hogy $v_\xi(\omega)=0$. Ilyen módon $\omega = k \cdot x_\infty$, és meg kell még határoznunk a k-t. Ennek érdekében elegendő visszaemlékeznünk arra, hogy ha t lokális paraméter az x_∞-ben, akkor $x=t^{-2}u$, $y=t^{-n}v$, u, v, u^{-1}, $v^{-1} \in O_{x_\infty}$. Ezért $\omega = t^{n-3} w\, dt$, $w, w^{-1} \in O_{x_\infty}$, ahonnan $(\omega)=(n-3)x_\infty$.

Megkeressük most az $\Omega^1[X]$-et. Mint láttuk, ω az $\Omega^1[Y]$ modulus bázisát képezi: $\Omega^1[Y]=k[Y] \cdot \omega$, úgy hogy az $\Omega^1(X)$-beli tetszőleges forma $u \cdot \omega$ alakú, ahol $u \in k[Y]$, és ezért előállítható $P(x)+Q(x)y$, $P, Q \in k[X]$ alakban.

Azt kell még tisztáznunk, ezen formák közül melyek regulárisak az x_∞-ben. Ez akkor és csakis akkor lesz, ha

$$v_{x_\infty}(u) \geqq -(n-3). \tag{8}$$

Meghatározzuk az ilyen $u \in k[Y]$-okat. Mivel $v_{x_\infty}(x) = -2$, így a $v_{x_\infty}(P(x))$ mindig páros, mivel pedig $v_{x_\infty}(y) = -n$, így a $v_{x_\infty}(Q(x)y)$ páratlan. Ezért

$$v_{x_\infty}(u) = v_{x_\infty}(P(x)+Q(x)y) = \min\left(v_{x_\infty}(P(x)), v_{x_\infty}(Q(x)y)\right);$$

tehát ha $Q \neq 0$, akkor $v_{x_\infty}(u) \leqq -n$. Ilyen módon $u=P(x)$, és a (8) feltétel azt adja, hogy $2 \deg P \leqq n-3$.

Kiderítettük, hogy $\Omega^1[X]$ a $\frac{P(x)}{y}\, dx$ alakú formákból áll, ahol a $P(x)$ polinom foka nem nagyobb $\frac{n-3}{2}$. Innen következik, hogy $g=h^1=\dim \Omega^1[X]=\frac{n-3}{2}$.

Érdekes összehasonlítani a 2. példa és az 1. példa eredményeit $N=2$ esetében. A második esetben azt láttuk, hogy léteznek bármilyen előre megadott fajú algebrai görbék. Az elsőben azt tapasztaltuk, hogy a sima sík görbe faja $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ alakú, azaz távolról sem tetszőleges egész szám. Ilyen módon nem tetszőleges sima projektív görbe izomorf egy sík sima görbével. Például, ez nem igaz hiperelliptikus görbékre $n=9$ esetén.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az $f\in k(X)$ elemre $df=0$ akkor és csakis akkor, ha $f\in k$ (ha a k test karakterisztikája 0), vagy $f=g^p$, (ha a k test karakterisztikája $p>0$). (Utasítás. Használjuk fel az 1. tételt és a következő lemmát. Ha K/L véges szeparábilis bővítés, $x\in K$ és annak minimális polinomja $\sum a_i^p x^i$, $a_i\in L$ alakú, akkor $x=y^p$, $y\in K$.)

2. Legyen X és Y sima projektív görbék, $\varphi\colon X\to Y$ olyan reguláris leképezés, hogy $\varphi(X)=Y$ és a $k(X)/\varphi^* k(Y)$ bővítés szeparábilis. Bizonyítsuk be, hogy az összes $y\in Y$ pont esetén, kivéve véges számút, a $\varphi^{-1}(y)$ különböző pontok deg φ-jeiből áll. Más szóval, ha y egy pontból álló divizor az Y-on, $\varphi^*(y)=\sum l_i x_i$, akkor $l_i=1$ az összes y pontra, kivéve véges sokat. Azokat az y pontokat, amelyekre legalább egy $l_i>1$, a φ leképezés elágazási pontjainak nevezzük.

3. A 2. feladat feltételei mellett legyen $Y=P^1$ és t a P^1 koordinátája. A $p>0$ karakterisztikájú testek esetében, feltételezve, hogy az összes $l_i<p$, határozzuk meg a $\varphi^*(dt)$ divizort (fejezzük ki azt az l_i számokkal).

4. Bizonyítsuk be, hogy a 3. feladat jelölései mellett $g(X)=\sum\frac{l_i-1}{2}-\deg\varphi+1$, ahol az l_i-k megfelelnek a φ leképezés elágazási pontjainak.

5. A 2. feladat feltételezései mellett keressünk olyan kapcsolatot a $g(X)$ és $g(Y)$ között, amely általánosítja a 4. feladatot.

6. A $\varphi\colon X\to Y$ tegyen eleget a 2. feladat feltételeinek. Bizonyítsuk be, hogy az $\omega\in\Omega^1(Y)$ differenciál ugyanakkor reguláris, amikor a $\varphi^*\omega\in\Omega^1(X)$ differenciál.

7. Jelöljük Ψ-vel az n-dimenziós L tér $2n$ vektorától függő k testbeli értékű összes olyan ψ függvények halmazát, amelyek eleget tesznek a következő feltételeknek:

a) $\psi(x_1,\dots,x_{2n})$ lineáris a változók mindegyikére nézve;

b) $\psi(x_1,\dots,x_{2n})$ ferde szimmetrikus úgy is mint az $x_1,\dots,x_n$ függvénye és úgy is, mint az $x_{n+1},\dots,x_{2n}$ függvénye;

c) a $\psi(x_1,\dots,x_{2n})$ függvény szimmetrikus mint az x_i és x_{n+i} függvénye bármely $1\leqq i\leqq n$-re.

Feltételezzük, hogy a k test karakterisztikája $\neq 2$. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\varphi\in\Psi$ függvény megadható $\psi(x_1,\dots,x_n,\ x_1,\dots,x_n)$ és $\psi(x_1,\dots,x_n,\ x_1,\dots,x_n)=$ $=d^2\psi(e_1,\dots,e_n,\ e_1,\dots,e_n)$ értékeivel, ahol $e_1,\dots,e_n$ az L tér bázisa, a d pedig az $x_1,\dots,x_n$ vektorok $e_1,\dots,e_n$ bázisra vonatkozó koordinátáiból képzett determináns. Legyen $\xi_1,\dots,\xi_n\in L^*$. Az $\psi(x_1,\dots,x_n,x_1,\dots,x_n)=|\xi_i(x_j)|^2$ függvényt $\psi=(\xi_1\wedge\dots$ $\dots\wedge\xi_n)^2$-vel jelöljük. Bizonyítsuk be, hogy a Ψ tér egydimenziós, a $(\xi_1\wedge\dots\wedge\xi_n)^2$ pedig annak bázis vektora, ha $\xi_1,\dots,\xi_n$ az L^* bázisa.

8. Általánosítsuk az n-dimenziós sokaságon értelmezett reguláris és racionális n-dimenziós differenciál formák konstrukcióját, felcserélve mindenütt a $\Lambda^n\Theta_x^*$ teret a megfelelő Ψ térrel. A megfelelő objektumot kvadratikus differenciál formának nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy az 1. § 3. pont (6) képletének analógjában J-t helyettesíteni kell J^2-tel. Bizonyítsuk be, hogy a kvadratikus differenciál forma rendelkezik divizorral, és ezek a divizorok mind egy osztályt alkotnak, amely egybeesik a $2K_X$-szel. Általánosítsuk a 2. tételt.

9. Keressük meg a reguláris kvadratikus differenciál formák terét egy hiperelliptikus görbén. (Utasítás: Írjuk fel őket $\frac{f}{y^2}(dx)^2$ alakban.)

10. Ellenőrizzük a *Riemann—Roch*-tételt az $X=P^1$ esetére.

11. A *Riemann—Roch*-tételt felhasználva bizonyítsuk be, hogy ha $g(X)=1$, akkor $l(D)=\deg D$, ha $\deg D>0$.

12. Legyen X sima projektív görbe, $g(X)=1$ és $x\in X$. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n>1$-re létezik X-en olyan U_n racionális függvény, amelyre $v_x(u_n)=-n$, $v_y(u_n)\geqq 0$ az $y\neq x$-re. (Használjuk fel a 11. feladatot.)

13. A 12. feladat feltételei mellett bizonyítsuk be, hogy $k(X)=k(u_2, u_3)$, mégpedig u_2 és u_3 egy harmadfokú relációval vannak összekapcsolva. (Utasítás: Ennek a relációnak a levezetéséhez használjuk fel az $\mathscr{L}(6x)$-re alkalmazott *Riemann—Roch*-tételt.) Bizonyítsuk be, hogy $[k(X): k(u_2, u_3)]=1$, felhasználva a 2. §. 1. tételét.

14. Ellenőrizzük a $\deg K=2g-2$ összefüggést a hiperelliptikus görbékre és a sima sík görbékre.

15. Bizonyítsuk be, hogy hiperbolikus görbe esetében reguláris differenciál formák arányai a $k(X)$ test egy olyan résztestét generálják, amely izomorf a racionális függvények testével. Ebből kiindulva bizonyítsuk be, hogy az $m>3$ fokú sima sík projektív görbe nem hiperelliptikus.

16. Bizonyítsuk be, hogy a P^4-beli harmadfokú sima X hiperfelület uniracionális. (Utasítás: Az I. fejezet 6. § 10. tételt felhasználva bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $U\subset X$, $U\cap l\neq\emptyset$ nyílt halmaz, hogy az U-hoz vett érintő rétegeződés izomorf $U\times A^3$-mal.) Jelöljük P^2-vel az A^3 origóján átmenő egyenesekből álló projektív teret. A $\xi=(u,\alpha)$, $u\in l\cap U$, $\alpha\in P^2$ pontra jelöljük $\varphi(\xi)$-vel a $\Theta_{u,X}$-en levő α egyenes és az X metszéspontját. Bizonyítsuk be, hogy a φ egy $P^1\times P^2\to X$ racionális leképezést határoz meg.

IV. FEJEZET

A METSZET INDEXEI

1. §. Definíció és főbb tulajdonságok

1. *A metszet indexének definíciója*

A sokaságok metszetének dimenziójáról szóló tételek, amelyeket az I. fejezetben bizonyítottunk, lehetőséget adnak gyakran azt állítani, hogy valamely egyenletrendszereknek van megoldásuk. Viszont azok semmit sem mondanak a megoldások számáról, ha ez a szám véges. A különbség ugyanolyan, mint a polinom gyökének létezéséről szóló tétel és azon tétel között, amely arról szól, hogy a polinom gyökeinek száma egyenlő annak fokszámával. Ez az utóbbi tétel csak akkor igaz, ha minden gyököt multiplicitásával együtt számolunk. Analóg módon, annak érdekében, hogy általános tételeket fogalmazhassunk meg a részsokaságok metszéspontjainak a számáról, ezeknek a pontoknak valamilyen multiplicitást kell tulajdonítsunk. Ezt fogjuk tenni ebben a pontban.

1-kodimenziós részsokaságok metszetét fogjuk vizsgálnia sima X sokaságon. Az az eset fog bennünket érdekelni, amikor a metszéspontok száma véges. Ha $\dim X=n$, a $C_1, \ldots, C_k$-ek 1-kodimenziós olyan részsokaságok, amelyeknek metszete nem üres, akkor a metszetek dimenziójáról szóló tétel szerint $\dim(C_1\cap\ldots\cap C_k)>0$, ha $k<n$. Ezért természetes a $k=n$ esetet megvizsgálnunk. A következőkben haszná-

landó elmélet természetesebbé válik, ha az 1-kodimenziós részsokaságok helyett tetszőleges divizorokat tekintünk. Tehát n divizort, a $D_1, \dots, D_n$-t fogjuk vizsgálni az n-dimenziós X sokaságon. Ha $x \in X$, $x \in \bigcap \operatorname{Supp} D_i$ és $\dim_x \bigcap (\operatorname{Supp} D_i) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $D_1, \dots, D_n$ közös helyzetben vannak az x pontban. Ez azt jelenti, hogy az x pont valamely környezetében a $\bigcap (\operatorname{Supp} D_i)$ csak az egy x pontból áll. Ha a $D_1, \dots, D_n$ közös helyzetben van a $\bigcap (\operatorname{Supp} D_i)$ részsokaság minden pontjában, akkor ez a részsokaság véges számú pontból áll. Ekkor azt fogjuk mondani, hogy a $D_1, \dots, D_n$ közös helyzetben vannak.

Először meg fogjuk határozni a metszet indexét a közös helyzetben levő effektív divizorok esetében. Legyenek $D_1, \dots, D_n$ effektív divizorok, amelyek közös helyzetben vannak egy x pontban és ezen pont valamely környezetében az $f_1, \dots, f_n$ lokális egyenletekkel rendelkeznek. Akkor létezik olyan $U \in x$ környezet, amelyben az $f_1, \dots, f_n$ regulárisak és sehol sem vesznek fel 0 értéket az x ponton kívül. Hilbert gyökökről szóló tételéből következik, hogy az x pont O_x lokális gyűrűjében az $f_1, \dots, f_n$ függvényekkel generált ideál tartalmazza ezen gyűrű $\mathfrak{M}_x$ maximális ideáljának valamely hatványát. Legyen

$$(f_1, \dots, f_n) \supset \mathfrak{M}_x^k. \tag{1}$$

Tekintsük az $O_x/(f_1, \dots, f_n)$ faktorteret (k test felett). Ennek k-feletti dimenziója véges. Valóban, (1) miatt ennek céljából elegendő megmutatni, hogy $\dim_k O_x/\mathfrak{M}_x^k < \infty$. Utóbbi azonnal következik a hatványsorba fejtésről szóló tételből, ugyanis $\dim_k O_x/\mathfrak{M}_x^k$ cgybeesik a $<k$ fokszámú n-változós polinomok terének a dimenziójával.

A következőkben az E vektortér k test feletti dimenzióját $l(E)$-vel fogjuk jelölni.

1. DEFINÍCIÓ. Ha az n-dimenziós X sokaságon értelmezett, $D_1, \dots, D_n$ effektív divizorok közös helyzetben vannak egy $x \in X$ pontban és lokális egyenletük ezen pont valamely környezetében az $f_1, \dots, f_n$, akkor az

$$l(O_x/(f_1, \dots, f_n)) \tag{2}$$

számot a $D_1, \dots, D_n$ metszete *indexének (vagy multiplicitásának)* nevezzük ebben a pontban és $(D_1, \dots, D_n)_x$-szel jelöljük.

A szám valóban csak a $D_1, \dots, D_n$ divizoroktól függ, de nem függ azok $f_1, \dots, f_n$ lokális egyenleteinek a kiválasztásától, ugyanis ha $f_1', \dots, f_n'$ másik lokális egyenletek, akkor $f_i' = f_i g_i$, ahol $g_i, g_i^{-1} \in O_x$, és ezért $(f_1, \dots, f_n) = (f_1', \dots, f_n')$.

Legyenek most a $D_1, \dots, D_n$ divizorok nem feltétlenül effektívek. Előállítjuk őket $D_i = D_i' - D_i''$, $D_i' \geqq 0$, $D_i'' \geqq 0$ alakban, mégpedig a D_i' és D_i'' ne rendelkezzenek közös komponensekkel. Az ilyen előállítás egyértelmű. Feltételezzük, hogy a $D_1, \dots, D_n$ divizorok közös helyzetben vannak az x pontban. Akkor tetszőleges $i_1, \dots, i_n$ permutáció és bármely k esetén a $D_{i_1}' \dots D_{i_k}'$, $D_{i_{k+1}}'' \dots D_{i_n}''$ divizorok közös helyzetben vannak az x pontban, mivel $\operatorname{Supp} D_i = \operatorname{Supp} D_i' \cup \operatorname{Supp} D_i''$.

Meghatározzuk most a $D_1, \dots, D_n$ metszetének az indexét az x pontban az additivitás szerint, azaz legyen

$$(D_1, \dots, D_n)_x = \sum_{0 \leqq k \leqq n} (-1)^{n-k} (D_{i_1}', \dots, D_{i_k}', D_{i_{k+1}}'', \dots, D_{i_n}'')_x. \tag{3}$$

2. DEFINÍCIÓ. Ha a $D_1, \dots, D_n$ divizorok az n-dimenziós X sokaságon közös

helyzetben vannak, akkor a

$$\sum_{x \in \cap \operatorname{Supp} D_i} (D_1, \ldots, D_n)_x$$

számot azok *metszete indexének* nevezzük és $(D_1, \ldots, D_n)$-nel jelöljük. Formálisan kiterjeszthettük volna az összeget az összes $x \in X$ pontra, azonban csak a fent leírt tagok különböznek 0-tól.

MEGJEGYZÉS. A metszet indexét definiálni lehet az X sokaság simaságának a megkövetelése nélkül is, azonban akkor csak a lokálisan fő divizorokra érdemes szorítkoznunk. Ezen feltételek mellett az összes ismertetett definíció értelmes marad.

Most ismertetünk néhány példát, amelyek célja megmutatni, hogy a metszet bevezetett multiplicitásának fogalma összhangban van a geometriai szemlélettel.

1. PÉLDA. Legyen $\dim X = 1$, t lokális paraméter az x pontban, f a D divizor lokális egyenlete, $v_x(f) = v_x(D) = k$. Akkor $(D)_x = l(O_x/(f)) = l(O_x/(t^k)) = k$. Ilyen módon ebben az esetben a $(D)_x$ index egyenlő azzal a multiplicitással, amellyel x benne van a D divizorban.

A következő példákban fel fogjuk tételezni, hogy a D_i-k egyszerű divizorok, azaz 1-kodimenziós irreducibilis részsokaságok.

2. PÉLDA. Ha $x \in D_1 \cap \ldots \cap D_n$, akkor definíció szerint $(D_1, \ldots, D_n)_x \geqq 1$.

Tisztázzuk, mikor teljesül $(D_1, \ldots, D_n)_x = 1$. Mivel $f_i \in \mathfrak{M}_x$, és így $(f_1, \ldots, f_n) \subset \subset \mathfrak{M}_x$, viszont $l(O_x/\mathfrak{M}_x) = 1$, tehát a $(D_1, \ldots, D_n)_x = 1$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $(f_1, \ldots, f_n) = \mathfrak{M}_x$. Más szóval, az $f_1, \ldots, f_n$-eknek lokális paraméter rendszert kell alkotniuk. Láttuk a II. fejezet 2. § 1. pontban, hogy ez akkor és csakis akkor teljesül, ha a $D_1, \ldots, D_n$ részsokaságok az x pontban transzverzálisan metszik egymást, azaz az x pont egyszerű az összes D_i-n és $\cap \Theta_{x, D_i} = x$.

3. PÉLDA. Legyen $\dim X = 2$, az x pont egyszerű a D_1 és D_2 görbéken. A 2. példának megfelelően $(D_1, D_2) > 1$ akkor és csakis akkor, ha a Θ_{x, D_1} és Θ_{x, D_2} egyenesek egybeesnek. Legyenek f_i-k $(i = 1, 2)$ a D_i görbék lokális egyenletei, u és v lokális paraméterek az x pontban és $f_i \equiv \alpha_i u + \beta_i v$ $(\mathfrak{M}_x^2)$ $(i = 1, 2)$. Akkor a Θ_{x, D_i} egyenesek egyenletei $\alpha_i \xi + \beta_i \eta = 0$ $(i = 1, 2)$ alakúak, ahol a $\xi = d_x u$, $\eta = d_x v$ $\Theta_{x, X}$-beli koordináták. Ezért $\Theta_{x, D_1} = \Theta_{x, D_2}$ akkor és csakis akkor, ha $\alpha_2 u + \beta_2 v = \gamma(\alpha u + \beta_1 v)$ valamely $\gamma \in k$, $\gamma \neq 0$-ra, vagy, más szóval, $f_2 \equiv \gamma f_1$ $(\mathfrak{M}_x^2)$. Ezért természetes a D_1 és D_2 görbék x pontbeli érintkezése rendjének nevezni az olyan k számot, hogy létezik invertálható $g, g^{-1} \in O_x$ elem, amelyre $f_2 \equiv g f_1$ $(\mathfrak{M}_x^{k+1})$, és ilyen g nem létezik a k kitevő magasabb értékeire. Be fogjuk bizonyítani, hogy a metszet $(D_1, D_2)_x$ indexe 1-gyel nagyobb a D_1 és D_2 görbék x pontbeli érintésének rendjénél.

