A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

XVII. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1967

III. OSZT. KÖZL.

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

FROM THE FOREIGN LITERATURE

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVII. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1967

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVII. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleménye változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790 057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae.

EGY SACCHERI-FÉLE KONTRA-EUKLIDESZI RENDSZER NYOMAI ARISTOTELES MŰVEIBEN

A PÁRHUZAMOSAK EUKLIDES-FÉLE POSZTULÁTUMÁNAK TÖRTÉNELMI ELŐZMÉNYEI

Írta: TÓTH IMRE*

„Le contre vient avant le pour"
Picasso

Bevezetés

1. A nem-euklideszi geometria megjelenését, amint ismeretes, történelmileg az ún. *párhuzamosak problémája* előzte meg. A matematika utólagos fejlődése által rendelkezésünkre bocsátott fogalomkészlet segítségével ez a probléma a következőképpen fogalmazható meg: *bebizonyítandó, hogy az* EUKLIDES *Elemeiben szereplő párhuzamosak posztulátuma a Bolyai-féle abszolút geometria tétele.* BOLYAI-féle abszolút geometrián értjük pl. a geometriának HILBERT által axiomatizált rendszerét, amelyből a párhuzamossági axióma *hiányzik.* A párhuzamosak problémája tehát arra az explicite be nem vallott *à priori* jellegű meta-matematikai felfogásra alapul, amely szerint az ún. euklideszi geometria összes tételeinek a levezetésére elegendő a HILBERT-féle 20 axióma közül csupán 19, nevezetesen, a párhuzamosak axiómáján kívül az összes többi; e felfogás értelmében az egyetemes *klasszikus ún. euklideszi geometria azonos volna a Bolyai-féle abszolút geometriával.*

A geometria posztulátumainak csoportjában az V-ik rendszámot viselő (és egyben utolsó) állítás, eredeti megfogalmazásában a következőképpen hangzik: *ha* két *koplanáris egyenest egy harmadik egyenes úgy metsz, hogy a metsző egyenes egyik oldalán létrejött két belső szög együttesen kisebb mint* $2R$ *— akkor a két koplanáris egyenes metszi egymást*; *éspedig — fűzi hozzá* EUKLIDES *— a metsző egyenesnek azon az oldalán, amelyiken a két belső szög összege kisebb mint* $2R$[1]. A párhuzamosak problémájának alapjánál tehát az a világosan talán be nem vallott, öntudatlan hiedelem állott, hogy ez az állítás egy abszolút-geometriai tétel, amely a Bolyai-féle abszolút geometria axiómáiból szigorúan levezethető.

A párhuzamosak problémájára vonatkozó történelmi források

2. A párhuzamosak problémájának történetét illetőleg egy igen megbízható és elméleti tekintetben is nagy értékű forrásmunkával rendelkezünk: PROKLOS-nak, az V. századbeli athéni neoplatonikus iskola vezető egyéniségének, az *Elemek I*-ső könyvéhez írott, kitűnő kommentárjait tartalmazó munkájával.[2] PROKLOS művéből indirekt módon mindenekelőtt arra következtethetünk, hogy a szóban forgó állítást

* *Universitatea Bucuresti* Catedra de Fundamentele Matematicii.

[1] *Euclidis Elementa,* (ed. Heiberg), vol. I, Lipsiae 1883.

[2] *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii* (ed. Friedlein), Lipsiae 1873; a továbbiakban ennek a kiadásnak a lap- és sorszámai szerint idézünk.

maga EUKLIDES vette fel a bizonyítatlan (és egyben bizonyíthatatlannak feltételezett) posztulátumok sorába: ugyanis mind PROKLOS, mind az általa idézett őt megelőző szerzők személyesen EUKLIDES-nek róják fel, rosszallólag, ennek az alapvető jellegű állításnak a posztulátumok közé való besorolását; ezzel egyetemben, EUKLIDES-nek tulajdonítják az implicit elismerését annak, a mai szemmel nézve nagy jelentőségű, meta-matematikai ténynek, hogy a kérdéses állítás nemcsak mindaddig *bizonyítatlan*, hanem mindörökké *bizonyíthatatlan* is volna.[3]

Ennél az értesülésnél még fontosabb talán, hogy PROKLOS közli saját, önmagában igen figyelemre méltó és szellemes megoldási kísérletét a párhuzamosak problémájának megoldására.[4] PROKLOS, továbbá még arról is tudósít bennünket, hogy a párhuzamosak problémájának megoldásával már előtte is kísérleteztek. Mindenekelőtt PTOLEMAIOS egy könyvét említi, amelyet a neves, II. századbeli csillagász, teljes egészében a párhuzamosak problémája megoldásának szentelt; művében, PROKLOS közli e könyv lényeges részének kivonatát és PTOLEMAIOS kísérletét egyben szigorú bírálatnak is aláveti, pontosan kimutatván a benne rejlő fogyatékosságot, amely a kísérletet teljes lényegében teljesen meghiúsítja.[5] PROKLOS ismer azonban egy i. e. I. században GEMINOS által írott munkát is, amelyben ez — más természetű érvekre alapozva — már akkor kételyét fejezte ki az EUKLIDES által bevezetett alapvető állítás posztulátum-jellegét illetőleg. PROKLOS művéből azonban nem tűnik ki világosan, hogy GEMINOS a puszta kételyen túl megkísérelte-e volna a probléma megoldását is.[6] Végezetül, PROKLOS említést tesz még, a párhuzamosak kérdésével kapcsolatban, POSEIDONOS, — GEMINOS mesterének nevéről is, aki a párhuzamos egyenesek számára egy új definíciót vezetett be és ezeket mint egy síkban fekvő *aequidistans* egyeneseket határozta meg[7] (eltérően az *Elemek I* 23 definíciójától, amely a párhuzamosakat, negatíve, mint egymást *nem metsző* koplanáris egyeneseket definiálja). Minden valószínűség szerint ennek az új definíciónak a bevezetésére éppen a párhuzamosak problémája megoldására irányuló kísérletek folyamán került sor: a POSEIDONOS-féle definícióból ugyanis a posztulátum szigorúan levezethető — természetesen csupán azért, mert ez a definíció, az Euklides-féle posztulátumot, rejtett formában már tartalmazza. Azt a feltevést, hogy már GEMINOS és POSEIDONOS is effektíve megkísérelték volna a párhuzamosak problémájának (kétségtelen azonban, hogy igen primitív jellegű) megoldását — némileg alátámasztani látszik az a körülmény, hogy a kérdéssel foglalkozó első középkori arab nyelvű szerzők nem ismerték kimutatható módon PROKLOS művét, ezzel szemben SIMPLIKIOS-on keresztül, vagy talán közvetlenül is — ismerték GEMINOS és POSEIDONOS műveit és feltételezhető, hogy kísérleteiket a két görög szerző kísérletének elvetélt jellege ösztönözte volna.[8]

[3] Proklos 183, 20—23; 365, 5—6.
[4] Proklos 371, 10—373, 2.
[5] Proklos 191, 23; 365, 7—367, 2; 368, 1—26.
[6] Proklos 183, 14—15.
[7] Proklos 176, 6—9; a párhuzamos egyenesek *ekvidistanciáját* Euklides az *Elem. I. 33* és *I. 34* tételekben bizonyítja.
[8] Az utóbbi években B. A. Rozenfeld, A. P. Juskevics orosz nyelven közzétették szinte az összes számbajöhető arab szerző művét a párhuzamosok problémájára vonatkozólag; ezekben sehol nem történik explicit hivatkozás Proklosra és annak közvetlen hatása nem is látszik kimutathatónak. Ezzel szemben An-Nairizi kommentárműve (megjelent arabul 900 körül — latinul pedig már a XII. században, Gerhardus Cremonensis fordításában, majd nyomtatásban: *Anaritii, in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii,* ed. M. Curtze, Lipsiae 1899) kimondottan szinte teljes egé-

Bármennyire valószínű is ez a feltevés, kétségtelen tény marad azonban, hogy a párhuzamosak problémájára valamint az első figyelemre méltó megoldási kísérletre vonatkozó első *hiteles, eredeti* forrás mindeddig változatlanul, PROKLOS műve volt.

A párhuzamosak problémájának helyzete a XVII. és XVIII. században

3. PROKLOS műve és kísérlete jelentős — mondhatnám döntő — történelmi befolyást gyakorolt a párhuzamosak problémájának megoldására irányuló kísérletek további fejlődésére Európában, főleg a XVI. századtól kezdve. Munkájában PROKLOS mindenütt a legnagyobb csodálattal beszél az *Elemek I.* könyvének logikai tökéletességéről és rendezettségéről és EUKLIDES-t csupán abban hibáztatja — és ezt igen súlyos hibának tartja! — hogy a kérdéses állítást bizonyítás nélkül fogadta el és a posztulátumok sorába helyezte.[9]

Ez a felfogás vált uralkodóvá a XVII. századtól kezdve: eszerint a párhuzamosak posztulátuma *éktelen folt* az *Elemek* kristálytiszta, harmonikus épületén[10] és SACCHERI, a XVIII. század elején, már az egész megoldási kísérletet egyenesen olyan etikai jellegű feladatként jellemzi, amelynek kötelességszerű célja EUKLIDES-t ettől a tűrhetetlen *folttól megtisztítani.*[11] Ez már csak azért is vált az ő szemében is ilyen halaszthatalan becsületbeli kötelességgé, mert ő már világosan felismerte, hogy a párhuzamosak problémájának megoldására irányuló kísérletek története tulajdonképpen egy eredendő bűn állandó felderítésében és a bűn leleplezője által való azonnali megismétlésében áll: mindegyik szerző az előző szerzők kísérleteinek

szében Simplikios (Gerhardus Cremonensis fordításában: Sambelichius) és Geminos (a latin szövegben Aganis) munkáit követi; (*Anaritii*, etc., 25—27, 34—35; 65—73; főleg a 70—72. oldalon közölt és Anaritius tanúsága szerint Geminostól származó bizonyítási kísérlet elemei szinte az összes későbbi arab szerzőknél fellelhetők, így Al-Hazen, X. század, majd Naszreddin, XIII. század, munkáiban). — Omar Khayyam (*Kommentarien zu den schwierigen Postulaten der Bücher von Euklid;* oroszra fordította B. A. Rozenfeld; Isztoriko Matemat. Isszledovanija V 1952, 69, 71, 74.) többször hivatkozik Anaritius míg Nasreddin (*Traité qui guérit des doutes en matière des lignes paralleles;* oroszra fordította B. A. Rozenfeld; Isztoriko Matemat. Isszledovanija XIII. 1960, 523—524) Simplikios munkájára hivatkozik; a szerzőre való explicit hivatkozás nélkül Nasreddin munkájában (*op. cit.* 485) megjelenik Geminos egy érve is a párhuzamosak posztulátuma bizonyításának szükségességére vonatkozólag; (ezt Proklos is idézi op. cit. 176, 18—177, 25) és ugyancsak egy Geminostól származó és Anaritius által részletesen idézett (*Anaritii* etc.70—72) bizonyítás (Nasreddin, *Traité* etc. 516—518). — Simplikios hatására vonatkozólag lásd meg B. A. Rosenfeld et A. P. Youschkevitch, *Les démonstrations du 5-ème postulat d'Euclide chez Tabit ibn Qurra et Schams ad-Dim al-Samarkandi,* (Istoriko Matemat. Isszledovanija XIV. 1961, 591).

[9] Proklos 76, 21—23; 176, 18—19; 182, 24—183, 6; 183, 20—184, 5; 191, 21—193, 9; 364, 19—21.

[10] Sir Henry Savile beszél első ízben (egy Oxfordban, 1621-ben megjelent munkájában) az *Elemek* két *foltjáról,* szépséghibájáról, amelyek közül az egyik a párhuzamosak posztulátumának bizonyítatlan volta („In pulcherrimo Geometriae corpore duo sunt naevi,. . ."; lásd, P. Stäckel—F. Engel, *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss; eine Urkundensamlung;* Leipzig 1895, 18). Wallis is már erről a *foltról* beszél (*De postulato quinto;* lásd: *Opera,* vol. II, 665, Oxford 1693). — A kifejezés szinte közkedveltté vált és mindenesetre kitűnő visszhangra talált a XIX. század elejének rendkívül romantikus akusztikájú szellemi környezetében. „Meg-foghatatlan, hogy ez az el-háríthatatlan homály ez az örök nap-fogyatkozás ez a' motsok hogy hagyatott a' Geometriába, ez az örök felleg a' szűz tiszta igazságon" — fakad ki Bolyai Farkas egy Marosvásárhelyről Bécsbe, 1820 tavaszán Jánoshoz írott levelében (Stäckel P., *Bolyai Farkas* és *Bolyai János geometriai vizsgálatai,* I. kötet, 75, Budapest 1914).

[11] Erről ír Saccheri, művének előszavában, és munkájának jellegzetesen barokk címében erről, mint egy már befejezett tényről beszél; *Euclides ab omni naevo vindicatus,* etc. Mediolani 1733, IX.

a kritikájából, hibáinak gyakran rendkívül elmés kimutatásából indul ki és munkáját egy — a megbírált elődénél általában raffináltabb —, megoldási kísérlet bemutatásával fejezi be, amely azonban ismét a kárhoztatott elődalapvető hibáját ismétli. Ez a hiba — mint PROKLOS-nál is mindig egy *petitio principii* — egy *logikai rövidzárlat*, amelyben a bizonyítandó tétel, implicit formában már a feltevésekben benne foglaltatik. Mindezek a kísérletek *direkt* úton igyekeztek a problémát megoldani, azaz a párhuzamosak euklidesi állítását közvetlenül igyekeztek a Bolyai-féle abszolút geometria axiómáiból levezetni és mindig ott vétették el a dolgot, hogy az abszolút axiómák közé rejtett formában gyakran szinte öntudatlanul már felvettek egy az euklideszi posztulátummal logikailag ekvivalens tételt.

A párhuzamosak problémájának megoldására irányuló indirekt módszerek

4. Csupán a múlt század végén vált ismeretessé,[12] hogy a párhuzamosak problémájának történetében egy a klasszikus úttól gyökeresen eltérő kísérlet is történt a kérdés megoldására. SACCHERI 1733-ban megjelent művéről van szó, amelyben a szerző arra tesz kísérletet, hogy a párhuzamosak problémáját *indirekt* úton oldja meg.[13] Tőle valószínűleg függetlenül hasonló módon kísérelte meg a kérdés megoldását LAMBERT is (1766), aki azonban munkáját nem publikálta.[14] (Nem lehet kimutatni, hogy LAMBERT SACCHERI munkáját ismerte volna; munkájának egész felépítése arra mutat, hogy SACCHERI eljárásának legfeljebb az alapötletét ismerhette.)

Sokáig azt hitték, hogy SACCHERI volt az első, aki a probléma tárgyalásába az *indirekt* módszert bevezette. D. E. SMITH azonban, egy 1935-ben megjelent dolgozatában, felhívta a figyelmet arra, hogy az indirekt bizonyítás *ötlete* már OMAR KHAYYAM, majd őt követőleg NASZREDDIN munkáiban felmerül.[15] Nemrég vált hozzáférhetővé orosz fordításban AL HAZEN arab-, valamint a neves dél-franciaországi LEVI BEN GERSON héber nyelvű munkája (ez az első nyugat-európai mű a párhuzamosak problémájáról) és ezekben, ugyancsak arra történik kísérlet, hogy egy alapvető euklideszi jellegű tétellel szemben álló hipotézis lehetetlenségét bizonyítsák.[16] Meg kell azonban jegyeznem, hogy mindezekben a kísérletekben csupán az alkalmazott eljárás *indirekt* jellegének puszta *ötlete* a figyelemre méltó, mert maga a kísérlet — az eredeti feltevés következményeinek a követése, igen hamar megfeneklik. SACCHERI munkája még csak össze sem hasonlítható elődeiével: ő az első, aki a tompaszög és a hegyesszög hipotéziseit a triviális következményeken *messze-*

[12] Saccheri művére 1889-ben hívta fel ismét a figyelmet Beltrami (lásd. L. Bonola—H. Liebmann, *Die nicht-euklidische Geometrie; historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung*, Leipzig 1908,45).

[13] Saccheri, op. cit. 5—6.

[14] A Lambert hagyatékában őrzött kéziratot első ízben J. Bernoulli (a neves matematikus egyik unokája) tette közzé nyomtatásban, 1786-ban. Ismét közli Stäckel és Engel, *Theorie der Parallellinien* c. gyűjteménye (152—207).

[15] Smith, D. E., *Euclid, Omar Khayyam and Saccheri* (Scripta Mathematica VIII. 1935, 5—10).

[16] Ibn-al-Haytam, *Livre des commentaires aux introductions des Elementes d'Euclide* (oroszra ford. B. A. Rozenfeld; Isztoriko Matemat. Isszled. XI. 1958, 743—762); Gersonide, L., *Commentaire des Introductions aux livres d'Euclide;* (héberből oroszra fordította I. G. Polsky; Istoriko Matemat. Isszled. XI. 1958, 763—776).

menően túl követi és aki ezekre a hipotézisekre már valóságos *geometriai rendszereket épít, amelyekben már szerepelnek a későbbi abszolút, illetve hiperbolikus és elliptikus geometriák lényeges, alapvető tételei is.*

A XIX. század elején LEGENDRE bebizonyított egy igen nevezetes abszolút tételt, amelynek értelmében a *háromszög szögeinek összege nem lehet nagyobb mint* $2R$; ez a tétel — amely azóta LEGENDRE nevét viseli, lényegében már SACCHERI munkájában megtalálható.[17]

SACCHERI azt bizonyítja, hogy *az abszolút geometrián belül megfogalmazható hipotézis, amely azt állítja, hogy a háromszög összege nagyobb mint* $2R$ — *a* BOLYAI-*féle abszolút geometrián belül a következő flagráns ellentmondáshoz vezet: „a nem-metsző egyenesek metszik egymást”*. Ez a tétel igen lényeges, mert ennek segítségével a tompaszög hipotézise eliminálható és etikai szempontból ez a siker arra ösztönöz, hogy a hegyesszög hipotézise esetében is (annak, az euklideszi posztulátumra, illetve az ezzel ekvivalens derékszög hipotézisre vonatkozólag, látszólag, *logikusan szimmetrikus helyzete* miatt) hasonló eredményt várjunk. SACCHERI-nek azonban talán legnagyobb, személyes érdeme, hogy szigorúan *abszolút-geometriai* tételek segítségével bebizonyította, hogy a párhuzamosak problémája esetében a kizárt harmadik és az ebből folyó kettős negáció logikai törvénye *alkalmazható*; csupán ezzel teremtette meg — első ízben! — az indirekt módszer alkalmazhatóságának logikai alapjait. Nevezetesen SACCHERI, egy — korában még teljesen új —, *induktív* eljárással — bebizonyította a BOLYAI-féle abszolút geometria következő alapvető tételét: *a három hipotézis* (a tompaszög, a derékszög és a hegyesszög hipotézise)[18] — *kölcsönösen kizárja egymást*;[19] egyetlen háromszög esetében már a formális logika önmagában elegendő annak a belátására, hogy a szögek összege nem lehet csak *vagy* nagyobb mint $2R$, *vagy* egyenlő $2R$-rel, *vagy* kisebb mint $2R$, és ha e három eset közül valamelyik teljesül, akkor a másik kettő nem teljesülhet. Ha azonban a *háromszögek univerzumáról* van szó, akkor elvileg igenis lehetséges, hogy egyik háromszögben a szögek összege egyenlő legyen $2R$-rel, míg más háromszögben nagyobb, ismét más háromszögben pedig kisebb legyen mint $2R$. Az ami az euklideszi geometriában ugyanis biztosítja, hogy a háromszögek szögeinek összege *általánosságban*, minden egyes háromszög esetében, $2R$-rel legyen egyenlő — az éppen a párhuzamosak euklideszi posztulátuma, ami azonban az abszolút geometriában

[17] „Diesen Lehrsatz pflegt man unberechtigterweise den *ersten Legendreschen Lehrsatz* zu nennen. Wir sagen unberechtigterweise, weil Saccheri mit seinem Beweis der Falschheit der Hyp. d. stumpfen Winkels fast ein Jahrhundert früher diesen Lehrsatz begründet hatte” (Bonola—Liebmann, *i. m.* 60). — Valóban ez a tétel fellelhető Saccheri idézett művében, (19—20, Prop. XIV). — Ámde épp olyan jogosulatlan volna ezt a tételt Sacheri nevével jelölni, hiszen, — amint alább látni fogjuk — ez már Aristotelesnél szerepel!; (lásd az itt közölt 1. és 2. sz. töredéket, *Anal. Prior. 66 a 11—15*).

[18] Saccheri (*i. m.* 6) lényegében a következőképpen fogalmazza meg a három hipotézist: a négyszög szögeinek összege *nagyobb* mint négy derékszög *(tompaszög hip.)*; a négyszög szögeinek összege *egyenlő* négy derékszöggel *(derékszög hip.)*; a négyszög szögeinek összege *kisebb* mint a négy derékszög *(hegyesszög hip.)*; ezek megfelelő módon fogalmazhatók a *háromszög* esetében is. Aristotelesnél a háromszögre kimondott állítások szerepelnek mint eredeti hipotézisek; a hipotézisek Saccheri-féle fogalmazása nála mint következmény jelenik meg; (lásd alább az *5. Eth. Eudem. 1222 b 35—36, 11. Magna Moral. 1187 a 36—37* töredékeket).

[19] Saccheri, *i. m.* 5—10, Prop. V, VI, VII; „Hinc sumitur occasio secernendi tres diversas hypotheses, unam anguli recti, alteram obtusi, tertiam acuti; circa quas in V. VI. & VII. demonstratur, unam quamlibet harum hypothesium fore semper unice veram, si nimirum depraehendetur vera in uno quolibet casu particulari” (Saccheri, *i. m.* XII).

érvényét veszti. Ha tehát az abszolút geometriában a párhuzamosak posztulátumának érvénytelensége miatt lehetséges volna, hogy egyes háromszögek szögösszege egyenlő legyen $2R$-rel, mialatt más háromszögek szögösszege eltérne a $2R$ értéktől — akkor az *indirekt módszer nyilván nem volna alkalmazható*, ha ugyanis ilyen körülmények között bizonyítást nyerne, hogy *hamis* a tétel amely azt állítja, hogy a szögösszeg *minden* háromszögben nagyobb (ill. kisebb) mint $2R$ — akkor ebből még egyáltalában *nem következne* az euklideszi tétel, (amely szerint *minden* háromszög szögeinek összege $2R$), hiszen fennáll még a ki nem zárt eset, hogy *egyes* háromszögek szögeinek összege $2R$, más háromszögek szögösszege viszont nagyobb (ill. kisebb) mint $2R$.

Euklideszi, kontra-euklideszi és nem-euklideszi geometria

5. A *hegyesszög* hipotézisére épülő, SACCHERI által kifejtett geometriai rendszer immár tartalmazza a későbbi hiperbolikus geometria számos tételét; *kiragadva* és *önmagukban* ezek a tételek már nem-euklideszi tételek, de a *hegyesszög hipotézisére épülő* SACCHERI-*féle rendszer mégsem nevezhető a szó igazi, pozitív értelmében vett nem-euklideszi geometriának*; pusztán technikai szempontból tekintve a dolgot, ezt a jelzőt azért kell a SACCHERI-féle geometriától még megvonnunk, mert *hiányzik a hegyesszög hipotézisére épülő rendszer ellentmondásmentességének a tétele*, sőt, azt mondhatjuk, hogy a SACCHERI-*féle eredeti rendszerhez még implicite hozzátartozik az az önmagában hamis meta-matematikai tétel, hogy a hegyesszög hipotézisére épülő rendszer két egymásnak formálisan ellentmondó állítást tartalmaz*, illetve az a szintén *hamis* felfogás, hogy *ha a hegyesszög hipotézisére épülő rendszer ellentmondásos, akkor az euklideszi rendszer szükségszerűen ellentmondásmentes.* A SACHCHERI-féle geometriát a szorosabb értelemben vett későbbi nem-euklideszi geometriától nem maguk az eredeti, *primer* geometriai tételek különböztetik meg — hanem egy a rendszerhez hozzátapadó kívülről jövő *tudat*, amely az euklideszi posztulátumhoz az *igaz*, — míg az ezzel formálisan szembenálló hipotézishez a *hamis* logikai értéket rendeli hozzá. Éppen e lényeges különbség miatt fogjuk a SACCHERI-féle rendszert *kontra-euklideszi* rendszernek nevezni. A kontra-euklideszi rendszer — bár tételeinek megfogalmazása nem-euklideszi — logikai szempontból mégis szigorúan az euklideszi geometriához — és nem a nem-euklideszi geometriához — tartozik: a *kontra-euklideszi rendszer nem nem-euklideszi — hanem euklideszi!* Valóban, az euklideszi geometriához épp úgy szigorúan hozzátartozik, hogy az euklideszi posztulátumból következő állítások igazak — mint az, hogy a neki ellentmondó tételek mind hamisak — feltéve, hogy maga ez a posztulátum *igaz*!

Összegezve az eddigieket, elmondhatjuk, hogy a párhuzamosak problémájának megoldására vonatkozó *első, eredeti, hiteles adataink* az V. századból származnak és hogy a további értesülések alapján a probléma és a megoldási kísérletek megjelenésének időpontját legfeljebb az i. e. II. századig vihetjük vissza; ami pedig az *indirekt módszert*, azaz egy *kontra-euklideszi* rendszer felállítását illeti — azzal a céllal, hogy ez, egy gondolati kísérlet keretein belül, mintegy az áldozati bárány szerepét játssza, amelynek megsemmisítésével az euklideszi geometria élete és fennmaradása elnyerné szinte isteni biztosítékait — erről SACCHERI előtt, eddig *lényegében* nem is beszélhettünk.

Kontra-euklideszi rendszer meglétére utaló töredékek Aristotelesnél

(Általános áttekintés)

6. A *Corpus Aristotelicum*[20] kötelékébe tartozó művek figyelmes átvizsgálása után azonban kénytelenek vagyunk levonni a következtetést, hogy a *párhuzamosak problémájának* — a matematikatörténet e Nílusának — *forrásait sokkal feljebb és sokkal mélyebben, az i. e. IV. század közepe táján találhatjuk meg.* Erre vonatkozó adataink a lehető legjobb eredeti forrásból: ARISTOTELES műveiből, tehát egyik nemcsak rendkívül megbízható, de felbecsülhetetlen értékű szemtanútól származnak. Számunkra talán a legmeglepőbb az a tény, hogy a felszínre került adatok túlnyomó többségének bizonyítéka szerint ARISTOTELES geométer kortársai a *problémát* már egy a SACCHERIéhez legközelebb álló indirekt módszerrel igyekeztek megoldani, amelynek kapcsán már egy *valóságos kontra-euklideszi rendszert is felállítottak* és így eljutottak olyan fundamentális tételek felismeréséhez és bizonyításához, amelyeket SACCHERI később önállóan bebizonyított,[21] sőt olyan állításokhoz is, amelyek még SACCHERInél sem szerepelnek.[22] Számos olyan helyet sikerült azonosítanom, ahol ARISTOTELES különböző logikai, metafizikai és etikai fejtegetések illusztrálása céljából vagy ilyen kontra-euklideszi tételeket idéz, vagy ezekkel kapcsolatos álta-

[20] *Aristoteles graece, ex recensione Im. Bekkeri,* ed. Academia Regia Borussica, Berolini 1831; az összes görög idézetek a Bekker-féle kiadás lap-, hasáb- és sorszámaira vonatkoznak.

[21] Feltünő az alább közölt *1. Anal. Prior. 66 a 14—15* töredék hasonlatossága Saccheri XIV. sz. tételével (*i. m.* 19—20; lásd fentebb a 17. sz. jegyzetet). — Ennek ellenére semmi okunk nincsen feltételezni, hogy ezt Saccheri Aristotelestól vette volna át. Saccheri minden általa olvasott szerzőt behatóan idéz, Aristotelest azonban sehol sem említi; ez szembeötlő, ha meggondoljuk, hogy Saccheri elsősorban filozófus és teológus volt, és előbb a grammatika, majd mint a filozófia és vitatkozó teológia professzora működött Milano, Torino és Pávia Jezsuita Kollégiumaiban (ő maga is tagja volt a Jézus Társaságnak); matematikát ezzel párhuzamosan Páviában adott elő (Stäckel—Engel, *Die Theorie der Parall.*, 34). Ebből mégsem következik, hogy Aristoteles műveit behatóan ismerte volna: a XVII. század második felétől kezdve Aristoteles teljesen népszerűtlen volt és általában nem olvasták. Így hát nagyon valószínű, hogy a kérdéses tételt Saccheri önállóan fedezte fel. — Meg kell jegyeznem ezzel kapcsolatban, hogy a párhuzamosak problémájának története bővelkedik ugyanannak a tételnek a többek által és különböző időkben teljesen önálló — gyakran szinte szó szerint megegyező — megfogalmazásban. — Feltűnő azonban, hogy Omár Khayyam igen kategorikus formában hivatkozik Aristotelesre. A párhuzamosak problémája könnyen megoldható — írja Omár — *öt alapvető principum* felhasználásával, amelyek közül az első négy Arisztotelestől származik (az ötödik a ma Eudoxos—Archimedes nevéről ismert axióma). Ezek közül az első három valóban előfordul Aristotelesnél; a harmadik például azt mondja ki, hogy a *szög két szára minden határon túl távolodik egymástól.* Proklos is felhasználja ezt az általa „axiómának" nevezett állítást bizonyítási kísérletében, és azt Aristoteles *De Caelo I 5* nyomán idézi (*i. m.* 371, 12—17); csak Saccheri mutatta ki első ízben teljes szigorral, hogy ez nem egy axióma, hanem egy *abszolút geometriai tétel,* amely azonban a *tompaszög hipotézise esetében nem is érvényes;* (Saccheri, *Euclides ab omni naevo,* etc. 28—30). A negyedik principium, amelyet Omár (*i. m.* 76) Aristotelesnek tulajdonít, a következőképpen hangzik: *két egymás felé tartó* (konvergáló) *egyenes metszi egymást, és nem lehet, hogy két egyenes előbb egymás felé tartson — majd ismét távolodjon egymástól.* — Ez, egy igen figyelemre méltó (az euklideszi posztulátummal ekvivalens) állítás: benne foglaltatik már — negatív, tagadott formában — az egymást nem metsző, divergáló (egyetlen közös merőlegessel rendelkező) egyenespár fogalma. Sajnos azonban, Aristoteles hátramaradt írásaiban sem ez, sem ehhez hasonló állítás fel nem lelhető és Omár tudósításnak történelmi hitelessége igen *kétséges.*

[22] Legfontosabb ezek közül az *5. Eth. Eudem. 1222b 35—36* és a *8. De Caelo 281b 5—7* töredékek; (lásd alább). Ezek alapvető jelentőségű tételeket mondanak ki — a *8. De Caelo 281b 5—7* töredék kimondja, hogy *ha az euklideszi posztulátum nem igaz, akkor a négyzet átlójának hossza racionális értéket is felvehet;* az *5. Eth. Eud. 1222b 35—36* töredékben pedig már szerepel a Riemann-féle geometria szingularis maximális négyzete — és ezek nemcsak Saccherinél — de a nem-euklideszi geometria első meglapítóinál sem szerepelnek!

lános meta-matematikai megjegyzéseket tesz; egyetlen olyan helyet ismerek, amelyből arra lehet következtetni, hogy a korabeli geométerek a párhuzamosak problémájának már *direkt* úton való megoldásával is kísérleteztek;[23] ezenkívül számos olyan hely található meg a CORPUS-ban, amelyekből ezeknek a kísérleteknek a hatása indirekt módon kiolvasható.

Aristoteles korában a koplanáris egyenesek metszésére vonatkozó nevezetes euklideszi állítás még biztosan nem szerepelt a posztulátumok csoportjában;[24] ez azonban nem jelenti azt, mintha a *párhuzamosak problémája* még nem tevődhetett volna fel. Sőt ellenkezőleg: az euklideszi geometria ez öntudatlan paradicsomi állapotához a párhuzamosak problémája *szervesen hozzátartozik*, és ebben az állapotban akaratlanul, még ha nem mondják ki, akkor is — a dolgok természete folytán, benne rejlik. Mai szemmel nézve ugyanis azt mondhatjuk: a párhuzamosak posztulátumának hiánya folytán ennek a kornak a geometriája még *abban a tudatban él*, hogy *ő egy Bolyai-féle abszolút geometria* és így, ennél fogva, a dolgok természetéből folyik, hogy bármely önmagában euklideszi jellegű tétel szigorú bizonyítására irányuló törekvés előbb utóbb, automatice felveti a párhuzamosak problémáját.

A szóban forgó szövegrészek elszórtan fellelhetők ARISTOTELES majd mindegyik jelentősebb művében; találunk ilyeneket az *Első* és a *Második Analitikában*, a *Szófisták Cáfolásában*, a *Fizikában* és végül mind a három *etikai* munkában. Mindezek az aristotelesi szövegrészek úgy tekintendők, mint egy EUKLIDES előtti — de ugyanakkor *kontra-euklideszi rendszer töredékei*; a szellemi archeológia által, az aristotelesi művek *Corpus*-ának geológiai rétegeiből felszínre hozott antik vázát a mai olvasó rendkívül modernnek látja és hajlamos azt egy olyan szellemi produktumnak tekinteni, mint ami jóval megelőzte volna korát; az emberi szellem mindig egykorú önmagával és sohasem előzheti meg korát; de igenis az egyes egyének szubjektív tudata elmaradhat az objektív emberi szellem mögött. Az aristotelesi *Corpus*-ból felszínre kerülő *kontra-euklideszi* elmélet sem előzte meg korát, hanem ellenkezőleg, az szervesen beleillik, sőt szinte szükségszerűen következik PLÁTÓ és EUDOXOS környezetének szellemi légköréből.[25]

A tompaszögek hipotézise és annak lerombolása

(Anal. Prior. 66a 11—15)

7. Az említett töredékek között van *három* olyan szövegrész, amely minden kétséget kizáróan azt bizonyítja, hogy az ARISTOTELES korabeli görög geométerek már felállították a *tompaszög hipotézisét*. E töredékek közül kettő az *Analytica*

[23] Lásd alább a *18. Anal. Prior. 65a 4—7* töredéket.

[24] Erre enged következtetni maga — az imént a 23. sz. jegyzetben idézett — *18. Anal. Prior. 65a 4—7* töredék (lásd T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements;* vol. I. 202, Cambridge 1908); erre következtethetünk azonban Proklos nyilatkozataiból is, aki erről mindig mint Euklides posztulátumáról beszél és annak bevezetését mindig személyesen Euklidesnek rója fel; (lásd a 3. sz. jegyzetet).

[25] Proklos (*i. m.* 67), valószínűleg Eudemos nyomán már említi az Akadémiában közösen végzett kutatásokat, amelyeknek jórésze éppen a matematika szigorú felépítésére volt irányítva; mindaz amit a bizonyítások szigorúvá tételével kapcsolatban Proklos oly nagy részletességgel Euklidesnek tulajdonít (*i. m.* 74—75), minden valószínűség szerint, az őt megelőző két matematikus-generáció műve volt, lényegében tehát az Aristoteles korabeli athéni matematikusoké.

Priora II 17, 66a 11—15 helyén található. Megelőzőleg ARISTOTELES azt írja, hogy ugyanaz a *hamis* (*ψεῦδος*; 66a 11) következmény többféle feltevésből is származtatható, amiben semmi helytelen, abszurd nincsen (*ἄτοπον*; 66a 13); majd a következőkkel folytatja: *mert például, a párhuzamosak metszik egymást akkor is, ha a belső* (szög) *nagyobb mint a külső* (szög) *és akkor is, ha a három szög* (azaz a háromszög szögeinek összege) *nagyobb mint két derék* (szög).[26]

Az eredeti szöveg rendkívül elliptikus; a zárójelbe tett kifejezések egyáltalán nem szerepelnek benne; ez az elliptikus kifejezésforma, amely az idézett matematikai tételek tartalmára csak célzásszerűen utal — általános jellemvonása az aristotelesi szövegnek. Mivel a reánk maradt írások az *akroamatikus* szövegek csoportjába tartoznak és eredetileg egy beavatott közönséghez szóló előadásokat tartalmaznak, természetes, hogy a szerző (vagy az előadásokat jegyzet alapján kiadó hallgatók) — a körükben használatos familiáris technikai zsargont használta, és a hosszadalmas szövegezésű matematikai tételeket a leglényegesebb szavakra, maximálisan lerövidített formában használta; így például az euklideszi geometria egyik alapvető, közismert tétele a következő, klasszikus, teljes formában szerepel az Elemek (*I. könyv 32. 2* tétel): *bármely háromszögben... a háromszög három belső szöge együttesen két derékszöggel egyenlő.* Ehelyett a megfogalmazás helyett, ezt a tételt ARISTOTELES általában a következő rövidített formában idézi: „*háromszög két derék*". Ismervén az ARISTOTELEStől hátramaradt írásoknak ezeket a sajátosságait, semmi akadályba nem ütközik az idézett szövegekbe a zárójelbe helyezett kifejezéseket közbeiktatni.[27] Ezek után, az idézett példák közül, a *második* értelmezése teljesen világos és ez a következő parafrázissal adható vissza:

(1) *Ha a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 2R, akkor a párhuzamos egyenesek metszik egymást. (Anal. Prior. 66a 14—15).*

Ez az ARISTOTELES által idézett példa nemcsak azt mutatja, hogy a korabeli görög geométerek már felvetették a tompaszög hipotézisét — hanem, hogy e kiinduló

[26] *ἐπεὶ ταὐτό γε ψεῦδος συμβαίνειν διὰ πλειόνων ὑποθέσεων οὐδεν ἴσως ἄτοπον, οἷον τὰς παραλλήλους συμπίπτειν καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ἐντὸς τῆς ἐκτὸς καὶ εἰ τὸ τρίγωνον ἔχει πλείους ὀρθας δυεῖν.* (Falsum concludatur per multas hypotheses: veluti lineas parallelas concurrere, sive maior sit angulus internus externo, sive triangulus plures duobus rectis angulos habeat.) — Az egységesség kedvéért, — és mivel ezek állanak szó szerint a legközelebb a görög eredetihez, — az idézett görög szövegekkel párhuzamosan adjuk azok latin változatait is, a következő szerzők fordításában: *Analytica Priora, Analytica Posteriora, Topica, De Sophisticis Elenchis, Physica, De Anima* — Iulius Pacius fordításában; *De Caelo* — Ioannes Argyropylos fordításában; *Ethica Nicomachea* — Dionysius Lambinus fordításában; *Magna Moralia* — Georgius Valla fordításában; *Ethica ad Eudemum* — Ismeretlen fordításában; *Metaphysica* Bessarion kardinális fordításában. A latin fordításokat a következő kiadás szerint idézzük: *Aristotelis Opera Omnia, graece et latine;* edidit Guil. Du Val, Lutetiae Parisiorum 1629. (Ugyanezek a latin szövegek szerepelnek a Bekker-féle kiadás harmadik kötetében is). Ezeken kívül számos más (angol, francia és német) fordítást konzultáltam; így az E. D. Ross vezetése alatt készült angol, valamint az E. Grumach vezetése alatt folyóban levő német kidást; (Az *Első Analitikát* A. J. Jenkinson, a *Második Analitikát* G. R. G. Mure, a *Topikát* és a *Szofisták Cáfolásait* W. A. Pickard-Cambridge, a *Fizikát* P. P. Hardy és R. K. Gaye, az *Égről* szóló könyveket J. L. Stocks, a *Lélekről* szóló könyveket J. A. Smith, a *Metafizikát* W. D. Ross angol fordításában; a három *Etikát* F. Dirlmeier, a *Lélekről* szóló munkát W. Theiler német fordításában); J. Tricot francia kiadásait *(Organon, Az Égről, A Lélekről),* a *Második Analitikához* valamint a *Topikához* felhasználtam még H. Tredennick és E. S. Forster görög és angol kiadását, (London 1960), a *Fizikához* C. Prantl görög és német szövegét (Leipzig 1854) és a *Metafizikához* D. W. Ross görög kiadását és kommentárjait (Oxford, 1953).

[27] Természetesen a felderítő szövegek közbeiktatása nem minden esetben ilyen egyszerű feladat és nem mindig sikerül egyértelműen úgy, hogy minden további vita és próbálkozás fölöslegessé válna általa.

feltevés következményeit is alapos kutatásnak vetették alá. Valóban, ez egy teljesen korrekt és egyáltalán nem triviális implikáció. A konklúzió (*a párhuzamosak metszik egymást*) nem következik minden további nélkül a premisszából — (*a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 2R*). A konklúziónak a párhuzamosak problémája szempontjából lényeges jelentése: a tompaszög hipotéziséből a BOLYAI-féle abszolút geometrián belül alapvető ellentmondás következik: *az egymást nem-metsző (párhuzamos) egyenesek — metszik egymást.* Ez azonban nem más, mint a LEGENDRE nevén ismert tétel, amelyet azonban 1733-ban már SACCHERI is bizonyított,[28] de a tétel SACCHERI-*féle megfogalmazásában igen közel áll annak aristotelesi formájához;* SACCHERI ugyanis, már előre bevezetett segédtételek alapján, éppen azt bizonyítja, ami az *Anal. Prior. 14—15* helyén ki van mondva: *ha a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 2R, akkor két* (az *Elem. I 28* alapján) *egymással párhuzamos egyenes metszi egymást.*[29] A tétel bizonyításához szükséges leglényegesebb segédtétel már a középkori arab nyelvű szerzőknél, valamint GERSONIDES munkájában is megtalálható; e döntő jelentőségű segédtételre jellemző, hogy az EUDOXOS—ARCHIMEDES-féle axiómára épül. Könnyen elvégezhető az ARISTOTELES által idézett tétel rekonstrukciója, amelynek keretében a premisszából a következmény csupán a korabeli görög matematikában használatos tételek és módszerek segítségével származtatható. Ebben a rekonstrukcióban nem játszik szerepet, ha szóban forgó párhuzamos egyeneseket az *Elem. I. 28* tétele alapján úgy definiáljuk, mint olyan *koplanáris egyenespárt, amely egy harmadik metsző egyenessel, a metsző egyik oldalán együttesen 2R értéket kitevő belső szögeket alkot* — vagy, ha ettől eltérően, ellenkezőleg, feltételezzük, hogy *a párhuzamos egyenesek a metsző egyenes egyik oldalán olyan belső szöget alkotnak, amelyek összege nagyobb mint 2R.* Jelentőségteljes mozzanat azonban, hogy az EUDOXOS által bevezetett *axiómára* a bizonyításban *elengedhetetlenül szükség van*[30].

Szükség van azonban az idézett implikáció bizonyításához arra is, hogy a szögek összege *minden* háromszögben nagyobb legyen mint 2*R*. Ez egy igen bonyolult tétel, és csak SACCHERI bizonyította be első ízben teljes szigorral mint egy abszolútgeometriai állítást.

Semmi nyoma nincsen annak, hogy egy ilyen tétel explicit kimondásának és főleg bizonyításának a szükségességét a görögök már belátták volna, és szinte biztosan állíthatjuk, hogy *nem*. Ellenben egész mentalitásukból következik, hogy a kontra-euklideszi hipotézist már egyenesen ebben az általános formában értelmezték, mint olyat, tehát amelyik változatlanul érvényes *minden* háromszög esetében. Erre enged következtetni a megfogalmazás határozatlan módja is, amely *általánosságban* beszél a *háromszög* szögösszegéről. (Ennél tovább menve, egy a *Metafizika* IX. 10 fejezetében foglalt szövegből, *Metaph. 1052a 10—11*, feltevésszerűen arra lehet következtetni, hogy ha egy ilyen tétel külön bizonyítását nem is érezték szükségesnek, mégis tudták — illetve azt mondhatnánk, hogy inkább *természetesnek tartották* —, hogy a háromszögek univerzuma csak *vagy* teljes egészében euklideszi —, *vagy* egészében nem-euklideszi lehet, és hogy nem állhat fenn, hogy

[28] Lásd fent a 17. sz. jegyzetet.

[29] Prop. XIV: Hyotheses anguli obtusi est absolute falsa, quia se ipsum destruit (Saccheri, *i. m.* 19—20).

[30] E rekonstrukció részleteire vonatkozólag l. I. Tóth, *Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum* (Archive for History of Exact Sciences, 1966 vol. III., 304—311).

egyik háromszögben a szögek összege egyenlő legyen, míg más háromszögben ne legyen egyenlő két derékszöggel.)

Világossága és egyértelműsége folytán ez a hely *(Anal. Prior. 66a 14—15)* önmagában is elegendő alapot szolgáltathatna nemcsak annak a feltételezésére, hogy az ARISTOTELES korabeli görög geométerek a *tompaszög hipotézisét* egyszerűen, mint egy átmeneti ötletet pusztán felvetették volna — hanem arra is, hogy a hipotézis logikai következményeit rendszeresen kutatták, és hogy az ebbe a körbe tartozó döntő fontosságú eredményt, *a tompaszög hipotézisének ellentmondásos jellegét kimondó tételt szigorúan be is bizonyították.*

Szerencsére azonban ugyanazon a helyen rendelkezésünkre áll még egy geometriai töredék, amelyből ugyanaz a következtetés vonható le; nevezetesen, a már idézett hely *első fele,* amely az eredeti szövegben a következőképpen hangzik: *a párhuzamosak metszik egymást... ha a belső* (szög) *nagyobb mint a külső* (szög). E hely értelmezése sem ütközik különösebb nehézségbe. A mondat szerkezetéből elég világosan kitűnik, hogy a belső és a külső szög, amelyekről említés történik, a párhuzamos egyenesekkel van kapcsolatban; ezek szerint az idézett hely teljes, explicit formában a következőképpen volna megfogalmazható:

(2) *Ha két párhuzamos egyenest egy harmadik egyenes úgy metsz, hogy a metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán létrejött belső szög nagyobb, mint a vele szemben fekvő külső szög —, akkor a párhuzamosak metszik egymást. (Anal. Prior. 66a 13—14).*

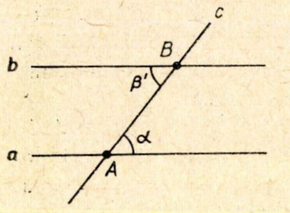
8. Az idézett két ikertöredékből most már valóban arra következtethetünk, hogy a tompaszög hipotézise *igen részletes* vizsgálatnak volt alávetve, hiszen, ime itt van előttünk annak két egymástól eltérő megfogalmazása is; nyilvánvaló, hogy a görög geométerek többféle úton is megkíséreltek döntést létrehozni abban a problémában, amelynek megoldására irányultak vizsgálataik. Ez pedig nem lehetett más, mint éppen az, amit később a *párhuzamosak problémájának* neveztek[31].

