A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIX. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1970

III OSZT. KÖZL.

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

FROM THE FOREIGN LITERATURE

69-7517 — Szegedi Nyomda

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIX. KÖTET, 1—2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1970

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIX. kötet 1—2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia II. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae.
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

ALEXITS GYÖRGY AKADÉMIKUS 70 ÉVES

Bensőséges ünnepség színhelye volt a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete, midőn Alexits György akadémikust 70-edik születésnapján barátai, tanítványai, tisztelői köszöntötték.

A Magyar Népköztársaság Elnöki Tanácsa kiemelkedő tudományos és tudománypolitikai tevékenységéért Alexits György akadémikusnak a Munka Érdemrend arany fokozatát adományozta.

Az alábbiakban közöljük Alexits György akadémikus tudományos munkásságáról készült jegyzéket.

Könyvek

[a] *Matematika vegyészek számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1951. 356 o. (Fenyő Istvánnal együtt); 2. átdolgozott kiadás, 1955. 5. kiadás, 1966.

[b] *Bolyai János*, Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest, 1952. 123 o.

[c] *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960. 307 o.

[d] *Convergence problems of orthogonal series*, Akadémiai Kiadó, Budapest, Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris, 1961. IX + 350 o. (A német nyelvű kiadás kibővített változata.)

[e] *Mathematik für Chemiker*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1962. VIII + 449 o. (FENYŐ ISTVÁNnal együtt.) (A magyar nyelvű könyv 3. kiadásának fordítása; a francia nyelvű változat kiadás alatt.)

[f] Проблемы сходимости ортогональных рядох, Moszkva, 1963. 359 o. (Az angol nyelvű kiadás orosz fordítása.)

Cikkek

[1] *Ein Theorem über die Laplacesche Differentialgleichung*, Inauguraldissertation, Graz, 1924.

[2] Remarque sur les coefficients de Fourier d'une fonction continue, *Bulletin Sci. Math. Soc. Roumaine Sci.* **29** (1926).

[3] Sur les valeurs limites d'une fonction analitique et sur les séries de puissances sur la circonférence du cercle de rayon un, *Bulletin Timişoara* **1** (1926), 198—212.

[4] Sur les séries trigonométriques conjuguées, *Comptes Rendus*, Paris **182** (1926), 1599—1601.

[5] Sur les valeurs d'une fonction analytique prises sur la circonférence du cercle à rayon unité, *Comptes Rendus*, Paris **183** (1926), 338—340.

[6] Über den Grad der Annäherung durch die Cesàroschen Mittel der Fourierreihe, *Act aSci. Math.* **3** (1927), 32—37.
[7] Zwei Sätze über Fourier-Koeffizienten, *Math. Zeitschrift* **27** (1928), 65—67.
[8] Über die Annäherung einer stetigen Funktion durch die Cesàroschen Mittel ihrer Fourierreihe, *Math. Annalen* **100** (1928), 264—277.
[9] Über eine Hadamardsche Fragestellung, *Math. Zeitschrift* **30** (1929), 43—46.
[10] Über die analytische Darstellung willkürlicher Funktionen, *Math. Zeitschrift* **30** (1929), 47—52.
[11] Über die Erweiterung einer Bairschen Funktion. *Fundamenta Math.* **15** (1930), 51—56.
[12] Über das topologische Produkt der im kleinen zusammenhängenden Räume, *Monatshefte für Math. und Physik* **39** (1932), 263—266.
[13] Über Baumkurven, *Monatshefte für Math. und Physik* **40** (1933), 407—410.
[14] Über im kleinen zusammenhängende Kontinua, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* **7** (1934—35), 13.
[15] Az új görbeelmélet, *Matematikai és Fizikai Lapok* **44** (1937), 1—37.
[16] Homogén racionális görbékről, *Matematikai és Fizikai Lapok* **44** (1937), 38—39.
[17] A halmazelméleti geometria újabb fejlődése, *Matematikai és Fizikai Lapok* **45** (1938), 39—77.
[18] Sur la notion d'écart dans les espaces abstraits, *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe* III **31** (1938), 36—42.
[19] Sur la structure des courbes régulières, *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Classe* III **31** (1938), 104—107.
[20] A torzió fogalma metrikus terekben, *Matematikai és Fizikai Lapok* **46** (1939), 13—30.
[21] Über die Verteilung der irrationalen Punkte in lokal nicht zusammenhängenden Kontinua), *Compositio Math.* **6** (1939), 153—160.
[22] La torsion des espaces distanciés, *Compositio Math.* **6** (1939), 471—477.
[23] Sur un problème concernant la structure des ensembles punctiformes, *Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe* III **32** (1939), 94—99.
[24] Les espaces réguliers et le problème de métrisation, *Commentarii Math. Helvetici*, **13** (1940—41), 1—5.
[25] Fondements d'une théorie générale de la courbure linéaire, *Commentarii Math. Helvetici* **13** (1940—41), 257—276. (EGERVÁRI JENŐvel együtt.)
[26] A Fourier-sor Cesàro-közepeivel való approximáció nagyságrendjéről, *Matematikai és Fizikai Lapok* **48** (1941), 410—422.
[27] Über verstreute Mengen, *Math. Annalen* **118** (1942), 379—384.
[28] Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux, *Commentarii Math. Helvetici* **16** (1943), 200—208.
[29] Sur la sommation forte des séries orthogonales, *Commentarii Math. Helvetici* **18** (1945—46), 122—128.
[30] Sur la convergence des séries lacunaires, *Acta Sci. Math.* **11** (1946—48), 251—253.
[31] Sur la convergence des séries orthogonales lacunaires, *Acta Sci. Math.* **13** (1949—50), 14—17.
[32] Sur la convergence d'une classe de séries orthogonales, *Acta Sci. Math.* **13** (1949—50), 18—20.
[33] Sur la convergence et la sommabilité presque partout des séries de polynomes orthogonaux, *Acta Sci. Math.* **12** B (1950), 223—225.
[34] Théorie mathématique du trafic de marchandises sous le régime du capitalisme de monopole, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **1** (1950), 17—35.
[35] Az elméleti fizika és technika sorfejtései által elérhető megközelítések nagyságrendjéről, *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **1** (1951), 274—278.
[36] Über die Transformierten der aritmetischen Mittel von Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **2** (1951), 1—9.

[37] Bolyai János, *Mat. Lapok* **3** (1952), 107—110.
[38] A Lebesgue-függvények jelentősége az ortogonális polinomok szerint haladó sorok konvergenciájának problémájában, *Az I. Magyar Mat. Kongr. Közl.* (1952), 233—248.
[39] Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **3** (1952), 29—42.
[40] Über den Annäherungsgrad der Orthogonalpolynomentwicklungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **3** (1952), 43—48.
[41] Sur les sommes de fonctions orthogonales, *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* **25** (1952), 183—187.
[42] Bolyai János élete és munkássága, *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **3** (1953), 131—150.
[43] Über den Einfluss der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **4** (1953), 95—101.
[44] Sur la sommabilité des séries orthogonales, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **4** (1953), 181—189.
[45] Eine Bemerkung zur Konvergenzfrage des Lagrangeschen Interpolationsverfahrens, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **4** (1953), 233—236.
[46] Жизнь и деятельность Яноша Бояи, *Acta Math. Acad. Sci. Hungarice* **5** (1954), Supplementum, 1—20.
[47] Sur la caractérisation d'une classe de fonctions dérivables par leurs séries de Fourier, *Proceedings Intern. Congr. Matem. Amsterdam* **1** (1954), 443.
[48] La convergence presque partout des développements de fonctions continues en séries de polynomes orthogonaux, *Proceedings Intern. Congr. Matem. Amsterdam* **1** (1954), 443—444.
[49] Über die Konvergenz der Orthogonalpolynomentwicklungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **6** (1955), 1—4.
[50] Sur la caractérisation de certaines classes de fonctions au sens de la théorie constructive des fonctions, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **6** (1955), 41—46.
[51] Eine Bemerkung zur starken Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.* **16** (1955), 127—129.
[52] Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **7** (1956), 5—9.
[53] Über die Bedeutung der strukturellen Eigenschaften einer Funktion für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen, *Acta Sci. Math.* **18** (1957), 131—139. (KRÁLIK DEZSŐvel együtt.)
[54] Sur la convergence et la sommabilité des séries orthogonales lacunaires, *Acta Sci. Math.* **18** (1957), 179—188.
[55] Sur la convergence absolue de certains développements orthogonaux, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **8** (1957) 303—310.
[56] Die Entwicklung der allgemeinen Raumbegriffes, *Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Math.* **1** (1957), 85—91.
[57] Une contribution à la théorie constructive des fonctions, *Acta Sci. Math.* **19** (1958), 149—157.
[58] Über die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihen bei jeder Anordnung ihrer Glieder, *Acta Sci. Math.* **19** (1958), 158—161.
[59] Sur quelques résultats et problèmes concernant la convergence et la sommabilité des séries orthogonales générales, *Revista de la Unión Matemática Argentina* **20** (1960), 33—39.
[60] Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **11** (1960), 387—399.
[61] Über das Konvergenzverhalten einer Klasse von Orthogonalreihen, *Annales Univ. Sci. Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Math.* **3—4** (1960—61), **15—18**. (TANDORI KÁROLLYAL együtt).
[62] Über die absolute Summierbarkeit und die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Series A* **7** (1962), 363—371. (KRÁLIK DEZSŐvel együtt)

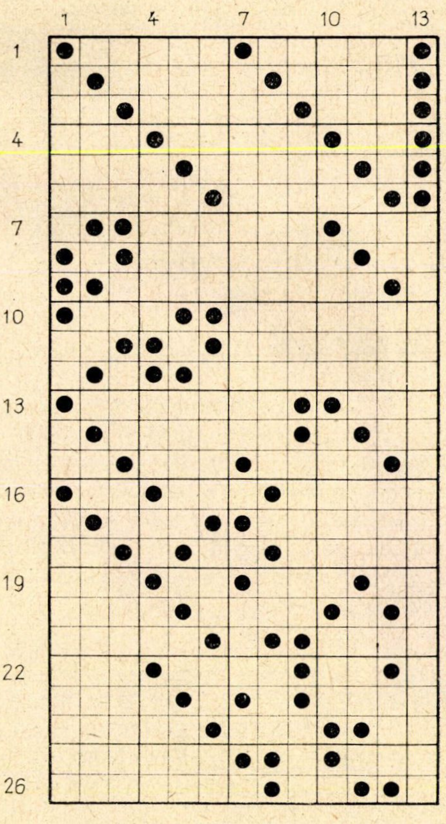
[63] Sopra l'approssimazione in senso forte delle funzioni appartenenti ad una classe di Lipschitz, *Atti VII Congresso Un. Mat. Italiana Genova* (1963), 322—323.
[64] Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Series A* **8** (1963), 317—327. (KRÁLIK DEZSővel együtt.)
[65] Sur les bornes de la théorie de l'approximation des fonctions continues par polynômes, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., Series A* **8** (1963), 329—340.
[66] Über die Approximation im starken Sinne, On Approximation Theory, *Proceedings of Conference in Oberwolfach* 1963, *Basel* (1964), 89—95.
[67] Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **16** (1965), 27—32. (LEINDLER LÁSZLÓval együtt.)
[68] Über die Approximation mit starken de la Vallée-Poussinschen Mitteln, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae* **16** (1965), 43—49. (KRÁLIK DEZSővel együtt.)
[69] Über die Approximation im starken Sinne, *Acta Sci. Math.* **26** (1965), 93—101. (KRÁLIK DEZSővel együtt.)
[70] Einige Beiträge zur Approximationstheorie, *Acta Sci. Math.* **26** (1965), 211—224.
[71] A note on the best approximation by linear forms of functions, *Acta Sci. Math.* **27** (1966), 49—54. (S. KNAPOWSKIval együtt.)
[72] On the characterization of classes of functions by best linear approximation, *Acta Sci. Math.* **29** (1968), 107—114.
[73] Sur la caractérisation des fonctions dérivables par les approximations trigonométriques, *Studia Sci. Math. Hungarica* **3** (1968), 293—297.

EGY LEGKISEBB VÉGES REGULÁRIS HIPERBOLIKUS SÍK

Írta: KÁRTESZI FERENC

A véges reguláris síkra vonatkozó néhány újabb — GRAVES-, OSTROM- és CROWEtól eredő — publikációtól indíttatva REIMAN ISTVÁN egy olyan axiómarendszert adott, mely egységesen definiálja a véges projektív, véges affin és a véges reguláris hiperbolikus síkokat. A második axiómában szereplő bizonyos természetes szám paraméter értékétől függ, hogy e síkok melyik fajtájáról van szó. REIMAN dolgozatának [1] eredményeire támaszkodva könnyen megszerkeszthető egy legkisebb (nem triviális) reguláris hiperbolikus sík.

Ez a sík 13 pontból és 26 egyenesből áll; minden egyenesnek 3 pontja van, minden ponton 6 egyenes megy át. E síkot önmagába átvivő kollineációk csoportot alkotnak, mely a harmadfokú teljes permutáció csoporttal izomorf.



1 ábra

1. A szóban forgó síkot a következő axiómarendszerrel definiálhatjuk. (Vö. [1].)

i) *Bármely két pontnak egyetlenegy összekötő egyenese van.*

ii) *Bármely egyenest egy hozzá nem illeszkedő ponton átmenő egyenesek közül k számú metszi és l számú nem.*

iii) *Minden a sík nem egyenes vonalú ponthármasát tartalmazó* **H** *ponthalmaz legyen olyan, hogy bármely két pontját összekötő egyenes minden pontja a síkhoz tartozik. Tartalmazza* **H** *a sík összes pontjait.*

Egy az **i)**, **ii)**, **iii)** kirovásokkal definiált (pont, egyenes, incidencia)-struktúra előállítása bonyolultnak látszó kombinatorikai feladat. A rengeteg kombinációval járó próbálkozást egy heurisztikus észrevétel fölöslegessé tette. A közölt modell, ennek az észrevételnek a segítségével, alig néhány kombináció kipróbálásával röviden adódott. Az észrevétel az a feltevés volt, hogy esetleg *van olyan teljesnégyszög a keresett síkon, melynek egyetlen átlós-*

pontja sincs. — Modellünkön a P_1, P_2, P_3, P_{13} pontnégyes. — Ha a 13 pontból, 26 egyenesből álló reguláris hiperbolikus sík unicitása nem érdekel, csupán realizálhatóságát kívánjuk a modell előállításával igazolni, akkor azt a következő incidencia-táblázat már el is intézi.

2. Tekintsük a táblázatot síknak, a j-edik sorát a sík l_j nevű *egyenesének*, a k-adik oszlopát a sík P_k nevű *pontjának*, és a • jellel a jelben találkozó sornak és oszlopnak megfelelő egyenes és pont *illeszkedését* fejezzük ki.

Minthogy $j=1, 2, \ldots, 26$ és $k=1, 2, \ldots, 13$, síkunk 26 egyenesből és 13 pontból áll. Számláljuk meg a • jeleket soronként és oszloponként. E számlálás szerint minden egyenesen 3 pont van, s minden ponton 6 egyenes megy át.

Könnyen ellenőrizhető, hogy síkunkon az **i)** axióma érvényes. Ragadjunk ki ugyanis két különböző oszlopot, például a 4 és a 7 indexű oszlopokat. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy és csakis egy olyan sor van, a 19 indexű sor, mely mindkét oszlopot jellel kitüntetett mezőben keresztezi. Ez azt jelenti, hogy a P_4, P_7 pontokat egyetlenegy egyenes köti össze: az l_{19} egyenes. A $\binom{13}{2}=78$ ilyen ellenőrző próba tanúsága szerint az **i)** axióma valóban érvényes.

További ellenőrzésre már nincs szükség, mert az eddigiekből következik, hogy a másik két axióma is érvényes.

Legyen ugyanis $P_r \notin l_s = \{P_j, P_n, P_k\}$. A P_r ponton átmenő 6 egyenes közül a P_rP_j, P_rP_n, P_rP_k metszi az l_s egyenest, tehát a további három nem metsző, ennélfogva az **ii)** axióma valóban érvényes.

A harmadik axiómában mondott **H** halmaz háromszögének a szerepét most vegye át az előbbiekben szerepelt $\{P_j, P_n, P_r\}$ ponthármassal mint csúcspontokkal létesített háromszög. Ha P_r-et az l_s egyenes minden pontjával összekötjük, a kapott három egyenes mindegyikén egy-egy harmadik pontot is kapunk, s így összesen három újabb pontot állítottunk elő. Az előbbi 4 és az utóbbi 3 pontból összetett **G** ponthalmazra $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{H}$ nyilvánvaló. Legyen mármost síkunk tetszőleges pontja P_x, és kössük ezt össze **G**-nek mind a 7 pontjával. Minthogy a P_x ponton át sem mehet 6-nál több egyenes, kell, hogy e ponton átmenő egyenesek közt legyen olyan is, mely a **G**-nek, tehát **H**-nak két pontját tartalmazza. Ez az **iii)** axióma érvényességét jelenti.

3. A pontsík *kollineációja* a pontok olyan permutációja, mely egyenes vonalú, de csak egyenes vonalú ponthármast egyenes vonalú ponthármasba visz át. *A sík kollineációinak összessége csoportot alkot.* Modellünk így definiált kollineációinak a csoportját jelölje **K**, a kollineációkat π_s $(s=1, 2, \ldots)$.

A kollineációkat és a **K** csoportot meghatározó következtetéseket mellőzve, befejezésként még a következőket ismertetjük.

Ha a pontokat csupán indexükkel nevezzük meg, akkor a kollineációk a következő 6 permutációt jelentik:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
π_1:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
π_2:	7	2	5	10	3	12	1	8	11	4	9	6	13
π_3:	4	9	7	1	10	13	3	8	2	5	11	12	6
π_4:	3	9	10	5	7	12	4	8	11	1	2	13	6
π_5:	10	11	1	7	4	13	5	8	2	3	9	6	12
π_6:	5	11	4	3	1	6	10	8	9	7	2	13	12

A $\pi_1, \ldots, \pi_6$ kollineációk közül az első az azonosság. Az általuk alkotott **K** csoport a $\mathfrak{S}_3$ csoporttal izomorf. A P_8 pont mindegyik kollineációra nézve fixpont; az l_6 és l_{14} egyenes mindegyik kollineációra nézve fixegyenes. Ezenkívül π_2 fixpontjai — a P_2, P_8, P_{13} pontok — egy egyenesen — vagyis az l_2 tengelyen — vannak; továbbá hat fixegyenese van. A π_3 kollineáció fixpontjai, a P_8, P_{11} P_{12}, pontok az l_{26} tengelyen vannak, ezzel együtt hat fixegyenese van. A π_6 kollineáció fixpontjai, a P_6, P_8, P_9 pontok az l_{21} tengelyen vannak, ezzel együtt hat fixegyenese van. A további két kollineációnak — a π_4 és π_5 kollineációnak — azonban csak egy fixpontja és két fixegyenese van — a már mondott P_8 és l_6, l_{14} —; vagyis ezeknek nincs tengelyük. A $\pi_2, \ldots, \pi_6$ kollineációk egyikének sincs középpontja.

Ezzel a — mondhatnánk — nevezetes, de szimmetria szempontjából elég szegény

$$\begin{Bmatrix} 13 & 26 \\ 6 & 3 \end{Bmatrix}$$

konfiguráció elemzését be is fejeztük.

IRODALOM

[1] REIMAN I.: A véges síkok jellemzése, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.*, **17** (1967)

(Beérkezett: 1968. II. 27.)

UN MINIMO PIANO GRAFICO FINITO IPERBOLICO REGOLARE

F. KÁRTESZI

È opportuno aver un modello (minimo, ma non banale) dei piani finiti iperbolici di tipo regolare. Un tal piano contiene 26 rette e 13 punti. Ogni retta del piano contiene 3 punti distinti; per ogni punto passano 6 rette distinti.

L'autore ha costruito la tabella d'incidenza di un tal piano. Le righe della tabella: *le rette* del piano; le colonne della tabella: *i punti* del piano; il segno • denota *l'incidenza.* Inoltre viene presentate il gruppo delle collineazioni di questo piano.

Considerando le colonne d'incidi 1, 2, 3, 13, ciè il quadrangolo $P_1P_2P_3P_{13}$, si può stabilire che il quadrangolo non ha punto diagonale. Considerando le righe d'indici 6, 8, 12, 25, cioè i lati del quadrilatero $l_6 l_8 l_{12} l_{25}$, si puo stabilire che due a due non hanno punti in comune. Dunque esiste „quadrilatero senza vertici". Potrebbe dire che questo piano „regolare" ha parti „irregolarissimi".

AZ INFORMÁCIÓ SHANNON-FÉLE MÉRTÉKÉRŐL

Írta: DARÓCZY ZOLTÁN (Debrecen)

Az információelmélet alapvető mennyisége a SHANNON [14] által bevezetett

$$H_n(p_1, p_2, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

entrópia, amely minden $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ véges valószínűségeloszlásra értelmezett valós értékű függvény. A H_n SHANNON-féle entrópiát a $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ eloszlás által nyújtott *információ* mértékének is szokás nevezni.

A SHANNON-féle entrópia jellemzésével számos szerző foglalkozott. Ennek a dolgozatnak az a célja, hogy az eddig ismert jellemzések közös magvára rámutasson. A dolgozat 1. §-ában egyszerű meggondolásokra támaszkodva definiáljuk a [0, 1] zárt intervallumban értelmezett $f(x)$ *információfüggvény* fogalmát az

$$f(x)+(1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y)+(1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

függvényegyenlet segítségével, ahol $x, y \in [0, 1)$ és $x+y \leq 1$ tetszőleges változók, továbbá $f(\frac{1}{2})=1$ és $f(0)=f(1)$. A fenti igen egyszerűnek látszó függvényegyenletet az *információ alapegyenletének* nevezzük. A 2. §-ban kimutatjuk, hogy ha $f(x)$ információfüggvény és $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ egy tetszőleges véges valószínűségeloszlás, akkor a

$$H_n(p_1, p_2, ..., p_n) = \sum_{i=2}^{n} s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) \qquad (s_i = p_1 + ... + p_i; \quad i = 2, 3, ..., n)$$

egyenlettel értelmezett, az $f(x)$ által meghatározott *entrópia* rendelkezik a Shannon-féle entrópiára ismert fontosabb *algebrai* jellegű tulajdonságokkal. Innen kapjuk a 3. §-ban — hivatkozva FADDEJEW [9], TVERBERG [15], KENDALL [10] és LEE [11] eredményeire —, hogy $[0, 1]$-*ben folytonos*, vagy $[0, 1]$-*ben Lebesgue-integrálható*, vagy $(0, \frac{1}{2}]$-*ben monoton növekvő*, vagy $(0, 1)$-*ben Lebesgue-mérhető* információfüggvények azonosak az

$$S(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$$

SHANNON-féle információfüggvénnyel. A 4. §-ban megadjuk az információ alapegyenletének legáltalánosabb megoldását a (0, 1) intervallum racionális pontjaiban. Erre az eredményre támaszkodva az 5. §-ban megmutatjuk, hogy ha az $f(x)$ információfüggvény a 0 *pontban folytonos*, akkor $f(x) \equiv S(x)$. Ezzel egy új jellemzést nyerünk a SHANNON-féle entrópiára. A 6. §-ban BORGES [3] gondolataira támaszkodva elemi bizonyítást adunk KENDALL [10] tételére, a monoton növekedés helyett csak monotonitást (csökkenést vagy növekedést) megkövetelve a $(0, \frac{1}{2}]$ intervallumban. A 7. §-ban megmutatjuk, hogy más ismert jellemzések is (CHAUNDY—MCLEOD [4], ACZÉL—DARÓCZY [1], DARÓCZY [6]) lényegében az információ alapegyenletének bizonyos feltételek melletti megoldására vezethetők vissza.

1. § Az információ alapegyenlete

Legyen A egy véletlen esemény, és jelölje $x=P(A)$ az A esemény valószínűségét. Ha az A eseményre vonatkozóan elvégzünk egy kísérletet, akkor a kísérlet eredménye által nyújtott *információ* mértékét jelölje $I(A)$. Az $I(A)$ ismeretlen mennyiségről tegyük fel, hogy az csak az A esemény x valószínűségétől függ, azaz

$$I(A)=f(x),$$

ahol $f(x)$ a $[0, 1]$ zárt intervallumban értelmezett ismeretlen valós függvény. Ha B egy további véletlen eseményt jelöl, melyre $AB=0$, és $y=P(B)$ a B esemény valószínűsége, akkor az A eseményre vonatkozó kísérlet után elvégezve egy további kísérletet a B eseményre vonatkozóan, a második kísérlet által nyert $I(B|\bar{A})$ *relatív információ* $\bar{A}$-ra nézve ($B\subset\bar{A}$ miatt) legyen az

$$\frac{y}{1-x}=\frac{P(B)}{P(\bar{A})}$$

valószínűséghez tartozó információ $1-x = P(\bar{A})$ súllyal vett értéke, azaz

$$I(B|\bar{A}) = (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right).$$

A két kísérlet egymás utáni elvégzése után kapjuk az

$$I(A, B) = I(A)+I(B|\bar{A}) \qquad (AB=0)$$

információnyereséget, amelyről tegyük fel, hogy független az A és B események sorrendjétől. Ez a feltétel az ismeretlen $f(x)$ függvényre az

$$f(x)+(1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y)+(1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right) \tag{1}$$

függvényegyenlet teljesülését jelenti minden

$$(x, y)\in D = \{(x, y): 0\leqq x<1,\ 0\leqq y<1,\ x+y\leqq 1\}$$

számpárra. Az információ mértékének egységéül — szokásos módon — válasszuk az $x=\frac{1}{2}$ valószínűséghez tartozó $f(\frac{1}{2})$ információt, azaz legyen $f(\frac{1}{2})=1$. Továbbá tegyük fel, hogy a lehetetlen, illetve biztos eseményre vonatkozó kísérlet ugyanakkora információt nyújt, azaz legyen $f(0)=f(1)$. Az előző meggondolások alapján fogadjuk el a következő értelmezést.

1. DEFINICIÓ. A $[0, 1]$ zárt intervallumban értelmezett $f(x)$ valós függvényt *információfüggvénynek* nevezzük, ha minden $(x, y) \in D$ számpárra teljesül rá az (1) függvényegyenlet, továbbá $f(\frac{1}{2}) = 1$ és $f(0) = f(1)$. Az (1) függvényegyenletet az *információ alapegyenletének* nevezzük.

1. LEMMA. *Ha $f(x)$ információfüggvény, akkor $f(0) = f(1) = 0$ és*

$$f(x) = f(1-x) \tag{2}$$

minden $x \in [0, 1]$-re.

Bizonyítás. Legyen $f(x)$ tetszőleges információfüggvény. Az információ alapegyenletébe $y = 0$-t helyettesítve $f(x) + (1-x)f(0) = f(0) + f(x)$ minden $x \in [0, 1)$-re, ahonnan $f(0) = 0$. Tegyünk most (1)-ben $y = 1-x$-et $\big((x, 1-x) \in D$, ha $x \in [0,1)\big)$, akkor

$$f(x) + (1-x)f(1) = f(1-x) + xf(1),$$

ahonnan $f(1) = f(0) = 0$ miatt

$$f(x) = f(1-x),$$

ha $x \in [0, 1)$. Ez viszont $f(1) = f(0)$ miatt $x = 1$-re is teljesül. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Legyen

$$l(x) = \begin{cases} -x \log_2 x & \text{ha} \quad x \in (0, 1] \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0, \end{cases} \tag{3}$$

ahol $y = \log_2 t$ $(t > 0)$ a 2-es alapú logaritmusfüggvényt jelöli. Legyen továbbá

$$S(x) = l(x) + l(1-x), \tag{4}$$

akkor könnyen belátható, hogy $S(x)$ információfüggvény. A (4) információfüggvényt SHANNON-*féle információfüggvénynek* nevezzük. A jövőben $l(x)$ helyett a $-x \log_2 x$ jelölést használjuk azzal a megkötéssel, hogy $0 \log_2 0$ definíció szerint 0-val egyenlő. Így

$$S(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$$

minden $x \in [0, 1]$-re. Alapvető kérdés, hogy egy $f(x)$ információfüggvény milyen további feltételek mellett lesz $S(x)$-szel azonos. A SHANNON-féle információfüggvénytől *különböző* információfüggvényre példa a következő. Legyen $a(t)$ tetszőleges megoldása az

$$a(t+s) = a(t) + a(s) \tag{5}$$

Cauchy-féle függvényegyenletnek, amelyre $a(1) = 1$. Ekkor

$$f_a(x) = \begin{cases} x\,a(-\log_2 x) + (1-x)\,a\big(-\log_2(1-x)\big) & \text{ha} \quad x \in (0, 1) \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \end{cases}$$

információfüggvény. Ugyanakkor létezik olyan megoldása (5)-nek $\big($az $a(1) = 1$ feltételt is beleértve$\big)$, amely egyetlen pontban sem folytonos, tehát $f_a(x)$ nem lehet a folytonos $S(x)$ függvénnyel azonos.

2. § Információfüggvények entrópiája

Vizsgálataink alapja a következő

2. DEFINICIÓ. Legyen $f(x)$ tetszőleges információfüggvény és $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ egy véges valószínűségeloszlás, azaz amelyre $p_i \geqq 0$ $(i=1, 2, ..., n)$ és $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ teljesül. Ekkor a

$$(6) \quad H_n(p_1, p_2, ..., p_n) = \sum_{i=2}^{n} s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) \quad (s_i = p_1+p_2+...+p_i; \quad i = 2, 3, ..., n)$$

mennyiséget a $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ eloszlás f-hez tartozó *entrópiájának* nevezzük. Itt $\frac{p_i}{s_i}$ definíció szerint 0-val egyenlő, ha $p_i=0$ $(i=1, 2, ..., n)$.

Ha $f(x)=S(x)$, ahol $S(x)$ a SHANNON-féle információfüggvényt jelöli, akkor könnyen belátható, hogy az $S(x)$-hez tartozó entrópia éppen a

$$H_n(p_1, p_2, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

SHANNON-féle entrópiával azonos. A következőkben megmutatjuk, hogy egy tetszőleges $f(x)$ információfüggvényhez tartozó $H_n(p_1, p_2, ..., p_n\}$ entrópia rendelkezik a SHANNON-féle entrópiára ismert algebrai jellegű tulajdonságokkal.

1. TÉTEL. *Ha $f(x)$ információfüggvény és $H_n(p_1, p_2, ..., p_n\}$ az f-hez tartozó entrópia, akkor H_n rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1° $H_n(p_1, p_2, ..., p_n)$ *szimmetrikus* $p_1, p_2, ..., p_n$*-ben;*

2° $H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1;$

3° $$H_n(p_1, p_2, p_3, ..., p_n) = H_{n-1}(p_1+p_2, p_3, ..., p_n) + (p_1+p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right) \quad (n \geqq 3).$$

Bizonyítás. Legyen $\{p_1, p_2\}$ tetszőleges valószínűségeloszlás. A 2. definíció és az 1. lemma miatt

$$H_2(p_1, p_2) = (p_1+p_2) f\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) = f(p_2) = f(1-p_2) =$$

$$= f(p_1) = (p_2+p_1) f\left(\frac{p_1}{p_2+p_1}\right) = H_2(p_2, p_1),$$

továbbá $H_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = 1$. Ezzel az 1° állítást $n=2$-re és a 2° állítást bebizonyítottuk. Ezek után könnyű belátni a 3° tulajdonság teljesülését, ugyanis az előzőket felhasználva $n \geqq 3$ esetén

$$H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) - H_{n-1}(p_1+p_2, p_3, \ldots, p_n) =$$
$$= \sum_{i=2}^{n} s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) - \sum_{i=3}^{n} s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) = s_2 f\left(\frac{p_2}{s_2}\right) =$$
$$= (p_1+p_2) f\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) = (p_1+p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right).$$

Hátra van még az 1° tulajdonság bizonyítása $n > 2$ esetére. Teljes indukciós bizonyításunkhoz tegyük fel, hogy 1° $(n-1)$-re $(n \geqq 3)$ már igaz. Ekkor a most bizonyított 3° tulajdonság miatt

$$H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = H_{n-1}(p_1+p_2, p_3, \ldots, p_n) +$$
$$+ (p_1+p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right).$$

A feltétel miatt $H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$, a $\{p_3, \ldots, p_n\}$, illetve a $\{p_1, p_2\}$ változócsoportokban végrehajtható permutációkkal szemben invariáns, ezért elegendő csak azt megmutatni, hogy p_2 és p_3 felcserélhető H_n változása nélkül. Ekkor ugyanis H_n változatlan, ha változóinak bármely két elemét felcseréljük egymással. Az elmondottak szerint a

(7) $$H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = H_n(p_1, p_3, p_2, \ldots, p_n)$$

azonosságot kell bizonyítani, amely a

$$H_{n-1}(p_1+p_2, p_3, \ldots, p_n) + (p_1+p_2) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right) =$$
$$= H_{n-1}(p_1+p_3, p_2, \ldots, p_n) + (p_1+p_3) H_2\left(\frac{p_1}{p_1+p_3}, \frac{p_3}{p_1+p_3}\right)$$

azonossággal ekvivalens. Felhasználva a 2. definíciót, innen

$$(p_1+p_2+p_3) f\left(\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\right) + (p_1+p_2) f\left(\frac{p_2}{p_1+p_2}\right) =$$
$$= (p_1+p_3+p_2) f\left(\frac{p_2}{p_1+p_3+p_2}\right) + (p_1+p_3) f\left(\frac{p_3}{p_1+p_3}\right)$$

következik, ahol $p_i \in [0, 1]$ $(i = 1, 2, 3)$ és $p_1+p_2+p_3 \leqq 1$. Legyen most

$$x = \frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}, \quad y = \frac{p_2}{p_1+p_2+p_3},$$

akkor $(x, y) \in D$ és a fenti egyenlet átmegy az

$$f(x) + (1-x) f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y) f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

egyenletbe, amely nyilván teljesül, mert $f(x)$ információfüggvény volt. Mivel az átalakítások ekvivalensek voltak, ezért az utóbbiból következik (7), s ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

KOROLLÁRIUM. *Ha $f(x)$ információfüggvény és $H_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$ az f-hez tartozó entrópia, akkor H_n rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

$$4^\circ \quad H_{n+1}(p_1, p_2, \dots, p_n, 0) = H_n(p_1, p_2, \dots, p_n);$$

$$5^\circ \quad Ha \quad p_i = \sum_{k=1}^{m} q_{ik} > 0 \qquad (q_{ik} \geqq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m),$$

akkor

$$H_{nm}(q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1m}, q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2m}, \dots, q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nm}) =$$
$$= H_n(p_1, p_2, \dots, p_n) + \sum_{i=1}^{n} p_i H_m\left(\frac{q_{i1}}{p_i}, \frac{q_{i2}}{p_i}, \dots, \frac{q_{im}}{p_i}\right).$$

Bizonyítás. Ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható FADDEJEW [9] dolgozatában, ahol ki van mutatva, hogy az 1° és 3° tulajdonságokból következik 4° és 5°. A 4° és 5° tulajdonságokra épült CHINTSCHIN [5] axiómarendszere.

A következő eredmény az 1. tétel megfordításának tekinthető.

2. TÉTEL. *Legyen $H_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$ minden $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ $(p_i \geqq 0, i = 1, 2, \dots, n;$ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$ véges valószínűségeloszlásra értelmezve, ahol $n = 2$ és $n = 3$. Tegyük fel, hogy $H_n(p_1, p_2, \dots, p_n)$-re $(n = 2, 3)$ teljesül az 1. tételben szereplő 1° és 3° tulajdonság $n = 3$-ra, továbbá a 2° tulajdonság. Ekkor*

$$f(x) = H_2(x, 1-x) \qquad (x \in [0, 1])$$

információfüggvény.

Bizonyítás. Legyen $f(x) = H_2(x, 1-x)$. Legyen a 3° egyenletben (amely most $n = 3$-ra teljesül) $p_1 = uv$, $p_2 = v(1-u)$, $p_3 = 1-v$, ahol $u, v \in [0, 1]$ tetszőlegesek. Felhasználva az 1° tulajdonságot, kapjuk, hogy

$$f(v) + vf(u) = H_2(v, 1-v) + vH_2(u, 1-u) = H_3(uv, v(1-u), 1-v) =$$
$$= H_3(p_1, p_2, p_3) = H_3(p_2, p_1, p_3) = H_3(v(1-u), uv, 1-v) =$$
$$= H_2(v, 1-v) + vH_2(1-u, u) = f(v) + vf(1-u),$$

ahonnan $f(u) = f(1-u)$ következik. Speciálisan $f(0) = f(1)$. Legyen most a 3° egyenletben $p_1 = x, p_2 = y$ és $p_3 = 1-x-y$, ahol $(x, y) \in D$ tetszőleges. Ekkor megint csak 1° miatt

$$f(x+y) + (x+y) f\left(\frac{x}{x+y}\right) = H_2(x+y, 1-x-y) +$$
$$+ (x+y) H_2\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right) = H_3(p_1, p_2, p_3) =$$
$$= H_3(p_3, p_2, p_1) = H_2(1-x, x) + (1-x) H_2\left(\frac{1-x-y}{1-x}, \frac{y}{1-x}\right) =$$
$$= f(1-x) + (1-x) f\left(\frac{1-x-y}{1-x}\right),$$

ahonnan a már bebizonyított $f(x) = f(1-x)$ miatt

$$f(x)+(1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(x+y)+(x+y)f\left(\frac{x}{x+y}\right) =$$
$$= f(y)+(1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

következik, azaz $f(x)$-re teljesül az információ alapegyenlete. A 2° tulajdonságból következik, hogy $f(\frac{1}{2}) = H_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$; s ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Meg kívánjuk jegyezni, hogy az itt közölt bizonyítás gondolatai BORGES [3] dolgozatában implicit módon megtalálhatók.

3. § Folytonos információfüggvények

Az előző vizsgálatok lényegét a következő módon foglalhatjuk össze. Egy tetszőleges $f(x)$ információfüggvényhez tartozó entrópia rendelkezik a SHANNON-féle entrópiára ismert fontosabb algebrai jellegű tulajdonságokkal és fordítva, ezek implikálják, hogy $f(x) = H_2(x, 1-x)$ információfüggvény. Ezért a SHANNON-féle entrópia azon jellemzési tételei, amelyek a fent említett algebrai jellegű tulajdonságokra támaszkodnak, nem mások, mint az információ alapegyenletének megoldásai különböző regularitási feltételek mellett. Az ilyen megoldások természetesen mindig a SHANNON-féle $S(x)$ információfüggvényre vezetnek. Ezeket foglalja össze a következő

3. TÉTEL. *Ha az $f(x)$ információfüggvény*
a) $[0, 1]$-*ben folytonos; vagy*
b) $[0, 1]$-*ben Lebesgue-integrálható; vagy*
c) $(0, \frac{1}{2}]$-*ben monoton növekvő; vagy*
d) $(0, 1)$-*ben Lebesgue-mérhető,*
akkor $f(x)$ *a* SHANNON-*féle információfüggvény, azaz*

$$f(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$$

minden $x \in [0, 1]$-*re.*

Bizonyítás. FADDEJEW [9] dolgozatában (amely CHINTSCHIN [5] munkájához kapcsolódik) a következő állítás van bebizonyítva: Ha a $H_n(p_1, p_2, ..., p_n)$ $(n = 2, 3, ...)$ függvény minden $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ valószínűségeloszlásra értelmezve van, és rendelkezik az 1. tételben szereplő 1°, 2° és 3° tulajdonságokkal, továbbá $H_2(x, 1-x)$ *folytonos függvény* a $[0, 1]$ zárt intervallumban, akkor

$$H_n(p_1, p_2, ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

minden $n \geqq 2$-re. Legyen most $f(x)$ $[0, 1]$-ben folytonos információfüggvény. Ekkor az 1. tételben szereplő 1°, 2° és 3° tulajdonságok teljesülnek az f-hez tartozó entrópiára, továbbá $f(x) = H_2(x, 1-x)$ folytonos $[0, 1]$-ben, ezért FADDEJEW tételéből következik, hogy $f(x) \equiv S(x)$. Ezzel az a) állítást bebizonyítottuk. A b) és d) állítás teljesen hasonló módon következik TVERBERG [15], illetve LEE [11] tételeiből, ahol $H_n(p_1, p_2, ..., p_n)$-re 1°, 2° és 3° mellett az van feltéve, hogy $H_2(x, 1-x)$ $[0, 1]$-ben

Lebesgue-integrálható, ill. (0, 1)-ben Lebesgue-mérhető. A c) állítás KENDALL [10] dolgozatából következik, ahol 1° és 3° csak $n=2$, 3-ra van feltéve, továbbá $H_2(x, 1-x)$ a $(0, \frac{1}{2}]$ intervallumban monoton növekvő. Ezen utóbbi tételre elemi bizonyítás BORGES [3] dolgozatában található.

Megjegyezzük, hogy a d) állításból (amely LEE [11] tétele) természetesen következik a), b) és c).

4. § Az információfüggvények további tulajdonságai

Az alábbiakban az információ alapegyenletének megoldásairól további általános (azaz regularitások nélküli) eredményeket bizonyítunk be. Igen hasznosnak bizonyul a következő

3. DEFINICIÓ. Legyen $\varphi(n)$ minden $n=1, 2, 3, \ldots$ természetes számra értelmezett *additív* számelméleti függvény, azaz, amely eleget tesz a

$$\varphi(nm) = \varphi(n)+\varphi(m) \tag{8}$$

egyenletnek minden $n, m=1, 2, 3, \ldots$ értékre. Legyen továbbá $r = \frac{n}{m} \in (0,1)$ tetszőleges *racionális* szám, ahol tehát $1 \leqq n < m$.

Ekkor a

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi(n) - \varphi(m) \tag{9}$$

egyenlettel definiált — a (0, 1) intervallum racionális pontjaiban értelmezett — valós értékű függvényt az *additív φ kiterjesztésének* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a $\varphi(r)$ $\big(r\in(0, 1)$ racionális szám$\big)$ függvényérték nem függ az r racionális szám $\frac{n}{m}$ alakban történő előállításától; ugyanis, ha $r=\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'}$, akkor $\varphi(nm') = \varphi(n'm) = \varphi(n)+\varphi(m') = \varphi(n')+\varphi(m)$ miatt $\varphi(r) = \varphi(n)-\varphi(m) = \varphi(n')-\varphi(m')$. Továbbá könnyű belátni, hogy minden $r_1, r_2 \in (0, 1)$ racionális számpárra teljesül a

$$\varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1)+\varphi(r_2)$$

azonosság.

4. TÉTEL. *Ha $f(x)$ tetszőleges információfüggvény, akkor egyértelmű módon létezik egy $\varphi(n)$ additív számelméleti függvény a $\varphi(2)=1$ tulajdonsággal, hogy minden $r\in(0, 1)$ racionális számra*

$$f(r) = -r\varphi(r)-(1-r)\varphi(1-r), \tag{10}$$

ahol $\varphi(r)$ az additív φ kiterjesztését jelöli. Fordítva, ha $\varphi(n)$ tetszőleges additív számelméleti függvény, amelyre $\varphi(2)=1$, akkor (10) *eleget tesz az információ alapegyenletének minden $x, y\in(0, 1)$ racionális számra.*

Bizonyítás. Legyen $f(x)$ tetszőleges információfüggvény. Jelölje $H_n(p_1, p_2,\ldots,p_n)$ az f-hez tartozó entrópiát, és legyen

$$\varphi(n) = H_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

és $\varphi(1)=0$. A H_n entrópiára ismert 5° tulajdonság egyenletében legyen $q_{ik}=\frac{1}{nm}$ $i=1,2,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots,m$), ekkor minden $n, m \geqq 2$ természetes számra

$$\varphi(nm) = H_{nm}\left(\frac{1}{nm}, \frac{1}{nm}, \ldots, \frac{1}{nm}\right) = H_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ H_m\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right) = \varphi(n) + \varphi(m),$$

továbbá $\varphi(2) = H_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$. Így $\varphi(n)$ $(\varphi(1)=0$ miatt, amely minden additív számelméleti függvényre teljesül) eleget tesz a (8) egyenletnek és $\varphi(2)=1$. Az 5° tulajdonság egyenletében legyen most $n=2$; $p_1=\frac{m_1}{m}$, $p_2 = 1-\frac{m_1}{m}$ $(1 \leqq m_1 < m)$;

$$q_{1k} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{ha} \quad k = 1, 2, \ldots, m_1 \\ 0 & \text{ha} \quad k = m_1+1, m_1+2, \ldots, m \end{cases}$$

és

$$q_{2k} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{ha} \quad k = 1, 2, \ldots, m-m_1 \\ 0 & \text{ha} \quad k = m-m_1+1, m-m_1+2, \ldots m. \end{cases}$$

Ekkor

$$H_{2m}\Bigg(\overbrace{\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}}^{m_1}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-m_1}, \overbrace{\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}}^{m-m_1}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m_1}\Bigg) =$$

$$= H_2\left(\frac{m_1}{m}, 1-\frac{m_1}{m}\right) + \frac{m_1}{m} H_m\Bigg(\overbrace{\frac{1}{m_1}, \ldots, \frac{1}{m_1}}^{m_1}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-m_1}\Bigg) +$$

$$+ \left(1-\frac{m_1}{m}\right) H_m\Bigg(\overbrace{\frac{1}{m-m_1}, \ldots, \frac{1}{m-m_1}}^{m-m_1}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m_1}\Bigg).$$

Innen felhasználva a H_n entrópiára érvényes 1° és 4° tulajdonságokat

$$\varphi(m) = H_2\left(\frac{m_1}{m}, 1-\frac{m_1}{m}\right) + \frac{m_1}{m}\varphi(m_1) + \left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi(m-m_1),$$

ahonnan $H_2(x, 1-x) = f(x)$ miatt

$$f\left(\frac{m_1}{m}\right) = \varphi(m) - \frac{m_1}{m}\varphi(m_1) - \left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi(m-m_1) =$$

$$= \frac{m_1}{m}\varphi(m) - \frac{m_1}{m}\varphi(m_1) + \left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi(m) - \left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi(m-m_1) =$$

$$= -\frac{m_1}{m}\varphi\left(\frac{m_1}{m}\right) - \left(1-\frac{m_1}{m}\right)\varphi\left(1-\frac{m_1}{m}\right).$$

Mivel $\frac{m_1}{m}=r\in(0, 1)$ tetszőleges racionális szám lehet, ezért (10)-et bebizonyítottuk. A fordított állítás egyszerű számolással ellenőrizhető.

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy a tételben szereplő $\varphi(n)$ függvény $f(x)$ segítségével közvetlenül kifejezhető a

$$\varphi(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} if\left(\frac{1}{i}\right) \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{11}$$

formula szerint.

5. § Egy újabb feltétel

Ebben a paragrafusban egy igen egyszerű feltétel mellett oldjuk meg az információ alapegyenletét. Megmutatjuk, hogy $f(x)$-re a $[0, 1]$ intervallumbeli folytonosság helyett elegendő a

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x)=f(0) \tag{12}$$

feltételt kiszabni ahhoz, hogy $f(x)=S(x)$ legyen. Megjegyezzük, hogy közvetlen módon (12)-ből nem következik az eddig nyert legenyhébb feltétel, azaz $f(x)$ mérhetősége (l. a 3. tételt!).

A bizonyítás alapja ERDŐS [8] következő ismert eredménye, melynek igen elegáns bizonyításai RÉNYI [12] és [13] dolgozataiban találhatók:

2. LEMMA. *Ha a $\varphi(n)$ additív számelméleti függvényre*

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(n+1)-\varphi(n)]=0 \tag{13}$$

teljesül, akkor létezik olyan c konstans, hogy

$$\varphi(n)=c\log_2 n \tag{14}$$

minden $n=1, 2, 3, \ldots$ természetes számra.

Meg kívánjuk jegyezni, hogy a folytonos (FADDEJEW [9]), illetve $(0, \frac{1}{2}]$-ben monoton növekvő (BORGES [3]) megoldások is erre a lemmára támaszkodnak.

5. TÉTEL. *Ha az $f(x)$ információfüggvényre* (12) *teljesül, akkor* $f(x)\equiv S(x)$, *ahol* $S(x)=-x\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)$ *a* SHANNON-*féle információfüggvény.*

Bizonyítás. Az ismert $f(0)=0$ (l. lemma) összefüggés és (12) miatt

$$a_n=f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

nullsorozat. Ekkor (11)-et felhasználva a 4. tételben szereplő $\varphi(n)$ additív függvényre

$$\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} if\left(\frac{1}{i}\right)=\frac{n+1}{2n}\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} ia_i=\frac{n+1}{2n}\sum_{i=1}^{n} q_i a_i,$$

ahol

$$q_i=\frac{2i}{n(n+1)}>0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} q_i=1.$$

Ezért $a_n \to 0$ miatt $\sum_{i=1}^{n} q_i a_i \to 0$ $(n \to \infty)$, mert az utóbbi egy nullsorozat súlyozott számtani közepe. Ebből viszont

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(n)}{n} = 0 \tag{15}$$

következik. Másrészt a 4. tételből.

$$a_{n+1} = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \varphi(n+1) - \frac{n}{n+1} \varphi(n),$$

ahonnan

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = a_{n+1} - \frac{\varphi(n)}{n+1} = a_{n+1} - \frac{n}{n+1} \frac{\varphi(n)}{n}$$

következik. Innen viszont $a_n \to 0$ és (15) miatt fennáll (13). Alkalmazva a 2. lemmát

$$\varphi(n) = \log_2 n,$$

mivel $\varphi(2) = 1$ miatt $c = 1$. Ekkor a 4. tételben szereplő $\varphi(r)$ függvény a $\log_2 r$ függvényt jelenti, azaz

$$f(r) = -r \log_2 r - (1-r) \log_2 (1-r) \tag{16}$$

minden $r \in (0, 1)$ racionális számra. Legyen most $y \in (0, \frac{1}{2})$ tetszőleges *valós* szám, és $y < r_n < 2y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olyan *racionális* számokból álló sorozat, amelyre

$$\lim_{n \to \infty} r_n = y$$

teljesül. Ekkor a feltételek miatt

$$x_n = 1 - \frac{y}{r_n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

nullsorozat. Legyen $x = x_n$ az információ alapegyenletében $((x_n, y) \in D,\ n = 1, 2, \ldots)$, akkor

$$f(y) = f(x_n) - (1-y) f\left(\frac{x_n}{1-y}\right) + (1-x_n) f\left(\frac{y}{1-x_n}\right).$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet (12), $\frac{y}{1-x_n} = r_n$ és (16) miatt

$$f(y) = \lim_{n \to \infty} (1-x_n) f\left(\frac{y}{1-x_n}\right) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} [-r_n \log_2 r_n - (1-r_n) \log_2 (1-r_n)] = -y \log_2 y - (1-y) \log_2 (1-y).$$

Ezzel állításunkat minden $y \in (0, \frac{1}{2})$ valós számra bebizonyítottuk. Ebből viszont az 1. lemmát felhasználva következik tételünk.

KOROLLÁRIUM. *Legyen a* $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *függvény minden* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *valószínűségeloszlásra definiálva és teljesüljön rá az* 1. *tételben szereplő* 1° *tulajdonság* $n=3$*-ra, továbbá* 2° *és* 3° $n=3, 4, \ldots$*-re. Ha*

$$\lim_{x \downarrow 0} H_2(x, 1-x) = 0, \tag{17}$$

akkor

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

a SHANNON*-féle entrópia.*

Bizonyítás. A 2. tételből következik, hogy $f(x) = H_2(x, 1-x)$ információfüggvény. A (17) feltétel miatt $f(x)$-re teljesül (12), így az 5. tételből $f(x) = S(x)$. Innen 3° (amely most $n=3, 4, \ldots$-re teljesül) miatt teljes indukcióval következik állításunk.

Ezzel a SHANNON-féle entrópiára újabb jellemzést nyertünk.

6. § Monoton információfüggvények

Ebben a pontban KENDALL [10] eredményét általánosítjuk oly módon, hogy a $(0, \frac{1}{2}]$-ben feltételezett monoton növekedés helyett csak monotonitást (csökkenést vagy növekedést) követelünk meg. A bizonyításban támaszkodunk BORGES [3] munkájában található gondolatokra.

3. LEMMA. *Ha az* $f(x)$ *információfüggvény a* $(0, \frac{1}{2}]$ *intervallumban monoton, akkor* $f(x)$ *növekvő és nemnegatív* $(0, \frac{1}{2}]$*-ben.*

Bizonyítás. Az információ alapegyenletében legyen $x = \frac{1}{2}$ és $y = \dfrac{1-2t}{2(1-t)}$, ahol $t \in (0, \frac{1}{2}]$ tetszőleges. Ekkor $(x, y) \in D$ és így

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1-2t}{1-t}\right) = f\left(\frac{1-2t}{2(1-t)}\right) + \frac{1}{2(1-t)} f(1-t).$$

Ebből az 1. lemmát alkalmazva $t \in (0, \frac{1}{2}]$-re

$$\frac{t}{2(1-t)} f(t) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1-2t}{2(1-t)}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{t}{1-t}\right) - f(t)\right]. \tag{18}$$

Először megmutatjuk, hogy $f(x)$ nem lehet monoton csökkenő. Ugyanis ha $f(x)$ csökkenő lenne, akkor $f(\frac{1}{2}) = 1$ miatt $f(x) \geqq 1$ minden $x \in (0, \frac{1}{2}]$-re. Legyen most $t \in (0, \frac{1}{3}]$ tetszőleges, ekkor

$$\frac{1}{2} > \frac{1-2t}{2(1-t)} > 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} \geqq \frac{t}{1-t} > t$$

miatt (18)-ból $f(t) \leqq 0$ következne, ami ellentmondás.

Ha viszont $f(x)$ *növekvő,* akkor (18)-ból $f(t) \geqq 0$ $t \in (0, \frac{1}{3}]$-ban, így a növekedés miatt ez $t \in (0, \frac{1}{2}]$-ben is érvényes.

6. TÉTEL. *Ha az* $f(x)$ *információfüggvény* $(0, \frac{1}{2}]$*-ben monoton, akkor* $f(x) = S(x)$ *minden* $x \in [0, 1]$*-re.*

Bizonyítás. A 3. lemma miatt ekkor $f(x)$ monoton növekvő és nemnegatív $(0, \frac{1}{2}]$-ben, ezért

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = f(0+) \geqq 0$$

létezik. Megmutatjuk, hogy $f(0+) = 0 = f(0)$, amiből az 5. tétel miatt következik állításunk. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy $f(0+) > 0$. Az információ alapegyenletében legyen $y \in (0, \frac{1}{2})$ rögzített és végezzük el az $x \to 0$ $(x \in (0, \frac{1}{2}))$ határátmenetet. Ekkor a monotonitás miatt

$$f(0+) + f(y+) = f(y) + (1-y) f(0+),$$

ahonnan

$$f(y+) - f(y) = -y f(0+) < 0$$

következik. Ez viszont ellentmond a nyilvánvaló $f(y+) - f(y) \geqq 0$ egyenlőtlenségnek.

7. § A SHANNON-féle entrópia további jellemzéseiről

A SHANNON-féle entrópiára vonatkozólag ismertek olyan közvetlen jellemzések is, amelyek az alapvetőnek bizonyuló FADDEJEW-féle jellemzésben feltételezett algebrai tulajdonságok helyett más algebrai tulajdonságokat helyeznek előtérbe. Ilyen az 5° tulajdonságból következő $(q_{ik} = p_i q_k,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m)$

$$\begin{aligned} H_{nm}(p_1 q_1, p_1 q_2, \ldots, p_1 q_m, p_2 q_1, p_2 q_2, \ldots, p_2 q_m, \ldots, p_n q_1, p_n q_2, \ldots, p_n q_m) \\ = H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) + H_m(q_1, q_2, \ldots, q_m) \end{aligned} \tag{19}$$

úgynevezett *additivitási* tulajdonság, ahol $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ és $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ tetszőleges valószínűségeloszlások. Ismeretes, hogy (19)-nek eleget tesznek a

$$H_{n,\alpha}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha} \qquad (\alpha > 0, \quad \alpha \neq 1)$$

α-adrendű entrópiák is, amelyekre

$$\lim_{\alpha \to 1} H_{n,\alpha}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

teljesül, ahol H_n a SHANNON-féle entrópiát jelöli. Az ACZÉL—DARÓCZY [1] dolgozatban ezekről további eredmények találhatók.

A (19) additivitási tulajdonságra alapuló *közvetlen* jellemzések közül első CHAUNDY—MCLEOD [4] dolgozatában található (a bizonyítás egyszerűsítésére és az eredmény általánosítására lásd ACZÉL—DARÓCZY [1] munkáját): *Legyen* $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *minden* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *valószínűségeloszlásra értelmezett valós függvény, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok:*

$\mathcal{A}$. *Létezik a* [0, 1] *intervallumban definiált folytonos* $g(x)$ *függvény, hogy*

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} g(p_i);$$

$\mathcal{B}$.
$$H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1;$$

$\mathcal{C}$. *Fennáll a* (19) *additivitási egyenlet. Ekkor*

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *valószínűségeloszlásra.*

Egy további jellemzés DARÓCZY [6] dolgozatban található. Ezzel részletesebben foglalkozunk az alábbiakban.

Tegyük fel, hogy a $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ függvény minden $\{p_1, p_2, \ldots p_n\}$ véges valószínűségeloszlásra értelmezve van és teljesülnek rá a következő tulajdonságok:

I. $H_n(p_1, p_2, \ldots p_n)$ szimmetrikus $p_1, p_2, \ldots, p_n$-ben;

II. $H_2(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}) = 1$;

III. $H_n(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = H_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \ldots, p_n) + \Delta_{n-1}(p_1, p_2)$ $(n \geqq 3)$, ahol $\Delta_2(p_1, p_2)$ a $\bar{D} = \{(p_1, p_2): p_1 \geqq 0, p_2 \geqq 0, p_1 + p_2 \leqq 1\}$ tartományban folytonos;

IV. $H_{n+1}(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0) = H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$;

V. Teljesül a (19) additivitási egyenlet minden n-re és $m = 2$-re, azaz

$$H_{2n}(p_1 q, p_1(1-q), p_2 q, p_2(1-q), \ldots, p_n q, p_n(1-q)) =$$
$$= H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) + H_2(q, 1-q)$$

minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ eloszlásra és $q \in [0, 1]$-re.

7. TÉTEL. *Ha a* $H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *függvényre teljesülnek az* I., II., III., IV. *és* V. *tulajdonságok, akkor* H_n*-re teljesülnek az* 1. *tételben szereplő* 1°, 2° *és* 3° *tulajdonságok, továbbá* $H_2(x, 1-x)$ *folytonos* [0, 1]*-ben; így a* 3. *tétel miatt*

$$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *eloszlásra.*

Bizonyítás. Lásd DARÓCZY [6].

Egy további dolgozatomban (DARÓCZY [7]) megjegyeztem, hogy az $\mathcal{A}$., $\mathcal{B}$. és $\mathcal{C}$. (elegendő $\mathcal{C}$-t csak $m = 2$-re feltenni) tulajdonságokból következik I., II., III., IV. és V., ezért az előbb ismertetett jellemzések közös gyökerének a FADDEJEW-féle jellemzés bizonyult. További probléma tárgyát képezi a I., II. és III. részaxiómarendszer önmagában történő vizsgálata, amely igen érdekes algebrai és topológiai kérdésekre vezet. Ezekre itt nem kívánok kitérni.

A SHANNON-féle entrópiára jellemző — a FADDEJEW-féle jellemzéstől független — tulajdonságokra példa az ACZÉL—PFANZAGL [2] tétel: *Legyen* $I_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

minden $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ $\left(p_i > 0,\ i=1, 2, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$ *valószínűségeloszlásra értelmezve, ahol* $n > 2$ *rögzített természetes szám. Tegyük fel, hogy* I_n*-re teljesülnek a következő tulajdonságok:*

α) *Létezik egy* $(0, 1)$*-ben értelmezett differenciálható* $h(x)$ *függvény, hogy*

$$I_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i h(p_i);$$

β) $$I_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i h(q_i) : q_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1\right\}.$$

Ekkor $I_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = AH_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) + B$, *ahol* H_n *a* SHANNON*-féle entrópiát jelöli és* $A \leqq 0$, B *konstans értékek.*

IRODALOM

[1] ACZÉL, J.—DARÓCZY, Z.: Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14**, 95—121, (1963).

[2] ACZÉL, J.—PFANZAGL, J.: Remarks on the Measurement of Subjective Probability and Information, *Metrika*, **11**, 91—105, (1966).

[3] BORGES, R.: Zur Herleitung der Shannonschen Information, *Math. Zeitschr.*, **96**, 282—287, (1967).

[4] CHAUNDY, T. W.—MCLEOD, J. B.: On a Functional Equation, *Proc. Edinburgh Mat. Soc.*, **12**, 7—8, (1960—61).

[5] CHINTSCHIN, A. J.: *Der Begriff der Entropie in der Wahrscheinlichkeitstrechnung*, Arbeiten zur Informationstheorie I., Berlin 1957.

[6] DARÓCZY, Z.: Über eine Charakterisierung der Shannonschen Entropie, *Statistica* (Bologna), **27**, 199—205, (1967).

[7] DARÓCZY, Z.: *Über die Charakterisierungen der Shannonschen Entropie*, Colloquium on Information Theory, Debrecen, 1967.

[8] ERDŐS, P.: On the distribution function of additive functions, *Ann. Math.*, **47**, 1—20, (1946).

[9] FADDEJEW, D. K.: *Zum Begriff der Entropie eines endlichen Wahrscheinlichkeitsschemas*, Arbeiten zur Informationstheorie I. Berlin 1957.

[10] KENDALL, D. G.: Functional equations in information theory, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **2**, 225—229, (1964).

[11] LEE, P. M.: On the axioms of information theory, *Ann. Math. Statist.*, **35**, 415—418, (1964).

[12] RÉNYI, A.: On a theorem of P. Erdős and its application in information theory., *Math. Cluj*, **1**, 341—344, (1959).

[13] RÉNYI., A.: *On measures of entropy and information*. Proc. IV. Berkeley Symp-Math. Statist. and Prob., I. 547—561, (1961).

[14] SHANNON, C. E.: A mathematical theory of communication, *Bell System Techn. J.*, **27**, 379—423 and 623—656, (1948).

[15] TVERBERG, H.: A new derivation of the information function, *Math. Scand.*, **6**, 297—298, (1958).

(Beérkezett: 1968. III. 5.)

ÜBER DAS SHANNONSCHEN MASS DER INFORMATION

von Z. DARÓCZY

Zusammenfassung

Der Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die folgende

DEFINITION. Die im Intervall [0,1] definierte Funktion $f(x)$ mit der Beschränkung $f(\frac{1}{2}) = 1$ und $f(0) = f(1)$ wird eine *Informationsfunktion* gennant, wenn sie der *Grundgleichung der Information*

(1) $$f(x)+(1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y)+(1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

für alle $(x, y) \in D = \{(x, y): 0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1,\ x+y \leqq 1\}$ genügt.

Auf Grund dieser Definition kann man die *Entropie* einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ $\left(p_i \geqq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$ in der Form

(2) $$H_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{i=2}^{n}{}' s_i f\left(\frac{p_i}{s_i}\right) \qquad (s_i = p_1 + \ldots + p_i; \quad i = 2, \ldots, n)$$

erklären, wobei $f(x)$ eine beliebige Informationsfunktion ist. In der Arbeit wird gezeigt, dass die bekannten Charakterisierungen der Shannonschen Entropie auf die Lösung von (1) zurückgeführt werden können. Aus dieser Behauptung erhalten wir die stetigen, integrierbaren, monotonen und messbaren Lösungen von (1). Die allgemeine Lösung von (1) in den *rationalen* Punkten des Intervalls (0,1) wird mit Hilfe einer additiven zahlentheoretischen Funktion $\varphi(n)$ dargestellt. Auf Grund dieser Darstellung erhalten wir die im Punkt 0 stetige Lösung von (1). In der Arbeit werden noch weitere Ergebnisse und Probleme bezüglich der Grundgleichung der Information diskutiert.

REKURRENS FOLYAMATOK RITKÍTÁSÁRÓL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF

Tekintsük a $t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \dots$ pontfolyamatot, amelyről feltesszük, hogy rekurrens, azaz, hogy a $t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots)$ különbségek nemnegatív, egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Legyen a $\xi_i = t_i - t_{i-1}$ változók eloszlásfüggvénye $F(x)$ és tegyük fel, hogy ennek várható értéke véges pozitív szám:

$$0 < M(\xi_i) = \mu < +\infty.$$

Az $F(x)$ függvényt a rekurrens folyamat eloszlásfüggvényének nevezzük.

Rényi Alfréd [1] dolgozatában a rekurrens folyamat következő ritkítási modelljével foglalkozik: legyen adva a q szám, amelyről feltesszük, hogy $0 < q < 1$. Sorra haladva a $t_1, t_2, \dots$ véletlen pontokon, minden egyes pontot a többitől függetlenül q valószínűséggel megtartjuk és $p = 1 - q$ valószínűséggel elhagyjuk. Ily módon az eredeti rekurrens pontfolyamatnak egy ritkítását nyerjük, azaz olyan $t_0^{(1)} \equiv 0 < t_1^{(1)} < t_2^{(1)} < \dots$ véletlen pontsorozatot, amely az előbbinek részsorozata. Könnyű látni, hogy az új sorozat is rekurrens folyamat és a $t_i^{(1)} - t_{i-1}^{(1)}$ $(i = 1, 2, \dots)$ különbségek eloszlásfüggvénye az x helyen

$$\sum_{k=1}^{\infty} q p^{k-1} F_k(x),$$

ahol $F_k(x)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvény önmagával vett k-szoros konvolúciója.

Az [1] dolgozat eredménye többek között a következő: a fent leírt ritkítási eljárást n-szer egymás után a $q_1, q_2, \dots, q_n$ számokkal elvégezve, nyerjük, hogy $\lim_{n \to +\infty} \prod_{i=1}^{n} q_i = 0$ esetén

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\prod_{j=1}^{n} q_j (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) < x \right) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}} \qquad (x > 0),$$

ahol $t_0^{(n)} \equiv 0$ és $t_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \dots)$ az n-ik ritkítás után nyert rekurrens folyamat Markov-pontja. Más szóval, megfelelő normálás után határértékben *Poisson*-folyamatot nyerünk.

Az [1] dolgozatban alkalmazott ritkítási eljárást megfogalmazhatjuk a következő módon is: legyenek a $\nu_i^{(n)}$ $(i, n = 1, 2, \dots)$ valószínűségi változók egymástól és az eredeti pontfolyamattól független, nemnegatív egész értékeket felvevő *Pascal*-eloszlású változók,

$$P(\nu_i^{(n)} = k) = q_n (1 - q_n)^{k-1} \qquad (i, n, k = 1, 2, \dots).$$

Legyen $t_0^{(1)} \equiv 0$ és

$$t_i^{(1)} = t_{\sum\limits_{k=1}^{i} \nu_k^{(1)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Nyilvánvaló, hogy az ily módon konstruált $t_i^{(1)}$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók azonosak a fentebbi eljárás első lépése során nyert valószínűségi változókkal. Definiáljuk rekurzíve a $t_i^{(n)}$ változókat a következő módon: $t_0^{(n)} \equiv 0$ és $i=1, 2, \ldots$ esetén

$$t_i^{(n)} = t^{(n-1)}_{\sum\limits_{k=1}^{i} \nu_k^{(n)}} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ekkor $t_i^{(n)}$ megegyezik a ritkítási eljárás n-szer történő alkalmazása után nyert megfelelő valószínűségi változóval.

Ez a megfogalmazás sugalmazza a ritkítási eljárás következő általánosítását. Legyenek a $\nu_i^{(n)}$ $(i, n=1, 2, \ldots)$ független valószínűségi változók pozitívak és egész értékűek, legyenek továbbá azonos eloszlásúak és függetlenek az eredeti $\{t_i\}$ rekurrens folyamattól. A ritkítást a következő módon végezzük el: legyen $t_i^{(0)}=t_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ és definiáljuk a $t_i^{(n)}$ véletlen pontokat a

$$t_i^{(n)} = t^{(n-1)}_{\sum\limits_{k=1}^{i} \nu_k^{(n)}} \qquad (n, i = 1, 2, \ldots)$$

rekurziós formulával. Legyen továbbá $t_0^{(n)}=t_0\equiv 0$.

Ez a ritkítási eljárás annyiban általánosabb, mint a RÉNYI-féle, hogy a $\nu_i^{(n)}$ változók tetszőleges eloszlásúak lehetnek, viszont annyiban speciálisabb, hogy minden n esetén ugyanazon eloszlás szerint ritkítjuk a folyamatot. Az általunk bevezetett ritkítási eljárás alkalmazást nyerhet a részecskeszámlálók elméletében, ahol hasonló modellt szoktak vizsgálni, amikor több leosztó fokozaton keresztül regisztrálják a beérekezett részecskéket [2].

Vezessük be a $P(\nu_i^{(n)}=k)=p_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ jelölést. Érdektelen annak az esetnek a vizsgálata, amikor valamilyen k indexre teljesül, hogy $p_k=1$. Ekkor ugyanis a ritkítás szisztematikus. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy $p_k<1$ $(k=1, 2, \ldots)$. Legyen

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \quad z = \sigma + i\tau, |z| \leqq 1 \tag{1}$$

a $\nu_i^{(n)}$ valószínűségi változók generátorfüggvénye.

A $t_i^{(n)}$ véletlen pontokat az általunk vizsgált ritkítási modellben a következő módon fejezhetjük ki. Legyen $Z_i^{(1)}=\nu_i^{(1)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ és definiáljuk rekurzíve a $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változókat a következő kifejezésekkel:

$$Z_1^{(n)} = \sum_{i=1}^{\nu_1^{(n)}} Z_i^{(n-1)}, Z_2^{(n)} = \sum_{i=\nu_1^{(n)}+1}^{\nu_1^{(n)}+\nu_2^{(n)}} Z_i^{(n-1)}, \ldots \qquad (n \geqq 2)$$

Mármost a $t_i^{(n)}$ véletlen pontok a $\{t_i\}$ alapul vett rekurrens folyamattal a következő módon fejezhetők ki:

$$t_0^{(n)} \equiv 0, \quad t_1^{(n)} = t_{Z_1^{(n)}}, \quad t_2^{(n)} = t_{Z_1^{(n)}+Z_2^{(n)}}, \ldots$$

Könnyű látni, hogy a $Z_i^{(n)}$ $(i, n=1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók generátorfüggvénye az (1) generátorfüggvény önmagával vett n-szeres iteráltja:

(2)
$$f_n(z) = \overbrace{f(f(f \ldots (f}^{n\text{-szer}}(z)) \ldots)),$$

továbbá, hogy rögzített n esetén a $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változók egymástól függetlenek és azonos eloszlásúak.

1. LEMMA. *Tegyük fel, hogy* $D^2(v_i^{(n)}) < +\infty$ *és legyen* $M(v_i^{(n)}) = M$. *Ekkor a*

$$P(Z_i^{(n)} < M^n x) \qquad (n \to +\infty)$$

eloszlásfüggvénynek létezik $G(x)$ *határértéke. A* $G(x)$ *függvény eloszlásfüggvény, amelynek várható értéke* 1 *és szórásnégyzete*

$$D^2(v_i^{(n)})/(M^2 - M).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $M > 1$. Tekintsük azt a *Galton—Watson*-folyamatot, (vö. [3], I. fej. 8.1. Tétel), amelyben az első nemzedék tagjai számának eloszlását az (1) által adott generátorfüggvény határozza meg. Ekkor e folyamatban az n-edik nemzedék tagszáma eloszlásának generátorfüggvényét a (2) kifejezés adja. Ismeretes, hogy a fenti feltételek fennállása esetén az n-edik nemzedék tagjainak száma M^n-nel osztva 1 valószínűséggel konvergál valamely W valószínűségi változóhoz, amelynek eloszlásfüggvénye esetleg az $x=0$ hely kivételével abszolút folytonos, várható értéke 1 és szórásnégyzete

$$\frac{f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2}{(f'(1))^2 - f'(1)}.$$

Minthogy $P(v_i^{(n)} = 0) = 0$, azért $f_n(0) = 0$. Így a W eloszlásfüggvénye az $x=0$ helyen folytonos. Esetünkben $f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2 = D^2(v_i^{(n)})$ és $f'(1) = M$. A $Z_i^{(n)}$ eloszlása a *Galton—Watson*-folyamat n-edik nemzedékének eloszlásával egyezik meg. Ezért állításunk bizonyítást nyert.

Megjegyzés. A $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változók konstrukciója eltér a *Galton—Watson*-folyamat konstrukciójától. A lemma bizonyításának módszerével nem mutatható meg, hogy $Z_i^{(n)}/M^n$ majdnem mindenütt konvergál valamilyen W valószínűségi változóhoz. Ez valószínűleg nem is igaz.

A $t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, mint könnyű belátni, a következő:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(Z_i^{(n)} = k) F_k(x),$$

ahol $F_k(x)$ jelentése ugyanaz, mint előbb. Megmutatjuk most, hogy megfelelő normálás után, ha $n \to +\infty$, a $t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}$ valószínűségi változóknak létezik határeloszlása.

1. TÉTEL. *Ha* $D^2(v_i^{(n)}) < +\infty$, *akkor*

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}}{\mu M^n} < x\right) = G(x), \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

ahol $G(x)$ *a* $Z_i^{(n)}/M^n$ *sorozat határeloszlása.*

Bizonyítás. A $t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}$ valószínűségi változó a következő alakban állítható elő:

$$t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}=\sum_{j=\sum_{l=1}^{i-1}Z_l^{(n)}+1}^{\sum_{l=1}^{i}Z_l^{(n)}}\xi_j.$$

Tekintsük a

$$\sum_{j=\sum_{l=1}^{i-1}Z_l^{(n)}+1}^{\sum_{l=1}^{i}Z_l^{(n)}}\xi_j/\mu Z_i^{(n)} \tag{3}$$

valószínűségi változót. Minthogy a ξ_j valószínűségi változók várható értéke véges és a $Z_i^{(n)}/M^n$ sorozat határeloszlása, $G(x)$, folytonos, azért (3) sztochasztikusan 1-hez konvergál. (Vö.: P. RÉVÉSZ [4], J. MOGYORÓDI [5].) A

$$\frac{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}{\mu M^n}=\frac{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}{\mu Z_i^{(n)}}\cdot\frac{Z_i^{(n)}}{M^n}$$

összefüggés alapján CRAMÉR egy lemmáját használva adódik állításunk.

A véletlen ritkítási eljárás szemléletesebbé tétele céljából tekintsük az alapul vett $t_0\equiv 0<t_1<\dots$ rekurrens folyamatot. Nevezzük R_1 transzformációnak azt az eljárást, amikor a $t_0\equiv 0$, $t_{\nu_1^{(1)}}$, $t_{\nu_1^{(1)}+\nu_2^{(1)}}$, ..., $t_{\nu_1^{(1)}+\nu_2^{(1)}+\dots+\nu_n^{(1)}}$, ... véletlen pontok kivételével az eredeti rekurrens folyamat többi véletlen pontját elhagyjuk. Nevezzük továbbá C transzformációnak a felújítási folyamat $1/M$-szeresére való összenyomását. A $T_1=CR_1$ transzformáció (amelynél a rekurrens folyamaton először az R_1, majd a C transzformációt hajtjuk végre; egyébként a sorrend tetszőleges) eredményeképpen újabb rekurrens folyamatot nyerünk, amelynél két egymásra következő *Markov*-pont távolságának átlagértéke továbbra is μ. Hasonlóan definiáljuk a T_2, T_3, ... transzformációkat is. A $T^{(n)}$ transzformáció jelentse a T_1, T_2, ..., T_n transzformációk egymás utáni végrehajtását. A $T^{(n)}$ transzformáció segítségével nyerjük a

$$\frac{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}{M^n}\qquad (i=1,2,\dots)$$

valószínűségi változót.

Az 1. Tétel bizonyításánál felhasznált, véletlen tagszámú összegekre vonatkozó nagy számok törvénye lehetőséget ad arra, hogy RÉNYI ALFRÉD eredményét az övétől eltérő módon bizonyítsuk. Legyen $\nu_i^{(n)}$ független, *Pascal*-eloszlású valószínűségi változók sorozata:

$$P(\nu_i^{(n)}=k)=q_n(1-q_n)^{k-1},\qquad (i,n,k=1,2,\dots),$$

ahol $0<q_n<1$. Nyilvánvaló, hogy $M(\nu_i^{(n)})=\dfrac{1}{q_n}$. Készítsük el, mint fentebb is tettük, a $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változókat. Jelölje $f_q(z)$ a q paraméterű *Pascal*-eloszlás generátorfüggvényét:

$$f_q(z)=\frac{qz}{1-(1-q)z}.$$

Ekkor a $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változók generátorfüggvénye, mint könnyen látható,

$$f_{q_n}(f_{q_{n-1}}(\dots(f_{q_1}(z))\dots)) = f_{q_1 q_2 \dots q_n}(z).$$

A $Z_i^{(n)}$ valószínűségi változók szintén *Pascal*-eloszlásúak és

$$P(Z_i^{(n)} = k) = Q_n(1-Q_n)^{k-1},$$

ahol $Q_n = \prod_{i=1}^{n} q_i$.

Bebizonyítjuk most a következő állítást:

2. LEMMA. *Ha* $0 < q_j < 1$ $(j=1,2,\dots,n)$ *és* $\lim_{n\to+\infty} Q_n = 0$, *akkor*

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_i^{(n)} Q_n < x) = 1 - e^{-x}. \qquad (x > 0, \quad i = 1,2,\dots)$$

Bizonyítás. A

$$P(Z_i^{(n)} Q_n < x) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{Q_n}\right]} Q_n(1-Q_n)^{k-1} = 1-(1-Q_n)^{\left[\frac{x}{Q_n}\right]}$$

összefüggés alapján azonnal adódik állításunk.

2. TÉTEL. *Legyen* $\{v_i^{(n)}\}$ *független valószínűségi változók sorozata, amely független az alapul vett* $t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \dots$ *rekurrens folyamattól, továbbá*

$$P(v_i^{(n)} = k) = q_n(1-q_n)^{k-1}, \qquad (i,n,k = 1,2,\dots, \quad 0 < q_n < 1).$$

Ha $\lim_{n\to+\infty} Q_n = 0$, *akkor*

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}}{\mu} Q_n < x\right) = 1 - e^{-x} \qquad (x > 0).$$

Bizonyítás. A 2. Lemmára támaszkodva, állításunkat az 1. Tételhez hasonló módon bizonyíthatjuk.

Vizsgáljuk meg most a ritkítási eljárás során invariáns alapul vett rekurrens folyamatokat. Azt mondjuk, hogy az alapul vett rekurrens folyamat a T_1 (vagy akármelyik T_i) transzformációra nézve invariáns, ha a T_1 transzformáció végrehajtása után nyert rekurrens folyamat eloszlásfüggvénye megegyezik a transzformáció elvégzése előtti eloszlásfüggvénnyel.

3. TÉTEL. *Tekintsük azokat a rekurrens folyamatokat, amelyeknek* $F(x)$ *eloszlásfüggvénye véges várható értékkel rendelkezik. Az* (1) *formula által adott* $f(z)$ *generátorfüggvényhez tartozó* T_1 *transzformációra nézve egyedül a* $G\left(\frac{x}{\mu}\right)$ *eloszlásfüggvénnyel rendelkező rekurrens folyamatok invariánsak, ahol* $G(x)$ *az* 1. *Lemmában definiált eloszlásfüggvény és* μ *tetszőleges rögzített pozitív szám.*

Bizonyítás. Legyen az alapul vett rekurrens folyamat eloszlásfüggvénye $G\left(\frac{x}{\mu}\right)$. Először belátjuk, hogy ez a folyamat a T_1 transzformációra nézve invariáns. Ugyanis a T_1 végrehajtása utáni rekurrens folyamat *Laplace*-transzformáltja

$$f\left(g\left(\frac{\mu s}{M}\right)\right), \quad \operatorname{Re} s \geqq 0,$$

ahol $g(s)$ a $G(x)$ eloszlásfüggvény *Laplace*-transzformáltja. Ismeretes, hogy $g(s)$ eleget tesz a

$$g(s) = f\left(g\left(\frac{s}{M}\right)\right)$$

függvényegyenletnek (vö. [3], 1. fej. 8.2. Tétel). Ezért a T_1 transzformáció elvégzése utáni rekurrens folyamat eloszlásfüggvényének *Laplace*-transzformáltja $g(\mu s)$. Vagyis a transzformáció elvégzése utáni rekurrens folyamat eloszlásfüggvénye is $G\left(\frac{x}{\mu}\right)$.

Fordítva, legyen az alapul vett rekurrens folyamat invariáns és a hozzá tartozó $F(x)$ eloszlásfüggvény $\mu > 0$ várható értékű. Beláthatjuk, hogy $F(x) = G\left(\frac{x}{\mu}\right)$. Ha $\varphi(s)$ jelöli az $F(x)$ függvény *Laplace*-transzformáltját, akkor az alapul vett rekurrens folyamat invarianciája miatt

$$\varphi(s) = f\left(\varphi\left(\frac{s}{M}\right)\right). \tag{4}$$

A $g(\mu s)$ *Laplace*-transzformált ugyancsak kielégíti ezt a függvényegyenletet, továbbá mindkettő várható értéke μ. Ismeretes (vö. [3], 1. fej. 8.2 Tétel), hogy ekkor

$$F(x) = G\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

Tételünket ezzel bebizonyítottuk.

Egy következő dolgozatban a pontfolyamatok ritkításának további problémáira vissza fogunk térni.

IRODALOM

[1] Rényi A.: A POISSON-folyamat egy jellemzése, *MTA. Mat. Kut. Int. Közl.*, **1** (1956) 4. sz. 519—527.

[2] Takács L.: Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról, *MTA. III. Oszt. Közl.* **6** (1956) 369—421.

[3] Th. Harris: *The theory of branching processes*, Springer. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1963.

[4] P. Révész: *The laws of large numbers*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967.

[5] J. Mogyoródi: On the law of large numbers for the sum of a random number of independent random variables, *Annales Univ. Sci. Budapestinensis. Sect. Math.*, **8** (1965) 33—38.

[6] E. Picard: *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*, Dunod, Paris. 1928.

(Beérkezett: 1968. III. 8.)

О РЕДЕЮЩИХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОЦЕССАХ

J. MOGYORÓDI

Рассмотрим исходный рекуррентный процесс: $t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \ldots$ т. е. случайный поток такой, что разницы $t_i - t_{i-1} = \xi_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ неотрицательные, независимые и одинаково распределенные случайные величины. Введем следующую операцию: пусть $\nu_i^{(n)}$ $(i, n=1, 2, \ldots)$ независимые и одинаково распределенные случайные величины, принимающие целые положительные значения и не зависящие от исходного случайного потока. Пусть $t_i^{(0)} = t_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots$ и определим рекуррентно случайные потоки следующим образом:

$$t_0^{(n)} \equiv 0, \quad t_1^{(n)} = t^{(n-1)}_{\nu_1^{(n)}}, \quad t_2^{(n)} = t^{(n-1)}_{\nu_1^{(n)} + \nu_2^{(n)}}, \ldots \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Доказывается, что, если $P(\nu_i^{(n)} = k) < 1$, $(k=1, 2 \ldots)$, и $D^2(\nu_i^{(n)}) < +\infty$, существует предел

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}}{\mu M^n} < x \right) = G(x),$$

для всех фиксированных $i = 1, 2, \ldots$, где $G(x)$ непрерывная функция распределения, $M = M(\nu_i^{(n)})$ и $\mu = M(t_i - t_{i-1}) < +\infty$ $(i=1, 2, \ldots)$. Исследуется также функция распределения исходного рекуррентного потока, останущаяся инвариантной при вышеупомянутых операциях.

ADOTT TÍPUSÚ VÉLETLEN GRÁFOK TULAJDONSÁGAIRÓL

Írta: PALÁSTI ILONA

1. Bevezetés

A gráfelmélet a matematika egyik, az utóbbi évtizedekben fejlődésnek indult ága, amely felhasználható közlekedési hálózatok, bizonyos kémiai problémák, elektromos hálózatok tanulmányozására szolgáló modellként. Alkalmazható továbbá az ekonometriában, a híradástechnikában stb.

Nézzük meg először, hogy mit is értünk a „gráf" kifejezés alatt, és idézzünk néhány alapfogalmat, amelyeket a későbbiek során majd felhasználunk.

Matematikailag egy gráfot két halmaz megadásával, a csúcsok és az élek halmazának az előírásával definiálunk. Legyen tehát adva az n számozott $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontból álló véges P ponthalmaz. Nevezzük a P ponthalmaz $P_i \in P$ elemeit *csúcs*oknak és magát a P ponthalmazt pedig a csúcsok halmazának. Egy G *gráf* értelmezhető a csúcsok P halmazán, vagyis G valamilyen módon függ a P halmaztól:

$$G = G(P). \tag{1. 1}$$

Pontosabban G adott, ha előírjuk az

$$e = (P_i, P_j); \qquad P_i, P_j \in P \tag{1. 2}$$

pontpároknak olyan családját, amely feltünteti, hogy mely csúcsok vannak összekötve. Az ilyen, vagyis az (1. 2) által definiált pontpárokat, vagy csúcsok párjait a gráf *él*einek nevezzük, a P_i és P_j csúcsokat pedig ezen e élek végpontjainak.

Ha tehát egy gráfot egy elektromos hálózattal interpretálunk, akkor a gráf csúcsai a csatlakozási, vagy csomópontok, az élek pedig a huzalok.

Definiáljuk az olyan éleket is, amelyeknek mindkét végpontja azonos

$$l = (P_i, P_i). \tag{1.3}$$

Az ilyen (1. 3) éleket *hurok-él*eknek fogjuk nevezni. A hurok-él ugyanabba a P_i csúcsba tér vissza, amelyből kiindult úgy, hogy közben nem megy át más csúcsokon.

Az élek fenti, (1. 2) definíciójában figyelembe vehetjük, vagy figyelmen kívül hagyhatjuk az élek végpontjainak az előfordulási sorrendjét is. Ha a sorrend lényegtelen, vagyis ha

$$e = (P_i, P_j) = (P_j, P_i), \tag{1. 4}$$

akkor azt mondjuk, hogy az e irányítás nélküli, vagy nem irányított él. Ha azonban a sorrendre is tekintettel vagyunk, azaz ha előírjuk, hogy a P_i a kezdőcsúcsa, a P_j pedig a befejező csúcsa legyen az e élnek, akkor az e élt *irányított él*nek fogjuk nevezni. Azt is mondhatjuk, hogy az e él a P_i csúcsból kimenő él, és egyben a P_j csúcsba bemenő, vagy befutó él. Az irányított és nem irányított élekre egyaránt vonatkozó terminológia: az e él a P_i és P_j csúcsokhoz illeszkedik, és fordítva, a P_i és P_j csúcsok az e élhez illeszkednek.

Izolált az olyan *csúcs*, amelyhez nem illeszkedik egyetlen él sem. A csak izolált pontokból álló gráfot null-gráfnak hívják.

Ha az élek irányítottak, akkor *irányított gráf*ról beszélünk, míg a nem irányított gráfban az összes élek irányítás nélküliek.

Ugyanarról a gráfról lehet egy teljesen másnak látszó diagramot is szerkeszteni, ezek izomorf *gráfok*. Pontosabban: akkor mondjuk, hogy két gráf a G és a G' *izomorf*, ha a P és P' csúcshalmazok között van egy olyan, pontról pontra való hozzárendelés, hogy a megfelelő csúcsok csak akkor vannak összekötve az egyik gráfban, ha a másikban levő megfelelő csúcsok is össze vannak kötve egy éllel. Ha ezek az élek irányítottak, akkor még az irányításnak is megfelelőnek kell lenni. Így tehát nem lesz fontos, hogy a gráf melyik képét használjuk, hiszen az izomorf gráfok ugyanazokkal a gráftulajdonságokkal rendelkeznek.

Fontos speciális gráf a (nem irányított) *teljes gráf*, az olyan $U=U(P)$ gráf, amelynek éleit a P halmaz összes különböző (P_i, P_j) csúcspárjaival megadható, összes lehetséges élek alkotják.

A $G(P)$ gráf részgráfján egy olyan $D(Q)$ gráfot értünk, amelyben a $D(Q)$ gráf éleinek halmaza, részhalmaza a $G(P)$ gráf éleiből álló halmaznak, vagyis igaz az, hogy $e_D \subset e_G$ és a $Q \subset P$.

Egy irányítás nélküli G gráfban jelöljük $\varrho(P_a)$-val azoknak az éleknek a számát, amelyeknek közös végpontja a P_a csúcs. Ezt a ϱ számot a P_a csúcs *fokszám*ának, vagy *fok*ának nevezzük.

Szükségünk lesz még a következő definíciókra is.

Ha a G gráfnak n csúcsa és N számú éle van, akkor a G gráf csúcsainak az átlagos fokszámát, a $\frac{2N}{n}$ számot a G *gráf fok*ának fogjuk nevezni.

A G gráfot *kiegyensúlyozott gráf*nak fogjuk nevezni, ha nincs olyan részgráfja, amely magasabb fokú lenne mint maga a gráf.

A gráf *út*jának az élek olyan sorozatát nevezzük, amelyben minden él végpontja megegyezik az utána következő él kezdőpontjával úgy, hogy kétszer ugyanaz az él, vagy kétszer ugyanaz a csúcs mint kezdőpont, illetve kétszer ugyanaz a csúcs mint végpont nem szerepelhet a sorozatban. A $\mu=\{P_0, P_1, \ldots, P_h\}$ *út hossza*, a h, egyenlő azoknak az éleknek a számával, amelyekből az út áll.

A kör olyan véges $\mu=\{P_0, P_1, \ldots, P_k\}$ út, amelyben a P_0 kezdőcsúcs egybeesik a P_k utolsó csúccsal. Az egységnyi hosszúságú kör, amely az egyetlen (P_i, P_i) élből áll, az (1. 3) definíció szerint a hurok. A k élt és k pontot tartalmazó kört *k-ad rendű* (vagy k hosszúságú) *kör*nek nevezzük.

Azt mondjuk, hogy egy gráf *összefüggő*, ha bármely P_k és P_l csúcsok esetén (ahol $P_k \neq P_l$) van a P_k csúcsból a P_l-be vezető út. A definíció szerint a kör önmagában is egy összefüggő gráf.

Lényegében már a definícióból is következik, hogy egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha csupán egy *komponens*e (azaz egyetlen izolált részgráfja) van.

Az olyan összefüggő G gráfot, amelynek k csúcsa van és egyik részgráfja sem kör, k-ad rendű (vagy terjedelmű) *fá*nak nevezzük. Egy k-ad rendű fának tehát $k-1$ éle van.

A bevezetőben elmondottakkal kapcsolatban elsősorban O. ORE [1] és C. BERGE [2] könyveire hivatkozunk.

Jelen dolgozatban adott típusú, véletlen gráfok aszimptotikus tulajdonságait vizsgáljuk, ha a pontok száma $n \to \infty$. Foglalkozunk pl. különböző fajta pontokból (két színű véletlen gráfok) és bizonyos típusú összeköttetésekből (irányított véletlen gráfok) álló gráfok esetében a szerkezeti tulajdonságok és az összefüggőség, valamint a gráfok fejlődésének kérdéseivel.

Módszereink a kombinatorikus gráfelmélet és a valószínűségszámítás körébe tartoznak. F. HARARY [3] dolgozatában átfogó bibliográfiát adott meg a kombinatorikus gráfelmélet körébe tartozó irodalomról.

Valószínűségszámítási meggondolások elsőnek ERDŐS PÁL [4] dolgozatában kerültek felhasználásra gráfelméleti tételek bizonyításánál. ERDŐS PÁL és RÉNYI ALFRÉD [5], [6], [8] dolgozataiban kidolgozott valószínűségszámítási módszerek képezik tételeink bizonyításának eszközét. A valószínűségszámításban elfogadott jelöléseket fogjuk használni. $\mathbf{P}(\ldots)$-vel fogjuk jelölni a zárójelben levő esemény valószínűségét, az $\mathbf{M}(\xi)$ a ξ valószínűségi változó várható értékét, $\mathbf{D}^2(\xi)$ pedig a szórásnégyzetet jelenti.

2. A véletlen gráfok

Az n számú számozott csúcsból és az N élből álló $\Gamma_{n,N}$ gráfot akkor nevezzük véletlen gráfnak, ha ezt az N élt (az egyenletes eloszlás szerint) véletlenszerűen választjuk ki az összes lehetséges $\binom{n}{2}$ él közül. Más szavakkal, tekintsük a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ csúcsok halmazát, ebből véletlen gráfot úgy kapunk, ha az összes lehetséges $\binom{n}{2}$ számú (P_i, P_j) $(i \neq j)$ él közül véletlenszerűen választunk ki N élt úgy, hogy az összes lehetséges $\binom{\binom{n}{2}}{N}$ kiválasztás valószínűsége azonos legyen.

A $\Gamma_{n,N}$ véletlen gráfban lehetnek izolált pontok is és ezeket is a $\Gamma_{n,N}$-hez tartozóknak tekintjük.

Jelöljük most $G_{n,N}$-nel azt a tetszőleges, rögzített gráfot, amely n számozott pontból és N élből áll, akkor annak a valószínűsége, hogy a $\Gamma_{n,N}$ véletlen gráf azonos legyen az adott $G_{n,N}$-nel, az $1\Big/\binom{\binom{n}{2}}{N}$ hányadossal lesz egyenlő. Általánosabban: jelentsen A most egy olyan tulajdonságot, amellyel a $G_{n,N}$ gráf rendelkezhet, vagy nem rendelkezhet, és legyen $A_{n,N}$ az A tulajdonságú, ilyen gráfok száma. Jelöljük továbbá $\mathbf{P}_{n,N}(A)$-val annak a valószínűségét, hogy a $\Gamma_{n,N}$ véletlen gráf rendelkezik az A tulajdonsággal, akkor ez a valószínűség:

$$\mathbf{P}_{n,N}(A) = \frac{A_{n,N}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}}. \tag{2.1}$$

Egy másik, ekvivalens megfogalmazás a következő: Legyen adva n számozott csúcs. Válasszunk ki az összes lehetséges $\binom{n}{2}$ él közül találomra egy élt úgy, hogy az összes élek ilyen kiválasztása egyenlő valószínűségű legyen. Ezek után a megmaradt $\binom{n}{2}-1$ élből választunk ki egy másik élt és úgy folytatjuk ezt az eljárást, hogy ha k élt már rögzítettünk, akkor a megmaradt $\binom{n}{2}-k$ él bármelyike egyenlő valószínűséggel választható ki mint soron következő. Ily módon az élek számának növelésével a véletlen gráfok növekedését, fejlődését lehet tanulmányozni, meg lehet adni a gráf szerkezeti tulajdonságait, különböző fejlődési fokon, ha az N az n-nel együtt nő.

A véletlen gráfok fenti definíciója, fejlődésének és szerkezeti tulajdonságainak vizsgálata ERDŐS PÁL és RÉNYI ALFRÉD nevéhez fűződik. (Ezek elemzése, elméleti megalapozása, bizonyítási módszereinek kidolgozása az [5], [6], [7] és [8] dolgozataikban található meg részletesen.)

Véletlen gráfokkal T. L. AUSTIN, R. E. FAGEN, W. F. PENNEY és J. RIORDAN is foglalkoztak [9], továbbá J. W. MOON és L. MOSER [10] dolgozatukban.

ERDŐS P. és RÉNYI A. vizsgálatainak fő célja bizonyos szerkezeti tulajdonságokra vonatkozó küszöbfüggvények (vagyis azok a függvények, amelyeknél ezek a tulajdonságok megjelennek), illetve a megfelelő eloszlásfüggvények meghatározása volt. Vizsgálták pl., hogy a $\Gamma_{n,N}$ véletlen gráfban adott típusú részgráfok (fák, adott nagyságú körök, teljes részgráfok stb.) milyen valószínűséggel fordulnak elő, adott fejlődési fokon. Tanulmányozták továbbá a véletlen gráfok bizonyos általános tulajdonságait (összefüggőség, az összefüggőség erőssége, az összefüggő komponensek teljes száma stb.).

Mint már említettük, a véletlen gráfok fejlődését a gráf éleinek növelése során figyelhetjük meg. A fejlődés fokát azáltal értelmezzük, hogy megmondjuk, hogy az N, azaz az élek száma, a csúcsok számának az n-nek milyen függvényeként fejezhető ki. (Vagyis megadjuk, hogy N az n-nek mely adott függvényével fejezhető ki aszimptotikusan.)

Adott fejlődési fokon „tipikus" struktúra alatt olyan szerkezeti tulajdonságot értünk, amelynek a valószínűsége 1-hez tart, ha $n\to\infty$. Ha tehát A egy olyan tulajdonság, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,N(n)}(A) = 1, \tag{2.2}$$

akkor azt mondjuk, hogy „majdnem minden" $\Gamma_{n,N(n)}$ gráf rendelkezik ezzel az A tulajdonsággal.

A gráfok fejlődését felfoghatjuk úgy is, mint pl. egy ország közlekedési hálózatának (autóbuszvonalainak, vasútjainak, repülőgép-járatainak stb.) fejlődését reprezentáló, igen leegyszerűsített modellt.

3. A véletlen gráfok összefüggéséről

Az első kérdés, amely a gráfokkal kapcsolatban felmerül az, hogy összefüggőek-e, vagy sem. Ennek a kérdésnek matematikai érdekessége is van, és a gyakorlati alkalmazás szempontjából is fontos [11]. Ezért foglalkozunk mi is először az összefüggőség kérdéseivel.

ERDŐS PÁL és RÉNYI ALFRÉD az [5] dolgozatban vizsgálták a véletlen gráfok összefüggőségét az $n\to\infty$ esetén. Összefüggőnek azt a $\Gamma_{n,N}$ véletlen gráfot nevezték, amelyben bármely pontból, bármely másik pontba vezet út. Bebizonyították azt, hogy ha az élek száma

$$N_c = \left[\frac{n}{2}\log n + cn\right], \tag{3.1}$$

ahol a c tetszőleges, rögzített, valós szám, az $[x]$ pedig az x szám egész részét jelenti, és ha $\mathbf{P}_0(n, N_c)$-vel jelöljük annak a valószínűségét, hogy a Γ_{n,N_c} összefüggő legyen, akkor az összefüggőség valószínűsége a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_0(n, N_c) = e^{-e^{-2c}} \tag{3.2}$$

határértékhez tart.

Felvetették továbbá azt a kérdést, hogy más, bonyolultabb típusú véletlen gráfok esetén hogyan alakul az összefüggőség valószínűsége.

Ezt a kérdést a [12] dolgozatban a páros körüljárású, véletlen gráfok, a [13] dolgozatban pedig az irányított, véletlen gráfok esetében válaszoltuk meg.

Mielőtt az eredményeket részleteznénk, nézzük először a definíciókat. Páros körüljárásúnak azt a $G_{m,n,N}$ gráfot nevezzük, amelynek m számozott $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pontja van az egyik színű pontok halmazából, n adott $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ csúcsa a másik színűekből, és olyan N számú éle van, amelyek csak különböző színű pontokat köthetnek össze. Elképzelhetjük ezt pl. úgy, hogy az összes P_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ pontok pirosak, és az összes Q_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ pontok pedig kék színűek, és feltesszük azt, hogy azonos színű pontokat él nem köthet össze. (Szokás ezeket a páros körüljárású gráfokat páros gráfoknak, kétkromatikus vagy kétszínű gráfoknak is nevezni.)

Véletlen, páros körüljárású gráfot úgy kapunk, ha az összes lehetséges mn él közül véletlenszerűen választunk ki N számú élt, úgy, hogy feltesszük, hogy minden él kiválasztása azonos valószínűségű. Ez a valószínűség tehát az $1\Big/\binom{mn}{N}$ hányadossal egyenlő. Az ilyen típusú véletlen gráfokat $\Gamma_{m,n,N}$-nel fogjuk jelölni. (Lásd a [12], [14] és [15] dolgozatokat.)

A páros körüljárású $G_{m,n,N}$ gráf összefüggő, ha bármely P_i csúcsból bármely Q_j csúcs elérhető egy olyan μ úttal, amely a $G_{m,n,N}$ gráfhoz tartozik.

A [12] dolgozatban a páros körüljárású, véletlen gráfokra megmutattuk, hogy az $m\sim\lambda n$ esetben, ahol $\lambda>1$ állandó, annak a valószínűsége, hogy a $\Gamma_{m,n,N}$ gráf összefüggő legyen az $e^{-e^{-c}}$ határértékhez tart, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(m, n, N_{c,\lambda}) = e^{-e^{-c}}, \tag{3.3}$$

ha a kiválasztott élek száma

$$N_{c,\lambda} = [m\log m + cm], \tag{3.4}$$

és $\mathbf{P}(m, n, N_{c,\lambda})$ jelöli az ilyen, páros körüljárású, véletlen gráf összefüggőségének a valószínűségét.

Abban a speciális esetben, ha $\lambda = 1$, a véletlen, páros körüljárású gráfok összefüggőségének valószínűsége az $e^{-2e^{-c}}$ határértékhez tart, ha $N_c = [n \log n + cn]$ számú élt választunk ki.

E tételek részletes bizonyítását a következő, 4. fejezetben fogjuk tárgyalni, itt most csak áttekintést adunk a tárgykörről, és a továbbiakban az irányított, véletlen gráfok összefüggőségével foglalkozunk.

Az irányított élek és irányított gráfok definícióját már a bevezetésben megadtuk, rátérhetünk tehát az irányított, véletlen gráfok definíciójára.

Irányított véletlen $\vec{\Gamma}_{n,N}$ gráfot úgy kapunk, ha az összes lehetséges n^2 (irányított) él közül választjuk ki azt a N számú élt, amely az n ponthoz illeszkedik úgy, hogy az élek összes lehetséges $\binom{n^2}{N}$ kiválasztásáról feltesszük, hogy egyenlő valószínűségűek. (A definíciónak az a része, hogy n^2 irányított él közül választjuk ki a N számú élt, azt jelenti, hogy most a hurok-éleket, azaz a (P_i, P_i) éleket és a (P_i, P_j) mellett a (P_j, P_i) éleket is megengedjük. Feltesszük továbbá, hogy két csúcsot azonos irányítású, párhuzamos élek nem köthetnek össze.)

Az irányított gráf *összefüggő (gyengén összefüggő)*, ha a gráf minden csúcspárját az irányított élek egy sorozata kapcsolja össze. A közönséges (nem véletlen) irányított gráfok esetére vonatkozó, különböző összefüggőségi fogalmak és azok alkalmazásai megtalálhatók pl. B. ROY [16] vagy L. W. BEINEKE és F. HARARY [17] dolgozatában.

Az összefüggőség itt említett definíciójából könnyen látható, hogy annak a valószínűsége, hogy az irányított, véletlen gráf összefüggő legyen, határértékben megegyezik az ERDŐS P. és RÉNYI A. által adott (3. 2) határértékkel, amely az irányítás nélküli, véletlen gráfok összefüggőségének a valószínűségére vonatkozik. A különbség csupán az, hogy az Erdős—Rényi-féle véletlen gráf valamennyi élét egy-egy tetszőleges irányítással látjuk el. (Eltekintve természetesen attól, hogy mi most a hurok-éleket és az ellentétes irányítású párhuzamos éleket is megengedjük.)

Éppen ezért az irányított, véletlen gráfok esetében az erős összefüggőséggel való foglalkozás látszik az érdekesebb problémának.

Az irányított gráf *erősen összefüggő*, ha a gráf bármely pontjából bármely másik pontjába kölcsönösen el lehet jutni, egy-egy jól irányított úttal. (Tehát oda is vezet út, és visszafelé is van egy irányított út.)

Az ilyen gráfokra igaz a következő tétel:

Ha $\mathbf{P}(n, N_c)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy a $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ irányított, véletlen gráf erősen összefüggő, feltéve, hogy a kiválasztott élek száma

$$N_c = [n \log n + cn], \tag{3. 5}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(n, N_c) = e^{-2e^{-c}}. \tag{3. 6}$$

A bizonyítást az 5. fejezetben fogjuk részletezni.

Összefoglalva az eredményeket látjuk, hogy az irányított, véletlen gráfok erős összefüggőségére vonatkozó valószínűség határértéke ugyanaz, mint a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ piros és a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ kék színű csúcsokkal rendelkező $\Gamma_{n,n,N}$ páros körüljárású véletlen gráfok összefüggőségi valószínűségének a határértéke. (Pontosabban, azoknak a páros körüljárású, véletlen gráfoknak a határértékével egyezik meg, amelyekben aszimptotikusan egyenlő elemszáma van a különböző színű pontok halmazának.) Feltéve, hogy a kiválasztott élek száma is megegyezik és $N_c = [n \log n + cn]$. Ez az eredmény nem túlságosan meglepő, hiszen ismeretes a gráfelméletben az a tény, hogy az irányított, közönséges (nem véletlen) gráfok egyértelműen és kölcsönösen átvihetők az azonos pontszámú, páros körüljárású gráfokba (egyszerűen az irányított gráf csúcsainak a kettévágása vagy megkettőzése által). De ezek az eredmények érdekesek, már csak azért is, mert ez a leképezés nem tartja meg a gráf összefüggőségi tulajdonságát.

4. A páros körüljárású, véletlen gráfok összefüggőségéről

Amint azt már az előző fejezetben is említettük, ERDŐS P. és RÉNYI A. az [5] dolgozatban válaszoltak arra a kérdésre, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a $\Gamma_{n,N}$ véletlen gráf összefüggő legyen. Megmutatták azt, hogy ha az élek száma a (3. 1) alakú, akkor a (3. 2) adja meg annak a valószínűségét, hogy a gráf összefüggő.

Bizonyításuk gondolatmenete a következő:

Nevezzük A típusúaknak azokat a gráfokat, amelyek egy összefüggő részgráfból, és k számú, izolált pontból ($k = 0, 1, \ldots$) állnak, az összefüggő részgráfnak $(n-k)$ csúcsa van. Az összes többi olyan gráfot, melyek nem A típusúak, $\bar{A}$ típusúnak nevezték. Jelölje $\mathbf{P}(\bar{A}, n, N_c)$ annak a valószínűségét, hogy a véletlen gráf $\bar{A}$ típusú.

Megmutatták azt, hogy erre a valószínűségre igaz a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\bar{A}, n, N_c) = 0, \tag{4. 1}$$

feltéve, hogy N_c a (3. 1) alatt megadott alakú. Azaz a véletlen gráfnak 1 valószínűséggel nem lehet egynél több olyan komponense, amely legalább két csúcsot tartalmaz.

Jelöljük most $\mathbf{P}_0^*(n, N_c)$-vel annak a valószínűségét, hogy a Γ_{n,N_c} véletlen gráf nem tartalmaz izolált pontokat, akkor (4. 1)-ből és (3. 2)-ből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{P}_0^*(n, N_c) - \mathbf{P}_0(n, N_c)\right) = 0. \tag{4. 2}$$

Ezek után már csak azt kellett bizonyítani, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_0^*(n, N_c) = e^{-e^{-2c}}, \tag{4. 3}$$

ami már viszonylag nem nehéz, és így a (3. 2) már következik a (4. 2) és a (4. 3) kifejezésekből.

A probléma megoldásánál azért kellett ezt a bonyolult utat választaniok, mert az n csúcsból és a N élből álló összefüggő gráfok számát megadó és könnyen kezelhető, olyan explicit formula nem ismeretes, amelynek segítségével az összefüggő gráfok aszimptotikus tulajdonságai is tanulmányozhatók.

Célunk a továbbiakban a páros körüljárású, véletlen gráfok összefüggésének a valószínűségét meghatározni és ezen valószínűségeknek vizsgáljuk az aszimptotikus tulajdonságait.

Mint már említettük, a páros körüljárású $G_{m,n,N}$ gráf összefüggő, ha bármely P_i elérhető bármely Q_j-ből, egy a $G_{m,n,N}$-ben levő úttal. (Ez a definíció maga után vonja azt a tényt is, hogy bármely két pont elérhető egy úttal.)

A páros körüljárású gráfoknak azzal az esetével fogunk foglalkozni, amikor az $m \sim \lambda n$ (ahol a $\lambda \geqq 1$ állandó). Legyen először $\lambda = 1$, még pontosabban, legyen az $m = n$. Akkor igaz a következő tétel:

4. 1. TÉTEL. *Ha* $\mathbf{P}(n, n, N_c)$ *jelenti annak a valószínűségét, hogy a* Γ_{n,n,N_c} *páros körüljárású, véletlen gráf összefüggő, feltéve, hogy*

$$N_c = [n \log n + cn], \tag{4.4}$$

(ahol a c tetszőleges, rögzített, pozitív, valós szám), akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(n, n, N_c) = e^{-2e^{-c}}. \tag{4.5}$$

Bizonyítás. ERDŐS P. és RÉNYI A. [5] dolgozatának meggondolásaihoz hasonlóan, nevezzük A típusúaknak azokat a páros körüljárású gráfokat, amelyek egy összefüggő komponensből és k ($k = 0, 1, \ldots$) olyan, izolált pontból állnak, amelyek az egyik színű pontok halmazába tartoznak, és l ($l = 0, 1, \ldots$) izolált pontból a másik színből, és amelyekben az összefüggő részgráfnak $n-k$ csúcsa van az egyik színű csúcsokból és $n-l$ csúcsa a másik színűekből. Minden egyéb gráf $\bar{A}$ típusú.

Bizonyítsuk be először is a következő lemmát:

4. 1. LEMMA. *Legyen* $\mathbf{P}(\bar{A}, n, n, N_c)$ *annak a valószínűsége, hogy a* Γ_{n,n,N_c} *véletlen gráf* $\bar{A}$ *típusú. Akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\bar{A}, n, n, N_c) = 0, \tag{4.6}$$

ahol az N_c (4. 4) *alakú. Vagyis, ha az n elég nagy, akkor „majdnem minden"* Γ_{n,n,N_c} *páros körüljárású, véletlen gráf A típusú, feltéve, hogy a* (4. 4) *teljesül.*

A 4. 1. *lemma bizonyítása.* Legyen $U = \log\log n$. Akkor minden olyan Γ_{n,n,N_c} páros körüljárású gráf, amely a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ és a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ csúcsokból és N_c élből áll, a következő két osztály egyikébe tartozik: soroljuk az E_U osztályba azokat a gráfokat, amelyekben a legnagyobb (azaz a legtöbb csúcsot tartalmazó) összefüggő komponens legalább $n-U$ piros és legalább $n-U$ kék pontot tartalmaz. Az összes többi gráfok (vagyis azok a gráfok, amelyekben a legnagyobb, összefüggő részgráf $n-U$-nál kevesebb piros, vagy $n-U$-nál kevesebb kék pontot tartalmaz) az $\bar{E}_U$ osztályba tartozzanak.

Jelentse r és s a legnagyobb összefüggő komponenshez nem tartozó pontok, azaz a legnagyobb összefüggő komponens külső pontjainak számát. Legyen r az olyan, külső pontok száma, amely az egyik színű pontok halmazába tartozik és jelentse s a másik színű külső pontok számát. Becsüljük először a külső pontok számát.

Ha a gráf t komponensből áll, akkor jelöljük az i-edik komponenshez tartozó piros pontok számát a_i-vel, és az i-edikhez tartozó kék pontok számát b_i-vel. Így természetesen teljesülnek a

$$\sum_{i=1}^{t} a_i = \sum_{i=1}^{t} b_i = n,$$

és a

$$\sum_{i=1}^{t} a_i b_i \geqq N_c$$

összefüggések. A számtani és geometriai közepekre vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával

$$\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)^2 \geqq N_c,$$

és így

$$\max_i (a_i+b_i)\left(\sum_{i=1}^{t}(a_i+b_i)\right) \geqq 4N_c,$$

amiből

$$\max_i (a_i+b_i) \geqq \frac{2N_c}{n}.$$

Ilyenformán, ha a legnagyobb összefüggő komponens $n-r$ piros és $n-s$ kék pontból áll, akkor

$$n-r+n-s \geqq \frac{2N_c}{n},$$

ahonnan

$$\max(n-r, n-s) \geqq \frac{N_c}{n},$$

azaz

$$n-\min(r,s) \geqq \frac{N_c}{n},$$

és így

(4.7) $$\min(r,s) \leqq n-\frac{N_c}{n}.$$

Rögzítsük most a legnagyobb összefüggő komponenshez tartozó $n-r$ piros és $n-s$ kék pontok számát; akkor ezeket a pontokat a külső pontokkal $s(n-r)+$ $+r(n-s)$ éllel lehet összekötni, de a (4. 7) miatt ez a komponens és ezek az élek nem tartoznak egy E_U típusú gráfhoz. Pontosabban,a definíció szerint az E_U osztályba tartozó gráfok legnagyobb komponensének mindkét színből legalább $n-\log\log n$ csúcsot kell tartalmaznia, jelen esetben pedig a (4. 7) miatt a kevesebb elemű külső pontok száma legfeljebb $n-\log n$, tehát a legnagyobb komponens csúcsainak száma így legalább $\log n < n-\log\log n$ szükségképpen az ilyen gráfok száma $\geqq$ mint azoké, amelyek az $\bar{E}_U$ osztályba tartoznak. Így, ha $\mathcal{N}(\bar{E}_U, n, n, N_c)$ jelenti azoknak a gráfoknak a számát, amelyek nem tartoznak az E_U osztályba, akkor

(4. 8) $$\mathcal{N}(\bar{E}_U, n, n, N_c) \leqq 2\sum_{U<r<n}\ \sum_{\substack{0\leqq s\leqq n-\frac{N_c}{n}\\ s\leqq r}}\binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n^2-s(n-r)-r(n-s)}{N_c}.$$

Ha pedig $\mathbf{P}(\bar{E}_U, n, n, N_c)$ jelenti annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a G_{n,n,N_c} gráf nem az E_U osztályba tartozik, akkor

(4. 9) $$\mathbf{P}(\bar{E}_U, n, n, N_c) \leqq \frac{\mathcal{N}(\bar{E}_U, n, n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}}.$$

Ahonnan (az $1-x \leqq e^{-x}$ egyenlőtlenség felhasználásával) azt kapjuk, hogy

$$\frac{\binom{n}{r}\binom{n}{s}\binom{n^2-s(n-r)-r(n-s)}{N_c}}{\binom{n^2}{N_c}} \sim \tag{4.10}$$

$$\sim \frac{n^r}{r!}\frac{n^s}{s!} e^{N_c \log\left[1-\left(\frac{s}{n}+\frac{r}{n}-\frac{2rs}{n^2}\right)\right]} \leqq \frac{n^{r+s}}{r!s!} e^{-N_c\left(\frac{r}{n}+\frac{s}{n}\right)+N_c\frac{2rs}{n^2}+2}.$$

A (4. 4) feltétel felhasználásával, a (4. 9) és a (4. 10) összefüggésekből következik, hogy ez a valószínűség

$$\mathbf{P}(\bar{E}_U, n, n, N_c) \leqq 2 \sum_{U<r<n} \sum_{0\leqq s\leqq n-\frac{N_c}{n}} a_{rs}, \tag{4.11}$$

ahol

$$a_{rs} = \binom{n}{r}\binom{n}{s}\frac{\binom{n^2-s(n-r)-r(n-s)}{N_c}}{\binom{n^2}{N_c}} \leqq \frac{e^{\frac{2rs}{n}(\log n+c)-cr-cs+2}}{r!s!}. \tag{4.12}$$

A (4. 11) összeg becslésénél a következő 3 esetet különböztetjük meg:

1. Eset. Írjuk a (4. 12) kifejezést a következő alakba:

$$a_{rs} \leqq \frac{e^{(2-c)r+(2-c)s+2}}{r!s!} e^{\frac{2rs}{n}(\log n+c)-2r-2s}. \tag{4.13}$$

Vegyük először azokat a tagokat, ahol az r és s értékeire igaz a következő

$$\frac{rs}{n}(\log n+c) \leqq r+s,$$

azaz

$$\frac{\log n+c}{n} \leqq \frac{1}{r}+\frac{1}{s}. \tag{4.14}$$

A (4. 14) pedig feltétlenül teljesül, ha

$$s \leqq \frac{n}{\log n+c}. \tag{4.15}$$

Akkor mondjuk azt, hogy az első eset forog fenn, ha az s eleget tesz a (4. 15) egyenlőtlenségnek. Így az

$$a_{rs} \leqq \frac{e^{(2-c)r+(2-c)s+2}}{r!s!} \tag{4.16}$$

egyenlőtlenség igaz lesz, ha a (4. 15) teljesül, vagy más szavakkal, ha az 1. eset áll fenn.

2. Eset. Tekintsük most a (4. 11) összeg tagjait abban az esetben, ha az s nagyobb, mint a (4. 15) jobb oldala, de igaz az, hogy

$$r+s \leqq n. \tag{4.17}$$

Alkalmazzuk a *Stirling*-formulát, s akkor elég nagy n esetén ezek a tagok kisebbek lesznek a következő kifejezésnél:

$$\exp\left\{\frac{2rs}{n}(\log n+c)+(1-c)(r+s)-r\log r-s\log s\right\}. \tag{4. 18}$$

Felhasználva még a következő egyenlőtlenséget:

$$2rs \leqq \frac{(r+s)^2}{2},$$

nyerjük, hogy a (4. 18) formula zárójelben levő kifejezése kisebb lesz, mint

$$\frac{(r+s)^2}{2n}(\log n+c)+(1-c)+(r+s)-(r\log r+s\log s). \tag{4. 19}$$

Mivel az $x\log x$ konvex függvény, a *Jensen*-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$-(r\log r+s\log s) \leqq -(r+s)\log\frac{r+s}{2}.$$

Tehát a (4. 19) kisebb lesz, mint $\varphi(x)+x\log 2$, ahol a

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2n}(\log n+c)+(1-c)x-x\log x,$$

és az

$$x = r+s.$$

Mivel a (4. 17) szerint $\frac{2n}{\log n+c}<x\leqq n$; a $\varphi(x)$ deriváltja:

$$\varphi'(x) = \frac{x}{n}(\log n+c)-(\log x+c) < 0, \quad \text{ha az} \quad e^{1-c} < x \leqq n,$$

mert az $\frac{x}{c+\log x}$ növekvő függvénye az x-nek, ha az

$$e^{1-c} < x < n.$$

Következik tehát, hogy

$$\varphi(x) \leqq \varphi\left(\frac{2n}{\log n+c}\right) \leqq -2n+\frac{Kn\log\log n}{\log n}, \tag{4. 20}$$

ahol a $K>0$ állandó. Így tehát a (4. 11) jobb oldalán levő azon tagok összege, amelyekre a (4. 17) egyenlőtlenség igaz, nem haladja meg az n^2e^{-n} értéket, vagyis ez az összeg $n\to\infty$ esetén a 0-hoz fog tartani.

3. Eset. Legyen $r' = n-s$, és $s' = n-r$. Vegyük figyelembe, hogy a szimmetria miatt $a_{rs}=a_{r's'}$; így azon a_{rs} tagok becslése, amelyekre nézve az $r'+s'<n$, és mivel az $r+s>n$ egyenlőtlenségből következik, hogy $r'+s'<n$, továbbá az $s\leqq n-\frac{N_c}{n}$ összefüggésből kapjuk, hogy $r'\geqq\frac{N_c}{n}>U = \log\log n$, ha n elég nagy.

Ily módon a (4. 11) valószínűségre igaz, hogy:

$$\mathbf{P}(\bar{E}_U, n, n, N_c) \leqq 2 \sum_{U<r<n} \sum_{\substack{0 \leqq s \leqq n - \frac{N_c}{n} \\ r \geqq s}} a_{rs} \leqq$$

$$\leqq 4e^2 \left(\sum_{0<r\leqq n-\frac{N_c}{n}} \frac{e^{(2-c)r}}{r\,!} \right) \left(\sum_{U<s<n} \frac{e^{(2-c)s}}{s!} \right) + o(1) \leqq \tag{4.21}$$

$$\leqq 4e^{2+e^{2-c}} \left(\sum_{U<s} \frac{e^{(2-c)s}}{s!} \right) + o(1).$$

Ha az $U \to \infty$, és ez teljesül, mert az U-t úgy választottuk meg, hogy $U = \log\log n$ legyen, következik, hogy a keresett valószínűség határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\bar{E}_{\log\log n}, n, n, N_c) = 0. \tag{4.22}$$

Most már csak azt kell bizonyítani, hogy 0-hoz tart annak a valószínűsége, hogy a véletlen gráf ne legyen A típusú, de ugyanakkor beletartozzék az $E_{\log\log n}$ osztályba. (Azaz a gráf legnagyobb komponensének legalább $n - \log\log n$ csúcsa legyen és még legalább egy élt tartalmazó további komponenssel is rendelkezzék.)

Mivel az ilyen gráfban a legnagyobb komponensnek $n-r$ piros és $n-s$ kék pontja van, ezért, ha most $q \geqq 1$ jelenti azoknak az éleknek a számát, amelyek nem tartoznak a legnagyobb összefüggő komponensekhez (hanem annak az r, ill. s számú külső pontját kötik össze), az összes lehetséges rs külső él közül, $\binom{rs}{q}$-féleképpen választható ki q él. A megmaradó $N_c - q$ belső élt pedig az $(n-r)(n-s)$ lehetőségek közül választhatjuk ki, a keresett valószínűség tehát:

$$\mathbf{P}(\bar{A}E_{\log\log n}, n, n, N_c) \leqq \sum_{r=1}^{U} \sum_{s=1}^{U} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \sum_{q=1}^{rs} \binom{rs}{q} \frac{\binom{(n-r)(n-s)}{N_c - q}}{\binom{n^2}{N_c}}. \tag{4.23}$$

Felhasználva a következőket:

$$\binom{n}{r}\binom{n}{s} < \frac{n^{r+s}}{r!s!}; \quad \sum_{q=1}^{rs} \binom{rs}{q} = 2^{rs} - 1 < 2^{rs},$$

és

$$\frac{\binom{(n-r)(n-s)}{N_c - q}}{\binom{n^2}{N_c}} = \frac{N_c!}{(N_c - q)!} \frac{1}{mn(mn-1)\ldots(mn-q+1)} \prod_{j=1}^{N_c - q} \frac{(m-r)(n-s)-j+1}{mn-q-j+1} \sim$$

$$\sim \left(\frac{N_c}{mn} \right)^q \left(\frac{(m-r)(n-s)}{mn-q} \right)^{N_c - q},$$

továbbá mivel $mn \sim n^2$, és a (4. 4) szerint

$$\left(\frac{N_c}{n^2}\right)^q \sim \left(\frac{\log n}{n}\right)^q \tag{4.24}$$

következik, hogy

$$\mathbf{P}(\bar{A}E_{\log\log n}, n, n, N_c) \leqq \frac{\log n}{n} \sum_{r=1}^{U} \sum_{s=1}^{U} \frac{2^{rs} e^{-(r+s)c}}{r!\,s!} = O\left(\frac{2^{(\log\log n)^2} \log n}{n}\right) = o(1). \tag{4.25}$$

A bizonyításnál felhasználtuk az $\bar{A}E_U$ típusú gráfoknak azt a fontos tulajdonságát, hogy $r \geqq 1, s \geqq 1$ és $q \geqq 1$.

A (4. 22) teljesül és ezzel a 4. 1 lemma bizonyítását befejeztük.

A 4. 1. *tétel bizonyítása.* Az izolált pontokkal nem rendelkező, páros körüljárású, véletlen gráfok számát jelöljük $\mathcal{N}'(n, n, N_c)$-vel, akkor ez a szám a szitálási módszer szerint, nyilván

$$\mathcal{N}'(n, n, N_c) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{k+l} \binom{n}{k} \binom{n}{l} \binom{(n-k)(n-l)}{N_c}. \tag{4.26}$$

Ebből a $k+l=h$ helyettesítéssel következik, hogy

$$\mathcal{N}'(n, n, N_c) = \sum_{h=0}^{2n} (-l)^h \mathcal{A}_h, \tag{4.27}$$

ahol is az

$$\mathcal{A}_h = \sum_{k=0}^{h} \binom{n}{k} \binom{n}{h-k} \binom{n(n-h)+k(h-k)}{N_c}.$$

Tekintsük az

$$\frac{\mathcal{A}_h}{\binom{n^2}{N_c}} \sim \frac{n^k}{k!} \frac{n^{(h-k)}}{(h-k)!} e^{-N_c \frac{h}{n}}; \quad \frac{N_c}{n^2} \to 0$$

aszimptotikus formulát. Felhasználva azt, hogy $N_c = n \log n + cn$ következik, hogy

$$\frac{\mathcal{A}_h}{\binom{n^2}{N_c}} \sim \frac{n^h}{k!(h-k)!} e^{-h \log n + ch}.$$

Nyilvánvaló tehát, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}_h}{\binom{n^2}{N_c}} = \sum_{k=0}^{h} \frac{e^{-ch}}{k!(h-k)!}$$

határérték létezik; de a (4. 26) jobb oldalán álló tagok függnek az n-től is, ezért a határátmenet nem végezhető el tagonként. Ez a nehézség a következő módon oldható fel: Ismeretes az (lásd pl. a [18] dolgozatban, vagy [21]-ben), hogy tetszőleges $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eseményekre igaz az, hogy

$$\mathbf{P}(\bar{B}_1 \bar{B}_2 \ldots \bar{B}_n) \leqq \sum_{k=0}^{2H} (-1)^k S_k, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq 2H \leqq n$$

és

$$\mathbf{P}(\bar{B}_1\bar{B}_2\ldots\bar{B}_n) \geqq \sum_{k=0}^{2H+1}(-1)^k S_k; \quad \text{ha} \quad 1 \leqq 2H+1 \leqq n,$$

ahol az $S_0=1$, és

$$S_k = \sum_{1\leqq i_1<\ldots<i_k\leqq n} \mathbf{P}(B_{i_1}B_{i_2}\ldots B_{i_k}), \qquad k=1,2,\ldots,n,$$

az összegezés pedig az $1, 2, \ldots, n$ számok közül kiválasztható összes $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ k-adrendű kombinációkra terjesztendő ki. Így azt nyerjük, hogy

$$\sum_{h=0}^{2H+1}(-1)^h \mathscr{A}_h \leqq \mathscr{N}'(n,n,N_c) \leqq \sum_{h=0}^{2H}(-1)^h \mathscr{A}_h. \tag{4.28}$$

Figyelembe véve, hogy h-nak bármely rögzített értékére

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathscr{A}_h}{\binom{n^2}{N_c}} = \sum_{k=0}^{h}\frac{e^{-ch}}{k!(h-k)!},$$

azt nyerjük, hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mathscr{N}'(n,n,N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} \leqq \sum_{h=0}^{2H}(-1)^h\sum_{k=0}^{h}\frac{e^{-ch}}{k!(h-k)!},$$

és

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\mathscr{N}'(n,n,N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} \geqq \sum_{h=0}^{2H+1}(-1)^h\sum_{k=0}^{h}\frac{e^{-ch}}{k!(h-k)!}.$$

Mivel a H tetszőlegesen nagy számnak választható, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathscr{N}'(n,n,N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} \leqq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-ch}}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{e^{-cl}}{l!} = e^{-2e^{-c}}. \tag{4.29}$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy ha $\mathscr{N}(n, n, N_c)$ jelenti az összefüggő gráfok számát, akkor

$$0 \leqq \frac{\mathscr{N}'(n,n,N_c)-\mathscr{N}(n,n,N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} \leqq \mathbf{P}(\bar{A},n,n,N_c). \tag{4.30}$$

Alkalmazzuk most a 4. 1 lemmát és a 4. 1. tétel állítása azonnal következik.

Tegyük fel ezután, hogy $\lambda \neq 1$. Akkor a következő tétel igaz:

4. 2. TÉTEL. *Jelölje $\mathbf{P}(m, n, N_{c,\lambda})$ annak a valószínűségét, hogy a $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ páros körüljárású, véletlen gráf összefüggő; tegyük fel még, hogy $m \sim \lambda n$ és*

$$N_{c,\lambda} = [m\log m + cm], \tag{4.31}$$

(ahol $\lambda > 1$ és $c > 0$ konstansok), akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(m, n, N_{c,\lambda}) = e^{-e^{-c}}. \tag{4.32}$$

Bizonyítás. Ebben az esetben B típusúaknak fogjuk nevezni azokat a gráfokat, amelyekben a legnagyobb összefüggő komponensnek $m-k$ piros és n kék csúcsa van (vagyis az összes kék pontok egy komponenshez tartoznak) és a gráf k számú, piros színű izolált pontot tartalmaz ($k=0, 1, \ldots$). Minden olyan $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ gráfot pedig, amely nem B típusú, $\bar{B}$ típusúnak fogunk nevezni. Bebizonyítjuk, hogy igaz a következő lemma:

4. 2. LEMMA. *Jelölje* $\mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda})$ *annak a valószínűségét, hogy a* $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ *páros körüljárású, véletlen gráf* $\bar{B}$ *típusú, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}) = 0. \tag{4.33}$$

Elég nagy n esetén tehát „majdnem minden" $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ gráf B típusú lesz, feltéve, hogy $N_{c,\lambda}$ a (4. 31) alakú.

A 4. 2. *lemma bizonyítása.* A 4. 1. lemma bizonyításához teljesen hasonlóan történik a 4. 2. lemma bizonyítása, ezért itt vázlatosan csak a fontosabb lépéseket ismertetjük.

A $\bar{B}$ típusú m piros és n kék pontból és $N_{c,\lambda}$ élből álló, páros körüljárású gráfok számát jelölje $\mathcal{N}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda})$. Akkor nyilván az

$$\mathcal{N}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}) \leqq \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=1}^{n-1} \binom{m}{r}\binom{n}{s}\binom{mn-s(m-r)-r(n-s)}{N_{c,\lambda}}. \tag{4.34}$$

Annak valószínűsége pedig, hogy a $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ gráf $\bar{B}$ típusú, a következőkkel lesz egyenlő:

$$\mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}) = \frac{\mathcal{N}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda})}{\binom{mn}{N_{c,\lambda}}}, \tag{4.35}$$

így tehát ez a valószínűség

$$\mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}) \leqq \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=1}^{n-1} b_{rs}, \tag{4.36}$$

ahol is

$$b_{rs} = \binom{m}{r}\binom{n}{s} \frac{\binom{mn-s(m-r)-r(n-s)}{N_{c,\lambda}}}{\binom{mn}{N_{c,\lambda}}} \leqq \frac{m^r n^s}{r!\,s!} e^{-\left(\frac{r}{m}+\frac{s}{n}-\frac{2rs}{mn}\right) N_{c,\lambda}}. \tag{4.37}$$

Jelentse most E_1 azon (r, s) párok halmazát, amelyekre

$$0 \leqq r \leqq \alpha m, \qquad 1 \leqq s \leqq n-1, \tag{4.38}$$

ahol

$$0 < \alpha < \frac{\lambda - 1 - \delta}{2\lambda} \qquad (0 < \delta < \lambda - 1; \quad \lambda > 1). \tag{4.39}$$

Könnyen belátható, hogy

$$\sum_{(r,s)\in E_1} b_{rs} = O\left(\frac{1}{n^\delta}\right). \tag{4. 40}$$

Jelölje most E_2 azon (r, s) párok halmazát, amelyekre

$$\alpha m < r < m, \quad 1 \leqq s \leqq \frac{n}{2}. \tag{4. 41}$$

Ezekre a tagokra azt kapjuk, hogy

$$\sum_{(r,s)\in E_2} b_{rs} = O\left(\frac{1}{n^{\lambda-1}}\right). \tag{4. 42}$$

Végezetül, ha E_3-mal jelöljük azoknak az (r, s) pároknak a halmazát, amelyekre

$$0 \leqq r \leqq m, \quad \frac{n}{2} < s < n-1, \tag{4. 43}$$

akkor figyelembe véve, hogy

$$b_{rs} = b_{m-r,\, n-s}, \tag{4. 44}$$

a következőket nyerjük:

$$\sum_{(r,s)\in E_3} b_{rs} \leqq \sum_{(r,s)\in E_1} b_{rs} + \sum_{(r,s)\in E_2} b_{rs}. \tag{4. 45}$$

Egyszerűen igazolható a (4. 36), (4. 40) és a (4. 45) felhasználásával, hogy a (4. 33) igaz.

S ezzel a 4. 2. lemmát bebizonyítottuk.

A 4. 2. tétel bizonyítása. Ebben az esetben jelentse $\mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda})$ azoknak a páros körüljárású, véletlen gráfoknak a számát, amelyek nem tartalmaznak izolált piros pontokat. Ennélfogva

$$\mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda}) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{(m-k)n}{N_{c,\lambda}}. \tag{4. 46}$$

Mivel a fenti sor alternáló, és tagjai abszolút értékben monoton csökkennek, ezért az $\mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda})$ értéke a (4. 46) jobb oldalán álló összeg két egymás után következő részletösszege közé esik. Minthogy pedig

$$\binom{m}{k} \frac{\binom{(m-k)n}{N_{c,\lambda}}}{\binom{mn}{N_{c,\lambda}}} \sim \frac{m^k}{k!}\left(1-\frac{k}{m}\right)^{N_{c,\lambda}}, \tag{4. 47}$$

tehát a keresett valószínűség határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda})}{\binom{mn}{N_{c,\lambda}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-ck}}{k!} = e^{-e^{-c}}. \tag{4. 48}$$

A 4. 2. tétel ezután már a 4. 2. lemmából és a

$$(4.49) \qquad \frac{\mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda}) - \mathcal{N}(m, n, N_{c,\lambda})}{\binom{mn}{N_{c,\lambda}}} \leqq \mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}),$$

egyenlőtlenségből folyik, ahol is az $\mathcal{N}(m, n, N_{c,\lambda})$ az összefüggő, páros körüljárású gráfok számát jelenti.

5. Az irányított, véletlen gráfok erős összefüggéséről

Az előző, 4. fejezetben a páros körüljárású, véletlen gráfok összefüggésének a kérdéseit vizsgáltuk és megmutattuk, hogy az $m \sim \lambda n$ esetben (ahol m az egyik színű pontok halmazába tartozó csúcsok számát jelenti, és n a másik színű csúcsokét, és λ tetszőleges, pozitív állandó) annak a valószínűsége, hogy a $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ véletlen gráf összefüggő, az $e^{-e^{-c}}$ határértékhez tart, ha $n \to \infty$, feltéve, hogy a kiválasztott élek száma: $N_{c,\lambda} = [m \log m + cm]$. (Természetesen λ lehet 1-nél kisebb pozitív szám is. A 4. 2. tétel ez esetben is igaz, feltéve, hogy a (4. 31) helyett az $N_c = [n \log n + cn]$ kifejezést írjuk, ugyanis ez esetben az $n > m$.) Ha a $\lambda = 1$, akkor $e^{-2e^{-c}}$ lesz a határértéke annak a valószínűségnek, hogy a páros körüljárású, véletlen gráf összefüggő, feltéve, hogy $N_c = [n \log n + cn]$ számú élt választottunk ki.

Ebben a fejezetben az irányított, véletlen gráfok összefüggőségével foglalkozunk.

Jelen esetben tehát az n adott pontot összekötő, összes lehetséges n^2 (irányított) él közül választunk ki N különböző élt úgy, hogy feltesszük, hogy az $\binom{n^2}{N}$ lehetséges kiválasztás közül bármelyik azonos valószínűségű. Ez esetben azért lehetséges n^2 él közül választani, mert egyrészt megengedjük a hurok-éleket, másrészt bármely két csúcsot két ellentétes irányítású él is összeköthet. Feltesszük továbbá, hogy két ponthoz nem illeszkedhet azonos irányítású, párhuzamos él.

Az irányított gráfot akkor nevezzük erősen összefüggőnek, ha a gráf pontjainak minden rendezett (P_h, P_i) párjához tartozik egy, a P_h-ból a P_i-be vezető, irányított út. Egy a P_h-ból a P_i-be vezető irányított út alatt az éleknek egy olyan jól rendezett sorozatát értjük, amelyben bármely él végpontja azonos a rákövetkező él kezdőpontjával (feltéve, hogy egy csúcs legfeljebb csak két élhez tartozhat) úgy, hogy az első él kezdőpontja a P_h és az utolsó él végpontja a P_i csúcs.

Az ilyen gráfokra nézve a következőket fogjuk bizonyítani.

5. 1. TÉTEL. *Ha* $\mathbf{P}(n, N_c)$ *jelenti annak a valószínűségét, hogy a* $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ *irányított, véletlen gráf erősen összefüggő, feltéve, hogy az élek száma:*

$$(5.1) \qquad N_c = [n \log n + cn],$$

akkor ennek a valószínűségnek a határértéke a következő:

$$(5.2) \qquad \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(n, N_c) = e^{-2e^{-c}}.$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz az irányított gráfokat a következő módon fogjuk osztályozni:

Soroljuk az A típusba azokat az irányított, véletlen gráfokat, amelyek egy erősen összefüggő részgráfból és a következő fajta izolált pontokból állnak: k_1 olyan félig izolált pontból ($k_1=0, 1, \ldots$), amelyekbe vezethetnek bemenő élek, de nincs belőlük kifelé irányuló él (*nyelő*knek, pontosabban nem forrásoknak is lehet ezeket hívni), jelölje K^- az ilyen pontok halmazát; és k_2 olyan, félig izolált pontból ($k_2=0, 1, \ldots$), melyekhez csak kimenő élek illeszkedhetnek, de nincsenek befutó éleik (nevezhetnénk *forrás*oknak, pontosabban nem nyelőknek is), jelölje K^+ az ilyen pontok halmazát. (Természetesen lehetnek a gráfnak teljesen izolált pontjai is, vagyis olyan pontok, amelyek se nem nyelők, se nem források, azaz nincsenek se kifelé, se befelé irányuló éleik, és így a K^+ és K^- halmazok közös részéhez, a $K^+\cap K^-$ halmazhoz tartoznak.) Az összes többi gráfokat pedig az $\bar{A}$ típusba tartozóknak fogjuk nevezni.

Ezek után bebizonyítjuk a következőket:

5. 1. LEMMA: *Jelölje* $\mathbf{P}(\bar{A}, n, n, N_c)$ *annak a valószínűségét, hogy a* $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ *irányított, véletlen gráf az* $\bar{A}$ *típusba tartozzék. Akkor ennek a valószínűségnek a határértéke*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\bar{A}, n, N_c) = 0. \tag{5. 3}$$

Vagyis, elég nagy n esetén „majdnem minden” $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ *irányított, véletlen gráf* A *típusú lesz, feltéve, hogy* N_c *az* (5. 1) *alakú.*

Az 5. 1. lemma bizonyításához bebizonyítunk egy másik lemmát.

5. 2. LEMMA. *A* $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ *irányított, véletlen gráf „majdnem biztosan” tartalmaz egy* $[\log\log n]$ *nagyságrendű, irányított kört, ha a kiválasztott élek száma* $N_c= [n\log n+cn]$; *más szavakkal,* $n\to\infty$ *esetén* 1*-hez tart annak a valószínűsége, hogy a* $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ *gráf egy* $[\log\log n]$ *hosszúságú jól irányított kört tartalmazzon.*

5. 2. *Lemma bizonyítása.* Legyen $\varkappa=(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ olyan szám l-es, ahol az l különböző $(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ számot az $1, 2, \ldots, n$ szám közül, tetszőlegesen választottuk ki. Nem teszünk különbséget ezen $(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ szám l-esek és ciklikus permutációik, vagyis az $(i_2, \ldots, i_l, i_1), \ldots, (i_l, i_1, \ldots, i_{l-1})$ között. Az összes lehetséges ilyen $\varkappa$ szám l-esek halmazát jelöljük I_l-lel.

Legyen

$$\varepsilon_\varkappa = \begin{cases} 1, & \text{ha a } P_{i_1}\to P_{i_2}\to \ldots \to P_{i_l}\to P_{i_1} \text{ irányitott kör a } \vec{\Gamma}_{n,N_c} \text{ irányitott,} \\ & \text{véletlen gráfhoz tartozik,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{5. 4}$$

(A továbbiakban a $\varkappa$-hoz tartozó köröket is $\varkappa$-val fogjuk jelölni.)

Az $\varepsilon_\varkappa$ várható értéke, feltéve, hogy $l\leqq\sqrt[3]{n}$,

$$\mathbf{M}(\varepsilon_\varkappa) = \frac{\binom{n^2-l}{N-l}}{\binom{n^2}{N}} = \frac{N(N-1)\ldots(N-l+1)}{n^2(n^2-1)\ldots(n^2-l+1)} = \left(\frac{N}{n^2}\right)^l \left[1+O\left(\frac{l^2}{n\log n}\right)\right], \tag{5. 5}$$

feltéve, hogy $N=n(\log n+c)$. Legyen továbbá $\varepsilon=\sum_{\varkappa\in I_l}\varepsilon_\varkappa$, ahol ε nyilván a Γ_{n,N_c} irányított, véletlen gráfban levő összes l-ed rendű körök számát jelenti. Minthogy az I_l-hez tartozó elemeknek (azaz az összes lehetséges l hosszúságú, irányított köröknek) a száma $\binom{n}{l}(l-1)!$, ezért

$$\mathbf{M}(\varepsilon)=\binom{n}{l}(l-1)!\,\mathbf{M}(\varepsilon_\varkappa)=\frac{1}{l}\left(\frac{N}{n}\right)^l\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right], \tag{5.6}$$

ha $l\leqq\sqrt[3]{n}$.

Mivel N-et úgy választottuk, hogy $N\sim\log n$ legyen, ezért az $\mathbf{M}(\varepsilon)$ tart a $+\infty$-hez, méghozzá ugyanolyan nagyságrendben, mint $\frac{(\log n)^l}{l}$. Ennélfogva a „nagy körök" várható száma igen nagy szám. Nekünk azonban többre van szükségünk. Azt kell megmutatnunk ui., hogy „majdnem biztosan", azaz elég nagy n esetén, 1-hez tetszőlegesen közeli valószínűséggel, van egy nagy kör a $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ véletlen gráfban. Ennek bizonyításához elég megmutatni, hogy $n\to\infty$ esetén az ε relatív szórása a 0-hoz tart. Mert, ha igazoltuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{D}^2(\varepsilon)}{\mathbf{M}^2(\varepsilon)}=0,$$

akkor felhasználva a

$$\mathbf{P}(\varepsilon=0)<\mathbf{P}\left(\varepsilon<\frac{\mathbf{M}(\varepsilon)}{2}\right)<\mathbf{P}\left(|\varepsilon-\mathbf{M}(\varepsilon)|\geqq\frac{\mathbf{M}(\varepsilon)}{2}\right)$$

összefüggést, a *Csebisev*-egyenlőtlenség alkalmazásával az adódik, hogy

$$\mathbf{P}\left(|\varepsilon-\mathbf{M}(\varepsilon)|\geqq\frac{\mathbf{M}(\varepsilon)}{2\mathbf{D}(\varepsilon)}\mathbf{D}(\varepsilon)\right)\leqq\frac{4\,\mathbf{D}^2(\varepsilon)}{\mathbf{M}^2(\varepsilon)},$$

vagy ami ugyanaz

$$\mathbf{P}\left(|\varepsilon-\mathbf{M}(\varepsilon)|<\frac{\mathbf{M}(\varepsilon)}{2}\right)>1-\frac{4\,\mathbf{D}^2(\varepsilon)}{\mathbf{M}^2(\varepsilon)}.$$

E két utóbbi egyenlőtlenség pedig a sztochasztikus konvergencia definíciójának speciális esete.

Mutassuk meg ezek után, hogy az ε relatív szórása valóban a 0-hoz tart.

Az ε szórásnégyzete a következő módon írható fel:

$$\mathbf{D}^2(\varepsilon)=\mathbf{M}(\varepsilon^2)-\mathbf{M}^2(\varepsilon)=$$

$$=\sum_{\substack{\varkappa\in I_l\\ \varkappa\neq\varkappa'}}\sum_{\varkappa'\in I_l}(\mathbf{M}(\varepsilon_\varkappa\varepsilon_{\varkappa'})-\mathbf{M}(\varepsilon_\varkappa)\mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa'}))+\sum_{\varkappa\in I_l}(\mathbf{M}(\varepsilon_\varkappa)-\mathbf{M}^2(\varepsilon_\varkappa)). \tag{5.7}$$

Ha a $\varkappa$ és $\varkappa'$ sorozatoknak nincs két olyan közös, szomszédos elempárja, amelyeknek még az előfordulási sorrendje is megegyezik, sem közös eleme (más szóval, ha a

$\varkappa$ és $\varkappa'$ irányított köröknek se közös élük, se közös pontjuk nincs), akkor

$$(5.8)\qquad \mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa'}) = \frac{\binom{n^2-2l}{N-2l}}{\binom{n^2}{N}} \leqq \left[\frac{\binom{n^2-l}{N-l}}{\binom{n^2}{N}}\right]^2 = M(\varepsilon_{\varkappa})\,M(\varepsilon_{\varkappa'}).$$

(Az (5. 8) egyenlőtlenség helyessége a következő, igen egyszerű módon látható be. Írjuk az (5. 8)-at a következő alakba

$$\binom{n^2-2l}{N-2l}\binom{n^2}{N} \leqq \left[\binom{n^2-l}{N-l}\right]^2,$$

ahonnan

$$\frac{(n^2-2l)!}{(N-2l)!\,(n^2-N)!}\,\frac{n^2!}{(n^2-N)!\,N!} \leqq \frac{[(n^2-l)!]^2}{[(N-l)!]^2\,[(n^2-N)!]^2}.$$

A faktoriálisokat részletesen felírva és a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve:

$$\frac{(n^2-l+1)\dots n^2}{(n^2-2l+1)\dots(n^2-l)} \leqq \frac{(N-l+1)\dots N}{(N-2l+1)\dots(N-l)},$$

vagy ami ugyanaz:

$$\prod_{k=1}^{l}(n^2-l+k)(N-2l+k) \leqq \prod_{k=1}^{l}(n^2-2l+k)(N-l+k).$$

Ez az egyenlőtlenség pedig tényezőnként igazolható, mert az

$$(n^2-l+k)(N-2l+k) \leqq (n^2-2l+k)(N-l+k)$$

egyenlőtlenség az $ln^2 \geqq lN$ helyes egyenlőtlenségre redukálódik. Tehát az (5. 8) fennáll.)