Ennek érdekében megjegyezzük, hogy mivel az x egyszerű pont a D_1-en, így feltételezhetjük, hogy f_1 egyike az x pontbeli lokális paraméter rendszer elemeinek. Másrészt $g^{-1} f_2$ a D_2 görbe lokális egyenlete. Ezért feltételezhetjük, hogy az u és v lokális paraméterek, a D_1 lokális egyenlete u, a D_2 egyenlete f és $f \equiv u + \varphi(u, v)$ $(\mathfrak{M}_x^{k+2})$, ahol φ egy $k+1$-ed fokú forma. Itt φ nem osztható u-val, különben a D_1 és D_2 érintkezésének rendje $> k$ volna. Ezért

$$\varphi(0, v) = C v^{k+1}, \quad C \neq 0. \tag{4}$$

A metszet indexének definíciója szerint

$$(D_1, D_2)_x = l(O_x/(u, f)) = l(O_x/(u)/(u, f)/(u)).$$

Nyilvánvaló, hogy $O_x/(u)=\bar{O}$ az x pont lokális gyűrűje D_1-en, és az $O_x\to\bar{O}$ homomorfizmus az X-en értelmezett függvény szűkítése a D_1 görbére. Ezenkívül $(u,f)/(u)=(\bar{f})$, ahol $\bar{f}$ az f képe $\bar{O}$-ban. Mivel $\bar{O}$-ban $\bar{f}\in(\mathfrak{M}_x^{k+1})$, $\bar{f}\equiv\bar{\varphi}(\mathfrak{M}_x^{k+2})$, a (4) miatt pedig $\bar{\varphi}\notin\mathfrak{M}_x^{k+2}$, így $v_x(\bar{f})=k+1$ és $l((\bar{O})/(\bar{f}))=k+1$. Ilyen módon $(D_1,D_2)=k+1$.

4. PÉLDA. Legyen megint dim $X=2$ és x szinguláris pont a D-n. Ez azt jelenti, hogy $f\in\mathfrak{M}_x^2$, ahol f a D lokális egyenlete. Ezért természetes a szinguláris pont multiplicitásának nevezni azt a legnagyobb k-t, amelyre $f\in\mathfrak{M}_x^k$. Be fogjuk bizonyítani, hogy az x pontban D-vel közös helyzetben levő tetszőleges D' görbére

$$(D,D')_x\geqq k, \tag{5}$$

és léteznek olyan görbék, hogy $(D',D)_x=k$.

Legyen f' a D' görbe lokális egyenlete. Jelöljük az $O_x/\mathfrak{M}_x^k$ gyűrűt $\bar{O}$-val és az f' képét $\bar{O}$-ban $\bar{f}$-sal. Mivel $f\in\mathfrak{M}_x^k$, így $(D,D')_x=l(O_x/(f,f'))\geqq l(\bar{O}/(\bar{f}))$. Az $\bar{O}$ gyűrű — a hatványsorokba fejtésről szóló tételnek megfelelően — izomorf a $k[u,v]/(u,v)^k$ gyűrűvel. Ezért az mint vektortér izomorf az u és v változós $<k$ fokszámú polinomok terével és dimenziója $1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$. Ha $f'\in\mathfrak{M}_x^l$, $f'\notin\mathfrak{M}_x^{l+1}$, akkor az $(\bar{f})$ ideál elemeinek $\bar{f}\cdot g$ alakú polinomok felelnek meg, ahol g befutja az összes $<k-l$ fokszámú polinomot. Ezért $l((\bar{f}))\leqq 1+\ldots+(k-l)=\dfrac{(k+1-l)(k-l)}{2}$. Mivel $f'\in\mathfrak{M}$, így $l\geqq 1$, és ezért $l(\bar{O}/(\bar{f}))=l(\bar{O})-l((\bar{f}))\geqq k$.

Most bebizonyítjuk, hogy (5)-ben az egyenlőség elérhető.

Legyen $f\equiv\varphi(u,v)$ $(\mathfrak{M}_x^{k+1})$, ahol φ egy k-adfokú forma. Tekintsük a φ-t nem osztó u és v-től függő polinomot. Az u és v lineáris transzformációi miatt feltételezhető, hogy ez az u, azaz hogy $\varphi(0,v)\neq 0$. Vegyük D'-ként az u lokális egyenletű görbét. Akkor $(D,D')_x=l(O_x/(u,f))$, viszont, amint láttuk a 3. példa ismertetésénél, ez a szám egyenlő k-val.

2. *A metszet indexének additív tulajdonsága*

1. TÉTEL. *Ha a $D_1,\ldots,D_{n-1},D_n'$ és $D_1,\ldots,D_{n-1},D_n''$ divizorok közös helyzetben vannak az x pontban, akkor*

$$(D_1,\ldots,D_{n-1},D_n'+D_n'')_x=(D_1,\ldots,D_{n-1},D_n')_x+(D_1,\ldots,D_{n-1},D_n'')_x. \tag{1}$$

Bizonyítás. Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy az 1. tételt elegendő bizonyítani a $D_1,\ldots,D_{n-1},D_n',D_n''$ effektív divizorokra. A továbbiakban ezeket a divizorokat effektíveknek fogjuk tekinteni.

A $D_1,\ldots,D_{n-1},D_n',D_n''$ divizorok lokális egyenleteit jelöljük $f_1,\ldots,f_{n-1},f_n',f_n''$-vel, az $O_x/(f_1,\ldots,f_{n-1})$ gyűrűt $\bar{O}$-val, az f_n' és f_n'' képeit $\bar{O}$-ban pedig f és g-vel. Akkor

$$(D_1,\ldots,D_{n-1},D_n'+D_n'')_x=l(\bar{O}/(f\cdot g)),$$

$$(D_1,\ldots,D_{n-1},D_n')_x=l(\bar{O}/(f)),$$

$$(D_1,\ldots,D_{n-1},D_n'')_x=l(\bar{O}/(g)).$$

Mivel

$$0\to(g)/(f\cdot g)\to\bar{O}/(f\cdot g)\to\bar{O}/(g)\to 0$$

sorozat pontos, így

$$l(\bar{O}/(f\cdot g)) = l(\bar{O}/(g)) + l((g)/(f\cdot g)). \tag{2}$$

Ha a g elem nem osztja 0-t az $\bar{O}$-ban, akkor a g-vel való szorzás a $\bar{O}/(f) \simeq (g)/(f\cdot g)$ izomorfizmust határozza meg és

$$l((g)/(f\cdot g)) = l(\bar{O}/(f)). \tag{3}$$

Ezért, ha bebizonyítjuk, hogy a g nem osztója 0-nak $\bar{O}$-ban, akkor a (2) és (3)-ból következni fog (1).

Az n-dimenziós sokaság egyszerű pontjának O_x lokális gyűrűjében n elem $f_1, \ldots, f_n$ sorozatát egyszerű sorozatnak nevezzük, ha f_i nem osztója 0-nak az $O_x/(f_1, \ldots, f_{i-1})$-ban az összes $i=1, \ldots, n$-re.

A fent ismertetett fejtegetések megmutatják, hogy az 1. tétel következik a lenti állításból.

1. LEMMA. *Ha a $D_1, \ldots, D_n$ divizorok közös helyzetben vannak az egyszerű x pontban, akkor azok $f_1, \ldots, f_n$ lokális egyenletei egyszerű sorozatot alkotnak.*

Az 1. lemma bizonyítása egy egyszerű segédállítás kimondását teszi szükségessé.

2. LEMMA *Az a tulajdonság, hogy egy sorozat egyszerű legyen, nem változik a sorozat elemeinek a felcserélésétől.*

A 2. lemma bizonyítása. Elegendő bebizonyítani, hogy két szomszédos f_i és f_{i+1} elem felcserélésével egy egyszerű sorozatból ismét egyszerű sorozatot kapunk. Legyen $(f_1, \ldots, f_{i-1}) = \mathfrak{a}$, $O_x/\mathfrak{a} = A$ és jelöljük a és b-vel az f_i és f_{i+1} képeit A-ban. Az egész visszavezethető a 2. lemma bizonyítására az a, b egyszerű sorozat esetében A-ban. Be kell bizonyítanunk, hogy 1) b nem osztója 0-nak A-ban, és 2) a nem osztója 0-nak mod b.

1. Legyen $xb=0$. Bizonyítsuk, hogy akkor

$$x \in (a)^k \tag{4}$$

minden k-ra. Abból, hogy A *Noether*-féle, és a II. fejezet 2. § 5. tétel miatt következni fog, hogy $x=0$.

A (4) egyenlőség indukcióval ellenőrizhető. Ha már $x = x_1 a^k$, akkor $x_1 a^k b = 0$. Mivel az a, b egyszerű sorozat, így a nem osztója 0-nak és így $x_1 b = 0$. Ismét az a, b sorozat egyszerűségéből következik, hogy $x_1 \in (a)$, azaz $x \in (a)^{k+1}$.

2. Legyen $xa = yb$. Az a, b sorozat egyszerű voltából következik, hogy $y = az$, $z \in A$, és így $x = zb$.

A lemmát bebizonyítottuk.

Az 1. lemma bizonyítása. A bizonyítást az X sokaság n dimenziója szerinti indukcióval végezzük. A lemma feltételeiből és a metszet dimenziójáról szóló tételből következik, hogy $\dim_x (\operatorname{Supp}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Supp}(f_{n-1})) = 1$. Ezért található olyan u függvény, hogy $u(x)=0$, az x pont egyszerű az X_u részsokaságon és az $(f_1), \ldots, (f_{n-1})$ divizorok közös helyzetben vannak az x pontban. Elegendő u-ként választani egy olyan hipersík egyenletét, amely átmegy az x-en, nem tartalmazza a $\Theta_{x,X}$-et, és a $\operatorname{Supp}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{Supp}(f_{n-1})$ görbe egyetlen komponensét sem. Tekintsük az $f_1, \ldots, f_{n-1}$ függvények szűkítéseit X_u-ra. Nyilvánvalóan azok eleget tesznek a lemma feltételeinek, és ezért az induktív feltételezés szerint X_u-n egyszerű sorozatot alkotnak. Mivel az x pont lokális gyűrűje az X_u-n $O_x/(u)$ alakú, azért látjuk, hogy az $u, f_1, \ldots, f_{n-1}$ egyszerű sorozat. A 2. lemmából következik, hogy akkor az $f_1, \ldots, f_{n-1}, u$ sorozat is egyszerű.

Hogy az $f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n$ sorozat egyszerűségét bebizonyítsuk, már csak azt kell ellenőriznünk, hogy f_n nem osztója 0-nak az $O_x/(f_1, \ldots, f_{n-1})$-ben. Jelöljük g és v-vel az f_n és u képét az $O_x/(f_1, \ldots, f_{n-1})$-ben. Az $f_1, \ldots, f_n$ függvényekre tett feltételezésből következik, hogy az x pont valamely környezetében az $f_1 = \ldots = f_n = 0$ egyenleteknek x-en kívül nincs más megoldásuk. Ezért *Hilbert* gyökökről szóló tétele megmutatja, hogy $(f_1, \ldots, f_n) \supset \mathfrak{M}_x^k$ valamely k-ra. Speciálisan $u^k \in (f_1, \ldots, f_n)$, azaz $u^k \equiv a f_n((f_1, \ldots, f_{n-1}))$ valamely $a \in O_x$ esetén.

Ha f_n osztója volna 0-nak $O_x/(f_1, \ldots, f_{n-1})$-ben, akkor innen az következne, hogy u^k is, és így u is osztója 0-nak. Ez viszont ellentmond annak, hogy — amint bebizonyítottuk — az $f_1, \ldots, f_{n-1}, u$ egyszerű sorozat.

Az 1. lemmát és ezzel az 1. tételt is bebizonyítottuk.

3. *Az ekvivalenciával szembeni invariáns tulajdonság*

Hozzáfogunk a metszet indexei legfőbb tulajdonságának a bizonyításához, amely tulajdonság az összes alkalmazásuk alapját képezi.

2. TÉTEL. *Ha az X sokaság sima és projektív, és mind a $D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n$ divizorok, mind a $D_1, \ldots, D_{n-1}, D'_n$ divizorok is közös helyzetben vannak, a D_n és D'_n divizorok pedig ekvivalensek, akkor*

$$(D_1, \ldots, D_{n-1}, D_n) = (D_1, \ldots, D_{n-1}, D'_n). \tag{1}$$

A tétel feltételei szerint $D_n - D'_n = (f)$ és az (1) egyenlőség ekvivalens azzal, hogy

$$(D_1, \ldots, D_{n-1}, (f)) = 0, \tag{2}$$

amikor $D_1, \ldots, D_{n-1}$ és (f) közös helyzetben vannak.

Előállítva a D_i-ket $1 \leqq i \leqq n-1$ effektív divizorok különbségeiként, azt látjuk, hogy elegendő bizonyítani (2)-t a $D_i > 0$, $1 \leqq i \leqq n-1$ esetére. A következőkben ezt is fogjuk feltételezni.

A 2. tétel bizonyítása a metszet indexének egy általánosabb fogalmát használja fel, mint az, amit eddig használtunk. Éspedig legyen adva $k \leqq n$ effektív $D_1, \ldots, D_k$ divizor az n-dimenziós sima X sokaságon. Azt fogjuk mondani, hogy azok közös helyzetben vannak, ha dim $\bigcap_{i=1,\ldots,k}$ Supp $D_i = n-k$. Tételezzük fel, hogy ez a tulajdonság teljesül és

$$\bigcap_{i=1,-1,k} \operatorname{Supp} D_i = \bigcup C_j, \tag{3}$$

ahol C_j irreducibilis $n-k$ dimenziójú sokaságok.

Ilyen feltételek mellett a C_j komponenseknek multiplicitásokat tulajdoníthatunk, amelyeket a metszet multiplicitásának nevezünk, és amelyek egybeesnek a metszet indexével, ha $k = n$, tehát a C_j egy pontból áll.

A metszet multiplicitásainak definíciója bizonyos általános fogalmakat használ fel, amelyeket most be fogunk vezetni.

1. DEFINÍCIÓ. Tekintsük az irreducibilis X sokaság irreducibilis C *részsokaságát* és olyan $f \in k(X)$ függvényeket, amelyek regulárisak legalább egy $c \in C$ pontban (akkor azok, természetesen, regulárisak a C sokaság egy egész nyílt részhalmazában). Az ilyen függvények egy O_c gyűrűt alkotnak, amelyet az *irreducibilis C részsokaság lokális gyűrűjének* nevezünk.

Ha a C egy pont, akkor a pont lokális gyűrűjének korábbi fogalmához jutunk. Ha $C=X$, akkor $O_C=k(X)$. Általános esetben O_C lokális gyűrű. Valóban, ez tartalmazza az olyan függvényekből álló $\mathfrak{M}_C$ ideált, amelyek regulárisak és 0 értékűek a C sokaság valamely nyílt részhalmazában. Az $\mathfrak{M}_C$ ideál — mint azt könnyű belátni — tartalmazza az O_C gyűrű összes többi ideálját. Hogy ez a gyűrű Noether-féle, szó szerint úgy bizonyítható, mint a pont lokális gyűrűje esetében a II. fejezet 1. § 1. pontjában. Minden $f \in O_C$ függvény szűkítéssel egy racionális függvényt határoz meg C-n. Innen könnyű levezetni, hogy $O_C/\mathfrak{M}_C=k(C)$.

Az O_C lokális gyűrű fogalma speciális esete egy tisztán algebrai konstrukciónak — a gyűrű prímideálja szerinti lokalizációjának. Az A gyűrű $\mathfrak{p}$ prímideálja szerinti lokalizációja az (a, b), $a, b \in A$, $b \notin \mathfrak{p}$ párokból áll, közben az $(a, b) \sim (a_1, b_1)$ azonosítás történik, ha létezik olyan $c \notin \mathfrak{p}$, hogy $c(ab_1-ba_1)=0$. A műveletek definíciója

$$(a, b)+(a_1, b_1) = (ab_1+ba_1, +bb_1),$$

$$(a, b)(a_1, b_1) = (aa_1, bb_1).$$

Ha A zérusosztómentes és K annak kvociensteste, akkor $A_\mathfrak{p} \subset K$ és $\frac{a}{b}$, $b \notin \mathfrak{p}$ hányadosokból áll. Ha $A=k[X]$, X irreducibilis affin sokaság, $C \subset X$ irreducibilis részsokaság és $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_C$, akkor $A_\mathfrak{p}=O_C$, mivel azok definíciója egybeesik.

Általános esetben a $h\colon a \to (a, 1)$ leképezés A-nak $A_\mathfrak{p}$-ba való homomorfizmusát határozza meg. A $h(b)$, $b \notin \mathfrak{p}$ elemek invertálhatók $A_\mathfrak{p}$-ban. Az $A_\mathfrak{p}$ gyűrű lokális, és annak maximális ideálja az (a, b), $a \in \mathfrak{p}$ párokból áll.

Ismertetjük a lokalizáció néhány egyszerű tulajdonságát. Bármely $\mathfrak{a} \subset A$ ideálnak megfelel egy olyan $h(\mathfrak{a}) \subset A_\mathfrak{p}$ ideál, amelyet a $h(x)$, $x \in \mathfrak{a}$ elemek generálnak. Ez az ideál olyan (a, b) párokból áll, amelyekre létezik olyan $b' \notin \mathfrak{p}$, hogy $ab' \in \mathfrak{a}$. Közvetlen ellenőrzés megmutatja, hogy $h(\mathfrak{a})=A_\mathfrak{p}$, ha $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, ha pedig $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, akkor

$$A_\mathfrak{p}/h(\mathfrak{a}) = (A/\mathfrak{a})_{\bar{\mathfrak{p}}}, \tag{4}$$

ahol $\bar{\mathfrak{p}}$ a $\mathfrak{p}$ ideál képe az $A/\mathfrak{a}$ gyűrűben.

Utolsó és ugyanolyan egyszerűen ellenőrizhető tulajdonság: h $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ az A gyűrű ideáljai, $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ és $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} \cong A/\mathfrak{q}$, ahol $\mathfrak{q}$ egy prímideál A-ban, akkor az $\mathfrak{p} \subset A$ ideál szerinti lokalizáció mellett $h(\mathfrak{a}) \supset h(\mathfrak{b})$, mégpedig

$$\left.\begin{aligned} h(\mathfrak{a}) &= h(\mathfrak{b}), && \text{ha} \quad \mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}, \\ h(\mathfrak{a})/h(\mathfrak{b}) &\cong A\mathfrak{p}/h(\mathfrak{p}), && \text{ha} \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

A második fogalom, amely szükséges a metszet multiplicitásainak a definiálásához, a modulus hossza.

2. DEFINÍCIÓ. Egy A gyűrű feletti M modulust *véges hosszúságú modulusnak* nevezünk, ha rendelkezik részmodulusainak olyan véges

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n = 0, \quad M_i \neq M_{i+1} \tag{6}$$

láncával, ahol az M_i/M_{i+1} faktormodulosok egyszerűek, azaz nem tartalmaznak nemtriviális részmodulust. *Jordan-Hölder* tételéből következik, hogy az összes ilyen lánc ugyanazon n számú modulusból áll, amelyet a modulus hosszának nevezünk és $l(M)$-mel jelölünk.