A két idézett töredékből az is azonnal kiderül, hogy milyen euklideszi tételek abszolút bizonyításáról lehetett szó: az (1) töredék *(Anal. Prior. 66a 14—15)* minden további nélkül világosan mutatja, hogy a háromszögek szögeinek összegére vonatkozó *Elem. I 32. 2* tétel[32] volt az egyik, amelyik a bizonyítási kísérletek célpontjában állott. De hiszen ez a tétel az *Elemekben* szigorúan bizonyítva van és annak bizonyítása már ARISTOTELESnél is szerepel! De megbízható tudósítások arról vallanak, hogy ez a bizonyítás már jóval előtte a pythagoreus matematikusok körében is ismeretes volt. Azonban az *Elem. I 32. 2* tétel bizonyításához elengedhetetlen szükség van az *Elem. I 29* tételre. Ez t. k. három egymásból közvetlenül következő tételt tartalmaz és e három tétel egyenként az *Elemek*ben azokat közvetlenül megelőző *Elem. I 27* és az ebből közvetlenül következő *Elem. I 28* (amely ismét két tételt tartalmaz: *I. 28. 1* és *28. 2*) tételeknek a reciprokjai. Nevezetesen az *Elem. I 27* valamint *Elem. I 28. 1* és *I 28. 2* a párhuzamosság *elegendő* feltételeit mondja ki. Legyen *a* és *b* két koplanáris és *c* egy ezeket *A* és *B* pontokban metsző egyenes,

[31] A két ikertöredék (66 *a* 11—15) összefüggését a párhuzamosak problémájának EUKLIDES előtti korszakával már a következő dolgozataimban tárgyaltam: Tóth I., *A Bolyai Geometria filozófiai vonatkozásai,* — "A párhuzamosak problémája Aristotelésnél" c. fejezet *(Bolyai János élete és műve* c. tanulmánykötet, Bukarest 1953, 264 1.); I. Tóth, *Unele aspecte filosofice ale geometriei neeuclidiene* (Cercetari filosofice, III. 3, 1955, 38—39 1.)

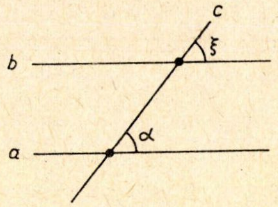
[32] Az *Elem. I. 32* állítás két tételt tartalmaz; az állítás első része *(Elem. I 32. 1.)* kimondja, hogy *a külső szög nagyobb mint a háromszögben vele szemben fekvő belső szög bármelyike;* csak az állítás második része *(Elem. I. 32. 2)* mondja ki *a szögek összegére* vonatkozó klasszikus tételt.

akkor áll a következő implikáció: *ha* a váltószögek egyenlők — *akkor* a két koplanáris egyenes nem metszi egymást *(Elem. I 27; 1 ábra)*; *ha* a c metsző és az a egyenes által, a c metsző egyenes egyik oldalán létrejött szög egyenlő a metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán fekvő, de a másik, b egyenessel alkotott külső szöggel — *akkor* az a és b egyenesek nem metszik egymást *(Elem. I 28. 1; 2 ábra)*, — és végül: *ha* az a, b egyenesek és a metsző által a metsző egyenesnek egyik oldalán alkotott két belső szög együttesen $2R$ — *akkor* az a és b egyenesek nem metszik egymást. *(Elem. I 28. 2; 3 ábra)*. Az *Elem. I 29* alatti három tétel — mint az előbbi három



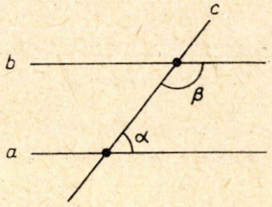
Elem. I 27: $(\alpha = \beta') \to (a \parallel b)$.

1. ábra



Elem. I 28.1: $(\alpha = \xi) \to (a \parallel b)$.

2. ábra



Elem. I 28.2: $(\alpha + \beta = 2R) \to (a \parallel b)$.

3. ábra

tétel reciprokja — a párhuzamosság *szükséges* (és az előbbiek miatt egyben elegendő) feltételeit állapítja meg. Ezek szerint, *ha* feltételként adva van a premissza, hogy az a és b koplanáris egyenesek egymással párhuzamosak — (és c ismét egy ezeket metsző harmadik egyenes) — *akkor*: a váltószögek egyenlők, *(Elem. I 29. 1)*; a metsző egyenesnek egyik oldalán fekvő belső szög egyenlő a metszőnek ugyanazon az oldalán szemben fekvő külső szöggel, *(Elem. I 29. 2)*, — és végül: *akkor* a metsző és a két párhuzamos egyenes által, a metszőnek egyik oldalán alkotott két belső szög együttesen $2R$, *(Elem. I 29. 3)*. Igen ám, de addig míg a három első tétel *(Elem. I 27, 28. 1* és *21. 2) abszolút — ezek reciprokjai valódi euklideszi tételek, és a párhuzamossági axióma nélkül nem bizonyíthatók*! Sőt — feltűnő módon éppen itt — az *Elem. I 28. 2* és az *Elem. I 29. 1* között vonul át az abszolút geometria és az euklideszi geometria nevezetes demarkációs vonala: az *Elemek*ben az *Elem. I 29. 1* az első valódi euklideszi tétel. A párhuzamosságot az *Elem. I def. 23* definíciója írja le; az *Elem. I 27* és *I 28* állítások a párhuzamos egyenesek effektív egzisztenciáját bizonyítják; ezek szerint *már a* (Bolyai-féle) *abszolút geometria axiómáiból szigorúan következik a párhuzamos egyenes egzisztenciája*; Az *Elem. I 29* tétel mármost az előbbieket szükségszerű módon kiegészítve végül ismerteti a párhuzamos egyeneseknek azt a lényeges tulajdonságát, amely ezeket általánosan jellemzi; így például: *ha két koplanáris egyenes párhuzamos egymással, akkor egy tetszés szerinti metszővel mindig olyan szögeket alkot, hogy a metsző egyenes egyik oldalán fekvő belső szög egyenlő az ugyanazon az oldalon az elsővel szemben fekvő külső szöggel (Elem. I 29. 2)*.

Az *Elem. I 29* tételének az indirekt úton történő bizonyításához meg kell fogalmazni az ezzel formálisan szemben álló állítást és ezt aztán *meg kell dönteni* azzal, hogy következményei között *belső ellentmondást* mutatunk fel. Így például az *Elem. I 29. 2* tétellel a következőt kell szembeállítani: (P) *Ha két koplanáris egyenes párhuzamos, akkor egy tetszés szerinti metszővel alkotott belső szög nem egyenlő a metszőnek ugyanazon az oldalán, de az első szöggel szemben fekvő külső szöggel.* Valamilyen okból kifolyólag — (talán mert ezzel az általános hipotézissel nem boldoguitak, talán azért, mert ebben a párhuzamosakat egy határozatlan predikátum jellemzi — azaz szorosabban véve ezek egyáltalán nincsenek jellemezve, vagy pedig csak a hosszas és ismételt próbálkozások véletlenszerű eredményeként) — ezt az általános ellen-hipotézist két diszjunkt részre bontották éspedig: *ha két koplanáris egyenes párhuzamos — akkor a belső szög nagyobb mint a külső* (P 1 hipotézis), ez természetesen a tompaszög hipotézisének az idézett helyen *(Anal. Prior. 66a 13—14)* található megfogalmazása; a hipotézis másik része: *ha két koplanáris egyenes párhuzamos egymással — akkor a belső szög kisebb mint a külső* (P 2 hipotézis); világos, hogy ez a hegyesszög megfelelő megfogalmazású hipotézise; ez utóbbi azonban *nem lelhető fel a Corpus által megőrzött szövegek között.*

A hegyesszög hipotézise és az elemek V posztulátuma

9. De ha itt nem — úgy megtalálható a *hegyesszög hipotézisének* az *Elem. I 29* tételével szembehelyezett P 2 variánsa a kissé odébb, a szellemnek a *Corpus* anyagával szinte egyidejű geológiai rétegében, nevezetesen az EUKLIDES-féle *Elemek*ben: *nem más ez, mint maga az* EUKLIDES *által bevezetett V. posztulátum.*

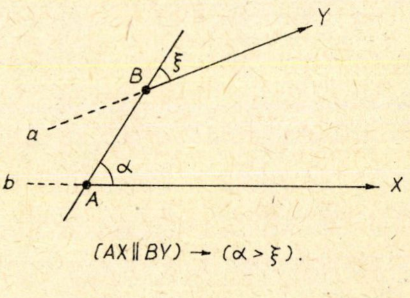
Ennek a feltevésnek az elfogadására azonban szükség van a következő megfontolásokra:

(a) a tompaszög P 1 megfogalmazású hipotézisében a görög geométerek számára valószínűleg különös gyönyörűséget okozó, rendkívül plasztikus és pregnáns ellentmondás adódott ki, mint végeredmény: *a párhuzamos (azaz egymást nem metsző) egyenesek — metszik egymást*; természetesnek tűnik elvárni, hogy ha a hegyes szög megfelelő, P 2 fogalmazású, hipotézise megdönthető — akkor az ebből kiinduló gondolatláncolat végén ugyanennek a plasztikus ellentmondásnak kell majd előállnia. A hegyesszög hipotézise esetén tehát az (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* helynek megfelelően, a következő implikációnak kellene fennállnia: *ha a* (párhuzamosakat metsző egyenes által alkotott) *belső szög kisebb mint a* (metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán, de az előzővel szemben fekvő) *külső szög — akkor a párhuzamos egyenesek metszik egymást.*

(b) Alapvető fontossággal bír azonban a következő — immár valamivel nehezebben belátható, finomabb követelmény szükségességének a felismerése: ahhoz, hogy a szükséges és remélt ellentmondáshoz eljussunk, — illetve ahhoz, hogy a két, eredetileg párhuzamosnak feltételezett egyenes bizonyított incidenciája valóban formális ellentmondás legyen és hatékonyan megdöntse a kiindulást képező P 1 vagy P 2 hipotézist — *elengedhetetlenül szükség van annak a precíz és kategorikus leszögezésére, hogy a párhuzamosaknak feltételezett egyenesek a harmadik, őket metsző egyenesnek éppen azon az oldalán találkoznak, amelyiken a belső szög nagyobb (ill. kisebb) mint a szemben fekvő külső szög.* A P 1 megfogalmazású tompaszög hipotézis esetében bebizonyított és a *Corpus* (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* töredékében fennmaradt implikációban ez a kikötés *nem szerepel*; ezt a hiányt azonban minden további nélkül megmagyarázhatjuk a *Corpus*ban szereplő matemetikai tételek megfogalmazásának teljesen általános *elliptikus*, sőt egyenesen *laza és pongyola* jellegével. Kétségtelennek kell azonban tartanunk, hogy azok a matematikusok — (EUDOXOS tanítványai!) — számára, akik ilyen finom és rendkívül fejlett logikai érzéket követő kérdésekkel ebben a stílusban és ezen a szinten (éppen a szigorúság tudatosan megfogalmazott követelménye által hajtva) foglalkoztak —

ez a követelmény precíz és explicit formában jelentkezett. Valóban, a (2) *Anal. Prior.* 66a *13—14* helyen szereplő implikáció bizonyításának rekonstrukciója, ennek a feltételnek a szigorú tekintetbevételével, pusztán az akkor már ismert segédtételek igénybevételével minden különösebb nehézség nélkül sikeresen elvégezhető. Igen könnyen eljuthatunk ugyanis arra a végkövetkeztetésre, hogy a két egymást eredetileg nem metszőnek feltételezett egyenes metszi egymást — de úgy, hogy a metszéspont a közös metsző egyenesnek a *másik* oldalán van, ahol éppen megfordítva: a belső szög kisebb mint a vele szemben fekvő külső szög; sajnos, azonban, ez a *végkövetkeztetés egyáltalán semmilyen ellentmondásban nincsen a kiinduló hipotézissel és így azt nem is rombolja le*! Hiszen ez a tétel pl. az euklideszi geometriában mindig igaz, és a hiperbolikus geometriában sem mindig hamis! Mert mi sem természetesebb annál, hogy egy metsző egyenes oldalán egymástól távolódó, divergáló egyenesek (ilyen a két koplanáris *a*, *b* egyenes a P 1 hipotézis esetében, ha tehát a belső szög nagyobb, mint a külső) a metsző egyenes másik oldalán konvergáljanak, úgy, hogy kellőképpen meghosszabbítva egymást messék is! Így hát, ennélfogva azt kell mondani, hogy valóban *kritikus jelentőséggel* bír annak az explicit megfogalmazása, hogy a P 1, ill. a P 2 hipotézis esetében a felvett koplanáris egyenesek eleve feltételezett nem-metszése *melyik félsíkban* valósul meg és ilyen körülmények között az implikáció premisszáját leromboló végkövetkeztetés is csak akkor mond formálisan ellent a premisszának, és így csak akkor dönti azt meg, *ha azt bizonyítja, hogy a párhuzamosnak feltételezett egyenesek incidenciája ugyanabban a félsíkban valósul meg, amelyben eredetileg azok non-incidenciáját feltételeztük.*

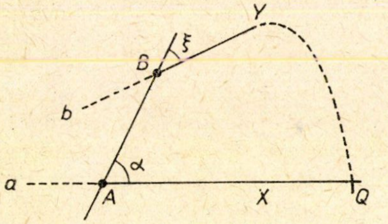
Ehelyütt kell megemlítenünk azt is, hogy PTOLEMAIOS a fenti pongyola módszerrel gondolta megdönteni a párhuzamosak euklideszi posztulátumával általa szembeállított hipotéziseket; PROKLOS azonban, aki az eredeti munka alapján ismerteti PTOLEMAIOS kísérletét, már igen kategorikusan rámutat az elkövetett hiba triviális jellegére.[33] Logikai szigor tekintetében azonban ARISTOTELES kortársai PTOLEMAIOSnál — és PROKLOSnál is sokkal magasabb szinten állottak és sokkal igényesebb kritikai szellemmel rendelkeztek. Az előbbiek alapján tehát feltesszük, hogy a tompaszög P 1 megfogalmazású hipotézisét az ARISTOTELES korabeli geométerek eredetileg a következő *precíz* formában értelmezték: *ha két párhuzamos egyenest egy harmadik egyenes metsz — akkor a két eredeti egyenes a metszőnek azon az oldalán nem találkozik, amelyiken a belső szög nagyobb mint a vele* (a metszőnek ugyanazon az oldalán) *szemben fekvő külső szög* (4. ábra). Ennek megfelelően a *Corpus* által megőrzött végeredményt is eredetileg a következő precíz formában kellett kimondani és bebizonyítani: *ha két koplanáris egyenest egy harmadik egyenes metsz és ha a két egyenes a metsző egyenesnek azon az oldalán nem metszi egymást, amelyiken a belső szög nagyobb mint* (a metszőnek ugyanazon az oldalán) *vele szemben fekvő külső szög — akkor ez a két egymással párhuzamos egyenes metszi*



4. *ábra*

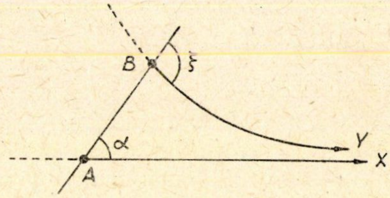
[33] Proklos, 365—368.

egymást éspedig éppen a metsző egyenesnek azon az oldalán, amelyiken a belső szög nagyobb mint a külső (5. ábra). *Ez valóban a remélt és elvárt formális ellentmondás.* Ennek megfelelően a hegyesszög P 2 hipotézisét a következőképpen kellett eredeti formájában megfogalmazni: *ha két párhuzamos egyenest egy harmadik egyenes metsz — akkor a két egyenes a metszőnek azon az oldalán nem találkozik, amelyiken a belső szög kisebb, mint a* (metszőnek ugyanazon az oldalán) *vele szemben fekvő külső szög (6. ábra).*



$(\alpha > \xi) \to (AX \cap BY = Q).$

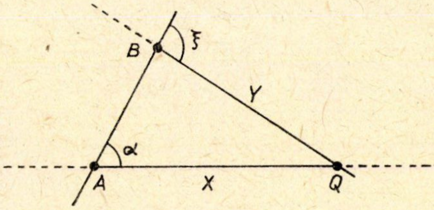
5. ábra



$(AX \parallel BY) \to (\alpha < \xi).$

6. ábra

Ebben az esetben egészen világos, milyen fontos *már a feltételben* kimondani, hogy a párhuzamos egyenesek *non-incidenciája* a metsző egyenes által meghatározott két *félsík* melyikében valósul meg; ellenkező esetben tehát ha ezt nem precízirozzuk, akkor ez az állítás nem is szerepelhet mint egy az *Elem. I 29. 2* tételével szembenálló hipotézis! Megfelelő módon, P 2 hegyesszög hipotézis esetében a remélt és várt — magát a P 2 hipotézist megdöntő — végeredménynek a következő megfogalmazásban kellett volna egy (Bolyai-féle értelemben vett) *abszolút* következtetési láncolat legvégén megjelennie: *ha két koplanáris egyenest egy harmadik egyenes metsz és ha a két egyenes a metsző egyenesnek azon az oldalán nem metszi egymást, amelyiken a belső szög kisebb mint* (a metszőnek ugyanazon az oldalán) *vele szemben fekvő külső szög — akkor ez a két* (egymással párhuzamos) *egyenes metszi egymást, éspedig a metsző egyenesnek éppen azon az oldalán, amelyiken a belső szög kisebb mint a külső (7. ábra).* Ebből azonnal következik tehát, hogy a feltevés hamis, és a két párhuzamosnak feltételezett *koplanáris egyenes, amely egy közös metszővel ennek egyik oldalán kisebb belső szöget alkot a szemben fekvő külső szögnél — nem lehet párhuzamos, éspedig a metszőnek azon az oldalán találkozik egymással, amelyiken a belső szög kisebb mint a külső.*



$(\alpha < \xi) \to (AX \cap BY = Q).$

7. ábra

(c) Végül, igen könnyű belátni, hogy valamint az *Elem. I 29. 2* esetből közvetlenül következik az *Elem. I 29. 3* tétel — hasonlóképpen az *Elem. I 29. 2* tétellel szembeállított két hipotézisből is minden további nélkül következik a tompaszög, illetve a hegyesszög hipotéziseinek egy-egy olyan megfogalmazása, amelyik az

Elem. I 29. 3 tételnek a formális negációja. Ezzel kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy az (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* helyen fellelhető implikáció rekonstrukciójában szinte szükségszerű módon kell áttérni a tompaszög hipotézisének az *Elem. I 29. 3* tétellel szembenálló megfogalmazására. Ebben az esetben a tompaszög (ill. a hegyesszög) hipotézise a következőképpen fogalmazható: *ha két koplanáris egyenes párhuzamos egymással, akkor ezek, egy harmadik őket metsző egyenessel a metsző egyenes egyik oldalán olyan belső szögeket alkotnak, amelyek összege nagyobb (ill. kisebb) mint* 2*R*. A megfelelő, lényegtelen szövegbeli módosítást eszközölve, a tompaszög hipotézise esetén effektíve realizált ellentmondáshoz hasonlóan, a hegyesszög esetében a következő ellentmondásnak kellett volna megjelennie ahhoz, hogy a kiinduló hipotézis megdőljön: *ha két egyenes párhuzamos és egy metsző egyenesnek azon az oldalán nem metszi egymást, amelyiken a belső szögek összege kisebb mint 2R — akkor az eredeti két egyenes metszi egymást, nevezetesen a metsző egyenesnek ugyanazon az oldalán, amelyiken a belső szögek öszszege kisebb mint* 2*R*; ahonnan azonnal következne a tétel: *ha két koplanáris egyenest egy harmadik egyenes metsz és a szelő egyik oldalán a belső szögek összege kisebb mint* 2*R, akkor a két egyenes meghosszabbítva, találkozik a szelőnek azon az oldalán, amelyiken a belső szögek összege kisebb mint* 2*R. De ez éppen az Elemekben szereplő V. posztulátum!*

Ezek szerint ha az (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* helyén található töredéket kiegészítjük a hozzátartozó, vele szimmetrikus implikációval, amelynek a várakozás szerint szükségszerűen elő kellett volna állnia ahhoz, hogy az *Elem. I 29. 2*, illetve *Elem. I 29. 3* tétel indirekt úton bizonyítást nyerjen — akkor ezen az úton éppen az Elemek V. posztulátumához jutunk! Ebből azonban azonnal következik, hogy *az Elemek V posztulátuma t'k. nem egyéb, mint a hegyes szögnek az Elem. I 29. 3 tétellel formálisan szembenálló hipotézisét megdöntő végkövetkeztetése.* Ahhoz, hogy a hegyesszög hipotézisének önellentmondó lényege (a tompaszög hipotéziséhez hasonlóan) bizonyítást nyerjen — a hegyesszög hipotéziséből kiindulva egy abszolút geometriai gondolatláncolat végén ennek, tehát éppen az Elemek V posztulátumának — kellett volna végkövetkezményként megjelennie; ez azonban nem történt meg és minden valószínűség szerint az akkori görög geométerek még elég igényesek lehettek ahhoz, hogy belássák az erre irányuló kísérletek gyakorlati sikertelenségét. De mivel a végkövetkezményben foglalt tétel nélkül az *Elem. I 29* tétel szigorú bizonyítása nem volt lehetséges, így EUKLIDES ezt a döntő jelentőségű tételt felvette a bizonyítatlan követelmények közé. Természetesen, az V. posztulátum bizonyíthatatlanságára, azaz a többi posztulátumoktól való logikai függetlenségének a kimutatására még semmilyen szigorú bizonyíték nem állott rendelkezésére (ne felejtsük el, hogy ennek a szigorú bizonyítása még nem volt a nem-euklideszi geometria első három megalapítójának sem a birtokában — bár ők az V. posztulátum függetlenségének meta-matematikai tételét már explicit módon megfogalmazták) — és azt sem tudhatjuk, hogy ő maga vajon azt tartotta-e, hogy a posztulátum elvileg *bizonyíthatatlan*, vagy pedig hitt annak elvi bizonyíthatóságában és csak az a tény, hogy szigorú (azaz abszolút geometriai módszerekkel történő) bizonyítása mindaddig nem sikerült, tehát, hogy csupán pragmatikus kényszerből vette fel a kérdéses tételt a posztulátumok sorába. De ez egyáltalán nem is érdekes és teljesen közömbös, milyen meggondolások vezették tettében. A történelem számára csak a már elkövetett tett számít és kétségbevonhatatlan, hogy ez a tett, — akár tudatában volt ennek elkövetője, akár nem — önmagában sorsdöntő jelentőségűnek bizonyult a geometria további történetében.[34]

10. Végezetül, annak elfogadására, hogy az *Elemek V* posztulátuma valóban a (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* szövegrészben megjelenő tompaszög hipotézisnek az ikerhipotéziséből levezetni remélt végkövetkeztetéssel ekvivalens — tekintetbe kell még vennünk a következő két tényezőt:

(d) Mindenekelőtt tekintetbe kell venni, hogy az V. posztulátumnak az Elemekben található *megfogalmazása nem elég szigorú*, amennyiben magán a szükséges *posztulátumon kívül egy bizonyítható* — méghozzá az abszolút geometriához tartozó! — *tételt is tartalmaz*. Nevezetesen az a zárókitétel, amelyik kimondja, hogy a két szóban forgó koplanáris egyenes *a szelőnek azon az oldalán metszi egymást, amelyiken a két belső szög összege kisebb mint 2R* — teljesen fölösleges, hiszen ez a kitétel az abszolút geometria axiómáiból szigorúan következik! A posztulátumnak magának csak annyit kellene kimondania, hogy *ha a két koplanáris egyenes a szelővel olyan belső szögeket alkot ennek egyik oldalán, amelyek összege kisebb mint 2R — akkor a két egyenes találkozik* — és semmivel se többet. Ellenben a posztulátum megfogalmazásában teljesen *fölösleges kitétel elengedhetetlenül szükséges akkor, ha ez az állítás mint a hegyesszög hipotézisének a végkövetkezménye jelenik meg!*[35] És EUKLIDES — közismert szokásához híven — ebben az esetben is abban az eredeti megfogalmazásban vette át ezt az állítást is, — úgy ahogy és ahol találta, nem változtatván semmit annak szóösszetételén.[36] Márpedig abban a fogalmazásban, ahogy az az *Elemek*ben szerepel *nem találhatta másutt, csak a párhuzamosak problémájának megoldására irányuló indirekt kísérletek zsákutcájának a legvégén.* Az említett fölösleges kitétel tehát úgy tekintendő, mint a geometriai filogenézisnek egy atavisztikus maradványa.

(e) És végül, utolsósorban, nem hagyható figyelmen kívül az a körülmény sem, hogy *az Elem. I 29 tételnek az Elemekben adott bizonyítása ugyancsak indirekt úton történik*; nevezetesen, az *Elemek*ben követett gondolatmenet lényegében a következő: az *Elem. I 29* tétel igaz, mert annak ellenkezője hamis; ámde a bizonyí-

[34] „Euklides ist vor allem Didaktiker, kein schöpferisches Genie" (B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, Basel—Stuttgart 1956, 323); „Euclid... laid down this epoch-making Postulate. When we consider the countless successive attempts made through more then twenty centuries to prove the Postulate, many of them by geometers of ability, we cannot but admire the genius of the man who concluded that such a hypothesis, which he found necessary to the validity of his whole system of geometry, was really indemonstrable". (T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, volt. I. 202, Cambridge 1908). — „L'homme qui, contrairemenet à l'opinion des géomètres distingués qui la considéraient comme un théorème, a placé cette proposition, nommée des parallèles parmi les postulats, qui sont a admettre parmi les indémontrables, comme point de départ de la science géometrique, a fait oevre de génie, et non de compilateur inintelligent. Même s'il y a de la gaucherie dans la rédaction de ce début des Éléments d'Euclide, il nous semble impossible de méconnaitre l'intuition géniale qui se trouve à la base de l'édifice scientifique le plus important que l'Antiquité nous a légué". (A. Frenkian, *Le postulat chez Euclide et chez les modernes*, Paris 1940, 15). — Lehet azonban, hogy van der Waerdennek mégis igaza van, abban az értelemben, hogy egy új posztulátum bevezetésének a szükségességét talán már a megelőző generáció matematikusai felismerték; utalunk itt jelen dolgozatunk *20. „A háromszög szögösszegére vonatkozó tétel bizonyíthatatlansága"* c. paragrafusára, valamint a *23. „ A párhuzamosak problémája a IV. század második felében"* c. paragrafus (f) pontjára.

[35] Lásd fentebb a (b) pontot.

[36] Lásd Pappus, *La Collection Mathematique* (franciára ford. P. Ver Eecke) Paris 1933, vol. II. 507; van der Waerden, *i. m.* 180—181.

tandó tétellel itt a következő állítás van, mint ellenkező hipotézis, szembehelyezve: *ha az AB és CD egyenesek párhuzamosak, akkor egy közös EF szelővel ennek egyik oldalán alkotott két belső szög BGH és GHD összege kisebb mint 2R*; *de ez nem más, mint éppen a hegyesszög hipotézise*, és a továbbiakban ezt az ellenhipotézist azért veti el a szerző, mert az V. posztulátummal összeegyeztethetetlen. Ezek szerint tehát az *V. posztulátum az Elemekben éppen arra szolgál, hogy megdöntse a hegyesszög hipotézisét, annak itt adott megfogalmazásában*; és ez éppen a (2) *Anal. Prior. 66a 13—14* helyen szereplő tompaszög hipotézis tükörképe!

Különösen figyelemreméltó azonban, hogy az *Elem. I 29* tételnek az *Elemekben* adott bizonyítása teljesen hibás, hiszen *csak a fele* van bizonyítva annak amit bizonyítani kellene! Az indirekt bizonyítási eljárás megköveteli u. i., hogy az *Elem. I 29* tételnek formálisan ellentmondó *általános* kontra-euklideszi hipotézis hamis volta nyerjen szigorú bizonyítást. Ezt az általános kontra-euklideszi hipotézist EUKLIDES *explicite* be is vezeti, azzal a *kimondott szándékkal*, hogy önellentmondó voltát kimutassa. Sajnos a továbbiakban ennek az általános hipotézisnek *csak* az egyik *fele* — igaz, hogy a fontosabbik, — nevezetesen a *hegyesszög* hipotézise semmisül meg és pedig éppen a párhuzamosak posztulatumával való összeférhetetlensége miatt. *Hátra maradt* volna még a *tompaszög* hipotézisének a megdöntése és elhárítása is. Ez azonban az *Elemekben nem szerepel*. De éppen ez, az *Elemek* szövegéből hiányzó bizonyítás az amelyik az általam fentebb idézett (2) sz. töredék *Anal. Prior. 66. a 13—14* tartalmát alkotja! A *Corpus* és az *Elemek* szövegei így logikailag kiegészítik egymást és csak együttesen alkotnak szerves egészet. A két szöveg, nyilvánvaló módon történelmileg is szorosan összefügg egymással: egyazon történelmi egésznek a sors által elválasztott de a szellemnek ugyanabban a geológiai rétegében híven megőrzött két része ez.

(Szembeötlő, hogy az *Elem. I 29* tétel bizonyításának ez az igen súlyos fogyatékossága az olykor különösen igényes kommentátorok szinte végeláthatatlan sokaságának a figyelmét — PROKLOS-tól egészen HEATH-ig — teljesen elkerülte, holott mindezek éppen ennek a kulcspoziciót betöltő, alapvető fontosságú tételnek szentelték általában a legtöbb és a legmegkülönböztetettebb figyelmet).

Ezekután könnyen érthetővé válik, miért fordul elő a tompaszög hipotézisének *két (Anal. Prior. 66a 13—14, és 66a 14—15)* variánsa a *Corpus*ban: az eredeti cél a háromszög szögeinek összegére vonatkozó, *Elem. I 32. 2* tétel szigorú (azaz *abszolút*) bizonyítása volt; ez a bizonyítás azonban az *Elem. I 29* tételtől függött, márpedig ezt a tételt nem sikerült, még indirekt úton sem, szigorú, *abszolút* eljárásokkal bizonyítani; ilyen körülmények között természetesen felmerült az az ötlet, hogy ha már indirekt eljárást alakalmaznak, akkor a bizonyítás menetének nagyfokú egyszerűsítését lehet elérni, ha ezt az eljárást minden segédtétel közvetítése nélkül közvetlenül magára a bizonyítás végcélját képező eredeti *(Elem. I 32. 2)* állításra alkalmazzák — (hiszen az *Elem. I 29* segédtétel csak egy *direkt* bizonyítási eljárás esetén létjogosult). Így aztán, ebben az indirekt bizonyítási kísérletben, az eredeti *Elem. I 32.2* tétellel a következő általános hipotézist állították szembe: (T) *a háromszög szögeinek összege nem 2R*, majd — amint az (1) *Anal. Prior. 66a 14—15* töredék bizonyítja — ezt a másik megfogalmazású, (P), iker-hipotézishez hasonlóan, ismét két diszjunkt részre bontották: (T 1) *a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 2R* (a tompaszög hipotézise, *Anal. Prior. 66a 14—15*), illetve (T 2) *a háromszög szögeinek összege kisebb mint 2R* (a hegyesszög hipotézise).

A hegyesszög hipotézisének nyoma az arisztoteleszi Corpus-ban

(Anal. Poster. 90a 33—34)

11. A P 2 formában történt megfogalmazástól eltérően — a hegyesszög hipotézise ez utóbbi T 2 megfogalmazásban nyomot hagyott a *Corpus* szövegében is. Meg kell jegyeznünk ehelyütt, hogy a *Corpus*ban előforduló, és a kontra-euklideszi rendszer megléte mellett tanúskodó töredékek túlnyomó többségében mindig az *Elem. I 32. 2* tétellel formálisan szembenálló általános T hipotézis formájában jelenik meg. *A tompaszög hipotézise* a fenti két töredéken kívül még három helyen fordul elő;[37] *a hegyesszög* hipotézise csupán *egyetlen egyszer* van megemlítve és akkor sem önállóan, hanem egy sorban a tompaszög, valamint a derékszög hipotéziseivel. Az *Analytica Posteriora II 2* fejezetében Aristoteles az egyszerű *meglét* (*εἰ ἔστιν ἁπλῶς*; an sit simpliciter; *89b 39*) és a sajátos, *kvalifikált létezés* (*... ἐπὶ μέρους*; in parte; *90a 2*) közötti különbséget taglalja. Valamilyen szubjektumról, mint egy konkrét minőségi tulajdonság hordozójáról, szubsztrátumáról (*ὑποκείμενον*; insum subjectum; 90 a 12), mint amilyen például a *hold,* vagy a *háromszög* fogalma *(σελήνην ... ἢ τρίγωνον; 90a* 12, 13*)* mindenekelőtt tudnunk kell, hogy *egyáltalán létezik-e, vagy nem létezik,* — hogy egyszerűen van-e vagy nincsen (*εἰ ἔστιν ἢ μὴ σελήνη*; an sit necne luna; *90a 4—5*). A specifikus, kvalifikált létezés esetében azonban azt kérdezzük, hogy *egy tulajdonság mint predikátum vajon hozzátartozik-e a szubjektumhoz vagy sem:*

(3) Így például a háromszöghöz, mint egyszerűen létező szubjektumhoz hozzátartozhat mind *az egyenlőség* — mind a *nem-egyenlőség* (*ἰσότητα ἀνισότητα*; aequalitatem inequalitatem; *90a 13*).

Ez, az eredetiben rendkívül elliptikusan megfogalmazott példa, önmagába szintén úgy tekinthető, mint egy az általános kontra-euklideszi hipotézisre tett célzás: nyilvánvaló ugyanis, hogy amikor Aristoteles az *egyenlőséget* vagy a *nem-egyenlőséget* említi, mint a háromszög egyik tulajdonságát — akkor a *háromszögre* a szó eredeti etimológiai értelmében vett jelentésre gondol, tehát mint *három szög* oszthatatlan egységére és így kézenfekvő ennek az elliptikus kifejezésnek a következő értelmezése: *„háromszög”*-höz — három szögnek egyetlen, bonthatatlan geometriai alakzatban megvalósuló fogalmi egységéhez, — mint egyszerű egzisztenciával bíró szubjektumhoz, hozzárendelhető a következő két predikátum egyike: *„egyenlő 2R-rel”* vagy pedig *„nem-egyenlő 2R-rel”*.

A továbbiakban Aristoteles a *lényeg* kérdését tárgyalja: mi az, ami pl. egy bizonyos tulajdonsággal rendelkező dolgot, *mint olyat* meghatároz; a *lényegnek* ez a definíciója egyben a dolog *létalapja* is, létezésének, — valamilyen konkrét minőséggel rendelkező létének meghatározó oka.[38] Ennek példázására a fejezet végén ismét a háromszög — a három szöge egységeként felfogott *háromszög* jelenik meg. Bár a szöveg meglehetősen kusza és a szokottnál is jóval zárkózottabb, az mégis világosan kiderül belőle, hogy Aristoteles a három szögének egységeként felfogott *háromszöget* úgy tekinti mint aminek meghatározó lényege, létének okát

[37] Lásd alább a következő töredékeket: *4. Anal. Poster. 90a 33—34; 5. Eth. Eudem. 1222b 35—36; 13. Anal. Poster. 77b 22—24.*

[38] *τὸ τί ἔστιν εἰδέναι ταὐτό ἐστι καὶ διὰ τί ἔστιν.* (nosse quid sit, idem est atque nosse cur it; *90a 31—32*).

definiáló alapja a *három szög* egy idomba foglalt összességének egy *meghatározott értéke* és — ami a mi szempontunkból a legfontosabb — szerinte:

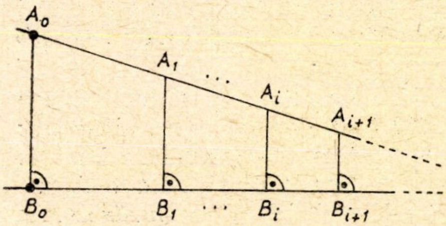
(4). Ehhez *a háromszöghöz* mint szubjektumhoz egyaránt hozzátartozhat mint meghatározó lényeges attributum a következő három érték egyike: vagy *két derékszög*, vagy *nagyobb*, vagy pedig *kisebb mint derékszög*;[39] *(90a 33—34)*.

Számunkra ebben a (4) *Anal. Poster. 90a 33—34* töredékben pillanatnyilag a legfontosabb a hegyesszög hipotéziséről szolgáltatott tudósítás: ez ugyanis *az egyetlen hitelesen eredeti, írásbeli nyoma annak, hogy a hegyesszög hipotézise a* T2 *megfogalmazásban explicite és önálló formában is szerepelt az* ARISTOTELES *korabeli matematikai kutatásban.* A *hegyesszög* hipotéziséről ezekután immár állíthatjuk, hogy a *Corpus*ban róla említés történik — de ennél többet sajnos nem, míg a *tompaszög* hipotézisét a *Corpus* nem csupán megemlíti, hanem néhány abból következő, alapvető tételt is ismertet.

A hegyesszög hipotézise Proklos kommentárjaiban

12. Itt kell azonban megjegyeznünk, hogy az ókorból származó matematikai irodalomban a hegyesszög hipotézise előfordul a *Corpus* idézett (4) *Anal. Poster. 90a 33—34* fragmentumán (és, természetesen az *Elemek I* 29 tételének bizonyításán) kívül még egy nevezetes helyen, éspedig a PROKLOS által az *Elemek I* könyvéhez írott kommentárokban; (i. m. 368, 26—370, 10). A párhuzamosak problémájának megoldására irányuló kísérletek tárgyalása alkalmából, PROKLOS említést tesz egy önmagában is igen érdekes gondolatmenetről; eszerint: *két koplanáris egyenes, amelyik egy metsző egyenessel, ennek egyik oldalán, két belső szöget alkot úgy, hogy ezek összege együttesen két derékszögnél kisebb* — *nem metszi egymást.*

E tétel *bizonyítása* ugyanazzal az eljárással történik, mint amelyiket eleai ZENON az „AKHILLEUS" elnevezésű *aporiában* alkalmazott; a PROKLOS által közölt paradox állítás is lényegében egy az AKHILLEUShoz hasonló *aporia*, és éppoly hibátlan és önmagában cáfolhatatlan, mint amaz.



$A_iB_i = A_iA_{i+1}$.

8. ábra

Meg kell itt jegyeznünk, hogy a PROKLOS által említett aporia az EUKLIDES-féle V. posztulátum puszta formális negációjánál *jóval többet nyújt*.[40] Az V. posztulátum ugyanis azt állítja, hogy az említett feltételek mellett („két belső szög összege kisebb mint $2R$") a két eredeti egyenes *mindig* metszi egymást. A *hegyesszög* hipotézise ezzel szemben azt állítja, hogy azonos feltételek mellett, a két egyenes *nem mindig* metszi egymást. A PROKLOS által idézett aporia ezzel szemben még a hegyes-

[39] *τῶν ὑπαρχόντων οἷον ὅτι δύο ὀρθαί, ἢ ὅτι μεῖζον ἢ ἔλαττον.* (... eorum quippiam insunt, cuiusmodi sunt habere duos angulos rectos, aut esse maius vel minus; *90a 33—34*)

[40] Erre már Proklos is felhívja a figyelmet (*i. m.* 371, 2—10); ehelyett egy olyan megfogalmazást tart elegendőnek, amely már éppen a hegyesszög hipotézisével azonos.

szög hipotézisén is *túlmenve* azt állítja, hogy a kérdéses két egyenes *soha nem metszi egymást.* A PROKLOS által közölt bizonyítás természetesen abszolút jellegű. Éppen ezért ennek végkövetkeztetését a következőképpen lehet megfogalmazni: *akár biztosítva van valamilyen módon két egymásnak dűlő koplanáris egyenes metszése* (pl. az euklideszi párhuzamosak posztulátuma segítségével, vagy ennek híján egyszerűen egy kategorikus — természetesen az euklideszi posztulátummal ekvivalens — bizonyítás nélküli állítással) *akár nem, — minden esetben szigorúan bizonyítható a metszéspont non-egzisztenciája.* Ennek alapján az euklideszi geometriában (ahol a metszéspont egzisztenciáját az V. posztulátum biztosítja) állandó belső ellentmondás állana fenn a metszéspont egzisztenciája tekintetében. A helyzet azonban korántsem ennyire tragikus, és a PROKLOS által idézett aporia, lényegében semmivel sem nyújt többet mint az AKHILLEUS, csakhogy azt más formába öntve mondja el: ha a gyorslábú AKHILLEUS mindig egy a egyenes A_i pontjában van *(8. ábra)* és ez az a egyenes egy olyan b egyenes felé *közeledik*, amelyen a nála lassabban mozgó teknősbéka mindig az A_i pontból a b egyenesre bocsátott $A_i\,B_i$ merőleges B_i talppontjában van, — és ha a verseny alapkonvenciója kimondja, hogy $A_iA_{i+1}=A_iB_i$ (tehát a teknősbéka által befutott intervallum B_iB_{i+1} mindig az azonos időintervallum alatt az A által befutott A_iA_{i+1} intervallum vetülete; az A_iA_{i+1} intervallumnál tehát rövidebb) — akkor A és B soha *nem találkoznak* (még akkor sem, ha a két egyenes metszéspontjának egzisztenciája egyébként valamilyen úton biztosítva van). Az aporia tehát csak azt bizonyítja, hogy a metszéspont — ha egzisztenciája valamilyenképpen bizonyos is — egy a fentihez hasonló végtelen konvergens szakaszsorral effektíve *elérhetetlen.* Ha pedig a metszéspont egzisztenciája *nincsen* előre — sem az euklideszi párhuzamossági posztulátum, sem valamilyen más kijelentés által biztosítva —, akkor könnyen előfordulhat, hogy miközben az A_iB_i szegmentum a nulla felé tart (ami egyáltalán nem szükségszerű, hiszen ha a párhuzamosak posztulátuma *nem érvényes,* akkor az a és b egyenesek közötti távolság *csökkenhet*, majd elérve egy *minimális* értéket ismét növekedhet), az $\sum_0^n (A_iA_{i+1})$ összeg *divergál* és akkor, természetesen, az aporia csak a reális tényállapotot fejezi ki; de előfordulhat az is, hogy — miközben az A_iB_i intervallumok minden határon túl zsugorodnak — az $\sum_0^n (A_iA_{i+1})$ összeg (annak ellenére, hogy n minden előre megadott értéknél nagyobb értékeket vesz fel) — mégis, egy véges értéket soha nem halad meg; ebben az esetben az aporia azt állítja, hogy metszéspont egzisztenciájáról nemcsak hogy *nem beszélhetünk*, de azt *kategorikusan vissza is kell utasítanunk*, mert ez annak az axiómának az *elfogadását* jelentené, amelynek értelmében *minden korlátos, konvergens sorozatnak van határértéke*, és ezt a határértéket — ha más mód nincs rá — *éppen maga ez a konvergens végtelen sorozat definiálja*; azt jelentené ez tehát, hogy ezt a metszéspontot magát éppen ez a végtelen sorozat *hozza létre*; így ez a pont nem volna ezek szerint egyéb, mint maga ez a *végnélküli* sorozat befejezettségében, tehát maga az *aktuális végtelen*! Az aporia tehát azt bizonyítja, hogy ha két egymáshoz közeledő egyenes metszéspontjának a meghatározására nem áll rendelkezésre más mód, mint egy végtelen konvergens sorozat — és *ha az aktuális végtelen fogalmát* (illetve, ami ezzel egyenértékű: a CANTOR—DEDEKIND-féle folytonossági axiómát) *kategorikusan visszautasítjuk — akkor kategorikusan vissza kell utasítanunk a metszéspont létezését* is; ez azonban semmilyen belső ellentmondást nem eredményez abban a geometriában, amely a metszéspont létezését nem képes valamilyen véges úton biztosítani; ha ellenben a metszéspont egzisztenciája *véges* úton már előre biztosítva van — akkor az aporia csupán azt állítja, hogy a kilőtt nyíl ide soha nem érkezik meg, vagy pedig hogy — ha a fenti megegyezés alapján haladnak a két egymáshoz tartó egyenesen — AKHILLEUS és a teknősbéka effektíve mégsem találkoznak soha ebben a pontban.

Történelmi szempontból vizsgálva a PROKLOS által idézett aporia szerepét a párhuzamosak problémájának genezisében, nyilvánvaló, hogy az a *hegyesszög* hipotézisével van összefüggésben.[41]

A PROKLOS-féle szöveg alapján az aporia keletkezésének kora sajnos nem állapítható meg. Van azonban két tényező, amely némi *valószínűséget* látszik adni annak a *feltevésnek*, hogy az aporia jóval előbbi keletű.

Mindenekelőtt ugyanis PROKLOS mindenütt, ahol a párhuzamosak problémájával kapcsolatos kísérletekről van szó, *pontosan említi a szerzők nevét*, — sőt olyanokra is céloz (pl. POSEIDONOS), akiknek a kísérletét nem is ismerteti; az aporia esetében azonban *szerzőről nem beszél*, hanem csak általánosságban céloz „azokra",[42] akik ezt az ellenvetést felhozták; ebből talán nem túlzott arra következtetni, hogy itt egy a hagyomány által továbbított és POSEIDONOS-t is megelőző ellenvetésről van szó.

De az is az aporia régisége mellett látszik szólni, hogy ilyen zenoni típusú argumentumok divatjának kora éppen *az V. század második és a IV. század első fele.* De amennyiben az aporia régiségét elfogadjuk, úgy azt — véleményem szerint —, mindenképp az *Elemek* megjelenése előtti időpontra kell tennünk, mivel az EUKLIDES által bevezetett posztulátum tulajdonképpen úgy is tekinthető, mint érvényesítése annak a belátásnak, amelynek értelmében az (önmagában korrekt) aporia végkövetkeztetése (metszéspont *soha* nem egzisztál) — az aporiában alkalmazott gondolatmenet formális korrektsége miatt — csak úgy hárítható el, ha erre egy a metszéspont egzisztenciáját biztosító kategorikus állítást posztulálunk. A legplauzibilisebbnek azt tartom, hogy ez az aporia a IV. század második felében jött létre: a hegyesszög hipotézisét megdönteni szándékozó, valószínűleg ismételt kísérletek gyakorlati kudarca szinte természetszerűleg vetette fel — abban a korban, amelyikben a zenoni aporiák még élénken foglalkozatták a közvéleményt — az ötletet, hogy ha a szigorú levezetés képtelen a két egymás felé konvergáló egyenes metszését bizonyítani, akkor a logika talán képes lesz arra, hogy ennek az intuitive igazolt ténynek *éppen az ellenkezőjét* bizonyítsa!

Ezt az aporiát már úgy kell értékelnünk, mint önmagában annak a derengő gondolatnak a talán öntudatlan érvényrejuttatását, hogy a hegyesszög hipotézisének gyakorlati cáfolhatatlansága talán annak tulajdonítható, hogy hamissága *elvileg* is *bizonyíthatatlan* volna, hiszen szigorúan bizonyítani éppen az bizonyítható, hogy az egymás felé konvergáló egyenesek *soha* nem metszik egymást!

[41] Proklos szövegének az előbbi (40. sz.) megjegyzésben idézett részletével kapcsolatban (*i. m.* 371, 2—10) Heath megjegyzi, hogy ebben már „we have the germ of such an idea as that worked out by Lobatchewsky" (*The Thirteen Books* etc. vol. I., 207). Hasonlóképpen, O. Becker is úgy említi a Proklos kommentárjából idézett kérdéses helyet, mint „eine erste Vorahnung der hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie von Gauss, Bolyai, Lobatschewskij". (*Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung,* Freiburg—München, II-ik kiadás, 1964, 169).

[42] κἀκείνους (268, 26).