Visszatérve most az ε szórásának a becslésére, az (5. 8) szerint a diszjunkt $\varkappa$ és $\varkappa'$ sorozat-párokra

$$\mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa'}) - \mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa})\,\mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa'}) \leqq 0.$$

Így ha most $\varkappa\varkappa'$ jelenti a $\varkappa$ és $\varkappa'$ pontsorozatokkal megadott körök közös éleinek a számát, akkor

$$\mathbf{D}^2(\varepsilon) \leqq \mathbf{M}(\varepsilon) + \sum_{\varkappa}\sum_{\varkappa'\varkappa \neq 0}\big(\mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa'}) - \mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa})\,\mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa'})\big).$$

Míg a $\varkappa\varkappa' = r$ esetben a várható érték

$$(5.9)\qquad \mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa}\varepsilon_{\varkappa'}) = \frac{\binom{n^2-2l+r}{N-2l+r}}{\binom{n^2}{N}} \sim \frac{N^{2l-r}}{n^{4l-2r}}.$$

Jelölje $H(r)$ azoknak a $\varkappa$ és $\varkappa'$ pároknak a számát, amelyekre a $\varkappa\varkappa' = r$, akkor a szórásnégyzet

$$\mathbf{D}^2(\varepsilon) \leqq \mathbf{M}(\varepsilon) + \sum_{r=1}^{l-2} \left\{ \frac{\binom{n^2-2l+r}{N-2l+r}}{\binom{n^2}{N}} - \left[\frac{\binom{n^2-l}{N-l}}{\binom{n^2}{N}} \right]^2 \right\} H(r). \tag{5.10}$$

Ha most s a $\varkappa$ és $\varkappa'$ körök közös pontjainak a számát jelenti (ahol $r+1 \leqq s \leqq l$, mivel r a közös élek számát jelöli), akkor a $H(r)$ értéke nem haladja meg a következőket:

$$H(r) \leqq (l!)^2 \sum_{s \geqq r+1} \binom{n}{l} \binom{l}{s} \binom{n-l}{l-s} = O[(l!)^2 n^{2l-r-1}], \tag{5.11}$$

és ezért a

$$\mathbf{D}^2(\varepsilon) = \mathbf{M}(\varepsilon) + O\left[\frac{(l!)^2}{n} \binom{N}{n}^{2l} \sum_{r=1}^{l-2} \left(\frac{n}{N} \right)^r \right]. \tag{5.12}$$

Ahonnan már könnyen látható, hogy az $l = [\log\log n]$ esetben

$$\frac{\mathbf{D}^2(\varepsilon)}{\mathbf{M}^2(\varepsilon)} = \frac{1}{M(\varepsilon)} + o(1).$$

Ehelyett írhatjuk a következőt:

$$\frac{\mathbf{D}^2(\varepsilon)}{\mathbf{M}^2(\varepsilon)} \to 0,$$

amit bizonyítani akartunk. Ebből már következik, hogy ha az élek száma $N = n(\log n + c)$, akkor az irányított, véletlen gráf 1-hez közeli valószínűséggel tartalmaz egy $[\log\log n]$ nagyságrendű, irányított kört, és ezzel az 5. 2. lemmát bebizonyítottuk.

Az 5. 1. *lemma bizonyítása.* Legyen $M = [\log\log n]$. A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontokból és az N_c élből képezhető összes irányított gráfok közül mindazokat nevezzük az E_M részhalmaz elemeinek, amelyekben a legnagyobb erősen összefüggő részgráfnak legalább $n - M$ pontja van, és az E_M kiegészítő halmazát jelentse $\bar{E}_M$. (Azaz az $\bar{E}_M$ azoknak a gráfoknak a halmaza, amelyekben a legnagyobb erősen összefüggő részgráfnak nincs több mint M külső pontja.)

Másrészt az 5. 2. lemmából következik, hogy a $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ irányított, véletlen gráf legnagyobb erősen összefüggő részgráfja legalább $[\log\log n]$ vagy ennél több csúcsot tartalmaz. Ennek a megállapításnak a helyessége nyilvánvaló, hiszen egy irányított kör is erősen összefüggő részgráf.

Jelöljük most L-lel a legnagyobb erősen összefüggő részgráf pontjainak a számát, S_1-gyel azon külső pontok halmazát, amelyekből nem vezet él a legnagyobb erősen összefüggő részgráfba, és s_1 jelentse az S_1 elemeinek a számát. Jelentse továbbá S_2 azon külső csúcsok halmazát, amelyek nem tartoznak az S_1 halmazba, és amelyekbe nem vezet él a legnagyobb erősen összefüggő részgráfból. Legyen s_2 az S_2 halmaz elemeinek a száma.

Az 5. 2. lemma alapján feltehetjük, hogy

$$L \geqq l \geqq [\log\log n],$$

amiből az

$$n-L = s_1+s_2 \leqq n-[\log\log n].$$

Jelölje $\mathcal{N}(\bar{E}_M, n, N_c)$ azoknak a gráfonak a számát, amelyek az $\bar{E}_M$ osztályba tartoznak, akkor

$$\mathcal{N}(\bar{E}_M, n, N_c) \leqq \sum_{M \leqq s_1+s_2 \leqq n-\log\log n} \binom{n}{s_1}\binom{n}{s_2}\binom{n^2-(s_1+s_2)(n-s_1-s_2)}{N_c} \leqq$$

(5. 13)

$$\leqq 2 \sum_{\frac{M}{2} < s_1 \leqq n-\log\log n} \sum_{\substack{0 \leqq s_2 \leqq n-\log\log n \\ s_1 \geqq s_2}} \binom{n}{s_1}\binom{n}{s_2}\binom{n^2-(s_1+s_2)(n-s_1-s_2)}{N_c}.$$

Az (5. 13) helyessége megmutatható a következő meggondolásokkal. Ha az s_1 és s_2 számokat rögzítjük, akkor a legnagyobb erősen összefüggő részgráf $n-s_1-s_2$ pontból áll. Az összes lehetséges élek száma n^2 (figyelembe véve a hurok-éleket is). Ezekből el kellett hagyni először is azokat az éleket, amelyek az S_1-ből indulnának ki és az erősen összefüggő részgráfba vezetnének, mert ilyen élei (az S_1 definíciója szerint) nem lehetnek a gráfnak; ezeknek az éleknek a száma $s_1(n-s_1-s_2)$. El kell hagynunk továbbá azokat az éleket, amelyek a legnagyobb erősen összefüggő részgráfból vezetnek az S_2-be; ezeknek az éleknek a száma $s_2(n-s_1-s_2)$. Az így megmaradt élek közül kell kiválasztani az N_c élt. Az s_1 és s_2 számú pontokat az n csúcs közül $\leqq \binom{n}{s_1}\binom{n}{s_2}$-féleképpen választhatjuk ki. Ha $\mathbf{P}(\bar{E}_M, n, N)_c$ jelenti annak a valószínűségét, hogy az irányított, véletlen gráf az $\bar{E}_M$ osztályba tartozzék, akkor

$$\mathbf{P}(\bar{E}_M, n, N_c) \leqq \frac{\mathcal{N}(\bar{E}_M, n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}}. \tag{5. 14}$$

Ezt a valószínűséget néhány elemi becslés felhasználásával egyszerűen tudjuk becsülni (hasonlóan ahhoz, ahogyan azt az előző, 4. fejezet (4. 10) és (4. 11) formuláiban részleteztük), vagyis

$$\mathbf{P}(\bar{E}_M, n, N_c) \leqq 2e^2 \sum_{\frac{M}{2} \leqq s_1 \leqq n-\log\log n} \sum_{\substack{0 \leqq s_2 \leqq n-\log\log n \\ s_1 \geqq s_2}} \frac{e^{\frac{(s_1+s_2)^2}{n}(\log n+c)-c(s_1+s_2)}}{s_1!\, s_2!}. \tag{5. 15}$$

Az (5. 15) becsléséhez a következő 3 esetet különböztethetjük meg.

1. Eset. Legyen

$$s_1+s_2 \leqq \frac{n}{\log n+c},$$

akkor

$$\mathbf{P}(\bar{E}_M, n, N_c) \leqq 2e^2 \sum_{\frac{M}{2} \leqq s_1 \leqq n-\log\log n} \sum_{\substack{0 \leqq s_2 \leqq n-\log\log n \\ s_1 \geqq s_2}} \frac{e^{(1-c)(s_1+s_2)}}{s_1!\, s_2!}.$$

2. Eset. Tekintsük most az (5. 15) tagjait az

$$\frac{n}{\log n+c} \leqq s_1+s_2 \leqq \frac{n}{2}$$

feltétel mellett. Akkor a *Stirling*-formula alkalmazásával azt nyerjük, hogy az (5. 15) tagjai nem léphetik túl a következő értéket:

$$\exp\left\{\frac{(s_1+s_2)^2}{n}(\log n+c)+(1-c)(s_1+s_2)-s_1\log s_1-s_2\log s_2\right\} = \exp g(s_1+s_2), \tag{5. 16}$$

ahol a $g(x)$ függvény ugyanaz, mint az előző fejezet (4. 19) formulájából levezetett $\varphi(x)$ függvény, eltekintve a $\varphi(x)$ első tagjában szereplő 1/2 faktortól. S innen már adódik, hogy az (5. 15) összeg kisebb lesz, mint

$$n^2 e^{-n+\frac{\varrho \log\log n}{\log n}} \to 0,$$

ahol a $\varrho > 0$ állandó és az $n \to \infty$.

3. Eset. Legyen most

$$\frac{n}{2} \leqq s_1+s_2 \leqq n-\log\log n.$$

Mivel az (5. 16) tagjai szimmetrikusak az s_1+s_2 és az $n-s_1-s_2$ kifejezésekben, ezért ha $(n-s_1-s_2)$ helyett $(s_1+s_2)'$-t írunk, akkor ismét az (5. 13) egyenlőtlenségre jutunk, csak azt kell még figyelembe venni, hogy ha az $s_1+s_2 \leqq n-\log\log n$, akkor $(s_1+s_2)' = n-s_1-s_2 \geqq \log\log n \geqq M = [\log\log n]$.

Ebből a 3 esetben most már következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a $\vec{G}_{n,N_c}$ gráf ne tartozzék az E_M osztályba, a következőképpen becsülhető:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{E}_M, n, N_c) &\leqq 4e^2 \sum_{\frac{M}{2} \leqq s_1 \leqq n-\log\log n} \frac{e^{(1-c)s_1}}{s_1!} \sum_{0 \leqq s_2 \leqq n-\log\log n} \frac{e^{(1-c)s_2}}{s_2!} \leqq \\ &\leqq 4e^{2+e^{(1-c)}} \sum_{\frac{M}{2} < s_1} \frac{e^{(1-c)s_1}}{s_1!} + o(1). \end{aligned} \tag{5. 17}$$

Itt is $M \to \infty$, mivel a M-et úgy választottuk meg, hogy $M = [\log\log n]$ legyen, helyettesítsük most be ezt az értéket az (5. 17)-be és akkor könnyen adódik a következő formula:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\bar{E}_{\log\log n}, n, N_c) = 0. \tag{5.18}$$

Ha most $\mathbf{P}(\bar{A}E_{\log\log n}, n, N_c)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy a gráf az $\bar{A}$ és az $E_{\log\log n}$ osztályba is beletartozzék, akkor az 5. 1. lemma bizonyításához még azt kell igazolnunk, hogy ez a valószínűség a 0-hoz fog tartani. Megmutatjuk előbb, hogy

$$\mathbf{P}(\bar{A}E_{\log\log n}, n, N_c) \leqq \tag{5.19}$$

$$\leqq \sum_{s_1=1}^{M}\sum_{s_2=1}^{M}\binom{n}{s_1}\binom{n}{s_2}\sum_{q=1}^{(s_1+s_2)^2}\binom{(s_1+s_2)^2}{q}\frac{\binom{n^2-(s_1+s_2)\,n+\frac{(s_1+s_2)^2}{n}}{N_c-q}}{\binom{n^2}{N_c}}.$$

Az (5. 19) egyenlőtlenség a következőképpen bizonyítható:

Legyen G egy olyan gráf, amely az $\bar{A}$ és az $E_{\log\log n}$ osztályok közül mind a kettőbe beletartozik. Akkor a G gráf legnagyobb összefüggő C részgráfja legfeljebb $n-[\log\log n]$ pontot tartalmaz. Jelölje B_1 a G gráf azon csúcsainak a halmazát, amelyeknek nincs a C-ből a B_1-be vezető éle, és B_2 legyen a G olyan csúcsainak a halmaza, amelyekből nem vezet él a C-be. Jelentse s_1 és s_2 a B_1, illetve B_2 halmaz elemeinek a számát. Nyilvánvaló tehát, hogy $s_1 \leqq \log\log n$ és $s_2 \leqq \log\log n$. (Megjegyezzük, hogy a B_1 és a B_2 halmazok nem szükségképpen diszjunktak.) Világos, hogy G-nek azok a csúcsai, amelyek nem tartoznak a C-hez, vagy a B_1 halmazhoz tartoznak, vagy a B_2-höz, vagy mind a kettőhöz. Tehát a B_i halmazokba tartozó s_i pontok $\binom{n}{s_i}$-féleképpen választhatók ki $(i=1, 2)$. Legyen $B=B_1 \cup B_2$. A G gráf azon éleinek a számát, amelyeknek mind a két végpontja a B halmazban van, jelöljük q-val. Ha a G gráf az $\bar{A}$ osztályba tartozik, akkor a $q \geqq 1$, ha ugyanis a $q=0$ lenne, akkor a B_1 halmaz a források K^+ halmazába tartoznék, a B_2 pedig a nyelők K^- osztályába. Amiből következik, hogy a G gráf egy az A osztályba tartozó gráf, ez pedig ellentmond a hipotézisünknek.

Másrészt, nyilván a $q \leqq (s_1+s_2)^2$. A G gráf megmaradó N_c-q éle tehát olyan, hogy legalább az egyik végpontja a C-hez tartozik; továbbá, ha egy él a C-ben kezdődik, akkor nem végződhet a B_1-ben, ha pedig a C-ben végződik, akkor nem kezdődhet B_2-ben. Az ilyen élek száma nyilvánvalóan $n^2-n(s_1+s_2)+r(s_1+s_2)$, ahol most r a B_1 és a B_2 halmazok közös részéhez tartozó pontok számát jelenti. Vagyis az ilyen élek száma $\leqq n^2-n(s_1+s_2)+\frac{(s_1+s_2)^2}{2}$. És ezzel az (5. 19) helyességét igazoltuk. Ebből már következik, hogy

$$\mathbf{P}(\bar{A}E_{\log\log n}, n, N_c) \leqq \tag{5.20}$$

$$\leqq \frac{\log n}{n}\sum_{s_1=1}^{M}\sum_{s_2=1}^{M}\frac{2^{(s_1+s_2)^2}e^{-c(s_1+s_2)}}{s_1!\,s_2!} = O\left[\log n\,\frac{e^{(2\log\log n)^2}}{n}\right] = o(1).$$

És ezzel az 5. 1. lemma bizonyítást nyert. Következzék most az

5. 1. Tétel bizonyítása. Jelölje $\mathcal{N}'(n, N_c)$ azoknak az irányított, véletlen gráfoknak a számát, amelyeknek nincs izolált pontjuk. Akkor nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{N}'(n, N_c) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}(-1)^{k_1+k_2}\binom{n}{k_1}\binom{n}{k_2}\binom{n^2-k_1n-k_2n+k_1k_2}{N_c}. \tag{5.21}$$

Ebből a $k_1+k_2 = l$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\frac{\mathcal{N}'(n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} = \sum_{l=0}^{2n}(-1)^l \sum_{k_1=0}^{l} \binom{n}{k_1}\binom{n}{l-k_1} \frac{\binom{n(n-l)+k_1(l-k_1)}{N_c}}{\binom{n^2}{N_c}} = \sum_{l=0}^{2n}(-1)^l \mathcal{A}_l. \tag{5.22}$$

Az előző fejezetben részletezett módon következik, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_l = \sum_{k_1=0}^{l} \frac{e^{-cl}}{k_1!(l-k_1)!}$$

határérték létezik. Annak a valószínűsége tehát, hogy az irányított, véletlen gráfban ne legyen se nyelő, se forrás, se teljesen izolált pont, határértékben a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{N}'(n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} = \sum_{k_1=0}^{\infty} (-2)^{k_1} \frac{e^{-ck_1}}{k_1!} = e^{-2e^{-c}}. \tag{5.23}$$

Jelöljük most $\mathcal{N}(n, N_c)$-vel az erősen összefüggő gráfok számát, akkor a tétel bizonyításához elég belátni azt, hogy

$$\frac{\mathcal{N}'(n, N_c) - \mathcal{N}(n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} \leqq \mathbf{P}(\bar{A}, n, N_c), \tag{5.24}$$

ami nyilvánvalóan igaz.

Ezzel az 5. 1. tételt bebizonyítottuk.

6. A páros körüljárású, véletlen gráfok adott típusú részgráfjainak küszöbfüggvénye

A véletlen gráfok című, 2. fejezetben már említettük, hogy a [6] dolgozatban ERDŐS P. és RÉNYI A. a véletlen gráfok fejlődésének kérdéseivel foglalkoztak, és azt vizsgálták, hogy adott fejlődési fokon a gráfok mely szerkezeti tulajdonságai lesznek tipikusak. Láttuk azt is, hogy ezt a következőképpen értelmezték. Jelentse $\mathbf{P}_{n,N}(A)$ annak a valószínűségét, hogy a véletlen gráf rendelkezik az A tulajdonsággal. Akkor tipikus struktúra alatt olyan szerkezeti tulajdonságot értettek, aminek a $\mathbf{P}_{n,N}(A)$ valószínűsége 1-hez tart, ha az $n\to\infty$. Ha tehát A egy olyan tulajdonság, amelyre igaz az, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{n,N}(A) = 1, \tag{6.1}$$

akkor azt mondjuk, hogy „majdnem minden" n pontból és N élből álló, véletlen gráf rendelkezik ezzel a A tulajdonsággal.

A küszöbfüggvényeket a következőképpen definiálták:

Ha fenti, A szerkezeti tulajdonságra vonatkozóan létezik egy olyan $A(n)$ függvény, amely monoton növekvően tart a $+\infty$-hez, $n\to\infty$ esetén úgy, hogy a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(A) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(n)}{A(n)} = 0 \\ 1, & \text{ha} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(n)}{A(n)} = +\infty \end{cases} \tag{6.2}$$

limesz tulajdonság is teljesül, akkor ezt az $A(n)$ függvényt az A tulajdonságra vonatkozó „*küszöbfüggvény*"-nek nevezték.

Ezt, a küszöbfüggvényeket értelmező (6. 2) definíciót azonnal felírhatjuk a páros körüljárású, véletlen gráfok esetére is:

Tegyük fel, hogy $m\sim cn$. $A(m, n)$ küszöbfüggvény, ha

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_{m,n,N(m,n)}(A) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(m,n)}{A(m,n)} = 0 \\ 1, & \text{ha} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(m,n)}{A(m,n)} = +\infty \end{cases} \tag{6.3}$$

Szükségünk lesz még a következő definíciókra is:

(k, l)-ed rendű, *teljes, páros körüljárású gráf*nak nevezzük azt a $G_{k,l}$ gráfot, amelynek k csúcsa van az egyik színű pontokból és l csúcsa a másik színűekből, és ezeket kl számú él köti össze.

Páros körüljárású (k, l) *fá*nak egy olyan összefüggő, két színű gráfot nevezünk, amelynek k pontja van az első színű pontok halmazából és l pontja a másik színűekből és ezeket $(k+l-1)$ él köti össze.

Könnyen belátható az a tény, hogy a teljes gráfok, a fák és a körök *kiegyensúlyozott gráf*ok (azaz olyan gráfok, amelyeknek nincs a gráf átlagos fokszámánál magasabb fokú részgráfja).

Jelen fejezet célja: küszöbfüggvényeket keresni a páros körüljárású, véletlen gráfok bizonyos, megadott típusú részgráfjaira. Ezt a kérdést a [14] dolgozatunkban a következő módon tárgyaltuk.

Növeljük az élek számát, az N-et úgy, hogy az a csúcsok számához, az m-hez és az n-hez viszonyítva még igen kicsi maradjon. Ha pl. az N-et addig növeljük, míg $N=o\left(\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}\right)$ lesz, akkor a $\Gamma_{m,n}$ véletlen gráf, 1-hez közeli valószínűséggel, izolált pontokból és izolált élekből áll. Abban a speciális esetben, ha $m\sim cn$, akkor az $N=o(\sqrt{n})$ mellett lesz igen valószínű, hogy a véletlen gráf csak izolált pontokból és csak izolált élekből áll. Annak a valószínűsége ugyanis, hogy a $\Gamma_{m,n}$ gráfnak legalább két éle rendelkezzék egy közös ponttal, egyenlő 1, mínusz azzal a valószínűséggel, hogy nincsenek közös ponttal rendelkező élei a gráfnak. Minthogy bármely megengedhető N élhalmaz kiválasztásának a valószínűsége ugyanaz és az $1\Big/\binom{mn}{N}$ hányadossal egyenlő, következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a gráf éleinek ne legyen közös pontja, nem más mint

$$\frac{N!\binom{m}{N}\binom{n}{N}}{\binom{mn}{N}}. \tag{6.4}$$

S ennek megfelelően, annak a valószínűsége, hogy a $\Gamma_{m,n,N}$ páros körüljárású, véletlen gráfnak legalább két olyan éle legyen, amelynek közös pontja van:

$$1-\frac{N!\binom{m}{N}\binom{n}{N}}{\binom{mn}{N}}. \tag{6.5}$$

Az az állítás, hogy a gráfnak van két olyan éle, amelyek egy közös ponttal rendelkeznek, más szavakkal azt jelenti, hogy a gráf legalább olyan fát tartalmaz, amely három pontból és két élből áll.

Alkalmazzuk most azt az összefüggést, hogy

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}e^{-\frac{k^2}{2n}}, \tag{6.6}$$

amely érvényes a $k=o(n^{3/2})$ esetben, így ha $N=o\left(\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\right)$, azt nyerjük, hogy

$$1-\frac{N!\binom{m}{N}\binom{n}{N}}{\binom{mn}{N}} = O\left[N^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn}\right)\right] = o(1). \tag{6.7}$$

Legyen most az $m\sim cn$. Ebben az esetben a három pontból álló, páros körüljárású fák, azaz az (1, 2) vagy (2, 1) rendű fák előfordulási valószínűsége pozitív limeszszel rendelkezik $n\to\infty$ esetén, feltéve, hogy az $N\sim c_1\sqrt{n}$, ahol is $c_1>0$ egy olyan konstans, amely nem függ az n-től. De háromnál több pontból álló, összefüggő, páros körüljárású részgráfok előfordulása még igen valószínűtlen marad. Növeljük most az élek számát, az N-et úgy, hogy közben a pontok száma rögzített maradjon. A helyzet csak akkor fog lényegesen megváltozni, ha az N eléri az $n^{2/3}$ nagyságrendet. Ekkor ugyanis már az (1, 3), (2, 2) és a (3, 1) nagyságú fák, azaz a négy pontból álló fák is megjelennek. Egészen általánosan, a (k, l)-ed rendű fák megjelenésére vonatkozó küszöbfüggvény $n^{\frac{k+l-2}{k+l-1}}$ lesz, feltéve, hogy az $m\sim cn$. Ezt az eredményt tartalmazza a következő tétel:

6.1. TÉTEL: *Legyenek a $k\geqq 1$, $l\geqq 1$ és a v $(k+l-1\leqq v\leqq kl)$ pozitív egész számok. Jelölje $\mathcal{B}_{k,l,v}$ a kiegyensúlyozott, páros körüljárású, véletlen gráfok olyan nem üres osztályát, amelynek elemei k pontot tartalmaznak az egyik színű pontok halmazából, l pontot a másik színűekből és v számú (csak különböző színű pontokat összekötő)* *élt. Akkor* $n^{2-\frac{k+l}{v}}$ *lesz a páros körüljárású, véletlen gráfok azon tulajdonságára vonatkozó küszöbfüggvény, hogy a gráf egy a* $\mathscr{B}_{k,l,v}$ *osztály valamely elemével izomorf részgráfot tartalmaz. Feltéve, hogy* $m \sim cn$, *ahol a* $c > 0$ *nem függ az* n*-től.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása ERDŐS—RÉNYI analóg tételének bizonyításához hasonlóan történik, amely tétel az egyszínű, véletlen gráfok adott típusú részgráfjainak a küszöbfüggvényét határozza meg. (Lásd a [6] dolgozat 1. tételét a 23. oldalon.)

Jelölje $B_{k,l,v}$ az összes olyan gráfok számát, amelyek úgy képezhetők, hogy k pontot veszünk az első színű pontok halmazából és l számozott pontot a második színűekből úgy, hogy ezeket a csúcsokat v számú él kösse össze, vagyis, hogy ezek a gráfok a $\mathscr{B}_{k,l,v}$ osztályba tartozzanak. Jelentse most $\mathbf{P}_{m,n,N}(\mathscr{B}_{k,l,v})$ annak a valószínűségét, hogy a $\Gamma_{m,n,N}$ véletlen gráfnak legalább egy olyan részgráfja legyen, amely izomorf a $\mathscr{B}_{k,l,v}$ osztály valamely elemével, akkor nyilván

$$\mathbf{P}_{m,n,N}(\mathscr{B}_{k,l,v}) \leqq \binom{m}{k}\binom{n}{l} B_{k,l,v} \frac{\binom{mn-v}{N-v}}{\binom{mn}{N}}. \tag{6.8}$$

Válasszunk ki ugyanis először k pontot az első színű pontok halmazából (ez $\binom{m}{k}$-féleképpen lehetséges), l pontot a másik színből (amely $\binom{n}{l}$ különböző módon tehető meg); és ezekből képezzük a $\mathscr{B}_{k,l,v}$ osztály elemeivel izomorf gráfokat (ez $B_{k,l,v}$ számú különböző módon végezhető el); akkor azoknak a $G_{m,n,N}$ gráfoknak a száma, amelyek a kiválasztott gráfot mint részgráfot tartalmazzák, azzal a számmal lesz egyenlő, ahányféleképpen a megmaradt $N-v$ élt ki lehet választani az összes lehetséges $mn-v$ él közül. (Ily módon többszörösen vettük figyelembe az egynél több olyan részgráfot tartalmazó gráfokat, amelyek részgráfjai a $\mathscr{B}_{k,l,v}$ elemeivel izomorfok.)

A (6. 8) egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\mathbf{P}_{m,n,N}(\mathscr{B}_{k,l,v}) = O\left(\frac{N^v}{m^{v-k}n^{v-l}}\right). \tag{6.9}$$

Ha $N = o\left(n^{2-\frac{k+l}{v}}\right)$, akkor a (6. 9) azonosságból és abból a feltevésből, hogy az $m \sim cn$ nyilvánvalóan következik, hogy

$$\mathbf{P}_{m,n,N}(\mathscr{B}_{k,l,v}) = o(1). \tag{6.10}$$

Ezzel a tétel első állítását bebizonyítottuk, vagyis megmutattuk, hogy az $A(m,n) = n^{2-\frac{k+l}{v}}$ függvény esetén a (6. 3) definíció első követelménye teljesül.

A tétel második részének a bizonyítása az 5. 2. lemma bizonyításához hasonló meggondolásokat igényel.

A tétel második részére vonatkozó bizonyításban az m és n csúcsokból álló páros körüljárású teljes gráfok összes olyan részgráfjainak a halmazát, amely a $\mathscr{B}_{k,l,v}$ valamely elemével izomorf, jelölje $\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}$. És definiáljuk az $\varepsilon(S)$ valószínűségi változót a következő módon: Minden $S \in \mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}$ részgráfhoz rendeljük hozzá az $\varepsilon(S)$ valószínűségi változót. Az $\varepsilon(S)=1$ vagy az $\varepsilon(S)=0$ legyen aszerint, amint az S részgráfja, illetőleg nem részgráfja a $\Gamma_{m,n,N}$ véletlen gráfnak. Akkor a $\Gamma_{m,n,N}$ azon részgráfjai számának a várható értéke, amelyek a $\mathscr{B}_{k,l,v}$ elemeivel izomorfok, egyenlő lesz a következővel:

$$\mathsf{M}\Big(\sum_{S\in\mathscr{B}^{(m,n)}_{k,l,v}}\varepsilon(S)\Big)=\sum_{S\in\mathscr{B}^{(m,n)}_{k,l,v}}\mathsf{M}(\varepsilon(S))= \tag{6.11}$$

$$=\binom{m}{k}\binom{n}{l}B_{k,l,v}\frac{\binom{mn-v}{N-v}}{\binom{mn}{N}}\sim\frac{B_{k,l,v}}{k!\,l!}\frac{N^v}{m^{v-k}n^{v-l}}.$$

Ha az S_1 és S_2 két olyan eleme a $\mathscr{B}^{(m,n)}_{k,l,v}$ gráfok halmazának, amelyeknek nincs közös éle, akkor az $\varepsilon(S_1)\varepsilon(S_2)$ valószínűségi változók szorzatának a várható értéke

$$\mathsf{M}(\varepsilon(S_1)\varepsilon(S_2))=\frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}}. \tag{6.12}$$

Ha az S_1-nek és S_2-nek van közös éle, és ezek számát jelenti az $r(1\leqq r\leqq v-1)$, akkor

$$\mathsf{M}(\varepsilon(S_1)\varepsilon(S_2))=\frac{\binom{mn-2v+r}{N-2v+r}}{\binom{mn}{N}}=O\left(\frac{N^{2v-r}}{(mn)^{2v-r}}\right). \tag{6.13}$$

Másrészt, ha i, illetve j jelöli az S_1 és S_2 közös pontjainak a számát az első, illetve a második színű pontok halmazából, és ha $i+j=s$ — úgy, mivel az S_1 és S_2 közös része részgráfja az S_1-nek (és az S_2-nek is), felhasználva továbbá, hogy feltevésünk értelmében minden S kiegyensúlyozott —, akkor az s becslésére azt kapjuk, hogy $\frac{r}{s}\leqq\frac{v}{k+l}$, vagyis hogy $s\geqq\frac{r(k+l)}{v}$. Tehát az S_1 és S_2 részgráfok ilyen, közös pontokkal rendelkező párjainak a száma nem lépheti túl a következő összeget:

$$b=B^2_{k,l,v}\sum_{i+j\geqq\frac{r(k+l)}{v}}\binom{m}{k}\binom{k}{i}\binom{m-k}{k-i}\binom{n}{l}\binom{l}{j}\binom{n-l}{l-j}. \tag{6.14}$$

Az $m\sim cn$ feltételt használva nyerjük, hogy

$$b=O\left(n^{2(k+l)-\frac{r(k+l)}{v}}\right). \tag{6.15}$$

Következésképpen a szórás becslésére azt kapjuk, hogy

$$\mathsf{M}\Big(\Big(\sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \varepsilon(S)\Big)^2\Big) = \sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathsf{M}(\varepsilon(S)) +$$

$$(6.16)\qquad + \frac{B_{k,l,v}^2 m!\, n!}{k!^2\, l!^2 (m-2k)!\,(n-2l)!} \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} + O\left[\left(\frac{N^v}{n^{2v-(k+l)}}\right)^2 \frac{1}{n}\right] +$$

$$+ O\left[\left(\frac{N^v}{n^{2v-(k+l)}}\right)^2 \sum_{r=1}^{v} \left(\frac{n^{2-\frac{k+l}{v}}}{N}\right)^r\right].$$

A (6. 16) összeg második és harmadik tagjának a jelentése nem más, mint az olyan részgráfok számának a várható értéke, amelyeknek közös élük nincs, de van $i+j$ közös pontjuk. Az ilyen részgráfok száma nem haladja meg a következő értéket:

$$(6.17)\qquad B_{k,l,v}^2 \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} \sum_{i+j=0}^{k+l-1} \binom{m}{k}\binom{k}{i}\binom{m-k}{k-i}\binom{n}{l}\binom{l}{j}\binom{n-l}{l-j}.$$

A (6. 17) összeget két részre bontva

$$(6.18)\qquad \begin{aligned} &B_{k,l,v}^2 \binom{m}{k}\binom{m-k}{k}\binom{n}{l}\binom{n-l}{l} \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} + \\ &+ B_{k,l,v}^2 \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} \sum_{i+j=1}^{k+l-1} \binom{m}{k}\binom{k}{i}\binom{m-k}{k-i}\binom{n}{l}\binom{l}{j}\binom{n-l}{l-j}, \end{aligned}$$

azokat úgy írhatjuk, hogy

$$(6.19)\qquad \frac{B_{k,l,v}^2 m!\, n!}{k!^2\, l!^2 (m-2k)!\,(n-2l)!} \frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} + O\left[\left(\frac{N^v}{n^{2v-(k+l)}}\right)^2 \sum_{i+j=1}^{k+l-1} \frac{1}{n^{i+j}}\right].$$

És ez már megadja a (6. 16) második és harmadik tagját. A (6. 16) kifejezés második tagjának a becslése az 5. fejezet (5. 8) egyenlőtlenségének bizonyításához teljesen hasonlóan történik; könnyen belátható, hogy

$$(6.20)\qquad \frac{m!\,n!}{k!^2\,l!^2\,(m-2k)!\,(n-2l)!}\,\frac{\binom{mn-2v}{N-2v}}{\binom{mn}{N}} \leqq \binom{m}{k}^2\binom{n}{l}^2\left[\frac{\binom{mn-v}{N-v}}{\binom{mn}{N}}\right]^2.$$

Továbbá, ha még azt is feltesszük, hogy

$$(6.21)\qquad \frac{N}{n^{2-\frac{k+l}{v}}} = \omega \to +\infty, \qquad n \to \infty,$$

akkor a $\mathbf{D}^2(\xi) = \mathbf{M}(\xi^2) - \mathbf{M}^2(\xi)$ azonosság felhasználásával az $\varepsilon(S)$ szórásnégyzetének becslésére a következőket nyerjük:

$$(6.22)\qquad \mathbf{D}^2\Big(\sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \varepsilon(S)\Big) = O\left[\frac{\Big(\sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\Big)^2}{\min(\omega, n)}\right].$$

Másrészt a Csebisev-egyenlőtlenségből következik, hogy

(6.23)

$$\mathbf{P}_{m,n,N}\left\{\Big|\sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \varepsilon(S) - \sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\Big| > \frac{1}{2}\sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\right\} = O\left(\frac{1}{\min(\omega, n)}\right),$$

és így

$$(6.24)\qquad \mathbf{P}_{m,n,N}\left(\sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \varepsilon(S) \leqq \frac{1}{2}\sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S))\right) = O\left(\frac{1}{\min(\omega, n)}\right).$$

A (6. 16) felhasználásával nyilvánvalóan következik, hogy az $\omega \to \infty$ esetén a

$$(6.25)\qquad \sum_{S\in\mathscr{B}_{k,l,v}^{(m,n)}} \mathbf{M}(\varepsilon(S)) \to +\infty.$$

Az elmondottakból azonban nemcsak az adódik, hogy 1-hez tart annak a valószínűsége, hogy a $\Gamma_{m,n,N}$ gráf legalább egy olyan részgráfot tartalmaz, amely a $\mathscr{B}_{k,l,v}$ osztály valamely elemével izomorf, hanem az is, hogy a $\Gamma_{m,n,N}$ ilyen részgráfjainak a száma valószínűségben tart a $+\infty$-hez.

Ezzel a 6. 1. tételt bebizonyítottuk.

Ha a tétel által megadott $n^{2-\frac{k+l}{v}}$ küszöbfüggvényben az élek számát általánosan jelentő v helyébe, most a (k, l) fák élei számának megfelelő $(k+l-1)$ értéket írjuk, akkor a következőkre jutunk:

1. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $m \sim cn$, akkor $n^{\frac{k+l-2}{k+l-1}}$ arra a tulajdonságra vonatkozó küszöbfüggvény, hogy a páros körüljárású, véletlen gráf tartalmaz egy (k, l) fát.*

Ez az 1. következmény összhangban van a [15] dolgozatunkban foglalt eredményekkel, amelyeket a következő, 7. fejezetben fogunk részletesen ismertetni.

Ha a v helyébe kl-et írunk, akkor az alábbiakat nyerjük:

2. KÖVETKEZMÉNY. *$n^{2-\frac{k+l}{kl}}$ arra a tulajdonságra vonatkozó küszöbfüggvény, hogy a páros körüljárású, véletlen gráf egy (k, l) nagyságrendű teljes gráfot, mint részgráfot tartalmaz.*

Ez az utóbbi küszöbfüggvény nyilvánvalóan megegyezik azzal, amelyet ERDŐS és RÉNYI nyertek a színezés nélküli véletlen gráfokat vizsgálva, arra a tulajdonságra nézve, hogy a gráf egy telített páros részgráfot tartalmaz. Ezt ERDŐS P. és RÉNYI A. a [6] dolgozat 24. oldalán adta meg az 1. tételük 5. korolláriumában.

Legyen $v=k+l$ és $k=l$, akkor:

3. KÖVETKEZMÉNY. *n-nel egyenlő arra a tulajdonságra vonatkozó küszöbfüggvény, hogy a páros körüljárású, véletlen gráf tartalmaz egy (k, k) hosszúságú kört, ahol $k \geqq 2$.*

7. A páros körüljárású, véletlen gráfok izolált részgráfjaiként szereplő fák számának eloszlásáról

ERDŐS P. és RÉNYI A. [6] dolgozatukban bebizonyították, többek között, a következő tételt:

Ha az n pontból és az N élből álló $\Gamma_{n,N}$ véletlen gráfban a kiválasztott élek száma $N \sim \varrho n^{\frac{k-2}{k-1}}$, ahol a $\varrho > 0$ és k pozitív egész szám, akkor a k-ad rendű olyan fák száma, amelyek a $\Gamma_{n,N}$-ben mint izolált részgráfok fordulnak elő, $n \to \infty$ esetén, határértékben Poisson-eloszlásúak

$$\lambda = \frac{(2\varrho)^{k-1} k^{k-2}}{k!}$$

várható értékkel.

Felvetették továbbá azt a kérdést, hogy mi igaz a színezett, véletlen gráfok esetében.

A [15] dolgozatban ezt a kérdést a következő módon válaszoltuk meg. A páros körüljárású, véletlen gráfok fáira igaz a következő:

7. 1. TÉTEL. *Legyen $n = m^{1+\delta_m}$, ahol $\lim_{m\to\infty} \delta_m = 0$, legyen továbbá*

$$\varrho = \lim_{m\to\infty} \frac{N(m, n)}{m^{\frac{l-1}{k+l-1}} n^{\frac{k-1}{k+l-1}}}.$$

Ha $\tau_{k,l}$ $(k \geqq 1, l \geqq 1)$ azon (k, l) rendű fák számát jelenti, amelyek a $\Gamma_{m,n,N(m,n)}$ páros körüljárású, véletlen gráf izolált részgráfjai, akkor

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}_{m,n,N(m,n)}(\tau_{k,l} = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}, \tag{7.1}$$

$(j=0, 1, \ldots)$, *ahol a λ paramétert az alábbi kifejezés szolgáltatja:*

$$\lambda = \frac{\varrho^{k+l-1} k^{l-1} l^{k-1}}{k!\,l!}. \tag{7.2}$$

Bizonyítás. A 7.1. tételt a [6] dolgozat analóg, 2a. tételének bizonyításához (lásd a 27—30. l.) hasonló módon bizonyítjuk. Legyen $T_{k,l}^{(m,n)}$ azon (k,l) rendű fák halmaza, amelyek a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ és a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ csúcsokból álló teljes, páros körüljárású gráfok részgráfjai. Legyen $S \in T_{k,l}^{(m,n)}$ és minden S fához rendeljük hozzá az $\varepsilon(S)$ valószínűségi változót. Legyen $\varepsilon(S)=1$, ha S izolált részgráfja a $\Gamma_{m,n,N}$ gráfnak, és legyen $\varepsilon(S)=0$ egyébként. Akkor az $\varepsilon(S)$ várható értéke

$$\mathsf{M}(\varepsilon(S)) = \frac{\binom{(m-k)(n-l)}{N-(k+l-1)}}{\binom{mn}{N}} \sim \left(\frac{N}{mn}\right)^{k+l-1} \prod_{j=0}^{N-(k+l)} \frac{(m-k)(n-l)-j}{mn-(k+l-1)-j}. \tag{7.3}$$

Ebből

$$\mathsf{M}(\varepsilon(S)) = \left(\frac{N}{mn}\right)^{k+l-1} \left[1 + O\left(N \frac{ml+kn}{mn}\right)\right]. \tag{7.4}$$

Ha az S_j részgráfok nem diszjunktak $(S_j \in T_{k,l}^{(m,n)})$ $(j=1, 2, \ldots)$, akkor az $\varepsilon(S)$ definíciója értelmében

$$\mathsf{M}(\varepsilon(S_1) \ldots \varepsilon(S_r)) = 0. \tag{7.5}$$

Ha azonban az $S_1, S_2, \ldots, S_r$ diszjunkt gráfok, akkor minden $k \geqq 1$, $l \geqq 1$ és $r \geqq 1$ értékekre $m \to \infty$ esetén az $\varepsilon(S_1) \ldots \varepsilon(S_r)$ szorzat várható értéke

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\varepsilon(S_1)\varepsilon(S_2)\ldots\varepsilon(S_r)) &= \frac{\binom{(m-rk)(n-rl)}{N-r(k+l-1)}}{\binom{mn}{N}} = \\ &= \left(\frac{N}{mn}\right)^{r(k+l-1)} \left[1 + O\left(Nr\frac{ml+nk}{mn}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Feltevéseinkből nyilvánvalóan következik, hogy $m \to \infty$ esetén $\frac{N(m,n)}{m} \to 0$ és $\frac{N(m,n)}{n} \to 0$.

Másrészt T. L. Austin [19] dolgozatának egyik tétele szerint az összes különböző, olyan színezett fák száma, amelyeknek c_k számozott csúcsa van a k színű pontokból $(k=1, 2, \ldots, a)$,

$$A(c, u-1) = u^{a-2}(u-c_1)^{c_1-1}(u-c_2)^{c_2-1} \ldots (u-c_a)^{c_a-1}, \tag{7.7}$$

ahol a c vektor, $c=(c_1, c_2, \ldots, c_a)$, és az u jelentése: $u = c_1+c_2+\ldots+c_a$. Így tehát a két színű, (k,l) rendű, összes különböző fák száma: $k^{l-1}l^{k-1}$. (Ez utóbbi, vagyis a páros körüljárású fák számát megadó formula és annak egy, a [19] dolgozatban megadott bizonyításától teljesen különböző bizonyítása megtalálható RÉNYI A. [20] dolgozatában is.)

Alkalmazzuk most a következő aszimptotikus kifejezést:

$$(7.8)\quad \frac{1}{r!}\binom{m}{k}\binom{m-k}{k}\cdots\binom{m-(r-1)k}{k}\binom{n}{l}\binom{n-l}{l}\cdots\binom{n-(r-1)l}{l} = \\ = \frac{\left(\frac{m^k}{k!}\right)^r\left(\frac{n^l}{l!}\right)^r}{r!}\left[1+O\left(\frac{r}{m}\right)+O\left(\frac{r}{n}\right)\right],$$

így azt nyerjük, hogy

$$(7.9)\quad \sum \mathbf{M}\left(\varepsilon(S_1)\varepsilon(S_2)\ldots\varepsilon(S_r)\right) = \\ = \left(\frac{k^{l-1}}{k!}\right)^r\left(\frac{l^{k-1}}{l!}\right)^r\frac{m^{kr}n^{lr}}{r!}\left(\frac{N}{mn}\right)^{(k+l-1)r}\left[1+O\left(\frac{Nr}{mn}(ml+kn)\right)\right],$$

ahol a bal oldalon levő összegzés az összes olyan fa r-esekre terjesztendő ki, amelyek a $T_{k,l}^{(m,n)}$ halmazhoz tartoznak. Ily módon a következőkre jutunk

$$(7.10)\quad \lim_{\frac{N(m,n)}{m^{\frac{l-1}{k+l-1}}n^{\frac{k-1}{k+l-1}}}\to\varrho} \sum \mathbf{M}\left(\varepsilon(S_1)\,\varepsilon(S_2)\ldots\varepsilon(S_r)\right) = \frac{\lambda^r}{r!},$$

r-ben egyenletesen, ahol a λ jelentését a (7. 2) adja meg.

Másrészt ERDŐS P.—RÉNYI A. 1. lemmája a [6] dolgozatban a következőket állítja:

Legyenek az $\varepsilon_{n_1}, \ldots, \varepsilon_{n_{b_n}}$ valószínűségi változók valamely valószínűségi mezőn értelmezve úgy, hogy ezek az ε_{n_i} $(1\leqq i\leqq b_n)$ változók csak az 1 vagy csak a 0 értéket vegyék fel. Ha még az is igaz, hogy

$$(7.11)\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqq i_1<i_2<\ldots<i_r\leqq b_n}\mathbf{M}(\varepsilon_{n_{i_1}}\ldots\varepsilon_{n_{i_r}}) = \frac{\lambda^r}{r!},$$

r-ben egyenletesen $(r=1,2,\ldots)$, ahol az összegzés az $1,2,\ldots,b_n$ egész számok összes r-edrendű kombinációjára van kiterjesztve, akkor

$$(7.12)\quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{b_n}\varepsilon_{n_i}=j\right) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}\qquad (j=0,1,\ldots).$$

Alkalmazzuk ezt a lemmát, akkor a (7. 10)-ből a 7.1. tétel állítása azonnal következik.

Tekintsük most az a-színű $\Gamma_{n_1,\ldots,n_a,N}$ véletlen gráfokat, ezeknek n_i $(i=1,2,\ldots,a)$ számozott pontja van az i különböző színű ponthalmazból és N számú olyan, véletlenül kiválasztott éle van, amelyek csak különböző színű pontokat köthetnek össze, és ezen megengedett éleknek minden egyes kiválasztásáról feltesszük, hogy azonos valószínűségű. Ezekre a gráfokra ugyanígy bizonyítható be a 7. 1. tétel következő általánosítása:

7. 2. TÉTEL: *Ha*

$$\lim_{n_1\to\infty} \frac{N(n_1, n_2, \ldots, n_a)}{n_1^{\frac{u-c_1-1}{u-1}} n_2^{\frac{u-c_2-1}{u-1}} \ldots n_a^{\frac{u-c_a-1}{u-1}}} = \varrho > 0, \tag{7.13}$$

ahol az $n_i = n_1^{1+\delta_i(n_1)}$ $(i=2, \ldots, a)$ *és* $\lim_{n_1\to\infty} \delta_i(n_1) = 0$, *jelentse továbbá* $\tau_{c_1, c_2, \ldots, c_a}$ *azon* $u = c_1 + c_2 + \ldots + c_a$*-adrendű fák számát, amelyeknek pontosan* c_i *csúcsa van az i-edik színű pontok halmazából, és amelyek a* $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_a, N}$ *a-színű véletlen gráf izolált részgráfjai, akkor*

$$\lim_{n_1\to\infty} \mathbf{P}(\tau_{c_1, c_2, \ldots, c_a} = j) = \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}, \tag{7.14}$$

$(j=0, 1, \ldots)$ *ahol a* λ *paraméter a következő alakú:*

$$\lambda = \frac{\varrho^{u-1} u^{a-2} (u-c_1)^{c_1-1} (u-c_2)^{c_2-1} \ldots (u-c_a)^{c_a-1}}{c_1! \, c_2! \ldots c_a!}. \tag{7.15}$$

*A 7. 2. tétel bizonyításá*nál a következő formulából indulunk ki:

$$\mathbf{M}(\varepsilon(S)) = \frac{\binom{(n_1-c_1)(n_2-c_2)\ldots(n_a-c_a)}{N-(u-1)}}{\binom{n_1 n_2 \ldots n_a}{N}} \sim$$

$$\sim \left[\frac{N}{n_1 n_2 \ldots n_a}\right]^{u-1} \prod_{j=1}^{N-(u-1)} \frac{[(n_1-c_1)(n_2-c_2)\ldots(n_a-c_a)-j+1]}{n_1 n_2 \ldots n_a - (u-1) - j + 1}. \tag{7.16}$$

A bizonyítás gondolatmenete teljesen azonos azzal, amelyet az előző tétel igazolása során alkalmaztunk.

8. Az irányított, véletlen gráfok köreinek küszöb-eloszlásfüggvényéről

A 6. fejezetben idéztük ERDŐS P. és RÉNYI A. által a [6] dolgozatban definiált küszöbfüggvény fogalmát, a továbbiakban szükségünk lesz a küszöb-eloszlásfüggvény fogalmára is. Láttuk, hogy ha A olyan szerkezeti tulajdonság, amellyel a véletlen gráf rendelkezhet, vagy nem rendelkezhet, és ha $\mathbf{P}_{n,N(n)}(A)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy a $\Gamma_{n,N}$ véletlen gráf rendelkezik az A tulajdonsággal, ahol az $N(n)$ egy adott függvénye az n-nek, és az N az n-nel együtt növekszik, továbbá ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(A) = 1, \tag{8.1}$$

akkor azt mondjuk, hogy majdnem minden $\Gamma_{n,N(n)}$ véletlen gráf rendelkezik ezzel az A tulajdonsággal. De ha még az is igaz, hogy van egy olyan $F(x)$ eloszlásfüggvény, melyre fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(A) = F(x), \quad \text{ha} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{A(n)} = x, \tag{8.2}$$

akkor azt mondjuk, hogy $A(n)$ reguláris küszöbfüggvény és $F(x)$ az A tulajdonságra vonatkozó küszöb-eloszlásfüggvény. Ily módon ERDŐS P. és RÉNYI A. a [6] dolgozatban küszöbfüggvényeket és küszöb-eloszlásfüggvényeket nyertek a véletlen gráfok bizonyos lokális és globális szerkezeti tulajdonságaira. Igen sok tételt bizonyítottak be, köztük a következő, körökre vonatkozó lokális tételt.

Erdős P. és Rényi A. tétele. (Lásd a [6] dolgozat 3b tételét.)

Tegyük fel, hogy

$$N(n) \sim cn, \quad \text{ahol} \quad c > 0. \tag{8.3}$$

Jelentse γ_k azoknak a k-adrendű izolált köröknek a számát, amelyek a $\Gamma_{n,N(n)}$ gráfhoz tartoznak, $k=3, 4, \ldots$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_{n,N(n)}(\gamma_k = j) = \frac{\mu^j e^{-\mu}}{j!} \qquad (j = 0, 1, \ldots), \tag{8.4}$$

ahol

$$\mu = \frac{(2ce^{-2c})^k}{2k}. \tag{8.5}$$

A továbbiakban mi most ismét az irányított, véletlen gráfokkal foglalkozunk. Az irányított gráf definícióját a bevezetőben, az irányított véletlen gráf definícióját pedig a 3. és 5. fejezetekben adtuk meg.

Az 5. fejezetben foglalkoztunk azzal a kérdéssel, hogy a $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ irányított, véletlen gráfban milyen nagy irányított kör fog megjelenni 1 valószínűséggel a fejlődésnek azon a fokán, amikor a kiválasztott élek száma a $N_c = [n\log n + cn]$, és a következőket találtuk.

Ha az $N_c = [n\log n + cn]$, akkor az irányított, véletlen $\vec{\Gamma}_{n,N_c}$ gráf „majdnem biztosan" tartalmaz egy $[\log\log n]$ nagyságrendű kört; más szavakkal 1-hez tart annak a valószínűsége, hogy az irányított, véletlen gráf egy $[\log\log n]$ nagyságrendű kört tartalmaz, ha $N_c \doteq [n\log n + cn]$.

Ezt az eredményt az 5. fejezetben az irányított, véletlen gráfok erős összefüggőségének bizonyításánál segédtételként alkalmaztuk. Mindezek birtokában már igen könnyen bizonyítható a fent idézett *Erdős—Rényi*-tétel analóg tétele az irányított, véletlen gráfok esetére, s az eredmény a következő formába írható:

8. 1. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy $N(n) \sim cn$, és jelölje δ_l $(l=1, 2, 3, \ldots)$ a $\vec{\Gamma}_{n,N(n)}$ véletlen gráf irányított, izolált köreinek számát. Akkor $n\to\infty$ esetén a δ_l Poisson-eloszlású*

$$\mu = \frac{(ce^{-2c})^l}{l} \tag{8.6}$$

várható értékkel.

*A tétel bizonyításá*nak módszere analóg a [6] dolgozatban vázolt bizonyítási eljárással.

Jelölje $\varkappa = (i_1, i_2, \ldots, i_l)$ az olyan, rendezett szám l-est, ahol a különböző $\varkappa = (i_1, i_2, \ldots, i_l)$ számok az 1, 2, ..., n számok közül vannak kiválasztva tetszőleges módon. A $\varkappa$ szám l-es és annak ciklikus permutációja között nem teszünk különbséget. Jelentse I_l az összes lehetséges ilyen $\varkappa$ szám l-esek halmazát.

Vezessük be a következő valószínűségi változót:

$$\varepsilon_\varkappa = \begin{cases} 1, & \text{ha az irányított, izolált } P_{i_1} \to P_{i_2} \to \ldots \to P_{i_l} \to P_{i_1} \\ & \text{kör a } \vec{\Gamma}_{n,N} \text{ végtelen gráfhoz tartozik,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{8.7}$$

Ekkor az $\varepsilon_\varkappa$ várható értéke

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\varepsilon_\varkappa) &= \frac{\binom{(n-l)^2}{N-l}}{\binom{n^2}{N}} \frac{N(N-1)\ldots 1}{(N-l)\ldots 1} \frac{[(n-l)^2]\ldots[(n-l)^2-N+l+1]}{n^2(n^2-1)\ldots(n^2-N+1)} \sim \\ &\sim \frac{N^l}{n^{2l}} \prod_{j=0}^{N-l+1} \frac{(n-l)^2-j}{n^2-l-j}, \end{aligned} \tag{8.8}$$

vagyis

$$\mathbf{M}(\varepsilon_\varkappa) \sim \frac{N^l}{n^{2l}} e^{-2l\frac{N}{n}}. \tag{8.9}$$

Ebből következik, hogy ha $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ diszjunkt rendezett, s az $1, 2, \ldots, n$ számokból képezett szám l-esek, akkor

$$\mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa_1}\varepsilon_{\varkappa_2}\ldots\varepsilon_{\varkappa_r}) = \frac{\binom{(n-rl)^2}{N-rl}}{\binom{n^2}{N}} \sim \frac{N^{rl}}{n^{2rl}} e^{-2rl\frac{N}{n}}. \tag{8.10}$$

Legyen $\varepsilon = \sum_{\varkappa \in I_l} \varepsilon_\varkappa$, akkor az ε nyilván egyenlő a $\vec{\Gamma}_{n,N}$ irányított, véletlen gráfban levő l-edrendű irányított, izolált körök teljes számával. Másrészt az I_l halmaz $\varkappa$ elemeinek a száma $\binom{n}{l}(l-1)!$

A következő aszimptotikus formulát fogjuk felhasználni:

$$\binom{n}{l}\binom{n-l}{l}\ldots\binom{n-(r-1)l}{l} = \left(\frac{n^l}{l!}\right)^r \left[1+O\left(\frac{r}{n}\right)\right], \quad n\to\infty. \tag{8.11}$$

Rögzített l mellett ekkor a következőket kapjuk:

$$\sum_{\substack{\varkappa_i \in I_l \\ (i=1,2,\ldots,r)}} \mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa_1}\varepsilon_{\varkappa_2}\ldots\varepsilon_{\varkappa_r}) \sim \left(\frac{N}{n}\right)^{rl} \left(\frac{1}{l}\right)^r e^{-2rl\frac{N}{n}}. \tag{8.12}$$

Ily módon nyerjük, hogy

$$\lim_{\frac{N}{n}\to c} \sum_{\substack{\varkappa_i \in I_l \\ (i=1,2,\ldots,r)}}^{\prime} \mathbf{M}(\varepsilon_{\varkappa_1}\ldots\varepsilon_{\varkappa_r}) = \lambda^r, \tag{8.13}$$

r-ben egyenletesen, ahol

$$\lambda = \frac{(ce^{-2c})^l}{l}. \tag{8.14}$$

Nyilvánvalóan minden egyes $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ r-es a (8. 13) összeg bal oldalán $r!$-szor fordul elő. Ha az összegzést a $\varkappa$ elemeinek összes lehetséges különböző r-ed osztályú kombinációjára kiterjesztjük, akkor ez az összeg a (8.13)-ból úgy nyerhető, hogy a (8.13)-ban szereplő összeget elosztjuk $r!$-sal. Ezért, hogy ha $\sum_{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_r)}$ jelenti azt, hogy az összegzést a $\varkappa$ elemeinek az összes r-edrendű permutációjára kiterjesztjük, akkor

$$\lim_{\frac{N}{n} \to c} \sum_{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_r)} M(\varepsilon_{\varkappa_1} \ldots \varepsilon_{\varkappa_r}) = \frac{\lambda^r}{r!}. \tag{8.15}$$

Alkalmazzuk most ERDŐS P. és RÉNYI A. [6] dolgozatának 1. lemmáját, melyet a 7. fejezetben is idéztünk, akkor a (8. 15)-ből azonnal következik a 8. 1. tétel állítása.

Végezetül hasonlítsuk össze a 8. 1. tételt ERDŐS P. és RÉNYI A. idézett tételével. Írjuk a (8. 6)-ba az $l=k$ értéket, akkor azt látjuk, hogy a nem irányított, véletlen gráf köreinek (8. 5) aszimptotikus várható értéke 2^{k-1}-szerese az irányított körök várható számának, feltéve, hogy mindkét esetben a kiválasztott élek száma azonos. Ez elég nyilvánvalónak tűnik, ha meggondoljuk, hogy az irányított gráfok esetében nem számoljuk az irányított körök közé azokat a köröket, amelyekben az egymás után következő élek irányítása nem megfelelő. Mivel egy k-adrendű körnek k éle van és minden élt két különböző módon lehet irányítani, és mert az összes 2^k lehetőség közül csak két esetben kapunk jól irányított kört, így a nem megfelelően irányított körök száma 2^{k-1}. Ez a tény tükröződik az aszimptotikus várható értékek esetében is.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] ORE, O.: *Theory of Graphs*, Providence American Math. Soc. 1962.
[2] BERGE, C.: *The theory of graphs and its applications*. London, Methuen Co. Ltd., and New York, Wiley and Sons, 1962.
[3] HARARY, F.: Unsolved problems in the enumeration of graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci* **5** (1960) 63—95.
[4] ERDŐS, P.: Graph theory and probability, *Canadian Journal of Math.* **11** (1959) 34—38.
[5] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On random graphs I., *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959) 290—297.
[6] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960) 17—61.
[7] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On the evolution of random graphs, *The International Statistical Institute*, **32**. session 1960, Tokyo, 119.
[8] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On the strength of connectedness of random graphs, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **12** (1961) 261—267.
[9] AUSTIN, T. L.—FAGEN, R. E.—PENNEY, W. F.—RIORDAN, J.: The number of components in random linear graphs, *Annals of Math. Statistic*, **30** (1959) 747—754.
[10] MOON, J. W.—MOSER, L.: On the distribution of 4-cycles in random bipartite tournaments, *Canadian Math. Bulletin*, **5** (1962) 5—12.
[11] PALÁSTI, I.: On the connectedness of random graphs, *Studies in Mathematical Statistics. Theory and Applications*. Edited by K. Sarkadi and I. Vincze. Akadémiai Kiadó, Budapest 1968 (105—108).

[12] PALÁSTI, I.: On the connectedness of bichromatic random graphs *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **8** (1963) 431—441.
[13] PALÁSTI, I.: On the strong connectedness of directed random graphs *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **1** (1966) 205—214.
[14] PALÁSTI, I.: Threshold function for subgraph of given type of the bichromatic random graph, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **7** (1962) 215—221.
[15] PALÁSTI, I.: On the distribution of the number of trees which are isolated subgraphs of a chromatic random graph. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) 405—409.
[16] ROY, B.: Cheminement et connexité dans l' application aux problèmes d'ordonancement, *Metra* **1** (1962).
[17] BEINEKE, W. AND HARARY, F.: Local restrictions for various classes of directed graphs. *Journal of the London Math. Soc.* 40 (1965) 87—95.
[18] RÉNYI, A.: Egy általános módszer valószínűségszámítási tételek bizonyítására és annak néhány alkalmazása. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei,* **11** (1961) 79—105.
[19] AUSTIN, T. L.: The enumeration of points labelled chromatic graphs and trees. *Canadian Journal of Mathematics* **12** (1960) 535—545.
[20] RÉNYI, A.: Új módszerek és eredmények a kombinatorikus analízisben I, *Magy. Tud. Acad. III. Oszt. Közl.* **16** (1966) 77—105.
[21] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
[22] RIORDAN, J.: *An introduction to combinatorial analysis,* Wiley, New York, 1958.

(Beérkezett: 1968. március 10.)

ON SOME STRUCTURAL PROPERTIES OF GIVEN TYPES OF RANDOM GRAPHS

by I. PALÁSTI

Abstract

P. ERDŐS and A. RÉNYI have investigated the structural properties of random graphs in a series of their papers. Our aim was to study the properties of bichromatic and those of directed random graphs.

Let the graph consist of m given vertices of one colour n given vertices of another colour, and N edges. We obtain a bichromatic random graph if we choose N different edges among the possible mn edges supposing that all choices of the edges have the same $1\Big/\binom{mn}{N}$ probability. It was shown in the case of $m\sim\lambda n$ that the probability of the random graph $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ being connected, tends to the limit $e^{-e^{-c}}$, that is, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\,(m,\,n,\,N_{c,\lambda})=e^{-e^{-c}}$, if the number of the chosen edges is $N_{c,\lambda}=[m\log m+cm)$. In the special case of $\lambda=1$, the limit of the probability of the connectedness of bichromatic random graph is $e^{-2e^{-c}}$, if $N_c=[n\log n+cn]$.

Threshold functions for subgraphs of the bichromatic random graphs is also given. If N is increased, an $k\geqq 1$, $l\geqq 1$, and v denote positive integers $(k+l-1\leqq v\leqq kl)$ and let $\mathcal{B}_{k,l,v}$ any non empty class of connected balanced bichromatic random graphs containing k vertices of the first colour, l vertices of another, and v edges. In that case the threshold function concerning the property of the bichromatic graph, that it contains a subgraph isomorphic with some element of $\mathcal{B}_{k,l,v}$ is equal to $n^{2-\frac{k+l}{v}}$. (If $m\sim cn$, where $c>0$ is a constant).

The distribution of the number of trees in a chromatic random graph was determined too.

A directed random graph $\vec{\Gamma}_{n,N}$ is obtained if we choose N different directed edges among the possible n^2 (directed) ones connecting n given vertices so that each of the $\binom{n^2}{N}$ possible choices are equiprobable. For such graphs the following hold:

A directed random graph $\overleftarrow{\Gamma}_{n,N_c}$ contains a directed cycle of order [loglog$n$] "almost surely" (the probability of it tends to 1 for $n\to\infty$) if the number of the edges is $N_c = [n\log n + cn]$.

If $\mathbf{P}(n, N_c)$ denotes the probability, that the directed random graph is strongly connected, then

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(n, N_c) = e^{-2e^{-c}}, \text{ if } N_c = [n\log n + cn]$$

Finally let us denote by δ_l the number of isolated directed cycles of order l, ($l \geqq 1, 2, \ldots$) in a directed random graph. If the number of the choiced edges is $N \sim cn$, then the limiting distribution of δ_l is a Poisson distribution with the parameter $\mu = \frac{(ce^{-2c})^l}{l}$, where $c > 0$ is a constant.

KÖRELHELYEZÉSEK TÉGLALAPOKON

Írta: RUDA MIHÁLY

Medgyessy Pál 50. születésnapjára

Bevezetés

A diszkrét geometria egy klasszikus feladatköre alakzatok más alakzatokkal való kitöltésének a problémája. Ide tartozik például a sík kongruens körökkel való legsűrűbb kitöltése vagy a körelhelyezések a gömbfelületen.

Felvethető bizonyos értelemben a fordított (és valamivel általánosabb) probléma is, nevezetesen az, hogy adott alakzatok bizonyos feltételeket kielégítő elrendezéséhez keresünk ezt az alakzatrendszert tartalmazó, adott típusú alakzatot, amelynek valamilyen jellemzője extremális. Ha ezek után vizsgáljuk az egyes elrendezésekhez tartozó extremális tartalmazó alakzatot, kérdezhető, hogy mely elrendezés mellett lesz ez az extremális érték extremális.

A következőkben egymásba nem nyúló, egyenlő sugarú körök síkbeli elrendezéseit vizsgáljuk. Tartalmazó alakzatként téglalapokat szerepeltetünk. Az extremalitási kritérium a téglalapok területének minimalitása lesz. Másképpen fogalmazva: adott számú körhöz keresünk egy olyan téglalapot, mely az adott körökkel a lehető legsűrűbben tölthető ki.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha a körök száma — a következőkben ezt n-nel jelöljük — nem nagyobb nyolcnál, akkor a legsűrűbb kitöltést adó elrendezéseknél a körök középpontjainak egy négyzetrácson kell elhelyezkedniük. Pontosabban fogalmazva: a körök középpontjai úgy helyezkednek el, hogy vagy bármely körközépponthoz található másik három, hogy az így adódó négy pont egy $2r$ oldalú négyzet csúcsait adja (r a körök sugara) és az összes ilyen négyzet egyesítése egy téglalap, melynek élei az eredeti (kitöltendő) téglalap éleinél $2r$-rel rövidebbek (l. pl. 26c ábra), vagy valamennyi körközéppont egy $2r(n-1)$ hosszúságú szakaszon van (l. pl. 26a ábra). A következőkben az ilyen elrendezéseket *négyzetrácsos elrendezésnek* nevezzük.

Ezek után még néhány megjegyzést teszünk n nagyobb értékeivel kapcsolatban is.

Általános megjegyzések

A vizsgálatokat a következőkben úgy fogjuk végezni, hogy a téglalap rövidebb oldalának a hosszát — jelöljük m-mel — rögzítjük, és ehhez az értékhez adjuk meg (adott n mellett) a másik oldal — legyen ez h — hosszának minimális értékét, tehát rögzített m értékekhez keressük, adott körszám esetén, a lehető legnagyobb kitöltési sűrűséget. Ezután megnézzük, hogy a különböző m értékek közül melynél érhető el a legnagyobb kitöltési sűrűség.

A tárgyalás egyszerűsítésének kedvéért legyen a körök sugarának hossza egységnyi ($r=1$). Ezenkívül nyilván elég azt a téglalapot vizsgálni, mely csak a körök középpontjait tartalmazza — vagyis körelhelyezés helyett elég pontelhelyezést vizsgálni egy $y = m-2$, $x = h-2$ oldalú téglalapban (1. ábra), hiszen, ha adott m mellett a h minimális, akkor a megfelelő y mellett az x is minimális, és fordítva.

A következőkben becsléseket adunk rögzített y esetén az x minimális értékére, vagy adott y esetén megadunk egy legsűrűbb elrendzést (mikor tehát az x minimális).

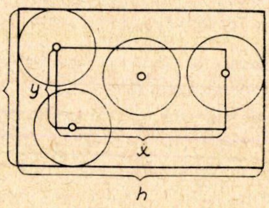
Az itt tárgyalt esetekben az adódó terület: $T=m\cdot h=(y+2)\cdot(x+2)$ négyzetrácsos elrendezés esetén lesz minimális, vagyis ha $m=2, 4, \dots$.

A tárgyalás során többször felhasználjuk a következőket:

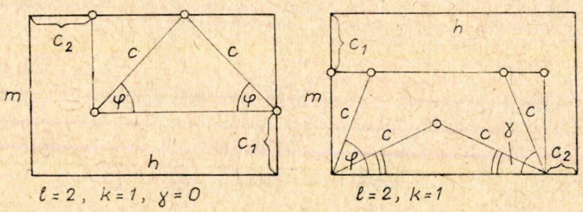
1. Segédtétel. *Ha egy téglalap oldalait (m és h) a következő függvények adják:*

$$m=kc\cdot\sin\varphi+c_1 \quad \text{és} \quad h=lc\cdot\cos(\varphi-\gamma)+c_2,$$

ahol $0\leqq\alpha\leqq\varphi\leqq\beta\leqq\frac{\pi}{2}$, $0\leqq\gamma\leqq\alpha$, $k=1, 2, \dots$, $l=1, 2, \dots$, c, c_1, c_2 *nem negatív konstansok* (lásd pl. 2. ábrát), *akkor a téglalap* $T=m\cdot h$ *területe mint* φ *függvénye a* $\varphi=\alpha$ *vagy* $\varphi=\beta$ *helyen veszi fel minimumát.*



1. ábra



2. ábra

Bizonyítás. A $\sin\varphi$ és $\cos(\varphi-\gamma)$ az $[\alpha, \beta]$ zárt intervallumon alulról konkáv, nem negatív függvény és deriváltjaik előjele ellenkező. Előállítva tehát a $T=m\cdot h$ értéket mint φ függvényét, az szintén alulról konkáv az $[\alpha, \beta]$ zárt intervallumon, így valamely végpontban veszi fel a minimumát.

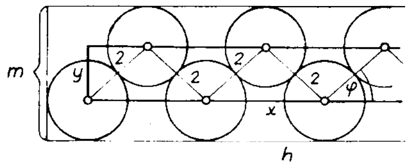
Megjegyzés: Az 1. segédtétel valamivel általánosabb formában is megfogalmazható — úgy, hogy m és h nem ilyen speciális függvénye a φ-nek — de ezzel itt nem foglalkozunk, mivel a továbbiakban csak a fenti speciális esetre lesz szükség.

2. Segédtétel. *Tetszőleges n-re az n, páronként egymástól legalább* 2 *egységnyire levő pontot tartalmazó és y magasságú téglalapok közül a minimális hosszúságúak mindkét y hosszúságú oldalán az n pont közül legalább egynek-egynek rajta kell lennie.*

Bizonyítás. Ellenkező esetben a minimális hosszúság rövidíthető lenne — ellentmondva a minimalitásnak.

3. Segédtétel. A $0\leqq y\leqq\sqrt{3}$ *intervallumon tetszőleges n-re* $\min(x) = (n-1)\sqrt{4-y^2}$ (3. ábra). *Ha az y a fenti intervallumon változik, akkor, ha* $n<14$, *a sűrűségfüggvény az* $y=0$ *pontban veszi fel maximumát (vagyis egy négyzetrácsos elrendezésnél); ha* $n\geqq 14$, *akkor viszont az* $y=\sqrt{3}$ *helyen (amikor a körközéppontok egy szabályos háromszögrács pontjai).*

Bizonyítás. Az $y \leqq \sqrt{3}$ értékeknél a körök egymás után helyezhetőek el a téglalapban, az egyik m hosszúságú oldaltól kiindulva (mint a 3. ábrán). Mindegyik kör helyzetét csak a közvetlen előtte levő határozza meg, mivel y (vagyis m) elég kicsi. A 3. ábrán adott elrendezés így valóban — az egyetlen — extremális. A sűrűség maximumát a különböző m értékeken belül az 1. segédtétel adja ($c=2, c_1 = c_2 = 2, \gamma=0, k=1, l = n-1$).



3. ábra

MEGJEGYZÉS: A 3. segédtételben tulajdonképpen végtelenbe nyúló sávokra is megadtuk a legsűrűbb körkitöltést, ha a sáv szélessége 2 és $\sqrt{3}+2$ között van, és az ilyen értékek közül a $\sqrt{3}+2$ szélességű sávnál lép fel a maximális sűrűség.

4. SEGÉDTÉTEL. *Adott n esetén a vizsgálatot elég a $0 \leqq y \leqq \sqrt{4n}-2$ korlátok között végezni — hiszen x és y szimmetrikus szerepe miatt feltehető, hogy $y \leqq x$, és $y = \sqrt{4n}-2$ értéknél a téglalap területe $T = m \cdot h = (x+2)\cdot(y+2) \geqq 4n$, ez a négyzetrácsos elrendezéshez tartozó területérték, tehát nagyobb területű téglalapot, vagyis nagyobb y értékeket nem szükséges vizsgálni.*

Extremális elrendezések, becslések a sűrűségre

Kongruens körökkel kitöltött téglalapokra a következő állítást fogjuk bebizonyítani:

TÉTEL. *Tetszőleges téglalapnak nyolcnál nem több, kongruens körrel való kitöltésekor ha $\varrho = \max(S)$, a kitöltési sűrűség maximuma, akkor $\varrho \leqq \frac{\pi}{4}$, és az egyenlőség csak a négyzetrácsos elrendezéseknél lép fel.*

A bizonyítást az n különböző értékeire külön-külön fogjuk elvégezni (n a kitöltő körök száma).

$n=1$, $n=2$ esetén adott y (illetve m) mellett a legjobb elrendezések és a sűrűségmaximumok azonnal adódnak (22. ábra), megegyezve állításunkkal.

$n=3$ esetén az x minimális értéke:

a) ha $0 \leqq y \leqq \sqrt{3}$, akkor $\min(x) = 2\sqrt{4-y^2}$,

b) ha $\sqrt{3} \leqq y \leqq 2$, akkor $\min(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y$,

c) ha $2 \leqq y \leqq 4$, akkor $\min(x) = \sqrt{4-\frac{y^2}{4}}$.

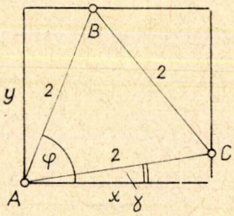
MEGJEGYZÉS: A 4. segédtétel szerint a vizsgálatot nem kellene ilyen széles intervallumon végezni, ezt csupán a későbbiek kedvéért tesszük.

Bizonyítás. Az a) és c) eseteket lényegében véve a 3. segédtétellel megoldottuk (a) és c) az x és y szimmetrikus szerepe miatt ekvivalens). Bizonyítandó tehát a b) eset. Két pont a három közül — legyen ez A és C — a 2. segédtétel értelmében a téglalap y hosszúságú oldalain helyezkedik el (4. ábra). E feltétel mellett (egyszerűen a *Pitagorasz*-tételből) azonnal adódik, hogy az adott y és a hozzá rendelt x értékek esetén csak az ábrán látható elrendezés lehetséges — amikor $AB=BC=CA=2$ és a két szélső pont, A és C, közül egy a téglalap egyik csúcsában van — kisebb x értékek mellett a pontok közti távolságok minimuma egyáltalán nem érheti el a szükséges két egységnyi értéket.

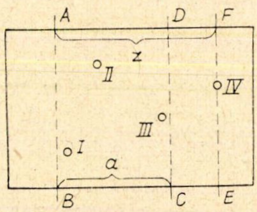
Figyelembe véve az a) és c) esetet is, megadtuk minden szóba jöhető y-ra a legnagyobb sűrűséget szolgáltató elrendezést (l. a 23a—c ábrát).

Az 1. segédtételt felhasználva — miután kiszámítottuk az eredeti téglalap területét az y fent adott intervallumainak végpontjaiban (melyek egyben az 1. segédtételben szereplő φ szög változási határai is) — azt kapjuk, hogy az adott y értékeken belül a legkisebb terület az $y=0$ (és $y=4$) pontban lép fel, vagyis a négyzetrácsos elrendezésnél (l. a 23. d ábrát), amikor $\varrho=\frac{\pi}{4}$.

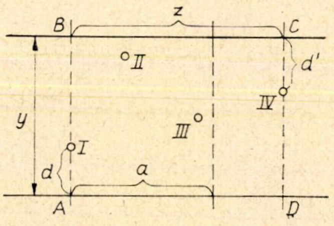
A további vizsgálatok érdekében foglalkoznunk kell az alábbi problémával. Az y magasságú téglalapban adott egy a szélességű $ABCD$ („függőleges") sáv (5. ábra). Ebben a sávban helyezkedik el három pont: I, II, III, (a köztük levő távolság legalább 2). Az a kérdés, hogy ezt a ponthármast egy negyedikkel (IV) kiegészítve, mekkora az így kapott pontnégyes által lefoglalt $ABEF$ sáv minimális szélessége — vagyis az AF távolság minimuma. Csupán azt követeljük meg, hogy az eredeti ponthármas bent maradjon az eredetileg adott $ABCD$ sávban és a pontok közti távolságok minimuma legalább 2 legyen.



4. ábra



5. ábra



6. ábra

Keresendő tehát adott y-hoz négy pont olyan elrendezése és egy olyan z érték, hogy a négy pont az y, z oldalú téglalapon belül legyen (legalább két egységnyi távolsággal a pontok között) és közülük három pedig egy y, a oldalhosszúságú sávban. A z értékének az adott y és a értékek mellett minimálisnak kell lennie.

Természetesen csak olyan eseteket vizsgálunk, amikor az $a \leqq z$.

5. Segédtétel. *Legyen* $\sqrt{3} \leqq y \leqq 3$. *A z minimális értéke az a függvényében:*

$$\min(z) = a+\sqrt{4-(y-\sqrt{4-a^2})^2}, \quad \textit{ahol} \quad \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y \leqq a \leqq 2, \quad \textit{ha} \quad \sqrt{3} \leqq y \leqq 2,$$

illetve $\sqrt{4-\frac{y^2}{4}} \leqq a \leqq \sqrt{4y-y^2}$ *ha* $2 \leqq y \leqq 3$. *Az a-ra adott alsó korlátok tételünk*

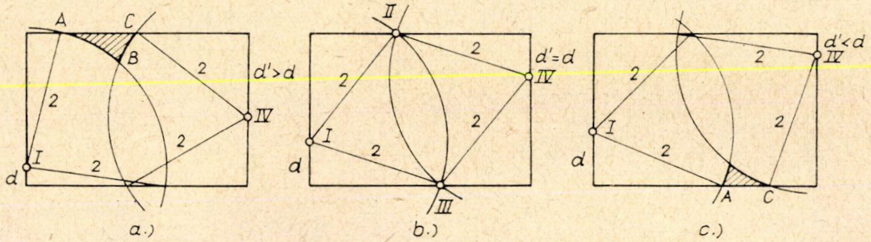
$n=3$-*ra vonatkozó részéből következnek (hiszen az a szélességű sávban három pontnak kell lennie); a felső korlátok* (2 *illetve* $\sqrt{4y-y^2}$) *feletti a értékek vizsgálatára nem lesz szükség.*

A bizonyítást csak a $\sqrt{3} \leqq y \leqq 2$ intervallumra részletezzük, mivel a $2 \leqq y \leqq 3$ esetben teljesen hasonló módon lehet eljárni.

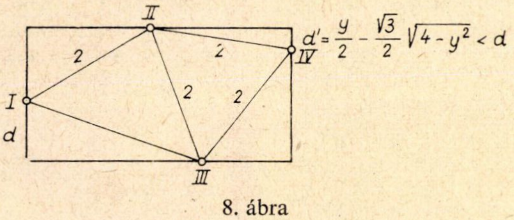
Bizonyítás. A 2. segédtétel szerint a negyedik pontnak IV-nek), illetve az első három pont közül is legalább egynek (jelöljük ezt I-gyel) rajta kell lennie egy y hosszúságú (függőleges) oldalon (6. ábra).

Legyen I-nek a téglalap legközelebbi (A) csúcsától mért távolsága d, és IV-nek az A-val szemközti (C) csúcstól mért távolsága d'!

Először belátjuk, hogy adott d esetén, ahol $0 \leqq d \leqq \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-y^2}$, a z minimális értéke akkor lép fel, amikor a körközéppontok egy a téglalapba írt rombusz csúcsai, melynek oldalhosszúsága 2 és rövidebb átlója sem kisebb 2-nél (7b ábra). A $d=\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4-y^2}$ értéknél ez az átló éppen 2-vel egyenlő. Ennél nagyobb d értékeknél nagyobb a-hoz nagyobb z tartozik, tehát ezt az esetet nem kell vizsgálni (lásd 8. ábra).



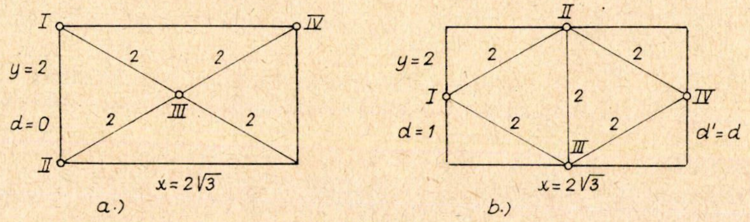
7. ábra



8. ábra

A rombuszos elrendezésnél (7b ábra) a z értéke: $z=\sqrt{4-d^2}+\sqrt{4-(y-d)^2}$ ($d=d'$). Bármely más esetben — ha $d \neq d'$ (7a, c ábra) — ugyanekkora z mellett nem lehetséges az I és IV pontokon kívül még egyszerre másik kettőt (II, III) elhelyezni, mert az ABC ívháromszögben (7a, c ábra) — ahova a fennmaradó két pont kerülhetne — két pont közti távolság mindig kisebb 2-nél, mivel az AB, BC és CA távolságok mindegyike kisebb mint 2, — ez elemi úton belátható.

Kivételt képez az $y=2$, $d=1$ eset, amikor a 9a ábrán látható elrendezés is lehetséges — mely nem a rombuszos elrendezés —, azonban az $a=\sqrt{3}$ és $z=2\sqrt{3}$ értékek megegyeznek a rombuszos elrendezésnél adódó értékekkel (9b ábra).



9. ábra

Minden d értékhez — az adott intervallumon — tartozik egy a érték (az I, II, III által elfoglalt rész szélessége). Belátjuk, hogy ehhez az a-hoz a fent adott $\left(z = \sqrt{4-d^2}+\sqrt{4-(y-d)^2}\right)$ értéknél kisebb z érték nem tartozhat, és ezzel eredeti problémánkat (adott a-hoz minimális z keresése) meg is oldottuk:

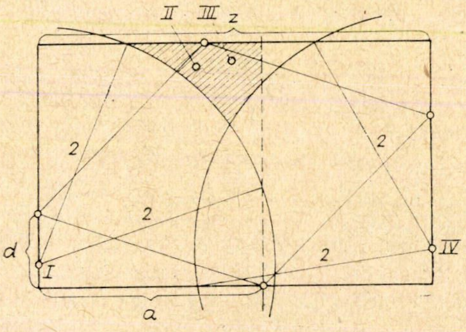
Kisebb z-hez feltétlenül kisebb d is tartozik (d csökkentésével a rombusz mindkét átlója növekedhet az adott téglalapon belül, tehát z csökkenthető és fordítva) azonban — szintén elemi úton — bizonyítható, hogy a fent adott a és z értékek mellett (melyek d függvényei) három pontot nem helyezhetünk el az a szélességű sávon belül úgy, hogy az I d-nél közelebb van A-hoz, és még egy negyedik pont is van az y, z oldalú téglalapon belül.

A rövidség kedvéért a bizonyítást itt nem tárgyaljuk, csupán a 10. ábrán illusztráljuk a létrejövő helyezetet.

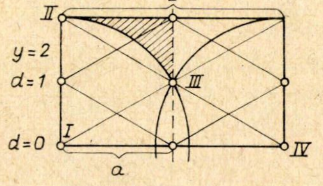
Meg kell jegyezni, hogy itt is kivételt képez az $y=2$, $a=\sqrt{3}$ eset, amikor $d=1$ és $d=0$ egyaránt megfelel, azonban a z változatlanul $2\sqrt{3}$ (11. ábra).

A $2\leqq y\leqq 3$ intervallumra az adott a esetén legkisebb z értéket szolgáltató elrendezés (mely szintén egy rombuszt ad) a 12. ábrán látható. Ebben az esetben is a $d=\frac{y}{2}\left(a=\frac{z}{2}\right)$ értékeknél kétféle megoldás is felléphet (13. ábra), azonban az a és z értékek egyértelműek. (Az a változási intervallumát, valamint a különböző a értékekhez tartozó z értékeket az előzőkben már megadtuk.)

Az $n=4$ esetben a kitöltési sűrűség az $y=0$ vagy az $y=2$ pontban (négyzetrácsos elrendezés) veszi fel maximumát, amely a $\varrho=\frac{\pi}{4}$ érték.

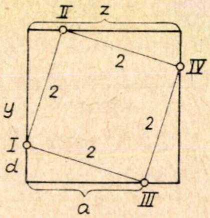


10. ábra

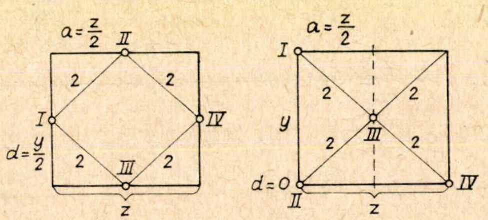


11. ábra

A bizonyítás az 5. segédtételből a 3. és 4. segédtételek figyelembevételével azonnal adódik. A vizsgálatot csak a $\sqrt{3} \leqq y \leqq 2$ intervallumon kell elvégezni. Itt a középpontokat tartalmazó téglalap x hosszúsága — mely az 5. segédtételben sze-



12. ábra



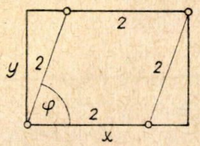
13. ábra

replő z-nek felel meg — akkor minimális, ha — szintén az 5. segédtétel szerinti értelemben — a d minimális, vagyis 0. Tehát a minimális x-et valóban a 14. ábrán látható elrendezésnél kapjuk. Így tehát valamennyi szóba jöhető y értékre ismerjük már a legjobb elrendezéseket (24. ábra).

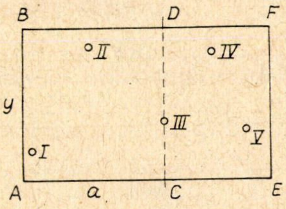
Kiszámítva az $y=\sqrt{3}$, $y=2$ helyeken a $T=m \cdot h$ területértéket — mivel ez az $y=2$ helyen kisebb —, az 1. segédtétel szerint a minimális terület, vagyis a maximális sűrűség, mely a $\varrho=\frac{\pi}{4}$ az $y=2$ esetben — négyzetrácsos elrendezésnél — lép fel, ugyanúgy mint az $y=0$ esetén (ld. 24b, c ábra).

Az $n=5$ eset visszavezethető az $n=3$ esetre:

Vágjunk le a téglalapból (15. ábra) — az y hosszúságú oldallal párhuzamos



14. ábra



15. ábra

egyenessel — egy akkora sávot ($ABCD$), melyben három pont éppen elfér — az adott elrendezés mellett —, vagyis úgy, hogy egy pont a három közül legyen rajta az elválasztó egyenesen. Így a téglalap másik felében ($CDEF$) is éppen három pont (III, IV, V) van.

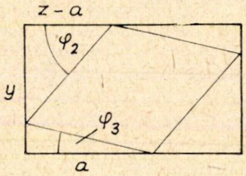
Tételünk $n=3$-ra vonatkozó részében már megadtuk e két rész minimális szélességét:

$$\left.\begin{array}{lll} \min(a) = \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y & \text{ha} & \sqrt{3} \leqq y \leqq 2 \\ \min(a) = \sqrt{4-\frac{y^2}{4}} & \text{ha} & 2 \leqq y \leqq 4 \end{array}\right\} x \geqq 2 \cdot \min(a).$$

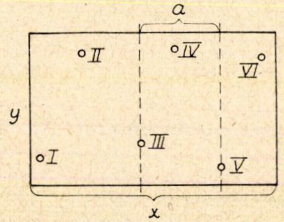
Mivel a $\sqrt{3} \leqq y \leqq 2\sqrt{3}$ intervallumon megvalósítható (két három-három pontot tartalmazó téglalap összeillesztésével), hogy x értéke $2 \cdot \min(a)$ legyen, így egyben megadtuk az összes lehetséges y értékre az extremális elrendezéseket (25a, b ábra). (A 4. segédtételben adott korlát: $2(\sqrt{5}-1) < 2\sqrt{3}$).

Az 1. segédtételt alkalmazva itt is könnyen megkapható, hogy a sűrűség maximuma az $y=0$ helyen (négyzetrácsos elrendezés) lép fel (25 d ábra).

Az $n=6$ esetre vonatkozó állításainkat bizonyítva megvizsgáljuk, hogy az 5. segédtételben szereplő z érték hogyan változik az a függvényében, pontosabban nem is a z hanem a $z-a$ értéket vizsgáljuk. Tekintsük a 16. ábrát. Mivel mindig igaz, hogy $a \geqq z-a$, ezért $\varphi_3 \leqq \varphi_2$. Ebből azonnal adódik, hogy $\frac{d(z-a)}{da} \leqq -1$, sőt mivel a növekedésével φ_3 csökken és φ_2 növekszik, a $\frac{d(z-a)}{da}$ monoton csökken, vagyis a $(z-a) = f(a)$ függvény alulról konkáv (természetesen csak azon az intervallumon, amelyet az a változására már megadtunk az 5. segédtételben).



16. ábra



17. ábra

Tekintsük ezután magát a hat pontot tartalmazó téglalapot (l. a 17. ábrát). Válasszunk ki a pontok közül hármat, melyek a legkeskenyebb a szélességű sávot foglalják el. Minden esetben felbontható az y, x oldalú téglalap három olyan sávra, amelyek közül kettőben három-három pont van, és az egyik éppen a fent kiválasztott ponthármas. A harmadik sáv, mely emellett a ponthármas mellett van, két pontot tartalmaz. Természetesen bármely páros n esetén adható ilyen ponthármasokból és egy pontkettősből álló felbontás, ahol a pontkettős a minimális szélességű részt elfoglaló ponthármas mellett áll.

Az a szélességű és a mellette levő két pontot tartalmazó sávok össz-szélességének minimuma — az 5. segédtételben használt jelölés szerint — éppen z. Minthogy a másik három pont a-nál nem kisebb szélességű sávot foglal el, az x-re egy alsó becslés az $a+z$ érték. Mivel az előzők szerint $z-a$ és így $z+a$ is a-nak alulról konkáv függvénye, ezért ahhoz, hogy x minimumát megkaphassuk, az x-et mint az a függvényét csak az a szélső értékeire kell vizsgálni; azaz ha $\sqrt{3} \leqq y \leqq 2$, akkor az $a=2$, illetve $\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y$, ha $2 \leqq y \leqq 3$, akkor az $a = \sqrt{4y-y^2}$, illetve $\sqrt{4-\frac{y^2}{4}}$ helyeken.

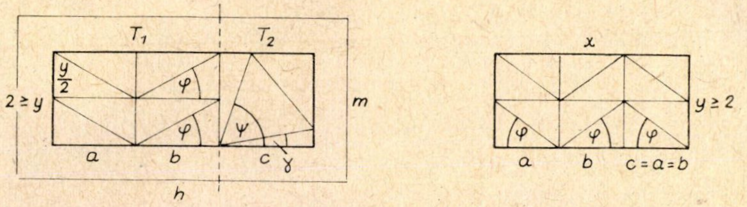
Elvégezve a számításokat, megkapjuk, hogy a különböző y értékek mellett a maximális sűrűség mindig a legnagyobb a érték mellett lép fel, vagyis éppen a 26b, d ábrán látható rendszereknél.

Megadtuk tehát a $\sqrt{3} \leqq y \leqq 3$ intervallumon a legnagyobb sűrűséget szolgáltató rendszereket. Mivel a 4. segédtételben adott korlát: $2(\sqrt{6}-1)$ kisebb mint 3, és az 1. segédtételt alkalmazva kimutatható, hogy a $\sqrt{3} \leqq y \leqq 3$ intervallumon a legnagyobb sűrűségek mindegyike kisebb mint $\frac{\pi}{4}$, kivéve az $y=2$ helyet, ezért elmondhatjuk, hogy a különböző alakú téglalapok közül az $y=0$ $(m=2)$ és $y=2$ értéknél, azaz négyzetrácsos elrendezésnél érhető el a legnagyobb kitöltési sűrűség $n=6$-ra is (26a, c ábra).

Beszélhetünk még a $3<y$ értékekről is. Az $y=\frac{12}{\sqrt{13}}$ helyen $y=x$. Ez a [2] cikkből ismeretes. A megfelelő elrendezés a 26e ábrán látható. Nagyon valószínű, hogy a $3 \leqq y \leqq \frac{12}{\sqrt{13}}$ helyeken, amelyekre extremális elrendezéseket nem adtunk, a legjobb elrendezéseket a két szélső helyzet közti folytonos átmenet adja, azaz a két-két körből álló „függőleges" sorok mind jobban egymásba nyomulnak (31a ábra) — ilyen mozgás történik a $2 \leqq y \leqq 3$ intervallumon is. Pontos sűrűségértékre tehát csak egy sejtésünk van, de egy becslés adható a téglalap területére ezen az intervallumon is, hiszen ha az y a $3 \leqq y \leqq \frac{12}{\sqrt{13}}$ intervallumon változik, az x semmiképpen sem lehet $\frac{12}{\sqrt{13}}$-nál kisebb.

Az $n=7$ esetre nem adunk extremális elrendezéseket minden y-ra, csupán kimutatjuk egy becslés segítségével, hogy az $y=0$-hoz tartozó négyzetrácsos elrendezés adja a legnagyobb kitöltési sűrűséget.

Tekintsük az y magasságú téglalapnak a 18. ábrán látható felosztását!



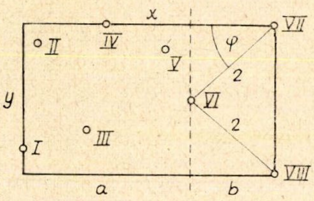
18. ábra

Legyen $a=b=\sqrt{4-\frac{y^2}{4}}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0$, tetszőlegesen kicsi). Ekkor az első négy részben csak egy-egy pont helyezhető el. A fennmaradó három pontnak így a c szélességű részben kell lennie. Ekkor — mint már tételünk $n=3$-ra vonatkozó részében beláttuk — c minimális értéke: $\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y$, ha $\sqrt{3} \leqq y \leqq 2$ vagy $\sqrt{4-\frac{y^2}{4}}$, ha $2 \leqq y \leqq 2\sqrt{3}$. Alkalmazva az 1. segédtételt (ha $\sqrt{3} \leqq y \leqq 2$, akkor a segédtételt külön-külön kell alkalmazni a $T_1=(a+b+1)\cdot(y+2)$ és a $T_2=(c+1)\cdot(y+2)$

területű téglalapokra, és ezeknek minimális területét kell összegezni) megkaphatjuk, hogy a fenti módon adott téglalap $T=m\cdot h$ területe a $\sqrt{3}\leqq y\leqq 3$ intervallumon 28-nál nagyobb ($28=4n$ a négyzetrácsos elrendezéshez tartozó területérték).

Az az eset, amikor $y=x$, az $y=2+\sqrt{3}$ értéknél lép fel. Ez szintén [2]-ből ismert eredmény; a megfelelő elrendezés a 27b ábrán látható. Ha y kisebb mint $2+\sqrt{3}$, akkor az x csak nagyobb lehet ennél az értéknél. Így egy becslés adható a $T=m\cdot h$ területre: $T\geqq(y+2)\cdot(4+\sqrt{3})$. Mivel ez az érték $y=3$-nál is nagyobb mint 28 és a 4. segédtételben adott felső korlát: $2(\sqrt{7}-1)<2+\sqrt{3}$, ezért elmondható, hogy tételünk $n=7$-re is igaz. (Az extremális elrendezés $y=0$-nál lép fel; l. 27a ábrát.)

Az $n=8$ *esetben* az $n=6$ esethez hasonló módon vizsgálható a probléma a $\sqrt{3}\leqq y\leqq 2$, illetve a $2\leqq y\leqq 3$ intervallumon, azzal a különbséggel, hogy itt az $a+z$ helyett $2a+z$ szerepel. Ennek a függvénynek a konkávitását kihasználva itt is megkapjuk, hogy az $n=6$-hoz hasonlóan a 28b, d ábrán levő elrendezések, vagyis amikor az a maximális, a legjobbak. Számításunk ebben az esetben ($n=8$) csak $y=2{,}8$-ig alkalmazható. Az 1. segédtétel felhasználásával itt is könnyen kimutatható, hogy a 28b, d ábrán adott elrendezésekhez tartozó területérték: $T=m\cdot h\geqq 32=4n$. Ezzel azokra a téglalapokra melyeknél $m\leqq 4{,}8$ tudjuk, hogy a maximális kitöltési sűrűség $\frac{\pi}{4}$, mely $y=0$ és $y=2$ esetben (négyzetrácsos elrendezés) lép fel (28a, c ábra).



19. ábra

Nagyobb y értékekre becsléseket adunk, melyek néhol pontosak lesznek.

Osszuk fel a nyolc pontot tartalmazó téglalapot egy az y hosszúságú oldallal párhuzamos egyenessel két részre úgy, hogy az egyik hat, a másik három pontot tartalmazzon! (19. ábra.) Legyen az előbbi rész szélessége a, az utóbbié b.

Ha $y\leqq\frac{12}{\sqrt{13}}$, akkor a mindenképpen nagyobb, vagy egyenlő ezzel az értékkel, $b\geqq\sqrt{4-\frac{y^2}{4}}$ (l. az $n=6$ és $n=3$ eseteket).

Ha $\frac{12}{\sqrt{13}}\leqq y\leqq 2\sqrt{3}$, akkor $a\geqq 3$ (ez szintén az $n=6$ esetből adódik) és $b\geqq\sqrt{4-\frac{y^2}{4}}$.

Ezekre az y és $x=a+b$ értékekre kiszámítva a $T=m\cdot h$ területet (a b értéknél felhasználva az 1. segédtételt), T-re mindig 32-nél nagyobb értéket kapunk ($32=4n$). A fenti becslések az $y=\frac{12}{\sqrt{13}}$ és $y=2\sqrt{3}$ helyen pontosak (l. 28e, f ábrát).

Mivel ha $y=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, akkor $x=y$ (l. [1]), ezért ha $y\leqq\sqrt{6}+\sqrt{2}$, akkor $x\geqq\sqrt{6}+\sqrt{2}$. Ennek alapján becslést adva a $T=m\cdot h$ területre (mely $y=\sqrt{6}+\sqrt{2}$-nél pontos lesz, l. 28g ábra): a $2\sqrt{3}\leqq y\leqq\sqrt{6}+\sqrt{2}$ intervallumon a T mindig nagyobb 32-nél. Tehát — mivel a 4. segédtételben adott korlát: $2(\sqrt{8}-1)<\sqrt{6}+\sqrt{2}$ — tételünket már $n=8$-ra is bizonyítottuk, és $n=8$-ra is az összes különböző téglalapra becslést adtunk a kitöltési sűrűségre a $2{,}8 \leqq y \leqq \sqrt{6}+\sqrt{2}$ intervallumon (kisebb y értékekre pedig pontos elrendezéseket).

Ezzel tételünk bizonyítását befejeztük.

Befejezésként néhány megjegyzést teszünk arra az esetre, amikor $n>8$.

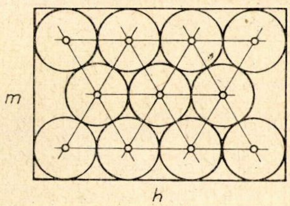
Megjegyzések az $n>8$ esetekre

Valószínűnek látszik, hogy $n=9$ és $n=10$ esetén is a négyzetrácsos elrendezés ($y=0$, 4 és $y=0$, 2) adja a sűrűség maximumát (32a, b és c, d ábra).

$n=11$ *esetén* már biztosan nem a négyzetrácsos elrendezés az extremális. Amint az könnyen kiszámítható, a 20. ábrán látható szabályos háromszögrácsot adó elrendezés nagyobb sűrűséget $\left(\varrho=\frac{11\pi}{16(\sqrt{3}+1)}>\frac{\pi}{4}\right)$ ad, mint a négyzetrácsos — nincs bizonyítva azonban, hogy az előbbi extremális.

$n=12$ *esetében* viszont a négyzetrácsos elrendezés ad nagyobb sűrűséget (nincs bizonyítva, hogy az extrémumot adja vagy sem).

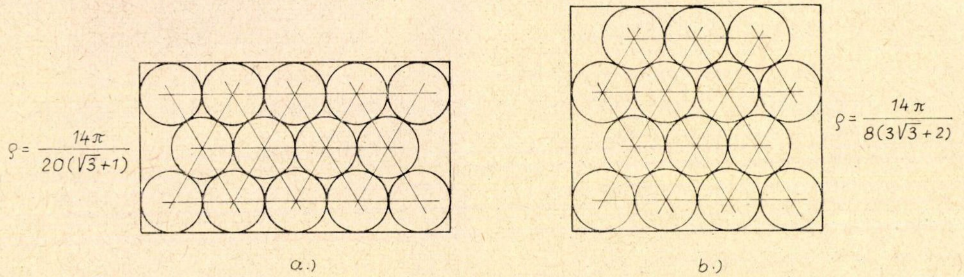
Ha $n \geqq 14$, akkor már sohasem adják a négyzetrácsos elrendezések a sűrűség maximumát — ez a 3. segédtételből következik.



20. ábra

A 3. segédtételen kívül — melyben a $0 \leqq y \leqq \sqrt{3}$ intervallumon minden n-re megadtuk a különböző y értékek mellett a legnagyobb sűrűséget adó elrendezéseket — más eredmények nem ismertek 8-nál nagyobb n értékekre, kivéve a [2]-ben szereplő elrendezést $n=9$ és $y=4$ esetére (l. 29. ábra). Egy ilyen problémával foglalkozunk még röviden.

Az x minimális értékének számítása tetszőleges páros n-re lehetséges a $\sqrt{3} \leqq y \leqq 2$ (illetve $2 \leqq y \leqq 3$) intervallumon az $n=6$ (és $n=8$) esetben használt módszerrel. Az ott szereplő jelölésekkel páros n-re $x=\left(\frac{n}{2}-2\right)a+z$. Ennek alapján például a $\sqrt{3} \leqq y \leqq 2$ esetben kimutatható, hogy az egyes y értékekre $n \leqq 14$ esetén (n páros) az $n=6$ ($n=8$) értéknél fellépő elrendezésekkel azonos szerkezetű rendszerek az extremálisak (30. ábra). Az 1. segédtételből pedig az is adódik, hogy ilyenkor is



21. ábra

az $y=2$ pontban (négyzetrácsos elrendezés) lép fel a legnagyobb sűrűség — miközben az y változik, kivéve az $n=14$ esetet, amikor a maximum $y=\sqrt{3}$-nál van.

Egy érdekes részprobléma annak vizsgálata, hogy nagy n esetén a szabályos háromszögrácsos elrendezések közül melyek adják — adott n mellett — a legnagyobb kitöltési sűrűséget, vagyis, hogy hány sorban kell elhelyezni a köröket és soronként hányat. Például $n=14$ esetére a 21. ábra két lehetősége közül az *a)* elrendezés nagyobb sűrűséget ad, mint a *b)* elrendezés. Ezekkel a vizsgálatokkal azonban itt nem foglalkozunk.

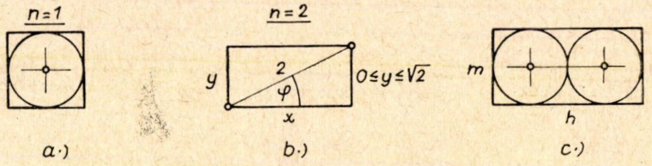
Összefoglalás

A következőkben egy ábrasorozatban összefoglaljuk azokat a körelhelyezéseket, amelyek extremálisak, illetve sejthetően azok. A 22a, c; 23d; 24b, c; 25d; 26a c; 27a; 28a, c; 32 a, b, c és d ábrákon az adott n mellett legnagyobb sűrűséget szolgáltató, *négyzetrácsos* elrendezések láthatók, míg a többi ábrán a különböző y értékektől függően a lehető legnagyobb sűrűséget adó körelhelyezések szerepelnek.

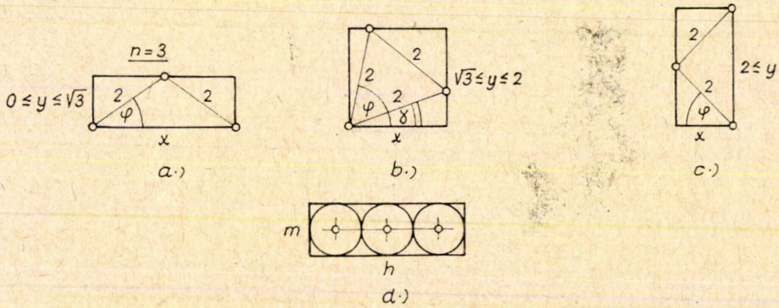
Az egyszerűség kedvéért általában csak a középpontokat tartalmazó y, x oldalú (esetleg — ha $y=0$ — egy szakasszá fajuló) téglalapok szerepelnek.

EXTREMÁLIS ELRENDEZÉSEK:

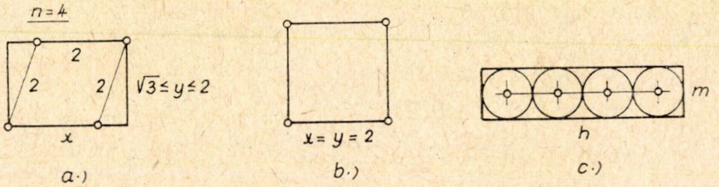
(Az $y<\sqrt{3}$ értékekkel kapcsolatban l. a 3. segédtételt.)



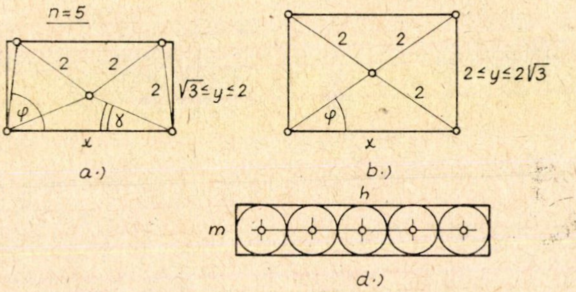
22. ábra



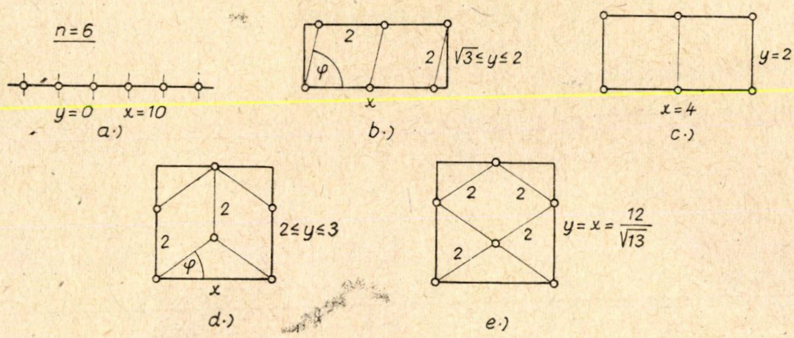
23. ábra



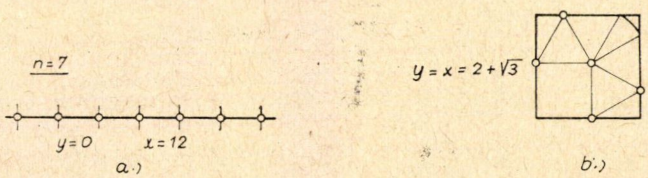
24. ábra



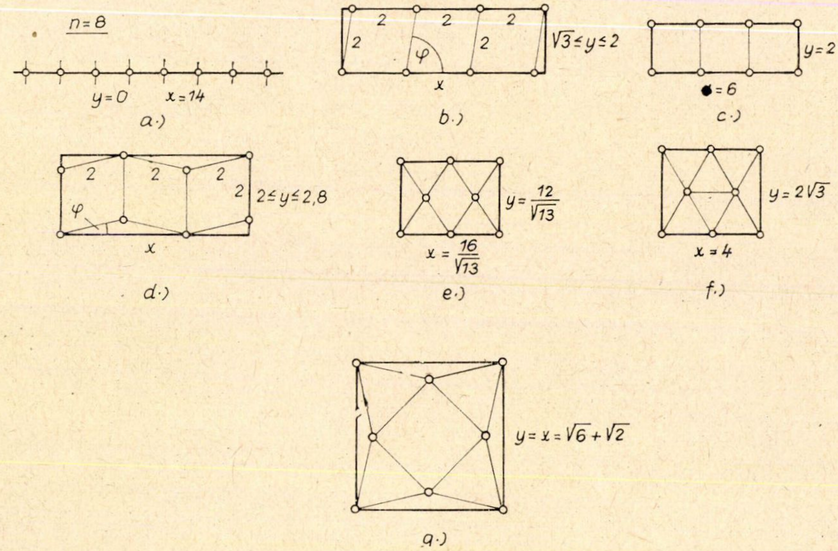
25. ábra



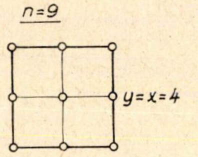
26. ábra



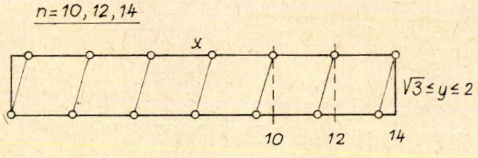
27. ábra



28. ábra

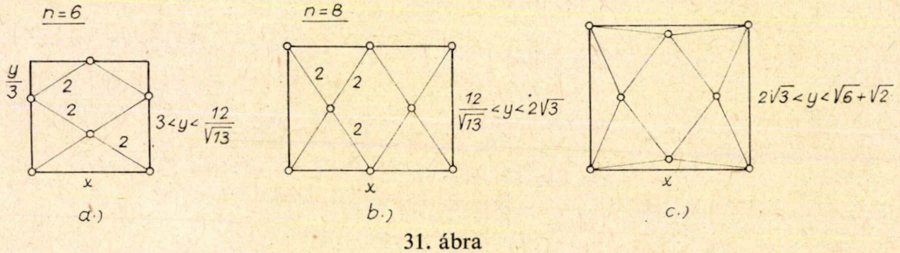


29. ábra



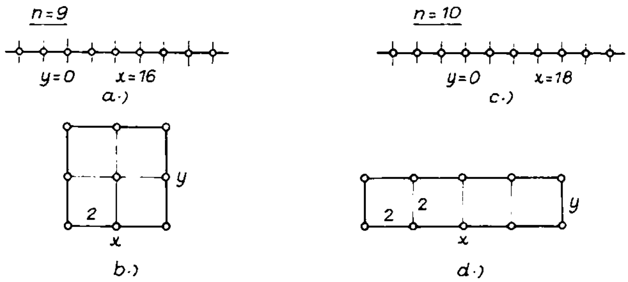
30. ábra

SEJTHETŐEN EXTREMÁLIS ELRENDEZÉSEK:



31. ábra

Az $y=2{,}8$ és $y=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$ között az $n=8$ esetben nem adtunk meg extremális elrendezéseket. Ez — az $n=7$ $(y>\sqrt{3})$ esethez hasonlóan — elég bonyolult problémának látszik.



32. ábra

IRODALOM

[1] SCHAER, J.—MEIR, A.: On a Geometric Extremum Problem, *Canadian Mathematical Bulletin*, 8. No. 1. (1965).
[2] SCHAER, J.: The Densest Packing of 9 Circles in a Square Canadian Mathematical Bulletin, 8. No. 3. (1965).

(Beérkezett: 1968. XII. 20.)

PACKING OF NON-OVERLAPPING CONGRUENT CIRCLES IN RECTANGLES

by MIHÁLY RUDA

Summary

If $\varrho(n)$ denotes the maximal density of n non-overlapping congruent circles in a rectangle, then $\varrho(n) = \frac{\pi}{4}$ for $n \leqq 8$, and the extremal configurations are illustrated by Fig. 22—28. Conjectured extremal configurations for some greater value of n are shown in Fig. 31., 32.

RACIONÁLIS SPEKTRÁL SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYŰ STACIONÁRIUS FOLYAMATOK VÁRHATÓ ÉRTÉKÉNEK MEGENGEDHETŐ BECSLÉSÉRŐL

Írta: ARATÓ MÁTYÁS

1. Korrekt becslések

Legyen a $\xi(t)$ valós $(0 \leqq t \leqq T)$ stacionárius (szigorú értelemben) folyamat 1 valószínűséggel folytonos és $\theta = M\xi(t)$ ismeretlen, míg a $B(t) = M(\xi(s+t)-\theta)\cdot\cdot(\xi(s)-\theta)$ kovariancia függvény legyen ismert. Adott θ esetén a folyamathoz tartozó valószínűségi mértéket, ill. várható értéket jelölje P_θ, ill. M_θ. Stacionárius folyamatok esetén van értelme θ olyan becsléseit tekinteni, melyek a koordinátarendszer megválasztásával szemben invariánsak.

Definíció. A $\hat{\theta}(\xi(t))$ funkcionált korrekt becslésének nevezzük, ha tetszőleges $-\infty < c < \infty$ esetén

$$\hat{\theta}(\xi(t)+c) = \hat{\theta}(\xi(t))+c.$$

Könyű látni, hogy pl. az $\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt$ és a $\xi(t_0)$ funkcionál (t_0 fix) korrekt becslése θ-nak.

Jelölje a továbbiakban $\mathcal{K}$ a korrekt becslések osztályát. Ha $\hat{\theta} \in \mathcal{K}$

$$M_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 = M_\theta(\hat{\theta}(\xi(t))-\theta)^2 = M_0(\hat{\theta}(\xi(t)))^2. \tag{1.1}$$

Független megfigyeléssorozatra a korrekt becslés fogalmát PITMAN [7] vezette be. A θ ún. lokációs paraméter *Pitman*-féle becslésének nevezzük (a várható érték létezése esetén) az

$$u = \xi(0) - M_0(\xi(0)|\xi(t)-\xi(0), \quad 0 \leqq t \leqq T) \tag{1.2}$$

becslést. A továbbiakban a $\xi(t)-\xi(0)$ $(0 \leqq t \leqq T)$ változók által generált σ-algebrát $\mathcal{A}_0^T$-vel fogjuk jelölni, s akkor

$$u = \xi(o) - M_0(\xi_{(o)}/\mathcal{A}_0^T).$$

Nyilván

$$u(\xi(t)+c) = \xi(o)+c-M_o(\xi(o)/\mathcal{A}_0^T) = u(\xi(t))+c,$$

azaz $u \in \mathcal{K}$ és

$$M_\theta(u) = M_\theta\xi(0) - M_\theta(M_0(\xi(0)|\mathcal{A}_0^T)) = \theta, \tag{1.3}$$

tehát az u torzítatlan becslése θ-nak. Az $M_0(\hat{\theta}|\mathcal{A}_0^T)$ és $\hat{\theta}-M_0(\hat{\theta}|\mathcal{A}_0^T)$ változók ortogonalitása miatt, ha $\hat{\theta} \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} M_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 = M_0(\hat{\theta})^2 &= M_0(\hat{\theta}-M_0(\hat{\theta}\,|\,\mathcal{A}_0^T))^2 + M_0(M_0(\hat{\theta}\,|\,\mathcal{A}_0^T))^2 \geqq \\ &\geqq M_0[\hat{\theta}-M_0(\hat{\theta}\,|\,\mathcal{A}_0^T)]^2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ha $\hat{\theta}$ korrekt becslés, $\hat{\theta}-M(\hat{\theta}|\mathscr{A}_0^T)$ is korrekt becslés marad. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ korrekt becslésekre

$$\hat{\theta}_1 - M_0(\hat{\theta}_1 | \mathscr{A}_0^T) = \hat{\theta}_2 - M_0(\hat{\theta}_2 | \mathscr{A}_0^T), \tag{1.5}$$

ahol az egyenlőség majdnem mindenütt értendő.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1(\xi(t)) - \hat{\theta}_2(\xi(t)) &= \hat{\theta}_1(\xi(t)-\xi(0)) - \hat{\theta}_2(\xi(t)-\xi(0)) = \\ &= \hat{h}(\xi(t)-\xi(0)),\end{aligned} \tag{1.6}$$

azaz $\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$ a $\xi(t)-\xi(0)$ funkcionálja, melyet $\hat{h}$-val jelölünk. A feltételes várható érték jól ismert tulajdonsága alapján

$$M(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 | \mathscr{A}_0^T) = \hat{h}(\xi(t)-\xi(o)). \tag{1.7}$$

(1. 6) és (1. 7)-ből adódik, hogy

$$M(\hat{\theta}_1 | \mathscr{A}_0^T) = M(\hat{\theta}_2 | \mathscr{A}_0^T) + \hat{h}(\xi(t)-\xi(0)) = M(\hat{\theta}_2 | \mathscr{A}_0^T) + \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$$

és ezzel (1. 5)-öt igazoltuk. (1. 5) speciális esete az

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt - M_0\left(\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt \,|\, \mathscr{A}_0^T\right) = \xi(0) - M_0(\xi(o) | \mathscr{A}_0^T)$$

összefüggés.

(1. 4) és (1. 5) összevetéséből adódik, hogy tetszőleges $\hat{\theta} \in \mathscr{K}$-ra

$$M_0(\hat{\theta})^2 \geqq M_0(u)^2,$$

ezzel igazoltuk a következő állítást:

1. 1. TÉTEL. *A korrekt becslések osztályában u minimális szórású becslése θ-nak.*

Könnyű megmutatni, hogy

$$\begin{aligned}D^2(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T) &= M_0\left[(\xi(0) - M(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T))^2 | \mathscr{A}_0^T\right] = \\ &= M_0(\xi^2(0)|\mathscr{A}_0^T) - M(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T)^2.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Példa. Legyen P_θ a stacionárius *Gauss—Markov* folyamat (θ, λ) paraméterekhez tartozó mértéke $\left(M_0\xi(t)^2 = \frac{1}{2\lambda}\right)$, tehát $\xi(t)$ elégítse ki a

$$d\,\xi(t) = -\lambda\xi(t)\,dt + \lambda\cdot\theta dt + d\,w(t)$$

differenciálegyenletet, ahol $w(t)$ a [0, 1] paraméterű *Wiener*-folyamat.

Ismeretes (lásd pl. [1]), hogy ha $V = L \times W$ (ahol L a *Lebesgue*, W pedig a feltételes *Wiener* mérték), akkor

$$\frac{dP_\theta}{dV} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\exp\left\{-\lambda\left[-\theta(\xi(0)+\xi(T)+\lambda\int_0^T \xi(t)\,dt) + \theta^2\left(1+\frac{\lambda T}{2}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{T}{2} + \frac{\lambda}{2}\int_0^T \xi^2(t) + \frac{\xi^2(0)+\xi^2(T)}{2}\right]\right\}.$$

Ebből az összefüggésből látható, hogy a maximum likelihood becslés

$$\hat{\theta}(\xi(t)) = \frac{\xi(0)+\xi(T)+\int_0^T \xi(t)\,dt}{2+\lambda T}$$

torzítatlan becslése θ-nak, s egyben elégséges statisztika is. A *Blackwell—Kolmogorov—Rao* egyenlőtlenség alapján minimális szórású torzítatlan becslés. Exponenciális eloszlás-családról lévén szó $\hat{\theta}$ teljessége miatt (lásd pl. LEHMAN [6] 183. o.) egyetlen legjobb torzítatlan becslés.

Mivel $\hat{\theta}$ egyben korrekt becslés is, $M(\hat{\theta}(\xi(t))|\mathscr{A}_0^T)=0$ és (1. 5) alapján

$$\xi(0)-M_0(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T) = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt - M_0\left(\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt|\mathscr{A}_0^T\right) =$$

$$= \frac{\xi(0)+\xi(T)+\lambda\int_0^T \xi(t)\,dt}{2+\lambda T},$$

ahonnan

$$M(\xi(0)|\mathscr{A}_0^T) = -\frac{\lambda\int_0^T (\xi(t)-\xi(0))\,dt+(\xi(T)-\xi(0))}{2+\lambda T}$$

$$M\left(\frac{1}{T}\int \xi(t)\,dt|\mathscr{A}_0^T\right) = \frac{2\int_0^T (\xi(t)-\xi(0))\,dt-T(\xi(T)-\xi(0))}{T(2+\lambda T)}.$$

2. A Pitman-féle becslés

A sűrűségfüggvény létezését feltételezve az azonos eloszlású, de nem független, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta esetén a *Pitman*-féle becslést (1. 2)-től eltérő alakban is kifejezhetjük. Legyen $p_0(x_1, \ldots, x_n)$ a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ változók együttes sűrűségfüggvénye, akkor az $\eta_1=\xi_1, \eta_2 = \xi_2-\xi_1, \ldots, \eta_n = \xi_n-\xi_{n-1}$ változók együttes sűrűségfüggvénye, $p_0(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p_0(y_1, y_2+y_1, \ldots, y_n+y_1)$. Innen

$$M_0(\xi_1|\xi_2-\xi_1, \ldots \xi_n-\xi_1) = M_0(\xi_1|\eta_2, \ldots \eta_n) = \frac{\int tp_0(t, \eta_2+t, \ldots \eta_n+t)\,dt}{\int p_0(t, \eta_2+t, \ldots \eta_n+t)\,dt},$$

ahonnan $t = \xi_1-x$ helyettesítéssel

$$M_0(\xi_1|\mathscr{A}_2^n) = \xi_1-\frac{\int xp_0(\xi_1-x, \xi_2-x, \ldots \xi_n-x)\,dx}{\int p_0(\xi_1-x, \xi_2-x, \ldots \xi_n-x)\,dx}$$

adódik. (1. 2)-vel összevetve a

$$\hat{\theta} = \frac{\int x p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \dots \xi_n - x)\, dx} \tag{2.1}$$

becslést kapjuk, mely akkor is létezik, amikor a ξ_i változók várható értéke esetleg nem létezik (pl. *Cauchy* eloszlás esetén, vö. [3]). Hasonló módon látható be, hogy

$$M_0(\xi_1^2|\mathscr{A}_2^n) = \frac{\int t^2 p_0(t, \eta_2 + t, \dots, \eta_n + t)\, dt}{\int p_0(t, \eta_2 + t, \dots \eta_n + t)\, dt} =$$

$$= -\xi_1^2 + 2\xi_1 M(\xi_1|\mathscr{A}_2^n) + \frac{\int x^2 p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \xi_2 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}.$$

(1. 8) alapján

$$D^2(\xi_1|\mathscr{A}_2^n) = \frac{\int x^2 p_0(\xi_1 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \dots \xi_n - x)\, dx} - \left(\frac{\int x p_0(\xi_1 - x, \dots \xi_n - x)\, dx}{\int p_0(\xi_1 - x, \dots \xi_n - x)\, dx} \right)^2. \tag{2.2}$$

Stein [9] bebizonyította, hogy a (2. 2) kifejezés $\frac{3}{2}$-ik hatványának várható értéke végessége esetén a (2. 1) becslés megengedhető becslése θ-nak, független megfigyelésekre. (A megengedhetőség definíciójában szereplő veszteségfüggvény itt és a továbbiakban természetesen a paramétertől való eltérés négyzetének várható értéke.) A tétel nyilván érvényben marad stacionárius sorozatokra is.

2. 1. *Példa.* Legyen a $\xi(n)$ stacionárius sorozat egyben *Gauss*-sorozat és elégítse ki a

$$\xi(n+k) + a_{k-1}\xi(n+k-1) + \dots + a_0\xi(n) = \varepsilon(n+k)$$

differenciaegyenletet, ahol az $\varepsilon(n)$ $(M\varepsilon(n)=0,\ D^2\varepsilon(n)=1)$ független Gauss-sorozat.

Ismeretes hogy (lásd [1])

$$p_0(x_1, x_2, \dots, x_N) = c_k \exp\{-\tfrac{1}{2}[(x_1, \dots, x_N)\, R(x_1, \dots, x_N)^*]\},$$

ahol $(a_k = 1,\ a_l = 0$, ha $l<0$ vagy $l>k$, és *-gal a komplex konjugáltat jelöljük)

$$R = \begin{pmatrix} a_k^2 & a_k a_{k-1} & \dots & a_k a_0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & a_k^2 + a_{k-1}^2 & a_{k-1}a_{k-2} + a_k a_{k-1} & \dots 0 \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & a_k^2 \end{pmatrix}$$

azaz R elemeire

$r_{ij} = r_{ji}$ és $r_{N-i\,N-j} = r_{ij}$, és (csak az $i < \frac{N}{2}$ és $j > i$ elemekre szorítkozva)

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j+i > k+1 \\ \sum\limits_{l=0}^{i} a_{k-l}^2 & \text{ha } a = j \\ \sum\limits_{l=0}^{i} a_{k-l}\, a_{k+(i-j)-l}, & \text{ha } j > i. \end{cases}$$

A (2. 1) *Pitman*-féle becslés

$$\frac{\int x \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1-x, \dots x_N-x)\, R\,(x_1-x, \dots x_N-x)^*\right\} dx}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1-x, \dots x_N-x)\, R\,(x_1-x, \dots x_N-x)^*\right\} dx},$$

amint arról egyszerű — de hosszadalmas — számolással meggyőződhetünk, megegyezik a maximum likelihood becsléssel. Speciálisan a $k=1$ esetben, amikor

$$\xi(n+1) = \varrho\, \xi(n) + \varepsilon(n+1),$$

azt kapjuk, hogy

$$\xi_1 - M_0(\xi_1|\mathscr{A}_2^N) = \frac{\xi_1+\xi_N+(1-\varrho)\sum_2^{N-1}\xi_i}{2+(N-2)(1-\varrho)},$$

és

$$M_0(\xi_1\,|\,A_2^N) = -\frac{(\xi_N-\xi_1)+(1-\varrho)\sum_2^{N-1}(\xi_i-\xi_1)}{2+(N-2)(1-\varrho)}.$$

Az időben folytonos $\xi(t)$ stacionárius folyamat *Pitman*-féle becslésén, amikor nem létezik $\xi(t)$ várható értéke, értsük a következőt. Legyen a $\xi(t)$ folyamathoz tartozó P_θ mérték abszolút folytonos Q mértékre nézve és jelölje *Radon—Nikodym* deriváltját:

$$\frac{dP_\theta}{dQ}(\xi(t)) = f_\theta(\xi(t)).$$

θ *Pitman*-féle becslése legyen

(2. 3)
$$\hat{\theta} = \frac{\int x f_0(\xi(t)-x)\,dx}{\int f_0(\xi(t)-x)\,dx}.$$

$\xi(t)$ várható értéke létezése esetén a (2. 3) és (1. 2) becslések megegyeznek, amint azt az időben diszkrét esetre megmutattuk. Az 1. pont példájában ily módon is megmutatható a maximum likelihood becslés és a *Pitman*-féle becslés megegyezése.

3. Megengedhető becslések

Az egydimenziós *Doob*-féle elemi *Gauss* stacionárius ([2]) folyamat esetén közvetlenül is bizonyítható a maximum likelihood, illetve a *Pitman*-féle becslés megengedhetősége. A *Stein*-féle bizonyítás kiterjesztése sztochasztikus folyamatok esetére nyitott kérdés marad, de láthatólag elvégezhető. A megengedhetőség bizonyításához HODGES és LEHMAN [5] módszerére van szükség, melyet itt a teljesség kedvéért ismétlünk.

Legyen a $\xi(t)$ stacionárius *Gauss*-folyamat $n-1$-szer differenciálható és elégítse ki a

(3. 1)
$$d\xi^{(n-1)}(t) + [a_{n-1}\xi^{(n-1)}(t) + \dots a_0(\xi(t)-\theta)]\,dt = dw(t)$$

differenciálegyenletet, ahol $w(t)$ az ismert Wiener-folyamat $Mdw(t)=0$, $M(dw)^2=dt$ paraméterekkel. Ismert, hogy $\xi(t)$ spektrál sűrűsége

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|(i\lambda)^n+a_{n-1}(i\lambda)^{n-1}+\ldots+a_0|^2}$$

alakú. A $\xi(t)$ folyamathoz tartozó mértéket jelöljük P_θ-val, hangsúlyozva ezzel, hogy $M_\theta\xi(t)=\theta$. Igaz a következő tétel:

3. 1. TÉTEL.
Az

$$m^* = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}[\xi^{(k)}(T)+(-1)^k\xi^{(k)}(0)]+a_0\int_0^T \xi(t)\,dt}{2a_1+a_0T} \tag{3.2}$$

maximum likelihood becslés egyben Pitman-féle becslés is és az $M_\theta\xi(t)=\theta$ $(-\infty<\theta<\infty)$ *paraméternek megengedhető becslése.*

A tétel bizonyítását több lépésben végezzük.

3. 1. LEMMA. *Ha a* $\boldsymbol{\xi}(t)=(\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t))$ *stacionárius folyamat eleget tesz a*

$$d\boldsymbol{\xi}(t)=A\boldsymbol{\xi}(t)\,dt+d\mathbf{w}(t) \tag{3.3}$$

differenciálegyenleteknek, ahol $\mathbf{w}(t)$ *n-dimenziós Wiener-folyamat (esetleg elfajult)* $M\mathbf{w}(dt)=0$ *és* $M((\mathbf{w})(dt)\mathbf{w}^*(dt))=B_w(0)\,dt$ *kovarianciamátrixszal (A sajátértékei negatív valós résszel bírnak), akkor*

$$B(t)=M\{\boldsymbol{\xi}(s+t)\boldsymbol{\xi}^*(s)\}=e^{At}B(o), \tag{3.4}$$

és

$$AB(o)+B(o)A^*=-B_w(o), \tag{3.5}$$

illetve (3. 5)*-ből adódik, hogy*

$$B^{-1}(o)A+A^*B^{-1}(o)=-B^{-1}(o)B_w(o)B^{-1}(o). \tag{3.6}$$

A lemma bizonyítása szerepel *Doob* [2] cikkében, itt egy új, a sztochasztikus differenciálegyenletek tulajdonságain alapuló bizonyítást adunk. (3. 3)-at $d\mathbf{w}^*(t)$-vel szorozva, s várható értéket képezve ($d\mathbf{w}(t)$ és $\boldsymbol{\xi}(t)$ függetlensége miatt)

$$Md\boldsymbol{\xi}(t)\,d\mathbf{w}^*(t)=B_w(o)\,dt$$

vagy

$$M\boldsymbol{\xi}(t+dt)\,d\mathbf{w}^*(t)=B_w(o)\,dt$$

adódik. Ezt felhasználva (3. 3)-at előbb $\boldsymbol{\xi}^*(t)$-vel szorozva, illetve $\boldsymbol{\xi}(t+dt)$-t (3. 3) bal és jobb oldalának konjugáltjával szorozva s mindkétszer várható értéket képezve kapjuk a

$$B(dt)-B(o)=AB(o)\,dt$$

$$B(o)-B(dt)=B(dt)A^*\,dt+B_w(o)\,dt$$

összefüggéseket, ahonnan összeadással $B(t)$ folytonosságából következik (3. 5). A (3. 4) összefüggés

$$\lim_{t\to 0} \frac{B(t)\,B^{-1}(o)-E}{t} = A \quad (E \text{ az egységmátrix}),$$

következménye. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

Legyen most $\xi(t)$ $(n-1)$-szer differenciálható és

$$(3.\,1')\qquad \begin{aligned} \xi_0(t) &= \xi(t) \\ \frac{d\xi_0(t)}{dt} &= \xi_1(t) \\ &\vdots \\ \frac{d\xi_{n-2}(t)}{dt} &= \xi_{n-1}(t) \end{aligned}$$

$$d\xi_{n-1}(t) = -\big(a_0(\xi_0(t)-\theta)+a_1\xi_1(t)+\ldots+a_{n-1}\xi_{n-1}(t)\big)\,dt+dw(t),$$

azaz (3. 1′) a (3. 1) differenciálegyenlet többdimenziós megfelelője. Ekkor

$$(3.\,7)\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B_w(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

3. 2. LEMMA. *Ha A (3. 7) alakú, akkor*

$$(3.\,8)\qquad B^{-1}(0) = 2\begin{pmatrix} a_0a_1 & 0 & a_0a_3 & 0 & a_0a_5\ldots a_0a_n \\ 0 & a_1a_2-a_0a_3 & 0 & a_1a_4-a_0a_5 & 0 \\ a_0a_3 & 0 & a_2a_3-a_1a_4+a_0a_5 & 0 & a_2a_n \\ \vdots & & & & \\ a_0a_n & & & & a_{n-1}a_n \end{pmatrix} \quad (\textit{ha } n \textit{ páratlan}),$$

ahol $a_n=1$ és $a_i=0$, ha $i<0$ vagy $i>n$, míg $B_{ij}^{-1}(0)$ elemeire

$$b_{ij}^{-1} = b_{ji}^{-1} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad i\equiv j+1 \pmod 2 \\ 2\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k a_{i-k}a_{j+1+k}, & \text{ha} \quad i\equiv j \pmod 2,\, i<j. \end{cases}$$

A lemma helyességéről (3. 6)-ba történő behelyettesítéssel győződhetünk meg. Ezután térjünk át a (3. 1)-nek eleget tevő $\xi(t)\,\big(M_0(\xi(t))=0\big)$ és $\xi(t)+\theta\,\big(M(\xi(t))=\theta\big)$ folyamatokhoz tartozó P_0 és P_θ mértékek *Radon—Nikodym* deriváltjainak meghatározására.

3. 3. LEMMA. *Érvényes a következő összefüggés:*

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t)) = \exp\left\{-\frac{1}{2}a_0\,\theta^2\,(a_0T+2a_1)+a_0^2\,\theta\int_0^T\xi(t)\,dt+\right.$$
(3. 9)
$$\left.+a_0\theta\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}[\xi^{(k)}(T)+(-1)^k\xi^{(k)}(0)]\right\}.$$

Bizonyítás. Jelölje $\varphi_\theta(x_0, \ldots, x_n)$ a (3. 1′) egyenletnek eleget tevő folyamat esetén $\xi_0(0), \ldots, \xi_{n-1}(0)$ sűrűségfüggvényét, akkor *Szkorohod* ismert tétele ([8], 131. o.) alapján

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t)) = \frac{\varphi_\theta(\xi(0), \ldots, \xi_{n-1}(0))}{\varphi_0(\xi_0(0), \ldots, \xi_{n-1}(0))}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T\alpha_i^2(\xi(t))\,dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T\alpha_i(\xi(t))\,dw_i(t)\right\} = \frac{\varphi_\theta(\xi_0(0), \ldots, \xi_{n-1}(0))}{\varphi_0(\xi_0(0), \ldots, \xi_{n-1}(0))}\exp\left\{-\frac{1}{2}a_0^2\theta^2T+a_0\theta\int_0^T dw(t)\right\},$$

ahol

$$(\alpha_0(\mathbf{x}), \ldots, \alpha_{n-1}(\mathbf{x})) = (A_\theta-A)\,\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, \theta a_0).$$

A (3. 2) lemma szerint

$$\frac{\varphi_\theta(\boldsymbol{\xi}(0))}{\varphi_0(\boldsymbol{\xi}(0))} = \exp\left\{-a_0a_1\,\theta^2+2a_0\,\theta\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\,\xi_{2k}(0)\right\},$$

másrészt a $dw(t)$ szerinti integrálást a (3. 1′) bal oldali kifejezésével helyettesítve ($\theta=0$ mellett) nyerjük, hogy

$$\frac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t)) = \exp\left\{-a_0\,a_1\,\theta^2+2a_0\,\theta\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1}\,\xi_{2k}(0)\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}a_0^2\,\theta^2\,T+\right.$$

$$\left.+a_0\,\theta\int_0^T[d\xi_{n-1}(t)+a_{n-1}\,\xi_{n-1}(t)\,dt+\ldots+a_0\,\xi_0\,dt]\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}a_0\,\theta^2\,(a_0\,T+2a_1)+a_0^2\,\theta\int_0^T\xi(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+a_0\,\theta\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}\,[\xi^{(k)}(T)+(-1)^k\,\xi^{(k)}(0)]\right\},$$

s ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A jól ismert faktorizációs tétel (lásd pl. LEHMAN [6] 75. o.) szerint $a_0\int_0^T\xi(t)dt+$ $+\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}[\xi^{(k)}(\tau)+(-1)^k\xi^{(k)}(0)]$ elégséges statisztika és a *Blackwell—Kolmogorov—Rao*-egyenlőtlenség szerint a (3. 2) maximum likelihood becslés minimális szórású torzítatlan becslés. A *Lehmann—Scheffé*-tételből ([6], 183. o.) következik az elégséges statisztika teljessége és hogy a (3. 2) maximum likelihood becslés az egyetlen minimális szórású torzítatlan becslés. Mivel (3. 2) korrekt becslés, egyben *Pitman*-féle becslés is. A *Pitman*-féle becslés (2. 3) alapján történő közvetlen kiszámolására itt nem térünk ki.

Könnyű megmutatni (lásd pl. GRENANDER [4] 243. o.), hogy

$$D^2 m^* = \frac{1}{a_0(2a_1 + a_0 T)}. \tag{3.10}$$

Legyen $\hat{\theta}(\xi(t))$ a θ egy becslése és $M_\theta(\hat{\theta}) = \theta + b_{\hat{\theta}}(\theta)$. A *Cramér—Rao*-egyenlőtlenség szerint

$$D_\theta^2(\hat{\theta}) = M_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 - b_{\hat{\theta}}^2(\theta) \geqq \frac{(1+b'_{\hat{\theta}}(\theta))^2}{M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}(\xi(t))\right)^2}. \tag{3.11}$$

Mivel m^* elégséges statisztika (de egyszerű számolással is belátható)

$$M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2 = \frac{1}{D_\theta^2(m^*)} = a_0(2a_1 + a_0 T).$$

3. 4. LEMMA. *Ha a $\hat{\theta}$ becslés olyan, hogy minden θ-ra teljesül a*

$$b_{\hat{\theta}}^2(\theta) + \frac{[1+b'_{\hat{\theta}}(\theta)]^2}{a_0(2a_1+a_0T)} \leqq \frac{1}{a_0(2a_1+a_0T)}$$

egyenlőtlenség, akkor $b_{\hat{\theta}}(\theta) \equiv 0$ $(-\infty < \theta < \infty)$.

Bizonyítás. A feltevésből következik egyrészt, hogy $|b_{\hat{\theta}}(\theta)|$ korlátos $(-\infty < \theta < \infty)$, másrészt, hogy $b'_\theta(\theta)$ nem lehet pozitív. Így $b_\theta(\theta)$ monoton csökkenő függvénye θ-nak, s korlátossága miatt létezik olyan $\theta_n \to -\infty$, ill. $\theta'_n \to \infty$ sorozat, hogy $b'(\theta_n)$ és $b'(\theta'_n)$ zérushoz tart. De ez csak akkor lehetséges, ha $b(\theta_n)$ és $b(\theta'_n)$ is zérushoz tart, amiből a lemma állítása következik.

Végül szükségünk van a következő, HODGES és LEHMANNtól származó lemmára (l. [5]):

3. 5. LEMMA. *Ha a θ^* becslésre a Cramer—Rao-egyenlőtlenségben minden θ-ra egyenlőség áll fenn és tetszőleges $\hat{\theta}$ becslésre a*

$$b_{\hat{\theta}}^2(\theta) + \frac{(1+b'_{\hat{\theta}}(\theta))^2}{M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2} \leqq b_{\theta^*}^2 + D_\theta^2(\theta^*) \tag{3.12}$$

egyenlőtlenség teljesülése maga után vonja a $b_{\hat{\theta}}(\theta) \equiv b_{\theta^*}(\theta)$ azonosságot, akkor θ^* megengedhető becslése θ-nak.

Bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy ha θ-ra teljesül $M_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 \leqq M_\theta(\theta^*-\theta)^2$ (minden θ-ra), akkor $\hat{\theta} = \theta^*$ azaz θ megengedhető. Ha

$$M_\theta(\hat{\theta}-\theta)^2 \leqq M_\theta(\theta^*-\theta)^2 = b_{\theta^*}^2(\theta) + \frac{[1+b'_{\theta^*}(\theta)]^2}{M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2},$$

akkor (3.11) szerint

$$b_{\hat\theta}^2(\theta)+\frac{(1+b'_{\hat\theta}(\theta))^2}{M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2} \leqq b_{\hat\theta}^2(\theta)+D_\theta^2(\hat\theta) = M_\theta(\hat\theta-\theta)^2 \leqq$$

$$\leqq b_{\theta^*}^2(\theta)+\frac{(1+b'_{\theta^*}(\theta))^2}{M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log\frac{dP_\theta}{dP_0}\right)^2}$$

is teljesül, de ez azt jelenti, hogy $b_{\hat\theta}(\theta)=b_{\theta^*}(\theta)$ és egyben $b'_{\hat\theta}(\theta)=b'_{\theta^*}(\theta)$. Így tehát $D_\theta^2(\hat\theta)=D_\theta^2(\theta^*)$ és $M_\theta(\hat\theta-\theta)^2=M_\theta(\theta^*-\theta)^2$, azaz $\hat\theta=\theta^*$, amit bizonyítani kellett. A 3. 5. és 3. 4. lemmákból közvetlenül adódik a 3. 1.tétel.

Amint az a bizonyításból látható, több dimenziós *Gauss*-stacionárius folyamatok várható értékének becsléseire a módszer nem terjeszthető ki. Független megfigyelések esetében — mint az jól ismert [10] — a megengedhetőség $n\geqq 3$ esetén (n az ismeretlen középértékek száma) nem is igaz. Kérdés, hogy kétdimenziós stacionárius *Gauss*-folyamat esetén igaz-e a megengedhetőség?

Ugyancsak érdekes megvizsgálni a minimax becslések és a (2. 3) *Pitman*-féle becslés kapcsolatát (vö. [3]).

A Cauchy-folyamat *Pitman*-becslésének vizsgálatára a későbbiekben kerül sor.

IRODALOM

[1] ARATÓ M.: Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról I, IV., *A Magy. Tud. Akad. III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 13—24 és **15** (1965) 107—124.
[2] DOOB, J. L.: The elementary Gaussian processes, *Ann. Math. Stat.* **15** (1944) 229—281.
[3] GIRSCHICK, M. A.—SAVAGE, L. J.: Bayes and minimax estimates for quadratic loss functions, *Proc. Second Berkeley Symp.* (1950) 53—73.
[4] GRENANDER, U.: Stochastic processes and statistical inference, *Arkiv för Matematik*, **1** (1950) No. 3, 195—277 (magyar fordítása: *MTA III. Oszt. Közleményei* (1965).
[5] HODGES, J. L.—LEHMANN, E. L.: Some applications of the Cramér-Rao inequality, *Proc. Second Berkeley Symp.* (1950) 13—22.
[6] LEHMANN, E. L.: *Testing Statististical Hypotheses*, 1960. (Orosz fordításban is megjelent.)
[7] PITMAN, E. J. G.: The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form, *Biometrika* **30** (1938) 391—421.
[8] Скороход, А. В.: Исследования по теории случайных процессов (1961) (Angol fordításban is megjelent).
[9] STEIN, CH.: The admissibility of Pitman's estimator of a single location parameter. *Ann. Math. Stat.* **30** (1959) No. 4, 970—979.
[10] STEIN, CH.—JAMES, W.: Estimation with quadratic loss, *Proc. Forth Berkeley Symp.* (1961) I., 361—379.

(Beérkezett: 1968. VI. 20.)

ON ADMISSIBLE ESTIMATION OF AN UNKNOWN MEAN OF STATIONARY PROCESSES WITH RATIONAL SPECTRAL DENSITY

by

M. ARATÓ

Summary

For a stationary process with unknown mean there is given the definiton of the Pitman estimation in the form of (1. 2.) and (2.3), where $f_0(\xi(t))$ is the *Radon-Nikodym* derivative. It is shown that in the case of stationary *Gaussian—Markov* process the maximum likelihood and *Pitman* estimates are the same.

Theorem 3. 1. states, that the maximum likelikood estimate of the unknown mean for the *Gaussian* process (3. 1) is a *Pitman* estimate and it is admissible. There is given the inverse matrix of the correlation matrix of the variables $\xi(0), \xi'(0), \dots, \xi^{(n-1)}(0)$ in the form (3. 8).

WALSH–FOURIER-SOROK ERŐS APPROXIMÁCIÓJÁRÓL

Írta: SCHIPP FERENC

Bevezetés

Legyen $x=0, x_0x_1...x_n...$ $(x_n=0, 1)$ az $x\in[0, 1)$ szám diadikus kifejtése, és R a $[0, 1)$ intervallum diadikus racionális számainak halmaza. A továbbiakban az $x\in R$ elemekre lehetséges kétféle felírás közül azt választjuk, amelyben egy bizonyos jegytől kezdve csupa 0 jegy áll.

Az $\{r_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, ...)$ *Rademacher*-féle függvényrendszert a következőképpen értelmezzük:

(1) $$r_n(x)=(-1)^{x_n} \qquad (x\in[0, 1), \quad n=0, 1, 2, ...).$$

Ismeretes, hogy a *Rademacher*-féle rendszer a $[0, 1)$ intervallumon erősen multiplikatív ortogonális függvényrendszer. Az $\{r_n(x)\}$ rendszer által generált $\{\psi_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, ...)$ szorzatrendszert *Walsh*-féle ortonormált rendszernek nevezzük, azaz $\psi_0(x)\equiv 1$, és ha az n természetes szám diadikus előállítása

(2) $$n=\sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i \qquad (n_i=0, 1),$$

akkor

(3) $$\psi_n(x)=\prod_{n_i=1} r_i(x).$$

Az (1), (2) és (3) egyenlőségekből következik az alábbi előállítás is:

(4) $$\psi_n(x)=(-1)^{\sum\limits_{i=0}^{\infty} n_i x_i}.$$

A *Walsh*-rendszer szerint haladó sorfejtések vizsgálatánál alapvető szerepet játszik az N. J. FINE [1] által az

$$x=0, x_0x_1...x_n...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{2^{n+1}}, \quad y=0, y_0y_1...y_n...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{2^{n+1}}$$

$$(x_n, y_n=0, 1)$$

számokra bevezetett következő „összeg”:

(5) $$x\overset{\circ}{+}y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^{n+1}}.$$

Könnyen látható, hogy a *Walsh*-függvények a fenti összeadásra nézve lényegében multiplikatív függvények, azaz

(6) $$\psi_n(x \overset{\circ}{+} y) = \psi_n(x)\psi_n(y) \qquad (x \overset{\circ}{+} y \notin R, \quad n = 0, 1, 2, \ldots),$$

továbbá, ha $f(x) \in L[0, 1)$, akkor bármely $[0, 1)$-beli y-ra $f(x \overset{\circ}{+} y) \in L[0, 1)$ és

(7) $$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(x \overset{\circ}{+} y)\, dx.$$

Jelöljük $D_n(x)$-szel az n-edik *Walsh—Dirichlet*-féle magfüggvényt, $S_n(f; x)$-szel az $f \in L[0, 1]$ függvény $\{\psi_n(x)\}$ rendszer szerint haladó *Fourier*-sorának n-edik részletösszegét, azaz legyen

(8) $$D_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(x),$$
$$S_n(f; x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu(f)\psi_\nu(x) = \int_0^1 f(x \overset{\circ}{+} u) D_n(u)\, du$$
$$\left(c_\nu(f) = \int_0^1 f(u)\psi_\nu(u)\, du\right).$$

Könnyen igazolható, hogy $n = 2^k + n'$-re $(0 < n' \leqq 2^k)$

(9) $$D_n(x) = D_{2^k}(x) + r_k(x) D_{n'}(x),$$

ahonnan $n' = 2^k$-ra a

(10) $$D_{2^{k+1}}(x) = \prod_{\nu=1}^{k} (1 + r_\nu(x)) = \begin{cases} 2^{k+1} & (x \in [0, 2^{-(k+1)})), \\ 0 & (x \in [2^{-(k+1)}, 1)) \end{cases}$$

egyenlőséget kapjuk.