Ha A egy test, akkor a hossz fogalma a vektortér dimenziójává alakul.

Később használni fogjuk ennek a fogalomnak két majdnem nyilvánvaló tulajdonságát.

Ha a modulus hossza véges, akkor ez igaz annak bármely részmodulusára és faktor-modulusára is.

Ha M modulus olyan (6) részmodulus lánccal rendelkezik, amelyben az M_i/M_{i+1} modulusok hossza véges, akkor az M modulus hossza is véges és $l(M)=\sum l(M_i/M_{i+1})$.

Végül áttérhetünk a metszet multiplicitásának a definíciójához. Ez a definíció pontosan lemásolja a metszet indexének a definícióját. Legyen C a (3) felbontásban szereplő C_j komponensek valamelyike. Kiválasztunk egy $x\in C$ pontot és a D_i divizorok f_i lokális egyenleteit ezen pont környezetében. Akkor $f_i\in O_C$, és az $\mathfrak{a}=(f_1, \ldots, f_k)\subset O_C$ ideál nem függ a lokális egyenletek kiválasztásától, sem az x pont kiválasztásától. Valóban, ha $g_1, \ldots, g_k$ más lokális egyenletek egy másik pont környezetében, akkor f_i és g_i is lokális egyenletei a D_i divizornak a C-t metsző valamely egész nyílt halmazban. Innen következik, hogy $f_i g_i^{-1}\in O_C$ és $g_i f_i^{-1}\in O_C$, ezért $(f_1, \ldots, f_n)=(g_1, \ldots, g_n)$.

LEMMA. *Az $O_c/\mathfrak{a}$ modulus hossza véges.*

Valóban, mivel C az $f_1=\ldots=f_k=0$ egyenletek által meghatározott részsokaság irreducibilis komponense, így létezik olyan $U\subset X$ nyílt affin részhalmaz, amely metszi C-t, és amelyben ezek az egyenletek meghatározzák a C részsokaságot. Akkor Hilbert gyökökről szóló tétele miatt $(f_1, \ldots, f_k)\supset \mathfrak{a}_c^r$ valamely $r>0$-ra. Tekintsük most az $A_\mathfrak{p}$ lokalizációt, ahol $A=k[U]$, $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_C$. Amint már említettük. $A_\mathfrak{p}=O_C$, $h((f_1, \ldots, f_k))=\mathfrak{a}$ és $h(\mathfrak{a}_C)=\mathfrak{M}_C$. Ezért az O_C-ben $\mathfrak{a}\supset\mathfrak{M}_c^r$. Hogy ellenőrizzük, hogy az $O_C/\mathfrak{a}$ modulusnak véges hossza van, elegendő erről meggyőződni az $M=O_C/\mathfrak{M}_c^r$ modulussal kapcsolatban.

Megvizsgálva részmodulusok $M_i=\mathfrak{M}_c^i/\mathfrak{M}_c^r$ sorozatát, azt látjuk, hogy elegendő meggyőződni az $\mathfrak{M}_c^i/\mathfrak{M}_c^{i+1}$ modulus hosszának végességéről. Viszont az A gyűrű ezen modulusra való hatására az $\mathfrak{M}_C$ ideál annullál minden elemet. Ezért a modulusra hat $A/\mathfrak{M}_C=k(C)$, úgy hogy $\mathfrak{M}_c^i/\mathfrak{M}_c^{i+1}$ egy vektortér a $k(C)$ test felett és annak hossza egybeesik a dimenzióval. Mivel az A gyűrű *Noether*-féle, ennek a modulusnak véges generátor rendszere van, azaz véges dimenziós vektortér, ami bizonyítja a lemmát.

3. DEFINÍCIÓ. Az $l(O_C/\mathfrak{a})$ számot a $D_1, \ldots, D_k$ *divizorok metszete multiplicitásának* nevezzük a C komponensben. Ezt $(D_1, \ldots, D_k)_C$-vel jelöljük.

A 2. tétel egyszerű következménye két állításnak, amelyeket most megfogalmazunk.

1. ÁLLÍTÁS. *Ha a $D_1, \ldots, D_n$ divizorok közös helyzetben vannak az x pontban és $D_1\geqq 0, \ldots, D_{n-1}\geqq 0$, akkor*

$$(D_1, \ldots, D_n)_x=\sum_{j=1}^{r}(D_1, \ldots, D_{n-1})_{C_j}(\varrho_{C_j}(D_n))_x. \tag{7}$$

ahol $C_1, \ldots, C_r$ *a* $\operatorname{Supp} D_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Supp} D_{n-1}$ *sokaság irreducibilis komponensei, a* $\varrho_{C_j}(D_n)$ *pedig a* D_n *divizor szűkítése a* C_j*-re* (l. III. fejezet 1. § 3. pontot).

Megjegyezzük, hogy mivel a $D_1, \ldots, D_n$ divizorok közös helyzetben vannak az x pontban, így

$$\dim C_j = 1, \quad x \in \operatorname{Supp} \varrho_{C_j}(D_n) \quad \text{és a} \quad (\varrho_{C_j}(D_n))_x$$

metszet indexe definiálva van (a C görbén).

2. ÁLLÍTÁS. *Egy* C *görbe és az azon értelmezett lokálisan fő* D *divizor esetén*

$$(D)_x = \sum_{\nu(y)=x} (\nu^*(D))_y, \tag{8}$$

ahol $\nu: C^\nu \to C$ *a* C *görbe normalizációja.*

Most le fogjuk vezetni a 2. tételt ezekből az állításokból, míg az állítások bizonyítását a következő pontra hagyjuk.

Felírjuk a metszet indexét

$$(D_1, \ldots, D_n) = \sum_{x \in X} (D_1, \ldots, D_n)_x$$

alakban. Az 1. állítás szerint

$$(D_1, \ldots, D_n) = \sum_{j=1}^{r} (D_1, \ldots, D_{n-1})_{C_j} \sum_{x \in C_j} (\varrho_{C_j}(D_n))_x,$$

a 2. állítás miatt viszont

$$\sum_x (\varrho_{C_j}(D_n))_x = \sum_{y \in C_j^\nu} ((\nu^* \varrho_{C_\nu})(D_n))_y.$$

Ha D_n fő divizor, $D_n = (f)$, akkor a $(\nu^* \varrho_{C_\nu})(D_n)$ divizor is az, ugyanis $(\nu^* \varrho_{C_j})(D_n) = (g)$ és $((g))_y = \nu_y(g)$.

Az X sokaság projektív volta miatt a C_j görbék projektívek, a II fejezet 5. § 7. tétel szerint viszont ez igaz a C_j-kre is. A III. fejezet 2. § 1. tétele alapján $\sum_{y \in C_j^\nu} \nu_y(g) = \deg((g)) = 0$, ahonnan éppen az következik, hogy $(D_1, \ldots, (f)) = 0$.

4. *Az invariáns tulajdonság bizonyításának a befejezése*

Bebizonyítjuk az 1. állítást. Legyenek $f_1, \ldots, f_{n-1}$ a $D_1, \ldots, D_{n-1}$ divizorok lokális egyenletei, $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_{n-1}) \subset O_x$, $O_x/\mathfrak{a} = \bar{O}_x$, $\bar{f}$ az f képe (a D_n lokális egyenletének) az $\bar{O}_x$-ben. A metszet indexének a definíciója megmutatja, hogy

$$(D_1, \ldots, D_n)_x = l(\bar{O}_x/(\bar{f})), \tag{1}$$

a 2. pont 1. lemmája pedig azt állítja, hogy $\bar{f}$ nem osztója 0-nak az $\bar{O}_x$-ben.

Mindenekelőtt tisztáznunk kell, milyenek az $\bar{O}_x$ gyűrű prímideáljai. Jelöljük $\mathfrak{p}_i$-vel az O_x azon függvényeinek az összességét, amelyek azonosan egyenlők 0-val a C_i görbén, $\bar{\mathfrak{p}}_i$-vel pedig a $\mathfrak{p}_i$ ideál képét $\bar{O}_x$-ban. Nyilvánvaló, hogy

$$\bar{O}_x/\bar{\mathfrak{p}}_i = O_x/\mathfrak{p}_i = O_{x, C_i} \tag{2}$$

az x pont lokális gyűrűje a C_i görbén. Jelöljük $\bar{\mathfrak{M}}$-mel az $\bar{O}_x$ gyűrű olyan maximális ideálját, amely az $\mathfrak{M}_x \in O_x$ ideál képe.

1. LEMMA. A $\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_r$ *és* $\mathfrak{M}$ *kimerítik az* $\bar{O}_x$ *gyűrű összes prímideálját.*

A lemma állítása ekvivalens azzal, hogy a $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ és $\mathfrak{M}_x$ az O_x gyűrű összes olyan prímideálja, amely tartalmazza az $\mathfrak{a}$ ideált. Legyen $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \subset O_x$, ahol $\mathfrak{p}$ prímideál. Tekintsük az x pont olyan U affin környezetét, amelyben az $f_1, \ldots, f_{n-1}$ regulárisak, és legyen $A = k[U]$, $\mathfrak{P} = \bigcap \mathfrak{p}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{P}$ prímideál. Jelöljük V-vel azt a részsokaságot, amelyet az meghatároz U-ban. Mivel $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, így $V \subset C_1 \cup \ldots \cup C_r$, mivel pedig $\mathfrak{P}$ prímideál, így V irreducibilis. Ezért V vagy egybeesik a C_i-k egyikével, és akkor $\mathfrak{P} = A \cap \mathfrak{p}_i$, vagy pedig V egy $y \in U$ pont (emlékeztetőül arra, hogy a C_i-k egydimenziósak). Utóbbi esetben, ha $y \neq x$ a $\mathfrak{P}$-ban, tehát a $\mathfrak{p}$-ben is van olyan függvény, amely nullától különböző az x pontban. Mivel O_x lokális gyűrű, így akkor $\mathfrak{p} = O_x$, ugyanakkor pedig maga a gyűrű nem tartozik saját prímideáljai közé. Ilyen módon az egyetlen megmaradt lehetőség a $\mathfrak{P} = A \cap \mathfrak{M}_x$. Mivel $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cdot O_x$, így innen azonnal következik, hogy $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \ldots, r$, vagyis $\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_x$, amint a lemma állítja.

2. LEMMA. *Az* $\bar{O}_x$ *gyűrű rendelkezik ideáloknak olyan*

$$\bar{O}_x = \mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{q}_s = 0$$

sorozatával, hogy

$$\mathfrak{q}_i/\mathfrak{q}_{i+1} \cong \bar{O}_x/\bar{\mathfrak{p}}, \tag{3}$$

ahol $\bar{\mathfrak{p}}$ *az* $\bar{O}_x$ *gyűrű valamely prímideálja* ($\bar{\mathfrak{p}}$ *függ a j-től*).

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $a \in \bar{O}_x$, $a \neq 0$ elemet, és jelöljük Ann (a)-val az annullátorát, azaz összes olyan $x \in \bar{O}_x$ elemek összességét, amelyekre $xa = 0$. Ha

$$\mathrm{Ann}\,(a) \subset \mathrm{Ann}\,(a_1) \subset \mathrm{Ann}\,(a_2) \subset \ldots,$$

akkor, mivel az $\bar{O}_x$ gyűrű *Noether*-féle, ez a sorozat megszakad, ezért feltételezhetjük, hogy a következő tulajdonsággal rendelkezik: az Ann $(a) \subset$ Ann (a'), $a' \neq 0$-ból következik, hogy Ann $(a) =$ Ann (a'). Bebizonyítjuk, hogy akkor az Ann (a) ideál prímideál. Valóban, ha $bc \in$ Ann (a), $b \notin$ Ann (a), akkor $abc = 0$, $ab \neq 0$, és ezért Ann $(a) \subset$ Ann (ab), akkor pedig az a elem tulajdonsága miatt Ann $(a) =$ Ann (ab). Viszont $c \in$ Ann (ab), és így $c \in$ Ann (a). Ez pedig bebizonyítja, hogy Ann (a) prímideál. Legyen Ann $(a) = \bar{\mathfrak{p}}$. Az $x \to ax$ homomorfizmus a modulusok $a \cong \bar{O}_x/\bar{\mathfrak{p}}$ izomorfizmusát határozza meg.

Most már csak át kell térnünk az $\bar{O}_1 = \bar{O}_x/(a)$ gyűrűre és alkalmazni arra ugyanazt az okoskodást. Az ideálok $\mathfrak{q}_s \subset \mathfrak{q}_{s+1} \subset \ldots$ növekvő láncát kapjuk, és a szomszéd ideálok bármely párjára teljesül (3). A sorozat megszakad az $\bar{O}_x$ gyűrű *Noether*-féle volta miatt.

3. LEMMA. *Ha* k_j *az a szám, amely megmutatja, hogy a* (3) *egyenlőségben hányszor teljesül* $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_j$, *akkor* $(D_1, \ldots, D_{n-1})_{C_j} = k_j$.

Bizonyítás. A lokalizáció definíciójából azonnal következik, hogy $(O_x)_{\mathfrak{p}_j} = O_{C_j}$. Alkalmazva a 3. pont (4) összefüggését, azt kapjuk, hogy

$$O_{C_j}/(f_1, \ldots, f_{n-1}) = (O_x/(f_1, \ldots, f_{n-1}))_{\mathfrak{p}_j} = (\bar{O}_x)_{\mathfrak{p}_j}.$$

Alkalmazzuk az ideálok láncára a h leképezést. Így az

$$O_{C_j}/(f_1, \ldots, f_{n-1}) = h(\mathfrak{q}_1) \supseteqq h(\mathfrak{q}_2) \supseteqq \ldots \supseteqq h(\mathfrak{q}_s) = 0$$

láncot kapjuk. A 3. pont (5) összefüggése megmutatja, milyenek a faktorok ebben a láncban, éspedig ha $\bar{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{p}_j$, akkor $h(\mathfrak{q}_i)=h(\mathfrak{q}_{i+1})$, ha pedig $\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}_j$, akkor $h(\mathfrak{q}_i)/h(\mathfrak{q}_{i+1})=(\bar{O}_x/\bar{\mathfrak{p}}_j)_{\mathfrak{p}_j}=k(C_j)$. Ilyen módon az $O_{C_j}/(f_1, \dots, f_{n+1})$ modulus hossza egyenlő a k_j számmal, amit a lemma állított.

Most be lehet bizonyítani az 1. állítást. A

$$0 \to \mathfrak{q}_2 \to \bar{O}_x \to \bar{O}_x/\mathfrak{q}_2 \to 0$$

pontos sorozatunk van.

Két eset lehetséges: 1) a $\mathfrak{q}_2$-nek (3) szerinti megfelelő $\bar{\mathfrak{p}}$ prímideál egyenlő $\mathfrak{M}$-mel, 2) $\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{p}}_j$ valamely $j=1, \dots, r$-re.

Az 1) esetben $\bar{O}_x/\mathfrak{q}_2 \cong \bar{O}_x/\mathfrak{M}=k$. Mivel $\bar{f}$ nem zérusosztó $\bar{O}_x$-ben, így az $x \to \bar{f} \cdot x$ leképezés átviszi az $\bar{O}_x$ tetszőleges ideálját egy vele izomorf ideálba, mint $\bar{O}_x$ modulusba. Speciálisan

$$\bar{O}_x/\mathfrak{q}_2 \cong f\bar{O}_x/f\mathfrak{q}_2. \tag{4}$$

Az

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bar{O}_x & \\ f\bar{O}_x \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \mathfrak{q}_2 \arrow[ul, phantom, sloped, "\supset"] \\ & f\mathfrak{q}_2 \arrow[ul, phantom, sloped, "\supset"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & \end{tikzcd}$$

sémából azt kapjuk, hogy

$$l(O_x/f\mathfrak{q}_2) = l(O_x/f\bar{O}_x)+l(f\bar{O}_x/\mathfrak{q}_2) = l(\bar{O}_x/\mathfrak{q}_2) + l(\mathfrak{q}_2/f\mathfrak{q}_2)$$

és az ebben az egyenlőségben szereplő számok mind végesek. (4) miatt innen az következik, hogy $l(\bar{O}_x/f\bar{O}_x)=l(\mathfrak{q}_2/f\mathfrak{q}_2)$.

A 2) esetben $\bar{O}_x/\mathfrak{q}_2 \cong O_{x,C_j}$, és a

$$0 \to \mathfrak{q}_2/f\mathfrak{q}_2 \to \bar{O}_x/f\bar{O}_x \to O_{x,C_j}/fO_{x,C_j} \to 0 \tag{5}$$

sorozattal van dolgunk.

Ez a sorozat pontos. Az ellenőrzés teljesen nyilvánvaló, kivéve egy helyet, hogy a $\mathfrak{q}_2/f\mathfrak{q}_2 \to \bar{O}_x/f\bar{O}_x$ homomorfizmus egy beágyazás. Ez viszont azonnal következik abból, hogy az f képe nem zérusosztó az $\bar{O}_x/\mathfrak{q}_2 \cong O_{x,C_j}$ gyűrűben. Valóban, ez a gyűrű egyáltalán nem tartalmaz zérusosztót, és f nem egyenlő abban 0-val, mivel $f \neq 0$ a C_j-n. Az (5)-ből azt kapjuk, hogy

$$l(O_x/fO_x) = l(\mathfrak{q}_2/f\mathfrak{q}_2)+l(O_{x,C_j}/fO_{x,C_j}) = l(\mathfrak{q}_2/f\mathfrak{q}_2)+l\big(O_{x,C_j}/(f)\big).$$

Ugyanezt az okoskodást s-szer ismételve, a

$$(D_1, \dots, D_n)_x = \sum k_j l\big(O_{x,C_j}/(f)\big) = \sum k_j\big(\varrho_{C_j}((f))\big)_x$$

képletet kapjuk. Eközben k_j egyenlő az olyan $t \leqq s$ indexek számával, amelyekre a $\bar{O}_x=\mathfrak{q}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{q}_s=0$ sorozatban $\mathfrak{q}_t/\mathfrak{q}_{t+1} \cong \bar{O}_x/\bar{\mathfrak{p}}_j$. A 3. lemma garantálja, hogy ez a szám egyenlő $(D_1, \dots, D_{n-1})_{C_j}$-vel.

A 2. állítás bizonyítása. Jelöljük $y_1, \ldots, y_k$-val az x pont ősképeit a $v\colon C^v \to C$ normalizációs leképezésben, O_{y_i}-vel azok lokális gyűrűit a C^v-n és legyen $\tilde{O} = \bigcap O_{y_i}$. Nyilvánvaló, hogy $\tilde{O} \supset O_x$ (ha feltételezzük, hogy $k(C)$ és O_x be vannak ágyazva a $k(C^v)$ testbe a v^* leképezéssel). Nekünk ezeknek a gyűrűknek a következő tulajdonságaira lesz szükségünk.

4. LEMMA. *Létezik olyan $d \in O_x$, $d \neq 0$ hogy*

$$d \cdot \tilde{O} \subset O_x. \tag{6}$$

Tekintsük az x pont U affin környezetét és V normalizációját, és legyen $A = k[U]$, $B = k[V]$. Az affin sokaság normalizációjának létezéséről szóló tétel bizonyításának egyik alapvető szakasza abban áll, hogy megállapítjuk, hogy B egy véges típusú modulus A felett. Innen, és abból, hogy B benne van az A kvocienstestében, következik, hogy

$$d \cdot B \subset A \tag{7}$$

valamely $d \in A$, $d \neq 0$ elemre.

Könnyű belátni, hogy

$$\tilde{O} = B \cdot O_x. \tag{8}$$

Valóban, nyilvánvaló, hogy $B \subset \tilde{O}$, és ezért $BO_x \subset \tilde{O}$. Másrészt a III. fejezet 2. §. 1. pont lemmája megmutatja, hogy $\tilde{O} \subset BO_x$. A (7) és (8)-ból azonnal következik (6).