A fejlődés lényegesebb csomópontjai ebben a vonatkozásban a következők lehettek:

(a) a *direkt* eljárások gyakorlati kudarca arra vezetett, hogy a bizonyítandó tétellel szembeállítsák a *tompaszög* és a *hegyesszög* hipotéziseit és hogy megkíséreljék ezeket *megdönteni*;

(b) a hegyesszög hipotézisének megdöntésére irányuló kísérletek gyakorlati sikertelensége arra vezetett, hogy e hipotézis *hamis voltát állító*, és senki által kétségbe nem vont meggyőződéssel szemben felvegyék, hogy a *hegyesszög hipotézise nem hamis*, és — ebben a vonatkozásban az a valóban fölötte meglepő eredmény adódott, hogy szigorúan bizonyítható[43] egy a hegyesszög hipotézisénél még sokkal *többet* állító tétel.

A tompaszög rendszerének szinguláris alakzatai

(Eth. Eudem. 1222b 35—36)

13. Ime, végül a negyedik — az (1) és (2) ikertöredéken kívül kétségtelenül a legjelentősebb szöveg —, amelyben egy a *tompaszög* hipotéziséből eredő tételre történik célzás. Nevezetesen, az *Eudemoszi Etika II* 6 fejezetében olvassuk a következő példát *(1222b 35—36)*:

(5) *ha a háromszög átváltozik* (*μεταβάλλοι*) — *akkor szükségszerűen átváltozik* (*μεταβάλλειν*) *a négyszög is, így például ha* (a háromszög szögeinek összege) *három* (derékszöggel válik egyenlővé, akkor a négyszög szögeinek összege) *hat* (derékszöggel lesz egyenlő), *ha pedig* (a háromszög szögeinek összege) *négy* (derékszöggel válik egyenlővé — akkor a négyszög szögeinek összege) *nyolc* (derékszög lesz).

Az eredeti szöveg ismét rendkívül elliptikus;[44] semmi nehézségbe nem ütközik azonban a hiányzó szövegrészeket (a fenti fordításban *zárójelek* között) helyreállítani.

Világos, hogy itt a *μεταβαλλεῖν* ige nem egy meghatározott konkrét háromszögnek valami más háromszögbe való *átváltozását* jelenti, hanem *magának a háromszögnek, mint olyannak*, — a háromszög lényegének a teljes megváltozását, amelynek következtében ez az alakzat elveszti euklideszi jellegét és átváltozik kontraeuklideszi háromszöggé.

Fölötte érdekes azonban az ezt a lényeges jellegbeli átváltozást illusztráló két példa: a második ugyanis a $8R$ *szögösszeggel rendelkező négyszög — a tompaszög* hipotézisére épülő geometriának (pozitív értelemben, a sík RIEMANN-geometriájának) egy szinguláris alakzata: ez a RIEMANN-geometria *maximális négyszöge*, amelynek mind szögösszege, mind területi mértéke az ebben a síkban négyzetek által realizálható *maximális* érték; és, amint ismeretes, e szinguláris alakzat tk. egy, egyetlen önmagában zárt, véges hosszúságú egyenessé degenerálódott négyzet, amelynek kerülete szintén az ebben a síkban realizálható maximális hosszúságú egyenesdarabbal egyenlő.

Kézenfekvő a feltevés: vajon a *tompaszög* hipotézisével foglalkozó görög geométerek felismerték volna, hogy *a gömb felszínén megvalósul a tompaszög hipotézise*

[43] Nem lehet azonban teljesen kizárni azt a feltevést sem, hogy a Proklos által idézett aporia már az eleai Zénonnak tulajdonított cca. 40 aporiát tartalmazó lajstromban is szerepelt volna. Ezt azonban semmi nem támasztja alá és önmagában nagyon kevéssé valószínű.

[44] *εἰ δέ γε μεταβάλλοι τὸ τρίγωνον, ἀναγκη καὶ τὸ τετράγωνον μεταβάλλειν, οἷον εἰ τρεῖς, ἕξ, εἰ δέ τέτταρες, ὀκτώ.* (verum si quid in trigono mutaris, necessario est et in tetragono mutes, ut si tres habuerint, sex, et si quattour, octo; 1222b 35—36).

— ha a nagyköröket egyeneseknek tekinti? Hiszen ha ezt az analógiát felismerik és elfogadják, akkor az ARISTOTELES által fent idézett konfigurációk szinte minden további nélkül szembeötlenek: a $3R$ szögösszegű háromszög a gömbfelületen a szabályos *gömbi oktaédernek* egyik lapja; a $6R$ szögösszegű négyzet két egymásra merőleges fél nagykörív által határolt degenerált négyszög; ugyanez a kétoldalú gömbi idom azonban felfogható úgy is, mint egy $4R$ szögösszeggel rendelkező degenerálódott háromszög; végül pedig $8R$ szögösszeggel rendelkező négyszög — maga az egyik nagykör, mint kerület által határolt teljes félgömb. Sajnos azonban, bármilyen egyszerű és tetszetős is ez az értelmezés, a mai olvasó számára — *semmiféle történelmi bizonyítékkal nem rendelkezünk*, ami ezt valószínűvé tenné. Még az *Elemek* előtt megjelent ugyan AUTOLYKOS munkája a gömbről[45] — de ennek tartalma még rendkívül primitív és hiányzik belőle minden lényeges elem, ami a fenti értelmezéshez elengedhetetlenül szükséges; így például hiányzik belőle az az egyszerű konvenció, hogy a nagykörök közötti szögek a síkgeometriában egyenesek között előálló szögek mértékszámával mérhetők; és egyáltalán hiányzik a gömbfelületi-szög, valamint a gömbháromszög fogalma. Csupán az i. u. I. században MENELAOS gömbtanában jelennek meg első ízben azok a fogalmak[46] és tételek, amelyek elengedhetetlenül szükségesek ahhoz, hogy a tompaszög hipotéziséből eredő és a fenti (5) *Eth. ad Eudem. 1222b 35—36* töredékben megjelenő degenerált, különleges szinguláris alakzatok definiálhatók legyenek; itt jelenik meg első ízben a két nagykör által alkotott szög és mértéke fogalma, itt jelenik meg először a gömbháromszögnek, mint három *nagykörív* által határolt gömbfelszíni alakzatnak a precíz fogalma, valamint az alapvető tétel is, amelyik kimondja, hogy a *gömbháromszög szögeinek összege nagyobb mint* $2R$; MENELAOS *Sfairiká*jával kapcsolatosan meg kell még jegyeznem, hogy annak első könyvében a szerző nyilvánvaló módon az EUKLIDES-féle *Elemek* első könyvének az előadásmódját követi, amennyiben az *Elemek* abszolút tételeit megfelelő módon átviszi és bebizonyítja a gömbfelszín geometriájában is. Valószínű, hogy ő már észrevette a gömbfelszín és a sík geometriája közötti analógiát, amelynek alapja nyilván az, hogy a nagykör — egyenesnek tekinthető. Semmi nyoma sincsen azonban annak, hogy azt az alapvető analógiát előtte már felismerték volna. Sőt, határozottan állíthatjuk, hogy egy *ilyen megállapítás teljesen ellentétben áll az egész görög matematika és az egyetemes görög tudományos gondolkodás szellemével.* A görög matematika számára mindörökre elfogadhatatlan lett volna, hogy egy nagykört tudatosan az *egyenes analogonjának* fogjanak fel és hogy ennek alapján a gömbfelszín geometriáját úgy kezeljék, mint egy sík geometriát. A mai értelemben vett *modell* fogalma teljesen idegen volt a görögök számára.

Ennek ellenére nem lehet teljesen elvetni azt a feltevést, hogy ezt az analógiát mégis egyáltalán *észrevették.* Ehhez a feltevéshez némi alapot szolgáltat az a történelmi értesülés, amely szerint már az ARISTOTELES előtti generáció matematikusai foglalkoztak a szabályos poliéderek szerkesztésével, valamint ezeknek a gömbbe való beírásával[47] — tehát *implicite* a gömbfelszín szabályos felosztásával is.

[45] *Autolyci de Sphaera quae movetur;* edidit. lat. interpr. et. comment. instruxit F. Hultsch, Lipsiae 1885.

[46] M. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, Bd. I., 293, Leipzig 1907; van der Waerden, i. m. 321.

[47] Egy az *Elemek* XIII. könyvéhez írott Scholion szerint Theiatetos lett volna az első, aki az oktaedert a gömbbe írta (*Scholia in Elementa*, ed. J. L. Heiberg, Leipzig 1888; lásd. *Euclidis Opera Omnia* edid. I. L. Heiberg et H. Menge, vol. V; 654, 5).

A gömbfelszín oktaedrális felosztását a *Corpus* is megemlíti *(De Caelo III 4, 303*b *1)*. Egy ilyen gömboktaéder szemlélésénél azonnal feltűnnek a fenti analógiák — és nem zárhatjuk ki teljesen, hogy abban az időben, amikor EUDOXOS már egészen bonyolult kombinációkat végzett a csillagászati gömbökkel — egy ilyen gondolat nem merült volna fel *ötletszerűen*. Mégis, amint már említettem, ennek a feltételezésére semmilyen konkrét anyagi bizonyíték nem áll rendelkezésünkre. És, amint később még rátérünk — a fenti sajátságos alakzatok létrejöttére lehetséges más magyarázatot is találni.

Az euklideszi és az általános kontra-euklideszi hipotézis

(Anal. Poster. 93 a 33—35; Eth. Nicom. 1140 b 15—16)

14. — A *Corpus*ban előforduló, általam ismert, töredékek — a fentieken kívül még egy kivételével[48] mind az *Elem. I. 32.2* tétellel szembeállított általános kontra-euklideszi, *T* hipotézissel kapcsolatosak. Ilyen volt már a fentebb említett *(3) Anal. Poster. 90 a 13* önmagában rendkívül elliptikus (az összes között talán legkevésbé jelentős) töredék is. Rendkívül világos, explicit és éles módon van megfogalmazva a *két egymásnak formálisan ellentmondó* állítás szembenállása egy a következő, az *Anal. Poster. II 8* fejezetében, szereplő töredékben:

(6) *ἤ ποτέρας τῆς ἀντιφάσεώς ἐστιν ὁ λόγος, πότερον τοῦ ἔχειν δυο ὀρθας ἤ τοῦ μὴ ἔχειν*; Querimus utrius contradictionis ratio sit, utrum habendi duos angulos rectos an non habendi; *93 a 33—35*.

A szöveg valóban egészen világos — de mint majdnem mindig ha ez megjelenik valahol — a *λόγος* kifejezés többféleképpen is értelmezhető, bár a jelen esetben lehetséges értelmezések lényegében mind szinte azonos jelentésűek. Ezek szerint a következő *parafrázis* segítségével fordíthatjuk az idézett szöveget:

vajon a két egymásnak ellentmondó állítás közül melyik *bír értelemmel*, vagy: melyik képviseli a háromszög *logoszát, létalapját*, (a francia *raison d'être* értelmében)[49], sajátos három-szög összességeként való egzisztenciájának *lényegét, okát, fogalmát, definícióját — az-e vajon amelyik azt állítja, hogy a háromszög szögeinek összege 2R, vagy pedig ellenkezőleg az, amelyik azt állítja, hogy szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel?*

Talán a leghelyesebb volna a *λόγος* szót egyáltalán le sem fordítani és görög eredetiben meghagyni: a *„háromszög logosza"* kifejezés ebben az esetben, mint egy zenei akkord, tartalmazza ennek a szónak összes, ebben az esetben tekintetbe vehető értelmét.

Az idézett töredékben azonban különösen az vonja magára a modern olvasó figyelmét, hogy ebben az *alternatíva* két végletét ARISTOTELES mint *a priori* teljesen egyformán jogosult, logikai szempontból teljesen egyenrangú *feltevéseket* kezeli; ez különben az összes töredékek közös jellemvonása: sehol nem tapasztalható semmilyen eleve kifejezett részrehajlás vagy preferencia az euklideszi variánsért; sehol egy szóval sincs ezekben a töredékekben még csak említve sem, hogy az euklideszi *Elem. I. 32.2* állítás biztosan *igaz* és méghozzá bizonyított tétel volna, szemben

[48] Lásd lejjebb a 13. *Anal. Poster. 77 b 22—24* töredéket.
[49] Lásd e kifejezés értelmezését az *Anal. Poster. 93 a* alatt.

a neki formálisan ellentmondó tézissel, amely egy önkényesen felállított pusztán hipotetikus jellegű vagy egyenesen *hamis* állítás volna csupán.

A két szembenálló állítást ARISTOTELES nyilván éppen csak *a priori*, mint *hipotéziseket*, mint egy nyílt probléma két egyaránt kérdéses lehetőségét tekinti egyformán jogosultnak, de ebben a vonatkozásban a kizárt harmadik elvét kategorikusan érvényesnek tartotta. Véleménye — amint az az idézett (6) *Anal. Poster 93 a 33—35* fragmentumból teljes világossággal és határozottsággal kiderül — ebben a kérdésben a következő volt: *a két egymásnak ellentmondó állítás közül csak az egyiket illeti meg a logikai igazságérték*, (és ha az egyik igaz, akkor a másik szükségszerűen hamis), illetve, hogy az alternatíva két pólusa közül csak az egyik lehet a háromszög attribútuma; illetve, hogy a két *a priori* lehetséges állítás közül csak az egyik képezheti a háromszög *logoszát, létalapját, lényegbeli definícióját*. Így hát a két egymásnak ellentmondó állítás csupán a mérkőzésre indulás szempontjából bír, a vita *fair play* szabályai szerint, egyenlő jogokkal; de ARISTOTELES számára nem kétséges, hogy a mérkőzésben döntés érhető el, és ez csak az egyik fél győzelmét hozhatja maga után; és bár az sem kérdéses, hogy ARISTOTELES abban is biztos volt, hogy a kettő közül a koszorú csak a klasszikus *Elem. I 32.2* tételt illetheti, nagyfokú sportszerűségre vall, hogy ezt a véleményét a mérkőzés előtt semmiképp sem nyilvánítja, és megelégszik annak a hangoztatásával, hogy a két fél közül az egyiknek és csak az egyiknek — biztosan győznie kell.

Nevralgikus pontjához érkeztünk itt el annak a szellemi fejlődésnek, amely a nem-euklideszi geometria megjelenésével zárul le: nevezetesen, az a lényeges különbség jelenik itt meg szemünk előtt, ami a szorosabb értelemben vett *nem-euklideszi* geometriát az általunk itt *kontra-euklideszi* rendszernek nevezett elmélettől megkülönbözteti. A kontra-euklideszi geometria korszakára, amint már láttuk, az a megrögzött felfogás jellemző, hogy *az euklideszi posztulátum és a neki formálisan ellentmondó kontra-euklideszi állítás közül csak az egyik lehet igaz, és ha az egyik igaz, akkor a másik föltétlenül hamis;* (a párhuzamosak problémája ehhez még azt a *feltevést* is hozzáfűzi, hogy a *kettő közül az igazság logikai értéke a párhuzamosak euklideszi állítását illeti meg).* A kontra-euklideszi rendszer képében a nem-euklideszi geometria *már jelen van* ugyan a tudatban, de egyelőre még kategorikusan negatív, visszautasított, *megtagadott* formában. A nem-euklideszi geometria *önmagában* már megvan — de egyelőre még csak az euklideszi geometria méhében; egyelőre még szervesen ehhez tartozik — de mégis tőle idegen; hiszen a még napvilágra meg nem érkezett nem-euklideszi geometriának már euklideszi szülője által hordozott embriója. A szellem ezzel már birtokában van a nem-euklideszi geometriának, de azt még *nem ismeri el magáénak*, magától azt még idegennek, magából kivetendőnek tartja és onnan kitagadja; de miután ez egyszer megjelent, mintha varázs alatt állana — magából kivetni mégsem tudja: *a szellem fenomenológiája szempontjából a kontra-euklideszi rendszer a nem-euklideszi geometria szerencsétlen tudata*, benne a nem-euklideszi geometria mint valami nem létezőt, hamisat tudja önmagát. A kontra-euklideszi rendszer elfogadása ekvivalens a következő állítással: *nem-euklideszi geometria nem létezhet.* Ámde ennek a kimondásával a nem-euklideszi geometria — ha tagadott formában is —, kétségkívül már meg is jelent és belépett a létezésbe: gyászjelentése volt a születési bizonyítványa.[50]

[50] I. Tóth, *La géométrie non euclidienne dans le développement de la pensée* (Études d'histoire et de philosophie des sciences, Bucarest 1962, 53—70).

A fentebb idézett *(6) Anal. Poster. 93 a 33—35* fragmentum jelentősége már most nemcsak abban áll, hogy a benne szereplő kontra-euklideszi hipotézis rendkívül pregnáns és világos megfogalmazása folytán egy az euklideszivel szemben álló hipotézis eldöntési problémájának a puszta meglétét tanúsítja történelmileg—hanem elsősorban abban, hogy általa ARISTOTELES *kinyilvánítja, hogy elfogadja a kontra-euklideszi felfogás alapján álló meggyőződést,* miszerint a két szemben álló hipotézis közül csak az egyik lehet igaz.

Az euklideszi tétel és a vele szemben álló általános kontra-euklideszi hipotézis ismét megjelenik a *Nikomachosi Etika VI. 5* fejezetében is. Ebben az etikai jellegű ítélőképességről van szó, amelyet, természetesen az érzelmi indulatok általában befolyásolnak. Ítélőképességünket (ὑπόληψιν — existimationem, *1140 b 13)* nem minden téren rontja le vagy zavarja meg a kellemes élvezete vagy a kellemetlen eltűrése — hanem, nyilván csak az erkölcsi-gyakorlati jellegű cselekvés *(τὰς περὶ τὸ πρακτόν* — id quod sub actionem venit; *1140 b 15—16)* terén. Más téren azonban ítélőképességünk érzelmeinktől, a kellemes és kellemetlen benyomásoktól független. Mert

(7) *például, az, hogy a háromszög két derékszöggel* (egyenlő szögösszeggel) *rendelkezik, vagy hogy nem rendelkezik* (két derékszöggel egyenlő szögösszeggel) nyilván ilyen érzelmektől és indulatoktól mentes állítások.[51]

Ismét figyelemre méltó ebben a szövegtöredékben az a tény, hogy a két egymással szemben álló hipotézist a szerző *à priori* teljesen egyenrangú állításokként kezeli. Sőt, ezt az *à priori* megengedett egyenrangúságot az idézett szöveg még egy etikai jellegű tényező hozzáadásával csak jobban kidomborítja: a két egymással logikailag szemben álló tétel nemcsak, hogy logikailag egyenjogú, de még ahhoz sincs jogunk, hogy érzelmi, indulati alapon egyiket a másikkal szemben valamilyen *à priori* előnyben részesítsük.

A kontra-euklideszi hipotézis és a négyzet átlójának kommenzurabilitása

(De Caelo 281 b 5—7)

15. — Az általános kontra-euklideszi hipotézist tartalmazó legérdekesebb szövegtöredék kétségtelenül az *Égről* írott munka *I 12* fejezetében fordul elő. Ebben ARISTOTELES a lehetetlenség fogalmát tárgyalja és miután megállapítja, hogy kétféle lehetetlen van, az egyszerű (ἁπλῶς; simpliciter; *281 b 4—5*) vagy abszolút *lehetetlen,* és valamilyen *lehetetlen feltevésből származó (ἐξ ὑποθέσεως;* ex hypothesi, ex suppositione, sub conditione; *281 b 4—5)* — ez utóbbi fajtájára a lehetetlenségnek egy matematikai példát idéz:

[51] "Which is the cause, that the doctrine of right and wrong is perpetually disputed, both by the pen and the word: whereas the doctrine of lines, and figures, is not so; because men care not, in that subject, what be truth, as a thing that crosses no man's ambition, profit or lust. For I doubt not, but if it had been a thing contrary to any man's right of dominion, or the interest of man that have dominion, *that the three angles of a triangle, should be equal to two angles of a square;* that doctrine should have been, if not disputed, yet by the burning of all books of geometry, suppressed, as far as be whom it concerned was able". (Th. Hobbes, *Leviathan or the Matter, Form and Power* etc. 1651; lásd *Thomae Hobbes Malmesburiensis Opera Philosophica,* ed G. Molesworth, vol. III. 91; London 1839).

(8) *mert például, ha a háromszög szögösszegének lehetetlen két derékszöggel egyenlőnek lennie, ha ez így van* (ha ez fennáll), *úgyszintén* (*καὶ*) *a négyzet átlója összemérhető az odalával.*[52] *(281 b 5—7).*

A szöveg értelmezése semmi különös nehézségbe nem ütközik.[53] Mindenekelőtt, figyelemre méltó benne az, hogy a *lehetetlenség modalitását a klasszikus euklideszi szögösszeg tételnek tulajdonítja* — feltevésszerűen; ez azért különösen érdekes, mert sehol az aristotelesi szövegekben a *lehetetlen* kifejezés *nem* fordul elő a kontra-euklideszi hipotézissel kapcsolatosan, mint ahogy elvárható és természetes volna. Ez a tétel, valószínűleg, úgy jött létre, hogy a kontraeu-klideszi hipotézisnek olyan következményeit kutatták, amelyek lehetetlen volta nyilvánvaló. Egyike az ilyen ARISTOTELES korában jól ismert *lehetetlenségeknek* volt az az állítás is, amelynek értelmében a *négyzet átlója és oldala összemérhető;* ha tehát a kontra-euklidesi hipotézis ezt a lehetetlen következményt implikálja, akkor ebből következne magának a kiinduló, kontra-euklideszi premisszának a hamis volta is.

A kiinduló kontra-euklideszi premissza megfogalmazása ebben a példában, valószínűleg híven tükrözi a valóságban is követett dialektikus gondolatmenetet: bebizonyítandó, miszerint nem lehetséges, hogy a háromszög szögeinek összege ne legyen 2R; mert *tegyük fel az ellenkezőjét;* hogy, tehát *éppen az nem lehetséges, hogy a háromszög szögeinek összege 2R legyen;* ha ez így volna, akkor ebből következne, hogy a négyzet átlójának és oldalának aránya *racionális* (értéket is felvehet). Erről a konklúzióról már régen, és ettől függetlenül, szigorúan bizonyítást nyert, hogy *lehetetlen.* Sajnos azonban, ebből nem következik az eredetileg *igaznak feltételezett* premissza („*lehetetlen,* hogy a háromszög szögeinek összege 2R") hamis volta — mert (és ezt már a korabeli geométerek bizonyára jól tudták) *csak akkor* lehetetlen, hogy a négyzet oldala az átlóval kommenzurabilis legyen, *ha az euklideszi tétel igaz!* Ezek szerint a négyzet átlójának inkommenzurabilitása egy *euklideszi tétel,* és így, ebből a kontra-euklideszi hipotézis lehetetlensége *nem következik.*

Az idézett tétel igen lényeges és egyáltalában nem triviális; *felderítéséhez alapos*

[52] A szöveg — túlságos szűkszavúsága miatt — pongyola: nyilván a kontra-euklideszi hipotézis esetében a négyzet átlója és oldala közötti viszony értéke *nem mindig* racionális — de — az euklideszi esettől eltérően, amikor ez teljességgel lehetetlen — racionális értékeket is felvesz.

[53] *λέγω δὲ, οἷον τὸ τρίγωνον ἀδύνατον δύο ὀρθὰς ἔχειν, εἰ τάδε, καὶ ἡ διάμετρος συμμετρος,* [*εἰ τάδε*]. (Veluti triangulum impossibile est suos angulos duobus rectis aequales habere: si haec sint, et diameter commensurabilis est; 281 b 5—7). — A BEKKER-féle kiadás alapjainál álló öszszesen öt kódex közül a másodszor fellépő, és általunk itt szögletes zárójelek közé helyezett [*εἰ τάδε*] kifejezés csak egyetlenegyben „*L*" *Codex Vaticanus 253* szerepel; a többi négy kódexben „*E*" *Cod. Parisiensis Regius 1853;* „*F*" *Cod. Laurentianus 87,7*; „*H*" *Cod. Vaticanus 1027*; „*M*" *Cod. Urbinas 37)* ez a kifejezés nem szerepel. A *De Caelo* latin fordítója, Ioannes ARGYROPYLOS, ugyancsak elhagyja a másodszor fellépő [*εἰ τάδε*] kifejezést; ezzel szemben, a Firmin DIDOT-féle kiadás ezt a kifejezést mindkétszer felveszi és latin fordításában is feltünteti, megváltoztatván, a BEKKER-féle kiadáshoz viszonyítva, a szöveg pontozását is: „Veluti triangulum impossibile est suos tres angulos duobus rectis aequales habere, si haec sint; et diameter commen surabilis est, si hoc sit". A Firmin DIDOT-féle kiadásban szereplő *pontosvessző* két, egymástól független tételre bontja az egyetlen implikációt képező, összefüggő állítást, — nem beszélve arról, hogy a kétszer ismétlődő *εἰ τάδε* kifejezésben foglalt célzás így teljesen érthetetlenné válik: valóban, vajon *milyen premisszát* kell felvenni ahhoz, hogy a háromszög szögösszegének lehetetlen legyen két derékszöggel egyenlőnek lennie? és *milyen premisszát* kell felvenni, — minek kell egy bizonyos módon lennie ahhoz, hogy a négyzet átlója és oldala egymással összemérhető legyen? Ez utóbbi esetben, világos, hogy ez a premissza csak az lehet, hogy *a háromszög szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel!* Tehát ismét oda jutunk így, ahol az első, és sokkal világosabb ARGYROPYLOS-féle értelmezéssel már eredetileg is voltunk!

vizsgálatokat kellett folytatni és a korhoz viszonyítva igen fejlett és aránylag bonyolult bizonyítási eljárásokat kellett igénybe venni. Mindazonáltal az implikáció premisszáját és konklúzióját összekötő gondolati láncolat rekonstrukcióját sikerül teljesen a korban használatos módszerekkel elvégezni.

Kontra-euklideszi princípiumokból — kontraeuklideszi tételek következnek

(Magna Moral. 1187 a 36—38, b 1—4; Phys. 200 a 29—30)

16. — A többi szövegek — amellett, hogy önmagukban az általános kontra-euklideszi T hipotézis puszta megléte mellett tanúskodnak — a töredékeknek egy olyan jelentős csoportját tartalmazzák, amelyik a következő alapvető fontosságú és önmagában már igen modernül hangzó *meta-matematikai* tétel illusztrálásának van szentelve: *a matematikai bizonyítások kiindulópontját képező be nem bizonyított állítások* (*ἀρχαί* — principia; ezt a szót, ebben az esetben, abban az értelemben ahogy azt Aristoteles az említett helyeken használja — nyugodtan fordíthatjuk az *axióma* szóval, abban az értelemben, ahogy ezt a kifejezést a mai matematikában használják) *változatlanul átviszik saját* (tehát pl. euklideszi vagy ellenkezőleg kontra-euklideszi) *tartalmukat, lényegüket — a belőlük bizonyítással származtatott tételekre.*

Tulajdonképpen ebbe a csoportba tartozik a már idézett (5) *Eth. ad Eud. 1222 b 35—36* töredék is, amelyik az említett meta-matematikai tétel illusztrálására azonban az euklideszi variáns mellett egy a *tompaszög* hipotéziséből (ill. későbbi formájában: a sík Riemann-féle geometriájából) fakadó példát idéz; ezt a szöveget is tekintetbe véve, az említett csoport összesen 7 töredéket tartalmaz — és, ami ismét feltűnő, és véleményünk szerint nem tulajdonítható a véletlen puszta játékának: ezek közül 6 — méghozzá azok, amelyekben az említett meta-matematikai tétel a legélesebb formában van megfogalmazva — a *Corpus etikai írásaiban található.*[54] Vegyük sorra ezeket.

A *Magna Moralia I 9* fejezete a *jó* és a *rossz* cselekedet kérdésével foglalkozik és azt a jelentős etikai tételt mondja ki, hogy az ember szabadon választhat (*ἑκουσίως*; *1187 b 19)* a jó *(σπουδαῖα; 1187 a 22; b 19)* és a rossz *(φαῦλα; 1187 a 23 b 20),* cselekvése között.[55] A következő két fejezet *(Magna Moral. I. 10* és *I. 11),* részletesebben elemzi ezt az etikai tételt. (Ezek a fejtegetések lényegében változatlanul megtalálhatatók az *Ethica ad Eudem. II. 6, 10, 11* valamint az *Ethica Nicom. III 4, 5* fejezeteiben.) Aristotelesnek a fenti szövegekben kifejtett álláspontja, röviden a következőkben foglalható össze: az emberi cselekvés meghatározott akarati jellegű elhatározásokból *(προαίρεσις; 1189 b 6)* ered; ezek az előzetes döntések képezik kiindulási pontját, *principiumát* (*ἀρχή*) a társadalmi-erkölcsi cselekvésnek (*πρᾶξις*), amelyet teljes egészében meghatároz,[56] nevezetesen úgy, hogy az eredeti elhatározás jó vagy rosszjellegét a cselekedetre is változatlanul átviszi; a tettek maguk úgy tekintendők, mint ezeknek a *princípiumszerű elhatározásoknak a szük-*

[54] *5. Eth. Eudem. 1222 b 35—36; 9. Magna Moral. 1187 a 36—38; 10. Physica 200 a 29—30; 11—12. Magna Moralia 1187 b 1—4; 15. Eth. Eudem. 1222 b 25—26;* 16. *Eth. Eudem. 1222 b 41—42.*

[55] Manifestum igitur hoc modo in nostro arbitrio esse bona malaqua facere; *1187 a 22—23.*

[56] *εἰσὶ δὲ αἱ πράξεις γεγημέναι ἔκ τινων ἀρχῶν.* — (suntque actiones ex aliquibus progenitae principibus; *1187 b 11—12*)

ségszerű következményei. ARISTOTELES azonban ismételten hangsúlyozza, hogy elhatározásoknak és döntéseknek természetesen csak ott van értelme, ahol a követett célok az ember hatalmában vannak és általa valóban megvalósíthatók.

A *Magna Moralia* szerzője szerint itt egy egészen általános érvényű természeti jelenséggel állunk szemben: *mindenütt ahol bármilyen generáció folytán jön létre valami — van egy olyan minőségi határozmány, amely a változásban is változatlan marad, nevezetesen éppen a dolog lényege.*[57] Ez már önmagában is egy figyelemre méltó, de sajnos eddig még a megérdemelt módon kellőképpen figyelemre nem méltatott, általános tétel: *a minőségi lényeg megmaradásának a tétele,* — annak a kimondása, hogy *a dolgok tartalmaznak egy olyan minőségi határozmányt, amelyik bizonyos transzformációkkal szemben invariáns.*

Ezt az általános tételt a szerző azonnal egy — általa igen kedvelt — biológiai példával illusztrálja: *az élővilágban a leszármazott, az őt generáló szülő faji jellegét, lényegét változatlanul megtartja; („... Csak sast nemzenek a sasok, és nem szül gyáva nyúlat Núbia párduca");* és az, amiből, például a fa létrejön — a mag (*σπέρμα*) — úgy tekintendő, mint a létrejött dolognak, a fának a princípiuma.[58] Ami pedig általában magukat a princípiumokat illeti — folytatja a szerző — ezekre vonatkozólag áll a tétel: *amilyenek maguk a kezdetben adott princípiumok — olyan mindaz is ami ezekből a princípiumokból ered.*[59] És ebben az eszmei környezetben jelenik meg ezek után egy *geometriai* példa, mert — a szerző véleménye szerint — az említett tétel a geometriában sokkal világosabban, sokkal kézzelfoghatóbban (*ἐναργέστερον*) szemléltethető és belátható (*κατιδεῖν*; intueri; *1187 a 35—36*):[60] mert itt, a geometriában,

(9) *ha egyszer felveszünk valamilyen* (bizonyítatlan kiinduló tételeket) *princípiumokat,* (akkor) *bármilyenek is legyenek ezek a princípiumok, olyanok lesznek azok* (a következmények, tételek) *is, amelyek a princípiumokból erednek* (mint maguk a princípiumok). — *(1187 a 36—39)*

A princípium és a következmények közötti összefüggésnek ugyanez a gondolata jelenik meg — az előbbieknek reciprok formájában — a *Fizika II 9* fejezetében, ahol a következő szöveget olvashatjuk:

(10) *Ha a háromszög* (szögeinek összege) *nem egyenlő két derékszöggel — úgy a principiumok sem állanak fenn*[61] *(200 a 29—30).*

E szöveg értelmezése szintén nem ütközik semmi nehézségbe: ha a háromszög szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel, akkor azok a geometriai princípiumok, amelyekre ez a tétel alapszik, szintén nem állhatnak fenn többé; ezek nem lehetnek ugyanazok, mint abban az esetben, ha a háromszög szögeinek összege két derékszöggel egyenlő.

Ezekben a töredékekben — különösen a *(9) Magna Moral. 1187 a 36—38* szövegben — a legfeltűnőbb mindenekelőtt az, hogy a szerző szinte természetesnek

[57] *πᾶσα γὰρ φύσις γεννητική ἐστιν οὐσίας τοιαύτης οἷα ἐστίν.* — (quod omnis natura eiusdem essentiae est procreatrix atque ipsa est; *1187 a 30—31*); lásd még *De Gener. Animal. 742 b 29.*

[58] *αὕτη γάρ τις ἀρχή.* (id namque principium est; *1187 a 33*).

[59] *ὡς γὰρ ἂν ἔχωσιν αἱ ἀρχαί, οὕτως καὶ τὰ ἐκ τῶν ἀρχῶν ἔχει.* — (ut enim habuerint principia, ita quae a principis ortum ducunt; *1187 a 34—35*).

[60] *καὶ γὰρ ἐκεῖ ἐπειδή τινες λαμβανονται ἀρχαί, ὡς ἄν αἱ ἀρχαὶ ἔχωσιν, οὕτω καὶ τὰ μετὰ τὰς ἀρχάς.* (...ubi cum ponatur principia quaedam, qualia fuerint ipsa, talia erunt quae ipsa consequentur; *1187 a 36—38*).

[61] *οὐδὲ γὰρ ἐκεῖ αἱ ἀρχαί, εἰ μὴ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς.* (neque enim ibi principia sunt, si non triangulus tres habeat angulos duobus rectis aequales; *200 a 29—30*).

tartja, hogy a geometriában szabadon, minden gátlás, minden akadály nélkül fel lehet venni, a további bizonyítások kiindulópontjául, egymástól geometriai lényegükben nemcsak különböző, de egymásnak formálisan ellentmondó „*bármilyen*" princípiumokat, és — ami talán még ennél is feltűnőbb —, hogy a szerző ezt a geometriára vonatkozó meta-matematikai tételt *sokkal alkalmasabbnak tartja etikai tételének illusztrálására,* mint az ezt megelőző biológiai tételt: nyilván, véleménye szerint, ebben a tekintetben sokkal pontosabb analógia áll fenn a geometria és az etika között. Valóban a biológiában csupán az egyes fajok közötti különbségről van szó, és ezek a különbségek természeti adottságok — addig míg az etikában a jó és a rossz irreducibilis ellentétéről van szó, amelyek között az ember *szabadon választhat.*

Az idézett (9) *Magna Moralia 1187 a 36—38* töredékben felmerülő állítás további részletezése alátámasztja a fenti értelmezést: *mert ha például a háromszög* (szögeinek összege) — olvassuk — *két derékszöggel egyenlő, úgy a négyszög* (szögeinek összege) *négy* (derékszög) *(1187 a 38—39).*

Ebben a példában mindenekelőtt az feltűnő, hogy ARISTOTELES itt (és ez az etikai munkákban általános) mindenekelőtt a háromszög szögösszegének konkrét értékét kimondó állítást, a további bizonyítások kiindulását képező, bizonyítatlan princípiumaként (ἀρχή) kezeli — tehát, mint egy mai értelemben vett *axiómát.* Ennek az alapvető tételnek az axiómaként való kezelése nem valami, ARISTOTELES hiányosnak feltételezett matematikai képzettségéből eredő, véletlenszerű botlásból ered, hanem — következetesen végigvonul az összes etikai íráson.

A háromszög szögösszegére vonatkozó állításnak princípiumként, axiómaként való kezelése nem csupán azért feltűnő, mert ez a tétel az *Elemek*ben szigorúan bizonyítva van — hanem főleg azért, mert a tétel bizonyítását ARISTOTELES maga jól ismerte és mert éppen ez a tétel a kedvenc, folyton visszatérő példája az általános érvényű, szigorúan bizonyított és szükségszerű jelleggel bíró igazság példázására.[62]

Két, nemcsak hogy eltérő, de egymásnak némileg ellentmondó felfogás van itt jelen:

(a) a régebbi korokból fennmaradt és általánosan elterjedt klasszikus felfogás szigorúan bizonyítottnak tekinti a tételt, amely szerint a háromszög szögeinek összege $2R$ — és egy másik felfogás, amelyik,

(b) — a szögek összegére vonatkozó állítást mindenekelőtt más tételek szigorú levezetésére szolgáló bizonyítatlan kiindulási tételnek tekinti, a bizonyítási láncolat princípiumának (ἀρχή); sőt, ezen túlmenőleg, ezt a már önmagában heterodox magatartást még azzal is súlyosbítja, hogy ehhez a kezdeti bizonyítatlan állításhoz még csak nem is rendel semmiféle logikai értéket, nem állítja róla sem azt, hogy igaz, sem azt, hogy hamis, tehát a szó mai értelmében vett hipotézisnek tekinti — és végül, az egészet következetesen azzal tetézi, hogy (amint a nyomban következő és általában az összes általunk elemzett töredékekből kitűnik) vele egyenrangú kiindulási hipotézisként fogadja el a neki formálisan ellentmondó állítást is.

Nyilvánvaló, hogy ez utóbbi felfogás csak azoknak a matematikusoknak a körében alakulhatott ki, akik nem tartották kielégítőnek az *Elem. I. 32.2* tétel klasszikus bizonyítását és akik az általuk megkísérelt indirekt bizonyítási kísérlet keretében azt tapasztalták, hogy az *Elem. I. 32.2* tétellel szembeállított T hipotézist

[62] Lásd erre vonatkozólag Bonitz *Index*ét a megfelelő kifejezésnél. (H. Bonitz, *Index Aristotelicus*, Berolini 1870; megjl. mint a Bekker-féle Aristoteles kiadás V-ik kötete).

nem sikerül megdönteniök és ebből azt a következtetést vonták le, hogy, tehát, az *Elem. I. 32.2* állítás igaz volta a valóságban effektíve épp úgy híján van a bizonyításnak, mint ahogy bizonyítatlan a vele szemben álló T állítás hamis volta is; ezért tehát, szigorú tudományos szemmel nézve — egyelőre mindkettő egyformán úgy kezelendő, mint egy-egy bizonyítási láncolat kiindulópontja, princípiuma, *ἀρχή*-je, azaz mint egy-egy puszta hipotézis — de nem a szónak a mai természettudományokban, hanem az ókori és a mai matematikában egyaránt érvényes dialektikai értelmében: a bizonyítások láncolatának *megegyezés* alapján elfogadott kiinduló tézise.

Valóban a *(9) Magna Moral. 1187 a 36—38* töredékben kimondott metamatematikai tétel illusztrálására a szerző az előbbire következő sorokban mindjárt be is vezeti a következő további két példát:

(11) *ha azonban a háromszög átváltozik* (azaz ha megváltoztatja geometriai lényegét) — *úgy vele együtt átváltozik a négyszög* (lényege) *is;*[63]

(12) *mert* (az előző — *1187 a 38—39* sorokban kimondott implikáció) *kontrapozíció segítségével megfordítható: ha a négyszög* (szögeinek összege) *nem egyenlő négy derékszöggel, úgy a háromszög* (szögeinek összege) *sem egyenlő két derékszöggel.*[64]

Most már egészen világossá vált, hogy mi az a lényeg, mi az a faji jelleg, amit az *ἀρχή* logikai nemzés, deduktív generáció közvetítésével és a szükségszerűség erejével átszármaztat a belőle mint egy magból kisarjadó geometriai tétel-utódokra: ez, magának az illető princípiumon alapuló deduktív rendszernek a faji jellege, a geometriai lényege, — az amit egyik esetben az *euklideszi,* a másik esetben pedig a deduktív rendszer *kontra-euklideszi* jellegének, vagy egy szóval, *euklidesziségnek,* illetve *kontra-euklideszießégnek,* vagy *euklideszellenességnek* nevezhetnénk. Ez, a fentebb kimondott meta-matematikai tétel — (9) *Magna Moral, 1187 a 36—38* — ezek szerint már tartalmazza önmagában annak a jelentős ténynek is a spontán elismerését, hogy az *aequivalenciákat létrehozó formál-logikai transzformációkkal szemben, a deduktív rendszer sajátos jellemző lényege, faji jellege invariáns marad.*

Etika és geometria

17. — Ezek után érthetővé válik, miért tartja a szerző alkalmasabbnak a geometriai analógiát etikai tételének illusztrálására, mint a biológiából merített példát: a biológiában nem függ tőlünk a választás a fennálló lehetőségek között — míg a geometriában szabad választásunkon múlik, hogy a két ellentétes *ἀρχή* mint *à priori* egyenrangú és egyenlő jogú lehetőség közül melyik mellett döntünk, melyiket tesszük meg logikai, *dianoetikai* cselekvésünk kiindulási tézisévé; de miután ezek bármelyikét egyszer elfogadtuk, ez, a szükségszerűség erejével meghatározza a belőle folyó következmények, dianoetikai cselekedetek jellegét, és saját lényegét ezekre változatlanul átszármaztatja; és valamint etikai téren a választásnak és a döntésnek csak ott van értelme, ahol az embernek hatalmában áll a megvalósítás —

[63] *ὡς ἄν μεταβαλλῃ τὸ τετράγωνον συμμετβάλλει.* (et si in triangulo sit secus, etiam in quadrato secus erit; *1187 b 1—2*).

[64] *ἀντιστρέφει γὰρ καὶ εἄν τὸ τετράγωνον μὴ ἔχῃ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας, σὐδέ τὸ τρίγωνον ἕξει δυσίν ὀρθαῖς ἴσας,* — (nam haec convertuntur; et si quadratum quattuor angulis aequales non habuerit angulos, ne triangulo quidem duobus rectis habebit aequales; *1187 b 2—4*).

úgy geometriai téren is; mert a gondolkodás univerzumában valóban az embernek módjában és hatalmában áll mindkét geometriai variáns effektív megvalósítása, ami itt, a deduktív láncolatok létrehozásában nyilvánul meg.

Természetesen, még csak nem is gondolhatunk arra, hogy ARISTOTELES, vagy geométer kortársai, a kontra-euklideszi rendszert a mai értelemben véve tartotta volna az euklideszi geometriával egyenlően jogosultnak; hanem ellenkezőleg — ugyanabban az értelemben gondolhatta őket egyformán *megvalósíthatóknak*, mint ahogy az etikai cselekvés terén a jó és a rossz megvalósítása egyenlőképpen az ember hatalmában van; sőt: ez csak egyedül az embernek van hatalmában, mert az ember kizárólagos privilégiuma a rosszat cselekedni — hiszen ARISTOTELES felfogásában a *természet* önmagában mindig csak *jó* lehet[65]; és amint a további töredékek erre még több fényt derítenek — ő (és valószínűleg ez lehetett a geométerek véleménye is) ezt a kontra-euklideszi geometriát egy rossz, degenerált, elfajzott geometriának tartotta.

Jellemző például, hogy az *Analytica Posteriora I 12* fejezetében ezt a kontra-euklideszi rendszert (bár ott ennek csak egyik, a tompaszög hipotézisére épülő variánsáról van szó) ugyanazzal a *φαῦλος* kifejezéssel illeti, mint az imént idézett etikai szövegekben (1187 a 2—23) a rosszat: e kifejezés jelentése többárnyalatú: *rossz, romlott, megromlott, elromlott, elfajzott, degenerálódott, kisebb értékű, silány* stb.

Az *Anal Poster I. 12* fejezetében azt az ismét nagyon modern hangzású metamatematikai tézist fejti ki, hogy nem minden tetszés szerinti, önkényesen megfogalmazott állítás igaz voltának a bizonyítását jogosult megkövetelni és elvárni egy meghatározott tudományágtól. Valamely deduktív rendszertől csak akkor követelhetjük meg joggal, hogy egy állítást bebizonyítson — ha ez az állítás a rendszer fogalmai és relációi segítségével, tehát a rendszeren belül, megfogalmazható; csak az ilyen állítások interrogatív megfogalmazása bír értelemmel és nevezhető egy valóban tudományos kérdésnek (*ἐρώτημα ἐπιστημονικόν*; interrogatio scientialis, *77 a 38—39*). Bár a kérdés formájában megfogalmazott állítás még nélkülözi a logikai értéket (sem igaz, sem hamis), figyelemre méltó, hogy ennek ellenére ARISTOTELES már felfigyelt arra, hogy ezek is két osztályba sorolhatók aszerint, hogy hozzá tartoznak egy meghatározott deduktív rendszerhez vagy sem, hogy megfogalmazhatók-e, hogy értelemmel bírnak-e benne vagy sem. (Természetesen ARISTOTELES még csak nem is gondolhatott arra, hogy egy deduktív rendszeren belül meg lehet fogalmazni olyan állításokat is, amelyek azon belül egyáltalán el nem dönthetők).

A geométer tehát köteles számot adni már az általa felvetett puszta kérdésről is: *értelemmel bír-e az a geometriában* vagy sem. Azonban ARISTOTELES e helyütt is kifejezetten hangsúlyozza, hogy *ami viszont a princípiumokat illeti, ezekről a geométer nem köteles* (és nem is képes) *számot adni*, ezeket megindokolni *(77 b 5—6)*. Már most, egy kérdés formájában megfogalmazott tétel, egy megoldandó feladat, kétféle értelemben is lehet *nemgeometriai* jellegű *(ἐρωτήματα ἀγεωμέτρητα*; interrogationes non geometricae; *77 b 16—17)*. Ilyen mindenekelőtt, természetesen, egy a geometria körébe egyáltalán nem tartozó, például zenei jellegű kérdés (ez a példa, ebben a szóhasználatban — *τὸ μουσικόν ἐρώτημά* — PROKLOStól származik[66],

[65] Ezt a gondolatot hangsúlyozza és taglalja *Eth. Eudem. 1227 a 18*, valamint *Metaph. 1051 a 19—21*. De a természet is hibázhat: így jönnek létre az elvetélt, elhibázott szörnyek, *τέρατα ἁμαρτήματα*. (monstra peccata; *Phys. 199 b 4*); lásd még *De Gener,. Animal. IV. 3.*

[66] Proklos 58, 25.

aki az *Analytica Posteriora I 12* fejezetének a lényegét — a forrás megjelölése nélkül — az *Elemek I* könyvéhez írott kommentárjaiban röviden megismétli).