G. W. MORGENTHALER [2] nyomán azt mondjuk, hogy az $f(x)$ $\big(x \in [0, 1)\big)$ függvény eleget tesz az α kitevős *Walsh—Lipschitz*-féle feltételnek (jelben: $f(x) \in \operatorname{Lip} \alpha(W)$), ha létezik olyan A_α állandó, hogy

(11) $$|f(x \overset{\circ}{+} y) - f(x)| \leqq A_\alpha y^\alpha \qquad \big(x, y \in [0, 1), x \overset{\circ}{+} y \notin R\big).$$

Mivel (5) alapján $|x - y| \leqq x \overset{\circ}{+} y$, azért minden a $[0, 1)$ intervallumon értelmezett, α-kitevős (közönséges) *Lipschitz*-féle feltételnek eleget tevő függvény egyben kielégíti az α kitevős *Walsh—Lipschitz*-féle feltételt is.

S. YANO [3] megmutatta, hogy minden $\operatorname{Lip} \alpha(W)$ $(0 < \alpha < 1)$ függvényosztályhoz tartozó függvény egyenletesen approximálható $n^{-\alpha}$ nagyságrendben a tekintett függvény *Walsh—Fourier*-sorának n-edik (C, β) $(\beta < \alpha)$ közepeivel, azaz

(12) $$\sigma_n^{(\beta)}(f; x) - f(x) = O(n^{-\alpha}) \qquad (0 < \alpha < 1, \alpha < \beta),$$

ahol

(13) $$\sigma_n^{(\beta)}(f; x) = \frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)} S_\nu(f; x)$$
$$\left(A_n^{(\beta)} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{n!}, \quad A_0^{(\beta)} = 1\right).$$

Jelöljük $h_n(f, p, \beta; x)$-szel az $f(x)$ függvény *Walsh—Fourier*-sorának ún. erős közepeit, azaz legyen

$$(14) \qquad h_n(f, p, \beta; x) = \left\{ \frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)} |S_\nu(f; x) - f(x)|^p \right\}^{1/p}.$$

Az erős approximáció megfelelő problémáját trigonometrikus és polinomszerű rendszerek szerinti kifejtésekre, azaz a $h_n(f, p, \beta; x)$ közepek konvergenciasebességének vizsgálatát ALEXITS GY. [4] vetette fel. Azóta több szerző (ALEXITS [5], ALEXITS—KRÁLIK [6], [7], LEINDLER [8]) foglalkozott e kifejtések erős közepeinek approximációs kérdéseivel; ezek a vizsgálatok számos érdekes eredményre vezettek.

E dolgozatban tetszőleges Lip $\alpha(W)$-beli függvény *Walsh*-függvények szerinti sorfejtésének erős approximációs tulajdonságaival foglalkozunk, nevezetesen igazoljuk a következő tételt:

Tétel: *Ha* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha(W)$, *ahol* $0 < \alpha < 1$ *és* $1/p > \alpha$, *akkor tetszőleges* $\beta > 0$ *esetén a* $[0, 1)$ *intervallumban egyenletesen fennáll a*

$$(15) \qquad h_n(f, p, \beta; x) = O(n^{-\alpha})$$

reláció.

Ez a tétel S. YANO említett tételének élesítését adja. Analóg tétel igaz trigonometrikus és polinomszerű rendszerekre. (Lásd: [5], [6], [7], [8].)

1. § Segédtételek

Tételünk igazolásához felhasználunk néhány segédtételt.

1. Segédtétel: *A*

$$(1.1) \qquad D_n^*(y; k) = \sum_{i=0}^{k-1} \psi_n\left(y + \frac{1}{2^{i+1}}\right) r_i(y) D_{2^i}(y)$$

módosított Walsh—Dirichlet-féle magfüggvénnyel a $D_n(y)$ *magfüggvény az alábbi módon állítható elő:*

$$(1.2) \qquad D_n(y) = \frac{D_{2^k}(y) - \psi_n(y)}{2} - \frac{D_n^*(y; k)}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Bizonyítás: Az (1. 2) azonosság igazolásához felhasználjuk a $D_n(y)$ magfüggvénynek a [9] dolgozatban megadott következő előállítását:

$$(1.3) \qquad D_n(y) = \psi_n(y) \sum_{i=0}^{k-1} n_i r_i(y) D_{2^i}(y),$$

ahol az $n_i (=0, 1)$ számok a diadikus alakban felírt $n = \sum_{i=0}^{k-1} n_i 2^i$ természetes szám jegyeit jelentik. Mivel (4) alapján

$$\frac{1 - \psi_n\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right)}{2} = \frac{1 - (-1)^{n_i}}{2} = n_i,$$

azért az (1), (6) és (1. 1) egyenlőségek figyelembevételével a

$$(1.4)\quad D_n(y) = 1/2\,\psi_n(y)\sum_{i=0}^{k-1} r_i(y)\,D_{2^i}(y) - 1/2\sum_{i=0}^{k-1}\psi_n(y \overset{\circ}{+} 1/2^{i+1})\,r_i(y)\,D_{2^i}(y)$$

egyenlőséget kapjuk.

Az (1. 3) azonosságot az $n=2^k-1=\sum_{i=0}^{k-1}2^i$ számra alkalmazva (3) és (10) alapján a

$$\sum_{i=0}^{k-1} r_i(y)\,D_{2^i}(y) = \psi_{2^k-1}(y)\,D_{2^k-1}(y) = \psi_{2^k-1}(y)\big(D_{2^k}(y)-\psi_{2^k-1}(y)\big) = \\ = D_{2^k}(y)-1$$

egyenlőség adódik, ahonnan (10), (1. 1) és (1. 4) figyelembevételével a

$$D_n(y) = \frac{D_{2^k}(y)-\psi_n(y)}{2} - \frac{D_n^*(y;k)}{2}$$

bizonyítandó állítást kapjuk.

2. Segédtétel: *Tetszőleges m természetes számra vezessük be a következő jelöléseket:*

$$(1.5)\quad u=(u_1,u_2\ldots,u_m),\quad E_m=\{u:u=u_1,u_2,\ldots,u_m),\,u_j\in[0,1),\,j=1,\ldots,m\},$$

$$\xi(u) = u_1 \overset{\circ}{+} u_2 \overset{\circ}{+} \ldots \overset{\circ}{+} u_m \qquad (u\in E_m).$$

Legyen továbbá

$$(1.6)\qquad I(m;k)=\{i:i=(i_1,i_2,\ldots,i_m),\ i_j\in G,\ 0\leqq i_j<k,\ j=1,2,\ldots,m\},$$

ahol G jelenti a nem negatív egész számok halmazát. Legyen végül

$$(1.7)\qquad \eta(i) = \frac{1}{2^{i_1+1}} \overset{\circ}{+} \frac{1}{2^{i_2+1}} \overset{\circ}{+} \ldots \overset{\circ}{+} \frac{1}{2^{i_m+1}},$$

$$\Delta(i,m;u) = \prod_{j=1}^{m} D_{2^{i_j}}(u_j),\qquad R_i(u) = \prod_{j=1}^{m} r_{i_j}(u_j)$$

és

$$(1.8)\qquad K^*_{2^k}(m;u) = 2^{-k}\sum_{\nu=0}^{2^k-1}\prod_{j=1}^{m} D^*_\nu(u_j;k),$$

ahol $u\in E_m$ és $i\in I(m,k)$.

Ekkor az E_m halmaz megszámlálható sok pontjától eltekintve fennáll a

$$(1.9)\qquad |K^*_{2^k}(m;u)| \leqq 2^{-k}\sum_{i\in I(m,k)} D_{2^k}\big(\xi(u)\overset{\circ}{+}\eta(i)\big)\,\Delta(i,m;u)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: A (6), (1. 1), (1. 5), (1. 6), (1. 7) és (1. 8) egyenlőségek alapján az E_m halmaz egy megszámlálható részhalmazát kivéve fennáll a

$$2^k K_{2^k}^*(m;u) = \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=0}^{k-1} \psi_\nu (u_j \overset{\circ}{+} 1/2^{s+1}) r_s(u_j) D_{2^s}(u_j) \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \sum_{i \in I(m,k)} \psi_\nu(\xi(u) \overset{\circ}{+} \eta(i)) R_i(u) \Delta(i,m;u) =$$

$$= \sum_{i \in I(m,k)} R_i(u) \Delta(i,m;u) \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \psi_\nu(\xi(u) \overset{\circ}{+} \eta(i)) =$$

$$= \sum_{i \in I(m,k)} R_i(u) \Delta(i,m;u) D_{2^k}(\xi(u) \overset{\circ}{+} \eta(i))$$

egyenlőség. Ebből

$$D_{2^k}(\xi(n) \overset{\circ}{+} \eta(i)) \geqq 0, \quad |R_i(u)| \equiv 1, \quad \Delta(i,m;u) \geqq 0$$

alapján (1. 9) már következik.

3. Segédtétel: *Bármely k természetes számra*

$$\int_{E_m} |K_{2^k}^*(m;u)| \, du \leqq C_1(m), \tag{1.10}$$

ahol $C_1(m)$ csak m-től függő állandó.

Bizonyítás: A 2. segédtétel alapján elegendő a

$$\delta_k = 2^{-k} \sum_{i \in I(m,k)} \int_{E_m} D_{2^k}(\xi(u) \overset{\circ}{+} \eta(i)) \Delta(i,m;u) \, du \leqq C_1(m) \tag{1.11}$$

egyenlőtlenséget igazolnunk. Az (1. 11)-ben szereplő integrálokra az $u_j' = u_j \overset{\circ}{+} \frac{1}{2^{i_j+1}}$ $(j=1, 2, \dots, m)$, $u' = (u_1', u_2', \dots, u_m')$ helyettesítéssel és a (10)-ből adódó $D_{2^{i_j}}\left(u_j' \overset{\circ}{+} \frac{1}{2^{i_j+1}}\right) = D_{2^{i_j}}(u_j')$ egyenlőség, valamint (7) figyelembevételével a következőt kapjuk:

$$\int_{E_m} \Delta(i,m;u) \, D_{2^k}(\xi(u) \overset{\circ}{+} \eta(i)) du = \int_{E_m} \Delta(i,m;u') \, D_{2^k}(\xi(u')) du' = \tag{1.12}$$

$$= \int_{E_m} \Delta(i,m;u) \, D_{2^k}(\xi(u)) du.$$

A (8) egyenlőség alapján az

$$\int_0^1 D_{2^{\nu_1}}(u_1) \, D_{2^{\nu_2}}(u_1 \overset{\circ}{+} v) \, du_1 = S_{2^{\nu_1}}(D_{2^{\nu_2}}; v) = D_{2^{\min(\nu_1,\nu_2)}}(v)$$

azonosságot nyerjük. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\int_{E_m} \Delta(i,m;u)\, D_{2^k}(\xi(u))\,du =$$

$$= \int_0^1 \Big(D_{2^{i_1}}(u_1)\ldots \int_0^1 \Big(D_{2^{i_{m-1}}}(u_{m-1}) \int_0^1 D_{2^{i_m}}(u_m)\, D_{2^k}(u_1 \dotplus u_2 \dotplus \ldots \dotplus u_m)\,du_m\Big)du_{m-1}\ldots\Big)du_1 =$$

$$= \int_0^1 \Big(D_{2^{i_1}}(u_1)\ldots \int_0^1 \Big(D_{2^{i_{m-2}}}(u_{m-2}) \int_0^1 D_{2^{i_{m-1}}}(u_{m-1})\, D_{2^{i_m}}(u_1 \dotplus \ldots \dotplus u_{m-1})\,du_{m-1}\Big)du_{m-2}\ldots\Big)du_1 =$$

$$= \int_0^1 \Big(D_{2^{i_1}}(u_1)\ldots \int_0^1 \Big(D_{2^{i_{m-3}}}(u_{m-3}) \int_0^1 D_{2^{i_{m-2}}}(u_{m-2})\, D_{2^{\min(i_{m-1}, i_m)}}(u_1 \dotplus \ldots \dotplus u_{m-2})\,du_{m-2}\Big)\ldots\Big)du_1 =$$

$$= \ldots = \int_0^1 D_{2^{i_1}}(u_1)\, D_{2^{\min(i_2, i_3, \ldots, i_m)}}(u_1)\,du_1 = D_{2^{\min(i_1, i_2, \ldots, i_m)}}(0) =$$

$$= 2^{\min(i_1, i_2, \ldots, i_m)}.$$

Jelöljük $m(i)$-vel az $i=(i_1, \ldots, i_m) \in I(m,k)$ vektor koordinátáinak minimumát. Az (1. 12)-t és a most kapott egyenlőséget egybevetve az

$$\int_{E_m} \Delta(i,m;u)\, D_{2^k}(\xi(u) \dotplus \eta(i))\,du = 2^{m(i)}$$

előállítás adódik, és ennek alapján (1. 11)-ből a

$$\delta_k = 2^{-k} \sum_{i \in I(m,k)} 2^{m(i)} = 2^{-k} \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^\nu \sum_{\substack{m(i)=\nu \\ i \in I(m,k)}} 1$$

egyenlőséget kapjuk. Mivel

$$\sum_{\substack{m(i)=\nu \\ i \in I(m,k)}} 1 < (k-\nu)^m,$$

azért

$$\delta_k < 2^{-k} \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^\nu (k-\nu)^m = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(k-\nu)^m}{2^{k-\nu}} < \sum_{\nu-1}^{\infty} \frac{\nu^m}{2^\nu} = C_1(m),$$

amivel az (1. 10) egyenlőtlenséget igazoltuk.

4. Segédtétel: *Bármely n természetes számra $p \geqq 1$ választás mellett*

$$(1.13) \qquad \left\{\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} |S_\nu(f;x)|^p\right\}^{1/p} \leqq C_2(p)\, M(f) \qquad (x \in [0,1), \quad n = 1, 2, \ldots),$$

ahol $M(f)$ az $f \in L[0,1]$ függvény abszolút értékének $[0,1)$ intervallumra vonatkozó lényeges felső határa és $C_2(p)$ csak p-től függő állandó.

Bizonyítás: Mivel (8) és (1. 2) alapján

$$S_\nu(f;x) = \int_0^1 f(x \dotplus y)\, D_\nu(y)\,dy = 1/2 \int_0^1 f(x \dotplus y)\, D_{2^k}(y)\,dy -$$

$$- 1/2 \int_0^1 f(x \dotplus y)\, \psi_\nu(y)\,dy - 1/2 \int_0^1 f(x \dotplus y)\, D_\nu^*(y;k)\,dy,$$

továbbá (3) és (10) alapján

$$\left|\int_0^1 f(x\dot{+}y)\,D_{2^k}(y)\,dy\right| \leqq M(f), \quad \left|\int_0^1 f(x\dot{+}y)\,\psi_\nu(y)\,dy\right| \leqq M(f),$$

azért

$$|S_\nu(f;x)|^p \leqq \left(M(f)+1/2\left|\int_0^1 f(x\dot{+}y)\,D_\nu^*(y;k)\,dy\right|\right)^p \leqq$$

$$\leqq 2^{p-1}M(f)^p+1/2\left|\int_0^1 f(x\dot{+}y)\,D_\nu^*(y;k)\,dy\right|^p =$$

$$= 2^{p-1}M(f)^p+1/2\,|S_\nu^*(f,k;x)|^p.$$

Ebből következik az

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|S_\nu(f;x)|^p \leqq 2^{p-1}M(f)^p+1/2n\sum_{\nu=0}^{n-1}|S_\nu^*(f,k;x)|^p \qquad (n<2^k)$$

egyenlőtlenség, amelynek figyelembevételével (1. 13) igazolásához elég megmutatnunk, hogy

$$\text{(1. 14)} \qquad \sigma_n^*(f,p;x) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|S_\nu^*(f,k;x)|^p\right\}^{1/p} \leqq C_1^*(p)\,M(f),$$

ahol $C_1^*(p)$ csak p-től függő állandó.

Jelöljük $k=k(n)$-nel azt a természetes számot, amelyre $2^{k-1}\leqq n<2^k$, és $m=m(p)$-vel azt a legkisebb páros számot, amelyre $m\geqq p$. Ekkor, mint ismeretes, fennállnak a

$$\text{(1. 15)} \qquad \sigma_n^*(f,p;x) \leqq \sigma_n^*(f,m;x) \leqq 2^{1/m}\sigma_{2^k}^*(f,m;x) \leqq 2^{1/p}\sigma_{2^k}^*(f,m;x)$$

egyenlőtlenségek. A $\sigma_{2^n}^*(f,m;x)$ közepek becsléséhez írjuk fel az $|S_\nu^*(f,k;x)|^m$ hatványt az alábbi alakban:

$$|S_\nu^*(f,k;x)|^m = \left\{\int_0^1 f(x\dot{+}y)\,D_\nu^*(y;k)\,dy\right\}^m =$$

$$= \left(\int_0^1 f(x\dot{+}u_1)\,D_\nu^*(u_1;k)\,du_1\right)\cdots\left(\int_0^1 f(x\dot{+}u_m)\,D_\nu^*(u_m;k)\,du_m\right) =$$

$$= \int_0^1\cdots\int_0^1\left(\prod_{j=1}^m f(x\dot{+}u_j)\,D_\nu^*(u_j;k)\right)du_1\ldots du_m,$$

és vezessük be az

$$\text{(1. 16)} \qquad F_m(x;u) = \prod_{j=1}^m f(x\dot{+}u_j) \qquad (x\in[0,1),\ u=(u_1,\ldots,u_m)\in E_m)$$

jelölést. Ezek és a 2. segédtétel jelöléseinek felhasználásával $\sigma^*_{2^k}(f, m; x)$-re a következőt kapjuk:

$$\sigma^*_{2^k}(f, m; x) = \left\{2^{-k} \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \int_{E_m} F_m(x; u) \sum_{j=1}^{m} D^*_\nu(u_j; k)\, du\right\}^{1/m} =$$

$$= \left\{ \int_{E_m} \left(F_m(x; u)\, 2^{-k} \sum_{\nu=0}^{2^k-1} \prod_{j=1}^{m} D^*_\nu(u_j; k) \right) du \right\}^{1/m} =$$

$$= \left\{ \int_{E_m} F_m(x; u)\, K^*_{2^k}(m; u)\, du \right\}^{1/m}.$$

Ebből az (1. 10) és az (1. 16)-ból adódó

$$|F_m(x; u)| \leqq M(f)^m$$

egyenlőtlenség alapján a

$$\sigma^*_{2^k}(f, m; x) \leqq M(f) \left\{ \int_{E_m} |K^*_{2^k}(m; u)|\, du \right\}^{1/m} \leqq$$

$$\leqq M(f) \{C_1(m)\}^{1/m} \leqq \{C_1(p+2)\}^{1/p} M(f)$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amivel (1. 14)-et, s ezzel együtt az (1. 13) egyenlőtlenséget is igazoltuk.

2. § A tétel igazolása

Az (1. 13) egyenlőtlenség birtokában tételünk hasonló módszerrel bizonyítandó, amellyel az analóg állítást trigonometrikus vagy polinomszerű rendszerre igazolták.

Legyen $2^{k_0-1} < n \leqq 2^{k_0}$ és vezessük be az $N_0 = 0$, $N_l = 2^{l-1}$ $(l = 1, 2, \ldots, k_0)$, $N_{k_0+1} = n$ jelöléseket. A tétel igazolásához felhasználjuk a $(\beta-1)q' > -1$ esetén fennálló

$$\text{(2. 1)} \qquad \left\{ \sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} (A^{(\beta-1)}_{n-\nu-1})^{q'} \right\}^{1/q'} = O(1)\, 2^{-l/p'} \sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A^{(\beta-1)}_{n-\nu-1} \qquad (l = 2, 3, \ldots, k_0+1)$$

egyenlőtlenséget, ahol $p' = \dfrac{q'}{q'-1}$ ([8]).

Legyen $f(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha(W)$ $(0 < \alpha < 1)$ és

$$T_l(x) = S_{2^l}(f; x) = \int_0^1 f(x \dot{+} y)\, D_{2^l}(y)\, dy \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ekkor (10) és (11) alapján magától értetődően érvényes az

$$\text{(2. 2)} \qquad |f(x) - T_l(x)| \leqq \int_0^1 |f(x \dot{+} y) - f(x)|\, D_{2^l}(y)\, dy \leqq A_\alpha 2^{-l\alpha}$$

egyenlőtlenség, következésképpen $\nu \geqq 2^l$-re nyerjük, hogy

$$(2.3)\qquad |S_\nu(f;x)-f(x)|^p = |(S_\nu(f;x)-S_\nu(T_l;x))+(T_l(x)-f(x))|^p \leqq$$
$$\leqq 2^{p-1}\{|S_\nu(f-T_l;x)|^p+|T_l(x)-f(x)|^p\} = O(1)\{|S_\nu(f-T_l;x)|^p+2^{-l\alpha p}\}.$$

A (2. 3) egyenlőtlenség felhasználásával

$$(2.4)\qquad \begin{aligned}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)-f(x)|^p &= O(2^{-l\alpha p})\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}+\\ &+O(1)\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f-T_l;x)|^p \qquad (l=2,3,\ldots,k_0+1).\end{aligned}$$

Válasszuk a p' számot olyan nagyra, hogy $(\beta-1)q'>-1$ teljesüljün $\left(q'=\dfrac{p'}{p'-1}\right)$, amikor is a *Hölder*-egyenlőtlenség és (2. 1) alapján

$$(2.5)\qquad \begin{aligned}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(T_l-f;x)|^p &\leqq \left\{\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} (A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)})^{q'}\right\}^{1/q'}\left\{\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} |S_\nu(T_l-f;x)|^{pp'}\right\}^{1/p'} =\\ &= O(1)\left\{2^{-l/p'}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}\right\}\left\{\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} |S_\nu(f-T_l;x)|^{pp'}\right\}^{1/p'} \qquad (l=2,3,\ldots,k_0+1).\end{aligned}$$

Mivel a 4. segédtétel és (2. 2) alapján

$$\left\{\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} |S_\nu(f-T_l;x)|^{pp'}\right\}^{1/p'} = O(1)\,N_l^{1/p'}2^{-\alpha l p} = O(1)\,2^{l/p'}2^{-\alpha l p},$$

azért (2. 4) és (2. 5) figyelembevételével a

$$(2.6)\qquad \sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)-f(x)|^p = O(1)\,2^{-\alpha l p}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)} \qquad (l=2,3,\ldots,k_0+1)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel $\gamma>-1$ mellett

$$(2.7)\qquad 0<K_1<\frac{A_n^{(\gamma)}}{n^\gamma}<K_2,$$

így azt kapjuk, hogy $A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}=O(1)n^{(\beta-1)}(\nu<2^{k_0-2})$. Ennek figyelembevételével

(2. 6) és (2. 7) alapján a (14) értelmezés szerint a

$$h_n^p(f,p,\beta;x)=\frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{\nu=0}^{n-1}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)-f(x)|^p\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{l=2}^{k_0-1}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)-f(x)|^p+$$

$$+\frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{l=k_0}^{k_0+1}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}|S_\nu(f;x)|-f(x)|^p=$$

$$=O(1)\frac{1}{n^\beta}\sum_{l=2}^{k_0-1}2^{-\alpha lp}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}+\frac{O(1)}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{l=k_0}^{k_0+1}2^{-\alpha lp}\sum_{\nu=N_{l-2}}^{N_{l-1}}A_{n-\nu-1}^{(p-1)}=$$

$$=O(1)\frac{1}{n^\beta}\sum_{l=2}^{k_0-1}2^{-\alpha lp}n^{\beta-1}2^l+\frac{O(1)\,2^{-\alpha k_0 p}}{A_{n-1}^{(\beta)}}\sum_{\nu=0}^{n-1}A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)}=$$

$$=O(1)\left\{\frac{1}{n}\sum_{l=2}^{k_0-1}2^{(1-\alpha p)l}+2^{-\alpha k_0 p}\right\}$$

egyenlőségeket nyerjük, ahonnan $1-\alpha p>0$ miatt a

$$h_n^p(f,p,\beta;x)=O(1)\left\{\frac{1}{n}2^{(1-\alpha p)k_0}+2^{-\alpha k_0 p}\right\}=O(1)\,2^{-\alpha p k_0}=O(1)n^{-\alpha p}$$

bizonyítandó állítást kapjuk.

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] N. J. FINE: On the Walsh functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 372—414.
[2] G. W. MORGENTHALER: On Walsh-Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 472—507.
[3] S. YANO: On approximation by Walsh functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 962—967.
[4] G. ALEXITS: Une contribution à la théorie constructive des fonctions, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 149—157.
[5] G. ALEXITS: Sur les bormes de la théorie de l' approximation des fonctions continues par polynômes, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **8** (1963), 329—340.
[6] G. ALEXITS—D. KRÁLIK: Über den Annäherungsgrad der Approximation im Starken Sinne von stetigen Funktionen, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **8** (1963), 317—327.
[7] G. ALEXITS—D. KRÁLIK: Über die Approximation im Starken Sinne, *Acta Sci. Math.*, **25** (1965).
[8] L. LEINDLER: Über die Approximation im Starken Sinne, *Acta. Math. Sci. Hung.*, **16** (1965). 255—262.
[9] F. SCHIPP: Über die Größenordnung der Partialsummen der Entwicklung integrierbarer Funktionen nach *W*-Systemen, *Acta Sci. Math.* **28** (1967), 123—134.

(Beérkezett: 1968. VI. 30.)

ON THE STRONG APPROXIMATION BY THE PARTIAL SUMS OF THE WALSH—FOURIER SERIES

by

F. SCHIPP

Summary

This paper gives a generalisation of the theorem of S. YANO [3]:

Let $S_n(f;x)$ be the n-th partial sum of the *Walsh—Fourier* expansion of $f(x) \in L[1,0]$ and let $h_n(f, p, \beta; x)$ be the following mean:

$$h_n(f, p, \beta; x) = \frac{1}{A_{n-1}^{(\beta)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{(\beta-1)} |S_\nu(f; x) - f(x)|^p \right\}^{1/p}$$

$$\left(A_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}, p \geqq 1, \beta > 0 \right).$$

The main result is the following theorem: If $f(x)$ satisfies the condition $f(x) \in \mathrm{Lip}\, \alpha(W) (0 < \alpha < 1)$ [2] and if $p^{-1} > \alpha$, then the estimate

$$h_n(f, p, \beta; x) = O(n^{-\alpha}) \quad (\beta > 0)$$

is true uniformly in the interval [0,1].

A CSOPORTOK FÉLHÁLÓJAKÉNT ELŐÁLLÍTHATÓ FÉLCSOPORTOK IDEÁLELMÉLETI JELLEMZÉSE

Írta: LAJOS SÁNDOR

Alexits György akadémikus 70. születésnapjára

Legyen S tetszőleges félcsoport[1]. CLIFFORD nyomán azt mondjuk, hogy az S félcsoport *csoportok félhálója*[2], ha S előállítható a G_α $(\alpha \in I)$ páronként idegen csoportok egyesítéseként:

(1)
$$S = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha,$$

továbbá bármely két G_α, G_β csoport szorzata benne van valamelyik G_γ $(\gamma \in I)$ csoportban:

(2)
$$G_\alpha G_\beta \subseteqq G_\gamma; \quad G_\beta G_\alpha \subseteqq G_\gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in I).$$

Ismert, hogy egy tetszőleges félcsoport akkor és csakis akkor áll elő csoportok félhálójaként, ha

1. $a \in a^2 S \cap S a^2$ az S félcsoport bármelyik a elemére, és
2. $ef = fe$ az S félcsoport bármely két idempotens elemére.[3]

Az a kikötés, hogy az S félcsoport csoportok félhálója, ekvivalens a következő állítások közül bármely kettőnek a fennállásával:

I. S csoportok egyesítése.
II. S inverz félcsoport.
III. S-nek mindegyik egyoldali ideálja kétoldali ideál. (Lásd CLIFFORD és PRESTON [2].)

Ebben a dolgozatban a csoportok félhálójaként előállítható félcsoportoknak két ideálelméleti jellemzését bizonyítjuk.

1. TÉTEL. *Egy S félcsoport akkor és csakis akkor csoportok félhálója, ha az*

(3)
$$L \cap R = LR$$

összefüggés érvényes S-nek bármelyik L bal és bármelyik R jobb ideáljára.

2. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy tetszőleges S félcsoport csoportok félhálója legyen, szükséges és elégséges, hogy az*

(4)
$$L_1 \cap L_2 = L_1 L_2$$

és az

(5)
$$R_1 \cap R_2 = R_1 R_2$$

[1] A félcsoportelméleti alapfogalmak definíciójára nézve utalunk a szerző [4] dolgozatára, illetve CLIFFORD és PRESTON [2] monográfiájára.
[2] A félháló definíciója megtalálható SZÁSZ GÁBOR [8] könyvében.
[3] Lásd R. CROISOT [3].

összefüggés fennálljon az S-nek bármely két L_1, L_2 bal ideáljára, illetve az S-nek bármely két R_1, R_2 jobb ideáljára.

Az 1. *tétel bizonyítása.* Elégségesség. Először megmutatjuk, hogy a (3) feltételt kielégítő S félcsoportban bármelyik egyoldali ideál kétoldali. Tegyük fel hogy L az S félcsoportnak tetszőleges bal ideálja. Akkor $R=S$ esetén a (3) feltétel így fest:

$$L\cap S=LS.$$

Innen következik, hogy L jobb ideál is, tehát valóban kétoldali ideálja az S félcsoportnak. Hasonló módon lehet igazolni, hogy az S félcsoportnak bármelyik R jobb ideálja is kétoldali ideál.

Másodszor bebizonyítjuk, hogy a (3) feltételt kielégítő S félcsoport reguláris, azaz $a\in aSa$ a félcsoportnak mindegyik a elemére. Minthogy

$$aS=S\cap aS=SaS$$

és

$$Sa=Sa\cap S=SaS$$

az S félcsoport bármelyik a elemére, azért

$$aS=Sa, \tag{6}$$

vagyis S normális félcsoport. Ismert[4], hogy egy normális félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha $L^2=L$ a félcsoportnak bármelyik L bal ideáljára. Ha L az S félcsoportnak tetszőleges bal ideálja, akkor az kétoldali ideál, s a (3) feltételből következik, hogy

$$L\cap L=LL, \tag{7}$$

tehát S valóban reguláris.

Mivel egy normális félcsoport idempotens elemei a félcsoport centrumában vannak, ezért az

$$ef=fe \tag{8}$$

feltétel fennáll az S félcsoportnak bármely két idempotens elemére (lásd [2]). Így S olyan reguláris félcsoport, amelynek bármely két idempotens eleme felcserélhető. Ez azt jelenti, hogy S inverz félcsoport.

Megmutattuk tehát, hogy a (3) feltételt kielégítő S félcsoport olyan inverz félcsoport, amelynek bármelyik egyoldali ideálja kétoldali ideál. Így S kielégíti a fentebb említett II. és III. feltételt, tehát csakugyan csoportoknak a félhálója. A (3) feltétel elégséges ahhoz, hogy egy félcsoport csoportok félhálója legyen.

Szükségesség. Megmutatjuk, hogy a (3) feltétel szükséges is ahhoz, hogy egy félcsoport csoportok félhálója legyen. Ha ugyanis az S félcsoport csoportoknak a félhálója, akkor kielégíti az előbbi I—III. feltételeket. Ebből következik, hogy S reguláris, s mivel reguláris félcsoportban

$$R\cap L=RL \tag{9}$$

bármely L bal és bármely R jobb ideálra, azért

$$A\cap B=AB \tag{10}$$

[4] Lásd LAJOS [4] és [5].

fennáll az S-nek bármely két ideáljára. Így (3) valóban érvényes az S félcsoportnak bármely L bal, illetve bármely R jobb ideáljára.

Ezzel az 1. tételt teljesen bebizonyítottuk.

Hasonló gondolatmenettel lehet bizonyítani a 2. tételt is. Az 1. és a 2. tételből következik az alábbi eredmény:

3. TÉTEL.[5] *Egy tetszőleges S félcsoportra vonatkozólag a következő állítások egymással ekvivalensek:*

(A) *S csoportoknak a félhálója.*

(B) *$L\cap R=LR$ az S-nek bármely L bal és bármely R jobb ideáljára.*

(C) *$L_1\cap L_2=L_1L_2$ és $R_1\cap R_2=R_1R_2$ az S-nek bármely két L_1, L_2 bal ideáljára és bármely két R_1, R_2 jobb ideáljára.*

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. H. CLIFFORD, Bands of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 499—504.

[2] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups*, vol. I—II. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1961; 1967.

[3] R. CRÓISOT, Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **70** (1953), 361—379.

[4] LAJOS S., A félcsoportok ideálelméletéhez, *Magyar. Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **11** (1961), 57—66; II. rész: **14** (1964), 293—299.

[5] S. LAJOS, A criterion for Neumann regularity of normal semigroups, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 172—173.

[6] S. LAJOS, On semigroups which are semilattices of groups, *Acta Sci, Math.* **30** (1969), 133—135.

[7] S. LAJOS, A note on completely regular semigroups, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 261—265.

[8] SZÁSZ G., *Bevezetés a hálóelméletbe*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.

(Beérkezett: 1968. VIII. 21.)

CHARACTERIZATIONS OF SEMIGROUPS WHICH ARE SEMILATTICES OF GROUPS

By

S. LAJOS

Summary

The author proves the following results.

THEOREM 1. *The following conditions on a semigroup S are equivalent:*

(A) *S is a semilattice of groups.*

(B) *$L\cap R = LR$ for any left ideal L and for any right ideal R of S.*

(C) *$L_1\cap L_2 = L_1L_2$ and $R_1\cap R_2 = R_1R_2$ for any two left ideals L_1, L_2* of *S and for any two right ideals R_1, R_2 of S.*

THEOREM 2. *A commutative regular semigroup is a semilattice of groups.*

THEOREM 3. *Let S be a semigroup which is a semilattice of groups. Then the set of all ideals of S is a semilattice (commutative band) under the multiplication of subsets.*

For the terminology we refer to A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON [2].

[5] Ebből következik, hogy 1. *egy csoportok félhálójaként előállítható félcsoport összes ideáljai a komplexus szorzásra nézve félhálót alkotnak*, és 2. *bármely kommutatív reguláris félcsoport csoportoknak a félhálója.*

A STATISZTIKUS MECHANIKA NÉHÁNY ELOSZLÁSTÉTELÉRŐL*

Írta: VINCZE ISTVÁN

Bevezetés

BOLTZMANN, majd PLANCK munkáiban egy általános eljárás került kidolgozásra, amely megadja, hogy egy rendszer összes energiája hogyan oszlik meg a rendszert alkotó nagyszámú — azonos típusúnak és függetlennek feltételezett — részecskéje között. A módszer tisztán valószínűségszámítási, amely lényegében a maximum likelihood elv alkalmazása. JAYNES [5] 1957-ben a módszernek információelméleti megfogalmazását adta. A diszkrét eloszlás esetével foglalkozik és a folytonos esetre a kérdést alapvetően bonyolultabbnak ítélte meg [lásd i. h. 622. o. 6) lábjegyzet]. Ugyancsak JAYNES egy 1968. évben megjelent könyvismertetéséből kitűnik, hogy a kérdést ma sem tekinti a statisztikus fizika elmélete szempontjából lezártnak.

PLANCK „A normálspektrum energiaeloszlási törvényének elmélete" című előadásában maga is arra hivatkozik, hogy ha a teljes energia „minden határon túl részeire osztható, akkor végtelen sokféle eloszlás valósulhat meg". A következő mondatában — mintegy e körülményt tekintve a nehézség okának — az energiát diszkrét értékeket felvevő mennyiségnek tekinti és bevezeti a h mennyiséget. PLANCK itt nyilván az eloszlás folytonos voltából eredő kombinatorikus nehézségekkel találta magát szemben, azonban nem állítható, hogy ez lett volna valóban és kizárólag az oka a kvantumhipotézis felállításának. Mind a kvantumelmélet sikerei, ahogyan a fizika számos problémáját megoldotta, mind pedig az a körülmény, hogy az energiaeloszlásra kapott diszkrét eloszlásfüggvényt akadály nélkül helyettesíthették volna a megfelelő folytonos eloszlással, arra utalnak, hogy több irányú meggondolás vezette a fizikusokat az elméletnek a kvantumhipotézis alapján való kifejlesztésére.

Nem érdektelen azonban a felmerült valószínűségszámítási feladat vizsgálata és a fizikusok által e téren alkalmazott módszer egzaktabb matematikai megalapozása mind folytonos, mind diszkrét változó esetében. Hasonló nehézség merül fel a SHANNON által megadott entrópia-fogalomnak folytonos változóra való kiterjesztése esetén, mely kiterjesztést a szerző [11, 12] dolgozatában vitte keresztül, majd ettől függetlenül néhány évvel később JAYNES [5a] is erre az eredményre jut. A *Boltzman—Planck*-féle alapproblémának egzakt megoldásmódja is hasonló ehhez. A *Boltzmann—Planck*- módszer a maximum likelihood módszerrel teljes analógiát mutat. Ez természetesen csupán analógia: a maximum likelihood módszer jogosságát (konzisztencia, efficiencia) bizonyos eléggé általános feltételek mellett bizonyítani lehet. A *Boltzmann—Planck*-eloszlás jogosságát semmiféle matematikai módszerrel, „bizonyítani" nem lehet, azt csupán a tapasztalattal való egyezés támaszthatja

* Szerző e vizsgálatairól beszámolt 1968. szeptember 3-án Amszterdamban a "*European Meeting 1968 on Statistics, Econometrics and Management Science*" konferencián.

alá. Mindamellett a kérdésnek érdekes valószínűségelméleti vonatkozásai vannak, amiről külön szólunk.

Az alábbi tárgyalásban előjövő egyes matematikai meggondolások már ismertek; így JAYNES említett munkáján kívül SANOV [10], KULBACK [6a] munkájában megtalálhatók. Az alábbiakban a kialakult módszer matematikai szempontból való kifogástalan tárgyalását és olyan értelmezését adjuk, amely plauzibilis, semmiféle információelméleti, vagy a valószínűségszámítástól, ill. fizikai meggondolásoktól idegen elv alkalmazását nem teszi szükségessé. A módszer mind folytonos, mind diszkrét eloszlású változó esetére alkalmazható. Az, hogy adott esetben diszkrét vagy folytonos modellt válasszunk-e, a jelenség természetétől függ, és a feltevés a tapasztalattal való egyezésében nyerheti igazolását. Ugyanakkor megmutatjuk, hogy ha a *Bose—Einstein-* vagy *Fermi—Dirac*-elvekre alkalmazunk folytonos modellt, akkor az ismerttől eltérő eredményre jutunk, amelynek a klasszikus eloszlások csak első közelítései. Minthogy azonban a folytonos modell a diszkrét modell (numerikus) közelítésének tekinthető, a valóságos helyzet jobb leírását adhatja. Ezek az eloszlások sajnos explicite nem adhatók meg és csupán numerikus módszerek vezethetnek eredményre.

Tárgyalásunk, amely a *Boltzmann—Planck*-féle eljárás kifejtése, még azzal az előnnyel is bír, hogy nincs szükség a változó értéktartományának egyenlő „apriori" valószínűségű részekre való felosztására; ugyanakkor természetes módon adódik a termodinamikai valószínűség logaritmusára, tehát a termodinamikai entrópiára az

$$S = -k \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{d\Phi(x)}$$

alakú kifejezés, amely mind diszkrét, mind folytonos változó esetén érvényes. Itt $F(x)$ a szóban forgó véletlen ingadozást mutató fizikai mennyiség eloszlásfüggvénye, míg $\Phi(x)$ az „apriori" eloszlás, melynek értelmezésére többféle lehetőség van; az apriori eloszlás lényegében már BOLTZMANN munkájában fellép.

Szerző ezúttal mond köszönetet RÉNYI ALFRÉD akadémikusnak és FÉNYES IMRÉnek, a fizikai tudományok doktorának értékes megjegyzéseikért.

1. §. Az eloszlás kiválasztására vonatkozó elv

Tekintsünk egy $\mathscr{E}$ fizikai rendszert (pl. ideális gáz egy részecskéje) és legyen az X valószínűségi változó a rendszerrel kapcsolatos valamely mennyiség (pl. energia, sebesség stb.). Kiindulunk abból, hogy a rendszernek valamely állapotában az X változó eloszlását a $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény írja le, amely kifejezi a rendszer magatartását az adott helyzetben. Kérdés, hogy a rendszert érő valamely hatás eredményeként mi lesz X eloszlása.

A következő két feltételezéssel élünk:

a) Az X változó a tartós hatásra is ugyanavval az értékkészlettel rendelkezik, mint a rendszer kiinduló állapotában. Ezt a követelményt alább pontosabban megfogalmazzuk. (Más eset tárgyalására később kívánunk rátérni.)

b) Az X változó *alapvető magatartását* a feltételezett hatás létrejötte után is *lényegében* a $\Phi(x)$ eloszlástörvény szabja meg, bár attól a tényleges eloszlás a kényszer folytán el fog térni.

A hatást abban a legegyszerűbb formában vesszük tekintetbe, hogy az X változóra az $\int_{-\infty}^{\infty} x d\Phi(x) = m_0$-tól különböző m első momentumot kényszerítünk.

Ha az X eloszlására tekintetbe jövő eloszlások összessége véges sok paraméterrel volna megadható, akkor a maximum likelihood módszerhez analóg eljárásnak nem volna akadálya. Így a következő eljárást követjük: a tekintetbe jövő eloszlások összességében egy pszeudosűrűséget vezetünk be; szemléletesen szólva: meghatározzuk annak valószínűségét, hogy a $\Phi(x)$ eloszlású X változóra vonatkozó igen nagy számú megfigyelés eredményéből konstruált tapasztalati eloszlásfüggvény nem a $\Phi(x)$-hez, hanem valamely tekintetbe jövő $F(x)$ eloszlásfüggvényhez esik közel. Más szóval: annak valószínűségét határozzuk meg, hogy a $\Phi(x)$ eloszlású változóra vett nagy minta olyan képet mutat, mintha eloszlásfüggvénye $F(x)$ volna. Ennek az eseménynek a valószínűsége növekvő megfigyelésszámmal természetesen zéróhoz tart, miként annak a valószínűsége is, hogy egy folytonos eloszlású változó értéke egy előre megadott értéket vesz fel; ugyanakkor azonban létezik a folytonos valószínűségi változó *sűrűsége* az adott pontban. Esetünkben az $F(x)$-beli *pszeudosűrűségről* beszélünk, amely a *Boltzmann—Planck*-eljárás következetes keresztülvitele esetén a következő kifejezés:

$$e^{-\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{d\Phi(x)}}.$$

A kitevőben negatív előjellel az információelméletben használt ún. relatív információ vagy I-divergencia áll. E kifejezés veszi át szerző [10] és JAYNES [5a] munkájában a folytonos változó esetében a *Shannon*-féle entrópiakifejezés szerepét, illetve abból határátmenettel nyerhető.

Ily módon a szóba jöhető eloszlások összességében pszeudosűrűséget vezettünk be és a maximum likelihood módszer analogonját alkalmazhatjuk. Előbb azonban a mondottakat pontosabban megfogalmazzuk.

2. § Az I-divergencia mint pszeudo-likelihood függvény. Sanov formulája

1. Legyen X valószínűségi változó az $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ valószínűségi mezőn $\Phi(x)$ eloszlásfüggvénnyel:

$$P(X<x) = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Jelölje μ_F azt a mértéket, amelyet az $F(x)$ eloszlásfüggvény a $(-\infty, \infty)$ számegyenes *Borel*-halmazain értelmez. Tekintsük az eloszlásfüggvények ama $\mathscr{F}_\Phi$ halmazát, amelynek $F(x)$ elemeire a μ_F mérték ekvivalens a μ_Φ-vel, azaz egymásra nézve kölcsönösen folytonosak:

$$\mathscr{F}_\Phi = \{F(x): \mu_\Phi \ll \mu_F \quad \text{és} \quad \mu_F \ll \mu_\Phi\}.$$

Tekintsük továbbá a valós egyenes egy felosztásrendszerét, azaz minden $n > 1$ egész számra a

$$\{-\infty = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = +\infty\}$$

osztópontrendszert, amely bírjon a következő tulajdonsággal: minden véges (a, b) $(a<b)$ intervallumban a $\max\limits_{(i)}(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})$, $a \leqq x_{i-1}^{(n)} < x_i^{(n)} \leqq b$ tartson zéróhoz, ha $n \to \infty$.

Jelöljék a nagyszámú részecskékből álló rendszerben az egyes részekre nézve az X mennyiséget az $X_1, X_2, \ldots, X_N, \ldots$ független valószínűségi változók (amelyek száma tehát megszámlálhatóan végtelen). Legyen e valószínűségi változók egy realizációja az $(x_1, x_2, \ldots)$ végtelen dimenziós vektor. Jelentse $N_{iN}^{(n)}$ az $\{x_{i-1}^{(n)} \leqq X < x_i^{(n)}\}$ esemény gyakoriságát a megfigyelt $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ mintában; vagyis az illető intervallumba eső elemek számát az első N megfigyelésből.

Jelölje végül $F_N(x)$ az $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ mintához tartozó empirikus eloszlásfüggvényt:

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{x_i < x} 1, \; F_N(-\infty) = 0, \; F_N(\infty) = 1.$$

Tekintsük most az $\mathscr{F}_\Phi$ eloszlásösszesség valamely $F(x)$ elemét és olyan $(x_1, x_2, \ldots)$ realizációját az $(X_1, X_2, \ldots)$ valószínűségi vektor változónak, amelyre az egész $(-\infty, \infty)$ számegyenesen $\lim\limits_{N\to\infty} F_N(x) = F(x)$ egyenletesen.

E realizációkra nézve az is teljesülni fog, hogy minden rögzített n-re

$$(*) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{N_{iN}^{(n)}}{N} = F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

A továbbiakban rögzített n mellett fogjuk az N megfigyelésszámot végtelenbe tartatni, majd a felosztások n számát növeljük minden határon túl.

2. Az $(X_1, X_2, \ldots)$ végtelen dimenziós vektorváltozó elemei tehát függetlenek, $\Phi(x)$ eloszlású valószínűségi változók. Vegyük az első N számú $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ megfigyelést, és jelölje a $\nu_{iN}^{(n)}$ valószínűségi változó az $(x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)})$ intervallumba eső elemek számát: $\sum\limits_{i=1}^{N} \nu_{iN}^{(n)} = N$. Ha a $q_{in} = \Phi(x_i^{(n)}) - \Phi(x_{i-1}^{(n)})$ jelölést használjuk, akkor a

$$\nu_{iN}^{(n)} = N_{iN}^{(n)}, \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

események együttes bekövetkezésének a valószínűsége

$$P_{n,N} = \frac{N!}{N_{1N}^{(n)}!\, N_{2N}^{(n)}! \ldots N_{nN}^{(n)}!} q_{1n}^{N_{1N}^{(n)}} \cdots q_{2n}^{N_{nN}^{(n)}}.$$

Nagy N-re alkalmazzuk a *Stirling*-formula $k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k$ változatát, ami a következő eredményre vezet:

$$P_{nN} \sim \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} q_{iN}^{N_{iN}^{(n)}}}{\prod\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{N_{iN}^{(n)}}{N}\right)^{N_{iN}^{(n)}}}.$$

Válasszuk most az $\{N_{iN}^{(n)}\}$ rendszert úgy, hogy az a ($*$) feltételt kielégítse. Ha $F(x) \equiv \Phi(x)$, akkor megmutatható, hogy

$$\lim_{N \to \infty} P_{nN} = 1.$$

Ha azonban $F(x)$ eltér a $\Phi(x)$-től, akkor a $P_{n,N}$ valószínűség N-nel zéró felé tart, ugyanakkor N-edik gyökére a következő relációt nyerjük:

$$\lim_{N \to \infty} \sqrt[N]{P_{n,N}} = e^{-\sum_{i=1}^{n} p_{in} \log \frac{p_{in}}{q_{in}}},$$

ahol a

$$p_{in} = F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)}), \qquad i = 1, 2, \dots n$$

jelölést alkalmaztuk. Ha most a felosztások számát is végtelen felé tartatjuk, akkor a következő formulához jutunk:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{N \to \infty} \sqrt[N]{P_{n,N}} = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{d\Phi(x)}}.$$

A fenti aszimptotikus relációk pontosabb alakjai SANOV [10] munkájában találhatók.

A $\Phi(x)$ eloszlásról nem tettük fel sem hogy folytonos, sem hogy diszkrét. Folytonos esetben az F és Φ sűrűségfüggvényét f-fel, ill. φ-vel jelölve a kitevő alakja

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx,$$

míg diszkrét esetben

$$-\sum_{(i)} p_i \log \frac{p_i}{q_i},$$

ahol p_i és q_i jelöli az $F(x)$, ill. Φ megfelelő ugráspontjaihoz tartozó valószínűségeket.

3. A kapott pszeudosűrűség logaritmusa — amit pszeudo-likelihood függvénynek nevezhetünk — negatív előjellel adja az I-divergenciát:

$$I_\Phi(F) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{d\Phi(x)}.$$

Ennek a következő nevezetes tulajdonságai jól ismertek:

α) Nemnegatív; akkor és csakis akkor zéró, ha $F(x) \equiv \Phi(x)$.

β) Az x tengely monoton transzformációival szemben invariáns.

Szemben az entrópiával, ami a bizonytalanság mértéke, az I-divergencia az információ mértékének tekinthető. Ez megfelel annak, hogy erre a kifejezésre nem a *Shannon*-féle entrópia formulájából jutunk, hanem annak kiegészítő kifejezéséből, a

$$\log m - \sum_{i=1}^{m} p_i \log \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{1/m}$$

kifejezésből. Ez az érték akkor 0, ha egyenletes az eloszlás, míg a $\log m$ értéket veszi fel, ha egyetlen eseménynek 1 a valószínűsége, a többié zéró, tehát amikor teljes információval rendelkezünk egy jövőbeni kísérlet kimenetelét illetően.

4. Ha tehát a $\Phi(x)$ eloszlásfüggvénnyel bíró X valószínűségi változóval kapcsolatban olyan feladatot tűzünk ki, hogy adott kényszerfeltételek mellett milyen eloszlást fog követni, akkor közelfekvő az $\mathcal{F}_\Phi$ összességből annak az eloszlásfüggvénynek kiválasztása, amely — az adott mellékfeltételek mellett — a legnagyobb (pszeudo-) valószínűségű. Ez a *Boltzmann—Planck*-eljárás matematikai szempontból következetes keresztülvitele és — heurisztikusan — megfelel az előző pontban tett a) és b) követelményeknek.

3. §. A Boltzmann—Planck-féle eloszlástörvényről

1. Mint az 1. §-ban említettük, a rendszerre ható kényszert (hatást) avval adjuk meg, hogy a valószínűségi változóra egy az eredetitől különböző első momentumot írunk elő. Ily módon azt az $F(x) \in \mathcal{F}_\Phi$ eloszlásfüggvényt keressük, amelyre a pszeudolikelihood függvény maximum:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{d\Phi(x)} = \text{maximum}$$

a következő mellékfeltételek mellett

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = m,$$

ahol $m \neq \int_{-\infty}^{\infty} x d\Phi(x)$.

E feladatot a diszkrét eset analógiájára — a *Lagrange*-multiplikátor módszerrel szokás megoldani, amelynek eredményeként a következő adódik:

$$dF(x) = c(\lambda, \mu)\, e^{-\lambda-\mu x}\, d\Phi(x),$$

ahol

$$c(\lambda, \mu) = \frac{1}{\int e^{-\lambda-\mu x}\, d\Phi(x)};$$

itt μ értékét a második feltétel határozza meg; λ értéke $F(x)$ kifejezéséből eliminálható, ill. értéke fizikai meggondolásoknak megfelelően választható meg.

A szélsőérték feladat alább adott megoldása RÉNYI Alfrédtól származik.

Legyen a minimalizálandó kifejezés

$$A(F) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{d\Phi(x)},$$

legyen továbbá

$$dF_c(x) = \frac{e^{cx}\,d\Phi(x)}{\Psi(c)},$$

ahol

$$\Psi(c) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{cx}\,d\Phi(x).$$

Határozzuk meg a c állandó értékét az

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_c(x) = m$$

feltételből:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_c(x) = \frac{1}{\Psi(c)} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{cx}\,d\Phi(x) = \frac{\Psi'(c)}{\Psi(c)}.$$

Vagyis a $\frac{\Psi'(c)}{\Psi(c)} = m$ egyenletet megoldjuk c-re; a továbbiakban jelentse c ezt az értéket. Ekkor

$$A(F) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{\Psi(c)\,e^{-cx}\,d\Phi(x)} =$$

$$= \log \frac{1}{\Psi(c)} - c \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{dF_c(x)}.$$

Tehát minden $F(x) \in \mathscr{F}_\Phi$-re

$$A(F) = \log \frac{1}{\Psi(c)} - cm + \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{dF_c(x)} \geqq \log \frac{1}{\Psi(c)} - mc$$

és egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $F(x) = F_c(x)$, ami $c = -\mu$ jelöléssel a fentebb adott eredménnyel egyezik.

2. Az $F(x)$-re kapott megoldásfüggvény ismeretéhez $\Phi(x)$ ismerete szükséges. Ezt legtöbbször nem ismerjük, hanem feltevéssel élünk erre vonatkozólag. A feltevést — az elméletet — a tapasztalat igazolhatja, vagy nem támasztja alá, amikor is újabb feltevéssel kísérletezünk. Ha $F(x)$-re vonatkozóan tapasztalati adataink vannak, akkor a

$$d\Phi = \frac{1}{c} e^{\mu x}\,dF(x)$$

reláció tájékozódást nyújt $\Phi(x)$-re nézve.

Planck feltevése az energiaeloszlást illetően a $d\Phi(x_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ volt, ami nem valószínűségeloszlás, sőt nem is normálható mérték egy diszkrét állapothalmazon. Ez önmagában nem volna baj; a tárgyalt módszer kiterjeszthető olyan monoton nem csökkenő $\Phi(x)$ függvényekre, amelyekre $\Phi(0)=0$, $\Phi(\infty)=\infty$ és $\int e^{-\mu x}d\Phi(x)<\infty$. Kérdés azonban, szükséges-e ez a végtelen halmaz egyedein vett egyenletes eloszlás? Valamely kezdeti $\Phi(x)$ *valószínűségeloszlással* nem közelíthető-e jobban az $F(x)$ eloszlás tapasztalati alakja.

3. Ami a nyert eredmény „matematikai bizonyítását" illeti, a következőt jegyezzük meg. A felállított variációs feladatot a nyert eredmény kielégíti, sőt lényegében ez az egyetlen megoldása a feltételes szélsőérték-feladatnak. Azonban a következő rokon probléma vethető fel, amelyre nézve kézenfekvő az általunk felállított szélsőérték-feladathoz fordulni, legalábbis a feladat formális megoldása céljából:

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Kérdés: mi X_1 eloszlása ama feltétel mellett, hogy az első N tag számtani közepe adott:

$$P(X_1 < x | X_1+X_2+\ldots+X_N = Nm) = ?,$$

ahol $m \neq \int x d\Phi(x)$. Ha $N\to\infty$, akkor várható, hogy X_1 feltételes eloszlása a maximum likelihood elv szerinti lesz az általunk adott pszeudo-értelemben. Ezt az állítást az exponenciális eloszláscsalád némely összességére (normális, exponenciális) nem nehéz bebizonyítani. A $\Phi(x)$-re vonatkozó bizonyos feltételek mellett BÁRTFAI PÁL adott igenlő választ, amely kérdésre vissza kíván térni. Lásd még HINCSIN [4] munkájában 19—31. old.

4. Érdekes végül megjegyezni, hogy az

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{d\Phi(x)} = \text{minimum}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_i(x)\, dF(x) = m_i, \qquad i = 1, 2, \ldots k$$

feltételes szélsőérték-probléma az exponenciális eloszláscsalád általános alakjához vezet:

$$dF(x) = c(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)\, e^{\sum_i^k \mu_i T_i(x)}\, d\Phi(x).$$

Ez a tény hasonló módon lehet magyarázata annak, hogy ez az eloszláscsalád alkalmazásokban gyakran fellép, mint ahogyan a normális eloszlásnak mint határeloszlásnak fellépése motiválható.

Ugyanitt érdekes megjegyezni, hogy LINNIK az I-divergencia tulajdonságai segítségével bizonyítja a normális eloszlásnak mint határeloszlásnak fellépését.

4. §. Megjegyzés a termodinamikai entrópia fogalmához

A termodinamikában szokásos a termodinamikai valószínűség bevezetése, amely megadja, hogy egy makroállapot hány mikroállapottal valósítható meg. Ehhez tudnunk kell az ún. apriori eloszlást, mert az ún. betöltési számok egyenlő apriori valószínűségű cellákhoz tartoznak. Fenti meggondolásaink azt mutatják, hogy ha nem csupán a lehetséges állapotok számát, hanem a teljes valószínűséget, azaz az adott esetben az

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\dots N_n!}q_1^{N_1}q_2^{N_2}\dots q_n^{N_n}$$

kifejezést tekintjük, ahol most az egyszerűsített $N_i = N_{iN}^{(n)}$ jelölést alkalmaztuk, nincs szükség arra, hogy egyenlő valószínűségű cellákra osszunk és a matematikai tárgyalás teljesebb. Fenti kifejezésből N-edik gyököt vonva és limesre térve diszkrét esetben az

$$e^{-\Sigma p_i \log \frac{p_i}{q_i}},$$

folytonos esetben az

$$e^{-\int f(x) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx}$$

alakú kifejezéshez jutunk.

Ily módon a termodinamikában használatos entrópia kifejezésnél egzaktabbnak, és így alkalmasabbnak mutatkozik a

$$H = -K\int dF(x) \log \frac{dF(x)}{d\Phi(x)}$$

formula. *Ez ugyancsak bír az additivitás tulajdonságával.* Legyen ugyanis két független rendszer a

$$H_1 = -K\int dF_1(x) \log \frac{dF_1(x)}{d\Phi_1(x)},$$

ill.

$$H_2 = -K\int dF_2(x) \log \frac{dF_2(x)}{d\Phi_2(x)}$$

entrópiával. Egyszerűen belátható, hogy az egyesített rendszer entrópiájára a

$$H = H_1 + H_2 = -K\iint dF_1(x)\, dF_2(y) \log \frac{dF_1(x)\, dF_2(y)}{d\Phi_1(x)\, d\Phi_2(y)}$$

érvényes.

Ugyancsak tekinthető az entrópia két nem független valószínűségi változóra. Legyen ezeknek együttes eloszlásfüggvénye $F(x, y)$, az apriori eloszlás $\Phi(x, y)$. Ekkor

$$H = -k\iint dF(x, y) \log \frac{dF(x, y)}{d\Phi(x, y)}.$$

Független esetben ez ismét összeadandókra bomlik.

Tekintetbe kell azonban venni, hogy a valószínűségek kiszámítása különböző elvek alapján történhet. Így az entrópia definícióját a következő módon adhatjuk meg:

Jelölje $P_N(\Phi(x);\ F(x)|\mathfrak{R})$ annak valószínűségét, hogy a rendszerben, amelynek valamely X fizikai mennyisége a rendszer kiinduló állapotában a $\Phi(x)$ eloszlással bír, az N nagyszámú részecske mégis az $F(x)$ eloszlás körül helyezkedik el; itt $\mathfrak{R}$ jelzi azt az elvet, ahogyan a valószínűség kiszámítandó. Ekkor az entrópia

$$H = -k \log \lim_{N \to \infty} \sqrt[N]{P_N(\Phi(x); F(x)\mathfrak{R})}.$$

Fentiekben az $\mathfrak{R}$ a polinomiális valószínűség alkalmazását jelentette. Most rátérünk a termodinamikai entrópia kiszámítására, ha a *Bose—Einstein-* ill. *Fermi—Dirac*-féle elveket alkalmazzuk.

5. A termodinamikai valószínűség a Bose—Einstein-eloszlás folytonos változata esetén

A számítás egyszerűbbé tétele érdekében az energiaskálát *egyenlő* $\frac{1}{n}$ (apriori) *valószínűségű részekre osztjuk* és mindegyik részben z számú cellát jelölünk ki. A cellanagyság tehát $h = \frac{1}{nz}$, amit zéró felé fogunk tartatni. Nagyszámú részecske és kis cellanagyság mellett ez az eredeti modell jó approximációjának tekinthető. $\Phi(x)$-szel jelölve ismét az apriori eloszlásfüggvényt az i-edik felosztásban a szokásos

$$z_i = \frac{1}{nh} = \frac{\Phi(x_i^{(n)}) - \Phi(x_i^{(n-1)})}{h} = \frac{d\Phi(x_i^{(n)})}{h}$$

összefüggést kapjuk.

A *Bose—Einstein*elv szerint egy cellába akárhány részecske juthat, azonban a részecskék meg nem különböztethetők. Ily módon, ha a részecskék száma N, akkor az $A_{n,N} = \left\{N_1, N_2, \ldots N_n; \sum_{i=1}^{n} N_i = N\right\}$ makroállapothoz tartozó valószínűség

$$P(A_{n,N}) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \binom{N_i + z}{N_i}}{\binom{N + (z+1)n}{N}}.$$

További egyszerűsítés végett válasszuk a részecskék számát a következőképpen: $N = zn$. Ez nem jelent megszorítást, mert egy arányossági tényezőt véve, az a később választandó állandókba úgyis beolvasztható. Alkalmazva a *Stirling*-formulát az $N! \sim \left(\frac{N}{e}\right)^N$ alakban, a következőre jutunk:

$$P(A_{n,N}) \sim \frac{N^N [n(z+1)]^{n(z+1)}}{[N + (z+1)n]^{N + (z+1)n}} \prod_{i}^{n} \frac{\left(\frac{N_i}{N} + \frac{1}{n}\right)^{N_i + n}}{\left(\frac{N_i}{N}\right)^{N_i} \left(\frac{1}{n}\right)^{z}}.$$

A szorzatjel előtti rész a következőképp írható — mindjárt az N-edik gyökét véve

$$\frac{\left(1+\frac{n}{N}\right)^{1+\frac{n}{N}}}{\left(2+\frac{n}{N}\right)^{2+\frac{n}{N}}} \sim \frac{1}{4}.$$

Ez az állandó a szélsőérték-feladat szempontjából nem játszik szerepet; így el fogjuk majd hagyni. A Π jel utáni kifejezésben arra ügyelünk,hogy az $F(x)$ és $\Phi(x)$ eloszlásfüggvények egymásra nézve való abszolút folytonosságát biztosítsuk. Ezért a $\Psi(x)=\frac{dF(x)}{d\Phi(x)}$ bevezetésére törekszünk. Ezt figyelembe véve:

$$P(A_{n,N}) \sim \frac{1}{4^N} \prod_1^n \left(1+\frac{\frac{1}{n}}{\frac{N_i}{N}}\right)^{N_i+n} \left(\frac{\frac{N_i}{N}}{\frac{1}{n}}\right)^z.$$

Minthogy $\frac{N_i}{N} \sim dF(x_i)$ és $\frac{1}{n} = d\Phi(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots n$, a következőt kapjuk

$$\frac{1}{N} \log P(A_{n,N}) \sim \log\frac{1}{4}+$$

$$+\sum_{i=1}^n \left[(dF(x_i)+d\Phi(x_i))\log\left(1+\frac{d\Phi(x_i)}{dF(x_i)}\right)+d\Phi(x_i)\log\frac{dF(x_i)}{d\Phi(x_i)}\right].$$

Az $N\to\infty$, majd az $n\to\infty$ határátmenetet elvégezve eredményül a termodinamikai valószínűségre, illetve a termodinamikai entrópiára a következő kifejezést kapjuk — az $\frac{1}{4}$ additív tag elhagyásával:

$$H = -k \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{(1+\Psi(x))^{1+\frac{1}{\Psi(x)}} d\Phi(x)}.$$

Ha ezt maximalizálni akarjuk, az

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = m$$

feltételek mellet a következő szélsőérték-feladatra jutunk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \log \frac{dF(x)}{c(\lambda,\mu)\, e^{-\lambda\mu x}\,(1+\Psi(x))^{1+\frac{1}{\Psi(x)}} d\Phi(x)} + \log c(\lambda,\mu) = \text{minimum},$$

ahol

$$c(\lambda, \mu) = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\mu x}\left(1+\Psi(x)\right)^{1+\frac{1}{\Psi(x)}} d\Phi(x)}.$$

A második tag most függ az ismeretlen $F(x)$-től ami sokkal bonyolultabbá teszi a problémát. Az első tag minimális — azaz zéró — értékét a

$$dF(x) = \frac{e^{-\lambda-\mu x}\left(1+\Psi(x)\right)^{1+\frac{1}{\Psi(x)}} d\Phi(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda-\mu x}\left(1+\Psi(x)\right)^{1+\frac{1}{\Psi(x)}} d\Phi(x)}$$

reláció mellett kapjuk. Ha a kitevőben levő $\frac{1}{\Psi(x)}$ tagot elhanyagoljuk — ami nem tehető minden további nélkül —, akkor a

$$dF(x) = ce^{-\lambda-\mu x}\left(1+\frac{dF(x)}{d\Phi(x)}\right) d\Phi(x),$$

vagyis a

$$dF(x) = \frac{cd\Phi(x)}{e^{\lambda+\mu x}-1},$$

klasszikussal analóg eredményre jutunk.

Hasonló módon határozható meg a *Fermi—Dirac*-esetben a termodinamikai entrópia. Erre a következő kifejezés adódik — egy additív állandótól eltekintve:

$$H = -k\int dF \log \frac{dF}{\left(1-\frac{1}{\alpha}\Psi(x)\right)^{\frac{\alpha}{\Psi(x)}-1} d\Phi(x)}, \quad \alpha > 1.$$

Az előzőhöz hasonló módon képzett közelítésként a következő eloszlás adódik:

$$dF(x) = \frac{cd\Phi(x)}{e^{\lambda+\mu x}+1}.$$

6. További megjegyzések az I-divergenciára vonatkozóan

Az I-divergencia, mint említettük, széles körű alkalmazást talált eddig is egészen különböző irányú vizsgálatokban. Ez az alkalmazhatóság legtöbb esetben a 2. §-ban adott és elsőként SANOV által nyert formulában, ill. annak értelmezésében leli magyarázatát.

KULLBACK és LEIBLER [6], majd KULLBACK [6a] terjedelmes munkájában matematikai statisztikai alkalmazások egész sorát adja és hozza összefüggésbe az I-divergenciát különböző ismert módszerekben szereplő statisztikákkal. Szerző [12] konfidenciaintervallumok konstrukciójára alkalmazta, ami már KULLBACKnál is szerepel.

PEREZ [7] információelméleti alkalmazásait adta. CSISZÁR [1] általánosította az I-divergencia fogalmát és az általánosított fogalom számos tulajdonságát és alkalmazását adta meg.

RÉNYI [8, 9] munkáiban a matematikai statisztika információelméleti megalapozását adja. Dolgozataiban a statisztikai eljárás hibáját az entrópia mennyiséggel becsülte. A parameter itt diszkrét; szerző [13] RÉNYI bizonyos eredményeit folytonos paramétertérre terjesztette ki az I-divergenciának adva a diszkrét entrópia szerepét.

HÁJEK [3] *Gauss*-folyamatok vizsgálatára használta az I-divergenciát, annak bizonyos alapvető tulajdonságait is tisztázta.

FRITZ [2] információelméleti módszerrel határozta meg gravitációs térben a gáz nyomáseloszlását.

IRODALOM

[1] CSISZÁR, I.: On topological properties of f-divergences, *Studia Sci. Mat. Hung.* **2** (1967), 329—339.

[2] FRITZ, J.: Information Theory and Thermodinamics of Gas Systems, *Proc. Coll. on Information Theory*, Debrecen (Hungary) 1967

[3] HÁJEK, J.: A property of I-divergence of marginal probability distributions, *Czehoslovac Journal of Matematics* **8** (83) 1958. pp. 460—463.

[4] HINCHIN, A. J.: *A statisztikai mechanika analitikus módszerei,* Akadémiai Kiadó. 1951.

[5] JAYNES, E. T.: Information Theory and Statistical Mechanics, *Physical Reviews* **106** (1957) pp. 620—630.

[5*a*] JAYNES, E. T.: see K. W. Ford, Ed.; *Statistical Physics,* W. A. Benjamin Inc. 1963. 4. fej.

[6] KULLBACK, S.—LEIBLER, R. A.: On information and sufficiency. Annals of Mathematical Statistics, **22** (1951) pp. 79—86.

[6*a*] KULLBACK, S.: *Information and statistics,* John Wiley & Sons, Inc. New York, 1959.

[7] PÉREZ, A.: Notions generalisées d'incertitude, d'entropie et d'information du point de vue de la théorie de martingales, *Transactions of the first Prague Conference on information theory, statistical decision functions, random processes.* Prague 1957 pp. 183—208.

[8] RÉNYI, A.: Statistics and information theory, *Studia Scientiarum Mathematicarum Acad. Sci. Hung.* **2** (1967) 249—256.

[9] RÉNYI, A.: On the dimension and entropy of probability distributions, *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 193—215.

[10] SANOV, I. N.: On the probability of large deviations of random variables. *IMS and AMS Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability,* Vol. 1 (1961) 213—244.

[11] VINCZE, I.: An interpretation of the I-divergence of information theory, *Transactions of the second Prague Conference on information theory, statistical decision functions, random processes.* Prague, 1959. pp. 681—684.

[12] VINCZE, I.: Some questions concerning the probabilistic concept of information. *AMS and IMS Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability,* Vol. V. (1965).

[13] VINCZE, I.: On the information-theoretical foundation of mathematical statistics. *Proc. of the Coll. on Information Theory, Debrecen (Hungary)* 1967. 503—509. old.

(Beérkezett: 1968. XII. 22.)

ON SOME DISTRIBUTION LAWS OF STATISTICAL PHYSICS

by

ISTVÁN VINCZE

Summary

The aim of the paper is to establish an exact and unified formulation and treatment of the method given by BOLTZMANN and PLANCK for the derivation of the distribution laws of statistical physics valid for continuous as well as discrete random quantities. Indeed — as mentioned by PLANCK — in obtaining the distribution of the total energy of a gas-system among the large number of their particles, certain difficulties arise if the energy may take all possible values; these combinatorial difficulties are similar to those which occur when *Shannon*'s entropy is to be extended to the continuous case. The latter problem was treated by JAYNES [5a] and earlier by the author [11,13]; the present consideration has a similar feature to this extension. — A pseudo-likelihood function or pseudo-density function is introduced in the set of the distribution functions which can be taken into consideration; this procedure has an obvious interpretation. With the aid of this pseudo-likelihood function a *principle* — analogous to the maximum likelihood *method* — can be introduced for the selection of the appropriate distribution function. What is discussed here is that this is only an analogy: the two procedures have different nature. — As a natural consequence we may obtain for the (thermodynamical) entropy the following expression:

$$S = -k \int dF(x) \log \frac{dF(x)}{d\Phi(x)};$$

$F(x)$ denotes here the distribution function of the considered random variable (discrete or continuous) and $\Phi(x)$ is the prior distribution, which may have different interpretations. The prior distribution occurs already in the work of BOLTZMANN. — PLANCK uses a prior distribution which leads to a distribution uniform on a countable infinite set of energy-values; the question wheter this assumption is necessary or not is discussed. — Finally the entropy and the continouos version in the case of the *Bose—Einstein* and *Fermi—Dirac* statistics is considered; to obtain the exact distribution laws for these is considerably difficult. The classical forms can be considered as very first approximations. — In the different parts of the paper some known mathematical results due to KULLBACK [6a], SANOV [10] are used, one proof was given by A. RÉNYI.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A FÉLIG KORLÁTOS HERMITIKUS OPERÁTOROK ÖNADJUNGÁLT FOLYTATÁSAINAK ELMÉLETE ÉS ALKALMAZÁSAI (II)*

Írta: M. G. KREJN

6. §. Véges defektus-számú[1] félig korlátos operátorok

1. Mindenekelőtt kimondjuk a következő tételt.

18. TÉTEL. *Ha a T alulról félig korlátos operátornak véges $\mathfrak{n}(T)$ defektus-száma van, akkor T bármelyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatása szintén alulról félig korlátos és, ezen túlmenően, minden ilyen folytatás spektrumának a $(-\infty, m(T))$ számközbe eső része véges számú sajátértékből áll, amelyek multiplicitásának az összege legfeljebb* $\mathfrak{n}(T)$.

Ennek a tételnek a bebizonyítása nem jár semmiféle nehézséggel. Minthogy azonban a következő paragrafusban általánosabb állítást fogunk bebizonyítani (21. tétel), a 18. tétel bizonyítását elhagyjuk.

A 15. tétel lehetővé teszi az alábbi élesebb tétel igazolását.[2]

19. TÉTEL. *Legyen $\tilde{S}$ az S operátornak — amelyre $m(S)>0$ és amelynek $\mathfrak{n}$ defektus-száma véges — egy önadjungált folytatása; legyen továbbá $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ az $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{D}[\tilde{S}]$ halmazok közös részének egy bázisa.*

Ekkor $\nu(\tilde{S})$ — az $\tilde{S}$ operátor negatív sajátértékeihez tartozó multiplicitások összege — pontosan egyenlő a

$$\sum_{j,k=1}^{r} \tilde{S}[\varphi_j, \varphi_k]\, \xi_j \bar{\xi}_k \tag{6.1}$$

alakban fellépő negatív négyzetek számával.

Bizonyítás. A 4. §-ban található 4. lemma értelmében tetszés szerinti $f \in \mathfrak{D}[\tilde{S}]$ elemre[3]

$$\tilde{S}[f, f] = \int_m^\infty \lambda\, d|E(\lambda) f|^2 \geqq \int_m^0 \lambda\, d|E(\lambda) f|^2 = \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j |(f, \psi_j)|^2,$$

* Математический сборник **20** (1947) 431—495. és **21** (1947) 365—404. A fordítás első része ugyanezen folyóirat **18** (1968) 273—314. oldalain jelent meg, s a cikk I. fejezetének 1.—5. §-át és az I. fejezet irodalomjegyzékét tartalmazza.

[1] $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ defektus-indexű hermitikus operátor defektus-számának az $\mathfrak{n}$ kardinális számot nevezik.

[2] Könnyű belátni, hogy a 18. tétel a 19. tétel következménye; erre a körülményre azonban nem hivatkozhatunk, ugyanis a 19. tétel bizonyítása során támaszkodni fogunk a 18. tételre, amenynyiben bebizonyítottnak vesszük, hogy az $\tilde{S}$ operátor negatív spektruma véges számú sajátértékből áll.

[3] Feltesszük, hogy $m = m(\tilde{S}) < 0$, mert $m(\tilde{S}) \geqq 0$ esetén a tétel helyessége nyilvánvaló.

ahol $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ az $\tilde{S}$ operátor

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots \leqq \mu_\nu \quad (<0)$$

negatív sajátértékeihez tartozó sajátvektorokból alkotott teljes ortonormális rendszer.

Speciálisan az

$$f = \sum_{k=1}^{r} \xi_k \varphi_k$$

helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j,k=1}^{r} \tilde{S}[\varphi_j, \varphi_k] \xi_j \bar{\xi}_k \geqq \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j \left| \sum_{k=1}^{r} (\varphi_k, \psi_j) \xi_k \right|^2,$$

és ebből következik, hogy a (6. 1) alakban fellépő negatív négyzetek p száma nem nagyobb, mint ν.

Másrészt a 15. tétel szerint fennáll

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} \varphi_k + \chi_j \qquad (\chi_j \in \mathfrak{D}[S]; \quad j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

és így

$$\psi = \sum_{j=1}^{\nu} \eta_j \psi_j = \sum_{k=1}^{r} \xi_k \varphi_k + \chi = \varphi + \chi,$$

ahol

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{\nu} a_{jk} \eta_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\chi = \sum_{j=1}^{\nu} \eta_j \chi_j \in \mathfrak{D}[S].$$

De ekkor a 8. lemma értelmében

$$\tilde{S}[\psi, \psi] = \tilde{S}[\varphi, \varphi] + \tilde{S}[\chi, \chi] = \tilde{S}[\varphi, \varphi] + S[\chi, \chi] \geqq \tilde{S}[\varphi, \varphi].$$

Ily módon

$$\tilde{S}[\psi, \psi] = \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j |\eta_j|^2 \geqq \sum_{j,k} \tilde{S}[\varphi_j, \varphi_k] \xi_j \bar{\xi}_k = \tilde{S}[\varphi, \varphi],$$

tehát $\nu \leqq p$.

A tételt bebizonyítottuk.

2. A továbbiakban szükségünk lesz néhány általános tételre, amely $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ defektus-indexű tetszés szerinti hermitikus operátorokra vonatkozik, ahol $\mathfrak{n} < \infty$.

Legyen $H(\overline{\mathfrak{D}(H)} = \mathfrak{H})$ ilyen operátor, $\tilde{H}$ ennek egy önadjungált folytatása és

$$R_\lambda = (\tilde{H} - \lambda I)^{-1}$$

a $\tilde{H}$ operátor rezolvense, amely λ minden reguláris (vagyis $\tilde{H}$ spektrumához nem tartozó) értékére létezik.

Kiválasztva tetszés szerinti λ_0 (Im $\lambda_0 \neq 0$) számot, vegyünk fel a $H^*\varphi - \lambda_0 \varphi = 0$ egyenlet összes φ megoldásaiból álló $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ halmazban egy $\{\varphi_1(\lambda_0), \ldots, \varphi_\mathfrak{n}(\lambda_0)\}$ ortonormális bázist, és vezessük be tetszés szerinti reguláris λ-ra a

$$\varphi_j(\lambda) = \varphi_j(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda \varphi_j(\lambda_0) \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mathfrak{n}) \tag{6.2}$$

jelölést.

Felhasználva a rezolvens

$$R_\mu = R_\lambda + (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda$$

függvényegyenletét nem nehéz megmutatni, hogy ekkor bármely két reguláris λ, μ értékre

$$\varphi_j(\mu) = \varphi_j(\lambda) + (\mu - \lambda) R_\mu \varphi_j(\lambda) \qquad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{6. 3}$$

Innen a $\mu = \lambda_0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy tetszés szerinti reguláris λ érték mellett a $\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)$ vektorok lineárisan függetlenek. Be fogjuk látni, hogy ezek a vektorok a

$$H^*\varphi = \lambda\varphi$$

egyenlet összes megoldásaiból álló $\mathfrak{N}_\lambda$ halmazban bázist alkotnak.

Csakugyan, minthogy

$$H^* R_\lambda f = \tilde{H} R_\lambda f = f + \lambda R_\lambda f \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

azért a (6. 2) definíció értelmében

$$H^* \varphi_j(\lambda) = H^* \varphi_j(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) H^* R_\lambda \varphi_j(\lambda_0) =$$
$$= \lambda_0 \varphi_j(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \left(\varphi_j(\lambda_0) + \lambda R_\lambda \varphi_j(\lambda_0)\right) = \lambda \varphi_j(\lambda)$$
$$(j = 1, 2, \dots, n).$$

Tekintsük az

$$U_\lambda = (\tilde{H} - \bar{\lambda} I)(\tilde{H} - \lambda I)^{-1} = I + (\lambda - \bar{\lambda}) R_\lambda \tag{6. 4}$$

unitér operátort.

A (6. 3) egyenlőségben μ helyébe λ-t, λ helyébe $\bar{\lambda}$-t írva kapjuk:

$$U_\lambda \varphi_j(\bar{\lambda}) = \varphi_j(\lambda) \qquad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{6. 5}$$

A konstrukció szerint a $\{\varphi_1(\lambda_0), \dots, \varphi_n(\lambda_0)\}$ rendszer ortonormális bázis, továbbá U_λ és $U_{\bar{\lambda}} = U_\lambda^{-1}$ unitér operátor, tehát a $H^*\varphi - \bar{\lambda}_0\varphi = 0$ egyenlet φ megoldásaiból álló $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ halmaz

$$\{\varphi_1(\bar{\lambda}_0), \dots, \varphi_n(\bar{\lambda}_0)\}$$

bázisa szintén ortonormális.

Tekintetbe véve, hogy $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ az $\mathfrak{R}(H - \lambda_0 I)$ halmaz ortogonális komplementuma, arra az eredményre jutunk, hogy tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$ elemre

$$f_{\lambda_0} = f - \sum_1^n \left(f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0)\right) \varphi_k(\bar{\lambda}_0) \in \mathfrak{R}(H - \lambda_0 I),$$

és így bármilyen $f \in \mathfrak{H}$ mellett az

$$U_{\lambda_0}\left(f - \sum_1^n \left(f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0)\right) \varphi_k(\bar{\lambda}_0)\right) = f_{\lambda_0} + (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)(H - \lambda_0 I)^{-1} f_{\lambda_0} \tag{6. 6}$$

kifejezés nem függ a H operátor $\tilde{H}$ folytatásának a megválasztásától.

Most legyen $\tilde{H}'$ a H operátornak $\tilde{H}$-tól különböző önadjungált folytatása, és legyen a korábbi jelölésekkel összhangban

$$R'_\lambda = (\tilde{H}' - \lambda I)^{-1}, \quad U'_\lambda = I + (\lambda - \bar{\lambda}) R'_\lambda.$$

Az U'_λ operátorra alkalmazhatók ugyanazok a meggondolások, mint U_λ-ra, tehát a (6. 6) vektorról mondottak alapján

$$(6.7)\quad U'_{\lambda_0}\left(f-\sum_1^n (f,\varphi_k(\bar\lambda_0))\,\varphi_k(\bar\lambda_0)\right) = U_{\lambda_0}\left(f-\sum_1^n (f,\varphi_k(\bar\lambda_0))\,\varphi_k(\bar\lambda_0)\right) \qquad (f\in\mathfrak{H}).$$

Az U'_{λ_0} operátor, ugyanúgy mint U_{λ_0}, az $\mathfrak{N}_{\bar\lambda_0}$ halmazt izometrikusan $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$-ra képezi le; ezért

$$(6.8)\qquad U'_{\lambda_0}\varphi_k(\bar\lambda_0) = \sum_{j=1}^n u_{jk}\,\varphi_j(\lambda_0) \qquad (k=1,2,\dots,n),$$

ahol $\|u_{jk}\|_1^n$ numerikus unitér matrix.

A (6. 4), (6. 5), (6. 7), (6. 8) egyenlőségeket egybevetve a következőket kapjuk:

$$(6.9)\quad R'_{\lambda_0}f = R_{\lambda_0}f + \frac{1}{\lambda_0-\bar\lambda_0}\sum_{j,k=1}^n (u_{jk}-\delta_{jk})\,(f,\varphi_k(\bar\lambda_0))\,\varphi_j(\lambda_0) \qquad (f\in\mathfrak{H}).$$

Jelöljük az $\|u_{jk}-\delta_{jk}\|_1^n$ matrix rangját r-rel. A $\{\varphi_1(\lambda_0),\dots,\varphi_n(\lambda_0)\}$ ortonormális bázis alkalmas megválasztása útján a (6. 9) összefüggés az

$$(6.10)\qquad R'_{\lambda_0}f = R_{\lambda_0}f - \sum_{j,k=1}^r \alpha_{jk}\,(f,\varphi_k(\bar\lambda_0))\,\varphi_j(\lambda_0) \qquad (f\in\mathfrak{H})$$

alakra hozható, ahol $\|\alpha_{jk}\|_1^r$ nem szinguláris matrix.

Tekintsük a

$$(6.11)\qquad Q(\lambda_0) = \|Q_{jk}(\lambda_0)\|_1^r = \|\alpha_{jk}\|^{-1}$$

matrixot, továbbá bármely a $\tilde H$ operátorra vonatkozóan reguláris λ pontban a

$$(6.12)\qquad Q(\lambda) = Q(\lambda_0) + (\lambda-\lambda_0)\,\|(\varphi_j(\lambda),\varphi_k(\bar\lambda_0))\|_1^r$$

matrixot. A (6. 3) egyenletek segítségével nem nehéz megmutatni, hogy a $\tilde H$ operátor tetszés szerinti reguláris λ, μ pontjaira

$$(6.13)\qquad Q(\lambda) = Q(\mu) + (\lambda-\mu)\,\|(\varphi_j(\lambda),\varphi_k(\bar\mu))\|_1^r.$$

Ezenfelül ha egy reguláris λ-ra

$$(6.14)\qquad \det Q(\lambda)\neq 0,$$

akkor[4]

$$(6.15)\qquad R'_\lambda f = R_\lambda f - \sum_{j,k=1}^r Q_{jk}^{(-1)}(\lambda)\,(f,\varphi_j(\bar\lambda))\,\varphi_k(\lambda) \qquad (f\in\mathfrak{H}).$$

A $\lambda=\lambda_0$ esetben ez az egyenlőség a (6. 10), (6. 11) összefüggésekből következik. Minden más, a (6. 14) feltételt teljesítő reguláris λ-ra az egyenlőség annak a közvet-

[4] $Q_{jk}^{(-1)}$ a Q^{-1} inverz matrix elemeit jelöli. Mellesleg megjegyezzük, hogy a (6.3), (6.13), (6.15) képletek analógok azokkal az ismert képletekkel, amelyeket H. Bateman [8] az integrálegyenletek elméletében nyert (lásd még Kantorovics—Krilov: A felsőbb analízis közelítő módszerei, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.)

len igazolása útján látható be, hogy a belőle nyert $R'_\lambda f$ kifejezésre érvényes az

$$R'_\lambda f = R'_{\lambda_0} f + (\lambda - \lambda_0) R'_\lambda R'_{\lambda_0} f \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

egyenlet.

Minthogy $\det Q(\lambda_0) \neq 0$, azért a λ_0 pont valamilyen környezetében a (6. 14) feltétel teljesül.

Mutassuk meg, hogy a (6. 14) feltétel minden olyan λ értékre teljesül, amely $\tilde{H}$-ra nézve is, $\tilde{H}'$-re nézve is reguláris.

Ebből a célból először megjegyezzük, hogy $\det Q(\lambda)$ bármely a $\tilde{H}$ operátorra vonatkozóan reguláris λ pont környezetében holomorf függvény, tehát ilyen pont nem lehet e determináns zérushelyeinek torlódási pontja, úgyhogy ilyen pont bármely környezetében találhatók λ értékek, amelyekre fennállnak a (6. 14), (6. 15) összefüggések.

Másrészt ha λ_1 a $\tilde{H}'$ operátornak is reguláris értéke, akkor λ_1-től elindulva be lehet bizonyítani, hogy a λ_1 pont valamilyen környezetében

$$R'_\lambda f = R_\lambda f - \sum_{j,k=1}^{r_1} P_{jk}^{(-1)} (f, \varphi_j^* (\bar{\lambda})) \, \varphi_k^* (\lambda) \qquad (f \in \mathfrak{H}), \tag{6. 16}$$

ahol $\varphi_1^*(\lambda), \ldots, \varphi_{r_1}^*(\lambda)$ a $H^*\varphi - \lambda\varphi = 0$ egyenlet olyan lineárisan független megoldásai, amelyek (6. 3) típusú függvényegyenleteknek tesznek eleget. Összehasonlítva a (6. 15), (6. 16) egyenlőségeket azokra a λ értékekre, amelyekre mindketten érvényesek, azt találjuk, hogy $r_1 = r$ és hogy létezik egy $\|c_{jk}\|_1^r$ nem szinguláris numerikus matrix, amelyre tetszés szerinti, a $\tilde{H}$ operátorra nézve reguláris λ mellett

$$\varphi_j^* (\lambda) = \sum_{k=1}^{r} c_{kj} \, \varphi_k (\lambda) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

következésképpen[5]

$$P(\lambda) = C^* Q(\lambda) C \tag{6. 17}$$

minden olyan λ-ra, amelyre fennáll (6. 15) és (6. 16), és így a $\tilde{H}$ operátor minden λ reguláris értékére is. Speciálisan $\lambda = \lambda_1$ esetén a (6. 17) összefüggésből a következőket kapjuk:

$$\det Q(\lambda_1) = \det P(\lambda_1) |\det C|^2 \neq 0.$$

Állításunkat bebizonyítottuk.

3. Ezen előkészítő megfontolások után be fogjuk bizonyítani az alábbi tételt:

20. TÉTEL. *Legyen* S, $\tilde{S}$ *és* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ *ugyanolyan, mint a* 19. *tételben. Ha a* 0 *pont az* $\tilde{S}$ *operátorra vonatkozóan reguláris, akkor*

$$S_\mu^{-1} f = \tilde{S}^{-1} f - \sum_{j,k=1}^{r} \alpha_{jk} (f, \varphi_j) \, \varphi_k \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

ahol $\|\alpha_{jk}\|_1^r$ *olyan nem szinguláris hermitikus matrix, hogy a*

$$\sum_{j,k=1}^{r} \alpha_{jk} \, \xi_j \, \bar{\xi}_k$$

[5] A C^* matrix a $C = \|c_{jk}\|_1^r$ matrix komplex konjugáltjának a transzponáltja.

alakban fellépő negatív négyzetek száma pontosan egyenlő az $\tilde{S}$ operátor negatív sajátértékeihez tartozó multiplicitások összegével.

Bizonyítás. A 2. pont eredményeit fogjuk alkalmazni a

$$H = S, \quad \tilde{H} = \tilde{S}, \quad \tilde{H}' = S_\mu$$

esetre.

Ha

$$a > -m(\tilde{S}), \quad 0,$$

akkor $-a$ a $\tilde{H}$ operátornak és a $\tilde{H}'$ operátornak is reguláris értéke, tehát a (6. 15) képlet értelmében

$$(6.18) \quad (S_\mu + aI)^{-1} f = (\tilde{S} + aI)^{-1} f - \sum_{j,k=1}^{r_1} Q_{jk}^{(-1)}(-a)\,(f, \varphi_j(-a))\,\varphi_k(-a).$$

Másrészt a tekintett a értékek mellett az $S + aI$, $S_\mu + aI$ operátorokra alkalmazható a 12. tétel, úgyhogy

$$(S_\mu + aI)^{-1} = (\tilde{S} + aI)^{-1} - (\tilde{S} + aI)^{-1}_{\mathfrak{N}_{-a}},$$

ahol $\mathfrak{N}_{-a}$ az $S^*\varphi + a\varphi = 0$ egyenlet összes megoldásainak a halmaza.

Ezek szerint

$$(\tilde{S} + aI)^{-1}_{\mathfrak{N}_{-a}} f = \sum_{j,k=1}^{r_1} Q_{jk}^{(-1)}(-a)\,(f, \varphi_j(-a))\,\varphi_k(-a) \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Visszaemlékezve az 1. §-ban szereplő ε) állításra, azt nyerjük, hogy a $\{\varphi_1(-a), \ldots$ $\ldots, \varphi_{r_1}(-a)\}$ rendszer az

$$(6.19) \qquad \mathfrak{N}_{-a} \cap \mathfrak{D}((\tilde{S} + aI)^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{N}_{-a} \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}]$$

közös részben bázist alkot, és

$$(6.20) \qquad \begin{aligned} Q_{jk}(-a) &= \int_{m(S)}^{\infty} (\lambda + a)\, d(E(\lambda)\varphi_j(-a), \varphi_k(-a)) = \\ &= \tilde{S}[\varphi_j(-a), \varphi_k(-a)] + a\,(\varphi_j(-a), \varphi_k(-a)) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, r_1). \end{aligned}$$

Most megjegyezzük, hogy ha egy $\varphi(\lambda)$ vektor-függvény (λ befutja $\tilde{S}$ reguláris pontjainak a halmazát) kielégíti a

$$(6.21) \qquad \varphi(\lambda) = \varphi(\mu) + (\lambda - \mu) R_\lambda \varphi(\mu) \qquad (R_\lambda = (\tilde{S} - \lambda I)^{-1})$$

függvényegyenletet, és legalább egy λ reguláris értékre $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{D}[\tilde{S}]$, akkor ez fennáll minden reguláris λ-ra.

Valóban, ha $\varphi(\mu) \in \mathfrak{D}[\tilde{S}]$, akkor az $R_\lambda \varphi(\mu) \in \mathfrak{D}(\tilde{S}) \subset \mathfrak{D}[\tilde{S}]$ összefüggés és a (6. 21) egyenlet alapján $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{D}[\tilde{S}]$. Ennélfogva ha a $\{\varphi_1(-a), \ldots, \varphi_{r_1}(-a)\}$ rendszer bázist alkot a (6. 19) halmazban, akkor $\{\varphi_1(0), \ldots, \varphi_{r_1}(0)\}$ bázis lesz az

$$\mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[\tilde{S}]$$

halmazban és így választható a 20. tétel szövegében szereplő $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ bázis gyanánt (speciálisan $r_1 = r$).

A (6. 18) egyenlőségben a $-a$ értéket helyettesíthetjük az $\tilde{S}$ operátor tetszés szerinti λ reguláris értékével. Speciálisan lehet $a=0$ és ekkor a következőt kapjuk:

$$S_{\mu}^{-1}f=\tilde{S}^{-1}f-\sum_{j,k=1}^{r}Q_{jk}^{(-1)}(0)\,(f,\varphi_j(0))\,\varphi_k(0). \tag{6.22}$$

Másrészt ha a (6. 20) egyenlőség mindkét oldalán a helyébe λ-t írunk, akkor λ-nak analitikus függvényeit nyerjük, és minthogy ezek a változó minden eléggé nagy pozitív értékére megegyeznek, azért azonosan egyenlők minden olyan λ-ra, amely az $\tilde{S}$ operátorra nézve reguláris. Következésképpen a (6. 20) összefüggés az $a=0$ esetben is érvényes.

Ilyen módon

$$Q_{jk}(0)=\tilde{S}[\varphi_j(0),\varphi_k(0)]\qquad (j,k=1,2,\dots,r), \tag{6.23}$$

ez pedig a (6. 22) egyenlőséggel és a 19. tétellel együtt a 20. tételt eredményezi.

6. 1. megjegyzés. A (6. 23) összefüggésből adódik, hogy ha 0 az $\tilde{S}$ operátor reguláris értéke, akkor a (6. 1) alak nem szinguláris. Nem nehéz meggyőződni arról, hogy a (6. 1) alak rangja mindig $r-d$, ahol $d\,(\geqq 0)$ a 0 számnak mint az $\tilde{S}$ operátor sajátértékének a multiplicitása.

7. §. Hézagos spektrumú hermitikus operátorok

Bár a jelen munka alapvető feladata a félig korlátos operátorok önadjungált folytatásainak a tanulmányozása, mégis célszerű lesz, ha ismertetjük vizsgálataink azon következményeit, amelyek tetszés szerinti hermitikus operátorok önadjungált folytatásainak az elméletére vonatkoznak.

1. Legyen H hermitikus operátor, amelynek $\mathfrak{D}(H)$ értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{H}$-ban.

Állapodjunk meg abban, hogy a véges (a, b) számközt a H operátor *hézagának* nevezzük, ha

$$\left\|Hf-\frac{a+b}{2}f\right\|\geqq\frac{b-a}{2}\|f\|\qquad (f\in\mathfrak{D}(H)).$$

Ha H önadjungált operátor, akkor az az állítás, hogy (a, b) az operátor hézaga, könnyen belátható módon azzal ekvivalens, hogy (a, b) a H operátor regularitási intervalluma (vagyis (a, b) minden pontja reguláris a H operátorra vonatkozóan).

Érvényes a következő tétel.

21. TÉTEL. *Ha az (a, b) számköz a H $(\overline{\mathfrak{D}(H)}=\mathfrak{H})$ hermitikus operátor hézaga, akkor H-nak vannak önadjungált folytatásai*[6]*, és ezek között található legalább egy, amelyre nézve az (a, b) számköz regularitási intervallum.*

Bizonyítás. Ha a H operátor helyett a

$$H_1=\frac{2}{b-a}\left(H-\frac{a+b}{2}I\right)$$

[6] A tételnek ezt az állítását még J. W. CALKIN bizonyította be (lásd [9], 2. tétel).

operátort tekintjük, akkor arra az esetre jutunk, amikor $a=-1$, $b=1$. Ennélfogva az általánosság megszorítása nélkül eleve feltehetjük, hogy $a=-1$, $b=1$, vagyis hogy a H operátorra teljesül a

$$|Hf|\geqq|f| \qquad (f\in\mathfrak{D}(H)) \tag{7.1}$$

feltétel.

Értelmezzünk az $\mathfrak{R}(H)$ halmazon egy A hermitikus operátort az

$$AHf=f \qquad (f\in\mathfrak{D}(H))$$

képlet útján. Ekkor $\mathfrak{D}(A)=\mathfrak{R}(H)$, és a (7.1) feltétel értelmében

$$|Ag|\leqq|g| \qquad (g\in\mathfrak{D}(A)),$$

azaz $\|A\|\leqq 1$. A 2. tétel szerint az A operátornak van legalább egy $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelyre $\|\tilde{A}\|\leqq 1$. Meg fogjuk mutatni, hogy a 0 szám az $\tilde{A}$ operátornak nem sajátértéke.

Csakugyan, ha feltesszük, hogy létezik olyan $\varphi\neq 0$ vektor, amelyre $\tilde{A}\varphi=0$, akkor azt állíthatjuk, hogy $\varphi\perp\mathfrak{R}(\tilde{A})$; de ez nem lehetséges, mert

$$\mathfrak{R}(\tilde{A})\supset\mathfrak{R}(A)=\mathfrak{D}(H), \qquad \overline{\mathfrak{D}(H)}=\mathfrak{H}.$$

Ha azonban 0 az $\tilde{A}$ operátornak nem sajátértéke, akkor létezik a $\tilde{H}=\tilde{A}^{-1}$ operátor és ez az $\tilde{A}$ operátorral együtt önadjungált. Minthogy $\|\tilde{A}\|\leqq 1$, azért

$$|\tilde{H}f|\geqq|f| \qquad (f\in\mathfrak{D}(\tilde{H})),$$

vagyis a $(-1, 1)$ számköz a $\tilde{H}$ operátor hézaga, vagy ami az adott esetben ugyanaz, regularitási intervalluma. Minthogy a $\tilde{H}$ önadjungált operátor nyilvánvalóan a H operátor folytatása, a tételt bebizonyítottuk.

Az olvasóra bízzuk, hogy a 2. § többi tételei segítségével megfelelő kritériumokat nyerjen arra, hogy az (a, b) hézaggal rendelkező H operátornak mikor lesz egyetlen olyan $\tilde{H}$ önadjungált folytatása, amelynek az (a, b) számköz regularitási intervalluma.

2. Amint korábban említettük, az alábbi tételből következik a 18. tétel.

22. TÉTEL. *Ha egy (a, b) hézaggal rendelkező H hermitikus operátor $\mathfrak{n}(>0)$ defektus-száma véges, akkor a H operátor tetszés szerinti $\tilde{H}$ önadjungált folytatása spektrumának az (a, b) számközbe eső része véges számú sajátértékből áll, amelyek multiplicitásának az összege legfeljebb* $\mathfrak{n}$[7].

Bizonyítás. Legyen $\tilde{H}$ a H operátor olyan önadjungált folytatása, amelynek az (a, b) számköz regularitási intervalluma, $\tilde{H}'$ pedig H-nak egy másik önadjungált folytatása. A $\tilde{H}$, $\tilde{H}'$ operátorok minden λ reguláris pontjában az ezen operátorokhoz tartozó R_λ, R'_λ rezolvensek között fennáll az

$$R'_\lambda f=R_\lambda f-\sum_{j,k=1}^{r}Q_{jk}^{(-1)}(\lambda)\,(f,\varphi_j(\bar{\lambda}))\,\varphi_k(\lambda) \qquad (f\in\mathfrak{H}) \tag{7.2}$$

[7] Könnyű belátni, hogy hermitikus S operátor esetén $m(S)=b(>-\infty)$ akkor és csak akkor, ha tetszés szerinti $a<b$ mellett az (a, b) számköz az S operátor hézaga; tehát a 18. tétel a 22. tételből következik.

összefüggés, ahol $r \leqq n$, továbbá a $\varphi_k(\lambda)$ $(k=1, 2, ..., r)$ vektor-függvények és a $Q(\lambda) = \|Q_{jk}(\lambda)\|_1^r$ matrix a $\tilde{H}$ operátor reguláris pontjainak a halmazán holomorfok (lásd 6. §, 2. pont). Ebből adódik, hogy $\tilde{H}'$ spektrumának az (a, b) intervallum belsejébe eső része izolált sajátértékekből áll (és ezek a $\det Q(\lambda)$ függvény zérushelyei).

Először tegyük fel, hogy a $c = \frac{a+b}{2}$ érték a $\tilde{H}'$, $\tilde{H}$ operátorokra nézve reguláris. Ekkor a (7. 2) egyenlőségben jogos a $\lambda = c$ helyettesítés és így a következőt kapjuk:

$$R'_c f = R_c f - \sum_{j,k=1}^{r} Q_{jk}^{(-1)}(c)\,(f, \varphi_j(c))\,\varphi_k(c). \tag{7.3}$$

Egyidejűleg megjegyezzük, hogy (a, b) a $\tilde{H}$ operátor hézaga, tehát

$$|R_c f| \leqq \frac{2}{b-a}|f| \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{7.4}$$

Most tegyük fel, hogy található a $\tilde{H}'$ operátor sajátvektoraiból álló olyan $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ $(n > r)$ ortonormális rendszer, amelyre

$$\tilde{H}'\psi_j = \mu_j \psi_j, \quad a < \mu_j < b \qquad (j = 1, 2, ..., n).$$

Ekkor tetszés szerinti $f \neq 0$ vektorra, amely

$$f = \xi_1 \psi_1 + ... + \xi_n \psi_n$$

alakú, fennáll az

$$|R_c f| = \left|\sum_{j=1}^{r} \frac{\xi_j}{c - \mu_j}\psi_j\right| > \frac{2}{b-a}\left|\sum_{j=1}^{r} \xi_j \psi_j\right| = \frac{2}{b-a}|f|$$

egyenlőtlenség.

Másrészt $n > r$ esetén mindig találhatók olyan $\xi_1, ..., \xi_n$ számok, amelyek közül nem mindegyik nulla és amelyekre

$$(f, \varphi_k(c)) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\psi_j, \varphi_k(c)) = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., n),$$

és a ξ_j számok ilyen megválasztása mellett (7. 3) és (7. 4) alapján

$$|R'_c f| = |R_c f| \leqq \frac{2}{b-a}|f|.$$

Ellentmondásra jutottunk.

Ezek szerint ha a $c = \frac{a+b}{2}$ szám a $\tilde{H}'$ operátornak nem sajátértéke, akkor $\tilde{H}'$ spektruma az (a, b) intervallum belsejében olyan sajátértékekből áll, amelyek multiplicitásának az összege $\leqq r$, tehát még inkább $\leqq n$.

Most tegyük fel, hogy c a $\tilde{H}'$ operátor sajátértéke. Ebben az esetben bármelyik c-től különböző és hozzá elég közel fekvő c_1 pont reguláris a $\tilde{H}'$ operátorra vonatkozóan, és így a már elmondottak értelmében minden c_1 középpontú és (a, b)-ben foglalt számközben $\tilde{H}'$ spektruma olyan sajátértékekből áll, amelyekhez tartozó multiplicitások összege $\leqq \mathfrak{n}$, következésképpen ugyanez lesz a helyzet az egész (a, b) nyílt intervallumban.

A tételt bebizonyítottuk.

7. 1. megjegyzés. Ugyanezzel a módszerrel nehézség nélkül bebizonyítható, hogy ha a H operátor $(1 \leqq \mathfrak{n}(H) < \infty)$ valamelyik $\tilde{H}$ önadjungált folytatása spektrumának az (a, b) számköz belsejébe eső része véges számú sajátértékből áll és a megfelelő multiplicitások összege $\leqq n$, akkor H bármely másik $\tilde{H}'$ önadjungált folytatásának a spektruma (a, b) belsejében véges számú sajátértékből áll és az ezekhez tartozó multiplicitások összege $\leqq n + \mathfrak{n}$.

3. Állapodjunk meg abban, hogy a λ valós számot a H *hermitikus operátor reguláris értékének* fogjuk nevezni, ha λ a H operátor legalább egy $\tilde{H}$ önadjungált folytatására vonatkozóan reguláris.

A 21. tétel alapján ez a definíció a következővel ekvivalens: a λ számot $(-\infty < \lambda < \infty)$ akkor nevezzük a H hermitikus operátor reguláris értékének, ha valamilyen környezete a H operátor hézaga.

Az $\mathfrak{n}(H) < \infty$ esetben érvényes az alábbi tétel.

23. TÉTEL. *Legyenek $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s$ a H hermitikus operátor reguláris értékei, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ pedig olyan természetes számok, hogy $p_1 + p_2 + \ldots + p_s = \mathfrak{n}(H)$. Ekkor a H operátornak van legalább egy $\tilde{H}$ önadjungált folytatása, amelynek a λ_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ szám legalább p_j-szeres $(j = 1, 2, \ldots, s)$ sajátértéke.*[8]

Bizonyítás. Ha $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s$ a H operátor reguláris értékei, akkor találhatók olyan $\delta_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ számok, hogy

$$|Hf - \lambda_j f| \geqq \delta_j |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(H)); \quad (j = 1, 2, \ldots, s). \tag{7.5}$$

Legyen $\tilde{H}_1$ a H operátor olyan önadjungált folytatása, amelynek a λ_1 szám reguláris értéke. Jelöljük a $\tilde{H}_1$ operátor rezolvensét R'_λ-vel és képezzünk segítségével olyan $\varphi_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, \mathfrak{n})$ vektor-függvényeket, amelyek $\tilde{H}_1$ reguláris pontjainak a halmazán holomorfok és a $H^* \varphi = \lambda \varphi$ egyenlet összes megoldásaiból álló halmazban bázist alkotnak.

Jelölje $\mathfrak{D}(H_1)$ a $\mathfrak{H}$-beli

$$f = \sum_{j=1}^{p_1} \xi_j \varphi_j(\lambda_1) + g \qquad (g \in \mathfrak{D}(H)) \tag{7.6}$$

alakú vektorok összességét, és legyen

$$H_1 f = \lambda_1 \sum_{j=1}^{p_1} \xi_j \varphi_j(\lambda_1) + Hg.$$

Ekkor speciálisan fennállnak a

$$H_1 \varphi_j(\lambda_1) = \lambda_1 \varphi_j(\lambda_1) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p_1)$$

egyenlőségek.

[8] A 23. tételt lényegében véve először H. HAMBURGER bizonyította be (lásd [10], 12. tétel), habár ő seholsem fogalmazta meg az általunk adott formában. A mi bizonyításunk lényegesen eltér HAMBURGER bizonyításától.

Nem nehéz igazolni, hogy H_1 a H operátor valamilyen hermitikus folytatása. Ennélfogva a

(7. 7) $$H_1^*\varphi = \lambda\varphi \qquad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$$

egyenlet mindegyik φ megoldása egyúttal a $H^*\varphi = \lambda\varphi$ egyenletnek is megoldása, tehát

(7. 8) $$\varphi = c_1\varphi_1(\lambda) + c_2\varphi_2(\lambda) + \ldots + c_n\varphi_n(\lambda)$$

alakú, ahol a c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ mennyiségek komplex állandók.

Ahhoz, hogy egy (7. 8) alakú φ vektor tényleg kielégítse a (7. 7) egyenletet, szükséges és elégséges, hogy

(7. 9) $$(\varphi, H_1 f - \lambda f) = 0 \qquad (f \in \mathfrak{D}(H_1))$$

legyen.

Helyettesítsük itt f-et a (7. 6) egyenlőségben szereplő kifejezésével. Minthogy az $f = g \in \mathfrak{D}(H)$ esetben a (7. 9) feltétel minden (7. 8) alakú φ mellett teljesül, azt kapjuk, hogy ez a feltétel a következő egyenletrendszerrel ekvivalens:

(7. 10) $$(\varphi, \varphi_k(\lambda)) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\lambda)) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p_1).$$

Mivel a

(7. 11) $$\|(\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\lambda))\|_1^n$$

matrix $\lambda = \lambda_1$ esetén nem szinguláris *Gram*-matrix, azért λ_1-hez elég közeli komplex λ értékekre $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ a (7. 11) matrix szintén nem szinguláris. Következésképpen ezen λ értékek mellett a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ismeretlenekre vonatkozó (7. 10) egyenletrendszer matrixának a rangja pontosan p_1-gyel egyenlő, tehát az egyenletrendszernek pontosan $n - p_1$ számú lineárisan független megoldása van.

Ezek szerint ha λ elég közel van λ_1-hez, akkor a (7. 7) egyenletnek pontosan $n - p_1$ számú lineárisan független megoldása van, azaz

$$n(H_1) = n(H) - p_1.$$

Most meg fogjuk mutatni, hogy a $\lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_s$ értékek H_1-re nézve is regulárisak. Ebből a célból állítsuk elő az $f \in \mathfrak{D}(H_1)$ elemet a (7. 6) képletnek megfelelően

$$f = \varphi + g \quad (g \in \mathfrak{D}(H);\ H_1\varphi = H^*\varphi = \lambda_1\varphi)$$

alakban. Tekintetbe véve a (7. 5) egyenlőtlenségeket és azt, hogy $\varphi \perp Hg - \lambda_1 g$, a következőt kapjuk:

$$|H_1 f - \lambda_j f|^2 = |Hg - \lambda_j g - (\lambda_j - \lambda_1)\varphi|^2 =$$

$$= |Hg - \lambda_1 g|^2 + (\lambda_j - \lambda_1)^2 |\varphi|^2 \geqq \delta_j^2 |g|^2 + |\lambda_j - \lambda_1|^2 |\varphi|^2 \qquad (j = 2, 3, \ldots, s).$$

Legyen

$$\delta_j' = \min(\delta_j, |\lambda_j - \lambda_1|) \qquad (j = 2, 3, \ldots, s);$$

ekkor

$$\delta_j^2 |g|^2 + (\lambda_j - \lambda_1)^2 |\varphi|^2 \geqq \delta_j'^2 (|g|^2 + |\varphi|^2) \geqq \frac{1}{2} \delta_j'^2 |g+\varphi|^2.$$

Ily módon

$$|H_1 f - \lambda_j f| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_j' |f| \qquad (j = 2, 3, \dots, s),$$

vagyis a λ_j $(j=2, 3, \dots, s)$ számok a H_1 operátor reguláris értékei.

Analóg módon ahhoz, ahogyan a H operátorhoz megszerkesztettük H_1-et, a H_1 operátorból kiindulva képezhetjük ennek egy H_2 hermitikus folytatását, amelynek a λ_2 szám p_2-szörös sajátértéke, továbbá

$$\mathrm{n}(H_2) = \mathrm{n}(H) - p_1 - p_2,$$

és amelyre nézve a $\lambda_3, \dots, \lambda_s$ értékek regulárisak. Tovább folytatva ezt az eljárást egy H_s önadjungált operátort kapunk, amely a 23. tételben szereplő összes feltételnek megfelel, és amelynek egyebek között a λ_s szám pontosan p_s-szeres sajátértéke.

A tételt bebizonyítottuk.

7. 2. megjegyzés. A tétel bizonyítása során nem volt lényeges, hogy a λ_j $(j=1, 2, \dots, s)$ számokat növekedésük sorrendjében számoztuk. Ennélfogva a tételre adott bizonyításunkból következik, hogy a H operátornak mindig van olyan $\tilde{H}$ önadjungált folytatása, amelyre a tétel valamennyi feltétele teljesül, és amelynek a tetszés szerint rögzített λ_k *pontosan* p_k-szoros sajátértéke.

Ha pedig mindegyik λ_j $(j=1, 2, \dots, s)$ pont a H operátornak ugyanabban a hézagában helyezkedik el, akkor még az is igaz lesz, hogy létezik olyan $\tilde{H}$ önadjungált folytatás, amelynek mindegyik λ_j $(j=1, 2, \dots, s)$ szám *pontosan* p_j-szeres $(j=1, 2, \dots, s)$ sajátértéke. Ez az állítás közvetlenül adódik a 22. és 23. tétel egybevetéséből.

Végül megjegyezzük, hogy abból az eljárásból, amellyel a H operátort a kívánt $\tilde{H}$ operátorrá folytattuk, következik, hogy $s>1$ esetén az utóbbi soha sincs egyértelműen meghatározva, és megfordítva, $s=1$ esetén egyértelműen meg van határozva.

4. A hermitikus operátorra vonatkozóan reguláris pontok második definíciója értelmében (lásd 7. §, 2. pont) ha egy (a, b) nyílt intervallum a H hermitikus operátor hézaga, akkor ennek az intervallumnak mindegyik pontja reguláris H-ra nézve.

A fordított állítás nem igaz, vagyis ha az (a, b) nyílt intervallum minden pontja reguláris H-ra nézve, akkor egyáltalán nem biztos, hogy az (a, b) intervallum a H operátor hézaga. A 23. tétel szerint ebben az esetben (feltéve, hogy $\mathrm{n}(H)<\infty$) csak annyit lehet állítani, hogy a H operátor tetszés szerinti $\tilde{H}$ önadjungált folytatása spektrumának az (a, b) intervallumba eső része véges multiplicitású izolált sajátértékekből áll.[9] Az utóbbi állítás, amint az alább sorra kerülő 24. tételből következni fog, egyszerű H operátor esetén megfordítható.

[9] Ugyanis a *Heine—Borel*-tétel szerint (a, b) minden (a_1, b_1) belső rész-intervalluma befedhető a H operátor véges számú hézagával.

Emlékeztetünk arra, hogy egy H $(H \neq H^*)$ hermitikus operátort akkor neveznek *egyszerűnek*, ha a $\mathfrak{H}$ térnek nincs olyan valódi altere, amely a H operátort redukálja és amelyben H önadjungált.

Mielőtt kimondanánk a 24. tételt, a következő megjegyzést tesszük az $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$ defektus-indexű H egyszerű hermitikus operátorokra vonatkozóan, az egyszerűség kedvéért arra az esetre szorítkozva, amikor $\mathfrak{n} < \infty$.

Legyen $\tilde{H}$ az egyszerű H operátor valamelyik önadjungált folytatása, és legyen $\tilde{H}$ rezolvense R_λ. Képezzük úgy mint a 6. § 2. pontjában, a lineárisan független és holomorf $\varphi_j(\lambda)$ $(j=1, 2, \ldots, m;\ \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$ vektor-függvényeket, és mutassuk meg, hogy *ha az* $f \in \mathfrak{H}$ *vektorra*

(7. 12) $$(f, \varphi_j(\lambda)) \equiv 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, m;\ \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0),$$

akkor $f=0$.

Bizonyítás céljából tegyük fel az ellenkezőt és tekintsük azt a $\mathfrak{H}_0$ halmazt, amely a (7. 12) azonosságnak eleget tevő összes $f \in \mathfrak{H}$ vektorokból áll. Először is tetszés szerinti λ-ra $(\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$ fennáll

$$R_\lambda \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0,$$

mert ha $f \in \mathfrak{H}_0$, akkor a (6. 3) összefüggések értelmében

$$(R_\lambda, \varphi_j(\mu)) = (f, R_{\bar\lambda}\varphi_j(\mu)) = \frac{(f, \varphi_j(\bar\lambda)) - (f, \varphi_j(\mu))}{\bar\lambda - \mu} = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \mathfrak{n};\quad \mu \neq \bar\lambda),$$

azaz

$$R_\lambda f \in \mathfrak{H}_0.$$

Másrészt a $\{\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_\mathfrak{n}(\lambda)\}$ rendszer az $\mathfrak{R}(H-\bar\lambda I)$ $(\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$ halmaz ortogonális komplementumában bázist alkot, tehát minden $f \in \mathfrak{H}_0$ elemnek megfelel egy $g = g(\lambda)$ $(\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$ vektor, amelyre

$$Hg - \bar\lambda g = f, \quad \text{vagyis} \quad g = R_{\bar\lambda} f \in \mathfrak{D}(H).$$

Ilyen módon a H operátor értelmezve van a

$$\mathfrak{D}_1 = R_{\bar\lambda}\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0$$

halmazon, és H mint a $\mathfrak{H}_0$ tér $\mathfrak{D}_1$ részhalmazán értelmezett operátor önadjungált, ugyanis $(H-\bar\lambda I)\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{H}_0$ $(\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$.

Most legyen

$$g \in \mathfrak{D}(H), \quad f = (H - \bar\lambda I)g \qquad (\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0).$$

Bontsuk fel az f vektort:

$$f = f_0 + f_1 \qquad (f_0 \in \mathfrak{H}_0, f_1 \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0).$$

Ekkor a következőt kapjuk:

$$g = R_{\bar\lambda} f = R_{\bar\lambda} f_0 + R_{\bar\lambda} f_1 = g_0 + g_1,$$

ahol $g_0 = R_{\bar\lambda} f_0 \in \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}(H)$. Továbbá $f_1 \perp \mathfrak{H}_0$ miatt $f_1 \perp R_{\bar\lambda}\mathfrak{H}_0$, következésképpen $g_1 = R_{\bar\lambda} f_1 \perp \mathfrak{H}_0$. Ezek szerint bármilyen $g \in \mathfrak{D}(H)$ vektor $\mathfrak{H}_0$-ra való vetülete egy $g_0 \in \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}(H)$ vektor, vagyis $\mathfrak{H}_0$ redukálja a H operátort.

Ellentmondásra jutottunk, mert a feltevés szerint H egyszerű operátor. Az állítást bebizonyítottuk.

24. TÉTEL[10]. *Legyen H $(\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{H})$ valamilyen egyszerű hermitikus operátor, amelynek a defektus-indexe* $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})$, *ahol* $1 \leqq \mathfrak{n} < \infty$. *Ahhoz, hogy az* (a, b) *nyílt számköz mindegyik pontja a H operátor reguláris pontja legyen, szükséges (elégséges), hogy a H operátor tetszés szerinti (legalább egy) $\tilde{H}$ önadjungált folytatásának a spektruma az* (a, b) *intervallumban izolált sajátértékekből álljon.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége, amint már megjegyeztük, a 23. tételből következik függetlenül attól, egyszerű-e a H operátor vagy sem.

Bebizonyítjuk, hogy az ismertetett feltétel elégséges.

Tehát létezzék H-nak olyan $\tilde{H}$ önadjungált folytatása, amelynek (a, b)-beli spektruma izolált λ_j sajátértékekből áll. Ekkor a λ_j $(j=1, 2, \ldots)$ pontoktól különböző bármelyik λ pont a $\tilde{H}$ operátorra nézve, és így H-ra nézve is, reguláris. Meg kell még mutatni, hogy a λ_j $(j=1, 2, \ldots)$ pontok is regulárisak.

Megjegyezzük, hogy ha $\lambda' < \lambda''$ az (a, b) intervallum két pontja, amelyek a $\{\lambda_j\}_1^\infty$ sorozat egyetlen pontját sem fogják közre, akkor a (λ', λ'') számköz a $\tilde{H}$ operátornak, és így H-nak is, hézaga. Ezért a 22. tétel szerint a H operátor bármely másik $\tilde{H}'$ önadjungált folytatásának (λ', λ'')-beli spektruma véges számú sajátértékből áll, tehát az egész (a, b) számközbe eső spektrum izolált sajátértékek összessége.

Legyen a korábbiaknak megfelelően $\{\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_\mathfrak{n}(\lambda)\}$ bázis a $H^*\varphi - \lambda\varphi = 0$ egyenlet megoldásainak a halmazában, amelyet az ismert módon a $\tilde{H}$ operátor R_λ rezolvensének a segítségével szerkesztettünk meg.

Most megmutatjuk, hogy tetszés szerinti $\lambda_0 \in \{\lambda_j\}_1^\infty$ sajátérték multiplicitása legfeljebb $\mathfrak{n}$-nel egyenlő. Ha ez nem lenne igaz, akkor találhatnánk olyan ψ sajátvektort $(\tilde{H}\psi = \lambda_0\psi,\ \psi \neq 0)$, hogy

$$(\psi, \varphi_j(\lambda)) = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, \mathfrak{n}),$$

ahol λ a $\tilde{H}$ operátor bármelyik reguláris pontja. De ekkor $\psi \in \mathfrak{R}(H - \bar{\lambda} I)$, tehát

$$\psi = (\lambda_0 - \bar{\lambda}) R_{\bar{\lambda}} \psi \in \mathfrak{D}(H), \quad H\psi = \lambda_0 \psi.$$

Ellentmondásra jutottunk, ugyanis az egyszerű operátor definíciója értelmében H-nak nem lehet egy sajátvektora sem.

Legyen $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p\}$ $(p \leqq \mathfrak{n})$ a ψ $(\tilde{H}\psi = \lambda_0\psi)$ sajátvektorok halmazának egy bázisa.

Megjegyezzük, hogy tetszés szerinti

$$\psi = \sum_{k=1}^{p} \xi_k \psi_k \qquad \left(\sum_1^p |\xi_k|^2 > 0\right) \tag{7.13}$$

sajátvektorra és a $\tilde{H}$ operátorra nézve reguláris λ pontra a

[10] A 24. tétel szintén benne foglaltatik H. HAMBURGER már említett [10] cikkének eredményeiben. Az $\mathfrak{n}=1$ esetben a szerző felhasználta korábbi vizsgálatai során (lásd [10]). A jelen bizonyítás különbözik H. HAMBURGER bizonyításától.

$$(\varphi_j(\lambda), \psi) \qquad (j=1, 2, \ldots, \mathfrak{n}) \tag{7.14}$$

skaláris szorzatok közül legalább az egyik nem egyenlő nullával. Valóban, ha feltesszük, hogy valamilyen reguláris λ esetén ezek a szorzatok mindnyájan nullával egyenlők, akkor bármely másik reguláris μ érték mellett is

$$(\varphi_j(\mu), \psi) = (\varphi_j(\lambda) + (\mu - \lambda) R_\mu \varphi_j(\lambda), \psi) = (\varphi_j(\lambda), \psi + (\bar{\mu} - \lambda) R_{\bar{\mu}} \psi) =$$

$$= \frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}}{\lambda_0 - \bar{\mu}} (\varphi_j(\lambda), \psi) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

ez pedig ellentétben áll azzal, hogy a H operátor egyszerű.

A (7.14) skaláris szorzatokba behelyettesítve a ψ vektor (7. 13) alatti kifejezését azt kapjuk, hogy az említett tény a következőt jelenti: tetszés szerinti reguláris λ esetén a

$$\|(\varphi_j(\lambda), \psi_k)\| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, p)$$

matrix rangja p.

Ha ezt a matrixot a valós reguláris $\lambda = \alpha$ pontban vizsgáljuk és tekintetbe veszszük, hogy a $\{\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)\}$, $\{\psi_1, \ldots, \psi_p\}$ bázisok csak nem szinguláris lineáris transzformáció erejéig vannak meghatározva, akkor arra a következtetésre jutunk, hogy az általánosság megszorítása nélkül vehető

$$(7.15) \qquad (\varphi_j(\alpha), \psi_k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k \\ 0, & \text{ha } j \neq k \end{cases} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, p).$$

Ezután értelmezzünk egy R'_α operátort az alábbi módon:

$$(7.16) \qquad R'_\alpha f = R_\alpha f - \sum_{j=1}^{p} (f, \varphi_j(\alpha)) \varphi_j(\alpha) \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Mindkét oldalra alkalmazva a $H^* - \alpha I$ operátort és felhasználva, hogy $H^* \varphi_j(\alpha) - \alpha \varphi_j(\alpha) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$, nyerjük:

$$(H^* - \alpha I) R'_\alpha f = (H^* - \alpha I) R_\alpha f = (\tilde{H} - \alpha I) R_\alpha f = f \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Ez az egyenlőség azt mutatja, hogy $f \neq 0$ esetén $R'_\alpha f \neq 0$, és így az R'_α önadjungált operátornak van $(R'_\alpha)^{-1}$ inverze, amely szintén önadjungált operátor.

Legyen

$$H' = (R'_\alpha)^{-1} + \alpha I \qquad (\mathfrak{D}(H') = \mathfrak{R}(R'_\alpha)).$$

Nem nehéz meggyőződni róla, hogy H' a H operátor folytatása.

Csakugyan, ha $g \in \mathfrak{D}(H)$ és

$$f = Hg - \alpha g = \tilde{H} g - \alpha g,$$

akkor $(f, \varphi_j(\alpha)) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, tehát a (7. 16) definíció alapján

$$R'_\alpha f = R_\alpha f = g,$$

innen pedig $g \in \mathfrak{D}(H')$ és

$$H'g - \alpha g = (H' - \alpha I) R'_\alpha f = f = Hg - \alpha g,$$

azaz $H'g = Hg$.

A λ_0 pont a H' folytatásnak vagy reguláris pontja, vagy izolált sajátértéke lehet. Ha megmutatjuk, hogy az első eset áll fenn, vagyis hogy a

$$H'\chi - \lambda_0 \chi = 0 \tag{7.17}$$

egyenlőség csak $\chi = 0$ mellett teljesül, akkor a tétel be lesz bizonyítva (ugyanis λ_0 a $\{\lambda_j\}$ sorozat tetszés szerint választott eleme).

A (7. 17) egyenlőségből adódik, hogy

$$(\lambda_0 - \alpha) R'_\alpha \chi = R'_\alpha (H'\chi - \alpha\chi) = \chi,$$

tehát a (7. 16) definíció értelmében

$$\chi - (\lambda_0 - \alpha) R_\alpha \chi = -(\lambda_0 - \alpha) \sum_1^p (\chi, \varphi_j(\alpha))\, \varphi_j(\alpha). \tag{7.18}$$

Másrészt a $\{\psi_1, \ldots, \psi_p\}$ rendszer bázis lévén a $\tilde{H}\psi - \lambda_0\psi = 0$ egyenlet megoldásaiból álló halmazban, bázist fog alkotni a

$$\psi - (\lambda_0 - \alpha) R_\alpha \psi = 0 \tag{7.19}$$

egyenlet megoldásainak a halmazában is.

Ebből speciálisan az is következik, hogy

$$\bigl(\chi - (\lambda_0 - \alpha) R_\alpha \chi, \psi_j\bigr) = \bigl(\chi, \psi_j - (\lambda_0 - \alpha) R_\alpha \psi_j\bigr) = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p).$$

Ennélfogva ha a (7. 18) egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk ψ_k-val ($k = 1, 2, \ldots, p$) és figyelembe vesszük a (7. 15) összefüggést, a következőt nyerjük:

$$(\chi, \varphi_k(\alpha)) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{7.20}$$

tehát a (7. 18) egyenlőségben a jobb oldalt nullával lehet helyettesíteni. Ily módon χ a (7. 19) egyenlet egyik megoldása, következésképpen

$$\chi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_p\psi_p.$$

Visszahelyettesítve χ-nek ezt a kifejezését a (7. 20) egyenlőségbe és újra felhasználva a (7. 15) összefüggést, azt kapjuk, hogy $c_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, p$), vagyis $\chi = 0$.

A tételt bebizonyítottuk.

5. Állapodjunk meg abban, hogy a $\tilde{H}$ önadjungált operátor spektrumát akkor fogjuk *diszkrétnek* nevezni, ha véges multiplicitású izolált sajátértékekből áll.

A 24. tételből következik, hogy ha a H $(1 \leqq \mathfrak{n}(H) < \infty)$ operátor valamelyik $\tilde{H}$ önadjungált folytatásának diszkrét spektruma van, akkor a H operátor bármely másik $\tilde{H}'$ önadjungált folytatásának a spektruma is diszkrét.

Valóban, ha $\tilde{H}$ spektruma diszkrét és H egyszerű operátor, akkor a 24. tétel szerint a valós tengely csupa reguláris pontból áll, és így a 22. tétel alapján tetszés szerinti másik $\tilde{H}'$ önadjungált folytatás spektruma izolált sajátértékekből áll, amelyek multiplicitása $\leqq \mathfrak{n}$.

Abban az esetben viszont, amikor a H operátor nem egyszerű, ugyanerre a következtetésre jutunk a

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1, \quad H = H_0 \oplus H_1$$

felbontások felhasználásával, ahol $\mathfrak{H}_0$ olyan maximális tér[11], amely a H operátort redukálja és amelyben H (tehát a H_0 megszorítás) önadjungált, $\mathfrak{H}_1$ ennek az ortogonális komplementuma, H_0 és H_1 pedig a H által $\mathfrak{H}_0$-ban, ill. $\mathfrak{H}_1$-ben indukált hermitikus operátorok.

8. §. Félig korlátos operátorok diszkrét spektrumú folytatással

Legyen T (alulról) félig korlátos operátor és $\tilde{T}$ ennek egy diszkrét spektrumú félig korlátos önadjungált folytatása. Ekkor a $\tilde{T}$ operátor spektrális felbontása

$$\tilde{T}f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\tilde{T})(f, \varphi_j)\varphi_j$$

alakú, ahol $\{\varphi_j\}_1^\infty$ a $\tilde{T}$-hoz tartozó sajátvektorok teljes ortonormális rendszere és

$$\lambda_1(\tilde{T}) \leqq \lambda_2(\tilde{T}) \leqq \ldots \leqq \lambda_n(\tilde{T}) \leqq \ldots$$

a megfelelő sajátértékek sorozata, minden sajátértéket annyiszor feltüntetve, amennyi a multiplicitása.

Ha ezenkívül $1 \leqq \mathfrak{n}(T) < \infty$, akkor a 18. tétel és az előbbi paragrafus végén tett megjegyzés értelmében T mindegyik önadjungált folytatásának a spektruma alulról félig korlátos és diszkrét lesz. Viszont ha $\mathfrak{n}(T) = \infty$, akkor ennek az állításnak egyik része sem igaz.

Ennélfogva nem érdektelen a következő tétel.

25. TÉTEL. *Ha a T $(1 \leqq \mathfrak{n}(T) \leqq \infty)$ hermitikus operátor valamelyik $\tilde{T}$ félig korlátos önadjungált folytatása diszkrét spektrummal rendelkezik, akkor a T operátor T_μ durva folytatásának a spektruma diszkrét, továbbá*

$$\lambda_j(\tilde{T}) \leqq \lambda_j(T_\mu) \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{8.1}$$

ahol $\lambda_j(\tilde{T})$, $\lambda_j(T_\mu)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ a $\tilde{T}$, T_μ operátorok egymás után következő sajátértékei.

Bizonyítás. Ha a tételben az adott T, $\tilde{T}$, T_μ operátorokat rendre az

$$S = T + aI, \quad \tilde{S} = \tilde{T} + aI, \quad S_\mu = T_\mu + aI$$

operátorokkal helyettesítjük, ahol a valós szám, és a tételt bebizonyítjuk az $\tilde{S}$, S_μ operátorokra, akkor ezzel nyilvánvalóan az adott operátorokra is készen lesz a bizonyítás.

Legyen $a > -m(\tilde{T})$; ekkor $m(\tilde{S}) > 0$ és a 12. tétel értelmében

$$S_\mu^{-1} = \tilde{S}^{-1} - (\tilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0}, \tag{8.2}$$

ahol $\mathfrak{N}_0$ az $S^*\varphi = 0$ egyenlet összes megoldásaiból áll.

Minthogy feltevés szerint $\tilde{S}$ spektruma diszkrét és pozitív, azért $\tilde{S}^{-1}$ és vele

[11] A 24. tétel bizonyítása előtt végzett megfontolásokból következik, hogy $\mathfrak{H}_0$ mindazoknak az f vektoroknak az összessége, amelyek a $\varphi_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, \mathfrak{n})$ vektorokra tetszés szerinti λ($\mathrm{Im}\lambda \neq 0$) esetén ortogonálisak.

együtt $(\tilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0}$ is teljesen folytonos operátor[12]. Következésképpen S_μ^{-1} is teljesen folytonos, tehát az S_μ operátor spektruma diszkrét.

Ha

$$\lambda_1(\tilde{S}) \leqq \lambda_2(\tilde{S}) \leqq \dots; \quad \lambda_1(S_\mu) \leqq \lambda_2(S_\mu) \leqq \dots$$
$$(0 < \lambda_1(\tilde{S}), \quad 0 < \lambda_1(S_\mu))$$

az $\tilde{S}$, ill. S_μ operátor sajátértékeinek növekvően rendezett sorozata, akkor

$$\lambda_1^{-1}(\tilde{S}) \geqq \lambda_2^{-1}(\tilde{S}) \geqq \dots; \quad \lambda_1^{-1}(S_\mu) \geqq \lambda_2^{-1}(S_\mu) \geqq \dots$$

az $\tilde{S}^{-1}$, ill. S_μ^{-1} operátor sajátértékeinek fogyóan rendezett sorozata. Minthogy pedig (8. 2) értelmében

$$S_\mu^{-1} \leqq \tilde{S}^{-1},$$

azért a teljesen folytonos operátorok sajátértékeinek ismert minimax tulajdonságai miatt

$$\lambda_j^{-1}(S_\mu^{-1}) \leqq \lambda_j^{-1}(\tilde{S}^{-1}), \quad \text{azaz} \quad \lambda_j(\tilde{S}) \leqq \lambda_j(S_\mu) \qquad (j=1,2,\dots).$$

A tételt bebizonyítottuk.

8. 1. megjegyzés. Az $\mathfrak{n}(T) < \infty$ esetben a (8. 1) összefüggésnél több is mondható, nevezetesen a következő:

$$\lambda_j(\tilde{T}) \leqq \lambda_j(T_\mu) \leqq \lambda_{j+\mathfrak{n}}(\tilde{T}) \qquad (j=1,2,\dots).$$

Csakugyan, ha valamilyen j értékre $\lambda_{j+\mathfrak{n}}(\tilde{T}) < \lambda_j(T_\mu)$ volna, akkor a $(-\infty, \lambda_j(T_\mu))$ számközben a T_μ operátornak (multiplicitással számolva) $j-1$, a $\tilde{T}$ operátornak pedig $j+\mathfrak{n}$ sajátértéke helyezkednék el, és ez a 7. 1. megjegyzés szerint lehetetlen.

26. TÉTEL. *Ha az S $(m(S)>0)$ operátor valamelyik $\tilde{S}$ félig korlátos önadjungált folytatásának diszkrét spektruma van, akkor az S operátor $\mathfrak{M}_0$-ra megszorított S_M folytatásának is diszkrét a spektruma. Itt $\mathfrak{M}_0$ az S_M operátor* 0 *sajátértékhez tartozó $\mathfrak{N}_0$ sajátalterének az ortogonális komplementumát jelenti.*

Bizonyítás. Az előbbi tétel értelmében S_μ spektruma diszkrét. Másrészt a 13. tétel bizonyítása során mellesleg nyert (5. 17) képlet szerint

$$S_M^{(-1)} g = P_{\mathfrak{M}_0} S_\mu^{-1} g \qquad (g \in \mathfrak{M}_0),$$

ahol $S_M^{(-1)}$ az $\mathfrak{M}_0$-on tekintett S_M operátor inverze, $P_{\mathfrak{M}_0}$ pedig az $\mathfrak{M}_0$-ra való merőleges vetítés operátora.

Az S_μ operátornak diszkrét spektruma van, tehát S_μ^{-1} teljesen folytonos, következésképpen $S_M^{(-1)}$ is teljesen folytonos, vagyis az S_M operátornak $\mathfrak{M}_0$-ban diszkrét spektruma van.

8. 2. megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy $\mathfrak{N}_0$ megegyezik az $S^*\varphi = 0$ egyenlet φ megoldásainak az összességével és dimenziója $\mathfrak{n}(S)$, amely végtelen is

[12] Az 1. tételből adódik (lásd az (1.1) képletet), hogy ha a H önadjungált operátor teljesen folytonos, akkor tetszés szerinti $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{H}$ zárt lineáris halmaz esetén a $H_{\mathfrak{N}}$ operátor szintén teljesen folytonos (mert korlátos operátornak teljesen folytonos operátorral való szorzata mindig teljesen folytonos).

lehet. Ha azonban $n(S) < \infty$, akkor a tételt egyszerűbben is meg lehet fogalmazni, ti. a következőképpen:

Az S_M operátor spektruma diszkrét.

Ebben az esetben még az is igaz, hogy *S tetszés szerinti $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásához tartozó sajátértékekre mindig fennállnak a*

$$\lambda_j(S_\mu) \leqq \lambda_j(\tilde{S}) \leqq \lambda_j(S_M) \qquad (j=1,2,\dots) \tag{8.3}$$

egyenlőtlenségek.

Valóban, a 11. tétel értelmében $a>0$ esetén

$$(S_\mu + aI)^{-1} \leqq (\tilde{S}+aI)^{-1} \leqq (S_M+aI)^{-1}.$$

Az összes itt szereplő inverz operátor teljesen folytonos, tehát a közöttük fennálló egyenlőtlenségek maguk után vonják a (fogyó sorrendben) egymás után következő sajátértékeikre vonatkozó megfelelő egyenlőtlenségeket.

Ennélfogva érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\lambda_j(S_\mu)+a} \leqq \frac{1}{\lambda_j(\tilde{S})+a} \leqq \frac{1}{\lambda_j(S_M)+a} \qquad (j=1,2,\dots),$$

és ezekből adódik (8. 3).

Megemlítjük még, hogy ha S egyszerű operátor, akkor, amint be lehet bizonyítani, érvényesek a

$$\lambda_j(S_M) < \lambda_j(S_\mu) \qquad (j=1,2,\dots)$$

szigorú egyenlőtlenségek.

II. FEJEZET *

ALKALMAZÁSOK

REGULÁRIS KVÁZI—DIFFERENCIÁLOPERÁTORRA VONATKOZÓ EGYDIMENZIÓS PEREMÉRTÉK-FELADATOK

Ebben a fejezetben a $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-tér szerepét azoknak az (a, b) véges intervallumban értelmezett komplex értékű és mérhető $f(x)$ függvényeknek az $L_2(a, b)$ lineáris halmaza fogja játszani, amelyekre

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty;$$

két $L_2(a, b)$-beli elem, f és g skaláris szorzatát szokás szerint az

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

képlettel fogjuk definiálni.

* A II. fejezet irodalmi hivatkozásait az e fejezet végén található irodalomjegyzék tartalmazza.

Vizsgálni fogjuk az $L_2(a, b)$-ben értelmezett önadjungált kvázi-differenciáloperátorokat. Az utóbbiak azon operátorok közvetlen általánosításai, amelyekhez a matematikai fizika egydimenziós peremérték-feladatai rendszerint vezetnek. Meg fogjuk mutatni, hogy a vizsgált operátorok félig korlátosak, és az I. fejezet eredményeire támaszkodva tanulmányozni fogjuk tulajdonságaikat[13].

1. §. Lineáris kvázi-differenciálegyenletek és Cauchy-függvényük

Legyenek $p_k(x)$ $(k=0, 1, 2, \dots, n)$ az $x \in (a, b)$ változó rögzített valós mérhető függvényei, amelyekre teljesülnek a következő feltételek:

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} A) \quad \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{|p_0(x)|} < \infty, \\ B) \quad \displaystyle\int_a^b |p_k(x)|\, dx < \infty \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}
$$

Ekkor, amint meg fogjuk mutatni, bizonyos $f \in L_2(a, b)$ függvényekre az alábbi egyenlőségek útján definiálható $f^{[k]}$ $(k=0, 1, 2, \dots, 2n)$ kvázi-differenciálkifejezéseknek meghatározott értelmük lesz:

$$
(1.2) \qquad \begin{cases} f^{[0]} = f, \quad f^{[k]} = \dfrac{df^{[k-1]}}{dx} \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ f^{[n]} = p_0 \dfrac{df^{[n-1]}}{dx} \\ f^{[n+k]} = -\dfrac{df^{[n+k-1]}}{dx} + p_k f^{[n-k]} \qquad (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}
$$

E definíciók szerint

$$
f^{[k]} = f^{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),
$$

$$
f^{[n]} = p_0 f^{(n)} = p_0 \frac{d^n f}{dx^n},
$$

$$
f^{[n+1]} = -\frac{d}{dx}\left(p_0 \frac{d^n f}{dx^n}\right) + p_1 \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}},
$$

$$
f^{[n+2]} = -\frac{d}{dx}\left[-\frac{d}{dx}\left(p_0 \frac{d^n f}{dx^n}\right) + p_1 \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right] + p_2 \frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}
$$

stb. és végül

$$
f^{[2n]} = p_n f - \frac{d}{dx}\left[p_{n-1} f^{(1)} - \frac{d}{dx}\left[p_{n-2} f^{(2)} - \dots - \frac{d}{dx}\left[p_1 f^{(n-1)} - \frac{d}{dx}(p_0 f^{(n)})\right] \dots\right]\right].
$$

[13] Az ebben a fejezetben ismertetett kutatások eredeti része a szerző korábbi [2], [3] munkáinak bizonyos általánosítását és lezárását képezi. Az I. fejezetben nyert általános fogalmak és tételek segítségével most sikerült a tárgyalást áttekinthetőbbé tenni és lerövidíteni.

Ha a p_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ függvények rendre $(n-k)$-szor differenciálhatók (ami természetesen nincs biztosítva), akkor $2n$-szer differenciálható f függvényekre $f^{[2n]}$ végeredményben a Jacobi—Bertrand-féle alakban[14] írható fel:

$$f^{[2n]} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(p_{n-k} \frac{d^k f}{dx^k} \right). \tag{1.3}$$

Jelölje $\mathfrak{D}^*$ azoknak az $f \in L_2(a, b)$ függvényeknek az összességét, amelyekre az (1.2) szerint egymás után képzett $f^{[k]}$ $(k=0, 1, \ldots, 2n-1)$ kvázi-deriváltak abszolút folytonosak, továbbá $f^{[2n]} \in L_2(a, b)$.

Most legyenek C_k $(k=0, 1, \ldots, 2n-1)$ tetszés szerinti komplex számok, $x=x_0$ pedig az (a, b) intervallum tetszés szerinti pontja. Éppen úgy, mint a közönséges differenciálegyenletek esetében, érvényes a következő egzisztenciatétel.

1°. *Bármilyen $h \in L_2(a, b)$ függvény mellett az*

$$\begin{cases} f^{[2n]} = h, & (1.4') \\ f^{[k]}(x_0) = C_k \quad (k=0, 1, \ldots, 2n-1) & (1.4'') \end{cases}$$

kvázi-differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatnak egy és csak egy $f \in \mathfrak{D}^*$ megoldása van.

Bizonyítás céljából elég megjegyezni, hogy az (1.4′) kvázi-differenciálegyenlet, ha az (1.2) képletekkel együtt tekintjük, ekvivalens egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerrel:

$$\begin{cases} \dfrac{df^{[k]}}{dx} = \sum\limits_{j=0}^{2n-1} a_{kj} f^{[j]} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-2), \\ \dfrac{df^{[2n-1]}}{dx} = p_n f^{[0]} - h, \end{cases} \tag{1.5}$$

minthogy pedig az (1.1) feltételek alapján az egyenletrendszerben szereplő mindegyik együttható (beleértve a $h \in L_2(a, b)$ függvényt is) az (a, b) intervallum lezárásában integrálható, azért az (1.5) rendszernek az (1.4″) kezdeti feltételek mellett egy és csak egy olyan megoldása van, amely abszolút folytonos $f^{[k]}$ $(k=0, 1, \ldots, 2n-1)$ függvényekből áll[15].

Az 1°. állításból ismert megfontolások segítségével adódik, hogy az az $\mathfrak{N}_0$ lineáris halmaz, amely a

$$\varphi^{[2n]} = 0 \tag{1.6}$$

[14] Amint még JACOBI és BERTRAND megmutatta (J. BERTRAND, *Journal de l'École Polytechnique,* **28** (1878) 276.), minden a *Lagrange*-féle értelemben önadjungált

$$L(f) = \sum_{k=0}^{2n} l_k \frac{d^k f}{dx^k}$$

differenciálkifejezés, amelynek l_k $(k=0, 1, \ldots, 2n)$ együtthatói rendre k-szor $(k=0, 1, \ldots, 2n)$ differenciálhatók, előállítható az (1.3) alakban, ahol a p_{n-k} $(k=0, 1, \ldots, n)$ együtthatók rendre k-szor $(k=0, 1, \ldots, n)$ differenciálhatók.

[15] Ez a *Picard*-féle szukcesszív approximáció ismert módszerével bizonyítható be.

homogén egyenlet $\varphi(\in\mathfrak{D}^*)$ megoldásaiból áll, $2n$ dimenziójú. Bázisnak vehetjük például az (1. 6) egyenlet azon valós $\Phi_j(j=1, 2, \ldots, 2n)$ megoldásainak a rendszerét, amelyek eleget tesznek a

$$\Phi_j^{[k-1]}(a) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

kezdeti feltételeknek.

Szükségünk lesz a $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2n}\}$ rendszer bizonyos tulajdonságaira, és ezeket az alább ismertetett azonosságok felhasználásával fogjuk levezetni.

Nem nehéz belátni, hogy az (1. 2) összefüggések alapján tetszés szerinti $g, f\in\mathfrak{D}^*$ függvényekre fennáll az

$$f^{[2n]}\bar{g} = -\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n} f^{[2n-k]}\overline{g^{[k-1]}} + \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} f^{[k]}\overline{g^{[k]}} \tag{1.7}$$

azonosság, ebből viszont következik az

$$f^{[2n]}\bar{g} - f\overline{g^{[2n]}} = \frac{d}{dx}[f, g]_x \tag{1.8}$$

Lagrange-féle azonosság, ahol

$$[f, g]_x = \sum_{k=1}^{n}\left(f^{[k-1]}(x)\overline{g^{[2n-k]}(x)} - f^{[2n-k]}(x)\overline{g^{[k-1]}(x)}\right). \tag{1.9}$$

Az (1. 8) egyenlőség mindkét oldalát tagonkint integrálva a-tól x-ig kapjuk:

$$\int_a^x \left(f^{[2n]}\bar{g} - f\overline{g^{[2n]}}\right) dx = [f, g]_x - [f, g]_a \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Ha most itt elvégezzük az $f=\Phi_j$, $\bar{g}=\Phi_{2n-l+1}$ $(j, l=1, 2, \ldots, 2n)$ helyettesítést, akkor azt találjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{2n} \varepsilon_j\,\varepsilon_k\,\Phi_j^{[k-1]}(x)\,\Phi_{2n-l+1}^{[2n-k]}(x) = \delta_{jl} \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

ahol

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & (j \leqq n), \\ -1 & (j > n). \end{cases}$$

Ily módon az $\|\varepsilon_j\varepsilon_k\Phi_j^{[k-1]}(x)\|_1^{2n}$, $\|\Phi_{2n-j+1}^{[2n-k]}(x)\|_1^{2n}$ matrixok sorok szerint összeszorozva az egységmatrixot adják, tehát oszlopok szerint összeszorozva is azt adják; ezt kiírva a következőt kapjuk:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\Phi_j^{[k]}(x)\,\Phi_{2n-j+1}^{[l]}(x) - \Phi_{2n-j+1}^{[k]}(x)\,\Phi_j^{[l]}(x)\right) = \begin{cases} 0 & (k+l \neq 2n-1) \\ 1 & (k+l = 2n-1;\, k < l) \end{cases} \tag{1.10}$$

$$(a \leqq x \leqq b; \quad k, l = 0, 1, \ldots, 2n).$$

Ennélfogva ha bevezetjük a

$$\Phi(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n}\left(\Phi_j(x)\,\Phi_{2n-j+1}(\xi) - \Phi_j(\xi)\,\Phi_{2n-j+1}(x)\right) \tag{1.11}$$

$$(a \leqq x,\ \xi \leqq b)$$

jelölést, akkor azt állíthatjuk, hogy $\Phi(x, \xi)$ mint x függvénye eleget tesz az (1. 6) homogén egyenletnek és a következő kezdeti feltételeknek:

$$\Phi^{[k]}(x, \xi)|_{x=\xi} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-2),$$
$$\Phi^{[2n-1]}(x, \xi)|_{x=\xi} = 1.$$

Amint ismeretes, éppen ezek a tulajdonságok definiálják a *Cauchy*-féle függvényt, amelynek segítségével (könnyen beláthatóan) az

$$\begin{cases} f^{[2n]} = h, \\ f^{[k]}(x_0) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1) \end{cases}$$

feladat $f(\in \mathfrak{D}^*)$ megoldása az

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi$$

képlet szerint nyerhető.