Most már nem nehéz befejezni a 2. állítás bizonyítását. A 4. lemma miatt $l(\tilde{O}/O_x) < l(\tilde{O}/d\tilde{O})$, a III. fejezet 1. §. 2. tétel szerint viszont $l(\tilde{O}/d\tilde{O}) = \sum_{y_i} l(O_{y_i}/dO_{y_i}) = \sum v_{y_i}(d)$, és ezért $l(\tilde{O}/O_x) < \infty$. A

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{O} & & \\ & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\supset$} & \\ f\tilde{O} & & & & O_x \\ & \rotatebox{-45}{$\supset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & \\ & & fO_x & & \end{array}$$

ábrából következik, hogy $l(\tilde{O}/fO_x) = l(\tilde{O}/O_x) + l(O_x/fO_x) = l(\tilde{O}/f\tilde{O}) + l(f\tilde{O}/fO_x)$, mégpedig az itt előforduló számok mind végesek. Mivel f nem osztója 0-nak az $\tilde{O}$-ban, így $l(\tilde{O}/O_x) = l(f\tilde{O}/fO_x)$, ahonnan azt kapjuk, hogy $l(O_x/fO_x) = l(\tilde{O}/f\tilde{O})$. Végül a III. fejezet 1. § 2. tétele ismét azt adja, hogy $l(\tilde{O}/f\tilde{O}) = \sum_{y_i} v_{y_i}(f) = \sum_{y_i} ((f))_{y_i}$. Mivel $l(O_x/fO_x) = (D)_x$, így ez bebizonyítja a 2. állítást.

5. *A metszet indexének általános definíciója*

A 2. tétel és a divizor hordozójának a pontból való elmozdításáról szóló tétel (III. fejezet 1. § 1. tétel) lehetővé teszik definiálni az n-dimenziós sima projektív sokaságon értelmezett tetszőleges n divizor metszetének az indexét a közös helyzetűséghez hasonló bármely megszorítás nélkül.

Ennek érdekében két lemmára lesz szükségünk.

1. LEMMA. Az n-dimenziós X sokaságon értelmezett $D_1, \ldots, D_n$ tetszőleges n divizorhoz található $D'_1, \ldots, D'_n$ olyan n divizor, hogy $D_i \sim D'_i$ $(i=1, \ldots, n)$ és a $D'_1, \ldots, D'_n$ közös helyzetben vannak.

Tételezzük fel, hogy már találtunk olyan $D'_1, \ldots, D'_k$ divizorokat, hogy $D_i \sim D'_i$ $(i=1, \ldots, k)$ és $\dim(\mathrm{Supp}\, D'_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Supp}\, D'_k) = n-k$, vagy ez a metszet üres. Feltételezzük, hogy

$$\mathrm{Supp}\, D'_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Supp}\, D'_k = C_1 \cup \ldots \cup C_r$$

irreducibilis komponensekre való bontás. Kiválasztunk minden C_j komponensen egy-egy x_j pontot és — a divizor hordozójának elmozdításáról szóló tétel segítségével — keresünk egy olyan D'_{k+1} divizort, hogy $D'_{k+1} \sim D_{k+1}$, $\mathrm{Supp}\, D'_{k+1} \not\ni x'_j$ $(j=1, \ldots, r)$. Akkor $\mathrm{Supp}\, D'_{k+1}$ annál inkább nem tartalmaz egyetlen C_i komponenst sem, és a metszet dimenziójáról szóló tétel szerint

$$\dim(\mathrm{Supp}\, D'_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Supp}\, D'_{k+1}) = n-k-1,$$

ha ez a metszet nem üres. Amint ilyen módon eljutunk a $k=n$-hez, megkapjuk a kívánt divizor rendszert.

2. LEMMA. *Ha a $D_1, \ldots, D_n$ és $D'_1, \ldots, D'_n$ divizorok közös helyzetben vannak és $D_i \sim D'_i$ $(i=1, \ldots, n)$, akkor*

$$(D_1, \ldots, D_n) = (D'_1, \ldots, D'_n). \tag{1}$$

Ha $D_1 = D'_1, \ldots, D_{n-1} = D'_{n-1}$, akkor ez a 2. tétel állítása. Bebizonyítjuk, hogy az (1) egyenlőség igaz, ha $D_1 = D'_1, \ldots, D_{n-k} = D'_{n-k}$. $k=n$ mellett az állítást kapjuk. k szerinti indukciót fogunk alkalmazni. Feltételezzük, hogy az állítás igaz a k kisebb értékeire. Mivel mindkét $D_1, \ldots, D_n$ és $D'_1, \ldots, D'_n$ divizor rendszer közös helyzetben van, így $\dim Y = \dim Y' = 1$, ahol $Y = \bigcap_{i \neq n-k+1} \mathrm{Supp}\, D_i$, $Y' = \bigcap_{i \neq n-k+1} \mathrm{Supp}\, D'_i$. Kiválasztunk az Y, Y' sokaságok mindegyikének minden komponensén egy-egy pontot, és a divizor hordozójának elmozdításáról szóló tételnek megfelelően keresünk egy olyan D''_{n-k+1} divizort, hogy a $\mathrm{Supp}\, D''_{n-k+1}$ nem megy át ezen pontok egyikén sem és $D''_{n-k+1} \sim D_{n-k+1}$. Akkor mindkét $D_1, \ldots, D_{n-k}$, $D''_{n-k+1}, \ldots, D_n$ és $D'_1, \ldots, D'_{n-k}, D''_{n-k+1}, \ldots, D'_n$ rendszer közös helyzetben van. A 2. tételnek megfelelően

$$\left.\begin{aligned} (D_1, \ldots, D_n) &= (D_1, \ldots, D_{n-k}, D''_{n-k+1}, \ldots, D_n), \\ (D'_1, \ldots, D'_n) &= (D'_1, \ldots, D'_{n-k}, D''_{n-k+1}, \ldots, D'_n). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

A (2) jobb oldalai egyenlők egymással az indukciós feltevés miatt (ezekben már $n-k+1$ egyenlő divizor van), ami bizonyítja is a 2. lemmát.

Az 1. és 2. lemmák felhasználásával definiálhatjuk a metszet $(D_1, \ldots, D_n)$ indexét tetszőleges n divizor esetén a sima n-dimenziós sokaságon, nem követelve meg, hogy azok közös helyzetben legyenek. Ebből a célból meghatározzuk azokat a $D'_1, \ldots, D'_n$ tetszőleges divizorokat, amelyek eleget tesznek az 1. lemma feltételeinek, úgy hogy a $(D'_1, \ldots, D'_n)$ index definiálva van és definiáljuk $(D_1, \ldots, D_n)$-et a $(D_1, \ldots, D_n) = (D'_1, \ldots, D'_n)$ egyenlőséggel.

Be kell bizonyítani, hogy ez a definíció nem függ a $D'_1, \ldots, D'_n$ segéd divizorok kiválasztásától, viszont éppen ezt biztosítja a 2. lemma.

Például, most beszélhetünk a (C, C) metszet indexről az X felületen levő C görbe esetében. Ezt a számot (C^2)-el is jelöljük. Ismertetünk néhány példát annak kiszámítására.

1. PÉLDA. $X=P^2$, C egy egyenes. Definíció szerint $(C^2)=(C', C'')$, ahol $C' \sim C'' \sim C$, a C' és C'' pedig közös helyzetben vannak. Vehetünk például C' és C''-ként két különböző egyenest. Ezek egyetlen x pontban metszik egymást és $(C', C'')=(C', C'')_x=1$, mivel ezek ebben a pontban tranzverzálisak. Ezért $(C^2)=1$.

2. PÉLDA. X sima felület P^3-ban. Legyen X az $F(x_0:x_1:x_2:x_3)=0$, $\deg F=m$ egyenlettel megadva.

Kiszámítjuk (E^2)-t, ahol E az X síkmetszetének divizora (a III. fejezet 1. §. 2. pontban bebizonyítottuk, hogy síkmetszetek divizorai mind ekvivalensek). Definíció szerint $(E^2)=(E', E'')$, ahol $E' \sim E'' \sim E$ és E' és E'' közös helyzetben vannak. E' és E''-ként különböző síkmetszeteket veszünk. Akkor $E'=\sum k_i C_i$, ahol C_i síkgörbék és $\sum k_i \deg C_i=m$ (egyszerűen be kell helyettesíteni F-be az E' egyenletet és a kapott háromváltozós formát felbontani irreducibilis tényezőkre). Kiválasztjuk E''-t úgy, hogy az tranzverzális legyen az összes C_i-vel (az ilyen kiválasztás lehetősége könnyen következik a nemtranzverzális síkok halmaza dimenziójának a kiszámításából). Akkor BEZOUT tétele szerint (III. fejezet 2. §. 2 pont)

$$(E', E'') = \sum k_i(C_i, E'') = \sum k_i \deg C_i = m = \deg X.$$

Ezért $(E^2) = \deg X$.

3. PÉLDA. Tételezzük fel, hogy a 2. példa X felületén van egy L egyenes és kiszámítjuk (L^2)-et.

Húzunk egy síkot az L-en keresztül és jelöljük E-vel a megfelelő sík metszetet. Akkor az L az E komponense: $E=L+C$, $C=\sum k_i C_i$, $\sum k_i \deg C_i=m-1$.

Kiszámítjuk először (C^2)-et. Ebből a célból megjegyezzük, hogy az L és C metszéspontjaiban az E görbének singuláris pontja van, ez pedig azt jelenti, hogy az őt kimetsző sík egybeesik az X-hez ebben a pontban húzott érintő síkkal. Tekintsünk egy másik síkot, amely átmegy az L egyenesen, de különbözik az X-hez az $L \cap C$ pontban húzott érintő síktól. Ez a sík meghatározza az $E'=L+C'$ divizort és az $L \cap C$ és $L' \cap C'$ pontok mind különbözők. Ez azt jelenti, hogy $C \cap C'=\emptyset$ és $(C^2)=(C, C')=0$. A következő egyenlőségeket kaptuk.

$$m = (E^2) = (E, L+C) = (E, L)+(E, C) = 1+(E, C),$$

$$(C, E) = m-1,$$

$$m-1 = (E, C) = (L, C)+(C^2) = (L, C),$$

$$1 = (E, L) = (L^2)+(L, C) = (L^2)+m = 1,$$

$$(L^2) = 2-m.$$

Megjegyezzük, hogy $(L^2)<0$, ha $m>2$. Egyenesek valóban lehetnek tetszőleges rendű felületen, például az $x_0=x_1$, $x_2=x_3$ egyenes az $x_0^m-x_1^m+x_2^m-x_3^m=0$ felületen.

Feladatok

1. Legyen X felület, x annak egyszerű pontja, u és v lokális paraméterek az x pontban, f a C görbe lokális egyenlete az x környezetében. Ha $f=(au+bv)\cdot$ $\cdot(cu+dv)+g$, $g\in\mathfrak{M}_x^3$, és az $au+bv$ és $cu+dv$ lineáris formák nem arányosak, akkor x-et a C görbe szétválasztható érintőkkel rendelkező kettős pontjának nevezzük, az Θ_x-beli $au+bv=0$ és $cu+dv=0$ egyenletű egyeneseket pedig érintőknek az X-ben. Ilyen feltételek mellett legyen C' egy olyan sima görbe X-en, amely átmegy az x ponton. Bizonyítsuk be, hogy $(C, C')_x>2$ akkor és csakis akkor, ha $\Theta_{x,C'}$ egybeesik a C-hez az x pontban húzott valamely érintővel.

2. Legyen $C=A_F^2$, $D=A_G^2$ két sík görbe, x pedig egyszerű pont mindkettőn. Legyen f az F polinom szűkítése a G görbére, $v_x(f)$ ezen függvény zérushelyének rendje az x pontban a G görbén. Bizonyítsuk be, hogy ez a szám nem változik, ha F-et és G-t felcseréljük.

3. Legyen Y egy sima irreducibilis 1-kodimenziós részsokaság az n-dimenziós X sima sokaságban. Bizonyítsuk be, hogy $(D_1, \ldots, D_{n-1}, Y)_x=(\varrho_Y(D_1), \ldots, \varrho_Y(D_{n-1}))_x$ esetén a második metszet index kiszámítható az Y-on.

4. Legyen $f\colon X\to Y$ sima projektív sokaságok reguláris leképezése, amely biracionális izomorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy a $D_1, \ldots, D_n\in \operatorname{Div}(Y)$-ra teljesül $(f^*(D_1), \ldots, f^*(D_n))=(D_1, \ldots, D_n)$.

5. Legyen $\sigma\colon X\to Y$ egy $y\in Y$ középpontú σ-eljárás, $\Gamma=\sigma^{-1}(y)$, $D_1, \ldots, D_{n-1}\in$ $\in\operatorname{Div}(Y)$. Bizonyítsuk be, hogy $(\Gamma, \sigma^*(D_1), \ldots, \sigma^*(D_{n-1}))=0$.

6. Legyen $\sigma\colon X\to Y$ egy $y\in Y$ középpontú σ-eljárás, $\dim X=2$, $L=\sigma^{-1}(y)$. Bizonyítsuk be, hogy $(L^2)=-1$. (Utasítás: Alkalmazzuk az 5. feladat eredményeit arra a D görbére, amely átmegy az y ponton és amelynek ez a pont egyszerű pontja.)

7. Határozzuk meg a $v_m(P^2)$ felület rendjét (v_m a *Veronese*-féle leképezés).

8. Legyen X a P^n térben levő valamely sima projektív felület, L projektív altér a P^n térben, dimenziója $n-2$. Tételezzük fel, hogy L és X véges sok pontban metszik egymást, mégpedig k-ban ezek közül az X-hez húzott érintő sík L-lel egyenesben metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az X és L metszéspontjainak a száma nem nagyobb $\deg X-k$-nál.

9. A feltételek megegyeznek a 8. feladattal, de az L dimenziója $n-m$, $m\geqq 2$. Bizonyítsuk be, hogy az X és L metszéspontjainak a száma nem nagyobb $\deg X-k-m+2$-nél. (Utasítás: Húzzunk L-en keresztül egy alkalmas lineáris alteret, amely eleget tesz a 8. feladat feltételeinek.)

10. Bizonyítsuk be, hogy az $X\subset P^N$ sima projektív n-dimenziós sokaságra $(H^n)=\deg X$, ahol H az X és egy P^N-beli hipersík metszetének a divizora.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha az n-dimenziós sokaságon vett $D_1, \ldots, D_{n-1}$ effektív divizorok közös helyzetben vannak és C — azok hordozói metszetének az irreducibilis komponense, akkor $(D_1, \ldots, D_{n-1})=\min\,(D_1, \ldots, D_{n-1}, D)_x$, ahol a minimumot az összes $x\in C$ és összes olyan effektív D divizor szerint vesszük, amelyekre $\operatorname{Supp} D\ni x$.

12. Számítsuk ki $(D_1, D_2)_C$-et, ahol D_1 és D_2 az A^3-ban az $x=0$ és $x^2+y^2+xz=0$ egyenletekkel vannak megadva, a C egyenes pedig $x=0$, $y=0$-val.

13. Az 5. feladat jelölései mellett feltételezzük, hogy $\dim X=3$, C egy olyan divizor az Y-on, amely egy komponensből áll 1 multiplicitással, amely egyszerű

az y pontban. Bizonyítsuk be, hogy $\sigma^*(C)=\Gamma+C'$, ahol a C' irreducibilis, és a $\Gamma\cap C'$ minden pontja egyszerű a C'-n. Bizonyítsuk be, hogy $(\Gamma^2\cdot C')=-1$, $(\Gamma^3)=1$ az X-en.

14. Az 5. feladat jelölései mellett határozzuk meg Γ^n-t tetszőleges $n>1$-re.

2. §. A metszet indexeinek alkalmazásai

1. *Bezout tétele projektív térben és projektív terek szorzatában*

Az 1. §. 1. és 2. tétele lehetővé teszik az X sokaságon értelmezett tetszőleges divizorok metszet indexének a kiszámítását, ha eléggé ismert a $Cl(X)$ csoport. Megmutatjuk ezt két példán.

1. PÉLDA. $X=P^n$. Ismert, hogy $Cl(X)\cong Z$ és a csoport generátoraként vehető egy hipersík E divizora. Tetszőleges D effektív divizor egy F forma divizora, és ha $\deg F=m$, akkor $D\sim mE$. Innen következik, hogy ha $D_i\sim m_iE$ $(i=1, \dots, n)$, akkor

$$(D_1, \dots, D_n) = m_1\cdot \dots \cdot m_n(E^n) = m_1\cdot \dots \cdot m_n, \tag{1}$$

mivel nyilván $(E^n)=1$.

Ha a D_i divizorok effektívek, azaz m_i-edfokú F_i formáknak felelnek meg és közös helyzetben vannak, akkor a $\cap \operatorname{Supp} D_i$ halmaz pontjai egybeesnek az

$$F_1(x_0 \dots x_n) = 0,$$

$$F_n(x_0 \dots x_n) = 0$$

egyenletrendszer nemtriviális megoldásaival.

Az x pontra (vagy megoldásra) a $(D_1, \dots, D_n)_x$ indexeket a megoldás multiplicitásának természetes nevezni. Akkor az (1) egyenlőség megmutatja, hogy az $n+1$ ismeretlenes n homogén egyenletből álló rendszer megoldásainak a száma vagy végtelen, vagy az egyenletek fokainak a szorzatával egyenlő, ha a megoldásokat multiplicitásukkal számoljuk. Itt csak a nemtriviális megoldásokat vizsgáljuk, az arányosakat pedig egynek tekintjük. Ezt az eredményt Bezout tételének nevezzük a P^n projektív térben.

2. PÉLDA. $X=P^n\times P^m$. Ebben az esetben $Cl(X)=Z\oplus Z$. Tetszőleges D effektív divizort egy olyan F polinom határoz meg, amely homogén az $x_0, \dots, x_n$ (P^n-beli koordináták) és az $y_0, \dots, y_m$ (P^m-beli koordináták) változókra nézve. Ha az F homogenitási fokai k és l akkor a $D\to(k, l)$ egy $Cl(X)\cong Z\oplus Z$ izomorfizmust határoz meg. Speciálisan a $Cl(X)$ generátoraiként választható az az E divizor, amely az x_i változós lineáris formákkal van meghatározva, és az F divizor, amelyet az y_i-től függő lineáris formák határoznak meg. Akkor $D\sim kE+lF$.

Legyen $D_i\sim k_iE+l_iF$ $(i=1, \dots, n+m)$. Akkor

$$(D_1, \dots, D_{n+m}) = \sum k_{i_1}\cdot \dots \cdot k_{i_r}\cdot l_{j_1}\cdot \dots \cdot l_{j_s}(\underbrace{E, \dots, E}_{r}, \underbrace{F, \dots, F}_{s}),$$

ahol az összegezést az $(1, 2, \ldots, n+m)$ számok összes olyan $(i_1, \ldots, i_r j_1 \ldots j_s)$ permutációja szerint végezzük, ahol $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$; $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$. Kiszámítjuk a

$$(2) \qquad (\underbrace{E, \ldots, E}_{r}, \underbrace{F, \ldots, F}_{s})$$

metszet indexét. Ha $r > n$, akkor található r olyan $E_1, \ldots, E_r$ lineáris forma, amelyeknek nincs közös zérushelyük, és ezért

$$(\underbrace{E, \ldots, E}_{r}, F, \ldots, F) = (E_1, \ldots, E_r, F, \ldots, F) = 0.$$

Analóg módon áll a dolog, ha $s > m$. Mivel $r+s = n+m$, így a (2) index csak akkor lehet nullától különböző, ha $r = n$, $s = m$. Ebben az esetben az $E_1, \ldots, E_n$, $F_1, \ldots, F_m$ szerepében választhatók azok a divizorok, amelyek az $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$ formáival vannak definiálva. Ezeknek a divizoroknak egyetlen közös pontjuk van, a $(1:0:\ldots:0; 1:0:\ldots:0)$. Ebben a pontban azok tranzverzálisan metszik egymást, amint azt könnyű ellenőrizni, ha áttérünk az $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ nyílt halmazra, amely izomorf az A^{n+m} affin térrel. Ilyen módon

$$(3) \qquad (k_1 E + l_1 F, \ldots, k_{n+m} E + l_{n+m} F) = \sum k_{i_1} \cdot \ldots \cdot k_{i_n} \cdot l_{j_1} \cdot \ldots \cdot l_{j_m},$$

ahol az összegezés az $(1, 2, \ldots, n+m)$ számok összes olyan $(i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m)$ permutációja szerint történik, ahol $i_1 < i_1 < \ldots < i_n$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$. Ezt az állítást *Bezout-tételnek* nevezzük a $P^n \times P^m$ sokaságban.