Vannak azonban teljesen geometriai fogalmakból összeállított tézisek is, amelyek *mégsem bírnak szorosabb értelemben vett geometriai jelleggel;* hogyan és mivel jellemezhető már most a tudatlanságnak (ἄγνοια) az a fajtája, *amelyik nyelvezetében geometriai ugyan — de mégis híján van annak az alapvető jellegnek, amely lehetővé tenné, hogy a geometriai tudomány körébe sorolható legyen? (77 b 17—18).*

A tudományosság jellegét akkor kell, természetszerűleg, mindenekelőtt megvonni egy a geometria princípiumaiból származtatott állítástól, ha magában a levezetésben egy formális hiba rejtőzik; ebben az esetben azonban egy közönséges *paralogizmussal* van dolgunk és — amint ARISTOTELES hangsúlyozza — a matematikában, a közönséges disputációktól eltérően, ilyen paralogizmusok igen ritkán fordulnak elő *(77 b 27—28, 30—31).*

A tudománnyal azonban ellentétesek azok a levezetések is, amelyek megfogalmazásukban, nyelvezetükben teljesen geometriaiak ugyan — de a *geometria sajátos princípiumaival ellentétes princípiumokból erednek.*[67] Már ebből is világos, hogy Aristoteles nyilván a kontra-euklideszi rendszerre céloz — és nem kérdéses, hogy az egész problémakomplexumot ez idézte fel benne: rendkívül nyugtalaníthatta ezt a logikai elmét egy olyan geometriai rendszernek a látványa, amelyet nem lehet a szokványos módon hamisnak mondani, amelyet nem terhel semmilyen formális hiba, amely nem tartalmaz paralogizmusokat, amely látszatra mindenben teljesen geometriai jelleggel bír —, hiszen teljes egészében geometriai nyelvezeten kifejezhető — és ennek ellenére *mégsem fogadható el mint geometria.* Mi az akkor, ami arra késztethet, hogy visszautasítsuk? Nyilván csak az, hogy a geometria, *az igazi, a jó* geometria *princípiumaival ellentétes*[68] *princípiumokból* származik. És íme rögtön egy példa egy ilyen *ageometrikus* állításra:

(13) *Mert az a vélemény, hogy a párhuzamosak metszik egymást egyféleképpen geometriai másféleképpen nem-geometriai* (jelleggel bír)[69].

Ez az *ötödik* töredék,[70] amelyben említés történik a tompaszög hipotéziséről; a tompaszög hipotézis szempontjából ez nem hoz újat: nyilván, egy az (1) és (2) ikertöredékre *(Anal. Prior, 66 a 13—15)* történik itt rendkívül elliptikus, de félreérthetetlen célzás; ami új információt tartalmaz ez a *(13) Anal. Poster, 77 b 22—24* töredék, az azonban igen lényeges; megtudjuk belőle, hogy Aristoteles (ill. geométer kortársai) *a párhuzamosak* metszésére vonatkozó tételt nem tekintették közönséges paralogizmusnak, annak ellenére, hogy ez egy önmagában ellentmondó hamis végkövetkeztetésre jut; *(„a párhuzamos, a nem metsző egyenesek — metszik egymást")* de ez a végkövetkeztetés egy szigorú logikai észjárás eredménye, amely semmilyen formális hibát nem tartalmaz: ha elfogadjuk, hogy a háromszög szögösszege nagyobb mint $2R$ — akkor a konklúzió ebből hibamentesen következik.

[67] *καὶ ἡ ἄγνοια αὕτη, ἡ ἐκ τῶν τοιούτων ἀρχῶν, ἐναντία.* (atque haec ignorantia, quae est ex huiusmodi principiis, est contraria scientiae; *77 b 26—27*)

[68] Proklos, — aki ezt az egész gondolatmenetet a forrás megjelölése nélkül közli, a geometria princípiumainak inkorrekt (*διαστρόφως*) használatáról beszél (*i. m.* 58, 27—59, 1).

[69] *τὸ δὲ τὰς παραλλήλους συμπίπτειν οἴεσθαι γεωμετρικόν πως καὶ ἀγεωμέτρητον ἄλλον τρόπον.* (putare autem aequidistantes concurrere geometricum quodammodo, et non geometricum alio modo; *77 b 22—24*); lásd még *De Gener. Animal. II. 8.*

[70] A megelőző nagy fragmentum, amelyben a tompaszög hipotézise előfordul, a következő: *1—2. Anal. Prior. 66 a 11—15*; *4. Anal. Poster. 90 a 33—34*; *5. Eth. Eudem. 1222 b 35—36.*

Ami különösen a jelen töredéket illeti — ez nyilván csak egy konkrét példa szerepét játssza, amely azonban az összes kontra-euklideszi tételeket reprezentálja — hiszen a geometria princípiumaival ellentétes princípiumokból nem csak önellentmondó következtetéseket („*a nem-metszők metszik egymást*") vonhatók le! Így hát ezek nem tekinthetők egyszerű paralogizmusoknak — de nem is tekinthetők a szó igazi értelmében vett jó geometriai tételnek, a „*geometria*" jelzőt mint pozítivumot, kénytelenek vagyunk megvonni ezektől.

ARISTOTELES érzi, hogy ennek az álláspontnak valamilyen megindoklásra, megalapozásra van szüksége és e célból egy nem kifejezetten tudományos fórumhoz — a köznapi ösztönös gondolkodás spontán termékeihez fordul. Nevezetesen, a köznapi életben két értelemben használnak bizonyos *negatív kifejezéseket:* így például a köznapi élet nyelvében is, kétféle értelemben használják a „*nem zenei*" kifejezést: egyszer olyasvalamire, ami egyáltalán nem tartozik a zenéhez vagy a költészethez; de főleg, és sajátos értelemben, ez a kifejezés a *zeneietlen* és a *költőietlen—zenei és költészeti munkákat jelöli: a ritmus nélküli és disszonáns melódiát, a költőiség híján levő verset, tehát a degenerált, rossz, anti-muzikális és anti-poétikus termékeket.* Hasonlóan használható az „*a-geometrikus*" jelző is:

(14) — *kétféleképpen, mint az a-ritmusos,* ritmustalan, zeneietlen (kifejezés); *egyféleképpen azt is jelenti az a-geometrikus* (kifejezés), *hogy az amiről szó van egyáltalán nem geometriai* (*μὴ ἔχειν*) nem tartozik a geometria körébe, (nem tartalmaz magában semmi geometriai jelleget) *hasonlóképpen mint az a-ritmusos* (egyik jelentése is az, hogy a dolog egyáltalán nem tartozik a költészet és a zene körébe), — *másik értelemben azonban hogy* (a geometriait, a geometriai jelleget) *romlottan, degeneráltan, rossz formában* (*φαύλως*) *tartalmazza.*[71]

Ez a kontra-euklideszi geometria tehát sem nem hamis (*ψεῦδος*) — sem nem abszurd (*ἄτοπος*), sem nem lehetetlen (*ἀδύνατος*) — hanem a szó erkölcsi értelmében véve (cf. *1187 a 23, b 20*) rossz, romlott, degenerált, elfajzott (*φαῦλος*)[72]. Csupán közbevetőleg jegyzem meg, hogy hasonló vélemény uralkodott a múlt század utolsó évtizedeiben is a már kész *nem euklideszi* geometriáról a matematikusok nagy részénél.

Ellentétes princípiumok a geometriában

18. — Az etikai könyvekben található többi töredékek is mind a fenti értelmezéseket támogatják. Íme, itt van mindjárt egy töredék az *Ethica ad Eudemum II 6* fejezetéből: a matematikaikban is (*ἐν ταῖς μαθηματικαῖς*; *1222 b 23—24*) is az a helyzet, hogy:

[71] *διττὸν γὰρ τοῦτο, ὥσπερ τὸ ἄρρυθμον, καὶ τὸ μὲν ἕτερον ἀγεωμέτρητον τῷ μὴ ἔχειν ὥσπερ τὸ ἄρρυθμον, τὸ δὲ ἕτερον τῷ φαύλως ἔχειν.* — (duplex enim hoc est quemadmodum arrhythmum; et alterum quidem est non geometricum, quia non habet sicut arrhytmum, alterum vero, quia prave habet; *77 b 24—26*).

[72] Az egyetlen hely, ahol az euklideszi és a kontra-euklideszi hipotézis, mint egy alternativa két egymással szemben álló pólusa jelenik meg, a *6. Anal. Poster. 93 a 33—35* töredék; figyelemre méltó azonban, hogy, valamint itt, a *14. Anal. Poster. 77 b 24—26* töredékben a kontra-euklideszi hipotézist nem a „hamis" logikai érték kifejezésével hárítja el, hanem a *φαῦλος* etikai jelzővel bélyegzi meg úgy ott, a *6. Anal. Poster. 93 a 33—35* töredékben viszont az alternatíva két pólusa közül egyetlen elfogadható (de egyelőre meghatározatlan) esetet sem az „igazi" logikai érték konvencionális terminusával (*ἀλήθης*) illeti — hanem a sokkal tágabb és több értelmet magával hordozó, talán kevésbé precíz, de sokkal mélyebb rezonanciájú *λόγος* kifejezéssel.

(15) *ha a princípum átváltozik,* (megdől), *akkor ugyancsak átváltozik mindaz ami bizonyítás útján ebből következik.*[73]

Ez a töredék ugyanazt tartalmazza lényegében, mint a *(9) Magna Moral. 1187 a 37—38)*, csakhogy itten a *(14) Eth. Eud. 1222 b 25—26* töredékben, immár nem csupán arról van szó, határozatlanul, hogy *„bármilyen princípiumokat veszünk fel...”* hanem kategorikus formában, az adott geometriai princípium átváltozásáról, megdőléséről: ARISTOTELES a *κινέω* igét használja ezzel kapcsolatban, amely itt nyilván nem jelenthet egy szokványos értelemben vett mechanikai elmozdulást, hanem valamilyen gyökeres átváltozást; ebben az értelemben fordította az INTERPRETUS INCERTUS is ezt a szót a latin *labefacere,* megdönteni, lerombolni igével, amit nagyon találónak tartok.

Majd kissé lejjebb ismét a már idézett *(5) Eth. Eud. 1222 b 35—36* szövegrész következik, ahol az imént *(15) Eth. Eud. 1222 b 25—26* kimondott általános metamatematikai tézis illusztrálására az eredeti, euklideszi, principiumot a tompaszög hipotézise helyettesíti.

Mindezeket a fejtegetéseket, amelyekben a geometriai példa taglalása foglalja el a központi helyet — a következő megjegyzés zárja le:

(16) *Ha valami valóságosan létező számára fennáll a lehetősége annak* (vagy: ha valami számára valóban, igazán fennáll a lehetősége annak), *hogy ellenkezőképpen is legyen, úgy szükségszerű módon ennek princípiumai is ugyanúgy vannak*[74] (azaz ezek is szükségszerűen ellenkezőjükbe változnak át).

Önmagában természetesen banális tény, hogy a konkrét egzisztenciával bíró dolgok (*εἶναι τὸ πρᾶγμα; 14 b 19, 21*) egymással ellentétes határozmányokkal bírhatnak; ez azonban *nem* szükségszerű.[75] Teljesen újszerűen, sőt feltűnően hat azonban, hogy ARISTOTELES most az ellentétes princípiumok lehetőségét megengedi a geometriában is, nevezetesen a háromszög szögeinek összegére vonatkozólag. A *lehetőség* modalitását Aristoteles itten — *szükségszerűséggel* állítja szembe: ugyanis, közvetlenül a fent idézett szöveg után megjegyzi, hogy a szigorú szükségszerűség birodalmában nem áll fenn többé a lehetősége annak, hogy valami így és ellenkezőféleképpen is lehessen; majd hozzáteszi, hogy ezzel szemben minden, aminek eredete az emberi cselekvésben van, minden, aminek ura az ember és annak szabad akaratától függ — mindennek számára fennáll a lehetősége annak, hogy legyen vagy hogy ne legyen, hogy így vagy ellenkezőféleképpen legyen.

Változtathatatlan-e a háromszög szögeinek összege?

19. — A *Metafizika VII 7* fejezete ismét az emberi tevékenység kérdésével foglalkozik, de ezúttal nem etikai, hanem *ontológiai* szempontból. A mesterség útján létrehozott dolog — legyen az az építő által létrehozott ház vagy az orvos által létrehozott egészség — ős-formája, amely ezek lényegét képezi, e dolgok *eido-*

[73] *καὶ γὰρ ἐνταῦτα κινουμένης τῆς ἀρχῆς πάντα μάλιστὰ ἂν τὰ δεικνύμενα μεταβάλλοι.* — (hic enim ipso principio labefactato, labefieri omnes, quae sub illo principio fluxere, demonstrationes oportet; *1222 b 25—26*).

[74] *ὥστ' ἐίπερ ἐστὶν ἔνια τῶν ὄντων ἐνδεχόμενα ἐναντίως ἔχειν, ἀνάγκη καὶ τὰς ἀρχὰς αὐτῶν εἶναι τοιαύτας.* — (quocirca si quaedam sunt eiusmodi ut etiam contra se habere possint, necessario etiam principia sunt eiusmodi; *1222 b 41—42*).

[75] *ἔτι ἐπὶ τῶν ἐναντίων οὐκ ἀναγκαῖον, εἂν θάτερσν ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν εἶναι.* — (praeterea non necesse est, si contrarium alterum sit, etiam reliquam esse; *14 a 7—8*).

sza (εἶδος) a lélekben van, és a mesterség útján létrejött dolog igazi oka éppen ennek anyagtalan *eidosza, fogalma, eszméje, formája, fajtája.* Ez a gondolati szubsztancia, ez a gondolati lényeg képezi a dolgot létrehozó tevékenység kiindulópontját, princípiumát és — ami igen lényeges — ez az *eidosz* maga, ugyanaz az *eidosz, egymással ellentétes határozmányokat nyerhet;* így pl. az egészség és a betegség — ugyanannak az egyetlen *eidosznak* a két egymással ellentétes határozmánya. *(1032 a 12—1032 b 16).* Ezek szerint — (mint ahogy az természetes) — nem csak az erkölcsi cselekvés, hanem a bármilyen dolgot létrehozó mű-tevékenység esetében is fennáll a két egymással ellentétes határozmány megvalósításának a lehetősége az emberi cselekvés számára. A *Metafizika* idézett szövegéből hiányzik a matematikai példára való hivatkozás. Az *Eudemoszi Etika II 11* fejezetében azonban ismét visszatér a szabad emberi döntés és cselekvés kérdése erkölcsi téren, és itt, most, ezt ARISTOTELES egyaránt a valamilyen dolgot létrehozó műszaki jellegű tevékenység, valamint, ismét ezzel párhuzamosan, a háromszög szögeinek összegére vonatkozó geometriai példával illusztrálja. Ez a hely önmagában elég homályos — ennek ellenére mégis könnyen értelmezhető, mivel a *Metafizika VII 7,* valamint az *Eudemoszi Etika II 6* fejezeteiből idézett szövegeknek a nyilvánvaló tartalmi ismétlése.

Lényegében ARISTOTELES itt a következőket mondja: A valamilyen dolgot létrehozó emberi tevékenységben a *cél* az, ami a cselekvést meghatározza: a megvalósítandó cél, a cselekvés valódi *princípiuma,* éppúgy, mint az elméleti (szemlélődő, teoretikai) tudományokban (pl. a geometriában) a levezetések kiindulópontját képező *feltevés;* miután az orvos mint megvalósítandó célt az egészséget tűzte ki maga elé, akkor ebből mint princípiumból, szükségszerűen következik, hogy ennek létrehozására *ezt és ezt* kell tenni; hasonlóképpen a geometriában, ha a kiinduló feltevés mint princípium: *„a háromszög szögeinek összege két derékszög”* — akkor ebből ismét szükségszerűen következik *ez és ez. (1227 b 28—32).* Ami a megvalósítandó célt illeti, ARISTOTELES szerint, ez természete szerint csak a *jó* lehet, a *rossz* mindig valami természetellenes *(1227 a 20—30).*

Ezek után, tekintetbe véve az *Eudemoszi Etika II 6, 11* valamint a *Metafizika VII 7* fejezeteiből vett, egymást kiegészítő részleteket — ARISTOTELES felfogása a következőképpen fogalmazható: a szükségszerűség birodalmában a létrejövő jelenségeket egyetlen ősprincípium teljesen meghatározza; itt, egy meghatározott fajtájú lényből mindig szükségszerű módon ugyanabba a fajtába tartozó lény jön létre; ebben a szükségszerű folyamatban az történik, hogy az ős-principium, — — (az élőlények esetében ez maga a nemző sejt; *1187 a 31—35*) — változtatás nélkül a szükségszerűség erejével származtatja át minőségi lényegét utódaira. De nemcsak a természetben zajlanak ilyen folyamatok — amelyekben egy meghatározott ős-princípium mint abszolút kezdet, minőségileg meghatározza az összes belőle sarjadó folyamatokat —, hanem az etikai és a mesterségbeli (technikai) tevékenység terén is, valamint a geometriában. Etikai téren ez a princípium a *jó* vagy a *rossz* princípiuma, a technikai tevékenység terén ez a princípium, mint a *tevékenység* végpontja, maga a célként megvalósítandó dolog (ellentétes határozmányokkal bíró) *eidosza,* a geometriában pedig a kiindulópontot képező, bizonyítás nélkül elfogadott állítások a princípiumok. Mindezeken a területeken azonban — a természeti folyamatoktól eltérően — emberi tevékenységgel van dolgunk, ahol fennáll a szabad választás lehetősége két egymással ellentétes princípium között. Az etikai cselekvés terén ez a két princípium a *jó* és a *rossz;* de a technikai tevékenység terén is minden *eidosz* két egymással ellentétes határozmányt nyerhet (így például az orvos szabadon választhat az egészség vagy a betegség realizálása között); ezekkel *párhuzamban* áll a geometriában a háromszögek szögeinek összegére vonatkozó állítás, amely mint princípium (vagy akár, mint szögeinek összességeként definiált három-szög határozmányok nélküli ősprincípiuma, eidosza) két egymással ellentétes határozmányt nyerhet: nevezetesen, a $2R$ vagy a $2R$-től eltérő konkrét értéket. A belőlük folyó következmények immár külön-külön szükségszerűen meg vannak határozva és nem lehetséges, hogy ugyanabból a princípiumból két egymásnak ellentmondó tétel következzék, hiszen ezek, ebben az esetben lerombolnák egymást; *(1222 b 26—28)*.

Meddig megy el ez a hasonlatosság? Vajon a geometriában is fennáll a lehetősége annak, hogy két szembenálló alternatíva megvalósítása között szabadon válaszszunk? És ha igen, akkor vajon ezek közül csak az egyik valósítható meg, avagy egyforma joggal mindkettő? Ilyesmit, természetesen, ARISTOTELES a geometriával kapcsolatosan sehol sem állít, sőt még a kérdést sem veti fel sehol, — mégis, elvitathatatlan, hogy az etikai írásokból idézett passzusok ilyesmit *sugalmaznak*, hiszen ezekben kategorikusan beszél a geometriai princípiumok *megváltozásáról, átváltozásáról*. Márpedig általában ARISTOTELES a geometriát és általában a matematikát a *változtathatatlanság*, a *merev mozdulatlanság, az örök igazság* birodalmának tekintette,[76] ahol minden *vagy* szükségszerű módon örökké igaz, *vagy* szükségszerű módon örökké hamis, lehetetlen és ahol nem lehetséges, hogy ugyanaz az állítás egyszer igaz legyen, másszor ismét hamis.

Némi fényt vet erre a sajátos — nem éppen egyértelmű helyzetre a *Metafizika IX 10* fejezetében szereplő következő szöveg, amelyben ismét a klasszikus *Elem. I. 32.2* euklideszi tétel áll szemben az általános kontra-euklideszi hipotézissel:

(17) *Ha úgy vélekedünk, hogy a háromszög nem változik, akkor nem vélekedhetünk úgy hogy szögeinek összege egyszer két derékszöggel egyenlő, máskor nem; hiszen akkor megváltozna*[77] *(1052 a 6—7)*.

Ebben a fragmentumban figyelemre méltó, hogy ARISTOTELES a háromszög *változtathatatlanságát* feltételes módban kezeli,[78] és azt mint egy *vélekedést* (*οἴησις*), és nem mint egy kétségbevonhatatlan, szilárd tudományos tényt prezentálja. Etikai írásaiban viszont már minden gátlás nélkül beszél a geometria princípiumainak átváltozásáról, és egyik princípiumnak a neki formálisan ellentmondó hipotézissel való helyettesítéséről. A *gondolkodás létrehozó tevékenysége*[79] eredményeként a szellem saját birodalmában szabadon megvalósíthatja —, mint ahogy meg is valósította — mindkét geometrai rendszert. A szabad választás nem azt jelenti, hogy a kettő közül csak az egyiket valósíthatja meg és ebben az esetben a másikat nem — hanem azt, hogy valamilyen módon, a két egyformán lehetséges és egyformán valóságos geometria közül szabadon, minden külső kényszer nélkül

[76] Entium enim quae mathematica sunt, sine motu sunt *(Metaph. 989 b 32)*; lásd még *De Gener. Animal. 742 b 26—29.*

[77] *οἷον τὸ τρίγωνον εἰ μὴ μεταβὰλλειν οἴειται, οὐκ οἴησθαι ποτὲ μὲν δύο ὀρθὰς ἔχειν ποτὲ δ' οὔ, μεταβάλλοι γὰρ ἄν.* (utputa si triangulum non putet mutari, non opinabitur modo duos rectos habere modo non: mutaretur etenim; *1052 a 6—7*).

[78] *εἴ τις ὑπολαμβάνει ἀκίνητα* (si quis immobilia putet; *1052 a 5*); az itt szereplő *ὑπολαμβάνω* ige jelentése: *vélekedni*, valamint feltevésként, hipotézisszerűen felvenni stb.

[79] Az ember létrehozhat valamit vagy a műtevékenység (technika), vagy valamilyen képesség (*δύναμις*) vagy pedig a gondolkodás segítségével (*ποιήσεις... ἀπὸ διανοίας*, — effectiones... ab intellectu; *Metaph. 1032 a 27—28*); *ὅτι νόησις ἡ ἐνέργεια.* — quia intellectio est actus; *(Metaph. 1051 a 29—31)*.

választhatja magáénak az egyiket és *visszautasíthatja* a másikat. A két geometria nem a valóság és a valótlanság, a lehetőség és lehetetlenség szempontjából különbözik egymástól, nem ezen az alapon *választhatjuk* magunkénak az egyiket a másikkal szemben — hanem egy a közöttük fennálló szinte etikai jellegű különbség kritériuma alapján. ARISTOTELES ezt a két egymásnak ellentmondó geometriai állításra épülő rendszert is az etikai, valamint a technikai tevékenység eredményeivel állította párhuzamba: valamint a technikai tevékenység terén minden *eidosz* két egymással ellentétes határozmánya közül az egyik, a természetnek megfelelő jó (pl. az egészség), a másik a természetellenes rossz (pl. a betegség) — hasonlóképpen a geometriában is a jó geometria a természetnek megfelelő geometria, az, amelyik (az egészséggel párhuzamosan) a klasszikus állításra alapszik, amelynek értelmében *a háromszög szögeinek összege két derékszög;* az a geometria, amelyik az ennek formálisan ellentmondó feltevésre épül mint princípiumra egy rossz, a természettel ellentétben álló *degenerált, megromlott* geometria (és ebben a tekintetben a betegséggel állítható párhuzamba). Ámde, valamint az orvostudománynak sem célja a betegség és a romlás megvalósítása *(Eth. Eudem. 1227 b 22—32)* — úgy kell, hogy legyen valószínűleg, — (tehetjük hozzá) — egy geometriai jellegű *hippokrateszi eskű* is, amelyik a megromlott, kontra-euklideszi geometria megvalósítását, illetve annak elfogadását *tiltja.*

De hogyan lehet a jót a rossztól megkülönböztetni? Ez a kérdés, valóban, igen élénken foglalkoztatta ARISTOTELESt; itt ismét párhuzam áll fenn a *geometria* és az *etika* között: mindkét téren maga a princípium, amely a következményeket szükségszerűség erejével meghatározza — logikai, dianoetikai úton teljességgel *bizonyíthatatlan.* Ilyen körülmények között hogyan szerezhet az ember mégis bizonyságot arról, mi a jó és mi a rossz, mi az igaz, — a jó és a hamis, — a rossz geometriai princípium?

Etikai téren az *erény* a jó valódi oka;[80] ez mondja meg nekünk, hogy a két lehetőség közül melyik a jó és melyik a rossz, bár ezután szabadon választhatunk egyik vagy másik megvalósítása között. Elméleti téren, így például a geometriában azonban az *értelem,* a *Núsz* (*νοῦς*) az, amelyik rávezet a princípiumok igaz vagy hamis voltára és nem valamilyen bizonyító eljárás, amely erre elvileg képtelen.[81] A *νοῦς*, a gondolkodás erénye — az igaz iránti helyes erkölcsi érzék: *geometria — — more ethico constructa.*

Ez az aristotelesi *νοῦς* nagymértékben hasonlít KANT *a priori szemléletéhez,* és annak valószínűleg történelmi őse; csakhogy ARISTOTELESnél, KANTtól eltérően, egy intellektuális és nem egy szemléleti intuícióról van szó. Mindkettő esetében azonban ez az intellektuális ill. szemléleti intuíció egyértelműen meghatározza az *egyetlen igaz* princípiumot; KANTnál ez még tovább is megy és meg sem engedi a vele ellentétes princípium szemléletes felfogását, bár KANTNnál is — akár ARISTOTELESnél, az egyetlen igazival szembenálló princípium *logikailag elgondolható,* de — mint az értelemmel (*νοῦς*), ill. a tér a priori intuíciójával ellenkező — elvetendő.

[80] *Eth. Nicom. 1151 a 17—19*; *Eth. Eudem. 1228 a 1.*

[81] *Anal. Poster. 100 b 7—13*; (ugyanaz a gondolat ismételten szerepel az etikai írásokban is; *Eth. Nicom., 1141 a 7, 1142 a 26* és különösen *Magna Moral. 1197 a 20—24*; lásd még *De Gener. Animal. 742 b 29.*

A háromszög szögösszegére vonatkozó tétel bizonyíthatatlansága

Ezek szerint tehát a fentiekből az derül ki, hogy ARISTOTELES már valamilyen módon belátta a háromszög szögeinek összegére kimondott állítás bizonyíthatatlanságát *és annak szükségességét, hogy ezt a tételt magát, mint egy bizonyítatlan geometriai princípiumot vegyék fel.*

Belátható, hogy a geometria további fejlődése szempontjából a legfontosabb éppen ez az utóbbi meta-matematikai következtetés: *a háromszög szögeinek összegére vonatkozó állítás bizonyíthatatlan.*

Hangsúlyoznom kell, hogy ARISTOTELESnél igen nagy számú szövegrész vall arra, hogy ezt a meta-matematikai felfogást ő valóban igen komolyan és mélyen magáévá tette. Ezzel kapcsolatban egyenesen jogunkban áll a háromszög szögeinek összegére vonatkozó tételre vonatkozó *aristotelesi koncepcióról* beszélni. Anélkül, hogy az összes idevágó szövegek részletes analízisébe bocsátkoznánk — ezt az aristotelesi felfogást a következőkben vázolhatjuk:

(a) Mint minden fogalom esetében — úgy a háromszög esetében is — megkülönböztethetjük a háromszög fogalmának is annak csupán *nominális* definícióját[82] attól a definíciótól, amely a háromszög fogalmának a *lényegét* definiálja; a nominális definíció csak arról szól, hogy milyen a kérdéses dolog, de egyáltalában semmit sem mond annak egzisztenciájáról: a definiált dolog éppúgy *létezhet,* mint *nem;* hiszen lehet *nem létező* vagy pedig egyenesen lehetetlen dolgokat is definiálni[83]; a lényeg definíciója azonban azt mondja meg, hogy *mi* a dolog egzisztenciájának *létalapja;* ez a dolog igazi *oka,* ez a *lényeg* az, amelynek következtében a dolog egzisztál.[84]

(b) A háromszög esetében a lényeg a *három* szög összegének konkrét értéke, amely elvileg lehet $2R$ vagy pedig $2R$-től különböző és ebben az esetben nagyobb vagy pedig kisebb mint $2R$[85]

(c) A szögösszeg (konkrét értéke) *minden* harmadik *közvetítő fogalom nélkül* — azaz: közvetlenül tartozik hozzá a háromszöghöz, mint annak lényegi attributuma[86]; bizonyítás azonban csak ott van, ahol szillogizmus van, tehát ahol három fogalom van, úgyhogy a két szélső fogalom között van egy harmadik, középső fogalom, amelyik a kettő között közvetít; ez az oka annak, amiért a két szélső fogalom közül az egyik a másiknak, mint alanynak, az állítmánya; ha azonban az állítmány minden harmadik forgalom közvetítése nélkül tartozik hozzá az alanyhoz, akkor egy bizonyíthatatlan princípiummal van dolgunk, ami a bizonyítási láncolatnak kiindulópontját képezi[87]; megfordítva: a princípium mindig egy ilyen állítás, amelyben harmadik, középső fogalomnak nincsen helye[88].

(d) Maga a *lényeg* tehát *bebizonyíthatatlan* valódi szillogizmusok segítségével, ellenben e szillogizmusok segítségével ez a lényeg valamilyen módon *megvilágítható,*

[82] A nominális definícióra vonatkozólag lásd. *Anal. Poster. 71 a 14—15, 92 b 15—16.*

[83] *Anal. Poster. 92 b 7; Phys. 208 a 30—31.*

[84] Erre vonatkozólag lásd *Anal. Poster. 71 a 9—13; 75 a 35; 90 a 31—32; 93 a 32—33; 93 b 2—12, 32.*

[85] Lásd fentebb a *3. Anal. Poster. 90 a 13 és 4. Anal. Poster. 90 a 33—34* fragmentumokat.

[86] Lásd erre vonatkozólag főleg az *Anal. Prior. I. 35* fejezetét, valamint a következő helyeket: *Anal. Prior. 67 a 24—25; Anal. Poster. 73 b 30—32, 74 a 1—2; Topica 110 b 22—23, 168 b 3; Eth. Eudem. 1222 b 39—41.*

[87] *Anal. Poster. 72 b 19—20.*

[88] *Anal. Poster. 72 a 7—8; 72 b 20—22; 84 b 20—27; 93 b 22.*

hozzáférhetővé tehető;[89] a lényegre vonatkozó szillogizmusok ezért csak *kvázi-bizonyítások;*[90] a háromszög szögeinek összegére vonatkozó ismert geometriai gondolatmenet ezek szerint nem is a szó igazi értelmében vett szigorú bizonyítás, hanem csupán egy olyan gondolati eljárás, ami valamit, nevezetesen a háromszög szögeinek konkrét összegét — *átviszi* egy segédszerkesztés közbevetésével a *potencialitás állapotából az aktualitásba:* az ún. bizonyításban alkalmazott szerkesztés tehát *nem bizonyítás,* hanem azt, ami a háromszög fogalmában, alakzatában már potenciálisan amúgy is benne foglaltatik — nevezetesen, hogy szögeinek összege $2R$ — átviszi az aktualitás állapotába, egy olyan állapotba, amelyben ez nyilvánvalóvá, effektívvé, szinte kézzel foghatóvá válik, a gondolkodás számára.[91] Igazi bizonyítás ezek szerint csak ottan lehetséges, ahol a három ítéletben szereplő három fogalom köre egymásnak *alája van rendelve, mint rész az egésznek;* ahol ez nem áll fenn, ahol tehát a fogalmak körei teljesen fedik egymást — ottan nem lehetséges valódi bizonyítás[92] — ezek mind *cirkuláris* bizonyítások, hiszen ilyen esetben a három ítélet közül bármelyik ugyanazzal a joggal lehet premissza és konklúzió vagy közvetítő középtétel; ebben az esetben *nem lehetséges előrehaladás,* nem lehetséges valami új ismeret, hanem csak puszta tautologikus ismételgetése ugyanannak a dolognak — hiszen az ilyen tételek egymással logikailag ekvivalensek; és minden olyan gondolatmenet, amely a lényegi definíciót gondolja bizonyítani, tk. *nem bizonyítás,* mert egy helyben topog és nem bizonyít semmit;[93] és azok, akik azt hiszik, hogy ezen az úton a lényegi definíciót bizonyítják, a valóságban a *petitio principii* hibájába esnek, hiszen egy ilyen gondolatmenetben a valódi princípium hiányzik, mert a végkövetkeztetés maga, egy kissé változott formában, a princípiumként felvett kiindulótétellel logikailag ekvivalens és így ez a gondolati láncolat önmagában zárt és *egy valódi princípiumot követel magának.*[94]

Ezzel kapcsolatban igen figyelemre méltónak tartom, hogy a *petitio principii* név alatt ismert logikai hiba illusztrálására ARISTOTELES ismét a geometriához, nevezetesen a párhuzamosok elméletéhez folyamodik.

Egy eléggé homályos szövegben arról van szó, hogy ezt a hibát követik el azok, akik azt hiszik, hogy „*a párhuzamosakat írják*". Anélkül, hogy a részletekre kitérnénk — más szövegekkel is összhangban — az „írni" (*γράφειν*) igét itten nem értelmezhetjük másképp, mint egy valami, talán nem egészen szigorúnak és ortodoxnak

[89] *Anal. Poster. 92 b 15—18.*

[90] *Anal. Poster. 93 b 38—94 a 2.*

[91] *Metaph. 1051 a 21—22, 29—31.*

[92] *Anal. Prior. 49 b 37—50 a 1.*

[93] *Anal. Poster. 72 b 25—27, 91 a 31, 35—37, 91 b 10—11.*

[94] *Anal. Prior. 64 b b 28—29.* — Ismeretes, hogy az *αἴτημα* (*követelmény, ami megköveteltetik*) kifejezés a geometria bizonyos princípiumainak a megjelölésére Euklides *Elemeiben* jelenik meg első ízben; vajon nem éppen a *petitio principii* (*τὸ ἐν ἀρχῇ αἰεῖσθαι.* — *Anal. Prior. 64 b 28*; lásd még *Topica 162 b 31*) *terminus technicusa* képezte ennek az elnevezésnek az alapját? Aristotelesnél szerepel ugyanis először az a gondolat, hogy a geometria circulus-mentes felépítéséhez *megköveteltetik* egy új princípium és ez éppen a párhuzamosak euklideszi posztulátuma; feltehető, hogy éppen erre a kritikus állításra alkalmazták először matematikai körökben ezt, az egyelőre familiáris kifejezést: ez egy olyan princípium ami, ha nem is önmagában és önmagától, minden további meggondolás nélkül elfogadható — (*Topica 100 b 19—21*; Hero, *Opera.* ed. Heiberg, vol. IV. 112; Lipsiae 1912) — vagy ha nem is konstruktív jellegű — mégis, más okokból — (nevezetesen a hibamentes, szigorú logikai felépítés kedvéért) — *megköveteltetik*, hogy bizonyítás nélkül elfogadtassék és a geometria princípiumai közé felvétessék.

tekintett *bizonyító eljárásra* használt familiáris kifejezést.[95] Ebben az értelmezésében a kérdéses szöveg a következőképpen hangzik:

(18) *ezt teszik* (ti. a *petitio principii* hibáját követik el) *azok, akik azt hiszik, hogy a parallelákat írják* (bizonyítják) *ugyanis nem veszik észre* (elrejtik saját maguk előtt), *hogy olyasvalamit* (ti. valamilyen tételt) *vesznek fel* (ti. a bizonyítás kiinduló hipotéziseként), *ami ugyancsak nem bizonyítható, ha nem léteznek a paralleíák.*[96] *(Anal. Prior. 56 a 4—7).*

Véleményem szerint, ebben az önmagában igen homályos szövegtöredékben a *párhuzamosak problémája direkt módszerrel történő bizonyítási kísérletére,* illetőleg az abban természetszerűleg és szükségszerűen felmerülő logikai hibára (ez szükségszerűen mindig egy *petitio principii*) *történik célzás.* A bizonyítandó tétel — minden valószínűség szerint — nem lehetett más mint az *Elem. I 29,* amelynek premisszája valóban a *párhuzamos egyenesek egzisztenciáját* mondja ki. Véleményem szerint, ezt a tételt — amelyből a háromszög szögeinek összegére vonatkozó *Elem. I. 32 2* tétel következik — a korabeli geométerek annak *reciprok* tételéből, nevezetesen az *I 27* és *I 28* állításokból gondolták szigorúan levezetni. Ez utóbbi két tétel azonban *abszolút* és így, ha ezekből az *Elem. I 29* mint reciprok tétel azonnal következne, akkor ennek abszolút jellege ismét bizonyítva volna, és a *párhuzamosak problémája* ezáltal meg lenne oldva.

Ahhoz, hogy az *Elem. I. 27* ill. *I. 28* állításokból ezek reciprokja, az *Elem. I .29* következzék elengedhetetlenül szükség van azonban annak a feltételezésére, hogy az adott egyeneshez (rajta kívül fekvő ponton át) megkonstruált párhuzamos (amelynek egzisztenciáját az *Elem. I 27* abszolút eljárással bizonyítja) az *egyetlen* olyan, amely az adott *egyenest nem metszi;* minden valószínűség szerint a konstruált párhuzamosnak ezt az *unicitását* a korabeli geométerek szinte öntudatlanul, mint egy bizonyításra nem is szoruló, talán figyelemre sem méltatott, evidens tényt vették fel; ARISTOTELES geométer kortársai pedig már kimutathatták az ebben a gondolatmenetben rejlő logikai fogyatékosságot, ti. hogy ez a rejtett feltevés maga is az *Elem. I. 29* állítás közvetlen következménye.

21. — Rá kell itt mutatnunk a *bizonyításra vonatkozó aristotelesi felfogásnak* egy kritikus pontjára. ARISTOTELES *csak a szillogizmust tekintette szigorú bizonyításnak;* mai kifejezéssel élve, tehát, csak az *implikációt* (és ennek is csak egy speciális fajtáját); ő maga egyrészt már egész világosan tudta, hogy az ilyen *implikáció* esetében a *hamis implikálja az igazat;*[97] egy ilyen implikációt azonban ő nem tartott tudományos eljárásnak;[98] ezért ehhez még egy igen fontos feltételt fűzött hozzá: *tudományos szillogizmus az, amelyikben a premissza igaz; és ha a premissza igaz, akkor szükségszerűen igaz a következmény is (modus ponens).* Másrészt ARISTOTELES a matematikát tekintette a deduktív tudomány mintaképének, de tudta azt is, hogy a *matematikai bizonyítások lényegében nem szillogizmusokból épülnek fel* és hogy

[95] A *γράφειν* terminus itt használt értelmezésére vonatkozólag lásd T. L. Heath, *On an allusion in Aristotle to a construction for parallels* (Abhdlg. zur Gesch. der Math. IX. 1899, 155—156); valamint Ch. Mugler, *Dictionnaire historique de la terminologie géometrique des grecques*, Paris 1958, 107.

[96] *ὅπερ ποιοῦσιν οἱ τὰς παραλλήλους οἰόμενοι γράφειν λανθάνουσι γὰρ αὐτοὶ ἑαυτοὺς τοιαῦτα λαμβάνοντες, ἃ οὐχ οἷόν τε ἀποδεῖξαι μὴ οὐδῶν τῶν παραλλήλων.* — (quod quidem faciunt qui lineas parallelas se describere putant; non enim intelligunt se talia sumere quae demonstrari nequeant, nisi sint parallelae; *Anal. Prior. 65 a 4—7*).

[97] Lásd erre vonatkozólag az *Anal. Prior. II 2–4* fejezeteit.

[98] *Anal. Poster. 72 a 6—8.*

a matematikában leggyakrabban megfordítható tételek, ekvivalenciák fordulnak elő a bizonyításokban[99] (amikor a tételt szükséges és elegendő feltételeiből vezetik le); az ilyen ekvivalenciákon alapuló matematikai bizonyítások tehát az aristotelesi bizonyítás-elmélet kritériumainak nem felelnek meg; ezzel szemben ez az aristotelesi felismerés, amely maga ARISTOTELES számára *pejoratív* jelleggel bír, igen közel áll már a *modern axiomatikus felfogáshoz,* amely azonban mint *pozitívumot* fogadja el, hogy az axiómákból levezetett, azokkal ekvivalens tételek lényegében az axiómákban benne foglalt tartalom *tautologikus* ismétlései.

ARISTOTELES tehát — minden valószínűség szerint — azt tartotta, hogy a háromszöget mint *három szög* összességét, a szögösszeg konkrét értéke definiálja —, hogy ez a konkrét érték jelenti magának a háromszögletű alakzatnak a lényegét, a létalapját és a létokát; elvileg ez a szögösszeg lehet két derékszöggel egyenlő, de lehet attól eltérő is, és bizonyítás útján nem győződhetünk meg arról, melyik ezek közül valóban a háromszög szögeinek összege.

Természetesen gondolni sem gondolhatunk arra, hogy ARISTOTELES a kontra-euklideszi hipotézist is az euklideszi tétellel egyenrangúan igaznak fogadta volna el.

A kontra-euklideszi alakzatok ellenkeznek az egyenes szemléletes grafikai képével

22. — Egy másik szövegcsoport, immár rávilágít ARISTOTELESnek erre a kontra-euklideszi hipotézisére vonatkozó felfogására is.

Ezt, röviden a következőkben foglalhatjuk össze: a *kontra-euklideszi hipotézis nem fogadható el mint egy jó (igaz, egészséges) geometria alapja, mert ha rajz útján akarjuk ábrázolni az egyenesvonalú alakzatokat,* mint amilyen pl. a háromszög, *akkor ott, ahol egyenest mondunk, a valóságban görbéket kell rajzolnunk.* Ehhez hozzáfűzhetjük, hogy ezek szerint (amit ARISTOTELES nem mond ki sehol) az értelem, a *νοῦς*, amelyik a két egymással szemben álló hipotézis közül a jót kiválasztja — *végül is a természetes térszemlélet diktátumát követi;* az ARISTOTELES-féle eredeti intellektuális szemlélet így ezen a téren a még érzéki térszemlélettel azonosul.

Ez a felfogás tükröződik mindenekelőtt a *Physica II 9* fejezetének egy helyén *(200 a 16—19),* ahol ARISTOTELES a következőket mondja:

(19) *ha az egyenes ez* (a *τοδί*, hoc — mutató névmás értelmezhető úgy is, mint gy az előadó által a homoktáblára éppen lerajzolt egyenesre mutató mozdulat kísérőszava, tehát: *„ez itt, ilyen”* — de értelmezhető mint egy egyszerű kifejezés, amely csupán célzásszerűen utal az egyenes ismert képzetére: *ha az egyenes ez és ez, (ilyen és ilyen) — akkor szükségszerű, hogy a háromszög szögeinek összege két derékszöggel legyen egyenlő;... ha azonban ez utóbbi nem áll* (tehát ha a háromszög szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel) — *akkor egyenes sincsen*[100] (akár abban az értelemben, hogy ebben az esetben *az egyenes sem olyan, mint amilyennek ismerjük,* vagy hogy *ez a fajta egyenes sem létezik* többé, vagy egyszerűen, hogy a háromszög többé *nem egyenes* oldalú alakzat).

[99] *Anal. Poster. 78 a 10—11.*

[100] *ἐπεὶ γάρ τὸ εὐθὺ τοδί ἐστιν, ἀνάγκη τὸ τρίγωνον δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν. ... ἀλλ' εἴγε τοῦτο μὴ ἐστιν, οὐδὲ τὸ εὐθύ εστιν.* — (nam cum rectum hoc sit, necesse est triangulum tres angulos duobus rectis habere; ... sed si hoc non est, neque rectum est; 200 a 16—19).

Minden koncentráltsága ellenére is e szöveg értelme világos: *a háromszög szögeinek összege szükségszerűen következménye az egyenes ismert szemléletes grafikai ábrázolásának; és ha a háromszög szögeinek összege különbözik két derékszögtől, akkor az egyenes megszűnik a szokott intuitív értelmében,* vagy pedig — ami lényegében ugyanaz — *a háromszög nem egyenes-oldalú alakzat többé.*

Ez egy igen természetes felfogás és mindig felmerül a nem-euklideszi geometria értelmezésének kapcsán is: a nem-euklideszi alakzatok grafikai ábrázolását nem lehet többé a szokott módon a közönséges grafikai egyenesekkel végrehajtani; ezek az alakzatok a nem-euklideszi alakzatoknak immár csupán *művészi* értelemben vett ábrázolásai és viszonyuk az elvont fogalomhoz immár nem ugyanaz, mint az euklideszi geometriában — és ezért könnyen tért nyerhet az a felfogás, hogy a nem-euklideszi geometria éppen azért és csak úgy lehetséges, ha azt, amit mi egy kifejezéssel *egyenesnek* nevezünk, a grafikai valóságban egy *görbével* ábrázoljuk — tehát, ha valamilyen módon erőszakot követünk el a geometriai szemléleten. Ennek a felfogásnak a meglétére enged következtetni a következő két szöveg is:

(20) *Mert például, matematikai téren tudnunk kell mi az egyenes és mi a görbe, mi a vonal és mi a felület ahhoz, hogy felismerjük, (megtudjuk) hány derékszöggel egyenlő a háromszög szögeinek összege.*[101] *(De Anima I 1, 402 b 18—21).*

Világosan kiderül ebből a szövegből is, hogy ARISTOTELES felfogásában *a háromszög szögei által felvett konkrét érték attól függ, hogy a háromszög oldalai egyenesek-e vagy pedig görbék.*[102]

Igen érdekes ebben a tekintetben végül egy a *Szofisták Cáfolásá*nak 10. fejezetében olvasható szöveg is, amelyben ARISTOTELES a háromszög kifejezés *kétértelműségéről* beszél, abban az értelemben, hogy ennek az egy kifejezésnek a jelentése egyszer olyan alakzat, amelyben a *szögek összege két derékszög* — de amely gondolatban jelenthet másfajta alakzatot is (tehát nyilván olyat, amelyben a szögek összege *nem egyenlő két derékszöggel*).

(21). — *Vajon a matematikai bizonyítások a gondolatbeliekre vonatkoznak-e vagy sem? És ha a háromszög kifejezésnek több értelme van, és ha jelentése más mint az az alakzat, amelyre vonatkozólag következik, hogy szögeinek összege két derékszög, akkor a vita arra a gondolatbeli háromszögre vonatkozik-e vagy sem?*[103] *(De Sophisticis. 10, 171 a 12—16).*

[101] *ὥσπερ ἐν τοῖς μαθήμασι τί τὸ εὐθὺ καὶ καμπύλον ἢ τὶ γραμμὴ καὶ ἐπίπεδον πρὸς τὸ κατιδεῖν πόσαις ὀρθαῖς αἱ τοῦ τριγώνου γωνίαι ἴσαι.* — (ut in mathematicis confert quid est rectum et quid curvum, vel quid linea, quid superficies, ad cognoscendum quot rectis anguli trianguli sint aequales; *402 b 18—21*).

[102] Meg kell itt jegyeznünk azonban, hogy Aristotelesnél már több ízben világosan ki van mondva az, a modern geometria számára alapvető gondolat, amelynek értelmében a geometriai tételek függetlenek az őket illusztráló rajzok korrektségétől; („On a dit souvent que la géométrie est l'art de bien raisonner sur les figures mal faites"; H. Poincaré, *Dernières pensées,* Paris 1926, 59—60); lásd erre vonatkozólag a következő helyeket: *Anal. Prior. 49 b 34—37*; *Anal. Poster. 76 b 39—77 a 3*; *Metaph. 1078 a 19—21, 1089 a 21—25.* — Ennek ellenére egyáltalán nem szükségszerű, hogy e nagyjelentőségű tény összes, messzemenő következményeit már átlátták volna a görög matematikusok, valamint Aristoteles is; igen valószínű, hogy ennek a tételnek csak egészen minoris, alárendelt, szűkkeblű értelmezést adtak.