2. §. A T, T^* kvázi-differenciáloperátorok

Vizsgálatunk tárgyául az a T operátor fog szolgálni, amelynek a $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartománya az

(2. 1) $$f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$$

kikötéseket teljesítő $f \in \mathfrak{D}^*$ elemekből áll, és amelyre

$$Tf = f^{[2n]} \qquad (f \in \mathfrak{D}(T)).$$

Az (1. 8) összefüggés értelmében tetszés szerinti $f, g \in \mathfrak{D}^*$ elemekre

(2. 2) $$\int_a^b (f^{[2n]}\bar{g} - f\overline{g^{[2n]}})\, dx = [f, g]_b - [f, g]_a,$$

tehát

$$(Tf, g) = (f, g^{[2n]}) \qquad (f \in \mathfrak{D}(T), \quad g \in \mathfrak{D}^*)$$

és speciálisan

$$(Tf, g) = (f, Tg) \qquad (f, g \in \mathfrak{D}(T)).$$

Ilyen módon T *hermitikus operátor.*

Meg fogjuk mutatni, hogy a T operátor defektus-indexe $(2n, 2n)$. Előbb azonban tisztázzuk, hogy mi a T operátor T^* adjungált operátora. Ennek érdekében először is bebizonyítjuk a következő tételt.

2°. *A T operátor $\mathfrak{R}(T)$ értékkészlete és a $\varphi^{[2n]} = 0$ egyenlet $\varphi(\in \mathfrak{D}^*)$ megoldásainak az $\mathfrak{R}_0$ halmaza egymás ortogonális komplementumai, vagyis*

(2. 3) $$L_2(a, b) = \mathfrak{R}(T) \oplus \mathfrak{R}_0.$$

Valóban, ha $f \in \mathfrak{D}(T)$ és $\varphi \in \mathfrak{N}_0$, akkor a (2. 2) egyenlőségből a $g = \varphi$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$(Tf, \varphi) = 0.$$

Ezek szerint $\mathfrak{N}_0 \perp \mathfrak{R}(T)$.

A (2. 3) felbontás igazolásához azt kell még megmutatni, hogy ha az $f^* \in L_2(a, b)$ elemre $f^* \perp \mathfrak{N}_0$, akkor $f^* \in \mathfrak{R}(T)$.

Az f^* elemhez szerkesszük meg azt az $f_0 \in \mathfrak{D}^*$ elemet, amelyre

$$f_0^{[2n]} = f^*, \quad f_0^{[k]}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, 2n-1).$$

Ezután a (2. 2) azonosságban elvégezve az $f = f_0$, $g = \Phi_k$ $(k = 1, 2, \dots, 2n)$ helyettesítéseket azt találjuk, hogy

$$(f^* \Phi_k) = \pm f_0^{[2n-k]}(a) \qquad (k = 1, 2, \dots, 2n).$$

Ennélfogva ha $f^* \perp \mathfrak{N}_0$, akkor fennállnak az

$$f_0^{[k]}(a) = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

összefüggések is, azaz $f_0 \in \mathfrak{D}(T)$ és $f^* = Tf_0 \in \mathfrak{R}(T)$. Ezzel a 2°. állítást bebizonyítottuk.

3°.[16] *A T^* operátor $\mathfrak{D}(T^*)$ értelmezési tartománya éppen a $\mathfrak{D}^*$ halmaz, és*

$$T^* g = g^{[2n]} \qquad \big(g \in \mathfrak{D}(T^*)\big).$$

Valóban, az adjungált operátor definíciója szerint a $g \in L_2(a, b)$ elem $\mathfrak{D}(T^*)$-hoz tartozik és $g^* = T^* g$ akkor és csak akkor, ha

$$(2.4) \qquad (Tf, g) = (f, g^*) \qquad \big(f \in \mathfrak{D}(T)\big).$$

A (2. 2) azonosságból látjuk, hogy ez a feltétel mindig teljesül, ha $g \in \mathfrak{D}^*$ és $g^* = g^{[2n]}$.

Meg kell még mutatni, hogy megfordítva is, ha $g \in \mathfrak{D}(T^*)$ és $g^* = T^* g$, azaz egy $g, g^* \in L_2(a, b)$ elempárra teljesül a (2. 4) feltétel, akkor biztosan $g \in \mathfrak{D}^*$ és $g^* = g^{[2n]}$.

Legyen g_0 a $\mathfrak{D}^*$ halmaz olyan eleme, hogy

$$g_0^{[2n]} = g^*.$$

Ekkor (2. 2) és (2. 1) alapján

$$(Tf, g) = (f, g_0^{[2n]}) = (Tf, g_0) \qquad \big(f \in \mathfrak{D}(T)\big).$$

Következésképpen $\varphi = g - g_0 \perp \mathfrak{R}(T)$, és így a 2° állítás értelmében $\varphi \in \mathfrak{N}_0$, vagyis $\varphi \in \mathfrak{D}^*$ és $\varphi^{[2n]} = 0$. De ekkor $g = g_0 + \varphi \in \mathfrak{D}^*$ és

$$g^{[2n]} = g_0^{[2n]} = g^*.$$

A 3°. állítást bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy mint kiderült, T^* egyértelműen meghatározott operátor, tehát *a $\mathfrak{D}(T)$ halmaz sűrű $L_2(a, b)$-ben.*

[16] Minthogy $\mathfrak{R}(T)$ ortogonális komplementuma mindig megegyezik a $T^* \varphi = 0$ egyenlet φ megoldásainak az összességével, nyilvánvaló, hogy a 3° állítás magában foglalja a 2° állítást.

Minthogy továbbá tetszés szerinti komplex λ mellett a

$$T^*f-\lambda f=0$$

egyenletnek pontosan $2n$ lineárisan független $f\in\mathfrak{D}(T^*)$ megoldása van (ugyanis könnyű belátni, hogy az 1°. állítás érvényes marad, ha benne az $f^{[2n]}$ kvázi-differenciálkifejezést az $f^{[2n]}-\lambda f$ kifejezéssel helyettesítjük), igaz a következő állítás.

4°. *A T operátor defektus-indexe* $(2n, 2n)$.

3. §. A T operátor önadjungált folytatásai

Jelöljük $\mathfrak{C}$-vel az $\mathfrak{x}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{4n})$ vektorokból álló $4n$ dimenziójú unitér teret. Mindegyik $f\in\mathfrak{D}^*$ elemnek feleltessük meg azt az $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(f)$ vektort, amelyre

$$\xi_k=f^{[k-1]}(a),\quad \xi_{2n+k}=f^{[k-1]}(b)\qquad (k=1,2,\dots,2n).$$

Az 1°. és a 2°. állítás értelmében $\mathfrak{x}(f)$ végigfut az egész $\mathfrak{C}$ téren, ha f végigfut $\mathfrak{D}^*$-on.

Legyen $\tilde{T}$ a T operátor valamelyik önadjungált folytatása. Minthogy T^* minden ilyen operátornak folytatása, fennáll

$$\mathfrak{D}(\tilde{T})\subset\mathfrak{D}(T^*)\quad \text{és}\quad \tilde{T}f=f^{[2n]}\qquad (f\in\mathfrak{D}(\tilde{T})). \tag{3.1}$$

Jelölje $\Pi(\tilde{T})$ azoknak az $\mathfrak{x}=\mathfrak{x}(f)$ vektoroknak az összességét, amelyeket akkor kapunk, ha f végigfut az egész $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazon. Nyilván $\Pi(\tilde{T})$ az $\mathfrak{C}$ tér lineáris altere. $\Pi(\tilde{T})$ megadása teljesen meghatározza a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazt (és így (3. 1) folytán magát a $\tilde{T}$ operátort is), mert $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ *mindazokból* az $f\in\mathfrak{D}(T^*)$ elemekből áll, amelyekre $\mathfrak{x}(f)\in\Pi(\tilde{T})$. Valóban, ha $f\in\mathfrak{D}(T^*)$ és $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{x}(f)\in\Pi(\tilde{T})$, akkor $\Pi(\tilde{T})$ definíciója szerint található olyan $f_0\in\mathfrak{D}(\tilde{T})$, hogy $\mathfrak{x}_0=\mathfrak{x}(f_0)$. Ekkor azonban $\mathfrak{x}(f-f_0)=0$, tehát $g=f-f_0\in\mathfrak{D}(T)\subset\mathfrak{D}(\tilde{T})$, $f=f_0+g\in\mathfrak{D}(\tilde{T})$.

Az önadjungált operátorok definíciója értelmében a $g\in\mathfrak{D}(T^*)$ elem akkor és csak akkor tartozik a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazhoz, ha

$$(\tilde{T}f,g)=(f,T^*g)\qquad (f\in\mathfrak{D}(\tilde{T})). \tag{3.2}$$

A (2. 2), (3. 1) összefüggések és a 3°. állítás folytán az utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$[f,g]_b-[f,g]_a=0\qquad (f\in\mathfrak{D}(\tilde{T})). \tag{3.3}$$

Tekintsük azt az

$$\mathfrak{y}=U\mathfrak{x}$$

unitér transzformációt, amely az $\mathfrak{x}=\{\xi_k\}\in\mathfrak{C}$ vektornak az $\mathfrak{y}=\{\eta_k\}\in\mathfrak{C}$ vektort felelteti meg, ahol

$$\eta_k=\xi_{2n-k+1},\quad \eta_{n+k}=-\xi_{n-k+1},\quad \eta_{2n+k}=-\xi_{4n-k+1},\quad \eta_{3n+k}=\xi_{3n-k+1}$$
$$(k=1,2,\dots,n).$$

Ekkor (1. 9) alapján a (3. 3) feltétel a következőképpen is felírható:

$$(\mathfrak{x}(f),U\mathfrak{x}(g))=0\qquad (f\in\mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

Ennélfogva a $g \in \mathfrak{D}(T^*)$ elem akkor és csak akkor van benne a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazban (vagyis akkor és csakis akkor lesz $\mathfrak{x}(g) \in \Pi(\tilde{T})$), ha $U\mathfrak{x}(g)$ ortogonális $\Pi(\tilde{T})$-ra, más szóval a $\Pi = \Pi(\tilde{T})$ altér és $U\Pi$ egymás ortogonális komplementumai:

$$\mathfrak{E} = \Pi \oplus U\Pi. \tag{3.4}$$

Azt is könnyű belátni, hogy megfordítva, minden (3. 4) tulajdonságú $\Pi \subset \mathfrak{E}$ altérnek megfelel a T operátor egy $\tilde{T}$ önadjungált folytatása, amelyre $\Pi(\tilde{T}) = \Pi$. Valóban, ha $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ gyanánt azoknak az $f \in \mathfrak{D}(T^*)$ elemeknek az összességét választjuk, amelyekre $\mathfrak{x}(f) \in \Pi$, és előírjuk, hogy $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ esetén $\tilde{T}f = f^{[2n]}$ legyen, önadjungált operátort kapunk (ugyanis rá vonatkozóan a (3. 3) egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $g \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$), amelynek megvan a kívánt $\Pi(\tilde{T}) = \Pi$ tulajdonsága.

Ilyen módon igazoltuk a következő állítást.

5°. *Legyen $\Pi \subset \mathfrak{E}$ olyan altér, amely rendelkezik a* (3. 4) *tulajdonsággal, $\mathfrak{D}_\Pi$ pedig azoknak az $f \in \mathfrak{D}(T^*)$ elemeknek a halmaza, amelyekre $\mathfrak{x}(f) \in \Pi$. Értelmezzünk a $\mathfrak{D}_\Pi$ halmazon egy $\tilde{T}_\Pi$ operátort a következőképpen:*

$$\tilde{T}_\Pi f = f^{[2n]} \qquad (f \in \mathfrak{D}_\Pi).$$

Az így kapott $\tilde{T}_\Pi$ operátor a T operátor önadjungált folytatásainak az általános alakját szolgáltatja.

Megmutatjuk, hogyan adhatók meg analitikusan a (3. 4) tulajdonsággal rendelkező Π alterek. Az említett tulajdonság következtében minden ilyen Π altér dimenziója szükségképpen $2n$. Ezért a $\Pi \subset \mathfrak{E}$ lineáris halmaz $2n$ számú lineárisan független egyenletből álló rendszerrel adható meg:

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk}\,\xi_k + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk}\,\xi_{2n+k} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{3.5}$$

Bevezetve az

$$\mathfrak{i}_j = (\bar{\alpha}_{j1}, \ldots, \bar{\alpha}_{j2n}, \bar{\beta}_{j1}, \ldots, \bar{\beta}_{j2n}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

lineárisan független vektorokat, a (3. 5) egyenletrendszert így írhatjuk fel:

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{i}_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{3.6}$$

Nyilvánvaló, hogy a (3. 6) egyenletrendszer akkor és csak akkor határozza meg az adott, (3. 4) tulajdonságú Π alteret, ha az $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots, \mathfrak{i}_{2n}$ vektorok bázist alkotnak Π ortogonális komplementumában, vagyis $U\Pi$-ben. Minthogy pedig $U^2 = I$, az utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy az $U\mathfrak{i}_1, U\mathfrak{i}_2, \ldots, U\mathfrak{i}_{2n}$ vektorok bázist alkotnak a $\Pi = U(U\Pi)$ altérben. Ismét figyelembe véve, hogy $\Pi \perp U\Pi$, az alábbi feltételekhez jutunk:

$$(U\mathfrak{i}_k, \mathfrak{i}_j) = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{3.7}$$

Könnyű belátni, hogy ezek a feltételek nemcsak szükségesek, hanem elégségesek is ahhoz, hogy a (3. 5) egyenletrendszer által meghatározott Π lineáris halmaznak meglegyen a (3. 4) tulajdonsága.

A nyert eredmény megfogalmazása céljából fel fogjuk használni az önadjungált peremfeltétel-rendszer fogalmát. Mint ismeretes, a

$$\sum \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a)+\sum \beta_{jk} f^{[k-1]}(b)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{3.8}$$

lineárisan független peremfeltételekből álló rendszert akkor nevezik *önadjungáltnak*, ha tetszés szerinti $g, f \in \mathfrak{D}^*$ elemekre, amelyek eleget tesznek ezeknek a feltételeknek, fennáll

$$[g,f]_b-[g,f]_a=0,$$

vagy, ami ugyanaz, ha mindazoknak az $f \in \mathfrak{D}^*$ elemeknek a halmaza, amelyekre ezek a feltételek teljesülnek, a T operátor valamelyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatásának a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ értelmezési tartományát alkotja.

Az 5°. állítás és a fenti megfontolások értelmében a T operátor mindegyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatásának megfelel egy önadjungált peremfeltétel-rendszer, amely a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazt határozza meg az imént ismertetett módon.

Vezessük még be a következő jelölést: ha $\mathfrak{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ és $\mathfrak{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_{2n})$, akkor legyen

$$\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}=\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_{2n-k+1}-\sum_{k=1}^{n} a_{2n-k+1} \bar{b}_k. \tag{3.9}$$

Ekkor érvényes a következő állítás.

6°. *Ahhoz, hogy a lineárisan független peremfeltételekből álló* (3. 8) *rendszer önadjungált legyen, szükséges és elégséges, hogy $m=2n$ legyen és hogy az $\mathfrak{a}_j=(\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{j2n})$, $\mathfrak{b}_j=(\beta_{j1}, \beta_{j2}, \ldots, \beta_{j2n})$ vektorok eleget tegyenek az*

$$\{\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_k\}=\{\mathfrak{b}_j, \mathfrak{b}_k\} \qquad (j, k=1,2, \ldots, 2n) \tag{3.10}$$

feltételeknek[17].

Ez az állítás abból adódik, hogy a (3. 10) feltételek ekvivalensek a (3. 7) alattiakkal, ugyanis könnyen beláthatóan

$$(U\mathfrak{i}_k, \mathfrak{i}_j)=\{\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_k\}-\{\mathfrak{b}_j, \mathfrak{b}_k\} \qquad (j, k=1,2, \ldots, 2n).$$

Most felsorolunk néhány példát önadjungált peremfeltétel-rendszerre.

Nem nehéz belátni, hogy az

$$f^{[p_j]}(a)=0, \quad f^{[q_j]}(b)=0 \qquad (j=1,2, \ldots, n)$$

peremfeltételek, ahol

$$0 \leqq \begin{matrix} p_1<p_2<\ldots<p_n \\ q_1<q_2<\ldots<q_n \end{matrix} \leqq 2n-1,$$

akkor és csak akkor alkotnak önadjungált rendszert, ha

$$p_k+p_{n-k+1}=2n-1, \quad q_k+q_{n-k+1}=2n-1$$

$$(k=1,2, \ldots, n).$$

[17] A valós esetben az önadjungáltság analóg feltételei szerepelnek A. A. GRAFF [4] munkájában.

Azt sem nehéz megmutatni, hogy ha a (3. 8) önadjungált peremfeltétel-rendszer szétesik az a végpontra vonatkozó m_1 számú és a b végpontra vonatkozó m_2 számú feltételre, akkor biztosan $m_1 = m_2 = n$, és így ebben az esetben a peremfeltétel-rendszer a következő alakban írható fel:

$$(3.11) \qquad \sum_{k=1}^{2n} a_{jk} f^{[k-1]}(a) = 0, \quad \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Bevezetve az

$$\mathfrak{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{j2n}), \quad \mathfrak{b}_j = (b_{j1}, \dots, b_{j2n}) \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

vektorokat, a (3. 11) rendszer önadjungáltságának a feltételei az alábbiak lesznek:

$$\{\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_k\} = 0, \quad \{\mathfrak{b}_j, \mathfrak{b}_k\} = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

Speciálisan az

$$\left.\begin{aligned} f^{[2n-j-1]}(a) - \sum_{k=1}^{n} a_{jk} f^{[k-1]}(a) &= 0, \\ f^{[2n-j-1]}(b) + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

peremfeltétel-rendszer akkor és csak akkor önadjungált, ha

$$(3.12) \qquad a_{jk} = \bar{a}_{kj}, \quad b_{jk} = \bar{b}_{kj} \qquad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

Az általánosabb esetben az

$$f^{[2n-j-1]}(a) - \sum_{k=1}^{n} a_{jk} f^{[k-1]}(a) - \sum_{k=1}^{n} c_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0,$$

$$f^{[2n-j-1]}(b) + \sum_{k=1}^{n} d_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

peremfeltétel-rendszer akkor és csak akkor lesz önadjungált, ha fennáll (3. 12) és

$$c_{jk} = \bar{d}_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

4. §. Félig korlátos T operátorok

Az alább következő állítás azt mutatja, hogy a matematikai fizika szokásos feladataiban előforduló kvázi-differenciáloperátorok félig korlátosak.

7°. *A T operátor alulról félig korlátos, ha*[18]

$$\text{C)} \qquad p_0(x) \geqq 0 \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

[18] Meg lehet mutatni, hogy a C) feltétel nemcsak elégséges, hanem szükséges is ahhoz, hogy a T operátor alulról félig korlátos legyen.

Az állítás bebizonyítása céljából elég megmutatni, hogy a T operátor valamelyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatása alulról félig korlátos. Ilyen önadjungált folytatásnak a $\tilde{T}_\infty$ operátort választjuk (ez a továbbiakban fontos szerepet fog játszani: ki fog derülni, hogy $\tilde{T}_\infty$ a T operátor *durva* folytatása), amely a *legegyszerűbb* önadjungált peremfeltétel-rendszernek, nevezetesen az

$$(4.0) \qquad f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

feltételeknek felel meg.[19]

Az (1. 7) azonosságot az $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)$, $g = f$ elemekre felírva, majd mindkét oldal: a-tól b-ig integrálva azt kapjuk, hogy

$$(4.1) \qquad (\tilde{T}_\infty f, f) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x) |f^{(n-k)}(x)|^2 dx \qquad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)).$$

Másrészt, ha $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)$, akkor

$$f^{(n-k)}(x) = \int_a^b V_k(x, \xi) f^{(n)}(\xi)\, d\xi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$V_k(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{ha } \xi \leqq x, \\ 0 & \text{ha } \xi \geqq x \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Ennélfogva, ha bevezetjük a

$$H(\xi, \eta) = -\sum_{k=1}^{n} \int_a^b p_k(x) V_k(x, \xi) V_k(x, \eta)\, dx \qquad (a \leqq \xi,\ \eta \leqq b)$$

jelölést és $f^{(n)}$ helyébe mindenütt az $\dfrac{f^{[n]}}{p_0}$ kifejezést tesszük, akkor a (4. 1) egyenlőséget a következő alakban írhatjuk fel:

$$(4.2) \quad (\tilde{T}_\infty f, f) = \int_a^b |f^{[n]}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{p_0(\xi)} - \int_a^b \int_a^b H(\xi, \eta) f^{[n]}(\xi) \overline{f^{[n]}(\eta)} \frac{d\xi}{p_0(\xi)} \frac{d\eta}{p_0(\eta)}.$$

Tekintsük a

$$(4.3) \qquad \psi(\xi) = \mu \int_a^b H(\xi, \eta) \psi(\eta) \frac{d\eta}{p_0(\eta)}$$

[19] Ezek szerint $\mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)$ azoknak az $f \in \mathfrak{D}(T^*)$ elemeknek az összessége, amelyek eleget tesznek a (4. 0.) feltételeknek.

súlyozott integrálegyenletet, amelyben a $H(\xi, \eta)$ magfüggvény valós, szimmetrikus és folytonos[20].

Legyen $\{\psi_j\}_1^\infty$ a (4. 3) egyenlet fundamentális függvényeinek a teljes ortonormális rendszere és $\{\mu_j\}_1^\infty$ a sajátértékek megfelelő rendszere. Itt az ortonormalitás a

$$\{\varphi, \psi\} = \int_a^b \varphi(\xi)\overline{\psi(\xi)}\frac{d\xi}{p_0(\xi)}$$

skaláris szorzatra vonatkozóan értendő. Ekkor bármilyen $\varphi(\xi)$ $(a \leqq \xi \leqq b)$ folytonos függvényre[21] érvényes a *Hilbert*-féle képlet:

$$\{H\varphi, \varphi\} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-1} |\{\varphi, \psi_j\}|^2,$$

ahol

$$\{H\varphi, \varphi\} = \int_a^b \int_a^b H(\xi, \eta)\varphi(\xi)\overline{\varphi(\eta)}\frac{d\xi}{p_0(\xi)}\frac{d\eta}{p_0(\eta)}. \tag{4. 4}$$

Minthogy $j \to \infty$ esetén $|\mu_j| \to \infty$, alkalmas számozás mellett

$$\mu_j^{-1} \geqq 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu), \qquad \mu_j^{-1} < 1 \quad (j > \nu).$$

Következésképpen, ha

$$\{\varphi, \psi_j\} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

akkor

$$\{H\varphi, \varphi\} \leqq \sum_{j=\nu+1}^{\infty} |\{\varphi, \psi_j\}|^2 \leqq \{\varphi, \varphi\}.$$

Most figyelembe véve a (4. 2), (4. 4) képleteket azt kapjuk, hogy tetszés szerinti $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)$ elemre, amely eleget tesz az

$$\{f^{[n]}, \psi_j\} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{4. 5}$$

feltételeknek, fennáll a

$$(\tilde{T}_\infty f, f) \geqq 0$$

egyenlőtlenség. Ennek alapján már könnyű belátni, hogy $\tilde{T}_\infty$ alulról félig korlátos operátor, sőt azt is, hogy $\tilde{T}_\infty$ negatív spektruma véges számú sajátértékből áll, amelyek multiplicitásának az összege $\leqq \nu$.

[20] Megemlítjük, hogy ha p_0-ra teljesül az *A*) és a *C*) feltétel, akkor a (4.3) egyenletre érvényesek maradnak a valós szimmetrikus magú integrálegyenletekre vonatkozó *Hilbert-Schmidt*-féle elmélet összes állításai és formulái, feltéve, hogy alkalmas módon fogalmazzuk meg, ill. írjuk fel őket, vagyis az elméletben fellépő integrálokban minden $d\xi, d\eta, \ldots$ differenciált a megfelelő $\frac{d\xi}{p_0(\xi)}, \frac{d\eta}{p_0(\eta)}, \ldots$ súlyozott differenciállal helyettesítünk.

[21] Sőt, minden olyan $\varphi(\xi)$ $(a \leqq \xi \leqq b)$ mérhető függvényre, amelyre

$$\int_a^b |\varphi(\xi)|^2 \frac{d\xi}{p_0(\xi)} < \infty.$$

Csakugyan, ha a $\tilde{T}_\infty$ operátor spektrálfüggvényét $E(\lambda)$-val jelöljük $(-\infty<\lambda<\infty)$, és feltesszük, hogy valamilyen $\varepsilon>0$ mellett az $E(-\varepsilon)\mathfrak{H}$ $(\mathfrak{H}=L_2(a, b))$ altér dimenziója nagyobb, mint ν, akkor az $E(-\varepsilon)\mathfrak{H}$ altérben található olyan $f\neq 0$ vektor, amelyre teljesülnek a (4. 5) feltételek és amelyre

$$(\tilde{T}_\infty f, f) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \lambda d(E(\lambda)f, f) \leqq -\varepsilon(f, f) < 0,$$

ez pedig lehetetlen.

Tehát $\tilde{T}_\infty$ és vele együtt T is alulról félig korlátos. A 7°. állítást bebizonyítottuk.

A továbbiakban, anélkül hogy mondanánk, mindig feltesszük, hogy a p_0 függvény az A) feltételen kívül a C) feltételnek is eleget tesz (vagyis nem-negatív).

Ebben az esetben érvényes a következő állítás.

8°. *A T operátor bármelyik $\tilde{T}$ önadjungált folytatása alulról félig korlátos, és diszkrét spektruma van.*

A 8°. állítás első része abból adódik, hogy a T operátor félig korlátos és defektusszáma $\mathfrak{n}(T)=2n$ véges (lásd I. fejezet, 18. tétel). Az állítás második részének (ti. hogy $\tilde{T}$ spektruma diszkrét) a bebizonyításához, $\mathfrak{n}(T)$ végessége miatt, elég megmutatni, hogy a T operátor legalább egy folytatásának, például a $\tilde{T}_\infty$ folytatásnak, diszkrét spektruma van (lásd I. fejezet, 22. és 24. tétel). Másrészt a 7°. állítás igazolása során egyúttal megállapítottuk, hogy $\tilde{T}_\infty$ negatív spektruma véges számú sajátértékből áll, és a hozzájuk tartozó multiplicitások összege véges. Minthogy ugyanezek a megfontolások alkalmazhatók a $\tilde{T}_\infty+cI$ operátorra tetszés szerinti valós c esetén, ebből már következik, hogy $\tilde{T}_\infty$ spektruma diszkrét.

A 8°. állítást bebizonyítottuk.

Megemlítjük, hogy a $\tilde{T}$ operátor spektrumának a diszkrétségét rendszerint más módon igazolják, nevezetesen mint annak a közvetlen folyományát, hogy ha c a $\tilde{T}$ operátornak nem sajátértéke, akkor $(\tilde{T}-cI)^{-1}$ teljesen folytonos. Az utóbbi körülmény viszont a $(\tilde{T}-cI)^{-1}$ operátornak Green-függvény segítségével történő integrál-előállításából adódik.

5. §. A Green-függvény és a $\tilde{T}$ önadjungált folytatás fundamentális függvényei

Azon feltevés mellett, hogy a 0 szám a $\tilde{T}$ operátornak nem sajátértéke, meg fogjuk mutatni, hogyan határozható meg az f függvény a

$$\tilde{T}f=h \qquad (h\in L_2(a, b))$$

egyenletből.

Mint tudjuk, ez az operátoregyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} &(5.\,1') \qquad && \left\{\begin{array}{ll} f^{[2n]}=h, & \\ U_j(f)=0 & \qquad (j=1, 2, \ldots, 2n) \end{array}\right. \\ &(5.\,1'') && \end{aligned}$$

rendszerrel, ahol az $U_j(f)$ $(j=1, 2, \ldots, 2n)$ kifejezések valamilyen

$$U_j(f) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

alakú „perem-funkcionálok".

Az (5. 1') egyenlet $f \in \mathfrak{D}^*$ általános megoldását a következőképpen lehet előállítani:

$$f(x) = \int_a^x \Phi(x, \xi) h(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{2n} C_k \Phi_k(x) \qquad (a \leqq x \leqq b); \tag{5. 2}$$

itt $\Phi(x, \xi)$ a *Cauchy*-függvény, $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2n})$ a $\varphi^{[2n]}=0$ egyenlet megoldásaiból álló $\mathfrak{N}_0$ halmaz bázisa, C_k $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ pedig tetszés szerinti konstansok. A

$$\Phi^*(x, \xi) = \begin{cases} 0 & (x \leqq \xi), \\ \Phi(x, \xi) & (x \geqq \xi) \end{cases}$$

jelölés bevezetésével az (5. 2) egyenlőség az

$$f(x) = \int_a^b \Phi^*(x, \xi) h(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{2n} C_k \Phi_k(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

alakra hozható. Az f függvénynek ezt a kifejezését behelyettesítve az (5. 1'') összefüggésekbe a C_k $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ értékekre az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\int_a^b U_j(\Phi^*(x, \xi)) h(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{2n} U_j(\Phi_k) C_k = 0 \tag{5. 3}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Ennek az egyenletrendszernek az $|U_j(\Phi_k)|_1^{2n}$ determinánsa nem nulla, mert különben az (5. 1) rendszernek $h=0$ esetén (vagyis a $\tilde{T}f=0$ egyenletnek) léteznék $f \neq 0$ megoldása, és ez ellentmond a tett feltevésnek.

A $\Phi(x, \xi)$ függvény (1. 11) kifejezéséből következik, hogy fennáll

$$\chi_j(\xi) = U_j(\Phi^*(x, \xi)) \in \mathfrak{N}_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

is. Ennélfogva ha megoldjuk az (5. 3) lineáris egyenletrendszert a C_k $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ ismeretlenekre és a nyert kifejezéseket behelyettesítjük az (5. 2) összefüggésbe, arra az eredményre jutunk, hogy

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi, \tag{5. 4}$$

ahol

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \Phi(x, \xi) + \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(x) \Psi_j(\xi) & (x \geqq \xi), \\ \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(x) \Psi_j(\xi) & (x \leqq \xi), \end{cases} \tag{5. 5}$$

és $\Psi_j \in \mathfrak{N}_0$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$.

Minthogy bármilyen $h \in L_2(a, b)$ esetén az (5. 4) egyenlőség ekvivalens az $f = \tilde{T}^{-1}h$ egyenlőséggel és a $\tilde{T}^{-1}$ operátor hermitikus, azért a $G(x, \xi)$ *Green*-függvény hermitikus magfüggvény, azaz

$$G(x, \xi) = \overline{G(\xi, x)} \qquad (a \leqq x, \ \xi \leqq b).$$

Most legyen $\{\varphi_j\}_1^\infty$ a $\tilde{T}$ operátor sajátvektoraiból álló teljes ortonormális rendszer, ahol a számozást úgy végezzük, hogy a megfelelő λ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ sajátértékek növekedő sorozatot alkossanak:

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots \qquad (\lambda_n \to \infty).$$

Más szóval $\{\varphi_j\}_1^\infty$ a

(5. 6)
$$\begin{cases} \varphi^{[2n]} - \lambda\varphi = 0 \\ U_j(\varphi) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n) \end{cases}$$

peremérték-feladathoz tartozó fundamentális függvények teljes ortonormális rendszere, $\{\lambda_j\}_1^\infty$ pedig a megfelelő karakterisztikus értékek sorozata. Minthogy a $\tilde{T}\varphi - \lambda\varphi = 0$ egyenlet ekvivalens a $\varphi - \lambda\tilde{T}^{-1}\varphi = 0$ egyenlettel, azért az előbbi egyenlet, és így az (5. 6) peremérték-feladat is, ekvivalens a

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = 0$$

integrálegyenlettel.

Tekintettel arra, hogy ennek az egyenletnek majdnem mindegyik λ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ karakterisztikus értéke pozitív, MERCER tétele szerint érvényes a

(5. 7)
$$G(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\, \overline{\varphi_\nu(\xi)}}{\lambda_\nu} \qquad (a \leqq x, \ \xi \leqq b)$$

sorfejtés, és ez az $a \leqq x, \xi \leqq b$ négyzetben abszolút és egyenletesen konvergens. Most megjegyezzük, hogy az (5. 5), (1. 11) képletek és az (1. 10) összefüggések értelmében a $G(x, \xi)$ függvény

(5. 8)
$$G_{jk}(x, \xi) = \frac{\partial^{j+k} G(x, \xi)}{\partial x^j\, \partial \xi^k} \qquad (j, k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

deriváltjai léteznek és folytonosak.

Ennek folytán érvényesek a

(5. 9)
$$G_{jk}(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^{(j)}(x)\, \overline{\varphi_\nu^{(k)}(\xi)}}{\lambda_\nu} \qquad (j, k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sorfejtések[22] *és mindegyikük abszolút és egyenletesen konvergens az* $a \leqq x, \xi \leqq b$ *négyzetben.*

[22] Az (5.9) sorfejtések érvényességét folytonos (5.8) deriváltakkal rendelkező $G(x, \xi)$ hermitikus magfüggvényekre a szerző először az [5] közleményben állapította meg. Az alább ismertetett egyszerű bizonyítás A. M. DANYILEVSZKIJtől származik [6] (aki Harkovban a város német megszállása idején éhen halt).

Ennek az állításnak a bebizonyítása során az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy[23]

$$\lambda_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Ekkor az (5. 7) sorfejtésből adódik a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{h^2}\{G(x,x) - G(x,x+h) - G(x+h,x) + G(x+h;\, x+h)\} =$$

$$= \frac{1}{h^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\varphi_\nu(x+h)-\varphi_\nu(x)|^2}{\lambda_\nu} \geqq \frac{1}{h^2}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{|\varphi_\nu(x+h)-\varphi_\nu(x)|^2}{\lambda_\nu}$$

$$(a \leqq x,\, x+h \leqq b; \quad m = 1, 2, \ldots).$$

Elvégezve először a $h \to 0$, azután pedig az $m \to \infty$ határátmenetet, azt kapjuk, hogy

$$(5.10) \qquad (G_{11}(x,x) \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{|\varphi'_\nu(x)|^2}{\lambda_\nu} \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Minthogy továbbá tetszés szerinti $m < n$ természetes számokra

$$(5.11) \qquad \sum_{\nu=m}^{n}\left|\frac{\varphi_\nu^{(j)}(x)\,\varphi_\nu^{(k)}(\xi)}{\lambda_\nu}\right| \leqq \sqrt{\sum_{\nu=m}^{n}\frac{|\varphi_\nu^{(j)}(x)|^2}{\lambda_\nu}}\sqrt{\sum_{\nu=m}^{n}\frac{|\varphi_\nu^{(k)}(\xi)|^2}{\lambda_\nu}}$$

$$(a \leqq x,\ \xi \leqq b),$$

azért az (5. 10) összefüggésekből adódik, hogy a

$$(5.12) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu^{(j)}(x)\,\overline{\varphi_\nu^{(k)}(\xi)}}{\lambda_\nu} \qquad (a \leqq x,\ \xi \leqq b;\ j,\ k = 0, 1)$$

sorok rögzített ξ (illetve x) mellett x-ben (illetve ξ-ben) abszolút és egyenletesen konvergensek. Ennélfogva az (5. 12) sor összege $j=1$, $k=0$ esetén a $j=0$, $k=0$ értékekhez tartozó (5. 12) sor összegének az x változó szerinti deriváltja. Az (5. 7) egyenlőség értelmében innen

$$(5.13) \qquad G_{10}(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi'_\nu(x)\,\overline{\varphi_\nu(\xi)}}{\lambda_\nu} \qquad (a \leqq x,\ \xi \leqq b).$$

Minthogy pedig ugyanígy a $j=1$, $k=1$ értékekhez tartozó (5. 12) sor összege a $j=1, k=0$ értékekhez tartozó (5. 12) sor-összeg ξ szerinti deriváltja, az (5. 13) összefüggés alapján kapjuk:

$$(5.14) \qquad G_{11}(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi'_\nu(x)\,\overline{\varphi'_\nu(\xi)}}{\lambda_\nu} \qquad (a \leqq x,\ \xi \leqq b).$$

[23] Ellenkező esetben a $G(x,\xi)$ függvényt megfontolásainkban mindenütt helyettesíthetnénk a

$$G_p(x,\xi) = G(x,\xi) - \sum_{\nu=1}^{p}\frac{\varphi_\nu(x)\,\overline{\varphi_\nu(\xi)}}{\lambda_\nu}$$

függvénnyel, ahol a p értéket úgy választjuk meg, hogy $\nu > p$ esetén $\lambda_\nu > 0$ legyen.

Be kell még bizonyítani, hogy az (5. 13), (5. 14) sorfejtések az $a \leqq x, \xi \leqq b$ négyzetben abszolút és egyenletesen konvergensek. Ez azonban következik az (5. 11) egyenlőtlenségből, az (5. 7) sorfejtés egyenletes konvergenciájából és abból, hogy a

$$G_{11}(x,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\varphi_\nu'(x)|^2}{\lambda_\nu} \qquad (a \leqq x \leqq b) \tag{5.15}$$

sorfejtés az (a, b) intervallumban egyenletesen konvergál (DINI tétele alapján). Ilyen módon állításunkat a $G_{jk}(x, \xi)$ $(j, k=0, 1)$ deriváltakra bebizonyítottuk.

Analóg eljárással, de most már az (5. 7), (5. 13), (5. 14) sorfejtésekből kiindulva be lehet bizonyítani az állítást a $G_{jk}(x, \xi)$ $(j, k=0, 1, 2)$ deriváltakra. Ugyanígy folytatva az okoskodást igazolhatjuk az összes (5. 9) sorfejtések érvényességét, valamint abszolút és egyenletes konvergenciáját.

Erre az eredményre hamarosan szükségünk lesz.

6. §. A $\mathfrak{D}[T]$ halmaz és a T_μ durva folytatás

Jelölje L_0 mindazoknak az $f \in L_2(a, b)$ függvényeknek a halmazát, amelyek abszolút folytonosak, abszolút folytonos $f^{[k]}$ $(k=1, 2, \dots, n-1)$ deriváltjaik vannak és ezekre teljesülnek az

$$f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1) \tag{6.1}$$

peremfeltételek, végül

$$\int_a^b p_0(x) |f^{(n)}(x)|^2 \, dx < \infty. \tag{6.2}$$

Értelmezzük az L_0 halmazon a $(g, f)_1$ skaláris szorzatot a következő képlettel:

$$(g, f)_1 = \int_a^b p_0(x) g^{(n)}(x) \overline{f^{(n)}(x)} \, dx \qquad (g, f \in L_0).$$

Ekkor L_0 *Hilbert-tér.*

Ennek az állításnak a bebizonyítása céljából elég annyit igazolni, hogy L_0 teljes normált tér az

$$\|f\|_1 = \sqrt{(f, f)_1}$$

normára nézve.

Legyen $\{f_\nu\}_1^\infty \subset L_0$ egy *Cauchy*-sorozat, azaz

$$\|f_\nu - f_\mu\|_1 \to 0, \quad \text{ha} \quad \mu, \nu \to \infty.$$

Ekkor a $\sqrt{p_0(x)}\, f_\nu^{(n)}(x)$ függvények sorozatára alkalmazni lehet a *Riesz—Fischer*-tételt; e tétel értelmében található olyan $\varphi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ mérhető függvény, hogy

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b p_0(x) |\varphi(x)|^2 \, dx < \infty, \\ \displaystyle\int_a^b p_0(x) |\varphi(x) - f_\nu^{(n)}(x)|^2 \, dx \to 0, \quad \text{ha} \quad \nu \to \infty. \end{cases} \tag{6.3}$$

Legyen

$$f(x)=\int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (a\leqq x\leqq b);$$

ekkor $f^{(n)}=\varphi$ és

$$f^{(k)}(x)=\int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\varphi(\xi)\,d\xi \qquad (a\leqq x\leqq b;\ k=0,1,\dots,n-1).$$

Minthogy azonban L_0 definíciója szerint

$$f_\nu^{(k)}(x)=\int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}f_\nu^{(n)}(\xi)\,d\xi \qquad (a\leqq x\leqq b;\quad k=0,1,\dots,n-1)$$

is fennáll, azért

$$|f^{(k)}(x)-f_\nu^{(k)}(x)|=\left|\int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\left(\varphi(\xi)-f_\nu^{(n)}(\xi)\right)d\xi\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{(b-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\int_a^b|\varphi(\xi)-f_\nu^{(n)}(\xi)|\,d\xi\leqq$$

$$\leqq\frac{(b-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\sqrt{\int_a^b\frac{d\xi}{p_0(\xi)}\int_a^b p_0(\xi)\,|\varphi(\xi)-f_\nu^{(n)}(\xi)|^2\,d\xi},$$

tehát (6. 3) alapján $k=0,1,\dots,n-1$ esetén az $f_\nu^{(k)}(x)$ $(\nu=1,2,\dots)$ sorozat egyenletesen tart $f^{(k)}(x)$-hez. Következésképpen

$$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=\lim_{\nu\to\infty}f_\nu^{(k)}(a)=\lim_{\nu\to\infty}f_\nu^{(k)}(b)=0$$

$$(k=0,1,\dots,n-1).$$

Ily módon $f\in L_0$ és minthogy $f^{(n)}=\varphi$, azért (6. 3) azt jelenti, hogy $\|f-f_\nu\|_1\to 0$. L_0 teljességét bebizonyítottuk.

Most mutassuk meg, hogy $\mathfrak{D}(T)$ mint az L_0 *Hilbert*-tér részhalmaza sűrű ebben a térben. Tegyük fel az ellenkezőt; ekkor L_0-ban található olyan $g(\neq 0)$ elem, amely ortogonális $\mathfrak{D}(T)$-re, amelyre tehát

$$\int_a^b p_0(x)f^{(n)}(x)\overline{g^{(n)}(x)}\,dx=\int_a^b f^{[n]}(x)\overline{g^{(n)}(x)}\,dx=0 \tag{6.4}$$

$$(f\in\mathfrak{D}(T)).$$

De $f \in \mathfrak{D}(T)$ esetén

$$(6.5) \qquad f(x) = \int_a^x \Phi(x,\xi) f^{[2n]}(\xi)\,d\xi, \qquad f^{[n]}(x) = \int_a^x \Phi_{n0}(x,\xi) f^{[2n]}(\xi)\,d\xi,$$

ahol $\Phi(x, \xi)$ az (1. 11) képlettel értelmezett *Cauchy*-féle függvény, és

$$\Phi_{kl}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\Phi_j^{[k]}(x)\,\Phi_{2n-j+1}^{[l]}(\xi) - \Phi_j^{[l]}(\xi)\,\Phi_{2n-j+1}^{[k]}(x)\right)$$

$$(a \leqq x,\ \xi \leqq b;\quad k, l = 0, 1, \dots, 2n).$$

Az $f^{[n]}$ függvény (6. 5) alatti kifejezését behelyettesítve a (6. 4) összefüggésbe azt nyerjük, hogy

$$(6.6) \qquad \int_a^b f^{[2n]}(\xi)\,\overline{\chi(\xi)}\,d\xi = 0 \qquad (f \in \mathfrak{D}(T)),$$

ahol

$$(6.7) \qquad \chi(\xi) = \int_\xi^b \Phi_{n0}(x,\xi)\, g^{(n)}(x)\,dx \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

A (6. 6) egyenlőség azt fejezi ki, hogy $\chi \perp \mathfrak{R}(T)$, következésképpen a 2°. állítás szerint $\chi \in \mathfrak{D}(T^*)$ és

$$\chi^{[2n]} = 0.$$

Másrészt ha (1. 10) felhasználásával (6. 7) alapján egymás után kiszámítjuk a $\chi^{[k]}$ $(k = 1, 2, \dots, 2n)$ kvázi-deriváltakat, kiderül, hogy majdnem mindenütt

$$(6.8) \qquad \begin{cases} \chi^{[k]}(\xi) = \displaystyle\int_\xi^b \Phi_{nk}(x,\xi)\, g^{(n)}(x)\,dx \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ \chi^{[n+k]}(\xi) = \dfrac{d^k}{d\xi^k}\left(p_0(\xi)\, g^{(n)}(\xi)\right) + \displaystyle\int_\xi^b \Phi_{n,n+k}(x,\xi)\, g^{(n)}(x)\,dx \\ \qquad\qquad (k = 0, 1, \dots, n), \end{cases}$$

és ebből egyúttal következik a

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\left(p_0\, g^{(n)}\right) \qquad (k = 0, 1, \dots, n)$$

kvázi-deriváltak abszolút folytonossága. Speciálisan

$$(6.9) \qquad \chi^{[2n]} = \frac{d^n}{d\xi^n}\left(p_0\, g^{(n)}\right) = 0.$$

Minthogy a $g(\in L_0)$ függvény eleget tesz a

$$(6.10) \qquad g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

peremfeltételeknek, a (6. 9) egyenlőségből következik, hogy

$$\int_a^b p_0 |g^{(n)}|^2 dx = \int_a^b \overline{g(x)} \frac{d^n}{dx^n} (p_0 g^{(n)}) dx = 0.$$

Ennélfogva $g^{(n)}=0$ és így a (6. 10) összefüggések miatt $g=0$. Ellentmondásra jutottunk.

Tehát $\mathfrak{D}(T)$ sűrű L_0-ban.

Most már nem okoz nagy nehézséget az alábbi állítás bebizonyítása.

9°. *A $\mathfrak{D}[T]$ halmaz megegyezik az L_0 halmazzal; a $\tilde{T}_\infty$ operátor*[24] *azonos a T operátor T_μ durva folytatásával.*

Valóban, minthogy $\mathfrak{D}(T)$ sűrű L_0-ban, azért tetszés szerinti $f \in L_0$ elemhez található olyan $\{f_\nu\} \subset \mathfrak{D}(T)$ sorozat, hogy

$$\|f-f_\nu\|_1^2 = \int_a^b p_0(x) |f^{(n)}(x) - f_\nu^{(n)}(x)|^2 dx \to 0.$$

Ekkor, mint már tudjuk, $k=0, 1, \ldots, n-1$ esetén az $\{f_\nu^{(k)}(x)\}$ sorozat az (a, b) számközben egyenletesen tart $f^{(k)}(x)$-hez, tehát

$$\text{I.} \qquad (f-f_\nu, f-f_\nu) = \int_a^b |f(x)-f_\nu(x)|^2 dx \to 0 \quad \text{ha} \quad \nu \to \infty;$$

$$\text{II.} \qquad \begin{cases} (T(f_\mu - f_\nu), f_\mu - f_\nu) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x) |f_\nu^{(n-k)}(x) - f_\mu^{(n-k)}(x)|^2 dx \to 0 \\ \qquad \text{ha} \quad \mu, \nu \to \infty. \end{cases}$$

Az I. és a II. feltétel teljesülése azt jelenti, hogy $f \in \mathfrak{D}[T]$. Ily módon

$$L_0 \subset \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty]. \tag{6. 11}$$

Másrészt az I. fejezet 4. § értelmében (lásd a 10. tételt és a 3. pontot) egy $\tilde{T}$ önadjungált folytatásra akkor és csak akkor áll fenn a $\mathfrak{D}[T]=\mathfrak{D}[\tilde{T}]$ egyenlőség, ha $\tilde{T}=T_\mu$. Ezek szerint ha bebizonyítjuk, hogy

$$\mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty] \subset L_0, \tag{6. 12}$$

akkor a (6. 11) összefüggés figyelembevételével a

$$\mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty] = L_0$$

egyenlőséget nyerjük, és így a 9°. állítás be lesz bizonyítva.

Minthogy $\mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty] = \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty + cI]$ $(-\infty < c < \infty)$, a (6. 12) tartalmazás bizonyításánál az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\tilde{T}_\infty > 0$.

[24] Emlékeztetünk arra, hogy ez az operátor a (6.10) peremfeltételekhez tartozik.

Az I. fejezet 4. lemmája értelmében $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty]$ esetén

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 < \infty, \tag{6.13}$$

ahol $\{\varphi_j\}_1^\infty$ a $\tilde{T}_\infty$ operátor sajátvektoraiból álló teljes ortonormális rendszer és

$$\tilde{T}_\infty \varphi_j = \lambda_j \varphi_j \qquad (\lambda_j > 0; \quad j = 1, 2, \ldots).$$

Tekintsük az

$$f_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} (f, \varphi_j) \varphi_j \in \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

függvények sorozatát. Erre nyilván fennáll

$$(T(f_\nu - f_\mu), f_\nu - f_\mu) = \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 \to 0$$

$$\text{ha} \quad \mu, \nu \to \infty \qquad (\mu < \nu).$$

Minthogy másrészt a $\tilde{T}_\infty$ operátor $G(x, \xi)$ Green-függvényére érvényesek a

$$G_{kk}(x, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_j^{(k)}(x)|^2}{\lambda_j} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1; \quad a \leqq x \leqq b)$$

sorfejtések, és így egy $M > 0$ számra

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\varphi_j^{(k)}(x)|^2}{\lambda_j} \leqq M \qquad (a \leqq x \leqq b; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

azért

$$|f_\nu^{(k)}(x) - f_\mu^{(k)}(x)|^2 = \left| \sum_{j=\mu+1}^{\nu} (f, \varphi_j) \varphi_j^{(k)}(x) \right|^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \frac{|\varphi_j^{(k)}(x)|^2}{\lambda_j} \leqq M \sum_{j=\mu+1}^{\nu} \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 \tag{6.14}$$

$$(a \leqq x \leqq b; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ily módon tetszés szerinti $k = 0, 1, \ldots, n-1$ mellett az $\{f_\nu^{(k)}(x)\}_{\nu=1}^\infty$ sorozat az (a, b) intervallumban egyenletesen tart valamilyen $g_k(x)$ folytonos függvényhez. Következésképpen az f függvény, amely az $\{f_\nu\}$ sorozat négyzetes középben vett limesze, egyúttal e sorozat egyenletes limesze is, és $(n-1)$-szer folytonosan differenciálható: $f^{(k)}(x) = g_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$[25]. Továbbá minthogy az f_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ függvények eleget tesznek a (6. 10) peremfeltételeknek, ugyanez igaz lesz az f függvényre is.

[25] Ezek szerint érvényesek az

$$f^{(k)}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (f, \varphi_\nu) \varphi_\nu^{(k)}(x) \qquad (a \leqq x \leqq b; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sorfejtések, és mindegyikük egyenletesen (és abszolút) konvergens az (a, b) számközben.

Mindezek után világos, hogy a

$$(T(f_\nu - f_\mu), f_\nu - f_\mu) = \int_a^b p_0 \, |f_\nu^{(n)} - f_\mu^{(n)}|^2 \, dx + \sum_{k=1}^{n} \int_a^b p_k \, |f_\nu^{(n-k)} - f_\mu^{(n-k)}|^2 \, dx$$

egyenlőség jobb oldalán álló összeg $\mu, \nu \to \infty$ esetén nullához tart, úgyhogy (6. 14) értelmében

$$\int_a^b p_0 \, |f_\nu^{(n)} - f_\mu^{(n)}|^2 \, dx \to 0, \quad \text{ha} \quad \mu, \nu \to \infty.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\{f_\nu\} \subset L_0$ sorozat Cauchy-sorozat, tehát L_0 teljessége miatt van f_0 limesze L_0-ban. De ha az $\{f_\nu\}_1^\infty$ sorozat L_0-ban tart f_0-hoz, akkor egyenletesen is tart f_0-hoz. Ennélfogva $f = f_0 \in L_0$. Ily módon a (6. 12) összefüggést és vele együtt a 9°. állítást bebizonyítottuk.

7. §. A $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó fő peremfeltételek és a $\mathfrak{D}[\tilde{T}]$ halmaz

Egy

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_k f^{[k-1]}(b) = 0$$

alakú peremfeltételt, amely minden $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ függvényre teljesül, a T operátor $\tilde{T}$ önadjungált folytatásához tartozó *fő peremfeltételnek* nevezünk, ha

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \qquad (k > n).$$

Ennek a fogalomnak a jobb megértése céljából végezzük el a következő megfontolásokat.

Mindegyik $f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ elemnek feleltessük meg a $2n$-dimenziós komplex $\hat{\mathfrak{C}}$ térben fekvő $\hat{\mathfrak{x}}(f) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n})$ vektort, ahol

$$\xi_k = f^{[k-1]}(a), \quad \xi_{n+k} = f^{[k-1]}(b) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nyilvánvaló, hogy az a $\hat{\Pi}$ halmaz, amely az összes $\hat{\mathfrak{x}}(f)$ $(f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}))$ vektorokból áll, az $\hat{\mathfrak{C}}$ térben lineáris alteret alkot. Legyen ennek a dimenziója $2n - d$. Ekkor a $\hat{\Pi}$ alteret egy d számú lineárisan független egyenletből álló rendszer határozza meg:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} \xi_{n+k} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, d).$$

Világos, hogy ekkor a

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, d)$$

peremfeltételek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó lineárisan független fő peremfeltételekből álló teljes rendszert szolgáltatnak.

Az elmondottakból többek között az is kitűnik, hogy ha egy $(n-1)$-szer differenciálható $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ függvény eleget tesz a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó mindegyik fő peremfeltételnek, akkor található olyan $f_0 \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ függvény, hogy

$$f_0^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad f_0^{(k)}(b) = f^{(k)}(b) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Azt is könnyű belátni, hogy ha a

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{7. 1}$$

egyenletek a $\tilde{T}$ operátor önadjungált peremfeltétel-rendszerét alkotják, akkor a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó lineárisan független fő peremfeltételek pontos d száma éppen $2n-r$, ahol r az

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{1n} \ldots \alpha_{12n} & \beta_{1n} \ldots \beta_{12n} \\ \alpha_{2n} \ldots \alpha_{22n} & \beta_{2n} \ldots \beta_{22n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{2nn} \ldots \alpha_{2n\,2n} & \beta_{2nn} \ldots \beta_{2n\,2n} \end{matrix} \right\| \tag{7. 2}$$

matrix rangja. Az is nyilvánvaló, hogy a (7. 1) feltétel-rendszer mindig helyettesíthető olyan ekvivalens rendszerrel, amelyben az első d feltétel fő peremfeltétel.

A fő peremfeltételek szerepét a következő állítás világítja meg.

10°. *Legyen $\tilde{T}$ a T operátor valamelyik önadjungált folytatása, $\{\varphi_j\}_1^\infty$ a $\tilde{T}$ operátor sajátvektorainak teljes ortonormális rendszere és $\tilde{T}\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Ekkor egy $f \in L_2(a, b)$ elemre nézve az alábbi három kijelentés ekvivalens:*

a) $$f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}];$$

(7. 3) b) $$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 < \infty;$$

c) *f majdnem mindenütt megegyezik egy f_0 abszolút folytonos függvénnyel, amelynek az $f_0^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ deriváltjai léteznek és abszolút folytonosak, amelyre teljesülnek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételek, végül pedig*

$$\int_a^b p_0(x) |f_0^{(n)}(x)|^2 \, dx < \infty. \tag{7. 4}$$

Minthogy $\mathfrak{D}[\tilde{T}] = \mathfrak{D}[\tilde{T} + cI]$ $(-\infty < c < \infty)$ és $\tilde{T}$-nak a $\tilde{T} + cI$ operátorral való helyettesítése esetén a (7. 3) sor a

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + c) |(f, \varphi_j)|^2$$

sorba megy át, amely a (7. 3) sorral egyszerre konvergens vagy divergens, azért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\lambda_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Ekkor azonban az a) és a b) állítás ekvivalenciája közvetlenül adódik a 4. lemmából (I. fej., 4. §).

Jelölje $L(\tilde{T})$ az olyan f_0 függvények összességét, amilyenekről a c) kijelentésben szó van.

Az a), c) kijelentések ekvivalenciájának a bebizonyításához először megmutatjuk, hogy c)-ből következik a), azaz

$$L(\tilde{T}) \subset \mathfrak{D}[\tilde{T}].$$

Legyen $f \in L(\tilde{T})$. Ekkor f-re teljesül valamennyi fő peremfeltétel, és így található olyan $f_0 \in \mathfrak{D}(\tilde{T})$ elem, amelyre

$$f_0^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad f_0^{(k)}(b) = f^{(k)}(b) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ennélfogva, a 9°. állítás felhasználásával,

$$g = f - f_0 \in \mathfrak{D}[T] \subset \mathfrak{D}[\tilde{T}],$$

minthogy pedig $f_0 \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$, azért $f = g + f_0 \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$.

Most meg fogjuk mutatni, hogy a)-ból következik c), vagyis

$$\mathfrak{D}[\tilde{T}] \subset L(\tilde{T}), \tag{7.5}$$

és ezzel a 10°. állítás bizonyításának a végéhez érünk.

Az I. fejezetben szereplő 15. tétel szerint

$$\mathfrak{D}[\tilde{T}] = \mathfrak{D}[T] + \mathfrak{N}_0', \quad \text{ahol} \quad \mathfrak{N}_0' = \mathfrak{N}_0 \cap \mathfrak{D}[\tilde{T}].$$

Ebből, figyelembe véve a 9°. állítást, azt kapjuk, hogy minden $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ függvény abszolút folytonos, első $n-1$ számú $f^{(k)}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ deriváltja létezik és abszolút folytonos, továbbá $f^{(n)}$ eleget tesz a (7. 4) feltételnek.

Ily módon (7. 5) bebizonyításához már csak azt kell megmutatnunk, hogy az $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ függvényre teljesülnek az összes fő peremfeltételek. Erre a célra felhasználhatjuk azt a tényt, hogy a) és b) ekvivalens egymással, és ugyanúgy okoskodva, mint a 9°. állítás bizonyítása során, igazolhatjuk, hogy (7. 3) folytán érvényesek az

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)\, \varphi_j^{(k)}(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{7.6}$$

sorfejtések, és mindegyikük az (a, b) intervallumban abszolút és egyenletesen konvergens.

Minthogy mindegyik $\varphi_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots)$ fundamentális függvény eleget tesz a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó teljes peremfeltétel-rendszernek és így minden fő peremfeltételnek, a (7. 6) sorfejtésekből következik, hogy f-re is teljesülnek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételek.

A 10°. álllítást bebizonyítottuk.

8. §. A $\Gamma_{\tilde{T}}(f, g)$ és a $\tilde{T}[f, g]$ funkcionálok. Az $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ elemeknek a $\tilde{T}$ operátor sajátvektorai szerint haladó sorfejtései

Tekintsük a $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ halmazon a következő funkcionált[26]:

$$\Gamma_{\tilde{T}}(f, g) = -\left[\sum_{k=1}^{n} f^{[2n-k]}(x)\, \overline{g^{[k]}(x)}\right]_a^b \qquad (g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T})). \tag{8.1}$$

[26] Mint rendesen, $[\varphi(x)]_a^b$ a $\varphi(b) - \varphi(a)$ kifejezést jelenti.

Minthogy

$$[f,g]_a = [f,g]_b \qquad (g,f\in\mathfrak{D}(\tilde{T})),$$

azért

$$\Gamma_{\tilde{T}}(f,g) = \overline{\Gamma_{\tilde{T}}(g,f)} \qquad (g,f\in\mathfrak{D}(\tilde{T})). \tag{8.2}$$

Ez az egyenlőség azt mutatja, hogy rögzített $g\in\mathfrak{D}(\tilde{T})$ mellett a $\Gamma_{\tilde{T}}(f,g)$ funkcionált az

$$\hat{\mathfrak{x}}(f) = \left(f(a),\dots,f^{(n-1)}(a), f(b),\dots,f^{(n-1)}(b)\right)$$

vektor teljesen meghatározza. Tekintettel arra, hogy ennél a megfontolásnál f és g szerepét fel lehet cserélni, azt kapjuk, hogy a $\Gamma_{\tilde{T}}(f,g)$ funkcionál értékét az $\hat{\mathfrak{x}}(f)$ és az $\hat{\mathfrak{x}}(g)$ vektor megadása teljesen meghatározza. Ezek szerint

$$\Gamma_{\tilde{T}}(f,g) = F\left(\hat{\mathfrak{x}}(f),\hat{\mathfrak{x}}(g)\right), \tag{8.3}$$

ahol $F(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ egy funkcionál, amelynek az értelmezési tartománya az összes $\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in\hat{\Pi}$ párokból áll (itt $\hat{\Pi}$ az a lineáris halmaz, amelyet az $\hat{\mathfrak{x}}(f), f\in\mathfrak{D}(\tilde{T})$ vektorok alkotnak). Minthogy

$$\Gamma_{\tilde{T}}(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2, g) = \lambda_1\Gamma_{\tilde{T}}(f_1,g)+\lambda_2\Gamma_{\tilde{T}}(f_2,g) \qquad (\lambda_1,\lambda_2 \text{ számok}),$$

azért a (8. 3) összefüggés alapján

1. $F(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \overline{F(\mathfrak{y},\mathfrak{x})} \qquad (\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in\hat{\Pi});$
2. $F(\lambda_1\mathfrak{x}_1+\lambda_2\mathfrak{x}_2,\mathfrak{y}) = \lambda_1 F(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{y})+\lambda_2 F(\mathfrak{x}_2,\mathfrak{y}) \qquad (\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2,\mathfrak{y}\in\hat{\Pi}).$

Innen már könnyen adódik, hogy az F funkcionálhoz hozzárendelhetünk (méghozzá végtelenül sokféleképpen, ha $\hat{\Pi}$ nem azonos az egész $\hat{\mathfrak{C}}$ térrel) egy $\|\gamma_{jk}\|_1^{2n}$ hermitikus matrixot, amelyre

$$\mathfrak{x} = (\xi_1,\dots,\xi_{2n})\in\hat{\Pi}, \quad \mathfrak{y} = (\eta_1,\dots,\eta_{2n})\in\hat{\Pi}$$

esetén

$$F(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \sum_{j,k=1}^{2n}\gamma_{jk}\,\xi_j\,\bar{\eta}_k.$$

Ekkor (8. 3) értelmében tetszés szerinti $f,g\in\mathfrak{D}(\tilde{T})$ elemekre igaz a következő:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tilde{T}}(f,g) &= \sum_{j,k=1}^{n}\gamma_{jk}f^{(j-1)}(a)\overline{g^{(k-1)}(a)}+\\ &+\sum_{j,k=1}^{n}\gamma_{n+j,k}f^{(j-1)}(b)\overline{g^{(k-1)}(a)}+\sum_{j,k=1}^{n}\gamma_{j,n+k}f^{(j-1)}(a)\overline{g^{(k-1)}(b)}+\\ &+\sum_{j,k=1}^{n}\gamma_{n+j,n+k}f^{(j-1)}(b)\overline{g^{(k-1)}(b)}.\end{aligned} \tag{8.4}$$

Ugyanezzel az egyenlőséggel értelmezzük a $\Gamma_{\tilde{T}}(f,g)$ kifejezést tetszés szerinti $f,g\in\mathfrak{D}[\tilde{T}]$ elemekre. Minthogy a 10°. állítás értelmében az $f,g\in\mathfrak{D}[\tilde{T}]$ függvények eleget tesznek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó valamennyi fő peremfeltételnek, azért $\hat{\mathfrak{x}}(f),\hat{\mathfrak{x}}(g)\in\hat{\Pi}$, tehát a

$$\Gamma_{\tilde{T}}(f,g) \qquad (f,g\in\mathfrak{D}[\tilde{T}])$$

funkcionál említett definíciója nem függ a $\|\gamma_{jk}\|_1^{2n}$ matrix megválasztásától.

Az (1. 7) azonosság és a (8. 1) egyenlőség folytán fennáll

$$(8.5)\qquad (\tilde{T}f, g) = \Gamma_{\tilde{T}}(f, g) + \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_{n-k}(x) f^{(k)}(x)\, \overline{g^{(k)}(x)}\, dx$$

$$(f, g \in \mathfrak{D}(\tilde{T})).$$

Speciálisan

$$(8.6)\qquad (\tilde{T}f, f) = \Gamma_{\tilde{T}}(f, f) + \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_{n-k}(x) |f^{(k)}(x)|^2\, dx.$$

Erre a képletre sokféle célból lesz szükségünk, többek között az alábbi állítás igazolásához is.

11°.[27] *Ha az $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ abszolút folytonos függvény $n-1$ számú abszolút folytonos $f^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ deriválttal rendelkezik, továbbá teljesíti a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételt és az*

$$\int_a^b p_0(x) |f^{(n)}(x)|^2\, dx < \infty$$

feltételt, akkor érvényesek az

$$(8.7)\qquad f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)\, \varphi_j^{(k)}(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sorfejtések, amelyek az (a, b) intervallumban abszolút és egyenletesen konvergálnak, valamint az

$$f^{(n)}(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)\, \varphi_j^{(n)}(x)$$

sorfejtés, amely abban az értelemben konvergens, hogy

$$(8.8)\qquad \int_a^b p_0(x) |f^{(n)}(x) - \sum_{j=1}^{\nu} (f, \varphi_j)\, \varphi_j^{(n)}(x)|^2\, dx \to 0, \quad \text{ha} \quad \nu \to \infty.$$

[27] A *Hilbert—Schmidt*-tétel szerint az $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ folytonos függvény az (a, b) számközben abszolut és egyenletesen konvergens

$$(\mathrm{I})\qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (f, \varphi_\nu)\, \varphi_\nu(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

sorba fejthető, ha a függvényt elő lehet állítani forrásszerűen a $\tilde{T}$ operátor $G(x,s)$ *Green*-függvénye, vagy ha a 0 szám sajátérték, $\tilde{T}$ általánosított *Green*-függvénye segítségével. Ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy f deriváltjai abszolút folytonosak és eleget tesznek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes peremfeltételnek. Nyilvánvaló, hogy a 11°. állítás az f függvényre vonatkozó lényegesen enyhébb követelmények mellett biztosítja az abszolút és egyenletesen konvergens (I) sorfejtések létezését. A 11°. állítás általánosabb és teljesebb azoknál a sorbafejtési tételeknél is, amelyeket TREFFTZ [7] a *Schmidt*-féle párok elmélete segítségével nyert.

Valóban, az f függvényre tett megkötések együttesen ekvivalensek, a 10°. állítás alapján, azzal az egyetlen megkötéssel, hogy $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$. Másrészt a 10°. állítás bebizonyítása közben megállapítottuk, hogy bármilyen $f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]$ függvényre (amelyet mindig tekinthetünk folytonosnak) fennállnak az (a, b) számközben abszolút és egyenletesen konvergens (8. 7) sorfejtések.

Be kell még bizonyítani a (8. 8) összefüggést. Ennek az érdekében vezessük be az

$$f_\nu(x) = \sum_{j=1}^{\nu} (f, \varphi_j)\, \varphi_j(x) \qquad (a \leqq x \leqq b; \quad \nu = 1, 2, \ldots)$$

jelölést. Ekkor

$$(\tilde{T}(f_\nu - f_\mu), f_\nu - f_\mu) = \sum_{j=\mu+1}^{\infty} \lambda_j |(f, \varphi_j)|^2 \to 0, \tag{8.9}$$

$$\text{ha} \quad \mu, \nu \to \infty.$$

Másrészt (8. 6) értelmében

$$(\tilde{T}(f_\nu - f_\mu), f_\nu - f_\mu) = \Gamma_{\tilde{T}}(f_\nu - f_\mu, f_\nu - f_\mu) + \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_{n-k} |f_\nu^{(k)} - f_\mu^{(k)}|^2\, dx,$$

és itt a (8. 7) sorfejtések egyenletes konvergenciája miatt

$$\lim_{\mu, \nu \to \infty} \Gamma_{\tilde{T}}(f_\nu - f_\mu, f_\nu - f_\mu) = 0,$$

$$\lim_{\mu, \nu \to \infty} \int_a^b p_{n-k} |f_\nu^{(k)} - f_\mu^{(k)}|^2\, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ennélfogva

$$\lim_{\mu, \nu \to \infty} \int_a^b p_0 |f_\nu^{(n)} - f_\mu^{(n)}|^2\, dx = 0.$$

Következésképpen, a *Riesz—Fischer*-tétel szerint, található olyan $\varphi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ mérhető függvény, amelyre

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_a^b p_0 |\varphi - f_\nu^{(n)}|^2\, dx = 0. \tag{8.10}$$

Ekkor tekintettel arra, hogy

$$\left| \int_a^x \varphi(x)\, dx - f_\nu^{(n-1)}(x) + f_\nu^{(n-1)}(a) \right| \leqq \int_a^x |\varphi(x) - f_\nu^{(n)}(x)|\, dx \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\int_a^b \frac{dx}{p_0(x)}} \sqrt{\int_a^b p_0(x) |\varphi(x) - f_\nu^{(n)}(x)|^2\, dx} \qquad (a \leqq x \leqq b; \quad \nu = 1, 2, \ldots),$$

fennáll

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx - f^{(n-1)}(x) + f^{(n-1)}(a) =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}\left\{\int_a^x \varphi(x)\,dx - f_\nu^{(n-1)}(x) + f_\nu^{(n-1)}(a)\right\} = 0.$$

Ily módon $\varphi = f^{(n)}$, és (8. 10) azt fejezi ki, hogy érvényes a (8. 8) összefüggés. Az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy mivel $f_\nu \to f$ és igazak a (8. 9) alatti egyenlőségek, azért $\tilde{T}[f, f]$ definíciója szerint (lásd I. fejezet, 4. §)

$$\lim_{\nu\to\infty} (\tilde{T}f_\nu, f_\nu) = \tilde{T}[f, f]. \tag{8. 11}$$

Másrészt a (8. 7) sorfejtések egyenletes konvergenciája és a (8. 10) egyenlőség miatt, amelyben $\varphi = f^{(n)}$, fennáll

$$\lim_{\nu\to\infty} \Gamma_{\tilde{T}}(f_\nu, f_\nu) = \Gamma_{\tilde{T}}(f, f)$$

és

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^b p_{n-k}|f_\nu^{(k)}|^2\,dx = \int_a^b p_{n-k}|f^{(k)}|^2\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Tehát ha a $(\tilde{T}f_\nu, f_\nu)$ kifejezést a (8. 6) képlet segítségével írjuk fel, akkor (8. 11) alapján könnyen nyerjük, hogy

$$\tilde{T}[f, f] = \Gamma_{\tilde{T}}(f, f) + \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_{n-k}|f^{(k)}|^2\,dx \qquad (f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]). \tag{8. 12}$$

Innen ismert gondolatmenettel következik, hogy általában

$$\tilde{T}[f, g] = \Gamma_{\tilde{T}}(f, g) + \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_{n-k} f^{(k)} \overline{g^{(k)}}\,dx \qquad (f, g \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]). \tag{8. 13}$$

9. §. A $\tilde{T}$ operátor negatív sajátértékeinek a száma

Ebben a paragrafusban azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor a T operátor *szigorúan pozitív.*

1. A T operátort akkor mondjuk *szigorúan pozitívnak*, ha

$$T[f, f] > 0 \qquad (f \in \mathfrak{D}[T], f \neq 0). \tag{9. 1}$$

Minthogy $\tilde{T}_\infty$ megegyezik a T operátor T_μ durva folytatásával, azért a 10. tétel és a 4. lemma (I. fej., 4. §) értelmében $\mathfrak{D}[T] = \mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty]$ és

$$T[f, f] = \tilde{T}_\infty[f, f] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{(\infty)} |(f, \varphi_j)|^2 \qquad (f \in \mathfrak{D}[T]),$$

ahol $\{\varphi_j\}$ a $\tilde{T}_\infty$ operátor sajátvektoraiból álló teljes ortonormális rendszer és $\tilde{T}_\infty \varphi_j = \lambda_j^{(\infty)} \varphi_j$ $(j=1, 2, \ldots; \lambda_1^{(\infty)} \leqq \lambda_2^{(\infty)} \leqq \ldots)$.

Ilyen módon a T operátor akkor lesz szigorúan pozitív, ha $\tilde{T}_\infty$ mindegyik $\lambda_j^{(\infty)}$ $(j=1, 2, \ldots)$ sajátértéke pozitív, következésképpen

$$(\tilde{T}_\infty f, f) > 0, \quad \text{ha} \quad f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty), \qquad f \neq 0.$$

Mivel a $\Gamma_{\tilde{T}_\infty}$ funkcionál azonosan nullával egyenlő, a (8. 6) képlet értelmében annak a feltételét, hogy a T operátor szigorúan pozitív legyen, a

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_{n-k}(x) \, |f^{(k)}(x)|^2 \, dx > 0$$

alakban lehet felírni, ahol az egyenlőtlenségnek minden olyan $f \neq 0$ függvényre teljesülnie kell, amelynek az $f^{(k)}$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ deriváltjai léteznek és abszolút folytonosak,

$$\int_a^b p_0(x) \, |f^{(n)}(x)|^2 \, dx < \infty$$

és

$$f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{9.2}$$

Speciálisan megállapíthatjuk, hogy a T operátor szigorú pozitivitásához *elégséges*, hogy a p_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ függvények mindannyian nem-negatívak legyenek[28].

Az I. fejezet 19. tételéből és a 10°. állításból közvetlenül adódik az alábbi állítás.

12°. *Ha T szigorúan pozitív operátor, akkor a $\tilde{T}$ önadjungált folytatás negatív sajátértékeinek a pontos száma*[29] *megegyezik a*

$$\sum_{j,k=1}^{r} \tilde{T}[\varphi_j, \varphi_k] \zeta_j \bar{\zeta}_k \tag{9.3}$$

alakban fellépő negatív négyzetek számával, ahol $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ valamilyen bázis a $\varphi^{[2n]}=0$ egyenlet azon $\varphi(\in \mathfrak{D}^*)$ megoldásainak a halmazában, amelyek eleget tesznek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételnek.

Mutassuk meg, hogy

$$r = 2n - d, \tag{9.4}$$

ahol d a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó lineárisan független fő peremfeltételek száma.

A T operátor szigorúan pozitív lévén a $\varphi^{[2n]}=0$ egyenlet megoldásainak az $\mathfrak{N}_0$ halmazából vett tetszés szerinti $\varphi \neq 0$ elemre az $\mathfrak{x}(\varphi)$ vektor (amelyet a 8. § elején

[28] Be lehet bizonyítani (lásd [2], 1. tétel), hogy a T operátor szigorú pozitivitásának a szükséges és elégséges feltétele a következő: legyen $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m\}$ bázis az (1.6) egyenlet $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ peremfeltételeknek eleget tevő φ megoldásainak a halmazában; ekkor $m=n$ és $\det|\chi_j^{(k-1)}(x)|$ $(j, k=1, 2, \ldots, n)$ különbözik nullától minden $a<x<b$ érték esetén.

[29] A $\tilde{T}$ operátor negatív sajátértékeinek a *pontos számán* az operátor egymástól különböző negatív sajátértékeihez tartozó multiplicitások összegét értjük.

definiáltunk) nem nulla (ugyanis $\hat{\mathfrak{x}}(\varphi)=0$ esetén $\varphi\in\mathfrak{D}(\tilde{T}_\infty)$). Tehát minden $\varphi\in\mathfrak{N}_0$ elemnek megfeleltetve az $\hat{\mathfrak{x}}(\varphi)\in\hat{\mathfrak{E}}$ vektort, a $2n$-dimenziós $\mathfrak{N}_0$ térnek a $2n$-dimenziós $\hat{\mathfrak{E}}$ térre való kölcsönösen egyértelmű leképezését kapjuk. Másrészt az a követelmény, hogy φ-re teljesüljenek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó összes fő peremfeltételek, azt jelenti, hogy az $\hat{\mathfrak{x}}(\varphi)$ vektorok egy $(2n-d)$-dimenziós $\hat{\Pi}\subset\hat{\mathfrak{E}}$ altérhez tartoznak, amelyet d számú lineáris egyenlet határoz meg. Ebből következik a (9. 4) összefüggés.

2. Megmutatjuk, hogyan számítható ki a $\tilde{T}[\varphi_j, \varphi_k]$ $(j, k=1,2,\dots,r)$ kifejezés a Γ funkcionálok segítségével.

Legyen $\{\Phi_1, \dots, \Phi_{2n}\}$ valamilyen bázis az (1.6) egyenlet φ megoldásaiból álló $\mathfrak{N}_0$ halmazban. Ha a (2. 2) Lagrange—Green-féle azonosságban elvégezzük az $f=\Phi_j$, $g=\Phi_k$ $(j, k=1, 2, \dots, 2n)$ helyettesítést, akkor a következőt kapjuk:

$$[\Phi_j, \Phi_k]_a^b = 0. \tag{9.5}$$

Tekintsük az

$$[f, \Phi_j]_a^b = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,2n) \tag{9.6}$$

peremfeltétel-rendszert. Nem nehéz meggyőződni róla, hogy ezek a peremfeltételek lineárisan függetlenek és önadjungált rendszert alkotnak (akár pozitív a T operátor, akár nem). Csakugyan, ha feltesszük, hogy a (9. 6) peremfeltételek lineárisan összefüggnek, akkor található olyan $\Phi=c_1\Phi_1+\dots+c_{2n}\Phi_{2n}\neq 0$ függvény, amelyre tetszés szerinti $f\in\mathfrak{D}^*$ esetén fennáll az

$$[f, \Phi]_a^b = 0$$

egyenlőség. A (2. 2) azonosság alapján ebből következik:

$$\int_a^b f^{[2n]}\,\bar{\Phi}dx = 0 \qquad (f\in\mathfrak{D}^*),$$

és ez nyilvánvalóan ellentmondásban van az 1°. állítással.

Hátra van még annak az igazolása, hogy a (9. 6) rendszerre teljesülnek a (3. 8) önadjungáltsági feltételek. Könnyű azonban belátni, hogy ezek a jelen esetben a (9. 5) összefüggésekre redukálódnak.

Most jelölje $\tilde{T}_0$[30] a T operátornak azt az önadjungált folytatását, amely a (9. 6) peremfeltétel-rendszernek felel meg.

A minket érdeklő esetben, amikor T szigorúan pozitív operátor, a (9. 6) egyenletrendszert meg lehet oldani a magas rendszámú $f^{[k]}(a)$ és $f^{[k]}(b)$ $(k=n, n+1, \dots, \dots, 2n-1)$ kvázi-deriváltakra. Valóban, a (9. 6) egyenletrendszerben ezekhez a kvázi-

[30] Megemlítjük, hogy mivel (9.5) értelmében $\Phi_j\in\mathfrak{D}(\tilde{T}_0)$ $(j=1, 2, \dots, 2n)$ és

$$\tilde{T}_0\Phi_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, 2n),$$

azért a 13. tétel (I. fej., 5. §) szerint $\tilde{T}_0$ azonos a T operátor T_M finom folytatásával (ha T pozitív operátor).

deriváltakhoz tartozó együtthatók matrixa

$$(9.7)\qquad \begin{Vmatrix} \Phi_1(a), \Phi_1'(a), \dots, \Phi_1^{(n-1)}(a), \Phi_1(b), \Phi_1'(b), \dots, \Phi_1^{(n-1)}(b) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{2n}(a), \Phi_{2n}'(a), \dots, \Phi_{2n}^{(n-1)}(a), \Phi_{2n}(b), \Phi_{2n}'(b), \dots, \Phi_{2n}^{(n-1)}(b) \end{Vmatrix}$$

és ennek a determinánsa nem nulla, mert a matrix sorait rendre az $\hat{\mathfrak{x}}(\Phi_1), \dots, \hat{\mathfrak{x}}(\Phi_n)$ vektorok alkotják, amelyek lineárisan függetlenek $(\hat{\mathfrak{x}}(\Phi) \neq 0$, ha $\Phi \neq 0)$. Megoldva a (9.6) egyenletrendszert az $f^{(k)}(a)$ és $f^{(k)}(b)$ $(k = n, n+1, \dots, 2n-1)$ deriváltakra, a (9. 6) peremfeltétel-rendszert a következő alakra hozhatjuk:

$$(9.8)\qquad \begin{gathered} f^{[2n-j-1]}(a) - \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(a) - \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(b) = 0, \\ (j = 1, 2, \dots, n) \\ f^{[2n-j-1]}(b) + \sum_{k=1}^{n} d_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(a) + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(b) = 0, \end{gathered}$$

ahol (lásd a 158. oldal (3. 12) képletét és utolsó sorát)

$$a_{jk}^{(M)} = \overline{a_{kj}^{(M)}}, \quad b_{jk}^{(M)} = \overline{b_{kj}^{(M)}}, \quad c_{jk}^{(M)} = \overline{d_{kj}^{(M)}} \qquad (j, k = 1, 2, \dots, n).$$

A (9. 8) és a (8. 1) képlet alapján azt kapjuk, hogy tetszés szerinti $g, f \in \mathfrak{D}(\tilde{T}_0)$, tehát tetszés szerinti $g, f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}_0]$ esetén is fennáll a

$$(9.9)\qquad \begin{aligned} \Gamma_{\tilde{T}_0}(f, g) = & \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(a) \overline{g^{(j-1)}(a)} + \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(b) \overline{g^{(j-1)}(a)} + \\ & + \sum_{j,k=1}^{n} d_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(a) \overline{g^{(j-1)}(b)} + \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}^{(M)} f^{(k-1)}(b) \overline{g^{(j-1)}(b)} \end{aligned}$$

egyenlőség. Minthogy (8. 5) értelmében a

$$\Gamma_{\tilde{T}}(\varphi_j, \varphi_k) - \Gamma_{\tilde{T}_0}(\varphi_j, \varphi_k), \quad \tilde{T}[\varphi_j, \varphi_k] - \tilde{T}_0[\varphi_j, \varphi_k] \qquad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

különbségek egyenlők egymással, továbbá

$$\tilde{T}_0[\varphi_j, \varphi_k] = (\tilde{T}_0 \varphi_j, \varphi_k) = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots, r),$$

arra a következtetésre jutunk, hogy

$$(9.10)\qquad \tilde{T}[\varphi_j, \varphi_k] = \Gamma_{\tilde{T}}(\varphi_j, \varphi_k) - \Gamma_{\tilde{T}_0}(\varphi_j, \varphi_k) \qquad (j, k = 1, 2, \dots, r).$$

Az alábbi állítás a 12°. állítás és a (9. 10) képletek folyománya.

13°. *Ha az*

$$(9.11)\qquad \begin{cases} f^{(2n)} - \lambda f = 0 \\ f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

peremérték-feladat mindegyik karakterisztikus értéke pozitív, akkor az

$$(9.12)\begin{cases} f^{[2n]}-\lambda f=0, \\ f^{[2n-j-1]}(a)-\sum_{k=1}^{n} a_{jk} f^{(k-1)}(a)-\sum_{k=1}^{n} c_{jk} f^{(k-1)}(b)=0, \\ f^{[2n-j-1]}(b)+\sum_{k=1}^{n} d_{jk} f^{(k-1)}(a)+\sum_{k=1}^{n} b_{jk} f^{(k-1)}(b)=0 \end{cases} \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

peremérték-feladat negatív karakterisztikus értékeinek a pontos száma, hacsak teljesülnek az

$$(9.13)\qquad a_{jk}=\bar a_{kj},\quad c_{jk}=\bar d_{kj},\quad b_{jk}=\bar b_{kj}\qquad (j,k=1,2,\dots,n)$$

önadjungáltsági feltételek, megegyezik a

$$(9.14)\qquad \sum_{j,k=1}^{n}(a_{jk}-a_{jk}^{(M)})\,\xi_j\bar\xi_k+2\mathrm{Re}\left\{\sum_{j,k=1}^{n}(c_{jk}-c_{jk}^{(M)})\,\xi_j\bar\eta_k\right\}+\sum_{j,k=1}^{n}(b_{jk}-b_{jk}^{(M)})\,\eta_j\bar\eta_k$$

hermitikus alakban előforduló negatív négyzetek számával.

Valóban, az hogy a (9. 11) peremérték-feladat karakterisztikus értékei pozitívok, éppen azt jelenti, hogy a T operátor szigorúan pozitív. Ennélfogva a (9. 12) feladatban szereplő peremfeltételekhez tartozó $\tilde T$ önadjungált operátorra alkalmazható a 12°. állítás. Másrészt mivel a $\tilde T$ operátorhoz nem tartozik egyetlen fő peremfeltétel sem, azért a 10°. állítás értelmében $\Phi_j\in\mathfrak{D}[\tilde T]$ $(j=1,2,\dots,2n)$, következésképpen a vizsgált esetben $r=2n$, és így a (9. 3) alak felírásánál élhetünk a $\varphi_j=\Phi_j$ $(j=1,2,\dots,2n)$ választással. Ezek szerint a (9. 12) peremérték-feladathoz tartozó negatív karakterisztikus értékek pontos száma egyenlő a $\tilde T[\Phi,\Phi]$ alakban fellépő negatív négyzetek számával, ahol

$$\Phi=\zeta_1\Phi_1+\zeta_2\Phi_2+\dots+\zeta_n\Phi_n.$$

Másrészt tekintettel arra, hogy (9. 10) értelmében

$$\tilde T[\Phi,\Phi]=\Gamma_{\tilde T}(\Phi,\Phi)-\Gamma_{\tilde T_0}(\Phi,\Phi)$$

és hogy $\Gamma_{\tilde T}$ a $\Gamma_{\tilde T_0}$-ra vonatkozó (9. 9) képlettel analóg képlet segítségével számítható ki, $\tilde T[\Phi,\Phi]$ megegyezik a (9. 3) alakkal, amelyben

$$\begin{aligned}\xi_k&=\Phi^{(k-1)}(a)=\sum_{j=1}^{2n}\zeta_j\Phi_j^{(k-1)}(a),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (k=1,2,\dots,n).\\ \eta_k&=\Phi^{(k-1)}(b)=\sum_{j=1}^{2n}\zeta_j\Phi_j^{(k-1)}(b).\end{aligned}$$

Ez a ζ változókat a ξ,η változókba átvivő transzformáció nem szinguláris (a (9. 7) matrix nem szinguláris), és ezzel a 13°. állítást bebizonyítottuk.

Másképpen és egyúttal egészen egyszerűen képezhető a (9. 3) alak abban az esetben, amikor ismeretes a $\tilde T$ operátor $G(x,s)$ *Green*-függvénye (és így a 0 szám a $\tilde{T}$ operátornak nem sajátértéke). Minthogy ezzel kapcsolatban fény derül néhány érdekes részletre, megmutatjuk, hogyan történik ez.

Tisztázzuk először, hogy az

$$U(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^{(k-1)}(a) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k f^{(k-1)}(b)$$

alakú $U(f)$ perem-funkcionál milyen feltételek mellett generál a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó $U(f)=0$ fő peremfeltételt.

Ehhez megjegyezzük, hogy a $\tilde{T}$ operátor $\mathfrak{D}(\tilde{T})$ értelmezési tartománya, azonos lévén a $\tilde{T}^{-1}$ operátor értékkészletével, mindazokból az f elemekből áll, amelyek előállíthatók

$$f(x) = \int_a^b G(x,s)\,h(s)\,ds \qquad (h \in L_2(a,b))$$

alakban. Minthogy ekkor

$$U(f) = \int_a^b U(G(x,s))\,h(s)\,ds,$$

nyilvánvaló, hogy az $U(f)=0$ feltétel akkor és csak akkor lesz a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó fő peremfeltétel, ha az s változóban azonosan fennáll[31] az

$$U(G(x,s)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k G_{k-1,0}(a,s) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k G_{k-1,0}(b,s) \equiv 0$$
$$(a \leqq s \leqq b)$$

egyenlőség. Ezek szerint a

$$G_{k,0}(a,s), \quad G_{k,0}(b,s) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

függvények között található $r = 2n-d$ számú, az (a, b) intervallumban lineárisan független függvény, de több nem található.

A $G(x, s)$ mag hermitikus lévén, ugyanezt állíthatjuk a

$$G_{0k}(x,a), \quad G_{0k}(x,b) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{9.15}$$

függvényekről.

Másrészt tetszés szerinti $s \in (a, b)$ érték mellett $G(x, s)$ mint x függvénye eleget tesz az összes fő peremfeltételnek, továbbá a $G_{jk}(x, s)$ $(j, k = 0, 1, \ldots, n-1)$ függvények mindannyian folytonosak, tehát a (9. 15) függvények is eleget tesznek a fő peremfeltételeknek.

Következésképpen a

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k G_{0k}(x,a) + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k G_{0k}(x,b) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

alakú Φ függvények r-dimenziós lineáris halmaza megegyezik a

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{r} \zeta_j \varphi_j(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

[31] Itt felhasználjuk az (5.8) jelöléseket.

alakú Φ függvények lineáris halmazával, ahol φ_j $(j=1, 2, \ldots, r)$ a 12°. állításban definiált függvények. Ebből nyerjük:

$$\left\{\begin{aligned} G_{0k}(x, a) &= \sum_{j=1}^{r} c_{jk}\,\varphi_j(x), \\ & \qquad (a \leqq x \leqq b; \quad k = 0, 1, \ldots, n-1), \\ G_{0k}(x, b) &= \sum_{j=1}^{r} c_{j,n+k}\,\varphi_j(x), \end{aligned}\right.$$

ahol $\|c_{jk}\|$ $(j=1, 2, \ldots, r;\ k=0, 1, \ldots, 2n-1)$ r-ed rangú téglalap alakú matrix. Ennélfogva

$$(9.16)\qquad \begin{aligned} &\tilde{T}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k G_{0k}(x, a) + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k G_{0k}(x, b),\ \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k G_{0k}(x, a) + \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k G_{0k}(x, b)\right] = \\ &= \tilde{T}\left[\sum_{j=1}^{r} \zeta_j \varphi_j,\ \sum_{j=1}^{r} \zeta_j \varphi_j\right] = \sum_{j,k=1}^{r} T[\varphi_j, \varphi_k]\,\zeta_j \bar{\zeta}_k, \end{aligned}$$

ahol

$$(9.17)\qquad \zeta_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_{jk}\,\xi_k + \sum_{k=0}^{n-1} c_{j,n+k}\,\eta_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Számítsuk ki a (9. 16) bal oldalán álló alak együtthatóit. Ebből a célból megjegyezzük, hogy (5. 9) értelmében

$$G_{0k}(x, s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(x)\,\overline{\varphi_j^{(k)}(s)}}{\lambda_j} \qquad (a \leqq x,\ s \leqq b);$$

másrészt a 4. lemma szerint (I. fej., 4. §) fennáll

$$\tilde{T}[f, g] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, \varphi_j)\,\overline{(g, \varphi_j)} \qquad (g, f \in \mathfrak{D}[\tilde{T}]).$$

Ennélfogva

$$\tilde{T}[G_{0j}(x, s), G_{0k}(x, t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^{(j)}(s)\,\overline{\varphi_i^{(k)}(t)}}{\lambda_i} = G_{jk}(s, t)$$

$$(a \leqq s,\ t \leqq b; \quad j, k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

tehát a (9. 16) bal oldalán álló alak felírható a következőképpen:

$$(9.18)\qquad \sum_{j,k=0}^{n-1} G_{jk}(a, a)\,\xi_j \bar{\xi}_k + 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{j,k=0}^{n-1} G_{jk}(a, b)\,\xi_j \bar{\eta}_k\right\} + \sum_{j,k=0}^{n-1} G_{jk}(b, b)\,\eta_j \bar{\eta}_k.$$

Minthogy ez az alak a (9. 3) alakból keletkezik a (9. 17) transzformáció segítségével, amelynek a matrixa r-ed rangú, a 12°. állítás alapján igaz a következő.

14°. *Ha T szigorúan pozitív operátor, $\tilde{T}$ pedig T olyan önadjungált folytatása, amelynek van $G(x, s)$ Green-függvénye, akkor a $\tilde{T}$ operátor negatív sajátértékeinek a pontos száma megegyezik a* (9. 18) *alakban előforduló negatív négyzetek számával.*

Valóban, mivel feltettük, hogy a 0 szám nem sajátérték, azért a (9. 3) alak nem szinguláris, tehát a (9. 18) alak rangja r.

Válasszuk most meg a $c_j = a, b$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ és a $q_j = 0, 1, \ldots, n-1$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ számokat úgy, hogy a megfelelő determináns ne legyen nulla:

$$\Delta = |G_{q_j q_k}(c_j, c_k)|_{j,k=1}^{r} \neq 0.$$

Ekkor a (9. 18) alak ekvivalens a

$$\sum_{j,k=1}^{r} G_{q_j q_k}(c_j, c_k)\, \zeta_j \bar{\zeta}_k$$

alakkal, mert a

$$\varphi_j(x) = G_{0, q_j}(x, 0) \qquad (a \leqq x \leqq b; \ j = 1, 2, \ldots, r)$$

választás esetén a két alak azonos.

Az (I. fej., 5. §) 12. tétel és az I. fejezet (6. 22), (6. 23) képletei alapján kimondhatjuk, hogy a $\tilde{T}_\infty$ operátor $G_\infty(x, s)$ *Green*-függvénye a $G(x, s)$ *Green*-függvényből az alábbi képlettel nyerhető:

$$G_\infty(x, s) = \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{c|c} G(x,s) & G_{q_1,0}(c_1, s) \ldots G_{q_r,0}(c_r, s) \\ \hline G_{0,q_1}(x, c_1) & \\ \vdots & \Delta \\ G_{0,q_r}(x, c_r) & \end{array} \right|. \tag{9.19}$$

Ezt az összefüggést közvetlenül is le lehet vezetni (lásd [2], 7. tétel) és ekkor a 14°. állítás az I. fejezetben szereplő 20. tétel következményeként adódik.

10. §. Peremérték-feladatok karakterisztikus értékeire vonatkozó korlátok

Minthogy a 9°. állítás értelmében a $\tilde{T}_\infty$ operátor mindig azonos a T operátor T_μ durva folytatásával, a 9. §-ban definiált $\tilde{T}_0$ operátor pedig megegyezik a T operátor T_M finom folytatásával (hacsak T szigorúan pozitív operátor), azért az (I. fejezet 8. §-ban ismertetett) 24. és 25. tételnek, továbbá a 8. 1., 8. 2. megjegyzéseknek a tekintett T kvázi-differenciáloperátorra való egyszerű átfogalmazásával a következő állításra jutunk.

15°. *Legyenek* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots$ *az*

$$\begin{gathered} f^{[2n]} - \lambda f = 0, \\ \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n) \end{gathered} \tag{10.1}$$

önadjungált peremérték-feladat egymás után következő karakterisztikus értékei, $\lambda_1^{(\infty)} \leqq \lambda_2^{(\infty)} \leqq \lambda_3^{(\infty)} \leqq \ldots$ *pedig a megfelelő*

$$\begin{gathered} f^{[2n]} - \lambda f = 0, \\ f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \end{gathered}$$

„durva" peremérték-feladat egymás után következő karakterisztikus értékei.

Ekkor

$$\lambda_j \leqq \lambda_j^{(\infty)} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Ezenkívül ha $\lambda_1 \geqq 0$, *akkor fennállnak a*

$$\lambda_j \geqq \lambda_j^{(0)} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

egyenlőtlenségek is, ahol $\lambda_1^{(0)} \leqq \lambda_2^{(0)} \leqq \lambda_3^{(0)} \leqq \ldots$ *az*

$$f^{[2n]} - \lambda f = 0,$$

$$[f, \Phi_j]_a^b = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

„finom" peremérték-feladat egymás után következő sajátértékei.

Emlékeztetünk arra is, hogy a 8. 1. megjegyzés értelmében (I. fej.)

$$\lambda_j^{(\infty)} \leqq \lambda_{j+2n}^{(0)} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Ha pedig felhasználjuk a G és a $G^{(\infty)}$ *Green*-függvény között fennálló (9. 19) összefüggést, akkor meggyőződhetünk róla, hogy

$$\lambda_j^{(\infty)} \leqq \lambda_{j+2n-d},$$

ahol d a (10. 1) feladathoz tartozó fő peremfeltételek száma[32].

Ismertetünk még egy, az előbbivel megegyező típusú állítást.

16°. *Legyenek* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots$ *az*

$$f^{[2n]} - \lambda f = 0, \tag{10. 2'}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} a_{jk} f^{[k-1]}(a) = \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{10. 2''}$$

önadjungált peremérték-feladat egymás után következő karakterisztikus értékei, $\lambda_1^{(a)} \leqq \lambda_2^{(a)} \leqq \lambda_3^{(a)} \leqq \ldots$ *pedig az*

$$f^{[2n]} - \lambda f = 0, \tag{10. 3'}$$

$$f^{(j-1)}(a) = \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{10. 3''}$$

peremérték-feladat egymás után következő karakterisztikus értékei.

Ekkor

$$\lambda_j \leqq \lambda_j^{(a)} \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{10. 4}$$

Ha ezenkívül $\lambda_1 \geqq 0$, *akkor az is igaz, hogy*

$$\lambda_j \geqq \lambda_{ja} \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{10. 5}$$

[32] Vagyis $d = 2n - r$, ahol r a (7. 2) matrix rangja.

ahol $\lambda_{1a} \leqq \lambda_{2a} \leqq \lambda_{3a} \leqq \dots$ *az*

$$(10.6') \qquad f^{[2n]} - \lambda f = 0,$$

$$(10.6'') \qquad [f, \chi_j]_a = \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

peremérték-feladat egymás után következő sajátértékei; itt $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ *a*

$$(10.7') \qquad \varphi^{[2n]} = 0,$$

$$(10.7'') \qquad \sum_{k=1}^{2n} b_{jk} \varphi^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

feladat n számú lineárisan független $\varphi(\in \mathfrak{D}^*)$ *megoldását jelenti.*

Valóban, tekintsük azt a $T^{(a)}$ operátort, amelynek a $\mathfrak{D}(T^{(a)})$ értelmezési tartománya azokból az $f \in \mathfrak{D}^*$ elemekből áll, amelyekre

$$f^{[j]}(a) = 0 \qquad (j = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

$$\sum_{k=1}^{2n} b_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

és legyen $T^{(a)} f = f^{[2n]}$ $\left(f \in \mathfrak{D}(T^{(a)})\right)$. Könnyen belátható, hogy $T^{(a)}$ hermitikus operátor és a T operátornak folytatása.

A (10. 3) peremfeltételekhez tartozó $\tilde{T}_\infty^{(a)}$ operátor a $T^{(a)}$ operátor önadjungált folytatása. Nem nehéz belátni, hogy $T^{(a)}$ bármely másik $\tilde{T}^{(a)}$ önadjungált folytatása, egyidejűleg a T operátornak is önadjungált folytatása lévén, egy (10. 2) alakú önadjungált peremfeltétel-rendszernek fog megfelelni.

A 10°. állítás segítségével nehézség nélkül adódik, hogy a $T^{(a)}$ operátor tetszés szerinti $\tilde{T}^{(a)}$ önadjungált folytatására

$$\mathfrak{D}[\tilde{T}_\infty^{(a)}] \subset \mathfrak{D}[\tilde{T}^{(a)}]$$

A 10. tétel értelmében (I. fej., 4. §) ez azt jelenti, hogy $\tilde{T}_\infty^{(a)}$ a $T^{(a)}$ operátor durva folytatása, és ebből következik (10. 4).

Ha $\lambda_1 > 0$, akkor $\lambda_j^{(a)} > 0$ $(j = 1, 2, \dots)$. Így a (10. 7) rendszer φ megoldásainak az $\mathfrak{N}$ összessége n-dimenziós (mert ha $\mathfrak{N}$ dimenziója ennél nagyobb volna, a (10. 3) peremérték-feladatnak a $\lambda = 0$ szám is karakterisztikus értéke lenne). Legyen $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$ bázis az $\mathfrak{N}$ halmazban. A

$$[\chi_j, \chi_k]_a = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$

összefüggések segítségével igazolható, hogy a (10. 6″) peremfeltétel-rendszer önadjungált. Továbbá ugyanezen összefüggések folytán mindegyik $\chi \in \mathfrak{N}$ függvény a (10. 6) feladat megoldása a $\lambda = 0$ esetben. A 13. tétel értelmében (I. fej., 5. §) ez azt jelenti, hogy a (10. 6″) peremfeltételekhez tartozó $\tilde{T}_0^{(a)}$ operátor a $\tilde{T}^{(a)}$ operátor finom folytatása, ebből pedig következik (10. 5).

A 16°. állítást bebizonyítottuk.

A (10. 2) peremérték-feladat negatív karakterisztikus értékeinek a pontos számára vonatkozóan az alábbi megjegyzéseket tehetjük.

Ha $T^{(a)}$ szigorúan pozitív operátor ($\lambda_1^{(a)} > 0$), akkor ennek a számnak a meghatározására a 12°. állításban megfogalmazottnál egyszerűbb szabályt alkalmazhatunk, nevezetesen ez a szám megegyezik a (9. 3) alakban fellépő negatív négyzetek számával, ahol a $\tilde{T}$ operátor a (10. 2″) peremfeltételeknek felel meg, $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ pedig valamilyen bázis a (10. 7) rendszer azon megoldásainak a halmazában, amelyek eleget tesznek a $\tilde{T}$ operátorhoz tartozó, csak az a végpontra vonatkozó összes fő peremfeltételnek. Ebben az esetben a (10. 2) peremérték-feladat negatív karakterisztikus értékeinek a pontos számát még másképpen is meg lehet határozni, ti. a $\tilde{T}$ operátor $G(x, s)$ *Green*-függvénye segítségével (hacsak ez létezik, azaz $\lambda_1 > 0$). Nem nehéz megmutatni, hogy most ez a szám megegyezik nemcsak a (9. 18) alakban, hanem az egyszerűbb

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} G_{jk}(a, a)\,\xi_j\,\bar{\xi}_k$$

alakban fellépő negatív négyzetek számával is.

11. §. Az eddigi eredmények egy általánosítása

Legyen $\sigma(x) = \sigma(x-0)$ $(a \leqq x \leqq b)$ növekedő függvény. Jelöljük $L_2(\sigma)$-val mindazoknak az $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ komplex értékű függvényeknek a lineáris halmazát, amelyek a σ függvényre vonatkozóan mérhetők (σ-mérhetők) és amelyekre

$$\int_a^b |f(x)|^2\, d\sigma(x) < \infty.$$

Ha az $L_2(\sigma)$-beli f, g elemek skaláris szorzatát az

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\; d\sigma(x)$$

egyenlőséggel értelmezzük, akkor $L_2(\sigma)$ Hilbert-térré válik.

Az összes korábbi meggondolásokat el lehet végezni úgy is, hogy $L_2(a, b)$ helyett az $L_2(\sigma)$ teret vesszük alapul, ekkor azonban a T operátort az alábbi módon kell definiálni.

Jelölje $\mathfrak{D}^*$ azoknak az $f \in L_2(\sigma)$ függvényeknek a halmazát, amelyeknek az $f^{[k]}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ kvázi-deriváltjai léteznek és abszolút folytonosak, amelyekhez továbbá található olyan $h \in L_2(\sigma)$ elem, hogy

$$\int_a^x h\, d\sigma = f^{[2n-1]}(a) - f^{[2n-1]}(x) + \int_a^x p_n f\, dx \qquad (a \leqq x \leqq b). \tag{11.1}$$

Így a $\sigma(x) \equiv x$ esetben (11. 1) mindkét oldalát differenciálva azt kapjuk, hogy $h = f^{[2n]}$. Ha a σ függvény abszolút folytonos,

$$\sigma(x) = \int_a^x \varrho(x)\, dx \qquad (a \leqq x \leqq b), \tag{11.2}$$

akkor az (a, b) számközben majdnem mindenütt

$$h = \frac{1}{\varrho} f^{[2n]}.$$

Nyilvánvaló, hogy mindegyik $f \in \mathfrak{D}^*$ elemnek csak egy olyan h függvény felel meg, amelyre teljesül a (11. 1) feltétel; legyen definícióképpen

$$h = T^* f.$$

Ekkor nem nehéz megmutatni, hogy bármelyik $g, h \in L_2(\sigma)$ elempárra érvényes lesz az (1. 8) *Lagrange*-féle azonosságot helyettesítő

$$\int_a^x (T^* f \bar{g} - f \overline{T^* g})\, d\sigma = [f, g] \tag{11.3}$$

azonosság.

Most jelöljük $\mathfrak{D}(T)$-vel azoknak az $f \in \mathfrak{D}^*$ elemeknek a halmazát, amelyekre

$$f^{[k]}(a) = f^{[k]}(b) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1),$$

és értelmezzük a T operátort a

$$Tf = T^* f \qquad (f \in \mathfrak{D}(T))$$

képlettel. Ekkor a (11. 3) azonosság[33] segítségével be lehet bizonyítani, hogy T hermitikus operátor az $L_2(\sigma)$ térben mindenütt sűrű $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartománnyal és $(2n, 2n)$ defektus-indexszel, T^* pedig a T operátor adjungáltja.

Nem nehéz megmutatni, hogy az ilyen módon definiált T operátorra az 1°—16°. állítások valamennyien érvényben maradnak, ha az $f^{[2n]}$ kifejezést mindenütt, ahol előfordul, a $T^* f$ kifejezéssel helyettesítjük.

Tekintsünk egy

$$\begin{gathered} T^* f - \lambda f = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} f^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} f^{[k-1]}(b) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2n) \end{gathered} \tag{11.4}$$

alakú önadjungált peremérték-feladatot. Tegyük fel, hogy ha ebben a feladatban a $T^* f$ kifejezést az $f^{[2n]}$ kifejezéssel helyettesítjük, olyan peremérték-feladatot kapunk, amelynek a 0 szám nem karakterisztikus értéke, és legyen $G(x, \xi)$ az ehhez a feladathoz tartozó *Green*-függvény. Ekkor kiderül, hogy a (11. 4) peremérték-feladat ekvivalens a következő súlyozott integrálegyenlettel:

$$f(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\sigma(\xi) = 0.$$

Ebből nem nehéz levezetni (lásd [2], 1059. oldal), hogy a tett feltevés mellett a peremérték-feladat negatív karakterisztikus értékeinek a pontos száma nem függ a $\sigma(x)$ függvény megválasztásától.

[33] És az 1°. állítás felhasználásával, amely igaz marad, ha $f^{[2n]}$ helyébe a $T^* f$ kifejezést írjuk.

Megemlítjük még, hogy ha a σ függvény abszolút folytonos és $\varrho=\sigma'$, akkor a (11. 4) peremérték-feladat a következő alakra hozható:

$$f^{[n]}-\lambda\varrho f=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}f^{[k-1]}(a)+\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}f^{[k-1]}(b)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

IRODALOM

[1] M. G. Krejn: A félig korlátos hermitikus operátorok önadjungált folytatásainak elmélete és alkalmazásai. (I) *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei*, **18** (1968) 273—314.

[2] M. Krein: Sur les opérateurs différentiels auto-adjoints et leurs fonctions de Green symétriques. *Математический сборник* **2** (1937) 1023—1072.

[3] M. Krein: Sur les développements des fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites quelconques, *Математический сборник* **2** (1937) 923—932.

[4] А. А. Графф: К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения. *Математический сборник* **18** (1946) 305—327; **21** (1947) 143—158.

[5] M. Krein: Sur les dérivées des noyaux de Mercer. *Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences* **200** (1935) 797—799.

[6] А. Данилевский: К одной теореме М. Г. Крейна. *Доклады Академии наук СССР* **1** (1936) 335—338.

[7] E. Trefftz: Schwingungsprobleme und Integralgleichungen. *Mathematische Annalen* **87** (1922) 307—314.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA RENDES ÉS LEVELEZŐ TAGJAINAK 1968-BAN MEGJELENT PUBLIKÁCIÓI JEGYZÉKE*

ALEXITS GYÖRGY rendes tag

On the characterization of classes of functions by best linear approximations, *Acta Sci. Math.* **29** (1968), 107—114.
Sur la caractérisation des fonctions dérivables par les approximations trigonométriques, *Studia Sci. Math. Hungarica* **3** (1968), 293—297.

BUDÓ ÁGOSTON rendes tag

Investigation of the Fluorescence Yield of Solutions, *Proceedings of the International Conference on Luminescence, Budapest*, 1968, Akadémiai Kiadó. 146—159. old.
Further Investigations Concerning the Application of the Entropy Law to Luminescence Processes, (KETSKEMÉTY ISTVÁNnal közösen), *Proceedings of the International Conference on Luminescence, Budapest*, 1968, Akadémiai Kiadó. 245—249. old.
Kisérleti fizika I. (Mechanika, hangtan, hőtan) 3., javított kiadás. Budapest, 1968. Tankönyvkiadó. 517 old.
Kisérleti fizika II. (Elektromosságtan, mágnességtan) Budapest, 1968, Tankönyvkiadó. 395 old.
Gyulai Zoltán, 1888—1968, *Fizikai Szemle* **18** (1968), 321—323.
Az Osztályvezetőség beszámolója az MTA 1968. évi nagygyűlésének nyilvános osztályülésén, *MTA III. Osztály Közleményei* **18** (1968), 111—136.

DETRE LÁSZLÓ levelező tag

Mathematical and Physical Interpretation of Non-periodic Phenomena in Variable Stars. *IV. IAU Colloquium on Variable Stars, 1968. Introductory Report* pp. 1—30.
RR Lyrae-Stars. *Nordisk. Astr. Tidskrift.* **36** (1968), 7—19.
A MTA Csillagvizsgáló Intézetének működése (1967.)j márc. 31—1968. ápr. 1.) *Csill. Évkönyv* 1969-re. 84—90. o.
A csillagászat legújabb eredményei. U. i. 134—145. o.

GOMBÁS PÁL rendes tag

Bevezetés a hullámmechanikába és alkalmazásaiba, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1967. KISDI DÁVIDdal közösen.
Über eine Korrektion des statistischen Besetzungsverbotpotentials, *Theor. Chim. Acta* (Berl.) **11** (1968), 210.
Über die Weizsäckersche kinetische Energiekorrektion, *Acta Phys. Hung.* **25** (1968), 361.
Zur Prüfung der Pseudopotentialmethode am Wasserstoffatom, *Acta Phys. Hung.* **23** (1967), 443. KUNVÁRI OLGÁval közösen.
On the exchange energy of A atom and K^+ ion, *Journ. Chem. Phys.* **49** (1968), 2865. L. PORRÓval közösen.

* A Magyar Tudományos Akadémia Elnökségének 27/1968. számú határozata alapján az Osztályközlemények évenként közölni fogja az osztály rendes és levelező tagjainak az előző naptári évben megjelent publikációi jegyzékét, mégpedig az önálló eredményeket tartalmazó cikkeken, könyveken kívül az összefoglaló jellegű dolgozatokat, tankönyveket, népszerűsítő cikkeket, é. i. t. is.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ levelező tag

Über das Didosche Problem, *Elem. Math.* **23** (1968), 97—101.
On the permeability of a layer of parallelograms, *Studia Sci. Math. Hung.* **3** (1968), 195—200.
Solid circle-packings and circle-coverings, *Studia Sci. Math. Hung.* **3.** (1968), 401—409.
Egy sokszög oldalainak hatványösszegéről, *Mat. Lapok* **19** (1968), 55—58.
Három lemez Dido-helyzetéről. *Mat. Lapok* **19** (1968), 9—12.

JÁNOSSY LAJOS rendes tag

Mérési eredmények kiértékelésének elmélete és gyakorlata, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.
Remark to the Interpretation of the Kennedy-Thorndike Experiment, *Acta Phys. Hung.*, **25**/3 (1968), 275—78.
Teoria i praktika obrabotki rezultatov izmerenij, Izd. „MIR" II. kiadás, 1968.
Relativitáselmélet és fizikai valóság, Gondolat Kiadó, Budapest, 1968. II. kiadás.

KALMÁR LÁSZLÓ rendes tag

Znacsenyije, szinonyimija i perevod, *Masperevod*-67, Budapest (Országos Műszaki Könyvtár és Dokumentációs Központ), 1968, 374—390.
On the problem of full utilization of the technical possibilities of computers in devising appropriate approximation methods for the solution of numerical problems, *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Math. de la R. S. de Roumanie,* **12** (60) (1968), 1—5.
A programozási nyelvekkel kapcsolatos további teendők, *Információ-Elektronika,* **4** (1968), 251—254.

KOVÁCS ISTVÁN rendes tag

Rotational Structure of the Spectra of Diatomic Molecules, *International Conference on Spectroscopy, Publ. for ICSU* 101—107. 1968.
A. H. MUIL, K. J. ANDO, H. M. COOGAN: *Mössbauer Effect Data Index* 1958—1965. (Könyvismertetés) *Acta Phys. Hung.* **24**, 1968.
W. L. HINDMARSCH: *Atomic Spectra.* (Könyvismertetés) Acta Phys. Hung. **24**, 1968.

PÁL LÉNÁRD levelező tag

Structures and phase transformations in the Mn—Ni system near equiatomic concentration, (E. KRÉN, E. NAGY, I. NAGY, P. SZABÓ szerzőkkel közösen), *J. Phys. Chem. Solids,* **29** (1968), 101—108.
Magnetic structures and phase transformations in Mn-based CuAu-I type alloys, (E. KRÉN, G. KÁDÁR, P. SZABÓ, T. TARNÓCZI szerzőkkel közösen). *J. Appl. Phys.* **39** (1968), 538—44.
X-ray and susceptibility study of the first-order magnetic transformation in Mn_3Pt, (E. KRÉN, P. SZABÓ, T. TARNÓCZI, G. KÁDÁR, C. HARGITAI szerzőkkel közösen), *J. Appl. Phys.* **39** (1968), 469—70.
Inelastic scattering of neutrons by virtual magnon states in dilute alloys, (N. KRÓOval közösen), *J. Appl. Phys.* **39** (1968), 452—54.
Correlation type time-of-flight specrometer with magnetically pulsed polarized neutrons, (J. GORDON, N. KRÓO, G. ORBÁN szerzőkkel közösen), *Phys. Letters* **26A** (1968), 122—23.
Magnetic structures and exchange interactions in the Mn-Pt system, (E. KRÉN, G. KÁDÁR, J. SÓLYOM, P. SZABÓ, T. TARNÓCZI szerzőkkel közösen), *Phys. Rev.* **171** (1968), 574—85.
Correlation type time-of-flight spectrometer with magnetically chopped polarized neutron beam, (N. KRÓO, J. GORDON, P. PELLIONISZ, F. SZLÁVIK, O. VIZI szerzőkkel közösen), *Neutron Inelastic Scattering* Vol. II. p. 407—16, IAEA, Vienna (1968).
Neutron scattering investigations of the dynamics of critical state in iron, (J. GORDON, Éva KISDI-KOSZÓ, I. VIZI szerzőkkel közösen), *Neutron Inelastic Scattering* Vol. II. p. 55—62. IAEA Vienna (1968).
Virtual magnon states in dilute alloys, (N. KRÓOval közösen), *Neutron Inelastic Scattering* II. p. 37—44. IAEA Vienna (1968).
Virtual spin-wave state below and above the Curie temperature in dilute Fe(Cr) alloy, (N. KRÓO, M. ARSIC, D. JOVIC szerzőkkel közösen), *Phys. Letters* **28A** (1968), 213—14.
Vita az atomenergiáról, *Természet Világa* (1968) 271—274..
Az új tűzgyújtás nagy úttörője, *Népszabadság* 1968. aug. 14.
A valóság sohasem jelentkezik sterilen, *Magyar Hírlap* 1968. dec. 24.

RÉNYI ALFRÉD rendes tag

Sur la théorie de la recherche aléatoire, *Colloque International Besançon* 1966, C. N. R. S. 1968, 281—287.
Information and statistics, *Studies in Math. Stat.* Akadémiai Kiadó, Budapest 1968, 129—131.
Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 9 (1968), 146—157. (R. SULANKEvel)
A rendezett minták elméletének egy problémaköréről, *MTA III. Oszt. Közleményei* **18** (1968), 23—30.
Változatok egy Fibonacci témára. I—II. *A Természet Világa.* I.: 1968. 1. sz. 22—27, II. 1968. 2. sz. 88—90.
Kerekasztal-konferencia szovjet matematikusokkal a matematika elvi kérdéseiről, *Mat. Lapok* **19** (1968), 3—8.
Some remarks on the large sieve of Ju. V. Linnik, *Annales Univ. Sci. Bp. de R. Eötvös nom. Sect. Math.* **11** (1968), 3—13. (ERDŐS PÁLlal)
Ars Mathematica I., *Fizikai Szemle* **18** (1968), 60—61, II. *Élet és Tudomány* **14** (1968), 564—655.
On quadratic inequalities in the theory of probability, *Studia Sci. Math. Hung.* **3** (1968), 351—358. (GALAMBOS JÁNOSsal)
On random matrices, II. *Studia Sci. Math. Hung.* **3** (1968), 459—464. (ERDŐS PÁLlal)
On some problems of statistics from the point of view of information theory, *Proceedings of the Colloquium on Information Theory,* Debrecen 1967. J. Bolyai Math. Society 1968. 343—357.

SZALAI SÁNDOR rendes tag

Improvement of the Resolution and Transmission of a Toroid-Sector Type Beta Spectrometer. (BERÉNYI D., VARGA D., BUDAI I., VARGA L. szerzőkkel közösen). *J. Scientific Instruments (J. of Physics E.)* 2. *Ser.* **1** (1968), 364—365.
Observation and Cross-Section of the Reaction Zn^{64} (n, t) Cu^{62}. (CSIKAI J., JOST K. szerzőkkel közösen.) *Acta Phys. Hung.,* **24** (1968), 199—203.
Precipitation of Fission Products from the Atmosphere in Debrecen, Hungary, During 1966. and 1967. (CSONGOR Évával közösen), *Acta Phys. Hung.* **25** (1968), 279—286.
Nyomtápelemek szorpciója tőzeghumuszsavakon és jelentősége a gyakorlati mezőgazdaságban, (SZILÁGYI M.-vel közösen). *Agrártudományi Közlemények,* **27** (1968), 109—114.
Accumulation of Microelements in Peat HUMIC ACIDS AND COAL. (SZILÁGYI M.-vel közösen). *4th International Meeting on Organic Geochemistry, Sept.* 16—18. 1968. Amsterdam.
Laboratory Experiments on the Retention of Micrometrients by Peat Humic Acids. (SZILÁGYI M.-val közösen.) *Plant and Soil* **29** (1968), 219—224.
A fizikai kísérletezés technikai alapjai. (BERECZ I.; MEDVECZKY L.; SEBESTYÉN B. és SZABÓ J. közreműködésével.) *ATOMKI Közl.,* Suppl. **10** (1968), 2. sz.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA rendes tag

Dilatation des commutants d'opérateurs, *Comptes rendus Acad. Sci. Paris,* (A) **266** (1968), 493—495. (C. FOIAŞsal közösen.)
Commutants de certains opérateurs, *Acta Sci. Math.* **29** (1968), 1—17. (C. FOIAŞsal közösen.)
Products of operators of classes C_ϱ, *Revue Roumaine de Math. Pures et Appl.,* **6** (1968), 897—899.
Vecteurs cycliques et quasi-affinités, *Studia Math.* (Warszawa-Wrocław), **31** (1968), 35—42. (C. FOIAŞsal közösen.)
Vorlesungen über Funktionalanalysis. II. kiadás (Deutscher Verlag d. Wiss. Berlin) (RIESZ FRIGYESsel közösen.)

TANDORI KÁROLY levelező tag

Abschätzungen vom Menshoff-Rademacherschen Typ für die Summen von orthogonalen Funktionen, *Studia Math. Hungarica,* **3** (1968), 325—336.
Bemerkung zur starken Summation der Fourierreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae,* **19** (1968), 271—285.
On a problem of summability of orthogonal series, *Acta Sci. Math., Szeged,* **29** (1968), 331—350. (MÓRICZ FERENCcel közös dolgozat.)
Berichtigung zur Arbeit „Über die starke Summation von Fourierreihen", *Acta Sci. Math., Szeged,* **29** (1968), 351.

TURÁN PÁL rendes tag

On some problems of a statistical group-theory III. (ERDŐS PÁLlal), *Acta Math. Hung.* (1967), 309—320.
On the twin prime problem, III. *Acta Arith.* **14** (1968), 399—408.
On some problems of a statistical group theory IV. (ERDŐS PÁLlal), *Acta Math. Hung.* **19** (1968), 413—436.
On an inequality of Cebysev, *Annales Univ. Sci. Budapest de Rol. Eötvös nomin.* **11** (1968), 15—16.
Algebrai egyenletek közelítő megoldásáról, *MTA III. Oszt. Közleményei* **18** (1968), 223—236.
Über die angenäherte Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen und Eigenwerten von Matrizen, *Bericht der IV. Int. Math. Kongr. über Anwendungen der Math. in den Ing. Wiss Weimar.* 1967. p. 209—216.
Über einige Fragen der vergleichenden Primzahltheorie (S. KNAPOWSKIval). *Landau Festband,* VEB Deutscher Verlag der Wiss. Berlin 1968. p. 159—171.

VARGA OTTÓ rendes tag

Kárteszi Ferenc 60 esztendős, *Mat. Lapok* **18** (1967), 273—282. (MERZA JÓZSEFfel közösen.)
Hyperflächen konstanter Normalkrümmung in Finslerschen Räumen, *Math. Nachrichten,* **38** (1968), 47—52.

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat nyomdába érkezett: 1969. VII. 28. — Terjedelem: 16,75 (A/5) ív, 33 ábra

69-7410 — Szegedi Nyomda

Ára: 36,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

From THE FOREIGN LITERATURE

Megjelent 1970. I. 31.

Index: 26498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIX. KÖTET 3—4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1970

// A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XIX. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Münnich Ferenc u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Pénzforgalmi jelzőszámunk 215-11488, külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

VARGA OTTÓ
1909–1969

1969. június 14-én, életének 60. évében elhunyt VARGA OTTÓ Kossuth-díjas, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja, c. egyetemi tanár, az MTA Matematikai Kutató Intézetének tudományos főmunkatársa, a Szocialista Munkáért Érdemérem tulajdonosa.

Elhunytával érzékeny veszteség érte a magyar és az egyetemes tudományt, tanítványait s mindazokat, akiket még csak ezután vezetett volna be a tudományos kutatás műhelytitkaiba, amelynek oly kiváló ismerője volt. A geometria határainkon messze túl is neves művelőjét veszítettük el benne. Megalapozója és vezetője volt a magyar differenciálgeometriai iskolának, megalapítója a Publicationes Mathematicae folyóiratnak. A Kossuth Lajos Tudományegyetemen fejtett ki kimagasló tudományos tevékenységet és oktató-nevelő munkát, majd a Budapesti Műszaki Egyetemen és az MTA Matematikai Kutató Intézetében. Több hazai tudományos testület munkájában vett részt és tagja volt számos bel- és külföldi tudományos szervezetnek.

VARGA OTTÓ AKADÉMIKUS DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE

1. Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen, *Lotos*, Prag **84** (1936), 1—4.
2. Integralgeometrie, 3. Croftons Formeln für den Raum, *Math. Z.*, **40** (1935), 384—405.
3. Integralgeometrie, 8. Über Masse von Paaren linearer Mannigfaltigkeiten im projektiven Raum P_n, *Rev. Mat. Hispano-Americana* (1935), 241—279.
4. Integralgeometrie, 9. Über Mittelwerte an Eikörpern, *Mathematica* **12**, 65—80. — W. BLASCHKE-vel közösen.
5. Integralgeometrie, 19. Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen. *Math. Z.* **41** (1936), 768—784.
6. Integralgeometrie, 24. Über die Schiebungen im Raum, *Math. Z.* **42** (1937), 710—736.
7. Über die Integralinvarianten, die zu einer Kurve in der Hermiteschen Geometrie gehören, *Acta Sci. Math. Szeged* **9** (1939), 88—102.
8. Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen, *Monatshefte f. Math. und Phys.* **50** (1941), 165—175.
9. Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Deutsche Math.* **6** (1941), 192—212.
10. Az invariáns differenciál megállapítása a Finsler-féle terekben, *Mat. és Fiz. Lapok* **48** (1941), 423—435.
11. Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie, *Acta Sci. Math.* **10** (1943), 149—163.
12. A Finsler-féle geometria felépítése a Minkowski-féle simuló mértékmeghatározással, *Mat. és Term. Ért.* **61** (1942), 14—21.
13. Az állandó görbületű Riemann-féle terek egyik jellemzési módjáról, *Mat. és Fiz. Lapok* **50** (1943), 34—39.

14. Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern, *Comm. Math. Helv.* **19** (1946), 367—380.
15. Linienelementräume, deren Zusammenhang durch eine beliebige Transformationsgruppe bestimmt ist, *Acta Sci. Math. Szeged* **11** (1946), 55—62.
16. Über die Lösung differentialgeometrischen Fragen in der nichteuklidischen Geometrie unter gleichzeitiger Verwendung homogener und inhomogener Koordinaten, *Hung. Acta Math.* **1** (1947), 35—52.
17. Vektorfelder, deren kovariante Ableitung längs einer vorgegebenen Kurve verschwindet, *Hung. Acta Math.* **4** (1949), 1—3.
18. Über affinzusammenhängende Mannifgaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 1—17.
19. Bemerkung zur Arbeit des Herrn A. Dinghas „Zur Metrik nichteuklidischer Räume", *Math. Nachrichten* **2** (1949), 386—388.
20. Affinzusammenhängenden Mannifgaltigkeiten von Linienelemente, die ein Inhaltsmass besitzen, *Proc. Acad. Amsterdam* **52** (1949), 316—322.
21. Über den Zusammenhang der Krümmungsaffinoren in zwei eindeutig aufeinander abgebildeten Finslerschen Räumen, *Acta Sci. Math. Szeged* **12** (1950), 132—135.
22. Über das Krümmungsmass in Finslerschen Räumen, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1950), 116—122.
23. Az integrálgeometria alkalmazásai a geometriai optikában, *MTA III. Oszt. Közl.* **1** (1951), 192—201.
24. Normalkoordinaten in allgemeinen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus de I. Congrès des Math. Hongrois*, 147—162.
25. Anwendung von p-Vektoren auf derivierte Matrizen, *Publ. Math. Debrecen* **2** (1951), 137—145. — GYÍRES BÉLÁval közösen.
26. Szovjet eredmények a differenciálgeometriában, *Mat. Lapok* **2** (1951), 190—218.
27. Eine geometrische Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **2** (1951), 281—283.
28. Az „Appendix" új kiadásának ismertetése, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953), 281—283.
29. A Bolyai—Lobacsevszkij geometria hatása a geometria fejlődésére, *MTA III. Oszt. Közl.* **3** (1953), 151—171.
30. Eine Charakterisierung der Finslerschen Räume mit absoluten Parallelismus der Linienelemente, *Archiv der Math.* **5** (1953), 128—131.
31. Bedingungen für die Metrisierbarkeit von affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954), 7—16.
32. Bemerkung zur Cayley—Kleinscher Massbestimmung, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955), 3—15. — ACZÉL JÁNOSsal közösen.
33. Olyan Finsler terek jellemzése, amelyekben létezik a vonalelemek párhuzamossága, *A Kossuth Lajos Tudományegyetem Actája* **1** (1954), 105—108.
34. Über Riemannsche Räume die freie Beweglichkeit besitzen, *Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Math.* **1** (1957), 124—130.
35. L'influence de la géométrie de Bolyai—Lobatschevsky sur le développement de la géométrie, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **5** (1954), 71—94.
36. Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Räumes und die geometrische Deutung des einen Krümmungstensors des Finslerschen Räumes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **20** (1955), 41—51.
37. Eine Charakterisierung der Kawaguchischen Räume metrischer Klasse mittels eines Satzes über derivierte Matrizen, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 418—430.
38. Normalkoordinaten in Kawaguchischen Räumen und seinen affinen Verallgemeinerungen sowie eine Anwendung derselben zur Bestimmung von Differentialinvarianten, *Math. Nachr.* **18** (1958), 141—151.
39. Verallgemeinerte Riemannsche Normalkoordinaten und einige Anwendungen derselben, *Izvestija Szofia* **4** (1959), 61—69.
40. Ein elementargeometrischer Beweis des Sylvester-Frankeschen Determinantensatzes, *Izvestija Szofia* **3** (1959), 105—107.
41. Hilbertsche verallgemeinerte nicht-euklidische Geometrie und Zusammenhang derselben mit der Minkowskischen Geometrie, *Internat. Congress of Math. Abstracts, Edinburgh* (1958), 111.
42. Über die Zerlegbarkeit von Finslerschen Räumen, *Acta Math. Hung.* **11** (1960), 197—203.
43. Über eine Kennzeichnung der Riemannschen Räume konstanter negativer und positiver Krümmung, *Annali di Mat.* **53** (1961), 105—117.

44. Bemerkung zur Winkelmetrik in Finslerschen Räumen, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* **3—4** (1960—61) 379—382.
45. Über den inneren und induzierten Zusammenhang für Hyperflächen in Finslerschen Räumen, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 208—217.
46. Über eine Charakterisierung der Finslerschen Räume konstanter Krümmung, *Monatshefte für Math.* **65** (1961), 277—286.
47. Zur Begründung der Hilbertschen Verallgemeinerung der nichteuklidischen Geometrie, *Mh. für Math.* **66** (1962), 265—275.
48. Herleitung des Cartanschen euklidischen Zusammenhanges in Finslerräumen mit Hilfe der Riemannschen Geometrie, *Acta Phys. et Chimica* **8** (1962), 121—124.
49. Eine einfache Herleitung der Cartansche Übertragung der Finslergeometrie, *Math. Notae* **18** (1962), 185—196.
50. Über Hyperflächen konstanten Normalkrümmung in Minkowskischen Räumen, *Tensor N. S.* **13** (1963), 246—250.
51. Hyperflächen mit Minkowskischer Massbestimmung in Finslerräumen, *Publ. Math. Debrecen* **11** (1964), 301—309.
52. Zur sphärischen Abbildung in Riemannschen Räumen, *Annales de l' Univ. de Jassy* **11 B** (1965), 507—517.
53. Die Methode des beweglichen n-Beines in der Finsler-Geometrie, *Acta Math. Sci. Hung.* **18** (1967), 207—215.
54. Kárteszi Ferenc 60 esztendős, *Mat. Lapok* **18** (1967), 273—282. — MERZA JÓZSEFfel közösen.
55. Hyperflächen konstanter Normalkrümmung in Finslerschen Räumen, *Math. Nachrichten* **38** (1968), 47—52.

SZALAY SÁNDOR AKADÉMIKUS 60 ÉVES

Szalay Sándor Kossuth-díjas, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja, az MTA Atomfizikai Kutató Intézete igazgatója ez évben tölti be 60. születésnapját. Ez alkalomból közöljük publikációinak jegyzékét, eddigi sikeres oktatói, kiváló kutatói és vezetői tevékenységéhez gratulálva, további eredményes munkát kívánunk.

Szerkesztő bizottság

SZALAY SÁNDOR AKADÉMIKUS MUNKÁSSÁGA

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

1. *Gázkeverékek dielektromos viselkedése.* Egyetemi doktori értekezés. Bp., 1932.
2. Die Zerstörung von hochpolymeren Molekülen mittels Ultraschallwellen. *Z. Physik. Chem., Abt. A*, **164**, 234 (1933)
3. Intensitätsbestimmungen zur Erklärung der depolymerisierenden Wirkung der Ultraschallwellen. *Physik. Z.*, **35**, 293 (1934)
4. Kompressibilität verdünnter Elektrolytlösungen, *Physik. Z.*, **35**, 639 (1934)
5. Die Einwirkung von ultravioletten Licht auf Saccharose- und Glukoselösungen. *Magyar Biológiai Kutató Intézet II. Oszt. Munkái*, **8**, 417 (1935—36)
6. The Formation of Radio-Aluminium (Al^{28}) and the Resonance Effect of Mg^{25}. W. Y. CHANG társszerzővel. *Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A.* **159**, 72 (1937)
7. Fine Structure of the Yield-Curve of the Transmutation of Aluminium. *Nature*, **141**, 972 (1938)
8. Die Anregungsfunktionen der Umwandlungen ${}_{13}Al^{27}(\alpha, n)\ {}_{15}P^{30}$ und ${}_{5}B^{10}\ (\alpha, n)\ {}_{7}N^{13}$. *Z* Physik, **112**, 29 (1939)
9. Megfigyelések a ${}_{15}P^{31}$ és ${}_{7}N^{14}$ atommagok gerjesztett állapotain. *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, **58**, 313 (1939)
10. Die Anregungskurve der Gamma-Strahlung die durch Beschiessen von Be^{9}, $B^{10,11}$ und Al^{27}-Kerne mit Po-Alpha-Teilchen erregt wird. (Gy.) J. ZIMONYI társszerzővel. *Z. Physik*, **115**, 639 (1940).
11. Über die in Mg durch Po-Alpha-Teilchen erregten Gamma-Strahlung. *Die Naturwissenschaften*, **28**, 667 (1940)
12. Vizsgálatok néhány könnyű atommagnak a polónium-alfa-sugaraival történő bombázását kísérő gammasugárzásról. ZIMONYI GY. társszerzővel. *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, **60**, 129 (1941)
13. Ein Differentialmikrokalorimeter für biologische Untersuchungen. A. V. JENEY társszerzővel. *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, **60**, 129 (1941)
14. Beiträge zur Anregungsfunktion der Kernumwandlung Mg^{25} (alfa, p) Al^{28} und die experimentelle Bestimmung des Mg^{25}-Kernradius. *Die Naturwissenschaften*, **32**, 72 (1944)
15. Contributions to the Nuclear Processes Induced in Magnesium by Polonium Alpha Particles. CSONGOR É. társszerzővel. *Phys. Rev.*, **74**, 1063 (1948)
16. Kutatások urán és thorium magyarországi előfordulása után korszerű atomfizikai módszerekkel. *Magyar Állami Földtani Int., Évi Jelentése, Beszámoló a Vitaülésekről*, **10**, 5 (1948)

17. Thorium and Uranium Content of the Velence Mountains, Hungary. *Nature*, **162**, 454 (1948)
18. Investigations into the Thorium and Uranium Contents of the Eruptive Rocks in Hungary by Means of Geiger—Müller Counter-Tubes. FÖLDVÁRY A. társszerzővel. *Magyar Állami Földtani Int. Évi Jelentése, Beszámoló a Vitaülésekről*, **10**, 23 (1948)
19. Determination of Radioactive Content of Rocks by Means of Geiger-Müller Counters. CSONGOR É. társszerzővel. *Science*, **109**, 146 (1949)
20. Kőzetek radiológiai vizsgálata. FÖLDVÁRI A. társszerzővel. *MTA III. (Mat. és Fizikai) Oszt. Közl.*, **1**, 60 (1951)
21. Quantitatív hisztokémiai phosphatase-meghatározás radioaktív ólom felhasználásával. BARKA T., PÓSALAKI Z., KERTÉSZ L. társszerzőkkel. *Kísérletes Orvostudomány*, **3**., 1 (1951)
22. Criticism on Gömöri's Phosphatase Reaction, Relying upon Study with Aid of Tracers. PÓSALAKI Z. társszerzővel. *Acta Morphologica Hung.*, **1**, 432 (1950)
23. Quantitativer Ausbau histochemischer Reaktionen mit isotopen Metallen. BARKA T., PÓSALAKI Z., KERTÉSZ L. társszerzőkkel. *Acta Physiologica Hung.*, **1**, 56 (1951) Suppl.
24. Egy elektromágneses rendszerű alfa-sugár spektrométer. FÉNYES T. társszerzővel. *Fiz. Szemle*, **2**, 98 (1952)
25. Radioaktív izotóppal nyomjelzett intravénásan beadott kolloid sorsának vizsgálata állati szervezetben. KERTÉSZ L., SIMONYI Á. társszerzőkkel. *Fizikai Szemle*, **2**, 96 (1952).
26. Hazai kőszenek radiológiai vizsgálata. *MTA Műszaki Tud. Oszt. Közl.*, **5**, 167 (1952).
27. Quantitative Histochemical Determination of Phosphatase by Means of Radioactive Lead. BARKA T. PÓSALAKI Z., KERTÉSZ L. társszerzőkkel. *Acta Anatomica Hung.*, **16**, 45 (1952)
28. The Enrichment of Uranium in Some Brown Coals in Hungary. *Acta Geol. Hung.*, **2**, 299 (1954)
29. Vizsgálatok nagy atomsúlyú kationok adszorpciójára humusz kolloidokon. *MTA III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.*, **4**, 327 (1954)
30. Studies on Experimental Lead Poisoning. III. The Effects of Alcohol in Acute Lead Poisoning. KESZTYŰS L., KOCSÁR L., KERTÉSZ L., VÁLYI NAGY T. társszerzőkkel. *Acta Physiologica Hung.* **5**, 543 (1954)
31. Untersuchungen über den zeitlichen Ablauf des Verschwindens des Intravenös verabreichten und mit radioaktiven Isotop markierten Bi_2S_3-Kolloids. KERTÉSZ L. társszerzővel. *Acta Physiologica Hung.*, **6**. Suppl., 128 (1954)
32. Können sich spezifische Antikörper auf die Wirkung sekundenlang dauernder Antikörperreize bilden? KOCSÁR L., SALÁNKI J., KERTÉSZ L. és KESZTYŰS L. társszerzőkkel. *Acta Physiologica Hung.*, **5**, 55 (1954) Suppl.
33. Nervensystem und Immunität. II. Können sich unter sekundenlanger Einwirkung von Antigenreizen spezifische Abwehrstoffe bilden? KESZTYŰS L., KOCSÁR L., KERTÉSZ L., SALÁNKI J. társszerzőkkel. *Acta Microbiol. Hung.*, **1**, 371 (1954)
34. Idegrendszer és immunitás. II. Képződhetnek-e specifikus ellenanyagok másodpercekig tartó antigéningerek hatására. KESZTYŰS L., KOCSÁR L., KERTÉSZ L., SALÁNKI J. társszerzőkkel. *Kísérletes Orvostudomány*, **6**, 393 (1954)
35. Unusual Radioactivity Observed in the Athmospherical Precipitation in Debrecen (Hungary) between Apr. 22.—Dec. 31. 1952. id. BERÉNYI D. társszerzővel. *Acta Physica Hung.*, **5**, 1. (1955)
36. Szokatlan radioaktivitás megfigyelése a Debrecenben 1952. ápr. 22—dec. 31. között leesett csapadékokban. id. BERÉNYI D. társszerzővel. *MTA III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.*, **5**, 89 (1955)
37. Vizsgálatok a kryptonnak levegőből üzemi kinyerése alkalmával feldúsuló radioaktív szennyeződésére vonatkozólag. DÉZSI Z., HORVÁTH M. társszerzőkkel. *Magyar Fiz. Folyóirat*. **3**, 279 (1955)
38. Analitikai vizsgálatok hazai kőszenek urántartalmára vonatkozólag. ALMÁSSY GY. társszerzővel. *MTA Kémiai Tud. Oszt. Közl.*, **8**, 33 (1956)
39. Analitikai vizsgálatok hazai kőszenek vanádium- és molibdéntartalmára vonatkozólag. A Két fém szénhez kötött állapotának igazolása. ALMÁSSY GY. társszerzővel. *MTA Kémiai Tud. Oszt. Közl.*, **8**, 39 (1956)
40. Geiger—Müller csöves sugárzásmérő berendezés. MAKRANCZI B., NAGY J. társszerzőkkel. *Mérés és Automatika*, **4**, 300 (1956)
41. *Jelentés az ajkai medence kőszenének urántartalmáról.* ATOMKI. Debrecen, 1956. LOVAS I., PESTY L., ALMÁSSY GY. társszerzőkkel. A Magyar Földtani Intézet Dokumentációs Tárában.
42. *Jelentés a tatabányai medence kőszenének urántartalmáról.* ATOMKI, Debrecen, 1956. LOVAS I., PESTY L., ALMÁSSY GY., KOVÁCS Á. társszerzőkkel. A Magyar Földtani Intézet Dokumentációs Tárában.