Megemlítjük a (3) képlet egy egyszerű speciális esetét. A $P^1 \times P^1$ felület, amint ismeretes, izomorf egy másodrendű nemszinguláris felülettel P^3-ban. Ezen izomorfizmusban az E és F divizoroknak az X felület különböző egyenesvonalú generátor rendszereiből vett egyenesek felelnek meg. Ha $D_1 = k_1 E + l_1 F$, $D_2 = k_2 E + l_2 F$, akkor a (3) képlet a $(D_1, D_2) = k_1 l_2 + l_1 k_2$ egyenlőséget adja. Speciálisan, ha $D = kE + lF$, akkor $k = (D, F)$, $l = (D, E)$. Ez megadja a k és l együtthatók geometriai értelmét annak analógiájára, ahogyan a sík görbe és egyenes metszéspontjainak a száma geometriai értelme a sík algebrai görbe fokszámának.

A különféle példák közös vonása az, hogy azokban a $Cl(X)$ csoportnak véges generátor rendszere volt. Természetes megkérdezni, igaz-e ez tetszőleges projektív sima X sokaság esetén. A válasz negatív, és ellenpéldát ad erre az olyan sík harmadrendű görbe, amelyre $Cl(X) \supset Cl^\circ(X)$, $Cl(X)/Cl^\circ(X) \cong Z$, a $Cl^\circ(X)$ csoport elemei pedig kölcsönösen egyértelmű összefüggésben állnak az X görbe pontjaival. Ezért például, ha k a komplex számok teste, akkor a $Cl^\circ(X)$ csoport még csak nem is megszámlálható.

Viszont ez a „rossz" $Cl^\circ(X)$ részcsoport éppen nincs hatással a metszet $(D) = \deg D$ indexére, ami 0-fokú divizorokból áll. Analóg a helyzet tetszőleges sima X projektív sokaság esetén is. Éspedig be lehet bizonyítani, hogy ha a D divizor algebrailag ekvivalens 0-val (a definíciót l. a III. fejezet 3. §. 5. pontban), akkor $(D_1, \ldots, D_{n-1}, D) = 0$ bármely $D_1, \ldots, D_{n-1}$ divizorokra. Ilyen módon a metszet indexei csak a $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^a(X)$ csoport elemeitől függenek. Ugyanerről a csoportról a III. fejezet 3. §. 3. pont *C.* tétele azt állítja, hogy az mindig végesen generált. Nyilvánvaló, hogy ha $E_1, \ldots, E_r$ a csoport generátorai, akkor ahhoz, hogy az X-en értelmezett divizorok metszetének tetszőleges indexét ismerjük, elegendő véges sok $(E_{i_2}, \ldots, E_{i_n})$ számot ismerni, hasonlóan ahhoz, amint ezt az 1. és 2. példákban láttuk. Más szóval X-en teljesül Bezout tételének analógja.

2. *Valós test feletti sokaságok*

Az 1. pontban bizonyított variánsai a *Bezout*-tételnek néhány szép alkalmazást nyertek az algebrai geometriában a valós számok teste felett.

Térjünk vissza az 1. pont 1. példájához és tételezzük fel, hogy az $F_i=0$ $(i=1, \ldots, n)$ egyenletek együtthatói valósak, minket pedig a valós megoldások érdekelnek. Ha $\deg F_i=m_i$ és a D_i divizorok közös helyzetben vannak, akkor, amint azt az 1. pontban bebizonyítottuk, $(D_1, \ldots, D_n)=m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$. Definíció szerint $(D_1, \ldots, D_n)= = \sum (D_1, \ldots, D_n)_x$, ahol az összegezés az $F_1=0, \ldots, F_n=0$ rendszer x megoldásai szerint történik. Közben, természetesen, tekintenünk kell úgy a valós, mint a komplex megoldásokat. Viszont, mivel az F_i polinomok valós együtthatósak, így tetszőleges valós x megoldás mellett a rendszernek a komplex konjugált $\bar{x}$ is megoldása. A metszet index definíciójából azonnal következik, hogy $(D_1, \ldots, D_n)_x=(D_1, \ldots, D_n)_{\bar{x}}$, és ezért $(D_1, \ldots, D_n) \equiv \sum (D_1, \ldots, D_n)_y \pmod 2$, ahol most az összegezés csak a valós megoldásokra terjed ki. Speciálisan, ha $(D_1, \ldots, D_n)$ páratlan (ez pedig ekvivalens azzal, hogy az összes $m_i=\deg F_i$ páratlan), akkor látjuk, hogy létezik legalább egy valós megoldás. Ez az állítás olyan feltételezés mellett van bebizonyítva, hogy a D_i divizorok közös helyzetben vannak. Viszont a következő egyszerű gondolat lehetővé teszi megszabadulni ettől a megkötéstől.

A dolog abban áll, hogy a divizor hordozójának elmozdításáról szóló tétel a mi esetünkben teljesen egyszerűen és explicitebb alakban bizonyítható. Éspedig, vehetünk egy olyan l lineáris formát, amely különbözik 0-tól az összes olyan $x_1, \ldots, x_r$ pontban, ahonnan el akarjuk mozdítani a divizor hordozóját. Ha a D divizort egy m-edfokú F forma határozza meg, akkor az $F_\varepsilon=F+\varepsilon l^m$ forma által meghatározott D' divizor a tétel összes feltételeinek eleget tesz, ha $F(x_j)+\varepsilon l(x_j)^m \neq 0$ $(j=1, \ldots, r)$. Ennek a feltételnek eleget lehet tenni az ε tetszőlegesen kis értéke mellett.

Most megmutatjuk, hogyan lehet megszabadulni a közös helyzetűségre vonatkozó megszorítástól a fent bizonyított állításban (a páratlan fokú egyenletrendszer valós megoldásának a létezéséről). Legyen

$$F_1 = \ldots = F_n = 0 \tag{1}$$

egy tetszőleges ilyen rendszer. A fent mondottak alapján találhatók tetszőleges olyan kis értékei ε-nak, amelyekre az $F_{i,\varepsilon}=F_i+\varepsilon l_i^{m_i}$ formák által meghatározott divizorok közös helyzetben vannak.

A már bizonyítottak szerint az $F_{1,\varepsilon}=0, \ldots, F_{n,\varepsilon}=0$ rendszernek létezik x_ε valós megoldása. A projektív tér kompaktsága miatt található olyan $\varepsilon_m \to 0$ számsorozat, hogy az x_{ε_m} pontok az $x \in P^n$ ponthoz konvergálnak. Mivel ekkor $F_{j,\varepsilon_m} \to F_j$, így x az (1) rendszer megoldása.

Megfogalmazzuk a bebizonyítottakat.

1. TÉTEL. *Az $n+1$ ismeretlenes n homogén egyenletből álló rendszernek van nemtriviális valós megoldása, ha az összes egyenlet foka páratlan.*

Teljesen analóg fejtegetések alkalmazhatók a $P^n \times P^m$ sokaságra (l. az 1. pont 2. példáját). A következő eredményt kapjuk.

2. TÉTEL. *A valós együtthatós*

$$F_i(x_0 : \ldots : x_n; y_0 : \ldots : y_m) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n+m)$$

egyenletrendszernek van nemtriviális valós megoldása, ha a $\sum k_{i_1} \cdot \ldots \cdot k_{i_n} \cdot l_{j_1} \cdot \ldots \cdot l_{j_m}$ *szám páratlan.*

Itt a k_i és l_j számok az F_i polinom homogenitási fokai az első, illetve a második változó rendszerre nézve, a megoldást pedig triviálisnak nevezzük, ha $x_0 = \ldots = x_n = 0$, vagy $y_0 = \ldots = y_m = 0$.

A 2. tételnek érdekes alkalmazásai vannak az algebrában. Egyik közülük a divizió algebrákra vonatkozik a valós számok R teste felett. Ha egy ilyen algebra rangja n, akkor annak van $e_1, \ldots, e_n$ bázisa és a következő szorzótáblával adható meg:

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Az algebrát nem feltételezzük asszociatívnak, ezért a C_{ij}^k-k tetszőlegesek lehetnek. Egy algebrát divizió algebrának nevezünk, ha az

$$ax = b \tag{3}$$

egyenlet megoldható bármely $a \neq 0$ és b elemekre. Könnyű belátni, hogy ez ekvivalens az algebra zérusosztó mentességével. Ebből a célból elegendő tekinteni a φ: $\varphi(x) = ax$ lineáris transzformációt az algebra vektorterében. A (3) feltétel azt jelenti, hogy a φ szerinti kép egybeesik az egész térrel. Mint ismeretes, ez ekvivalens azzal, hogy a φ magja nulla. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy az algebrában nincsenek zérusosztók, azaz $xy = 0$-ból következik, hogy $x = 0$, vagy $y = 0$. Ha $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, akkor (2)-ből következik, hogy $xy = \sum_{k=1}^{n} z_k e_k$, $z_k = \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^k x_i y_j$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ilyen módon az algebrában elvégezhető az osztás, ha az

$$F_k(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^k x_i y_j = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

egyenletrendszernek nincs olyan valós megoldása, amelyben $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ és $(y_1, \ldots, y_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Ezek az egyenletek majdnem megfelelnek a 2. tétel feltételeinek. A különbség abban áll, hogy az F_k polinomok $P^{n-1} \times P^{n-1}$-beli egyenleteket határoznak meg. n számuk viszont nem egyenlő ennek a térnek a $2n-2$ dimenziójával. Ezért kiválasztunk egy tetszőleges $1 \leqq r \leqq n-1$ egész számot és feltesszük, hogy $x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$, $y_{n-r+2} = \ldots = y_n = 0$. Az

$$F_k(x_1, \ldots, x_{r+1}, 0, \ldots, 0; y_1, \ldots, y_{n-r+1}, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

egyenletek most a $P^r \times P^{r-n}$-ben vannak megadva, és annál inkább nincs nemtriviális valós megoldásuk. A 2. tételnek megfelelően ez csak akkor lehetséges, ha a

$$\sum k_{i_1} \cdot \ldots \cdot k_{i_r} \cdot l_{j_1} \cdot \ldots \cdot l_{j_{n-r}} \tag{5}$$

összeg páros, mégpedig ennek teljesülnie kell az összes $r = 1, \ldots, n-1$-re. Esetünkben az F_k formák bilineárisak, úgy hogy $k_i = l_i = 1$ és az (5) összeg egyenlő saját tagjainak a számával, azaz C_n^r-vel. Látjuk, hogy a (4) rendszernek csak akkor létezik nemtriviális valós megoldása, ha az összes C_n^r szám páros $r = 1, \ldots, n-1$ mellett. Ez csak akkor lehetséges, ha $n = 2^k$. Valóban, a C_n^r-re vonatkozó feltételünket kifejezhetjük a következőképpen: a két elemű F_2 testben $(T+1)^n = T^n + 1$. Ha $n = 2^l \cdot m$, m páratlan és $m > 1$, akkor F_2-ben

$$(T+1)^{2^l m} = (T^{2^l} + 1)^m = T^{2^l m} + mT^{2^l(m-1)} + \ldots + 1 \neq T^n + 1.$$

A következő eredményt bizonyítottuk be:

3. TÉTEL. *A valós test feletti divizió algebra rangja kettő hatványa.*

Be lehet bizonyítani, hogy divizió algebra csak $n=1, 2, 4, 8$ esetében létezik. Ennek a ténynek a bizonyítása elég finom topológiai gondolatokat igényel.

Analóg okoskodás segítségével megvizsgálható, az m és n milyen értékei mellett létezik a

$$\sum_{i,j=1}^{m} C_{ij}^{k} x_i y_j = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszernek nemtriviális valós megoldása. Ez a kérdés azért érdekes, mert ekvivalens a

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}^{k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

differenciál egyenletrendszer elliptikus voltának a kérdésével.

3. *Sima görbe faja felületen*

Tekintsünk egy sima C görbét a sima projektív X felületen. Levezetünk most egy nagyon hasznos összefüggést az X felület kanonikus osztályai és a C görbe között.

Mivel a kanonikus osztályt differenciál formák segítségével határozzuk meg, így nekünk az X-en értelmezett differenciál formák és a C között kell összefüggéseket létesíteni. A legegyszerűbb módszer, amivel ezt meg lehet tenni, a differenciál formáknak az X-ről a C-re való szűkítésében áll. Általában, ha X sima sokaság és Y annak sima részsokasága, akkor a függvények szűkítése X-ről Y-ra — amelyet ϱ-val fogunk jelölni — a differenciál formák következő szűkítési műveletét határozza meg: ha

$$\omega = \sum g_{i_1 \ldots i_r} df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_r},$$

akkor

$$\varrho(\omega) = \sum \varrho(g_{i_1 \ldots i_r}) d\varrho(f_{i_1}) \wedge \ldots \wedge d\varrho(f_{i_r}).$$

Hogy megtakarítsuk ezen művelet nyilvánvaló tulajdonságainak az ellenőrzését, azt egy általunk korábban vizsgált leképezés speciális eseteként állítjuk elő. Ebből a célból tekintsük az Y sokaság X-be való beágyazása reguláris $\varphi\colon Y \to X$ leképezését. Nyilvánvaló, hogy $\varrho(\omega) = \varphi^*(\omega)$, és ezért erre a műveletre igaz a III. fejezet 5. §. 1. pontban levezetett és minden összefüggés. Speciálisan, Y-ra szűkíthetjük az X-en értelmezett bármely olyan racionális differenciál formát, amelynek értelmezési tartománya metszi Y-t.

Visszatérve az X és C-hez, egy új nehézséggel találkozunk: a kanonikus osztály az X-en kétdimenziós formákkal kapcsolatos, azok C-re való szűkítése pedig nulla. Egy valamivel komplikáltabb utat választunk. Tekintünk egy olyan y racionális függvényt az X-en, hogy $v_C(y) = 1$. Ebből következik, hogy $dy \neq 0$. Valóban, ha $(y) = C + \sum k_i C_i$, akkor a C görbe bármely olyan ξ pontjában, amely a C_i görbék egyikéhez sem tartozik, az y függvény a C lokális egyenlete lesz, mivel pedig C sima, így $d_\xi y \neq 0$. Annál inkább $dy \neq 0$.

Tekintsünk egy olyan ω kétdimenziós formát az X-en, hogy $v_C(\omega) = 0$, azaz C nem tartozik az (ω) divizorhoz. Az y és ω-ra tett feltételekből következik, hogy

ω előállítható

(1) $$\omega = \eta \wedge dy$$

alakban, ahol η egydimenziós, a C-t metsző valamely nyílt halmazban reguláris forma. Ebből a célból elegendő találni egy olyan x függvényt az X-en, hogy abban a ξ pontban, amelyben $d_\xi y \neq 0$, a $d_\xi x$ és $d_\xi y$ lineárisan függetlenek. Akkor ω előállítható $P\,dx \wedge dy$ alakban, és feltehető $\eta = P\,dx$.

Az η forma általunk most ellenőrzött tulajdonsága mitt az $\bar{\omega} = \varrho(\eta)$ forma C-n valamely racionális differenciál formát határoz meg, amelyet vizsgálni fogunk.

Mindenekelőtt ellenőrizzük, hogy $\bar{\omega}$ függ az ω formától és az y függvénytől, de nem függ az η kiválasztásától az (1) előállításban. Ennek az érdekében, természetesen, elegendő ellenőrizni, hogy ha η reguláris forma egy nyílt halmazban, amely metszi C-t, és $\eta \wedge dy = 0$, akkor $\varrho(\eta) = 0$. Mivel $d_\xi(y) \neq 0$ a C-t metsző nyílt halmazon, így található olyan U nyílt halmaz és x függvény, hogy

$$U \cap C \neq \emptyset,$$
$$\Omega^1[U] = k[U]\,dx + k[U]\,dy,$$
$$\Omega^2[U] = k[U]\,dx \wedge dy,$$
$$\eta \in \Omega^1[U].$$

Következésképpen, $\eta = F\,dx + G\,dy$, $F, G \in k[U]$, az $\eta \wedge dy = 0$ egyenlőségből pedig következik, hogy $F = 0$. Mivel $\varrho(y) = 0$, és így $\varrho(dy) = 0$, tehát $\varrho(\eta) = 0$ is teljesül.

Jelöljük az $\bar{\omega} = \varrho(\eta)$ formát $\varrho_y(\omega)$-val és tisztázzuk annak y-tól való függését. Ha y_1 egy másik olyan függvény, hogy $v_C(y_1) = 1$, akkor $y = y_1 u$, $v_C(u) = 0$ és $dy = u\,dy_1 + y_1\,du$. Ezért $\omega = \eta \wedge dy = \eta u \wedge dy_1 + y_1(\eta \wedge du)$. Az $\eta \wedge du$ forma reguláris a C-t metsző nyílt halmazban, és ezért előállítható $\eta \wedge du = \eta_1 \wedge dy_1$ alakban. Innen következik, hogy

$$\omega = (\eta u + y_1 \eta_1) \wedge dy_1,$$

$$\varrho_{y_1}(\omega) = \varrho(\eta u) + \varrho(y_1 \eta_1) = \varrho(\eta u) = \varrho_y(\omega) \cdot \varrho(u),$$

mivel $\varrho(y_1) = 0$. Ilyen módon

(2) $$\varrho_{y_1}(\omega) = \varrho_y(\omega) \cdot \varrho\left(\frac{y}{y_1}\right).$$

Felhasználva a (2) összefüggést, levezetjük a

(3) $$(\varrho_y(\omega)) = \varrho((\omega)) + \varrho(C - (y))$$

kifejezést a $(\varrho_y(\omega))$ divizor esetére. Itt a ϱ műveletet nemcsak aformákra, de az X-en értelmezett D divizorokra is alkalmazni fogjuk, értve ezalatt $\varphi^*(D)$-t, ahol φ a C-nek X-be való beágyazási leképezése.

Hogy bebizonyítsuk a (3) összefüggést, elegendő bebizonyítani, hogy a bal és jobb oldalon álló divizorok egybeesnek a C görbe bármely ξ pontja környezetében.

Kiválasztjuk az u és v, valamint a ξ pont U környezetét úgy, hogy u a C lokális egyenlete legyen U-ban, az u és v pedig lokális paraméter rendszert alkosson bármely u pontban. Akkor $\omega = P\,dv \wedge du$, $(\omega) = (P)$ az U-ban, mivel pedig $\varrho(v)$ lokális paramétert alkot az $U \cap C$ bármely pontjában, így

(4) $$(\varrho_u(\omega)) = (\varrho(P\,dv)) = (\varrho(P)) = (\varrho(\omega)).$$

Továbbá, a (2) képletek miatt

(5) $$\varrho_y(\omega) = \varrho_u(\omega)\cdot\varrho\left(\frac{u}{y}\right).$$

A (4) és (5)-ből azt kapjuk, hogy U-ban

$$(\varrho_y(\omega)) = \varrho((\omega))+\left(\varrho\left(\frac{u}{y}\right)\right) = \varrho((\omega))+\varrho(C-(y)),$$

ami be is bizonyítja a (3) képletet.