[103] *πότερον οἱ ἐν τοῖς μαθήμασι λόγοι πρὸς τὴν διὰνοιὰν εἰσιν ἢ οὔ; καὶ εἴ τινι δοκεῖ πολλὰ σημαίνειν τὸ τρίγωνον, καὶ ἔδωκε μὴ ὡς τοῦτο τὸ σχῆμα ἐφ' οὗ συνεπερὰνατο ὅτι δύο ὀρθαί, πότερον πρὸς τὴν διὰνοιαν οὗτος διείλεκται την ἐκείνου ἢ οὔ;* — (argumentationes mathematicae ad sententiamne pertinent an non? ac si cui triangulum multa videatur significare, ac de eo concesserit, non quatenus est figura, de qua concluditur, quod eius anguli sint duo recti, estne ad illius sententiam haec disputatio an non? *171 a 12—16*).

Véleményem szerint, ebből a szövegből arra következtethetünk, hogy az a kontra-euklideszi tételekkel szemben felhozott *elhárító érv,* amelynek értelmében ezek elfogadása implicite azt jelentené, hogy ugyanannak a *háromszög kifejezésnek két különböző értelmet* tulajdonítunk: ha tehát a háromszögnek mint *alanynak* egyszer azt az *állítmányt* tulajdonítjuk, hogy *„szögeinek összege 2R"*, másszor pedig az ezzel ellentétes állítmányt, tehát, hogy *„szögeinek összege nem 2R"*, akkor igen közönséges hibát követünk el, ha feltételezzük, hogy az alanyban szereplő *„háromszög"* kifejezés mindkét esetben ugyanazt az alakzatot jelenti.[104]

23. — Végezetül idézni szeretnék még egy érdekes kitételt, ami az *Eudemosi Etika II 6* fejezetében szerepel, abba a szövegrészbe iktatva, amelyben ARISTOTELES a kontra-euklideszi háromszögeket és négyszögeket idézi:

(22) *Mindezeket* — (és itt ARISTOTELES nyilván az előző sorokban bevezetett kontra-euklideszi tételekre céloz) *nem lehet elhallgatni, de pillanatnyilag ezekről valamivel pontosabbat sem lehet mondani;*[105] *(1222 b 38—39).*

Véleményem szerint, ez a közbevetett szövegrész jól tükrözi nemcsak ARISTOTELESnek hanem geométer kortársainak is a kontra-euklideszi tételekkel szemben érzett *csodálkozását és zavarát*: a tény, hogy ilyen kontra-euklideszi tételek előállíthatók és szigorúan bizonyíthatók — önmagában rendkívül figyelemre méltó és érdekes jelenség; ugyanakkor azonban rendkívül zavaró is, hogy ez a nyilván szemléletellenes és lényegében rossz, romlott geometria egyáltalán lehetséges, elgondolható anélkül, hogy valami *paralogizmusra* épülne; ARISTOTELES és geométer kortársai valószínűleg mind úgy érezték, hogy ez a jelenség maga még további magyarázatra szorul, de ugyanakkor tisztában voltak azzal is, hogy erre még a kielégítő magyarázatot nem találták meg.[106]

[104] A *Topica I. 1* fejezetében *(101 a 15—17)* Aristoteles a paralogizmusoknak egy olyan fajtájáról beszél, amikor a hiba nem a gondolkodás formális szabályai ellen elkövetett vétségben keresendő, hanem a rossz rajzban; paralogizmus következhetik akkor is — írja — ha félköröket vagy egyenes vonalakat úgy szerkesztenek, ahogy nincsen megengedve; az ilyen rajzokat Aristoteles *pseudográfiáknak*, azokat, akik pedig ilyesmivel foglalkoznak, *pseudografoknak*, *ψευδογράφοι* — nevezi. Általában azt tartják, hogy Aristoteles ezzel azokra céloz, akik a kör négyszögösítésével foglalkoztak és a rajzon elkövetett erőszak útján akartak megoldást kicsikarni. Ez valószínű. Nincs azonban kizárva — tekintve, hogy a szövegben nemcsak körökről, hanem kifejezetten *egyenes vonalakról* is szó van — hogy Aristoteles ezzel egyben azokra is célzott volna, akik a kontra-euklideszi tételek vizsgálatával foglalkoztak és ezeket rajzok segítségével illusztrálták.

[105] *νῦν δ'οὔ μὴ λέγειν οὔ τε λέγειν ἀκριβῶς οἷόν τε, πλὴν τοσοῦτον.* (verum impresentiarum in tantillum neque dicere accurate neque non dicere convenit; *1222 b 38—39*).

[106] Semmi különöset nem látok abban, hogy az euklideszi posztulátum megjelenését immár megelőzte egy kontra-euklideszi rendszer. Meglepő azonban — és jogos elcsodálkozásra alkalmat adó — az, hogy ez mindeddig ismeretlen maradt — annak ellenére, hogy az aristotelesi *Corpus* ennek annyi beszédes — bár a bizonyító erő szempontjából *nem egyenlő súllyal rendelkező* — dokumentumát őrízte meg számunkra. Utóvégre Aristoteles soha nem tartozott az olvasatlan szerzők közé, és a XIX. század óta az érdeklődés még csak fokozódott irányában! Azt lehetne mondani, hogy a nem-euklideszi geometria megjelenése előtt a kontra-euklideszi fragmentumok iránt nem is nyilvánulhatott meg érdeklődés, azokat nem is lehetett volna helyesen értelmezni. De ha ez így is van, akkor is normálisnak tartanánk, hogy az olyan szorgalmas és gyakran olyan kitűnő matematikai felkészültséggel rendelkező kommentátorok felfigyeltek légyen e szövegeknek legalább a *szokatlan, az euklideszitől annyira eltérő fogalmazására* és legalább megkísérelték volna valamilyen magyarázatot találni ezek jelenlétére! — De ha ettől el is tekintünk, akkor viszont már szinte szükségszerűnek tűnik, hogy ezzel szemben a nem-euklideszi geometria megjelenése és ismertté válása után ezekre a szövegekre felfigyeljenek. De ez sem történt meg. 1904-ben jelent meg Heiberg alapvető munkája, *Mathematisches zu Aristoteles* címen (Abhandlungen zur Geschichte der Math, XVIII, 3—49), ahol az általunk idézett fragmentumok nagy része *még csak a lapszámmal sincsen*

A párhuzamosak problémája i. e. IV. század második felében

24. — A fentiekben röviden ismertetett szövegrészek alapján a következőképpen jellemezhetjük az euklideszi geometria alapjaira vonatkozó felfogás állását a IV. század második felében:

(a) A PLATÓN Akadémiájában, valamint az EUDOXOS körül csoportosuló athéni matematikusok — miután a logikai szigor szempontjából alapos vizsgálatnak kezdték alávetni az ismert geometriai tételek bizonyításait — felfedezték, hogy a háromszög szögeinek összegére vonatkozó klasszikus tétel bizonyítása nem kielégítő; ez ugyanis az *Elem. I. 29* tételre alapszik ennek bizonyítása *(Anal. Prior. 65 a 4—7)*, „a párhuzamosak írása" *pedig formális hibát (petitio principii)* rejt magában; *(18. sz. töredék)*.

(b) Megkísérelték ekkor a kérdést *indirekt* úton megoldani. Erre két egymástól eltérő tételt szemeltek ki: egyrészt megkíséreltek egy az *Elem. I. 29* tétellel, másrészt pedig magával az *Elem. I. 32.2* tétellel szembenálló hipotézist. Ez a két, általános jellegű kontra-euklideszi hipotézis azonban két egymástól eltérő részre bonatható, amelyet egy későbbi terminussal a *tompa-szög* és a *hegyes-szög* hipotézisének nevezhetünk. A *tompa-szög* hipotézisét sikerült is lerombolni, annak következményei

idézve — míg az idézett helyeket csak annak a történelmi ténynek a leszögezésére említi a szerző, hogy Aristoteles ismerte a háromszög szögeinek összegére vonatkozó klasszikus, *Elem. I. 32.2* tételt (*i. m.* 18—19). De hát ezek mind, nemcsak ezt a történelmileg triviális tényt — hanem mindenekelőtt és mindenekfölött azt bizonyítják, hogy Aristoteles már birtokában volt a klasszikus *Elem. I. 32. 2* tétellel formálisan *szemben álló* kontra-euklideszi hipotézisnek és az ebből levonható néhány fundamentális és bonyolult következménynek is! — E. Rufini, *La preistoria delle parallele e il postulato di Euclide* (Periodico di Matematiche, III. 1923, 11—17) teljesen a Heiberg-féle dolgozat szellemében mozog és ahhoz viszonyítva újat nem hoz. — Végül, 1949-ben látott napvilágot T. L. Heath, szinte exhausztív, munkája *Mathematics in Aristotle* (Oxford). Számos fragmentum teljesen hiányzik ebből a munkából is; (így pl. a *6. Anal. Poster. 93 a 33—35* fragmentum, amelyet különben Heiberg sem említ); más fragmentumok pedig minden kommentár nélkül jelennek meg, egészen eltérő és nem mindig releváns eszmetársítások kapcsán. Így pl. a *8. De Caelo 281 b 5—7* fragmentum fordítását minden kommentár nélkül közli a következő címszó illusztrálására: *Mathematical impossibility*" (*i. m.* 169); ismét a *19. Phys. 200 a 16—19* fragmentum csupán mint a „*Necessity in mathematics*" száraz illusztrációja szerepel (*i. m.* 100—101). Ez utóbbi fragmentumhoz fűzött rövid kommentárjában, a szerző egyszercsak felkiált: „It is as if had had a sort of prophetic idea of some geometry based on other than Euclidean principles, such as modern non-Euclidean geometries". Ez a hirtelen átvillanó gondolat azonban, valószínűleg teljesen hihetetlennek tűnhetett a szerzőnek — mert az előbbihez azonnal hozzáteszi: „It is not possible that Aristotle could consciously have conceived such an idea as Riemann's". — Aristoteles valóban nem lehetett tudatosan Riemann — de lehetett tudatosan Saccheri eszméinek birtokában! Amint a továbbiakból kiderül, Heath véleménye szerint ez a szöveg valami ötletszerű, esetleges jellegű dialektikus játszadozás eredményeként jelent meg a *Fizikában*; Aristoteles egy pillanatra felvetette magában a kérdést: „ha feltennénk, hogy a háromszög szögeinek összege nem egyenlő két derékszöggel — vajon milyen következményekkel járna egy ilyen hipotézis?" — Sajnos, azonban, túl sokszor vetődik fel Aristotelesnél ez a kérdés, mintsem, hogy elfogadhassuk, hogy ezt puszta játszadozásból tette volna; meg aztán *puszta játszadozó kérdésfeltevéssel nem lehet* ebből a hipotézisből olyan következményeket levonni, mint amilyenek azok (1—2 fragmentum), hogy ***a párhuzamos egyenesek metszik egymást ha a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 2R***, vagy hogy ebben az esetben ***létezhet egy 8R szögösszeggel rendelkező négyszög*** (5. fragmentum), vagy — végül — hogy a kontra-euklideszi hipotézis esetén ***a négyzet átlója összemérhető az oldalával***! Ilyen tételek nem adódnak minden további nélkül a feltevésekből és azok levezetése a kor legmagasabb fokán álló matematikai felkészültséget igényelt. És ha Aristoteles csak dialektikus játszadozásból jutott volna ezek birtokába, akkor (saját nézetével ellentétben, amelynek értelmében a jó soha nem jön létre a vak szerencse játéka folytán; *Anal. Poster.* II. 11) — akkor őt kellene az ókor egyik legnagyobb matematikai zsenijének tekintenünk, között formális ellentmondást felfedezni, mindkét (P és T) kontra-euklideszi hipotézis esetében egyaránt. *(1 és 2 sz. töredék, Anal. Prior. 66 a 11—15)*. A tompa-szög hipotézisének más érdekes következményeinek is birtokába jutottak *(5 sz. töredék, Eth. Eudem. 1222 b 35—36)*.

(c) Sem a hegyes-szög, és ennélfogva természetesen az általános kontra-euklideszi hipotézis következményei között sem, — a várt ellentmondást felfedezni nem sikerült, habár ezen a téren igen figyelemreméltó eredményekre jutottak: (pl. már felfedezték, hogy ha az euklideszi tételt visszautasítják — akkor a négyzet átlója és oldala közötti arány racionális értékeket is felvehet: (lásd a *8 sz. töredéket, De Caelo 281 b 5—7*) és a különös geometriai jelenség valószínűleg csodálkozást és zavart keltett; (lásd a *22 sz. Eth. Eudem. 1222 b 38—39 töredéket*).

(d) A zavarra, valószínűleg az adott okot, hogy miután az euklideszi mellett a kontra-euklideszi tételek is megjelentek, ezzel együtt ugyanaz az alany — pl. *„háromszög”* két egymással ellentétes állítmányt kapott: *„szögösszeg 2R”* ill. *„szögösszeg* nem *2R*”. Az ebből folyó nehézség elhárítására felmerült a következő magyarázat: a két, egymással ellentétes állítmányban szereplő alanyt kifejező szó, *„háromszög”*, a valóságban két egymástól eltérő fogalmat jelöl; *(21 sz. töredék, De Sophist.*

hiszen csupán játszadozva felfedezte ezeket a kontra-euklideszi tételeket és számos velük összefüggő matematikai tétel birtokába jutott! — Ez a Heath által vallott álláspont annál is különösebb, mert hiszen *ő volt az első, aki már figyelmeztetett arra, hogy Proklosnál szerepel a hegyesszög hipotézise* (lásd 41. sz. jegyzet). Ámde Proklosnál ez a hipotézis valóban csak egy pillanatnyi ötletként merül fel, ami a szöveg egészéből egész világosan kitűnik. Hogy lehet az, hogy az ennél sokkal konkrétabb, mélyebb és komolyabb aristotelesi kitételek ennyire elkerülték Heath figyelmét? — J. Lukasiewicz — a nem-aristotelesi logikáknak éppen a nem-euklideszi geometriák mintájára történő megalapítója — *Aristotle's syllogistic* (Oxford, ed. II, 1958) c. munkájában semmi említést nem tesz a kérdéses kontra-euklideszi fragmentumokról. — Úgyszintén semmi említés nem történik ezekről, I. M. Bochenski, *Ancient formal logic* (Amsterdam 1951), valamint W. Wieland, *Die aristotelische Physik; Untersuchungen über die Grundlegung der Naturwissenschaft und die sprachlichen Bedingungen der Prinzipforschung bei Aristoteles*; (Göttingen 1962) c. művében; ez utóbbi munka éppen a Principium (*ἀρχή*) aristotelesi fogalmának a tisztázása céljából íródott; ennek ellenére a *Fizikában* szereplő és éppen a principiumokra vonatkozó két fragmentum *(10. Phys. 200 a 29—30 és 19 Phys. 200 a 16—19)* szinte alig van megemlítve. — A. J. Tricot által fordított és kitűnő részletes kommentárokkal ellátott francia kiadás sem hívja fel semmiben a figyelmet a kérdéses fragmentumok heterodox jellegére. — Végül meg kell még említenem az *Eudemoszi Etika* F. Dirlmeier által fordított és részletesen kommentált, minden igényt kielégítő, kiváló német kiadását. A *15. Eth. Eudem. 1222 b 23—26* fragmentumhoz fűzött kommentárjában Dirlmeier megjegyzi, hogy a benne szereplő kontra-euklideszi hipotézis csupán „eine gewaltsame Fiktion”, amelyet Arisztoteles *ad hoc* vezetett be az etikai cselekvés princípiumait illető tézisének illusztrálására (*Aristoteles' Eudemische Ethik*, Berlin 1962, 267, 269). A kérdéses szöveg értékelésében és értelmezésében Dirlmeier teljesen egyetért R. Walzer, *Magna Moralia und aristotelische Ethik* (Berlin 1929) c. értekezésének egyik — *ad locum* fűzött megjegyzésével (*i. m.* 33), amely szerint „Dem Gedanken einer nicht euklidischen Geometrie ernstlich nachzugehen, liegt diesen Sätzen natürlich fern.” („Hiermit nicht ernstlich an eine nicht-euklidische Geometrie gedecht sei” — jegyzi meg F. Dirlmeier). Így szó szerint ez a megjegyzés minden további nélkül el is fogadható. Fennáll azonban még a *kontra-euklideszi* geometria lehetősége is! Mindazonáltal Dirlmeier már felhívja a figyelmet, hogy legalábbis különös az a tény, hogy Aristoteles az etikai principiumok megváltozásának lehetőségével kapcsolatban épp a matematikára hivatkozik: „Immerhin ist es bedeutsam, dass Aristoteles für aussprechbar hält, dass auch im Bereich des schlechthin Unbewegten Änderung statfinden könnte” (i. m. 269). — Heath, Walzer es Dirlmeier már a kezükben tartottak a *Corpus* kontra-euklideszi geometriáját, de nem akartak hinni az evidenciának és ezért visszadobták azt a szarkofágba, mint értéktelen, figyelemre nem méltó lomot. Mi lehet ennek az oka? Talán éppen az, hogy mind az idézett szerzők csak az euklideszi és a nem-euklideszi alternatívát vették alapul, és *figyelmen kívül hagyták a kontra-euklideszi rendszer lehetőségét*?

171 a 12—16); nevezetesen: a kontra-euklideszi tételben szereplő „háromszög" kifejezés nem a közönséges egyenes oldalú, hanem egy görbe oldalú alakzatot jelent. *(19 sz. Phys. 200 a 16—19* és *20 sz. De Anima 402 b 18—21 töredék).*

Egy ennél valamivel mélyebb és finomabb — de az előbbivel teljesen kompatibilis — magyarázata az újonnan előállott helyzetnek lehetett az is, amely szerint a két geometriai rendszer viszonya elsősorban mint a *jó* (az euklideszi geometria) és a *rossz* (a kontra-euklideszi rendszer) szembenállása tekintendő; *(14 sz. töredék, Anal. Poster. 77 b 24—26)*; az alapjuknál álló princípiumok egyaránt bizonyíthatatlanok, ami azonban nem jelenti azt, hogy a logikai értéknek híján volnának; csakhogy nem a bizonyítás, hanem egyedül az intellektuális intuició, a *νοῦς* képes eldönteni, hogy a két princípium közül melyikhez kell az *igaz* és melyikhez a *hamis* értéket hozzá rendelni; *(6 sz. töredék, Anal. Poster. 93 a 33—35).*

(e) — Történelmi szempontból, az ebből a helyzetből adódó legfontosabb következmény annak a felismerése, hogy a háromszög szögeinek összegére vonatkozó állítás *bizonyíthatatlan* és ennél fogva ez, (vagy egy ezzel ekvivalens tétel), *úgy tekintendő, mint egy geometriai princípium;* ennek a felismerésnek a kialakulásában — a párhuzamosak problémájának megoldására irányuló kísérletek kudarca mellett — *szerepe lehetett a bizonyításra vonatkozó aristotelesi felfogásnak is:* ennek értelmében ugyanis a háromszög szögeinek összegére vonatkozó bizonyítás nem bizonyítás, mert a két derékszöggel egyenlő szögösszeg minden közvetítő elem nélkül, közvetlenül tartozik hozzá a háromszög fogalmához, mint annak lényeges attribútuma; az ennek bizonyítására bemutatott klasszikus érvelés nem egyéb közönséges *cirkuláris* gondolatmenetnél, közönséges tautológiánál, amelyben egy állítást a vele ekvivalens állítással helyettesítenek; ahhoz, hogy ez az *önmagában zárt kör* valódi bizonyítássá váljék, föltétlenül szükséges, hogy a kört megszakítsuk és egyik láncszemét megtegyük abszolút kezdetnek, a geometriai levezetések princípiumának, amelynek bizonyításáról tudatosan lemondunk és így *mint egy új geometriai princípiumot tekintsük.*[107]

(f) — Ezt a gondolatot váltotta valóra EUKLIDES, amikor az általa írt *Elemek* alapjaihoz felvett egy új geometriai princípiumot,[108] amelyikből az *Elem. I. 29 ill. Elem. I. 32.2* valóban szigorúan következik. Megfogalmazásában ez a posztulátum azonos azzal a konklúzióval, amelynek a *hegyes-szög* hipotézise abszurd voltát kellett volna kimondania.

*

[107] Mi volt Aristoteles személyes szerepe ennek az új történelmi helyzetnek a létrehozásában? Lehetetlen erre a kérdésre kielégítő választ adni. Tény azonban, hogy a mélyreható matematikai eseményeket figyelemmel követte, azokban szellemileg participiált és jelentőségüket felfogta. Nem zárhatjuk ki azonban, hogy előadásaival és munkáival legalább ösztönző és közvetítő szerepet is játszott volna. Mindenesetre, a matematikai szempontból Aristotelesről kialakult pejoratív véleményt — úgy látszik kénytelenek leszünk némileg módosítani.

[108] Ezzel, lényegében le is zárul a görög geometria axiomatizálásának másfél évszázada tartó folyamata. A geometriának, egy alárendelt, gyakorlati jellegű eljárások gyűjteményéből — deduktív rendszerré történő átváltozása — egyike az emberi szellem leglényegesebb és legdöntőbb jelentőségű eseményeinek. Erre az egyedülálló szellemi metamorfózisra vetnek új fényt Szabó Árpád dolgozatai: *Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?* (Acta Antiqua IV 1956, 109—152); *Anfänge des euklidischen Axiomensystems* (Archive for History of Exact Sciences I 1960, 37—106); *A matematika alapjainak euklideszi terminusai,* I—II (A MTA Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei X 1960, 441—468; XI 1961, 1—46).

Az eszmék fejlődése szempontjából fölötte figyelemre méltó, hogy *a szorosabb értelemben vett euklideszi geometria megjelenését ugyanaz a felismerés előzte meg, mint a nem-euklideszi geometria felállítását;* nevezetesen, *hogy a párhuzamosak posztulátuma valóban bizonyíthatatlan princípium és nem egy abszolút geometriai tétel.* Ez a felismerés *szükséges feltétele* mind az euklideszi mind a nem-euklideszi geometriának. EUKLIDES tételének jogos voltát — paradox módon — csupán a nem-euklideszi geometria megjelenése igazolta és igazolhatta! Történelmileg azonban — az elterjedt felfogással szemben — önmagában ez a felismerés még *nem elegendő* a nem-euklideszi geometria megalapításához (hiszen ebből — a görögöknél éppen az euklideszi geometria jött létre!). *Ehhez még szükség van annak az elfogadására is, hogy a két egymásnak formálisan ellentmondó geometriai princípium egyforma joggal tehető meg egy-egy geometriai rendszer axiómájának, hogy továbbá e két rendszer közül egyik sem rossz és hogy önmagában mindkettő alapjainál álló axiómát egyforma joggal felruházhatjuk* — és egyidejűleg! — *az igaz logikai értékével;* e két egymásnak ellentmondó állítás számára csak egyazon geometriai rendszeren belül tilos egyidejűleg az igaz logikai értéket felvennie.

És éppen ennek az utóbbi szempontnak a tudatos el- és befogadása képezi a szellem fejlődésében azt a döntő jelentőségű *ugrópontot,* amely az euklideszi geometria korszakát — tehát ARISTOTELES és geométer kortársainak meglepően mély és messzemenő kontra-euklideszi konstrukcióit is — a szorosabb értelemben vett nem-euklideszi geometria korszakától élesen elválasztja. Itt van, lényegében, *a matematikára vonatkozó filozófiai felfogásban* is az a döntő jelentőségű diszkontinuitási pont, amely a klasszikus antik korszakot a modern kortól — immár a mi korunktól — elhatárolja.

(Beérkezett: 1966. IV. 15.)

VESTIGIES OF A CONTRA EUCLIDIAN SACCHERI GEOMETRY IN ARISTOTLE' S WORKS

(Historical antecedents of the EUCLIDIAN Postulate of Parallels)

by

I. TÓTH*

Summary

To illustrate some topics in logic, philosophy and ethics, ARISTOTLE often invoked heterodox geometrical examples, which are also to be found in the Non-Euclidean Geometries of our days. They belong in fact to Contra-Euclidian Systems analogous to those constructed by SACCHERIUS in the 18th century. The purpose of the Greek geometers was beyond doubt the same as SACCHERI' s: through the reduction to absurd of these Contra-Euclidian Systems (by means of the Absolute Geometry of BOLYAI) to demonstrate that the Absolute Geometry is complete, permitting the rigorous demonstration of all the Euclidian, and refutation of all the Contra Euclidian propositions. The hypothesis (named by SACCHERI) of the Obtuse Angle, is explicitely mentioned several times in the Corpus (in *Anal. Prior. 66 a 11—15* in two different formulations). We also find the fundamental theorem which demonstrates that in the case of the Obtuse Angle Hypothesis, two lines supposed to be parallel intersect each other *(66 a 11—15)*, a theorem which reduces to absurd the Obtuse Angle Hypothesis and which is to be found in an almost indentical form of SACCHERIUS. — Al-

* *Universitatea Bucuresti* Catedra de Fundamentele Matematicii.

so mentioned in the Corpus is the figure of a quadrilateral having the sum of its angles equal to 8R *(Eth. Eud. 1222 b 35—36)*; as known, this is the maximal quadrangle of the RIEMANN plane Geometry, a figure degenerated into a straight line closed upon itself. — The Acute Angle Hypothesis is mentioned just once in the Corpus (Anal. Poster. 90 a 33—34). But it is included in the demonstration of the fundamental theorem Elem. I 29, in fact in a perfect symmetric formulation with that given to the Obtuse Angle Hypothesis in the Corpus (66 a 11—13). — Most of the texts contain the undifferentiated general Contra-Euclidian Hypothesis and some of its immediate consequences *(e. g. 77 b 22—26; 90 a 33—34; 200 a 16—18, 29—30; 1052 a 6—7 etc.)*, of which the most remarquable is the following: if it is impossible to the triangle to have the sum of its angles equal to 2R, then the ratio between the diagonal and the side of the square can also take rational values *(De Caelo 281 b 4—7)* — These Contra-Euclidian Hypotheses or theorems are nowhere qualified by ARISTOTLE as false or impossible. — But a remarkable text proves ARISTOTLE' s conviction that one, and only one of the two Hypotheses a priori equally possible, the Euclidian vs. the Contra-Euclidian, can be right *(Anal. Poster. 93 a 33—35; Eth. Nicom. 1140 b 14—15)*, remaining to decided which of them; a decision that can be effectued only by the *νοῦς*. But the Contra-Euclidian as well as the Non-Euclidian Geometry, are systems of anti-Euclidian propositions; the same system is called Non-Euclidian Geometry if, and only if, it is embedded in a meta-mathematical conception with regard to both the Euclidian as well as the Non-Euclidian systems, as based upon postulates possessing the logical value of Right in itselves. On the contrary, the terminus Contra-Euclidian System is applied by us in the case of a mathematical philosophy which does not admit that the logical value of Rigth may belong simultaneously to the postulats of both opposite systems. The fragment *93 a 33—35* clearly proves that ARISTOTLE regarded this anti-Euclidian system of proposition as a Contra-Euclidian one. — Frequent invocations of Contra-Euclidian examples are made in the ethical books as a parallel to the liberty of choice between Good and Evil in human actions *(Magna Moral. 1187 b 1—4; Eth. Eudem. b 25—26, 41—42)*: these texts suggest that there also exists such a liberty to chose between the two opposite geometrical systems, but the Contra-Euclidian System — although a priori possible, is nevertheless a bad, a degenerated geometry *(Anal. Poster. 77 b 22—26)*. — The failure of attempts to distroy the Contra-Euclidian Hypothesis — expecially that of the Acute Angle — has determined EUCLID to the introduction of the new Postulate of Parallels at the basis of Geometry.

A STATISZTIKUS CSOPORTELMÉLET EGYES PROBLÉMÁIRÓL*

Írta: ERDŐS PÁL és TURÁN PÁL

Századunk matematikája gazdag jellemző új vonásokban. Az első mindjárt a század legelején jelentkezett a valós függvénytanban BOREL és LEBESGUE azon észrevételével, hogy számos tétel sokkal elegánsabban és áttetszőbben mondható ki, ha egy „kis" halmazt figyelmen kívül hagyunk. A nyert tételek frappáns volta a matematika majdnem minden területén hatott és ez alól az algebra sem volt kivétel; elég VAN DER WAERDEN azon tételére gondolnunk, mely szerint fix n-re egy jól meghatározott értelemben majdnem minden racionális egész együtthatós n-edfokú algebrai egyenlet *Galois*-csoportja az S_n n-edfokú szimmetrikus csoport. A strukturális algebra rohamos fejlődése a húszas években azonban ezen statisztikus algebrának nevezhető irányzatot teljesen háttérbe szorította. Ennek kifejlesztése azonban véleményünk szerint még a strukturális algebra számára is bírhat jelentőséggel. G. CANTORnak a transzcendens számok létezésére vonatkozó bizonyításának gondolatát általánosítva tekintsünk olyan A struktúrákat, melyek reprezentálhatók egy oly R térben, melyben pl. valamilyen értelemben mérték bevezethető. Olyasszerű kérdések, melyek bizonyos E tulajdonságú A struktúrák létezését kérdezik, eldönthetők lehetnek kimutatván azt, hogy azon A-k, melyek E-tulajdonsággal *nem* bírnak, R-ben „kis" halmazt alkotnak, szemben azzal, hogy jelenleg ilyen esetekben direkt konstrukciókkal kell kísérleteznünk, ami sok tapasztalat szerint mindig jóval nehezebb. Így pl. a strukturális algebrához közel álló kombinatorikus gráfelméletben ERDŐS kimutatta oly n-szögpontú G gráfok *létezését*, hogy sem G, sem $\bar{G}$ nem tartalmaz $[4 \log n]$-szögpontú teljes részgráfot; ilyen tulajdonságú *explicite megadott* gráfok megadása sokak próbálkozása dacára mindmáig nem sikerült. L. BERS egy erevani előadásában múlt szeptemberben általa kleinszerűnek (kleinian) nevezett csoportok létezését mutatta ki így, anélkül, hogy egyetlen ilyen csoportot explicite meg tudott volna adni. Nem lehetetlen, hogy ily módon a végesen generálható csoportokra vonatkozó Burnside-probléma is az ismertnél jóval egyszerűbben oldható meg.

Jelen előadásban véges csoportok statisztikus elméletével foglalkozunk. Ez esetben, ha a csoport rendje $\leqq n$, R-tér gyanánt S_n választható, a tér elemei az n-elemű P permutációk és egy R-beli halmaz mértéke a benne foglalt P-k száma. Így tehát eredményeink egyben az S_n, a legklasszikusabbnak nevezhető véges csoport, elméletében is új eredmények. A legelső kérdés, mellyel foglalkoztunk, a P-k csoportelméleti rendjének, $O(P)$-nek statisztikus vizsgálata, melyre vonatkozólag D. H. LEHMER még 1963-ban közölte velünk azon tapasztalatot, hogy

* Elhangzott a *MTA III. Osztály*ának 1966. május 18-i ülésén.

vaktában kivett P-re $O(P)$ „kicsi". Hogy $O(P)$ „nagyon nagy" sohasem lehet, azt már LANDAU kimutatta, megmutatván, hogy ha

$$\max_{P\in S_n} O(P) = g(n),$$

akkor

(1)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log g(n)}{\sqrt{n\log n}} = 1.$$

Tehát $O(P)$ az a priori lehetséges $n!$-hoz képest *mindig* kicsi. Mármost azt találtuk, hogy tetszőleges kis $\varepsilon > 0$-nál $k_\varepsilon(n)$-el jelölve azon P-k számát, melyekre

(2)
$$\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{\log O(P)}{\log^2 n} < \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

fennáll, hogy

(3)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_\varepsilon(n)}{n!} = 1.$$

Tehát az (1)-nél jóval többet mondó (2) reláció „majdnem mindegyik" S_n-beli P-re igaz. Sőt, (3) fennáll azon P-k számára is, melyekre (2) helyett a jóval erősebb

(4)
$$\left|\log O(P) - \frac{1}{2}\log^2 n\right| \leqq \omega(n) \log^{3/2} n$$

egyenlőtlenség teljesül, hacsak

(5)
$$\lim_{n\to\infty} \omega(n) = +\infty$$

tetszőleges lassan.

Orientációképp jegyezzük meg, hogy azon P-k rendje, melyek kanonikus ciklus-előállítása egyetlen n-hosszúságú ciklusból áll,

$$n = e^{\log n}$$

tehát „elég messze" $e^{\frac{1}{2}\log^2 n}$-tól és számuk mégis

$$(n-1)! = \frac{1}{n}\cdot n!,$$

ami „aránylag nagy". Ez is arra mutat, hogy a statisztikus maximum „nem nagyon éles"; tehát, hogy mégis *van*, azt mutatja, hogy a tétel nem lehet felszínen mozgó. A bizonyítás változatos segédeszközöket használ fel az analízisből, számelméletből, valószínűségszámításból és algebrából; ezek különböző arányú részvételének szükségessége ezen elméletre karakterisztikusnak látszik. A bizonyítás részleteibe itt belemenni már csak azért sem érdemes, mert az kevéssel ezelőtt a *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie*ban megjelent;[1] ez kiadja azt is, hogy ha P kanonikus ciklus-előállításában fellépő *különböző* ciklushosszak

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k,$$

[1] Bd. 4 (1965) p. 175—186.

akkor „majdnem mindegyik" P-re

$$e^{-\log n(\log\log n)^4} \leqq \frac{O(P)}{n_1 n_2 \ldots n_k} \leqq 1. \tag{6}$$

Ennek birtokában elérhetőnek látszik annak igazolása, hogy az $O(P)$ csoportelemrend „logaritmikusan Gauss-eloszlású", azaz tetszőleges valós c-re azon P-k számát $G_c(n)$-el jelölve, melyekre

$$\log O(P) \leqq \frac{1}{2}\log^2 n + c\log^{3/2} n, \tag{7}$$

fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_c(n)}{n!} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{3\lambda^2}{2}}\, d\lambda$$

reláció[2]. Megjegyezzük, hogy a bizonyítások minden nehézség nélkül kidolgozhatók lettek volna, úgy, hogy limeszreláció helyett minden egyes véges n-re fennálló egyenlőtlenségeket adjanak ki.

Ezen eredmények más alakban is kifejezhetők. Jelentős szerepet játszanak a matrixelméletben az $n \times n$-es permutációmatrixok melyek minden sora csupa 0-ból és egyetlen 1-esből áll és az egyes 1-esek oszlopindexei az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy P permutációját alkotják. Ezen matrixok, mint könnyen láthato, a matrixszorzásra nézve csoportot alkotnak, mely izomorf a P-k alkotta permutációcsoporttal. Tehát az összes tételek, melyeket S_n-re mondottunk vagy ki fogunk mondani, állanának az $n \times n$-es permutációmatrixok multiplikatív csoportjára is.

A kimondott tétel, bár egyszerű törvényszerűséget ad meg $O(P)$-re majdnem mindegyik P-re, távolról sem világít meg egy csomó egyéb kérdést, az $O(P)$ rend eloszlási kérdéseit „távol" az $e^{\frac{1}{2}\log^2 n}$ értéktől (persze a *Landau*-féle

$$1 \leqq O(P) \leqq e^{(1+\varepsilon)\sqrt{n \log n}}$$

közben). Ilyen felvilágosítások lennének nyerhetők az $O(P)$ különböző momentumainak ismeretéből, ami rögtön felszínre hozza az $O(P)$ rend

$$M_1 = \frac{1}{n!}\sum_P O(P)$$

várható értékének kérdését. Erre vonatkozólag azt találtuk, hogy alkalmas pozitív numerikus c_1-el

$$M_1 < e^{c_1\sqrt{\frac{n}{\log n}}}; \tag{8}$$

valószínű, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log M_1}{\sqrt{\dfrac{n}{\log n}}}$$

létezik és véges.

[2] Ezt azóta be is bizonyítottuk; e bizonyítás a tárgya sorozatunk III. dolgozatának.

A csoportelmélet sok kérdésében nem annyira az $O(P)$-rend értéke, mint inkább aritmetikai struktúrája fontos. Ennek illusztrálására elég megemlíteni FROBENIUS következő tételét, melyből pár sorban nyerte, hogy négyzetmentes rendű csoport mindig feloldható; e tétel szerint, ha m négyzetmentes és

$$m = kl,$$

ahol l minden prímfaktora nagyobb k minden prímfaktoránál, akkor minden m-rendű csoportban éppen l olyan elem van, melyek rendje l osztója.[3] Egy varsói előadás után A. SCHINZEL azt a kérdést vetette fel, hogy vajon igaz-e, hogy majdnem minden P-re $O(P)$ páros. Kimutattuk, hogy ez igaz, sőt sokkal több is; majdnem minden P-re $O(P)$ osztható *minden* p^α prímhatvánnyal, mely

$$\le \frac{\log n}{\log\log n}\left\{1+3\frac{\log\log\log n}{\log\log n}-\frac{\omega(n)}{\log\log n}\right\}, \tag{9}$$

hacsak $\omega(n)\to\infty$ tetszőleges lassan. Azon további kérdésre, vajon e tétel mennyire javítható, a felelet az, hogy lényegileg nem, amennyiben kimutattuk, hogy majdnem minden P-re $O(P)$ *nem* osztható legalább egy oly p prímszámnak már első hatványával sem, mely

$$\le \frac{\log n}{\log\log n}\left\{1+3\frac{\log\log\log n}{\log\log n}+\frac{\omega(n)}{\log\log n}\right\} \tag{10}$$

hacsak $\omega(n)\to\infty$. Igen valószínű, hogy tetszőleges valós c mellett azon P-k száma, melyekre $O(P)$ legalább egy, a

$$\frac{\log n}{\log\log n}\left\{1+3\frac{\log\log\log n}{\log\log n}+\frac{c}{\log\log n}\right\} \tag{11}$$

mennyiséget meg nem haladó p prímszámmal nem osztható, $n!$-al osztva $n\to\infty$-re egy $\psi_1(c)$ határfüggvényhez tart.

E tételek két elegáns konzekvenciája külön említést érdemel. Először is, ha b tetszőleges pozitív egész szám, úgy majdnem mindegyik P rendje osztható b-vel. Másodszor, majdnem mindegyik P rendje *nem* négyzetmentes.

Eddig az $O(P)$-rend „kis" prímfaktorainak statisztikus vizsgálatával foglalkoztunk. Milyen statisztikus tételek állíthatók az $O(P)$-rend „nagy" prímfaktorairól? Ha $f(P)$ jelenti az $O(P)$ maximális prímfaktorát, akkor azt találtuk, hogy majdnem minden P-re (a triviális $f(P)\le n$-en túlmenőleg)

$$f(P) \le n e^{-\frac{1}{\omega(n)}\sqrt{\log n}} \tag{12}$$

hacsak $n\to\infty$. Tehát majdnem mindegyik P olyan, hogy $O(P)$-nek nincs „túl nagy" prímfaktora. Hogy e tétel is csak keveset javítható, azt azon további eredményünk mutatja, hogy majdnem minden P-re

$$f(P) \ge n e^{-\omega(n)\sqrt{\log n}}. \tag{13}$$

Ez érdekes kontrasztban áll a racionális egészeknél fennálló tényállással; míg

[3] „Über auflösbare Gruppen I, II". Sitzungsber. der Berliner Akademie 1893.

(12)—(13)-ból következőleg majdnem mindegyik P-re (azaz legfeljebb $o(n!)$ kivétellel) $O(P)$ olyan, hogy maximális prímfaktora

$$ne^{-\omega(n)\sqrt{\log n}} \quad \text{és} \quad ne^{-\frac{1}{\omega(n)}\sqrt{\log n}}$$

között van, addig az n-et meg nem haladó egészek maximális prímfaktorára ilyen éles tétel nincs; így azon egészek sűrűsége, melyek maximális prímfaktora n^{α} és n^{β} közé esik $(\frac{1}{2}<\alpha<\beta<1)$, könnyen láthatólag

$$= \sum_{n^{\alpha}\leqq p\leqq n^{\beta}} \frac{1}{p} \to \log \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{ha} \quad n\to\infty,$$

tehát pozitív. Valószínű, hogy itt tetszőleges *pozitív* c mellett azon P-k száma, melyekre $O(P)$ maximális prímfaktora

$$< ne^{-c\sqrt{\log n}},$$

$n!$-al osztva itt is egy $\psi_2(c)$ határeloszláshoz tart.

A (9) tétel mellékesen azt is kiadja, hogy majdnem minden P-re $O(P)$ „eléggé összetett", legalább

$$(1-\varepsilon)\frac{\log n}{(\log\log n)^2} \qquad n>n_0(\varepsilon) \tag{14}$$

különböző prímfaktora van. Ez felveti azon kérdést, vajon fennáll-e pontosabb statisztikus törvényszerűség $U(P)$-re, az $O(P)$ rend különböző prímfaktorainak *teljes* számára is. Azt találtuk, hogy majdnem mindegyik P-re

$$U(P)=(1+o(1))\log n \log\log n \tag{15}$$

és ugyanez áll $V(P)$-re is, az $O(P)$-ben fellépő *összes* prímfaktorok számára is (azokat multiplicitás szerint véve). Tehát a (14) alatti prímfaktorok az összeseknek csak kis részét adják majdnem mindegyik P-re. A (15) alatti tétel analógiában áll a racionális egészeknél fennálló tényállással, amennyiben HARDY—RAMANUJAN tétele szerint az m egészre a különböző prímfaktorok számát $U(m)$-mel jelölve majdnem minden $m\leqq n$-re

$$U(m)=(1+o(1))\log\log n \tag{16}$$

és analóg a multiplicitása szerint vett prímfaktorszámra, $V(m)$-re is.

A (9) és utána említett tételek bizonyításába akár csak vázlatosan belebocsátkozni nincs idő; ezek azon gondolat megfelelő adaptációján alapulnak, mellyel egyikünk disszertációjában, 32 évvel ezelőtt, a (16) alatti HARDY—RAMANUJAN tételt igazolta. Ez a gondolat, a valószínűségszámításból régen ismert *Csebisev*-egyenlőtlenség alkalmazása egy akkor teljesen távolinak tartott területen, ma már a számelméleti folklore-hoz tartozik, azaz idézés nélkül használják, pedig sokat lehetne beszélni arról, hogy *akkor* milyen váratlanul hatott és *azóta* milyen fejlődést indított meg. E bizonyítások az „On some problems of a statistical grouptheory" c. sorozatunk második közleményeképp az *Acta Math. Hung.*-ban fognak megjelenni.

További természetes kérdés S_n különböző tulajdonságú részcsoportjainak statisztikus viselkedése. Mivel minden P elem rendje egyben az általa generált ciklikus részcsoport rendje is, előbbi tételeink ezirányban is megfogalmazhatók lennének. Újabb kérdés ezirányban az, hogy S_n-nek hány, *páronként nem-izomorf* ciklikus részcsoportja van és vajon *ezen* részcsoportok rendjére fennáll-e statisztikus jellegű tétel. Ez másképp azt jelenti, hogy az $O(P)$-rend hány *különböző* értéket vehet fel a (7)-ben adott közön belül és ezek eloszlásáról mi mondható ki. Erre vonatkozólag először is azt találtuk, hogy $O(P)$ *különböző* értékeinek számát $W(n)$-el jelölve $n\to\infty$-re

$$W(n)=e^{(1+o(1))\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{n}{\log n}}},$$

ami a (7) alatti köz hosszával összehasonlítva rendkívül kicsi! Ezen felül meg tudjuk mutatni, hogy a különböző $O(P)$-értékek legfeljebb $o(W(n))$ számú kivételével egy

$$e^{(c_2+o(1))\sqrt{n}\log^{c_3}n}\leqq O(P)\leqq e^{(c_2+o(1))\sqrt{n}\log^{c_3}n}$$

alakú egyenlőtlenségnek tesznek eleget. Itt c_2 és c_3 pozitív numerikus állandók, ahol $0\leqq c_3\leqq\frac{1}{2}$; értékük meghatározása inkább technikai nehézségű feladatnak látszik. Egyáltalán nem lehetetlen, hogy $c_3=\frac{1}{2}$. Ez azt jelentené, hogy a lehetséges $O(P)$-értékek „javarésze" lényegileg olyan nagy, amilyen nagy csak lehet; hogy mégis a P-k javarészére $O(P)\sim e^{\frac{1}{2}\log^2 n}$, csak azt jelenti, hogy a legtöbb P preferálja a kevés „közepes nagy" lehetséges rend-értéket a sok „naggyal" szemben.

Azzal kapcsolatban, hogy minden G csoport, melynek rendje $\leqq n$, beágyazható S_n-be, régóta felvetődött természetes kérdés, azon legkisebb m vizsgálata egy adott G-re, hogy G beágyazható már S_m-be is. Áttetsző válasz itt is csak statisztikus értelemben várható. Itt legfeljebb n-edrendű *kommutatív* csoportok esetére megmutattuk, hogy ezek majdnem mindegyike beágyazható S_N-be, ahol

$$N=\left[\frac{n}{\psi(n)}\right]$$

hacsak

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\psi(x)}{\log x}=0.$$

E tétel sem javítható lényegesen, amennyiben kimutattuk, hogy tetszőleges kis $\varepsilon>0$-nál már azon legfeljebb n-edrendű kommutatív csoportok száma, melyek $S_{[n^{1-\varepsilon}]}$-ba már *nem* ágyazhatók be, az összesekének már pozitív százaléka.

Megjegyezhető, hogy az említett tételek legnagyobb része automatikusan teljesül S_n helyett A_n-re, az n-edfokú alternáló csoportra is.

Ezen utóbbi tételek bizonyításai az említett sorozatunk IV. dolgozatában fognak szerepelni együtt S_n konjugált osztályaira és elemeinek centralizátoraira vonatkozó statisztikus tételekkel és így ezek bizonyításairól sem szólunk most. Lényegesebbnek tartjuk azon közvetlen feladatok megjelölését, melyek az előbb említett tételek természetes kiegészítései ill. folytatásai és az említett dolgozatokban jórészt nem szerepelnek.

1. $O(P)$ más régiókban való értékeloszlása.
2. $O(P)$ várható értékének aszimptotikus meghatározása (logaritmikusan).
3. $\psi_1(c)$ eloszlásfüggvény meghatározása és létezése.

4. A $\psi_2(c)$ eloszlásfüggvény létezése és meghatározása.

5. FROBENIUS problémája, az $x^m=e$ megoldásszáma S_n-ben. Ez csak $m=p$-re van elintézve, p fix, $n\to\infty$. A nehéz éppen az az eset, mikor m is függ n-től. (L. MOSER—M. WYMAN)[4].

6. Ha $f_n(k)$ jelenti S_n-ben azon P-k számát, melyekre $O(P)=k$, akkor mely k-kra lesz $f_n(k)$ maximális?

7. L. MOSERnek BERCOVval[5] sikerült S_n-ben meghatározni a kommutatív részcsoportok maximális rendjét. Ez

$$\begin{array}{ll} 3^m, & \text{ha } n=3m \\ 4\cdot 3^{m-1}, & \text{ha } n=3m+1 \\ 2\cdot 3^m, & \text{ha } n=3m+2. \end{array}$$

Az egyenlőség nyilván mindegyik esetben elérhető. Érdekes volna S_n a) összes, b) páronként nem-izomorf kommutatív részcsoportjai számának meghatározása és statisztikus tétel ezek rendjének eloszlására.

8. A. SCHINZEL sejtése. S_n majdnem mindegyik részcsoportja feloldható. Ennek igazolására elég lenne nem túl gyenge alsó becslés S_n összes részcsoportjainak számára és egy nem túl durva felső becslés a nem feloldható részcsoportokéra.