43. *Jelentés a mecseki liász kőszén urántartalmáról.* ATOMKI, Debrecen, 1956. PESTY L., LOVAS I., ALMÁSSY GY. társszerzőkkel.
44. *Jelentés a Kisgyóni-medence kőszenének urántartalmáról.* ATOMKI, Debrecen, 1956. LOVAS I., PESTY L., ALMÁSSY GY. társszerzőkkel. A Magyar Földtani Intézet Dokumentációs Tárában.
45. Szénhamuk radioaktivitásának vizsgálata fotoemulziós módszerrel. BUJDOSÓ E., MEDVECZKY L. társszerzőkkel. *MTA III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.*, **7**, 129 (1957)
46. Investigation of the Uranium Content of Coal Ashes with Nuclear Emulsion. BUJDOSÓ E., MEDVECZKY L. társszerzőkkel. *Acta Phys. Hung.*, **8**, 195 (1957)
47. Precíziós automatizált expanziós ködkamra. CSIKAI GY., HREHUSS GY. társszerzőkkel. *MTA III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.*, **7**, 137 (1957)
48. Fluoriméter uránium kvantitatív meghatározásához. MÁTHÉ GY. társszerzővel. *Magyar Fizikai Folyóirat*, **5**, 247 (1957)
49. The Role of Humus in the Geochemical Enrichment of U in Coal and Other Bioliths. *Acta Phys. Hung.*, **8**, 25 (1957)
50. Beiträge zum Wirkungsmechanismus des Kobalt-ionadrenalin-antagonismus. KOCSÁR L., ÚJHELYI CS., KESZTYŰS L. társszerzőkkel. *Acta Physiologica Hung.*, **11**, 415 (1957)
51. Számítások a szabályozott fuziós atomenergia-termelés nehézségeire vonatkozólag. BERÉNYI D. társszerzővel *MTA III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.*, **8**, 345 (1958)
52. Beta szpectrometr toroidal'no-szektornogo tipa. BERÉNYI D. társszerzővel. *Izv. Akad. Nauk SzSzSzR, Szerija Fizicseszkaja*, **22**, 877 (1958)
53. Effekt otdacsi nejtrino v beta-raszpade He^6. CSIKAI GY. társszerzővel. *Zs. Ekszp. i Teor. Fiz.*, **35**, 1072 (1958)
54. The Reciol Effect of the Neutrino in the Beta-Decay of He^6. *International Conference on Mesons and Recently Discovered Particles e 43° Congresso Nazionale di Fisica, Padova-Venezia,* 22—28. *Settembre* 1957. p. IV. 8. Societa Italiana di Fisica, Padova, CSIKAI GY. társszerzővel.
55. The Significance of Humus in the Geochemical Enrichment of Uranium. *Peaceful Uses of Atomic Energ. Proceedings of the II. International Conference, Geneva, September.* 1958. Vol. 2. p. 182. Geneva, United Nations.
56. The Electron Neutrino Angular Correlation in the Decay of He^6. *Proceedings of the International Conference on Nuclear Physics, Low Energy Nuclear Interactions and Nuclear Structure, Paris, July,* 1958. p. 840. London, 1959, Crosby Lookwood and Son, Ltd. CSIKAI GY. társszerzővel.
57. Some Remarks on the Generation of Nuclear Power by Controlled Fusion Processes. BERÉNYI D. társszerzővel. *Acta Phys. Hung.*, **10**, 39 (1959)
58. A Beta-Ray Spectrometer of Toroid-Sector Type. BERÉNYI D. társszerzővel. *Acta Phys. Hung.*, **10**, 57 (1959)
59. Hasadási termékek a légköri csapadékban Debrecenben 1952 és 1957 között. Id. BERÉNYI D. társszerzővel. *MTA III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.*, **9**, 175 (1959)
60. Fission Product Precipitation from the Atmosphere in Debrecen, Hungary, between 1952 and 1957. *Peaceful Uses of Atomic Energy. Proceedings of the II. International Conference Geneva, Sept.*, 1958. Vol. 18. p. 570. Geneva, United Nations. Id. Berényi D. társszerzővel.
61. Átáramoltató betét folyadék radioaktivitásának mérésére GM-számlálócsőhöz. SZILÁGYI M. társszerzővel. *Magyar Fizikai Folyóirat*, **7**, 419 (1959)
62. Magyarország egyes fontosabb kőszénterületeinek átvizsgálása uránium nyomelőfordulás szempontjából. ALMÁSSY GY., PESTY L., LOVAS I. társszerzőkkel. *ATOMKI Közl.*, **1**, 7 (1959)
63. Kísérleti atombombarobbantások időpontjának meghatározása a légkör radióaktivitásának alapján. KOVÁCH Á. társszerzővel. *ATOMKI Közl.*, **2**, 229 (1960)
64. A magfizikai ipar szennyező hatása vízkészletünkre. *Hidrológiai Közlöny*, **40**, 293 (1960)
65. Radioaktív anyagok a légkörben és természetes vizekben. *Fizikai Szemle*, **10**, 101 (1960)
66. Kétmillió Volt névleges feszültségű Van de Graaff generátor. PUSKÁS E., KOLTAY E. és FÉLSZERFALVI J. társszerzőkkel. *ATOMKI Közl.*, **2**, 3. (1960)
67. Az Eperjes—Tokaji-hegység és előtere vizeinek uránnyomtartalmáról. SCHERF E. társszerzővel. *ATOMKI Közl.*, **2**, 71 (1960)
68. Laboratóriumi kísérletek az uránnak szénhamuban történő elődúsítására. ANGELI I. társszerzővel. *ATOMKI Közl.*, **2**, 145 (1960)
69. Investigations Concerning the Retention of Fission Products on Humic Acids. SZILÁGYI M. társszerzővel. *Acta Physica Hung.*, **13**, 412 (1961)
70. Critical Comments on the Investigation of the Electron-Neutrino Angular Correlation by the Cloud Chamber Method. CSIKAI J. (GY), BACSÓ J. társszerzőkkel. *Acta Phys. Hung.*, **13**, 437 (1961)

71. Fission Product Precipitation from the Atmosphere in Debrecen, Hungary, Between 1958 and 1960. Kovách Á. társszerzővel. *Acta Phys. Hung.*, **13**, 281 (1961)
72. Vizsgálatok egyes urán-hasadási termékek adszorpciójára humusz preparátumon. Szilágyi M. társszerzővel. *MTA III. (Mat. Fiz.) Oszt. Közl.*, **11**, 47 (1961)
73. Vizsgálatok Kelet-Magyarország vizeinek radioaktivitásáról. *Acta Universitatis Debreceniensis de L. Kossuth Nominatae*, **7**, 45 (1961)
74. Atommaghasadási termékek megkötése humuszsavakon és a jelenség alkalmazási lehetősége az atomiparban. *ATOMKI Közl.*, **5**, 3 (1963)
75. A humuszsavak szerepe az uránium geokémiájában és lehetséges szerepük más kationok geokémiájában. *MTA III. (Mat. és Fiz.) Oszt. Közl.*, **13**, 253 (1963)
76. Cation Exchange Properties of Humin Acids and their Importance in the Geochemical Enrichment of $(UO_2)^{++}$ and Other Cations. Proprints. Debrecen, 1963, MTA Atommag kutató Intézete. 11 p. *Geochemica et Cosmochimica Acta*, **28**, 1605 (1964)
77. Rol Gumuszovüh Kiszlot v Geohimii Urana i ih Vozmozsnaja Rol' v Geohimii Drugih Kationov. Himija Zemnoj Korü. *Trudü Geohimicseszkoj Konferencii Poszvjasennoj Sztoletiju szo dlja Razsdenija Akademika V. I. Vernadszkogo.* Tom. 2. M., 1964, Izd.-vo „Nauka". Sztr. p. 428—442.
78. Általános alapelvek egy tankrendszerű Van de Graaff generátor tervezéséhez. Koltay E. társszerzővel. *ATOMKI Közl.*, **6**, 3—33 (1964)
79. Fission Product Precipitation from the Atmosphere in Debrecen, Hungary, during 1961 and 1962. Kovách Á. társszerzővel. *Acta Physica Hung.*, **16**, 321 (1964)
80. Preparation of Thin Silicon Targets by Reductive Evaporation. Berecz I., Károlyi J. (Gy) társszerzőkkel. *Nuclear Instruments and Methods*, **33**, 364 (1965)
81. Observation of (n, He^3) Reaction. Csikai J. (Gy) társszerzővel. *Nuclear Physics*, **68**, 546 (1965)
82. Preparation of Self-Supporting Thin Silicon Targets by Reductive Evaporation. Károlyi J. (Gy) társszerzővel. *Nuclear Instruments and Methods*, **36**, 353 (1965)
83. Hasadási termékek visszatartása tőzeg humuszsavakkal, új lehetőség a szennyvizek kezelésére. Szilágyi M. társszerzővel. *Fizikai Szemle*, **14**, 388 (1964)
84. Retention of Fission Products by Peat Humin Acids a New Possibility in Waste Water Treatment. 3rd *United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy.* Preprint. (A/Conf. 28/p/784). Szilágyi M. társszerzővel. *Proc. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy.* Vol. 14. New York, 1965, United Nations. p. 361.
85. Modell-vizsgálatok nyomásgenerátorok elektromos terével kapcsolatban. Kiss Á., Koltay E. társszerzőkkel. *ATOMKI Közl.*, **8**, 101 (1966)
86. *Investigations on the Leaching of Uranium from Crushed Magmatic Roks.* Preprint. Debrecen, 1966, ATOMKI, 14 p. Sámsoni Z. társszerzővel.
87. The Association of Vanadium with Humic Acids. Preprint. Debrecen, 1966, ATOMKI. 7 p. Szilágyi M. társszerzővel. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, **31**, 1 (1967)
88. Electrode System of Improved Stress Uniformity for Pressurized Van de Graaff Generators. Kiss Á., Koltay E. társszerzőkkel. *Nuclear Instruments and Methods*, **46**, 130 (1967)
89. Fission Product Precipitation from the Atmosphere in Debrecen, Hungary, between 1963 and 1965. Kovách A. társszerzővel. *Acta Physica Hung.*, **23**, 137 (1967)
90. Uránium kioldódásának vizsgálata magmás kőzetek zúzalékából. Sámsoni Z. társszerzővel. *Földtani Közlöny*, **97**, 60 (1967)
91. Preparation of Separated Mg Isotopes Targes by Reductive Evaporation. Somorjai E. társszerzővel. *Nuclear Instruments and Methods*, **49**, 355 (1967)
92. Laboratory Experiments of the Retention of Micronotrients by Peat Humic Acids. Preprint Debrecen, 1967, Institute of Nuclear Research of the Hung. Acad. of Sci. 5 p. *Plant and Soil*, **29**, 219—224 (1968)
93. Mérések Ge(Li) detektorral a ^{145}Sm bomlási sémáján. Uchrin J., Varga D., Berényi D., Molnár F. társszerzőkkel. *ATOMKI Közl.*, **9**, 261 (1967)
94. Nyomtápelemek szorpciója tőzeg humuszsavakon és jelentősége a gyakorlati mezőgazdaságban. Szilágyi M. társszerzővel. Agrártudományi Közlemények, **27**, 109—114 (1968)
95. Improvement of the Resolution and Transmission of a Toroid-Sector Type Beta Spectrometer. Varga D., Budai I., Varga L. és Berényi D. társszerzőkkel. *J. Scientific Instruments, (J. of Physics E. 2. Ser.)* **1**, 364—365 (1968).
96. Observation and Cross Section of the Reaction Zn^{64} (n, t) Cu^{62} Csikai Gy., Jost K. társszerzőkkel. *Acta Phys. Hung.*, **24**, 199—203 (1968)
97. Precipitation of Fission Products from the Atmosphere in Debrecen, Hungary, During 1966 and 1967. Csongor E. társszerzővel. *Acta Phys. Hung.*, **25**, 279—286 (1968)

98. Accumulation of Microelements in Peat Humic Acids and Coal. *4th International Meeting on Organic Geochemistry, Sept. 16—18. 1968. Amsterdam.* SZILÁGYI M. társszerzővel.
99. Experimental Evidence for a New Radioisotope Cu—70. *Acta Physica Hung.* (megjelenés alatt) K. JOST társszerzővel.
100. Accumulation of Uranium and Other Micrometals in Coal and Organic Shales and the Role of Humic acids in These Geochemical Enrichments Guest — lecture presented at the general meeting of the Royal Swedish Academy of Sciences on the 23 October 1968. *Archiv för Mineralogi och Geologi.* (megjelenés alatt)
101. Vizsgálatok növények mikroelem felvételénél láptalajokon mutatkozó problémákról. BELÁK S., GYŐRI D., SÁMSONI Z., SZILÁGYI M. és TÓTH A. társszerzőkkel. *Agrokémia és Talajtan.* (megjelenés alatt)

REFERÁLÓ KÖZLEMÉNYEK

1. Atomenergia a villamos energiafejlesztés szolgálatában. *Elektrotechnika*, **39**, 101 (1947)
2. Radioaktív izotópok alkalmazásának hazai lehetőségei és nehézségei. *Magyar Kémikusok Lapja*, **6**, 71 (1951)
3. Dunántúli szeneink urántartalmának jelentősége Magyarország jövendő atomenergia-gazdálkodása szempontjából. *Magyar Kémikusok Lapja*, **11**, 203 (1956)
4. Az atomenergia békés célokra való alkalmazása. *Magyar Technika*, **9**, 194 (1954)
5. Szovjet kutatások az atomenergia békés felhasználása irányában. *Akadémiai Értesítő*, **62**, 340 (1955)
6. Termonukleáris atommagfolyamatok és a hidrogénbomba. BERÉNYI D. társszerzővel. *Fizikai Szemle*, **6**, 145 (1956)
7. A mesterséges radioaktivitás felfedezése és hatása a tudományos kutatás fejlődésére. *Magyar Tudomány*, **4**, 565 (1959); *Fizikai Szemle*, **10**, 67 (1960).
8. Az ATOMKI tervei a meteorit kutatások terén. *ATOMKI Közl.*, **2**, 202 (1960)
9. A meteoritok, mint a világűr kutatásának eszközei. GYARMATI B., KOVÁCH Á., SÁMSONI Z. társszerzőkkel. *Fizikai Szemle*, **11**, 227 (1961)
10. Kristályvágó készülék. SCHADEK J. társszerzővel. *ATOMKI Közl.*, **5**, 123 (1963)
11. Debrecen—Dubna együttműködés az atomkutatás területén T. FÉNYES társszerzővel. *Acta Phys. et Chim. Debrecina* (megjelenés alatt)

FELSŐOKTATÁSI MUNKÁK

Saját jegyzetek

1. *Fizikai gyakorlatok.* Segédkönyv orvostanhallgatók fizikai gyakorlataihoz. Debrecen, 1944. Debreceni M. Kir. Tisza István Tud. Egyetem Orvoskari Fizikai Intézete. 174 p. 21 cm
2. *Fizikai gyakorlatok.* Segédkönyv természettud. kari hallgatók fizikai gyakorlataihoz. Debrecen 1951. Debreceni Tudományegyetem Természettudományi Kara Kis. Fiz. Int. 138 p.
3. *Elektronika.* Egyetemi jegyzet. Debrecen, 1951, Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Int. 55 p. 31 cm.
4. *Elektronika.* Egyetemi jegyzet. Debrecen, 1951, Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Int. 41 p. 31 cm.
5. *Technikai fizika.* Egyetemi jegyzet. Debrecen, 1951—52, Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézete. 60 p. 31 cm.
6. *Fizikai gyakorlatok.* Kossuth Lajos Tudományegyetem Természettudományi Kar jegyzetei. Budapest, 1954, Felsőoktatási Jegyzetellátó V. VI, 230 p. 31 cm.
7. *Fizikai gyakorlatok.* 1—2. köt. Budapest, 1959, Felsőoktatási Jegyzetellátó V. 480 p. 29 cm. Debrecen, Egyetemi jegyzet.
8. *Fizikai gyakorlatok.* 1—3. köt. 4. átd. és bőv. kiad. Budapest, 1961. Tankönyvkiadó, 29 cm.
9. *Fizikai gyakorlatok.* 1—3. köt. Bp., 1963. Tankönyvkiadó 24 cm.
10. *A fizikai kísérletezés technikai alapjai.* ATOMKI Közl. Suppl. 10, 1968. 2. sz. BERECZ I., MEDVECZKY L., SEBESTYÉN B., SZABÓ J. társszerzőkkel.

NÉPSZERŰ ISMERTETÉSEK, MEGEMLÉKEZÉSEK

1. Az atommáglya és az atomenergia felhasználásának lehetőségei. *Természet és Technika*, **108**, 103 (1949)
2. Atommagkutatás Debrecenben. *Élet és Tudomány*, **10**, 102 (1955)
3. Magyarország jövő atomenergia forrása. *Szabad Nép*, 1955, aug. 14.
4. La source future d'énergie atomique de la Hongrie. *Revue Hongroise*, 1955. No. 9.
5. Hungary's future nuclear energy sources. *Hungarian Review*, 1955. Sept. 4.
6. Atommaghasadási termékek Debrecen légkörében. *Néplap*, 1955. nov. 13.
7. Termonukleáris magfolyamatok. BERÉNYI D. társszerzővel. *Természettudományi Közlöny*, **1**, (88), 419 (1957)
8. „O. R. Frisch, F. A. Paneth, etc.: Beiträge zur Physik und Chemie des 20. Jahrunderts". Könyvismertetés. *Acta Physica Hung.*, **12**, 271 (1961)
9. Gyulai professzor, mint oktató. *Fizikai Szemle*, **13**, 143 (1963)
10. Szilárd Leo, 1898—1964. *Fizikai Szemle*, **14**, 331 (1964)
11. Atomkutatás Debrecenben. Beszélgetés Szluka Emil újságíróval. *Népszabadság*, 1965. okt. 9.
12. Dr. Hevesy György, 1885—1966. *Fizikai Szemle*, **17**, 353 (1967)
13. A természetes radioaktivitás felfedezésétől a mesterséges radióaktivitásig. (Megemlékezés Mme Curie születésének 100. évfordulójáról.) *Fizikai Szemle*, **17**, 225 (1967)

SZABADALMAK

1. Piezoelektrisches Schallgerät. Patentiert im Deutschen Reich vom 31. Juli, 1935. Szab. száma: DRP 704649.
2. Eljárás urán és más nagy atomsúlyú és magas vegyértékű kationok híg, vizes oldatokból való kinyerésére. Bej. napja: 1954. máj. 12. Szerzői tanúsítvány: határozat száma 0048/1955. Lajstrom szám 704. Kelte 1955. szept. 20.
3. Eljárás kőszenek és szénpalák urántartalmának elődúsítására. Bejelentés napja: 1955. nov. 25. Szerzői tanúsítvány: határozat száma 001/1956. Lajstrom száma: 904. kelte: 1956. máj. 18.
4. Almássy Gyulával közösen: Eljárás kőszenek és szénpalák vanádium-, molibdén-, réz- és nikkeltartalmának elődúsítására. 904. lajstromszámú találmány kiegészítése. Bejelentés napja: 1956. jún. 4. Szerzői tanúsítvány: határozat száma: 008/1957. Lajstromszám: 1129. kelte: 1957. ápr. 17.
5. Igen kis terjedelmű száraz elem. 1954. ápr. 30. (OTH ikt. sz. 6491.) Találmányi bejelentés.
6. Magas elektromos átütési szilárdságú összetett massza és impregnáló eljárás. 1954. aug. 2. (OTH ikt. sz. 11987).

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK OSZTÁLYVEZETŐSÉGI BESZÁMOLÓJA*

A Közgyűlés alkalmából az osztályvezetőségek beszámolóikat — a szokásoknak megfelelően — szóban és írásban terjesztik elő. A szóbeli beszámoló csak a legfontosabbnak ítélt tudománypolitikai kérdéseket és az Osztály munkájának általánosabb érdeklődésre számot tartó problémáit tárgyalja, az írásban előterjesztett és előre kiküldött jelentés pedig vázlatosan az elmúlt 3 évben elért főbb kutatási eredményeket tartalmazza néhány számszerű adattal együtt.** A mostani kibővített osztályülésen mind a szóbeli, mind pedig az írásbeli beszámoló együttesen kerül megvitatásra; ezért kérem, hogy a hozzászólások, illetőleg a vita során mindkét beszámolót szíveskedjenek figyelembe venni.

Az Osztályhoz tartozó kutatások célja és feladatai

A tudomány és technika egyre gyorsuló ütemű fejlődése már egymagában is újszerű követelményeket támaszt minden tudományágban a kutatással és általában a tudományos tevékenységgel szemben. Ehhez járult még a gazdálkodás irányítási rendszerének a megváltozása, amely az Osztályhoz tartozó kutatások vonatkozásában is elengedhetetlenné teszi mind a kutatási céloknak, mind a kutatásszervezés eddig kialakult rendszerének az alaposabb elemzését. Az új helyzetben egyrészt lényegesen növelni kell a kutatás hatékonyságát, másrészt pedig egy-egy témakörben a kutatás során feltárt új ismeretek olyan szintézisére kell törekedni, amely a termelés számára tudományosan megalapozott, a gyakorlatban megvalósítható konkrét segítséget nyújthat. Ebből azonban helytelen lenne mechanikusan arra következtetni, hogy az alkalmazott és az alapkutatások arányát intézményeinkben az előbbiek javára kell megváltoztatni; sokkal inkább az következik ebből, hogy az alap- és alkalmazott kutatásoknak az eddiginél szorosabb összhangját kell biztosítani. Az Osztálynak és intézményeinek ezért az eddigieknél még nagyobb mértékben kell egyeztetnie az alapkutatások tematikáját a gyakorlat időszerű igényeivel, és az erők jelentősebb részét olyan alapkutatási problémák megoldására kell fordítani, amelyeknek területén a gyakorlat előreláthatóan leginkább fogja igényelni az objektív valóság eddiginél mélyebb és részletesebb ismeretét. Az alap- és alkalmazott, illetve a fejlesztési kutatások helyes arányát az egyes kutatási célok sajátosságainak megfelelően kell kialakítani, ami azt jelenti, hogy némely kutatási területen az alap-, a másik területen pedig az alkalmazott, illetve a fejlesztési kutatások fokozott támogatása a célszerű.

* Előadta BUDÓ ÁGOSTON akadémikus az 1969. május 6-i nyilvános osztályülésen.
** Az írásban előterjesztett jelentést a MELLÉKLET tartalmazza.

A különböző határozatoknak azt az említett megállapítását, hogy szorosabb összhangot kell teremteni a társadalmi szükségletek és a tudományos tevékenység között, úgy valósíthatjuk meg, ha a kutatási programok kidolgozásakor tudományosan elemezzük a szóban forgó kutatások feladatait, bizonyos vonatkozásokban az ipar helyzetét, egyes népgazdasági célkitűzéseket, és ennek az elemző munkának az alapján meghatározzuk azokat a csomópontokat, amelyek jövőbeni fejlődésünkre döntőek. Ilyen csomópontok meghatározására — mint az ismeretes — a legutóbbi időben a matematika egyes ágaiban, a szilárdtestfizika terén már sor került, de ezt a munkát kellő körültekintéssel és alapossággal tovább kell folytatnunk.

A feladatok megoldása során alap-, alkalmazott és fejlesztési kutatómunkát is kell végezni, de nem kevésbé fontos a más országokban elért eredmények megismerése és adaptálása is. Nyilvánvaló ugyanis, hogy minden kérdésben csak saját kutatási eredményre támaszkodni nem lehet, és a nemzetközi tapasztalatok ismerete nélkülözhetetlen.

A matematikai, a fizikai és a csillagászati kutatások irányításának helyzete és feladatai

Az Osztály a tudománypolitikai kérdések megoldásában a már évekkel ezelőtt kialakult szakbizottsági rendszerre támaszkodik. Ezek a testületek összefogják az Akadémia és a Művelődésügyi Minisztérium irányítása alatt működő kutatóhelyek és tanszékek vezető és fiatal kutatóit, s így tevékenységük hatása a III. Osztály közvetlen hatáskörébe tartozó kutatóintézeteknél szélesebb körben érvényesül, viszont nincs, vagy alig-alig van hatásuk a más tárcákhoz vagy főhatóságokhoz tartozó kutatóhelyekre. A kutatás terén a két legnagyobb volument képviselő irányító szerv — az MTA és a Művelődésügyi Minisztérium — munkájának összhangja szervezetileg is biztosított, és így a két főhatósághoz tartozó kutatóhelyeken az elvi irányítás egységessége megvalósítható.

A tudomány rohamos fejlődése és e fejlődés társadalmi következményeinek felismerése egyebek között azt eredményezi, hogy a párt és a kormányszervek egyre intenzívebben foglalkoznak a tudomány fejlesztésére és irányítására vonatkozó kérdésekkel. Hazánkban is éppen most folyik az MSZMP Központi Bizottságának irányításával egy igen széles körű vizsgálódás, amely ugyan még nem zárult le, de az már most is látszik, hogy a tudományszervezési és irányítási rendszernek az új követelményeknek jobban megfelelő átalakítása komplex reformot tesz szükségessé.

Az Osztályvezetőség az elmúlt időszakban többször is foglalkozott időszerű tudománypolitikai, irányítási és szervezeti kérdésekkel. Ha az Osztályvezetőség e munkájával szemben kifogások emelhetők, az valószínűleg nem azért van, mert az Osztályvezetőség rosszabbul dolgozott, mint korábban, hanem mert a követelmények a kutatómunkával szemben nagyon megnövekedtek, és mert az Akadémia szervezeti keretei már nincsenek kellő összhangban az akadémiai kutatások jellegével, volumenével, az Akadémia 20 évvel ezelőtt kialakult szervezete korszerűsítésre szorul. Éppen ezért jogos igény, hogy foglalkozni kell azzal, miként illeszthető hozzá az Akadémia szervezete a legmegfelelőbben társadalmunk jelenlegi struktúrájához.

Helyesnek látszik a vizsgálódásnak az a megállapítása, hogy az Akadémián belül a testületi és a szakigazgatási irányítás viszonyát felül kell vizsgálni. Ma még azonban nem egészen világos, hogy ennek a megvalósítása hogyan lenne optimális. Ezzel kapcsolatban további, nagyon mélyreható eszmecserék és viták szükségesek. Egyet lehet érteni azzal a törekvéssel, hogy az Akadémián belül sor kerüljön a funkciók szétválasztására. Helyeselhető, hogy az Akadémia országos felelősséggel tartozzon bizonyos ügyekért — különösen gondolunk itt a tudományos utánpótlás és a minősítés ügyére — az említett ügyek számát és körét azonban konkrétan és egyértelműen meg kell határozni, és a feladatok ellátásához a feltételeket biztosítani is kell.

A kutatás szervezése és a kutatóhelyek helyzete

Az Osztályvezetőség arra törekedett, hogy a kutatóhelyeken az új mechanizmusnak megfelelően érvényesüljön a nagyobb önállóság, a vezetők felelősségének egyidejű növekedésével. Az intézmények — amelyek erre feladatkörük és egyéb adottságaik révén képesek — igyekeznek élni azzal a lehetőséggel, amelyet az új gazdálkodási rendszer nyújt a külső kutatási megrendelések terén. Az eddigi tapasztalatok e vonatkozásban jók, az új rendszer segíti a kutatási eredmények gyakorlati alkalmazását, illetve a gyakorlati igények érvényesülését a kutatási témák kialakításában.

A kutatóhelyek nagyobb önállósága érvényesült a tekintetben is, hogy a kutatási témákat önállóan választották meg. Az új 3 éves kutatási tervek elkészítéséhez azonban az Osztály több fontos területen tartalmi irányelveket adott az intézményeknek, különböző formában meghatározta néhány fontosabb kutatóhely kutatási tevékenységének főbb irányait.

Így például a *Matematikai Bizottság* és az Osztályvezetőség az utóbbi években többször is foglalkozott a Matematikai Kutató Intézetben folyó kutatások helyes arányainak a kialakításával. Ennek eredményeként az intézet új 3 éves terve öt fontos fő irányt jelölt meg, amely 21 témacsoportot tartalmaz.

A *KFKI Bizottság* az elmúlt év elején igen alaposan elemezte a *KFKI*-ban folytatott kutatásokat, és ezzel értékes segítséget nyújtott az új tudományos terv kialakításához.

A *Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság* 1968-ban többször is foglalkozott a hazai félvezető kutatások helyzetével, és tervtanulmányt dolgozott ki a kutatások jövőbeni feladataira vonatkozólag. Mindezek figyelembe vétettek a 3 éves kutatási tervek összeállításakor.

A *Magfizikai Albizottság* irányításával a különböző intézményekben dolgozó hazai magfizikusok évenként 2—2 hetes nyári iskolán értékelik az elvégzett kutatásokat, és megvitatják a feladatokat. Az így kialakított elképzelések, javaslatok tükröződnek a magfizikai kutatásokkal foglalkozó kutatóhelyek új 3 éves tudományos terveiben. Mindezeken túlmenően azonban fontos, hogy mielőbb megkezdődjék a hazai magfizikai kutatások perspektivikus tervének a kidolgozása és a jelentősebb beruházási igények kialakítása.

Ugyancsak nyári iskolák keretében került sor a hazai elméleti fizikai kutatások feladatainak a kijelölésére is.

Az Osztályvezetőség — a bizottságok állásfoglalásaira támaszkodva — a kutatási beszámolók és a 3 éves tervek értékelése során megvizsgálta, hogy a kutatóhelyek profilja helyesnek bizonyult-e, nincs-e szükség módosításra.

Tekintettel arra, hogy az országos számítástechnikai programmal kapcsolatban még nem voltak teljesen tisztázhatók a KFKI *Elektronikus Főosztályá*nak és az intézetben működő *Elektronikus Fejlesztő és Kísérleti Mintagyártó Üzem*nek a feladatai, ezt a problémakört az illetékesekkel együtt átvizsgálva, még ez év végéig új kutatási tervet kell az említett kutatóhelyeknek készíteniök, ha lehetséges, hosszabb időszakra vonatkozóan is. A tervben tisztázni kell, hogy a két részlegnek milyen intézeten belüli feladatai vannak, és mit tudnak az országos számítástechnikai programban segíteni.

Folyamatban van az *MTA Kristályfizikai Tanszéki Kutató Csoport* és az *MTA Kristálynövesztési Tanszéki Kutató Csoport* egyesítése, s ezért már most bizonyos intézkedések születtek az egyesítés utáni kutatóhely profiljának újbóli meghatározására vonatkozólag. Kívánatos, hogy ezt előzze meg a hazai kristályfizikai kutatások távlati tervének a kidolgozása.

Szükséges, hogy az új, korszerű elektronikus számológép beszerzésével egyidőben a *Számítástechnikai Központ* feladatkörének újbóli meghatározására is sor kerüljön egyebek között annak érdekében is, hogy a számítástechnika területén a kutatások eredményeinek és a kidolgozott módszereknek az alkalmazása a többi tudományban a lehető legeredményesebb legyen.

A kísérleti kutatásokkal foglalkozó munkahelyeken a berendezések, műszerek állományának az értéke erősen lecsökkent. A jelenlegi beruházási helyzetben még az egyszerű szinttartás sem biztosítható, holott a kutatómunka mostani színvonalon tartásához minimálisan a dinamikus szinttartás lenne szükséges, amely pedig még nem jelent fejlesztést. Ez az állapot rendkívül aggasztó, mert emiatt a hazai kísérleti kutatóbázis rohamosan kezd elavulni, korszerűtlenné válni. Az utóbbi években felnőtt egy intenzív tudományos munkára alkalmas kutatógárda, amely az említett okok miatt feladatát nem tudja megfelelően ellátni. Ez komoly politikai probléma is, nem beszélve arról, hogy ilyen körülmények között jelentős új tudományos eredmények nehezen születhetnek. Az Osztályvezetőség ezzel a nehéz kérdéssel behatóan foglalkozott, és hangsúlyozottan szorgalmazza az elmaradás 2—3 lépcsőben történő megszüntetését, mert ez kulcskérdés a kísérleti kutatásokhoz. Ezúton is felhívja az Osztályvezetőség az intézményeket arra, hogy az elmaradás felszámolására vonatkozó elgondolásaikat, javaslataikat dolgozzák ki. A megoldás előtt jól megalapozott, előremutató tudománypolitikai koncepciót kell kialakítanunk, meghatározva azokat a területeket, amelyeket esetleg más területek rovására is erősebben kell fejleszteni. Erősen összefügg ezekkel a kérdésekkel az is, hogy a jövőben új kutatóhelyeket csak nagyon körültekintő vizsgálódás után és csak igen indokolt esetben szabad létrehozni, mert új intézmények alapítása többek között azt is jelenti, hogy a meglevők anyagi ellátottságának a helyzete tovább romlik.

Nagyon aktuális probléma a kutatómunka finanszírozási módjának a helyes megválasztása is. Egyes területeken — kísérletképpen — talán célszerű lenne megkezdeni a feladat-finanszírozást, mert ez jobban lehetővé tenné, hogy az Akadémia valóban kiemelten kezeljen néhány fontos kutatást, és elősegíthetné a kutatói személyi állomány túlzott megmerevedésének a feloldását is.

Az Akadémia az Országos Tervhivatallal közösen — mint ismeretes — nagy teljesítményű elektronikus számológépet kíván beszerezni. A számológép beszerzésére és fogadására az előkészítő munkák megkezdődtek. A tudományos kutatásokhoz a legkorszerűbb, a legjobban bevált és a megbízhatósági követelményeket messzemenően kielégítő géptípus beszerzése érdekében a számológépet gyártó nagyobb cégeknek csaknem mindegyikével folytak előzetes tárgyalások Budapesten, és ezt követően a múlt év októberében különböző nyugat-európai országokban az MTA — közelebbről az Osztály — és az Országos Tervhivatal közös delegációja a helyszínen tájékozódott az európai cégeknél, az amerikai cégek európai képviseleteinél, továbbá a felhasználó intézményeknél. Gondot okoz a beszerzésben, hogy az eredetileg megvásárolni tervezett géptípusokra a cégek saját hatóságaiktól nem kapják meg a kiviteli engedélyt. Az Akadémia a maga részéről a számológép beszerzéséhez a szükséges összeget (egymillió dollár) a harmadik ötéves tervidőszakra jóváhagyott beruházási keretéből biztosítja. Az összeget eme tervidőszak alatt fel kell használni. Mindezen körülményeket figyelembe véve, az Elnökség a közelmúltban újból foglalkozott a számológép beszerzésének helyzetével, és elhatározta, hogy az embargó alá nem tartozó legnagyobb teljesítményű elektronikus számológépet kell megvásárolni.

Az osztálytitkárság kérte az intézményeket, hogy a 3 éves beszámolók és tervek készítése során jelezzék véleményüket a jelenlegi beszámoltatási és tervezési rendszerre vonatkozólag. Több mint 50 véleményező szakember ugyancsak foglalkozott ezzel a kérdéssel, és az opponensi véleményekben állást foglaltak e tekintetben; kifejtették e vonatkozásban véleményüket a szaktestületek és az Osztályvezetőség is. A vélemények többsége szerint a kutatások tervezésének és ellenőrzésének a jelenlegi rendszere több vonatkozásban formális, és nem felel meg a kívánt céloknak. Nem szükséges és nem érdemes minden kutatást azonos módon és azonos energiával tervezni és ellenőrizni; bizonyos elméleti vizsgálatok, illetőleg bizonyos határnál kisebb anyagi ráfordítással folyó kutatások tervezése és ellenőrzése mellőzhető lenne, a nagy anyagi ráfordítással folyó vizsgálatok viszont az eddigieknél alaposabban és tartalmasabban tervezendők és ellenőrizendők. Célszerű lenne tovább fejleszteni az opponensi rendszert oly módon is, hogy a felkért véleményezők díjazásban részesüljenek. Mindezek figyelembevételével indokoltnak látszik — a tudományos kutatások irányításával kapcsolatban jelenleg folyó vizsgálat befejezése után — a mostaninál jobb beszámoltatási és tervezési rendszert kidolgozni.

A különböző beszámolók és tervek megvitatása során a tudományos osztályok figyelemmel kísérik az akadémiai intézmények tevékenységét, és ezt különböző szempontokból — pl. kádermunka, nemzetközi kapcsolatok alakulása stb. — időszakonként megtárgyalják más akadémiai szervek is. Az ilyen tárgyalások kétségtelenül hasznosak, de pusztán ezek alapján még nem tekinthetők át az intézmények általános fejlődési tendenciái; a különböző oldalakról történő elkülönült vizsgálatok nem teszik lehetővé a teljes áttekintést és az átfogó értékelést. A tudományos fejlődés általános menete és meggyorsulása azt is szükségessé teszi, hogy nagyobb időszakokban összefüggően kerüljön megvizsgálásra az intézmények profilja, egész tudományos munkájuk iránya és jellege, szervezeti felépítése, olyan javaslatok kidolgozása érdekében, amelyeknek megvalósítása szinte ugrásszerűen előreviheti az egyes kutatóhelyek fejlődését.

Az akadémiai intézetek általános megvizsgálása legutóbb 10 éve történt meg. Az Akadémia vezetősége részéről nemrég felmerült az a kívánság, hogy a közeljövőben ismét ilyen jellegű vizsgálatokra kerüljön sor. Ezeknek az 1970-ig befejezendő vizsgálatoknak a fő célja, hogy kellő mélységű tájékoztatást nyújtsanak az Elnökségnek és az osztályvezetőségeknek az intézeti hálózat általános állásáról, az egyes intézmények helyzetéről, és módot adjanak esetleges intézkedésekre a munka megjavítását illetően.

Káderfejlesztés és káderutánpótlás

A tudományos kutatás eredményességének legfőbb tényezője a kutató. Az előrehaladás tehát nagyrészt azon múlik, hogy mennyire sikerül az egyes munkahelyekre a legalkalmasabb kutatókat kiválasztani és szakmai, ideológiai és politikai felkészültségüket fejleszteni.

Az Akadémia az intézetek tudományos színvonalának emelése érdekében egyre szigorúbb követelményeket támaszt a kutatói munkakörök betöltőivel szemben. Ezt szolgálja a személyi minősítés rendjének a közelmúltban történt szabályozása is, a határozott időtartamra szóló kinevezési rendszer pedig egyes vezetői munkakörökkel kapcsolatban a vezetés megmerevedését hivatott kiküszöbölni.

Intézkedések történtek a tekintetben is, hogy az akadémiai intézetek nagyobb szerepet vállaljanak a nem akadémiai munkahelyeken dolgozó szakemberek tudományos továbbképzésében. Lehetőség van arra, hogy a vállalatoknál, üzemeknél dolgozó diplomás szakemberek akadémiai intézetekben 1—3 éves időtartamú tudományos továbbképzésben részesüljenek, vagy középiskolai tanárok részt vegyenek egyes konkrét tudományos feladatok megoldásában.

A tudományos minősítéssel rendelkező kutatóink, oktatóink száma az elmúlt évben is tovább növekedett. 1968-ban 2 fő doktori, 18 fő pedig kandidátusi fokozatot szerzett. A helyzet tárgyilagos értékeléséhez azonban hozzátartozik annak a megállapítása is, hogy a tudományos minősítésekkel kapcsolatban hosszabb távú tudomány-irányítási politika jelenleg nemigen érvényesül. Az aspirantúrára való jelentkezés ötletszerű, általában véletlen tényezők által irányított folyamat, és túlzottan érvényesül a vizsga-centrikusság negatív jelensége is.

A kutató munkája többek között csak akkor lehet eredményes, ha megfelelő számú és képességű, jól képzett technikus, műszerész és laboráns segíti a kísérletek, vizsgálatok elvégzését. A kutatási segéderők szerepét és jelentőségét a tudományos munkában nem lehet eléggé hangsúlyozni. Ennek ellenére káderpolitikánkban róluk gyakran megfeledkezünk, és ennek sajnálatos következménye a kutatásban is érezhető. Nem csupán arról van szó, hogy egy-egy kutatóra kevés kutatási segéderő jut, hanem megoldatlan a meglevők rendszeres képzése is. Emiatt azután olyan munkát is gyakran magának a kutatónak kell elvégeznie, amely nem kíván magas szintű képzettséget, és így a kutató ideje elaprózódik.

A kutatók képzettségét az egyetemi oktatás alapozza meg. Az egyetemi képzés világszerte időszerű problémáival most nem kívánunk foglalkozni, bár az Akadémiának feladata az egyetemi oktatás figyelemmel kísérése is. Egy kérdést említünk meg csupán.

A *Fizikai Bizottság* a közelmúltban foglalkozott a fizikusképzés megindulása óta végzett fizikusok helyzetével. A vizsgálódás a fizikusképzés jellegére, a továbbképzés lehetőségeire, a fizikusoknak a népgazdaságban betöltött szerepére vonatkozott. A felmérés nem zárult le, de már az eddigiekből is megállapítható, hogy a fizikusképzés jelenlegi formája módosításra szorul; a képzést gyakorlatibbá kell tenni, jobban közelíteni kell az ipari problémákhoz. A hallgatókban idejekorán tudatosítani kell (már a felvételi vizsgán vagy az előre kiadott tájékoztatóban), hogy az egyetem elvégzése után az iparban igen fontos feladat vár rájuk. Ugyanakkor fontos meghallgatni az ipar vezető szakembereit is, hogy milyen igényt támasztanak a fizikusokkal szemben. Valószínűleg sokan ma még nem tudnak határozottan válaszolni e kérdésre, de éppen ezért fontos a kölcsönös tájékoztatás és eszmecsere.

Az Osztály javaslatára az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a közelmúltban ipari szakemberek részvételével e témakörben ankétot rendezett, és ezt továbbiak fogják követni.

Nemzetközi kapcsolataink

A tudomány forradalmi fejlődésének tevékeny részesei csak akkor lehetünk, ha szinte napra készen ismerjük a tudomány legújabb eredményeit. Ehhez más országok kutatóhelyeivel szorosabb, céltudatosabb együttműködésre van szükség, mint amilyen a közelmúltban is fennállt. Ma is természetesen változatlanul fontos és kívánatos, hogy nemzetközi kongresszusokon részt vegyünk, és szerepeljünk. Emellett azonban egyre nagyobb súlyt kell vetni arra, hogy a külföldi utak konkrét kutatási feladatok megoldását segítsék elő. Az Osztályvezetőség különös gonddal foglalkozott a kutatóhelyek beszámolóinak és terveinek tárgyalásakor azzal, hogy megvalósultak-e a külföldi együttműködésből adódó lehetőségek az intézmények tevékenységében, milyen mértékben teljesültek a nemzetközi egyezményekben vállalt kötelezettségek, a kutatóhelyi tervek tartalmazzák-e ezen kapcsolatok továbbfejlesztését.

A *Szovjetunió Tudományos Akadémiája* az elmúlt év elején javaslatokat tett, hogy a magyar és a szovjet matematikai intézmények között az eddigieknél nagyobb mértékű együttműködés jöjjön létre. Az együttműködés továbbfejlesztésének előkészítése érdekében az elmúlt év októberében egy magyar matematikus delegáció utazott a Szovjetunióba. A tárgyalások során előzetes megállapodás született a tekintetben, hogy különösen a következő területeken kívánatos szorgalmazni az együttműködést:

klasszikus analízis és konstruktív függvénytan,
funkcionálanalízis és alkalmazásai,
valószínűségszámítás, matematikai statisztika, információelmélet és ezek alkalmazásai,
numerikus matematika,
operációkutatás és matematikai közgazdaságtan.

A közös kutatások konkrét programjait a felsorolt témákban együttműködő szovjet és magyar kutatóintézmények dolgozzák ki. Ebből a célból ez évben témánként egy-egy szovjet, illetve magyar kutató kiküldésére kerül sor hazánkba, illetőleg a Szovjetunióba. Az együttműködés alapvető formái a kutatók kölcsönös tanulmányútjai és kétoldalú munkaértekezletek vagy szimpóziumok lesznek. Így például 1969 szeptemberében Magyarországon konstruktív függvénytannal, ugyanebben az évben pedig a Szovjetunióban valószínűségelmélettel és matematikai statisztikával foglalkozó közös tudományos tanácskozás megrendezésére kerül sor.

A tárgyalások során mindkét fél hangsúlyozta azt a kívánságát, hogy a későbbiekben célszerű lenne létrehozni egy közös matematikai intézetet a szocialista országok tudósainak részvételével.

A szovjet—magyar matematikai együttműködés egyik fontos feladata a közös folyóiratkiadás. A magyar matematikus delegáció tagjainak szovjet kollégáikkal folytatott tárgyalásai eredményeként alakult ki az a vélemény, hogy egy közös matematikai folyóirat kiadása igen hasznosan segítheti a két országban folyó kutatások összehangolását és egymás eredményeinek a megismerését. Különösen kívánatos közös folyóirat elindítása a matematikai statisztika és a valószínűségelmélet területén, mivel itt mindkét országban mind az alapkutatásokat, mind az alkalmazásokat illetően viszonylag sokan dolgoznak eredményesen, és ilyen folyóirat még egyik országban sem került kiadásra. A tervek szerint a folyóirat 1970-től évente egy kötetben, 4 számban jelennék meg, 30 ív terjedelemben.

Az Osztály intenzíven bekapcsolódott a nemzetközi tudományos szervezetek munkájába. Különösen vonatkozik ez többek között a *Nemzetközi Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unió*ban (IUPAP) végzett tevékenységünkre. Jelenleg az IUPAP 15 szakbizottsága közül 6-ban van magyar képviselő. E magyar képviselők révén és más módon is az Osztály kapcsolatot tart fenn az IUPAP különböző központi és nemzeti szerveivel. Az IUPAP erkölcsi és anyagi támogatásával mi is rendezünk nemzetközi tanácskozásokat; az elmúlt évben a magspektroszkópia tárgykörében Debrecenben került sor nagy sikerű konferencia rendezésére, ez évben pedig Budapesten lesz nemzetközi konferencia a kozmikus sugárzás köréből. A következő években három, az IUPAP égisze alatt tartandó tanácskozás szervezésére kerül sor hazánkban a heteroátmenetek, az akusztika és a fizikaoktatás tárgykörökben. Az Osztály az IUPAP-pal kapcsolatos tevékenységet egyezteti a szocialista országok megfelelő testületeivel. E szervek rendszeresen tájékoztatják egymást a tudományos rendezvényekről, a jövőbeni tervekről stb.

Az MTESZ-hez tartozó *Eötvös Loránd Fizikai Társulat*nak a közelmúltban megalakult *Európai Fizikai Társulat*hoz való csatlakozását több vonatkozásban az Osztály készítette elő. Az Európai Fizikai Társulat új nemzetközi szervezet, amely az elmúlt hónapban Firenzében rendezte meg alakuló közgyűlését; ezen az Osztály is képviseltette magát. A megalakult Társulat célkitűzése több vonatkozásban érinti a hazai szakfolyóiratokat, a nyári iskolákat, tanfolyamokat és a tudományos tanácskozásokat is, éppen ezért kívánatos, hogy az Osztály e tekintetben is szorosan együttműködjék az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal.

Jelenleg a nemzetközi kapcsolatok mennyiségi fokozására főleg pénzügyi okok miatt alig van lehetőség. Kívánatos volna többek között, hogy szocialista országok devizáját szolgálati útlevélre szabadon lehessen vásárolni, ez ugyanis lehetővé tenné a tudományos együttműködést fokozó találkozások gyors, bürokráciamentes lebonyolítását. A kapcsolatok javítását szolgálná magyar ösztöndíjak létesítése külföldi kutatók számára, továbbá a kölcsönös munkavállalási lehetőségek kiszélesítése.

Tudományos életünk egyre nagyobb nemzetközi elismerését jelenti, hogy mind több nemzetközi tudományos szervezet óhajt hazánkban nagylétszámú tudományos tanácskozást rendezni, főleg a nyári hónapokban, az egyetemi oktatómunka szünetében. Egy idegenforgalmi rendelkezés folytán azonban a nyári hónapokban ilyen tárgyú tanácskozások szervezése nemigen lehetséges, holott a résztvevők az oktatási elfoglaltság miatt csak az említett időszakban érnek rá. Ezért a szóban forgó idegenforgalmi rendelkezést mielőbb felül kellene vizsgálni.

Az Osztály testületeinek tevékenysége

Mint ismeretes, jelenlegi testületeink az 1967. évi Közgyűlés után szerveződtek újjá. Az újjászervezéskor arra törekedtünk, hogy e testületek munkájában a szakterület legkiválóbb képviselői mellett helyet kapjanak a fiatal tehetséges kutatók is, akik számára a bizottsági munka elősegíti a szakmai fejlődést, bővíti a látókört.

A közelmúltban új munkabizottságok is létesültek. Nemrég kezdte meg munkáját a *Számítástechnikai és Operációkutatási Albizottság*, továbbá a *Szoláris-Terrisztrikus Programok Albizottsága.*

Bizottsági rendszerünk nagy előnye, hogy összefogja az Osztály — több esetben más akadémiai osztály — és a *Művelődésügyi Minisztérium* felügyelete alá tartozó tanszékek kutatóit és tudósait, és egyes bizottságok, különösen a *Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság* munkájában több ipari szakember is részt vesz. Ugyancsak helyesnek bizonyult, hogy az államigazgatási szervek vezetői közül többeket felkértünk a KFKI-Bizottságban való közreműködésre, ami főként a gyakorlatukat közelről érintő kérdések megvitatását teszi eredményesebbé.

A testületek többsége tevékeny kezdeményező munkát végzett. Több tudománypolitikai, szakmai javaslatot tettek, hasznos tanácskozásokat szerveztek, és ezáltal hozzájárultak több vitás kérdés tisztázásához és egységes álláspont kialakításához. Segítséget nyújtottak továbbá az Osztályvezetőségnek az Akadémiai Kiadó gondozásában megjelent munkák értékelésében, az éves könyvkiadási terv kialakításában.

Igen nagy munkát végeztek a bizottságok a közelmúltban a 3 éves tudományos beszámolók és tervek értékelése és véleményezése során. A beszámolók és a tervek előzetes véleményezésére több mint 80 opponenst kértünk fel, ezek többsége a helyszínen is meglátogatta a kutatóhelyeket. Több testület az ülését az intézményekben tartotta, és ott megtekintette az egyes munkahelyeket is. A bizottságok a jelenlegi beszámoltatási és tervezési rendszer adta lehetőségeken belül nagy gonddal és felelősséggel végezték munkájukat; az üléseken élénk, túlnyomórészt szakmai viták alakultak ki, amelyek során hasznos javaslatok, tanácsok születtek. Különösen jó hatást keltett, hogy az üléseken a témacsoportok művelésében résztvevő kutatók közül is többen megjelentek.

A kutatási eredmények hasznosítása

A kutatási eredmények nyilvánvalóan csak akkor válhatnak termelőerővé, ha ismertté válnak, a gyakorlatban megvalósításra, használatba kerülnek. A használatba vétel gyorsasága hatványozottan növeli a kutatásra fordított kapacitás hatékonyságát.

Ehhez a kérdéskörhöz tartozik annak az elemzése, hogy az új gazdasági mechanizmus milyen hatást gyakorolt a kutatóhelyek témaválasztására. Intézményeink a lehetőségekhez képest törekedtek előtérbe helyezni azokat a feladatokat, amelyeknek a megoldása népgazdasági szempontból fontosnak, illetve perspektivikusan jelentősnek látszik. Így például a KFKI-ban folyó szilárdtestfizikai kutatások az ipar egyik igen lényeges és gyors fejlődésben levő területét támasztják alá tudományos alapokkal, és nyitják meg a későbbi fejlődés lehetőségeit. Megélénkült a Matematikai Kutató Intézet tevékenysége is a konkrét alkalmazási problémák megoldásával kapcsolatban; a munkatársak számos megbízásos feladat megoldásával foglalkoztak. A korábbi évekhez képest 1968-ban nagyobb számban fordultak az intézethez olyan jellegű kérdésekkel, amelyek ténylegesen lehetővé teszik a tudományos felkészültség kiaknázását, és amely feladatok kapcsán nem a matematika valamilyen mechanikus alkalmazásáról van csak szó, hanem ténylegesen elmélyült kutatómunkát igénylő problémákról. Ez vonatkozik a Számítástechnikai Központ ilyen jellegű tevékenységére is.

A kutatási eredmények ismertetését szolgálta az Osztály könyv- és folyóiratkiadási politikája is; ezenkívül a kutatási eredmények széles körű elterjesztése érdekében az Osztály tagjai és az intézetek munkatársai több cikket jelentettek meg a sajtóban, és számos előadást tartottak a televízióban és a rádióban egyaránt.

Könyv- és folyóiratkiadás

Az Osztályvezetőség az elmúlt év szeptemberében foglalkozott az Osztály gondozásában megjelenő folyóiratok tudományos és tudománypolitikai értékelésével. Megállapította, hogy a folyóiratok magas tudományos színvonalat képviselnek, megfelelően reprezentálják a hazánkban folyó matematikai és fizikai kutatásokat, és megfelelnek azoknak a tudománypolitikai követelményeknek is, amelyeket az Akadémia a folyóirataival szemben támaszt. Állást foglalt az Osztályvezetőség a tekintetben is, hogy idegen nyelvű folyóiratainknál a jelenleginél túlmenően újabb szakosítás nem szükséges. A matematikai folyóiratoknál a szakosításnak egy formáját jelenti az, hogy a *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* elsősorban alkalmazásokkal foglalkozó dolgozatok publikálására törekszik, továbbá — mint arról az előbbiekben tájékoztatást nyújtottunk — előreláthatóan sor kerül egy közös szovjet—magyar matematikai statisztikai és valószínűségelméleti tárgykörű folyóirat megindítására is.

A folyóiratok szerkesztőségei jogot kaptak arra, hogy a hagyományos, terjedelem szerinti díjazásról minőségi elbírálás alapján differenciált szerzői-díjazásra térhessenek át. Élve a lehetőségekkel, a Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica szerkesztősége a szerzői tiszteletdíjakkal a jövőben fakultatív módon kíván gazdálkodni.

Foglalkozott az Osztályvezetőség az 1966-ban megjelent művek értékelésével is. Ennek során PÉTER RÓZSA: „*Recursive Functions*", RÉNYI ALFRÉD: „*Dialógusok a matematikáról*" és a LÁNG LÁSZLÓ szerkesztésében megjelenő „*Ultraibolya színképatlasz*" című műveket emelte ki.

Az Osztályvezetőség a *Matematikai Bizottság* javaslatára elhatározta, hogy ez évtől kezdődően az *Akadémiai Kiadó* keretében „*Disquisitiones Mathematicae Hungaricae*" címmel matematikai monográfia-sorozat kiadását indítja meg. A Matematikai Bizottság határozza meg, hogy mely, már betervezett matematikai művek kerülhetnek be a monográfia-sorozatba. A sorozat, amely hazai szerzőktől származó, magyar vagy idegen nyelvű matematikai monográfiákat foglal majd magába, az Akadémia matematikai könyvsorozata lesz, és bizonyos értelemben képet fog adni a hazai matematikusok munkásságáról.

Az Akadémia igyekszik elősegíteni a *kritikai könyvismertetések* megjelentetését és azok színvonalának emelését. Ennek érdekében évenként elnökségi nívódíjban részesíthetők a magyar szerzők műveiről megjelent kiemelkedő könyvkritikák írói, az Osztályvezetőség pedig az Osztály prémiumkeretéből — előre meg nem határozott összegben és számban — ugyancsak évenként jutalomban részesíti a színvonalas kritikák szerzőit. Ez utóbbi jutalmat ama kiváló könyvkritikák szerzői kaphatják meg, akik az Akadémiai Kiadónál megjelent matematikai, fizikai vagy csillagászati művekről írták bírálatukat, függetlenül attól, hogy az Osztályhoz vagy a Társulathoz tartozó folyóiratokban jelent-e meg. Ez vonatkozik olyan esetekre is, amikor a szerző a bírálatot a matematikát, fizikát vagy a csillagászatot erősen felhasználó más tudományos művekről készíti, vagy amikor más tudományterületen dolgozó szerző jelentet meg az említett folyóiratokban kritikát, matematikai, fizikai és csillagászati művekről.

Áttekintve az elmúlt időszak eredményeit és problémáit az új gazdaságirányítási rendszer szempontjából, megállapíthatjuk, hogy az új rendszer az Osztályhoz tartozó intézmények tevékenységére is serkentően hatott, a régebbi merev gazdálkodási keretek feloldódtak, és hatékonyabb kutatómunka lehetőségei bontakoztak ki. Még rövid idő telt el ahhoz, hogy a gazdaságirányítás új hatása részleteiben is értékelhető lenne, a kezdeti eredmények azonban feljogosítanak arra, hogy bizakodva nézzünk a jövőbe.

MELLÉKLET

A III. Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának tevékenysége

A beszámoló az osztályhoz tartozó intézményekben és a szakterületileg idetartozó egyetemi tanszékeken az elmúlt három évben elért legfontosabb kutatási eredményeket és az osztály 1968. évi működéséről szóló rövid tájékoztatót tartalmazza.

Matematikai kutatások

Az 1966—68. években végzett kutatások kiemelkedőbb eredményeiről szóló beszámoló a matematika fejezetei szerinti tagozódásban készült. A beszámoló támaszkodik az egyes kutató intézmények hároméves munkabeszámolóira, az ezekkel kapcsolatos opponensi véleményekre, továbbá a Matematikai Bizottság értékelésére. Természetesen a beszámoló még a kiemelkedő eredmények tekintetében sem mondható teljesnek.

1. Vizsgálatok a matematika alapjai köréből

A Matematikai Kutatóintézetben az igazságfüggvényekre vonatkozó eredmények első összefoglalása a világirodalomban Ádám András „Truth functions and the problem of their realisation by two-terminalgraphs" c. könyve. Egységes módszert sikerült kidolgozni a közönséges logikára vonatkozó megőrzési tételek bizonyítására. Eredmények születtek a megszámlálható strukrúrákra vonatkozólag.

Az ELTE matematikai tanszékein az ALGOL 60 programozási nyelv továbbfejlesztésével kapcsolatban jelentős egy végtelen sok mondatszerkezetszabályt definiáló nyelv bevezetése. Az absztrakt halmazelméletben megoldást nyert B. Jonsson egy algebrai problémája. Megemlítendő a regresszív függvények elméletének általánosítása, a modális logikákkal kapcsolatos vizsgálatok, valamint a logikai rendszerek valószínűségi modellstruktúrái fogalmának megalkotása.

Az MTA Matematikai Logikai és Automataelméleti Tanszéki Kutatócsoportjánál jelentősek a regresszív függvények elméletében elért eredmények, valamint a majdnem diszjunkt halmazrendszerek fogalmának általánosítása terén végzett vizsgálatok.

2. Algebrai vizsgálatok

A Matematikai Kutatóintézetben főideálfélcsoportok struktúrájának véges test feletti hézagos polinomok vizsgálatában, továbbá a gyűrű-, kategória-, radikál- és ideálelméleti kérdésekkel kapcsolatban elért eredmények jelentősek.

Az ELTE matematikai tanszékein kiemelkedők a statisztikus csoportelméleti eredmények.

Az MTA Matematikai Logikai és Automataelméleti Tanszéki Kutatócsoportnál Gécseg Ferenc és Peák István „Az automaták algebrai elmélete" c. kéziratban elkészült monográfiája az automaták elméletében fellépő algebrai szempontból is érdekes kérdéskör első rendszeres tárgyalását tartalmazza. Jelentős a „csoport részcsoport-gráfja" fogalmának bevezetése.

A KLTE Matematikai Intézeténél kiemelkedők az Artin-féle gyűrűkkel kapcsolatos eredmények.

3. *Számelméleti vizsgálatok*

Az ELTE matematikai tanszékein megadtak egy a Riemann-féle prímszám-formulával analóg, a binär Golbach-problémával kapcsolatos „pontos" formulát. Új típusú sűrűségtételeket találtak a zeta- és L-függvényekre. Újszerű eredményeket nyertek az oszthatósággal kapcsolatban értelmezett sorozatokra. Nemzetközi érdeklődést váltott ki a körlap rácspontjaira vonatkozó eredmény.

4. *Vizsgálatok a klasszikus analízis köréből*

A Matematikai Kutatóintézetben Freud Géza „Orthogonale Polynome" c. monográfiája számos új eredményt tartalmaz az ortogonális polinomok elméletéből. Bizonyos „jól interpoláló" pontcsoportokról sikerült kimutatni, hogy azok egyben jó approximációs eljárást szolgáltatnak. Az ortogonális polinomok elmélete jól felhasználhatónak bizonyult konvergens approximáló eljárások felépítésénél.

Az interpolációs és (részben) a mechanikus quadratura eljárások konvergenciájának a Lebesgue-állandóval való kapcsolatát szinte minden részletében sikerült tisztázni. A racionális törtfüggvényekkel való approximációban sok függvényklasszis elemei egyenletes megközelítésére igen jó becslést sikerült adni, az eredmények egy részét általánosították végtelen intervallum és a komplex egységkör esetére. Az általános approximációval kapcsolatban a legjobb lineáris approximáció nagyságrendjével sikerült jellemezni bizonyos függvényklasszis elemeit.

A komplex függvénytanban a hézagos Borel- és Abel-féle szummálhatósággal, a konform leképezések kerületi problémáival, valamint abszolút konvergens Fourier-sorokkal kapcsolatban születtek szép eredmények. A multiplikatív számelméleti függvények vizsgálatára új analitikus módszert sikerült kidolgozni.

Az MTA Analízis Tanszéki Kutató Csoportjában a Haar-kifejtések együtthatóira tovább nem finomítható becslést sikerült adni. A Fourier-sorok különböző szummációinak (erős-, de la Vallée Poussin-, abszolút- stb.) konvergenciájára további strukturális feltételek adódtak. Az általános ortogonális sorok majdnem mindenütt való konvergenciájára újabb szükséges és elégséges feltételt adtak meg. Ortogonális függvényekből álló összeg részletösszegei felső burkolójának négyzetintegráljára minden eddiginél élesebb becslés adódott. Bizonyítást nyert, hogy bizonyos, az ortogonális sorok konvergenciaelméletében szerepet játszó Banach-féle sorozatterek reflexívek. Egy a valószínűségszámításban hasznos Takács-féle lemmát sikerült egy általánosabb mértékelméleti eredménnyé kiterjeszteni.

Az ELTE matematikai tanszékein a valós függvénytanban a Dabroux-függvényekkel kapcsolatban értek el kiemelkedő eredményeket. Eredményes vizsgálatok folytak egy függvény analitikus függvénnyel való transzformációjának a Fourier-sor konvergenciájára való hatásáról. Az ortogonális sorok elméletében a Haar- és Walsh-függvényekkel kapcsolatos eredmények különösen érdekesek. A racionális approximációban a szakaszonként analitikus függvényekre vonatkozó eredmény a kutatások egész sorát indította el.

A KLTE Matematikai Intézetében a valós függvények iterációelméletében sikerült véglegesen tisztázni egy bizonyos függvényosztályra vonatkozó iterációs eljárás érvényességi körét.

A BME Vegyészmérnöki Kar Matematikai Tanszékén az ortogonális függvénysorokra elért eredmények nemzetközi viszonylatban is kiemelkedőek.

A Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Matematikai Tanszékén a függvényegyenletek és alkalmazásaik témakörben elért eredmények jelentősek.

5. *Vizsgálatok a funkcionálanalízisből*

A Matematikai Kutatóintézetben az indefinit metrikájú terek elméletében elért eredmények számottevőek, e témakörből monográfia készül.

Az MTA Analízis Tanszéki Kutatócsoportjánál a véges Neumann-algebrákban konstruált centrum értékű harmonikus nyom fogalmát általánosították a Neumann-algebrák végességének egy más irányú definíciója mellett. Szőkefalvi-Nagy Béla és C. Foias román matematikus „Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert" c. monográfiájában különösen új az operátor karakterisztikus függvénye reguláris faktorizációi és az operátor invariáns alterei közti kapcsolat elemzése, továbbá a gyenge kontrakciókkal foglalkozó, valamint az operátorok hasonlóságát tárgyaló rész. Kiemelkedő az operátorkommutánsok dilatációjára vonatkozó eredmény is.

Az ELTE matematikai tanszékein említésre méltóak a Pontrjagin-féle maximumelvvel és a mátrixok által indukált $l_2 \to l_2$ operátorokkal kapcsolatos kutatások.

6. *Vizsgálatok a differenciál- és integrálegyenletek elméletéből*

A Matematikai Kutatóintézetben eredményes volt a Mikusinski-féle operátorszámítás alkalmazása integrálegyenletek megoldásában. A közönséges lineáris differenciálegyenlet megoldásainak aszimptotikus viselkedésére vonatkozó eredményeket sikerült kiterjeszteni bizonyos nem-lineáris egyenletekre. A közönséges másodrendű egyenlet megoldásai gyökeinek elosztásaira új becslések adódtak.

Az ELTE matematikai tanszékein a kutatások iránya a Laplace- és Poisson-egyenletekre vonatkozó Dirichlet-feladatoknak a disztribúciók körében történő vizsgálata volt, és ezekben értek el új eredményeket.

7. *Geometriai vizsgálatok*

A Matematikai Kutatóintézetben a differenciálgeometriai vizsgálatoknál kiemelkedő a Riemann-geometria zérus görbületű tereinek síksávok által burkolt felületekként való jellemzése. Eredményes volt a mozgó n-él módszerének a Finsler-geometriára való alkalmazása. Megállapítást nyert egy alkalmas indikatrixú pseudo-Minkowski-tér íveleme és a hozzá tartozó Hilbert-geometria metrikája közti összefüggés. A diszkrét geometriával kapcsolatban kiemelkedő a körök és gömbök elhelyezésére, körlefedésekre, a Dido-problémára, a sokszög oldalainak hatványösszegére és a gyakorlati alkalmazásokra vonatkozó eredmények.

Az MTA Analízis Tanszéki Kutatócsoportjában a differenciálgeometriai terek bizonyos speciális típusú ekvivalens variációproblémái alapfüggvényeinek összefüggéseit, valamint az általános metrikus vonalelemterek ekvivalencia-feltételeit sikerült meghatározni. Az általános geometriai vizsgálatokkal kapcsolatban egyes elemi geometriai egyenlőtlenségeket sikerült általánosítani többdimenziós esetre.

Az ELTE matematikai tanszékein kiemelendő a véges projektív sík bizonyos problémáinak tisztán geometriai módszerekkel történő megoldása, valamint a gömbi trigonometria folytonosságtól független felépítése.

A KLTE Matematikai Intézetében a nem-euklideszi geometria körmodelljei teljes osztályozást nyertek. A pályák geometriája és ennek különböző metrikus geometriákban való realizációja kiemelkedő eredmény.

8. *Topológiai vizsgálatok*

A Matematikai Kutatóintézetben a topológiai eredmények a színtopogén terek elméletének további kiépítésére, a színtopogén struktúrával felruházott csoportok, a bővítéselmélet továbbfejlesztésére vonatkoznak. A gráfelméletben az irányított gráfok kromatikus számával, a kritikus gráfokkal, az irányított véletlen gráfokkal kapcsolatos eredmények kiemelkedőek.

Az ELTE matematikai tanszékein eredményesen indultak a szintopogén (és általánosabb) struktúrával felruházott csoportok elméletére vonatkozó vizsgálatok. Általánosították a Wallman-féle, Freudenthal-féle stb. kompaktifikációk elméletét. Eredmények vannak a nagy számosságú diszkrét alterek létezésének, a számosságfüggvények Darboux-féle tulajdonságának, a tetszőleges számosságú diszkrét terek pontjai karaktereinek vizsgálatában is. A gráfelméletben extrém gráfok struktúrájának vizsgálata volt eredményes.

9. *Valószínűségszámítási, matematikai statisztikai és információelméleti vizsgálatok*

A Matematikai Kutatóintézetben új eredmények születtek a pontatlanul megfigyelt rekurrens folyamatok jellemzőinek egyetlen realizációból való meghatározására. További eredményeket sikerült elérni az egycsúcsos sűrűségfüggvények jellemzésével kapcsolatban. Sikeresen alkalmaztak valószínűségszámítási módszereket számelméleti, analízisbeli, kombinatorikai, gráfelméleti és geometriai problémák megoldásában. Az információelméletben számos új eredményre vezettek az eloszlások eltérésének információtípusú mértékszámaival kapcsolatos vizsgálatok. Az információelmélet módszerei felhasználásra kerültek a matematikai statisztikában és a statisztikus fizika elméletében is. A statisztikai becslések és a próbák vizsgálatával kapcsolatban is számos szép eredmény született. A sztochasztikus kapcsolatok vizsgálatában több konkrét gyakorlati probléma nyert megoldást. A biometriai eredmények közvetlen felhasználásra kerültek az orvosi kutatásokban és a gyógyszergyártásban.

Az ELTE matematikai tanszékein a nagy számok törvényének egy új alakját találták, amely alkalmazásra került a pontatlanul megfigyelt sztochasztikus folyamatok törvényszerűségeinek rekonstrukciójánál. Újabb eredmények születtek a véletlen tagszámú összegek határeloszlására vonatkozólag. A sztochasztikus folyamatok elméletében a homogén Poisson-folyamat egy új jellemzését adták meg. Sikeresen alkalmaztak valószínűségszámítási módszereket a mátrixelméletben, geometriában, számelméletben és csoportelméletben. Az operációkutatás módszereit eredményesen alkalmazták több közgazdasági és ipari probléma megoldására.

Az MTA Számítástechnikai Központjában kiemelkedőek a Gauss—Markov-folyamat paramétereinek becslésére vonatkozó eredmények. Elektronikus számológép segítségével, csak a karakterisztikus függvényt ismerve, táblázatok készültek az illető paraméterekre vonatkozó adott szintű konfidencia-intervallumokra. Értékesek azok az eredmények, amelyek empirikus sűrűségfüggvény konvergenciájára vonatkoznak, és amelyek a matematikai statisztikában fontos szerepet játszanak.

A KLTE Matematikai Intézetében kiemelkedőek az információelmélet alapjaira vonatkozó kutatási eredmények.

10. Numerikus és gépi matematikai vizsgálatok

A Matematikai Kutatóintézetben az elliptikus típusú parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatban becsléseket adtak perem- és sajátérték feladatok véges differencia módszerrel történő megoldására. Különböző eloszlásokból vett véletlenszám-generátort terveztek és azt ICT 1905 elektronikus számológépre programozták. Újabb eredmények születtek az egész értékű programozás elméletében és gyakorlatában (telepítési, termelésszervezési stb. feladatokra). Algoritmust dolgoztak ki a fix költséges lineáris programozási feladatra. A kidolgozott véletlen ütemezési szállításokra szolgáló készletmodell a népgazdaság több ágában került felhasználásra. Eredményesen foglalkoztak közgazdasági idősorok spektrálelemzésével is.

Az ELTE matematikai tanszékein a Lagrange- és trigonometrikus interpoláció hibájára sikerült nem javítható becslést találni. Eredményes munka folyt a differenciálegyenletek közelítő megoldása terén is.

Az MTA Számítástechnikai Központjában értékes eredmények vannak numerikus módszerek területén a stabilitás szempontjából jó algoritmusok kidolgozásában, elsősorban differenciálegyenletek területén.

Igen fontosak a gazdasági intézkedések hatásának elemzéséhez szükséges kidolgozott szimulációs programok. A számológépes nyelvészetnek a műszaki tudományos gyakorlatban való alkalmazása szempontjából vannak értékes eredményei. Igen eredményesek voltak a központ által más intézményekkel való kapcsolatai során megoldott gyakorlati vonatkozású feladatok.

A KFKI Matematikai Főosztályán különösen kiemelkedőek a számítástechnika területén elért eredmények. A numerikus analízisben és rendszer-programozásban új módszerek kidolgozására került sor.

11. Matematikai didaktika és a matematika története

A Matematikai Kutatóintézetben átdolgozták a speciális matematika tantervű osztályok számára készült tantervet. Sikeresen működtek közre az általános iskolai alsó tagozatos komplex tanítási módszer továbbfejlesztésében. A görög matematika történetével kapcsolatban monográfia készül. Elemezték Leibniz, Descartes és Fermat munkásságát.

Az ELTE matematikai tanszékein kiemelkedő eredmény „Az analízis elemeinek tanítása a középiskolában" című tanári segédkönyv, mely iránt külföldön is érdeklődés mutatkozott. Ki kell emelni azt is, hogy az új középiskolai matematika tankönyv és tanári segédkönyv sorozat megírása országos fontosságú munka volt. Jelentős az a munka is, amelyet a Módszertani Csoport a tanárok reformtantervtanítására való felkészítésében végzett.

Fizikai kutatások

1. Szilárdtestfizikai kutatások

A KFKI Szilárdtestfizikai Laboratóriumának tevékenységét a mágneses fázisátalakulások tanulmányozása jellemezte, és ezen a területen született a legtöbb nemzetközi színvonalú tudományos megállapítás és felismerés. 1966—67-ben a mágneses jelenségeket sokféle modellanyagon vizsgálták a laboratóriumban alapösszefüggések feltárása és új anyagféleségek előállítása céljából. A laboratórium szerződést kötött a Csepel Vas- és Fémművel lágy mágneses anyagok kutatására, és ennek keretében vizsgálta a mágneses hőkezelések hatását a mágneses paraméterekre. Ez a tevékenység igen hasznosnak bizonyult, mert lehetővé tette az adott területen a tudomány világszínvonalú fejlesztését, és egyben hozzájárult az alapkutatás, alkalmazott kutatás, fejlesztés és termelés közötti kapcsolatok megerősödéséhez.

A laboratóriumban sikerült világviszonylatban is először a virtuális magnon nívók létezését közvetlenül igazolni. Az igazolás vas és nikkel alapú híg ötvözetekben inkoherens neutronszórás kísérletekkel történt. — Neutrondiffrakciós és klasszikus módszerekkel sikerült kimutatni, hogy az elsőrendű mágneses fázisátalakulásoknál döntő szerepe van a kicserélődési kölcsönhatás távolság-függésének. — Ugyancsak kiemelkedő eredmény az NMR spektroszkópia felhasználása a fémekben levő szennyezések kölcsönhatásainak tanulmányozására. Mérési módszert dolgoztak ki a töltéseffektus és lokalizált momentum miatt fellépő spinsűrűség perturbáció szétválasztására. Így sikerült meghatározni a réz alapú híg ötvözetekben a szennyezés körüli többlet vezetési elektron sűrűséget. — Az elméleti munkák közül elsősorban a paramágneses szennyezéseket tartalmazó alagút diódák karakterisztikájának magyarázatára kidolgozott, nemzetközileg is nagy érdeklődést keltő elméletet kell kiemelni. Értékesek az antiferromágnesség elméletében és az átmeneti fémek sávszerkezetének számításában elért eredmények is. — Ki kell emelni a hidegtechnika területén elért eredményeket, amelyek most már biztosítják az egyes fizikai mérések elvégzését néhány °K hőmérsékleten, és ezzel hazánkban több évtizedes lemaradást sikerült végre megszüntetni. Kezdeményezések születtek arra vonatkozólag, hogy a híg ötvözetek vizsgálata során a laboratórium mint modellanyagot az alumíniumot vegye figyelembe. A hazai nagyütemű alumínium félkész- és készárugyártás fejlődésével az alumínium megfelelő színvonalú felhasználási területének kialakításához a fém fizikai tulajdonságairól, az egyes szennyező atomok szerepéről széles körű alapinformációk megszerzése szükséges. A laboratórium ezen a területen igen értékes segítséget nyújthat a hazai alumíniumiparnak.

A szegedi József Attila Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében működő *MTA Lumineszcencia és Félvezető Tanszéki Kutatócsoportban* folyó lumineszcenciakutatások terén az értékes elméleti felismerések mellett ipari szempontból hasznos eredmény a nagy fényutat biztosító cella, mely igen híg oldatok lumineszcencia- és abszorpciós-vizsgálatait teszi lehetővé. — A kristályfoszforok kutatása során két területen említésre méltó eredményt sikerült elérni, egyrészt fényporok fluoreszcenciájával kapcsolatban, másrészt az üvegporok reflexiós színképeinek vizsgálata területén. — Hazánkban egyedül ez a csoport foglalkozik a Ge félvezető-elektrolit rendszer vizsgálatával. A félvezetők felületi tulajdonságainak kutatása mellett jelentős eredmények születtek a félvezetők optikája terén is, így pl. sikerült meghatározni a V_2O_5 kristályok optikai állandóit, és ennek kapcsán kidolgoztak egy új mérési eljárást, amely alkalmas vékony egykristályok abszorpciós tényezőjének, valamint törésmutatójának a meghatározására, csupán a transzmissziós színkép felvételével. A GaP kristályok optikai vizsgálatai során kimutatták a vezetési sáv minimumánál magasabban fekvő lokális nívók létezését.

A budapesti Orvostudományi Egyetem Biofizikai Intézetében működő *MTA Kristályfizikai Tanszéki Kutatócsoportban* többek között az OH-mentesen növesztett, majd kálciummal szennyezett alkalihalogenid egykristályokban X-sugárzással keltett, defektelektronokat tartalmazó kristályhibákat (V-típusú centrumok) tanulmányozták. A különböző kísérleti körülmények között felvett abszorpciós és ESR spektrumok, valamint az ion- és fotonvezetés, továbbá a színeződés dózisfüggésének, a glow görbéknek stb. vizsgálata révén tisztázták a KCl(Ca) és NaCl(Ca) rendszerekben magasabb hőmérsékleteken (200—300 °K) stabilis centrumfajták alapvető tulajdonságait. Tisztázták továbbá egyes centrumok felépítését is, mások szerkezetére vonatkozólag pedig modelleket javasoltak. Vizsgálataikhoz, általuk kidolgozott módszerekkel, extrém tisztaságú alapanyagokat állítottak elő.

A budapesti Műszaki Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében működő *MTA Kristálynövesztési Tanszéki Kutatócsoportban* a kristályok növekedése terén különösen két területen értek el eredményeket. Egyrészt az alkalihalogenid kristályoknak oldatból való növekedése során a növekedési sebesség ingadozásának méréséből újabb, az eddiginél pontosabb adatokat sikerült kapni a Gyulai-féle határréteg koncentrációeloszlására vonatkozólag. Másrészt a NaCl tűkristályokkal végzett kísérletek során — amelyek a szennyezés hatásának a tisztázásra vonatkoztak — azt találták, hogy azok az ionok, amelyek a makroszkópos kristályok növekedését gyorsítják, gátolják a tűkristályok kialakulását. Ez utóbbi eredmény azért is fontos, mert lehetővé teszi a maratás mechanizmusának az értelmezését. — Eredményes munka folyt a kristályhibák kutatása terén is. Ebben a vonatkozásban a tűkristályok elektromos vezetőképesség-mérését, a szennyezések beépülését a tűkristályokba, valamint a Gyulai-féle nyomáseffektussal kapcsolatos újabb eredményeket kell kiemelni. Jelentős megállapítás, hogy a tűkristályok csavarása után az elektromos vezetőképesség aktivációs energiája megváltozik.

Az ELTE Kísérleti Fizikai Tanszékén az egykristályok röntgendiffrakciós szerkezetvizsgálata, továbbá a fázisátalakulások és a hőkezelés után egyensúlyra vezető folyamatok vizsgálata — fémekben és ötvözetekben — terén értek el eredményeket. Kiemelkedőek azok a felismerések, amelyek a rendezett rácsú szilárd oldatok rendeződési folyamatának megismerésére irányuló kutatásokban, valamint az f. c. c. fémek képlékenységével kapcsolatban születtek.

Az ELTE Atomfizikai Tanszékén sikeresen alkalmazták a rezonanciamódszereket szilárdtestek vizsgálatára a Mössbauer-effektus segítségével; így pl. igen értékes eredményeket értek el a viszont-koordináció jelenségének, a szubsztitucíónak és a ligandumcserének a központi vasmagra gyakorolt hatásának tanulmányozásában.

2. *Magfizikai kutatások*

Az atommagfizika ma az egyik legköltségesebb tudományág; fő irányainak műveléséhez drága gyorsítók és mérőberendezések szükségesek. A másik fontos sajátossága a kísérleti kutatás jelenlegi helyzetének, hogy az iparilag fejlett országok fizikusai mindezeket a felszereléseket készen kapják. A nagy biztonsággal működő, erősen automatizált műszerek rövid idő alatt összegyűjtik a mérési anyagot, így ezek a kutatók idejük túlnyomó részét a mérések tervezésére és a mérési eredmények kiértékelésére használhatják. — Világos, hogy ebben az irányban a kisebb gazdasági erővel rendelkező országok — ide értve hazánkat is — nem versenyképesek. A kisebb gyorsítóberendezések alacsony energiája már önmagában is határt szab, kijelöli azt a területet, amelyen egyáltalán lehetséges dolgozni. A megfelelő ipari háttér hiánya pedig a magyar kutatókat is arra kényszeríti, hogy idejük jelentős részét technikai jellegű problémák megoldására fordítsák. Így a kis országok magfizikusai általában csak olyan mérések elvégzésére vállalkozhatnak, amelyek sok közvetlen kutatói munkaidőt igényelnek. Egy másik kutatási irány, ahol viszonylag kevés anyagi befektetéssel is nagyobb remény lehet eredmények elérésére, a magfizikai módszerek alkalmazása a határ- és egyéb tudományok problémáinak a megoldására. Itt azonban alapfeltétele az eredményességnek, hogy a lehetséges témák igen nagy számából az kerüljön kiválasztásra, amelyben megfelelő — a rokon tudományágat képviselő — együttműködő partnereket lehet találni.

Az Atommagkutató Intézet a hazai lehetőségeket reálisan értékelve választotta meg működési területeit. Itt elsősorban a béta- és gamma-spektroszkópiai csoport tevékenységére utalunk. A jól választott téma lehetővé tette, hogy a szerényebb műszerezettség ellenére is komoly nemzetközi visszhangot kiváltó eredményeket érjenek el. E csoport munkájának elismerését mutatja, hogy Magyarországon (Debrecenben) került megrendezésre 1968-ban a „Conference on the Electron Capture and Higher Order Process" tárgykörű nemzetközi konferencia. — A gyorsneutronokkal létrehozott magreakciókat vizsgáló csoport szintén eredményesen dolgozott. — A töltött részecskékkel létrehozott magreakciók vizsgálata terén lehet találkozni leginkább a problémákkal. Ez érthető, hiszen ezen a területen a csoport rendelkezésére álló kaszkád generátor semmiképpen sem tekinthető modern kutatási eszköznek, így a csoport munkájára az adottságoknak megfelelő téma és módszer keresése volt jellemző. Jelentős haladás volt e területen a szilárdtest nyomdetektorok technikájának a kifejlesztése és mérésekben való alkalmazása. Úgy tűnik, hogy ez a lényegében háttérmentes detektálást biztosító technika lehetővé teszi, hogy nemzetközi érdeklődésre számottartó eredményeket érjenek el. — Az 5 MeV-os Van de Graaf generátor építésével kapcsolatban helyes volt, hogy a külföldi gyorsítók tanulmányozása mellett önálló kutatásokat is folytattak az intézetben a gyorsító optimális méretezésére vonatkozóan. Igen örvendetes, hogy szoros kapcsolat alakult ki az ATOMKI és a KFKI gyorsítóépítői között. — A nukleáris elektronika fejlesztése terén elért eredmények közül a félvezető detektorokhoz csatlakozó elektronika kifejlesztése a legjelentősebb. — Külön kiemelendő, hogy sikeresen folytatódtak a magfizikai és radioaktív módszerek alkalmazásai más tudományágakban. Jelentős eredmény annak a felismerése, hogy a nyomelemek a tőzeg humuszsavakon megkötődnek.

A KFKI Magfizikai Főosztályán a kutatás fő irányai a magreakció és a magspektroszkópiai vizsgálatok voltak, ideszámítva a gyorsneutron-spektroszkópiát és a maghasadási jelenségek tanulmányozását is. — Az elért eredmények közül jelentős az izobár analóg rezonanciák vizsgálata több atommagon. Meghatározták a Coulomb-gerjesztéssel létrehozott magállapotok giromágneses faktorait a vas-fém ötvözetek belső mágneses terének a felhasználásával. — A Mössbauer-effektus alkalmazásával szilárdtestfizikai eredményeket értek el; megállapították az effektus hőmérsékletfüggését ^{119}Sn és ^{161}Dy ionok lefagyasztott vizes oldatában, és cáfolták a Goldanszki—Karjagin-effektus jelenlétét a $FeCo_3$-ban. — Kimutatták, hogy neutronok uránon való rugalmas szórásának differenciális hatáskeresztmetszetében semmiféle kisszögű anomália nem jelentkezik. — Mind értékben, mind pedig relatív mennyiségben ugyancsak kiemelkednek az elméleti magfizikai vizsgálatok, amelyek részben a magreakció mechanizmusára, részben a magstruktúrára vonatkoznak. — Egy sor értékes insztrumentális eredmény is született, így pl. az ionforrásokra és az elektrosztatikus lencsékre vonatkozólag. A kutatások koncentráltan, jól szervezetten folytak, és nagy gondot fordítottak arra, hogy a fejlesztési munkák — pl. a gyorsítóknál — lehetőleg párhuzamosan történjenek a fizikai kutatásokkal. Az elért eredmények és módszerek alkalmazásra kerültek más tudományágakban és a gyakorlatban is. Igen örvendetes az aktív elméleti munka, amely ugyan a kísérletekhez kapcsolódott, de mégis önállóan folyt.

Az Izotóp Intézetben egyrészt az igen fontos precíziós aktivitás mérési feladatokat és izotóptisztasági vizsgálatokat oldották meg sokoldalúan és eredményesen, másrészt az intézet birtokában levő több kilocuries gamma sugárforrásokkal magfizikai szempontból is sok érdekes mérést végeztek. Kiemelendő eredmény az extrém nagy — kilocuries feletti — gamma sugárforrások aktivitásának mérése a magfotoeffektus alapján kidolgozott módszerrel.

A debreceni *Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében* végzett kutatások közül kiemelkedőek az (n, tölött részecske) reakciókkal végzett vizsgálatsorozat és az (n, 2n) folyamatok fluktuációinak tömegszám függésére vonatkozó eredmények.

3. Héjfizikai kutatások

A KFKI-ban a Fizikai Optikai Laboratóriumban folyó kutatások fő célkitűzése a fizikai alapkérdések vizsgálata volt. Eredményes munka folyt a nagy intenzitású fény és anyag, továbbá az atomi sugárzási folyamatok és atomok kölcsönhatásainak, valamint a laserek gyakorlati alkalmazása terén. Az alapkutatások közül a legkiemelkedőbbek a fémek felületén fellépő nem-lineáris elektronemisszióval kapcsolatos vizsgálatok eredményei. A laboratórium munkatársai a kutatási témák vizsgálatának kísérleti feltételeit viszonylag rövid idő alatt magas nívón oldották meg, viszont az elméleti munka tekintetében még bizonyos kívánnivalók vannak, így pl. célszerű lenne a molekulák, ill. atomok közötti energiaátadás értelmezése céljából nemzetközi kooperációt kialakítani a minszki kutatóintézettel. — Gyakorlati szempontból igen jelentős a hélium-neon laserek hazai gyártásának előkészítése. Kívánatos a terveken bizonyos mértékben túlmenően is — a laboratórium tevékenységét a laserek fejlesztése és esetleg azok előállítása tekintetében fokozni. Erre azért van szükség, mert pillanatnyilag ugyan a laboratórium e téren folytatott eredményes munkája folytán előnyös helyzetben van, ugyanakkor azonban az országban lemaradás mutatkozik; a lasereket több kutatóhely szeretné használni, és az ipari felhasználás is perspektivikusnak mutatkozik.

Az Elméleti Fizikai Kutatócsoportban világviszonylatban is magas színvonalú, eredményes, sokoldalú kutatómunka folyt, és ennek során számos kiemelkedő eredmény született. Tovább tökéletesítették a korábban bevezetett nagy jelentőségű pszeudopotenciál-módszert, így az eddigieknél pontosabb kifejezéseket sikerült bevezetni az egyrészecske hullámfüggvények ortogonalitását helyettesítő taszító potenciálokra és a kicserélődési potenciálra is. Sor került a pszeudopotenciálok több alkalmazására, így pl. tökéletesítették a főkvantumszám szerint csoportosított atommodellt. Általánosították a statisztikus atommodellt paramágneses atomok leírására, amely lehetővé teszi a mágneses momentum sűrűségeloszlásának meghatározását is. Ezek az eredmények igen nagy jelentőségűek a szilárdtestfizikai alkalmazások szempontjából is. — Kidolgozták a „soft-core"-os kétnukleon kölcsönhatáson alapuló statisztikus modellt, amelyet a neutroncsillagok szerkezetének vizsgálatára alkalmaztak. Szeparálható kétnukleon kölcsönhatás segítségével meghatározták a teljes kötési energiát, a szimmetria- és a párenergiát, mint a nukleonsűrűségek függvényét. — Igen lényeges új energiaösszefüggések feltárására került sor a semleges atomok elméletében, melyeknek segítségével egy új atommodellt állítottak fel. — Tovább fejlesztették az erősen ortogonális többrészecskefüggvények módszerét. Az új módszerben lényegesen javul a perturbációszámítás második közelítése a közönséges perturbációszámításhoz képest. Ennek segítségével számításokat végeztek a transzbutadien molekula elektronjai korrelációs energiájára, melynek eredménye jobb a más módszerekkel számítottaknál. — Kidolgozták az „unrestricted self-consistent-fied" módszert a könnyű magokra.

A szegedi József Attila Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Tanszékén működő *MTA Lumineszcencia és Félvezető Tanszéki Kutatócsoportban* folyó molekuláris lumineszcenciavizsgálatok során a kutatók mind kísérleti, mind pedig elméleti téren lényeges tudományos felismerésekre jutottak. Kiemelkedőek a lumineszcenciahatásfok terén elért eredmények, amelyek nagy nemzetközi érdeklődést váltottak ki. A csoport kidolgozott egy, az igen gyengén abszorbeáló közegek abszorpciós, lumineszcencia-emissziós és fluorometriás vizsgálatára szolgáló eljárást, és megkonstruálta az e célra alkalmas berendezést, amelynek fontos gyakorlati alkalmazási lehetősége van.

Az ELTE Elméleti Fizikai Tanszékén működő *MTA Elméleti Fizikai Tanszéki Kutatócsoportban* igen értékes eredmények születtek a fizikai soktestprobléma vizsgálata során. A folytonos fázisátmenetek és a szuperfolyékonyság elmélete körében a sokrészecske-rendszerek kritikus hőmérséklet körüli viselkedését tanulmányozták és ennek keretében a dinamikus skála-törvények felállítására került sor, amelyek új irányt jelentettek a fázisátalakulások napjainkban igen széles körben vizsgált témájában. A kidolgozott elméletet a kísérletek igazolták és a felállított skála-törvényeket azóta különböző fizikai rendszerekre általánosították. — Sikeresen alkalmazták a magfizikai soktestprobléma elméleti módszereit maganyagra és véges magokra. Tanulmányozták az atommagok szintsűrűségének meghatározását félklasszikus és kvantummechanikai módszerekkel és ennek során rámutattak az atommagok kötési energiája és a szilárdtestek kohéziós energiája közötti párhuzamra. Alkalmazták a Bardeen—Cooper—Schrieffer-elméletet az atommagok szintsűrűségének a meghatározására, és a véges részecskeszámnak megfelelő korrekciókat vezettek be. Ennek keretében meghatározták az atommagok felületi; szimmetria- és átrendezési energiáját. Az eredményeket a neutroncsillagok energiájának és relatív protonszámának meghatározására is alkalmazták. A plazmafizika és magnetohidrodinamika terén végzett kutatások eredményei közül kiemelkedő az örvénytételek kiterjesztése a relativisztikus folyadékokra vonatkozóan.

A debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében széles körű vizsgálatokat végeztek az elméleti atom- és molekulafizika terén. Az elért eredmények közül kiemelkedőek az atomok legmélyebben fekvő s, p, d, f állapotaiban az egyelektron energiáknak és hullámfüggvényeknek a meghatározása az univerzális potenciál segítségével a periódusos rendszer valamennyi elemére, valamint a Hollmann—Feynmann-tétel alkalmazásában elért eredmények.

A szegedi József Attila Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében végzett kutatások közül jelentősebbek a komplex ionoknál fontos d^n elektron konfigurációk felhasadásának vizsgálata, a sűrűségoperátor klaszter kifejtése; a természetes spinpályákkal leírt állapotban az elektronkorreláció értelmezése és a hidrogénmolekula 1_s, 4_s, ${}^1\sum{}^+{}_g$ állapotaira vonatkozó számítások.

A miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Fizikai Tanszékén a plazmafizika témakörben szép eredmények születtek, de kívánatos lenne, hogy e kutatások a jövőben ne csak elméleti téren folyjanak.

4. *Nagyenergiájú és az elemi részek fizikájával kapcsolatos kutatások*

A KFKI-ban folyó nagyenergiájú fizikai kutatások az intézet legaktuálisabb alapkutatásai közé tartoznak. A kozmikus sugárzási vizsgálatokkal nőttek ki, és átterjedtek külföldön készített fotoemulziós és buborékkamrás felvételek feldolgozására. Így lehetővé vált, hogy magyar kutatók — ha szerényebb eszközökkel is — olyan időszerű kutatásokat folytathassanak, amelyeket általában csak egy-két nagy kutatócentrum végezhet. — Világviszonylatban is kiemelkedőek a Regge-pólusok klasszifikációjával és konspirációs elméletével kapcsolatos eredmények. A Regge-szekvenciók felfedezése jelentős részben a KFKI-ban dolgozó kutatók eredménye. A nagyenergiájú fizikában ez a felismerés tekinthető világviszonylatban az utóbbi 2—3 esztendő legjelentősebb, legtöbbet ígérő sikerének. A nagyenergiájú fizikában nagyon erős a verseny, és valószínű, hogy az erős iram az erők további koncentrálását kívánja majd meg. Ebben az esetben az automatizált buborékkamrás méréseket, az analitikus S-mátrixra vonatkozó elméleti vizsgálatokat és a kozmikus sugárzás űrkutatási vonatkozású kutatásait kell előtérbe helyezni. Kiemelkedőek továbbá az áramalgebrai módszerek alkalmazásainak területén elért eredmények, a vektorbozonos kölcsönhatásokkal kapcsolatos vizsgálatok, valamint a kozmikus sugárzás modulációs effektusainak kísérleti technikájára vonatkozó kutatások.

Az ELTE Elméleti Fizikai Tanszékein működő *MTA Elméleti Fizikai Tanszéki Kutatócsoportban* az elemi részek fizikai sajátosságainak a vizsgálata térelméleti és csoportelméleti módszerekkel igen magas színvonalon folyt. Kiemelkedőek a Föld szerkezetének neutrinók által történő meghatározásával kapcsolatos vizsgálatok, a csoportelmélet részecskefizikai alkalmazásai területén végzett kutatások, az áramalgebrai módszerekkel nyert összefüggések, a szuperfolyékonyság, az atommagszerkezet elméletében, a nukleáris asztrofizikában elért eredmények, valamint a Lee-modellel s a spontán szimmetriasértéssel kapcsolatos vizsgálatok.

Az Elméleti Fizikai Kutatócsoportban értékes munka folyt az elemi részek nem-lineáris elmélete terén; ennek keretében a Bethe—Salpeter-típusú egyenleteket vizsgálták. A vizsgálatok fő feladata alkalmas közelítő módszerek keresése. A vizsgálatok során variációs módszereket dolgoztak ki az egyenletek numerikus megoldása céljából kötött állapotok esetén.

A szegedi József Attila Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében az izotranszformációk geometriai értelmezése céljából vizsgálták az izotér geometriai szerkezetét, és megmutatták, hogy ez a geometriai struktúra a Yukawa-féle bilokális térelméletnek felel meg, és a relativisztikus fázistér geometriai hátteréül szolgálhat. Általánosították továbbá Noether-tételét.

5. *Spektroszkópiai kutatások*

A budapesti Műszaki Egyetem Atomfizikai Tanszékén 1949 óta folyik a kétatomos molekulák szerkezeti vizsgálata színképük segítségével. Ennek eredményeként a kétatomos molekulák színképének rotációs szerkezetéről elkészült egy angol nyelvű monográfia, amelyben számos fontos, merőben új elméleti eredmény is publikálásra került.

Az egri Tanárképző Főiskola Fizikai Tanszékén a kétatomos molekulák emissziós és abszorpciós színképének vizsgálatát folytatták; ennek keretében sikerült egy olyan emissziós fényforrást építeni, amellyel az alkálihidridek ultraibolya sávrendszerei lefényképezhetők.

6. *Az osztályhoz tartozó fizikai intézményekben folytatott más kutatások*

A KFKI-ban a *magkémiai* kutatások terén az izotópkémiai vizsgálatok keretében elsősorban a radiokémiával foglalkoztak: így tanulmányozták többek között a 125-I izotóp célanyaga, XeF_2 hidrolízisének sebességét a rendszer p_H-jának függvényében. Módszer kidolgozására került sor az extrém nagy tisztaságú cérium csoportú ritkaföldfém-készítmények előállítására vonatkozólag. — Külön kiemelendők a *nukleáris analitikai kémiai kutatások és szolgáltatások* terén elért eredmények. A Magkémiai Főosztály, mint az országban folyó aktivációs analitikai bázisintézmény, széleskörűen kifejlesztette ezt a területet. Neutrongenerátor alkalmazásával eljárást dolgoztak ki az acélok oxigéntartalmának meghatározására, amely 1967-ben a Dunai Vasműben bevezetésre is került. Gyártásközi ellenőrzésre és adagvezérlésre alkalmazzák e világviszonylatban is úttörőnek tekinthető eljárást. Igen korszerű, sorozatelemzésre is alkalmas módszereket dolgoztak ki a híradástechnikai ipar számára. Ezek közül kiemelendő a félvezető szilícium nyomszennyezőinek meghatározására szolgáló roncsolásmentes eljárás, amely alkalmas arra, hogy évi több száz elemzés elvégezhető legyen az Egyesült Izzólámpa és Villamossági Rt. és más vállalatok igényeinek megfelelően. — Fokozódtak az utóbbi években a biológiai minták aktivációs analitikai vizsgálatai. Az orvosokkal folytatott együttműködés is megfelelő visszhangra talált. Különösen eredményesnek tekinthetők a szilikózis megbetegedések diagnosztizálását jelentősen megkönnyítő módszereik, amelyek szilícium, alumínium és foszfor egyidejű meghatározását teszik lehetővé a nyirokmirigyben. — A Főosztály munkájának eredményességét nagymértékben fokozza az a követendő helyes arány, ami az elméleti jellegű — alapkutatás — és a közvetlen népgazdasági hasznosítást eredményező kutatás között fennáll; a szolíd tudományos eredmények és a közvetlen szolgáltatások harmonikusan egészítik ki egymást.

A reaktorfizikai és technikai kutatások terén a KFKI munkája hozzáilleszkedett a hazai igényekhez, programja a szovjet és más szocialista országok hasonló jellegű intézeteinek programjával összehangoltan került végrehajtásra, és tudományosan és műszakilag megalapozott volt. Külön ki kell emelni a reaktor rekonstrukciója kapcsán végzett színvonalas tudományos és műszaki tervező munkát. Ehhez kapcsolódik a reaktor megbízható üzemvitele, valamint az ezek során gyűjtött üzemeltetési tapasztalatok sora is. A Reaktorfizikai Főosztály — megfelelő együttműködést alakítva ki a villamosenergia-iparral — az elmúlt időszakban megteremtette annak a tudományos bázisnak az alapját, amely lehetővé teszi az atomerőmű építésével kapcsolatosan felmerülő és hazai kutatást igénylő munkák elvégzését. Ezt a tudományos bázist elsősorban az az elméleti és kísérleti tevékenység képezi, amely a kutatóreaktor megépítése utáni időszakban a KFKI-ban tervezett és épített zéróreaktorok köré csoportosul. A beszámolási időszak korábbi fázisában a reaktortechnikai kutatási tevékenység fő célkitűzése ugyan az organikus moderátorú reaktorokkal volt kapcsolatban, azonban a főosztály a hazai szükségleteket időben felismerte és megkezdte programjának olyan módosítását, amely a következő periódusban a hazai atomenergetikai program megalapozásával szorosabb kapcsolatban lesz, és olyan kutatásokra állt át, amelyek az atomerőművek korszerű és gazdaságos üzemvitelét segítik elő. A főosztályon olyan szakemberképzés is történt, melyet majd az atomerőmű létesítésének előkészítése kapcsán a népgazdaság hasznosítani tud. A hazai atomenergetikai fejlesztéssel szoros kapcsolatban álló témákon kívül a főosztály fenntartja és fejleszti azt a kutatási tevékenységet is, amely a reaktorfizika alapkérdéseit érinti és ezek tekintetében az obnyinszki Fizikai-energetikai Intézettel közösen megállapodott kutatási programon dolgozik. — A főosztály tudományos munkájának színvonala jó. E kérdés megítélésénél számításba kell venni azt is, hogy e területen nemzetközi viszonylatban is jelentős eredményeket csak igen nagy költségráfordítással lehet biztosítani. Ezeknek hazánkban nem volt meg a lehetősége és ezért a célkitűzéseket is az anyagi lehetőséggel összhangban kellett megállapítani. A kutatások így egyes részterületekre szorítkozhattak, amelyekben az elért eredmények azonban kielégítőek.

A KFKI Elektronikus Főosztálya az elmúlt időszakban helyesen választotta meg *elektronikus kutatási* témáit. Az elért eredmények a célkitűzéseknek megfeleltek, sőt azokon bizonyos mértékig továbbléptek, a most kialakuló országos számítástechnikai program keretében. A főosztály korábban egy kifejezetten nukleáris adatfeldolgozó építését vette tervbe, ez a munka azonban logikusan tovább folyt egy sokoldalúan alkalmazható törpegép irányában. Hasonló módon egészségesen szélesült ki az intézeten belüli elektronikus tevékenység olyan alkalmazási irányokba, amelyeket az elért kutatási eredmények könnyen lehetővé tettek, de már nem szorosan a fizikai kutatások profiljához tartoznak. A főosztály és az EFKÜ jelenleg az ország egyik legerősebb elektronikus kutatásfejlesztési bázisa, szilárd alap a hazai elektronikus számológépgyártási program fontos feladatainak a megvalósításában. Rendkívül pozitívnak kell értékelni az EFKÜ-vel — amely önfenntartó — kapcsolatban azt, hogy a KFKI tudományos eredményeinek népgazdasági hasznosítását a kísérleti gyártás mélységéig is elvitte. Ez az intézeten belül bizonyos technológiai kultúrát is eredményezett. Ez a technológiai kultúra adta meg azt a lehetőséget, hogy az Elektronikus Főosztályon elektronikus számológéphez hasonló bonyolult berendezések kifejlesztésére is sor kerülhetett. A kutatóhely tudományos színvonala jó. A TÁKI mellett a legjobban felszerelt, a legnagyobb hagyományokkal rendelkező kutatásfejlesztési központ. Bár a főosztály és az EFKÜ publikációs és disszertációs tevékenysége nem üti meg a hagyományos akadémiai mértéket, ez nem annyira az ottani munka színvonalát jellemzi, mint inkább a hasonló jellegű munkák értékelési problémáira vet fényt. — Az eredmények közül kettő különösen kiemelkedő; az egyik a TPA gép megépítése, a másik pedig az olyan elektronikus berendezésépítési tapasztalat felgyülemlése, amelyre az országos programokban a továbbiakban szilárdan lehet építeni. — Jelenleg veszélyek mutatkoznak olyan tekintetben, hogy a felszerelés dinamikus fejlesztésére a kutatóhelynek nem lesz elegendő anyagi eszköze.

Jelentős *biofizikai kutatások* folytak a szegedi József Attila Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében működő MTA Lumineszcencia és Félvezető Tanszéki Kutatócsoportban és a Budapesti Orvostudományi Egyetem Biofizikai Intézetében működő MTA Kristályfizikai Tanszéki Kutatócsoportban.

A szegedi csoportban értékes felismerésekhez jutottak a modellrendszerekben végzett fizikai kutatások során. Így pl. magyarázatot szolgáltattak az alacsony viszkozitású oldószerekben magas festékkoncentrációk esetén fellépő repolarizációra, és megjelölték a fluoreszcencia depolarizációját, kvantitatíve leíró modellek érvényességi határait. E munkák a klorofill emissziós spektrumának hőmérsékleti és koncentrációs változatainak értelmezése céljából igen jelentősek, mivel a klorofill irodalomban tapasztalható empirikus tárgyalásmódtól eltérő kvantitatív szemléletet nyújtanak. A biológiai rendszerek fluoreszcenciájának tanulmányozása során több új eredményhez jutottak.

A budapesti csoportban egyes fizikai és kémiai ágensek által kiváltott struktúra- és funkcióváltozások kutatásával foglalkoztak. A vizsgálatok egyszerű biológiai rendszerekre és biológiailag fontos makromolekulákra vonatkoztak. Kiemelendők a T7 fágok UV inaktivációs dózishatásgörbéinek menetére vonatkozó megállapításaik. A görbék kvantitatív értelmezésére kidolgozott eljárásuk lehetőséget nyújt az inaktivációs és reaktivációs folyamatok eseménysűrűségének, valamint egy DNS molekulán belül a sérthető helyek számának meghatározására.

Intenzív *tudománytörténeti* vizsgálatok folytak a budapesti Műszaki Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében működő MTA Kristálynövesztési Tanszéki Kutatócsoportban. Különösképpen kiemelendő az az igyekezet, ahogyan a feltárt tudománytörténeti tények alapján a kutatók segítséget kívánnak nyújtani a most folyó fizikai és kémiai kutatások szellemének alakításához és a tudomány világnézeti szerepének tisztázásához.

Több intézményben *szakdidaktikai* kutatások is folytak. A szegedi József Attila Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében működő MTA Lumineszcencia és Félvezető Tanszéki Kutatócsoportban vannak a jelenlegi felfogásban művelt fizikai szakmódszertannak a legrégibb hagyományai. A szegedi szakmódszertani iskola jelentős munkát végzett a fizikaoktatás korszerűsítése érdekében. Kiemelkedő a gimnáziumok II. osztálya számára írt új szerkezetű könyv és a Csoport által tervezett, jelenleg gyártás alatt levő eszközkészlettel kapcsolatos munka. — Az ELTE Kísérleti Fizikai Intézetében többek között 4 középiskolai tankönyv készült el szakosított és nem szakosított tantervű osztályok számára. E korszerű munkák az oktatás színvonalát igen nagy mértékben javítják. — A debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Alkalmazott Fizikai Intézetében kiemelkedőek voltak a tanulókísérletezéssel kapcsolatos munkák.

Csillagászati kutatások

A Csillagvizsgáló Intézetben elért kutatási eredmények a kutatóhely működésének magas színvonalát bizonyítják. Kiemelkedőek a változócsillagok kutatásával kapcsolatos ereménуek, a mesterséges holdak megfigyelésein alapuló légsűrűségváltozás vizsgálatok és a szupernova-kutatások. — A Blashko-effektus vizsgálatában sikerült 4 új szekundér periódus, valamint az ezzel kapcsolatos változások megállapítása. Tovább fejlesztették az effektus magyarázatára vonatkozó korábbi elgondolásaikat. — A periódusváltozásokra az általuk 1965-ben kidolgozott módszereket alkalmazták különböző típusú változócsillagokra. Az 1968-ban Budapesten tartott nemzetközi változócsillag-kollokviumra a periodikus változócsillagokban mutatkozó irregularitásokra olyan elképzelést dolgoztak ki, amelyek összefüggésbe hozzák az irregularitásokat a magnetohidrodinamikai jelenségekkel. — Az asiagoi csillagdában nyert színképfelvételek alapján érdekes eredmények adódtak a Béta Canis Maioris típusú változócsillagok tengelyforgására. Kiderült, hogy erős rotáció is előfordult ezeknél a csillagoknál. — A szupernova-felfedezésekben, különösen 1968-ban, a nemzetközi program keretében működő európai csillagdák közül a mátrai obszervatórium volt a legeredményesebb. 1966-ban 1, 1967-ben 1, 1968-ban 4, 1969 elején pedig 2 szupernovát sikerült felfedezni. — Sikerült elérni a nemzetközi mértéket a mátrai állomás új 50 cm-es teleszkópjához készült kétcsatornás poliméterrel végzett polarizációs mérésekben. Nehézséget okoz a kutatásokban az a körülmény, hogy a hazai csillagászat felszerelése lassanként a szomszédos kis államokéhoz viszonyítva is teljesen jelentéktelen lesz. Bulgária, Csehszlovákia, Lengyelország és Ausztria csillagászai mind lehetőséget kaptak az utóbbi években másfél-két méteres tükör-teleszkópok beszerzésére, nálunk a legnagyobb méret még mindig csak 60 cm. A Nemzetközi Csillagászati Unió 1968 szeptemberében Budapesten rendezte meg 4. változócsillag kollokviumát „Nem-periodikus jelenségek változócsillagokban” címmel.

A Napfizikai Obszervatórium a mostoha körülmények ellenére jelentős, nemzetközileg is elismert eredményeket ért el, amely főképp annak köszönhető, hogy erőiket egy-két témára koncentrálták, és kiterjedten alkalmazták a statisztikus feldolgozási módszereket. Az intézet vezetőjének a nyugat—keleti aszimmetria magyarázatára vonatkozó elgondolásai nagy figyelmet kaptak a témára vonatkozó külföldi referátumokban.

Az eredmények nemzetközi elismerését jelzi az is, hogy a Nemzetközi Csillagászati Unió a nemzetközi napfizikai szimpóziumát 1967 szeptemberében hazánkban rendezte meg.

Kívánatos lenne az obszervatórium alapvető helyiség- és műszerproblémáinak mielőbbi megoldása.

A testületek tevékenysége

A testületek rendszeresen foglalkoztak a hozzájuk tartozó kutatóhelyek éves beszámoló jelentéseivel, illetőleg a hároméves jelentésekkel és tudományos tervekkel; az illető tudományág belföldi és nemzetközi kapcsolataival; könyv- és folyóiratkiadási ügyekkel; egyetemi tanári és docensi pályázatok véleményezésével; a tudományok doktora fokozatra pályázók tudományos munkásságának értékelésével; akadémiai díjakra és elnöki jutalmakra vonatkozó javaslatokkal. Eme rendszeresen visszatérő feladatokon kívül a testületek a következő lényegesebb kérdésekkel foglalkoztak:

Osztályvezetőség

Az osztályvezetőség az intézmények előterjesztése alapján megvitatta a negyedik ötéves terv beruházásaira vonatkozó igényeket, és azokat rangsorolva, javaslatot tett az Akadémia Elnökségének. Több alkalommal foglalkozott a Számítástechnikai központ részére beszerzendő elektronikus számológép problémájával, azonban a folyamatban levő tárgyalásokra való tekintettel végleges álláspontját még nem alakította ki. A bizottságok előterjesztése alapján elvégezte az osztály gondozásában megjelenő folyóiratok tudományos és tudománypolitikai értékelését az 1963—1967. évekre vonatkozóan. Megállapította, hogy az osztályhoz tartozó folyóiratok magas tudományos színvonalat képviselnek, és megfelelően reprezentálják a hazánkban folyó matematikai és fizikai kutatásokat. A folyóiratok szakosítását nem tartja szükségesnek. Ugyancsak a bizottságok előterjesztése alapján értékelte az osztály és az Elnökség gondozásában 1966-ban megjelent matematikai és fizikai könyveket. A megjelent könyvek közül mint kiválóakat kiemelte Péter Rózsa: „Recursive Functions” és Rényi Alfréd: „Dialógusok a matematikáról” című munkáját, valamint a Láng László szerkesztésében megjelenő Ultraibolya színképatlaszt. Az osztályvezetőség javaslatára a Magyar Tudományos Akadémia, az Eötvös Loránd Tudományegyetem és a MTESZ illetékes egyesületei Eötvös Loránd halálának 50. évfordulója alkalmából ünnepi ülésszak megrendezését határozták el. Az ülésszak megrendezésére 1969. április 17-én került sor.

Matematikai Bizottság

A Matematikai Bizottság kezdeményezésére matematikusokból álló delegáció utazott a Szovjetunióba, hogy a magyar és szovjet matematikusok együttműködésének továbbfejlesztéséről tárgyaljon. A megbeszélések eredményeként megállapodást írtak alá közös kutatási témákról, egy közös matematikai statisztikai folyóirat megindítására vonatkozó javaslatról, valamint közös tudományos tanácskozások megtartásáról. Az első közös rendezvény a konstruktív függvénytani kollokvium lesz, amelyre 1969-ben kerül sor Magyarországon. A bizottság elemezte eddigi könyvkiadási tevékenységét, és megállapította, hogy az egészében véve eredményes volt. Ugyanakkor határozatot hozott egy matematikai monográfia-sorozat megindításáról a következő címmel: Disquisitiones Mathematicae Hungaricae. A bizottság értékelte az osztály gondozásában megjelenő matematikai folyóiratokat, és elhatározta a magyar matematikai folyóiratok szerkesztői közös értekezletének megtartását a szerkesztéssel kapcsolatos közös elvek és gyakorlat egyeztetése érdekében.

Fizikai Bizottság

A Fizikai Bizottság megvitatta és értékelte a fizikai kutatásokkal foglalkozó testületek tevékenységét és egyes konkrét problémákkal kapcsolatban állásfoglalást alakított ki. Több alkalommal foglalkozott a bizottság a hazai fizikusképzés problémáival. Kérdőívek szétküldésével viszonylag széles körben felmérést végzett az elmúlt 8—10 évben végzett hallgatók körében. A bizottság elhatározta, hogy a felmérést kiegészíti, többek között kikéri az ipari intézmények vezetőinek véleményét is, és javasolta, hogy megfelelő előkészítés után erről a problémáról az Eötvös Loránd Fizikai Társulat rendezzen ankétot. Javasolta továbbá, hogy a felmérés és az ankét eredményei alapján egy vitaindító cikk jelenjék meg a Fizikai Szemlében. A bizottság javasolta az osztályvezetőségnek az MTA Kristályfizikai Tanszéki Kutatócsoportjából és az MTA Kristálynövekedési Tanszéki Kutatócsoportjából egy munkaközösség létrehozását, amely intenzívebb tudományos munkát tesz majd lehetővé.

A Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság — amely a III. és VI. osztály közös testülete — megvitatta a kristályfizikai kutatások hazai helyzetét, valamint a hazai elektronikus számológép programmal kapcsolatban a szilárdtestfizikai kutatások feladatait. A bizottság a további feladatokra vonatkozóan javaslatot dolgozott ki a III. és a VI. osztály osztályvezetőségei és más érdekelt szervek részére.

A Fizikai Bizottsághoz tartozó albizottságok a beszámolási időszakban szintén foglalkoztak területük sajátos kérdéseivel.

Csillagászati Bizottság

A bizottság foglalkozott az 1968 szeptemberében Budapesten megrendezett nemzetközi változócsillag-kollokvium előkészítésével, ill. értékelésével; a csillagászatot is felvett végzős hallgatók elhelyezésének problémájával, és ezzel kapcsolatban javaslatokat dolgozott ki. Megvitatta a bizottság a Magyar Tudományos Akadémia Csillagvizsgáló Intézete és az Örmény Tudományos Akadémia bjurakáni Csillagvizsgáló Intézete közötti együttműködési egyezményt, és — azt kölcsönösen hasznosnak ítélve — javasolta annak elfogadását.

A Szputnyikmegfigyelési Albizottság rendszeresen értékelte a megfigyelő állomások tevékenységét és az elért eredményeket több alkalommal szélesebb körű tudományos tanácskozáson vitatták meg.

Könyvkiadás

Matematika

Szőkefalvy-Nagy Gyula: Geometriai szerkesztések elmélete (Strommer Gyula jegyzeteivel)
Freud Géza: Orthogonale Polynome
Közös kiadás a Birkhauser Verlag-gal
Contests in Higher Mathematics, Hungary 1949—1961 in memorian Miklós Schweitzer
Szerkesztették: Szász Gábor, Gehér László, Kovács István és Pintér Lajos

Fizika

Jánossy Lajos: Mérési eredmények kiértékelésének elmélete és gyakorlata
Proceedings of the International Conference on Luminescence (Budapest, 1966) I—II. kötet.Szerkesztette: Szigeti György
Absorption Spectra in the Ultraviolet and Visible Region X. és XI. kötet.
Közös kiadás a New York-i Academic Press-szel.
Szerkesztette: Láng László
Absorption Spectra in the Ultraviolet and Visible Region Cumulative index, VI—X. kötet.
Közös kiadás a New York-i Academic Press-szel.
Szerkesztette: Láng László

Nívódíj

1968-ban az osztály gondozásában megjelent alábbi könyv részesült az Akadémiai Kiadó nívódíjában:
Rédei László: Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen (20 000 Ft)

Folyóiratkiadás

Acta Mathematica XIX. kötet
Acta Physica XXIV. és XXV. kötet
Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica III. kötet
Osztályközlemények XVIII. kötet
Magyar Fizikai Folyóirat XVI. kötet

Felolvasó ülések

Rapcsák András, az MTA lev. tagja: Pályatartó leképezések (székfoglaló előadás)
Turán Pál akadémikus: Algebrai egyenletek közelítő megoldásáról
J. Lecomte, a Francia Tudományos Akadémia tagja: Az infravörös spektrometria és alkalmazásai fejlődését gátló tényezők

Tudományos tanácskozások

V. Magfizikai Nyári Iskola. (Tihany, 1968. június 19—26.) Az iskolán kb. ötvenen vettek részt az ország magfizikával foglalkozó intézményeiből. Az iskola „tanuló" jellegű volt, azaz az előadók, akik a résztvevők soraiból kerültek ki, nem a saját kutatásaikról számoltak be, hanem a magfizikának egy alapvető, a jelenleg hazánkban folyó kutatások nagy részéhez szervesen kapcsolódó területéről tartottak 9 elméleti előadást.

Nemzetközi konferencia az elektronbefogás jelenségéről és a magasabb rendű effektusokról az atommagok bomlásában. (Debrecen, 1968. július 15—18.) Megrendezésére a Nemzetközi Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unió felkérésére került sor; a tanácskozást a Bécsi Atomenergia Ügynökség is támogatta. A konferencia, amelyen kb. százan vettek részt, a magspektroszkópiának viszonylag kis, de igen korszerű témakörét ölelte fel. Mintegy 60 előadás hangzott el, amelyek a konferencia közleményeiben már meg is jelentek.

Nemzetközi változócsillag-kollokvium. (Budapest, 1968. szeptember 5—9.) A tanácskozás — amelynek a megrendezésére a Nemzetközi Csillagászati Unió felkérésére került sor — a változócsillagokban levő periodikus jelenségekkel foglalkozott. Igen sok — összesen 67 — nívós előadás hangzott el. A téma rendkívül nagy terjedelme miatt csak ritkán volt hosszabb diszkusszió, de egészben véve a kollokvium tudományos szempontból igen jól sikerült. A kollokvium anyaga könyv alakban jelenik meg az Akadémiai Kiadónál. A tanácskozás iránt igen nagy volt az érdeklődés; a 70 külföldi csillagász jelent meg 14 országból.

Mágneses konferencia. (Eger, 1968. szeptember 24—29.) A tanácskozás tárgyköre a mágneses szerkezetek és mágneses fázisátalakulások, továbbá a híg mágneses ötvözetek kísérleti elméleti vizsgálata volt. Mindkét témában nagy szerepet játszottak a magfizikai módszerekkel — neutrondiffrakció, rugalmatlan neutronszórás, Mössbauer-effektus, magrezonancia — elért eredmények ismertetése. A konferencián — amelyen 50 előadás hangzott el — 96 szakember vett részt, közülük 43-an külföldről.

Hadronspektroszkópiai konferencia. (Keszthely, 1968. szeptember 6—10.) A konferencián — amely közvetlenül követte a Bécsben megtartott nemzetközi nagyenergiájú konferenciát — meghívott előadók számoltak be a hadronok tömegspektrumára és bomlására vonatkozó eredményekről és a tervezett vizsgálatokról. A konferencia előkészítésére Visegrádon a Magyar Elméleti Fizikai Nyári Iskola keretében került sor.

Matematikai nyelvészeti konferencia. (Balatonszabadi, 1968. szept. 7—10.) A konferencia témája a modern nyelvelmélet néhány igen időszerű problémája volt. A tanácskozás tudományos szempontból pozitívan értékelhető. A hazai kutatók sok jó ötletet kaptak, amit további kutatásaikban hasznosíthatnak. A konferencián 10 országból 31 külföldi és 19 magyar szakember vett részt.

Közös magyar—osztrák sugárvédelmi tanácskozás. (Bécs, 1969. április 9—11.) A témakörök: megengedhető maximális dózis, méréstechnikai problémák; röntgenbesugárzás és nagyenergiájú elektronsugár alkalmazásának sugárvédelmi kérdései; méréstechnika fejlődése a sugárvédelem területén; belső besugárzás sugárvédelmi kérdései; radioizotópok kiszabadulása teljesítmény reaktorokból; környezet ellenőrzések után a lakosság sugárterhelése. A tanácskozáson több mint 40 magyar szakember vett részt és 20 előadást tartott. A résztvevők a tudományos ülésszak kapcsán megtekintették a seiberdorfi reaktorcentrumot is.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ELNÖKSÉGE ÁLLÁSFOGLALÁSA A KRITIKAI KÖNYVISMERTETÉSEKRŐL

A Magyar Tudományos Akadémia Elnöksége 1968. december 17-én foglalkozott a kritikai könyvismertetések megjelentetésének és színvonaluk emelésének kérdésével. Az *Elnökség*nek e kérdéssel kapcsolatos határozatát kivonatosan az alábbiakban ismertetjük:

Az *Elnökség* megállapítja, hogy ismételt erőfeszítések és általános társadalmi-politikai fejlődésünk ellenére tudományos életünk szükséges fejlődésének még mindig lassítója *a kritikai szellem elégtelensége.* Bár néhány szakterületen nyílt és egészséges tudományos viták bontakoztak ki (például a közgazdaságtudomány, a szociológia és a történettudomány terén), továbbá amellett, hogy egyes esetekben megjelent tudományos munkák bírálatában is éles és felelősségteljes kritikai megítélés nyilvánul meg, egész tudományos életünkben nagyobb területen érvényesül a semmitmondó méltatásokra, a szubjektív érdekeltségből folyó megalkuvásra és a viták elkerülésére való hajlam. Különösen a megjelenő tudományos könyvek kritikája tekintetében nem kielégítő a helyzet.

Tudományos közéletünk e szektorának továbbfejlesztése érdekében az *Elnökség* felhívja az Akadémia minden illetékes szervét és testületét, különösen az osztályvezetőségeket és az akadémiai folyóiratok szerkesztőit, hogy ne törődjenek bele ebbe a sokféle okból kialakult helyzetbe, hanem tudományos lelkiismeretüknek és szocialista társadalmunk iránt érzett felelősségüknek megfelelően újból és újból küzdjenek a kritikai szellem lanyhasága ellen. Állhatatosan törekedjenek arra, hogy minden szubjektív érdekeltség ellenére jusson érvényre a kritikai meggyőződés, s e téren fáradhatatlanul tegyenek kezdeményező lépéseket.

Az *Elnökség* meg van győződve arról, hogy e téren a *példamutatás* és olyan *tudományos morál kialakítása* a döntő tényező, amely visszaszorítja a megalkuvás és az alkalmazkodás szellemét. Emellett azonban egyes konkrét szervezési és ösztönző intézkedések megtételét is szükségesnek tartja. Ezért a következőket határozza.

Elő kell segíteni kritikai ismertetéseknek, mint tudományos műfajnak a megbecsülését. Ennek érdekében akadémiai folyóiratok foglalkozzanak a kritikai műfaj módszereivel és moráljának a kérdéseivel. Az e téren elért teljesítményeket jelentőségüknek megfelelően méltassák.

Az *Elnökség* felhívja a tudományos osztályok figyelmét arra, hogy folyóirataikban *magyar szerző tudományos művéről megjelent, kiemelkedő könyv-kritikai ismertetések szerzőit* — függetlenül attól, hogy a művet melyik magyar kiadó adta ki — *prémiumban részesítsék.* Ajánlja, hogy az osztályvezetőségi beszámolók a jó kritikai ismertetéseket rendszeresen emeljék ki.

Az *Elnökség* úgy határoz, hogy a jövőben *kritikai ismertetések is részesíthetők 1000—3000 Ft összegű nívódíjban.* Felhívja a tudományos osztályokat és a

KFB-t, hogy a nívódíjra vonatkozó javaslatukban legyenek figyelemmel a magyar szerzőktől, Magyarországon, magyar, vagy idegen nyelven kiadott, tudományos művekről készült, s akadémiai folyóiratokban megjelent kritikai ismertetésekre. Nívódíjban azok a kritikai ismertetések részesíthetők, amelyek nem korábban, mint a díj odaítélését megelőző naptári évben jelentek meg.

Az *Elnökség* határozatával a *Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Osztályvezetősége* 1969. január 21-i ülésén foglalkozott. Az *Osztályvezetőség* állásfoglalását az alábbiakban szintén kivonatosan ismertetjük:

Az *Osztályvezetőség* az Osztály prémiumkeretéből — előre meg nem határozott összegben és számban — évenként jutalomban részesíti a kiemelkedő könyvkritikák szerzőit.

E jutalmat azon színvonalas könyvkritikák szerzői kapják meg, akik az Akadémiai Kiadónál megjelent matematikai, fizikai, vagy csillagászati művekről írták bírálatukat, függetlenül attól, hogy az Osztályhoz, vagy a Társulathoz tartozó folyóiratokban jelent-e meg. Ez vonatkozik olyan esetekre is, amikor a szerző a kritikát a matematikát, fizikát és csillagászatot erősen felhasználó más tudományos művekről készíti, vagy amikor más tudományterületen dolgozó szakember jelentet meg az említett folyóiratokban kritikát matematikai, fizikai és csillagászati művekről.

PERMUTÁCIÓK GENERÁLÁSA SZÁMOLÓGÉPEKEN

Írta: NEMETZ TIBOR

I. Bevezetés

A nagy teljesítményű elektronikus számológépek megjelenése és rohamos fejlődése számos olyan probléma megoldását tette lehetővé, melyeket korábban sem egzakt módszerekkel, sem pedig a végzendő műveletek nagy száma miatt konkrét számolással megoldani nem sikerült. A matematika különböző területein felmerülő ilyen problémák egy jelentős részében véges sok jel permutációi szerepelnek változóként. E típusú alkalmazásokra példaként megemlítjük a latin négyzetekkel, továbbá a véges geometriákkal kapcsolatos vizsgálatokat.

Az utóbbi időben a kombinatorika területén kívül számos gazdasági programozási feladatban, mintavételi eljárások optimalizálásában, a távközlésben, nyilvántartási rendszerek tervezésében oldottak meg olyan feladatokat, melyekben a változók permutációk voltak. Megemlítjük még A. SCHÖNEBERG kísérletét, amely modern zenét gépi úton komponál, mint érdekes alkalmazást.

A feladatokat a permutációk felhasználása szerint két nagy csoportba sorolhatjuk:

a) Az összes n-edrendű permutáció generálása szükséges, vagy csak bizonyos feltételeknek eleget tevő összes permutációt kell generálni (n fix).

b) A permutációkat véletlenszerűen kell kiválasztani, azaz minden egyes kiválasztás az összes permutációk közül egyenlő valószínűséggel, egymástól teljesen függetlenül történik.

Már viszonylag kis számú jel permutációit még nagy memóriájú gépeken is célszerű szukcesszíve generálni, semmint tárolni. Nyilvánvaló, hogy a generálás módját az egyes gépek speciális tulajdonságainak figyelembevételével lehet csak optimálisan megválasztani. Különösen érvényes ez a második esetben, amikor a permutációkat véletlen (vagy pszeudo-véletlen) számok felhasználásával generálják, így a véletlen számsor forrása és milyensége is lényeges. Jelen dolgozatban a permutációk gépi generálásának különböző lehetőségeit ismertetjük. Megjegyezzük, hogy véletlen permutációk generálásakor az egyszerűség kedvéért ún. „valódi" véletlen számsort tételezünk fel, azonban az eredmények a megfelelő statisztikai vizsgálatok elvégzése után pszeudo-véletlen számsorok esetén is alkalmazhatóak.

A dolgozat tartalmaz egy eljárást ismétléses permutációk generálására is.

A szerző köszönetét fejezi ki BÁNKÖVI GYÖRGYnek, aki a dolgozat elkészítéséhez értékes segítséget nyújtott.

II. Az összes $(N+1)$-edrendű permutáció szukcesszív generálása

Ebben a fejezetben a $0, 1, \ldots, N$ számok összes permutációinak olyan generálási módjait ismertetjük, melyek a számológépi gyakorlatban hasznosak.

1. Jelöljön $P=p_0, p_1, p_2, \ldots, p_N$ egy tetszőleges permutációt, s legyen $a_k=a_k(P)$ az a szám, mely megmutatja, hogy hány k-nál kisebb szám következik k után a permutációban. Nyilvánvalóan

$$(1) \qquad 0 \leqq a_k \leqq k, \qquad k=0, 1, \ldots, N.$$

Ugyancsak világos, hogy a P permutáció egyértelműen határozza meg az $\mathbf{a}=\mathbf{a}(P)= =(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ vektort. Igaz a megfordítás is, amit a következőképpen láthatunk be: Legyen r_i az i szám sorszáma a P permutációban. (Azaz legyen $R=(r_0, \ldots, r_N)$ a P „inverze".)

Definiáljuk a C_j^i számokat a következőképpen:

$$C_j^N = N-j, \qquad j=0, 1, \ldots, N$$

$$C_j^i = \begin{cases} C_j^{i+1}, & \text{ha } j<a_{i+1} \\ C_{j+1}^{i+1} & \text{különben} \end{cases}$$

$0 \leqq i \leqq N$ esetén. Legyen

$$r_i = C_{a_i}^i.$$

Nyilvánvaló, hogy így egyetlen R permutációt határoztunk meg, minden, az (1) összefüggésnek eleget tevő $\mathbf{a}$ vektor esetén, továbbá R valóban inverze az eredeti P permutációnak.

Szemléletesen az R permutáció kialakítása a következőképpen történik: Vegyünk $N+1$ egymás utáni üres pozíciót, s kezdjük a kitöltést a legnagyobb számmal, N-nel. Írjunk a visszafelé számított (a_N+1)-edik pozícióba N-et, majd az ugyancsak visszafelé számított $(a_{N-1}+1)$-edik *üres* pozícióba $(N-1)$-et, s így tovább. Tehát a k-nál nagyobb számok beírása után a visszafelé számított (a_k+1)-edik *üres* pozícióba kerül a k szám. Ezt az utat viszonylag egyszerűen lehet gépi realizáció során is követni. Lényegében ezt az eljárást alkalmazta D. H. LEHMER [4] az összes permutáció szukcesszív generálására.

Tekintsük a következő példát: Generálandó az $a_0=0, a_1=0, a_2=1, a_3=3, a_4=2$ értékeknek megfelelő permutáció.

1. lépés			4		
2. lépés	3		4		
3. lépés	3		4	2	
4. lépés	3		4	2	1
a permutáció:	3	0	4	2	1

2. Megjegyezzük, hogy az $\mathbf{a}(P)$ vektor bizonyos értelemben felfogható a P permutáció sorszámának is. Valóban, definiáljuk a P permutáció sorszámát, mint

azt a számot, melynek a faktoriális számrendszerben vett k-adik jegye a_k, azaz legyen

$$s(P) = \sum_{k=1}^{N} a_k k! \tag{2}$$

Adott $s(P)$ sorszám esetén az **a** vektor meghatározása szintén függhet a gép tulajdonságaitól. Ennek egyik módja lehet az

$$a_k = \left[\frac{m_{k+1}}{k!}\right], \qquad m_k = m_{k+1} - a_k \cdot k! \tag{3}$$

összefüggés szukcesszív kiszámítása $k = N, N-1, \ldots, 1$ esetén, ahol $m_{N+1} = s(P)$ és $[\alpha]$ a legnagyobb, α-nál nem nagyobb egész számot jelöli.

Gyakran hasznosabb a könnyebben ciklusba szervezhető

$$q_{k+1} = \left[\frac{q_k}{k+1}\right], \qquad a_k = q_k - q_{k+1} \cdot (k+1) \tag{4}$$

összefüggés használata, $k = 1, 2, \ldots, N$, ahol $q_1 = s(P)$.

3. Konkrét számolás esetén nem mindig célszerű rendre az egymás utáni sorszámoknak megfelelő permutációkat meghatározni. Csak az egyes számológépek speciális tulajdonságait figyelembe véve lehet pl. már az egyszerű $s_{k+1} = f(s_k)$ esetben is egy optimális $f(\cdot)$ függvényt meghatározni. Érdekes megjegyzések találhatók erre C. B. TOMPKINS [7] dolgozatában. E dolgozat tárgyal néhány olyan esetet is, melyekben csak bizonyos feltételeknek eleget tevő permutációkat kell generálni, továbbá ismertet egy szisztematikus generálási eljárást is.

A továbbiakban javasolunk egy ehhez hasonló eljárást, mely azonban lényegesen kevesebb „felesleges” (ismételt) permutációt állít elő. E módszer alkalmazása különösen karakteres gépek esetén látszik célszerűnek. Jelöljön $p_1, p_2, \ldots, p_N$ egy permutációt. Legyenek $I_1, I_2, \ldots, I_N$ és K ellenőrző számok. A számolást a következő utasítások szerint végezzük el:

1. Lépés: Legyen $p_j = I_j = j$, $\quad j = 1, 2, \ldots, N$.
2. Lépés: Legyen $K = 1$.
3. Lépés: Összehasonlítás: Ha $I_K < N$, akkor a 4. lépésnél,
ha $I_K = N$, akkor a 6. lépésnél folytatjuk.
4. Lépés: *Új permutációt* kapunk a p_{I_K} és a p_{I_K+1} számok felcserélésével.
5. Lépés: Az I_K számot eggyel növeljük, majd folytatjuk a 2. lépéssel.
6. Lépés: Legyen $I_K = K$.
7. Lépés: Ciklikusan eltoljuk eggyel jobbra a $p_K, p_{K+1}, \ldots, p_N$ számokat, tehát ha az új számokat p_i'-vel jelöljük:

$$p_i' = \begin{cases} p_i, & \text{ha} \quad i < K \\ p_N, & \text{ha} \quad i = K \\ p_{i-1}, & \text{ha} \quad K < i \leqq N. \end{cases}$$

8. Lépés: K értékét eggyel növeljük.
9. Lépés: Összehasonlítás: ha $K < N$, akkor a 3. lépésnél folytatjuk,
ha $K = N$, akkor az eljárás véget ér.

Megjegyezzük, hogy bár a 4. és 7. lépésben egyaránt generálunk egy permutációt, de csak a 4. lépésben kapunk újat, míg a 7. lépésben mindig egy korábbit állítunk vissza.

Szemléltetésként tekintsük a $N=4$ esetet.

Lépések	p_1	p_2	p_3	p_4	I_1	I_2	I_3	I_4	K	Az új permutáció
1, 2,	1	2	3	4	1	2	3	4	1	1, 2, 3, 4,
3, 4, 5, 2,	2	1			2				1	2, 1, 3, 4,
3, 4, 5, 2,		3	1		3				1	2, 3, 1, 4,
3, 4, 5, 2,			4	1	4				1	2, 3, 4, 1,
3, 6, 7, 8, 9,	1	2	3	4	1				2	
3, 4, 5, 2,		3	2			3			1	1, 3, 2, 4,
3, 4, 5, 2,	3	1			2				1	3, 1, 2, 4,
3, 4, 5, 2,		2	1		3				1	3, 2, 1, 4,
3, 4, 5, 2,			4	1	4				1	3, 2, 4, 1,
3, 6, 7, 8, 9,	1	3	2	4	1				2	
3, 4, 5, 2,			4	2		4			1	1, 3, 4, 2,
3, 4, 5, 2,	3	1			2				1	3, 1, 4, 2,
3, 4, 5, 2,		4	1		3				1	3, 4, 1, 2,
3, 4, 5, 2,			2	1	4				1	3, 4, 2, 1,
3, 6, 7, 8, 9,	1	3	4	2	1				2	
3, 6, 7, 8, 9,	1	2	3	4		2			3	
3, 4, 5, 2,			4	3			4		1	1, 2, 4, 3,
....										
....										
....										

Végiggondolva az algoritmus lépéseit, belátható, hogy a 4. lépésben az összes permutáció generálására sor kerül.

III. Véletlen permutációk generálása

1. Tekintsünk egy tetszőleges folytonos eloszlást, és végezzünk N független kísérletet. Jelölje az egyes kísérletek eredményét $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ a bekövetkezés sorrendjében. Jelöljük a rendezett mintaelemeket a szokásos módon: $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_N^*$. Legyen p_i a $\xi_i^* = \xi_{p_i}$ összefüggéssel definiálva. Mivel folytonos eloszlást tekintettünk, így definíciónk 1 valószínűséggel egyértelmű. Könnyű belátni, hogy az így nyert $P = p_1, p_2, \ldots, p_N$ permutáció véletlen a bevezetésben mondott értelemben.

Valóban, ez egyszerűen következik abból, hogy tetszőleges $-\infty \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N \leqq +\infty$ és az $1, 2, \ldots, N$ számok tetszőleges $i_1, i_2, \ldots, i_N$ permutációja mellett

$$\mathbf{P}\{x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1,\ x_1 < \xi_2 \leqq x_2, \ldots, x_{N-1} < \xi_N \leqq x_N\} =$$

$$= \mathbf{P}\{x_0 \leqq \xi_{i_1} \leqq x_1,\ x_1 < \xi_{i_2} \leqq x_2, \ldots, x_{N-1} < \xi_{i_N} \leqq x_N\} = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{P}\{x_{i-1} < \xi \leqq x_i\}.$$

Véletlen permutációk generálásának ez az egyszerű módja azonban még célgép segítségével is nehezen valósítható meg, mivel mérési adataink nem változhatnak folytonosan. Abban az esetben, ha nem folytonos eloszlásból származik a minta (vagy mérési pontatlanságunk teszi diszkrét eloszlássá), a permutáció fenti definíciója nem lesz 1 valószínűséggel helyes. Ilyenkor azon p_i számok újabb permutálása szükséges, amelyekre ξ_{p_i} megegyezik, ami újabb mintavétel segítségével történik. Lényegében ez az eljárás található C. R. RAO [6] dolgozatában.

Abban az esetben azonban, ha a forrás-eloszlás N-nél lényegesen több és egyenlő, vagy közel egyenlő valószínűségű értéket eredményezhet, sok gépen célszerű az ismétlődő értékeket egyszerűen elhagyni. Tegyük fel, hogy ξ lehetséges értékei az $1, 2, \dots, M$ számok, s ezeket egyenlő valószínűséggel veheti fel, akkor annak a valószínűsége, hogy az N elemű minta minden eleme különböző legyen

$$\mathbf{P}\{\xi_i \neq \xi_j, \text{ ha } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N\} = \prod_{k=1}^{N-1}\left(1-\frac{k}{M}\right) \approx e^{-\frac{N^2}{M}},$$

ahol az utóbbi közelítés $M \approx N^2$ esetén már elég pontos. Ez azt jelenti, hogy $M \approx 10N^2$ mellett a rendezett minta elemek legalább 0,95 valószínűséggel különbözők, s így ekkor célszerű elkerülni azt a programozási nehézséget, melyet azonos mintaelemek indexeinek ismételt permutálása okoz.

Megjegyezzük, hogy M értékétől függetlenül ezt az eljárást javasolja M. G. KENDALL [3] (I. kötet, 195. old.), anélkül azonban, hogy előnyeit vagy hátrányait vizsgálná.

2. Lényegesen más a helyzet akkor, ha M értéke nem sokkal nagyobb N-nél. Ha ξ egyes értékeinek eloszlása erősen eltér az egyenletestől, ajánlatos a C.R.RAO által javasolt eljárást követni. Vizsgáljuk a továbbiakban azt a leggyakoribb esetet, amikor ξ egyenlő valószínűséggel veheti fel az $1, 2, \dots, M$ értékek mindegyikét ($M \geqq N$).

Jelölje S_N azon véletlen számok (kísérletek) számát, amennyi ahhoz szükséges, hogy N különbözőt találjunk. Nyilván S_N valószínűségi változó. Könnyen látható, hogy felbontható N független, de különböző geometriai eloszlású valószínűségi változó összegére, s így mint ismeretes (lásd pl. FELLER [1] 230., ill. 244. old.) S_N várható értéke

$$E(S_N) = M\left\{\frac{1}{M}+\frac{1}{M-1}+\dots+\frac{1}{M-N+1}\right\},$$

vagy a gyakorlati esetek többségére elegendő közelítéssel

$$E(S_N) \approx M \log \frac{M}{M-N+1}.$$

S_N szórása:

$$D^2(S_N) = M^2 \cdot \sum_{k=M-N+1}^{M-1} \frac{1}{k^2} - E(S_N).$$

Speciálisan $N \approx M \geqq 10$ esetén jó közelítéssel

$$E(S_N) \approx M \log M,$$

míg ha $M \approx \alpha \cdot N$, akkor $\alpha \geqq 6$ mellett

$$E(S_N) \approx \left(1+\frac{1}{\alpha-1}\right) \cdot N.$$

Mindkét fenti eljárás közös tulajdonsága, hogy a mintaelemeket rendezni kell (kivéve, ha $N=M$), s ez elég lassan hajtható végre. Előnye viszont, hogy egyszerű rendezőgépeken kialakíthatók a permutációk, s az így nyert permutációkat beolvasás útján használhatjuk fel, ami a számológépek egyes típusainál gyorsabb és olcsóbb eljárás. Ez különösen érvényes akkor, ha primér forrásként ún. „valódi" véletlen számsorokat akarunk felhasználni, hiszen ekkor a gépek többségénél a beolvasásról egyébként is gondoskodni kéne.

3. A legegyszerűbb megoldás, amely nem igényel rendezést, a következő: $N=M$ esetén a permutáció első száma az első véletlen szám. Miután a permutáció k-adik számát meghatároztuk, legyen a $(k+1)$-edik szám az első következő olyan véletlen szám, mely a permutáció már meghatározott számai között nem szerepel. Előnye ennek az eljárásnak, hogy kevés tárolóhelyet és kevés programlépést igényel, nagy hátránya viszont, hogy viszonylag sok, $(N \ln N)$ véletlen számot igényel. J. E. WALSH [8] javasolja, hogy az így „elvesző" véletlen számokat ugyanilyen módon újabb permutációk szimultán generálására használjuk fel. Megjegyzi azonban, hogy az így generált permutációk nem lesznek függetlenek. Könnyű látni, hogy az ily módon készült egymás utáni permutációk valójában nagyon is erősen összefüggnek, s ezért a módosított eljárás használata nem ajánlatos. Az összefüggőség illusztrálására tekintsük a következőket: Legyen η_1, ill. η_2 az elsőként, ill. másodikként generált permutáció. Jelöljön A egy tetszőleges permutációt, s B egy olyan másik permutációt, amelynek első jele megegyezik A utolsó jelével. Viszonylag egyszerűen látható, hogy a

$$\frac{\mathbf{P}(\eta_2=A|\eta_1=A)}{\mathbf{P}(\eta_2=B|\eta_1=A)}$$

hányados exponenciális sebességgel növekszik N növelésével. Megjegyezzük, hogy a $\mathbf{P}\{\eta_2|\eta_1=(1,2,\ldots,N)\}$ feltételes valószínűségeloszlásra rekurziós összefüggés írható fel, jelen dolgozatban azonban ennek részletezését nem tekintjük célunknak. Szemléltetésként álljon itt az egyszerű $N=3$ esetre vonatkozóan a $108 \cdot \mathbf{P}\{\eta_2=A|\eta_1=B\}$ mennyiségek táblázata:

	B \ A	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1, 2, 3,	P_0	49	22	19	4	10	4
2, 1, 3,	P_1	22	49	4	19	4	10
1, 3, 2,	P_2	19	10	49	4	22	4
2, 3, 1,	P_3	10	19	4	49	4	22
3, 1, 2,	P_4	4	4	22	10	49	19
3, 2, 1,	P_5	4	4	10	22	19	49

4. Véletlen permutációk generálására ugyancsak természetes út olyan véletlen számokat generálni, melyek 0 és $(N!-1)$ között minden értéket egyenlő valószínű-

séggel vehetnek fel. Ezt a számot a generálandó permutáció sorszámának tekintve a II. részben leírt módon meghatározhatjuk a permutációt. Ez az eljárás, melyet először D. H. LEHMER publikált, N kis értékeire a legtöbb számológépen jól alkalmazható. Előnye, hogy minimális véletlenül generált bitet (digitet) igényel.

5. N nagy értékeire olyan (pszeudo-) véletlen számok generálása, melyek a $0, 1, \ldots, (N!-1)$ értékeket egyenlő valószínűséggel veszik fel, nehézkes, vagy gyakorlatilag lehetetlen. Ezért célszerű ilyenkor az $s(P)$ sorszám helyett magát az $\mathbf{a}(P)$ vektort generálni. Lényegében ezt teszi R. A. FISHER és F. YATES [2]. Forrásként az $1, 2, \ldots, M$ értékeket egyenlő valószínűséggel felvevő, független valószínűségi változók sorozatát használják, ahol $M \geqq N$. Az $\mathbf{a}(P)$ vektor kialakítása a következőképpen történhet. Legyen $a_0 = 0$. Az a_{k-1} szám meghatározása után tekintsük a következő ξ_i valószínűségi változót. Ha ez nagyobb, mint $(k+1)\left[\frac{M}{k+1}\right]$, akkor új valószínűségi változóval folytatjuk a vizsgálatot, míg ellenkező esetben az

$$a_k = \xi_i - (k+1)\left[\frac{\xi_i}{k+1}\right], \tag{6}$$

vagy ami ugyanaz

$$a_k \equiv \xi_i \bmod (k+1)$$

összefüggés alapján nyerjük a k-adik komponenst.

6. L. E. MOSES és R. V. OAKFORD [5] a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású ξ_i valószínűségi változók sorozatát használja forrásként, felhasználva a sorozat minden elemét. Könyvünkben az $\mathbf{a}(P)$ vektor meghatározása az

$$a_k = [\xi_i(k+1)], \qquad k = 0, 1, \ldots, N$$

összefüggés segítségével történik. Eljárásunk ötletesen az $\mathbf{a}(P)$ vektor alapján a megfelelő P permutáció meghatározása helyett egy tetszőleges P_0 permutáció és az $\mathbf{a}(P)$ vektor segítségével egyszerűbben származtat egy új P_1 permutációt, mely teljesen független a kiindulásul vett P_0-tól. A generálás N lépésben történik, mégpedig úgy, hogy az i-edik lépésben $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ a P_0 permutáció, illetve a már belőle nyert közbeeső permutáció $(N-i)$-edik és a_{N-i}-edik jelét felcseréljük. Természetesen P_0 lehet rögzített a permutációk szukcesszív generálása mellett, de a k-adik új permutáció átveheti P_0 szerepét a következő permutáció generálása során. Nyilvánvaló, hogy az így generált permutációk valóban véletlen permutációk lesznek. A módszer előnye, hogy ebben az esetben, ha nem a $0, 1, \ldots, N$ számokat, hanem bármilyen $N+1$ különböző jelet akarunk permutálni, nem szükséges ezeket előzetesen átkonvertálni.

7. Megjegyezzük, hogy az $\mathbf{a}$ vektor meghatározása mindkét esetben lényeges információveszteséggel jár. Ezt az információveszteséget a különböző számológépeken jelentős mértékben csökkenteni lehet a fenti módszerek kis változtatásával. Erre vonatkozóan bemutatunk egy konkrét példát.

Tegyük fel, hogy 6 bites véletlen számokat használunk forrásnak (példa erre az UNIVAC számológép, melynek memóriája 6 bites karakterekből áll). Legyen a feladat a $0, 1, \ldots, 9$ számok permutálása. A 6 bites véletlen számok használata lényegében azt jelenti, hogy a $0, 1, \ldots, 63$ értékeket egyenlő valószínűséggel felvevő

ξ_i független valószínűségi változók sorozata áll rendelkezésünkre. Ekkor az **a** vektor meghatározásánál a következőképpen járhatunk el.

A0. $$a_0 = 0.$$

A1. $$a_7 = \left[\frac{\xi_1}{8}\right], \quad a_1 = \left[\frac{\xi_1 - 8a_7}{4}\right].$$

A2. Jelölje ξ_2' a következő $\xi_i - k$ közül az elsőt, mely kisebb, mint 63, s legyen

$$a_8 = \left[\frac{\xi_2'}{7}\right], \quad a_6 = \xi_2' - 7a_8.$$

A3. Legyen ξ_3' az első következő ξ_i, mely kisebb, mint 60.

$$a_5 = \left[\frac{\xi_3'}{10}\right], \quad a_9 = \xi_3' - 10 \cdot a_5$$

A4. Legyen ξ_4' az első következő ξ_i, mely kisebb, mint 60.

$$a_4 = \left[\frac{\xi_4'}{12}\right], \quad a_3 = \left[\frac{\xi_4' - 12a_4}{3}\right], \quad a_2 = \xi_4' - 12a_4 - 3a_3$$

A különböző pontok alatt generált a_k számok nyilván teljesen függetlenek egymástól, hiszen a ξ_i sorozat is ilyen volt. Könnyű látni azt is, hogy az azonos lépésben számított a_k számok is függetlenek, továbbá a_k egyenlő valószínűséggel veszi fel a $0, 1, \ldots, k$ bármelyikét minden k mellett. Az **a** vektor meghatározása után célszerű MOSES és OAKFORD fenti módszerét használni a permutáció kialakítására.

Számítsuk ki a felhasznált ξ_i változók η számának várható értékét! Jelöljük η_i-vel az Ai lépéshez szükséges ξ_j változók számát. Nyilván

$$E(\eta) = 1 + E(\eta_2) + 2 \cdot E(\eta_3).$$

Mivel η_2 és η_3 geometriai eloszlású $p_1 = \frac{63}{64}$ és $p_2 = \frac{15}{16}$ paraméterrel, így, mint jól ismert

$$E(\eta_2) = 1 + \frac{1}{63}; \qquad E(\eta_3) = 1 + \frac{1}{15}.$$

Tehát

$$E(\eta) = 4 + \frac{1}{63} + \frac{2}{15} \approx 4{,}15.$$

Ez azt jelenti, hogy átlagosan 25 véletlen bitet kell generálnunk 10 elem egy véletlen permutációjához, ami jónak nevezhető, ha figyelembe vesszük, hogy $\log_2 \cdot 10! = \log_2 3628800 > 21$. Megjegyezzük, hogy az A3, ill. A4 esetekben az „elvesző" ξ_i változókat $\xi_i - 60$ különbség formájában felhasználhatjuk, s így ekkor két véletlen bitet nyerve az átlagosan szükséges bitek száma lényegében véve megegyezik a minimálissal. Ezen előny mellett hátránya a módszernek, hogy az egyes programlépések nem szervezhetők egyetlen közös ciklusba.

IV. Ismétléses permutációk

1. Jelöljük i_k-val azt a számot, mely megmutatja, hogy a k szám hányszor fordul elő a permutációban, $k=0, 1, \ldots, N$, s legyen $r_k = \sum_{j=0}^{k} i_j$. Akár szisztematikus, akár véletlenszerű generálásról van szó, a legegyszerűbb megoldás a $0, 1, \ldots, r_N - 1$ számok egy permutációját elkészíteni, s ezután a $0,1, \ldots, r_0 - 1$ számokat nullával, az $r_0, r_0+1, \ldots, r_1 - 1$ számokat 1-gyel, s így tovább, az $r_{N-1}, r_{N-1}+1, \ldots, r_N - 1$ számokat N-nel helyettesíteni. Ez azonban a végzendő műveletek számát sokszorosára növeli, míg véletlen permutációk generálása esetén további hátrányként lényeges információveszteség jelentkezik. Célszerű tehát ekkor is az előző eljárásokhoz hasonló generálási módot keresni.

2. Készítsünk el, mint az előzőkben, most is egy $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P)$ vektort, melynek r_N komponensét a következőképpen definiáljuk:

Legyen $a_i = i$, ha $0 \leqq i \leqq r_0 - 1$,
legyen a_{r_0} egyenlő azon 0 jegyek számával, melyek a legutolsó 1-es után következnek
a_{r_0+1} a visszafelé számított második 1-est követő nullák száma plusz 1,
s általában $a_{r_{(k-1)}+u}$ a visszafelé számított $(u+1)$-edik „k-jegyet" követő, nála nem nagyobb számok száma, hacsak $0 \leqq u \leqq i_k - 1$.

Példaként tekintsük a következőt: Legyen a permutáció 0, 1, 3, 0, 0, 2, 1. Ekkor a hozzá tartozó $\mathbf{a}$ vektor: 0, 1, 2, 0, 3, 1, 4. Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{a}$ vektort a permutáció minden esetben egyértelműen határozza meg, s hasonlóan, mint azt a II. részben tettük, könnyen belátható az is, hogy az $\mathbf{a}$ vektor és az i_k számok együtt szintén egyértelműen határoznak meg egy permutációt. Ugyancsak világos, hogy

$$a_k \leqq k, \qquad k = 0, 1, \ldots, r_N - 1$$

és

$$a_{r_k} < a_{r_k+1} < \cdots < a_{r_{k+1}-1}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

3. Nem kívánunk foglalkozni részletesen azzal, hogy az $\mathbf{a}$ vektorból miként lehet a permutációt meghatározni, hiszen ez nagyon hasonló a II. részben leírthoz, viszont érdemes rámutatni arra, hogyan lehet az $\mathbf{a}$ vektort megválasztani olyan véletlen módon, hogy a hozzá tartozó permutáció az összes lehetséges ismétléses permutációk bármelyike egyenlő valószínűséggel lehessen.