Most már magától adódik a fő összefüggés.

4. TÉTEL. *A sima projektív X felületen levő sima C görbére teljesül*

$$\deg K_C = (C, K_X)+(C^2).$$

Valóban, mivel $\varrho_y(\omega)$ egydimenziós forma a C-n, így

(6) $$\deg K_C = \deg\left(\varrho_y(\omega)\right).$$

Alkalmazzuk a (3) képletet. Tisztáznunk kell még, hogyan számítsuk ki $\deg \varrho(D)$-t a tetszőleges D divizorra X-en. Feltételezhetjük, hogy D effektív és nem tartalmazza C-t komponenseként. Legyen f annak lokális egyenlete a $\xi\in C$ pont valamely környezetében, u pedig az előbbiekhez hasonlóan a C lokális egyenlete. Akkor $\varrho(D)$ a $\varrho(f)$ lokális egyenlettel van megadva C-n, és az 1. §. 3. pont 1. állítása szerint (alkalmazva azt a legtriviálisabb $n=2$ esetre) $(C, D)_\xi = v_\xi(\varrho(D))$. Összegezve az összes $\xi\in\operatorname{Supp}(\varrho(D))$ pont szerint, azt kapjuk, hogy

(7) $$\deg \varrho(D) = (C, D).$$

Most átírhatjuk a (3) képletet $\deg(\varrho_y(\omega))=(C, (\omega))+(C, C-(y))$ alakban. Mivel $(\omega)\in K_X$, az 1. §. 2. tétele miatt pedig $(C, (y))=0$, így a (6) és (7) képletekből már következik a tétel állítása.

Ha felhasználjuk a $\deg K_C=2g_C-2$ képletet, amelyet a Riemann—Roch-t ételből a III. fejezet 5. §. 2. pontban levezettünk, akkor a 4. tétel a

(8) $$g_C = \frac{(C, C+K)}{2}+1$$

összefüggéshez vezet.

PÉLDA. Tételezzük fel, hogy $X=P^2$. Amint azt a III. fejezet 5. §. 3. pontban láttuk $K_X\ni -3L$, ahol L egyenes divizora. Ha a C görbe rendje n, akkor $C\sim nL$ és a 4. tétel azt adja, hogy $\deg K_C=n(n-3)$, azaz $g_C=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. Ezt az eredményt korábban más úton kaptuk.

4. *Görbék másodrendű felületen*

Példaként a 4. tétel alkalmazására most megvizsgáljuk a sima másodrendű X felületen levő görbéket P^3-ban.

Mivel $X\cong P^1\times P^1$, így alkalmazhatjuk az 1. pontban levezetett képletet. Éspedig két olyan L és L' egyenes, amely az egyenesvonalú generátorok két különböző családjához tartozik, a $Cl(X)$ csoport bázisát képezi, és ha

(1) $$C \sim nL+n'L', \quad D \sim mL+m'L',$$

akkor

(2) $$(C, D) = nm'+mn',$$

méghozzá

(3) $$n = (C, L'), \quad n' = (C, L).$$

Minden $C \subset P^3$ görbével kapcsolatba hozható két szám: a $\deg C$ fokszám, és ha C sima, annak g_C faja. Feltételezve, hogy C az (1) alakban van megadva, kiszámítjuk most mindkét számot.

Először is megjegyezzük, hogy

(4) $$\deg C = (C, E),$$

ahol E az X síkmetszete. Ebből a célból keresünk egy C-t tranzverzálisan metsző síkot. Akkor a $\deg C$ egyenlő a C és E metszéspontjainak a számával. Továbbá, ha $x \in C \cap E$, akkor $E \not\supset \Theta_{x,C}$, és ezért $(E, C)_x = 1$, ahonnan látható, hogy (C, E) szintén egyenlő a C és E metszéspontjainak a számával. Ez bebizonyítja a (4) képletet.

Most megjegyezzük még, hogy

(5) $$E \sim L+L',$$

amint azonnal látható (3)-ból és abból, hogy E és L, de E és L' is tranzverzálisak metszéspontjukban. Behelyettesítve ezt a kifejezést a (4) képletbe, és alkalmazva (2)-t, azt kapjuk, hogy

(6) $$\deg C = n+n'.$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges C irreducibilis görbe esetén $n>0$ és $n'>0$, kivéve azt az esetet, amikor C egy egyenes. Valóban, ha C nem tartozik például az első családhoz, akkor tetszőleges $x \in C$ pontot és az első család L olyan egyenesét véve, amely átmegy x-en, azt látjuk, hogy C és L közös helyzetben vannak és

$$(C, L) = n' \geqq (C, L)_x > 0.$$

Áttérünk a ϱ_C kiszámítására. Hogy alkalmazhassuk a 3. pont (8) képletét, ismernünk kell az X felület kanonikus osztályát. Ezzel fogunk most foglalkozni. Azt fogjuk felhasználni, hogy $X \cong P^1 \times P^1$. Könnyű megoldani egy még általánosabb feladatot is: határozzuk meg az $X = Y_1 \times Y_2$ felület kanonikus osztályát, ahol Y_1 és Y_2 sima projektív görbék. Jelölve π_1 és π_2-vel a $\pi_1\colon X \to Y_1$, $\pi_2\colon X \to Y_2$ projekciókat, tekintjük a tetszőleges egydimenziós $\omega_1 \in \Omega^1(Y_1)$, $\omega_2 \in \Omega^1(Y_2)$ differenciál formákat, és megfeleltetjük nekik a $\pi_1^*(\omega_1)$ és $\pi_2^*(\omega_2)$ formákat X-en. Az $\omega = \pi_1^*(\omega_1) \wedge \pi_2^*(\omega_2)$ forma kétdimenziós és annak (ω) divizora benne van a kanonikus osztályban. Ezt a divizort fogjuk kiszámítani.

Legyen $x \in X$, $x = (y_1, y_2)$, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$, és t_1 és t_2 lokális paraméterek Y_1 és Y_2-n az y_1 és y_2 pontok környezetében. Akkor, amint azt a nyilvánvaló ellenőrzés tanúsítja, $\pi_1^*(t_1)$ és $\pi_2^*(t_2)$ lokális paraméter rendszert képez az x pontra X-en. Előállítjuk ω_1 és ω_2-t $\omega_1 = u_1\,dt_1$, $\omega_2 = u_2\,dt_2$ alakban. Akkor $(\omega_1) = (u_1)$ és $(\omega_2) = (u_2)$ az y_1 és y_2 környezetében. Nyilvánvaló, hogy $\omega = \pi_1^*(u_1) \cdot \pi_2^*(u_2)\, d\pi_1^*(t_1) \wedge d\pi_2^*(t_2)$ ahonnan következik, hogy az x pont valamely környezetében igaz

$$(\omega) = (\pi_1^*(u_1)) + (\pi_2^*(u_2)) = \pi_1^*((\omega_1)) + \pi_2^*((\omega_2)).$$

Mivel ez teljesül tetszőleges $x \in X$ pontra, így $(\omega) = \pi_1^*((\omega_1)) + \pi_2^*((\omega_2))$, vagy más szóval

$$K_X = \pi_1^*(K_{Y_1}) + \pi_2^*(K_{Y_2}). \tag{7}$$

Visszatérünk az $X = P^1 \times P^1$ esethez. Tudjuk, hogy $K_{P_1} \ni -2y$, $y \in P^1$. Ezért a képlet a mi esetünkben a $K_X \ni -2(\pi_1^*(y_1) + \pi_2^*(y_2))$ összefüggést adja. Mivel $\pi_1^*(y_1) = L'$, $\pi_2^*(y_2) = L$, így a következő végső képletet kapjuk:

$$K_X \ni -2L - 2L'. \tag{8}$$

Hogy megkaphassuk a $C \sim nL + n'L'$ görbe faját, be kell helyettesítenünk ezt a képletet a 3. pont (8) összefüggésébe és felhasználni a (2) képleteket. Azt kapjuk, hogy

$$g_C = (n-1)(n'-1). \tag{9}$$

Példaként vizsgáljunk meg alacsony rendű görbéket. Kizárjuk a vizsgálatokból az egyeneseket és C-t sima irreducibilis görbének tekintjük.

1. PÉLDA. $\deg C > 2$. A (6) egyenlőségből és abból, hogy $n > 0$, $n' > 0$, következik, hogy $C \sim L + L'$, azaz $C \sim E$.

Ilyen görbére példa, nyilvánvalóan, egy síkkal való metszet. Viszont ezzel a példával az általános eset ki is merül. Valóban, ha $C \sim L + L'$, akkor úgy tekintve C-t, mint egy görbét $X = P^1 \times P^1$-en, azt kapjuk, hogy C egyetlen $F(x_0 : x_1 : y_0 : y_1) = 0$ egyenlettel adható meg, amely elsőfokú az $x_0 : x_1$-re és az $y_0 : y_1$-re nézve is. Tekintsük X-et olyan P^3-beli felületnek, amely pontjainak z_{ij} $(i, j = 0, 1)$ koordinátái $z_{ij} = x_i y_j$ alakúak. Azt látjuk, hogy F lineáris egyenlet a z_{ij}-re nézve, tehát C sík metszet.

2. PÉLDA. $\deg C = 3$. A (6) képletekből következik, hogy két eset lehetséges: $n = 2$, $n' = 1$ és $n = 1$, $n' = 2$. Vizsgáljuk meg például az első esetet. A (9) képlet megmutatja, hogy $g_C = 0$. Hogy példát adjunk egy ilyen görbére, tekintünk egy $L' \subset X$ egyenest és egy másodrendű Y felületet, amely átmegy L'-en. Legyen $\Phi = 0$ az Y egyenlete. Az X-en értelmezett Φ forma által meghatározott D divizor ekvivalens $2E$-vel, mivel $\deg \Phi = 2$. Ezért $D \sim 2L + 2L'$. Másrészt D-nek komponense L' és így $D = C + L'$, ahol $C \sim 2L + L'$.

Megmutatjuk, hogy ilyen módon az összes most vizsgált görbe típust megkapjuk. Ebből a célból ismét előállítjuk X-et $P^1 \times P^1$ alakban. Akkor C egyetlen $F(x_0 : x_1;\ y_0 : y_1) = 0$ egyenlettel van megadva, amely másodfokú az $x_0 : x_1$-re és elsőfokú az $y_0 : y_1$-re nézve. A $G = F \cdot y_0$ polinom foka kettő, úgy az $x_0 : x_1$-re, mint az $y_0 : y_1$-re nézve. Innen következik, hogy másodfokú polinomja a $z_{ij} = x_i y_j$ szorzatnak. Ez pontosan azt bizonyítja, hogy a $C + L'$ metszete X-nek egy másik másodrendű felülettel.

Megjegyezzük, hogy a két $n = 2$, $n' = 1$ és $n = 1$, $n' = 2$ eset két különböző görbe típusnak felel meg X-en. Ilyen módon a másodrendű felületen a harmadrendű görbék olyan két családja fekszik, amelyek egyenesek két családjával analógok.

3. PÉLDA. $\deg C=4$. Ebben az esetben a (4) képlet három lehetőséget ad: $n=n'=2$; $n=3$, $n'=1$ és $n=1$, $n'=3$, amelyek közül az utolsó kettő szimmetrikus.

Az első $C \sim 2L+2L'$ típus az X-nek egy másik másodrendű felülettel való metszeteként realizálódik, amelyet már láttunk a $\deg C=3$ eset vizsgálatánál. A (9) képlet $g_C=1$-et ad, tehát ezek a görbék nem racionálisak.

Vizsgáljuk meg a hátramaradó lehetőségek egyikét, például az $n=3$, $n'=1$ esetet. Itt a (9) képlet $g_C=0$-t ad, azaz racionális görbékkel van dolgunk. Az ilyen típusú görbék konstruálása az általunk már korábban használt okoskodásokkal analóg módon történik. A C görbe olyan $F(x_0:x_1;\, y_0:y_1)=0$ egyenlettel van megadva, amely harmadfokú az $(x_0:x_1)$-re és elsőfokú az $(y_0:y_1)$-re nézve. Legyen φ_1 és φ_2 két lineáris forma az y_0: y_1-re nézve. Akkor a $G=F\cdot\varphi_1\cdot\varphi_2$ foka 3 úgy az $(x_0:x_1)$-re, mint az $(y_0:y_1)$-re nézve, tehát az $z_{ij}=x_iy_j$ szorzattól függő harmadrendű formával adható meg. Ez azt jelenti, hogy az $F\cdot\varphi_1\cdot\varphi_2$ forma D divizora az X és egy harmadrendű felület metszetének a divizora. A φ_1 és φ_2 formák egy család L_1' és L_2' egyeneseit határozzák meg. Ezért $D \sim 3L+3L'=C+L_1'+L_2' \sim C+2L'$, és végeredményben $C \sim 3L+L'$.

Ilyen módon a most vizsgált típusú görbéket úgy kapjuk, hogy X-et olyan harmadrendű felülettel metszük, amelynek X-szel két egy családhoz tartozó közös egyenese van, majd eldobjuk ezeket az egyeneseket.

Végeredményben azt kapjuk, hogy a negyedrendű görbék a másodrendű felületen lehetnek 1 vagy 0 fajúak, de az utóbbi esetben azok szétesnek két olyan családra, amelyek az $n=3$, $n'=1$ és $n=1$, $n'=3$ eseteknek felel meg.

A következő megjegyzés az összes megvizsgált példára vonatkozik. A görbék kapott családjai minden esetben olyan effektív divizorokból állnak, amelyek valamely rögzített D divizorral ekvivalensek ($L+L'$ az 1. példában, $2L+L'$ és $L+2L'$ a 2. példában, $2L+2L'$, $3L+L'$ és $L+3L'$ a 3. példában). Más szóval, valamely osztály összes effektív divizoráról van szó. A III. fejezet 1. §. 5. pontban láttuk, hogy minden ilyen divizor valamely projektív tér pontjainak felel meg. Ennek a projektív térnek az $l(D)-1$-gyel egyenlő dimenziója megmutatja, hogy milyen számú paramétertől függ az adott család görbéje. Az összes általunk vizsgált esetben ezeket a dimenziókat könnyű meghatározni, kiindulva a divizoroknak az $F(x_0:x_1;\, y_0:y_1)$ formákkal való megadásából, ahol a formák adott fokszámúak az $x_0:x_1$-re és $y_0:y_1$-re nézve (7. feladat).

Feladatok

1. Határozzuk meg $\deg v_m(P^n)$-t, ahol v_m a *Veronese*-féle leképezés.

2. Tételezzük fel, hogy a sima sík r-edfokú C görbe egy m-edfokú sima felületre illeszkedik P^3-ban. Határozzuk meg (C^2)-t (az 1. §. 4. pont. 3. példájának az általánosítása).

3. Tételezzük fel, hogy a P^3-ban levő m-edfokú sima projektív felületen egy 1-edfokú forma divizora egy komponensből áll 1 multiplicitással, amely komponens sima görbe. Határozzuk meg annak faját.

4. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f_i(x_0^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}; \ldots; x_0^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}) = 0$$

minden $x_0^{(j)}, \ldots, x_{n_j}^{(j)}$ változó rendszerére nézve lineáris egyenletrendszer megoldásainak száma $\frac{(\sum n_i)!}{\prod (n_i)!}$, ha az egyenletek száma $\sum_1^k n_i$. A megoldások számát, mint mindig, a megfelelő metszet index értelmében tekintjük.

5. Bizonyítsuk be, hogy az n valós olyan egyenletből álló

$$f_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszernek, amelyek homogének és páratlan fokúak a változók $x_1, \ldots, x_n$ és $y_1, \ldots, y_n$ rendszerére nézve, csak akkor létezik valós nemtriviális megoldása, ha $n \neq 2^k$ valamely k-ra.

6. Legyen X sima görbe, D az $X \times X$ diagonálisa (az (x, x) alakú elemek halmaza). Bizonyítsuk be, hogy $(D^2) = -\deg K_X$. (Utasítás: Használjuk fel azt, hogy D és X izomorfak.)

7. Bizonyítsuk be, hogy annak a projektív térnek a dimenziója, amelynek pontjai az $nL + n'L'$-el ekvivalens effektív divizoroknak felelnek meg (L és L' a másodrendű felületen levő különböző családok egyenesei).

3. §. Felületek biracionális izomorfizmusai

Ebben a paragrafusban leírjuk a metszet indexek alkalmazását a felületek biracionális izomorfizmusai néhány alapvető tulajdonságának a bizonyításához. Azzal kezdjük, hogy levezetjük az algebrai felület σ-eljárásának néhány egyszerűbb tulajdonságát.

1. *Felületek σ-eljárásai*

Legyen X algebrai felület, $\xi \in X$ egy egyszerű pont, x és y lokális paraméterek ξ-ben és $\sigma\colon Y \to X$ egy σ-eljárás, amelynek középpontja ez a pont. A II. fejezet 4. §. 3. pont 1. tétele szerint létezik olyan $U \ni \xi$ környezet, hogy a $V = \sigma^{-1}(U)$ leírható a $t_0 y = t_1 x$ egyenletekkel $U \times P^1$-ben, ahol $(t_0 : t_1)$ koordináták P^1-ben. Itt abban a nyílt környezetben, ahol $t_0 \neq 0$, a σ-eljárás az

$$x = u, \quad y = u \cdot v \tag{1}$$

egyszerű egyenletekkel adható meg, ahol $v = \frac{t_1}{t_0}$. Az $\eta = \sigma^{-1}(\xi)$ tetszőleges pontjában az u és $v - v(\eta)$ függvények lokális paraméter rendszert alkotnak. Legyen $L = \sigma^{-1}(\xi)$. Az L görbe lokális egyenlete nyilván $u = 0$.

Legyen C egy olyan irreducibilis görbe az X-en, amely átmegy a ξ ponton. A II. fejezet 4. §. 1. tételével analóg módon, a mi esetünkben a C görbe $\sigma^{-1}(C)$ őskép két komponensből áll, az L és a C' görbékből, amely utóbbit úgy lehet definiálni, mint a $\sigma^{-1}(C - \xi)$ görbe lezártját Y-ban. A C' görbét a C görbe saját ősképének nevezzük. Ezt $\sigma'(C)$-vel fogjuk jelölni. Tekintsük most C-t mint irreducibilis divizort az X-en. Akkor

$$\sigma^*(C) = \sigma'(C) + kL, \tag{2}$$

ahol a $\sigma'(C)$ együtthatója 1, mivel σ izomorfizmusa $Y-L$-nek $X-\xi$-re. Meghatározzuk a k együtthatót a (2) képletben. Ebből a célból tételezzük fel, hogy C-nek ξ egy r multiplicitású pontja. Ez azt jelenti, hogy ha f a C lokális egyenlete a ξ környezetében és $f \in \mathfrak{M}_\xi^r$, $f \notin \mathfrak{M}_\xi^{r+1}$, akkor $\sigma^*(C)$ lokális egyenlete $\sigma^*(f)$ az $\eta \in \sigma^{-1}(\xi)$ tetszőleges pont környezetében. Legyen

$$f = \varphi(x, y) + \psi, \quad \psi \in \mathfrak{M}_\xi^{r+1}, \tag{3}$$

ahol φ egy r-edfokú forma.

Behelyettesítve az (1) transzformációs képleteket a (3) egyenletbe, azt kapjuk, hogy $(\sigma^* f)(u, v) = \varphi(u, uv) + \sigma^* \psi$. Mivel $\psi \in \mathfrak{M}_\xi^{r+1}$, így $\psi = F(x, y)$, ahol F egy r-edfokú $\mathfrak{M}_\xi$-beli együtthatós forma. Ezért $\sigma^*(\psi) = (\sigma^* F)(u, uv)$ és

$$(\sigma^* f)(u, v) = u^r(\varphi(1, v) + u(\sigma^* F)(1, v)); \tag{4}$$

mivel $\varphi(1, v)$ nem osztható u-val, így innen az következik, hogy a (2) képletben $k = r$ a ξ szinguláris pont multiplicitásával a C görbén.