9. S_n összes részcsoportjai számának meghatározása legalább aszimptotikusan. Van-e ezek rendjére statisztikus tétel?

10. A legfeljebb n-edrendű csoportok minimális m-indexű S_m-be való beágyazhatóságának statisztikus vizsgálata.

11. S_n részcsoportjai rendje aritmetikai struktúrájának statisztikus vizsgálata.

12. Igaz-e, hogy ha $A\subset B\subset S_n$ és A és B az S_n részcsoportjai, úgy O annak a valószínűsége, hogy A a B-ben invariáns részcsoport?

13. Analóg vizsgálatok A_n helyett S_n más „nagy" részcsoportjaira.

14. Más algebrai struktúrák statisztikus vizsgálata reprezentációs terükben.

ON SOME PROBLEMS OF A STATISTICAL GROUPTHEORY

By P. ERDŐS and P. TURÁN

Summary

After a general motivation (indicating even the necessity of a statistical algebra) several simple laws are given among others for the distribution of values resp. for the arithmetical structure of the (grouptheoretical) order $O(P)$ of the elements P of S_n, the symmetric group with n letters. A list of some further problems is added.

[4] „On the solutions of $x^{\alpha}=1$ in symmetric groups" *Can. J. Math.* 7 (1955) p. 159—188.

[5] *On Abelian Permutation Groups.* (Sajtó alatt)

ORTOGONÁLIS SOROK KONVERGENCIAKÉRDÉSEI

Írta: TANDORI KÁROLY

1. Előadásomban az utóbbi három évben az általános ortogonális sorok konvergencia-elméletében elért és már közlésre került eredményeimről kívánok beszámolni. Az egyes eredmények mellett egyúttal egy módszert is bemutatok, amellyel az ortogonális sorok konvergencia-elméletének különböző kérdései egységes szempontból tárgyalhatók. Ez a módszer lehetőséget ad arra is, hogy az ortogonális sorok pontonkénti konvergenciájának vizsgálatánál a funkcionálanalízis eszközei az eddigieknél fokozottabb mértékben felhasználásra kerüljenek. Az eredmények mellett számos nyitott kérdésről is említést teszek.

Az általános ortogonális sorok konvergencia-elméletének egyik legfontosabb kérdése a következő. Legyen megadva együtthatóknak egy $\{a_k\}_1^\infty$ sorozata. Milyen, az a_k együtthatókra tett feltételek mellett állítható, hogy a

$$\sum a_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

ortogonális sor tetszőleges $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer esetén valamilyen értelemben összegezhető.

A következőkben kizárólag valós esetre szorítkozunk és csak a véges ortogonalitási intervallum esetével foglalkozunk; így az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az ortogonalitási intervallum a $[0, 1]$ intervallum, azaz a tekintetbe vett ortonormált függvényekre teljesül az

$$\int_0^1 \varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx = \begin{cases} 1 & (k = l), \\ 0 & (k \neq l) \end{cases}$$

reláció. (A következőkben integrálon a *Lebesgue*-integrál értendő.)

Mint ismeretes, az ortogonális sorok négyzetes integrálközépben való konvergenciájának kérdése teljesen megoldott. A Riesz—Fischer-tétel szerint ugyanis az (1) sor négyzetes integrálközépben akkor és csakis akkor konvergál, azaz az (1) sor $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$ részletösszegeire akkor és csakis akkor teljesül valamilyen $f(x)$ négyzetesen integrálható függvénnyel az

$$\int_0^1 (s_n(x) - f(x))^2\,dx \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

reláció, ha $\sum a_k^2 < \infty$. Ismeretes továbbá, hogy az ilyen $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatok az $\|\{a_k\}\| = \{\sum a_k^2\}^{1/2}$ normában Hilbert-teret, az ún. l^2-teret alkotják.

Általános ortogonális sorok pontonkénti konvergenciájának, illetve szummálhatóságának a kérdése már bonyolultabb. Tekintettel arra, hogy a $\varphi_k(x)$ függvényekről az ortonormáltságon kívül semmi egyebet nem teszünk fel, így a pontonkénti konvergencia vizsgálatainál csak a majdnem mindenütt való konvergencia, illetve szummálhatóság jöhet szóba.

2. Ortogonális sorok pontonkénti konvergenciája. ÁLTALÁNOS ESET. Jelöljük $M(\infty)$-nel az olyan $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatok osztályát, amelyekre az (1) sor bármely $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer esetén a $[0, 1]$ intervallumon majdnem mindenütt konvergál. (A divergenciapontok halmaza függ a $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ rendszertől.) Az alapkérdés megválaszolására az $M(\infty)$ osztály jellemzését kell megadni.

Ebből a célból adott $\{a_k\}_1^N$ véges együtthatósorozat esetén tekintsük az

$$I_2(\infty; a_1, \ldots, a_N) = \sup_{\{\varphi_k\}} \int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx$$

függvényt, ahol a szuprémum az összes $\{\varphi_k(x)\}_1^N$ ortonormált rendszerre képezendő, és egy végtelen $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatra legyen

$$\|\{a_k\}; \infty\|_2 = \lim_{N \to \infty} I_2^{1/2}(\infty; a_1, \ldots, a_N).$$

Az $M(\infty)$ osztály jellemzését a következő tétel szolgáltatja [16]:

$\{a_k\}_1^\infty \in M(\infty)$ *akkor és csakis akkor teljesül, ha* $\|\{a_k\}; \infty\|_2 < \infty$, *és* $M(\infty)$ *az* $\|\{a_k\}; \infty\|_2$ *normában szeparábilis Banach-teret alkot.*

Más szóval: az (1) sor bármely ortonormált rendszer esetén akkor és csakis akkor konvergál majdnem mindenütt, ha bármely ortonormált rendszerre az (1) sor szeletei abszolút értékben egy négyzetesen integrálható függvény alatt maradnak.

E tétel bizonyítása kiadja a következő állítást is [15], [16]:

Ha $\{a_k\}_1^\infty \notin M(\infty)$, *akkor van olyan* $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *ortonormált rendszer, amelyre az* (1) *sor majdnem mindenütt divergál.*

Könnyen bebizonyítható például, hogy az $M(\infty)$ tér — amely nem Hilbert-féle — a következő tulajdonságokkal rendelkezik [15], [16]:

Ha $\{a_k\}_1^\infty \in M(\infty)$ *és* $|b_k| \leqq |a_k|$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *akkor* $\{b_k\}_1^\infty \in M(\infty)$.

(A végtelen számsorokra vonatkozó majoráns-kritérium általánosítása.)

Az alkalmazások szempontjából fontos kérdés az, hogy hogyan függ $\|\{a_k\}; \infty\|_2$ az a_k együtthatóktól. Ez a kérdés még nincs megoldva; az $\|\{a_k\}; \infty\|_2$ normára csupán különböző becslések ismeretesek. D. E. MENSOV [5] és H. RADEMACHER [8] eredményei, illetve egyik korábbi dolgozatom [9] alapján bebizonyíthatók az alábbi becslések [16]:

Bármely $\{a_k\}_1^\infty$ *együtthatósorozatra érvényes az* $\|\{a_k\}; \infty\|_2 \leqq A\Big(a_1^2 + \sum_{k=2}^{n} a_k^2 \log^2 k\Big)^{1/2}$ *becslés. Ha* $|a_k| \geqq |a_{k+1}|$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *akkor* $\|\{a_k\}; \infty\|_2 \geqq B\Big(a_1^2 + \sum_{k=2}^{n} a_k^2 \log^2 k\Big)^{1/2}$ *is fennáll, ahol A és B pozitív, az* $\{a_k\}_1^\infty$ *együtthatósorozattól független állandók.*

Ez a tétel tartalmazza D. E. MENSOV [5] és H. RADEMACHER [8] klasszikus eredményét, amely szerint *a* $\sum a_k^2 \log^2 k < \infty$ *feltételből következik, hogy az* (1) *sor bármely* $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *ortonormált rendszer esetén majdnem mindenütt konvergál;* valamint az előzőek alapján tartalmazza egy korábbi eredményemet is [9]: *ha* $\sum a_k^2 \log^2 k = \infty$

és $|a_k| \geqq |a_{k+1}|$ $(k=1, 2, \ldots)$, *akkor van olyan* $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *ortonormált rendszer, hogy az* (1) *sor majdnem mindenütt divergál.*

A [14] és [18] dolgozatok alapján könnyen bebizonyíthatók a következő élesebb becslések is, amelyek további kritériumot szolgáltatnak ortogonális sorok konvergenciájára, illetve divergenciájára.

Bármely $\{a_k\}_1^\infty$ *együtthatósorozatra teljesülnek a*

$$\bar{B}\left(a_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k^2 \left(\log^+ \frac{1}{a_k^2}\right)^2\right)^{1/2} \leqq \|\{a_k\}; \infty\|_2 \leqq \bar{A}\left(a_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k^2 \left(\log^+ \frac{1}{a_k^2}\right) \log k\right)^{1/2}$$

egyenlőtlenségek, ahol $\bar{A}$ *és* $\bar{B}$ *pozitív, az* $\{a_k\}_1^\infty$ *együtthatósorozattól független állandók, továbbá*

$$\log^+ \frac{1}{x} = \begin{cases} \log \dfrac{1}{x} & \left(0 < x \leqq \dfrac{1}{2}\right), \\ 1 & \textit{különben.} \end{cases}$$

Megemlítem, hogy az utóbbi felső becslés D. E. MENSOV [5] és H. RADEMACHER [8] klasszikus lemmájának következő élesítésén alapul [18]:

Bármely $\{a_k\}_1^N$ *együtthatósorozatra érvényes az* $I_2(\infty;\, a_1, \ldots, a_N) \leqq$ $\leqq A_1 \log(N+1) \sum_{k=1}^{N} a_k^2 \log^+ \frac{a_1^2 + \ldots + a_N^2}{a_k^2}$ *becslés, ahol* A_1 *pozitív, N-től és az* a_k *együtthatóktól független állandó.*

(D. E. MENSOV [5] és H. RADEMACHER [8] lemmája szerint ugyanis $I_2(\infty;\, a_1, \ldots, a_N) \leqq A_1 \log^2(N+1) \sum_{k=1}^{N} a_k^2$.) Ez a becslés — amely egyáltalán nem a legélesebb — az $I_2(\infty;\, a_1, \ldots, a_N)$ függvényt az entrópia fogalmával hozza kapcsolatba.

EGYENLETESEN KORLÁTOS ORTONORMÁLT RENDSZEREK ESETE. Hasonló módon tárgyalható az (1) sor majdnem mindenütt való konvergenciájának a kérdése abban az esetben is, amikor korlátos ortonormált rendszerekre szorítkozunk. Legyen $K > 1$, és tekintsük a

$$|\varphi_k(x)| \leqq K \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ k=1, 2, \ldots) \tag{2}$$

feltételnek eleget tevő ortogonális rendszereket. Jelöljük $M(K)$-val az olyan $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatok osztályát, amelyekre az (1) sor bármely, a (2) feltételnek eleget tevő $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer esetén majdnem mindenütt konvegál. Tekintsük az

$$I_2(K;\, a_1, \ldots, a_N) = \sup_{\{\varphi_k\}} \int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)|\Big)^2\, dx$$

függvényt, ahol a szuprémum az összes, a (2) feltételnek eleget tevő $\{\varphi_k(x)\}_1^N$ ortonormált rendszerre képzendő, és legyen

$$\|\{a_k\};\, K\|_2 = \sup \sum_{k=0}^{\infty} I_2^{1/2}(K;\, a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}),$$

ahol a szuprémum az összes végtelen $\{n_k\}$ $(0 = n_0 < \ldots < n_k < \ldots)$ indexsorozatra veendő.

Többek között érvényesek a következő állítások [17]:

$\{a_1\}_1^\infty \in M(K)$ akkor és csakis akkor, ha $\|\{a_k\};K\|_2 < \infty$, és $M(K)$ az $\|\{a_k\};K\|_2$ normában szeparábilis Banach-tér.

Ha $\{a_k\}_1^\infty \notin M(K)$, akkor van olyan, a (2) feltételnek eleget tevő $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer, hogy az (1) sor majdnem mindenütt divergál.

Ha $\{a_k\}_1^\infty \in M(K)$, akkor

$$\|\{a_k\};K\|_2 = \lim_{N\to\infty} I_2^{1/2}(K;a_1,\dots,a_N). \tag{3}$$

Ha $\{a_k\}_1^\infty \in M(K)$, és $|b_k| \leqq |a_k|$ $(k=1,2,\dots)$, akkor $\{b_k\}_1^\infty \in M(K)$.

Tetszőleges $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatra $\|\{a_k\};K\|_2 \leqq \bar{\bar{A}}\left(a_1^2+\sum_{k=2}^\infty a_k^2\log^2 k\right)^{1/2}$, ha $|a_k| \geqq |a_{k+1}|$ $(k=1,2,\dots)$, akkor az $\|\{a_k\};K\|_2 \geqq \bar{\bar{B}}\left(a_1^2+\sum_{k=2}^\infty a_k^2\log^2 k\right)^{1/2}$ alsó becslés is érvényes, ahol $\bar{\bar{A}}$ és $\bar{\bar{B}}$ pozitív, az $\{a_k\}_1^\infty$ sorozattól független (de a K-tól függő) állandók.

Megemlítem még, hogy az előző normákat a $p=2$ kitevő helyett tetszőleges $1 \leqq p < 2$ kitevővel képezve, azokkal ekvivalens normákat nyerünk [16], [17].

A számos nyitott kérdés közül a következőket említeném meg: $K>1$ esetén a $\lim_{n\to\infty} I_2(K;a_1,\dots,a_N)<\infty$ feltételből következik-e a $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty} I_2(K;a_{n+1},\dots,a_N)\right)=0$ reláció? (Igenlő válasz esetén az $\|\{a_k\};K\|_2$ normát definiálhatnánk közvetlenül a (3) egyenlőséggel.) $K>1$ esetén teljesül-e az $\|\{a_k\};\infty\|_2 \leqq C(K)\|\{a_k\};K\|_2$ egyenlőtlenség, ahol a $C(K)$ pozitív szám csak a K-tól függ, de az $\{a_k\}_1^\infty$ sorozattól független? (Ebben az esetben fennállna $M(K)=M(\infty)$ $(K>1)$; $M(K)\supseteq M(\infty)$ teljesülése ugyanis nyilvánvaló.) Hogyan jellemezhető az $M(1)$ osztály? (Az előzők szerint a $\sum_{k=2}^\infty a_k^2 \log^2 k < \infty$ feltételből következik, hogy $\{a_k\}_1^\infty \in M(1)$; továbbá A. N. Kolmogorov és D. E. Mensov [4] egy korábbi eredménye szerint $\sum_{k=1}^\infty a_k^2 w(k) < \infty$, ahol $w(k)$ pozitív és $w(k)=o(\log k)$, nem lehet elegendő ahhoz, hogy $\{a_k\}_1^\infty \in M(1)$ teljesüljön.)

A konvergencia kérdése az ortonormált függvényrendszer Lebesgue-függvényeire tett feltételek esetén. Ismeretes, hogy az (1) sor konvergenciájának a feltételei enyhíthetők abban az esetben, ha az ortonormált függvényrendszer Lebesgue-függvényeinek nagyságrendjére feltételeket teszünk. A $\{\varphi_k(x)\}$ ortonormált rendszer n-edik Lebesgue-függvényén értjük az

$$L_n(\{\varphi_k\};x) = \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\varphi_k(t)\right| dt$$

függvényt.

Legyen $\{\lambda_k\}_1^\infty$ pozitív, monoton nem-csökkenő számsorozat, és tekintsük az olyan $\{\varphi_k(x)\}$ ortonormált függvényrendszereket, amelyekre teljesül a

$$\sup \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} L_{\nu(x)}(\{\varphi_k\};x)\,dx \leqq 1 \qquad (n=1,2,\dots) \tag{4}$$

feltétel, ahol a szuprémum az összes, a [0, 1] intervallumon mérhető, nem-negatív egész értékű $v(x)$ függvényekre veendő. Megjegyezzük, hogy ha $L_n(\{\varphi_k\}; x) \leqq \lambda_n$ $(0 \leqq x \leqq 1;\ n = 1, 2, \ldots)$, akkor (4) teljesül.

Jelöljük $M(\{\lambda_k\})$-val az olyan $\{a_k\}_1^\infty$ sorozatok összességét, amelyekre az (1) sor bármely, a (4) feltételnek eleget tevő $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer esetén majdnem mindenütt konvergál. Legyen

$$I_1(\{\lambda_k\}; a_1, \ldots, a_N) = \sup_{\{\varphi_k\}} \int_0^1 \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)|\, dx,$$

ahol a szuprémum az összes, a (4) feltételt kielégítő $\{\varphi_k(x)\}_1^N$ ortonormált rendszerre veendő, és legyen

$$\|\{a_k\}; \{\lambda_k\}\|_1 = \lim_{N \to \infty} I_1(\{\lambda_k\}; a_1, \ldots, a_N).$$

Kimutathatók a következő állítások [17], [19]:

$\lambda_n \to \infty$ esetén $\{a_k\}_1^\infty \in M(\{\lambda_k\})$ akkor és csakis akkor, ha $\|\{a_k\}; \{\lambda_k\}\|_1 < \infty$; $M(\{\lambda_k\})$ az $\|\{a_k\}; \{\lambda_k\}\|_1$ normában szeparábilis Banach-tér.

Ha $\{a_k\}_1^\infty \notin M(\{\lambda_k\})$, akkor van olyan, a (4) feltételnek eleget tevő $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer, hogy az (1) sor majdnem mindenütt divergál.

Ha $\{a_k\}_1^\infty \in M(\{\lambda_k\})$ és $|b_k| \leqq |a_k|$ $(k = 1, 2, \ldots)$, akkor $\{b_k\}_1^\infty \in M(\{\lambda_k\})$.

Bármely $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatra $\|\{a_k\}; \{\lambda_k\}\|_1 \leqq A^* \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^2 \lambda_k \right)^{1/2}$, ahol A^* pozitív, az $\{a_k\}_1^\infty$ sorozattól független állandó. Ha $\{\lambda_k\}_1^\infty$ alulról konkáv és $\lambda_k = O(\log^2 k)$, akkor a $\|\{a_k\}; \{\lambda_k\}\|_1 \geqq B^* \left(\sum_{k=1}^\infty a_k^2 \lambda_k \right)^{1/2}$ alsó becslés is érvényes, minden olyan $\{a_k\}_1^\infty$ sorozatra, amelyre a $\sum_{k=n_l}^{n_{l+1}-1} a_k^2 \leqq C a_{n_{l+1}-1}^2$ $(l = 0, 1, \ldots)$ egyenlőtlenség egy C pozitív állandóval teljesül, ahol $\{n_k\}_1^\infty$ az $n_0 = 1$, $\lambda_{n_{l+1}} > 2\lambda_{n_l+1}$, $\lambda_{n_{l+1}-1} \leqq 2\lambda_{n_l+1}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ feltételekkel meghatározott indexsorozat és B^* csak a C-től függő pozitív állandó.

Az utóbbi becslések tartalmazzák S. KACZMARZ [1] ismert tételét, valamint — részben — egy korábbi eredményemet [11]. A felső becslésből adódik ugyanis: *ha $\sum a_k^2 \lambda_k < \infty$, akkor az (1) sor bármely, a (4) feltételnek eleget tevő ortonormált rendszer esetén majdnem mindenütt konvergál.* Az alsó becslésből viszont — az előzők szerint — következik, hogy a $\sum a_k^2 w(k) < \infty$ $\big(w(k) > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $w_k = o(\lambda_k)\big)$ feltétel teljesüléséből általában nem következik az $\{a_k\}_1^\infty \in M(\{\lambda_k\})$ reláció.

A következő nyitott kérdéseket említem meg. Hogyan függ $\|\{a_k\}; \{\lambda_k\}\|_1$ adott $\{\lambda_k\}_1^\infty$ sorozat esetén az a_k együtthatóktól? Hogyan jellemezhető $M(\{\lambda_k\})$ $\lambda_k = O(1)$ esetén? Képezhető-e a norma a $p = 1$ kitevő helyett tetszőleges $1 < p \leqq 2$ kitevővel?

3. Ortogonális sorok feltétel nélküli konvergenciája. Tekintettel arra, hogy általános ortogonális sorok esetén a tagoknak nincs kitüntetett sorrendje, így természetszerűen felmerül az a kérdés, hogy milyen, az a_k együtthatókra tett feltételek mellett biztosítható az (1) sor bármely átrendezésben való konvergenciája. Jelöljük M_u-val az olyan $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatok összességét, amelyekre az (1) sor bármely $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer esetén bármely átrendezésben majdnem mindenütt konvergál, más szóval majdnem mindenütt feltétel nélkül konvergál. (A divergencia-pontok halmaza függ a $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ rendszertől és az (1) sor tagjainak a sorrendjétől is.)

Legyen

$$\|\{a_k\}\|_u = \lim_{N\to\infty}\left(\sup_P I_2^{1/2}(\infty; a_1, \dots, a_N)\right),$$

ahol a szuprémum az $1, \dots, N$ számok minden permutációjára veendő. Egy $\{a_k\}_1^\infty \in l^2$ sorozatra $\{a_k^*\}_1^\infty$ jelölje az $\{a_k\}_1^\infty$ sorozat valamelyik, abszolút értékben monoton nem-növő átrendezését, és legyen

$$A = \begin{cases} |a_1^*| + |a_2^*| + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\left\{\sum\limits_{k=2^{2^\nu}+1}^{2^{2^{\nu+1}}} (a_k^*)^2 \log^2 k\right\}^{1/2}, & \text{ha } \{a_k\}_1^\infty \in l^2, \\ \infty & \text{különben.} \end{cases}$$

Bebizonyíthatók a következő állítások [13]:

$\{a_k\}_1^\infty \in M_u$ akkor és csakis akkor, ha $\|\{a_k\}\|_u < \infty$; M_u az $\|\{a_k\}\|_u$ normával szeparábilis Banach-tér.

Ha $\{a_k\}_1^\infty \notin M_u$, akkor van olyan $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer, hogy az (1) sor valamilyen átrendezésben majdnem mindenütt divergál.

Bármely $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatra $C_1 A \leqq \|\{a_k\}\|_u \leqq C_2 A$, ahol C_1, C_2 pozitív, az $\{a_k\}_1^\infty$ sorozattól független állandók.

Az utolsó állítással az általános ortogonális sorok feltétel nélküli konvergenciájának a kérdése lényegében megoldottnak tekinthető.

A felső becslésből könnyen következik W. ORLICZ [7] korábbi tétele, amely a következőképpen fogalmazható: *legyen $\{n_k\}_1^\infty$ monoton növő indexsorozat, amelyre $\log n_{k+1} \leqq C \log n_k$ pozitív C állandóval teljesül, és $\{\lambda(k)\}_1^\infty$ pozitív, monoton növő számsorozat, amelyre $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_k)} < \infty$. Ha $\sum a_k^2 (\log k)^2 \lambda(k) < \infty$, akkor az (1) sor bármely $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer esetén majdnem mindenütt feltétel nélkül konvergál.*

Ezeknek az állításoknak megemlítem egy következményét, amelyet először más módon P. L. ULJANOV [20] bizonyított be, és amely rámutat arra, hogy az ortogonális sorok és a számsorok a konvergencia szempontjából lényegesen különböző módon viselkednek. Megmutatható ugyanis [13], hogy

van olyan ortogonális sor, amelynek bármely részsora majdnem mindenütt konvergál, mégis a sor valamilyen átrendezésben majdnem mindenütt divergál.

4. Ortogonális sorok szummációja. Az ortogonális sorok szummációjának a kérdése könnyen visszavezethető a konvergencia kérdésére legalább is olyan szummációs eljárások esetén, amelyeknél a sor szummálhatósága ekvivalens bizonyos részletösszegeinek konvergenciájával.

Legyen T egy permanens, lineáris szummációs eljárás. Tegyük fel, hogy az (1) sor majdnem mindenütt való T-szummálhatósága bármely $\{a_k\}$ $(\in l^2)$ együtthatósorozat és bármely $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer esetén ekvivalens az n_k-adik részletösszegek majnem mindenütt való konvergenciájával, ahol $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$ a következőkben rögzített indexsorozat.

Jelöljük M^*-gal az olyan $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatok osztályát, amelyekre az (1) sor bármely $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer esetén majdnem mindenütt T-szummálható.

Bebizonyíthatók a következő állítások [16]:

$\{a_k\}_1^\infty \in M^*$ *akkor és csakis akkor, ha* $\|\{a_k\}\|^* = \|\{A_l(\{n_k\}); \infty\|_2 < \infty$, *ahol* $A_{l+1}(\{n_k\}) = \left(\sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} a_k^2\right)^{1/2}$ $(l=0, 1, \dots)$; M^* *az* $\|\{a_k\}\|^*$ *normában szeparábilis Banach-tér.*

Ha $\{a_k\}_1^\infty \notin M^*$, *akkor van olyan* $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *ortonormált rendszer, hogy az* (1) *sor majnem mindenütt nem T-szummálható.*

S. Kaczmarz [12] és A. N. Kolmogorov [3] tételei szerint az (1) sor majnem mindenütt való $(C, 1)$-szummálhatósága bármely $\{a_k\}_1^\infty (\in l^2)$ együtthatósorozatra és bármely $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszerre ekvivalens a 2^n-edik részletösszegeinek majdnem mindenütt való konvergenciájával.

Így az előzőek szerint az (1) sor bármely $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer esetén majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható, ha $\|\{A_l^*\}; \infty\|_2 < \infty$, ahol $A_{l+1}^* = \left(\sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} a_k^2\right)^{1/2}$ $(l=0, 1, \dots)$; ha viszont $\|\{A_l^*\}; \infty\|_2 = \infty$, akkor van olyan $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ortonormált rendszer, amelyre az (1) sor majdnem mindenütt nem $(C, 1)$-szummálható.

Figyelembe véve az $\|\{A_l^*\}; \infty\|_2$ normára vonatkozó becsléseket, könnyen adódik S. Kaczmarz [2] és D. E. Mensov [6] jól ismert tétele, valamint egyik korábbi eredményem [10]: *Ha* $\sum_{k=3}^\infty a_k^2(\log\log k)^2 < \infty$, *akkor az* (1) *ortogonális sor bármely* $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *ortonormált rendszer esetén majdnem mindenütt* $(C, 1)$*-szummálható. Ha* $\sum_{k=3}^\infty a_k^2(\log\log k)^2 = \infty$, $|a_k| = \frac{1}{\sqrt{k\lambda_k}}$ $(0<\lambda_k \leqq \lambda_{k+1};\ k=1, 2, \dots)$, *akkor van olyan* $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *ortonormált rendszer, hogy az* (1) *sor majdnem mindenütt nem* $(C, 1)$*-szummálható.*

Megemlítem még, hogy hasonló módon tárgyalható az ún. nagyon-erős szummáció kérdése is. Azt mondjuk, hogy az (1) sor majdnem mindenütt másodrendben nagyon erősen $(C, 1)$-szummálható, ha van olyan négyzetesen integrálható $f(x)$ függvény, hogy bármely szigorúan növő $\{\nu_k\}$ indexsorozatra $\sum_{k=1}^{\infty} (s_{\nu_k}(x) - f(x))^2 = o(N)$ majdnem mindenütt teljesül.

Jelölje M_s az olyan $\{a_k\}_1^\infty$ együtthatósorozatok összességét, amelyekre az (1) sor majdnem mindenütt másodrendben nagyon erősen $(C, 1)$-szummálható. Legyen továbbá $\|\{a_k\}\|_s = \sup \|\{A_l^*(\{\nu_k\}); \infty\|_2$, ahol $A_{l+1}^*(\{\nu_k\}) = \left(\sum_{k=\nu_{2^l}+1}^{\nu_{2^{l+1}}-1} a_k^2\right)^{1/2}$ $(l=0, 1, \dots)$ és a szuprémum az összes $\{\nu_k\}_2^\infty$ $(0=)\nu_2 < \dots < \nu_k < \dots$ indexsorozatra veendő.

Megmutatható [16], hogy

$\{a_k\}_1^\infty \in M_s$ *akkor és csakis akkor, ha* $\|\{a_k\}\|_s < \infty$; M_s *az* $\|\{a_k\}\|_s$ *normával szeparábilis Banach-tér.*

A fentiek szerint ebből könnyen következik egy korábbi eredményem [12]: *Ha* $\sum_{k=3}^\infty a_k^2(\log\log k)^2 < \infty$, *akkor* $\{a_k\}_1^\infty \in M_s$; *ha* $|a_k| = \frac{1}{\sqrt{k\lambda_k}}$ $(0 < \lambda_k \leqq \lambda_{k+1};$

$k=1, 2, \ldots$) *és* $\sum_{k=3}^{\infty} a_k^2(\log\log k)^2=\infty$, *akkor van olyan* $\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *ortonormált rendszer hogy az* (1) *sor majdnem mindenütt másodrendben, nagyon erősen nem* (C, 1)*-szummálható* (mivel majdnem mindenütt nem (C, 1)-szummálható).

Hasonló módon tárgyalhatók bizonyos más típusú nagyon erős szummálhatóság kérdései is.

IRODALOM

[1] S. Kaczmarz, Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), 87—121.

[2] ——— Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105.

[3] A. N. Kolmogoroff, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96—97.

[4] A. N. Kolmogoroff—D. E. Menchoff, Sur la convergence des séries orthogonales, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 432—441.

[5] D. E. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105.

[6] ——— Sur les séries de fonctions orthogonales. Deuxième partie, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56—108.

[7] W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bulletin Intern. Acad. Sci. Polonaise Cracovie*, (1927), 81—115.

[8] H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

[9] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen, I., *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.

[10] ——— Über die orthogonalen Funktionen, II., (Summation), *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 149—168.

[11] ——— Über die orthogonalen Funktionen V (genaue Weylsche Multiplikatorfolgen), *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 1—13.

[12] ——— Über die orthogonalen Funktionen. VI (Eine genaue Bedingung für die starke Summation), *Acta Sci. Math.*, **20** (1959), 14—18.

[13] ——— Über die orthogonalen Funktionen. X (Unbedingte Konvergenz), *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 185—221.

[14] ——— Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publicationes Math.*, **8** (1961), 291—307.

[15] ——— Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 139—151.

[16] ——— Über die Konvergenz der Orthogonalreihen II., *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 219—232.

[17] ——— Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III., *Publicationes Math.*, **12** (1965), 127—157.

[18] ——— Bemerkung zur Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 249—251.

[19] ——— Beitrag zu der Arbeit „Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, III.", *Publicationes Math.*, **13** (1966), 307—311.

[20] П. Л. Улянов, Расходяшиеся ряды фурье класса L^p ($p\geqq 2$), *Доклады акад. наук СССР* **137** (1961), 786—789.

(Beérkezett: 1966. V. 12.)

MAGNETOHIDRODINAMIKAI HULLÁMOK KELETKEZÉSE NAPFOLTOKBAN

Írta: MARIK MIKLÓS*

Jelen közleményben vázlatosan összefoglaljuk a Nap konvekciós zónájára vonatkozó ismereteket, majd megvizsgáljuk, hogy a konvektív zóna milyen mechanizmus segítségével képes mágneses erővonalcsöveket a Nap felszíne fölé szállítani. Megvizsgáljuk, hogy az erővonalcső milyen hatással lesz a konvekcióra és kiszámítjuk a napfoltokban keletkező *Alfvén*-hullámok energiaáramát.

1. A Nap konvekciós zónája

Mint ismeretes, a Nap felszíne alatt mintegy 100 000 km vastagságban konvektív zóna helyezkedik el, mivel ebben a tartományban teljesülnek a konvektív instabilitás feltételei.

Lépjen fel a Nap belsejében valamilyen m tömegelem ΔT hőmérsékletfluktuációja. Nyomási egyensúly esetében ΔT előjelétől függően a tömegelem kitágul, vagy összehúzódik, aminek következtében sűrűsége is el fog térni környezetének sűrűségétől, tehát fel- (vagy lefelé-) hajtó erő lép fel. Feltételezve, hogy a tömegelem adiabatikusan el van zárva környezetétől, a felhajtó erő következtében való mozgása miatt hőmérséklete, mint a Nap középpontjától mért távolság, illetve mint a nyomás függvénye változni fog. Az ilyen módon számolt

$$\nabla_a = \left(\left|\frac{d \log T}{d \log P}\right|\right)_a$$

logaritmikus kifejezést adiabatikus hőmérsékletgradiensnek nevezzük.

Ha pusztán sugárzási energiatranszportot feltételezünk, akkor az ilyen módon képzett

$$\nabla_s = \left(\left|\frac{d \log T}{d \log P}\right|\right)_s$$

logaritmikus kifejezést sugárzási hőmérsékletgradiensnek nevezzük.

Könnyen látható [1], hogy a konvektív instabilitás feltétele:

$$\nabla_a < \nabla_s .$$

* Eötvös Loránd Tudományegyetem, Csillagászati Tanszék

Hosszabb számítás után nyerhetjük [2], hogy:

$$\nabla_s = \left(\left|\frac{d\log T}{d\log P}\right|\right)_s = \frac{1}{4}\frac{\bar{K}\vartheta(r)}{A(r)},$$

ahol $\vartheta(r) = \frac{L(r)}{M(r)}$, $L(r)$ a Nap középpontjával megegyező középpontú, r sugarú gömb felületén kiáramló sugárzási energia, $M(r)$ az ebben a gömbben levő tömeg, továbbá $\bar{K}$ a *Rosseland*-féle átlagos opacitás,

$$A(r) = \frac{1}{P(r)}\int_0^{P(r)} \bar{K}\vartheta(r)\, dP.$$

A Nap felületéhez közel, ahol már nincs energiaprodukció, $\bar{K}\vartheta(r)$ közelítőleg állandónak vehető, tehát:

$$\nabla_s = \frac{1}{4}\frac{\bar{K}\vartheta(r)}{A(r)} \approx \frac{1}{4}.$$

Az adiabatikus állapotváltozás egyenlete: $P = K\varrho^{\Gamma}$, ahol P az össznyomás, ϱ a sűrűség, és Γ az effektív fajhőhányados. Tisztán hidrogén gáz esetében [3],

$$\nabla_a = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} = \frac{2 + x(1-x)\left[\frac{5}{2} + \frac{\chi}{kT}\right]}{5 + x(1-x)\left[\frac{5}{2} + \frac{\chi}{kT}\right]^2},$$

ahol x a hidrogéngáz ionizációs foka, χ az ionizációs potenciál, k a Bolzmann-féle konstans. Ha a gáz neutrális, vagy teljesen ionizált, akkor $\Gamma = \frac{5}{3}$, ami megegyezik az ideális egyatomos gázok fajhőhányadosával és $\nabla_a = \frac{2}{5}$, tehát a közeg ekkor

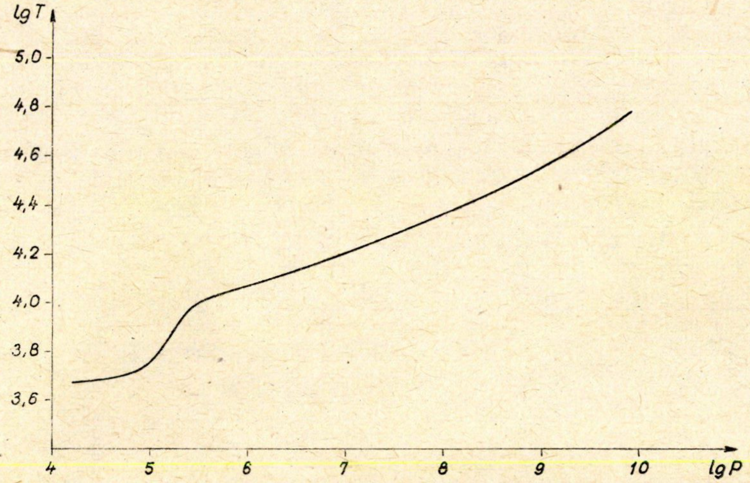
$$\nabla_s \approx \frac{1}{4} < \frac{2}{5} = \nabla_a,$$

miatt konvektíve stabilis. Részleges ionizáció esetében $(0 < x < 1)$, azonban ∇_a a fotoszféra alatt $\frac{1}{4}$ alá csökken, tehát a konvektív áramlások megindulnak. (Természetesen a mélyebb rétegekben tekintetbe kell venni a héliumgáz részleges ionizációjából adódó hatást is.)

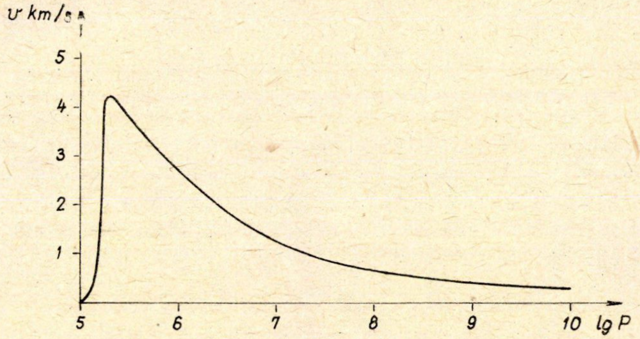
A konvekció mechanizmusára ma a legjobb (de korántsem kielégítő) elképzelés PRANDTLtól származik [4]. Szerinte a konvektív áramlás celláinak karakterisztikus mérete nagyságrendben a

$$H = \frac{RT}{\mu g}$$

„ekvivalens magassággal" egyenlő, ahol R a gázállandó, μ az átlagos molekulasúly és g a gravitációs gyorsulás. A konvekció a *Prandtl*-féle keveredési teória szerint a következőképpen zajlik le: Kialakulnak $l \approx H$ nagyságú konvektív turbulenciaelemek, amelyek $l \approx H$ hosszúságú út megtétele után összekeverednek környezetükkel és ott újabb hőmérsékletfluktuációkat hoznak létre, amelyek újabb (a helynek megfelelő karakterisztikus méretű) turbulenciaelemek keletkezéséhez vezetnek.



1. ábra. A T hőmérséklet függése a P nyomástól a Nap konvekciós zónájában



2. ábra. A konvektív áramlás sebessége mint a nyomás függvénye a Nap konvektív zónájában

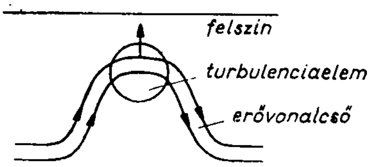
A *Prandtl*-féle elmélet alapján lehetséges a konvektív zóna modelljének numerikus módszerekkel történő kiszámítása. [5], [6]. Az 1. ábrán feltüntettük [6] alapján log T függését log P-től a Nap konvektív zónájában. Ezen grafikon segítségével könnyen kiszámíthatjuk a többi állapothatározót (pl. ϱ-t is) mint a P nyomás függvényét, valamint megadhatjuk a konvektív áramlás v sebességét is (2. ábra).

2. A konvekció hatása a mágneses erővonalcsövekre

A Nap felületén gyakran megjelennek sötét foltok, amelyek hőmérséklete 1000—1500 °K-nel alacsonyabb a környezet hőmérsékleténél. Ezen foltok vertikális irányú mágneses térrel rendelkeznek, amelyek térerőssége elérheti az 1000—3000 gauss-t. A megfigyelések arra utalnak, hogy a foltok mágneses terének kialakulásánál nem a lokális terek összesűrűsödési folyamata játszik szerepet, hanem valamilyen effektus már „kész" erővonalcsöveket visz a Nap felszíne fölé. Kézenfekvő azt feltételezni, hogy a konvektív turbulencia-elemek ragadják magukkal az erővonalakat, hiszen a Nap felületéhez közeli tartományban a nagy vezetőképesség ($\sigma \approx 10^{10}$ cgs) miatt érvényesek a mágneses tér befagyásának feltételei.

Ahhoz, hogy a mágneses erővonalcsöveket a konvekció elragadhassa, nyilván a konvektív mozgás kinetikus energiasűrűségének nagyobbnak kell lennie, mint a mágneses tér energiasűrűsége. A kinetikus energiasűrűség a konvektív zóna alsó tartományában (mintegy 100 000 km mélységben) a legnagyobb, itt:

$$\frac{\varrho v_k^2}{2} \approx 5 \cdot 10^5 \, \mathrm{g\,cm^{-1}\,sec^{-2}}.$$



3. ábra

Ahhoz, hogy az elragadás megtörténhessék, szükséges, hogy:

$$\frac{H^2}{8\pi} < 5 \cdot 10^5$$

legyen; ebből pedig

$$H < 3{,}5 \cdot 10^3 \text{ gauss}.$$

Utóbbi eredményünk összhangban van a megfigyelésekkel, hiszen 3500 gaussnál erősebb térerősséggel rendelkező foltokat a Napon nem lehet megfigyelni.

Az imént vázolt elgondolás keretein belül maradva, a konvektív turbulenciaelemek feltolhatják az erővonalcsöveket (amelyeknek létezését a Nap belsejében feltételezzük) a Nap felülete fölé és ekkor bipoláris folt keletkezik. Az erővonalcső átszeli a konvektív zónát. Ott, ahol a konvektív áramlások kinetikus energiasűrűsége nagyobb a mágneses tér energiasűrűségénél, nyilván a konvekció továbbra is magával ragadja az erővonalcsöveket és bizonyos idő után minden bizonnyal ugyanez az effektus viszi ismét az erővonalcsövet a Nap felszíne alá. A konvektív zóna alsó tartományaiban a turbulenciaelemek mozgásának karakterisztikus ideje néhányszor 10 nap, ami jó egyezésben van a napfoltok megfigyelt élettartamával.

3. Magnetohidrodinamikai hullámok keletkezése napfoltokban

Az előző két fejezetben vázolt elképzelés szerint a napfoltokat a Nap felülete fölé kitüremlő mágneses erővonalcsövek hozzák létre. Egy napfolt modellje tehát első közelítésben úgy vehető fel, mint egy mágneses erővonalcső, amely merőleges a Nap felületére és amelyben a mágneses tér erőssége állandó. (A valóságban a foltok mágneses tere a középpontból a szélek felé haladva csökken). Modellünkben a napfolton belül nyilván a mágneses tér energiasűrűsége, $\frac{H^2}{8\pi}$ is állandó. A konvektív áramlások $\frac{\varrho v_k^2}{2}$ kinetikus energiasűrűsége viszont változik, pontosabban a Nap felületéhez közeledve csökken. Az erővonalcsőben ott, ahol $\frac{\varrho v_k^2}{2} > \frac{H^2}{8\pi}$, a mágneses tér nem zavarja a konvekciót és a konvektív turbulenciaelemek magukkal ragadják az erővonalcsővet vagy az erővonalakat, míg $\frac{\varrho v_k^2}{2} < \frac{H^2}{8\pi}$ esetében a mágneses tér befagyasztja a konvektív áramlást az erővonalcsövön belül. A konvekció leállásának helye tehát a $\frac{\varrho v_k^2}{2} \approx \frac{H^2}{8\pi}$-nek megfelelő hely környezetében levő „kritikus tartomány". A következő táblázatban közöljük, hogy különböző mágneses térerősségek mellett milyen P_{krit} nyomásértékeknél áll le a konvekció és mekkora itt a konvektív áramlás $\frac{\varrho v_k^2}{2}$ kinetikus energiasűrűsége. A táblázatban feltüntettük a P_{krit} nyomásértékeknek megfelelő geometriai mélységet is.

H (gauss)	lg P_{krit} (bar)	$\frac{\varrho v_k^2}{2}\left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}\right)$	h (km)
100	5,15	$3{,}7\cdot 10^2$	500
500	5,25	$2{,}7\cdot 10^4$	700
1000	5,30	$4{,}0\cdot 10^4$	800
1500	7,40	$8{,}5\cdot 10^4$	3500
2000	8,10	$1{,}5\cdot 10^5$	5000
2500	8,60	$2{,}8\cdot 10^5$	6200
3000	9,00	$3{,}5\cdot 10^5$	7500

A táblázatból látható, hogy a folt nem mély képződmény (ha a foltot azonosítjuk azzal a tartománnyal, amelyben már nincsen konvekció), hiszen a megfigyelések szerint a folt nagysága durván arányos a benne levő mágneses térerősséggel és a legnagyobb foltok átmérője mintegy 10 000 km.

Térjünk most rá a „kritikus zóna" vizsgálatára, amelyben $\frac{\varrho v_k^2}{2} \approx \frac{H^2}{8\pi}$. Ebben a tartományban az *Alfvén*-féle magnetohidrodinamikai hullámok terjedési sebességére:

$$V_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi\varrho}} \approx v_k.$$

KULSRUD alapvető munkája szerint [7], ebben az esetben a mozgó konvektív turbulenciaelemek energiája magnetohidrodinamikai hullámokba megy át. KULSRUD ki is számítja a keletkező megnetohidrodinamikai zaj különböző komponenseinek energiaáramát. A mi esetünkben a *Kulsrud*-féle módszer nem alkalmazható, mert ismerni kellene a sebességteret, amit a mágneses tér jelenléte éppen a „kritikus zónában" módosít. KULSRUD más feladat megoldása kapcsán egy olyan réteget tekint effektívnek a magnetohidrodinamikai zaj keletkezését illetően, amelynek vastagsága megegyezik a helyi „ekvivalens magassággal". Ez az eljárás azonban szerintünk nincsen kellőképpen megindokolva, bár meg kell jegyezni, hogy a KULSRUD módszerével számított energiaáram az általunk kiszámított példákban (1000 és 2000 gauss esetében) nagyságrendileg megegyezik a későbbiek folyamán általunk más úton nyert értékekkel.

Mivel a konvekció a kritikus tartományban leáll, a konvektív turbulencia-elemek $\frac{\varrho v_k^2}{2}$ kinetikus energiája átmegy magnetohidrodinamikai hullámok energiájába. OSTERBROCK [8] szerint elég erős mágneses térerősség esetében a magnetohidrodinamikai hullámok három ismeretes módusa közül az *Alfvén*-féle hullámok fognak dominálni. A továbbiakban ezért pusztán *Alfvén*-féle hullámokra fogunk szorítkozni, [10]. A kritikus zónában keletkező *Alfvén*-hullámok energiaáram-sűrűsége $\varrho V^2 \cdot V_A$, ahol V_A az *Alfvén*-féle hullámok terjedési sebessége, V pedig (legalábbis nagyságrendben) meg kell egyezzék a konvektív mozgás v_k sebességével a kritikus tartományban.