E célból vegyük észre azt a könnyen verifikálható tényt, hogy az $\mathbf{a}$ vektor ilyen megválasztása esetén az

$$(a_{r_k}, a_{r_k+1}, \ldots, a_{r_{k+1}-1}), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

részvektorok független valószínűségi vektorváltozók, melyeknek eloszlása megegyezik a $0, 1, \ldots, r_{k+1} - 1$ számok közül visszatevés nélkül vett i_k elemű rendezett minta eloszlásával.

Jelöljön $\xi_0(M, n), \xi_1(M, n), \ldots, \xi_{n-1}(M, n)$ a $0, 1, \ldots, M-1$ számok közül visszatevés nélkül vett n elemű mintát, s mint szokásos, jelölje a rendezett mintát

$$\xi_0^*(M, n), \xi_1^*(M, n), \ldots, \xi_{n-1}^*(M, n).$$

Ezután az **a** vektort függetlenül választott rendezett minták segítségével az

$$a_u = u, \quad \text{ha} \quad 0 \leqq u < r_0$$

$$a_{r_k+u} = \xi_u^*(r_{k+1}, i_k), \quad u = 0, 1, \ldots, i_k - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

összefüggéssel definiálhatjuk.

V. További megjegyzések

1. A szükséges véletlen bitek (digitek) számának várható értékét csökkenteni lehet, ha egyidejűleg több **a** vektort határozunk meg.

2. A pszeudo-véletlen számsorok gépi generálása során voltaképpen egy permutációt határozunk meg. Így bármely N egymás utáni szám különböző, tehát ilyen forrás esetén a permutációk rendezéssel történő meghatározásához pontosan annyi szám szükséges, ahány jelet permutálni akarunk.

3. A számológépeken generált, a [0, 1] intervallumban „egyenletes" eloszlású pszeudo-véletlen számok szokásos statisztikai ellenőrzése csak bizonyos részintervallumba eső számokra terjed ki. Ajánlatos tehát az ilyen számoknak csak az első 2—3 decimális, ill. 6—10 bináris jegyét felhasználni.

4. Minden konkrét esetben megfontolás tárgyává kell tenni, hogy az adott gépen célszerű-e generálni a véletlen permutációkat, s nem igényel-e kevesebb időt külső forrásból származó véletlen permutációk beolvasása, ami döntően a periferikus egységek tulajdonságaitól függ.

Véletlen permutációkat tartalmaz L. E. Moses és R. V. Oakford [5] könyve, de találhatók véletlen permutációk R. A. Fisher és F. Yates [2] könyvében is.

5. Előfordulhat, hogy bizonyos pszeudo-véletlen számsorozat egyes feladatok számára kielégítően véletlenszerűnek mutatkozik, azonban ebből a forrásból származó permutációk már nem lesznek véletlenszerűek. Így akkor, amikor egy adott számológép esetén pszeudo-véletlen permutációk generálásának optimális módját keressük, elengedhetetlen a generált permutációk véletlenszerűségét is ellenőrizni.

6. A IV. fejezetben leírt módszerhez hasonlóan járhatunk el akkor is, ha a feladat N elemből visszatevés nélkül k kiválasztására korlátozódik.

7. Az $\mathbf{a}(P)$ vektor helyett mindvégig foglalkozhattunk volna egy $\mathbf{b}(P)$ vektorral is, ahol b_k a k indexű számot megelőző, k-nál nagyobb számok száma, hiszen ez lényegében nem jelent mást, mint az N-edrendű permutációk halmazának önmagára való leképezését.

8. Véletlen permutációk sorszám alapján történő generálását B. Jansson [9] könyve is ismerteti (189—191. old.).

IRODALOMJEGYZÉK

[1] FELLER, W.: *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, 1966, 2. kiadás.
[2] FISHER, R. A. and YATES, F.: *Statistical tables for biological, agricultural and medical research*, Oliver and Boyd, London, (1953).
[3] KENDALL, M. G.: *The advanced theory of statistics*, I., C. Griffin and Company Limited, (1952).
[4] LEHMER, D. H.: Combinatorial problems with digital computers. *Proc. IV. Can. Math. Congress*, (1957), 160—173. old.
[5] MOSES, L. E. and OAKFORD, R. V.: *Tables of rendom permutations*, Standford University Press, (1963).
[6] RAO, R. C.: Generation of random permutations of given number of elements using random sampling numbers, *Sankhya*, **23**, (1961) 305—307 old.
[7] TOMPKINS, C. B.: Machine attacs on problems whose variables are permutations, *Proc. Symp. in Appl. Math. VI.* (1956), 195—212 old.
[8] WALSH, J. E.: An experimental method for obtaining random digits and permutations, *Sankhya*, **17**, (1956) 355—360 old.
[9] JANSSON, B.: *Random number generators*, V. Petersons Bokindustri, Stockholm, 1966.

(Beérkezett: 1968. X. 8.)

ON COMPUTER-GENERATED PERMUTATIONS

by

TIBOR NEMETZ

Summary

Among the problems, which formerly could not be dealt with because of the large number of operations to be performed and whose solution was first made possible by the appearance and fast development of the large computers, are those with varying permutations. Part II of the present paper deals with methods concerning the successive generating of all permutations of order N, while part III deals with the question of random generating of permutations, together with minor modifications of already published methods.

In part IV there is presented a way which is equally feasible in case of systematical and of random generation of permutations with repetition.

LEKÉPEZÉSEK ÉS LEKÉPEZÉSFÉLCSOPORTOK, I.

Írta: DÉNES JÓZSEF

Rédei László akadémikus 70. születésnapjára

Bevezetés

A permutációk és a permutációcsoportok elmélete a véges csoportelmélet egyik legjobban kidolgozott fejezete és több könyvet (C. JORDAN [15], W. A. MANNING [21], H. WIELANDT [38]) teljes terjedelmükben a véges csoportelmélet ezen fontos fejezetének szenteltek.

A permutációk lényeges szerepét mutatja a *Cayley*-féle ábrázolási tétel, amely szerint tetszőleges absztrakt csoport izomorf módon ábrázolható permutációcsoportként.

A *Cayley*-tétel félcsoportokra való kiterjeszthetősége miatt a leképezések hasonló szerepet játszanak a félcsoportelméletben.

Jelen dolgozatnak az a célkitűzése, hogy néhány eredményt ismertessen a véges leképezések elméletéből elsősorban azokat, amelyek a permutációk és a leképezések közötti analógiára mutatnak.

Egy másik fontos szempont, amelyet a dolgozat megírásánál szem előtt tartottunk, ráirányítani a figyelmet a leképezések elméletének olyan gyakorlati alkalmazásaira, amelyek a szerző tudomása szerint újak, számos egyéb alkalmazást ezek fontosságának elismerése mellett is igyekszünk röviden tárgyalni.

Annak ellenére, hogy a múlt század utolsó éveiben és a XX. század első éveiben több szerzőnél (G. ANDREOLI [1], G. FROBENIUS [11], E. H. MOORE [22]) felmerült a csoport, illetve a permutáció általánosításának gondolata A. SZUSKEVICSnek az 1920-as években megjelenő dolgozatai jelentik a leképezésfélcsoport elméleti rendszeres kutatások megindulását. A. SZUSKEVICS [37] könyvének 1937. évi megjelenése a mai napig a leképezésfélcsoportok elméletének legjobban kidolgozott összefoglalása. Š. SCHWARZ egyetemi doktori értekezése [31] számos SZUSKEVICS felfogásához közel álló eredményt tartalmaz. A modern könyvek R. BRUCK [41], A. CLIFFORD, G. PRESTON [3], E. SZ. LJAPIN [18] egyre kisebb teret szentelnek a leképezésfélcsoportoknak, annak ellenére, hogy pl. E. SZ. LJAPIN ezek jelentőségét külön hangsúlyozza.

A SZUSKEVICS által megkezdett irányvonalat több szovjet matematikus folytatja (a teljesség igénye nélkül megemlítendők E. SZ. LJAPIN, A. JA. AJZENSTAT, K. A. BAIRAMOV, N. N. VOROBJEV, L. M. GLUSZKIN, B. M. SCHEIN, V. V. WAGNER, A. E. LIEBER, V. A. OGANYESZJÁN, K. A. ZARECKIJ). (A szovjet iskolának a tárgykörre vonatkozó fontosabb dolgozatai a következők: [40], [42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63].)

A szerző mivel sokáig nem tudott A. SZUSKEVICS könyvéhez hozzájutni, több cikkében, amelyeket a leképezésekről írt (lásd [6], [7], [8]) egyes A. SZUSKEVICSnél meglevő eredményeket újra bebizonyított.

Így munkánkban nagy előrelépést jelentett A. SZUSKEVICS munkájának megismerése, ezért a szerző ezúton is köszönetét fejezi ki dr. SCHEINnek és prof. Š. SCHWARZnak, akik A. SZUSKEVICS eredményeivel való megismerkedését könyvének megküldésével, illetve más forrásokra rámutatva elősegítették.

1. Alapfogalmak

A dolgozat véges halmazokkal és algebrai struktúrákkal foglalkozik, ezért a dolgozat szövegében a véges szót elhagyjuk és halmazon, illetve algebrai struktúrán mindig végeset értünk, ellenkező esetben ezt külön jelezzük. Számos véges esetben a vizsgált állítás végtelenre való kiterjesztése [30]-ban megtalálható.

Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a H halmaz elemei az $1, 2, \ldots, n$ természetes egész számok, vagyis $H = \{1, 2, \ldots, n\}$.

A H halmaz önmagára történő leképezését n-ed fokú *permutációnak*, az önmagába való leképezését n-ed fokú *leképezésnek* nevezzük.

H két valódi nem azonos részhalmaza közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést *részleges permutációnak*, ha a megfeleltetés egyértelmű, *részleges leképezésnek* nevezünk. (A részleges leképezést A. SZUSKEVICS [37] könyvében transzmutációnak nevezi.)

A permutációk, leképezések, részleges permutációk, részleges leképezések jelölésére a szokásos írásmódot fogjuk használni.

Példák:

Permutáció
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Leképezés
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

Részleges permutáció
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Részleges leképzés
$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix}$$

Egy leképezést akkor nevezünk *szingulárisnak*, ha H pontosan egy elemének pl. i-nek a képe j nem azonos ősével. Jelölése $\left|\begin{matrix}i\\ j\end{matrix}\right|$. (A szinguláris leképezés fogalma B. JONSSONnál is szerepel, [14]-ben ugyanezt a fogalmat „replacement"-nek nevezi.) Az α leképezés *defektszámának* a különböző képelemek számát nevezzük. α defektszámát D (α)-val jelöljük. Ha α n-ed fokú permutáció, akkor $D(\alpha) = n$, egyébként $D(\alpha) < n$.

Ha α szinguláris leképezés, akkor $D(\alpha) = n-1$. Ha α n-ed fokú leképezés kép-elemei között az i s_i-szer fordul elő, akkor az $(s_1, s_2 \ldots s_n)$ vektort α *típusának* nevezzük. (A permutációk típusa nyilván $(1, 1, \ldots 1)$.)

Az összes n-edfokú permutációk (ezek száma $n!$), a permutációk egymás utáni végrehajtására mint műveletre nézve, csoportot alkotnak, ezt a csoportot n-edfokú *szimmetrikus csoportnak* nevezzük és S_n-nel fogjuk jelölni. Az összes n-edfokú transzformációk (ezek száma n^n) félcsoportot alkotnak az ún. n-edfokú *szimmetrikus félcsoportot*, amelyet F_n-nel fogunk jelölni.

A szorzat defektszámára vonatkozóan F_n-ben érvényes a következő tétel.

1. TÉTEL. *A szorzat defektszáma legfeljebb annyi lehet, mint a tényezők defektszámainak minimuma.*

Bizonyítás. A tételt elég két tényezős szorzatra bizonyítani. Vagyis α, β, γ leképezésekre vonatkozóan álljon fenn az

$$\alpha\beta=\gamma$$

azonosság, ekkor $\min(D(\alpha), D(\beta)) \geqq D(\gamma)$ teljesülését kell igazolni.

Ha

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(n) \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta(1) & \beta(2) & \cdots & \beta(n) \end{pmatrix},$$

akkor

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha\beta(1) & \alpha\beta(2) & \cdots & \alpha\beta(n) \end{pmatrix},$$

így valóban

$$\min(D(\alpha), D(\beta)) \geqq D(\gamma).$$

Annak bemutatására, hogy az eredmény nem élesíthető, vagyis a $\min(D(\alpha),D(\beta))= = D(\gamma)$ is fennállhat, a következő példa szolgáljon:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\min(D(\alpha), D(\beta)) = D(\alpha\beta) = 2.$$

Az 1. tétel bizonyítása megtalálható a CLIFFORD—PRESTON [3] könyv II. kötet 223. oldalán, valamint a szerző [6], [7] dolgozataiban.

Később látni fogjuk, hogy az 1. tétel annak az ismert mátrixelméleti tételnek a következménye, amely szerint a szorzat rangja nem lehet nagyobb, mint a tényezők rangjának minimuma.

Két részleges leképezés

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} l_1 l_2 \cdots l_s \\ k_1 k_2 \cdots k_s \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \bar{\beta} = \begin{pmatrix} m_1 m_2 \cdots m_t \\ n_1 n_2 \cdots n_t \end{pmatrix}$$

szorzata $\bar{\alpha}\bar{\beta}=\bar{\gamma}$ részleges leképezés, amelyet úgy kapunk, hogy

$$K=\{k_1, k_2, \dots, k_s\} \quad \text{és} \quad N=\{n_1, n_2, \dots, n_t\}$$

halmazok metszetében levő $t_1, t_2, \dots, t_r$ elemeket tekintjük, ekkor l_{ji}-vel jelölve t_i $\bar{\alpha}$-beli ősét és n_{i_j}-vel t_i $\bar{\beta}$-beli képét

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} l_{j_1} l_{j_2} \cdots l_{j_r} \\ n_{j_1} n_{j_2} \cdots n_{j_r} \end{pmatrix}, \quad \text{ha} \quad K \cap N = \emptyset$$

akkor $\bar{\gamma}=\emptyset$, ekkor $\bar{\gamma}$-t üres elemnek fogjuk nevezni. $\emptyset$ nyilván zérus elem, mivel tetszőleges α részleges leképezés esetén $\alpha\emptyset=\emptyset\alpha=\emptyset$.

A H halmaz részhalmazain értelmezett leképezések és részleges leképezések az üres elemmel együtt a szorzásra nézve algebrai struktúrát alkotnak, amelyet n-edfokú *részleges szimmetrikus félcsoportnak* fogunk nevezni és F_n^*-nel jelölünk.

Hasonló módon definiálhatjuk az n-edfokú *részleges szimmetrikus csoportot,* ha F_n definíciójában szereplő leképezés szavakat permutációval helyettesítjük. Az n-edfokú részleges szimmetrikus csoportot S_n^*-gal jelöljük.

Az n-edfokú részleges szimmetrikus félcsoport rendje

$$0(F_n^*) = 1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}n^i$$

Az n-edfokú részleges szimmetrikus csoport rendje

$$0(S_n^*) = 1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}^2 i!.$$

Példaként közöljük S_3, F_3, S_3^* és F_3^* műveletelttábláját.

$$0(S_3)=6 \quad 0(F_3)=27 \quad 0(F_3^*)=64 \quad 0(S_3^*)=34$$

S_3 elemei:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 1 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 4 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 5$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 6 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 2 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 3$$

S_3 műveletelttáblája

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	2	5	6	4
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	4	3	1	2
6	6	4	5	2	3	1

F_3 elemei:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 1 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 2 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 3$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 4 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 5 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 6 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 7$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 8 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 9 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 10 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 11$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 12 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 13 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 14 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 15$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 16 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 17 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 18 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 19$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 20 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 21 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 22 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 23$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\leftrightarrow 24 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 25 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\leftrightarrow 26 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\leftrightarrow 27$$

F_3 művelettáblája:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	1	2	3	1	1	1	1	2	3	2	2	2	2	1	3	3	3	3	3	1	2	1	1	2	2	3	3
2	1	2	3	1	2	1	3	1	1	2	1	2	3	2	2	3	1	3	2	3	3	2	3	1	3	1	2
3	1	2	3	2	1	3	1	1	1	1	2	3	2	2	2	1	3	2	3	3	3	3	2	3	1	2	1
4	1	2	3	1	4	1	6	10	16	2	10	2	12	4	18	3	16	3	18	6	12	4	6	10	12	16	18
5	1	2	3	1	5	1	7	11	17	2	11	2	13	5	19	3	17	3	19	7	13	5	7	11	13	17	19
6	1	2	3	4	1	6	1	10	16	10	2	12	2	4	18	16	3	18	3	6	12	6	4	12	10	18	16
7	1	2	3	5	1	7	1	11	17	11	2	13	2	5	19	17	3	19	3	7	13	7	5	13	11	19	17
8	1	2	3	1	8	1	9	14	20	4	14	2	15	8	21	3	20	3	21	9	15	8	9	14	15	20	21
9	1	2	3	8	1	9	1	14	20	14	2	15	2	8	21	20	3	21	3	9	15	9	8	15	14	21	20
10	1	2	3	1	10	1	16	4	6	2	4	2	18	10	12	3	6	3	12	16	18	10	16	4	18	6	12
11	1	2	3	1	11	1	17	5	7	2	5	2	19	11	13	3	7	3	13	17	19	11	17	5	19	7	13
12	1	2	3	4	10	6	16	1	1	10	4	12	18	2	2	16	6	18	12	3	3	12	18	6	16	4	10
13	1	2	3	5	11	7	17	1	1	11	5	13	19	2	2	17	7	19	13	3	3	13	19	7	17	5	11
14	1	2	3	1	14	1	20	8	9	2	8	2	21	14	15	3	9	3	15	20	21	14	20	8	21	9	15
15	1	2	3	8	14	9	20	1	1	14	8	15	21	2	2	20	9	21	15	3	3	15	21	9	20	8	14
16	1	2	3	10	1	16	1	4	6	4	2	18	2	10	12	6	3	12	3	16	18	16	10	18	4	12	6
17	1	2	3	11	1	17	1	5	7	5	2	19	2	11	13	7	3	13	3	21	19	17	11	19	5	13	7
18	1	2	3	10	4	16	6	1	1	4	10	18	12	2	2	6	16	12	18	3	3	18	12	16	6	10	4
19	1	2	3	11	5	17	7	1	1	5	11	19	13	2	2	7	17	13	19	3	3	19	13	17	7	11	5
20	1	2	3	14	1	20	1	8	9	8	2	21	2	14	15	9	3	15	3	20	21	20	14	21	8	15	9
21	1	2	3	14	8	20	9	1	1	8	14	21	15	2	2	9	20	15	21	3	3	21	15	20	9	14	8
22	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
23	1	2	3	5	4	7	6	8	9	11	10	13	12	14	15	17	16	19	18	20	21	23	22	25	24	27	26
24	1	2	3	4	8	6	9	5	7	10	14	12	15	11	13	16	20	18	21	17	19	24	26	22	27	23	25
25	1	2	3	5	8	17	9	4	6	11	14	13	15	10	12	17	20	19	21	16	18	25	27	23	26	22	24
26	1	2	3	8	4	9	6	5	7	14	10	15	12	11	13	20	16	21	18	17	19	26	24	27	22	25	23
27	1	2	3	8	5	9	7	4	6	14	11	15	13	10	12	20	17	21	19	16	18	27	25	26	23	24	22

S_3^* elemei

$$0 \leftrightarrow \varnothing$$

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$4 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$6 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$7 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$8 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$9 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$10 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$11 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$12 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$13 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$14 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$15 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$16 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$17 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$18 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$19 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$20 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$21 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$22 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$23 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$24 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$25 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$26 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$27 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$28 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$29 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$30 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$31 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$32 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$33 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

F_3^* elemei lásd a táblázatot

$$0 \leftrightarrow 0$$

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$4 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$5 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$6 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$7 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$8 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$9 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$10 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$11 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$12 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$13 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	1	2	1	3	2	3	1	2	1	3	2	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3
2	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	2	1	3	1	3	2	0	0	0	0	0	0	1	2	1	3	2	3	2	3	1	3	1	2
3	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	2	1	3	1	2	2	2	1	3	1	3	2	3	2	3	1	2	1
4	0	4	5	6	0	0	0	0	0	0	4	5	4	6	5	6	4	5	4	6	5	6	0	0	0	0	0	0	4	4	5	5	6	6
5	0	0	0	0	4	5	6	0	0	0	5	4	6	4	6	5	0	0	0	0	0	0	4	5	4	6	5	6	5	6	4	6	4	5
6	0	0	0	0	0	0	0	4	5	6	0	0	0	0	0	0	5	4	6	4	6	5	5	4	6	4	6	5	6	5	6	4	5	4
7	0	7	8	9	0	0	0	0	0	0	7	8	7	9	8	9	7	8	7	9	8	9	0	0	0	0	0	0	7	7	8	8	9	9
8	0	0	0	0	7	8	9	0	0	0	8	7	9	7	9	8	0	0	0	0	0	0	7	8	7	9	8	9	8	9	7	9	7	8
9	0	0	0	0	0	0	0	7	8	9	0	0	0	0	0	0	8	7	9	7	9	8	8	7	9	7	9	8	9	8	9	7	8	7
10	0	1	2	3	4	5	6	0	0	0	10	11	12	13	14	15	1	2	1	3	2	3	4	5	4	6	5	6	10	12	11	14	13	15
11	0	4	5	6	1	2	3	0	0	0	11	10	13	12	15	14	4	5	4	6	5	6	1	2	1	3	2	3	11	13	10	15	12	14
12	0	1	2	3	0	0	0	4	5	6	1	2	1	3	2	3	10	11	12	13	14	15	5	4	6	4	6	5	12	10	14	11	15	13
13	0	4	5	6	0	0	0	1	2	3	4	5	4	6	5	6	11	10	13	12	15	14	2	1	3	1	3	2	13	11	15	10	14	12
14	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	2	1	3	1	3	2	5	4	6	4	6	5	10	11	12	13	14	15	14	15	12	13	10	11
15	0	0	0	0	4	5	6	1	2	3	5	4	6	4	6	5	2	1	3	1	3	2	11	10	13	12	15	14	15	14	13	12	11	10
16	0	1	2	3	7	8	9	0	0	0	16	17	18	19	20	21	1	2	1	3	2	3	7	8	7	9	8	9	16	18	17	20	19	21
17	0	7	8	9	1	2	3	0	0	0	17	16	19	18	21	20	7	8	7	9	8	9	1	2	1	3	2	3	17	19	16	21	18	20
18	0	1	2	3	0	0	0	7	8	9	1	2	1	2	3	3	16	17	18	19	20	21	8	7	9	7	9	8	18	16	20	17	21	19
19	0	7	8	9	0	0	0	1	2	3	7	8	7	9	8	9	17	16	19	18	21	20	2	1	3	1	3	2	19	17	21	16	20	18
20	0	0	0	0	1	2	3	7	8	9	2	1	3	1	3	2	8	7	9	7	9	8	16	17	18	19	20	21	20	21	18	19	16	17
21	0	0	0	0	7	8	9	1	2	3	8	7	9	7	9	8	2	1	3	1	3	2	17	16	19	18	21	20	21	20	19	18	17	16
22	0	4	5	6	7	8	9	0	0	0	22	23	24	25	26	27	4	5	4	6	5	6	7	8	7	9	8	9	22	24	23	26	25	27
23	0	7	8	9	4	5	6	0	0	0	23	22	25	24	27	26	7	8	7	9	8	9	4	5	4	6	5	6	23	25	22	27	24	26
24	0	4	5	6	0	0	0	7	8	9	4	5	4	6	5	6	22	23	24	25	26	27	8	7	9	7	9	8	24	22	26	23	27	25
25	0	7	8	9	0	0	0	4	5	6	7	8	7	9	8	9	23	22	25	24	27	26	5	4	6	4	6	5	25	23	27	22	26	24
26	0	0	0	0	4	5	6	7	8	9	5	4	6	4	6	5	8	7	9	7	9	8	22	23	24	25	26	27	26	27	24	25	22	23
27	0	0	0	0	7	8	9	4	5	6	8	7	9	7	9	8	5	4	6	4	6	5	23	22	25	24	27	26	27	26	25	24	23	22
28	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
29	0	1	2	3	7	8	9	4	5	6	16	17	18	19	20	21	10	11	12	13	14	15	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30	33	32
30	0	4	5	6	1	2	3	7	8	9	11	10	13	12	15	14	22	23	24	25	26	27	16	17	18	19	20	21	30	32	28	33	29	31
31	0	7	8	9	1	2	3	4	5	6	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	10	11	12	13	14	15	31	33	29	32	28	30
32	0	4	5	6	7	8	9	1	2	3	22	23	24	25	26	27	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21	20	32	30	33	28	31	29
33	0	7	8	9	4	5	6	1	2	3	23	22	25	24	27	26	17	16	19	18	21	20	11	10	13	12	15	14	33	31	32	29	30	28

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1	3	3	2	3	1	1	2	2	1	3	3	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	1	1	3	2	2	2	1	2	2	3	3	3	3	1	3	3	2	1	1	2	2	3	3
2	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	1	2	1	2	3	1	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1	3	3	2	3	1	1	2	1	1	3	1	2	2	1	2	2	3	2	3	3	1	3	3	2	3	2	3	1	3	1	2
3	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	2	3	1	3	3	2	1	2	1	2	3	1	3	3	2	1	2	1	1	3	1	1	2	1	2	2	3	2	2	3	1	3	3	2	3	3	3	2	3	1	2	1
4	0	4	5	6	0	0	0	0	0	0	4	5	4	5	4	6	6	5	6	4	4	5	5	4	6	6	5	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	4	5	4	4	6	5	5	5	4	5	5	6	6	6	6	4	6	6	5	4	4	5	5	6	6
5	0	0	0	0	4	5	6	0	0	0	4	5	4	5	6	4	6	6	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	5	5	4	6	6	5	6	4	4	5	4	4	6	4	5	5	4	5	5	6	5	6	6	4	6	6	5	6	5	6	4	6	4	5
6	0	0	0	0	0	0	0	4	5	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	5	4	5	6	4	6	6	5	4	5	4	5	6	4	6	6	5	4	5	4	4	6	4	4	5	4	5	5	6	5	5	6	4	6	6	5	6	6	6	5	6	4	5	4
7	0	7	8	9	0	0	0	0	0	0	7	7	8	8	7	9	9	8	9	7	7	8	8	7	9	9	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7	7	8	7	7	9	8	8	8	7	8	8	9	9	9	9	7	9	9	8	7	7	8	8	9	9
8	0	0	0	0	7	8	9	0	0	0	7	8	7	8	9	7	9	9	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7	8	8	7	9	9	8	9	7	7	8	7	7	9	7	8	8	7	8	8	9	8	9	9	7	9	9	8	9	8	9	7	9	7	8
9	0	0	0	0	0	0	0	7	8	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	8	7	8	9	7	9	9	8	7	8	7	8	9	7	9	9	8	7	8	7	7	9	7	7	8	7	8	8	9	8	8	9	7	9	9	8	9	9	9	8	9	7	8	7
10	0	10	13	16	0	0	0	0	0	0	10	10	13	13	10	16	16	13	16	10	13	13	13	10	16	16	13	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	13	10	10	16	13	13	13	10	13	13	16	16	16	16	10	16	16	13	10	10	13	13	16	16
11	0	1	2	3	4	5	6	0	0	0	10	11	12	13	14	15	16	17	18	1	1	2	2	1	3	3	2	3	4	4	5	5	4	6	6	5	6	10	10	11	12	10	14	15	13	13	12	11	13	17	18	16	16	15	14	16	18	17	11	14	12	17	15	18
12	0	4	5	6	1	2	3	0	0	0	10	12	11	13	15	14	16	18	17	4	4	5	5	4	6	6	5	6	1	1	2	2	1	3	3	2	3	10	10	12	11	10	15	14	13	13	11	12	13	18	17	16	16	14	15	16	17	18	12	15	11	18	14	17
13	0	0	0	0	10	13	16	0	0	0	10	13	10	13	16	10	16	16	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	13	13	10	16	16	13	16	10	10	13	10	10	16	10	13	13	10	13	13	16	13	16	16	10	16	16	13	16	13	16	10	16	10	13
14	0	1	2	3	0	0	0	4	5	6	1	1	2	2	1	3	3	2	3	10	11	12	13	14	15	16	17	18	4	5	4	5	6	4	6	6	5	10	11	10	12	14	10	15	13	12	13	11	17	13	18	16	15	16	14	18	16	17	14	11	17	12	18	15
15	0	4	5	6	0	0	0	1	2	3	4	4	5	5	4	6	6	5	6	10	12	11	13	15	14	16	18	17	1	2	1	2	3	1	3	3	2	10	12	10	11	15	10	14	13	11	13	12	18	13	17	16	14	16	15	17	16	18	15	12	18	11	17	14
16	0	0	0	0	0	0	0	10	13	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	13	10	13	16	10	16	16	13	10	13	10	13	16	10	16	16	13	10	13	10	10	16	10	10	13	10	13	13	16	13	13	16	10	16	16	13	16	16	16	13	16	10	13	10
17	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	1	2	1	2	3	1	3	3	2	4	5	4	5	6	4	6	6	5	10	11	12	13	14	15	16	17	18	10	11	12	10	14	15	10	13	12	11	13	17	18	13	16	15	14	16	18	17	16	17	18	14	15	11	12
18	0	0	0	0	4	5	6	1	2	3	4	5	4	5	6	4	6	6	5	1	2	1	2	3	1	3	3	2	10	12	11	13	15	14	16	18	17	10	12	11	10	15	14	10	13	11	12	13	18	17	13	16	14	15	16	17	18	16	18	17	15	14	12	11
19	0	19	22	25	0	0	0	0	0	0	19	19	22	22	19	25	25	22	25	19	19	22	22	19	25	25	22	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	19	19	22	19	19	25	22	22	22	19	22	22	25	25	25	25	19	25	25	22	19	19	22	22	25	25
20	0	1	2	3	7	8	9	0	0	0	19	20	21	22	23	24	25	26	27	1	1	2	2	1	3	3	2	3	7	7	8	8	7	9	9	8	9	19	19	20	21	19	23	24	22	22	21	21	22	26	27	25	25	24	23	25	27	26	20	23	21	26	24	27
21	0	7	8	9	1	2	3	0	0	0	19	21	20	22	24	23	25	27	26	7	7	8	8	7	9	9	8	9	1	1	2	2	1	3	3	2	3	19	19	21	20	19	24	23	22	22	20	21	22	27	26	25	25	23	24	25	26	27	21	24	20	27	23	26
22	0	0	0	0	19	22	25	0	0	0	19	22	19	22	25	19	25	25	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	19	22	22	19	25	25	22	25	19	19	22	19	19	25	19	22	22	19	22	22	25	22	25	25	19	25	25	22	25	22	25	19	25	19	22
23	0	1	2	3	0	0	0	7	8	9	1	1	2	2	1	3	3	2	3	19	20	21	22	23	24	25	26	27	7	8	7	8	9	7	9	9	8	19	20	19	21	23	19	24	22	21	22	20	26	22	27	25	21	25	23	27	25	26	23	20	26	21	27	24
24	0	7	8	9	0	0	0	1	2	3	7	7	8	8	7	9	9	8	9	19	21	20	23	22	25	24	27	26	1	2	1	2	3	1	3	3	2	19	21	19	20	21	19	23	22	20	22	21	26	22	26	25	23	25	24	26	25	27	24	21	27	20	26	23
25	0	0	0	0	0	0	0	19	22	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	22	19	22	25	19	25	25	22	19	22	19	22	25	19	25	25	22	19	22	19	19	25	19	19	22	19	22	22	25	22	22	25	19	25	25	22	25	25	25	22	25	19	22	19
26	0	0	0	0	1	2	3	7	8	9	1	2	1	2	3	1	3	3	2	7	8	7	8	9	7	9	9	8	19	20	21	22	23	24	25	26	27	19	20	21	19	23	24	19	22	21	20	22	26	27	22	25	21	23	25	27	26	25	26	27	23	24	20	21
27	0	0	0	0	7	8	9	1	2	3	7	8	7	8	9	7	9	9	8	1	2	1	2	3	1	3	3	2	19	21	20	23	22	25	24	27	26	19	21	20	19	21	23	19	22	20	21	22	27	26	22	25	23	21	25	26	27	25	27	26	24	23	21	20
28	0	28	31	34	0	0	0	0	0	0	28	28	31	31	28	34	34	31	34	28	28	31	31	28	34	34	31	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28	28	28	31	28	28	34	31	31	31	28	31	31	34	34	34	34	28	34	34	31	28	28	31	31	34	34
29	0	4	5	6	7	8	9	0	0	0	28	29	30	31	32	33	34	35	36	4	4	5	5	4	6	6	5	6	7	7	8	8	7	9	9	8	9	28	28	29	30	28	32	33	31	31	30	29	31	35	36	34	34	33	32	34	36	35	29	32	30	35	33	36
30	0	7	8	9	4	5	6	0	0	0	28	30	29	31	33	32	34	36	35	7	7	8	8	7	9	9	8	9	4	4	5	5	4	6	6	5	6	28	28	30	29	28	33	32	31	31	29	30	31	36	35	34	34	32	33	34	35	36	30	33	29	36	32	35
31	0	0	0	0	28	31	34	0	0	0	28	31	28	31	34	28	34	34	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28	28	31	31	28	34	34	31	34	28	28	31	28	28	34	28	31	31	28	31	31	34	31	34	34	28	34	34	31	34	31	34	28	34	28	31
32	0	4	5	6	0	0	0	7	8	9	4	4	5	5	4	6	6	5	6	19	29	30	31	32	33	34	35	36	7	8	7	8	9	7	9	9	8	28	29	28	30	32	28	33	31	30	31	28	35	31	36	34	33	34	32	36	34	35	32	29	35	30	36	33
33	0	7	8	9	0	0	0	4	5	6	7	7	8	8	7	9	9	8	9	19	30	29	32	31	34	33	36	35	4	5	4	5	6	4	6	6	5	28	30	28	29	33	28	32	31	29	31	30	36	31	35	34	32	34	33	35	34	36	33	30	36	29	35	32
34	0	0	0	0	0	0	0	28	31	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28	31	28	31	34	28	34	34	31	28	31	28	31	34	28	34	34	31	28	31	28	28	34	28	28	31	28	31	31	34	31	31	34	28	34	34	31	34	34	34	31	34	28	31	28
35	0	0	0	0	4	5	6	7	8	9	4	5	4	5	6	4	6	6	5	7	8	7	8	9	7	9	9	8	28	29	30	31	32	33	34	35	36	28	29	30	28	32	33	28	31	30	29	31	35	36	31	34	33	32	34	36	35	34	35	36	32	33	29	30
36	0	0	0	0	7	8	9	4	5	6	7	8	7	8	9	7	9	9	8	4	5	4	5	6	4	6	6	5	28	30	29	31	33	32	34	36	35	28	30	29	28	33	32	28	31	29	30	31	36	35	31	34	32	33	34	35	36	34	36	35	33	32	30	29
37	0	37	44	51	0	0	0	0	0	0	37	37	44	44	37	51	51	44	51	37	37	44	44	37	51	51	44	51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	37	37	44	37	37	51	44	44	44	37	44	44	51	51	51	51	37	51	51	44	37	37	44	44	51	51
38	0	10	13	16	7	8	9	0	0	0	37	38	45	44	41	52	51	48	55	10	10	13	13	10	16	16	13	16	7	7	8	8	7	9	9	8	9	37	37	38	45	38	41	52	44	44	45	38	44	48	55	51	51	52	41	51	55	48	38	41	45	48	52	55
39	0	19	22	25	4	5	6	0	0	0	37	39	46	44	42	53	51	49	56	19	19	22	22	19	25	25	22	25	4	4	5	5	4	6	6	5	6	37	37	39	46	37	42	53	44	44	46	39	44	49	56	51	51	53	42	51	56	49	39	42	46	49	53	56
40	0	28	31	34	1	2	3	0	0	0	37	40	47	44	43	54	51	50	57	28	28	31	31	28	34	34	31	34	1	1	2	2	1	3	3	2	3	37	37	40	47	37	43	54	44	44	47	40	44	50	57	51	51	54	43	51	57	50	40	43	47	50	54	57
41	0	10	13	16	0	0	0	7	8	9	10	10	13	13	10	16	16	13	16	37	38	45	44	41	52	51	48	55	7	8	7	8	9	7	9	9	8	37	38	37	45	41	37	52	44	45	44	38	48	44	55	51	52	51	41	55	51	48	41	38	48	45	55	52
42	0	19	22	25	0	0	0	4	5	6	19	19	22	22	19	25	25	22	25	37	39	46	44	42	53	51	49	56	4	5	4	5	6	4	6	6	5	37	37	37	46	42	37	53	44	44	44	39	49	44	56	51	53	51	42	56	51	49	42	39	49	46	56	53
43	0	28	31	34	0	0	0	1	2	3	28	28	31	31	28	34	34	31	34	37	40	47	44	43	54	51	50	57	1	2	1	2	3	1	3	3	2	37	40	37	47	43	37	54	44	47	44	40	50	44	57	51	54	51	43	57	51	50	43	40	50	47	57	54
44	0	0	0	0	37	44	51	0	0	0	37	44	37	44	51	37	51	51	44	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	37	44	44	37	51	51	44	51	37	37	44	37	37	51	37	44	44	37	44	44	51	44	51	51	37	51	51	44	51	44	51	37	51	37	44
45	0	7	8	9	10	13	16	0	0	0	37	45	38	44	52	45	51	55	48	7	7	8	8	7	9	9	8	9	10	10	13	13	10	16	16	13	16	37	37	45	37	37	52	41	44	44	38	45	44	55	48	51	51	41	52	51	48	55	45	52	38	55	45	48
46	0	4	5	6	19	22	25	0	0	0	37	46	39	44	53	46	51	56	49	4	4	5	5	4	6	6	5	6	19	19	22	22	19	25	25	22	25	37	37	46	39	37	53	42	44	44	39	46	44	56	49	51	51	42	53	51	49	56	46	53	39	56	46	49
47	0	1	2	3	28	31	34	0	0	0	37	47	40	44	54	47	51	57	50	1	1	2	2	1	3	3	2	3	28	28	31	31	28	34	34	31	34	37	37	47	40	37	54	43	44	44	40	47	44	57	50	51	51	43	54	51	50	57	47	54	40	57	47	50
48	0	0	0	0	10	13	16	7	8	9	10	13	10	13	16	10	16	16	13	7	8	7	8	9	7	9	9	8	37	38	45	44	41	52	51	48	55	37	38	45	37	41	52	37	44	45	38	44	48	55	44	51	52	41	51	55	48	51	48	48	41	52	38	45
49	0	0	0	0	19	22	25	4	5	6	19	22	19	22	25	19	25	25	22	4	5	4	5	6	4	6	6	5	37	39	40	44	42	53	51	49	56	37	39	46	37	42	53	37	44	46	39	44	49	56	44	51	53	42	51	56	49	51	49	49	42	53	39	46
50	0	0	0	0	28	31	34	1	2	3	28	31	28	31	34	28	34	34	31	1	2	1	2	3	1	3	3	2	37	40	47	44	43	54	51	50	57	37	40	47	37	43	54	37	44	47	40	44	50	57	44	51	54	43	51	57	50	51	50	50	43	54	40	47
51	0	0	0	0	0	0	0	37	44	51	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	44	37	44	51	37	51	51	44	37	44	37	44	51	37	51	51	44	37	44	37	37	51	37	37	44	37	44	44	51	44	44	51	37	51	51	44	51	51	51	44	51	37	44	37
52	0	7	8	9	0	0	0	10	13	16	7	7	8	8	7	9	9	8	9	37	45	38	44	52	41	51	55	48	10	13	10	13	16	10	13	16	13	37	45	37	38	52	37	41	44	38	44	45	55	44	48	51	41	51	52	48	51	55	52	45	55	38	48	41
53	0	4	5	6	0	0	0	19	22	25	4	4	5	5	4	6	6	5	6	37	46	39	44	53	42	51	56	49	19	22	19	22	25	19	22	25	22	37	46	37	39	53	37	42	44	39	44	46	56	44	49	51	42	50	53	49	51	56	53	46	56	39	49	42
54	0	1	2	3	0	0	0	28	31	34	1	1	2	2	1	3	3	2	3	37	47	40	44	54	43	51	57	50	28	31	28	31	34	28	31	34	31	37	47	37	40	54	37	43	44	40	44	47	57	44	50	51	43	51	54	50	51	57	54	47	57	40	50	43
55	0	0	0	0	7	8	9	10	13	16	7	8	7	8	9	7	9	9	8	10	13	10	13	16	10	16	16	13	37	45	38	44	52	41	51	55	48	37	45	38	37	52	41	37	44	38	45	44	55	48	44	51	41	52	51	48	55	51	55	55	52	41	45	38
56	0	0	0	0	4	5	6	19	22	25	4	5	4	5	6	4	6	6	5	19	22	19	22	25	19	25	25	22	37	46	39	44	53	42	51	56	49	37	46	39	37	53	42	37	44	39	46	44	56	49	44	51	42	53	51	49	56	51	56	56	53	42	46	39
57	0	0	0	0	1	2	3	28	31	34	1	2	1	2	3	1	3	3	5	28	31	28	31	34	28	34	34	31	37	47	40	44	54	43	51	57	50	37	47	40	37	54	43	37	44	40	47	44	57	50	44	51	43	54	51	50	57	51	57	57	54	43	47	40
58	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
59	0	1	2	3	7	8	9	4	5	6	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	11	12	13	14	15	16	17	18	28	30	29	31	33	32	34	36	35	37	39	38	40	42	41	43	44	46	45	47	49	48	50	51	53	52	54	56	55	57	59	58	61	60	63	62
60	0	4	5	6	1	2	3	7	8	9	10	12	11	13	15	14	16	18	17	28	29	30	31	32	33	34	35	36	19	20	21	22	23	24	25	26	27	37	38	40	39	41	43	42	44	46	47	45	49	50	48	51	52	54	53	55	57	56	60	62	58	63	59	61
61	0	7	8	9	1	2	3	4	5	6	19	21	20	22	24	23	25	27	26	28	30	29	31	33	32	34	36	35	10	11	12	13	14	15	16	17	18	37	39	40	38	42	43	41	44	46	47	45	49	50	48	51	53	54	52	56	57	55	61	63	59	62	58	60
62	0	4	5	6	7	8	9	1	2	3	28	29	30	31	32	33	34	35	36	10	12	11	13	15	14	16	18	17	19	21	20	22	24	23	25	27	26	37	40	38	39	43	41	42	44	47	45	46	50	49	48	51	54	52	53	57	55	56	62	60	63	58	61	59
63	0	7	8	9	4	5	6	1	2	3	28	30	29	31	33	32	34	36	35	19	21	20	22	24	23	25	27	26	10	12	11	13	15	14	16	18	17	37	40	39	38	43	42	41	44	45	46	45	50	49	48	51	54	53	52	57	56	55	63	61	62	59	60	58

$$14 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$15 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$16 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$17 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$18 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$19 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$20 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$21 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$23 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$24 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$25 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$26 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$27 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$28 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$29 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$30 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$31 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$32 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$33 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$34 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$35 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$36 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$37 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$38 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$39 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$40 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$41 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$42 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$43 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$44 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$45 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$46 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$47 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$48 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$49 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$50 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$51 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$52 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad 58 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$53 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 59 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$54 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad 60 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$55 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad 61 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$56 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad 62 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$57 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad 63 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

lásd a táblázatot

Nyilvánvalóan fennállnak a következő relációk:

1. $F_n^* \supset F_n \supset S_n$
2. $F_n^* \supset S_n^* \supset S_n$

V. A. OGANESZJAN [55], [56], [57] dolgozataiban számos eredmény található S_n^*-re vonatkozóan.

Ismeretes a *Cayley*-féle ábrázolási tételnek a következő általánosítása:

2. TÉTEL. *Egy tetszőleges S absztrakt $n-1$ rendű félcsoport izomorf módon ábrázolható F_n egy alkalmasan választott részstruktúrájával.*

Bizonyítás. Jelölje $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ S elemeit. Ehhez az S és T között izomorfiát létesítő α leképezést megadhatjuk a következőképpen

$$a_i \overset{\alpha}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1a_i & a_2a_i & \cdots a_{n-1} & a_1a_i \end{pmatrix}$$

α művelettartó, mivel

$$a_j \overset{\alpha}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1a_j & a_2a_j & \cdots a_{n-1}a_j & a_ja_j \end{pmatrix}$$

így

$$a_ia_j \overset{\alpha}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1a_ia_j & a_2a_ia_j & \cdots a_{n-1}a_ia_j & a_ia_j \end{pmatrix}$$

és

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1a_i & a_2a_i & \cdots a_{n-1}a_i & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1a_j & a_2a_j & \cdots a_{n-1}a_j & a_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_1a_ia_j & a_2a_ia_j & \cdots a_{n-1}a_ia_j & a_ia_j \end{pmatrix},$$

α kölcsönösen egyértelmű, mivel a_n képe minden leképezésben különböző.

A bizonyításban szereplő ábrázolást *reguláris ábrázolásnak* fogjuk nevezni.

KOROLLÁRIUM. *Ha S-nek van bal-egysége, akkor F_{n-1}-ben izomorf módon ábrázolható.*

A *Cayley*-tétel különböző általánosításaira vonatkozó eredményeket tartalmaznak az [29], [57], [65] dolgozatok. További eredményeket és bizonyításokat találhat az olvasó [3] 30. oldalán.

A permutációk és permutációcsoportok gráf ábrázolását A. CAYLEY vizsgálta (lásd [2]). Mivel minden absztrakt csoport izomorf módon ábrázolható permutációcsoportként, ezért a *Cayley*-féle gráf-ábrázolás is alkalmazható tetszőleges absztrakt csoportra. A *Cayley*-féle ábrázolás néhány tulajdonságának leírása megtalálható pl. [17]-ben.

Tetszőleges n-edfokú leképezéshez hozzárendelhető egy $1, 2, \ldots, n$ természetes egész számokkal jelölt n szögpontú irányított gráf, amely összefüggő elemidegen részgráfokból áll.

A megfeleltetés módja a következő, ha a leképezés az i-t a j-be viszi át, akkor az i-ből a j-be irányuló élet tartalmaz a gráf.

Ezt a megfeleltetést A. SZUSKEVICS vezette be (lásd [36]).

A megfeleltetés útján nyert gráfokat leképezés gráfoknak fogjuk nevezni, ha a leképezés fokszáma n, akkor a leképezés gráfot $F(n)$ gráfnak fogjuk jelölni.

Az $F(n)$ gráfokat végtelen fokszám esetén O. ORE vizsgálta [24].

Az $F(n)$ gráfok bizonyos számossági tulajdonságait több szerző, pl. R. L. DAVIS [5], F. HARARY [12], L. KATZ [16], RÉNYI A. [28] és a jelen dolgozat szerzője [8] vizsgálta.

Az $F(n)$ gráfok száma az n-edfokú leképezésekkel való kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés miatt $O(F_n)$ vagyis n^n. A megfeleltetés felhasználása nélkül ez a leszámolási feladat sokkal bonyolultabb.

A részleges leképezések hasonló módon történő gráfábrázolásával M. YOELI foglalkozott [39].

A szerző [6]-ban elsőnek gondolt arra, hogy a *Cayley*-féle gráf ábrázolás általánosításaként a leképezések A. SZUSKEVICStől eredő gráfábrázolását a következőkben leírt módon fejlessze tovább.

Jelöljük S absztrakt n-edrendű félcsoport, reguláris ábrázolásával nyert, leképezésfélcsoportot T-vel.

Készítsük el T elemeihez tartozó $F(n+1)$ gráfokat és minden egyes gráf éleit a megfelelő T-beli elemmel jelöljük meg, majd az így nyert gráfokat szuperponálva nyerjük T, illetve *S általánosított Cayley-gráfját.* Eredetileg CAYLEY az élek számozása helyett színezést alkalmazott, ezért a CAYLEY ábrázolással nyert gráfot szokás *Cayley* színes gráfnak is nevezni.

Legyen S a következő művelettáblával jellemzett hatodrendű félcsoport

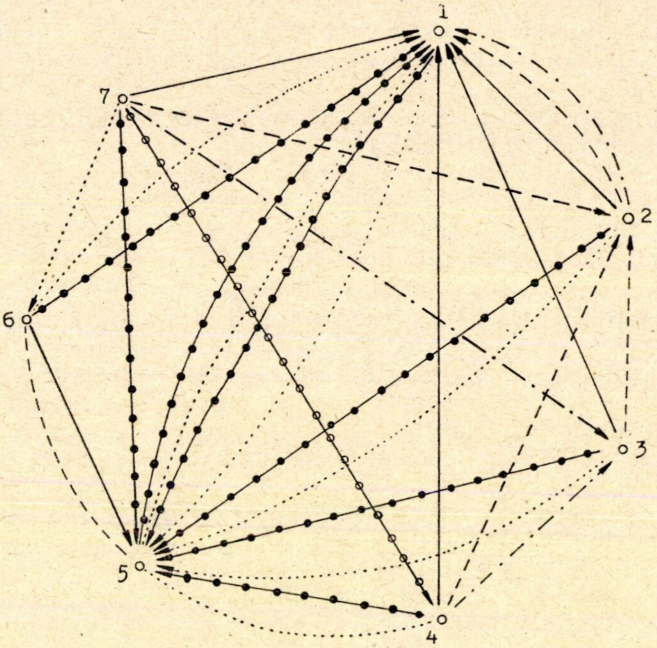
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	5	5
2	1	1	1	1	5	5
3	1	2	3	3	5	5
4	1	2	3	4	5	5
5	5	5	5	5	1	1
6	5	5	6	6	1	1

T elemei:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&1&1&5&5&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&2&2&5&5&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&3&3&5&6&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&5&6&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&5&5&5&1&1&5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&5&5&5&1&1&6\end{pmatrix}.$$

Az S-hez, illetve T-hez rendelt általánosított *Cayley*-gráf tehát a következő:



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&1&1&5&5&1\end{pmatrix} \quad 1$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&2&2&5&5&2\end{pmatrix} \quad 2$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&1&3&3&5&6&3\end{pmatrix} \quad 3$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&5&6&4\end{pmatrix} \quad 4$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&5&5&5&1&1&5\end{pmatrix} \quad 5$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&5&5&5&1&1&6\end{pmatrix} \quad 6$$

Minden $F(n)$ gráfhoz rendelhető a szokásos módon egy *adjecencia mátrix*, vagyis egy olyan 0, 1 elemekből álló $\|a_{ij}\|$ négyzetes mátrix, amelynek a_{ij} eleme 1, ha az $F(n)$ gráf i szögpontjából j-be irányított él indul, 0 egyébként.

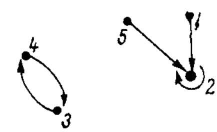
Az $F(n)$ gráfokhoz tartozó adjecencia mátrixokat *leképezés mátrixoknak* fogjuk nevezni. (CLIFFORD, PRESTON [3] I. köt. 116. oldalon és II. köt. 280. oldalon foglalkozik a leképezés mátrixokkal és ezeket „row monomial" mátrixoknak nevezi. További eredmények találhatók a félcsoportok mátrix ábrázolására pl. [67]-ben.) A leképezés mátrixok a permutáló mátrixok általánosításaként tekinthetők, egy további általánosítás, ha az összes $n \times n$ méretű 0, 1 mátrixokat tekintjük. Ezek a szokásos mátrix szorzásra nézve egy, a bináris relációk félcsoportjával izomorf félcsoportot alkotnak, ha a 0, 1 között a logikai összeadás, illetve szorzás van definiálva. Ezt a félcsoportot B_n-nel jelöljük és könnyen belátható, hogy B_n rendje 2^{n^2}, valamint fennáll $F_n \subset B_n$ is, ha $n > 1$. A B_n mátrix ábrázolása is felfogható mint gráfok adjecencia mátrixa és így adódik B_n gráf ábrázolása is. Ez utóbbi gráf-ábrázolás eltér az általánosított *Cayley*-gráftól. B_n számos tulajdonságát vizsgálták, lásd pl. [32]. A leképezések olyan általánosítását, hogy bármely 0, 1 négyzetes mátrixhoz tartozzék egy leképezés, már G. ANDREOLI ismerte (lásd [1]).

A következőkben bevezetésre kerülő fogalmak egy részét a későbbiekben ki fogjuk terjeszteni B_n elemeire.

Egy $F(n)$ gráf olyan diszjunkt gyengén összefüggő komponensekre esik szét, amelyek mindegyike egy irányított kört és a körbe irányuló fákat tartalmaz.

Például:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

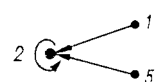


Az $F(n)$ gráf egy összefüggő komponenséhez tartozó leképezést *általánosított ciklusnak* nevezzük. Ez az elnevezés azért indokolt, mivel permutáció esetén a megfelelő gráfban levő komponensekhez az elemidegen ciklusok tartoznak. Az előző példában szereplő leképezés általánosított ciklusokra való felbontása a következő

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nyilvánvaló a következő megfeleltetés

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

A permutációkra ismeretes azon tétel, amely szerint egy permutáció elemidegen ciklusokra való felbontása a ciklusok sorrendjétől eltekintve csak egyféleképpen történhet, kiterjeszthető leképezésekre is, ha a ciklus szót általánosított ciklussal helyettesítjük.

Hagyjuk el egy $F(n)$ gráfból a körbe irányuló fákat a körben levő gyökérpontoktól eltekintve. Ekkor egy olyan speciális $F(k)$ $(k \leqq n)$ gráfot nyerünk, amely irányított körökből áll és ezért az így nyert $F(k)$ gráfnak egy permutáció felel meg. Ezt a permutációt a leképezés *főpermutációjának* nevezzük. Például az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ leképezés főpermutációja a}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ permutáció.}$$

α leképezés főpermutációját $f(\alpha)$-val fogjuk jelölni.

3. TÉTEL. *Tetszőleges leképezés előállítható*
a) *ciklusok és szinguláris leképezések*
b) *transzpozíciók és szinguláris leképezések szorzataként.*

Bizonyítás. Legyen α tetszőleges leképezés, akkor felírható $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$ általánosított ciklusok szorzataként vagyis

$$\alpha = \prod_{i=1}^{r} \alpha_i .$$

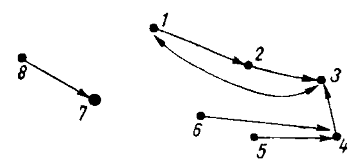
Továbbá $\alpha_i = f(\alpha_i)\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_s$, ahol $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ szinguláris leképezések, amelyek α_i gráf ábrázolásában a köröktől távolodó (vagyis az irányítással ellentétes) irányban levő éleknek felelnek meg. Ezzel az a) állítást igazoltuk.

Mivel $f(\alpha_i)$ transzpozíciók szorzatára bonthatósága jól ismert, a b) állítás is bizonyítást nyert.

KOROLLÁRIUM. *Az összes n-edfokú transzpozíciók és szinguláris leképezések F_n-t generálják.*

A 3. tétel állításának szemléltetésére szolgál a következő példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3) \left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}6\\4\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}8\\7\end{matrix}\right| = (1\ \ 2)(1\ \ 3) \left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}6\\4\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}8\\7\end{matrix}\right|$$

Könnyű példát találni annak bizonyítására, hogy a permutációk körében érvényes tétel, amely szerint egy permutáció tetszőleges két különböző transzpozíció szorzat alakjában történő előállításában a tényezők számának paritása nem változik, leképezésekre nem vihető át. Például:

$$\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}3\\5\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right| .$$

Legyen W F_n-beli transzpozíciókból és szinguláris leképezésekből álló halmaz, ekkor W-hez hozzárendelhetünk $2n$ számozott szögponttal rendelkező gráfot, amely

i és j-vel jelzett szögpontjait akkor köti össze él, ha $(ij) \in W$, továbbá $\begin{vmatrix} l \\ k \end{vmatrix} \in W$ esetén az $l+n$ és $k+n$ jelzésű szögpontokat $l+n$ szögpontból irányított él köti össze. Az így nyert W-hez tartozó $2n$ szögpontú gráfot *általánosított Pólya-gráfnak* nevezzük és $P(W)$-vel jelöljük. PÓLYA GY. alapvető gráfelméleti dolgozatában (lásd [27]) S_n-beli transzpozíciókból álló halmaz gráf ábrázolását oly módon végezte, hogy $P(W)$ a *Pólya*-féle eljárás természetes általánosításának tekinthető.

A hatványozás segítségével F_n elemei két osztályba sorolhatók. Az egyik osztályba tartoznak azon α leképezések, amelyekre létezik olyan s hatványkitevő, hogy $\alpha = \alpha^s$ fennálljon, a másik osztály olyan leképezésekből áll, amelyekre ilyen s nem létezik. Ez utóbbi esetben jelöljük $h(\alpha)$-val azt a legkisebb hatványkitevőt, amelyre $\alpha^{h(\alpha)} = \alpha^s$ fennáll, vagyis $\alpha^{h(\alpha)}$ nem esik α osztályába. $\{\alpha\}$ nem csoport $\{\alpha^{h(\alpha)}\}$ pedig csoport. $h(\alpha)$-t A. SZUSKEVICS [37]-ben módnak, Š. SCHWARZ [31]-ben előperiódusnak, STEINFELD O. [35]-ben második invariánsnak nevezte. Az α-hoz tartozó leképezés gráf maximális famagassága, mint az könnyen látható éppen $h(\alpha)$.

4. TÉTEL. *Az α leképezés által generált struktúra $\{\alpha\}$ akkor és csak akkor csoport, ha α-hoz tartozó leképezés gráfban a legnagyobb famagasság legfeljebb 1.*

Bizonyítás. A hatványozás során a kettő vagy annál nagyobb famagasságok csökkennek. Vagyis ha α famagasságainak maximuma $h(\alpha) \geqq 2$, akkor $h(\alpha^2) \leqq \leqq h(\alpha) - 1$. Ezért, ha $h(\alpha) \geqq 2$, akkor $\alpha = \alpha^s$ nem állhat fenn és így $\{\alpha\}$ nem lehet csoport.

Tegyük fel, hogy $h(\alpha) \leqq 1$. $h(\alpha) = 0$ esetben α permutáció és így $\{\alpha\}$ csoport. Ha $h(\alpha) = 1$, akkor az 1. tétel miatt $h(\alpha^r) = 1$ tetszőleges r esetén ezért és α fokszámának végessége miatt $\{\alpha\}$ csoport.

1. KOROLLÁRIUM. *α akkor és csak akkor eleme F_n egy részcsoportjának, ha $h(\alpha) \leqq 1$.*

2. KOROLLÁRIUM. *Ha $h(\alpha) \geqq 4$, akkor α által generált $\{\alpha\}$ ciklikus félcsoportnak van olyan részfélcsoportja, amely nem ciklikus.*

Bizonyítás. $\{\alpha^3, \alpha^2\}$ nem lehet ciklikus, ugyanis, ha ciklikus lenne, akkor $\{\alpha^2, \alpha^3\} = \{\alpha^2\}$ teljesülne, ez azonban $\alpha^3 \notin \{\alpha^2\}$ miatt lehetetlen.

A továbbiakban annak szükséges és elégséges feltételét is meg fogjuk adni, hogy F_n két eleme mikor generál egy részcsoportot.

5. TÉTEL. $0(\alpha) = h(\alpha) - 1 + 0(f(\alpha))$, *ha* $h(\alpha) \geqq 1$. 1, *ahol* $0(\alpha)$ *α rendjét jelöli.*

Bizonyítás. Ha $h(\alpha) \geqq 2$, akkor $h(\alpha)$ az a legkisebb hatványkitevő, amire α-t felemelve olyan elemet kapunk, hogy $\alpha^{h(\alpha)} = \alpha^r$ egyenlet megoldható legyen.

A legkisebb r megoldás éppen $0(f(\alpha))$ vagyis $\alpha^{h(\alpha)} = \alpha^{0(f(\alpha))}$. Így a különböző α hatványok $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{h(\alpha)} \ldots \alpha^{0(f(\alpha))-1}$, tehát $0(\alpha) = h(\alpha) + 0(f(\alpha)) - 1$.

Az 5. tétel más bizonyításai megtalálhatók a következő dolgozatokban [6], [7], valamint CLIFFORD, PRESTON [3] I. kötet 20. oldal 1.9. tétel.

A. H. CLIFFORD, G, B. PRESTON [3] I. kötet 27 oldalon V. V. VAGNERT követve (lásd [59]) α leképezés *inverzének* nevezi β-t, ha $\alpha\beta\alpha = \alpha$ és $\beta\alpha\beta = \beta$ azonosságok egyidejűleg teljesülnek.

Az eddig bevezetett fogalmak segítségével egy kváziinverz fogalmat fogunk bevezetni, amely különbözik a VAGNER-féle inverztől, s amelyet általánosított inverznek fogunk nevezni. A két inverz fogalom egymáshoz való viszonyát a későbbiek folyamán fogjuk vizsgálni.

Könnyű belátni (lásd [30]), hogy ha α n-ed fokú leképezés, akkor $f(\alpha^k) = (f(\alpha))^k$, ezért, ellentmondás mentes a következő definíció:

Ha s az a legkisebb hatványkitevő, amelyre α leképezést emelve az $f(\alpha^s) = (f(\alpha))^{-1}$ egyenlőség teljesül, akkor α^s-t α *kváziinverzének* nevezzük. α kváziinverzét α^{-1}-gyel fogjuk jelölni, hiszen ha α permutáció, akkor α kváziinverze megegyezik az inverzével. Ez a jelölésmód azért nem zavaró, mert az általánosított inverzet, amelyet hasonlóan szokás jelölni, igen ritkán fogjuk használni és a jelölést kizárólag a kváziinverz részére tartjuk fel.

A kváziinverz fogalma kiterjeszthető periodikus félcsoportokra, vagyis olyan félcsoportokra, amelyekben az összes elem végesrendű.

A kváziinverz felhasználásával a kommutátor és a kommutátor részfélcsoport fogalmát természetes módon tudjuk definiálni.

A kváziinverz fogalma kiterjeszthető a reguláris ábrázoláson keresztül absztrakt félcsoportokra is.

Legyen S absztrakt félcsoport az $aba^{-1}b^{-1}$ $(a, b \in S)$ elemeket *kommutátoroknak* nevezzük és az általuk generált részstruktúrát *kommutátor részfélcsoportnak*. A szerző vizsgálta a kommutátor részfélcsoport néhány tulajdonságát ([7], [9]). A kommutátor láncot a csoportokhoz hasonló módon értelmezzük. Így lehetőség nyílik a feloldható félcsoportok bevezetésére; egy félcsoportot *feloldhatónak* nevezünk, ha kommutátorláncának utolsó eleme idempotens.

Az S félcsoport I részfélcsoportját *balideálnak* nevezzük, ha tetszőleges $a \in S$ esetén $aI = I$. Hasonló módon, ha $Ia = I$, akkor I *jobbideál.* Ha I bal- és jobbideál, akkor *ideálnak* nevezzük. S egy nem üres A részhalmaza *kváziideál,* ha $AS \cap SA \subseteq A$ (lásd [33]).

Elemi balideálnak fogjuk nevezni és L_X-szel jelölni T leképezés félcsoport azon részfélcsoportját, amely T összes olyan elemeit tartalmazza, amelyekben képelemenként szereplő betűk az X halmaz elemei.

Egy S félcsoport B részfélcsoportja *biideál,* ha $BSB \subseteq B$.

Legyen S egységelemes félcsoport. Ha p és q két tetszőleges olyan eleme S-nek, hogy $pq = e$ (e jelöli S egységelemét) teljesül, akkor p-t q *balinverzének* és q-t p *jobbinverzének* nevezzük. A *jobb (bal) egység* S-ben definíció szerint egy olyan elem, amelynek van jobb (bal) inverze S-ben. Ha egy $a \in S$ jobb és bal egység, akkor *egység.*

A kváziinverz segítségével a normálosztó fogalma is kiterjeszthető félcsoportokra. S félcsoport R részfélcsoportját akkor nevezzük *normális részfélcsoportnak* vagy *normálosztónak,* ha tetszőleges S-beli a elemre $aRa^{-1} \subseteq R$ teljesül.

2. F_n algebrai tulajdonságai

F_n összes ideáljainak leírását A. M. Malcev [20]-ban végezte el.

Jelölje $I_{(n,m)}$ F_n-nek olyan elemeiből álló halmazát, amelynek defektszáma legfeljebb m. Ekkor érvényes a

6. Tétel. *F_n összes ideáljai az $I_{(n,m)}$ $m = 1, 2, \ldots, n$ halmazok.*

Bizonyítás. Az 1. tételből következik, hogy $I_{(n,m)}$ ideál, így csak azt kell belátni, hogy F_n tetszőleges ideálja az $I_{(n,m)}$ halmazok valamelyikével megegyezik.

Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben létezik olyan I ideál, amely nem egyezik meg semmilyen m-re $I_{(n,m)}$-mel.

Jelölje k azt a legkisebb természetes egész számot, amelyre fennáll $I \subseteq I_{(n,k)}$. Legyen $\alpha \in I_{(n,k)}$ és k definíciója miatt létezik olyan β elem I-ben, hogy $D(\beta) \geqq D(\alpha)$. Ekkor α β által generált F_n-beli főideálhoz tartozik, (lásd CLIFFORD—PRESTON [3] 52. oldal), így $\alpha \in I$ ebből következik, hogy $I_{(n,k)} \geqq I$, vagyis $I_{(n,k)} = I$.

KOROLLÁRIUM. *F_n-ben levő összes szinguláris leképezések $I_{(n,\, n-1)}$ ideált generálják.*

Bizonyítás. Az 1. és 3. tétel alkalmazásával a 6. tétel közvetlen következménye. A 6. tétel kiterjesztése tetszőleges leképezésfélcsoportra K. A. ZARECKIJ [40] munkájában található. A 6. tétel korolláriumánál gyengébb állítás szerepel [66]-ban.

F_n ideáljainak leírása után térjünk át F_n normálosztóira. Nyilvánvaló, hogy minden ideál normálosztó, az állítás megfordítása nem igaz. Ennek bemutatására vonatkozik a következő tétel.

7. TÉTEL. *F_n kommutátor részfélcsoportja normálosztó, de nem ideál.*

Bizonyítás. Először azt fogjuk belátni, hogy F_n kommutátor részfélcsoportja $K_n = (F_n \setminus S_n) \cup A_n$, ahol A_n az n-edfokú alternáló csoportot jelöli. Mint ismeretes, S_n kommutátor részcsoportja A_n, így $A_n \subseteq K_n$. Az összes szinguláris leképezések, mivel ezek kommutátorok, elemei K_n-nek. A 3. tétel bizonyításánál felhasznált konstrukcióból egyszerűen következik, hogy F_n minden olyan α eleme, amelyre $f(\alpha)$ páros, szinguláris leképezések és páros permutációk szorzataként előállítható. Be fogjuk látni, hogy K_n összes eleme is előállítható a fenti módon. Mivel egy tetszőleges leképezés előállítható elemidegen általánosított ciklusok szorzataként, így elég olyan α leképezésre szorítkozni, amely egyetlen általánosított ciklusból áll.

Legyen

$$\alpha = (1\,2 \cdots n)\begin{vmatrix} n \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n-1 & n \\ 2 & 3 \cdots \;\; 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ha } n \text{ páratlan, akkor } (1\,2 \cdots n),\ \begin{vmatrix} n \\ 1 \end{vmatrix} \in K_n$$

így $\alpha \in K_n$. Az eljárást iterálva nyerhetjük, hogy tetszőleges olyan leképezés, amely nem permutáció és főpermutációja páratlan, eleme K_n-nek, ha n páros, akkor a bizonyítás hasonló módon történik, azonban n helyére $n-1$ kerül. Tehát azt nyertük, hogy F_n kommutátor részfélcsoportja $K_n \cdot A_n$-nel való analógia kedvéért K_n-et az *n-edfokú alternáló félcsoportnak* fogjuk nevezni.

Legyen α páratlan permutáció $\alpha K_n \subsetneqq K_n$, így K_n nem ideál. Azonban az 1. tétel felhasználásával triviálisan adódik, hogy tetszőleges $\alpha \in F_n$ esetén $\alpha K_n \alpha^{-1} \subseteq K_n$.

N. ITO [13] és O. ORE [25] egymástól függetlenül bebizonyították, hogy $n \geqq 5$ esetén A_n minden eleme kommutátor. A szerző azt sejti, hogy hasonló eredmény igaz K_n-re is, vagyis $K_n (n \geqq 5)$ összes eleme kommutátor (lásd [9]). K_n és A_n közötti analógiára további adalékot nyújt a 8. tétel. A 8. tétel (lásd [9]) azon ismert csoportelméleti eredmény kiterjesztése félcsoportokra, amely szerint A_n kommutátor részcsoportja önmaga.

8. TÉTEL. *K_n kommutátor részfélcsoportja önmaga.*

Bizonyítás. Mivel a páros permutációk és a szinguláris leképezések elemei K_n-nek és ezek egyben generálják is K_n-et, így K_n kommutátor részfélcsoportja önmaga.

9. TÉTEL. *F_n összes normálosztói K_n és $I_{(n,m)}$, $m=1, 2, \ldots, n$, valamint $I_{(n,n-1)} \cup \varepsilon$, ahol ε az egység permutációt jelöli.*

Bizonyítás. A 6. és a 7. tétel, valamint triviális meggondolások biztosítják, hogy K_n, $I_{(n,n-1)} \cup \varepsilon$, $I_{(n,m)}$ $m=1, 2 \ldots n$ részfélcsoportok normálosztók, így csak annak bizonyítása marad hátra, hogy F_n-nek nincs egyéb normálosztója.

A bizonyítás első lépéseként tegyük fel, hogy F_n N normálosztójában van olyan elem, amely permutáció, ekkor nyilván $\varepsilon \in N$. Ebből következik, hogy N tartalmazza F_n összes szinguláris leképezését. Ennek belátására jelölje σ_i $i=1, 2, \ldots, (n-1)^2$ F_n szinguláris leképezéseit, így fennáll a $\sigma_i \varepsilon \sigma_i^{-1} = \sigma_i$ azonosság, vagyis $\sigma_i \in N$. Nyilvánvalóan σ_i segítségével F_n minden idempotens eleme, amely különbözik az egység permutációtól előállítható. J. M. HOWIE bebizonyította (lásd [66]), hogy F_n az egység permutációtól különböző idempotensei által generált részfélcsoport $I_{(n,n-1)}$. (Erősebb állítás is igaz, lásd a 6. tétel korolláriumát.) Így nyilván N csak $I_{(n,n-1)} \cup N_n$ alakú lehet, ahol N_n S_n normálosztója. Mint ismeretes, ha $n \geqq 3$, akkor S_n egyetlen valódi normálosztója A_n, esetünkben azonban ε-t is egyetlen elemből álló normálosztónak kell tekintenünk. $n=2$ esetén $K_n = I_{(n,n-1)} \cup \varepsilon$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy N nem tartalmaz permutációt, valamint hogy $I_{(n,k)} \subset N$ és $I_{(n,k+1)} \not\subset N$. Ekkor létezik olyan $k+1$ defektű α eleme F_n-nek, hogy $\alpha \in N$. Ha $\pi_1, \pi_2 \ldots, \pi_{n!}$ jelöli S_n elemeit, akkor N normálosztó tulajdonsága miatt $\pi_i \alpha \pi_i^{-1} \in N$ $(i=1, 2, \ldots, n!)$. Következésképpen N-nek tartalmaznia kell F_n összes α-val azonos típusú elemét. Könnyű belátni, hogy alkalmas σ szinguláris leképezés esetén $\sigma\alpha = \beta$ oly módon, hogy α és β típusa különböző. Továbbá az is igaz, hogy ha σ_{ij}-vel szinguláris leképezéseket jelölünk, akkor $\prod_{j=1}^{m} \sigma_{ij}\alpha = \beta$ alakban előállítható β elemek olyanok lesznek, hogy F_n tetszőleges $k+1$ defektű elem típusához tartozni fog legalább egy β. Következésképpen $\pi_i \beta \pi_i^{-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n!)$ alakban F_n tetszőleges $k+1$ defektű leképezése előáll. Vagyis $I_{(n,k+1)} \not\subset N$ feltétel nem teljesülhet, ha $\alpha \in N$ $k+1$ defektű. Így adódik a tétel állításának helyessége, ha N legnagyobb defektű elemének defektszáma $m (m < n)$, akkor $N = I_{(n,m)}$. A normálosztók vizsgálata után rátérünk a maximális csoportok leírására. Először a következőkben többször idézett 10. tételt fogjuk bebizonyítani, amely szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy két leképezés mikor lehet eleme ugyanannak a csoportnak.

10. TÉTEL. *Legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ n-edfokú leképezések. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ struktúra csoport legyen az, hogy*

1. *$f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_r)$ elemhalmaza megegyezzék,*
2. *$h(\alpha)_i \leqq 1$ $i=1, 2, \ldots, r$,*
3. *legyen $m \notin f(\alpha_i)$ $i=1, 2, \ldots, r$, akkor ha $\alpha_i(m) = m_i$ és legyen j_i az egyetlen olyan betű, amelyre fennáll, hogy $j_i \in f(\alpha_i)$, és $\alpha_i(j_i) = m_i$, akkor $j_1 = j_2 = \ldots = j_r$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az 1. feltétel nem teljesül. Ekkor $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ nem lehet csoport, mert legalább két idempotens elemet tartalmaz. Amennyiben a 2. feltétel nem teljesül egy α_j elemre, akkor $\{\alpha_j\}$ nem csoport és így $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ sem lehet csoport. A 3. feltétel szükségessége a következő módon látható be: $k \notin f(\alpha_i)$ és az egyetlen elem $j_i \in f(\alpha_i)$, úgy hogy fennáll $\alpha(j_i) = k_i$. Mivel $\{\alpha_i, \alpha_2, \ldots \alpha_r\}$ csoport, így csak egyetlen I idempotens eleme van és $I = \alpha_i^q$ miatt $I(k) = j_i$, ezért $j_1 = j_2 = j_3 \ldots = j_r$, amivel a 3. feltétel szükségességét igazoltuk. A tétel bizonyításához ezek után azt kell kimutatni, hogy az 1, 2, 3 feltételek együttesen elégségesek is.

Az $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r\}$ struktúra a leképezések szorzásának asszociativitása miatt asszociatív. Az 1. feltétel teljesülése miatt ha van is több idempotens, ezek főpermutációja megegyezik. A 3. feltétel biztosítja, hogy a farész is megegyezzék, így csak egyetlen idempotens elem lehet. Jelölje az idempotens elemet ε. Az előzőekből tudjuk, hogy $\varepsilon = \tau^d$, ahol τ tetszőleges eleme a struktúrának és d τ rendje $\tau^d\tau = \tau\tau^d = \tau^{d+1}$, akkor a 2. tulajdonság miatt $\tau^{d+1} = \tau$. Következésképpen ε egységelem.

A 2. feltétel miatt a kváziinverz megegyezik az inverzzel. Mivel $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ tetszőleges elemeinek van inverze, ezért csak azt kell bebizonyítani, hogy pontosan egy inverze van. Ezt a 3. feltétel biztosítja.

11. TÉTEL. *Legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ leképezések G n-edrendű csoport generátor elemei és $h(\alpha_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, r$. Ekkor $\alpha_1, f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_r)$ megadásával G összes eleme egyértelműen meghatározható.*

Bizonyítás. Mivel G csoport, ezért felhasználjuk a 10. tételben szereplő 3. tulajdonságot, amelynek segítségével adódik, hogy α-ból és $f(\alpha_i)$-ből ($i = 2, \dots r$) az $\alpha_2, \dots, \alpha_r$ elemek egyértelműen meghatározhatók. Mivel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ generátorrendszerét alkotják G-nek, G összes eleme egyértelműen meghatározható.

1. KOROLLÁRIUM. *Tetszőleges félcsoportban az idempotensek száma megegyezik a maximális részcsoportok számával.*

2. KOROLLÁRIUM. *Egy tetszőleges félcsoport két maximális részcsoportja közös elem nélküli.*

12. TÉTEL. *F_n részcsoportjai a k-adfokú ($k = 1, 2, \dots, r$) szimmetrikus csoporttal izomorfak.*

Bizonyítás. A 11. tétel szerint egy részcsoport elemeinek főpermutációi által izomorfiáig egyértelműen meg vannak határozva. Mivel egy részcsoportban két elem főpermutációjának elemhalmaza nem lehet különböző (lásd 10. tétel 1. feltétel), ilyen módon ha egy elem főpermutációja k-adfokú, akkor tekinthetjük az összes ugyanazon a k betűn értelmezett fő permutációt. Ez természetesen maximális és izomorfiáig egyértelműen meghatározza F_n egy maximális részcsoportját, azért csak izomorfiáig, mert az elem farésze tetszőlegesen választható, ennek megválasztása után a többi elem farésze egyértelműen meghatározott (lásd 11. tétel). Másrészt, ha adott egy részcsoport elemei főpermutációinak halmaza és az nem meríti ki a szimmetrikus csoportot, akkor az elemek által meghatározott részcsoport nem lehet maximális, mivel részcsoportja annak a csoportnak, amelyben az elemek fő permutációi kimerítik a k-adfokú szimmetrikus félcsoportot. Így F_n minden maximális részcsoportja S_k-val izomorf, másrészt bárhogyan adunk meg S_k-t, $k = 1, 2, \dots n-1$ esetén F_n-nek van olyan valódi leképezésekből álló maximális részcsoportja, amely S_k-val izomorf.

1. KOROLLÁRIUM. *F_n tetszőleges maximális részcsoportjának rendje $k!$ ($k \leqq n$).*

2. KOROLLÁRIUM. *Tetszőlegesen megadott k ($k \leqq n$) természetes egész esetén található olyan maximális részcsoport F_n-ben, amelynek rendje $k!$*

Š. SCHWARZ azt sejtette (lásd [32]), hogy a 12. tétel érvényben marad, ha F_n helyett az n elemű halmazon értelmezett bináris relációk félcsoportját B_n-t írjuk. Š. SCHWARZ sejtésének megcáfolására a jelen tanulmány III. részében térünk vissza.

E tulajdonságú egy félcsoport akkor, ha minden valódi részfélcsoportja csoport. Az E tulajdonságú félcsoportok jellemzését POLLÁK GY.—RÉDEI L. adta meg (lásd [26]). Az előző eredmények felhasználásával lehetőség nyílik eredményüknek egy egyszerű bizonyítására.

13. TÉTEL. *Egy félcsoport akkor és csak akkor E tulajdonságú, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:*
1. *csoport,*
2. *ciklikus félcsoport,*
3. *másodrendű félcsoport.*

Bizonyítás. A tétel állítása abban az esetben ha S csoport, nyilvánvaló, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy S nem csoport. Ha S egyetlen α elemmel van generálva, akkor $h(\alpha)\leqq 2$. Tegyük fel ugyanis, hogy $\{\alpha\}=S$ és $h(\alpha^2)=2$ és így $\{\alpha\}^2$ nem csoport és $\{\alpha^2\}\subset S$ ami ellentmond az E tulajdonságnak.

Ha S nem ciklikus, vagyis legalább két elem által generált, akkor maximális részcsoportjainak egyesítése. Tegyük fel, hogy S nem lenne csoportok egyesítése, akkor létezik olyan $\alpha\in S$, amely nem eleme S egyetlen részcsoportjának sem, így $\{\alpha\}$ nem csoport, mivel S-ről feltettük, hogy nem ciklikus, ezért az, hogy $\{\alpha\}$ nem csoport, ellentmond az E tulajdonságnak. S inverz félcsoport, mivel minden elemének van csoport inverze, de nem lehet más általánosított inverze. Tegyük fel,hogy S-ben két idempotens elem van: τ_1, τ_2. Ekkor [3] I. köt. 4.8. segédtétel szerint $\tau_1\tau_2=$ $=\tau_2\tau_1$, másrészt, mivel S E tulajdonságú, $\{\tau_1, \tau_2\}=S$. Mivel $\tau_1\tau_2$ is $\tau_1\tau_2\tau_1\tau_2=$ $=\tau_1\tau_1\tau_2\tau_2=\tau_1\tau_2$ miatt idempotens, így S kommutatív és idempotens elemekből áll.

Mivel $\{\tau_1, \tau_2\}=S$, ezért S legfeljebb három elemet tartalmazhat, ezek $\tau_1, \tau_2, \tau_1\tau_2$. Ha $\tau_1\neq\tau_2\neq\tau_1\tau_2$, akkor $\{\tau_2, \tau_1\tau_2\}\neq S$ és ez ellentmond az E tulajdonságnak. Ha S két elemű, vagyis $\tau_1=\tau_1\tau_2$, akkor valóban E tulajdonságú. Egy E tulajdonságú félcsoport nem generálható kettőnél több elemmel, mert akkor lenne két idempotens által generált valódi részfélcsoportja.

14. TÉTEL. *Ha egy S leképezésfélcsoport elemeinek fő permutációi azonos halmazon vannak értelmezve, akkor a különböző fő permutációk halmaza (maximális) csoport homomorf kép.*

Bizonyítás. Ha $\alpha_i\in S$, akkor a keresett homomorf ϱ leképezés $\alpha_i\xrightarrow{\varrho} f(\alpha_i)$ megfeleltetéssel adható meg. ϱ műveletartó, mert ha $\alpha_i, \alpha_i^*\in S$ és $\alpha_i=\alpha_i f(\alpha_i), \alpha_i^*=\alpha_i^* f(\alpha_i^*)$, akkor $\alpha_i\xrightarrow{\varrho} f(\alpha_i)\alpha_i^{*\prime}\xrightarrow{\varrho} f(\alpha_i^*)$, továbbá $f(\alpha_i\alpha_i^*)=f(\alpha_i)f(\alpha_i^*)$ és így valóban a ϱ leképezés művelettartó, mivel $\alpha_i\alpha_i^*\xrightarrow{\varrho} f(\alpha_i\alpha_i^*)=f(\alpha_i)f(\alpha_i^*)$.

A főpermutációk halmaza szorzásra nézve zárt és így a ϱ leképezés segítségével, S-nek egy csoport homomorf képét nyerjük.

1. KOROLLÁRIUM. *Minden feloldható leképezésfélcsoport homomorf képe, elemei főpermutációinak halmaza.*

2. KOROLLÁRIUM. *Minden egységelemes leképezésfélcsoport csoport homomorf képe, elemei különböző főpermutációinak halmaza.*

15. TÉTEL. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az S leképezésfélcsoport, elemidegen részcsoportok egyesítéseként előállítható legyen az, hogy ha $\alpha\in S$, akkor $h(\alpha)\leqq 1$.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége triviálisan következik a 4. tételből. Mivel $\alpha \in S$ esetén $h(\alpha) \leqq 1$, ezért az azonos elemhalmazokon értelmezett főpermutációval rendelkező leképezések olyan félcsoportot alkotnak, amely maximális részcsoportjainak egyesítése. Így a 11. Tétel 2. Korolláriumából és egyszerű meggondolásokból adódik a feltétel elégségessége.

1. KOROLLÁRIUM. *Ha $n > 2$, F_n nem állítható elő csoportok egyesítéseként.*

Bizonyítás. Ha $n > 2$, akkor F_n-ben van olyan α elem, hogy $h(\alpha) > 1$ és így α a 10. tétel szerint nem lehet eleme egyetlen részcsoportnak sem.

2. KOROLLÁRIUM. *F_2 előállítható csoportok egyesítéseként.*

Ez az állítás megtalálható [3] I. kötetének 4.1. pontjában. (6. feladat.)

3. KOROLLÁRIUM. *Egyszerű félcsoportok előállíthatók csoportok egyesítéseként*

16. TÉTEL. *(Croisot) Ha $n > 2$, F_n nem állítható elő egyszerű félcsoportok egyesítéseként* (lásd [4]).

Bizonyítás. [3] I. kötet 4.6. tétele és a 15. tétel együttesen biztosítja, hogy F_n $(n > 2)$ nem lehet teljesen egyszerű félcsoportok egyesítése. Jól ismert (lásd pl. [3] I. köt. 76. old.), hogy véges egyszerű félcsoportok teljesen egyszerűek. Így ha F_n-nek lenne egyszerű félcsoportokra való felbontása, akkor ez egyben egy teljesen egyszerű félcsoportokra való felbontást is jelentene, ami az előzőek szerint lehetetlen.

A 16. tétel a 15. tétel 3. korolláriumának közvetlen következménye.

F_n egyoldali ideáljainak leírása F_n magjának meghatározása szempontjából lényeges.

17. TÉTEL. *F_n egy részfélcsoportja akkor és csak akkor balideál, ha elemi balideál vagy elemi balideálok egyesítéseként előállítható.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in L_X$ (L_X elemi balideált jelöl), ekkor $F_n\alpha = L_X$. Jelölje L F_n-nek tetszőleges balideálját. Ha $\alpha \in L$, akkor $L_{X_1} \subseteqq L$. Tegyük fel, hogy $L_{X_1} \subset L$ és $\beta \in L$, de $\beta \notin L_{X_1}$. Ekkor $F_n\beta = L_{X_2}$, továbbá $L_{X_1} \cup L_{X_2}$ részfélcsoport, hiszen az $\alpha\beta$ típusú elemek L_{X_2}-nek a $\beta\alpha$ típusúak L_{X_1}-nek elemei. Ha létezik olyan $\gamma \in L$, hogy $\gamma \notin L_{X_1}\gamma \notin L_{X_2}$, akkor $F_n\gamma = L_{X_3}$. Az eljárást addig folytatjuk, amíg L minden eleméhez tartozó elemi balideált kiválasztottuk és ekkor L nyilvánvalóan előállítható a kiválasztott elemi balideálok egyesítéseként.

KOROLLÁRIUM. *F_n minimális balideáljainak mindegyike egy elemű, egy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i & \dots & i \end{pmatrix}$ alakú leképezést tartalmaz. Így a különböző minimális balideálok száma n.*

18. TÉTEL. *F_n jobbideáljai a kétoldali ideálokkal egyeznek meg.*

Bizonyítás. Felhasználva a 6. tételnél alkalmazott jelölést, jelölje $I_{(n,m)}$ $m = 1, 2, \dots$ $\dots n$ F_n ideáljait. Ekkor $I_{(n,m)} F_n = I_{(n,m)}$, mivel ha ε jelöli F_n egység elemét, akkor $I_{(n,m)}\varepsilon = I_{(n,m)}$ teljesül. Ennélfogva minden jobbideál kétoldali ideál. Az állítás fordítottja nyilvánvaló.

KOROLLÁRIUM. *F_n minimális jobbideálja megegyezik minimális ideáljával, vagyis* $I_{(n,1)}$.

19. TÉTEL. *F_n magja $I_{(n,1)}$.*

Bizonyítás. A. SZUSKEVICS bebizonyította (lásd [36], valamint [3] I. kötet 207. old), hogy minden véges félcsoportnak van egy magja, amely összes minimális balideáljainak, illetve összes minimális jobbideáljainak egyesítése. A. SZUSKEVICS tételének és a 17. tétel korolláriumának közvetlen következménye, hogy F_n magja $I_{(n,1)}$. A 17. tétel korolláriuma helyett alkalmazhatjuk a 18. tétel korolláriumát is a tétel bizonyításához.

20. TÉTEL. *F_n kváziideáljai a balideáljaival egyeznek meg.*

Bizonyítás. STEINFELD O. ([33], [34], valamint [3] I. kötet 85. old.) tétele szerint egy félcsoport részhalmaza akkor és csak akkor kváziideál, ha a félcsoport egy bal- és egy jobbideáljának metszete. STEINFELD O. tétele és a 17., valamint 18. tételek alkalmazásával a 20. tétel állítása egyszerűen bizonyítható.

21. TÉTEL. *F_n minimális kváziideáljai a minimális balideálokkal egyeznek meg.*

Bizonyítás. A 21. tétel a 20. tétel közvetlen következménye.

22. TÉTEL. *F_n bi- és kváziideáljai megegyeznek.*

Bizonyítás. Mivel F_n reguláris (lásd [3], I. kötet 33. old., valamint [10]) alkalmazható LAJOS S. tétele: egy reguláris félcsoport minden biideálja kváziideál (lásd [19]. Másrészt egy félcsoport kváziideálja egyben biideál is. (Lásd [3], I. köt. 85. old.)

KOROLLÁRIUM. *F_n biideáljai a balideáljaival egyeznek meg.*

23. TÉTEL. *Ha egy S leképezés félcsoport, amelynek rendje n, tartalmaz egy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i & \dots & i \end{pmatrix}$ alakú leképezést, akkor magja $S \cap I_{(n,1)}$.*

Bizonyítás. A. SZUSKEVICStől származik az az eredmény (lásd [3] I. köt. 85. old.), amely szerint ha egy félcsoport magjának és egy részfélcsoportjának van közös eleme, akkor a részfélcsoport magja megegyezik a részfélcsoport és az eredeti félcsoport magjának metszetével. Mivel S F_n-nek részfélcsoportja, ezért ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ i & i \cdots i \end{pmatrix} \in S \quad \text{akkor } S \text{ magja} \quad S \cap I_{(n,1)}.$$

KOROLLÁRIUM. *Ha A absztrakt félcsoport tartalmaz balzérus elemet, akkor A magja a balzérus elemekből fog állni.*

Bizonyítás. Legyen S leképezés félcsoport A reguláris ábrázolása, ekkor S tartalmaz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i & \dots & i \end{pmatrix}$ alakú leképezést és így alkalmazható a 23. tétel.

24. TÉTEL. *F_n összes olyan elemeinek P_X halmaza, amely elemek mindegyikének főpermutációjában az X halmaz összes elemei szerepelnek és csak ezek, továbbá $\alpha \in P_X$ esetén $h(\alpha) = 1$, F_n-nek részfélcsoportja.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha, \beta \in P_X$, ekkor $f(\alpha\beta)$ is pontosan az X halmaz elemeiből áll, így $\alpha\beta \in P_X$.

25. TÉTEL. *F_n előállítható elemidegen részfélcsoportjainak egyesítéseként pl. $F_n = S_n \cup I_{(n,n-1)}$ alakban.*

Bizonyítás. S_n részfélcsoport és $\alpha \in S_n$ esetén $D(\alpha) = n$, $\beta \in I_{(n,n-1)}$-ből következik, hogy $D(\beta) \leqq n-1$, mivel $I_{(n,n-1)}$ is részfélcsoport és S_n-nel nincs közös eleme, a tétel állítása bizonyítást nyert.

26. TÉTEL. *Tetszőleges S leképezés félcsoport felbontható elemidegen részfélcsoportjainak egyesítésére, ha $\alpha \in S$, akkor $h(\alpha) = 1$.*

Bizonyítás. Állításunk a 15. tétel következménye.

KOROLLÁRIUM. *Tetszőleges absztrakt félcsoport, amelynek összes ciklikus részfélcsoportja csoport, elemidegen részfélcsoportjainak egyesítéseként felírható.*

Bizonyítás. A reguláris ábrázolás segítségével visszavezethető az absztrakt félcsoport leképezésfélcsoportra is, erre érvényes a 26. tétel. A 4. tétel alkalmazásával teljes a bizonyítás.

A 26. tétel általánosítható, ugyanis SZÉP J. bebizonyította, hogy tetszőleges félcsoport részfélcsoportok egyesítéseként előállítható (lásd [68]).

F_n generátor rendszereivel foglalkozik a 27. és 28. tétel. Számos idevágó eredmény [14]-ben megtalálható.

27. TÉTEL. *$\{S_n, \alpha\} = F_n$ akkor és csak akkor teljesül, ha $D(\alpha) = n-1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $D(\alpha) = n-2$, akkor a szorzat defektszámaira vonatkozó 1. tétel miatt $n-1$ defektű leképezés nem állítható elő és így $\{S_n, \alpha\} = F_n$ nem állhat fenn. Mivel α $n-1$ defektű, fennáll, hogy $\alpha = f(\alpha)\tau$, ahol τ szinguláris leképezés. Tekintve, hogy

$$f(\alpha) \in S_n \quad f(\alpha)^{-1} f(\alpha)\tau \in \{S_n, \alpha\},$$

vagyis $\tau \in \{S_n, \alpha\}$, de $\beta\tau\beta^{-1}$, $\beta \in S_n$ alakban F_n összes szinguláris leképezése előáll, így $\{S_n, \alpha\}$ elemei között szerepelnek az összes szinguláris leképezések és S_n. A 3. tétel felhasználásával adódik, hogy $\{S_n, \alpha\} = F_n$.

28. TÉTEL. *F_n $(n > 2)$ tetszőleges generátorrendszere legalább három elemű.*

Bizonyítás. Mivel $S_n (n > 2)$ nem ciklikus, így legalább két elemmel generálható. Ily módon a 27. tételből következik a 28. tétel állításának helyessége.

KOROLLÁRIUM. Ha $\{\alpha, \beta, \gamma\} = F_n$, akkor $\{\alpha, \beta\} = S_n$ és $D(\gamma) = n-1$.

29. TÉTEL. *α akkor és csak akkor egysége F_n-nek, ha $\alpha \in S_n$.*

Bizonyítás. Az 1. tétel miatt F_n egységeleme csak két S_n-beli elem szorzataként állítható elő. Mivel F_n egységeleme az egység permutáció, ezért S_n bármely elemét inverzével megszorozva F_n egységeleme előáll.

A 29. tétel bizonyítása A. SZUSKEVICSnél is szerepel (lásd [37], valamint [3] I. köt. 23. old.).

(Beérkezett: 1968. X. 15.)

IRODALOM

[1] ANDREOLI, G.: Sui gruppi di sustituzioni che operano su infiniti elementi, *Circ. Matem. Palermo*, **15**, (1915) 305—335
[2] CAYLEY, A.: The theory of groups: Graphical representation, *Amer. Journ. of Math.* **1** (1878) 174—176
[3] CLIFFORD, A. H.—PRESTON, G. B.: *The algebraic theory of semigroups*, I—II. kötet. Providence. Amer. Math. Soc. 1961, 1967.
[4] CROISOT, R.: Demi-groupes inversifs et demi-groupe reunions de demigroupes simples, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **70** (1953) 361—379.
[5] DAVIS, R. L.: The number of structures of finite relations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1963) 486—495.
[6] DÉNES, J.: Connections between transformation semigroups and graphs, *Actes des Journées Internationales d'étude sur la theorie de graphs, Rome, Juillet 1966*, 298—303.
[7] DÉNES, J.: On transformations, transformation semigroups and graphs. Theory of graphs. *Proc. Colloq. Graph Theory held at Tihany 1966*. Akadémiai Kiadó, 1968. 65—75.
[8] DÉNES, J.: Some combinatorial properties of transformations and their connections with the theory of graphs. *Journal of Combinatorial Theory* (megjelenés alatt).
[9] DÉNES, J.: On some properties of commutator subsemigroups *Publicationes Mathematicale Debrecen* **15** (1968) 283—285.
[10] DOSS, C. G.: *Certain equivalence relations in transformation semigroups*, M. A. Thesis, University of Tennessee, 1955.
[11] FROBENIUS, G.: Über endliche Gruppen, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, Berlin, 1895. 163—194.
[12] HARARY, F.: The number of functional digraphs. *Math. Annalen*, **138** (1959) 203—210.
[13] ITO, N.: A theorem on alternating group, *Math. Japonicae* **2** (1951) 59—60.
[14] JONSSON, B.: Defining relations for full semigroups of finite transformations, *Michigan Math. J.* **9** (1962) 77—85.
[15] JORDAN, C.: *Traité des substitutions et des équations algebriques*, Gauthiers-Villars, Paris, 1870.
[16] KATZ, L.: Probability of indecomposability of random mapping function, *Ann. Math. Stat.* **26** (1953) 512—517.
[17] KRAUSE, H. M.: *Gruppenstruktur und Gruppenbild.* Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Promotions Arbeit. 1953.
[18] Ляпин, Е. С.: *Полугруппы*, Гос. Изд. физ. мат. лит., Москва, 1960.
[19] LAJOS, S.: Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Math. Szeged* **22** (1961) 217—222.
[20] Мальцев, А. М.: Симметрические группоиды, *Мат. сбор.* **31** (73) (1952) 136—151.
[21] MANNING, W. A.: *Primitive groups*, Stanford Univ. Press, Stanford California 1921.
[22] MOORE, E. H.: A definition of abstract groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **3** (1902) 485—492.
[23] NICOLAS, J.: *Sur l'ordre maximum d'un élément das le groupe S des permutations*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (Théorie des numbers) 8e année 1966/1967 No. 11. és *Acta Arithmetica* **14** (1968) 315—332.
[24] ORE, O.: Graphs and correspondences, *Festschift zum 60. Geburstag von Prof. Andreas Speiser*, Zürich, Orell Füssi Verlag, 1945. 184—191.
[25] ORE, O.: Some remarks on commutators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951) 307—314.
[26] POLLÁK, GY.—RÉDEI, L.: Die Halbgruppen deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959) 125—130.
[27] PÓLYA, GY.: Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen, *Acta Math.* **68** (1937) 145—254.
[28] RÉNYI, A.: On connected graphs, *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **4** (1959) 385—388.
[29] ROSTA, J.: Über eine Erweiterung des Cayleyschen Satzes, *Math. Nachtrichten* **41** (1969) 223—226.
[30] SCHERMANN ÁKOSNÉ: *Leképezések, leképezésfélcsoportok*, Egyetemi doktori disszertáció, Budapest, 1967.
[31] SCHWARZ, Š: Teoria pologrup. *Sbornik prác Prirodovedeckej Fakulty Slovenskej Univerzity V Bratislave* No6, Egyetemi doktori disszertáció, Pozsony, 1943.
[32] SCHWARZ, Š.: The semigroup of binary relations on a finite set, A „*Semigroup theory and applications*" szimpóziumon megtartott előadás kivonata. (Smolenice, 1968. június 17—22)
[33] STEINFELD, O.: Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen* **4**, (1956) 262—275.
[34] STEINFELD, O.: Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichen Suschkewitsch Kern, *Acta Sci. Math. Univ. Szeged* **18**, (1957) 235—242.
[35] STEINFELD, O.: Über Semiringe mit multiplikativer Kürzungsregel, *Acta Sci. Math. Univ. Szeged* **23** (1963) 191—195.

[36] SUSCHKEWITSCH A.: Untersuchungen über verallgemeinerte Substitutitionen, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna*, 1928. 147—157.
[37] Сушкевич А.: Теория обобщенных групп. Гос. науч. тех. изд. Укран., Харков 1937.
[38] WIELANDT, H.: *Finite permutation groups*, Academic Press. New York, London 1964.
[39] YOELI, M.: The cascade decomposition of sequential machines, *IRE Trans. EC-10* (1961) 587—592.
[40] Зарецкий К. А.: Об идеалах полугрупп. Успехи математических наук, **14** (№ 6) (1959) 173—174.
[42] Айзенштат А. Я.: О полугруппе всех взаимно однозначных отображений множества натуральных чисел в себя, Учёные зап. Выборгского пед. ин-та **2** (1957) 15—24.
[43] Айзенштат А. Я.: Определяющие соотношения конечных симметрических полугрупп. Матем. Сб. (нов. сер.) **45** (1958) 261—280.
[44] Айзенштат А. Я.: Об определяющих соотношениях симметрических полугрупп, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **166** (1958) 121—142.
[45] Байрамов П. А.: К проблеме полноты в симметрической полугруппе конечной степени, Дискретный анализ, вып. **8** (1966) 3—26.
[46] Воробьев Н. Н.: О симметрических ассоциативных системах, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **89** (1953) 161—166.
[47] Воробьев Н. Н.: Дефектные идеалы ассоциативных систем подстановок, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **16** (1949) 47—53.
[48] Воробьев Н. Н.: О канонических представлениях элементов симметрических ассоциативных систем, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. Герцена, **103** (1955) 75—82.
[49] Глускин Л. М.: Транзитивные полугруппы преобразований. Доклады Академии Наук СССР, **129** (1959) вып. I. 16—18.
[50] Глускин Л. М.: Идеалы полугрупп преобразований, Математический сборник, **47** (89) вып. I. (1959) 111—130.
[51] Глускин Л. М.: Платно вложенные идеалы полугрупп, Доклады Академии Наук. СССР, **131** (1960) вып. 5. 1004—1006.
[52] Зарецкий К. А.: Абстрактная характеристика полугруппы всем бинарных отношений, Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та А. И. Герцена, **183** (1958) 251—265.
[53] Зарецкий К. А.: Об идеалах полугрупп, Успехи Математических Наук **6** (1959) 14 вып. 173—174.
[54] Ляпин Е. С.: Ассоциативные системы всех частичных преобразований, Доклады Академии Наук СССР, **88** (1953) вып. I. 13—15.
[55] Оганесян В. А.: Инвариантные и нормальные подсистемы симметрической системы частичных подстановок, Доклады Академии Наук Армянской СССР, **21** (1955) 2. 49—56.
[56] Оганесян В. А.: Теорема о строении системы подстановок, Армянской Гос. заучный пед. ин. Сборник научных трудов, 3 (1956) 9—17.
[57] Оганесян В. А.: Система частичных подстановок и обобщенная теорема кэли, Армянской Гос. заочный пед. ин. Сборник научных трудов, **3** (1956) 19—31.
[58] Вагнер В. В.: К теории частичных преобразований, Докл. Акад. наук. СССР **84** (1952) 653—656.
[59] Вагнер В. В.: Теория обобщенных груд и обобщенных групп, Мат. сборник, **32** (1953) 545—632.
[60] Вагнер В. В.: Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности, Изв. высш. учебн. заведений математика, **1** (1957) 81—88.
[61] Либер Л. Е.: О симметрических обобщенных группах, матем. сб. **33** (1953) 531—544.
[62] Шайн Б. М.: К теории полугрупп преобразований, Тр. молодых ученых саратовск. Ун-та вып. матем. Саратов (1964) 120—122.
[63] Шайн Б. М.: Трансформативные полугруппы преобразований. (1966) **71** Матем. сб. 65—82.
[64] B. M. SCHEIN: Semigroups of transformations. A „*Semigroup theory and applications*" szimpóziumon (Smolenice 1968. június 17—22) megtartott előadás kivonata.
[65] Вагнер В. В.: Обобщенные группы, Докл. Акад. наук. СССР, **84** (1952) 1119—1122.
[66] J. M. HOWIE: The subsemigroup generated by the idempotents of a full transformation semigroup, *London Math. Soc.* **41** (1966) 707—716.
[67] E. J. TULLY: Representation of Semigroup by row-monomial matrices over group, *Proc. Japan Academy* **16**, (1964) 157—160.
[68] SZÉP *J.;* Véges félcsoportok struktúrájáról, Kézirat 1969.

BOLYAI FARKAS KÖNYVTÁRA

Írta: FRÁTER JÁNOSNÉ

1. Amikor 1804-ben a tanügyeket vezető Erdélyi Református Egyház Főkonsistoriuma úgy döntött, hogy a filozófiától különváltan kell a matematikát-fizikát és kémiát tanítani, egyszersmind BOLYAI FARKASt hozta javaslatba erre a tanszékre a Marosvásárhelyi ev.-ref. Kollégium elöljáróságának. Az akkori szokás szerint a kollégium elöljárósága, a tanári kar és a tanuló ifjúság külön-külön készített meghívólevélben kérte meg BOLYAI FARKASt a megüresedett tanszék elfoglalására. A meghívóleveleket — mint rendesen — két felsőbb tanulmányokat folytató jeles diákból álló küldöttség kézbesítette.

„ein neuer Fall bei Uns, — írta erről az eseményről BOLYAI FARKAS egyetemi tanulótársának és barátjának GAUSS KÁROLY FRIGYESnek — zwei von den ältesten Studenten sind hieher zu mir herausgeschikt worden mit officialischen Briefen — lange habe ich Mich besonnen, ... endlich entschlos ich mich, es war auch meines Vaters Wille, weil es seine Maxime war Amt zu verwalten, und wohl wuste er es, das ich kein anderes je würde verwalten."

A levél további részéből kitűnik, hogy BOLYAI FARKAS készül új életpályájára:

„An Büchern bin ich sehr arm, und ich muss nothwendig solche haben, bei uns wäre man mit wenigen Büchern vor einen Ochs gehalten; aber im Ernste (wiewohl ich einige gute besitze) so habe ich genug doch nicht: ich bitte Dich antworte mir schleunig auf diesen Brief, addressire vor der Hand nur wie bis jetzt nur nicht a Clausenburg, sondern a M. Vásárhelly, setze keinen Professor Titel hin — schreibe mir einen Catalog der vortrefflichsten Büchern zur Mathematik und Physik, auch Dein Urtheil über Mayers Physik (ich kenne es nicht) auch das beste Werk über die Doppelte Buchhaltung, auch wenn irgend eine neue wichtige Entdeckung in diesen Fächern gemacht worden, welches ich auch fernerhin bitte." [1]

Ez a levélrészlet többek között arról is tudósít bennünket, hogy BOLYAI FARKAS birtokában már ekkor értékes könyvek vannak, melyeket matematikai kutatásaihoz és a tanításhoz is felhasználhatott, de ezek számát távolról sem tartotta elegendőnek (so habe ich genug doch nicht). Továbbá bizonyítottnak tekinthetjük, hogy göttingai kapcsolatai milyen nagy befolyással voltak könyvtárának alakulására, összetételére.

GAUSS — BOLYAI FARKAS kérésének megfelelően — június 28-án írt válaszlevelében közel harminc szerző nevét, vagy művét említi és ajánlja, melyek közül BOLYAI FARKAS számos könyvet megvásárolt, már amihez akkor hozzájuthatott. Következő levelében említi is GAUSSnak, hogy az ajánlott munkák nagy része nincs meg a könyvtárakban, és hogy egy részüket nem is tudja beszerezni.[2] Évek során BOLYAI FARKAS-

[1] Bolyai Farkas és Gauss Frigyes Károly levelezése. Szerk. jegyzetekkel és életrajzzal ellátták: Schmidt Ferenc és Stäckel Pál. Bp. 1899. 57. és 58. p.

[2] Uo. 1804. jún. 28.-i és későbbi levelében.

nak a matematikai és fizikai munkák tekintélyes számát mégis sikerült összegyűjteni, amelyek egy emberöltőn át adtak ösztönzést tudományos kutatásaihoz és oktató munkájához.

Élete utolsó szakaszában három egymást követő agyvérzés érte. A második agyvérzés után, 1856 augusztusában úgy érezte, hogy ezután az utolsó (ahogy ő mondta: az executio) közeleg. Ekkor igyekezett mindent rendbehozni maga körül. Így került sor arra, hogy könyvtára sorsa felől intézkedjen. Augusztus 26-án írta meg erre vonatkozó végakaratát két példányban, a hozzá tartozó könyvjegyzékkel együtt. Ez a két dokumentum a mai napig ismeretlen maradt.[3]

Végrendeletével könyveit a helybeli ref. kollégium könyvtárának adományozta:

„Nyolcvan kettődik évben kétszeri gutta után csak az executioi 3 dikat várhatva, szinte semmit se tehetvén: hosszas alkalma[tla]nságomért engedelmet reménylek; nem rajtam mulik az indulás, — csak az alkalom nem áll elé, — magam én pedig, bár rövidebb uton kicsi öröm vesztéssel vénségem nagy terhétől szabadulnék meg, — menetelem az oskola falára oly árnyat vetne, — mely a megelőzővel azutánra is rémithetne. Minden esetre hálámat az átadott Contractusokon kivül,[4] azzal is kivántam bizonyitani, hogy a Hannoverai királytól a Göttingai Tudós Társaság által küldött két emlékpénzt az azzal jött iratokkal s az én köszönő leveleimmel, s a Gauss halálára azután jött könyvvel, s a reá tett válaszommal, és azon levéllel, mellyel jött, együtt az oskola thekájába bé adtam; azon meghagyással, hogy ami még onnan jőve életben nem találna, az is mind oda tétessék. 'S még ezen kivül nem csak egy 's más nyomtatott munkáimat, hanem az egész könyvtáromat, az oskola' könyvtárába ezennel által-is adom; sőt a' mathesisi nyomtatványaimat is oda adom; amit elébb-hátrább kap belőle, mind a thekáé legyen.

Csak az a' megjegyzésem:

1. Hogy a' nagyobbik fiamnak az lévén kívánsága, hogy bajosan jártathatván a' Kollégyomba, hagyjam neki ugy, hogy ő adja bé a' thékába még életébe, vagy holtával vegye a Kollégyom teljes joggal által: én az ő kivánságát bajosan szegvén meg, azon állapodtam meg; hogy most életemben adjam által mind a' thekának, 's onnan vegyen ki (ha tetszik azonnal is) amit és amennyit tetszik, azon feltétel alatt, hogy mint theka könyvét a' thekának vagy még életében vissza adja, vagy holtával annak mint tulajdonához joga legyen.
2. Az ür-tan elemei kezdőknek mód nem léte miatt táblák nélkül vannak: a béadottból, akinek kell, könnyen lecsinálhatja; azokat is gyermekek csinálták.
3. A' sok hibákat is a béadottakból igazitani lehet.

Irtam M. Vásárhelyt 1856. augusztus 26 dikán.

Bolyai Farkas
mk."

[3] Mindkét dokumentum a Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára Kézirattárában található. Jelzeteik: K 22/23—27.

[4] Hivatkozás ez arra, hogy egy nappal előbb, levél kíséretében Bolyai Antal öccsétől örökölt két darab összesen 9445 — Ft-ról szóló adóslevelet alapítványként a kollégiumnak adományozott. A levelet Koncz József közli a „Marosvásárhelyi ev. ref. Kollégium története" c. művében, 312. p. A kollégium Bolyai Farkas halála után hosszú per útján a 9445 — Ft-ból mindössze 750 — Ft-ot kapott, 1874-ben.

A végrendelethez mellékelt könyvjegyzékből első pillantásra megállapíthatjuk, hogy a könyvek formátumok szerint vannak csoportosítva és nem szaktudományok szerint. A jegyzéken nincs sorszámozás és nem pontosak a leírások sem. A sorszámozást most a közlés során mi pótoltuk és igyekeztünk kiegészíteni az egyes könyvekre vonatkozó hiányos bibliográfiai adatokat.[5] Arra törekedtünk, hogy BOLYAI FARKAS autográf könyvjegyzékét adjuk vissza, ezért az első sorban (vagy sorokban) az általa írt szöveget (dőlt szedéssel) közöljük, és ahol van megjegyzése, azt is. Új bekezdésben következnek a kiegészítések.

A jegyzék BOLYAI FARKAS bevezető soraival az alábbi: "Azon könyveknek, melyeket 1856. augusztus 26-dikán a' M. Vásárhelyi Ref. oskola' könyvtárába adtam, nevei:

In 4*to*

[1] *Newton, négy darab.*
Newton Isaac: Philosophiae naturalis principia mathematica. I—III. köt. Genevae, 1739—1742.
BOLYAI FARKAS négy db-ot említ. Ez valószínűleg abból adódik, hogy vagy ennek a kiadásnak egyik kötete két részből, azaz a három kötet összesen 4 db-ból áll, vagy BOLYAI FARKAS hozzászámította NEWTON: *Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione aritmetica* c., Lugduni Batavorum, 1732-ben megjelent művét is.

[2] *Bernoulli Johannis. Opera omnia, négy darab aranyos szép kötésbe, elöl a Bernoulli képével. (Kapitány Bolyai Jánosnál van.)*
Ez a mű az 1742. Lausannae et Genevae megjelent I—IV. kötetes kiadás. A zárójelben levő rész is BOLYAI FARKAStól származik.

[3] *Lalande. Astronomie, három darab (aranyos szép kötésbe.)*
La Lande Jerome de Francais: Astronomie, par —. Troisieme édition. I—III. Párizs, 1792.

[4] *Gauss Theoria motus corporum coelestium. 1809.*
Gauss, Karl Friedrich: Theoria motus corporum coelestium in sectinoibus conicis solem ambientium. Hamburg, 1809.

[5] *La grange Theorie des Fonctions.*
Lagrange, Joseph Louis: Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul differential etc. nouv. ed. Párizs, 1813.

[6] *Montucla, Jean Étienne: Histoire des mathématiques I—IV. Páris, 1799—1802.*
BOLYAI FARKAS megjegyzése: „négy darab".

[7] *„Gauss. Demonstratio nova functionem algebraicam... 1799. fontos theoriáinak legelső evidens demonstratioja. Ezért doctorálták minden exameni ceremonia nélkül. Ritka, nehezen kapható. A' Teleki Thécának adtam. Ugyan Gaussnak nevezetes és nem kapható munkáját, hogy inkább megmaradjon, a Teleki Thecába adtam. Több munkáji nekem sincsennek meg."*

[5] Ehhez a munkához nagy segítséget jelentett az a mikrofilm, amelyet egyezményes cserekapcsolataink révén a bukaresti Akadémia Könyvtárától kaptunk. A film a marosvásárhelyi Teleki—Bolyai Könyvtár hely- és alapcímtárának Bolyai Farkas könyveit felsoroló lapok leírásait tartalmazza. Szintén sokat merítettünk Deé Nagy Anikónak a két Bolyai könyvtáráról írott kitűnő összeállításából. (Könyvtári Szemle 1968/1. számában. Bukarest.)

Gauss, Karl Friedrich: Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii, 1799.
A nevezetes és nem kapható munka a „*Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae, 1801*". *8*-rétű munka lehet.[6]

[8] *Dissertationes experimentales ex Comment. Imper. Petropolit. 1762.* Hozzákötve: *Pongrácz, Antal L. B.: Dissertatio experimentalis de electricitatis theoria... Vindobonae, 1762.*
Ez a munka nyilvánvalóan azonos a pétervári Akadémia Kommentárjaiból átvett kötettel, amely neves fizikusok dolgozatait tartalmazza. (BULFINGER, EULER, BERNOULLI DÁNIEL stb.) A kötetről és benne elsősorban PONGRÁCZ művéről többet l. M. ZEMPLÉN J.: *A magyarországi fizika története a XVIII. században*, Bp. 1964. 408—410. p.

[9] *Metius, Adrianus: Arithmetica et Geometria nova. [Franequere], 1625.*
Úgy látszik, hogy csak a 2. és 3. rész volt meg, mert az 1. rész csak 1626-ban jelent meg és ezt BOLYAI FARKAS nem tünteti fel.[7]

[10] *A császárt üdvözlő versekből nálam maradott 6 darabot is béadtam.*
Bolyai Farkas: Az ősz lantos hattyúdalai három nyelven. Szivhangok üdvözletül Ferencz József ő cs. k. apostoli Felségének Marosvásárhelyt julius 31.-én 1852.-ben. Marosvásárhely, 1852. (12 lap).

In 8vo

[11] *Öt szomoru játék, Párisi per, s Pope az emberről (sat.) ángolból sat...*
Bolyai Farkas saját műveiről van szó:
Öt szomorú játék. Írta egy hazafi, Szebenben, 1817.

[12] A párisi per. Egy érzékeny játék. Öt felvonásokban. Marosvásárhely, 1818.

[13] Pope Proba-Tétele az Emberről. Ánglusból fordítva. Más poétákból való toldalékkal. Marosvárásheiy, 1819.
BOLYAI FARKAS ezek mellett nem jegyzi meg a darabszámot, ezen könyvek esetében tehát csak egyedi példányokról lehet szó.

[14] *Bolyai Farkas: Az arithmetica eleje (az elő-szóban irt módon.) Marosvásárhely, 1830.*

[15] *Bolyai Farkas: Az arithmetikának, geometriának és physikának eleje a M. Vásárhelyi Kollégyombéli alsóbb tanulók számára a helybéli professor által. Első kötet. Marosvásárhely, 1834.*
Bolyai Farkas megjegyzése: „*De csak egy kötet jött ki*".

[16] *Bolyai Farkas: Tentamen I—II. Marosvásárhely, 1832—1833.*

[17] *Bolyai Farkas: A Marosvásárhelyt 1829-be nyomtatott Arithmetika Elejének részint röviditett, részint bővitett, általán jobbitott, s tisztáltabb kiadása. Marosvásárhely, 1843. 67 darab.*[8]

[6] A „Disquisitiones arithmeticae" Bolyai Jánosnak is kézikönyve volt. Szerencsére ez az Akadémia Könyvtárába került 1953-ban egy magángyűjtőtől. (Jelzete: 545.008) A könyvbe Bolyai János a nevén kívül beírta azt is, hogy a könyvet fűzött állapotban 4 konvenciós Ft 30 krajcárért vette, A névbejegyzésen kívül, több helyen megtalálhatók Bolyai János széljegyzetei is, sajnos ceruzával, amely egyre jobban halványul.

[7] British Museum katalógusa 36. köt. 127. hasáb.

[8] Nincs ellentét a 14. sz. alatt feltüntetett adatok és az itt említettek közt. Mert valóban 1829-ben nyomtatták, de csak 1830-ban lett készen.

[18] *Bolyai Farkas: Arithmetika eleje kezdőknek. 1846.*[9]
[19] *Bolyai Farkas: Űrtan elemei kezdőknek. 1846.*[10]
[20] *Bolyai Farkas: Kurzer Grundriss eines Versuchs... 1851, melyből az egész systema látszik.*
[21] KEMÉNY MIKLÓS *halálára írt versek.* Ez azonos az alábbival: „Szive kiömlése a marosvásárhelyi Ref. kollégyombéli ifjuságnak egy Kedves Attya Halálán". Az előszót BOLYAI FARKAS írta.
[22] *Uj találmány a malom-dézsmára. G. Rhédei Ferenc.* Rhédey Ferenc: Ujj találmány, mellyel a malmokban a gabonából a vám, magától igazságosan válik külön a tulajdonos zárja alá. Némely, a malmok körül tehető jobbitásokkal, s azokat illető jegyzésekkel. Marosvásárhely, 1824.
[23] *Euler's Differential-rechnung, négy darab.*
Euler, Leonhard: Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung. I—IV. Berlin u. Libau, 1790—1798.
[24] *Eulers Algebra, két darab. (egyik Jánosnál van.)*
Euler, Leonhard: Vollständige Anleitung zur Algebra. I—II. St. Petersburg, 1770.[11]
[25] *Kaestner. Arithm. Geom. et...*
Kästner, Ábrahám Gotthelf: Anfangsgründe der Aritmetik Geometrie ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektiv. Göttingen, 1792.
[26] *Kaestner. Analysis endlichen Grössen.*
Kästner, Ábrahám Gotthelf: Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen. Göttingen, 1794.
[27] *Kaestner. Analysis des Unendlichen.*
Kästner, Ábrahám Gotthelf: Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen. Göttingen, 1799.
[28] *Kaestner. Math. Geographie u. d. gl.*
Ez talán a következő lehetett: Kästner, Á. G.: Weitere Ausführung der mathematischen Geographie: besonders in Absicht auf die späroidische Gestalt der Erde. Göttingen, 1795.[12]
[29] *Kaestner. Höhere Mechanik.*
Kästner, Ábrahám Gotthelf: Anfangsgründe der höhern Mechanik welche von der Bewegung fester Körper besonders die praktischen Lehren enthalten. Göttingen, 1793.
[30] *Paul Strasznicki. Reine Mathematik 2 darab.*
Schulz von Strassnitzki Leopold Karl: Elemente der reinen Mathematik zum akademischen Gebrauche... I—II. Theil. Wien, 1831—35.
[31] *Grundriss der reinen Mathematik von Gerling in Marburg.*
Ez a mű az alábbival azonos: Lorenz, Johann Friedrich: Grundriss der reinen und angewandten Mathematik, — oder erster Cursus der gesamten Mathematik. I—II. Vierte Ausgabe. Helmstadt, 1851. Lorenznek ezt a munkáját 1820-tól

[9] Koncz József i. m. 289. p. a megjelenés évét 1850-re teszi.
[10] Uo. mint az előbbit, 1850—51-re.
[11] Stäckel Pál: Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai Bp. 1914. c. művében, 226. p. az 1770-es kiadást említi, ezért mi is ezt adjuk. A mikrofilmen azonban egy 1796-os kiadás szerepel, de csak egy kötetben. Valószínűleg a későbbi kiadás volt Bolyai Farkasé, és azért szerepel csak egy kötet, mert a megjegyzés szerint: „az egyik Jánosnál maradt".
[12] A mikrofilmen sem szerepel.

állandóan kiadták tankönyvi feldolgozásban. Feldolgozta Gerling is, és legutoljára 1851-ben jelent meg az ő feldolgozásában. Gerling szerette volna megszerezni Bolyai Farkas és Bolyai János műveit. Előbb Gausstól kért a könyvekről felvilágosítást, később levélben magához Bolyai Farkashoz fordult. Minden kétséget kizáróan ennek a kapcsolatnak eredményeképpen jutott Lorenz, ill. Gerling műve Bolyai Farkas birtokába.[13]

[32] *Euclid der Wahre. Übersetzt von Lorenz.*
Euklides: Elementa XV. Bücher aus dem griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz. Halle, 1781.

[33] *Lobatsewski Prof. auf der Universität zur Kasan. (Kicsi de fontos és ritka könyv.)*
Lobacsevszkij, Nikolaj Ivanovics: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin, 1840.

[34] *La Croix. Traité elementaire du Calcul differential. (Jánosnál van.)*
Lacroix, Silvestre Francois: Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral; précédé de réflexions sur la maniére d'enseigner les mathémathiques, etc. Paris, 1806.

[35] *Szász Károly Mathesise, két darab (egyik az Enyedi, másik a' későbbi, az utóbb G. Toldalagi Victornál van.)*

Az első:

Szász Károly: Első rangú határozott egyenletek föloldásának új kezelési módszere akárhány ismeretlenre nézve; mellyel a n. enyedi főiskolában számtudományt tanuló osztály idei téli köz próbatételére minden r.t. hallgatókat meghívnak, Szász Károly és tanítványai. Nagy Enyeden, 1839-ben.[14]

A másik:

[36] Szász Károly: Számtan. Algebra. Pest, 1853. (Ezt a művet a két Szász Károly (idősebb és ifjabb) írta, és a könyvet Bolyai Farkasnak ajánlották.)

[37] *Metzburg Mathesisse. 7 darab.*
Metzburg, Georg Ignatz: Institutiones mathematicae in usum tironum conscriptae. I—VII. Wien, 1780—1791.

[38] *Karsten, W. J. G. Lehrbegriff der gesamten Mathematik. I—IX. Greifswald, 1775—1795.*
Bolyai Farkas megjegyzése: „*9 vastag darab.*"

[39] *Vieth Mathematik, 2 darab.*
Vieth, Gerhard Ulrich Anton: Anfangsgründe der Mathematik.
I—II. Leipzig, 1796.

[40] *Hauser 2 dik darabja, s a 3 dik Lenker által.*
Hauser, Mathias Freiherr von: Analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik. Wien, 1778—1786. Bolyai Farkas itt csak a 2. és 3. részt említi. Valószínűleg az 1. rész hiányzott, vagy esetleg elveszett.

[41] *Segner Mathesisse. 3 darab (a többi a bérontáskor egyebekkel együtt elveszett.)*
Segner Johann Andreas: Cursus mathematici.

[13] Stäckel i. m. 216. p.

[14] Ez a füzet tulajdonképpen vizsgai meghívó, pedagógia-történet szempontjából azonban hasznos, mert a korabeli számtantanítás módszereire és a tanítás követelményeire ad útbaigazítást.

Pars I. Elementa arithmeticae geometriae et calculi geometrici. Halae, 1756?
Pars II. Elementa analyseos finitorum cont. Halae, 1758.
Pars III. Elementa analyseos infinitorum. Halae, 1761.
Bolyai Farkas berontás alatt az 1848-i eseményeket érti. Nincs adatunk arra, hogy marosvásárhelyi lakását a szabadságharc alatt bármilyen kár is érte volna. Arra viszont van adat, hogy Bolya községbeli birtokát feldúlták.[15] Feltehető, hogy könyvei egy részét itt tartotta, és így elveszhettek.

[42] *Gnomonica.*
Stengel, Joan Peterson: Gnomonica Universalis, sive praxis... (amplissima) geometrice describendi horologia solaria... Ulmae, 1679.

[43] *Rechenbuch Segesvári Professor Schustertől.*
Schuster Michael A.: Lehrbuch der Rechenkunst. Kronstadt, 1842.

[44] *Mechanik, Ing. Major Brasseurtól.*
Brasseur, Alexander: Anfangsgründe der Mechanik zum Gebrauche der k.k. Ingenieurs-Akademie. I—II. Wien, 1819.

[45] *Mechanik, Vegától.*
Ez a mű tulajdonképpen Vega, Georg Freiherr von, ismeretes tankönyvének a Vorlesungen über die Mathematiknak a III. kötete: Mechanik fester Körper, Wien, 1788. Bolyai Farkas csak a harmadik kötetet tünteti fel a jegyzéken. Ugyanakkor a már említett mikrofilmen szerepel az első kettő is, sőt a IV. kiegészítő kötet a Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Zweite Auflage, Leipzig, 1800-ból. Lehetséges, hogy a kollégium könyvtára pótolta a hiányzó köteteket.

[46] *Compendium Geometriae Subterraneae.*
Rausch Ferenc: Compendium geometriae subterraneae. Buda, 1797.

[47] *Meyer. Mértan. (Professor Takátstól fordítva.)*
Meyer Károly: Mértan. A gymnasiumi tanulók számára — fordította Takáts J.
1. rész. Terjtan (Planimetria.)
2. rész. Téregtan (Stereometria.)
3. rész. Általános vagy algebrai mértan és háromszögi függvénytan (Trigonometria.) Kolozsvár, 1846.

[48] *Gerlach. Mechanik. 2 darab (egyik Jánosnál van.)*
Gerlach, Friedrich Wilhelm: Anfangsgründe der Mechanik zum Gebrauche der k.k. Inginieursschule. Wien, 1786.[16]

[49] *Neue Potential Lehre.*
Petr, T.: Neue Potenziallehre sammt dem Beweise der Unrichtigkeit der von den Mathematikern bis jetzt angenommenen Definition vom Potenziren. Oedenburg, 1844.

[50] *Lenker. Mathematische Geographie.*
Lencker, Michael: Anleitung zur mathematischen Erdbeschreibung, zur Zeichnung der Land- und Seekarten, wie auch zur Kenntnis des Planeten- und Weltsystems und zur astr.-geogr. Ortsbestimmung. Wien, 1818.

[51] *Euler physicai levelei, 2 darab (egyik ugymint... elveszett.)*
Euler, Leonhard: Briefe über verschiedene Gegenstände aus der Naturlehre.

[15] L. Bolyai Gergely erre vonatkozó feljegyzését az MTA Kézirattárában. K 25/53.
[16] A kiadás éve bizonytalan. Bolyai Farkas két darabot említ, ami egy kétkötetes kiadást feltételez.

Két kötet. Leipzig, 1793—94. Bolyai Farkas utóbb elfelejtette beírni, melyik kötet hiányzott. A mikrofilmen a II—III. köt. szerepel, tehát az első veszett el.

[52] *Gren, Physica.*
Gren, Friedrich Albrecht Carl: Grundriss der Naturlehre. Vierte Ausgabe. Halle, 1801.

[53] *Mayer. Physica.*
Mayer, Johann Tobias: Anfangsgründe der Naturlehre zum Behuf der Vorlesungen über die Experimental-Physik. Göttingen, 1805. A mikrofilmen ez a munka kolligátumként szerepel, melynek második darabja: Mayer, J. T.: Lehrbuch über die physische Astronomie... Göttingen, 1805.

[54] *Lichtenberg. Physica.*
Ez a mű az alábbival azonos: Erxleben, Johann Christian Polykarp: Anfangsgründe der Naturlehre. Sechste Auflage. Mit Verbesserungen und vielen Zusätzen von G. C. Lichtenberg. Göttingen, 1794.

[55] *Horváth. Physica 2 darab.*
Horváth János: Physica generalis, quam in usum auditorum philosophiae conscripsit. Tyrnaviae, 1776. Physica particularis, quam in usum auditorum philosophiae conscripsit. Tyrnaviae, 1777.

[56] *Mako. Physica.*
Makó Pál: Compendiaria physicae institutio, quam in usum auditorum philosophiae elucubratus est. 2 ptes. Vindobonae, 1762—63.

[57] *Pankl. Physica 3 darab.*
Pankl Máté: Compendium institutionum physicarum, quod in usum suorum auditorum conscripsit. Partes tres: I. de corpore abstracto, II. chemice, III. physice considerato. Editio 3. Budae, 1797—98.

[58] *Radics. Physica.*
Radics Antal: Institutiones physicae in usum discipulorum conscriptae. Budae, 1766.[17]

[59] *Krügers Physica 2 darab; — Kovátstól Krüger Compendiuma.*
Krüger, Johann Gottlob: Elementa philosophiae naturalis, [Naturlehre]. In usum tironum delineata, [transl.]... Josepho Kovács. Kolozsvár, 1774. A könyvjegyzékben ennél a műnél Bolyai Farkas fogalmazásában több ponton bizonytalanság van. Krüger Fizikáját Kovács József fordításában sehol sem találtuk két kötetben (ahogy ő írta 2 darab-ban) említve. A mikrofilmen az általunk fentebb kiegészített munka szerepel. Van azonban a filmen még két másik munka címe is, ugyancsak Krügertől, így:

[60] Naturlehre nebst Kupfern und vollständigem Register. Halle in Magdeburgischen, 1750.

[61] Physiologie, oder Lehre von dem Leben, und Gesundheit der Menschen — mit Kupfertafel, von dem Leben, und der Gesundheit der Menschen, — mit Kupfertafeln. Halle in Magdeburgischen, 1748. Nem sikerült kiderítenünk, hogy Bolyai Farkas „Krüger Compendiuma" alatt pontosan mit értett.

[62] *Journal der Physik 12 vastag darab.*
Ez alatt Bolyai Farkas minden valószínűség szerint a Gren, F. A. C. által

[17] Bolyai Farkas ezt a könyvet 8-rétnek tünteti fel. A bibliográfiák ezt a kiadást mindenütt 4-rétben említik.

Lipcsében szerkesztett folyóirat 1790—1794-ig nyolc kötetben és a Neue Journal der Physik 1795—98-ig megjelent 4 kötetét érti.

[63] *Kepleri Problema.*
Az alábbi kötetről lehet szó: Kepleri Problema celebre de motu corporum coelestium. Dissertatio philosophica a Wolfgange Herz Detmold. Göttingen, 1798.[18]

[64] *Strombau.*
A mikrofilmen ez a következőképpen szerepel: Schemerl, Joseph: Erfahrungen im Wasserbau in welchem der Strombau in Absicht auf die vorteilhafteste Leitung und Beschränkung der Flüsse... Wien, 1809.

[65] *Physica (Mich. Szathmári) Vásárhelyi Professortól.*
Szathmári Mihály: Physica contracta juxta principia Neotericorum, in usum collegii Marosvásárheliensis concinnata. Kolozsvár, 1719.

[66] *Lavoisier. Chemie.*
Lavoisier, Antoine Laurent: System der antiphlogistonischen Chemie. Übersetzt... S. F. Herbstädt. Berlin u. Stettin, 1792.

[67] *Fourcroi. Systeme des Connaissances chimiques XI darab.*
Fourcroy, Antoine Francois: Systéme des connaissances chimiques, et de leurs applications aux phenoménes de la nature, et de l'art. (Table alphabétique et analytique des matiéres... rédigée par Mme Dupiery, et revue par... Fourcroy.) 11 tom. Párizs, 1801—1802.

[68] *Journal der Chemie 9 vastag darab.*
Allgemeines Journal der Chemie. Herausgegeben von A[lexander] N[icolaus] Scherer. I—IX. Band. Leipzig, Berlin, 1798—1802. A folyóirat 1798—1803 között tíz kötetben jelent meg, de a X. kötet Bolyai Farkasnak hiányzott.

[69] *Chemia Dr. Sadelbechtől.*
A név valószínűleg elírás, Sadebeck-ről lehet szó. Nem sikerült kideríteni a szerző és mű pontos adatait.

[70] *Gleichungen zur Cristallizations-Gestalten.*
Mohs, Friedrich: Gleichungen, zur Entwicklung und Berechnung zusammengesetzten Crystall-Gestallten, des rhomboederischen pyramidchen und prismatischen Systems. H.n. 1821.

[71] *Borvizekről D. Nyulas 3 darab.*
Nyulas Ferenc: Az erdélyországi orvosvizeknek bontásáról közönségesen.
I. köt. Ajánlólevél. Elöljáróbeszéd és a vizeknek bontásáról közönségesen.
II. köt. A Radna vidéki vasas borvizeknek bontásáról.
III. köt. Ugyanazon vizeknek orvosi erejéről, hasznairól és vélek élés módjáról. Kolozsvár, 1800.[19]

[72] *Kants Antropologia.*
Kant, Immanuel: Anthropologie in pragmatischer Hinsicht abgefasst. A könyv címleírása nem szerepel a mikrofilmen, így a kiadás évének pontos megállapítása nem volt lehetséges. Véleményünk szerint vagy a königsbergi 1798., vagy a Frankfurt und Leipzig, 1799. évi kiadás lehetett, mert a jegyzéken felsorolt majdnem valamennyi könyv a 18. század végén, a 19. század elején kiadottakból való.

[18] A mikrofilmen ez a mű 4-rét-ben szerepel. Bolyai Farkas viszont a 8-rétűek között említi.
[19] Az ezután felsorolt könyvek, a 75. sz. alatt levő kivételével, nem szerepelnek a mikrofilmen.

[73] *Vieland über das Genie.*
Wieland, M. Ernst Carl: Versuch über das Genie. Leipzig, 1779.
[74] *Eschenburgs Vorlesungen über Encyclopedie.*
Eschenburg, Joachim Johann: Lehrbuch der Wissenschaftstunde, ein Grundriss encyklopädischer Vorlesungen. 1792.
[75] *Girtanner über die venerische Krankheit.*
Girtanner, Christoph G.: Abhandlungen über die venerischen Krankheiten. Wien, 1803.
[76] *Schlötzers Weltgeschichte.*
Schlözer, August Ludwig: Weltgeschichte II. Theile. Göttingen, 1785—1801.
[77] *Sylloge tractatum... (Szász Károly által.)*
Szász Károly: Sylloge tractatuum aliorumque actorum publicorum historiam et argumenta b. diplomatis Leopoldini, resolutionis item quae Alvincziana vocatur, illustrantium. Ed. Carolus Szász de Szemeria. Claudiopoli, 1833.

Bolyai Farkas autográf könyvjegyzéke a fentebb felsorolt könyveket és folyóiratokat tartalmazza. Úgy látszik azonban, hogy rövidesen halála után készült egy másolat a jegyzékről, amely Bolyai János tulajdonába került. Ez annyiban különbözik az eredetitől, hogy nem tartalmazza Bolyai Farkas azon megjegyzéseit, melyeket Gauss munkái mellett (általunk a 7. sz. alatt) fontosnak tartott megemlíteni. Minden valószínűség szerint ez a részlet azért maradt ki a másolatból, mert nem a Kollégium könyvtárát érintette.

A másolat a mi szempontunkból mégis fontos dokumentum, mert a végén Bolyai János autográf írásával további könyvcímek (és egyesek mellett szintén megjegyzések) sorakoznak. Ezeket mi folytatólagos számozással hozzuk, de kiegészítés nélkül, kivéve a 85. sz. alattit. Nem sorszámoztuk Hauser munkáját, mert az már eredetiben szerepel, (l. a 40. sz.), de Bolyai János felegyzése szerint a többieket plusz példányoknak tekintettük. A kiegészítő jegyzék is Bolyai János bevezető soraival kezdődik: *„Az Öreg' halála után János fija még be-adta a' következőköt:"*

A Hauser' mathesisse 2-és 3 dik darabját
[78] *Popenak az emberről munkája' fordítványja. 4 példány kötetlen.*
[79] *Szász Károly első rangu egyenletek' föl-oldása' uj módja, az igéretnek meg-nem-felelő, éppen kényelmetlen, hoszszas.*
[80] *Arithmetika' eleje kezdőknek. 98 példány: melyből egy be-kötve, a' többi kötetlen.*
[81] *Kurzer Grundriss des Tentamens, d.i eines grund-oder vom Grunde aus neuen Systems der Mathematik. 105 példány be-kötve.*
[82] *Arithm' eleje' 2 dik ki-adat. 38 példány be-kötve. d.to 57 példány kötetlen.*
[83] *d.to az alsóbb osztályi tanulók' számára. 14 példány be-kötve.*
[84] *Tentamen. 15 példány kötetlen. D.to 1 ső darab. 47 példány kötetlen. 4 kötet raptura.*
[85] *Svetonius.*
Suetonius Tranquillus: De vita Caesarum.
A kiadási hely és év nem volt megállapítható.
[86] *Ür-tan' elemeji. 33 példány be-kötve. D.to 153 példány kötetlen.*
[87] *Öt szomoru játék. 12 példány kötetlen.*

A könyvjegyzék bemutatása után készítsük el a statisztikát Bolyai Farkas könyvtáráról. Egyelőre ne vegyük figyelembe Bolyai János pótjegyzékét (a 85. sz.

könyv, SUETONIUS kivételével), mert az ott feltüntetett könyvek BOLYAI FARKAS jegyzékén egyszer már szerepeltek. Leszámítjuk a TELEKI-TÉKÁnak adományozott két művet (nálunk a 7. sz. alatt van feltüntetve). Akkor az eredmény 77 mű, 228 kötetben, melyből a saját művek — a 10. számtól a 21-ig, — 84 kötetet tesznek. Ha a 228 kötethez hozzászámítjuk a pótjegyzéken felsorolt BOLYAI JÁNOS-féle adományt, a következő képet kapjuk:

$$77 + \quad 9 \text{ mű} = 86 \text{ mű}$$

$$228 + 577 \text{ köt.} = 805 \text{ kötet,}$$

melyből 661 kötet BOLYAI FARKAS műveit tartalmazza.[20]

Természetesen ez a statisztika nem nyújtja Bolyai Farkas könyvtárának teljes képét. Elsősorban azért, mert — ahogy ő maga is megjegyzi — elvesztek könyvei,[21] másodsorban azért, mert nyilván el is ajándékozott belőle. Azonkívül az is elképzelhető, hogy a jegyzék készítése alkalmával kimaradhattak könyvek.

A könyvtár számszerűsége szempontjából még egy kérdést szükséges tisztázni, ami éppen 90 esztendővel ezelőtt látott napvilágot. KONCZ JÓZSEF marosvásárhelyi matematikatanár és egyben könyvtáros azt írja,[22] hogy BOLYAI FARKAS könyvtárát, 145 művet 239 kötetben a kollégium könyvtárának adományozta. Sajnos ma már lehetetlen kideríteni milyen adatok birtokában állította ezt KONCZ JÓZSEF, viszont az általunk közölt végrendelkezés és autográf könyvjegyzék KONCZ J. adataitól eltérően — a fentiekben kimutatott összesítést adja.

2. Bolyai Farkas könyvtárának jellemző vonása az alkotó tudós kézikönyvtári és az aktív pedagógus gyakorlati segédkönyvtári jellege. Könyvtárában korának legkiemelkedőbb és a legújabb kutatási eredményeket tartalmazó tudományos művek vannak képviselve (EULER, BERNOULLI, MONTUCLA, GAUSS, *Journal der Physik* stb.) olyanok, melyeket akkor Magyarországon csak a természettudományokat pártoló főurak engedhettek meg maguknak összegyűjteni. Ennek bizonyítására csak azt említjük meg, hogy a marosvásárhelyi TELEKI-TÉKÁban is csak egy kis része volt megtalálható azon könyveknek, melyeket BOLYAI FARKAS szükségesnek tartott megszerezni, és hogy az általunk fényképeken közölt művek is az Akadémia Könyvtárát alapító *Teleki*-család gyűjteményéből valók.

Könyveinek egy része tehát tudományos kutatásait szolgálta, amely egyébként szorosan összekapcsolódott tanári működésével. Kutatásainak eredményeit matematikai könyveiben jelentette meg, amelyek mind tankönyvjellegűek, de főműve a két kötetes „Tentamen", elméleti vonatkozásban is jelentős.

A könyvek második fő csoportját a tankönyvek teszik ki, amelyek szinte kivétel nélkül latin és német nyelvűek, jeléül annak, hogy BOLYAI FARKAS tanári működésének első három évtizedében az anyanyelvű tanítás — a közép- és felsőiskolákban — még nem tudott gyökeret verni. Ennek eredményeképpen a magyar nyelvű tankönyvirodalom csak lassan bontakozott. Magyar nyelvű tankönyvek a természettudományi irodalomban szinte egyáltalán nem voltak és a magyar tankönyvírók is latinul írták műveiket. Érdekes, hogy BOLYAI FARKAS könyvei között milyen szép számmal szerepelnek magyar szerzők tankönyvei (HORVÁTH JÁNOS, MAKÓ PÁL, PANKL MÁTÉ,

[20] Nem lenne érdektelen ismerni, hogy 100 év alatt mi történt Bolyai Farkas megmaradt műveinek példányaival.
[21] L. a 41. sz. alatt feltüntetett könyv melletti megjegyzést.
[22] Magyar Könyvszemle 1879. évf. 227—229. p.

RADICS ANTAL, RAUSCH FERENC, SCHUSTER JÁNOS, SEGNER ANDRÁS, SZÁSZ KÁROLY stb.). Ez annál is érdekesebb, mert katolikus szerzők könyveit is (HORVÁTH JÁNOS, MAKÓ PÁL, RADICS ANTAL) megtaláljuk, amiből azt következtethetjük, hogy tankönyveiket használták a protestáns főiskolákon. De a matematikai-fizikai-kémiai tanítás korabeli színvonala a marosvásárhelyi főiskolán lemérhető nemcsak a magyar szerzők kiemelkedő tankönyvein, hanem a külföldi szerzők művein. Igaz, hogy ez a professzor személyének tulajdonítható elsősorban, de emellett BOLYAI FARKAS olyan szerzők műveiből készítette fel tanítványait, amilyen könyveket akkor a nyugati országok egyetemein és főiskoláin, illetőleg akadémiáin használtak. Ilyenek pl. az alábbi szerzők könyvei: EUKLIDES, GERLING, GREN, HAUSER, KARSTEN, KAESTNER, KRÜGER, LENCKER, LICHTENBERG, METZBURG, VEGA művei.

BOLYAI FARKASnak egy 1813-ból származó jelentéséből idézzük az alábbiakat, melyben a kolozsvári ref. főkonsistoriumnak tesz jelentést tanári munkájáról és egyben pontosan elmondja milyen műveket használ a tananyag feldolgozásához:

„Jelentem azonban alázatosan, hogy a Mathesisbe további rendelésig Kaestnert, a physicába s chemiába Grént követem, a hozzánk el-jutható ujj találmányokon s azon kívül, hogy a Mathesis tanitását az eredeti Euklidesnek, (a Föld fő-mathematicussai tanítójának) hat könyvén kezdeni tapasztaltam leg-foganatosabbnak."[23]

BOLYAI FARKAS életrajzából ismeretes, hogy milyen rendkívülien sokoldalú egyéniség volt, és milyen sokfelé terjedt érdeklődése. Ennek tulajdoníthatók irodalmi kísérletei, drámái és fordításai, melyeket 1815—1820 között készített. Ezekről önéletrajzában úgy nyilatkozott, hogy mivel *„a paralellák megmutatására tett próbámmal nem lévén megelégedve... mathesisi tüzem meglankadott s ez vitt a poézisre.*"[24] Igazi „társának" azonban mindig a „mathesist" tekintette. Talán ezért hiányoznak könyvei közül a világirodalom klasszikusai és a magyar irodalom termékei. Irodalmi munkásságához bőven talált megfelelő segédkönyveket a TELEKI-TÉKÁban és nem volt arra kényszerítve, hogy súlyos összegeket fizessen értük.

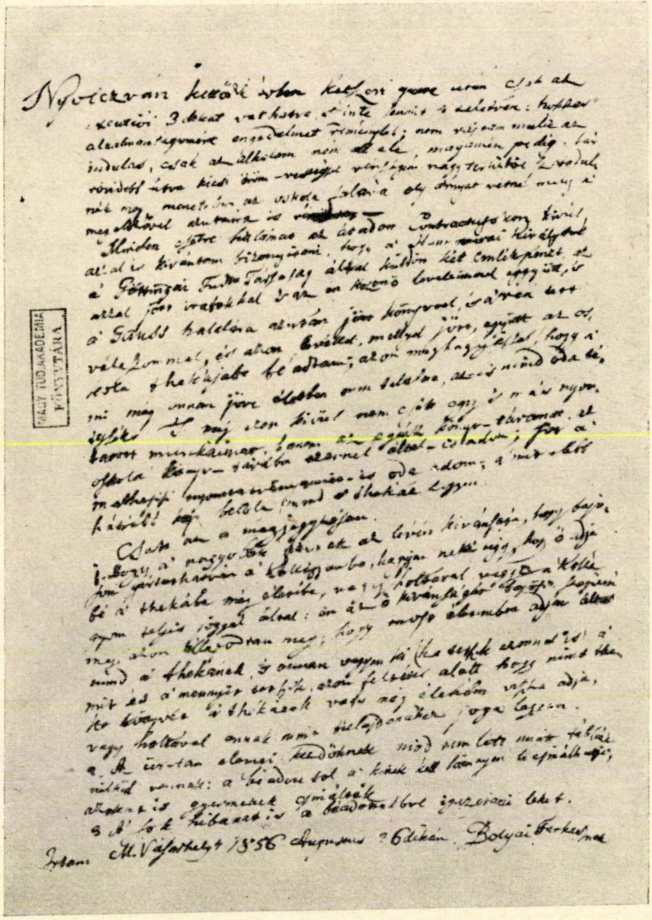
Ugyancsak hiányoznak könyvtárából az erdészetre vonatkozó könyvek, melyek közül pedig saját bevallása szerint „40 db. könyvet tanult át"[25], hogy magát erdésszé képezze. Ezt azért tette, mert akkori csekély jövedelmű tanári pályáját 1820-ban egy nagyobb jövedelmű erdészi inspektori állással szerette volna felváltani. De hogy ez nem sikerült, ismét a matematikához tért vissza és ezután kezdett könyveinek írásához. Hová lettek vajon erdészeti könyvei? És saját könyvei voltak-e, vagy kölcsön kérte őket, ezt ma már nem lehet kimutatni.

A két főcsoporton kívül, csak néhány olyan könyv található meg az egykori professzor könyvtárában, mely témájánál fogva nem illik az előző kettőbe, de amelyek részben általános tájékozódás szempontjából pl. a 74. sz. ESCHENBURG mű, a 76. sz. SCHLÖZER-féle egyetemes történet, részben egészségügyi és más szempontok miatt voltak szükségesek, pl. a 71. sz., vagy a 73. és 75. sz. alattiak.