Megfogalmazzuk a bebizonyítottakat.

1. TÉTEL. *Az X-en értelmezett olyan egyszerű C divizor ősképe, amely tartalmazza a σ-eljárás ξ középpontját, a $\sigma^*(C) = \sigma'(C) + kL$ képlettel adható meg, ahol $\sigma'(C)$ egyszerű divizor, $L = \sigma^{-1}(\xi)$ és k a ξ pont multiplicitása C-n.*

2. *Néhány metszet index*

Sima projektív felületek $f\colon Y \to X$ biracionális reguláris leképezéseinek általános tulajdonságával kezdjük.

2. TÉTEL. *Ha D_1, D_2 divizorok az X-en, akkor*

$$(f^*(D_1), f^*(D_2)) = (D_1, D_2). \tag{1}$$

Ha $\bar{D}$ olyan divizor az Y-on, amelynek komponensei különleges görbék, akkor

$$(f^*(D), \bar{D}) = 0 \tag{2}$$

bármely D divizorra az X-en.

Jelöljük $S \subset X$-szel azt a véges ponthalmazt, amelyben az f^{-1} leképezés nem reguláris, és legyen $T = f^{-1}(S)$ (halmazelméletileg). Akkor f meghatározza az

$$Y \to T \to X - S \tag{3}$$

izomorfizmust. Ha sem a Supp D, sem a Supp D_2 nem metszi S-t, és D_1 és D_2 közös helyzetben vannak, akkor az (1) egyenlőség a (3) izomorfizmus miatt nyilvánvaló. Ellenkező esetben használjuk a divizor hordozójának a pontból való elmozdításáról szóló tételt (III. fejezet 1. §. 3. pont 1. tétele). Legyenek $D_1' \sim D$ és $D_2' \sim D_2$ olyan divizorok, hogy $(\mathrm{Supp}\, D_1') \cap S = (\mathrm{Supp}\, D_2') \cap S = \emptyset$ és D_1' és D_2' közös helyzetben vannak. Akkor $(D_1, D_2) = (D_1', D_2')$, a fent mondottak miatt viszont $(D_1', D_2') = (f^*(D_1'), f^*(D_2'))$. Mivel $f^*(D_i') \sim f^*(D_i)$, így innen következik az (1) egyenlőség.

A (2) egyenlőség ugyanúgy nyilvánvaló, ha $(\mathrm{Supp}\, D) \cap S = \emptyset$. Az általános eset visszavezethető erre teljesen analóg okoskodással.

Most olyan következményeket vezetünk le, amelyek közvetlenül a σ-eljárásra vonatkoznak. Az 1. pont jelöléseit fogjuk használni.

1. KÖVETKEZMÉNY.

$$(L^2) = -1. \tag{4}$$

Tekintsük az y lokális egyenletű $C \subset X$ görbét. Az 1. tétel szerint $\sigma^*(C) = \sigma'(C) + L$ méghozzá az 1. pont (1) képletéből világos, hogy a $\sigma'(C)$ lokális egyenlete a v. Mivel az L lokális egyenlete u, így $(\sigma'(C), L) = 1$, és ezért a (4) képlet következik (2)-ből.

2. KÖVETKEZMÉNY. *$(\sigma'(C), L) = k$, ahol k a ξ szinguláris pont multiplicitása C-n.*

Ez azonnal következik a (2), (4) képletekből és az 1. pont (2) képletéből.

3. KÖVETKEZMÉNY.

$$(\sigma'(C_1), \sigma'(C_2)) = (C_1, C_2) - k_1 k_2, \tag{5}$$

ahol k_1 és k_2 a ξ pont multiplicitásai a C_1 és C_2-n.

Az 1. és 2. tételeknek megfelelően

$$(C_1, C_2) = (\sigma^*(C_1), \sigma^*(C_2)) = (\sigma'(C_1) + k_1 L, \sigma^*(C_2)) = (\sigma'(C), \sigma^*(C_2)) =$$
$$= (\sigma'(C_1), \sigma'(C_2) + k_2 L) = (\sigma'(C_1), \sigma'(C_2)) + k_1 \cdot k_2,$$

ahonnan (5) következik.

3. *Irregularitási pontok feloldása*

Most már bebizonyíthatjuk az algebrai felületek racionális leképezéseinek egy fontos tulajdonságát.

3. TÉTEL. *Ha $\varphi: X \to P^n$ egy sima projektív felület racionális leképezése, akkor létezik a σ-eljárások olyan*

$$\begin{tikzcd}
X_m \arrow[d, dotted, "\sigma_m"'] \arrow[ddddr] & \\
\vdots \arrow[d, "\sigma_2"'] & \\
X_1 \arrow[d, "\sigma_1"'] & \\
X \arrow[r] & P^n
\end{tikzcd}$$

sorozata, hogy a $\psi = \varphi\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_m$ leképezés reguláris.

Bizonyítás. Ismert, hogy f nem reguláris csak véges számú pontban (II. fejezet 3. §. 1. pont 3. tétele) és a III. fejezet 1. §. 4. pont 2. tétele részletesebb leírását adja ennek a halmaznak, amelyet most visszaidézünk. Legyen $\varphi = (f_0 \cdot \ldots \cdot f_m)$, $\bar{D} = $ L.n.k.o.$((f_0), \ldots, (f_m))$ és $D_C(f_i) - \bar{D}$. Akkor a φ irregularitási pontjainak a halmaza egybeesik $\bigcap_{i=0}^{m}$ Supp D_i-vel.

Bebizonyítjuk először a 3. tételt $n = 1$ esetére. Ekkor mindössze két D_0 és D_1 divizorunk van, amelyeknek nincs közös komponensük, azaz közös helyzetben vannak. Ezért a nekünk szükséges Supp $D_0 \cap$ Supp $D_1 = \emptyset$ tulajdonság ekvivalens azzal, hogy $(D_0, D_1) = 0$.

Legyen σ_1 egy σ-eljárás valamely olyan ξ pontban, ahol φ nem reguláris és $\varphi' = \varphi\sigma_1$. Bebizonyítjuk, hogy a φ' leképezésnek megfelelő D_0', D_1' divizorokra $(D_0', D_1') < (D_0, D_1)$. Innen, természetesen, következni fog a tétel az $n=1$ esetre.

Egy $D = \sum l_i C_i$ divizor esetén a ξ pont multiplicitásának nevezzük D-n a $k = \sum k_i l_i$ számot, ahol a k_i-k a ξ multiplicitásai a C görbén. Nyilvánvaló, hogy így az 1. tétel igaz lesz bármely divizorra, és ha $D \geqq 0$, akkor $k \geqq 0$, mégpedig $k=0$ azt jelenti ($D \geqq 0$ esetén), hogy $\mathrm{Supp}\, D \not\ni \xi$.

Legyenek a k_i-k a ξ pont multiplicitásai a D_i divizorokon. Tételezzük fel, hogy $k_0 \leqq k_1$, hozzá $k_0 > 0$, mivel φ nem reguláris a ξ pontban. Akkor a φ' leképezést a $(\sigma_1^*(f_0) : \sigma_1^*(f_1))$ függvények adják meg. Az 1. tétel szerint

$$\big(\sigma_1^*(f_i)\big) = \sigma_1^*(D_i) + \sigma_1^*(\bar{D}) = \sigma_1'(D_i) + \sigma_1^*(\bar{D}) + k_i L, \qquad (i = 0, 1),$$

ahol $\sigma_1'(D_i)$ egy olyan effektív divizor, amely nem tartalmazza L-t komponenseként. Innen látható, hogy

$$\mathrm{L.n.k.o.}\big(\sigma_1^*(f_0), \sigma_1^*(f_1)\big) = \sigma_1^*(\bar{D}) + k_0 L \text{ és } D_0' = \sigma_1'(D_0), \quad D_1' = \sigma_1'(D_1) + (k_1 - k_0)L.$$

Alkalmazva a 2. tétel 2. és 3. következményét, azt kapjuk, hogy

$$(D_0', D_1') = \big(\sigma_1'(D_0), \sigma_1'(D_1) + (k_1 - k_0)L\big) = (D_0, D_1) - k_0^2 < (D_0, D_1).$$

Amint már említettük, innen következik a 3. tétel állítása $n=1$ esetében.

Bebizonyítjuk most a 3. tételt általános esetben. Legyen továbbra is $\bar{D} = \mathrm{L.n.k.o.}\big((f_0), \ldots, (f_n)\big)$, $D_i = (f_i) + \bar{D}$. Tekintsük a $\varphi_{ij} : X \to P^1$, $\varphi_{ij} = (f_i : f_j)$ leképezést. A bizonyítás első részének megfelelően létezik olyan $\sigma : X' \to X$ leképezés, amely σ-eljárások szorzata, hogy az összes $\varphi_{ij}' = \varphi_{ij} \cdot \sigma$ leképezés reguláris (alkalmazhatjuk a bizonyított állítást a φ_{ij} leképezésekre egymás után). Hogy ne komplikáljuk a jelöléseket, fel fogjuk tételezni, hogy már φ rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Más szóval, ha

$$D_{ij} = \mathrm{L.n.k.o.}\big((f_i), (f_j)\big), \quad (f_i) = P_i + D_{ij}, \quad (f_j) = P_j + D_{ij},$$

akkor $\mathrm{Supp}\, P_i \cap \mathrm{Supp}\, P_j = \emptyset$. Legyen $\bar{D}_{ij} = \mathrm{L.n.k.o.}(D_i, D_j)$ és megjegyezzük, hogy

$$\bar{D}_{ij} = D_{ij} + \bar{D}, \quad D_i = P_i + \bar{D}_{ij}, \quad D_j = D_j + \bar{D}_{ij}.$$

Ezért állíthatjuk a következőt: ha C_i és C_j irreducibilis görbék és

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{ll} C_i < D_i, & C_j < D_j \\ C_i \not< D_j, & C_j \not< D_i \end{array}\right\},$$

akkor

$$C_i \cap C_j = \emptyset.$$

Ebből már könnyű levezetni, hogy úgyszintén $\bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{Supp}\, D_i = \emptyset$. Ezt az állítást indukcióval bizonyítjuk n szerint. Legyen $\mathrm{L.n.k.o.}(D_0, \ldots, D_{n-1}) = \bar{\bar{D}} \geqq \bar{D}$. Akkor a $D_i' = D_i - \bar{\bar{D}}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ divizorok eleget tesznek az állítás feltételeinek és indukció szerint $\bigcap_0^{n-1} \mathrm{Supp}\, D_i' = \emptyset$. Ezért $\bigcap_0^{n-1} \mathrm{Supp}\, D_i = \bar{\bar{D}} - \bar{D}$. Legyen C a D_n divizor irreducibilis komponense. Akkor $C \not< \bar{\bar{D}} - \bar{D}$, mivel $\mathrm{L.n.k.o.}(D_0, \ldots, D_n) = 0$. Ezért $C \not< D_i$

valamely $i<n$-re. Legyen C' a $D-D$ tetszőleges irreducibilis komponense. Akkor $C'<D_i$ a $C'\not< D_n$ miatt. (1)-ből következik, hogy $C\cap C'=\emptyset$, azaz $\operatorname{Supp}(\bar{\bar{D}}-\bar{D})\cap \cap \operatorname{Supp} D_n=\emptyset$, vagyis, más szóval, $\bigcap\limits_{i=0}^{n} \operatorname{Supp} D_i=\emptyset$. A 3. tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. A 3. tétel fogalmazásában nem feltétlenül szükséges az X felületet projektívnek feltételezni. A bizonyítás során ezt a tulajdonságot csak az arra való utalásban használtuk fel, hogy $(C,(f))=0$ bármely $C\subset X$ görbére. Viszont ezt az állítást csak $\sigma^{-1}(\xi)$ alakú görbékre alkalmaztuk, amelyek akkor is projektívek, ha X nem is projektív. Könnyű belátni, hogy az ilyen C görbékre a szükséges tulajdonság teljesül.

A 3. tételre a legegyszerűbb példa az $f\colon A^2\to P^1$ leképezés, amellyel az $f(x,y)= =(x:y)$ projektív egyenes definíciójában találkoztunk. Az f leképezés nem reguláris a $(0,0)=\xi$ pontban. Behelyettesítve az 1. pont (1) képleteit, azt látjuk, hogy a $\sigma^{-1}(\xi)$-hez és a $t_0\neq 0$ halmazhoz tartozó pontokban $f(x,y)=(1:v)$, és ezért ott az f reguláris.

4. *Felbontás σ-eljárásokra*

Most már minden rendelkezésünkre áll a felületek biracionális izomorfizmusairól szóló fő eredmény bizonyításához.

4. TÉTEL. *Legyen $\varphi\colon X\to Y$ sima projektív felületek biracionális izomorfizmusa. Akkor létezik olyan Z felület és olyan felületek és*

$$\sigma_i : X_i \to X_{i-1} \quad (i=1,\dots,k),$$

$$\tau_j : Y_j \to Y_{j-1} \quad (j=1,\dots,l)$$

leképezések, hogy $X_0=X$, $Y_0=Y$, $X_k=Y_l=Z$, σ_i és τ_j σ-eljárások és $\varphi\sigma_1\cdot\ldots\cdot\sigma_k= =\tau_1\cdot\ldots\cdot\tau_l$. Más szóval a

$$\begin{tikzcd}
& & Z \arrow[dl, dotted, "\sigma_2"'] \arrow[dr, dotted, "\tau_2"] & & \\
& X_1 \arrow[dl, "\sigma_1"'] & & Y_1 \arrow[dr, "\tau_1"] & \\
X \arrow[rrrr, "\varphi"'] & & & & Y
\end{tikzcd}$$

diagramma kommutatív.

A 4. tétel nyilvánvaló következménye a 3. tételnek és a következő állításnak.

5. TÉTEL. *Legyen $\varphi\colon X\to Y$ sima projektív felületek olyan reguláris leképezése, amely biracionális izomorfizmus. Akkor létezik a felületeknek és $\sigma_i\colon Y_i\to Y_{i-1}$ $(i=1,\dots,k)$ leképezéseiknek olyan sorozata, hogy a σ_i-k σ-eljárások, $Y_0=X$, $Y_k=Y$ és*

$$\varphi=\sigma_1\cdot\ldots\cdot\sigma_k.$$

Az 5. tétel bizonyítását megelőzően néhány általános megjegyzést teszünk a felületek biracionális izomorfizmusairól.

Mindenekelőtt, tetszőleges olyan $\varphi: X \to Y$ racionális leképezés esetén, ahol X egy síma felület, Y pedig projektív sokaság, beszélhetünk a $C \subset X$ görbe $\varphi(C)$ képéről. Valóban, φ reguláris a C összes pontjában, kivéve talán véges S ponthalmazt. $\varphi(C)$-n a $\varphi(C-S)$ lezárját fogjuk érteni Y-ban.

Közben a reguláris leképezések mellett a különleges részsokaságok létezéséről szóló tétel (II. fejezet 4. §. 2 tétel) érvényes marad.

LEMMA. *Ha $\varphi: X \to Y$ sima projektív felületek biracionális izomorfizmusa és φ^{-1} nem reguláris az $y \in Y$ pontban, akkor létezik olyan $C \subset X$ görbe, hogy $\varphi(C)=y$.*

Bizonyítás. Tekintsük azokat az $U \subset X$ és $V \subset Y$ nyílt halmazokat, amelyeken φ izomorfizmust létesít, és jelöljük Z-vel a $\varphi: U \to V$ izomorfizmus grafikonjának lezártját $X \times Y$-ban. Az X és Y-ra való projekciók meghatározzák a $p: Z \to X$ és $q: Z \to Y$ reguláris biracionális izomorfizmusokat. Nyilvánvaló, hogy $\varphi^{-1}=p \cdot q^{-1}$, és mivel φ^{-1} feltétel szerint nem reguláris az y-ban, így q^{-1} sem reguláris az y-ban.

Alkalmazhatjuk most a különleges részsokaságok létezéséről szóló tételeket (II. fejezet 4. §. 2. tétel) a $q: Z \to Y$ reguláris leképezésre. Ez a tétel megmutatja, hogy létezik olyan $D \subset Z$ görbe, hogy $q(D)=y$. Legyen $p(D)=C$ és ellenőrizzük, hogy C eleget tesz a lemma feltételeinek. Valójában csak azt kell ellenőrizni, hogy $\dim C=1$, azaz hogy $\dim C=\dim D$. Ha ez nem volna így, akkor a $p(C)$ egyetlen $x \in C$ pont volna és az összes $z \in D$ pontra azt kapnánk, hogy $p(z)=x$, $q(z)=y$, azaz $z=(x, y)$, ez pedig ellentmond annak, hogy $D \subset X \times Y$ egy görbe.

Most áttérünk az 5. tétel bizonyítására. Tételezzük fel, hogy φ nem izomorfizmus, azaz φ^{-1} nem reguláris egy $y \in Y$ pontban. Tekintsük a $\sigma: Y' \to Y$ σ-eljárást (y-beli középponttal) és úgy definiáljuk $\varphi': X \to Y'$-t, hogy a

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & Y \\ & Y' \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

diagramma kommutatív legyen.

A tételt bebizonyítjuk, ha megmutatjuk, hogy φ' reguláris leképezés. Valóban, az (1) kommutativitásából akkor következik, hogy a $\varphi^{-1}(y)$ részsokaságot a φ' leképezi $\sigma^{-1}(y)=L \cong P^1$-be. Közben abból, hogy a φ' leképezi X-et az egész Y'-re, az következik, hogy $\varphi^{-1}(y)$ az egész L-be megy át. Ezért a $\varphi^{-1}(y)$ nem minden komponense képződik le egy pontra. Tehát az $y' \in L$-re a $(\varphi')^{-1}(y')$ komponenseinek a száma kisebb, mint a $\varphi^{-1}(y)$ komponenseinek a száma.

Következésképp, végesszámú σ-eljárást végrehajtva, elérjük azt, hogy X-en nem lesz különleges részsokaság, azaz leképezésük izomorfizmus lesz.

Be kell még bizonyítani a φ' regularitását. Tételezzük fel, hogy ez nem így van. Akkor a $\psi=(\varphi')^{-1}$ a lemma szerint az Y'-n levő valamely görbét egy $x \in X$ pontba képezi le. Az (1) kommutativitásából következik, hogy ez a görbe csak L lehet, azaz $\psi(L)=x$. Abból, hogy φ^{-1} nem reguláris, következik, hogy a $\varphi^{-1}(y)$ egy görbe és hogy az x rajta van ezen a görbén. Jelöljük C-vel a $\varphi^{-1}(y)$ görbének az x ponton átmenő irreducibilis komponensét.

Tekintsük az y pont u és v lokális paramétereit és legyen $\omega=\alpha u+Bv$. A σ-eljárás képleteiből következik, hogy $\sigma^*(\omega)$ az L lokális egyenlete az L minden pontjában, kivéve egyetlen $y_0'\in L$ pontot. Nyilvánvaló, hogy $\varphi^*(\omega)|_C=0$. Vizsgáljuk meg $\psi^*\varphi^*(\omega)=\sigma^*(\omega)$-t az $y'\in L, y'\neq y_0'$ pontokban. Mivel ψ ezekben reguláris, így $\sigma^*(\omega)$ — lévén sima görbe lokális egyenlete — nem lehet benne az $\mathfrak{M}^2_{y'}$-ben. Akkor viszont $\varphi^*(\omega)$ nem lehet benne az $\mathfrak{M}^2_x$-ben. Innen következik, hogy az x ponton keresztül a $\varphi^{-1}(y)$-nak csak egy komponense megy át, a C görbe. Ennek a görbének x egyszerű pontja, és $\varphi^*(\omega)$ a görbe lokális egyenlete az x pont környezetében. Ilyen módon bármely $\varphi^*(\omega)$ lokális egyenlete C-nek az x környezetében

$$(2) \qquad \varphi^*(\omega)=f\cdot h, \quad h, h^{-1}\in O_x,$$

f pedig egy valamely rögzített lokális egyenlete C-nek. Ha viszont

$$\varphi^*(u)=f\cdot h_1, \quad \varphi^*(v)=f\cdot h_2, \quad h_1(x)=\lambda, \quad h_2(x)=\mu,$$

akkor

$$\varphi^*(\mu u-\lambda v)=f\cdot h,$$

ahol $h(x)=0$ a (2)-vel ellentmondásban. Ellentmondáshoz vezettük azt a feltételezést, hogy φ' nem reguláris. Ezzel az 5. tételt bebizonyítottuk.