Az *Alfvén*-féle hullámok csillapodása a Joule-veszteség és a zérustól különböző viszkozitás miatt — mint könnyen látható — elhanyagolható. Fellép azonban az *Alfvén*-féle hullámok reflexiója. [9] szerint a reflexió akkor lép fel folytonosan változó sűrűségű közegben, ha

$$\lambda_A > H,$$

ahol λ_A az *Alfvén*-féle hullámok hullámhossza és H ismét az ekvivalens magasság. A kritikus tartományban nyilván $\lambda_A \approx H$. Mivel

$$\lambda_A \sim \frac{V_A}{v} \sim \frac{H}{v\sqrt{4\pi\varrho}} \sim \varrho^{-1/2},$$

és ϱ r növekedésével csökken, tehát λ_A a kritikus tartomány felől a Nap felülete felé közeledve növekedik, H viszont csökken r növekedésével, amiből a $\lambda_A > H$ feltétel teljesül és az *Alfvén*-féle hullámok reflexióját tekintetbe kell vennünk. [9] szerint a visszavert és a tört *Alfvén*-hullámok energiaáramának aránya:

$$\frac{(\sqrt{\varrho_2} - \sqrt{\varrho_1})^2}{4\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}},$$

ahol ϱ_1 és ϱ_2 a közeg sűrűsége egy λ_A vastagságú réteg két oldalán. A kritikus tartomány fölött az előbb mondottak miatt $\varrho_2 \gg \varrho_1$. Ekkor

$$\frac{F_{\text{tört}}}{F_{\text{vvert}}} = \frac{\varrho_1 V_1^2 V_{A_1}}{\varrho_2 V_2^2 V_{A_2}} = \frac{\varrho_1^{1/2} V_1^2}{\varrho_2^{1/2} V_2^2} = \frac{4\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}{(\sqrt{\varrho_2} - \sqrt{\varrho_1})^2} \approx \frac{\varrho_1^{1/2}}{\varrho_2^{1/2}},$$

amiből $V_1 \approx V_2$. Így az *Alfvén*-féle hullámok energiasűrűsége:

$$F = \varrho V^2 V_A = \varrho V^2 \frac{H}{\sqrt{4\pi\varrho}} \approx \text{konst} \cdot \varrho^{+1/2}.$$

A kritikus tartománytól a Nap felületéig az *Alfvén*-féle hullámok energiájának csak

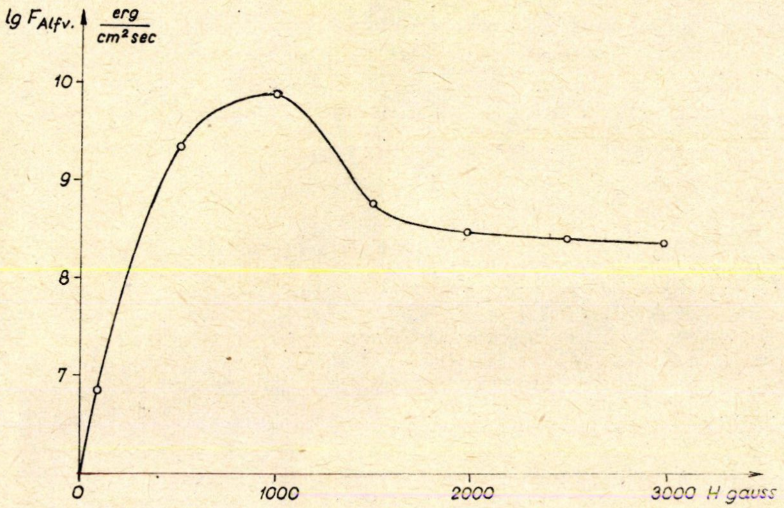
$$\frac{F_{\text{fel}}}{F_0} = \left(\frac{\varrho_{\text{fel}}}{\varrho_0}\right)^{1/2}$$

hányada érkezik, ahol ϱ_{fel} ill. F_{fel} a felületi, ϱ_0 ill. F_0 a kritikus tartományban levő sűrűséget, illetve energiaáramot jelöli.

A foltokban a Nap felületének megfelelő szintig kiérkező *Alfvén*-féle hullámok energiaárama tehát:

$$F_{fel} = V_A \frac{\varrho_0 v_k^2}{2} \left(\frac{\varrho_{fel}}{\varrho_0} \right)^{1/2} = \frac{v_k^2}{2} (\varrho_0 \varrho_{fel})^{1/2} V_A \ \text{erg cm}^{-2} \text{sec}^{-1}.$$

ϱ_0 és v_k értékét a táblázat és a 2. ábra segítségével állapíthatjuk meg. A Nap felületi sűrűségét $\varrho_{fel} = 8{,}7 \cdot 10^{-8}$-nak vesszük. A napfoltból kiáramló *Alfvén*-féle hullámok F_A energiaáramsűrűségét mint a mágneses térerősség függvényét a 4. ábrán tüntettük fel.



4. ábra. A napfoltokból kiáramló Alfvén-féle hullámok energiaárama mint a mágneses térerősség függvénye

4. Az eredmények értékelése

A 3. ábrán láthatjuk, hogy az *Alfvén*-féle hullámok energiaárama 1000 gauss térerősség esetében maximummal rendelkezik, majd kisebb lecsökkenés után közelítőleg állandó lesz. Ha — mint feltételezni lehet — a napfoltok fölött lezajló jelenségek kapcsolatban állanak a kiáramló magnetohidrodinamikai hullámokkal, akkor a napfolt feletti rétegekben az aktivitásnak mintegy 1000 gauss térerősséggel rendelkező foltok esetén kell maximálisnak lennie. A kiáramló magnetohidrodinamikai energia 1500 és 3000 gauss között állandó, tehát nem függ a mágneses térerősségtől. A Nap teljes

$$F = 6{,}35 \cdot 10^{10} \ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}$$

energiaáramából az *Alfvén*-hullámok által elvitt energiaáram levonása után fennmaradó energiaáramnak nyilván sugárzás segítségével kell transzportálódnia a hideg külső tér felé. 1000 gauss térerősség esetében a fennmaradó energiaáramnak megfelelő effektív hőmérséklet mintegy 200 °K-el ad alacsonyabb hőmérsékletet a mágneses tértől nem háborított területek effektív hőmérsékletéhez képest. Ez lényegesen kisebb érték, mint amit a megfigyelések mutatnak. Ha viszont tekintetbe vesszük, hogy a konvekció leállásának helyén a ∇_s sugárzási hőmérsékletgradiens lényegesen nagyobb, mint a napfolton kívüli közeg hasonló módon képzett hőmérsékletgradiense, akkor a foltban a Nap felületével azonos szinten levő rétegben 1000 gauss-os térerősség esetén pontosan a megfigyelésekkel megegyező 1500 °K-es hőmérsékletkülönbséget kapjuk. 2000 gauss-nál nagyobb térerősséggel rendelkező foltok esetében ez a hőmérsékletkülönbség még nagyobbnak adódik, azonban ebben az esetben már nem hagyható figyelmen kívül az a „fűtési effektus", amelyet a folt oldalról sugárzás útján kap.

Meg kell jegyeznünk, hogy dolgozatunkban több helyen durva közelítéseket alkalmaztunk, tehát a kapott eredmények csak nagyságrendben lehetnek helyesek.

Végül köszönetet szeretnék mondani Sz. B. Pikelner professzornak, a moszkvai *Sternberg Intézet* munkatársának, értékes megjegyzéseiért.

IRODALOM

[1] K. Schwarzschild: Über das gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. *Göttinger Nachr.* 1906.
[2] Detre László: A csillagok stabilitása és pulzációja, *Csillagászati Lapok* III. (1940).
[3] Unsöld: *Physik der Sternatmosphären,* 1955. 228. o.
[4] Prandtl: *Strömungslehre,* vagy
Biermann: Über den Typus der Konvektion in Instabilitätszonen. Z. *Astrophysik* **22.** 65. (1942).
[5] Vitense: Der Wasserstoffkonvektionszone der Sonne. *Z. Astrophysik* **32.** 135. (1953).
[6] Marik: *A Nap hidrogén konvekciós zónája,* Disszertáció. 1961.
[7] Kulsrud: Effect of Magnetic Fields on Generation of Noiseby Isotropic Turbulence. *Ap. J.* **121.** 461. (1955).
[8] Osterbrock: The Heating of the Solar Chromosphere, Plages, and Corona by Magnetohydrodynamic Waves. *Ap. J.* **134.** 347 (1961).
[9] С. Б. Пикельнер: Основы космической электродинамики. 1961. 87. o.
[10] Szabó János: Magnetohidrodinamikai lökéshullámok, *Magyar Fizikai Folyóirat* IX. 35. (1961).

(Beérkezett: 1966. VI. 15.)

THE GENERATION OF MAGNETOHYDRODYNAMIC WAVES IN SUNSPOTS

by

M. Marik

Summary

The depth of the layer at which the magnetic field appreciably influences convection is determined from the condition of equality of magnetic energy of the field beneath the spot and convective kinetic energy in accordance with the Vitense model. The flux of emitted Alfvén wawes is estimated, assuming that in this zone the wave amplitude is equal to the convective velocity. The Alfven wave flux in the spots is higher by one order than those for the flux from ordinary active regions. Therfore the chromosphere above the spot scould have other properties.

VÉLETLEN ELEMSZÁMÚ RENDEZETT MINTA MAXIMÁLIS TAGJÁNAK HATÁRELOSZLÁSÁRÓL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF

Tekintsünk független, azonos eloszlású valószínűségi változókból álló $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sorozatot és vezessük be a következő jelöléseket:

$$W_n = \operatorname{Max}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n); \; W_{k,n} = \operatorname{Max}(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n), \qquad (k<n).$$

B. V. GNYEGYENKOtól származik [1] a W_n sorozat $(n=1, 2, \ldots)$ határeloszlására vonatkozó következő állítás:

Ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ számsorozatok olyanok, hogy $a_n > 0$ és az

$$\eta_n = \frac{W_n - b_n}{a_n}$$

talószínűségi változćkból álló sorozatnak van határeloszlása, akkor ez csak a következő három eloszlásfüggvény által meghatározott eloszlástípus valamelyikébe tartozhat:[1]

$$1^\circ \qquad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$2^\circ \qquad \psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha), & \text{ha} \quad x \leqq 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x > 0, \end{cases}$$

$$3^\circ \qquad \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}),$$

ahol $\alpha > 0$ szám.

GNYEGYENKO [1] dolgozatában megadja annak szükséges és elegendő feltételét‘ hogy a ξ_n valószínűségi változók $F(x)$ eleoszlásfüggvénye mikor tartozik az 1°, 2° és 3° függvényekkel jellemzett eloszlástípusok vonzási tartományába.

RÉNYI [2], BARNDORFF—NIELSEN [3] és RICHTER [4] dolgozatának eredményei rávilágítanak arra, hogy GNYEGYENKO tételét erősebben is meg lehet fogalmazni. Nevezetesen, ha az η_n sorozatnak van határeloszlása, akkor erősen keverő is, azaz η_n határeloszlása tetszőleges P^* valószínűségi mértékre nézve ugyanaz, mint a P valószínűségi mérték esetén, hacsak P^* a P mértékre nézve abszolút folytonos. Az erős keverés fogalma RÉNYI ALFRÉDtól származik. BARNDORFF—NIELSEN [3] az η_n sorozat erősen keverő voltát nem mondja ki explicite, dolgozatának céljai érdekében egy eltérő jellegű lemmát használ, amelyből e tulajdonság levezethető lenne. W. RICHTER ezt a tulajdonságot bebizonyítja. Bizonyításának alapgondolata az, hogy a W_n sorozat ergodikus *Markov*-lánc. Dolgozatunk itt kapcsolódik a fenti

[1] Az $F(x)$ és $G(x)$ eloszlásfüggvények egyazon típusba tartoznak, ha bizonyos $a>0$ és b állandók mellett minden x esetén fennáll az $F(x) = G(ax+b)$ reláció.

dolgozatokhoz. Az η_n sorozat erősen keverő voltát direkt úton, igen egyszerűen szeretnénk bizonyítani. Dolgozatunk másik célja, hogy élesítse a [3] dolgozat következő eredményét:

Legyen ν_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat és tegyük fel, hogy ν_n/n sztochasztikusan a ν pozitív valószínűségi változóhoz konvergál. $(P(\nu>0)=1)$. Jelöljön továbbá $G(x)$ az 1°, 2° és 3° függvények típusába tartozó eloszlásfüggvényt. Ekkor a következő három állítás ekvivalens:

a) $$\lim_{n\to+\infty} P(\eta_n < x) = G(x),$$

b) $$\lim_{n\to+\infty} P(\eta_{\nu_n} < x) = G(x),$$

c) $$\lim_{n\to+\infty} P(W_{\nu_n} < a_n x + b_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x)]^y \, dP(\nu < y)$$

és ezek a limeszrelációk a $G(x)$ minden x folytonossági pontjában fennállnak.

Ez az eredmény megfogalmazható egyetlen állítás formájában, sőt ennél általánosabb tény is kimondható, ha használjuk a stabilitás fogalmát, amely ugyancsak Rényi Alfréd nevéhez fűződik. Nevezetesen, megmutatható, hogy ha az η_n sorozatnak van határeloszlása, akkor a

$$(W_{\nu_n} - b_{\mu_n})/a_{\mu_n}$$

sorozat stabilis. E sorozatban jelentsen μ_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozatot, amelyre teljesül, hogy μ_n/n sztochasztikusan a pozitív μ valószínűségi változóhoz konvergál. E dolgozatban ezt az eredményt szeretnénk bebizonyítani. Rámutatunk arra is, hogy ez a megfogalmazás általánosabb, mint a [3] dolgozaté.

Emlékeztetünk néhány definícióra és néhány belőlük következő ismert eredményre.

Legyen $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ *Kolmogorov*-féle valószínűségi mező. Az $\mathscr{A}$ elemeit eseményeknek nevezzük, az Ω alaptéren értelmezett és az $\mathscr{A}$-ra nézve mérhető függvényeket pedig valószínűségi változóknak.

1. Definíció. (Rényi) *A ζ_n valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy erősen keverő $G(x)$ határeloszlással, ha bármilyen pozitív valószínűségű B feltétel mellett fennáll, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} P(\zeta_n < x|B) = G(x).$$

2. Definíció. (Rényi) *A $\{\zeta_n\}$ valószínűségi változó sorozatról azt mondjuk, hogy stabilis, ha bármilyen pozitív valószínűségű B feltétel mellett fennáll a*

$$\lim_{n\to+\infty} P(\zeta_n < x|B) = F_B(x)$$

limeszreláció, ahol $F_B(x)$ csak B-től függő eloszlásfüggvény.

Nyilvánvaló, hogy minden erősen keverő valószínűségi változó sorozat stabilis is.

Megmutatható, hogy az $F_B(x)$ eloszlásfüggvény szakadási pontjainak halmaza, bármilyen pozitív valószínűségű B feltétel mellett, részhalmaza az $F_\Omega(x)$ eloszlásfüggvény szakadási pontjai halmazának, és hogy ily módon legfeljebb megszámlálható sok x érték kivételével, minden rögzített x értékre a

$$Q(x, B) = \lim_{n \to +\infty} P(\zeta_n < x, B)$$

kifejezés, mint a B esemény függvénye, mérték, amely abszolút folytonos a P valószínűségi mértékre nézve. A $Q(x, B)$ mérték P szerinti *Radon—Nikodym*-deriváltja ily módon modulo P egyértelműen meg van határozva, ha x rögzített érték. Ezt $\alpha_x(\omega)$-val jelölve, teljesül, hogy $0 \leqq \alpha_x(\omega) \leqq 1$ és

$$Q(x, B) = \int_B \alpha_x(\omega)\, dP.$$

Az erős keverés esetét nyilván akkor kapjuk, mikor $\alpha_x(\omega)$ 1 valószínűséggel állandó. Az $\alpha_x(\omega)$ függvényt a $\{\zeta_n\}$ stabilis sorozat x helyen vett lokális sűrűségének nevezzük.

A stabilitás tulajdonságának ellenőrzésére szolgál a következő kritérium:

Ha tetszőleges rögzített k esetén

$$\lim_{n \to +\infty} P(\zeta_n < x | \zeta_k < x) = F_B(x)$$

létezik, ahol $B = \{\omega : \zeta_k < x\}$, akkor a $\{\zeta_n\}$ sorozat a 2. Definíció értelmében stabilis [2].

Ugyancsak ez a kritérium szolgál az erős keverés tulajdonságának ellenőrzésére; ekkor a jobb oldalon álló határeloszlásfüggvény a $B = \{\omega : \zeta_k < x\}$ eseménytől nem függ [2].

Megemlítjük, hogy ha P^* a P valószínűségi mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték, akkor a P mértékre nézve stabilis valószínűségi változó sorozat a P^* mértékre nézve is stabilis és lokális sűrűsége mindkét esetben ugyanaz.

E definíciók és állítások RÉNYI [2] dolgozatában megtalálhatók. Fel fogjuk használni még a következő tételt is:

1. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a $\{\xi_n\}$ valószínűségi változókból álló sorozat erősen keverő $F(x)$ határeloszlással, és az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változókból álló sorozat sztochasztikusan az η valószínűségi változóhoz konvergál. Legyen $g(x, y)$ kétváltozós folytonos függvény. Ekkor a $g(\xi_n, \eta_n)$ valószínűségi változók sorozata stabilis és lokális sűrűsége*

$$\int_{\{g(y,\eta) < x\}} dF(y).$$

E tétel bizonyítása az [5] dolgozatban található, így itt azt mellőzzük. Tételünket abban a formában használjuk fel, hogy az η_n valószínűségi változó sorozatot l-dimenziós vektor-változónak fogjuk fel, amely komponensenként sztochasztikusan az l-dimenziós valószínűségi változóhoz konvergál. Nyilván tételünk állítása és bizonyítása szó szerint átvihető erre az esetre is.

Térjünk vissza eredeti célunkra. Nyilván $P(\eta_n < x) = F^n(a_n x + b_n)$, ahol $F(x)$ a ξ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók eloszlásfüggvénye. Legyen x_0 az a szám, amelyre $F(x_0) = 1$ és tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén $F(x_0 - \varepsilon) < 1$. Ha ilyen véges x_0 szám nincs, akkor minden véges x esetén $F(x) < 1$; legyen ez esetben $x_0 = +\infty$. Ha az $a_n > 0$, b_n sorozatokkal képzett $\{\eta_n\}$ sorozatnak létezik határeloszlása, akkor minden olyan x véges szám esetén, amelyre a határeloszlás nem zérus és nem 1,

$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nx+b_n)=x_0$. Valóban, ha $x_0<+\infty$, $\varepsilon>0$ és végtelen sok n esetén $a_nx+b_n<$ $<x_0-\varepsilon$ akkor végtelen sok n esetén $F(a_nx+b_n)\leqq F(x_0-\varepsilon)<1$ és így $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\eta_n<x)$ nem létezik. Ha pedig végtelen sok n esetén $a_nx+b_n>x_0+\varepsilon$, akkor ezekre az indexekre $F(a_nx+b_n)=1$ és így ismét $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\eta_n<x)$ nem létezik. Hasonlóan okoskodhatunk, mikor $x_0=+\infty$.

Bebizonyítjuk most a következő állítást:

2. TÉTEL. *Ha az $a_n>0$ és a b_n számsorozatok segítségével képzett $\{\eta_n\}$ sorozatra $G(x)$ minden folytonossági helyén fennáll, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} P(\eta_n<x)=G(x),$$

ahol $G(x)$ eloszlásfüggvény, akkor az η_n sorozat erősen keverő $G(x)$ határeloszlással.

Bizonyítás. Nyilván elegendő csak olyan x értékekre bizonyítani az állítást, amelyekre $G(x)\neq 0$ és $G(x)\neq 1$. Ekkor bizonyos k_0 indextől kezdve $P(\eta_n<x)\neq 0$ és $P(\eta_n<x)\neq 1$, ha $n\geqq k_0$. Ekkor $k\geqq k_0$ esetén

$$P(\eta_n<x|\eta_k<x)=P\left(\frac{W_k-b_n}{a_n}<x\,\middle|\,\eta_k<x\right)P\left(\frac{W_{k,n}-b_n}{a_n}<x\right),$$

mert $W_n=\max(W_k, W_{k,n})$ és W_k továbbá $W_{k,n}$ egymástól függetlenek. A jobb oldal második tényezője az $F^{n-k}(a_nx+b_n)$ kifejezéssel egyenlő és $n\to+\infty$ esetén határértéke $G(x)$. Az első tényező határértéke 1, mert a $W_k<a_nx+b_n$ esemény valószínűsége $F^k(a_nx+b_n)$ és $a_nx+b_n\to x_0$, k pedig rögzített.

E tételből adódik a következő:

KOROLLÁRIUM. *Legyen P^* a P mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték. Ekkor, ha az $a_n>0$ és b_n sorozatok estén $\lim\limits_{n\to\infty} P(\eta_n<x)=G(x)$ létezik, fennáll, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} P^*(\eta_n<x)=G(x).$$

Bebizonyítjuk most a következő lemmákat:

1. LEMMA. *Ha valamilyen $a_n>0$ és b_n sorozatra teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\eta_n<x)=$ $=G(x)$ létezik, akkor, ha $p_n>0$ és $p_n\to p>0$ és $F(x)$ az 1° eloszlástípus vonzási tartományába tartozik,*

$$\frac{a_n}{a_{[np_n]}}\to p^{-1/\alpha},\quad \frac{b_{[np_n]}-b_n}{a_{[np_n]}}\to 0;$$

ha $F(x)$ a 2° eloszlástípus vonzási tartományába tartozik, akkor

$$\frac{a_n}{a_{[np_n]}}\to p^{1/\alpha},\quad \frac{b_{[np_n]}-b_n}{a_{[np_n]}}\to 0;$$

és végül, ha $F(x)$ a 3° eloszlástípus vonzási tartományába tartozik, akkor

$$\frac{a_n}{a_{[np_n]}}\to 1,\quad \frac{b_{[np_n]}-b_n}{a_{[np_n]}}\to \log p.$$

Bizonyítás. Felhasználjuk HINCSINnek azt az eredményét, hogy ha $H(x)$ nem elfajult eloszlásfüggvény és az $F_n(x)$ eloszlásfüggvénysorozatra, továbbá az $a_n>0$, $\alpha_n>0$, b_n és β_n számsorozatokra teljesülnek a $H(x)$ eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában az

$$F_n(a_n x+b_n)\to H(x),$$

$$F_n(\alpha_n x+\beta_n)\to H(x)$$

határértékrelációk, akkor

$$\frac{a_n}{\alpha_n}\to 1 \quad \text{és} \quad \frac{b_n-\beta_n}{a_n}\to 0,$$

ha $n\to+\infty$ [1]. Mutassuk meg például, hogy az állítás igaz a 3° eloszlástípusra. Ez esetben $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\eta_n<x)=\Lambda(x)$, azaz $F^n(a_n x+b_n)\to\Lambda(x)$. Ebből következik, hogy $F^{[np_n]}(a_n x+b_n)\to\Lambda^p(x)=\Lambda(x-\log p)$. Az $x-\log p=z$ helyettesítést alkalmazva kapjuk

$$F^{[np_n]}(a_n z+a_n\log p+b_n)\to\Lambda(z).$$

Másrészt

$$F^{[np_n]}(a_{[np_n]}z+b_{[np_n]})\to\Lambda(z).$$

E két utolsó relációból HINCSIN eredménye alapján következik állításunk. Hasonlóan bizonyítható lemmánk többi állítása is.

GNYEGYENKO [1] dolgozatában megtalálhatók e lemma állításai közül egyesek, bizonyításuk azonban bonyolult. A 3° eloszlástípus esetén pedig a limeszrelációk egyike sincs bizonyítva. Az itt adott bizonyítás természetesnek és egyszerűnek tűnik.

2. LEMMA. *Legyen ν_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat, és tegyük fel, hogy ν_n/n sztochasztikusan a ν pozitív valószínűségi változóhoz konvergál, mikor $n\to+\infty$. Ekkor az* 1. *Lemmában $[np_n]$ helyett ν_n-et és p helyett ν-t helyettesítve, az ottani limeszrelációk a megfelelő sztochasztikus limeszrelációkba vihetők át.*

Bizonyítás. Az 1. Lemma állítását úgy fejezhetjük ki, hogy $c_n/d_{[np_n]}$ határértéke a pozitív p szám folytonos és monoton $f(p)$ függvénye, ahol c_n, ill. $d_{[np_n]}$ bármelyik limeszreláció bal oldalán a számlálót, ill. a nevezőt jelöli.

Legyen $0<p_1<p_2$ és tekintsük az m_n pozitív egész számoknak azt az összességét, amelyekre fennáll a $p_1\leqq\frac{m_n}{n}\leqq p_2$ egyenlőtlenség. Ekkor tetszőleges $\delta>0$ számhoz található olyan $n_0=n_0(\delta)$ egész szám, hogy $n\geqq n_0(\delta)$ esetén teljesül az $f(p_1)-\delta\leqq\frac{c_n}{d_{m_n}}\leqq f(p_1)+\delta$ egyenlőtlenség. Valóban, ha nem léteznék ilyen $n_0(\delta)$ szám, akkor végtelen sok n esetén fennállna a $c_n/d_{m_n}<f(p_1)-\delta$ (vagy pedig az $f(p_2)+\delta<c_n/d_{m_n}$) egyenlőtlenség. Legyen az ezen egyenlőtlenségnek megfelelő $m_{n'}/n'$ hányadosok limesz inferiorja (vagy, a második esetben, limesz szuperiorja) p. Nyilván, $p_1\leqq p\leqq p_2$. A p számhoz konvergálni lehet az $m_{n'}/n'$ sorozat egy konvergens $m_{n''}/n''$ részsorozatával, azaz $m_{n''}=[n''p_{n''}]$, ahol $p_{n''}\to p$. Ily módon $c_{n''}/d_{[n''p_{n''}]}\to$ $\to f(p)<f(p_1)-\delta$. Ez azonban ellentmond annak, hogy az $f(p)$ függvény folytonos és monoton.

Válasszuk meg a p_1 és p_2 számokat úgy, hogy $P(p_1 \leqq \nu < p_2) > 1 - \varepsilon$ teljesüljön és vegyük a $[p_1, p_2]$ intervallumnak olyan $p_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_k = p_2$ felosztását, hogy $|f(x) - f(x_{i-1})| < \frac{\delta}{2}$ teljesüljön, ha $x_{i-1} \leqq x < x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Az ilyen felosztás miatt nyilván

$$P\left(\left|\frac{c_n}{d_{\nu_n}} - f(\nu)\right| > \delta\right) \leqq \sum_{i=1}^{k}{}' P\left(\left|\frac{c_n}{d_{\nu_n}} - f(\nu)\right| > \delta, x_{i-1} \leqq \nu < x_i, x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k}{}' P\left(\overline{x_{i-1} \leqq \nu < x_i, x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i}\right) + \varepsilon.$$

Nyilvánvaló, hogy a jobb oldal második tagja tetszőlegesen kicsivé tehető, ha n elég nagy. Az első tagot pedig a következő módon becsüljük meg: minthogy $x_{i-1} \leqq \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i$, azért a ν_n sorozatra teljesül az m_n sorozatra kirótt egyenlőtlenség. Ennélfogva bizonyos $n_0\left(\frac{\delta}{2}\right)$ indextől kezdve $f(x_{i-1}) - \frac{\delta}{2} \leqq \frac{c_n}{d\nu_n} \leqq f(x_i) + \frac{\delta}{2}$. Így az első egyenlőtlenség az $x_{i-1} \leqq \nu < x_i$ reláció és az $f(p)$ monotonitása miatt $n \geqq n_0\left(\frac{\delta}{2}\right)$ esetén 0. Ily módon lemmánkat bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy ha az 1. Lemmában n helyett ν_n-et, $[np_n]$ helyett μ_n-et, és p helyett $\frac{\mu}{\nu}$-t írunk, ahol μ_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat és μ_n/n sztochasztikusan a μ pozitív valószínűségi változóhoz konvergál, a 2. Lemma állítása továbbra is igaz marad. Ezt a tényt is fel fogjuk használni a következőkben.

O. Barndorff—Nielsen [3] jelen dolgozatban említett tételének bizonyítását végig elemezve, nemcsak az mutatható meg, hogy az $\{\eta_{\nu_n}\}$ sorozatnak ugyanaz a határeloszlása, mint az $\{\eta_n\}$ sorozatnak, hanem az is, hogy az $\{\eta_{\nu_n}\}$ sorozat erősen keverő. Dolgozatunkban ezt az erősebb állítást szeretnénk kimondani és — meglátásunk szerint — egyszerű módon bebizonyítani.

3. Tétel. *Ha valamilyen $a_n > 0$ és b_n számsorozatok mellett az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változó sorozatnak létezik határeloszlása, akkor az $\{\eta_{\nu_n}\}$ valószínűségi változó sorozat erősen keverő ugyanazzal a határeloszlással.*

Bizonyítás. Határozzuk meg a $0 < p_1 < p_2$ számokat úgy, hogy $P(p_1 \leqq \nu < p_2) > > 1 - \varepsilon$ legyen, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Nyilvánvaló, hogy létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ index, hogy $n \geqq n_0$ esetén a $P(p_1 \leqq \frac{\nu_n}{n} < p_2) > 1 - 2\varepsilon$ egyenlőtlenség teljesül. Osszuk fel a $[p_1, p_2]$ intervallumot a $p_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_k = p_2$ osztópontokkal úgy, hogy azok a ν valószínűségi változó eloszlásfüggvényének folytonossági pontjai legyenek, a közelebbi meghatározásukról később intézkedünk. Legyen A tetszőleges esemény. Felhasználva, hogy $n<m$ esetén $W_n \leqq W_m$, felírható a

$$-2\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_i]} - b_{[nx_i]}}{a_{[nx_i]}} \cdot \frac{a_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} - \frac{b_{\nu_n} - b_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} < x, A, x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i \right) \leqq$$

$$\leqq P\left(\frac{W_{\nu_n} - b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}} < x, A \right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_{i-1}]} - b_{[nx_{i-1}]}}{a_{[nx_{i-1}]}} \cdot \frac{a_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} - \frac{b_{\nu_n} - b_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} < x, A, x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i \right) + 2\varepsilon$$

egyenlőtlenség. Az n indexet elég nagyra választva elérhető, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} P(A_n^{(i)} \circ A^{(i)}) < \varepsilon$$

legyen, ahol $A_n^{(i)}$ az $\left\{x_{i-1} \leqq \frac{\nu_n}{n} < x_i\right\}$ és $A^{(i)}$ az $\{x_{i-1} \leqq \nu < x_i\}$ eseményeket, a $\circ$ jel pedig a szimmetrikus differencia műveletét jelöli. Ennélfogva elég nagy n esetén

$$-3\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_i]} - b_{[nx_i]}}{a_{[nx_i]}} \cdot \frac{a_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} - \frac{b_{\nu_n} - b_{[nx_i]}}{a_{\nu n}} < x, A, x_{i-1} \leqq \nu < x_i \right) \leqq$$

$$\leqq P\left(\frac{W_{\nu_n} - b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}} < x, A \right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_{i-1}]} - b_{[nx_{i-1}]}}{a_{[nx_{i-1}]}} \cdot \frac{a_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} - \frac{b_{\nu_n} - b_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} < x, A, x_{i-1} \leqq \nu < x_i \right) + 3\varepsilon.$$

Válasszuk meg az x_i osztópontokat úgy, hogy $1-\delta \leqq f\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right) \leqq f\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}\right) \leqq 1+\delta$ és $-\delta \leqq g\left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right) \leqq g\left(\frac{x_i}{x_{i-1}}\right) \leqq \delta$ legyen, ahol $\delta > 0$ előre megadott tetszőleges szám, $f(p)$ és $g(p)$ pedig az 1. Lemmában bármelyik eloszlástípus esetén az első, ill. második határértékreláció jobb oldalát jelenti. Minthogy ν_n/n sztochasztikusan a ν valószínűségi változóhoz konvergál, a 2. Lemma értelmében és az x_i osztópontok megválasztása miatt fennáll

$$1-2\delta \leqq \frac{a_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} \leqq 1+2\delta; \quad 1-2\delta \leqq \frac{a_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} < 1+2\delta;$$

$$-2\delta \leqq \frac{b_{\nu_n} - b_{[nx_i]}}{a_{\nu_n}} < 2\delta; \quad -2\delta \leqq \frac{b_{\nu_n} - b_{[nx_{i-1}]}}{a_{\nu_n}} \leqq 2\delta.$$

Ezért elég nagy n esetén

$$-3\varepsilon+\sum_{i=1}^{k} P\left(\frac{W_{[nx_i]}-b_{[nx_i]}}{a_{[nx_i]}}<\frac{x-2\delta}{1+2\delta},\, A,\, x_{i-1}\leqq \nu < x_i\right)\leqq$$

$$\leqq P\left(\frac{W_{\nu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}}<x,\, A\right)\leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{h} P\left(\frac{W_{[nx_{i-1}]}-b_{[nx_{i-1}]}}{a_{[nx_{i-1}]}}<\frac{x+2\delta}{1-2\delta},\, A,\, x_{i-1}\leqq \nu < x_i\right)+3\varepsilon.$$

Mármost a 2. Tétel értelmében a $\{(W_{[nx_i]}-b_{[nx_i]})/a_{[nx_i]}\}$ $(i=0, 1, \ldots, k)$ sorozat erősen keverő valamilyen, a dolgozat elején említett három eloszlástípusba tartozó $G(x)$ határeloszlással. Ily módon

$$-3\varepsilon+G\left(\frac{x-2\delta}{1+2\delta}\right)P(A, p_1\leqq \nu<p_2)\leqq \liminf_{n\to+\infty} P\left(\frac{W_{\nu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}}<x,\, A\right)\leqq$$

$$\leqq \limsup_{n\to+\infty} P\left(\frac{W_{\nu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\nu_n}}<x,\, A\right)\leqq G\left(\frac{x+2\delta}{1-2\delta}\right)P(A, p_1\leqq \nu<p_2)+3\varepsilon,$$

ami ε és δ tetszőleges volta miatt bizonyítandó állításunkat jelenti.

Belátjuk most a következő tételt:

4. TÉTEL. *Ha a μ_n és a ν_n pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozatokra teljesül, hogy μ_n/n, ill. ν_n/n sztochasztikusan a μ, ill. ν pozitív valószínűségi változóhoz konvergál és az $a_n>0$ és b_n számsorozatok segítségével képzett η_n valószínűségi változókból álló sorozatnak van határeloszlása, és ez $G(x)$, akkor a $(W_{\nu_n}-b_{\mu_n})/a_{\mu_n}$ sorozat stabilis és lokális sűrűsége $(G(x))^{\nu/\mu}$.*

Bizonyítás. Fennáll a

$$\frac{W_{\nu_n}-b_{\mu_n}}{a_{\mu_n}}=\eta_{\nu_n}\frac{a_{\nu_n}}{a_{\mu_n}}-\frac{b_{\mu_n}-b_{\nu_n}}{a_{\mu_n}}$$

reláció. Az $\{\eta_{\nu_n}\}$ sorozat erősen keverő $G(x)$ határeloszlással a 3. Tétel alapján. A 2. Lemma alapján az a_{ν_n}/a_{μ_n}, továbbá a $(b_{\mu_n}-b_{\nu_n})/a_{\mu_n}$ sorozatok sztochasztikusan a $G(x)$ típusának megfelelő valószínűségi változókhoz konvergálnak. Ily módon az 1. Tétel alapján mondható, hogy a $(W_{\nu_n}-b_{\mu_n})/a_{\mu_n}$ sorozat stabilis. Esetünkben az 1. tételben szereplő g függvény az x, y, z változók háromváltozós függvénye, nevezetesen

$$g(x, y, z)=x\cdot y-z.$$

Rövid számolás után nyerjük, hogy a lokális sűrűségek az egyes eloszlástípusok szerint rendre a következők

$$\Phi_\alpha\left(x\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{-1/\alpha}\right),\quad \psi_\alpha\left(x\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{1/\alpha}\right),\quad \Lambda\left(x-\log\frac{\nu}{\mu}\right),$$

illetőleg az ezek típusába tartozó kifejezések. Ez pedig megegyezik tételünk állításával.

2. KOROLLÁRIUM. *A* [3] *dolgozat tétele a 4. Tételből következik.*

Legyen $\mu_n \equiv n$. Ha valamilyen $a_n > 0$ és b_n számsorozat esetén $\lim_{n\to+\infty} P(\eta_n < x) = G(x)$ létezik, akkor a 3. Tétel alapján az $\{\eta_{\nu_n}\}$ sorozat erősen keverő $G(x)$ határeloszlással. Ezért a 4. Tétel alapján és mivel $\mu \equiv 1$, a $\{(W_{\nu_n} - b_n)/a_n\}$ sorozat stabilis és lokális sűrűsége $[G(x)]^\nu$. Ezért

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_{\nu_n} < a_n x + b_n) = \int_\Omega (G(x))^\nu \, dP = \int_0^{+\infty} (G(x))^s \, dP(\nu < s).$$

Ez utóbbiból viszont következik, hogy $\lim_{n\to+\infty} P(\eta_n < x) = G(x)$. Ennek bizonyítása standard módszerekkel, ellentmondásra való visszavezetés útján történhetik.

IRODALOM

[1] B. V. GNYEGYENKO, Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Annals of Mathematics*, **44** (1943), 423—453.

[2] A. RÉNYI, On stable sequences of events, *Sankhya*, **25** (1963), Series A.

[3] O. BARNDORFF—NIELSEN, On the limit distribution of the maximum of a random number of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **15** (1964) 399—403.

[4] W. RICHTER, Das Null-Eins-Gesetz und ein Grenzwertsatz für zufällige Processe mit diskreter zufälliger Zeit, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden* **14** (1965) 497—504.

5] J. MOGYORÓDI, A theorem on stable sequences of random variables and a limit distribution theorem for the sums of a random number of independent random variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966) 401—409.

(Beérkezett: 1966. VIII. 3.)

ON THE LIMITING DISTRIBUTION OF THE MAXIMAL TERM OF A RANDOM SAMPLE OF RANDOM SIZE

By

J. MOGYORÓDI

Summary

We say, following A. RÉNYI, that a sequence $\{\zeta_n\}$ of random variables is stable, if, for any event B of positive probability, the conditional distribution function of ζ_n under the condition B converges as $n \to +\infty$ to a limiting distribution function $F_B(x)$. The sequence ζ_n is called strongly mixing, if $F_B(x)$ does not depend on B.

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of independent and identically distributed random variables and let us consider $W_n = \mathrm{Max}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. In this paper we give simple proofs of the following assertions:

1. If, for some constants $a_n > 0$ and b_n, the sequence $(W_n - b_n)/a_n$ has a limiting distribution, then $(W_n - b_n)/a_n$ is strongly mixing.

2. Let $\{\nu_n\}$ be a sequence of positive integer-valued random variables. We suppose that ν_n/n converges inprobability as $n \to +\infty$ to a positive random variable ν. If the sequence $(W_n - b_n)/a_n$ has a limiting distribution, then $(W\nu_n - b\nu_n)/a\nu_n$ is also strongly mixing with the same limiting distribution as that of $(W_n - b_n)/a_n$.

The first assertion is proved also in [4] with other methods. A part of the second assertion is proved in [3] and [4].

3. Let ν_n and μ_n be positive integer-valued random variables and let us suppose that ν_n/n and μ_n/n converge in probability measure to the positive random variables ν and μ, respectively. If the sequence $(W_n - b_n)/a_n$ has a limiting distribution $G(x)$ as $n \to +\infty$, then the sequence $(W_{\nu_n} - b_{\mu_n})/a_{\mu_n}$ is stable and its local density is $(G(x))^{\nu/\mu}$.

This result is a generalization of that of the paper [3].

EGY IRREGULARITÁSI JELENSÉG A SZÁMELMÉLETBEN

Írta: KÁTAI IMRE

Legyen z_j, $z_j = e^{2\pi i \varphi_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ egységnyi abszolút értékű komplex számok végtelen sorozata,

$$A_k = \limsup_{n=\infty} |z_1^k + \ldots + z_n^k|. \tag{1}$$

ERDŐS P. kérdezte [1], hogy igaz-e a

$$\limsup_{k=\infty} A_k = \infty \tag{2}$$

reláció?

Kimutatjuk a következő tételt.

TÉTEL: *Legyen $A_k < \infty$, midőn $k > t$. Ekkor*

$$A_k > \frac{c_1}{\sqrt{t}} k^{1/2}, \tag{3}$$

és $c_1 > 0$ abszolút állandó.

A *bizonyítás* K. F. ROTH [2] diszkrepanciára vonatkozó eredményén alapszik.

1. LEMMA: *Legyen $P_j = (X_j, Y_j)$, $j = 1, \ldots, N$ az egységnégyzeten fekvő N pont. Bevezetve a*

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{X_j < \alpha \\ Y_j < \beta}} 1 \tag{4}$$

jelölést, fennáll az

$$\int_0^1 \int_0^1 (S(x, y) - Nxy - \varphi(y))^2 \, dx \, dy > c_2 \log N \tag{5}$$

egyenlőtlenség, ahol $\varphi(y) \in L^2(0, 1)$ tetszőleges valósértékű függvény, $c_2 > 0$ abszolút állandó.

ROTH $\varphi(y) \equiv 0$ választással mutatja ki az (5) egyenlőtlenséget, de a bizonyítás minden változtatás nélkül kiadja általánosan is (5)-öt.

Legyenek most $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ tetszőleges, a $[0, 1]$ intervallumba eső számok. Alkalmazzuk lemmánkat arra az esetre, midőn $X_j = \left\{\tau_j, \frac{j}{N}\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, N$;

$$\varphi(y) = \int_0^1 (S(u, y) - Nuy) \, du.$$

Világos, hogy $\frac{j}{N} < y \leqq \frac{j+1}{N}$ esetén $S(u, y) = S\left(u, \frac{j+1}{N}\right)$, $\varphi(y) = \varphi\left(\frac{j+1}{N}\right) + O(1)$, így $N > c_3$-ra az alábbi egyenlőtlenség áll fenn:

$$\frac{c_2}{2}\log N < \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1 \left(S\left(x, \frac{j+1}{N}\right) - jx - \int_0^1 \left(S\left(u, \frac{j+1}{N}\right) - ju\right) du\right)^2 dx.$$

Innen a következő lemmát kapjuk.

2. LEMMA. *Legyenek* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ *tetszőleges, a* $(0, 1)$ *intervallumba eső számok, s legyen* $N > c_3$. *Bevezetve a*

$$S_l(x) = \sum_{\substack{\tau_j \leqq x \\ j \leqq l}} 1 \tag{6}$$

jelölést, található olyan l, *amelyre*

$$\int_0^1 \left(S_l(x) - lx - \int_0^1 (S_l(u) - lu)\, du\right)^2 dx > \frac{c_2}{2}\log N, \qquad (1 \leqq l \leqq N). \tag{7}$$

Legyen $s_l(k) = \sum_{j=1}^{l} e^{2\pi i \tau_j k}$, továbbá

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \alpha \\ 0, & \text{ha } \alpha < x < 1 \end{cases} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1).$$

$_\alpha(x)$ *Fourier*-sora

$$f_\alpha(x) = \alpha + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1 - e^{-2\pi i n \alpha}}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n \alpha}}{2\pi i n} \cdot e^{2\pi i n x}$$

alakú. Ismeretes, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n} = \frac{1-2x}{2}$, ha $0 < x < 1$, így

$$S_l(\alpha) - \alpha l - \sum_{j=1}^{l} \frac{1 - 2\tau_j}{2} = -\sum_{n \neq 0} \frac{e^{-2\pi i n \alpha} \cdot s_l(n)}{2\pi i n},$$

s a *Parsevál*-formulát alkalmazva

$$\int_0^1 \left(S_l(\alpha) - \alpha l - \sum_{j=1}^{l} \frac{1 - 2\tau_j}{2}\right)^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_l(n)|^2}{n^2}.$$

Egyszerű számolással látható, hogy

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{1 - 2\tau_j}{2} = \int_0^1 (S_l(u) - lu)\, du.$$

Így érvényes a következő

3. LEMMA:

$$\int_0^1 \left(S_l(\alpha) - \alpha l - \int_0^1 (S_l(u) - lu)\, du\right)^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_l(n)|^2}{n^2}. \tag{8}$$

A 2. és 3. Lemma segítségével most már könnyen kapjuk tételünket.

Bizonyítás. Ha $A_k = \infty$ végtelen sok k-ra, akkor az állítás igaz. Tegyük fel, hogy A_k véges, ha $k \geqq t$. Legyen továbbá $L(\geqq t)$ tetszőleges nagy egész szám. Kimutatjuk, hogy létezik egy $k > L$, amelyre $A_k > \frac{c_1}{\sqrt{t}} k^{1/2}$. Véges A_k-ra a $\sigma(k, m, r) = z_m^k + \ldots + z_{m+r}^k$ jelöléssel

$$|\sigma(k, m, r)| < 2A_k + 1, \tag{9}$$

ha $m \geqq m(k)$, $r \geqq 1$. Legyen $m_0 = m_0(k)$ olyan állandó, hogy $m > m_0(L)$ esetén már minden m-re és minden $t \leqq tk < Lt$-re fennálljon (9).

Alkalmazzuk a 2. Lemmát a

$$(\tau_1, \ldots, \tau_N) = (t\varphi_m, \ldots, t\varphi_{m+N-1})$$

választással. A 3. Lemma miatt alkalmas $1 \leqq l \leqq N$-re

$$\pi^2 \cdot c_2 \cdot \log N \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sigma(kt, m, l)|^2}{k^2} = \sum_{k=1}^{L} + \sum_{k=L+1}^{N^2} + \sum_{k=N^2+1}^{\infty}.$$

Mivel $|\sigma(kt, m, l)|^2 \leqq l^2 \leqq N^2$, így a harmadik tag $\leqq 1$. Másrészt

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{|\sigma(kt, m, l)|^2}{k^2} \leqq \sum_{k \leqq L} \frac{2A_{kt}+1}{k^2} < \frac{c_2}{4} \log N,$$

ha N elég nagy, s innen

$$\max_{k=L+1, \ldots, N^2} \frac{|\sigma(kt, m, l)|^2}{kt} > \frac{c_2}{8t}. \tag{10}$$

Egyenlőtlenségünkből következik, hogy valamely (tL, tN^2) intervallumbeli k-ra végtelen sok m értékre fennáll (10). Így erre a k-ra elég nagy m-mel

$$2A_k + 1 > |\sigma(k, m, l)| \geqq c_4 \sqrt{\frac{k}{t}}, \qquad \left(c_4 = \sqrt{\frac{c_2}{8}}\right),$$

s így a tétel valóban fennáll.

Megjegyezzük, hogy a 2. és 3. Lemmából közvetlenül levezethető a következő állítás.

Ha $w_1, w_2, \ldots, w_N$ az egységkör kerületén fekvő komplex számok, akkor

$$\max_{\sqrt{c_2 \log N} \leqq l \leqq N} \ \max_{1 \leqq k \leqq N^2} \frac{|w_1^k + \ldots + w_l^k|}{\sqrt{k}} > c_5, \tag{11}$$

ahol c_5 abszolút állandó.

Érdekes lenne bebizonyítani ennek egy „Turán-típusú" általánosítását, pontosabban a (11) egyenlőtlenséget tetszőleges $|w_i| \geqq 1$ $(i = 1, \ldots, N)$ esetén.*

* Szerző a dolgozat megírása után vette észre, hogy ERDŐS P. [3]-ban kimutatta, hogy $A_k > c \log k$ végtelen sok k-ra, továbbá ugyanott említi bizonyítás nélkül, hogy CLUNIE kimutatta az $A_k > ck^{1/2}$ egyenlőtlenséget végtelen sok k-ra.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] P. ERDŐS, Problems and results on diophantine approximations, *Compositio Math.*, **16** (1964), 52—65.
[2] K. F. ROTH, On irregularities of distribution, *Mathematika*, **1** (1954), 73—79.
[3] P. ERDŐS, Some remarks on number theory, *Israel Journal of Math.*, **3**, 1 (1965), 6—12.

(Beérkezett: 1966. VIII. 13.)