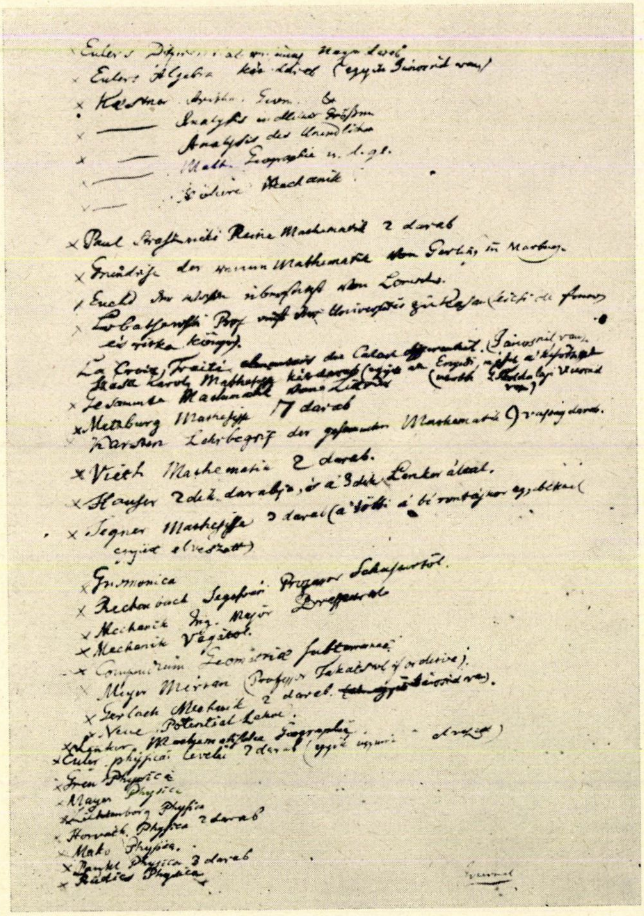
Mindent összegezve a könyvtár egész jellegéről az állapítható meg, hogy egy tudós-matematikus tanár sok szeretettel és tekintélyes anyagi áldozattal összegyűjtött könyvtára a maga idejében eléggé jelentős volt.

(Beérkezett: 1968. XII. 10.)

[23] Korunk, 1957. 46. p.
[24] Koncz J. i. m. 278. p.
[25] Uo. 298. p.



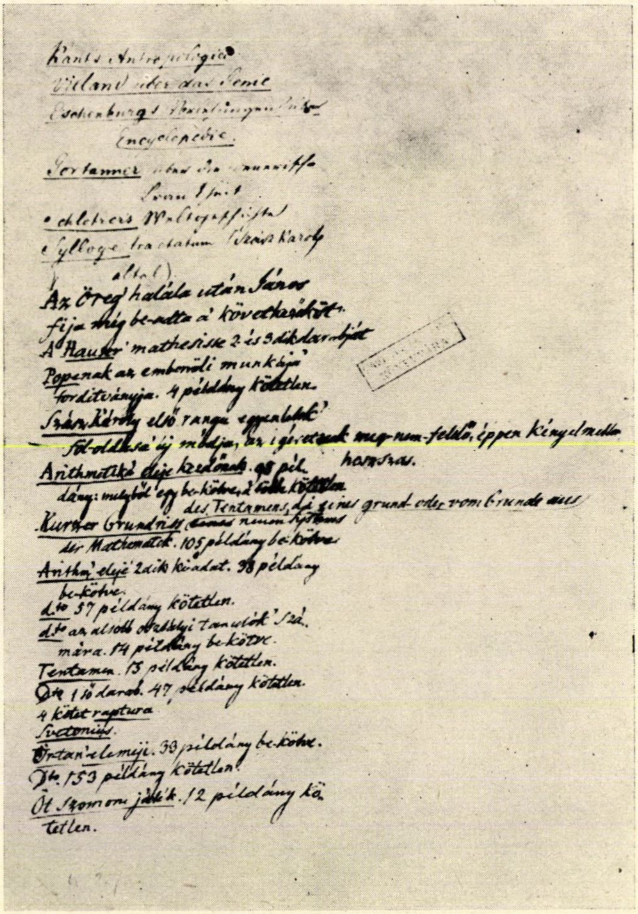
1. Bolyai Farkas végrendelete könyveire vonatkozóan


× Euler's Differential rechnung [illegible] darab
× Eulers Algebra két darab (egyik Jánosnál van)
× Kästner Arithm. Geom. &
— Analysis endlicher Grössen
× — Analysis des Unendlichen
× — Math. Geographie u. d. gl.
× — Höhere Mechanik
—

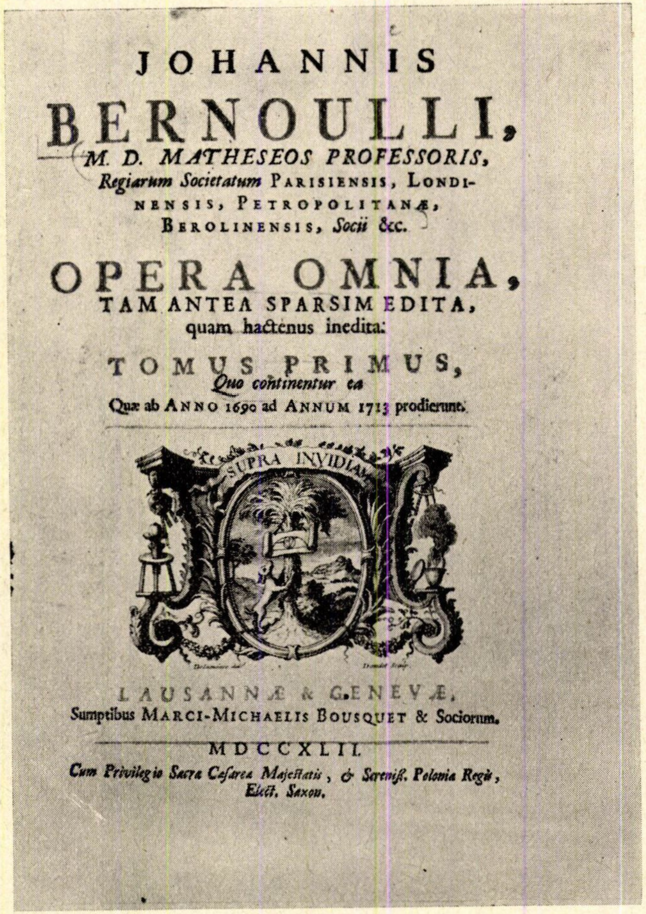
× Paul [illegible] Reine Mathematik 2 darab
× Grundsätze der reinen Mathematik von Gerling in Marburg
× Euclid der ersten übersetzt von Lorenz.
× Lobatsevszki Prof. auf der Universität zu Kasan (kicsi de fontos és ritka könyv).
La Croix, Traité élémentaire du Calcul différentiel. (Jánosnál van)
[illegible] Károly Mathesis két darab (egyik az Ergedi [illegible]) (másik [illegible] van)
× Gesammte Mathematik [illegible]
× Metzburg Mathesis 17 darab
× Karsten Lehrbegriff der gesammten Mathematik 9 [illegible] darab.
× Vieth Mathematik 2 darab.
× Hauser 2dik darabja, és a 3dik Lenker által.
× Segner Mathesise 2 darab (a többi a [illegible] egyebekkel együtt elveszett)

× Gnomonica
× Rechenbuch Segesvári Professor Schuhfortól.
× Mechanik [illegible] Professortól
× Mechanik Végától.
× Compendium Geometriae Subterraneae
× Meyer Mérnök (Professor Takátsról fordítva).
× Gerlach Mechanik 2 darab. [illegible]
× Neue Potential Lehre.
× Lenker Mathematische Geographie
× Euler physicai levelei 2 darab (egyik [illegible])
× Gren Physica
× Mayer Physica
× Lichtenberg Physica 2 darab
× Horvath Physica
× Mako Physica
× Pankl Physica 3 darab
× Rádics Physica

2. Bolyai Farkas könyvjegyzékének egyik oldala


Kants Antropologia
Vieland über das Genie
Eschenburgs [illegible]
Encyclopedie.
Gertanner über die [illegible]
[illegible]
Schlözers Weltgeschichte
Sylloge tractatum (Szász Károly
által).
Az Öreg halála után János
fija még be-adta a' következőket.
A' Hauser mathesisse 2 és 3dik darabját
Popenak az emberröli munkája
forditványja. 4 példány kötetlen.
Szász Károly elsö rangu egyenletek
fel-oldása' új módja, az igéretet meg-nem-felelö, éppen kényelmetlen
hamszas.
Arithmetika' eleje kezdönek. 98 pél-
dány: melyböl egy be-kötve, a' több kötetlen.
des Tentamens, die seines grund-oder vom Grunde aus
Kurtzer Grundriss (eines neuen Systems
der Mathematik. 105 példány be-kötve.
Arithm' eleje 2dik kiadat. 98 példány
be-kötve.
d.to 37 példány kötetlen.
d.to az alsobb oskolai tanulók' szá-
mára. 14 példány be-kötve.
Tentamen. 13 példány kötetlen.
D.to 1sö darab. 47 példány kötetlen.
4 kötet raptura
Suetonius.
Ürtan' elemeji. 33 példány be-kötve.
D.to 153 példány kötetlen.
Öt szomorú játék. 12 példány kö-
tetlen.

3. A könyvjegyzék utolsó oldala Bolyai János kiegészítésével



JOHANNIS

BERNOULLI,

M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, Socii &c.

OPERA OMNIA,
TAM ANTEA SPARSIM EDITA,
quam hactenus inedita.

TOMUS PRIMUS,
Quo continentur ea
Quæ ab ANNO 1690 ad ANNUM 1713 prodierunt.

SUPRA INVIDIAM

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.

MDCCXLII.

Cum Privilegio Sacræ Cæsareæ Majestatis, & Sereniss. Poloniæ Regis, Elect. Saxon.

4—5. Teleki József könyvtárából egy Bernoulli kötet

HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES,

DANS laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours ; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les Mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres.

NOUVELLE ÉDITION, CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE, ET PROLONGÉE JUSQUE VERS L'ÉPOQUE ACTUELLE ;

Par J. F. MONTUCLA, *de l'Institut national de France.*

TOME QUATRIEME.

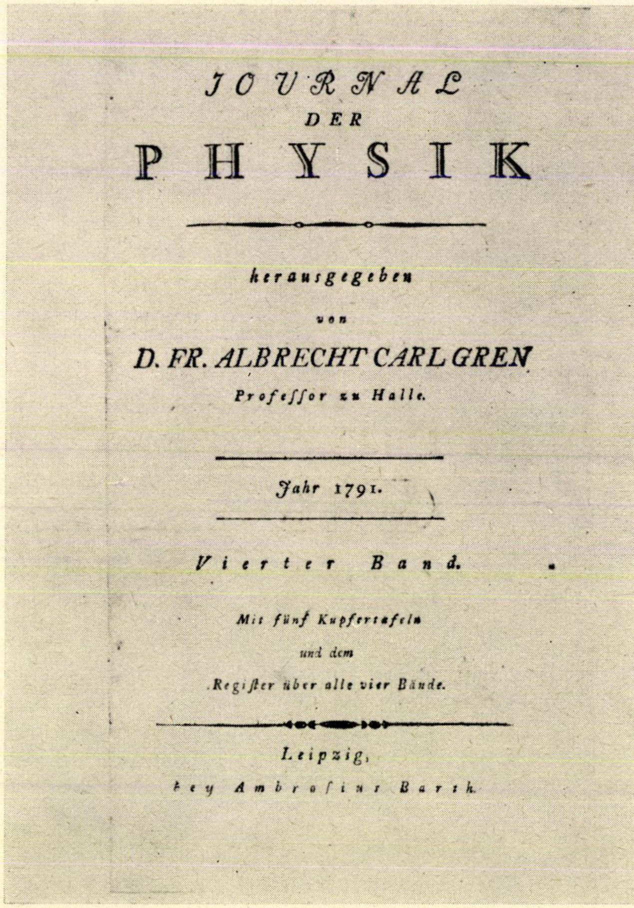
ACHEVÉ ET PUBLIÉ PAR JÉRÔME DE LA LANDE.

A PARIS,

Chez HENRI AGASSE, libraire, rue des Poitevins, n°. 18.

AN X. (mai 1802)

6—7. Az egyik legrégibb matematikatörténet címlapja



JOURNAL
DER
PHYSIK

herausgegeben
von
D. FR. ALBRECHT CARL GREN
Professor zu Halle.

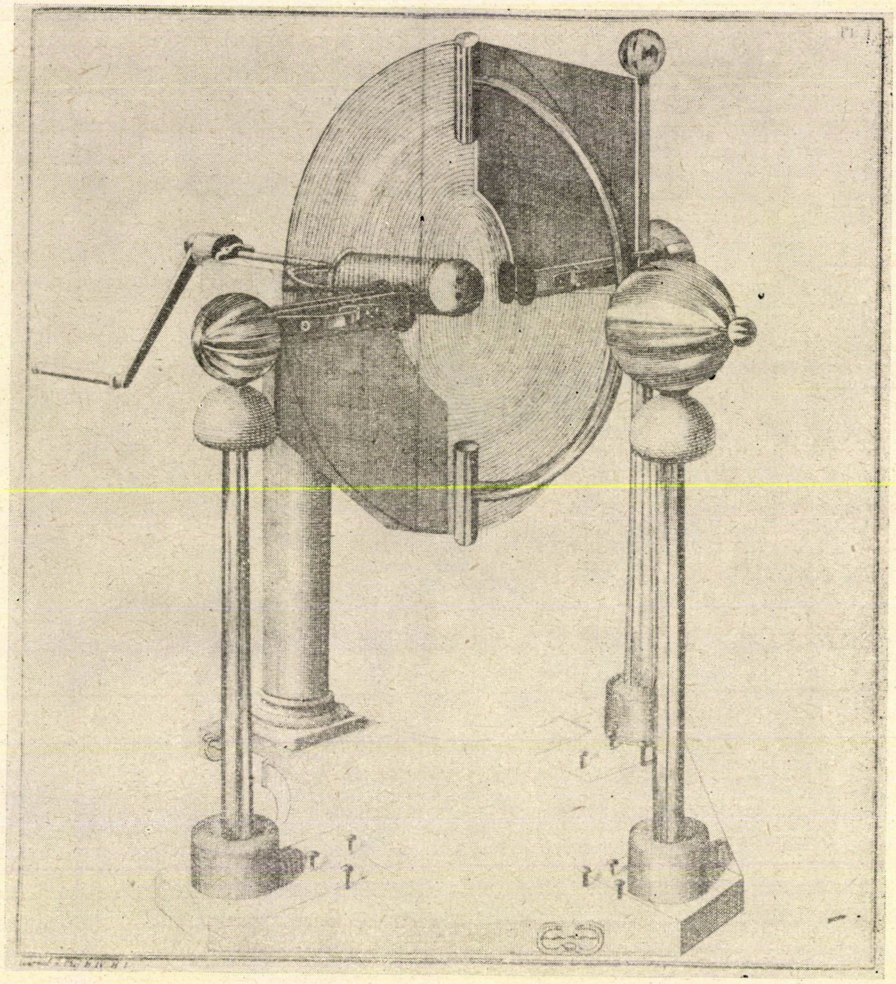
Jahr 1791.

Vierter Band.

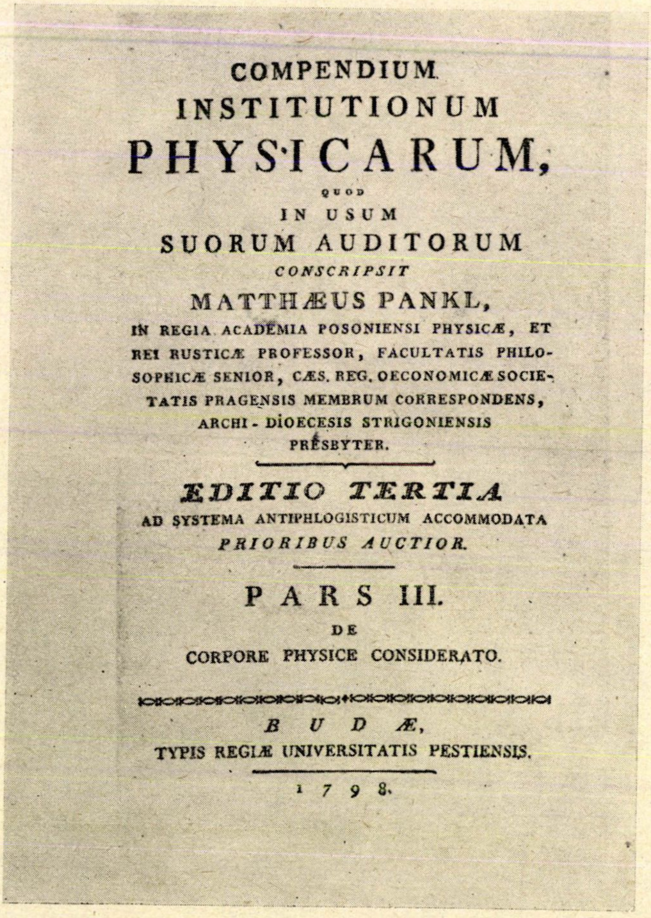
Mit fünf Kupfertafeln
und dem
Register über alle vier Bände.

Leipzig,
bey Ambrosius Barth.

8. A Journal der Physik 4. kötete



9. A Journal der Physik 4. kötetének ábralapján egy dörzselektromos-gép



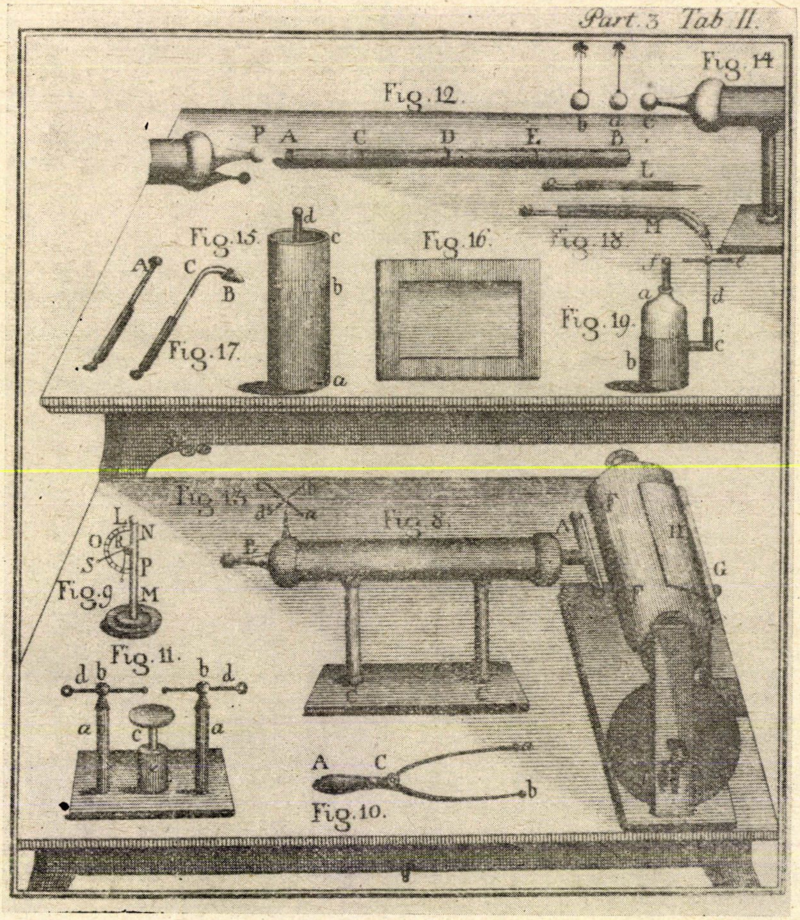
COMPENDIUM
INSTITUTIONUM
PHYSICARUM,
QUOD
IN USUM
SUORUM AUDITORUM
CONSCRIPSIT
MATTHÆUS PANKL,
IN REGIA ACADEMIA POSONIENSI PHYSICÆ, ET REI RUSTICÆ PROFESSOR, FACULTATIS PHILOSOPHICÆ SENIOR, CÆS. REG. OECONOMICÆ SOCIETATIS PRAGENSIS MEMBRUM CORRESPONDENS, ARCHI - DIOECESIS STRIGONIENSIS PRESBYTER.

EDITIO TERTIA
AD SYSTEMA ANTIPHLOGISTICUM ACCOMMODATA
PRIORIBUS AUCTIOR.

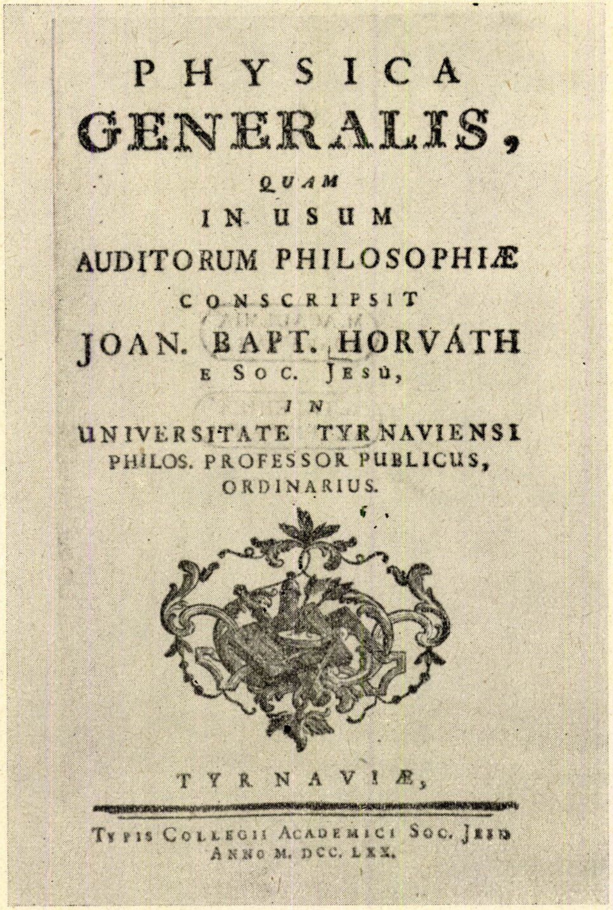
PARS III.
DE
CORPORE PHYSICE CONSIDERATO.

BUDÆ,
TYPIS REGIÆ UNIVERSITATIS PESTIENSIS.
1798.

10. Pankl Máté Fizikája III. kötetének címlapja

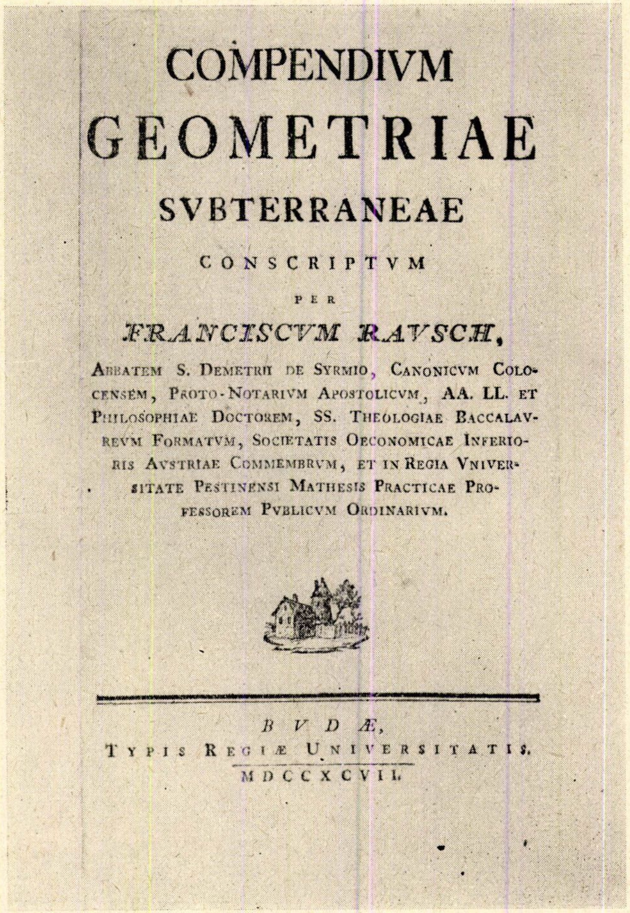


11. „De Machinis et reliquo apparatu electrico" c. ábra
Pankl Máté műve III. kötetéből


PHYSICA
GENERALIS,
QUAM
IN USUM
AUDITORUM PHILOSOPHIÆ
CONSCRIPSIT
JOAN. BAPT. HORVÁTH
E SOC. JESU,
IN
UNIVERSITATE TYRNAVIENSI
PHILOS. PROFESSOR PUBLICUS,
ORDINARIUS.

TYRNAVIÆ,
TYPIS COLLEGII ACADEMICI SOC. JESU
ANNO M. DCC. LXX.

12. Horváth János munkájának címlapja


COMPENDIVM
GEOMETRIAE
SVBTERRANEAE
CONSCRIPTVM
PER
FRANCISCVM RAVSCH,
ABBATEM S. DEMETRII DE SYRMIO, CANONICVM COLOCENSEM, PROTO-NOTARIVM APOSTOLICVM, AA. LL. ET PHILOSOPHIAE DOCTOREM, SS. THEOLOGIAE BACCALAVREVM FORMATVM, SOCIETATIS OECONOMICAE INFERIORIS AVSTRIAE COMMEMBRVM, ET IN REGIA VNIVERSITATE PESTINENSI MATHESIS PRACTICAE PROFESSOREM PVBLICVM ORDINARIVM.

BVDAE,
TYPIS REGIAE VNIVERSITATIS.
MDCCXCVII.

13. Rausch Ferenc Geometriájának címoldala

Lehrbegriff
der gesamten
Mathematik.

Aufgesetzt
von
Wencesl. Joh. Gustav Karsten,
Der Phil. Doctor, Hofrath und Professor der Mathematik und Naturlehre auf der Universität in Halle, der Churfl. Akademie der Wissenschaften in München, der Holländischen Gesellschaft der Wissenschaften in Harlem, und der Königl. Dänischen Gesellschaft in Copenhagen, auch der oeconomischen Gesellschaft in Leipzig Mitgliede.

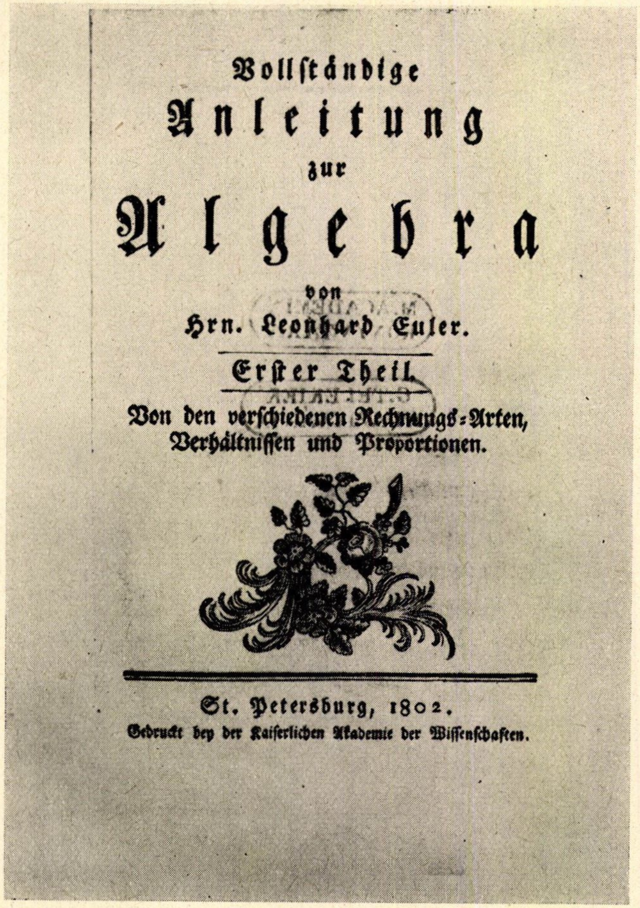
Der erste Theil. Leiber

Die Rechenkunst und Geometrie.

Zweyte Auflage.

Greifswald,
gedruckt und verlegt von Anton Ferdinand Röse. 1782.

14. Karsten, Johann Gustav Matematikája



Vollständige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.

Erster Theil.
Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnissen und Proportionen.

St. Petersburg, 1802.
Gedruckt bey der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

15. Euler, Leonhard Algebrájának címlapja

DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, IUN.

1801.

16. Gauss, Karl Friedrich egyik művének címoldala

A KIEGÉSZÍTŐ VÁLTOZÓK MÓDSZERE

Írta: MAJTHAY ANTAL

1. Bevezetés

A kiegészítő változók módszere DANTZIG és COTTLE munkássága nyomán született, előzményei azonban sokkal korábbi időpontra nyúlnak vissza. Mindenesetre ők javasoltak a konvex kvadratikus programozási feladat megoldására egy, az ekvivalens feladat sajátos szerkezetét mélyen kihasználó megoldó algoritmust [8], [9]. DANTZIG és COTTLE gondolatait TUCKER mélyreható vizsgálat tárgyává tette [62], és ennek eredményeként nemdegenerált feladat esetén az algoritmus logikailag kifogástalan leírását nyerte. E vizsgálatokat folytatva LEMKE arra a felismerésre jutott, hogy az alapgondolat variálásával egyéb problémák is sikeresen kezelhetők [38], [39], [41].

A következő második pontban a probléma kialakulásának a történetét vázoljuk és ennek kapcsán megmutatjuk, hogy a matematikai programozásnak nagyon sok problémája szorosan összefügg az általunk vizsgált, és első pillantásra nagyon speciálisnak tűnő problémával. A harmadik, negyedik és ötödik pontban három, egymással rokon algoritmus leírását és végességük, illetőleg eredményességük, továbbá alkalmazhatósági határaik vizsgálatát találja az olvasó.

2. A kiegészítő változók módszerének kialakulása és a matematikai programozásban betöltött szerepe

2.1. Tekintsük a következő feladatot:

Legyen $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ az N-dimenziós euklideszi térnek egy önmagába való leképezése. Keressünk a nemnegatív ortánsban egy olyan $\mathbf{z}$ vektort, amelynek a $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ képe ortogonális $\mathbf{z}$-re és ugyanebbe az ortánsba esik.

Kiegészítő változók módszerének egy algoritmuscsaládot nevezünk, amely a $\mathbf{w}(\mathbf{z}) = G\mathbf{z}+\mathbf{g}$ eset vizsgálata során született.

Legyen tehát G $N\times N$-típusú valós elemű mátrix, $\mathbf{g}$ pedig N elemű oszlopvektor. Keressünk olyan N elemű $\mathbf{z}$ és $\mathbf{w}$ oszlopvektort, amelyekre fennáll:

$$\mathbf{w} = G\mathbf{z}+\mathbf{g} \tag{2. 1. 1}$$

$$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0} \tag{2. 1. 2}$$

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0} \tag{2. 1. 3}$$

$$\mathbf{z}^T\mathbf{w} = 0. \tag{2. 1. 4}$$

E képletekben $\mathbf{0}$ zérusvektort jelöl, a vektorok közötti egyenlőtlenség komponensenként értendő, T a transzponálás jele, így $\mathbf{z}^T\mathbf{w}$ a $\mathbf{z}$ és $\mathbf{w}$ vektorok skalárszorzatát jelöli.

A továbbiakban a

$$\min g(\mathbf{x})$$
$$g_i(\mathbf{x}) \geqq 0 \qquad i=1, \dots, m$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

szimbolikus írásmóddal a következő feladatot fogjuk jelölni:

Határozzuk meg a $g(\mathbf{x})$ valós értékű függvénynek a $g_i(\mathbf{x}) \geqq 0$ $i=1, \dots, m$ és $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ feltételek által meghatározott halmazon felvett minimumának az értékét, továbbá a halmaznak legalább egy olyan $\mathbf{x}$ pontját, amelyben $g(\mathbf{x})$ értéke minimális, illetőleg mutassuk meg, hogy ilyen nincsen.

Analóg módon értendő a

$$\max g(\mathbf{x})$$
$$g_i(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0} \qquad i=1, \dots, m$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

szimbolikus írásmód is.

A matematikai programozás elméletében először a lineáris programozás dualitás-tételének vizsgálata során jutottak a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) problémára [61].

Tekintsünk egy kanonikus formában megfogalmazott primál-duál feladatpárt. Legyen A adott $m \times n$ típusú valós elemű mátrix, $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ adott m, ill. n elemű oszlopvektor, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ pedig n, ill. m elemű változó vektorok.

Primál feladat:

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &A\mathbf{x} \geqq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2. 1. 5}$$

Duál feladat:

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ &A^T\mathbf{y} \leqq \mathbf{c} \\ &\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2. 1. 6}$$

Vezessük be az $\mathbf{u}$ n-dimenziós és $\mathbf{v}$ m-dimenziós segédváltozókat. Ezeknek segítségével a feladatpár a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &A\mathbf{x} - \mathbf{v} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{v} \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2. 1. 5'}$$

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ &A^T\mathbf{y} + \mathbf{u} = \mathbf{c} \\ &\mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2. 1. 6'}$$

A lineáris programozás dualitástétele [6] szerint e feladatok bármelyike akkor és csak akkor oldható meg, ha a másik is megoldható. Eszerint a két feladatot egyszerre is vizsgálhatjuk. Ha bevezetjük a

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, akkor e feltételek alakja:

$$\mathbf{w} = G\mathbf{z} + \mathbf{g}$$

$$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}.$$

A kiegészítő eltérések gyenge tétele [6] szerint, egy $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ megengedett megoldáspár, ill. a hozzájuk tartozó $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorok akkor és csak akkor alkotják a feladatpár optimális megoldását, ha

$$\mathbf{x}^T \mathbf{u} = \mathbf{y}^T \mathbf{v} = 0.$$

A nemnegativitási feltételre való tekintettel e feltétel éppen egyenértékű a

$$\mathbf{z}^T \mathbf{w} = 0$$

feltétellel.

Összefoglalva: a (2. 1. 5), (2. 1. 6) lineáris programozási feladatpár ekvivalens a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladattal.

A lineáris programozással analóg viszonyokat találunk a konvex kvadratikus programozási feladat vizsgálata során is [29].

Tegyük fel, hogy Q $n \times n$-típusú, valós elemű, pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix. A további jeleket átvesszük a (2. 1. 5), (2. 1. 6) feladatokból. Tekintsük a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\min \tfrac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Minthogy a lineáris feltételek triviálisan teljesítik a *Kuhn—Tucker*-féle feltételminősítést [37], a célfüggvény pedig konvex, azért a *Kuhn—Tucker*-elmélet szerint egy nemnegatív komponensekkel rendelkező $\mathbf{x}$ vektor akkor és csak akkor alkotja a feladat optimális megoldását, ha lehet hozzá olyan nemnegatív $\mathbf{y}$ vektort találni, hogy a

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tfrac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{y}^T (A\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

Lagrange-függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T Q + \mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T A \geqq \mathbf{0},\\
(2.1.7)\qquad &\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\mathbf{x}^T A + \mathbf{b}^T \leqq \mathbf{0},\\
&\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{x} = 0,\\
&\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\mathbf{y} = 0.
\end{aligned}$$

Bevezetve az

$$\mathbf{u} = Q\mathbf{x} + \mathbf{c} - A^T\mathbf{y},$$

$$\mathbf{v} = A\mathbf{x} - \mathbf{b},$$

továbbá a

$$G = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, láthatjuk, hogy a (2. 1. 7) feltételek a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) alakot öltik. Eszerint a konvex kvadratikus programozási feladat is ekvivalens a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feltételrendszer megoldásának a feladatával.

Rendkívül érdekes tény, hogy a kvadratikus programozás elmélete egy másik úton is elvezet a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) problémára, mégpedig a lineáris programozáshoz hasonlóan a dualitás gondolatán keresztül.

A dualitás fogalmát DENNIS [12] és DORN [15] terjesztette ki a kvadratikus programozási feladatra, majd később COTTLE [5], ill. DANTZIG és COTTLE [8] általánosították DENNIS és DORN gondolatait. Értékes gondolatokat tartalmaz MOND [51] dolgozata is.

A lineáris programozás elméletében egy feladat duálisát szimbolikus alapon értelmezzük, mégpedig úgy, hogy az nem használható fel közvetlenül általánosítási alapként. Előnyösebb azt vizsgálni, hogy melyek a dualitásnak azok a tényei, amelyekre erősen támaszkodunk, s amelyek a szimbolikától függetlenek. További útmutatást a *Lagrange*-függvény vizsgálata nyújt még, mint azt később látni fogjuk. Az első gondolaton elindulva természetesen adódik a következő:

Két matematikai programozási, mégpedig egy maximumkeresési és egy minimumkeresési feladatot akkor tekintünk egymás duálisának, ha közülük bármelyik feladat optimális megoldásának a létezése maga után vonja a másik feladatra is az optimális megoldás létezését és ez esetben az optimális célfüggvényértékek megegyeznek, továbbá a maximumfeladat célfüggvényének az értéke tetszőleges megengedett megoldás esetén kisebb vagy egyenlő a minimumfeladat tetszőleges megengedett megoldásához tartozó célfüggvény értékével.

Vegyük észre, hogy a definícióban a „duál duálja a primál" általában nem egészen pontos kijelentés is benne foglaltatik.

Tekintsük ezután a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}+\mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &A\mathbf{x}\geqq \mathbf{b} \\ &\mathbf{x}\geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Az egyes szimbólumok jelentése pontosan megegyezik az előzőkben megadottal, azzal a változtatással, hogy Q legyen pozitív definit, de nem feltétlenül szimmetrikus. (A szimmetriával kapcsolatos engedmény e ponton semmitmondó, a később vizsgálandó autoduális esetnél azonban hasznát fogjuk venni.)

W. S. DORN a lineáris programozás dualitástételére támaszkodva megmutatta [15], hogy e feladatnak a fenti értelemben vett duálisa a következő, ugyancsak kvadratikus programozási feladat:

$$\begin{aligned} &\max -\mathbf{u}^T Q\mathbf{u}+\mathbf{b}^T\mathbf{v} \\ &A^T\mathbf{v}-(Q+Q^T)\mathbf{u} \leqq \mathbf{c} \\ &\mathbf{v}\geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Tegyük fel mármost, hogy $A=Q=G$ és $-\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{g}$, azaz tekintsük a

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{x}^T G\mathbf{x}+\mathbf{g}^T\mathbf{x} \\ &G\mathbf{x}+\mathbf{g} \geqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

feladatot. NEUMANN JÁNOSnak egy mátrix-elméleti tételére [53] hivatkozva DORN megmutatta, hogy e feladat feltételei mindig konzisztensek. (COTTLE valamivel egyszerűbben bizonyítja ugyanezt [4] egy GALEtől eredő állításra hivatkozva [21].)

Írjuk fel a feladatnak a (2. 1. 9) szerinti duálisát:

$$\begin{aligned} &\max -\mathbf{u}^T G\mathbf{u}-\mathbf{g}^T\mathbf{v} \\ &G^T\mathbf{v}-(G+G^T)\mathbf{u}-\mathbf{g} \leqq \mathbf{0} \\ &\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Az egyenlőtlenségeket balról $\mathbf{v}^T$-vel szorozva, $\mathbf{g}^T$-re becslést nyerhetünk. Ezt és a G mátrix pozitív definit tulajdonságát felhasználva kiderül, hogy optimális megoldás esetén szükségképpen

$$\mathbf{u}=\mathbf{v}. \tag{2.1.12}$$

Ezt a feltételt a (2. 1. 11)-hez hozzávéve, vele optimálisan ekvivalens feladatot kapunk a következő értelemben:

Két matematikai programozási feladatot akkor tekintünk optimálisan ekvivalensnek, ha bennük mind az optimális megoldások halmaza, mind pedig az optimum értéke azonos.

E definíció szerint a (2. 1. 12)-vel kiegészített (2. 1. 11) feladat optimálisan ekvivalens a (2. 1. 10) feladattal, és az is könnyen látható, hogy a közös optimum értéke zérus. E gondolatmenet teljessé tételéhez még annak a kimutatása is szükséges, hogy az adott feltételek mellett a célfüggvény el is éri a minimumát; ez azonban elkerülte DORN figyelmét. Ennek az állításnak a helyességét FRANK és WOLFE már jóval korábban és sokkal általánosabb körülmények között igazolta [20], amikor bebizonyította, hogy alulról korlátos kvadratikus függvény lineáris feltételekkel megadott nem üres tartományon mindig felveszi a minimumát. Ez az állítás egyébként csak legfeljebb másodfokú függvény esetén igaz, magasabb fokú polinom esetén már nem, miként azt KAPLANSKY bebizonyította [62]. Illusztráló példaként tekintsük az egész síkon az $x_1^2+(1-x_1x_2)^2$ függvényt, amely nem éri el értékkészletének alsó határát.

Ha egy matematikai programozási feladat optimálisan ekvivalens a duálisával, akkor azt a feladatot autoduálisnak nevezzük. E fogalommal élve, eredményünket úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a (2. 1. 10) feladat autoduális, mindig konzisztens és az optimális célfüggvényérték zérus. Ez azonban más szóval azt jelenti, hogy pozitív definit G mátrix esetén a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feltételrendszer konzisztens.

DORN eredményének alternatívájaként COTTLE arra az eredményre jutott, hogy pozitív szemidefinit G matrix esetén is mindig létezik a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feltételrendszernek megoldása, feltéve, hogy a (2. 1. 1)—(2. 1. 3) feltételrendszer konzisztens [4].

E vizsgálódás során COTTLE észrevette, hogy a (2. 1. 10) probléma csak első pillantásra tűnik speciálisnak, valójában pedig jelentős kapcsolatban áll a kvadratikus programozás legáltalánosabb feladatával.

A kvadratikus programozási feladatok dualitását vizsgálva ugyanis COTTLE arra az eredményre jutott [5], hogy pozitív szemidefinit $n\times n$ típusú Q és ugyancsak pozitív szemidefinit $m\times m$ típusú P mátrixokkal az alábbi kvadratikus programozási problémák egymás duálisai:

$$\begin{aligned} \min \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}+\tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T P\mathbf{y}+\mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ A\mathbf{x}+P\mathbf{y}+\mathbf{b} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

illetőleg

$$\begin{aligned} \max -\tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}-\tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T P\mathbf{y}-\mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ Q\mathbf{x}-A^T\mathbf{y}+\mathbf{c} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

E tény miatt természetes a következő összetett program megoldását keresnünk:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}+\mathbf{y}^T P\mathbf{y}+\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ Q\mathbf{x}-A^T\mathbf{y}+\mathbf{c} \geqq \mathbf{0} \\ A\mathbf{x}+P\mathbf{y}+\mathbf{b} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2. 1. 13}$$

E feladatban a primál és duál célfüggvények különbségének a minimumát keressük az együttesen megengedett megoldások halmazán.

Ha bevezetjük a

$$G = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & P \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, akkor látjuk, hogy a (2. 1. 13) feladat éppen DORN (2. 1. 10) alatti feladatának az alakját ölti fel.

COTTLE szimmetrikus duális kvadratikus programozási feladatainak a célfüggvényei és feltételei egyaránt elegánsan levezethetők egy

(2. 1. 14) $$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x}) - (\tfrac{1}{2}\mathbf{y}^T P\mathbf{y} + \mathbf{b}^T\mathbf{y}) - \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

függvényből. Ez a megfigyelés vezette DANTZIGOT és COTTLET [9] a következő általánosításra:

Tekintsünk egy, az $m \times n$-dimenziós tér nemnegatív ortánsán értelmezett, kétszer folytonosan differenciálható $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvényt. Tegyük fel, hogy $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ adott $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ vektor esetén az $\mathbf{x}$-nek szigorúan konvex függénye az egész $\{\mathbf{x}:\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$ halmazon, adott $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ vektor esetén viszont az $\mathbf{y}$-nak szigorúan konkáv függvénye az $\{\mathbf{y}:\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}\}$ halmazon. Ekkor $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ segítségével megfogalmazható egy duális feladatpár:

$$\begin{gathered} \min \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{y}^T \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ -\nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \end{gathered}$$

illetőleg

$$\begin{gathered} \max \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}. \end{gathered}$$

A fentiek mintájára érdemes ez esetben is megfogalmazni a következő összetett programot:

(2. 1. 15)
$$\begin{gathered} \min \mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{y}^T \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0} \\ -\nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}. \end{gathered}$$

Ha bevezetjük az

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{v}(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

jelöléseket, akkor a (2. 1. 15) feladat a következő alakot ölti:

$$\min \mathbf{z}^T \mathbf{w}(\mathbf{z})$$
$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) \geqq \mathbf{0} \tag{2. 1. 16}$$
$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}.$$

Ha itt eltekintünk a $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ leképezés konkrét definíciójától, akkor egészen általános formában vizsgálhatjuk a (2. 1. 16) feladatot, $\mathbf{w}(\mathbf{z})$-t egyszerűen az N-dimenziós tér egy önmagába való leképezéseként felfogva.

A (2. 1. 16) feladatot a (2. 1. 15) rövid jeleként tekintve, a dualitástételből következik, hogy (2. 1. 16) akkor és csak akkor oldható meg, ha a következő feltételrendszer konzisztens:

$$\mathbf{z}^T \mathbf{w}(\mathbf{z}) = 0$$
$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) \geqq \mathbf{0} \tag{2. 1. 17}$$
$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}.$$

Az általános esetben is világos, hogy a (2. 1. 17) feltételek teljesülése elégséges ahhoz, hogy valamely $\mathbf{z}$ vektor megoldja a (2. 1. 16) feladatot. Röviden megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén szükséges is.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ a tér differenciálható leképezése. Jelölje

$$\left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right] \quad \text{a} \quad „\mathbf{w}(\mathbf{z})”$$

Jacobi mátrixának a transzponáltját a $\mathbf{z}$ pontban és tegyük fel, hogy valamely — a feltételeknek eleget tevő — $\mathbf{z}$ pontban teljesül a *Kuhn—Tucker*-féle feltételminősítés. Ha ezenkívül még az is igaz, hogy a $\mathbf{z}$ pontban a $\left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right]$ matrix pozitív szemidefinit és $\mathbf{z}$ megoldja a (2. 1. 16) feladatot, akkor $\mathbf{z}^T\mathbf{w}(\mathbf{z}) = 0$; azaz ilyen körülmények között a (2. 1. 17) feltételek teljesülése valóban szükséges az optimalitáshoz.

Az állítás helyességét a *Kuhn—Tucker*-féle tétel felhasználásával könnyen bizonyíthatjuk. A (2. 1. 7) képletekkel analóg feltételeket felírva ugyanis a következőre juthatunk:

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) + \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right](\mathbf{z} - \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0}$$
$$\mathbf{z}^T\left(\mathbf{w}(\mathbf{z}) + \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right](\mathbf{z} - \mathbf{y})\right) = 0$$
$$\mathbf{y}^T \mathbf{w}(\mathbf{z}) = 0.$$

E relációkat, továbbá a premisszáinkat felhasználva, a következőket nyerhetjük:

$$0 \leqq \mathbf{z}^T \mathbf{w}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right] (\mathbf{y}-\mathbf{z}) \leqq (\mathbf{z}-\mathbf{y})^T \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right] (\mathbf{y}-\mathbf{z}) \leqq 0,$$

ez pedig éppen az állításunk helyességét igazolja.

DANTZIG és COTTLE a (2. 1. 16) feladatot vizsgálva [9] arra az alternatív eredményre jut, hogy amennyiben a $\mathbf{w}(\mathbf{z})$ leképezés *Jacobi*-mátrixa pozitív definit $\mathbf{z}$-ben, akkor a tétel a *Kuhn—Tucker*-féle feltételminősítés premisszája nélkül is érvényes marad. A bizonyítás során egy JOHNtól eredő tételre [34] hivatkoznak, amely tétel a *Lagrange*-féle feltételes szélsőértékre vonatkozó tételnek egy a *Kuhn—Tucker*-tételtől kissé eltérő általánosítása.

Visszatérve ezután a (2. 1. 15) programozási feladathoz, láthatjuk, hogy a hozzá tartozó *Jacobi*-mátrix

$$\left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}^2} & -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{y}\, \partial \mathbf{x}} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}\, \partial \mathbf{y}} & -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{y}^2} \end{bmatrix}$$

és tetszőleges $(m \times n)$-dimenziós $\mathbf{v}$ vektor és minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ esetén

$$\mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x}^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{y}^2} \end{bmatrix} \mathbf{v} \geqq 0.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ konvexitásából, ill. konkavitásából következik. A *Jacobi*-mátrix pozitív szemidefinitsége alapján a fentiek szerint a (2. 1. 15) feladat helyett elég a belőle származtatott (2. 1. 17) feladatot vizsgálni, feltéve természetesen, hogy a meglehetősen nehezen megfogható feltételminősítés teljesül.

A nemlineáris programozási feladatok dualitáselméletét több szerző is továbbfejlesztette, közülük elsősorban MOND [51] és ROCKAFELLAR [55], [56] érdemel említést. Az általánosítás iránya a premisszák gyengítése. Ennek arányában mind erősebb eszközökre van szükség. Mindenesetre pillanatnyilag úgy néz ki, hogy ezek az általánosabb jellegű tételek nem mondanak lényegesen újat a mi tárgyunk szempontjából.

Említést érdemel még, hogy ha a (2. 1. 14) alatt értelmezett $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvényben a P, ill. a P és Q mátrixokat zérusmatrixnak választjuk, akkor speciális esetként visszanyerjük az előzőleg vizsgált feladatokat. Fontos további alkalmazásokként említsük még meg a

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

és a

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^T \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

eseteket, amelyekből a konvex programozás lineáris feltételekkel, illetőleg a konvex programozás általános konvex feltételekkel feladatok származtathatók.

2.2. A (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feltételrendszernek a

$$G=\begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}=\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

speciális választás melletti megoldására az első javaslat FRANK és WOLFEtől származik [21]. Megoldási eljárásuk lineáris programozási feladatok véges sorozatából áll, legalábbis abban az esetben, ha Q pozitív szemidefinit.

Ugyancsak a pozitív szemidefinit kvadratikus programozási feladatból nyert (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladat esetére ad megoldó algoritmust WOLFE [66], akinek módszere már egyetlen — bizonyos mértékig módosított — lineáris programozási szimplex algoritmusból áll. Ennek gondolatmenetét röviden vázoljuk. Felfogásmódját abban lehetne összegezni, hogy keressünk olyan, a (2. 1. 1)—(2. 1. 3) feltételeket kielégítő megoldást, amely még a (2. 1. 4)-et is kielégíti.

Lineáris egyenletrendszer nem-negatív megoldásának a keresésére szolgáló eljárás a lineáris programozás elméletében ismeretes [6]. Ez egyrészt azon a tényen nyugszik, hogy ha egy lineáris egyenletrendszernek van nem-negatív megoldása, akkor nem-negatív bázismegoldása is van, másrészről pedig azon, hogy mesterséges változók bevezetésével mindig lehet nem-negatív bázismegoldást találni. E nemnegatívnak feltételezett mesterséges változókat a következő fogással lehet kiküszöbölni: célfüggvényként bevezetjük ezek összegét és megkíséreljük ezt a célfüggvényt minimalizálni. Akkor és csak akkor érjük el a zérus célfüggvény-értéket, ha a vizsgált egyenletrendszernek van nem-negatív megoldása. A minimalizáció a szimplex módszer felhasználásával történik. Minthogy a szimplex módszer alkalmazása során a bázisba bevonandó vektor felől általában bizonyos szabadsággal dönthetünk, azért a bevonandó vektort kiválasztó szabályt jogunk van egy további feltétellel kiegészíteni. Eszerint sohasem szabad olyan vektort bevonnunk a bázisba, amelynek a kiegészítő párja[1] már benne van.[2]

Az induló bázismegoldás csupa mesterséges változót tartalmaz, így eo ipso kiegészítő megoldás. A belépésre kiválasztott vektor ezt a tulajdonságot sohasem rontja el. A kérdés csak az, hogy a többletszabállyal nem kötjük-e meg túlságosan a kezünket, van-e minden iterációnál olyan vektor, amelynek jogában áll a bázisbelépés.

WOLFE bebizonyította, hogy amennyiben a Q mátrix pozitív definit, akkor a módszer mindig szolgáltat megoldást, ha egyáltalán van.

Az általános pozitív definit, ill. szemidefinit G matrix esetével foglalkozik DANTZIG és COTTLE [8], [9], továbbá TUCKER [62] és GRAVES [24]. Mindannyian ugyanazzal az algoritmussal, pontosabban ugyanazzal a két algoritmussal foglalkoznak, csak különböző nézőpontokból. Matematikai elegancia és szabatosság szempontjából legszebb TUCKER munkája, míg a gondolatok háttere inkább a többi dolgozatból látszik.

DANTZIG és COTTLE algoritmusának alapgondolata a következő: A (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladathoz kiegészítő, de nem szükségképpen megengedett megoldást mindig lehet találni, hisz $\mathbf{z}=\mathbf{0}$, $\mathbf{w}=\mathbf{g}$ ilyen. Ez más szóval azt jelenti, hogy a kielégítendő feltételek közül a (2. 1. 2) feltételt ideiglenesen elvetjük. Ha $\mathbf{w}=\mathbf{g}$-nek

[1] A megfelelő értelmezést a következő fejezetben adjuk meg.

[2] A valóságos feltétel ennél valamivel kevesebbet követel, itt azonban nem célunk ennek a taglalása.

nincs negatív komponense, akkor a feladatot megoldottuk. Ha van, akkor megkíséreljük ezek számát fogyasztani. Ha a G mátrix pozitív definit, akkor a főátlójában csupa pozitív elem áll, s így egy negatív w_i komponens kiegészítő párjának a zérus értékéről pozitív irányban történő elmozdítása révén remélhető, hogy w_i zérussá válik, z_i pozitívvá. Ha közben egyetlen olyan változó sem válik negatívvá, amely addig pozitív volt, akkor újabb kiegészítő megoldáshoz jutottunk, amely az előzőnél jobb abban az értelemben, hogy kevesebb a negatív komponense. Ha valamelyik, előzőleg nem-negatív változó értéke közben negatívvá válik, akkor bizonyos közbülső intézkedésekkel ez a nehézség elkerülhető és a célt akkor is elérjük. Nagyon lényeges, hogy ha a kapott új bázis segítségével ezután kifejezzük a nembázis-vektorokat, és a nyert mátrix elemeit „helyes" sorrendben helyezzük el, akkor a kapott mátrix újra pozitív definit, s így az új helyzetre az előző gondolat újra alkalmazható. Véges számú iteráció után a negatív komponensek száma elfogy.

Ha a G mátrix pozitív szemidefinit, akkor a közbülső nehézségek megnövekednek, hiszen már csak a főátló elemeinek a pozitivitása sem teljesül feltétlenül. Mindenesetre némi fáradsággal el lehet őket hárítani, s egy finomított algoritmus ebben az esetben is szolgáltat megoldást, ez esetben persze azzal a feltétellel, hogy az létezik.

A továbbiakban LEMKE [38], [39], [41] foglalkozott a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladattal. Az előző négy szerző algebrai szemléletmódjával szemben ő geometriai eszközökkel közelít a problémához. Az új nézőpont új ötletekkel gazdagítja a kérdés irodalmát, a kapott eljárásokat alaposabban megvizsgálva azonban kiderül, hogy lényegükben ezek is algebrai, sőt kombinatorikus természetűek.

3. Kiegészítő változó módszer kopozitív-plusz mátrixú feladat megoldására

3. 1. A (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladat megoldására szolgáló algoritmus alapgondolatához a következőképpen juthatunk el: a kielégítendő feltételek száma túlságosan sok, így a feladat ideiglenes gyengítése révén próbálunk a feltételeket „majdnem" kielégítő megoldást keresni. Ebből mint indulómegoldásból elindulva, egyik megoldásról a másikra haladunk és közben vigyázunk arra, hogy az újabb megoldások a kielégített feltételek kielégítésének a „mértékében" ne romoljanak. Reméljük, hogy bizonyos körülmények között határozott javulás áll be, s így megoldáshoz jutunk.

A feltételek gyengítésének egyik lehetséges módja a DANTZIG és COTTLE féle, amelynél a (2. 1. 2) nem-negativitási követelménytől tekintünk el, s egy megoldás „jóságának" a mértéke éppen a kielégített (2. 1. 2) nem-negativitási feltételek száma. E módszert a második fejezetben már vázoltuk.

Másik lehetséges gyengítési mód a (2. 1. 1) egyenletrendszer „elrontása" például azáltal, hogy a G mátrixhoz hozzáfüggesztünk egy további „mesterséges" oszlopot, s a változókat ennek megfelelően kiegészítjük egy további „mesterséges" változóval mégpedig úgy, hogy az így kapott segédegyenletrendszernek legyen a (2. 1. 2)—(2. 1. 4) feltételeket kielégítő megoldása. Az így kapott segédfeladatban azután vigyázva arra, hogy a (2. 1. 2)—(2. 1. 4) feltételek változatlanul érvényben maradjanak, egyik megoldásról a másikra haladva arra törekszünk, hogy a bevezetett mesterséges változó zérus szintre kerüljön, s így az eredeti feladat megoldásához jussunk; látni fogjuk, hogy az eljárás egy, a pozitív szemidefinit matrixok osztályát tartalmazó, de annál lényegesen bővebb mátrixosztály esetén — melyet a kopozitív mátrixok osztályának fogunk nevezni — mindig pozitív eredménnyel zárul; azaz vagy elvezet egy megoldáshoz, vagy pedig megmutatja, hogy nincs megoldás. A módszernek nagy előnye, hogy egyszerűsége miatt könnyen programozható elektronikus számológépre.

3. 2. Definíciók és jelölések. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért újra megfogalmazzuk a megoldandó feladatot:

Legyen

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} \cdots g_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{m1} \cdots g_{mm} \end{bmatrix} = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m)$$

valós elemekből alkotott mátrix,

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

valós komponensű vektor. Keressünk olyan

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$$

valós komponensű vektorokat, amelyekre fennállnak a következő feltételek:

(3. 2. 1) $$\mathbf{w} = G\mathbf{z} + \mathbf{g}$$

(3. 2. 2) $$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$$

(3. 2. 3) $$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$$

(3. 2. 4) $$\mathbf{z}^T\mathbf{w} = 0.$$

A (3. 2. 4) ortogonalitási feltétel, továbbá a (3. 2. 2), (3. 2. 3) nem-negativitási feltételek egyidejű teljesítése azt jelenti, hogy

(3. 2. 5) $$z_i w_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Eszerint a z_i és w_i változók „kiegészítik" egymást. Innen ered a módszer elnevezése.

Nevezzük a (3. 2. 1) feltételt kielégítő $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ párokat megoldásoknak, a (3. 2. 2), (3. 2. 3) feltételeket kielégítő megoldásokat megengedett megoldásoknak, a (3. 2. 4) feltételt kielégítő megengedett megoldásokat pedig kiegészítő megoldásoknak.

Jelöljük az i-dik egységvektort $\mathbf{e}_i$-vel, $i = 1, \ldots, m$, azaz $\mathbf{e}_i$ legyen az az m komponensű vektor, amelynek az i-edik komponense 1, a többi zérus.

Legyen

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i .$$

Tekintsük a következő segédfeladatot:

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} + G\mathbf{z} + \mathbf{e}t \tag{3. 2. 6}$$

$$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geqq \mathbf{0}, \quad t \geqq 0 \tag{3. 2. 7}$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{z} = 0. \tag{3. 2. 8}$$

Itt t valós számot jelöl. A fentiekkel analóg módon beszélünk a (3. 2. 6)—(3. 2. 8) segédfeladat megoldásairól, megengedett megoldásairól és kiegészítő megoldásairól.

Közvetlenül látszik, hogy a segédfeladatoknak van kiegészítő megoldása. Ilyen például a következő:

$$\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

$$t = \max(0, -\min_i g_i),$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} + \mathbf{e}t.$$

A $\mathbf{w}$ és $\mathbf{z}$ vektorok megfelelő, tehát azonos indexű komponenseit kiegészítő változópároknak, s ennek megfelelően az

$$A = (E, -\mathbf{e}, -G)$$

mátrixban az $\mathbf{e}_i$, $-\mathbf{g}_i$, $i = 1, \ldots, m$ párokat kiegészítő vektorpároknak fogjuk hívni. Az A mátrix oszlopait a kényelem kedvéért egységes jellel is ellátjuk:

$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \ldots, \mathbf{a}_{2m+1}).$$

Eszerint

$$\mathbf{a}_p = \begin{cases} \mathbf{e}_p & p = 1, \ldots, m \\ -\mathbf{e} & \text{ha } p = m+1 \\ -\mathbf{g}_{p-(m+1)} & p = m+2, \ldots, 2m+1. \end{cases} \tag{3. 2. 9}$$

Bevezetve az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ t \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$$

jelöléseket, a (3. 2. 6), (3. 2. 7) feltételrendszer a következő alakot ölti:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 \tag{3. 2. 10}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Az A mátrix rangja nyilván m, így oszlopvektorterének tetszőleges bázisa m-elemű. A továbbiakban B-vel (esetleg indexszel ellátva) az A oszlopaiból alkotott bázist jelölünk.

Ha

$$B = (\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_m}),$$

akkor legyen

$$I = \{i_1, \ldots, i_m\}.$$

Tetszőleges B bázishoz egyértelműen tartozik egy

$$D = (\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{2m+1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{i_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{i_m} \end{bmatrix} = (d_{i,p})$$

mátrix, amelyet a

$$BD = (\mathbf{a}_0, A)$$

összefüggés értelmez. A továbbiakban, ha B-t indexszel látjuk el, akkor valamennyi, B-től függő szimbólumot is B-vel azonos indexszel fogjuk ellátni.

A (3. 2. 10) egyenletrendszernek a B bázishoz tartozó bázismegoldását a következőképpen értelmezzük:

$$x_p = \begin{cases} d_{p,0} & \text{ha} \quad p \in I \\ 0 & \quad p \notin I. \end{cases}$$

A B bázist kiegészítő bázisnak nevezzük, ha nem szerepelnek benne kiegészítő vektorpárok.

Egy $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$ sorvektorról azt mondjuk, hogy lexikografikusan pozitív,

$$\boldsymbol{\delta} \succ \mathbf{0},$$

ha balról jobbra haladva az első zérustól különböző komponense pozitív. Azt mondjuk, hogy egy $\boldsymbol{\delta}_1$ vektor lexikografikusan nagyobb egy $\boldsymbol{\delta}_2$ vektornál,

$$\delta_1 \succ \delta_2,$$

ha a $\boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_2$ különbség lexikografikusan pozitív. Természetesen azt is mondhatjuk, hogy $\boldsymbol{\delta}_2$ lexikografikusan kisebb $\boldsymbol{\delta}_1$-nél.

A most bevezetett reláció rendezi egy vektortér vektorait, így egy vektortérből kiválasztott véges sok vektor esetén mindig értelmes ezek közül a lexikografikus értelemben legkisebbről és legnagyobbról beszélni. Ezeket rendre az l-min és l-max szimbólumokkal fogjuk jelölni.

A D mátrixról akkor mondjuk, hogy lexikografikusan pozitív, ha minden sora lexikografikusan pozitív. Világos, hogy ilyen esetben $\mathbf{d}_0 \geqq \mathbf{0}$, s így a B bázishoz tartozó bázismegoldás megengedett megoldás. Indokolt tehát a következő értelmezés:

Egy B bázist akkor fogunk l-megengedettnek nevezni, ha a hozzá tartozó D mátrix lexikografikusan pozitív.

3. 3. Az algoritmus. Feladatként tűzzük ki a (3. 2. 1)—(3. 2. 4) feladathoz legalább egy kiegészítő megoldás találását, illetőleg annak megmutatását, hogy ilyen nincs.

Ha $\mathbf{g} \geqq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{w} = \mathbf{g}$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

kiegészítő megoldás, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $\mathbf{g} \ngeqq \mathbf{0}$.

Világos, hogy feladatunk ekvivalens a következővel:

Keresendő a (3. 2. 6)—(3. 2. 8) segédfeladatnak olyan kiegészítő megoldása, amelyben $t=0$, illetőleg megmutatandó, hogy ilyen nincs. A továbbiakban a problémával ebben az alakban foglalkozunk.

Előkészületként tegyük fel, hogy $B^{(1)}$ 1-megengedett bázis. Válasszunk ki az $\mathbf{a}_P$ $P \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\} - I^{(1)}$ vektorok közül egyet, mondjuk $\mathbf{a}_k$-t. Kíséreljük meg $B^{(1)}$-ből egy új 1-megengedett bázist készíteni úgy, hogy $\mathbf{a}_k$-t bevonjuk a bázisba, s ennek valamely $\mathbf{a}_j$ $j \in I^{(1)}$ vektorát elhagyjuk. Ha ez lehetséges, akkor az így nyert $B^{(2)}$ bázist $B^{(1)}$ szomszédjának nevezzük.

3. 1. TÉTEL. *Egy $B^{(1)}$ 1-megengedett bázisnak akkor és csak akkor van olyan szomszédja, amely $\mathbf{a}_k$ bevonásával jön létre, ha $\mathbf{d}_k^{(1)}$-nek van pozitív komponense. Ez esetben a szomszéd egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Vonjuk be $\mathbf{a}_k$-t $B^{(1)}$-be és hagyjuk el belőle $\mathbf{a}_j$-t, ahol a j index egyelőre határozatlan. Minthogy $B^{(2)}$ is bázis, szükségképpen $d_{j,k}^{(1)} \neq 0$. Ezt feltételezve vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett lesz a $B^{(2)}$ bázis 1-megengedett.

Ismeretes, hogy $D^{(2)}$ és $D^{(1)}$ között a következő transzformációs formulák érvényesek:

$$\delta_k^{(2)} = \frac{1}{d_{j,k}^{(1)}} \delta_j^{(1)}, \tag{3. 3. 1}$$

$$\delta_i^{(2)} = \delta_i^{(1)} - \frac{d_{i,k}^{(1)}}{d_{j,k}^{(1)}} \delta_j^{(1)} \qquad i \in I^{(2)} - \{k\}. \tag{3. 3. 2}$$

A (3. 3. 1) egyenletből látjuk, hogy szükségképpen $d_{j,k}^{(1)} > 0$. Ezt feltételezve vizsgáljuk meg a (3. 3. 2) egyenlőségeket.

Ha ezekben $d_{i,k}^{(1)} \leqq 0$, akkor $\delta_i^{(2)} \succ \mathbf{0}$, ezért elég azokat az i indexeket vizsgálni, amelyekre $d_{i,k}^{(1)} > 0$. Ilyen van, hisz j is ilyen. Ezeknél az i indexeknél a $\delta_i^{(2)}$ akkor és csak akkor lexikografikusan pozitív, ha

$$\frac{1}{d_{i,k}^{(1)}} \delta_i^{(1)} \succ \frac{1}{d_{j,k}^{(1)}} \delta_j^{(1)}.$$

Eszerint a $j \in I^{(1)}$ indexet a következő összefüggés értelmezi:

$$\frac{1}{d_{j,k}^{(1)}} \delta_j^{(1)} = 1 - \min \frac{1}{d_{i,k}^{(1)}} \delta_i^{(1)} \tag{3. 3. 3}$$
$$\{i \mid i \in I^{(1)}, \quad d_{i,k}^{(1)} > 0\}.$$

A j indexet a (3. 3. 3) összefüggés egyértelműen határozza meg, hisz ellenkező esetben a $D^{(1)}$ mátrixnak két sora arányos volna, ami viszont lehetetlen, mivel $D^{(1)}$ tartalmaz egységmátrixot.

Vegyük észre, hogy e tétel kimondása és bizonyítása során sehol nem támaszkodtunk az A mátrix speciális szerkezetére, ezért ez tetszőleges $A \neq 0$ mátrix esetén igaz.

Legyen $B^{(0)} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$. Minthogy $D^{(0)} = (\mathbf{a}_0, A)$, azért $B^{(0)}$ nem megengedett bázis.

Értelmezzük a $B^{(1)}$ bázist a következőképpen: legyen $k = m+1$ és vonjuk be a bázisba az $\mathbf{a}_k$ vektort. A $B^{(0)}$-ból elhagyandó vektor h indexét a következő összefüggésből határozzuk meg:

$$\frac{1}{d_{h,k}^{(0)}}\delta_h^{(0)} = \max_{i \in I^{(0)}} \frac{1}{d_{i,k}^{(0)}}\delta_i^{(0)} \tag{3. 3. 4}$$

Minthogy $D^{(0)}$-nak nincsenek arányos sorai, azért (3. 3. 4) a h-t egyértelműen értelmezi.

A transzformációs formulákat megvizsgálva, látjuk, hogy $B^{(1)}$ 1-megengedett bázis. Minthogy — miként az könnyen belátható — $\mathbf{d}_h^{(1)} < \mathbf{0}$, azért a 3. 1. Tétel szerint a $B^{(1)}$-nek nincs olyan szomszédja, amelyet $\mathbf{a}_h$ bevonásával kaphatunk. Az is világos, hogy $\mathbf{a}_{m+1}$ pozitív szinten lépett $B^{(1)}$-be.

A $B^{(1)}$-ből kiindulva alkossuk meg a

$$B^{(0)};\ B^{(1)},\ B^{(2)},\ B^{(3)}, \ldots \tag{3. 3. 5}$$

szomszédos bázisokból álló sorozatot a következőképpen:

Ha $B^{(q)}$ megalkotása során $\mathbf{a}_j$ hagyta el $B^{(q-1)}$-et, akkor $\mathbf{a}_k$-val jelölve az $\mathbf{a}_j$ kiegészítő párját, $B^{(q+1)}$ úgy jön létre $B^{(q)}$-ból, hogy abba $\mathbf{a}_k$-t vonjuk be. $q = 1$ esetén $j = k$, s így a sorozatot a 3. 1. Tétel szerint egyértelműen értelmeztük.

Az értelmezésből világos, hogy $q = 1$-től kezdve a sorozat minden bázisa 1-megengedett kiegészítő bázis.

A sorozat képzését két esetben fejeztük be:

I. $\mathbf{a}_{m+1}$ kilép a bázisból, vagy benne marad ugyan, de zérus szintre kerül.

II. $\mathbf{a}_{m+1}$ pozitív szinten szerepel a bázisban, de a sorozat következő eleme a 3. 1. Tételben szereplő feltétel nem teljesülése miatt nem képezhető.

3. 2. TÉTEL. *A* (3. 3. 5) *bázissorozat véges: azaz véges számú lépés után vagy az I., vagy a II. esetre jutunk.*

Bizonyítás. Minthogy az A-ból kiválasztható bázisok száma véges, elegendő azt bizonyítani, hogy a sorozatban nem lép fel ismétlődés.

Ha volna olyan bázis, amely a sorozatban kétszer is előfordul, akkor volna egy első ilyen bázis. Legyen ez $B^{(q)}$. Természetesen $q \geqq 1$, minthogy $B^{(0)}$ kivételével, amelynek egyébként csak az indulás lehetővé tétele volt a szerepe, valamennyi bázis 1-megengedett.

A sorozat elemeit úgy értelmeztük, hogy minden bázis esetén pontosan egy kiegészítő pár szerepel bázison kívül, s az adott bázis szomszédai ezek bevonása útján jönnek létre. A 3. 1. Tételből azonban ekkor az következik, hogy minden bázisnak legfeljebb két szomszédja van a sorozatban.

Az első ismétlődő bázist más kell, hogy megelőzze az első fellépése alkalmából, mint a második fellépésénél, különben nem ő volna az első. Ekkor azonban legalább három szomszédja volna, ami — mint láttuk — lehetetlen.

3. 3. TÉTEL. *Ha az eljárás az I. esettel ér véget, akkor az utolsó bázismegoldás kiegészítő megoldást szolgáltat a* (3. 2. 1)—(3. 2. 4) *feladathoz.*

Ha az eljárás során a II. esetre jutunk, akkor a G mátrixra tett megszorítás nélkül általában semmit sem mondhatunk a feladat megoldhatóságáról. Kijelölhető azonban egy elég tágnak tűnő mátrixosztály, amelynek esetén a feladatnak ilyen esetben nincs megoldása. A továbbiakban ezzel a kérdéssel foglalkozunk.

3.4. Kopozitív mátrix. A G mátrixot kopozitívnak nevezzük, ha minden

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0} \quad \text{vektorra}$$

$$\mathbf{z}^T G \mathbf{z} \geqq 0.$$

A kopozitív mátrixok osztálya ezek szerint magában foglalja a pozitív szemidefinit és annál inkább a pozitív definit mátrixokat, de tartalmazza a nem-negatív elemű mátrixokat is, s így persze az olyan mátrixokat is, amelyek egy pozitív szemidefinit és egy nem-negatív mátrix összegeként állíthatók elő.

A G kopozitív mátrixot kopozitív-plusz mátrixnak nevezzük, ha

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0$$

esetén érvényes, hogy

$$(G + G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{3.4.1}$$

3.1. LEMMA. *A kopozitív-plusz mátrixok osztálya tartalmazza a szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok osztályát.*

Bizonyítás. Legyen G pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix. Ekkor G nyilván kopozitív, ezért elég a további tulajdonságot igazolni. Legyen tehát $\mathbf{z}$ olyan vektor, amelyre

$$\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0.$$

Legyen $\mathbf{y}$ tetszőleges m-dimenziós vektor, λ pedig egy tetszőleges skalár. Ekkor G pozitív szemidefinit tulajdonsága miatt érvényes

$$(\mathbf{y} + \lambda\mathbf{z})^T G(\mathbf{y} + \lambda\mathbf{z}) \geqq 0.$$

A szorzást elvégezve a következőt kapjuk:

$$\mathbf{y}^T G \mathbf{y} + 2\lambda \mathbf{y}^T G \mathbf{z} \geqq 0.$$

A számolás során figyelembe vettük G szimmetriáját, továbbá azt, hogy $\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0$.

Ez az egyenlőtlenség tetszőleges λ esetén csak akkor állhat, ha

$$\mathbf{y}^T G \mathbf{z} = 0.$$

Ez az egyenlőség viszont tetszőleges $\mathbf{y}$ esetén csak akkor állhat, ha

$$G\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

azaz G szimmetriája miatt $(G + G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}$, amit bizonyítani akartunk.

MEGJEGYZÉS: A bizonyításban valójában egy kissé többet igazoltunk a szándékoltnál, hisz az állítást tetszőleges $\mathbf{z}$ vektor esetére igazoltuk, azaz $\mathbf{z}$ nemnegativitását sehol sem használtuk fel.

3.2. LEMMA. *Legyen G olyan mátrix, amely határozottan nagyobb egy pozitív szemidefinit mátrixnál. Ekkor G kopozitív-plusz mátrix.*

Bizonyítás. A kopozitivitás ismét nyilvánvaló, ezért most is elegendő a járulékos tulajdonságot vizsgálni.

Legyen

$$\mathbf{z} \geqq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{z}^T G\mathbf{z} = 0.$$

Vegyük fel a G mátrixot

$$G = Q + P$$

alakban, ahol Q pozitív szemidefinit és P pozitív elemű mátrix.

Ekkor

$$\mathbf{z}^T Q\mathbf{z} + \mathbf{z}^T P\mathbf{z} = 0.$$

Minthogy az összeg egyik tagja sem lehet negatív, azért mindkettő zérus.

$$\mathbf{z}^T Q\mathbf{z} = 0$$

$$\mathbf{z}^T P\mathbf{z} = 0.$$

P pozitivitása miatt $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, és így

$$(G + G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Megjegyzés: Ezt az állítást sajnos, nem lehet a $P \geqq 0$ esetre kiterjeszteni, amint arról könnyen meggyőzhet a következő példa:

Legyen

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{z}^T G\mathbf{z} = 0,$$

de

$$G\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

3. 2. LEMMA. *Legyen G olyan mátrix, amely nagyobb vagy egyenlő egy pozitív definit Q mátrixnál. Ekkor G kopozitív plusz mátrix.*

A lemma *bizonyítása* szó szerint megegyezik a 3. 2. Lemma bizonyításával, kivéve annak zárását, amely ez esetben így hangzik: Q pozitív definit tulajdonsága miatt $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, és így $(G + G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

3. 3. LEMMA. *A $G\mathbf{z} + \mathbf{g} \geqq \mathbf{0}$ egyenlőtlenségrendszernek akkor és csak akkor van $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ megoldása, ha nincs olyan $\mathbf{d}$ vektor, amelyre*

$$\mathbf{d} \geqq \mathbf{0},$$

$$G^T\mathbf{d} \leqq 0, \tag{3.4.2}$$

$$\mathbf{g}^T\mathbf{d} < 0.$$

Bizonyítás. Ha van a (3. 4. 2) feltételeket kielégítő $\mathbf{d}$ vektor, akkor tetszőleges $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ esetén

$$(\mathbf{d}^T G)\mathbf{z} \leqq 0,$$

ahonnan

$$\mathbf{d}^T(G\mathbf{z}+\mathbf{g}) < 0,$$

s így a második tényezőnek biztosan van negatív komponense.

Ha nincs ilyen $\mathbf{d}$ vektor, akkor a

$$\mathbf{d} \geqq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{d}^T(-G) \geqq \mathbf{0}$$

egyenlőtlenségrendszernek következménye a

$$\mathbf{d}^T\mathbf{g} \geqq 0$$

egyenlőtlenség és így FARKAS tétele szerint van olyan $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ vektorpár, hogy

$$\mathbf{g} = -G\mathbf{z}+\mathbf{u}.$$

Más szóval van olyan $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ vektor, amellyel

$$G\mathbf{z}+\mathbf{g} \geqq \mathbf{0}.$$

Ezt akartuk bizonyítani.

3. 4. TÉTEL. *Ha a* (3. 2. 1)—(3. 2. 4) *feladatban szereplő G mátrix kopozitív-plusz mátrix és az eljárás a II. esettel ér véget, akkor a feladatnak nincs megengedett megoldása s így kiegészítő megoldása sincs.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az eljárás során a II. esetre jutottunk. Jelöljük a (3. 3. 5) bázis-sorozat utolsó bázisát B-vel.

Két esetet fogunk megkülönböztetni: I. ha $B = B^{(1)}$ és II. ha $B \neq B^{(1)}$. Tekintsük először az I. esetet.

$$B = B^{(1)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{h-1}, -\mathbf{e}, \mathbf{e}_{h+1}, \ldots, \mathbf{e}_m)$$

$$I = I^{(1)} = \{1, \ldots, h-1, m+1, h+1, \ldots, m\}$$

Ez azért igaz, mert miként azt fent leírtuk, $B^{(1)}$ úgy jött létre $B^{(0)}$-ból, hogy azt $\mathbf{a}_n = \mathbf{e}_h$ hagyta el és $\mathbf{a}_{m+1} = -\mathbf{e}$ jött a helyére. $\mathbf{e}_h$ kiegészítő párja az $\mathbf{a}_k = -\mathbf{g}_h$ vektor, így érvényes

$$B\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_h.$$

Itt a feltételezésünk szerint

$$\mathbf{d}_k \leqq \mathbf{0}.$$

A B bázis fenti explicit alakjából kapjuk, hogy

$$-d_{m+1,k} = -g_{h,h}$$

$$d_{i,k}-d_{m+1,k} = -g_{i,h} \qquad i \in I-\{m+1\}$$

Innen a $d_{i,k}$ komponensek meghatározhatók. Mármost

$$g_{hh} = \mathbf{e}_h^T G \mathbf{e}_h \geqq 0,$$

minthogy G kopozitív, másrészről viszont láttuk, hogy

$$g_{hh} \leqq 0.$$

Eszerint érvényes az alábbi állítás

$$\mathbf{e}_h^T G \mathbf{e}_h = g_{hh} = 0,$$

és így a G kopozitív-plusz tulajdonsága miatt

$$(G+G^T)\mathbf{e}_h = \mathbf{0},$$

azaz

$$g_{ih}+g_{hi} = 0 \qquad i \in I.$$

Láttuk, hogy

$$g_{ih} = -d_{ik} \geqq 0,$$

így érvényes a

$$g_{hi} \leqq 0,$$

egyenlőtlenség, más szóval

$$G^T \mathbf{e}_h \leqq 0.$$

Végül

$$\mathbf{g}^T \mathbf{e}_h = g_h < 0,$$

hiszen $\mathbf{e}_h$ azért hagyta el a $B^{(0)}$ bázist, mert g_h volt a legkisebb komponense.

Legyen ezután

$$\mathbf{d} = \mathbf{e}_h,$$

s látjuk, hogy $\mathbf{d}$ eleget tesz a 3. 3. Lemma feltételeinek.

A II. esetben igaz az, hogy

$B \neq B^{(1)}$ és így B tartalmazza $-G$-nek legalább egy oszlopát;

B a segédfeladat kiegészítő bázisa;

B pozitív szinten tartalmazza $\mathbf{a}_{m+1}$-et, azaz

$$\mathbf{d}_{m+1,0} > 0. \tag{3. 4. 3}$$

Jelöljük $\mathbf{a}_k$-val azt a vektort, amelynek az algoritmus következő lépésében kellene a bázisba lépnie. Feltételezésünk szerint

$$\mathbf{d}_k \leqq \mathbf{0}. \tag{3. 4. 4}$$

A jelölés egyszerűsítése érdekében feltehetjük, hogy

$$B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+r+3}, \ldots, \mathbf{a}_{2m+1})$$

és itt $0 \leqq r < m-1$. Azt is feltehetjük, hogy

$$\mathbf{a}_k = \begin{cases} \mathbf{e}_{r+1} & \text{ha} \quad k < m+1 \\ -\mathbf{g}_{r+1} & \phantom{\text{ha}} \quad k > m+1. \end{cases}$$

Fejezzük ki a B bázis segítségével $\mathbf{a}_0$-t és $\mathbf{a}_k$-t.

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i d_{i,0} + \mathbf{a}_{m+1} d_{m+1,0} + \sum_{i=m+r+3}^{2m+1} \mathbf{a}_i d_{i,0} = \mathbf{a}_0, \tag{3. 4. 5}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i d_{i,k} + \mathbf{a}_{m+1} d_{m+1,k} + \sum_{i=m+r+3}^{2m+1} \mathbf{a}_i d_{i,k} = \mathbf{a}_k. \tag{3. 4. 6}$$

A (3. 2. 9) összefüggés figyelembevételével a (3. 4. 5), (3. 4. 6) egyenletek a következő alakot öltik:

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i(d_{i,0}-d_{m+1,0}) - \sum_{i=r+1}^{m} \mathbf{e}_i d_{m+1,0} - \sum_{i=r+2}^{m} \mathbf{g}_i d_{i+m+1,0} = \mathbf{g}, \tag{3.4.7}$$

(3. 4. 8)

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i(d_{ik}-d_{m+1,k}) - \sum_{i=r+1}^{m} \mathbf{e}_i d_{m+1,k} - \sum_{i=r+2}^{m} \mathbf{g}_i d_{i+m+1,k} = \begin{cases} \mathbf{e}_{r+1} & \text{ha} \quad k<m+1 \\ -\mathbf{g}_{r+1} & \text{ha} \quad k>m+1. \end{cases}$$

Legyen

$$\mathbf{d} = \begin{cases} -\sum\limits_{i=r+2}^{m} \mathbf{e}_i d_{i+m+1,k} & \text{ha} \quad k<m+1 \\ \mathbf{e}_{r+1} - \sum\limits_{i=r+2}^{m} \mathbf{e}_i d_{i+m+1,k} & \text{ha} \quad k>m+1 \end{cases} \tag{3.4.9}$$

Nyilván

$$\mathbf{d} \geqq \mathbf{0}.$$

Szorozzuk meg a (3. 4. 8) egyenletrendszert balról $\mathbf{d}^T$-vel.

$$-d_{m+1,k} \sum_{i=m+r+3}^{2m+1} -d_{i,k} + \mathbf{d}^T G \mathbf{d} = 0 \quad \text{ha} \quad k<m+1 \tag{3.4.10}$$

$$-d_{m+1,k}\left(1+\sum_{i=m+r+3}^{2m+1}(-d_{i,k})\right) + \mathbf{d}^T G \mathbf{d} = 0 \quad \text{ha} \quad k>m+1.$$

Minthogy G kopozitív, azért a (3. 4. 10) egyenletek bal oldalának első tagja nem lehet pozitív.

Tekintettel arra, hogy (3. 4. 4) szerint ez a tag negatív sem lehet, azért zérus. Az első tag második tényezője pozitív. Ez a második egyenlet esetében közvetlenül látszik, az első egyenlet esetén viszont az ellenkező feltevés ellentmondásossá tenné a helyes (3. 4. 8) egyenletet.

Ezek szerint arra jutottunk, hogy szükségképpen

$$d_{m+1,k} = 0 \tag{3.4.11}$$

és

$$\mathbf{d}^T G \mathbf{d} = 0.$$

A (3. 4. 8) egyenletet a (3. 4. 11) szerint módosítva azt is látjuk, hogy

$$G\mathbf{d} \geqq \mathbf{0}.$$

Innen (3. 4. 1) figyelembevételével az adódik, hogy

$$\mathbf{d}^T G \leqq \mathbf{0}. \tag{3.4.12}$$

Szorozzuk meg a (3. 4. 7) egyenletet balról $\mathbf{d}^T$-vel. Figyelembe véve a (3. 4. 3) egyenlőtlenséget, továbbá a (3. 4. 4) és (3. 4. 12) egyenlőtlenségrendszert, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{d}^T \mathbf{g} < 0.$$

Ezek szerint a (3. 4. 9) alatt definiált $\mathbf{d}$ vektor eleget tesz a 3. 3. Lemma (3. 4. 2) feltételeinek, s így a 3. 4. Tétel állítása valóban igaz.

A 3. 4. Tételnek közvetlen következménye a következő:

3. 5. TÉTEL. *Legyen G $m \times m$ típusú kopozitív plusz mátrix,* $\mathbf{g}$ *pedig tetszőleges m-komponensű vektor. Ha van olyan* $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ *vektor, amelyre* $\mathbf{w} = G\mathbf{z} + \mathbf{g} \geqq \mathbf{0}$, *akkor az ilyen tulajdonságú vektorok között olyan is van, amelyre* $\mathbf{z}^T\mathbf{w} = 0$, *és e fejezet algoritmusa szolgáltat ilyet.*

3. 5. E fejezet befejezéseként vizsgáljuk meg, mit mondanak eredményeink a kvadratikus programozás elméletének a szemszögéből tekintve.

A közönséges konvex kvadratikus programozási feladat, illetőleg a COTTLE által definiált szimmetrikus duális kvadratikus programozási feladatok szempontjából tekintve újabb megoldási eljárást nyertünk, amely minden olyan esetben alkalmazható, amikor a többi ismert kvadratikus programozási eljárás. Az eljárásnak nagy előnye a rendkívüli egyszerűség — a gyakorlati programozás során felesleges a lexikográfiára tekintettel lennünk — és a szimplex módszerhez való hasonlóság. Feltehetőleg akkor működik igazán hatékonyan, ha a feladat „nagyon kvadratikus", azaz a kvadratikus forma mátrixában kevés a zérus.

Ha annak a mélyebb okát kutatjuk, hogy a G matrixra tett — viszonylag gyenge — megkötés miért nem von be további kvadratikus programozási feladatokat is a módszerrel megoldható feladatok családjába, akkor a 3. 2. Lemmára és főleg az utána tett megjegyzésre kell utalnunk. Ha ugyanis a

$$G = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & P \end{bmatrix}$$

mátrixban mondjuk a Q mátrixot növeljük, azáltal G nem nő meg határozottan, s az A és $-A^T$ egyidejű szereplése miatt ezt a növekedést el sem lehet érni. Ilyenformán nem sikerül biztosítani a G mátrix kopozitív-plusz tulajdonságát, bár a kopozitivitás teljesül. Természetesen ilyenkor is igaz az, hogy ha az algoritmus pozitív eredménnyel ér véget, akkor olyan pontot szolgáltat, amely eleget tesz a lokális minimum *Kuhn—Tucker*-féle feltételének. Ha azonban ilyen esetben az algoritmus negatív eredménnyel zárul, akkor a feladatról semmit sem mondhatunk. Azt láttuk a 3. 2. Tételben, hogy valamelyik lehetőség mindenképpen bekövetkezik.

A felsorolt esetektől eltérően a *Dorn*-féle (2. 1. 10) feladatban a G mátrix magának a kvadratikus alaknak a matrixa, ezért erre az esetre teljes hatékonysággal alkalmazhatók a fejezet eredményei. Ezek szerint érvényes a következő tétel, amely általánosítja COTTLE [4] tételét.

3. 6. TÉTEL. *Ha a* (2. 1. 10) *feladat G mátrixa kopozitív-plusz mátrix és a feladatnak van megengedett megoldása, akkor optimális megoldása is van és ennek értéke zérus.*

Az adott feltételek mellett ugyanis alkalmazhatjuk kiegészítő változó algoritmusunkat, és ez a 3. 3. Tétel szerint véget is ér, mégpedig a 3. 4. Tétel szerint vagy kiegészítő megoldással, vagy pedig annak a megállapításával, hogy nincs megengedett megoldás.

4. Kiegészítő változó módszer pozitív mátrixú feladat megoldására

4. 1. Tekintsük ismét a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) feladatot. Mint már említettük, a feltételek ideiglenes gyengítése révén remélünk a feladat megoldásához eljutni. A harmadik fejezetben a (2. 1. 1) feltétel gyengítése révén jutottunk sikeres eljáráshoz, DANTZIG és COTTLE a nemnegativitási feltétel gyengítése révén, így remélhető, hogy hasonlóan sikeres a (2. 1. 4) ortogonalitási feltétellel kapcsolatos engedmény bevezetése is. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy ez így is van.

Az alkalmazott gondolatmenet hasonló lesz a harmadik fejezetben alkalmazottéhoz, és a formális analógia kihangsúlyozása céljából ezt lehetőleg azonos jelölés- és megfogalmazásmóddal érzékeltetjük. Fel kell hívnunk azonban a figyelmet arra, hogy az azonos szimbolika itt az előzőétől eltérő tartalmat takar. Míg a harmadik fejezetben a segédfeladat kiegészítő megoldásain keresztül törekedtünk az eredeti feladat megoldása felé, addig e fejezetben az eredeti feladat „majdnem" kiegészítő megoldásain keresztül fogunk a cél felé törekedni.

Az e fejezetben leírt algoritmus valójában az itt megköveteltnél sokkal gyengébb feltétel mellett is elindítható, és véges, azonban pillanatnyilag öncélúnak érződik ennek a részletes taglalása, s így elhagytuk.

4. 2. A harmadik fejezethez hasonlóan itt is beszélhetünk megoldásról, megengedett megoldásról és kiegészítő megoldásról.

Vezessük be az

$$A = (E, -G)$$

mátrixot, amelynek oszlopait egységesen fogjuk jelölni:

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{2m}).$$

Eszerint ez esetben

$$\mathbf{a}_p = \begin{cases} \mathbf{e}_p & \text{ha} \quad p = 1, \dots, m \\ -\mathbf{g}_{p-m} & \phantom{\text{ha}} \quad p = m+1, \dots, 2m. \end{cases}$$

Bevezetve még az

$$x = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{g}$$

jelöléseket, a (2. 1. 1)—(2. 1.3) feltételrendszert a következő egységes alakban írhatjuk:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_0$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}.$$

Az A mátrix rangja m, így oszlopvektorterének tetszőleges bázisa m elemű. A továbbiakban B-vel az A oszlopaiból alkotott bázist jelöljük. Ha

$$B = (\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_m}),$$

akkor legyen

$$I = (i_1, \dots, i_m).$$

Minthogy az $Ax=\mathbf{a}_0$ lineáris egyenletrendszer nyilván konzisztens, ezért tetszőleges B bázishoz egyértelműen tartozik egy

$$D=(\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{2m}) = \begin{bmatrix} \delta_{i_1} \\ \vdots \\ \delta_{i_m} \end{bmatrix} = (d_{i,p})$$

mátrix, amelyet a

$$BD=(\mathbf{a}_0, A)$$

összefüggés értelmez. A továbbiakban B-vel együtt valamennyi B-től függő szimbólumot vele azonos indexszel fogunk ellátni.

Az $Ax=\mathbf{a}_0$ egyenletrendszer B bázisához tartozó bázismegoldás, továbbá a megengedett, 1-megengedett és kiegészítő bázis definícióját szó szerint átvesszük a harmadik fejezetből.

4. 3. Tekintettel arra, hogy a 3. 1. Tétel tetszőleges $(\mathbf{a}_0, A)$ mátrix esetén érvényes, azért esetünkben is.

Az algoritmus formális leírását szó szerint átvehetjük a harmadik fejezetből, ezért azt itt nem ismételjük meg, helyette a tartalmi eltéréseket világítjuk meg.

Induló bázisként mindkét esetben a $B^{(0)}=(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ bázist választjuk. Természetesen csak akkor megyünk tovább, ha ez nem megengedett.

Az első lépés célja a megengedettség biztosítása. Ott ezt a mesterséges vektornak a bázisba való bevonásával értük el. Most a $-G$ mátrix első oszlopát, $-\mathbf{g}_1$-et vonjuk be első lépésként a bázisba. Ez biztosan sikerre vezet, ha $\mathbf{g}_1$-nek valamennyi komponense pozitív, hisz az előző fejezetben a mesterséges vektorról csak ennyit használhatunk ki. Ezen túlmenően fel fogjuk tételezni, hogy

$$G>0.$$

Mint látni fogjuk, e feltételezés rendkívül hasznos.

Az előző fejezet algoritmusában az első lépés eredményeként a segédvektor belépett a bázisba, de megengedett és ortogonális maradt a megoldás.

A jelenlegi helyzetben $-\mathbf{g}_1$ lépett a bázisba, s ezzel a megoldás megengedetté vált ugyan, de — eltekintve attól a különösen szerencsés esettől, hogy éppen $\mathbf{e}_1$ hagyja el a bázist — elromlott az ortogonalitás. Egy kiegészítő vektorpár a bázisban van.

Mindkét esetben az az elv szabja meg az algoritmus további útját, hogy az elért helyzeten nem szabad rontani. Tekintettel arra, hogy a bázison kívül mindkét esetben egyetlen kiegészítő pár tartózkodik, mindkét esetben azonos elvre jutunk a bázisba belépő vektor kiválasztását illetőleg. Ennek következtében azonban a 3. 2. Tétel is változatlanul érvényes, így csak azt kell vizsgálnunk, hogy mi történik az algoritmus végén. Erre vonatkozik a következő:

4. 1. TÉTEL. *Pozitív G mátrix esetén mindig van kiegészítő bázismegoldás, és az algoritmus mindig ilyenen ér véget.*

Bizonyítás. A bázissorozat képzését elvileg két ok miatt fejezhetjük be. Vagy kiegészítő bázismegoldásra jutunk, vagy pedig megsértjük a 3. 1. Tétel premisszáját.

Elegendő azt belátnunk, hogy az utóbbi lehetőség sohasem következik be.

Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben a második lehetőségre jutunk. Jelöljük a bázissorozat utolsó bázisát B-vel. B-ről a következőket állíthatjuk:

1. $\mathbf{e}_1$ és $-\mathbf{g}_1$ benne van B-ben;

2. $B \neq B^{(1)}$, ezért $-\mathbf{g}_1$-en kívül még legalább egy $-G$-beli vektor is benne van B-ben. Az egyszerűbb jelölés kedvéért feltehetjük, hogy ez $-\mathbf{g}_m$.

3. $d_{1,0} > 0$ és $d_{m+1,0} > 0$.

Jelöljük $\mathbf{a}_k$-val azt a vektort, amelynek az algoritmus következő lépése során a bázisba kellene lépnie. Feltételezésünk szerint

$$\mathbf{d}_k \leqq \mathbf{0}.$$

A jelölés egyszerűsége érdekében feltehetjük, hogy

$$B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+r+2}, \ldots, \mathbf{a}_{2m}).$$

A fentiek szerint

$$1 \leqq r < m-1.$$

Ezek után világos, hogy

$$\mathbf{a}_k = \begin{cases} \mathbf{e}_{r+1} & \text{ha} \quad k \leqq m \\ -\mathbf{g}_{r+1} & \phantom{\text{ha}} \quad k > m \end{cases}$$

Fejezzük ki a B bázis segítségével $\mathbf{a}_k$-t.

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{a}_i d_{i,k} + \mathbf{a}_{m+1} d_{m+1,k} + \sum_{i=m+r+2}^{2m} \mathbf{a}_i d_{i,k} = \mathbf{a}_k.$$

Az $\mathbf{a}_i$ vektorok értelmezése szerint ezt az összefüggést átírhatjuk a következőképpen:

$$\sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i d_{i,k} - \mathbf{g}_1 d_{m+1,k} - \sum_{i=r+2}^{m} \mathbf{g}_i d_{m+i,k} = \begin{cases} \mathbf{e}_{r+1}, & \text{ha} \quad k = r+1 \\ -\mathbf{g}_{r+1}, & \text{ha} \quad k = m+r+1. \end{cases}$$

Figyelembe véve, hogy valamennyi $d_{i,k} \leqq 0$, a bal oldali összeg utolsó $m-r$ (>1) komponense nem negatív, mégpedig vagy valamennyi zérus, vagy pedig valamennyi pozitív. Emiatt azonban az egyenlőség egyik esetben sem teljesülhet.

Ezzel a bizonyítást elvégeztük.

5. A bimatrix játék

5.1. B e v e z e t é s. A bimátrix játék, vagy másként kétszemélyes, nem kooperatív, nem zéróösszegű véges játék a kétszemélyes zéróösszegű mátrixjátéknak a természetes általánosítása.

Mint ismeretes, kétszemélyes zéróösszegű véges játék esetén a két játékos egymástól függetlenül választ a lehetőségei közül. Az első játékos m lehetőség — ún. tiszta stratégia —, a második pedig n lehetőség közül választ. Ha az első játékos az i-edik, $i = 1, \ldots, m$, a második ugyanakkor a j-edik, $j = 1, \ldots, n$, lehetőséget választotta, akkor az első játékos vesztesége g_{ij}, a másodiké $-g_{ij}$. A két veszteség összege zérus. Ha ezzel szemben itt a második játékos veszteségét egy, a g_{ij}-től független $\hat{g}_{ij}$ szám adja meg, akkor bimátrix játékkal állunk szemben.

Foglaljuk össze az első játékos lehetséges veszteségeit a

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} \cdots g_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{m1} \cdots g_{mn} \end{bmatrix}$$

a másodikét pedig a

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{11} \cdots \hat{g}_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{g}_{n1} \cdots \hat{g}_{nm} \end{bmatrix}$$

mátrixba.

Tegyük fel, hogy a játszmát sokszor megismétlik és mindkét játékos valamilyen kevert stratégiát játszik. Foglaljuk össze az első játékos stratégiáját a $\mathbf{p}$ m-dimenziós sztohasztikus vektorba[3] a másodikét pedig a $\hat{\mathbf{p}}$ n-dimenziós sztochasztikus vektorba. Ekkor az első játékos veszteségének a várható értéke

$$\mathbf{p}^T G \hat{\mathbf{p}},$$

a másodiké pedig

$$\hat{\mathbf{p}}^T \hat{G} \mathbf{p}.$$

A probléma ezek után az, hogy létezik-e olyan $\mathbf{p}_0$, $\hat{\mathbf{p}}_0$ stratégiapár, amely bizonyos értelemben mindkét játékos számára megnyugtató, azaz az adott lehetőségek között egyensúlyi helyzetet teremt.

Az ilyen, a következő pontban még pontosan meghatározandó egyensúlyi pont létezését először NASH bizonyította egy, a valós számokon értelmezett leképezésekre vonatkozó fixponttételre támaszkodva [52]. A felhasznált eszközök természete miatt bizonyítása puszta egzisztencia-bizonyítás. Az első konstruktív bizonyítás VOROBJEVtől származik [64], akinek elegáns tárgyalásmódja ezen túlmenően az összes egyensúlypontok halmazának a jellemzésére is törekszik. VOROBJEV gondolatmenetét egyszerűsítve KUHNnak sikerült az összes egyensúlypontok halmazát bizonyos extremális egyensúlypontok konvex burkainak egyesítési halmazaként jellemezni [36]. Egyúttal VOROBJEV konstruktív gondolatmenetét is egyszerűsíti és ezt úgy rendezi, hogy az egyben megoldó algoritmust is sugall.

KUHN gondolatai nyomán elindulva MANGASARIAN és STONE úgy találja [46], [48], hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\mathbf{p}_0$, $\hat{\mathbf{p}}_0$ egyensúlypont legyen, az, hogy megoldja a következő kvadratikus programozási feladatot:

$$\max \mathbf{p}^T(G+\hat{G}^T)\hat{\mathbf{p}} - \gamma - \hat{\gamma}$$

$$\hat{G}\mathbf{p} - \hat{\gamma}\hat{\mathbf{g}} \leqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}^T\mathbf{p} = 1, \quad \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \tag{5.1.1}$$

$$G\hat{\mathbf{p}} - \gamma\mathbf{g} \leqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{g}}^T\hat{\mathbf{p}} = 1, \quad \hat{\mathbf{p}} \geqq \mathbf{0}.$$

Itt $\mathbf{g}$, ill. $\hat{\mathbf{g}}$ olyan m, illetve n dimenziós vektor, amelynek minden komponense Az optimális megoldásra igaz az is, hogy

$$\mathbf{p}^T(G+\hat{G}^T)\hat{\mathbf{p}} - \gamma - \hat{\gamma} = 0.$$

[3] Sztohasztikus vektoron olyan nem-negatív komponensekkel rendelkező vektort értünk, amelynél a komponensek összege 1.

Ilyenformán, ha pusztán egyensúlypontot keresünk, akkor valamelyik kvadratikus programozási eljárást alkalmazhatjuk, ha nem is túl hatékonyan. Minthogy ezek egyike sem alkalmas valamennyi megoldás előállítására, azért MANGASARIAN [46] egy, a fenti ekvivalencián alapuló, de nem kvadratikus programozási eljárást javasol. Az (5. 1. 1) feladatnak az olyan megoldásait, melyek a feltételek halmazának csúcspontját alkotják, extremális egyensúlypontnak nevezve bebizonyítja, hogy valamennyi egyensúlypont kifejezhető bizonyos extremális egyensúlypontok konvex kombinációjaként. Gondolatmenetében meg is adja, hogy melyek a kérdéses extremális pontok. Megoldási javaslata ezek alapján a következő: Állítsuk elő az (5. 1. 1) feltételek által meghatározott konvex poliéder valamennyi csúcsát BALINSKY [1] algoritmusával, válasszuk ki közülük azokat, amelyek megoldják a feladatot, ezek lesznek az extremális egyensúlypontok. Közülük bizonyosaknak a konvex kombinációit képezve, az összes egyensúlyi pont előállítható.

A vázolt algoritmus a gyakorlatban mindjárt az elején, az összes csúcs előállítása során megbukik a méretek miatt. Mint MANGASARIAN írja, legfeljebb $m \cdot n \leqq 36$ méretig működött elfogadható időn belül egy IBM 7090/94 gépen.

A problémát MILLS kevert egészértékű feladatra vezeti vissza [50], s első kísérletként LEMKE is hasonló eredményre jut [40]. A továbbiakban LEMKE és HOWSON lemond a valamennyi egyensúlypont előállítását célzó erőfeszítésekről, s helyette olyan algoritmust keres, amely egy egyensúlypontot állít elő, de ezt hatékonyan [38], [41]. Ennek alapgondolata az előző szerzők geometriai jellegű eredményeinek a szomszédcsúcs módszerrel való egyesítése. A következőkben ezt az algoritmust vizsgáljuk, az előző fejezetek algebrai, illetőleg kombinatorikus eszközeivel. Mind a jelölés, mind pedig a tárgyalásmód hangsúlyozottan törekszik a közös vonások és analógiák kiemelésére.

5. 2. A bimátrix játék és az ekvivalens feladat. Jelöljön $\mathbf{e}_i$ $i=1, \ldots, m$ olyan m-komponensű egységvektort, amelynek az i-edik komponense 1, a többi nulla, s jelöljön $\hat{\mathbf{e}}_j$ $j=1, \ldots, n$ olyan n-komponensű egységvektort, melynek a j-edik komponense 1, a többi nulla. Legyen

$$\mathbf{g} = \mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_m$$

$$\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{e}}_1 + \cdots + \hat{\mathbf{e}}_n.$$

Jelölje S az m-komponensű, $\hat{S}$ pedig az n-komponensű sztohasztikus vektorok halmazát:

$$S = \{\mathbf{p} | \mathbf{p} \in E^m, \ \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{g}^T \mathbf{p} = 1\},$$

$$\hat{S} = \{\mathbf{p} | \hat{\mathbf{p}} \in E^n, \ \hat{\mathbf{p}} \geqq \mathbf{0}, \ \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{p}} = 1\}.$$

A G és $\hat{G}$ mátrixok által definiált bimátrix játék egyensúlypontján olyan

$$\mathbf{p}_0 \in S, \quad \hat{\mathbf{p}}_0 \in \hat{S}$$

vektorpárt értünk, melyre igaz az, hogy

$$\mathbf{p}_0^T G \hat{\mathbf{p}}_0 \leqq \mathbf{p}^T G \hat{\mathbf{p}}_0 \quad \text{ha} \quad \mathbf{p} \in S$$

$$\hat{\mathbf{p}}_0^T \hat{G} \mathbf{p}_0 \leqq \hat{\mathbf{p}}^T \hat{G} \mathbf{p}_0 \quad \text{ha} \quad \hat{\mathbf{p}} \in \hat{S}. \tag{5. 2. 1}$$

Itt feltehető, hogy

(5. 2. 2) $$G > 0, \quad \hat{G} > 0,$$

hiszen tetszőleges λ valós szám esetén a

$$G + \lambda \mathbf{g}\hat{\mathbf{g}}^T, \quad \hat{G} + \lambda \hat{\mathbf{g}}\mathbf{g}^T$$

mátrixok által definiált játéknak ugyanott van egyensúlypontja, ahol a G és $\hat{G}$ által definiált játéknak.

Legyen

(5. 2. 3) $$\begin{aligned} \gamma &= \mathbf{p}_0^T G \mathbf{p}_0 \\ \hat{\gamma} &= \hat{\mathbf{p}}_0^T \hat{G} \mathbf{p}_0. \end{aligned}$$

Itt (5. 2. 2) szerint $\gamma > 0$ és $\hat{\gamma} > 0$.

Világos, hogy az (5. 2. 1) feltétel teljesüléséhez a következő két egyenlőtlenségrendszer teljesülése szükséges és elégséges:

$$\begin{aligned} \gamma \mathbf{g} &\leqq G \hat{\mathbf{p}}_0 \\ \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}} &\leqq \hat{G} \mathbf{p}_0. \end{aligned}$$

Másként

$$\begin{aligned} G\hat{\mathbf{p}}_0 - \gamma \mathbf{g} &\geqq \mathbf{0} \\ \hat{G}\mathbf{p}_0 - \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ha itt a bal oldali vektorok $1/\gamma$, illetve $1/\hat{\gamma}$-szorosának jelölésére bevezetjük az $\mathbf{u}$ és $\hat{\mathbf{u}}$ vektorokat, akkor a feltétel tovább alakítható:

$$\begin{aligned} G\hat{\mathbf{p}}_0 - \gamma \mathbf{g} &= \gamma \mathbf{u} \\ \hat{G}\mathbf{p}_0 - \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}} &= \hat{\gamma} \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Az (5. 2. 3) definíciót a következő, céljainknak jobban megfelelő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^T(G\hat{\mathbf{p}}_0 - \gamma \mathbf{g}) &= 0 \\ \hat{\mathbf{p}}_0^T(\hat{G}\mathbf{p}_0 - \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}}) &= 0. \end{aligned}$$

Végül a

(5. 2. 4) $$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \frac{1}{\hat{\gamma}} \mathbf{p}_0 \\ \hat{\mathbf{z}} &= \frac{1}{\gamma} \hat{\mathbf{p}}_0 \end{aligned}$$

jelölésekkel élve az egyensúly feltétele a következő alakot ölti:

(5. 2. 5a) $$\mathbf{u} - G\hat{\mathbf{z}} = -\mathbf{g}$$

(5. 2. 5b) $$\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{z}} \geqq \mathbf{0};$$

(5. 2. 6a) $$\hat{\mathbf{u}} - \hat{G}\mathbf{z} = -\hat{\mathbf{g}}$$

(5. 2. 6b) $$\hat{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geqq \mathbf{0};$$

(5. 2. 7) $$\mathbf{u}^T \mathbf{z} = 0, \quad \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{z}} = 0.$$

Tegyük fel, hogy ez a rendszer megoldható és $\mathbf{u}$, $\hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{z}$, $\hat{\mathbf{z}}$ megoldást jelöl. Bevezetve a

$$(5.2.8)\qquad \gamma = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \hat{z}_j}, \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i}$$

jelöléseket, visszafelé haladhatunk a fenti képletsoron, s azt tapasztalhatjuk, hogy a

$$(5.2.9)\qquad \begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \hat{\gamma}\mathbf{z} \\ \mathbf{p}_0 &= \gamma\mathbf{z} \end{aligned}$$

vektorpár egyensúlypontot alkot. Ezzel bebizonyítottuk, hogy érvényes a következő:

5. 1. TÉTEL. *Az* (5. 2. 3), (5. 2. 4), (5. 2. 8), (5.2. 9) *összefüggések egy-egy értelmű hozzárendelést létesítenek a $G > 0$, $\hat{G} > 0$ mátrixpár által definiált bimátrix játéknak az* (5. 2. 1) *egyenlőtlenségekkel értelmezett egyensúlypontjai és az* (5. 2. 5a)—(5. 2. 7) *feltételrendszer megoldásai között.*

MEGJEGYZÉS. Világos, hogy az (5. 2. 5a)—(5. 2. 7) feltételeket a velük ekvivalens

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \hat{\mathbf{u}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & G\\ \hat{G} & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{g}\\ -\hat{\mathbf{g}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \hat{\mathbf{u}}\end{bmatrix} \geqq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{bmatrix} \geqq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \hat{\mathbf{z}}\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \hat{\mathbf{u}}\end{bmatrix} \doteq 0$$

alakra hozhatjuk, ami nyilvánvalóan ekvivalens a (2. 1. 1)—(2. 1. 4) alapfeladattal. A $\begin{bmatrix}0 & G\\ \hat{G} & 0\end{bmatrix}$ mátrix azonban feleslegesen nagyméretű, és noha kopozitív, de mint könnyen ellenőrizhető, nem kopozitív-plusz mátrix. Ezenkívül látni fogjuk, hogy az (5.2.5a)—(5.2.7) alakok különösen előnyösek, minthogy a bennük szereplő mátrixok pozitívak, s így természetesen kínálkoznak a 4. fejezetben leírt algoritmus alkalmazására. Tekintettel azonban arra, hogy az itt található (5. 2. 7) ortogonalitási feltételek eltérnek a (2. 1. 4) feltételektől, a 4. fejezet gondolatmenete közvetlenül nem alkalmazható.

5. 3. L-megengedett bázispárok. Nevezzük az (5. 2. 5a) és (5. 2. 6a) feltételeknek eleget tevő $\mathbf{u}$, $\hat{\mathbf{z}}$, és $\hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{z}$ vektorokat megoldásoknak, az olyan megoldásokat, amelyek az (5. 2. 5b) és (5. 2. 6b) feltételeket kielégítik, megengedett megoldásoknak, végül az (5. 2. 7) feltételeket kielégítő megengedett megoldásokat kiegészítő megoldásoknak.

Az $\mathbf{u}$, $\mathbf{z}$, illetve $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ megfelelő — azonos indexű — komponenseit kiegészítő változópároknak, az

$$A = (E, -G)$$

$$\hat{A} = (\hat{E}, -\hat{G})$$

mátrixokban a megfelelő $\mathbf{e}_i$, $-\hat{\mathbf{g}}_i$ $i=1, \ldots, m$, illetve $\hat{\mathbf{e}}_{\hat{i}}$, $-\mathbf{g}_{\hat{i}}$ $\hat{i}=1, \ldots, n$ párokat kiegészítő vektorpároknak fogjuk hívni.

Lássuk el a kényelem kedvéért az A és $\hat{A}$ matrixok oszlopait egységes jelöléssel:

$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{m+n})$$

$$\hat{A} = (\hat{\mathbf{a}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{n+m}).$$

Eszerint

$$\mathbf{a}_p = \begin{cases} \mathbf{e}_p & \text{ha } p = 1, \ldots, m \\ -\mathbf{g}_{p-m} & \text{ha } p = m+1, \ldots, m+n, \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_p = \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_p & \text{ha } p = 1, \ldots, n \\ -\hat{\mathbf{g}}_{p-n} & \text{ha } p = n+1, \ldots, n+m. \end{cases}$$

Bevezetve még az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_0 = -\mathbf{g}, \quad \hat{\mathbf{a}}_0 = -\hat{\mathbf{g}}$$

jelöléseket, az (5. 2. 5a), (5. 2. 5b), (5. 2. 6a), (5. 2. 6b) feltételrendszer a következő alakot ölti:

(5. 3. 1)
$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_0$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

(5. 3. 2)
$$\hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{a}}_0$$
$$\hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}.$$

Az A mátrix rangja m, az $\hat{A}$ mátrixé n, így oszlopvektoraik tetszőleges bázisa m, illetve n elemű. A továbbiakban B-vel ill. $\hat{B}$-vel — esetleg indexszel ellátva — az A, ill. $\hat{A}$ oszlopaiból alkotott bázist jelölünk. Ha

$$B = (\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_m}),$$

$$\hat{B} = (\hat{\mathbf{a}}_{\hat{i}_1}, \ldots, \hat{\mathbf{a}}_{\hat{i}_n}),$$

akkor legyen

$$I = (i_1, \ldots, i_m),$$

$$\hat{I} = (\hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_n).$$

Tetszőleges B, $\hat{B}$ bázispárhoz egyértelműen tartozik egy

$$D = (\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_{m+n}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{i_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{i_m} \end{bmatrix} = (d_{i,p}).$$

$$\hat{D} = (\hat{\mathbf{d}}_0, \hat{\mathbf{d}}_1, \ldots, \mathbf{d}_{n+m}) = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\delta}}_{\hat{i}_1} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{\hat{i}_n} \end{bmatrix} = (\hat{d}_{\hat{i},p})$$

mátrixpár, amelyet a

$$BD = (\mathbf{a}_0, A)$$
$$\hat{B}\hat{D} = (\hat{\mathbf{a}}_0, \hat{A})$$

összefüggések értelmezik. A továbbiakban, ha B, illetve $\hat{B}$ indexet kap, akkor valamennyi tőlük függő szimbólumot is azonos indexszel fogjuk ellátni.

A B, $\hat{B}$ bázispárt kiegészítő bázispárnak hívjuk, ha nem szerepelnek benne kiegészítő vektorok.

Egy B, $\hat{B}$ bázispárt akkor mondunk l-megengedettnek, ha mind B, mind pedig $\hat{B}$ l-megengedett.

Egy B, $\hat{B}$ l-megengedett bázispár szomszédján olyan $B^{(1)}$, $\hat{B}^{(1)}$ l-megengedett bázispárt fogunk érteni, amelyre
vagy $B^{(1)} = B$ és $\hat{B}^{(1)}$ a $\hat{B}$ szomszédja,
vagy $B^{(1)}$ a B szomszédja és $\hat{B}^{(1)} = \hat{B}$.

A 3. 1. Tételnek közvetlen következménye a következő:

5. 2. TÉTEL. *Egy B, $\hat{B}$ l-megengedett bázispárnak akkor és csak akkor van olyan szomszédja, amely egy $\mathbf{a}_k$ (ill. $\hat{\mathbf{a}}_k$) vektor bevonásával jön létre, ha $\mathbf{d}_k$-nak (ill. $\hat{\mathbf{d}}_k$-nak) van pozitív komponense. Ez esetben a szomszéd egyértelműen meghatározott.*

5. 4. Az algoritmus. Legyen $B^{(-2)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$, $\hat{B}^{(-2)} = (\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n)$. Minthogy $D^{(-2)} = (\mathbf{a}_0, A)$, $\hat{D}^{(-2)} = (\hat{\mathbf{a}}_0, \hat{A})$, azért a $B^{(-2)}$, $\hat{B}^{(-2)}$ bázispár nem megengedett.

Értelmezzük a $B^{(-1)}$, $\hat{B}^{(-1)}$ bázispárt a következőképpen: legyen $k = m+1$ és vonjuk be a $B^{(-2)}$ bázisba az $\mathbf{a}_k$ vektort.[4] A $B^{(-2)}$-ből elhagyandó vektor h indexét a következő összefüggésből határozzuk meg:

$$(5.4.1) \qquad \frac{1}{d_{h,k}^{(-2)}}\,\delta_h^{(-2)} = 1 - \max \frac{1}{d_{i,k}^{(-2)}}\,\delta_i^{(-2)} \qquad i \in I^{(2)}.$$

Minthogy $D^{(-2)}$-nek nincsenek arányos sorai, azért az (5. 4. 1) összefüggés egyértelműen határozza meg a h indexet. Legyen $\hat{B}^{(-1)} = \hat{B}^{(-2)}$.

Következő lépésként a $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ bázispárt alkotjuk meg. Legyen $B^{(0)} = B^{(-1)}$, és $\hat{k} = n + h$. Vonjuk be a $\hat{B}^{(-1)}$ bázisba az $\hat{\mathbf{a}}_{\hat{k}}$ vektort. A $\hat{B}^{(-1)}$-ből elhagyandó vektor j indexét a következő összefüggésből határozzuk meg:

$$(5.4.2) \qquad \frac{1}{\hat{d}_{j,\hat{k}}^{(-1)}}\,\hat{\delta}_j^{(-1)} = 1 - \max \frac{1}{\hat{d}_{i,\hat{k}}^{(-1)}}\,\hat{\delta}_i^{(-1)} \qquad i \in \hat{I}^{(-1)}.$$

Minthogy $\hat{D}^{(-1)}$-nek nincsenek arányos sorai, azért az (5. 4. 2) összefüggés egyértelműen definiálja a j indexet.

A transzformációs formulák megvizsgálása után látjuk, hogy $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ l-megengedett bázispár. Valóban, az (5. 4. 1) és (5. 4. 2) éppen ebből a követelményből született. A már hangsúlyozott egyértelműségre a továbbiakban még támaszkodni fogunk a következő alakban:

Pontosan egy olyan l-megengedett B bázis van, amely $m-1$ darab $\mathbf{e}_i$ vektorból és $-\mathbf{g}_1$-ből áll, ez $\hat{B}^{(0)}$.

[4] Az első lépésben a $-G$ mátrix tetszőleges oszlopát vonhatjuk a bázisba, az egyszerűség kedvéért az elsőt választjuk.

Pontosan egy olyan l-megengedett $\hat{B}$ bázis van, amely $n-1$ darab $\hat{\mathbf{e}}_i$ vektorból és $-\hat{\mathbf{g}}_h$-ból áll, ez $\hat{B}^{(0)}$.

A transzformációs formulák megvizsgálása után látjuk, hogy $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ l-megengedett bázispár. Minthogy — miként az könnyen látható — $\hat{\mathbf{d}}_j^{(0)}<\mathbf{0}$, azért az 5. 2. Tétel szerint a $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ bázispárnak nincs olyan szomszédja, amelyet $\hat{\mathbf{a}}_j$ bevonásával kaphatnánk.

A $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ párból kiindulva alkossuk meg a

$$B^{(0)}, \hat{B}^{(0)}; \quad B^{(1)}, \hat{B}^{(1)}; \quad B^{(2)}, \hat{B}^{(2)}; \ldots \tag{5.4.3}$$

szomszédos bázispárokból álló sorozatot a következőképpen:

ha a $B^{(q)}$, $\hat{B}^{(q)}$ megalkotása során $\mathbf{a}_j$ hagyta el $B^{(q-1)}$-et és $\hat{B}^{(q)}=\hat{B}^{(q-1)}$, akkor legyen $B^{(q+1)}=B^{(q)}$ és $\hat{\mathbf{a}}_k$-val jelölve az $\mathbf{a}_j$ kiegészítő párját, a $\hat{B}^{(q+1)}$ úgy jön létre $\hat{B}^{(q)}$-ból, hogy abba $\hat{\mathbf{a}}_k$-t vonjuk be;

ha a $B^{(q)}$, $\hat{B}^{(q)}$ megalkotása során $B^{(q)}=B^{(q-1)}$, és $\hat{\mathbf{a}}_j$ hagyta el $\hat{B}^{(q-1)}$-et, akkor $\mathbf{a}_k$-val jelölve az $\hat{\mathbf{a}}_j$ kiegészítő párját, $B^{(q+1)}$ úgy jön létre $B^{(q)}$-ból, hogy abba $\mathbf{a}_k$-t vonjuk be és legyen $\hat{B}^{(q+1)}=\hat{B}^{(q)}$.

A $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$ párról elindulva az (5. 4. 2) alatt értelmezett $\hat{\mathbf{a}}_j$ játssza a definícióban leírt szerepet és így a sorozatot az 5. 2. Tétel szerint egyértelműen meghatároztuk.

Az értelmezésből világos, hogy a sorozat minden elempárja l-megengedett bázispár.

A sorozat képzését akkor fejezzük be, ha vagy $\mathbf{a}_{m+1}=-\mathbf{g}_1$, vagy pedig $\hat{\mathbf{a}}_1=\hat{\mathbf{e}}_1$ elhagyja a megfelelő bázist.

5. 3. TÉTEL. *A* (4. 3) *bázissorozat véges.*

Bizonyítás. Minthogy az A, $\hat{A}$-ból kiválasztható bázispárok száma véges, elég azt bizonyítani, hogy a sorozatban egyetlen pár sem ismétlődik.

Ha volna olyan pár a sorozatban, amely kétszer is fellép, akkor volna egy első ilyen pár. A sorozat elemeit úgy értelmeztük, hogy minden bázispár esetén pontosan egy kiegészítő pár, nevezetesen $\mathbf{a}_{m+1}$, $\hat{\mathbf{a}}_1$ szerepel bázisban, pontosan egy kiegészítő pár van bázison kívül, s az adott bázispár szomszédai ezek bevonásával jönnek létre. Az 5. 2. Tételből eszerint az következik, hogy minden bázispárnak legfeljebb két szomszédja van.

Az első ismétlődő pár nem lehet $B^{(0)}$, $\hat{B}^{(0)}$, minthogy — mint már megjegyeztük — nincs olyan szomszédjuk, amely $\hat{\mathbf{a}}_j$ bevonásával jönne létre.

Az első ismétlődő párt más kell, hogy megelőzze az első fellépés alkalmából, mint a másodiknál, különben nem ő volna az első. Ekkor azonban legalább három szomszédja volna, ami — mint láttuk — lehetetlen.

5. 4. TÉTEL. *A* (4. 3) *sorozat utolsó eleme kiegészítő megoldást szolgáltat az* (5. 2. 5a)—(5. 2. 7) *feladathoz.*

Bizonyítás. Az 5. 3. Tétel szerint van utolsó bázispár. Ez elvileg két kategóriába tartozhat.

I. A bázispár kiegészítő bázispár.

II. A bázispár nem kiegészítő, de a sorozat következő elemét nem tudjuk képezni az 5. 2. Tételben szereplő premissza megsértése miatt.

Elég azt megmutatnunk, hogy a II. eset nem léphet fel. Indirekt úton fogunk bizonyítani. Tegyük fel, hogy az utolsó $B, \hat{B}$ bázispár a II. Kategóriába tartozik; vizsgáljuk meg, milyen lehet a B, ill. $\hat{B}$ bázisok szerkezete.

Minthogy a $B, \hat{B}$ pár különbözik a $B^{(0)}, \hat{B}^{(0)}$ pártól, azért legalább az egyikük különbözik.

A II. esetben a bázispár azért nem kiegészítő, mert $-\mathbf{g}_1$ benne van B-ben, $\hat{\mathbf{e}}_1$ pedig $\hat{B}$-ben. A B bázis a $-\mathbf{g}_1$-en kívül tartalmaz bizonyos számú $\mathbf{e}_i$ vektort is. A jelölés egyszerűsítése érdekében tegyük fel, hogy éppen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ $0 \leqq r < m$ van B-ben. Ugyancsak a jelölés egyszerűsége kedvéért tegyük fel, hogy $\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_s$ $1 \leqq s < n$ szerepel a $\hat{B}$-ben. Minthogy a bázispárok csak egy kiegészítő párt tartalmaznak, azért a B további vektorai $-\mathbf{g}_{s+1}, \dots, -\mathbf{g}_n$-ből, a $\hat{B}$ további vektorai $-\hat{\mathbf{g}}_{r+1}, \dots, \dots, -\hat{\mathbf{g}}_m$-ből kerülnek ki. A felsorolt vektorok összes száma $m+n+1$, így pontosan egy felesleges van közöttük. Feltehetjük, hogy ez vagy $-\mathbf{g}_{s+1}$, vagy pedig $-\hat{\mathbf{g}}_{r+1}$. Az első esetben tehát

$$B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, -\mathbf{g}_1, -\mathbf{g}_{s+2}, \dots, -\mathbf{g}_n)$$
$$(5.4.4) \qquad \hat{B} = (\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_s, -\hat{\mathbf{g}}_{r+1}, \dots, -\hat{\mathbf{g}}_m),$$

a másodikban pedig

$$B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, -\mathbf{g}_1, -\mathbf{g}_{s+1}, \dots, -\mathbf{g}_n)$$
$$(5.4.5) \qquad \hat{B} = (\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_s, -\hat{\mathbf{g}}_{r+2}, \dots, -\hat{\mathbf{g}}_m).$$

Mindkét eset elképzelhető, hisz az

$$r+n-s = m, \quad 0 \leqq r < m,$$
$$s+m-r = n, \quad 0 < s < n;$$

továbbá az

$$r+n-s+1 = m, \quad 0 \leqq r < m,$$
$$s+m-r-1 = n, \quad 0 < s < n;$$

rendszerek konzisztensek.

Az első esetben a bázison kívüli kiegészítő vektorpár $-\mathbf{g}_{s+1}, \hat{\mathbf{e}}_{s+1}$, a másodikban $\mathbf{e}_{r+1}, -\hat{\mathbf{g}}_{r+1}$.

Feltételezésünk szerint ezek valamelyike a neki megfelelő bázisban csupa nem-pozitív együtthatóval állítható elő.

Vizsgáljuk sorra a lehetőségeket. Az első esetben vagy

$$(5.4.6) \qquad \sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i d_{i,m+s+1} - \mathbf{g}_1 d_{m+1,m+s+1} - \sum_{i=m+s+2}^{m+n} \mathbf{g}_i d_{i,m+s+1} = -\mathbf{g}_{s+1},$$

vagy pedig

$$(5.4.7) \qquad \sum_{i=1}^{s} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{d}_{i,s+1} - \sum_{i=n+r+1}^{n+m} \hat{\mathbf{g}}_i \hat{d}_{i,s+1} = \hat{\mathbf{e}}_{s+1}.$$

E képletekben valamennyi $d_{i,k}$ együttható nem pozitív. Ezt figyelembe véve az (5.4.6) egyenlet csak akkor lehet konzisztens, ha $r=m$, hisz (5.2.2) szerint a jobb oldal minden komponense negatív, a bal oldalon pedig az első összeg kivételével csupa nem-negatív vektorból áll. Ez viszont lehetetlen.

Az (5. 4. 7) egyenlet csak úgy lehet konzisztens — ismét a benne szereplő együtthatók nempozitivitása, továbbá (5. 2. 2) miatt —, ha $s = n-1$. Ekkor azonban (5. 4. 5)-ből láthatjuk, hogy $B = B^{(0)}$. Minthogy a $-\mathbf{g}_1, \hat{\mathbf{e}}_1$ páron kívül további kiegészítő pár nem lehet bázisban, ezért $-\hat{\mathbf{g}}_h$ szükségképpen benne van $\hat{B}$-ben, s így egy korábbi megjegyzésünk szerint $\hat{B} = \hat{B}^{(0)}$, ami lehetetlen.

Vizsgáljuk ezután a második esetet. Ekkor vagy

$$(5.4.8) \qquad \sum_{i=1}^{r} \mathbf{e}_i d_{i,r+1} - \mathbf{g}_1 d_{m+1,r+1} - \sum_{i=m+s+1}^{m+n} \mathbf{g}_i d_{i,r+1} = \mathbf{e}_{r+1}$$

vagy pedig

$$(5.4.9) \qquad \sum_{i=1}^{s} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{d}_{i,n+r+1} - \sum_{i=n+r+2}^{n+m} \hat{\mathbf{g}}_i \hat{d}_{i,n+r+1} = -\hat{\mathbf{g}}_{r+1}$$

Az (5. 4. 8) egyenletrendszer csak $r = m-1$ esetén lehet konzisztens, ekkor azonban, mint már láttuk $B = B^{(0)}$ s így a $\hat{\mathbf{g}}_i$ vektorok közül legfeljebb $\mathbf{g}_h$ szerepelhet $\hat{B}$-ben, s így vagy $\hat{B} = \hat{B}^{(0)}$, vagy pedig $\hat{B} = \hat{B}^{(-1)}$. Mindkét lehetőség ellentmond valamelyik feltételünknek.

Végül az (5. 4. 9) egyenletrendszer csak $s = n$ esetén lehet konzisztens, ami ismét lehetetlen.

Minthogy valamennyi lehetőség ellentmondásra vezetett, azért az 5. 4. Tétel állítása helyes.

Az 5. 4. Tétel közvetlen következménye a következő:

5. 5. TÉTEL. *A bimátrix játéknak mindig van egyensúlypontja.*

Kedves kötelességemnek teszek eleget, amikor ez úton is köszönetet mondok PRÉKOPA ANDRÁSnak azért a segítségért, amelyet munkám során tőle kaptam.

IRODALOM

[1] BALINSKI, M. L., An Algorithm for Finding all Vertices of Convex Polyhodral sets, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **9**, (1961), pp. 72—88.

[2] CHARNES, A., Optimality and Degeneracy in Linear Programming, *Econometrica*, **20**, (1952), pp. 160—170.

[3] CHARNES, A. and W. W. COOPER, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Vols. I. and II., John Wiley, New York, 1961.

[4] COTTLE, R. W., Note on a Fundamental Theorem in Quadratic Programming, *J. Soc. Ind. Appl. Math. Vol.* 12. No. 3. September 1964.

[5] COTTLE, R. W., Symmetric Dual Quadratic Programs, *Quart, Appl. Math.* **21**, (1963), pp. 237—243.

[6] DANTZIG, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963.

[7] DANTZIG, G. B., Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, *Activity Analysis of Production and Allocation* (T. C. *Koopmans*, ed), John Wiley, New York, 1951, pp. 339—347.

[8] DANTZIG, G. B. and R. W. COTTLE, *Positive (Semi) Definite Matrices and Mathematical Programming*, Operations Research Center, University of California, Berkeley, ORC 63—18 (RR), May 1963.

[9] DANTZIG, G. B. and R. W. COTTLE, *Positive* (Semi) *Definite Programming, in Nonlinear Programming*, ed J. Abadie, Nort-Holland, 1967.

[10] DANTZIG, G. B., E. EISENBERG and R. W. COTTLE, *Symmetric Dual Nonlinear Programs*, Operations Research Center, Univ. of. Calif. Berkeley, RR 30, December 1962.

[11] DANTZIG, G. B., A. ORDEN and P. WOLFE, The Generalized Simplex method for Minimizing a Linear Form under Inequality Restraints, *Pac. J. Math.*, **5** (1955), pp. 183—195.
[12] DENNIS, J. B., *Mathematical Programming and Electrical Networks*, Technology Press and John Wiley and Sons, New York, 1959.
[13] DORN, W. S., A Duality Theorem for Convex Programs, *IBM J. Res. Develop.* **4**, (1960), 407.
[14] DORN, W. S., A Symmetric Dual Theorem for Quadratic Programs, *J. Op. Res. Soc. of Japan* **2**, (1960), 93.
[15] DORN, W. S., Duality in Quadratic Programming, *Quart. Appl. Math.* **18**, (1960), pp. 155—162.
[16] DORN, W. S., Self Dual Quadratic Programs, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **9**, (1961), pp. 51—54.
[17] DUFFIN, R. J., *Infinite Programs, in Linear Inequalities and Related Systems*, ed. Kuhn-Tucker, Princeton 1956. pp. 157—170.
[18] EISENBERG, E., Duality in Homogeneous Programming, *Proc. Amer. Math. Soc.* **12**, (1961), pp. 783—787.
[19] FARKAS, J., Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, *J. Reine Angew. Math.*, **124**, (1902), pp. 1—24.
[20] FRANK, M. and P. WOLFE, An Algorithm for Quadratic Programming, *Nav. Res. Log. Qu.* **3**, (1956), pp. 95—110.
[21] GALE, D., *The Theory of Linear Economic Models*, Mc. Graw-Hill, New York, 1960.
[22] GASS, S. I., *Linear Programming*, Mc. Graw Hill, New York, 1958.
[23] GOLDMANN, A. J. and A. W. TUCKER, *Theory of Linear Programming*, *Linear Inequalities and Related Systems* (H. W. KUHN and A. W. TUCKER ed s.) Ann. of Math. Study 38., Princeton University Press, Princeton, pp. 53—97.
[24] GRAVES, R. L., A Principal Pivoting Simplex Algorithm for Linear and Quadratic Programming, *Op. Res.* **15**, (1967), No. 3., pp. 482—494.
[25] GRIESMER, J. H., A. J. HOFFMAN, and A. ROBINSON, On Symmetric Bimatrix Games, *IBM Research Report, June*, 1963.
[26] HAAR, A., A lineáris egyenlőtlenségekről, *Matematikai és Természettudományi Értesítő*, **36**, (1918), pp. 279—296.
[27] HAAR, A., Über lineare Ungleichungen, *Acta Sci. Math.*, **2**, (1924), pp. 1—24.
[28] HADLEY, G., *Linear Programming*, Addison-Wesley, 1963.
[29] HADLEY, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, 1964.
[30] HANSON, M. A., A Duality Theorem in Nonlinear Programming with Nonlinear Constraints, *Austr. J. Stat.* **3**, (1961), 64.
[31] HANSON, M. A., Duality and Self-Duality in Mathematical Programming. *J. Soc. Ind. Appl. Math. Vol.* **12**, (1964), No. 2, June.
[32] HANSON, M. A. and B. MOND, Quadratic Programming in Complex Space, *J. Math. Anal. Appl.*, **20**, (1967), 507—514.
[33] HUARD, P., Dual Programs, *IBM J. Res. Develop.*, **6**, 137 (1962).
[34] JOHN, F., *Extremum Problems with Inequalities and Subsidiary Conditions*, *Studies and Essays*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York, 1948.
[35] KARAMARDIAN, S., Strictly Quasi-Convex (Concave) Functions and Duality in Mathematical Programming, *J. of. Math. An. and Appl.* **20**, (1967), 344—358.
[36] KUHN, H. W., An Algorithm for Equilibrium Points in Bimatrix Games, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **47**, (1961), pp. 1657—1662.
[37] KUHN, H. W., and A. W. TUCKER, "Nonlinear Programming", in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Univ. of California Press, 1951. pp. 481—492.
[38] LEMKE, C. E., Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming, *Man. Sci.* **11**, (1965), 7.
[39] LEMKE, C. E., On Complementary Pivot Theory *RPI Math. Report* No. 75., July 1967.
[40] LEMKE, C. E., Orthogonality, Duality and Quadratictype Programming Problems in Mathematical Programming, AROSR, *RPI Math. Rep.* No. 56, June 1962.
[41] LEMKE, C. E. and F. T. HOWSON, Equilibrium Points of Bimatrix Games, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **12**, (1964), pp. 413—423.
[42] LEVINSTON, N., Linear Programming in Complex Space, *J. Math. Anal. Appl.* **14**, (1966), 44—62.
[43] MAJTHAY, A., On Complementary Pivot Theory, *Studia Sci. Math. Hung.* IV. (1969), pp. 213—224.
[44] MAJTHAY, A., On Basis Optimality in Linear Programming *Studia Sci. Math. Hung* IV. (1969), pp. 207—212,
[45] MANGASARIAN, O. L., Duality in Nonlinear Programming, *Quart. Appl. Math.* **20**, (1962), 300.

[46] MANGASARIAN, O. L., Equilibrium Points of Bimatrix Games, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **12**, (1964), pp. 778—780.
[47] MANGASARIAN, O. L. and J. PONSTEIN, Minmax and Duality in Nonlinear Programming, *J. Math. Anal. Appl.* **11**, (1965), 504—518.
[48] MANGASARIAN, O. L. and H. STONE, *Two Person Nonzero-Sum Games and Quadratic Programming*, Shell Development Company, Emeryville, California, Paper 1186.
[49] MEHNDIRATTA, S. L., General Symmetric Dual Programs. *Op. Res.* **14**, (1966), No. 1., pp. 164—172.
[50] MILLS, H., Equilibrium Points in Finite Games, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **8**, (1960), pp. 397—402.
[51] MOND, B., A Symmetric Dual Theory for Non-Linear Programs, *Quart. Appl. Math.*, **23**, (1965), No. 3., pp. 265—269.
[52] NASH, J., Non Cooperative Games, *Ann. of Math.*, **54** (1951), pp. 286—295.
[53] NEUMANN, J. and D. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 3d Edition, Princeton, 1953.
[54] PRÉKOPA, A., *Lineáris programozás*, a Bolyai János Matematikai Társulat Kiadványa 1968.
[55] ROCKAFELLAR, R. T., Duality and Stability in Extremum Problems Involving Convex Functions, *Pacific J. Math.*, **21**, (1967), 167—187.
[56] ROCKAFELLAR, R. T., Duality Theorems for Convex Functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70**, (1964), 189—192.
[57] ROSEN, J. B., The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **8**, (1960), pp. 181—207.
[58] SIMONNARD, M., *Programmation linéaire*, Dunod, Paris, 1962.
[59] STOER, J., On a Duality Theorem in Nonlinear Programming. *Numer. Math.*, **6**, (1964), 55—58.
[60] TUCKER, A. W., *Combinatorial Theory Underlying Linear Programs*, Recent Advances in Mathematical Programming (L. *Graves* and *P. Wolfe*, eds.), Mc. Graw-Hill, New York, 1963.
[61] TUCKER, A. W., *Dual Systems of Homogeneous Linear Relations*, (*H. W. Kuhn* and *A. W. Tucker* eds.), Ann. of Math. Study 38., Princeton University Press, Princeton, pp. 53—97. pp. 3—18.
[62] TUCKER, A. W., *Pivotal Algebra*, Seminar Notes by Torrence D. Parsons, Princeton University, 1967.
[63] TUCKER, A. M., Solving a Matrix Game by Linear Programming, *IBM J. Res. Devel*, **4**, (1960), pp. 507—517.
[64] VOROBJEV, N. N., Szituacii ravnoveszija v bimatricsnüh igrah, *Teorija verojatnosztej i ee primenenija*, **3**, (1958), Vüpuszk 3, 318—331.
[65] WOLFE, PH., A Duality Theorem for Nonlinear Programming, *Quart. Appl. Math.*, **19**, (1961), 239.
[66] WOLFE, PH., The Simplex Method for Quadratic Programming, *Econometrica* **27**, (1959), No. 3. 382—398.

(Beérkezett: 1969. V. 5.)

COMPLEMENTARY PIVOT THEORY

by

A. MAJTHAY

Summary

The complementary pivot algorithms were recently developed by DANTZIG, COTTLE, LEMKE and GRAVES. They deal with the solution of the following problem: Find nonnegative m-component vectors $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$, which satisfy the system (2.1.1)—(2.1.4).

This problem can be treated as a quadratic programming problem, but it seems more advantageous to seek for special algorithms which are based on the special structure of the problem.

The problem is closely related to the quadratic programming problem, to the pair of dual quadratic programs defined by DORN, to the symmetric dual pair of quadratic programs of COTTLE, to the self-dual quadratic programs, and to bymatrix games.

In the paper we are investigating three complementary pivot algorithms for the solution of the problem. They are treated combinatorially, are proved to be finite and to solve the problem for special stuctured matrices G. The algorithms are uniquely determined procedures, lexicographic rules guarantee the uniqueness of them. They consist essentially of a series of almost complementary, lexicographically feasible bases to the matrix $(G,-I)$ each one differing in exactly one vector from the previous one.

The first algorithm works for the class of co-positive-plus matrices which includes the class of semidefinit matrices which are not supposed to be necessarily symmetric, all matrices greater than a semidefinit matirx and all matrices not less than a positive definit matrix. A co-positive-plus matrix is a matrix G with the following properties: $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ implies $\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0$, and $\mathbf{z}^T G \mathbf{z} = 0$ implies $(G+G^T)\mathbf{z} = \mathbf{0}$. As the convex quadratic minimumproblem (concave quadratic maximumproblem) can be reduced to our problem with a positive semi-definit matrix, the first algorithm solves it or shows that it has no solution.

As an interesting corollary we mention the following theorem: if for a co-positive-plus matrix G the system $\mathbf{w} = G\mathbf{z}+\mathbf{g}$, $\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \geqq \mathbf{0}$ has a solution, then among its solutions there always exists at least one for that $\mathbf{z}^T\mathbf{w} = 0$.

The second algorithm is mainly a preparation to the third one, which is intended to solve a bymatrix games. It gives a solution for the bymatrix game in a finite number of steps and thus it gives a constructive proof for the existence of a NASH equilibrium point.

EGY ELHELYEZÉSI PROBLÉMAKÖRRŐL, I.

Írta: TÖLGYESI LÁSZLÓ

Varga Ottó akadémikus emlékére

1. Bevezetés

Legyen A egy halmaz, $B=\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ pedig egy, az A részhalmazaiból álló halmazrendszer, ahol Γ tetszőleges indexhalmaz. Legyen továbbá $K=K(A, B')$ egy A-ra és B'-re értelmes kijelentés, ahol B' a B-nek tetszőleges részrendszere. Legyen adva végül minden (A, B') párra értelmezett $f(A, B')$ valós függvény.

1. probléma. Mely (A, B') párok esetén lesz az $f(A, B')$ függvénynek (lokális vagy globális) szélsőértéke, azzal a feltétellel, hogy $K(A, B')$ logikai értéke igaz?

1. MEGJEGYZÉS. POGÁNY Csaba hívta fel a szerző figyelmét az 1. és 1. 1. problémákra, valamint a 2. problémával való kapcsolatra, miután a szerző az 1. 1. 1. és 1. 1. 2. problémákkal foglalkozni kezdett. Ennek megfelelően, ahol lehetett, az eredményeket a 2. probléma szempontjából is részleteztük, és néhány kezdő n-re megadtuk a választ egy korlátozó feltevés mellett.

Specializáljuk a problémát a következő módon: Legyen $i(B_j)$ a B_j halmaz belső pontjainak a halmaza, $|B'|$ a B' halmazrendszer számossága, A az euklideszi sík, B pedig az eukideszi síkon levő zárt halmazoknak egy olyan rendszere, amely minden E elemével együtt ennek összes *egybevágó* képét is tartalmazza. Legyen K a következőképpen értelmezve:

$$K=(|B'|=n)\,\&\,\big(i(B_k)\cap i(B_l)\big)=\varnothing,\quad k\neq l.$$

Legyen végül

$$f(A, B')=\sum_{i,j=1}^{n}\varrho(b_i, b_j),$$

ahol $b_i\in B_i$ és $b_j\in B_j$, és $\varrho(b_i, b_j)$ a b_i és b_j elem távolsága. Más szavakkal:

1. 1. probléma. Határozzuk meg a

$$\min_{\substack{B'\subset B\\ K=\uparrow}} f(A, B')=\min_{\substack{B'\subset B\\ K=\uparrow}}\sum_{i,j=1}^{n}\varrho(b_i, b_j)$$

szélsőértéket.

2. MEGJEGYZÉS. Érdekes problémákhoz juthatunk az előbbi *egybevágóság* helyett más transzformációk és megkötések bevezetésével.

Ha az 1. 1. problémát tovább speciálizáljuk úgy, hogy B az A sík egyetlen egyenlő oldalú háromszögének, illetve egyetlen négyzetének összes egybevágó képeiből álljon, ekkor kapjuk az alábbi 1. 1. 1. és 1. 1. 2. problémát.

1. 1. 1. probléma. Hogyan kell elhelyezni a síkon n darab egybevágó szabályos háromszöget a *legtömörebben*, azaz úgy, hogy $\sum_{i,j=1}^{n}\varrho(h_i, h_j)$ minimális legyen,

azzal a feltétellel, hogy $h_i \in H_i$, $h_j \in H_j$ $(i \neq j)$, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ a sík egybevágó szabályos háromszögei, és

$$i(H_j) \cap i(H_k) = \emptyset, \qquad j \neq k.$$

Általánosságban is bevezethetjük a következő fogalmat:

Definíció. Az olyan elrendezéseket, amelyekben a fenti távolságösszeg minimális, *legtömörebb* elrendezéseknek nevezzük.

1. 1. 2. probléma. Hogyan kell elhelyezni a síkon n darab egybevágó négyzetet a *legtömörebben*, azaz úgy, hogy $\sum_{i,j=1}^{n} (b_i, b_j)$ minimális legyen, ahol $b_i \in N_i$, $b_j \in N_j$ $(i \neq j)$, $N_1, N_2, \ldots, N_n$ a sík egybevágó négyzetei, és

$$i(N_j) \cap i(N_k) = \emptyset, \qquad j \neq k.$$

3. MEGJEGYZÉS. Egyvevágó körökre BENEDIKTI István vizsgálta az 1. 1. problémát. Rokon problémákkal foglalkozik az [1] cikk.

Definíció. A B' halmazrendszer B_i elemeit a következőkben *hordozóhalmaz*oknak nevezzük, a B_i hordozóhalmazhoz hozzárendelt b_i pontot $(b_i \in B_i)$ pedig *mérőpont*nak.

Ennek alapján mondhatjuk, hogy [1]-ben a mérőpontok a hordozóhalmazokban rögzítve vannak, míg ebben a dolgozatban olyan problémákat vizsgálunk, ahol a mérőpontok a hordozóhalmazokon belül szabadon mozoghatnak.

Az előbb már említett 2. probléma a következő:

2. probléma. a) Legyen adva egy B halmazrendszer E_n-ben. E halmazrendszer egyes részrendszereit alkotó halmazok bizonyos elemeinek egyesítése* útján hány egymással nem homeomorf halmazt lehet előállítani?

b) Adott B halmazrendszerhez az előbbi módon tartozik egy másik, csupa topologikusan különböző halmazból álló B^* rendszer. Kérdés: Adott B^* halmazrendszert mely B halmazok állítják elő? Egyéb megkötések mellett mi a legbővebb, illetve legszűkebb B adott B^*-hoz?

c) A B halmazrendszer és az azt alkotó elemek tulajdonságai hogyan befolyásolják a B^*-ot és az őt alkotó elemek tulajdonságait?

d) E problémáknak egy olyan általánosítása is érdekes, amikor több B, pl. B_1 és B_2 van megadva, és úgy vetjük fel az analóg a), b) és c) kérdéseket, hogy a homeomorfiát B_1, valamint B_2 vonatkozásban külön-külön vagy együttesen is vizsgáljuk.