5. *Megjegyzések és példák*

Tekintsük a sima projektív felületek olyan $f: X\to Y$ biracionális izomorfizmusát, amely reguláris leképezés. Tételezzük fel, hogy f^{-1} csak egy $\eta\in Y$ pontban nem reguláris, és hogy a $C=f^{-1}(\eta)$ görbe irreducibilis. Az 5. tétel szerint f σ-eljárásnak szorzata: $f=\sigma_1\cdot\ldots\cdot\sigma_k$, mivel pedig bármely σ-eljárásnál egy saját görbe keletkezik, amelyet az eljárás egy pontba visz át, így C csak akkor irreducibilis, ha $k=1$ és f maga is σ-eljárás. Akkor C egybeesik az L görbével, amelyről az 1. és 2. pontokban azt bizonyítottuk be, hogy

$$(1) \qquad L\cong P^1, \quad (L^2)=-1.$$

A megfordítás is igaz. Ha a sima projektív X felületen rajta van egy az (1) feltételnek eleget tevő C görbe, akkor létezik olyan $f: X\to Y$ reguláris biracionális izomorfizmus, hogy Y sima, $f(C)=\eta\in Y$, méghozzá f egy σ-eljárással esik egybe. Ilyen módon az (1) feltételek szükségesek és elegendők ahhoz, hogy a C görbe egy pontba zsugorítható legyen a fenti értelemben. Ezt az eredményt Kastelnuovo bizonyította be. Mi nem ismertetjük a bizonyítást, az megtalálható az *Алгебраические поверхности* c. könyv III. fejetében.

Befejezésül, a 4. tételnek megfelelően megkonstruáljuk a σ-eljárásokra való bontást egy egyszerű biracionális izomorfizmus esetében. Ez a P^2 projektív sík f biracionális automorfizmusa, amelyet kvadratikus transzformációnak nevezünk és a következő képletekkel adhatunk meg:

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} &f(x_0:x_1:x_2)=(y_0:y_1:y_2), \\ &y_0=x_1x_2, \quad y_1=x_0x_2, \quad y_2=x_0x_1. \end{aligned}\right\}$$

Mi f-et úgy fogjuk tekinteni, mint a P^2 sík két példányának: a P^2-nek és $\bar{P}^2$-nek, a biracionális izomorfizmusát, amelyek egyikében a koordinátákat $(x_0: x_1: x_2)$, a másikban $(y_0: y_1: y_2)$-vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy f három pontban nem reguláris: a $\xi_0=(1:0:0)$, $\xi_1=(0:1:0)$, $\xi_2=(0:0:1)$ pontokban. A 3. tételnek megfelelően azzal kell kezdenünk, hogy a σ_0, σ_1 és σ_2 σ-eljárásokat végrehajtsuk ezekben a pontokban. Egy X felülethez és a $\varphi: X \to P^2$, $\varphi=\sigma_2\sigma_1\sigma_0$ reguláris leképezéshez jutunk. Bebizonyítjuk, hogy a $\psi=f\varphi: X \to \bar{P}^2$ leképezés már reguláris. Valóban, ψ reguláris egy z pontban, ha $\varphi(z)\neq\xi_i$. A $\zeta\in\sigma_1^{-1}\xi_0$ pontokban az $f\sigma_1$ leképezés már reguláris. Hogy ezt ellenőrizzük, elegendő venni $x=\frac{x_1}{x_0}$, $y=\frac{x_2}{x_0}$-t és behelyettesíteni az 1. pont (1) képleteit (2)-be. Látjuk, hogy

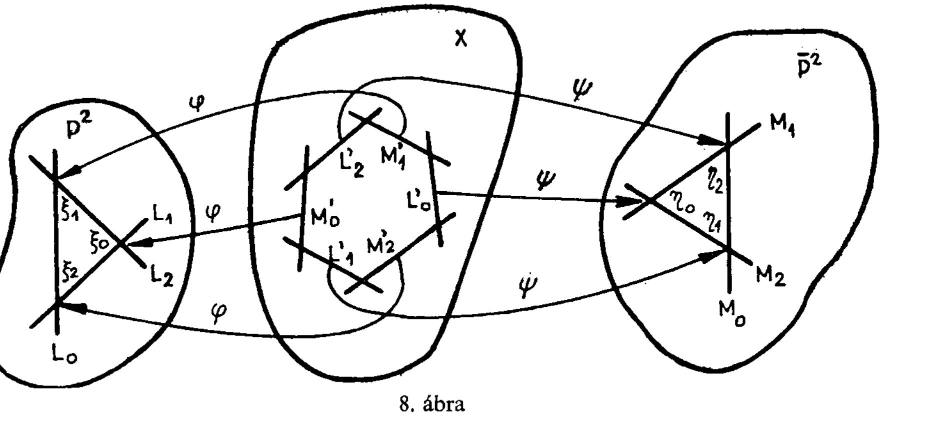
$$(3) \qquad f(x, y) = (x^2 : x : y), \quad f(u, v) = (u : 1 : v).$$

Mivel σ_1 és σ_2 izomorfizmust indukálnak a ζ pontok környezeteiben, így ψ is reguláris azokban a z pontokban, amelyekre $\varphi(z)=\xi_0$. Hasonlóan áll a dolog a ξ_1 és ξ_2-vel.

A 4. tétel szerint a ψ leképezés σ-eljárások szorzata: $\psi=\tau_1\cdot\ldots\cdot\tau_k$. Tisztázzuk milyen $C\subset X$ görbék képződhetnek le pontba a ψ hatására. Nyilvánvaló, hogy ezek csak vagy az $M_i'=\sigma_i^{-1}(\xi_i)$ $(i=0, 1, 2)$ görbék, vagy az olyan $L\subset P^2$ görbék saját ősképei, amelyeket f pontokba visz át. Könnyen látható, hogy f a $P^2-L_0-L_1-L_2$ és $\bar{P}^2-M_0-M_1-M_2$ izomorfizmusát határozza meg, ahol L_i olyan egyenes P^2-ben, amelyet az $x_i=0$ egyenlet határoz meg, M_i pedig az $y_i=0$ egyenletű egyenes P^2-ben. Ezért ψ csak az M_0', M_1', M_2', L_0', L_1', L_2' görbéket zsugoríthatja pontba, ahol L_i' az L_i görbék saját ősképei X-ben. Viszont (3)-ból látható, hogy például M_0' (amelyet az $u=0$ lokális egyenlet határoz meg) az egész $y_0=0$ görbébe megy át. Analóg módon az M_i'-k az M_i görbékbe képződnek le $i=1, 2$-re. Ilyen módon ψ csak az L_i' görbéket zsugoríthatja pontba. Továbbá ψ^{-1} nem reguláris az $\eta_0=(1:0:0)$, $\eta_1=(0:1:0)$, $\eta_2=(0:0:1)$ pontokban, máskülönben f^{-1} reguláris volna ezen pontok egyikében, f^{-1} pedig ugyanazokkal a formákkal van megadva, mint f, amint ez a (2)-ből látható. Ilyen módon egyrészt a $\psi=\tau_1\cdot\ldots\cdot\tau_k$ felbontásban nem lehet több három σ-eljárásnál, másrészt benne kell legyenek az η_0, η_1, η_2 pontokbeli σ-eljárások. Azt látjuk, hogy

$$f = \tau_2\tau_1\tau_0\sigma_0^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}.$$

Könnyű elképzelni az M_0', M_1', M_2', L_0', L_1', L_2' görbék elhelyezkedését az X felületen. A 8. ábra nyilai megmutatják, milyen pontokba zsugorodnak a görbék.



8. ábra

Természetesen, a kvadratikus transzformáció függ a P^2 koordináta rendszerének a kiválasztásától, vagyis — ami ugyanaz — a ξ_0, ξ_1, ξ_2 pontok kiválasztásától. Különböző ilyen transzformációkat összeszorozva, a sík új biracionális automorfizmusait kapjuk. NOETHER bizonyította be azt a tételt, hogy a sík bármely biracionális automorfizmusa előáll kvadratikus transzformációk és projektív transzformációk szorzataként. Itt nem fogjuk ismertetni ennek a tételnek az igen komplikált bizonyítását. Megtalálható az az „Алгебраические поверхности" c. könyv V. fejezetében. Az az érdekes kérdés, hogy milyen mértékben egyértelmű a biracionális automorfizmus előállítása kvadratikusakkal, ez ideig nem tisztázott.

Feladatok

1. Tetszőleges k egész számhoz (pozitív, negatív vagy 0-hoz) konstruáljunk sima projektív X felületet és azon olyan C irreducibilis görbét, hogy $(C^2)=k$. (Utasítás: A P^2 néhány pontjának a felnagyításával kapjuk meg X-et.)

2. Legyen X sima projektív felület, C_1 és C_2 annak két görbéje $C_1 \ni x \in C_2$ és x nem szinguláris pont a C_1-en és C_2-n. Legyen σ: $Y \to X$ egy σ-eljárás az x pontban, C_1' és C_2' a C_1 és C_2 saját ősképei. Bizonyítsuk be, hogy C_1' és C_2' akkor és csakis akkor metszik egymást az $y \in \sigma^{-1}(x)$ pontokban, ha C_1 és C_2 érintik egymást az y pontban. Itt $\sigma^{-1}(x) \cap C_1' \cap C_2'$ egyetlen y pontból áll és a C_1' és C_2' érintkezésének a rendje az y pontban eggyel kevesebb a C_1 és C_2 érintkezésének a rendjénél x-ben.

3. Legyen az f: $P^2 \to P^1$ leképezés az

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = \big(P(x_0, x_1, x_2) : Q(x_0, x_1, x_2)\big)$$

képlettel megadva, ahol P és Q n-edfokú formák. Hány σ-eljárást kell végrehajtani, hogy olyan φ: $X \to P^2$ felületet kapjunk, amelyre $f\varphi$ reguláris?

4. Legyen $X \subset P^3$ egy sima másodrendű felület és f: $X \to P^2$ olyan biracionális izomorfizmus, ami az X-nek az $x \in X$ pontból való projekciójából áll. Bontsuk fel f-et σ-eljárások szorzatára!

5. Legyen f a P^2 olyan biracionális automorfizmusa, amelyet inhomogén koordinátákkal az $x'=x$, $y'=y+x^2$ képletek határoznak meg. Bontsuk fel f-et σ-eljárások szorzatára!

6. Legyen $L \subset P^2$ egy egyenes, x és y annak két pontja, $X \to P^2$ az x és y pontokbeli σ-eljárások szorzata, és L' az L saját ősképe. Bizonyítsuk be, hogy $(L')^2 = -1$! *Kastelnuovo* tétele szerint (amelyet a 6. pontban fogalmaztunk meg), létezik olyan f: $X \to Y$ reguláris leképezés, amely biracionális izomorfizmus és L'-et egy pontba zsugorítja. Konstruáljuk ezt meg az adott esetre. (Utasítás: Keressük meg az előbbi feladatokban.)

Fordította: *Buzási Károly*

KÖNYVISMERTETÉS

KÁRTESZI FERENC: Bevezetés a véges geometriákba

(Akadémiai Kiadó. Budapest, 1972. XII+276 oldal, 119 ábra, 17cm×24cm)

A véges geometriák projektív geometriai axiomatikus vizsgálatokban példaként (vagy inkább ellenpéldaként) merültek fel először. Ezt követően viszonylag hosszú ideig megmaradtak kezdetleges állapotukban, egészen napjainkig, amikor a robbanásszerű kombinatorikai fejlődés egyik fő kutatási területévé váltak. A véges geometriák legújabb, gyorsütemű fejlődése elsősorban kombinatorikai jellegű kérdések megoldására irányuló erőfeszítéseknek volt köszönhető azzal a jellegzetes vonással, hogy a felhasznált eszközök algebrai és kombinatorikai jellegűek voltak. Úgy látszott, hogy a véges geometriáknak már csak a nevében szerepel a geometria, sem a fő mozgatóerő, sem a célok, sem az eszközök nem geometriaiak már. Ezen a képen változtatott KÁRTESZI FERENC professzor könyve. A szerző megmutatta, hogy a véges geometriák elmélete geometria is, mégpedig a geometria legalapvetőbb oldaláról. Munkájában a kombinatorika szellemes és sohasem öncélú geometriai modellekben él, megalapozva ezáltal azt a rendkívül értékes szemléletmódot, amelynek köszöhető, hogy művében a kombinatorikai problémák geometriai szemléletességgel és szinte fizikailag nyilvánvaló megokoltsággal lépnek fel, míg a geometriai struktúrák esetében a kombinatorikus lényeg természetes, önmagától emelkedik ki.

A kötet nem a szokásos értelemben vett bevezető mű. Nem csak a nélkülözhetetlen ismereteket adja, hanem szemléletmódot is fejlesz, nem csak a szakmai ismereteket szaporítja, hanem a matematikai látókört is növeli, nem csak bevezet, hanem indítást is ad.

A belső és külső összefüggések megláttatása a munka szerkesztésének fő elve, amelyet minden tekintetben következetesen megvalósít. Témaválasztás vonatkozásában híven mutatja e szemlélet érvényesülését a kötet tartalomjegyzéke, amelyet itt közlünk.

Jelölések. Előszó.

1. A VÉGES GEOMETRIÁK ALAPVETŐ ISMERTETÉSE. A véges sík fogalma. Izomorf síkok, illeszkedéstáblák. Véges síkok szerkesztése, ciklikus síkok. Véges projektív sík Γ-táblája. Koordinátarendszer a véges síkon. A *Galois*-síkok és a *Galois*-testek fogalma. Véges projektív sík zárt részsíkja. A véges affin sík fogalma. Különféle véges hiperbolikus síkok. A *Galois*-síkok és DESARGUES tétele. Egy nem *Desargues*-féle sík. A véges sík kollineációi és kollineációcsoportja. A véges affin sík és a véges reguláris hiperbolikus sík egyenestartó leképezései. A véges projektív sík és a latin négyzetek teljes ortogonális rendszerének kapcsolata. A lineáris függvények kompozíciója és a $D(X, Y)$-sík. Feladatok és gyakorlatok.

2. GALOIS-GEOMETRIÁK. A *Galois*-terek fogalma. A *Galois*-tér mint altereink alakzata. PAPPOS tételének általánosítása a *Galois*-síkokon. Koordinátarendszer *Galois*-síkon. Lineáris helyettesítéssel meghatározott leképezés. Adott négyszög lineáris leképezése adott négyszögre. Az ovális fogalma véges síkokon. Kúpszeletek a *Galois*-síkokon. A páros rendű *Galois*-síkok másodrendű pontalakzatai. A páros rendű *Galois*-síkok másodrendű görbéinek kanonikus egyenlete. A páratlan rendű *Galois*-síkok másodrendű pontalakzatai. Két projektív sugársor képződménye. SEGRE tétele. A *Galois*-síkok előállítására vonatkozó kiegészítő megjegyzések. A kollineáció és a homográfia *Galois*-síkokon. A véges projektív sík karakterisztikája. *Galois*-síkot önmagára leképező kollineációk összesssége. A *Desargues*-féle véges síkok. Feladatok és gyakorlatok.

3. GEOMETRIAI KONFIGURÁCIÓK ÉS HÁLÓZATOK. A geometriai konfigurációk fogalma. Két egymásba írt ötszög. Az ötszögtétel és a *Desargues*-konfiguráció. A geometriai hálózatok fogalma. A csoport és az MR-hálózat kapcsolata. Feladatok és gyakorlatok.

4. A VÉGES GEOMETRIÁK NÉHÁNY KOMBINATORIKAI ALKALMAZÁSA. A hiperbolikus tér egy záródási tétele. Gráfokra vonatkozó alapvető ismeretek. A *Petersen*-gráf általánosításai. Egy kombinatorikai szélső érték-feladat. A *Desargues*-konfiguráció gráfja. Feladatok és gyakorlatok.

5. KOMBINATORIKA ÉS A VÉGES GEOMETRIÁK. Kombinatorikai alapismeretek. A körgeometria két alaptétele. A véges körgeometria és a $t-(v, k, \lambda)$ blokkrendszer. A *Möbius*-síkokon érvényes általános tételek. Az illeszkedési rendszer és a t-blokkrendszer. Feladatok és gyakorlatok.

6. VÁLOGATOTT TÉMÁK A VÉGES GEOMETRIÁK KÖRÉBŐL. A *Fano*-sík és GLEASON tétele. Új síkok származtatása *Galois*-síkokból. Az affin sík fogalmának egy általánosítása. Feladatok és gyakorlatok.

7. FÜGGELÉK. Algebrai struktúrákkal kapcsolatos jegyzetek. A véges testekkel és a számelmélettel kapcsolatos jegyzetek. Planáris ternér struktúrákra vonatkozó jegyzetek.

Irodalom. Tárgymutató.

A könyv kiemelkedően gondos kiállítású; grafikailag és tipográfiailag egyaránt kihasználja a lehetőségeket. Úgy véljük azonban, hogy a szöveg nagyobb mérvű tagolása és kevesebb betűtípus használata tovább emelné a kötet külső érdemeit. (A sok betűtípus csak az olvasást könnyíti meg, az alkalmazásnál, a kézírásban történő megkülönböztetésnél, fárasztó.) Az elenyésző számú elírást a következő kiadásokban nyilván ki fogják küszöbölni.

A hazai kiadást követő angol és olasz nyelvű kiadás révén ez a kiváló munka bízvást számíthat nemzetközi sikerre is.

Pogány Csaba

TARTALOMJEGYZÉK

Sonnevend György: L. Sz. Pontrjagin, a Magyar Tudományos Akadémia tiszteletbeli tagja ... 185
Ruda Mihály: Egy felezősokszögekre vonatkozó tétel 201
Szász Ferenc: Vizsgálatok algebrai struktúrák radikál-elméletében (I) 215
Major Péter és *Tusnády Gábor:* Normalitás-vizsgálat 257

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

I. R. *Safarjevics:* Az algebrai geometria alapjai (II) 283
(Magyarra fordította: *Buzási Károly*)

KÖNYVISMERTETÉS

Pogány Csaba: Kárteszi Ferenc: Bevezetés a véges geometriákba (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972) 361

INDEX

G. Sonnevend: L. Sz. PONTRJAGIN, Member of the Hungarian Academy of Sciences 185
M. Ruda: A Theorem on "Halving-Polygons" 201
F. Szász: Investigations in the Radical-Theory of Algebraic Structures (I) 215
P. Major and *G. Tusnády:* Testing for Normality 257

FROM THE FOREIGN LITERATURE

И. P. Шафаревич: Основы алгебраической геометрии (II) 283
(Translated from Russian to Hungaryan by *K. Buzási*)

BOOKREVIEW

Cs. Pogány: F. KÁRTESZI, Introduktion to finite geometrics (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.) 361

Technikai szerkesztő: dr. Ziermann Margit
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó Műszaki szerkesztő: Agócs András
A kézirat nyomdába érkezett: 1975. jan. 10. — Ívterjedelem: 15,75 (A/5) ív

75-230 — Szegedi Nyomda — F. v.: Vincze György

Ára: 34,— Ft

Megjelent 1976. IV. 30.

Index; 26 498