4. MEGJEGYZÉS. Ismeretes FÁRY István tétele ([2]), mely szerint minden síkba rajzolható gráf realizálható a síkon oly módon, hogy csúcsainak pontok, éleinek zárt egyenesszakaszok felelnek meg úgy, hogy két szakasz közös pontja mindig csúcsnak megfelelő pont. Ez a tétel felfogható arra a kérdésre adott válaszként is, hogy mely síkra rajzolható gráfok építhetők fel egyenesszakaszokból? A 2. probléma ily módon gráfok geometriai realizációjának elméletével is kapcsolatos. Az itt szereplő vizsgálatoknál néhány legtömörebb elrendezésű esetben megadjuk azokat a gráfokat, amelyek egybevágó egyenlő oldalú háromszögekből és egybevágó négyzetekből építhetők fel úgy, hogy a szóban forgó sokszögek csúcsait eleve gráf csúcspontoknak tekintettük.

* Metszése, szimmetrikus különbség képzése vagy más (halmazelméleti) művelet végzése.

2. Általános megjegyzések

1. TÉTEL. *Tetszőleges* $B_1, B_2, \ldots, B_s$ $(s>1$, *egész) síkbeli zárt ponthalmaz-rendszerre igaz, hogy*

$$\sum_{i,j=1}^{s} \varrho(b_i, b_j) = 0, \qquad b_i \in B_i, \quad b_j \in B_j,$$

akkor és csak akkor, ha $\bigcap_{i=1}^{s} B_i \neq \emptyset$.

Bizonyítás:

a) Tegyük fel, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{s} B_i = \tilde{B} \neq \emptyset.$$

A feltétel alapján létezik legalább egy olyan $\tilde{b}$ pont a síkban, amelyre

$$\tilde{b} \in \tilde{B}.$$

Mivel $\tilde{b}$ a B_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ halmazok mindegyikének eleme, ezt a pontot választva közös mérőpontnak,

$$\sum_{j,i=1}^{s} \varrho_{ji}(\tilde{b}, \tilde{b}) = 0.$$

b) Ha $\sum_{i,j=1}^{s} \varrho(b_i, b_j)=0$, akkor a $\varrho(b_i, b_j)$ távolságok mind 0-val egyenlők, valamilyen $b_1, b_2, \ldots, b_s$-re $(b_i \in B_i, i=1, 2, \ldots, s)$. Ekkor viszont van olyan $\tilde{b}$, amelyre $\tilde{b} \in B_i$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, például $\tilde{b}=b_1$. Mivel ϱ metrika — azaz, ha $\varrho(x, y)=0$, akkor $x=y$ — ezért $b_1=b_i$ $(i=1, \ldots, s)$.

2. TÉTEL. *Adott a* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(n>1$, *egész) zárt síkbeli halmazrendszer; legyen*

$$\gamma(n) = \min \sum_{i,j=1}^{n} \varrho(b_i, b_j); \qquad b_i \in B_i, \quad b_j \in B_j,$$

és $i(B_j) \cap i(B_k) = \emptyset$, $(j \neq k)$. *Akkor* $\gamma(n)$ *az* n *monoton növő függvénye.*

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy van olyan n, hogy

$$\gamma(n+1) < \gamma(n).$$

Ekkor az $(n+1)$ elemből álló halmazból elvéve egy elemet, a megmaradt n elemű rendszer távolságösszege nem növekedett, mivel $\varrho(b_i, b_j) \geqq 0$. Tehát a megmaradt n elemű halmazrendszerre: $\gamma'(n) \leqq \gamma(n+1)$, azaz $\gamma'(n) < \gamma(n)$ lenne, ami ellentmond $\gamma(n)$ minimális voltának.

3. Egybevágó egyenlő oldalú háromszögek legtömörebb elrendezése

Legyen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ n darab egybevágó szabályos háromszög a síkban.

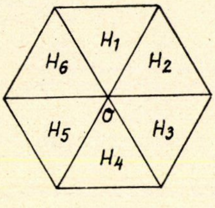
3. TÉTEL. *Ha* $2 \leqq n \leqq 6$, *létezik* $H_1, H_2, \ldots, H_n$*-nek olyan elrendezése, hogy*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varrho(h_i, h_j) = 0; \qquad h_i \in H_i, \quad h_j \in H_j,$$

és

$$i(H_j) \cap i(H_k) = \emptyset, \qquad j \neq k.$$

Bizonyítás:



1. ábra

a) Először $n=6$ esetben látjuk be az állítást. Ebből egyszerűen következik a $2 \leqq n < 6$ esetekre vonatkozó állítás. Tekintsünk a síkban egy szabályos hatszöget, ezt O középpontjából a csúcsokba húzott szakaszokkal bontsuk 6 egybevágó szabályos háromszögre, ezeket jelöljük $H_1, H_2, \ldots, H_6$-tal (1. ábra).

Ezekre nyilván

$$(1) \qquad i(H_j) \cap i(H_k) = \emptyset, \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, 6;\ i \neq j).$$

Mivel $O \in H_i$ $(i=1, 2, \ldots, 6)$, legyen $h_i = O$ $(i=1, 2, \ldots, 6)$, akkor nyilván

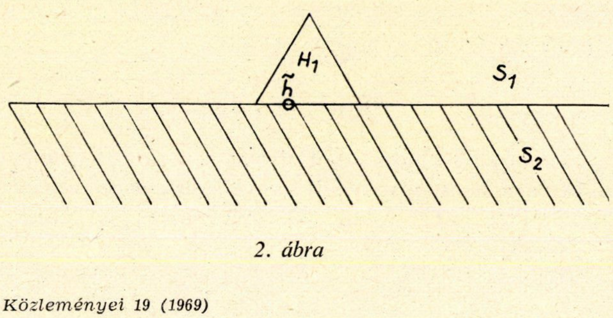
$$\sum_{i,j=1}^{n} \varrho(h_i, h_j) = 0.$$

5. MEGJEGYZÉS. Az 1. ábra szerinti elrendezésben a szabályos háromszögek O csúccsal szemközti oldalai szabályos hatszöget határoznak meg, hiszen abból indultunk ki. Bebizonyítjuk, hogy ez az egyetlen elrendezés, amelynél

$$\bigcap_{i=1}^{6} H_i = \tilde{H} \neq \emptyset, \quad \text{és (1) is fennáll,}$$

azonkívül $\tilde{H}$-nak egyetlen eleme van, így az extrémumot adó mérőpontok is egyértelműen választhatók meg.

Tegyük fel ugyanis, hogy létezik a fentitől különböző elrendezés, ahol $\tilde{H} \neq \emptyset$, és (1) teljesül. Legyen $\tilde{h} \in \tilde{H}$. Nyilvánvaló, hogy $\tilde{h}$ csak határpont lehet, és nem lehet mindegyik háromszögben csúcspont. Ekkor H_i-k között van legalább egy, mondjuk H_1, amelynek $\tilde{h}$ nem csúcspontja, következésképpen valamely oldalának belső pontja (2. ábra).



2. ábra

A $\tilde{h}$ ponton átmenő oldalegyenes a síkot két 180°-os, $\tilde{h}$ csúcspontú szögtartományra bontja (S_1 és S_2). Az ábrából nyilvánvaló, hogy H_2, H_3, H_4, H_5 és H_6 szabályos háromszögek csak S_2-ben helyezkedhetnek el, ami lehetetlen oly módon, hogy

$$\bigcap_{i=1}^{6} H_i = \tilde{h} \quad \text{legyen.}$$

b) Ha $2 \leqq n < 6$, akkor (az 1. ábrán látható) hat szabályos háromszögünk közül hagyjunk el $(6-n)$ darabot. O ez esetben is a megmaradó n szabályos háromszög közös mérőpontjának vehető, tehát

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varrho(h_i, h_j) = 0,$$

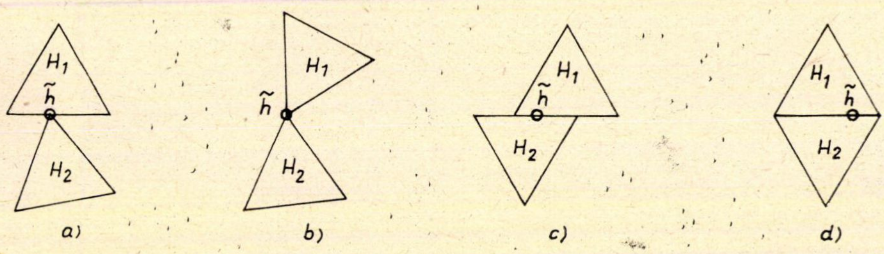
amivel a 3. tétel bizonyítását befejeztük.

Az elrendezés egyértelműségét $n=6$ esetben az 5. MEGJEGYZÉSben beláttuk. Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy ha $2 \leqq n < 6$, mely esetekben lesz

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varrho(h_i, h_j) = 0.$$

Nyilvánvalóan elégséges és szükséges is, hogy a mérőpontokat a határpontok halmazán mozgassuk. Adott n esetén egy ábrasorozattal adjuk meg a „topologikusan különböző", azaz *nem homeomorf* elrendezéseket, választ adva a 2. problémára ezekben a speciális esetekben.

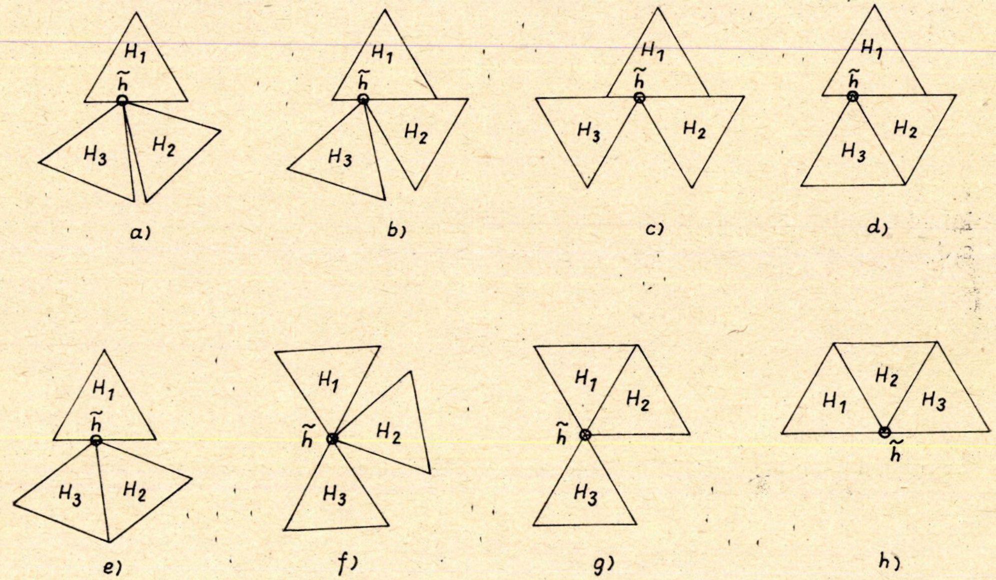
1. *Szabályos háromszögek nem homeomorf elrendezései $n=2$ esetén:*



3. *ábra*

Könnyű belátni, hogy a 3. ábra a), b), c) és d) típusú elrendezésén kívül nincs több nem homeomorf elrendezés. Az is világos, hogy mind a négy esetben végtelen sok homeomorf elrendezés van, ahol $\tilde{h} \in \tilde{H} = H_1 \cap H_2$. A c) és d) típusú elrendezésekben $\tilde{H}$ végtelen sok elemű halmaz, melynek bármely pontja választható közös mérőpontnak.

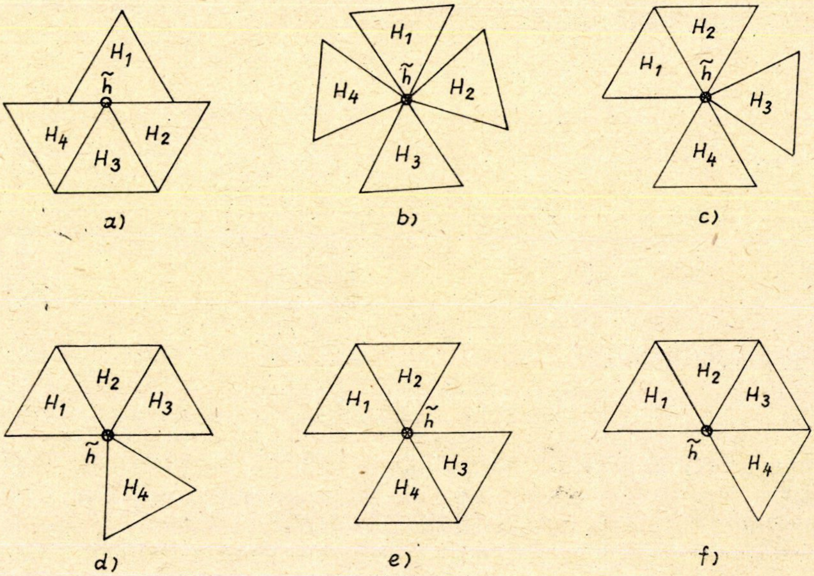
2. *A nem homeomorf elrendezések az* $n=3$ *esetben:*



4. ábra

Könnyű belátni, hogy a h) eset kivételével bármelyik végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

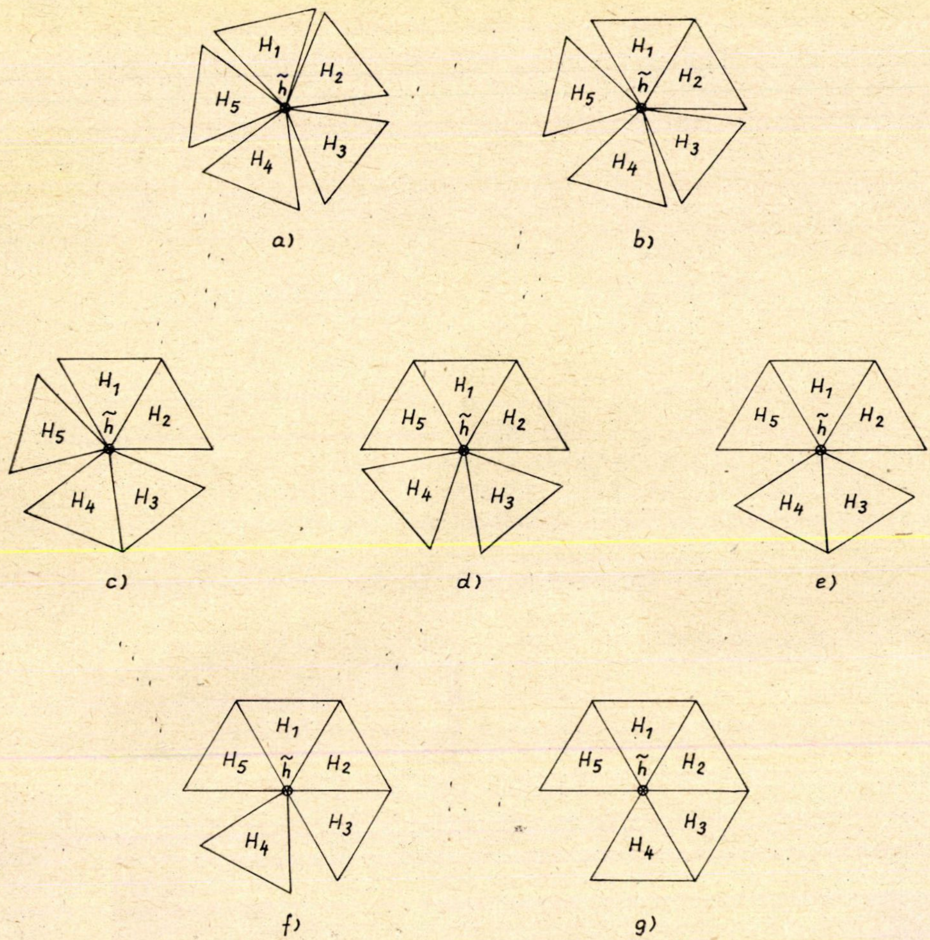
3. *A nem homeomorf elrendezések* $n=4$ *esetén:*



5. ábra

Ez esetben is könnyű belátni, hogy az f)-et kivéve mindegyik eset végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

4. *A nem homeomorf elrendezések $n=5$ esetén:*

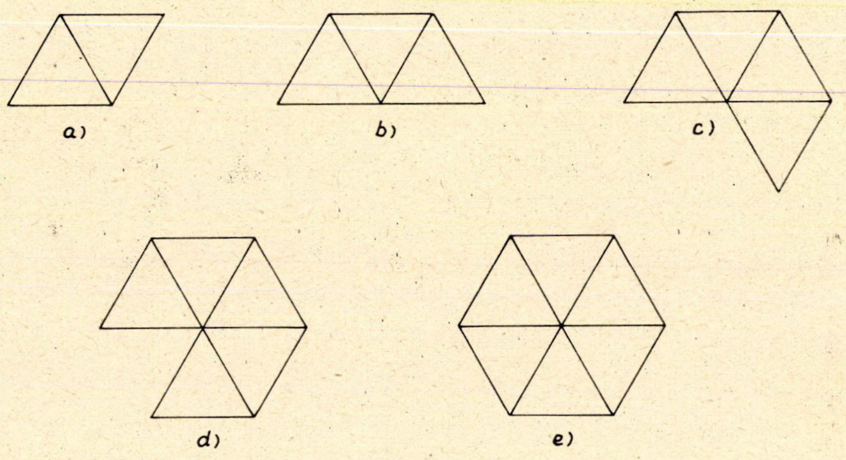


6. ábra

g) kivételével mindegyik nem homeomorf eset végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

6. MEGJEGYZÉS. A fent bemutatott extremális elrendezések minden eddig tárgyalt n-nél lehetővé tették a háromszögek rácsos elrendezését, mint azt a 7. ábra sorozata mutatja.

Ez azt sejteti, hogy az extremális elrendezések rácsosak lennének. Nagyobb n esetén a sejtett extremális elrendezések azonban nem lesznek mindig rácsosak (l. az Összefoglalást, $n=7, 8, 9$).



7. *ábra*

7. MEGJEGYZÉS. A bevezetésben utaltunk rá, hogy az egybevágóság helyett más síkbeli transzformációt is tekintetbe vehetünk az 1. 1. 1. problémánál. Így újabb problémákat kapunk, ha pl. a szabályos háromszögekről nem kötjük ki, hogy egybevágók legyenek. Ekkor, ha $2 \leqq n \leqq 6$, szabályos (de nem szükségképpen egybevágó) háromszögek esetén egyszerűen megmutatható, hogy

$$\gamma(n) = \min \sum_{i,j=1}^{n} \varrho(h_i, h_j) = 0,$$

azonban az egymással nem homeomorf esetek száma növekedni fog.

4. Egybevágó négyzetek legtömörebb elrendezése

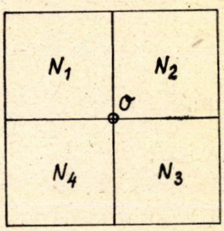
Hasonló gondolatmenetet követünk, mint a szabályos háromszögek vizsgálatánál.

Legyenek $N_1, N_2, \ldots, N_n$ a sík egybevágó négyzetei ($n > 1$, egész).

4. TÉTEL. *Ha* $2 \leqq n \leqq 4$, *létezik olyan elrendezés, hogy*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varrho(b_i, b_j) = 0; \qquad b_i \in N_i, \quad b_j \in N_j,$$

és $\quad i(N_j) \cap i(N_k) = \emptyset, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, 4, \quad j \neq k.$



8. *ábra*

Bizonyítás:

a) Tekintsük a sík egy négyzetét, és kössük össze a szemközti oldalfelező pontjait. Ilymódon 4, egy közös csúcsponttal (O) rendelkező egybevágó négyzetet kapunk (8. ábra).

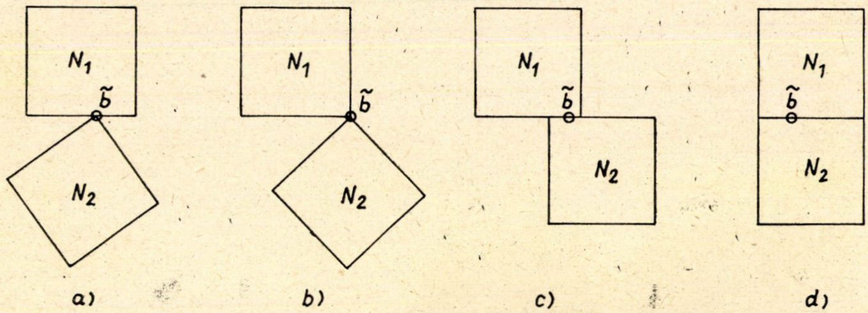
Mivel $O \in \tilde{N} = \bigcap_{i=1}^{4} N_i$, az 1. tétel értelmében O-t közös mérőpontnak választva, az állítás teljesül.

8. MEGJEGYZÉS. A 8. ábra szerinti elrendezés egyértelműsége hasonlóan bizonyítható, mint a szabályos háromszögeknél.

b) Ha $2 \leqq n < 4$, akkor a 8. ábra elrendezéséből hagyjunk el $(4-n)$ négyzetet, és O ismét a megmaradó négyzetek közös mérőpontjának választható.

Az alábbiakban megvizsgáljuk n darab egybevágó négyzet nem homeomorf elrendezéseit, ha $2 \leqq n < 4$.

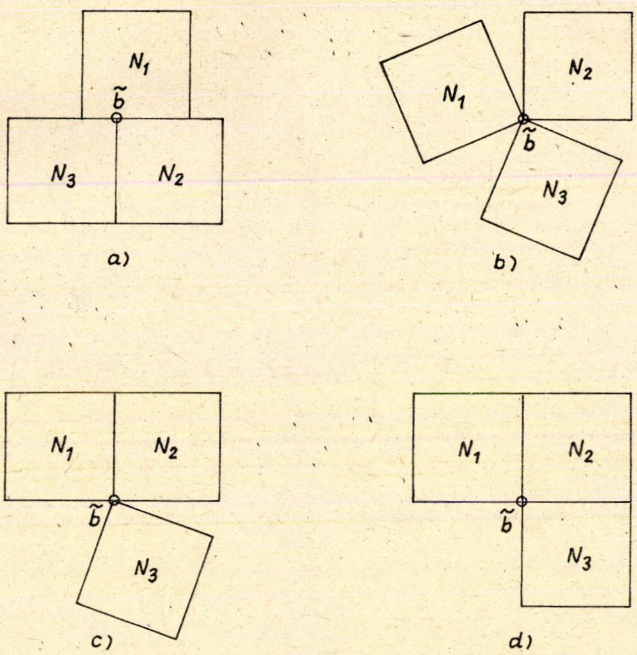
1. *A nem homeomorf elrendezések $n=2$ esetén:*



9. ábra

Könnyen belátható, hogy mind a 4 eset végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

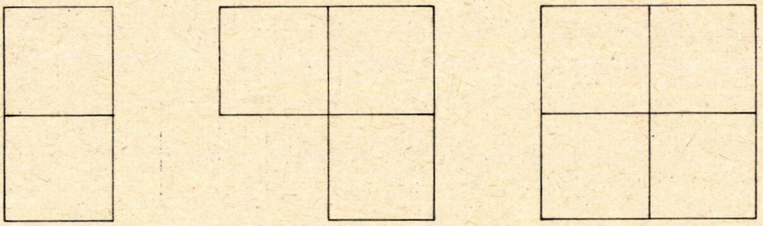
2. *A nem homeomorf elrendezések $n=3$ esetén:*



10. ábra

d) kivételével mindegyik eset végtelen sok homeomorf elrendezést enged meg.

9. MEGJEGYZÉS. A fenti elrendezések között minden n-re van rácsos elrendezés (11. ábra). A sejthetően extremális elrendezések $n=5$ és $n=6$-ra még igazolni látszanak ezt, nagyobb n-re azonban a sejtett extremális elrendezések nem rácsosak. (L. az Összefoglalásban: $n=7$-nél.)

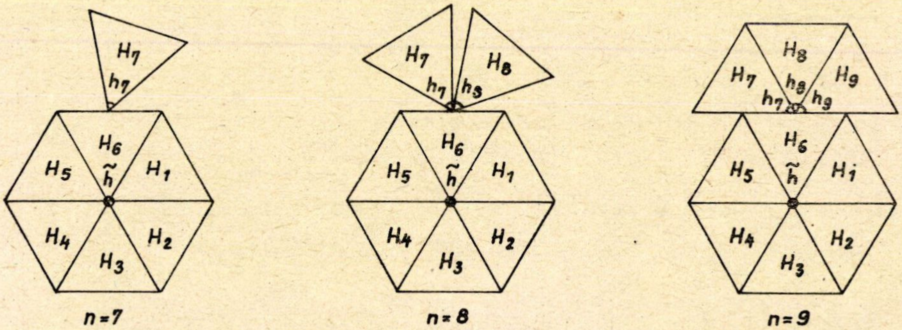


11. ábra

5. Összefoglalás

A cikk két speciális probléma kezdeti lépéseivel foglalkozik, szabályos háromszögeknél $n=6$-ig, négyzeteknél pedig $n=4$-ig ér el egyszerű eredményeket. Az ezeknél nagyobb n-re egzakt választ még nem sikerült adni, mivel a számolási nehézségek nagyobb n-ek esetén jelentősen megnövekednek. Az alábbiakban azonban felvázolunk még néhány sejthetően extremális vagy extremálishoz közel álló elrendezést.

Az 1. 1. 1. problémával kapcsolatban az alábbiak sejthetően extremális elrendezések:



12. ábra

a) esetben $\gamma(7) \leqq \sum_{i,j=1}^{7} \varrho(h_i, h_j) = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot a = a \cdot 10{,}3920\ldots$

b) esetben $\gamma(8) \leqq \sum_{i,j=1}^{8} \varrho(h_i, h_j) = 12 \cdot \sqrt{3} \cdot a = a \cdot 20{,}7840\ldots$

c) esetben $\gamma(9) \leqq \sum_{i,j=1}^{9} \varrho(h_i, h_j) = 18 \cdot \sqrt{3} \cdot a = a \cdot 31{,}1760\ldots$

ahol a a szabályos háromszög oldalának hossza.

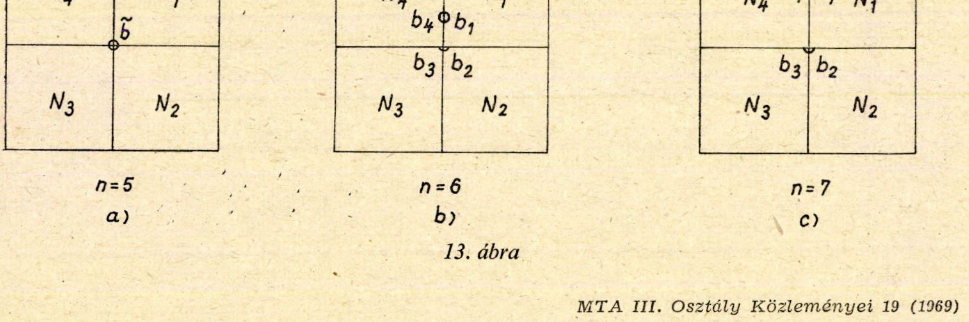
Az 1. 1. 2. problémával kapcsolatban a sejthetően extremális vagy extremálishoz közel álló elrendezések:

Ha a a négyzet oldalhosszúsága, akkor

a) esetben $\gamma(5) \leqq \sum_{i,j=1}^{5} \varrho(b_i, b_j) = 8 \cdot a$

b) esetben $\gamma(6) \leqq \sum_{i,j=1}^{6} \varrho(b_i, b_j) = 16 \cdot a;$

b_1 és b_4 az N_1 és N_4 közös oldalán bárhol felvehető.



13. ábra

c) esetben $\gamma(7) \leqq \sum_{i,j=1}^{7} \varrho(b_i, b_j) = a \cdot 28{,}4076\ldots$

Az alábbi táblázatban összefoglaljuk a 2. problémával kapcsolatos eredményeket:

	Egybevágó szabályos háromszögek	Egybevágó négyzetek
n	A nem homeomorf gráfok száma	A nem homeomorf gráfok száma
1	1	1
2	4	4
3	8	4
4	6	1
5	7	
6	1	

A dolgozat jelen első részében fő célunk a témakör problematikájának vázolása volt. Az itt szerepeltetett triviális konstrukciók tárgyalását az indokolja, hogy ezeknek a továbbiakban jelentős szerepük lesz.

IRODALOM

[1] BENEDEKTI ISTVÁN: Halmazrendszerek extremális tömörségű elrendezéseivel kapcsolatos problémák, I. *MTA III. Oszt. Közl.* **19** (1969), 3—4.
[2] FÁRY ISTVÁN: On straight line representation of planar graphs, *Acta Sci. Math.* **11**, (4), (1948), 229—233.

(Beérkezett: 1969. VI. 9.)

NÉHÁNY IDŐSZERŰ KÉRDÉS SZÁMOLÓGÉPEKKEL KAPCSOLATBAN, I.

Írta: POGÁNY CSABA

Varga Ottó akadémikus emlékére

I. Extremális programok*

1. Bevezetés

Érdekes és paradox az a jelenség, hogy az „operációkutatás" — nyugodtan nevezhetjük *optimalizáláselméletnek* — mind a mai napig nem jutott el addig, hogy vizsgálja az optimális megoldások megkeresésének optimális útjait. Arról nem is beszélve, hogy esetleg az volna az „optimális", ha az optimalizálandót és az optimalizáló tevékenységet együtt tekintenék optimalizálandó rendszernek.

Nem ismeretes e témakörnek egyetlen akár csak említésre méltó, alkalmazható eredménye sem. Különösen kirívó és érzékeny hiányosság az „operációkutatásnak" a számológéppel kapcsolatos szinte teljes kiépítetlensége — és ez éppen olyan időkben, amikor minden operációkutató szinte naponta „operál" számológéppel.

Az itteni, extremális programokkal kapcsolatos fejtegetéseknek az a fő célja, hogy ráirányítsa a figyelmet erre a fontos problémakörre.

2. Nehézségek

Az optimalitás definiálása rendkívül bonyolult probléma. Valószínű, hogy a valóságos élet kérdéseiben nem is fogalmazható meg pontosan e fogalom. A tudományos kutatás céljaira szimplifikált „valóság modellek" esetében egy-egy konkrét folyamatra azonban sokszor megadhatók optimalitási szempontok és kritériumok.

Komoly nehézség lép fel azonban akkor, ha egy folyamatot többféle szempontból kell optimalizálni. E „dimenziós" probléma egzakt eszközökkel nem is oldható meg (ha megoldható volna, akkor lényegében nem volna dimenziós jellegű). Mégis válaszolni kell, mi legyen az optimalitás-kiválasztási politika: hogyan kell „átszámítani" egyik dimenziót a másikba? Tovább súlyosbodnak a nehézségek, ha figyelembe kell venni még azt is, hogy az előbbi kérdést időben lejátszódó folyamatokra kell (kellene) megoldani.

3. Szuboptimumok

Fontos, de teljesen elhanyagolt terület az alábbi. Eddig az optimalizációs vizsgálatok többsége úgy folyt le, hogy felmerült egy probléma, amelynek megoldására bizonyos erőforrások álltak rendelkezésre. Elkezdtek „optimalizálni" és folytatták ezt az erőforrások kimerüléséig. Nem vizsgálták azt, hogy az optimalizálásra fordítandó erőket hogyan célszerű felosztani az optimalizált terület és az optimalizáló apparátus között; nem vizsgálták, hogy mennyire kell optimalizálni magát az optimalizálási területet és mennyire az optimalizáló apparátust. Mihelyt

* Ez a dolgozat lényegében a szerzőnek „*A számítástechnika alkalmazásai új tudományterületeken*" című kollokviumon 1969. június 4-én tartott előadását tartalmazza.

ennek a vizsgálatába kezd azonban valaki, azonnal tovább bővül az optimalizálandó rendszer: meg kell mondani, hogy milyen legyen az erőforrások felosztása, most már

1. az (eredetileg egyedül) optimalizálandó terület,
2. az 1-et optimalizáló apparátus,
3. az erőforrások 1 és 2 közötti „optimális" felosztását végző apparátus között.

Ha erre választ adunk, akkor ez is erőforrásokat igényel, amit fedezni kell valamiből, tehát a fenti 3. pont mellé egy negyedik lép, amely az erőforrások 1, 2, 3 közötti felosztását végző apparátusra vonatkozik, és ez így bővülne a végtelenségig. Megállni azonban célszerű valahol. Mi ennek a paradoxon jellegű problémának az egzakt megközelítése? Vagy másképp: mi az „optimális" szuboptimum?

4. Szuboptimumok számológépeknél

Az itt következő minden kérdés valójában több kérdésre bontható aszerint, hogy a szóban forgó számológépnek hány műveletvégző egysége működhet párhuzamosan és hány program futtatása bonyolítható le egyidejűleg. E részproblémák megfogalmazása azonban helykímélés végett az olvasóra marad.

4. 1. Hely szuboptimum

Mi azoknak a („külső", „belső" stb.) tároló rekeszeknek a minimális (maximális, átlagos stb.) száma, amelyeken egy adott feladatot elvégző program elfér?

4. 2. Idő szuboptimum

Mi az a minimális (maximális, átlagos stb.) idő, amelynek elteltével adott feladatra készült program eredményesen lefut?

4. 3. Megbízhatósági szuboptimum

Ismeretes, hogy a számológépek különböző részei más-más megbízhatósággal dolgoznak. Mi az elérhető maximális (minimális, átlagos stb.) megbízhatóság?

4. 4. Pontossági szuboptimum*

Mi egy adott funkciójú programnál a fellépő maximális (minimális, átlagos) pontosság?

* A legtöbb numerikus eljárás konvergenciáját, végességét, hibakorlátait stb. csak valós számokra, a valós számtest műveleti azonosságainak felhasználásával bizonyították. A legtöbb digitális számológép azonban nem valós számtesttel, hanem diadikus racionális számok egy részhalmazával dolgozik, és olyan, hogy a benne előállítható diadikus racionális számok halmazának elemei a valóssal analóg műveletekre nem alkotnak testet. (Sok esetben pl. nincs értelme a disztributív azonosságnak, vagy ha van is, akkor sem mindig igaz; vagy például az (a/b) b általában nem lesz mindig a-val egyenlő stb.) A valós számokra és a valós testbeli műveletekre vonatkozó algoritmusokat valós algoritmusoknak nevezve kimondható tehát, hogy valósan konvergens vagy véges algoritmus nem szükségképpen lesz konvergens, illetve véges, ha a benne szereplő számokat és műveleteket konkrét számológépi megfelelőikkel helyettesítik. Ténylegesen sok, valósan konvergens vagy véges algoritmus — a közhittel ellentétben — nem lesz konvergens illetve véges, ha eredeti formájában számológépi megvalósítására kerül sor, a valósban kiszámított hibakorlátok érvényességéről nem is beszélve.

Ebben a dolgozatban konvergencián, végességen, pontosságon stb. a *gyakorlatilag* valóságos (számológépen realizált, illetve realizálható) konvergencia-, végességi-, pontossági- stb. jelenségeket kell érteni.

4. 5. *Információs szuboptimumok*

Az összes itt felvetett kérdés egy információfeldolgozási folyamatra vonatkozik. A következőkben azonban a folyamatnak időbeli lefolyásán van a hangsúly. Mi az optimális információbemeneti tárolási, kihozatali forma?

Itt egy bizonyos információmennyiség időben lefolyó bevitele, feldolgozása és kiadása a vizsgált folyamat. Az információ kihozatala is időben történik, nem egyforma sebességgel. Mi az optimális időbeli ütemezés?

Minden információfeldolgozási folyamatot ellenőrizni szoktak. Ellenőrzési szempontból mely folyamatok (programok) az optimálisak?

Szintaktikus és szemantikus hibamegkeresési szempontból melyek az optimális információfeldolgozási rendszerek (programozási nyelvek, programszerkesztési elvek stb.)?

5. További problémák

A következőkben felsorolt problémák az információfeldolgozási folyamat egy szakaszának néhány jellemzőjével kapcsolatosak. Ahhoz, hogy e tudományterületet eredményesen lehessen művelni, e jellemzők közötti legfontosabb összefüggéseket kell először felderíteni.

Ha az olvasó figyelmesen végignézi a fenti problémákat, megállapíthatja, hogy szigorúan véve egyiknek sincsen értelme. Mindegyikhez hozzá kell még venni a korlátozó feltételeknek egy halmazát, hogy a feladatok értelmessé váljanak. Könnyen belátható azonban, hogy a megemlített öt szemponton kívül még mások is vannak (pl. egy információfeldolgozási folyamat megszakíthatósága, az általa felhasznált algoritmus, utasításkészlet, a folyamat végrehajtásának ára stb.). Ezenkívül a fenti szempontok szerint sem állandók egy folyamat jellemzői (például egy program helyfoglalása időben változhat).

Csupán mintának álljon itt egy pontosabban megfogalmazott probléma. (Az olvasó érdekes problémák gazdag sokaságát nyerheti, midőn a jellemzők egy részét korlátozva más jellemzők extremális értékeit keresi.)

Adott bemenőadat-sorozat mellett, adott helyen, adott megbízhatósággal mely algoritmus adja a legpontosabb eredményt? (Tudott dolog, hogy a számológép műveletei nem tekinthetők pontosaknak. Ennek ellenére pontosaknak feltételezve őket, ugyanarra a célra szolgáló számolási folyamatok végén kapott eredmények valójában különböző pontosságúak lehetnek. A probléma ekkor e „pontossági" hipotézis mellett is megfogalmazható.)

Elméletileg és gyakorlatilag is érdekes probléma egy információfeldolgozási folyamatot egyértelműen meghatározó feltételrendszerek megadása is. (Tágabban: „egyenletek" megoldása információfeldolgozási folyamatokra mint ismeretlenekre.)

Végezetül még néhány gyakorlati szempontból fontos problémára hívjuk fel a figyelmet.

Vannak-e olyan programtranszformációk, amelyekkel pl. egy program lefutási ideje csökkenthető, esetleg a helyigény növelésével vagy fordítva. Általában lehet-e eljárásokat adni, amelyeknek segítségével a számolási folyamatnak valamely jellemzője adott irányban megváltoztatható?

Keresendők abszolút (és relatív) korlátok arra vonatkozóan, hogy egy számolási folyamat adott jellemzője legalább és legfeljebb mennyi? (Pl. adott feladat elvégzése adott kódrendszer és műveleti idők mellett, adott tárolórekesz-mezőn legalább és legfeljebb mennyi időt igényel?)

Hogyan lehet a számolási folyamatok jellemzése révén a számológépek globális jellemzését megközelíteni, azaz választ adni arra a kérdésre, hogy „melyik gép a jobb?" (Ez a probléma összefügg az optimális kódrendszer problémájával, annak szélső eseteként is felfogható.)

(Beérkezett: 1969. VI. 24.)

EGYENLŐTLENSÉGEK NUMERIKUS BIZONYÍTÁSA, I.*

Írta: RUDA MIHÁLY

In memoriam Ottó Varga (1909—1969)

1. Bevezetés

A nagy sebességű és nagy kapacitású elektronikus számológépek megjelenésével elvileg új lehetőségek nyíltak meg a matematika elméleti továbbfejlesztésének területén. Egy ilyen lehetőség matematikai tételek, állítások gépi segítséggel történő bizonyítása. Bizonyításon Hilbert-féle értelemben vett (l. [3]) bizonyítást értünk. Az utóbbi időben olyan, gépre alkalmazható bizonyítási eljárásokat is kidolgoztak, melyek segítségével nem csak a bizonyítás egyes részfeladatai oldhatók meg, hanem amelyek lehetővé teszik matematikai tételek bizonyításának teljes automatizálását — elvileg.

Bár CHURCH tétele szerint a formalizált matematikán belül nincs univerzális eldöntési eljárás, mégis vannak már olyan bizonyítási módszerek, melyek teljesnek mondhatók azon az alapon, hogy valahányszor egy *igaz* tétellel kerülünk szembe, mindannyiszor lehetővé teszik egy bizonyítás előállítását. Ilyen, különböző bizonyítási eljárások kidolgozásában értek el eredményeket többek között GELERNTER [2] és NEWELL [5], illetve DAVIS [1], PRAWITZ [6] és ROBINSON [7].

Ezen a területen elért eredmények összefoglalását adja MELTZER egy 1968-as dolgozata [4], melyben különböző tételbizonyítási eljárások szerepelnek.

Ezek a bizonyítási módszerek a vizsgált matematikai részterület formalizálásával, nagyszámú logikai művelet elvégzésén keresztül adják a kérdéses tétel bizonyítását. A kidolgozott módszerek azonban még elég nehézkesek és végrehajtásuk rendkívül időigényes. Ezek a hátrányok éppen abból erednek, hogy a fenti módszerek általános jellegűek.

POGÁNY CSABA hívta fel a szerző figyelmét arra, hogy automatizált bizonyítási eljárások nemcsak általános formában — logikai módszerek segítségével —, hanem speciális matematikai részterületeken is alkalmazhatók, például függvények közti egyenlőtlenségek bizonyításánál. Ugyanakkor felvetette azt a kérdést is, hogy ezen a speciális területen kívül, általában melyek azok a feladattípusok, ahol szintén lehetőség nyílik egzakt bizonyítási módszerek automatizált alkalmazására.

A következőkben néhány általános jellegű megjegyzés után konkrét numerikus módszerek szerepelnek, melyek függvények közti egyenlőtlenségek bizonyítására szolgálnak. Ezek a módszerek, és általában az automatizált bizonyítási módszerek a következő általános elv szerint működnek:

Adott egy véges számú elemből álló H halmaz, az *alaphalmaz*. Ennek a halmaznak az elemeiből egy adott A algoritmus alapján képezünk egy újabb G halmazt

* Ez a dolgozat a szerzőnek „*A számítástechnika alkalmazása új tudományterületeken*" című kollokviumon 1969. június 5-én tartott előadását tartalmazza.

$(G = A(H))$. Nevezzük ezt *generált* halmaznak! Ezután a G halmazt, illetve annak elemeit vizsgáljuk valamilyen előre adott szempont szerint.

A bizonyítási eljárást mint egy automatizált folyamatot tekintve elmondható, hogy a H alaphalmaz az automatába bemenő paraméterek (jelek) halmaza, az A algoritmus magának az automatának, vagyis a megfelelően programozott számológépnek felel meg, míg a generált halmaz a kimenő jelekből áll. Ezután a sorra jövő vizsgálat számára a G halmaz már mint bemenő halmaz szerepel. Ennek viszont már csak egyetlen kimenő eleme van, mely jelezheti a tétel igazságát vagy hamisságát.

Ezeken a bizonyítási eljárásokon belül még kétféle típust választhatunk szét:

1. Az alaphalmazból kiindulva egy egyértelműen meghatározott G halmazt képezünk egy rögzített algoritmus szerint. Ennek a G halmaznak az előállítása után végezzük el a kitűzött vizsgálatot, melynek eredménye az általunk bizonyítandó tétel igazságát vagy hamisságát mutathatja.

Előfordulhat azonban, hogy az eljárás véghezvitele után sem tudjuk a tétel igazságát vagy hamisságát kimutatni.

2. Az alaphalmazból generált halmaz minden egyes elemének előállítása után elvégezzük a vizsgálatot és az újabb elem előállítása a vizsgálat eredményének függvényében történik.

Ebben az esetben nincs biztosítva az algoritmus véges volta.

Tekintsünk ezután egy konkrét példát! A kiindulási H halmaz lehet például egy axiómarendszer axiómáinak, illetve azokból levezethető néhány tételnek a halmaza. Ezen halmaz elemeiből — melyeket megfelelő módon formalizáltunk — logikai műveletek segítségével újabb kijelentéseket képezünk, melyek a G halmazt fogják alkotni. Ezeknek a kijelentéseknek a halmazán belül keressük aztán azt a kijelentést, amelyet előre megadtunk és bizonyítani szeretnénk.

Természetesen nemcsak kijelentéseket, hanem tetszőleges más objektumokat — például számértékeket — is vizsgálhatunk ilyen módon. Általában a kimondott (vagyis a bizonyítandó) tétel éppen ezeknek az objektumoknak valamilyen tulajdonságával kapcsolatos. Az előző esetben ez a tulajdonság egyszerűen egy előre adott objektummal (a bizonyítandó tétellel) való azonosság: ha a generált elemek között megtaláljuk a bizonyítandó kijelentéssel azonos állítást, akkor kijelentésünk igaz, ha az ellentettjét, akkor hamis.

Előfordulhat, hogy nem az egyes elemeket, hanem az egész generált halmazt vizsgáljuk, például olyan szempontból, hogy hány elemből áll.

Ezek után már rátérünk a függvények közti egyenlőtlenségek bizonyításánál használható eljárások vizsgálatára.

2. Bizonyítási eljárások szerkezete egyenlőtlenségek vizsgálatánál

Vizsgálunk tehát egy $f(x) > g(x)$ $x \in M$ egyenlőtlenséget. (Az $f(x)$ és $g(x)$ egy tetszőleges korlátos és zárt M halmazon értelmezett valós függvény.)

A H alaphalmazba az M értelmezési tartományt meghatározó elemek, a függvények helyettesítési értékeinek kiszámításához szükséges paraméterek, a számítás pontosságát jellemző ε érték, valamint még néhány, a függvényekre jellemző adat — például a deriváltakra adható korlátok — tartozik. Ezeknek az elemeknek a segítségével a megfelelő módon — véges sok (n) részre — felosztott értelmezési tartomány minden egyes részén egy alsó becslést adunk a nagyobbnak feltételezett $f(x)$

függvényre, illetve egy felső becslést a kisebbnek feltételezett $g(x)$ függvényre. Az így nyert függvények alkotják a G generált halmazt:

Ha $\bigcup_{i=1}^{n} M_i \supseteqq M$ és $f_i(x) < f(x)$, $g_i(x) > g(x)$ $(x \in M_i)$, akkor legyen

$G = \{f_i(x),\ g_i(x);\quad i = 1, 2, \ldots, n\}$.

A vizsgálat abból áll, hogy megnézzük, minden i-re igaz-e az $f_i(x) > g_i(x)$ $x \in M_i$ reláció.

Ha valóban minden i-re teljesül az egyenlőtlenség, akkor a tétel, azaz a bizonyítandó egyenlőtlenség is igaz, ha nem, akkor még nem feltétlenül hamis az állítás (vagyis az egyenlőtlenség), hiszen itt csak becslésekről van szó.

Ilyen bizonyítási eljárásokon belül az $f_i(x)$ és $g_i(x)$ függvények meghatározásakor a következő konkrét becslések alkalmazhatók.

3. Néhány becslési eljárás

Elsőként egy $[a, b]$ zárt intervallumon differenciálható $f(x)$ és $g(x)$ függvény közti

$$f(x) > g(x) \qquad x \in [a, b]$$

egyenlőtlenség bizonyításának módszerével foglalkozunk.

Ha ismerjük az $[a, b]$ intervallumon a két függvény deriváltjára adható korlátokat, melyek:

$$K_1 > f'(x) > k_1, \quad K_2 > g'(x) > k_2, \qquad (x \in [a, b]),$$

akkor kiszámítva egy x_i pontban $(x_i \in [a, b])$ az $f(x)$ és $g(x)$ függvények értékeit, lineáris függvényekkel becsülhetjük a két függvényt. (Ezek a lineáris függvények lesznek a G halmaz elemei.)

A becslési eljárás a következő egyenlőtlenségeken alapszik:

Ha $f(x) > g(x)$ és $\Delta x > 0$ $(x, x + \Delta x \in [a, b])$ és ha

$$\Delta x < \frac{f(x) - g(x)}{K_2 - k_1}, \tag{1}$$

akkor $f(x + \vartheta\Delta x) > g(x + \vartheta\Delta x)$ is igaz, ahol $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ tetszőleges rögzített érték (1. ábra).

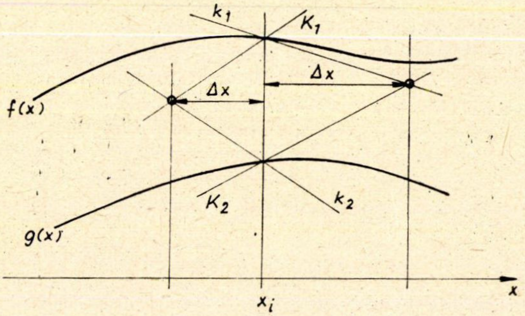
Hasonlóan, ha $f(x) > g(x)$ és $\Delta x < 0$ $(x, x + \Delta x \in [a, b])$ és ha

$$\Delta x > \frac{f(x) - g(x)}{k_2 - K_1}, \tag{2}$$

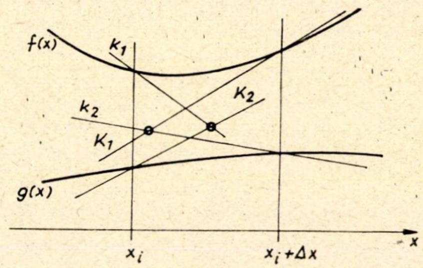
akkor $f(x + \vartheta\Delta x) > g(x + \vartheta\Delta x)$, ahol $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ (1. ábra).

Végül, ha $0 < \Delta x$ olyan, hogy

$$\frac{f(x) - g(x)}{K_2 - k_1} + \frac{f(x + \Delta x) - g(x + \Delta x)}{K_1 - k_2} > \Delta x, \tag{3}$$



1. ábra



2. ábra

ahol $x, x+\Delta x \in [a, b]$, $f(x) > g(x)$ és $f(x+\Delta x) > g(x+\Delta x)$, akkor $f(x+\vartheta\Delta x) > g(x+\vartheta\Delta x)$, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ (2. ábra).

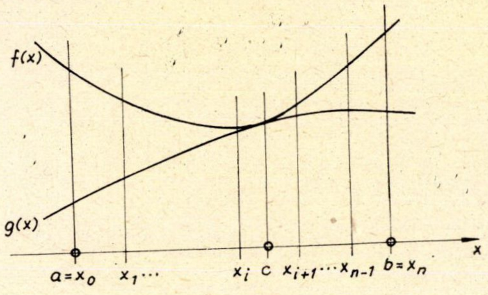
A bizonyítási eljárás — a bevezetésben adott — kétféle módon történhet:

1. n egyenlő részre osztjuk az $[a, b]$ intervallumot x_i osztópontok segítségével, és megvizsgáljuk, hogy a $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ értékek minden i-re kielégítik-e az (1), (2) vagy (3) egyenlőtlenségek valamelyikét. Ha igen, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség is igaz a teljes $[a, b]$ intervallumon.

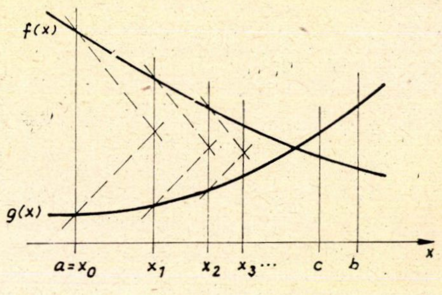
2. Az x osztópontokat az (1) vagy a (2) egyenlőtlenséget az x_{i-1} pontban kielégítő Δx érték segítségével adjuk meg úgy, hogy $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, ahol $x_1 = a$ vagy $x_1 = b$. Tulajdonképpen az eredeti intervallum valamely végpontjából kiindulva a lehető legritkábban helyezzük el az x_i osztópontokat úgy, hogy a köztük levő Δx távolságok az (1) vagy a (2) egyenlőtlenséget még kielégítsék. Természetesen kiindulhatunk egyidejűleg az $[a, b]$ intervallum mindkét végpontjából is (ekkor mondjuk $x_1 = a$, $x_2 = b$ és $x_{i+2} = x_i + \Delta x$). Ha véges sok lépésben le tudjuk fedni ilyen $[x_i, x_{i+1}]$ (illetve $[x_i, x_{i+2}]$) intervallumokkal az $[a, b]$ intervallumot, akkor szintén igaz az $f(x) > g(x)$ $(x \in [a, b])$ egyenlőtlenség.

Ha $f(x) > g(x)$ $(x \in [a, b])$ (és az 1. változatnál az előre adott felosztás elég sűrű), akkor ezekkel a becslésekkel véges sok lépésben kimutatható az egyenlőtlenség. Ha van olyan c pont $c \in [a, b]$, melyben $f(c) \leqq g(c)$, akkor az 1. módszernél mindig lesz olyan részintervallum, melyben nem teljesül az (1), (2) és (3) egyenlőtlenségek egyike sem (3. ábra), míg a 2. módszernél az x_i pontoknak egy konvergens sorozatához jutunk (4. ábra).

Ha olyan c pont is létezik, melyben $g(x) > f(x)$, akkor az 1. típusú eljárásoknál,



3. ábra



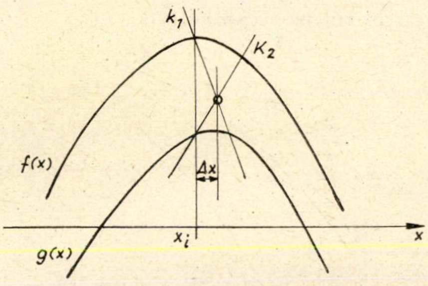
4. ábra

ha az intervallum felosztása elég finom, van olyan x_i osztópont, hogy $f(x_i) < g(x_i)$. Így kimutatható a bizonyítandó $f(x) > g(x)$ $x \in [a, b]$ egyenlőtlenség hamissága.

Természetesen gyakorlatilag nem lehetséges tetszőlegesen közeli függvényértékek közti egyenlőtlenség kimutatása, mivel a becsléseknél figyelembe kell venni a számítási pontosság korlátozottságából adódó hibát. Általában a számítás pontosságának kérdése központi szerepet játszik eljárásainknál (hiszen numerikus módszerekről van szó).

Az eddig tárgyalt két eljárástípus közül az elsőnek előnye, hogy csak az $f(x)$ és $g(x)$ függvényértékek különbségét kell kiszámítani az előre adott x_i pontokban, és ezt az értéket kell például az $(x_{i+1} - x_i)$ $(K_2 - k_1)$ értékhez hasonlítani (ha az (1) egyenlőtlenséget használjuk). A második esetben a függvényértékek különbségén kívül minden alkalommal (minden i-re) a következő osztópont helyét is meg kell határozni, viszont a deriváltakra előírt korlátok adott értéke mellett az osztópontok a legritkábban helyezkednek el, azaz eljárásunk a lehető legkevesebb lépésből áll. Az első módszernél még az is előfordulhat, hogy ha nem elég sűrűn helyezzük el az osztópontokat, akkor az eljárást egy finomabb felosztás mellett meg kell ismételni. Ez a második módszernél nem fordulhat elő.

Mindkét eljárás hátránya, hogy ha a deriváltakra adott korlátok között nagy a különbség (5. ábra), akkor az (1), (2) és (3) egyenlőtlenségek által adott Δx értékek igen kicsik, és így az eljárás lassú, vagy a számítási pontosság korlátozottsága miatt leáll.



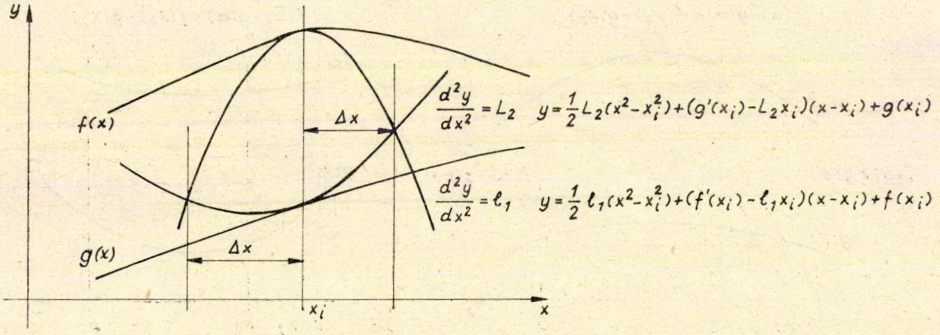
5. ábra

A lineáris függvényekkel való becslésen kívül más módszereket is használhatunk. Általában egy adott x_i pontbeli függvényérték (esetleg még más jellemző érték) kiszámításával adunk becslést a függvényekre, ismerve változásuk maximális mértékét.

Például, ha egy x_i pontban a függvényértékeken kívül a deriváltak értékeit is kiszámítjuk, és ha ismerjük a második deriváltakra adható korlátokat:

$$L_1 > f''(x) > l_1, \quad L_2 > g''(x) > l_2, \quad (x \in [a, b]),$$

akkor parabolákkal helyettesíthetjük a függvényeket (6. ábra).



6. ábra

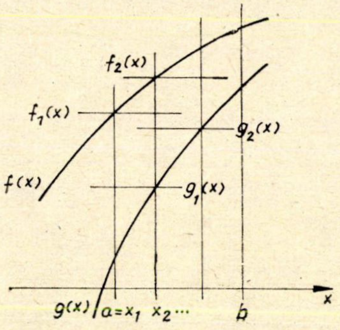
Megjegyezhető, hogy a becslésnél csak az L_2 és l_1 értékek ismerete szükséges. Ezután ugyanazok a módszerek használhatók, mint a lineáris függvényekkel való becslésnél, csak most nem egyeneseknek, hanem a paraboláknak a metszéspontjait kell meghatározni. A metszéspontoknak az $x=x_i$ egyenestől mért távolsága lesz a megfelelő Δx maximális értéke.

A parabolákkal való becslésnél hátrányos, ha a második deriváltakra adott korlátok távol vannak egymástól, vagyis ha az L_2-l_1 abszolút értéke túl nagy.

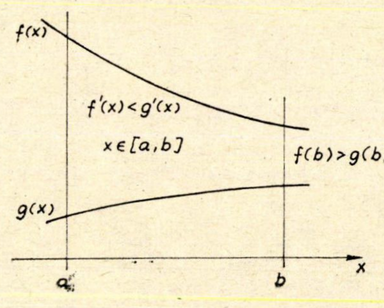
Az eddig tárgyalt becslési módszereken kívül természetesen más módszerek is adhatók. Az alkalmazott módszert mindig a szereplő függvények típusának (alakjának) megfelelően választhatjuk meg. Előfordulhat, hogy egy becslési eljáráson belül egyszerre több különböző módszert is alkalmazunk a különböző részintervallumokon belül.

Speciális függvények esetében speciális módszereket is használhatunk.

Például monoton növekvő (vagy csökkenő) függvények esetén konstans függvényekkel is becsülhetünk: $f_i(x)=f(x_i)$, $g_i(x)=g(x_{i+1})$ (7. ábra).



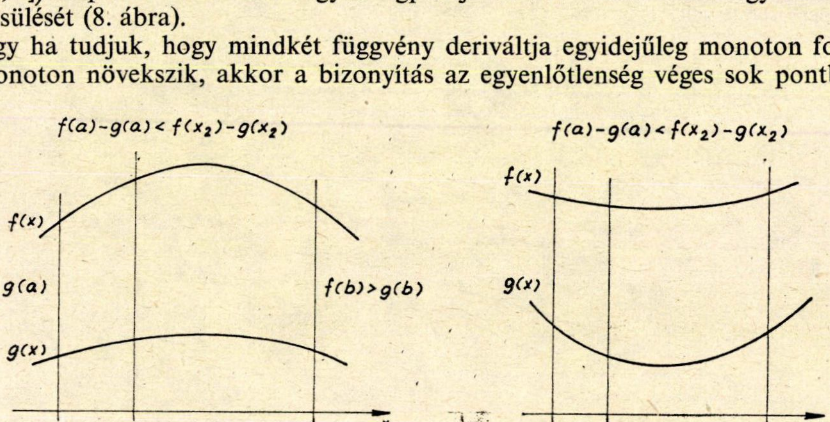
7. ábra



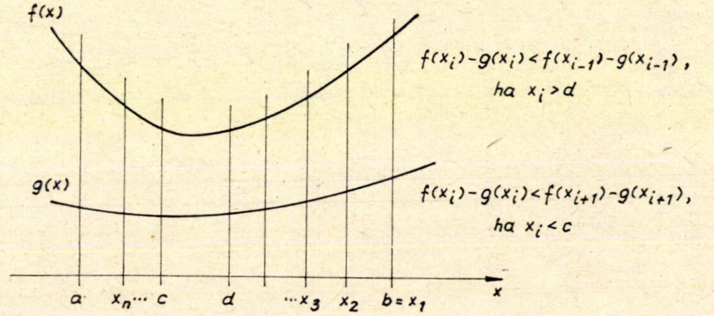
8. ábra

A deriváltak közt fennálló egyenlőtlenség ismeretében (például $g'(x)>f'(x)$, ha $x\in[a,b]$) csupán az intervallum egyik végpontjában kell ellenőrizni az egyenlőtlenség teljesülését (8. ábra).

Vagy ha tudjuk, hogy mindkét függvény deriváltja egyidejűleg monoton fogy, vagy monoton növekszik, akkor a bizonyítás az egyenlőtlenség véges sok pontban



9. ábra



10. ábra

való ellenőrzésére (ha $f''(x) < g''(x)$, l. 9. ábra), vagy véges sok pontban való számítás mellett egy $[c, d] \subset [a, b]$ részintervallumon való vizsgálatra redukálható (ha $f''(x) > g''(x)$, l. 10. ábra).

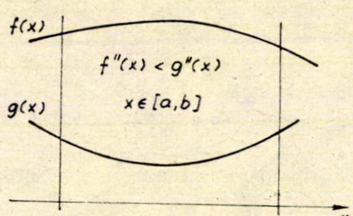
Ha például tudjuk, hogy $g''(x) > f''(x)$ $x \in [a, b]$ (mondjuk $g''(x) > 0$ és $f''(x) < 0$), akkor elegendő az intervallum két végpontjában ellenőrizni az egyenlőtlenséget (11. ábra).

Ezen speciális módszerek alkalmazhatóságának szükséges feltételei — például, ha ismerjük a deriváltak közötti egyenlőtlenséget — teljesülésének kimutatására szintén alkalmazhatók gépi (numerikus) módszerek.

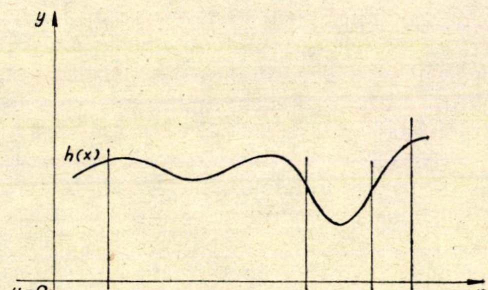
Egy, az eddigiektől eltérő típusú bizonyítási eljárás adható meg azon az alapon, hogy az $f(x) > g(x)$ $x \in [a, b]$ egyenlőtlenség ekvivalens az $f(x) - g(x) > 0$ relációval, és így az egyenlőtlenség bizonyítása visszavezethető a $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény abszolút minimumának meghatározására (ilyen szélsőérték-keresési eljárások már ismeretesek). Közelebb visz a megoldáshoz, ha ismerjük azt a $[c, d]$ részintervallumot (illetve általában azt a részhalmazt), melyben a $h(x)$ abszolút minimuma van, hiszen ilyenkor már csak ezen a részhalmazon kell vizsgálni az egyenlőtlenséget (12. ábra).

Természetesen ez a módszer nemcsak egyváltozós függvények esetén alkalmazható.

Általában többváltozós függvényeknél az egyváltozós függvényekhez hasonló módon járhatunk el.



11. ábra



12. ábra

4. Többváltozós függvények esete

Példaként tekintsünk egy $f(x, y)$ és egy $g(x, y)$ $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ függvényt. Bizonyítandó a $g(x, y) < f(x, y)$ egyenlőtlenség a fenti részintervallumon. Ilyenkor, ha a parciális deriváltakra korlátokat tudunk adni:

$$K_1 > \frac{\partial f}{\partial x} > k_1,$$

$$K_2 > \frac{\partial f}{\partial y} > k_2,$$

$$L_1 > \frac{\partial g}{\partial x} > l_1,$$

$$L_2 > \frac{\partial g}{\partial y} > l_2,$$

akkor, mint az egyváltozós esetben is, lineáris függvényekkel, azaz síkokkal helyettesíthetjük a vizsgált függvényeket. Ezek a síkok a G halmaz elemei, és a megfelelő $x_i \leqq x \leqq x_i + \Delta x$, $y_j \leqq y \leqq y_j + \Delta y$ részintervallumokon ezek között a lineáris függvények között mutatjuk ki az egyenlőtlenséget.

Például, ha $(L_1 - k_1)\Delta x + (L_2 - k_2)\Delta y < f(x_i, y_j) - g(x_i, y_j)$, akkor az egész $x_i \leqq x \leqq x_i + \Delta x$, $y_j \leqq y \leqq y_j + \Delta y$ intervallumon igaz az $f(x, y) > g(x, y)$ egyenlőtlenség.

Az egyváltozós esethez hasonlóan — az (1), (2) és (3) egyenlőtlenségekkel analóg képletek alapján — itt is különböző megoldások lehetségesek, és nemcsak a kétváltozós, hanem általában többváltozós esetben is.

Ugyancsak az egyváltozós esettel analóg módon, a lineáris függvényekkel való becsléseken kívül egyéb más módszerek is alkalmazásra kerülhetnek.

Befejezésként még megemlítünk néhány lényeges kérdést.

5. Általános megjegyzések, problémák

Az eddigiekben leírt, illetve megemlített módszerek egyáltalán nem merítik ki az összes lehetséges eljárástípust, melyeket egyenlőtlenségek bizonyításánál lehet használni. A deriváltakon kívül például a függvények más jellemzői is felhasználhatók a becsléseknél. Vannak esetek, amikor egészen más, az eddigiektől elvileg is különböző módszerek alkalmazása is eredményes.

A felhasznált eljárás eredményessége természetesen függ attól, hogy milyen függvényekre alkalmazzuk. Az eljárás kiválasztásánál ezenkívül még a következő probléma is felmerül:

Ha pontosabb becsléseket használunk, akkor az eljárás általában eredményesebb (például kevesebb lépésből áll, közelebbi függvények közti egyenlőtlenség is kimutatható), de ugyanakkor ez bonyolultabb számítást igényel, és bonyolultság miatt a számítási pontosság is romlik, rontva a becslés pontosságát. Hasonlóképpen a számítási pontosság növelése (például a számológép dupla pontosságú műveletek használatával) hatásosabbá teszi az eljárásokat, de ugyanakkor bonyolultabbá is.

Bonyolult problémát okoz a számítás pontosságának meghatározása, illetve figyelembevétele a becsléseknél, hiszen a számítás hibája sok különböző tényezőtől függ: például maguktól a vizsgált függvényektől, a felhasznált számítási módszertől, az adott számológép szerkezetétől, sőt attól is, hogy az értelmezési tartomány mely pontjában végezzük a vizsgálatot.

Ezek után összefoglalásként elmondhatjuk a következőket.

Módszereink nem túl közeli $f(x)$, illetve $g(x)$ függvények közti egyenlőtlenség bizonyítását gyors és egyszerű úton teszik lehetővé. Eljárásaink hátránya azonban, hogy esetenként csak két konkrét függvény vizsgálata lehetséges, és ez is csak egy korlátos értelmezési tartományon. Az utóbbi probléma bizonyos esetekben megfelelő transzformációk alkalmazásával vagy a függvények esetleges periodikusságának kihasználásával kiküszöbölhető.

IRODALOM

[1] DAVIS, M.: Eliminating the irrelevant from mechanical proofs, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, American Mathematical Society (1963).

[2] GELERNTER, H.: Realization of a geometry theorem proving machine, *Proc. Inter. Conf. on Information Processing*, Paris (1959).

[3] KALMÁR L.: A Hilbert-féle bizonyításelmélet célkitűzései, módszerei és eredményei, *Matematikai és Fizikai Lapok* **48**, (1941).

[4] MELTZER, B.: Some recent developments in complete strategies for theorem-proving by computer, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **14**, (1968), 5.

[5] NEWELL, A.—J. C. SHAW—H. A. SIMON: Report on a general problem-solving program, *Proc Inter. Conf. on Information Processing*, Paris (1959).

[6] PRAWITZ, D.: An improved proof procedure, *Theoria* **26**.

[7] ROBINSON, J. A.: A machine-oriented logic based on the resolution principle, *Journal Ass. Comp. Mach.* **12**.

(Beérkezett: 1969. VI. 25.)

HALMAZRENDSZEREK EXTREMÁLIS TÖMÖRSÉGŰ ELRENDEZÉSEIVEL KAPCSOLATOS PROBLÉMÁK, I.

Írta: BENEDIKTI ISTVÁN

In memoriam Ottó Varga (1909—1969)

1. Bevezetés

A statisztikában a szóródás mérésére különböző mérőszerszámokat használnak. Corrado GINItől származik a következő két mérőszám:

$$\Delta = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \sum_{k=1}^{n} |x_j - x_k| f_i f_k,$$

illetve

$$\Delta' = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |x_j - x_k| f_i f_k,$$

ahol az x_i gyakorisága f_i és $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$.

A geometriában is felhasználhatók ezek a mérőszámok pontrendszerek lazaságának, illetve tömörségének mérésére.

Definíció. Egy P pontrendszer lazaságán a következő számot értjük:

$$(*) \qquad g(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(P_i, P_j),$$

ahol $P_i, P_j \in P$, $f(P_i, P_j)$ egy a P^2-n értelmezett valós függvény, és n a pontok száma. Ebben a dolgozatban $f(P_i, P_j)$ a szokásos euklideszi távolság lesz.

Definíció. Egy zárt $H = \{H_i\}_{i \in I}$ halmazrendszer F lazaságán annak a $P = \{P_i\}_{i \in I}$ pontrendszernek a $g(P)$ lazaságát értjük, melynek elemeit egy $H_i^* = F(H_i)$ halmaz értékű függvény határozza meg úgy, hogy $P_i \in H_i^*$ és $g(P) = \min\limits_{P_i' \in H_i^*} g(P')$, és $P' = \{P_i'\}$.

MEGJEGYZÉS. Természetes — egy pontrendszer lazaságának mintájára — halmazrendszer lazaságát is egy $(*)$ típusú formulával definiálni. Kézenfekvő továbbá $f(P_i, P_j)$-t távolságjellegű függvénynek választani. Az ilyen vizsgálatok, valamint affin vagy egyéb invariáns mérőszámok vizsgálata azonban már külön tanulmányt igényel.

Definíció. Legtömörebb elrendezésnek nevezzük a H halmazrendszernek egy olyan elrendezését, melynek lazasága minimális.

Definíció. Leglazább elrendezésnek nevezzük a H halmazrendszernek egy olyan elrendezését, melynek lazasága maximális.

1. Probléma. Legyen $H = \{H_i\}_{i \in I}$ halmazrendszer és $T = \{T_k\}_{k \in K}$ a H halmazrendszeren értelmezett tulajdonságok egy halmaza, ahol I és K tetszőleges indexhalmaz. Határozzuk meg adott $F(H)$ függvény mellett H halmazrendszernek a legtömörebb, illetve leglazább, a $T_j \in T$ tulajdonságoknak eleget tevő elrendezését, ahol $j \in K' \subseteq K$.

Ebben a dolgozatban bizonyos halmazrendszereknek csak a legtömörebb elrendezésével foglalkozunk.

Definíció. A $H_i \in H$ halmazokat hordozóhalmaznak, a $H_i^* = F(H_i)$ halmazokat mérőhalmazoknak, a $P_i \in P$ pontokat mérőpontoknak nevezzük.

A dolgozatban hordozóhalmazként először zárt egységsugarú körlemezt, majd zárt egységnyi oldalhosszúságú szabályos háromszöglemezt, végül zárt egységnyi oldalhosszúságú négyzetlemezt szerepeltetünk, és ezeket a rövidség kedvéért körnek, háromszögnek, négyzetnek fogjuk nevezni. Mérőhalmaz pedig először a halmaz maga, majd a halmaz súlypontja, végül határának egy pontja lesz.

Definíció. Lebegő mérőpontról beszélünk, ha M_i mérőpontot a H_i halmaz tetszőleges pontjának választhatjuk, ez tehát nincs a halmazban rögzítve.

Definíció. Rögzített mérőpontról beszélünk, ha az M_i mérőpont a H_i halmazhoz rögzített pont (pl. súlypont, csúcspont stb.).

Vizsgálataink során a következőkben kikötjük, hogy a hordozóhalmazok nem rendelkezhetnek majd páronként közös belső ponttal. Feltevéseink mellett $g(P)$ értéke az elrendezéstől, $F(H)$ függvénytől és az I indexhalmaztól függ. A továbbiakban $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$ lesz. Használni fogjuk a

$$\gamma(n) = \min g(P)$$

jelölést.

Dolgozatunkban az 1. probléma következő speciális eseteivel foglalkozunk.

1. 1. 1. probléma. Határozzuk meg a páronként közös belső ponttal nem rendelkező, zárt egységsugarú körökből álló $H = \{H_i\}$ $(i \in \{1, 2, 3, ..., n\})$ halmazrendszer legtömörebb lebegő mérőpontos elrendezését.

1. 1. 2. probléma. Határozzuk meg a páronként közös belső ponttal nem rendelkező, zárt egységsugarú körökből álló $H = \{H_i\}_{i \in I}$ halmaz legtömörebb elrendezését, ha a mérőpontot

a) a súlypontba,
b) egy belső pontba,
c) a kerület egy pontjába rögzítjük.

1. 2. probléma. Határozzuk meg a páronként közös belső ponttal nem rendelkező, zárt egységnyi oldalú szabályos háromszögekből álló $H = \{H_i\}_{i \in I}$ halmaz legtömörebb elrendezését, ha a mérőpontot

a) a súlypontba,
b) egy oldalfelezőpontba,
c) egy csúcspontba rögzítjük.

1. 3. probléma. Határozzuk meg a páronként közös belső ponttal nem rendelkező, zárt egységoldalú négyzetekből álló $H = \{H_i\}_{i \in I}$ halmaz legtömörebb elrendezését, ha a mérőpontot

a) a súlypontba,
b) egy oldalfelezőpontba,
c) egy csúcspontba rögzítjük.

Definíció. Legtömörebben továbbépített elrendezésnek nevezzük $H=\{H_i\}$ $i\in\{1, 2, ..., n\}$ olyan elrendezését, melyben $H=\{H_i\}$ $i\in\{1, 2, ..., n-1\}$ legtömörebben továbbépített elrendezését egy H_n halmaz úgy egészíti ki, hogy a halmazrendszer lazasága minimálisan növekszik. Két halmaz esetén a legtömörebb elrendezést nevezzük legtömörebben továbbépített elrendezésnek.

2. probléma. Határozzuk meg egy $H=\{H_i\}_{i\in I}$ halmazrendszer legtömörebben továbbépített elrendezéseit.

MEGJEGYZÉS. Ha egy elrendezésben egy mérőpontot egyszerre több hordozóhalmazhoz rögzíthetjük hozzá, akkor a legtömörebb továbbépítésnél — ebben a dolgozatban — abból az elrendezésből indulunk ki, melyben a legtöbb hordozóhalmazt rendelhetjük a mérőponthoz. Ezek után rátérünk az 1. problémák tárgyalására, bemutatva néhány egyszerű eredményt, közben további problémákra hívjuk fel a figyelmet.

2. Néhány speciális halmazrendszer-elrendezés

Az 1. 1., 1. 2. és 1. 3. problémákkal analóg problémákhoz jutunk, ha legtömörebb elrendezés helyett legtömörebben továbbépített elrendezéseket keresünk.

1. 2. Egységkörök elrendezése

E témakörben csak kis n-ekre és csak triviális esetekben vannak eredményeink, így ezek ismertetésétől eltekintünk. Ezekből az eredményekből is látható azonban, hogy a legtömörebben továbbépített elrendezés általában nem lesz egyúttal legtömörebb elrendezés is. (Pl. lebegő mérőpontos elrendezéseknél.) Megadható azonban olyan $F(H)$ függvény, amely esetén egyes n-eknél a két elrendezés azonos lesz. Természetesen vetődik fel a következő probléma:

3. probléma. Milyen $F(H)$ függvény, illetve feltételhalmaz esetén lesz minden legtömörebben továbbépített elrendezés egyben a legtömörebb elrendezés?

MEGJEGYZÉS. Körök esetén pl. a súlypontban rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített elrendezés $n=4$ esetén már nem azonos a súlypontban rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezéssel.

2. 2. Szabályos háromszögek néhány elrendezése

Ez a fejezet a 1. 2. problémával, illetve a legtömörebben továbbépített elrendezések hasonlóan megfogalmazható kérdéseivel foglalkozik. A hordozóhalmazok tehát szabályos háromszögek, és a mérőpontokat

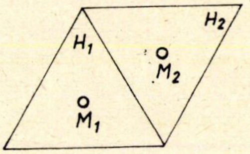
a) a súlypontba,
b) egy oldalfelezőpontba,
c) egy csúcspontba rögzítjük.

A továbbiakban $\gamma_a(n)$ a súlypontba, $\gamma_b(n)$ egy oldalfelezőpontba, $\gamma_c(n)$ egy csúcspontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezés tömörségét jelöli.

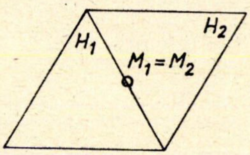
Legtömörebb elrendezések $n=2$ esetén

A súlypontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezésben a két háromszögnek egy közös oldala van (1. ábra).

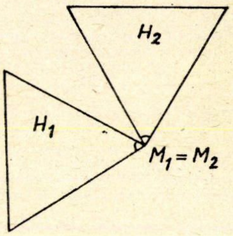
Tekintsük ugyanis egy, a mérőponthoz legközelebbi határpont és a mérőpont távolságát, mely $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Ezért $\gamma_a(2) \geqq \frac{\sqrt{3}}{3}$ adódik, amiből állításunk következik, hiszen az elrendezésben $\gamma_a(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezésben a két háromszög egy oldala közös, és a mérőpont a közös oldal felezőpontja, tehát $\gamma_b(2)=0$ (2. ábra). A csúcspontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezésben a két háromszögnek egy csúcsa közös, és ez a mérőpont is, tehát $\gamma_c(2)=0$ (3. ábra).



1. ábra



2. ábra



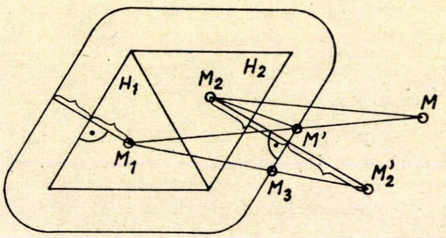
3. ábra

A fenti elrendezések legtömörebb továbbépítésével kapjuk a következő elrendezéseket, melyekben H_n jelöli az $n-1$ darab halmaz adott elrendezését kiegészítő hordozóhalmazt, és M_n ennek mérőpontját.

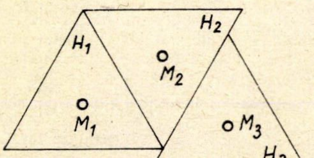
A súlypontba rögzített legtömörebben továbbépített elrendezésben $n=3$ esetén H_3 egy oldalegyenese megegyezik H_2 egy oldalegyenesével, mely tartalmazza H_1 és H_2 egyik közös csúcsát. Az M_3 mérőpont illeszkedik az M_1M_2 szakaszra, ahol M_2 a H_2, H_3 oldalegyenesére nem illeszkedő csúcspontjának a szemközti oldalra vonatkozó tükörképe (4. ábra).

Ezt az állításunkat két lépésben igazoljuk.

1. Belátjuk, hogy M_3 mérőpont $H_1 \cup H_2$ halmaz $\frac{\sqrt{3}}{6}$ sugarú paraleltartományának határán van. Tekintsünk egy tetszőleges M mérőpontot. Ez a paralel-



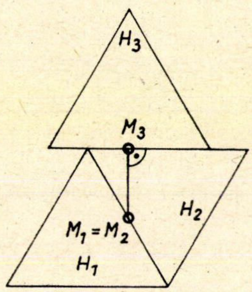
4a. ábra



4b. ábra

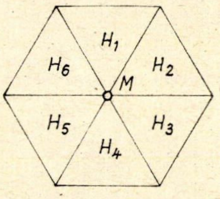
tartomány belső pontja nem lehet, hiszen akkor két hordozóhalmaznak lenne közös belső pontja. Ha M külső pont (4a. ábra), akkor az M_1MM_2 háromszög belsejében tartalmazza a határ egy M' pontját. Ha most M helyett M' mérőpontot választjuk, a lazaság csökken, ami 1. állításunkat igazolja.

2. A legtömörebb elrendezést szolgáló mérőpont a paraleltartomány határának egyenes szakaszán van. Tekintsük a paraleltartományt határoló ívekhez tartozó húrokat. Az ív bármely pontjához találhatunk a húron egy olyan pontot, melynek M_1 és M_2-től mért távolságösszege kisebb. Egyszerű számításokkal igazolható, hogy a húrok felezőpontjai, melyekre a lazaság a húr pontjai között minimális, nagyobb távolságösszegeket adnak, mint a fenti M_3 pont. M_3 a paraleltartományt határoló egyenes szakaszt érintő, M_1 és M_2-t összekötő legrövidebb töröttvonal „érintési" pontja. Ennek meghatározásakor M_2-t tükröztük a határoló szakaszra, s a tükörkép M_2'. Ez állításunkat igazolja.



5. ábra

Használni fogjuk a legtömörebben továbbépített elrendezések F lazaságának jelölésére $g(n)$-t, illetve $g_a(n)$-t egy a súlypontba, $g_b(n)$-t egy oldalfelezőpontba, $g_c(n)$-t egy csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezések esetén, ahol n a hordozóhalmazok száma. Ekkor az adódik, hogy $g_a(3)=\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{7}+1)$.

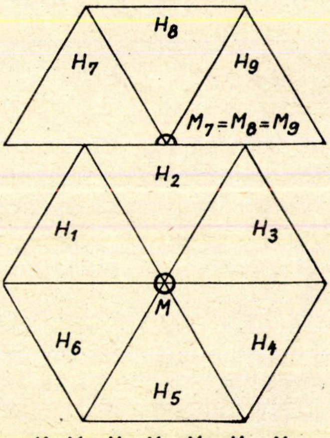


$M=M_1=M_2=M_3=M_4=M_5=M_6$

6a. ábra

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített elrendezésben $n=3$ esetén a harmadik mérőpont M_1-ből H_1 vagy H_2 egyik M_1-t nem tartalmazó oldalára bocsátott merőleges talppontja (5. ábra).

Állításunk igazsága abból adódik, hogy $H_1 \cup H_2$ halmaz $M_1=M_2$-höz legközelebbi határpontja M_3. Tehát $g_b(3)=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



$M=M_1=M_2=M_3=M_4=M_5=M_6$

6b. ábra

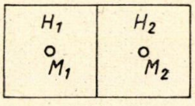
A csúcspontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített elrendezésben $n<7$ esetén a háromszögek egy csúcspontja közös, s ez egyben a mérőpont is (6a. ábra). Tehát $M_1=M_2=M_3=M_4=$ $=M_5=M_6$, és $g_c(n)=0$, ha $n<7$. $6<n<10$ esetén a legtömörebben továbbépített elrendezésben hat háromszög szabályos hatszöget alkot — ennek középpontja a mérőpont —, melynek egyik oldalfelezőpontja a további háromszögek csúcspontja és mérőpontja (6b. ábra). Így $M_7=M_8=M_9$ és $g_c(7)=3\sqrt{3}$, $g_c(8)=6\sqrt{3}$, $g_c(9)=9\sqrt{3}$ adódik.

MEGJEGYZÉS. A csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezések $n=6$ és $n=9$, esetében (egy-egybevágóság erejéig) egyértelműen meghatározott elrendezések.

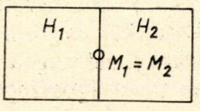
2. 3. Egybevágó négyzetek néhány elrendezése

Ez a fejezet az 1. 3. problémával, illetve az előbbiekhez analóg módon megfogalmazható legtömörebben továbbépített elrendezések vizsgálatával foglalkozik. Most tehát a hordozóhalmaz zárt egységnyi oldalhosszúságú négyzet.

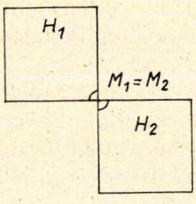
A súlypontba rögzített legtömörebb elrendezésben $n=2$ esetén a két négyzet egy közös oldallal rendelkezik, így $\gamma_a(2)=1$ (7a. ábra).



7a. ábra



7b. ábra



7c. ábra

Állításunkat a 2. 2. fejezetben ismertetett módon igazolhatjuk.

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezésben $n=2$ esetén a két négyzetnek van egy közös oldala, s ennek felezőpontja a mérőpont, így $\gamma_b(2)=0$, és $M_1=M_2$ (7b. ábra).

A csúcspontba rögzített mérőpontos legtömörebb elrendezésben $n=2$ esetén a négyzetek egy csúcsa közös, és ez a mérőpont. Tehát $\gamma_c(2)=0$ és $M_1=M_2$ (7c ábra).

Legtömörebben továbbépített elrendezések $n=3$ esetén

A súlypontba rögzített mérőpontos elrendezésben M_3 illeszkedik H_1 és H_2 közös oldalának egyenesére, és a három négyzetnek van egy közös oldalegyenese (8a. ábra).

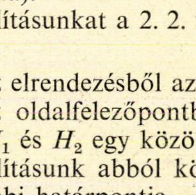
Állításunkat a 2. 2. fejezetben ismertetett bizonyításhoz hasonló módon igazolhatjuk.

Az elrendezésből az adódik, hogy $g_a(3) = 1+\sqrt{5}$.

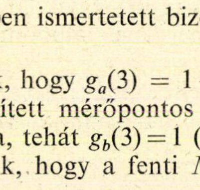
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos elrendezésben a harmadik mérőpont H_1 és H_2 egy közös csúcsa, tehát $g_b(3)=1$ (8b. ábra).

Állításunk abból következik, hogy a fenti M_3 a $H_1 \cup H_2$ halmaz M_1-hez legközelebbi határpontja.

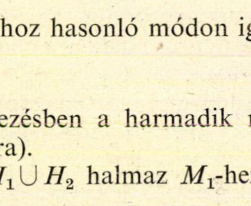
A csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezésben a négyzetek egy csúcsa közös, és ez a mérőpont, tehát $\gamma_c(3)=g_c(3)=0$, és $M_1=M_2=M_3$ (8c. ábra).



8a. ábra



8b. ábra



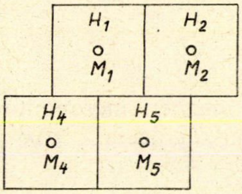
8c. ábra

Legtömörebben továbbépített elrendezések $n=4$ esetén

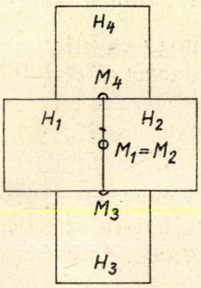
A súlypontba rögzített mérőpontos elrendezésben H_3 és H_4 oldala közös, és a négyzetek egyik oldala egybeesik (9a. ábra).

Állításunk igazolásánál feltehetjük, hogy M_4 a $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ halmaz 1/2 távolságú paraleltartományának határán van. Ellenkező esetben a mérőpontokat összekötő szakaszok egyikén választhatunk olyan határpontot, melyre a távolságösszeg csökken. A paraleltartomány határán történő mozgatással és számolással könnyen belátható, hogy az itt leírt elrendezés valóban legtömörebben továbbépített elrendezés. Ebből következik, hogy $g_a(4) = 2+\frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{13}$.

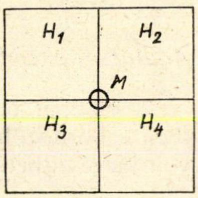
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos elrendezésben az M_4 mérőpont a H_1 és H_2 közös oldalának csúcspontja (9b. ábra).



9a. ábra



9b. ábra



9c. ábra

Állításunk igazolásakor feltehetjük, hogy M_4 mérőpont vagy $H_1 \cup H_2$ halmaz H_3 pontját nem tartalmazó oldalon van, vagy H_3 határán, illetve H_4 olyan oldalegyenesén, mely egyik végpontja H_3 határpontját is tartalmazó oldalon van. Ellenkező esetben két halmaznak van közös belső pontja, vagy a 2. 2. pontban ismertetett módon fel tudunk venni olyan mérőpontot, melyre a távolságösszeg csökken, és a fent leírt pontok egyike. Egyszerűen igazolható, hogy ezek közül M_4 szolgáltatja a legtömörebb elrendezést, melyből adódik, hogy $g_b(4)=2$.

A csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezésben a négyzetek egy csúcspontja közös, s a közös csúcs a mérőpont. Tehát $g_c(4)=\gamma_c(4)=0$, és $M_1=M_2=$ $=M_3=M_4=M$ (9c. ábra).

MEGJEGYZÉS. A súlyponthoz rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített elrendezés nem a legtömörebb elrendezés, ugyanis az egy közös csúcsponttal rendelkező négyzetek lazasága kisebb (14a. ábra).

A következőkben néhány általános eredményt mutatunk be.

TÉTEL. *A legtömörebben továbbépített elrendezések tömörségét leíró $g(n)$ függvény monoton növekvő, és alulról konvex függvény.*

Bizonyítás. A monotonitás triviális, hiszen új halmaz hozzávételével a mérőpontok távolságösszege nem csökkenhet (ha $g(n-1)>0$, akkor $g(n)>g(n-1)$.).

a) A $g(n)$ függvény konkávitása a

$$g(n) \leqq \frac{g(n-1)+g(n+1)}{2}$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. Ebből

$$g(n)-g(n-1) \leqq g(n+1)-g(n)$$

adódik, és fordítva. Ez definíció szerint

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(M_i, M_n) \leqq \sum_{i=1}^{n} f(M_i, M_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} f(M_i, M_{n+1})+f(M_n, M_{n+1}).$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség viszont abból adódik, hogy $\sum_{i=1}^{n-1} f(M_i, M_n) \leqq \sum_{i=1}^{n-1} f(M_i, M_{n+1})$, mivel M_n-t úgy választottuk, hogy egyetlen más — pl. M_{n+1} — mérőpont esetén sem kapunk kisebb távolságösszeget. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

2. 4. *Rácsos elrendezések*

A 2. 2. és 2. 3. pontban ismertetett csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezésekben a hordozóhalmazok határa szabályos háromszögráccsá, illetve négyzetráccsá volt kiegészíthető (2. 2-ben $n=6$ esetén, 2. 3-ban $n=4$ esetén).

Definíció. Rácsos elrendezésnek nevezzük azokat az elrendezéseket, amelyekben a hordozóhalmazok határa rácsot alkot, vagy azzá egészíthető ki. (Hasonlóan, körök esetén a középpontoktól követeljük, hogy háromszögrács vagy négyzetrács rácspontjai legyenek.)

A bemutatott elrendezések többsége nem rácsos elrendezés, de egy ilyenből két rácsegyenes által határolt sáv, határoló egyenes mentén való eltolásával származtatható.

Definíció. Sávnak vagy szalagnak nevezzük a síknak párhuzamos (egyenként legalább két rácspontot tartalmazó) egyenespár által határolt részét.

Definíció. Sávos elrendezésnek nevezzük azokat az elrendezéseket, melyek egy vagy több párhuzamos sávnak a határoló egyenese mentén való eltolásával (esetleg helybenhagyásával) rácsos elrendezésbe vihető. Ebben a dolgozatban még azzal a további megszorítással is élünk, hogy a sávot határoló egyenesek egy koordinátatengellyel legyenek párhuzamosak. Ebből kiindulva természetesen vetődnek fel a következő problémák.

4. probléma. A $H=\{H_i\}_{i\in I}$ halmazrendszer mely elrendezése legtömörebben továbbépített sávos elrendezés, adott I indexhalmaz és $F(H)$ függvény esetén?

5. probléma. A $H=\{H_i\}_{i\in I}$ halmazrendszer mely elrendezése legtömörebben továbbépített rácsos, illetve legtömörebb rácsos elrendezés, ha adott az I indexhalmaz és $F(H)$ függvény?

MEGJEGYZÉS. Analóg fogalmak vezethetők be a térben is. Ott rácsos, réteges és vonalas elrendezések vizsgálatáról tudunk. Egyszerűen beláthatók a következő egyenlőtlenségek a síkban:

$$\gamma(n) \leqq \gamma_{\text{sávos}}(n) \leqq \gamma_{\text{rácsos}}(n).$$

Látni fogjuk, hogy $g(n)$ függvényre nem mondhatjuk el ugyanezt.

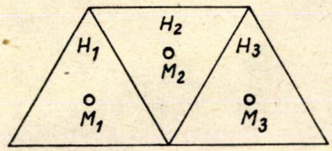
2. 5. *Szabályos háromszögek rácsos elrendezései*

Ebben a fejezetben az 5. problémával foglalkozunk. A mérőpontokat rögzítjük a már ismert módon, s keressük a legtömörebben továbbépített elrendezéseket. Már láttuk a 2. 2-ben, hogy $n=2$ esetén a legtömörebb elrendezések rácsos elrendezések, illetve van köztük ilyen is, ezért ezután is ezekből indulunk ki: A súlypontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített rácsos elrendezésekben, $n=3$ esetén a háromszögeknek egy közös csúcspontjuk van (10a. ábra).

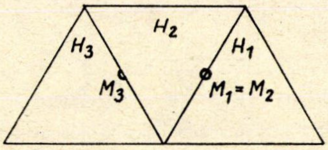
Állításunkat egyszerűen igazolhatjuk az M_1, M_2 fókuszú ellipszisek segítségével.

Az elrendezésből $g_a(3) = 1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ adódik.

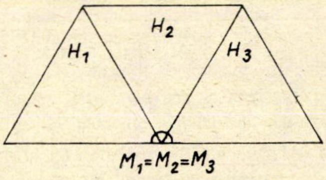
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített rácsos elrendezésben $n=3$ esetén H_3-nak közös oldala van H_2-vel (vagy H_1-gyel), és ezen van M_3 (10b. ábra), így $g_b(3)=1$ adódik.



10a. ábra



10b. ábra



10c. ábra

A csúcspontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített rácsos elrendezés $n \leqq 6$ esetén megegyezik a már ismertetett legtömörebb elrendezéssel (10c. és 11c. ábra).

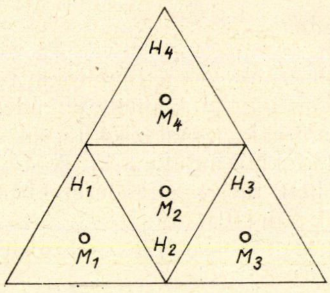
A súlypontba rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített rácsos elrendezésben $n=4$ esetén a háromszögek egy két egységynyi oldalú szabályos háromszöget alkotnak, így $g_a(4) = 3+\sqrt{3}$ (11a. ábra).

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos legtömörebb rácsos elrendezésben $n=4$ esetén a háromszögek egy két egységnyi szabályos háromszöget alkotnak.

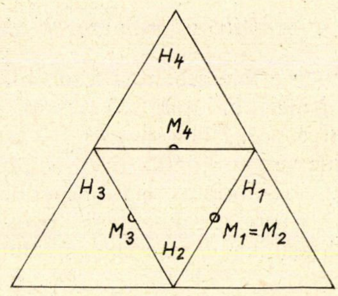
A mérőpontok a közös oldalakon vannak, így $g_b(4)=2{,}5$ (11b. ábra). Állításaink abból adódnak, hogy

$$f(M_1, M_4)+f(M_2, M_4) = f(M_1, M_3)+f(M_2, M_3),$$

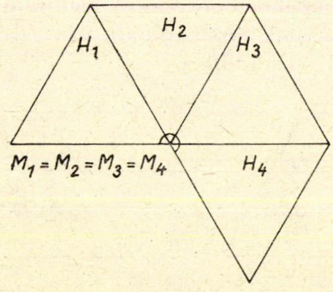
valamint M_3 $f(M_4, M_3)$ sugarú környezetében nincs M_4-től különböző mérőpont, illetve a súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben csak M_4-nél nagyobb távolságösszeget adó mérőpont található.



11a. ábra



11b. ábra



11c. ábra

További vizsgálataink során felhasználjuk a következő lemmát:

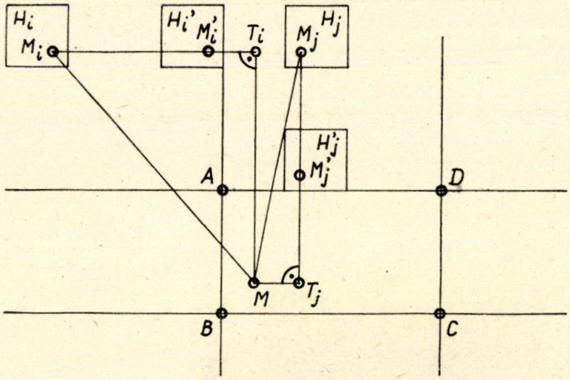
LEMMA. *A síkban $n-1$ számú zárt halmaz egy legtömörebben továbbépített elrendezését tartalmazó legszűkebb téglalapnak, és az elrendezést n számú hordozóhalmazt tartalmazó legtömörebben továbbépített elrendezéssé kiegészítő H_n halmaznak van közös pontja.*

Állításunk egy speciális esetét bizonyítjuk, de a bizonyítás változtatás nélkül alkalmazható a lemma teljes bizonyítására is.

A legtömörebben továbbépített rácsos elrendezés H_n hordozóhalmaznak és a legszűkebb, rácsegyenesekkel határolt téglalapnak, mely az $n-1$ darab hordozóhalmaz esetén legtömörebben továbbépített rácsos elrendezést tartalmazza, van közös pontja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a H_n hordozóhalmazt valamely rácsegyenes elválasztja az összes $H_i (i<n)$ halmaztól (12. ábrán pl. AD egyenes, H_j halmaz). Ekkor tekintsük az MT_jM_j derékszögű háromszöget, ahol M egy tetszőleges $M_i\,(i<n)$

mérőpont. H_j egy M_jT_j szakasz mentén történő eltolással H'_j-be vihető, melynek egy oldala AD rácsegyenesen van. Mivel M_j elválasztja M_j-t és az $M_jM'_j$ egyenesre M-ből bocsátott merőleges T_j talppontját, így $f(M, M_j)$ $f(M, M'_j)$ adódik. Ha H'_j halmaznak és $ABCD$ téglalapnak még nincs közös pontja, akkor azt egy újabb eltolással — a távolság további csökkentése mellett — elérhetjük.



12. ábra

MEGJEGYZÉS. Hasonló állítást megfogalmazhatunk szabályos háromszögek rácsos elrendezésére is.

Természetesen vetődik fel a következő kérdés:

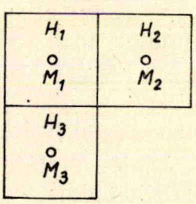
6. probléma. A legtömörebb elrendezés konvex burkán belül hány újabb hordozóhalmazt helyezhetünk el, az elrendezés megváltoztatása nélkül?

2. 6. *Négyzetek rácsos elrendezései*

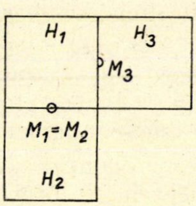
Ez a fejezet egységnyi oldalú négyzetek legtömörebben továbbépített rácsos elrendezéseivel foglalkozik. A bemutatásra kerülő elrendezések a 2. 4. fejezet állítása alapján egyszerű számításokkal igazolhatók. 2. 3-ban $n=2$ esetén bemutatot legtömörebb elrendezések rácsos elrendezések. Ezek továbbépítésével kapjukt a következő elrendezéseket.

Egységnégyzetek legtömörebben továbbépített elrendezései $n=3$ esetén:

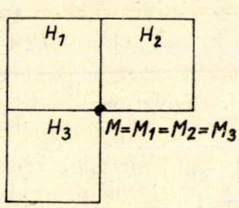
A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a három négyzet közös csúcsponttal rendelkezik (13a. ábra), így $g_a(3) = 2+\sqrt{2}$.



13a. ábra



13b. ábra

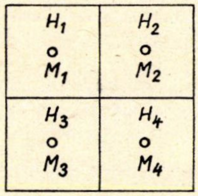


13c. ábra

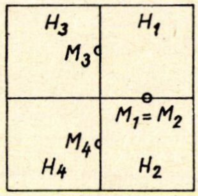
Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos elrendezésben a három négyzetnek egy közös csúcsa van. A harmadik mérőpont H_3 és H_1 (vagy H_2) közös oldalán van, így $g_b(3)=\sqrt{2}$ (13b. ábra).

A csúcspontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a három négyzetnek egy közös csúcsa van, amely a mérőpont. Tehát $g_c(3)=0$ (13c. ábra).

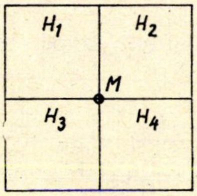
A legtömörebben továbbépített elrendezések $n=4$ esetén: A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzeteknek egy közös csúcspontja van, így $g_a(4) = 4+2\sqrt{2}$ (14a. ábra).



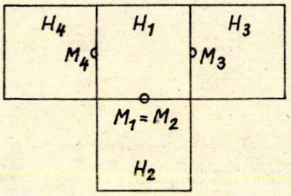
14a. ábra



14b. ábra



14c. ábra



14d. ábra

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezés nem egyértelmű, két elrendezés adódik:

1. A négyzeteknek egy közös csúcspontja van, és a mérőpontok H_1 és H_2 négyzet közös vonalain helyezkednek el (14b. ábra).

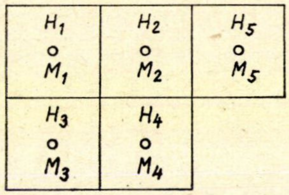
2. H_4 négyzet a H_1M_3 mérőponttal szemközti oldalára illeszkedik, és M_4 a közös oldal felezőpontja (14d. ábra). Mindkét elrendezésben $g_b(4) = 1+2\sqrt{2}$.

A csúcspontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzeteknek egy közös csúcspontjuk van, és ez a mérőpont így $g_c(4)=0$ (14c. ábra). Azonos a 2. 3. pontban $n=4$ esetén megismert elrendezéssel.

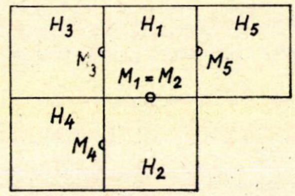
A legtömörebben továbbépített elrendezések $n=5$ esetén: A súlypontba rögzített rácsos elrendezésben négy négyzet egy közös csúcsponttal rendelkezik, az ötödiknek ezek egyikével van közös oldala; $g_b(5) = 7+3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ (15a. ábra). Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpont esetén két rácsos elrendezés adódik:

1. Négy négyzetnek egy közös csúcspontja, az ötödiknek ezek egyikével közös oldala van, melynek felezőpontja a mérőpont. Ekkor $g_b(5) = 2+4\sqrt{2}$ (15b. ábra).

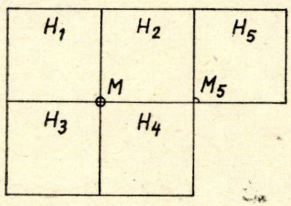
2. A H_1 négyzetnek mind a négy másik négyzettel van közös oldala, melyek felezőpontja a mérőpont. Most $g_b(5) = 3+3\sqrt{2}$ (15d. ábra).



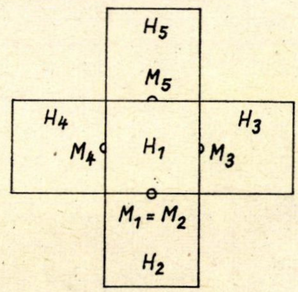
15a. ábra



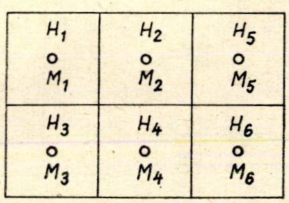
15b. ábra



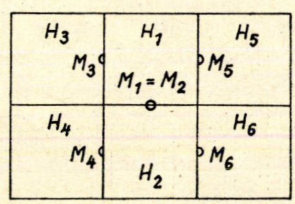
15c. ábra



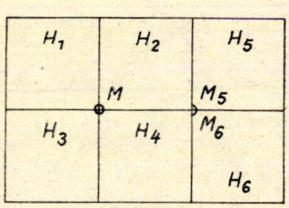
15d. ábra



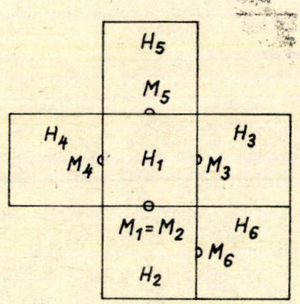
16a. ábra



16b. ábra



16c. ábra



16d. ábra

A csúcspontba rögzített mérőpontos elrendezésben négy négyzetnek egy közös csúcsa, az ötödiknek ezek egyikével közös oldala van. M_5 mérőpont a H_5 azon csúcsa, mely másik két négyzetnek is csúcsa. Így $g_c(5)=4$ (15c. ábra).

A legtömörebben továbbépített elrendezések $n=6$ esetén:

A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzetek egy 3 és 2 egységnyi oldalú téglalapot alkotnak, így $g_a(6) = 11+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ (16a. ábra).

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontok esetén két elrendezés adódik:

1. A négyzetek egy téglalapot alkotnak, melynek oldalai 3 és 2 egységnyi hosszúak. A mérőpontok H_1 és H_2 oldalain helyezkednek el, így $g_b(6) = 4+6\sqrt{2}$ (16b. ábra).

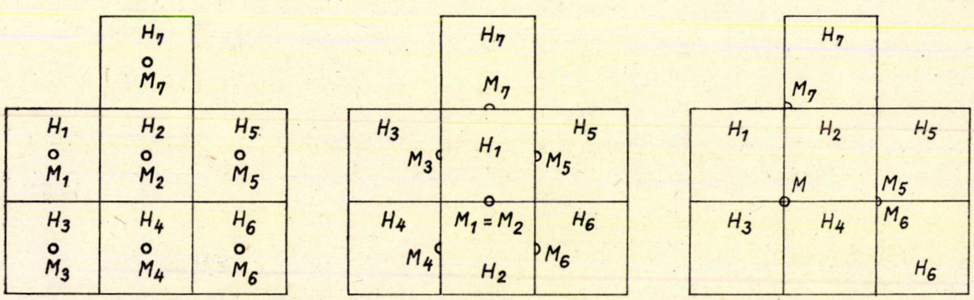
2. A H_2 négyzet M_2-vel szomszédos oldala a H_6-nak is oldala, s az M_6 mérőpont a közös oldalon helyezkedik el. Most $g_b(6) = 4+5\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (16d. ábra).

A csúcspontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzetek egy téglalapot alkotnak, melynek oldalai 3 és 2 egységnyiek. $M_5=M_6$ és így $g_c(6)=8$ (16c. ábra).

A legtömörebben továbbépített elrendezések $n=7$ esetén:

A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben hat négyzet egy téglalapot alkot, melynek három egységnyi hosszúságú oldalához szimmetrikusan illeszkedik a H_7 négyzet. $g_a(7) = 14+6\sqrt{2}+4\sqrt{5}$ (17a. ábra).

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben hat négyzet egy téglalapot alkot, melynek 3 egységnyi hosszúságú oldalára szimmetrikusan illeszkedik H_7. A mérőpontok H_1 és H_2 négyzet oldalfelező pontjai (az egyiken csak 3), így $g_b(7) = 6+7\sqrt{2}+\sqrt{10}$ (17b. ábra).

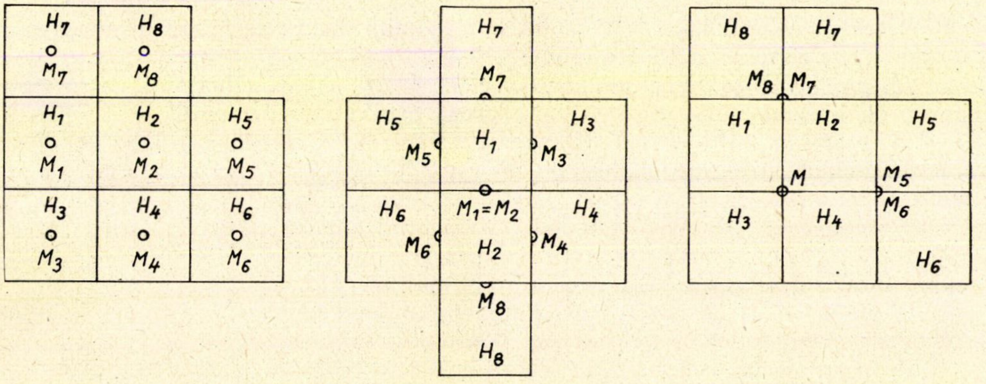


17a. ábra 17b. ábra 17c. ábra

A csúcspontba illesztett mérőpontos rácsos elrendezésben hat négyzet egy téglalapot alkot, melynek 3 egységnyi hosszúságú oldalán az M-hez közelebbi csúcspont M_7 mérőpont, és $g_c(7) = 12+2\sqrt{2}$ (17c. ábra).

A legtömörebben továbbépített elrendezések $n=8$ esetén:

A súlypontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben hat négyzet egy téglalapot alkot, melynek 3 egységnyi hosszúságú oldalára két négyzet illeszkedik, így $g_a(8) = 18+10\sqrt{2}+6\sqrt{5}$ (18a. ábra).



18a. ábra *18b. ábra* *18c. ábra*

Az oldalfelezőpontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben a négyzetek H_1 és H_2 oldalaihoz illeszkednek. A mérőpontok H_1 és H_2 oldalfelezőpontjai, és $g(8) = 10+9\sqrt{2}+2\sqrt{10}$ (18b. ábra).

A csúcspontba rögzített mérőpontos rácsos elrendezésben H_8 egyik csúcsa M_7 mérőpont, így $M_7 = M_8$ és $g_c(8) = 16+4\sqrt{2}$ (18c. ábra).

3. További problémák

Ebben a fejezetben vizsgálatainkkal kapcsolatos rokon problémákat ismertetünk.

7. probléma. Milyen $F(H)$ függvény esetén fog a rögzített mérőpontos legtömörebben továbbépített (illetve legtömörebb) elrendezés és a lebegő mérőpontos legtömörebben továbbépített (illetve legtömörebb) elrendezés megegyezni?

8. probléma. Megadható-e olyan $F_1(H)$ és $F_2(H)$ függvény, hogy a legtömörebben továbbépített (illetve legtömörebb) elrendezés megegyezzen?

9. probléma. Melyek azok az $F(H)$ függvények, melyek esetén a legtömörebben továbbépített elrendezés és a legtömörebb elrendezés azonos?

10. probléma. Állíthatjuk-e, hogy legtömörebb elrendezések hordozóhalmazai egyesített halmazának konvex burka körhöz konvergál, ha $n \to \infty$?

11. probléma. Megadható-e olyan $F_1(H)$ és $F_2(H)$ függvény, melyekkel a két legtömörebb továbbépített (illetve legtömörebb) elrendezés mérőpontjainak halmaza megegyezik?

12. probléma. Ha egy legtömörebben továbbépített elrendezés nem egyértelmű, akkor a különböző elrendezésekből kiindulva szükségszerű-e bizonyos számú lépés után ugyanahhoz az elrendezéshez jutni (mint pl. a 2. 6. fejezetben)?

13. probléma. Állíthatjuk-e, hogy legtömörebb elrendezés hordozóhalmazai egyesített halmaza konvex burkának minimális az átmérője? Azaz n számú halmaznak van-e olyan legtömörebb elrendezése, mely konvex burkának átmérője nem nagyobb egyetlen más elrendezés konvex burka átmérőjénél?

14. probléma. Mely feltétel mellet igaz az, hogy egy legtömörebb n elemű elrendezést magába foglaló legszűkebb kör (gömb) sugara csak akkor növekszik n-ről $n+1$-re térve, ha a körben (gömbben) nincs már helye több halmaznak?

15. probléma. Mit lehet mondani az előző problémák megoldásáról, ha egy-egy hordozóhalmazban több rögzített vagy lebegő mérőpont is szerepel?

16. probléma. Mit lehet mondani az előző feladatok megoldásáról, ha iteráljuk a feladat feltételeit: hordozóhalmazon egy újabb hordozóhalmaz és azon a mérőpont stb. ...?

17. probléma. Halmazrendszerek lazaságát definiálva úgy is el lehet járni, hogy nem a $g(P)$ minimális, hanem maximális értékét vesszük számításba. Mit lehet ekkor mondani az egyes itt felmerülő problémák megoldásáról?

18. probléma. Mi az összefüggés a különböző módon definiált lazasági mérőszámú extremális elrendezések és ezek lazaságai és tömörségei között?

Fenti problémák ismertetésénél nem volt célunk egymástól független problémák felsorolása, úgy szerepeltettük őket, ahogy felmerültek.

A dolgozat problémakörére POGÁNY CSABA hívta fel a szerző figyelmét. Ugyancsak ő hívta fel a figyelmet a lebegő mérőpont, a sávos és rácsos, valamint a réteges és vonalas elrendezés vizsgálatára és a 14—18. problémákra, valamint a 10. problémával kapcsolatban a legtömörebb elrendezés körhöz (gömbhöz) való konvergenciájának vizsgálatára.

Az 1.1.2. a probléma azonos FEJES TÓTH LÁSZLÓ [2] egy *másképp megfogalmazott* problémájával, amellyel kapcsolatban HORVÁTH JENŐ [3] ért el eredményeket.

Térbeli rokon problémákat oldottak meg BALÁZS ERZSÉBET [1] és LAJOS JÓZSEF [4], lebegő mérőpontos problémákat old meg TÖLGYESI LÁSZLÓ [5]-ben.

Dolgozatunk következő részében extremális tömörségű elrendezésekkel kapcsolatos olyan eredményekkel foglalkozunk, amelyekben majd az itt ismertetett konstrukcióknak lényeges szerep jut.

IRODALOM

[1] BALÁZS ERZSÉBET: *publikálatlan eredmény*
[2] FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *szóbeli közlés*
[3] HORVÁTH JENŐ: Távolságok összegére vonatkozó egy minimum problémáról. Mat. Lapok 1969 1—2 **20.**
[4] LAJOS JÓZSEF: *publikálatlan eredmény.*
[5] TÖLGYESI LÁSZLÓ: Egy elhelyezési problémakörről, I., *MTA III. Oszt. Közl.* **19**, (1969).

(Beérkezett: 1969. VI. 25.)

PROBLEMS CONCERNING EXTREMAL MASSIVENESS OF POINT SET SYSTEMS

by

ISTVÁN BENEDIKTI

This paper is concerned with the research of the packing of several plane domains under restrictions for example let the value of the function ($*$) be minimal, where $f(P_i, P_j)$ is the Euklidean disbetween points P_i and P_j ($P_i \in H_i$, $P_j \in H_j$, $H_i \cap H_j = \varnothing$ $i, j=1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$).

FEJES TÓTH LÁSZLÓ EGY SEJTÉSÉRŐL

Írta: RUDA MIHÁLY

In memoriam Varga Ottó (1909—1969)

Bevezetés

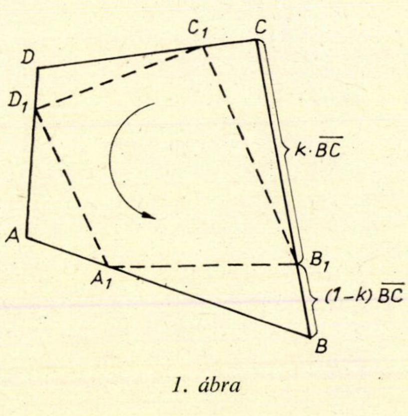
Egy adott konvex n-szög minden oldalát kettéosztjuk $k/(1-k)$ arányban ($0<k<1$), a következő módon: Legyenek a sokszög csúcsai rendre $A_0, A_1, A_2, \ldots, \ldots, A_n = A_0$, az osztópontok pedig $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n = B_0$. Ekkor $A_0B_0 : B_0A_1 = A_1B_1 : B_1A_2 = \ldots = A_{n-1}B_{n-1} : B_{n-1}A_n = k:(1-k)$. Az osztópontok mint csúcspontok által meghatározott $B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots B_n$ sokszögre ugyanilyen $k/(1-k)$ felosztási arány mellett és ugyanolyan körüljárással ismételjük az eljárást. Így eljutunk egy harmadik $C_1C_2 \ldots C_n$ sokszöghöz úgy, hogy $B_1C_1 : C_1B_2 = B_2C_2 : C_2B_3 = \ldots \ldots = B_nC_n : C_nB_1 = k:(1-k)$. FEJES TÓTH LÁSZLÓ sejtése az, hogy *az iteráció által nyert sokszögek egy-egy affinitással mindig olyan sokszögekbe vihetők, amelyek egy szabályos sokszöghöz tartanak.*

A sejtés bizonyítása a $k=1/2$ értékre, öt- és hatszögre ismeretes [1, 2]. Négyszögre a $k=1/2$ érték mellett a sejtés helyessége triviális, hiszen már az első lépésben paralelogrammához jutunk.

Négyszög esetén sem adható ilyen egyszerűen válasz, ha $k \neq 1/2$. A következőkben ezt a problémát vizsgáljuk.

A sejtés bizonyítása négyszögre

Adott egy tetszőleges $ABCD$ négyszög. Ennek oldalait felosztjuk $k/(1-k)$ arányban úgy, hogy ha az osztópontok $A_1B_1C_1D_1$, akkor $\overline{AA_1} : \overline{A_1B} = \overline{BB_1} : \overline{B_1C} = \overline{CC_1} : \overline{C_1D} = \overline{DD_1} : \overline{D_1A} = (1-k)/k$. Legyen $1/2 < k < 1$ (1. ábra).



1. ábra

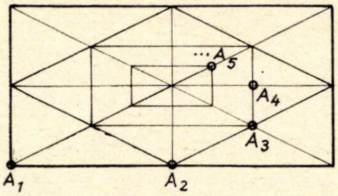
Az eljárást folytatva az i-edik lépésben egy $A_iB_iC_iD_i$ négyszöghöz jutunk. Bebizonyítjuk, hogy miközben i végtelenhez tart, a négyszögek sorozata durván kifejezve, paralelogrammához konvergál.

Az eljárás folyamán a négyszögek tulajdonképpen egy ponttá zsugorodnak, s így minden négyszögre egy-egy megfelelő mértékű nagyítást kell alkalmaznunk. Fontos figyelembe venni azt a tényt is, hogy a négyszögsorozat, melyet az iteráció során kapunk, általában nem egyetlen paralelogrammához tart. Legegyszerűbb példa erre a téglalap $k=1/2$ érték mellett. Ekkor az eljárás közben váltakozva rombusz, illetve téglalap lesz a négyszög, és így határhelyzetként is ezt a két különböző típusú paralelogrammát kapjuk (2. ábra).

A következőkben tehát, ha azt mondjuk, hogy az eljárás által adott négyszögsorozat paralelogrammához tart, akkor nem egyetlen paralelogrammára gondolunk, hanem csupán arra, hogy az egyes négyszögek típusát tekintve konvergál a sorozat a paralelogramma típushoz. Mindenestre problémát jelent az, hogy milyen tulajdonság alapján döntjük el az iteráció által kapott négyszögsorozatról, hogy paralelogrammához konvergál-e vagy sem.

A kérdés megválaszolására több lehetőség is adódik, a paralelogramma különböző lehetséges definícióit alapul véve.

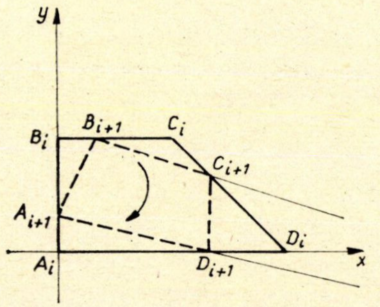
Egy lehetséges definíció például a következő: egy négyszögsorozat paralelogrammához tart, ha a szemköztes oldalegyenesek szöge nullához tart.



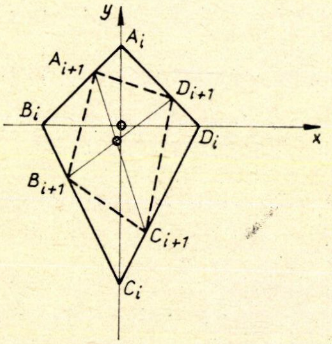
2. ábra

E definíció alkalmazásánál az a kényelmetlenség merül fel, hogy az eljárás közben a tekintett két szög közül nem feltétlenül tart mindkettő monoton nullához. Legyenek például az $A_iB_iC_iD_i$ négyszög csúcsai rendre a (0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 0) koordinátájú pontok a síkban, és legyen $k=2/3$ (3. ábra).
Ekkor a következő lépésben adódó $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}D_{i+1}$ négyszögben már nincsen párhuzamos oldalpár, míg az előző négyszög egy trapéz volt.

Hasonlóképpen nem mondható el az sem, hogy az eljárás közben a négyszög mindkét átlójának felezőpontja monoton közeledik az átlók metszéspontjához. (Ez is paralelogrammához való közeledést jelentene.) Tekintsük például azt az $A_iB_iC_iD_i$ deltoidot, amelynek csúcsai rendre a sík (0, 3), (−3, 0), (0, −6), (3, 0) koordinátájú pontjai. Ha például $k=2/3$, akkor a következő lépésben adódó négyszög átlóinak már egyike sem felezi a másikat (4. ábra).



3. ábra

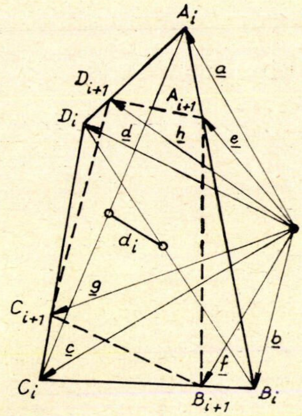


4. ábra

A következőkben — a fenti lehetőségeket félretéve — azt használjuk fel, hogy a paralelogramma átlóinak felezőpontjai egybeesnek (vagyis távolságuk nulla). Legyen az eljárás közben előállított i-edik négyszögben az átlók felezőpontjainak távolsága d_i. Jelöljük ugyanezen négyszög nagyobbik átlójának hosszát l_i-vel. Ekkor a következő tétel mondható ki.

TÉTEL. *A négyszögek sorozata (esetleg elfajuló) paralelogrammához tart*, azaz $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{d_i}{l_i}=0$. Ismételten felhívjuk a figyelmet arra, hogy nem egyetlen konkrét paralelogrammáról, hanem a négyszögsorozat tagjainak típusáról van szó.

Bizonyítás. Jelölje az i-edik lépésben előállított négyszög csúcsaihoz vezető vektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Ekkor az $i+1$-edik négyszög csúcsait rendre az



5. ábra

$$\mathbf{e} = k\mathbf{a}+(1-k)\mathbf{b},$$

$$\mathbf{f} = k\mathbf{b}+(1-k)\mathbf{c},$$

$$\mathbf{g} = k\mathbf{c}+(1-k)\mathbf{d},$$

$$\mathbf{h} = k\mathbf{d}+(1-k)\mathbf{a}$$

vektorok adják, ahol $1/2<k<1$ (5. ábra).

Azonnal látható, hogy

$$d_i = 1/2|\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}-\mathbf{d}|$$

és ugyanígy

$$d_{i+1} = 1/2|\mathbf{e}+\mathbf{g}-\mathbf{f}-\mathbf{h}| =$$

$$= 1/2|k\mathbf{a}+(1-k)\mathbf{b}+k\mathbf{c}+(1-k)\mathbf{d}-k\mathbf{b}-(1-k)\mathbf{c}-k\mathbf{d}-(1-k)\mathbf{a}| =$$

$$= 1/2(2k-1)|\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}-\mathbf{d}|,$$

tehát

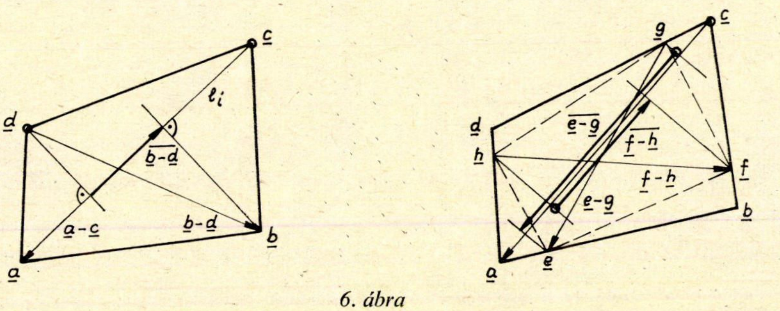
$$d_{i+1} = (2k-1)d_i. \tag{1}$$

Legyen az i-edik négyszögben a legnagyobb átló az $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ vektor (6. ábra), azaz $l_i = |a-c|$.

Jelöljük a $\mathbf{b}-\mathbf{d}$ vektornak az $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ egyenesébe eső komponensét $\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}}$-vel. (Nyilván $|\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}}|\leqq|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$, ha $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ nem a kisebbik átló.)

Két esetet különböztetünk meg:

(a) $|\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}}|\geqq\frac{2k-1}{k}|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$ és az $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ illetve $\mathbf{b}-\mathbf{d}$ vektor ellenkező irányú.



6. ábra

Jelöljük ekkor az $\mathbf{f}-\mathbf{h}$ vektornak (mely az $(i+1)$-edik négyszög egy átlója) az $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ irányba vett vetületét $\overline{\mathbf{f}-\mathbf{h}}$-val (6. ábra).

$$\mathbf{f}-\mathbf{h} = k\mathbf{b}+(1-k)\mathbf{c}-k\mathbf{d}-(1-k)\mathbf{a} = k(\mathbf{b}-\mathbf{d})+(1-k)(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

Ekkor

$$\overline{\mathbf{f}-\mathbf{h}} = k(\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}})+(1-k)(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

Kihasználva az (a) feltételt:

$$|\overline{\mathbf{f}-\mathbf{h}}| \geqq k\frac{2k-1}{k}|\mathbf{a}-\mathbf{c}|+(1-k)|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \big(2k-1+(1-k)\big)|\mathbf{a}-\mathbf{c}|.$$

Legyen $0<\delta<1-k$ rögzített érték! Így igaz, hogy

$$|\mathbf{f}-\mathbf{h}|>(2k-1+\delta)|\mathbf{a}-\mathbf{c}|.$$

(b) $|\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}}|\leqq\frac{2k-1}{k}|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$ vagy ez a két vektor egyező irányú.

Állítsuk elő az $\mathbf{e}-\mathbf{g}$ vektort!

$$\mathbf{e}-\mathbf{g} = k(\mathbf{a}-\mathbf{c})+(1-k)(\mathbf{b}-\mathbf{d}).$$

Jelöljük az $\mathbf{e}-\mathbf{g}$ vektor $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ irányú komponensét $\overline{\mathbf{e}-\mathbf{g}}$-vel! (6. ábra)

$$\overline{\mathbf{e}-\mathbf{g}} = k(\mathbf{a}-\mathbf{c})+(1-k)(\overline{\mathbf{b}-\mathbf{d}})$$

A (b) feltétel szerint: $|\overline{\mathbf{e}-\mathbf{g}}|\geqq k|\mathbf{a}-\mathbf{c}|-(1-k)\frac{2k-1}{k}|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \left[\frac{1}{k}(1-k)^2+(2k-1)\right]\cdot$
$\cdot|\mathbf{a}-\mathbf{c}|>\big(2k-1+(1-k)^2\big)|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$ (mivel $k<1$).

Tehát $|\mathbf{e}-\mathbf{g}|>(2k-1+\delta^2)|\mathbf{a}-\mathbf{c}|$.

Bebizonyítottuk tehát, hogy mind az (a), mind a (b) feltétel mellett

$$\frac{l_i}{l_{i+1}}<\frac{1}{2k-1+\delta^2}, \tag{2}$$

hiszen $l_{i+1} = \max\{|\mathbf{f}-\mathbf{h}|, |\mathbf{e}-\mathbf{g}|\}$, és $\delta>\delta^2$, mert $0<\delta<1$.

Az (1) egyenlőségből és a (2) egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy

$$\frac{d_i(2k-1)}{l_i(2k-1+\delta^2)}>\frac{d_{i+1}}{l_{i+1}}.$$

Ebből

$$\frac{d_1}{l_1}\cdot\left(\frac{2k-1}{2k-1+\delta^2}\right)^i>\frac{d_i}{l_i}. \tag{3}$$

Ezzel tételünket be is bizonyítottuk, hiszen a $\frac{d_i}{l_i}$ pozitív tagokból álló számsorozatot majoráló $\frac{d_1}{l_1}\left(\frac{2k-1}{2k-1+\delta^2}\right)^i$ sorozat is nullához tart (ha az i tart a végtelenhez), mert $1/2<k<1$, és $\delta>0$ rögzített érték.

1. KÖVETKEZMÉNY. A (3) egyenlőtlenségből azonnal látható, hogy a $\frac{d_i}{l_i}$ sorozat nullához való konvergálásához nem szükséges, hogy az eljárás közben k értéke változatlan legyen, elegendő az is, hogy ha az i-edik lépéseknél használt k_i felosztási arányok (egy rögzített körüljárási irány mellett) az $1/2 < k_i < 1-\delta$ feltételt kielégítik, ahol $\delta > 0$ rögzített érték, $i = 1, 2, \ldots$.

2. KÖVETKEZMÉNY. Mivel a bizonyítás közben nem használtuk ki, hogy az **a**, **b**, **c**, **d**, illetve **e**, **f**, **g**, **h** vektorok síkbeliek, ezért tételünk térbeli négyszögekre is igaz.

Itt mutatkozik meg az általunk használt jellemző érték $\left(\frac{d_i}{l_i}\right)$ előnye is, hiszen például az, hogy egy négyszög szemköztes oldalainak hossza egyenlő, többdimenziós térben azt sem biztosítja, hogy a négyszög síkbeli.

A következőkben néhány megjegyzés, illetve még megoldatlan probléma szerepel a fenti iterációs eljárással kapcsolatban.

Megjegyzések és problémák

Elsőként (bizonyítás nélkül) azt jegyezzük meg, hogy a $\frac{d_i}{l_i}$ hányados nullához tartása valóban a négyszögsorozat paralelogrammához közeledését jelenti, hiszen ha $\frac{d_i}{l_i}$ elég kicsiny, akkor a szemköztes oldalegyenesek iránya is tetszőlegesen közel kerülhet egymáshoz, illetve a szemközti oldalak hosszának különbsége is tetszőlegesen kicsi lehet (természetesen az oldalhosszakat a négyszög átmérőjével osztjuk).

Érdekes problémák merülnek fel, ha azt vizsgáljuk, hogy hogyan viselkedik a négyszögsorozat az iteráció alatt. Feltehető például a következő néhány kérdés:

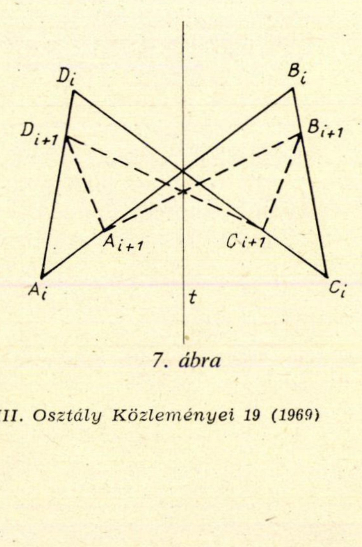
1. Általában milyen négyszögeket kapunk az eljárás során egy adott négyszögből kiindulva, adott $k/(1-k)$ felosztási arány mellett, illetve milyen négyszögből kell kiindulni és mekkora legyen a k értéke, hogy véges sok lépésben egy előre adott négyszöghöz hasonló négyszöget kapjunk (azaz hány lépésben jutunk a kívánt eredményre)?

Általánosabb kérdésekre térve, elmondható például, hogy az eljárás a konvexitást megtartja, azonban:

2. Igaz-e, hogy egy konkáv (de nem hurkolt) négyszögből véges sok lépés után konvex négyszöghöz jutunk?

3. Elmondható-e ugyanez bizonyos hurkolt négyszögekről is? (Milyen hurkolt négyszögek maradnak mindig hurkoltak?)

Az igaz, hogy van olyan hurkolt négyszög, mely az eljárás közben mindig hurkolt marad. Például, ha a négyszög oldalai egy szimmetrikus trapéz szárai és átlói (7. ábra).



7. ábra

Látható, hogy határhelyzetként egy szakasszá fajuló négyszöget kapunk. Ez egyébként minden olyan négyszögre igaz, mely az iteráció közben mindig hurkolt marad, különben nem tarthatna a megfelelő négyszögsorozat paralelogrammához.

4. Kérdés, hogy általában mikor jutunk elfajuló négyszöghöz.

Ha mind a négy csúcs egy egyenesbe esik, akkor ez a helyzet az eljárás során nem változik. Ha a négyszög elfajult egy nem elfajuló háromszöggé (három csúcs esik egy egyenesbe), akkor rögtön az első lépésben egy konvex négyszöghöz jutunk, így (nem elfajuló) háromszöget az eljárás közben (egynél többször) nem kaphatunk — még határhelyzetként sem.

5. Felmerül az a kérdés is, hogy ha az iteráció során esetleg nemcsak paralelogrammához, hanem speciálisabb négyszöghöz: rombuszhoz, négyzethez is juthatunk, akkor milyen négyszögből kiindulva történhet ez meg?

Az előző szakaszban már volt szó arról, hogy az eljárás által adott négyszögsorozat általában nem egyetlen paralelogrammához tart (l. pl. 2. ábra). A következő eseteket különböztethetjük meg:

a) Egyetlen paralelogrammát kapunk határhelyzetként. Ez az eset fordul elő akkor, ha egy négyzetre alkalmazzuk az eljárást, hiszen a négyzet (hasonlóság erejéig) invariáns az eljárással szemben, és így határértékként is négyzetet kapunk. Általában megvizsgálható az a probléma:

6. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy (nem feltétlenül konvex) sokszög invariáns legyen az eljárással szemben. (Például elégséges feltételként megadható a sokszög szabályossága.)

b) Véges sok (egynél több) különböző típusú paralelogrammát kapunk határhelyzetként (l. pl. 2. ábra).

c) Határhelyzetként végtelen sok különbözőtípusú paralelogrammát nyerünk.

d) Nincs egyetlen olyan paralelogramma típus sem, amelyhez a négyszögsorozat konvergál. Ez azonban a Boltzano—Weierstrass-tétel szerint lehetetlen.

Ezután a következőre kell választ adni:

7. A fenti (a—d) lehetőségek közül melyek és mikor lépnek fel. (Az a) és b) esetre már adtunk példát, tehát ezek a lehetőségek megvalósulhatnak.)

Ha határhelyzetként véges vagy végtelen sok paralelogrammatípus jön létre, akkor megvizsgálható:

8. Milyen tulajdonsággal rendelkezik az így nyert paralelogramma, illetve a véges vagy végtelen számú elemből álló paralelogramma osztály.

Ennek a kérdésnek a megfordítása:

9. Milyen négyszögből kell kiindulni, hogy egy előre adott paralelogrammához, illetve paralelogramma osztályhoz jussunk? (Egy adott paralelogramma, illetve paralelogramma osztály előállítható-e ilyen eljárás segítségével?)

Megjegyzés. Mindenképpen figyelembe kell venni azt, hogy a fenti (1—9.) problémákra adott válasz függhet a k értékétől is. Egyébként a fentiekkel analóg kérdések (eltekintve a 6. problémától) nemcsak négyszögekre, hanem általában sokszögekkel kapcsolatban is felvethetők. Az utóbbi esetben,

10. Ha a kiindulási sokszög nem síkbeli, még az is kérdéses, hogy határértékként síkbeli sokszöget kapunk-e.

Láttuk, hogy négyszögeknél a felosztási arányt meghatározó k értéket nem kell feltétlenül rögzíteni az iteráció során.

11. Vajon tetszőleges sokszög esetén is ugyanolyan eredményre jutunk az előbbiekben említett módon változó k értékek mellett, mint rögzített k használatával?

Befejezésként még a következő problémát említhetjük meg: Négyszögek esetén tulajdonképpen csak azt bizonyítottuk, hogy a határ-négyszög centrálszimmetrikus az átlók közös felezőpontjára. Felmerül a kérdés, hogy

12. Hasonlóan egyszerű módon — az eddig használt eszközökkel — tetszőleges páros oldalszámú sokszögre bizonyítható-e az adódó sokszögsorozat centrálszimmetrikussá válása határhelyzetben?

Ennek a kérdésnek a megválaszolásakor már nem vezet közvetlenül eredményre az átlók felezőpontjait összekötő vektorok vizsgálata. Például már hatszög esetén is, ha $k=1/2$, az átlók felezőpontjait összekötő szakaszok leghosszabbja az iteráció során lépésenként csak a felére csökken, míg bizonyos esetekben (megfelelő hurkolt hatszögnél) a legnagyobb átló hossza közel 1/3 részére is csökkenhet.

IRODALOM

[1] Fejes Tóth László: Sokszögekre vonatkozó iterációs eljárások. *Matematikai Lapok* **20** (1969) (megjelenőben).

[2] Kárteszi Ferenc: Konvex ötszögből származtatatt affin-szabályos ötszögpár, *Matematikai Lapok* **20** (1969) (megjelenőben).

(Beérkezett: 1969. VI. 25.)

ON A CONJECTURE OF L. FEJES TÓTH

by

M. Ruda

Let Q_0 be a quadrangle and Q_n the quadrangle whose vertices divide the sides of Q_{n-1} in a given ratio $k/(1-k)$ $(n=1, 2, \dots; 0<k<1)$. It is shown that there are affine equivalent replicas of $Q_0, Q_1, \dots$ which converge to a square or its projection on a straight line.

ELLENTMONDÓ FELTÉTELRENDSZEREK KEZELÉSÉRŐL, I.*

Írta: POGÁNY CSABA

Varga Ottó akadémikus emlékére

1. Bevezetés

A gyakorlatban sokszor merül fel olyan probléma, amelynél bizonyos feltételrendszer pontos kielégítése nem lehetséges, ennek ellentmondó (vagy a mérési pontatlanság miatt ellentmondóvá vált vagy „túlhatározott") volta miatt, mégis meg kell határozni olyan „megoldást", ami (valamilyen értelemben) „legkevésbé mond ellene" a feltételrendszernek. (Ilyen jellegű problémák merülnek fel pl. a kiegyenlítő számítások feladatkörében is.)

E témakörben — magától értetődően — fontos szerepe van a „legkevésbé ellentmondó megoldás" definíciójának. Egy ilyen definíció megadása után a probléma egy szélsőérték-meghatározási feladattá válik.

Megoldásra vár azonban az a kérdés, hogy egyes legkevésbé ellentmondósági kritériumok alkalmazása konkrét esetekben mennyire jogosult. Közismert, hogy ilyen kritériumok nemegyszer *csupán* annak köszönhetik létüket, hogy könnyen kezelhető szélsőérték-feladatra vezetnek, nem pedig annak, hogy a kritérium, melynek szempontjából a megoldás legkevésbé lesz ellentmondó, valóban a gyakorlatilag is legjobbhoz vezet.

Ezekből leszűrhető az a következtetés, hogy jogosult a vizsgálatoknak egy olyan iránya is, amely olyan eljárások megoldását tűzi ki célul, amelyek a nem ellentmondó esetekben az egzakt megoldásokhoz vezetnek, az ellentmondó esetekben pedig az általuk szolgáltatott „megoldások" olyanok, hogy mennél inkább „közeledik" egy ellentmondó rendszer egy ellentmondástalanhoz, annál inkább „közeledik" a „megoldás" is az ellentmondástalan rendszer megoldásához. (Ezeknél a módszereknél tehát azt, hogy mi az a szempont, amelyből nézve az eljárások legkevésbé ellentmondó megoldásokat adnak, utólag kell meghatározni, ha erre szükség vagy lehetőség van. Ezektől függetlenül azonban a gyakorlat teljesen tapasztalati úton is kimondhat olyan ítéletet, hogy adott megoldás adott célra jobb, mint egy másik.)

E kérdéskörben a következő típusú problémák merülnek fel.

a) Adott a legkevésbé ellentmondóság egy kritériuma. Mely eljárásokkal határozhatók meg a legkevésbé ellentmondó megoldások?

b) Adott egy eljárás, amely „folytonos" olyan értelemben, hogy ha egy rendszer nem ellentmondó, akkor egzakt megoldást, egymáshoz „közeli" rendszerek esetében pedig egymáshoz közeli megoldást ad úgy, hogy ha egy rendszer közelebb van egy másikhoz egy harmadiknál, akkor ennek megoldása is közelebb van a másikéhoz, mint a harmadiknak a megoldása. Hogyan lehet megadni egy ilyen eljáráshoz legkevésbé ellentmondásossági kritériumot úgy, hogy a szóban forgó eljárás minden rendszer esetében a legkevésbé ellentmondó megoldást adja meg?

* Ez a dolgozat a szerzőnek *„A számítástechnika alkalmazásai új tudományterületeken"* című kollokviumon 1969. június 5-én tartott előadásának részletesebb változata.

c) A megoldási eljárások segítségével, egybevetve az ellentmondástalan és az ellentmondó esetekben fellépő jelenségeket, vagy akár eljárásoktól függetlenül is, hogyan lehet rendszerek ellentmondásosságát mérni?

Ennek a dolgozatnak témája főleg a b) alatt leírt tulajdonságú eljárásokkal kapcsolatos, de szerepelni fognak az a) és c) típusba tartozó kérdések is, különös tekintettel a lineáris egyenletrendszerek esetére. Mielőtt azonban erre sor kerülhet, néhány elnevezés értelmét kell tisztázni.

2. Néhány terminológiai probléma

A következőkben n valós változós függvényekről lesz szó. Ezek értelmezési tartománya az n dimenziós euklideszi tér, E^n egy részhalmazaként fogható fel.

Legyen adva egy feltételrendszer pl. az alábbi formában

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x) &= f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x) &= f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ha van olyan $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$, hogy

$$\begin{aligned} f_1(x^*) &= 0, \\ f_2(x^*) &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ f_m(x^*) &= 0, \end{aligned}$$

akkor az (1) rendszer per definitionem kielégíthető, és x^* (1)-nek egy megoldása.

Kézenfekvő volna az

$$\inf_{x \in E^n} \left(f_1^2(x) + f_2^2(x) + \cdots + f_m^2(x)\right)$$

számmal jellemezni (1) kielégíthetetlenségét, megoldhatatlanságát, ellentmondásosságát. Igen ám, de (1)-gyel ekvivalens az alábbi

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) &= 0, \\ c_2 f_2(x) &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ c_m f_m(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

rendszer, ahol $c_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$, és ennél az

$$\inf_{x \in E^n} \left(c_1^2 f_1^2(x) + c_2^2 f_2^2(x) + \cdots + c_m^2 f_m^2(x)\right)$$

egészen más lehet, mint az előbb. Ebből is látható, hogy az ekvivalenciáról mindig csak bizonyos szempont szerint lehet beszélni (célszerű erre az esetre a *gyökhely-*

halmaz ekvivalencia elnevezést használni). Általánosságban bevezethető a következő.

Definíció. *Legyen adva egy E eljárás (egyenletrendszerekre). Két objektum (egyenletrendszer) E ekvivalens, ha az E eljárás mindkettőnél ugyanarra az eredményre vezet.*

(Érdekes példa az E eljárás fontos szerepére a definícióban az, hogy a legtöbb numerikus eljárás szempontjából $|f(x)|+|g(x)|=0$ és $10|f(x)|+|g(x)|=0$ nem ekvivalens egyenlet.)

Az előbbi nehézségek nem lépnek fel akkor, ha (1) helyett annak geometriai interpretációja szerepel. Az $f_i(x)=0$ segítségével definiálható az

$$F(f_i)=\{x|f_i(x)=0,\ x\in E^n\}$$

ponthalmaz. Ekkor nyilván

$$F(f_i)=F(c_if_i).$$

Az (1) megoldásának feladata a $\bigcap_{i=1}^{m} F(f_i)$ halmaz meghatározásává válik. (1) ellentmondásossága $\bigcap_{i=1}^{m} F(f_i)$ üres voltával egyenértékű. Az ellentmondó esetekben azonban itt más nehézség lép fel. Ha van egy eljárás, amely az $F(f_i)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ geometriai rendszerhez hozzárendel valamit, biztos, hogy ugyanazt rendeli az $F(c_if_i)$ $(c_i\neq 0,\ i=1,2,\ldots,m)$ rendszerhez, de nem biztos, hogy ugyanezt rendeli az $F(f_i^2)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ rendszerhez, amely gyökhelyhalmaz szempontjából az előzővel ekvivalens, ugyanis az $\{F(f_i)\}$ és az $\{F(f_i^2)\}$ ponthalmazrendszer nem szükségképpen azonos. Egyszerű példa erre a következő: legyen

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2(x)=0,$$
$$f_3(x)=0$$

három felület egyenlete E^n-ben. Ezt megoldandó egyenletrendszernek fogva fel ekvivalens az

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2^2(x)+f_3^2(x) = 0$$

rendszerrel, amelyet geometriailag interpretálva biztos, hogy nem „három" felület lesz (sokszor pl. egy felület és egy térgörbe).

A következőkben az a tény, hogy egy-egy ponthalmaznak mi „az egyenlete" közömbös lesz (a ponthalmazok megadását szolgáló eljárások, azaz pl. ezek egyenletei többfélék lehetnek, ezért hiba is egy ponthalmaznak „*az* egyenletéről" beszélni „*egy* egyenlete" helyett); a ponthalmazoktól mint geometriai objektumoktól és csak ezektől függő eljárások keresése lesz a cél. Hogy ez a módszer egyes rendszerek esetében mennyire jogos, arra matematikailag felelni lehetetlen. Figyelembe kell venni azt, hogy a „valóság leírására" felállított modellek milyen átalakítási eljárásokkal szemben tartják meg „valósághűségüket". Elképzelhető olyan eset, hogy egy modell „híven írja le a valóságot" úgy mint hipersíkrendszer, illetve e rendszer elemeinek közös része, de mint lineáris egyenletrendszer, illetve ennek megoldása már olyan lesz, hogy az ellentmondó esetben „valósághűsége" függeni fog a hipersíkok egyenlete felírásmódjától (ami tulajdonképpen egy eljárási utasítás).

Ezeken túlmenően csupán az elnevezésbeli ellentmondás elkerülése végett célszerű az alábbi fogalmat definiálni.

Definíció. *Legyen adva egy $K(x)$ kijelentés, amely E^n elemeire értelmes; a $H=\{x|K(x)=\uparrow\}$ halmaznak ekkor K egy indikátora.*

Az indikátor fogalmával el lehet kerülni az olyan ellentmondásokat, mint pl. „a felső félsík *egyenlete* a következő *egyenlőtlenség* $y>0$". (Megjegyezhető azonban, hogy a felső félsíknak is vannak „egyenletei" pl. $\mathrm{sg}(y)-1=0$ vagy $|y|-y=0$, vagy $\sqrt{y^2}-y=0$ stb., ahol az utóbbi kettő zárt félsíkot definiál.)

A cél tehát a következőkben bizonyos ponthalmazok közös részének nem létezése esetén, a ponthalmazok indikációjától, indikálásának módjától amennyire lehet független, a bevezetés b) pontjában felsorolt tulajdonságú eljárások megadása lesz.

(Beérkezett: 1969. VI. 26.)

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Merkly László

A kézirat a nyomdába érkezett: 1969. XI. 26. — Terjedelem: 17,15 (A/5) ív +2 melléklet

69-7517 — Szegedi Nyomda

Ára: 37,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Megjelent 1970. V. 30.

Index: 26498