ON AN IRREGULARITY PHENOMENON IN THE NUMBER THEORY

by

IMRE KÁTAI

Summary

Let $z_j = e^{2\pi i \varphi_j}$ $(j=1, 2, \ldots)$ be an infinite sequence of numbers on the unit circle, and let

$$A_k = \limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k \varphi_j} \right|.$$

P. ERDŐS asked in [1] the following: is it true, that $\limsup_{k\to\infty} A_k = \infty$? Here we deduce from ROTH's theorem [2] the following: let $A_k < \infty$, if $k \geqq t$, then

$$A_k > \frac{c_1}{\sqrt{t}} k^{1/2}$$

holds for infinitely many k, where c_1 is a positive absolute constant.

P. ERDŐS mentioned in [3], without proof, that CLUNIE proved our inequality too.

EGY MEGJEGYZÉS K. S. GANGADHARAN „TWO CLASSICAL LATTICE POINT PROBLEMS" CÍMŰ DOLGOZATÁHOZ

Írta: CORRÁDI KERESZTÉLY és KÁTAI IMRE

1. Legyen $r(n)$ az n természetes szám két négyzetszám összegeként való előállításainak száma, $d(n)$ az n osztóinak száma, és

$$R(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} r(n) = \pi x + P(x), \tag{1.1}$$

$$D(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \Delta(x), \tag{1.2}$$

ahol γ az *Euler*-féle állandó. Így $P(x)$ a körre vonatkozó rácspontprobléma, $\Delta(x)$ pedig a *Dirichlet-féle* osztóprobléma hibatagja.

Ismeretes, hogy

$$P(x) = \Omega(x^{1/4} \log^{1/4} x), \tag{1.3}$$

$$\Delta(x) = \Omega_+(x^{1/4} \log^{1/4} x \cdot \log \log x). \tag{1.4}$$

(1. 4) bizonyítása HARDY [1], (1. 3) bizonyítása LANDAU [4] dolgozatában található. (1. 3) és (1. 4) bizonyítása mindkét esetben a diophantikus approximáció elméletben ismert *Dirichlet*-tételen és a *Phragmen—Lindelöf*-tétel egy változatán alapszik. A módszer, érdekes módon nem alkalmas mindkét irányú Ω-becslések levezetésére, ellentétben HARDY [1]-ben megfogalmazott hibás állításával, mely szerint módszerével

$$P(x) = \Omega_\pm(x^{1/4} \log^{1/4} x), \quad \Delta(x) = \Omega_\pm(x^{1/4} \log^{1/4} x \cdot \log \log x)$$

nyerhető. Erre vonatkozóan hibás idézet szerepel még L. K. HUA [8] enciklopédiacikkében.

Ellenkező irányban a legutóbbi évekig csak az INGHAMtől származó

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{P(x)}{x^{1/4}} = +\infty, \qquad \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\Delta(x)}{x^{1/4}} = -\infty$$

becslések voltak ismeretesek [3]. 1961-ben K. S. GANGADHARAN [7] dolgozatában kimutatta, hogy

$$P(x) = \Omega_+(x^{1/4}(\log \log x)^{1/4}(\log \log \log x)^{1/4}), \quad x \to \infty, \tag{1.5}$$

$$\Delta(x) = \Omega_-(x^{1/4}(\log \log x)^{1/4}(\log \log \log x)^{5/4}), \quad x \to \infty. \tag{1.6}$$

Bizonyításában a *Fejér*-mag lényeges szerepet játszik. A *Fejér*-mag ilyen irányú felhasználása már előbb, H. BOHRnál és B. JESSENnél is szerepel a *Kronecker*-tételre adott bizonyításukban [9].

Jelen dolgozat célja az (1. 5) és (1. 6) Ω-becslések javítása. Bizonyításunkban GANGADHARAN ideáit használjuk. A javítást a később definiálandó $q_1, q_2, \ldots, q_N$ halmaz jó megválasztása teszi lehetővé.

A továbbiakban $c, c_1, c_2, \ldots, d, d_1, \ldots, X_1, X_2, \ldots$ numerikusan meghatározható állandókat jelölnek. Esetleges más állandóktól való függésüket külön jelöljük.

Alkalmazni fogjuk továbbá a $\log_2 x = \log\log x$, $\log_3 x = \log(\log_2 x)$, $e_1(x) = e^x$ jelöléseket.

Megfogalmazzuk állításunkat.

$$P(x) = \Omega_+(x^{1/4} e_1(c(\log_2 x)^{1/4}(\log_3 x)^{-3/4})) \qquad x \to \infty, \tag{1. 7}$$

$$\Delta(x) = \Omega_-(x^{1/4} e_1(c(\log_2 x)^{1/4}(\log_3 x)^{-3/4})) \qquad x \to \infty, \tag{1. 8}$$

ahol $c > 0$ numerikus állandó.

2. A bizonyításhoz szükségünk lesz néhány segédtételre. Azokat a segédtételeket, amelyek bizonyítása [7]-ben megtalálható, vagy kis módosítással alkalmazhatók, bizonyítás nélkül átvesszük.

Legyen $X \geqq 2$ valós szám,

$$(1 \leqq) q_1 < q_2 < \ldots < q_N \leqq X$$

a négyzetmentes számok valamely $\mathcal{P} = \mathcal{P}(X)$ halmaza. A továbbiakban $N = N(X)$ jelöli ezen $\mathcal{P}$ halmaz elemei számát.

Legyen S_X azon η számok összessége, amelyek

$$\eta = \left|\sqrt{n} + \sum_{\lambda=1}^{N} r_\lambda \sqrt{q_\lambda}\right| \tag{2. 1}$$

alakba írhatók, ahol $n, r_1, \ldots, r_N$ a következő feltételt kielégítő egészek:

$$n \geqq 0; \quad |r_\lambda| \leqq 1 \ (\lambda = 1, 2, \ldots, N); \quad \sum_{\lambda=1}^{N} |r_\lambda| \geqq 2. \tag{2. 2}$$

BESICOVITCH kimutatta [5], hogy ha $\{q\}$ különböző négyzetmentes számok valamely véges halmaza, akkor a $\sqrt{q}$ számok lineárisan függetlenek a racionális számok teste felett. Mivel a (2. 1) jobb oldalán álló kifejezésben legalább két r_λ nullától különböző, így az S_X halmaz elemei között a nulla nem szerepel.

Vezessük be az

$$\bar{\eta}(X) = \min_{\eta \in S_X} \eta, \quad q(X) = -\log \bar{\eta}(X)$$

jelöléseket. A [7] dolgozat 701—704 lapjain szereplő gondolat segítségével belátható az alábbi lemma.

Legyenek $p_1 < p_2 < \ldots < p_M$ a $q_1 < q_2 < \ldots < q_N (\leqq X)$ négyzetmentes számok összes különböző prímosztói. Ekkor

1. LEMMA:

$$q(X) < (2^{M+2} - 1) \log(1 + 2x^{1/2} N).$$

Megválasztjuk a $\mathcal{P}$ halmazt. Legyen $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tetszőleges pozitív állandó,

$$M = [(1-\delta) \log X \cdot (\log_2 X)^{-1}].$$

Jelölje $p_1 < p_2 < \ldots < p_M$ az első M számú $4k+1$ alakú primet, továbbá $(1=)q_1 < q_2 < \ldots < q_N$ az ezekből szorzással képezhető $N=2^M$ számú négyzetmentes számot. A számtani sorokra vonatkozó prímszámtétel alkalmazásával

$$(\log q_N =) \sum_{j=1}^{M} \log p_j = \frac{p_M}{2} + o(p_M) = M \log M + o(M \log M) < \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \log x,$$

ha $X > c_1$.

Az 1. lemmából közvetlenül adódik a következő

2. LEMMA:

$$q(X) < Q(X), \quad Q(X) \overset{\text{def}}{=} c_2 \log X \cdot 2^{(1-\delta)\log X \cdot (\log_2 X)^{-1}},$$

ha $X > c_1$, $c_2 > 0$ *alkalmas állandó.*

3. LEMMA.

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} > c_3 e_1 \left(d \frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X} \right),$$

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \frac{d(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} > \frac{1}{4} c_3 e_1 \left(d \frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X} \right),$$

ha $X > c_1$, $c_3 > 0$, $d > 0$ *alkalmas numerikus állandók.*

Bizonyítás. Tekintettel arra, hogy a fenti $\mathcal{P}$ halmazon $r(q_\lambda) = 4d(q_\lambda)$, ezért elég az első egyenlőtlenséget belátni.

Mivel

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} = 4 \prod_{j=1}^{M} \left(1 + \frac{1}{p_j^{3/4}}\right) > 4e_1 \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{p_j^{3/4}} - \sum \frac{1}{p_j^3} \right) > c_4 e_1 \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{p_j^{3/4}} \right),$$

továbbá a prímszámtételből kifolyólag $p_M \geqq \log X$ és

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{p_j^{3/4}} \geqq c_5 \frac{p_M^{1/4}}{\log p_M} \geqq c_5 \frac{(\log X)^{1/4}}{\log_2 X},$$

így állításunk érvényes, ha $X > c_1$.

3. A $\sum r(n) e^{-s\sqrt{n}}$ *Dirichlet*-sor konvergál minden $s = \sigma + it$-re a $\sigma > 0$ félsíkban. Legyen

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n) e^{-s\sqrt{n}}, \quad g(s) = \frac{f(s)}{s} - \frac{2\pi}{s^3} \qquad (\sigma > 0).$$

4. LEMMA:

$$\sigma^{3/2} g\left(\sigma \pm 2\pi i \sqrt{m}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{r(m)}{m^{3/4}} e^{\mp \frac{3}{4}\pi i} + 0(\sigma Y^{3/2})$$

$(0 < \sigma < 1;\ Y \geqq 1,\ 1 \leqq m \leqq Y,$ *m egész*$)$.

5. LEMMA: *Jelölje* $R(k, \omega)$ *azon* $s=\sigma+it$ *pontok összességét, amelyekre*

$$\sigma>0,\ |s|\leqq k,\ |s\pm 2\pi i\sqrt{n}|\geqq\omega\quad (n\geqq 1).$$

Ekkor $|g(s)|=0(\omega^{-\frac{3}{2}}k^2)$, $(k\geqq 2\pi,\ 0<\omega<1,\ s\in R(k,\omega))$.

Vezessük be a

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} d(n)e^{-s\sqrt{n}},\quad G(s)=\frac{F(s)}{s}+\frac{4}{s^3}(\log s-1)-\frac{1}{4s}$$

jelöléseket. $F(s)$ *Dirichlet*-sora konvergál a $\sigma>0$ félsíkban, továbbá érvényes a következő két lemma.

6. LEMMA:

$$\sigma^{3/2}G(\sigma\pm 4\pi i\sqrt{m})=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\frac{d(m)}{m^{3/4}}e^{\mp\frac{1}{4}\pi i}+O(\sigma^{1/2}Y^2\log^3 Y).$$

$(0<\sigma<1;\ Y\geqq 2;\ 1\leqq m\leqq Y,\ m$ *egész*).

7. LEMMA: *Jelölje* $D(k,\omega)$ *azon* $s=\sigma+it$ *pontok összességét, amelyekre*

$$\sigma>0,\ |s|\leqq k,\ |s\pm 4\pi i\sqrt{n}|\geqq\omega\quad (n\geqq 1).$$

Ekkor $|G(s)|=0(\sigma^{-1}\omega^{-\frac{3}{2}}k^{5/2}\log^3 k)$, $\quad (k\geqq 2\pi,\ 0<\omega<1,\ s\in D(k,\omega))$.

Fenti lemmák bizonyítva vannak [7]-ben (704—710).

4. Legyen

$$K(\xi)=\tfrac{1}{2}e^{-i\xi}+1+\tfrac{1}{2}e^{i\xi}=2\cos^2\tfrac{1}{2}\xi$$

az úgynevezett másodrendű *Fejér*-mag, legyen továbbá

$$T_X(u)=\prod_{\lambda=1}^{N}K\left(2\pi\sqrt{q_\lambda}u-\frac{3}{4}\pi\right),\quad \mathcal{T}_X(u)=\prod_{\lambda=1}^{N}K\left(4\pi\sqrt{q_\lambda}u+\frac{3}{4}\pi\right).$$

$K(\xi)$ második alakjából világos, hogy $T_X(u)\geqq 0$, $\mathcal{T}_X(u)\geqq 0$ minden valós u és $X\geqq 1$ esetén. Továbbá $T_X(u)$ és $\mathcal{T}_X(u)$ általánosított trigonometrikus polinomok u-ban, 3^N számú különböző

$$2\pi\sum_{\lambda=1}^{N}t_\lambda\sqrt{q_\lambda},\quad\text{illetve}\quad 4\pi\sum_{\lambda=1}^{N}t_\lambda\sqrt{q_\lambda}\qquad (t_\lambda\text{-k egészek},\ |t_\lambda|\leqq 1)$$

alakú kitevővel. (Általánosított trigonometrikus polinomon a $T(u)=\sum_\gamma a_\gamma e^{-i\alpha_\gamma u}$ alakú kifejezést értjük, kitevői az α_γ számok.)

Bontsuk fel a $T_X(u)$, $\mathcal{T}_X(u)$ polinomokat

$$T_X(u)=T_X^{(0)}(u)+T_X^{(1)}(u)+\overline{T_X^{(1)}(u)}+T_X^{(2)}(u),$$

$$\mathcal{T}_X(u)=\mathcal{T}_X^{(0)}(u)+\mathcal{T}_X^{(1)}(u)+\overline{\mathcal{T}_X^{(1)}(u)}+\mathcal{T}_X^{(2)}(u)$$

összegekre, ahol

$$T_X^{(0)}(u) \equiv 1; \qquad \mathcal{T}_X^{(0)}(u) \equiv 1,$$

$$T_X^{(1)}(u) \equiv \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{2} e^{\frac{3}{4}\pi i} e^{-2\pi i\sqrt{q_\lambda}u}; \qquad \mathcal{T}_X^{(1)}(u) \equiv \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{4}\pi i} e^{-4\pi i\sqrt{q_\lambda}u},$$

$$T_X^{(2)}(u) \equiv \sum_{\tau=1}^{T} b_\tau e^{-2\pi i\beta_\tau u}; \qquad \mathcal{T}_X^{(2)}(u) \equiv \sum_{\tau=1}^{T} \bar{b}_\tau e^{-4\pi i\beta_\tau u},$$

és β_τ-k az összes különböző $\sum r_\lambda \sqrt{q_\lambda}$ (r_λ-k egészek, $|r_\lambda| \leqq 1$, $\sum |r_\lambda| \geqq 2$) alakú számokat jelentik, számuk $T = 3^N - 2N - 1 < 3^N$, $|b_\tau| \leqq \frac{1}{4}$, $1 \leqq \tau \leqq T$.

Bevezetjük a következő jelölést. Tetszőleges $T(u) = \sum a_\gamma e^{-i\alpha_\gamma u}$ trigonometrikus polinom és $H(s)$ komplex változós függvény esetén legyen

$$T \wedge H(s) = \sum_\gamma a_\gamma H(s + i\alpha_\gamma).$$

Legyen $I_\theta(s) = s^{-\theta}$ ($s = \sigma + it$), ekkor $1 \leqq \theta \leqq 2$, $x \geqq 2$ esetén

(4. 1) $$|T_X \wedge I_\theta(\sigma) - \sigma^{-\theta}| = O(e^{2q(x)} \cdot 3^N + N).$$

(4. 2) $$|\mathcal{T}_X \wedge I_\theta(\sigma) - \sigma^{-\theta}| = O(e^{2q(x)} \cdot 3^N + N).$$

Csupán az első egyenlőtlenséget bizonyítjuk, (4. 2) bizonyítása hasonló.

$$T_X^{(0)} \wedge I_\theta(\sigma) = \sigma^{-\theta}, \quad |T_X^{(1)} \wedge I_\theta(\sigma)| \leqq \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{N} |\sigma + 2\pi i\sqrt{q_\lambda}|^{-\theta} < \frac{1}{2} \frac{N}{(2\pi)^\theta} \leqq \frac{N}{4\pi},$$

$$|T_X^{(2)} \wedge I_\theta(\sigma)| = \left| \sum_{\tau=1}^{T} b_\tau (\sigma + 2\pi i\beta_\tau)^{-\theta} \right| \leqq \frac{1}{4} \sum_{\tau=1}^{T} |\beta_\tau|^{-\theta} < \frac{1}{4} e^{2q(X)} \cdot 3^N.$$

Legyen $\sigma_X = e^{-AQ(X)}$, $\theta_X = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{Q(X)}$, ahol $A \geqq 6$ állandó. Érvényesek a következő relációk.

(R) $$\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge g(\sigma_X)\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} + o(1),$$

(D) $$\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X \wedge G(\sigma_x)\} = -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{d(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} + o(1),$$

$(\mathrm{I})_\mathrm{R}$ $$\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge I_{\theta_X+1}(\sigma_X)\} = e^A + o(1),$$

$(\mathrm{I})_\mathrm{D}$ $$\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X \wedge I_{\theta X+1}(\sigma_X)\} = e^A + o(1),$$

$(\mathrm{I}_1)_\mathrm{R}$ $$\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge I_1(\sigma_X)\} = o(1),$$

$(\mathrm{I}_1)_\mathrm{D}$ $$\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X \wedge I_1(\sigma_X)\} = o(1),$$

ha $X \to \infty$.

(R) bizonyítása.

$$\sigma_X^{3/2}\{T_X^{(0)} \wedge g(\sigma_X)\} = \sigma_X^{3/2} g(\sigma_X) = \sigma_X^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{(\sigma_X^2 + 4\pi^2 n)^{3/2}} = o(1),$$

mivel $\sigma_X = o(1)$.

Alkalmazzuk most a 4. lemmát $\sigma = \sigma_X$, $Y = X$ $(\geqq 2)$, $m = q_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, N)$ választással. Ekkor

$$\sigma_X^{3/2} g\left(\sigma_X + 2\pi i \sqrt{q_\lambda}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} e^{-\frac{3}{4}\pi i} + O(\sigma_X \cdot X^{\frac{3}{2}}) \qquad (X \geqq 2,\ 1 \leqq \lambda \leqq N).$$

Innen

$$\sigma_X^{3/2}\{T_X^{(1)} \wedge g(\sigma_X)\} = \sigma_X^{3/2} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{2} e^{\frac{3}{4}\pi i} g\left(\sigma_X + 2\pi i \sqrt{q_\lambda}\right) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} + O(N \sigma_X X^{3/2})$$

és $N\sigma_X X^{3/2} = o(1)$. Hasonlóan

$$\sigma_X^{3/2}\left\{\overline{T_X^{(1)}} \wedge g(\sigma_X)\right\} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} + o(1).$$

Mivel $|\sigma_X + 2\pi i \beta_\tau| \leqq 1 + 2\pi X^{3/2} < 3\pi X^{3/2}$ minden β_τ-ra, továbbá

$$\left|\sigma_X + 2\pi i \beta_\tau \pm 2\pi i \sqrt{n}\right| \geqq 2\pi\left|\beta_\tau \pm \sqrt{n}\right| \geqq 2\pi e^{-q(x)} \geqq 2\pi e^{-Q(x)}$$

minden n egészre, így az 5. lemmát $k = 3\pi X^{3/2}$, $\omega = e^{-Q(x)}$, $s = \sigma_X + 2\pi i \beta_\tau$ választással alkalmazva

$$|g(\sigma_X + 2\pi i \beta_\tau)| = O\left(e^{\frac{3}{2}Q(x)} \cdot X^3\right), \qquad X \geqq 2,\ 1 \leqq \tau \leqq T;$$

és így

$$\left|\sigma_X^{3/2}\{T_X^{(2)} \wedge g(\sigma_X)\}\right| = \left|\sigma_X^{3/2} \sum b_\tau g(\sigma_X + 2\pi i \beta_\tau)\right| \leqq O(\sigma_X^{3/2} e^{3/2\, Q(x)} X^3 \cdot 3^N) = O(B).$$

Logaritmálással

$$\log B = -\frac{3}{2} A Q(X) + \frac{3}{2} Q(X) + 3 \log X + N \log 3 \leqq$$

$$\leqq -\frac{3}{2}(A-1) C_2 \log X \cdot 2^{(1-\delta)\log X \cdot (\log_2 X)^{-1}} + 3 \log X + 2^{(1-\delta)\frac{\log X}{\log_2 X}} \log 3 \to -\infty,$$

így $B = o(1)$.

Ezáltal (R) érvényességét kimutattuk.

(D) bizonyítása hasonló, ezért nem részletezzük.

$(\mathrm{I})_R$ bizonyítása.

Válasszuk X-et olyan nagyra, hogy $\theta_X < 1$ legyen. Alkalmazzuk (4. 1)-et $\sigma_X = \sigma$, $\theta = \theta_X$ választással. Az eredményt $\sigma_X^{3/2}$-el szorozva

$$\left|\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge I_{\theta_X+1}(\sigma_X)\} - \sigma_X^{-\frac{1}{Q(X)}}\right| = O\left(\sigma_X^{3/2}(3^N \cdot e^{2q(X)} + N)\right).$$

A jobb oldal $o(1)$, a bal oldalon $\sigma^{-\frac{1}{Q(\sigma)}} = e^4$, így $(\mathrm{I})_R$ fennáll. $(\mathrm{I})_D$ bizonyítása hasonló. (4. 1)-et $\sigma = \sigma_X$, $\theta = 1$ választással alkalmazva

$$\left|\sigma_X^{3/2}\{T_X \wedge I_1(\sigma_X)\} - \sigma_X^{1/2}\right| = O\left(\sigma_X^{3/2}\{e^{2q(X)} 3^N + N\}\right) = o(1),$$

másrészt $\sigma_X^{1/2} \to 0$ és így $(\mathrm{I}_1)_R$ fennáll. $(\mathrm{I}_1)_D$ hasonlóan látható be.

5. tétel bizonyítása.

(1. 7) bizonyítása.

Legyen $\frac{1}{2}<\theta<2$, továbbá $P_\theta=\sup_{u>0} u^{-\theta}\{P(u^2)-1\}$. Nyilván feltehetjük, hogy P_θ véges minden $\frac{1}{2}<\theta<2$-re, mivel ellenkező esetben (1. 7) nyilvánvaló.

Legyen

$$\varrho_\theta(u)=P_\theta u^\theta-P(u^2)+1 \qquad (u\geqq 0,\ \tfrac{1}{2}<\theta\leqq 2).$$

P_θ definíciójából következik, hogy $\varrho_\theta(u)\geqq 0$. Továbbá minden $s=\sigma+it$, $\sigma>0$-ra

$$\int_0^\infty \varrho_\theta(u)e^{-su}\,du = P_\theta\int_0^\infty u^\theta e^{-su}\,du-\int_0^\infty\{R(u^2)-\pi u^2\}e^{-su}\,du+\int_0^\infty e^{-su}\,du=$$

$$=P_\theta\frac{\Gamma(\theta+1)}{s^{\theta+1}}-\frac{f(s)}{s}+\frac{2\pi}{s^3}+\frac{1}{s}.$$

Innen

$$\sigma_X^{3/2}\int_0^\infty \varrho_{\theta_X}(u)e^{-\sigma_X u}T_X(u)\,du = P_{\theta_X}\Gamma(\theta_X+1)\sigma_X^{3/2}\{T_X\wedge I_{\theta_X+1}(\sigma_X)\}-$$
$$-\sigma_X^{3/2}\{T_X\wedge g(\sigma_X)\}+\sigma_X^{3/2}\{T_X\wedge I_1(\sigma_X)\}.$$

Felhasználva a $\Gamma(\theta_X+1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}+o(1)$ formulát, továbbá az (R), $(\mathrm{I})_R$, $(\mathrm{I}_1)_R$ relációkat a

$$P_{\theta_X}\sqrt{\pi}e^{2A}-\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{r(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}}>0$$

egyenlőtlenséget kapjuk elég nagy X-re. Innen a 3. Lemma segítségével

$$P_{\theta_X}>c_6e_1\left(d\frac{\log^{1/4}x}{\log_2 x}\right).$$

Fenti egyenlőtlenségünkből következik olyan $u_x>0$ érték létezése, amelyre

$$u_X^{-\theta_X}P(u_X^2)>c_6e_1\left(d\frac{\log^{1/4}X}{\log_2 X}\right). \tag{5. 1}$$

Világos, hogy $u_X\to\infty$, ha $X\to\infty$. (5. 1)-et írjuk

$$u_X^{-\frac{1}{2}}P(u_X^2)>c_6e_1\left(\frac{\log u_X}{Q(X)}+d\frac{\log^{1/4}X}{\log_2 X}\right) \tag{5. 2}$$

alakba. Kimutatjuk, hogy (5. 2) jobb oldala $>c_7e_1(c(\log_2 u_X)^{1/4}(\log_3 u_X)^{-\frac{3}{3}})$, s ezzel tételünk első része bizonyítva lesz.

Vizsgáljuk először a

$$\frac{\log u_X}{Q(X)}\leqq d\frac{\log^{1/4}X}{\log_2 X}$$

esetet. Az egyenlőtlenséget logaritmálva

$$\log_2 u_X \leqq (1-\delta)\log 2\cdot\frac{\log X}{\log_2 X}+\lg d+\frac{1}{4}\log_2 X-\log_3 X \leqq \frac{\log X}{\log_2 X}\log 2,$$

innen

$$\frac{(\log_2 u_X)^{1/4}}{(\log_3 u_X)^{3/4}} \leqq \frac{(\log X)^{1/4}}{\log_2 X}$$

következik, s ezzel ezt az esetet elintéztük. Legyen most

$$\frac{\log u_X}{Q(X)} \geqq d\frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X},$$

azaz

$$\log_2 u_X \geqq (1-\delta)\log 2\cdot\frac{\log X}{\log_2 X}+\frac{5}{4}\log_2 X+O(1).$$

Feltehető, hogy $\log_2 u_X < 2\log g(X)$, mert ellenkező esetben

$$\frac{\log u_X}{g(X)} > \log u_X\cdot e_1\left(\frac{1}{2}(\log_2 u_X)\right),$$

s az állítás be lenne bizonyítva. Most viszont $\log_3 u_X = \log_2 X + O(1)$, s így

$$\frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X} > c_7\frac{(\log_2 u_X)^{1/4}}{(\log_3 u_X)^{3/4}}$$

miatt ugyancsak készen vagyunk.

(1. 8) bizonyítása hasonlóan történik. Bevezetjük a $\Delta_\theta = \sup\limits_{u>0}\{-u^{-\theta}\Delta(u^2)\}$ jelölést és feltesszük, hogy Δ_θ véges minden $\frac{1}{2}<\theta<1$-re. Legyen $\delta_\theta(u)=\Delta_\theta u^\theta+\Delta(u^2)$ $(\geqq 0)$. Hasonlóan, mint az előbb érvényes az

$$\int_0^\infty \delta_\theta(u)e^{-su}\,du = \Delta_\theta\frac{\Gamma(\theta+1)}{s^{\theta+1}}+G(s)+\frac{1}{4s}$$

előállítás, ahonnan levezetjük a

$$\sigma_X^{3/2}\int_0^\infty \delta_{\theta_X}(u)e^{-\sigma_X u}\mathcal{T}_X(u)\,du = \Delta_{\theta_X}\Gamma(\theta_X+1)\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X\wedge I_{\theta_X+1}(\sigma_X)\}+$$
$$+\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_X\wedge G(\sigma_X)\}+\frac{1}{4}\sigma_X^{3/2}\{\mathcal{T}_C\wedge I_1(\sigma_X)\}$$

formulát. A bal oldal nem-negativitását, továbbá a (D), $(\mathrm{I})_D$, $(\mathrm{I}_1)_D$ relációkat felhasználva

$$\Delta_{\theta_X}\sqrt{\pi}e^{2A}-\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}\sum_{\lambda=1}^{N}\frac{d(q_\lambda)}{q_\lambda^{3/4}} > 0 \qquad (x \geqq x_4).$$

A 3. lemmát alkalmazva érvényes az

$$u_X'^{-\frac{1}{2}} \; \Delta(u_X'^2) < -c_8 e_1 \left(\frac{\log u_X'}{Q(X)} + d \frac{\log^{1/4} X}{\log_2 X} \right)$$

egyenlőtlenség alkalmas u_X'-vel. Innen a fent látott módon következik (1. 8).

IRODALOMJEGYZÉK

[1] HARDY, G. H.: On Dirichlet's divisor problem *Proc. London Math. Soc.* **2** (1916), 1—25.

[2] HARDY, G. H.: On the expression of a number as the sum of two squares, *Quart. J. Math.* **46** (1915), 263—83.

[3] INGHAM, A. E.: On two classical lattice point problems, *Proc. Cambridge Philos Soc.* **36** (1940), 131—8.

[4] LANDAU, E.: *Vorlesungen über Zahlentheorie,* Bd 2., Leipzig, 1927.

[5] BESICOVITCH, A. S.: On the linear independence of fractional powers of integers, *J. London Math. Soc.* **15** (1940), 3—6.

[6] CASSELS, J. W. S.: *An introduction to Diophantine approximation,* Cambridge, 1957.

[7] GANGADHARAN, K. S.: Two classical lattice point problems, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **57** (1961), 699—721.

[8] HUA, L. K.: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* B I. 1, H 13, T 1, 29, Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Leipzig, 1959, 107.

[9] BOHR, H. and JESSEN, B.: One more proof of Kronecker's theorem, *J. London Math. Soc.* **7** (1932), 247—5.

(Beérkezett: 1966. VIII. 13.)

A NOTE ON A PAPER OF K. S. GANGADHARAN

by

K. A. CORRÁDI and I. KÁTAI

Summary

The aim of this paper is to prove an improvement of a theorem of Mr. K. S. GANGADHARAN [7].

Let $r(n)$ be the number of representations of n as a sum of two squares, $d(n)$ the number of divisors of n, and let

$$P(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} r(n) - \pi x, \quad \Delta(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} d(n) - x \log x - (2\gamma - 1)x,$$

where γ is EULER's constant.

We prove, that

$$P(x) = \Omega_+ \left(x^{1/4} \exp\left(c (\log\log x)^{1/4} (\log\log\log x)^{-\frac{3}{4}}\right)\right),$$

$$\Delta(x) = \Omega_- \left(x^{1/4} \exp\left(c (\log\log x)^{1/4} (\log\log\log x)^{-\frac{3}{4}}\right)\right)$$

és $x \to \infty$, where c is a positive absolute constant.

EGY MEGJEGYZÉS JU. V. LINNIK EGY DOLGOZATÁHOZ

Írta: KÁTAI IMRE

JU. V. LINNIK [1] dolgozatában kimutatta, hogy a *Riemann*-sejtés fennállása esetén minden $\varepsilon > 0$ állandóval minden elég nagy $x(>x_0(\varepsilon))$ esetén megoldható az

(1) $$|x-p-p'| < (\log x)^{3+\varepsilon}$$

egyenlőtlenség alkalmas p, p' prímszámokkal. A. SELBERG egy tételéből levezetjük, hogy (1) helyett az

(2) $$|x-p-p'| < c_1 (\log x)^2, \qquad (x \geqq 2)$$

egyenlőtlenség is megoldható, ha c_1 elég nagy állandó.

Jelölje $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ a prímszámok sorozatát, továbbá legyen $d_n = p_n - p_{n-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$. SELBERG bebizonyította [2], hogy a *Riemann-sejtés* mellett $h > 1$, $x \geqq 2$-re érvényes az

(3) $$\frac{1}{x} \sum_{\substack{d_n > \frac{h}{x} p_n \\ p_n \leqq x}} d_n < c_2 \frac{\log^2 x}{h}$$

egyenlőtlenség alkalmas $c_2 > 0$ állandóval. Így $H = 4c_2 \log^2 x$ választással

(4) $$\frac{1}{x} \sum_{\substack{d_n > H \\ p_n \leqq x}} d_n < \frac{1}{4}.$$

Fedjük le a $[0, x]$ intervallumot az $I_k = [(k-1)H, kH]$, $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{x}{H}\right] + 1$ intervallumokkal. Így azon intervallumok száma, melyek nem tartalmaznak prímszámot, legfeljebb

$$\sum_{\substack{d_n > H \\ p_n < x}} \frac{d_n}{H},$$

ami (4) miatt $< \frac{x}{4H}$. Ezek szerint létezik olyan $l \left(1 \leqq l \leqq \left[\frac{x}{H}\right]\right)$ szám, amelyre az I_l is és $I_{\left[\frac{x}{H}\right]-l}$ is tartalmaz egy p illetve egy p' prímszámot és az I intervallum különbözik az $I_{\left[\frac{x}{H}\right]-l}$ intervallumtól. Így fennáll az

$$x - 3H \leqq \left[\frac{x}{H}\right] H - 2H \leqq p + p' \leqq \left[\frac{x}{H}\right] \leqq x$$

egyenlőtlenség. Innen $c_1 = 12c_2$ választással következik (2).

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Ю. В. Линник, Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха, *Известия Акад. Наук. СССР,* **16** (1952), 503-520.

[2] A. SELBERG, On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, *Arch. Math. Naturvid.* **47** (1943), 87—105.

(Beérkezett: 1966. VIII. 13.)

A REMARK ON A PAPER OF JU. V. LINNIK

by

IMRE KÁTAI

Summary

In this paper the following assertion is proved: if the conjecture of RIEMANN is true, then the inequality (2) is solvable, where p, p' denote prime numbers and $c_1>0$ absolute constant.

ELOSZLÁS- ÉS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY-GRAFIKONOK ALAKJÁNAK JELLEMZÉSÉRŐL, II.

Írta: MEDGYESSY PÁL

1.

Dolgozatunk I. részében ([1]) többek közt a következő kérdéssel foglalkoztunk: ha egy $F(x)$ eloszlásfüggvényű ξ sztochasztikus változó esetében $\mathbf{D}^2(\xi)$ (és esetleg $\mathbf{E}(\xi)$) nem létezik, található-e ξ-hez oly jellemző, mely mond annyit $F(x)$ grafikonjának alakjáról, mint — létezése esetén — $\mathbf{D}^2(\xi)$, emellett olyan egyszerű tulajdonságai vannak, mint $\mathbf{D}^2(\xi)$-nek.

[1]-ben megmutattuk, hogy ilyen jellemzőnek tekinthetjük azt a $\mathbf{T}_R(\xi)$ mennyiséget, melyet így definiálunk:

Ha $\mathbf{D}^2(\xi)=\infty$, legyen $R_0<2$ azon R számok szuprémuma, melyekre $\mathbf{E}(|\xi|^R)$ még létezik és legyen az

$$\mathbf{E}(|\xi-y|^R)=\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^R\,dF(x)\qquad(0<R<R_0) \tag{1.1}$$

függvénynek *egyetlen* minimuma $y=y_0$-ban. Ekkor értelmezze $\mathbf{T}_R(\xi)$-t a

$$\mathbf{T}_R(\xi)=\min_{-\infty<y<\infty}\mathbf{E}(|\xi-y|^R)=\min_{-\infty<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^R\,dF(x)\qquad(0<R<R_0) \tag{1.2}$$

összefüggés.

A fenti y_0-t [1]-ben $\mathbf{N}_R(\xi)$-vel jelöltük.

Megjegyezzük, hogy kimondható a következő

1. 1. TÉTEL. *Ha $\mathbf{T}_R(\xi)$ létezik és a és b valós számok, akkor*

$$\mathbf{T}_R(a\xi+b)=|a|^R\mathbf{T}_R(\xi)$$

és

$$\mathbf{N}_R(a\xi+b)=a\,\mathbf{N}_R(\xi)+b.$$

Bizonyítás. A definíció szerint

$$\mathbf{T}_R(a\xi+b)=\min_{-\infty<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|ax+b-y|^R\,dF(x)=$$

$$=|a|^R\min_{-\infty<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x-\frac{y-b}{a}\right|^R dF(x)=|a|^R\min_{-\infty<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^R\,dF(x)=|a|^R\mathbf{T}_R(\xi),$$

amely feltevés szerint létezik. — A második állítás ugyanígy igazolható.

[1]-ben azt is megmutattuk, hogy (1. 1)-nek *egyetlen* minimuma van, ha $R>1$; arra azonban csak utaltunk, hogy $R>1$ esetén $\mathbf{T}_R(\xi)$-nek számos olyan tulajdon-

sága van, mint egy sztochasztikus változó szórásnégyzetének, — az $R<1$ esetre pedig ki sem tértünk.

Ebben a dolgozatban elsősorban ezeket a hiányosságokat pótoljuk, ismertetünk ezenkívül egy újabb alakjellemzőt is.

2.

A következőkben legyen $1 \leqq R < R_0 < 2$, és ξ-nek legyen *egyetlen* mediánja. Feltevéseinkből következik, hogy $R=1$ esetén az (1. 1)-ben szereplő integrálnak *egyetlen* minimuma van, ti. a medián értékénél; már [1]-ben is megállapítottuk, hogy hasonló a helyzet $R>1$ esetén is, mert $|x-y|^R$ az y változónak szigorúan konvex függvénye és így $\int_{-\infty}^{\infty} |x-y|^R dF(x)$ is az, $(-\infty<y<\infty)$. (Ez az egyetlen minimum a végesben van, mert ezen integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |x-y|\, dF(x)$ minoránsának is a végesben van a minimuma). Így tehát $\mathbf{T}_R(\xi)$ és $\mathbf{N}_R(\xi)$ létezése biztosítva van.

2. 1. TÉTEL. *Legyenek ξ_1 és ξ_2 független sztochasztikus változók. Tegyük fel, hogy valamilyen, az $1 \leqq R < R_0 < 2$ egyenlőtlenségnek eleget tevő R-re $\mathbf{T}_R(\xi_1)$ ill. $\mathbf{T}_R(\xi_2)$ létezik. Akkor*

a) *$R>1$ esetén $\mathbf{T}_R(\xi_1+\xi_2)$ és $\mathbf{N}_R(\xi_1+\xi_2)$ is létezik;*

b) *ha ξ_1 vagy ξ_2 közül az egyik eloszlásfüggvénye szigorúan monoton, $R=1$ esetén is létezik $\mathbf{T}_R(\xi_1+\xi_2)$ és $\mathbf{N}_R(\xi_1+\xi_2)$.*

Bizonyítás. Feltételeinkből következik, hogy $\mathbf{E}(|\xi_1|^R)$ és $\mathbf{E}(|\xi_2|^R)$ léteznek. Mivel azonban bármely $R>0$ mellett (lásd pl. [2], 155. o.) $\mathbf{E}(|\xi_1+\xi_2|^R)$ létezik $1 \leqq R < R_0 < 2$-re, $\int_{-\infty}^{\infty} |x-y|^R dF(x)$ is létezik, ahol $F(x)$ $\xi_1+\xi_2$ eloszlásfüggvénye. Az a) esetben a 2. pont elején mondottak értelemszerű alkalmazása igazolja a tétel állításait. A b) esetben $\xi_1+\xi_2$ eloszlásfüggvénye szigorúan monoton, minthogy egyik összeadandójáé is ilyen. Ekkor azonban $\xi_1+\xi_2$-nek *egyetlen* mediánja van, s ebből már következnek állításaink.

Mint tudjuk, egy nem-elfajult eloszlásfüggvényt α *karakterisztikus kitevőjű stabilis eloszlásfüggvénynek* nevezünk, ha karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = e^{i\gamma t - c|t|^\alpha \{1 + i\beta\omega(t)\operatorname{sgn} t\}}$$

alakú, ahol α, β, γ, c valós paraméterek, $0<\alpha\leqq 2$, $|\beta|\leqq 1$, $c>0$, és

$$\omega(t) = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ & \text{ha} \\ \dfrac{2}{\pi}\log|t| & \alpha = 1 \end{cases}$$

(lásd [3], 171. o.). Ezen eloszlásfüggvényeknek mindig létezik sűrűségfüggvényük, amelyet *stabilis sűrűségfüggvénynek* nevezünk és a következőkben $s(x;\alpha,\beta,c,\gamma)$-val jelölünk. Ha ezen stabilis sűrűségfüggvény $x=\gamma$ körül szimmetrikus, akkor $\beta=0$, vagyis sűrűségfüggvényünk $s(x;\alpha,0,c,\gamma)$ alakú.

A következőkben mindenütt, ahol stabilis eloszlásfüggvény szerinti Stieltjes-integrál szerepelne, rögtön a megfelelő stabilis sűrűségfüggvény szerinti Riemann-integrált írjuk fel.

2. 2. TÉTEL. *Legyenek ξ_1 és ξ_2 független, stabilis sűrűségfüggvényű sztochasztikus változók, melyek sűrűségfüggvényei $s(x;\alpha,\beta,c_1,\gamma_1)$ ill. $s(x;\alpha,\beta,c_2,\gamma_2)$ ahol $1<\alpha<2$. Ekkor $1\leqq R<\alpha<2$-re $\mathbf{T}_R(\xi_1)$, $\mathbf{T}_R(\xi_2)$ és $\mathbf{T}_R(\xi_1+\xi_2)$ léteznek és*

$$[\mathbf{T}_R(\xi_1+\xi_2)]^{\alpha/R}=[\mathbf{T}_R(\xi_1)]^{\alpha/R}+[\mathbf{T}_R(\xi_2)]^{\alpha/R}. \tag{2. 1}$$

Bizonyítás. (A) Ismeretes, hogy egy α karakterisztikus kitevőjű stabilis eloszlásfüggvénynek létezik minden α-nál kisebb rendű abszolút momentuma (lásd [3], 189. o.); tehát $\alpha>1$ esetén $1\leqq R<\alpha$ mellett $\mathbf{E}(|\xi_1|^R)$ ill. $\mathbf{E}(|\xi_2|^R)$, vagyis a 2. pont elején mondottak alapján $\mathbf{T}_R(\xi_1)$ ill. $\mathbf{T}_R(\xi_2)$ létezik. A 2. 1. tétel folytán $\mathbf{T}_R(\xi_1+\xi_2)$ is létezik, figyelembe véve, hogy a stabilis eloszlásfüggvények egycsúcsúak (lásd pl. [4], 81. o.) és így szigorúan monotonok is.[1]

(B) Tekintsük az $s(x;\alpha,\beta,1,0)$ stabilis sűrűségfüggvényt. A karakterisztikus függvényeket felírva, azonnal belátható, hogy

$$s(x;\alpha,\beta,c_1,\gamma_1)=s\left(\frac{x-\gamma_1}{c_1^{1/\alpha}};\alpha,\beta,1,0\right),$$

$$s(x;\alpha,\beta,c_2,\gamma_2)=s\left(\frac{x-\gamma_2}{c_2^{1/\alpha}};\alpha,\beta,1,0\right)$$

és $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvénye

$$s\left(\frac{x-(\gamma_1+\gamma_2)}{(c_1+c_2)^{1/\alpha}};\alpha,\beta,1,0\right).$$

Ezekből

$$\mathbf{T}_R(\xi_1)=\min_{-\infty<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^R s\left(\frac{x-\gamma_1}{c_1^{1/\alpha}};\alpha,\beta,1,0\right)dx=$$

$$=\min_{-\infty<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|c_1^{1/\alpha}x+\gamma_1-y|^R s(x;\alpha,\beta,1,0)\,dx=$$

$$=c_1^{R/\alpha}\min_{-\infty<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|x-\frac{y-\gamma_1}{c_1^{1/\alpha}}\right|^R s(x;\alpha,\beta,1,0)\,dx=$$

$$=c_1^{R/\alpha}\min_{-\infty<y<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x-y|^R s(x;\alpha,\beta,1,0)\,dx.$$

[1] Ez azt is jelenti, hogy egy stabilis eloszlásfüggvényű sztochasztikus változónak mindig *egyetlen* mediánja van. (A quantiliseiről is ugyanez állítható.)

Hasonlóan

$$\mathbf{T}_R(\xi_2) = c_2^{R/\alpha} \min_{-\infty<y<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x-y|^R s(x; \alpha, \beta, 1, 0)\, dx$$

és

$$\mathbf{T}_R(\xi_1+\xi_2) = (c_1+c_2)^{R/\alpha} \min_{-\infty<y<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x-y|^R s(x; \alpha, \beta, 1, 0)\, dx.$$

Ezekből

$$[\mathbf{T}_R(\xi_1+\xi_2)]^{\alpha/R} = [\mathbf{T}_R(\xi_1)]^{\alpha/R} + [\mathbf{T}_R(\xi_2)]^{\alpha/R},$$

ahogy állítottuk.

(2. 1) különösen egyszerű alakot ölt $R=\frac{\alpha}{2}$, vagy $R=1$ megválasztás mellett. *Eldöntetlen, hogy ez a tétel megfordítható-e.* Ha így volna, ezzel az $\alpha>1$ karakterisztikus kitevőjű stabilis eloszlásfüggvények *új jellemzését* adhatnánk meg.

1. MEGJEGYZÈS. Hasonló eszközökkel bizonyítható, hogy az előbbi R mellett

$$[\mathbf{N}_R(\xi_1+\xi_2)-(\gamma_1+\gamma_2)]^\alpha = [\mathbf{N}_R(\xi_1)-\gamma_1]^\alpha + [\mathbf{N}_R(\xi_2)-\gamma_2]^\alpha;$$

ez az összefüggés csak $\gamma_1=\gamma_2=0$ esetén egyszerűsödik.

2. MEGJEGYZÉS. Az az eset, amidőn ξ_1 ill. ξ_2 eloszlásfüggvénye elfajult, könnyen áttekinthető, de érdektelen, ezért nem is foglalkozunk vele.

3.

$R<1$ esetén $\mathbf{T}_R(\xi)$ létezéséről nem sokat mondhatunk. A nehézséget az okozza, hogy általában nem biztos, hogy *egyetlen* minimuma lesz az (1. 1)-ben szereplő függvénynek. (A 2. 2. tétel *egyedül* emiatt nem mondható ki (újabb megszorítások nélkül) $\alpha\leq 1$ esetére is.)

Legyen R_0 és R értelmezése ugyanaz, mint az 1. pontban. Ekkor egyetlen minimum létezésének $R<1$ *esetén is* fennálló bizonyos feltételeit foglalja magában a

3. 1. TÉTEL. *Legyen η az $x=\mu$ hely körül szimmetrikus $a(x)$ sűrűségfüggvényű sztochasztikus változó, amelynek $\alpha(t)=e^{i\mu t}A(t)$ karakterisztikus függvénye a következő feltételeknek tesz eleget:*

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{A(t)}{t^R}\,dt$ *$(R<1)$ létezik;*

b) *ha $t>0$ és $0<R<R_0<2$, $\frac{A(t)}{t^R}$ nemnegatív és szigorúan monoton csökkenő.*

Ekkor $\mathbf{T}_R(\eta)$ $(R<1)$ létezik.

Bizonyítás. Mivel $|x|^R$ $(0<R<2)$ *többek közt* az

$$|x|^R = C_R \int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^{R+1}}\,dt$$

alakban is előállítható, ahol

$$C_R = \frac{2^R R\Gamma\left(\frac{1+R}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2-R}{2}\right)},$$

a feltételeink szerint létező $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^R a(x)\,dx$ integrálra fennáll:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^R a(x)\,dx = C_R \int\limits_0^{\infty} \frac{1-\operatorname{Re}\alpha(t)}{t^{R+1}}\,dt \qquad (0<R<R_0)$$

(az integrálok felcserélhetőségét illetőleg lásd pl. [5], 504. o.)[2] Következésképpen

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x-y|^R a(x)\,dx &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^R a(x+y)\,dx = C_R \int\limits_0^{\infty} \frac{1-\operatorname{Re}[e^{-iyt}\alpha(t)]}{t^{R+1}}\,dt = \\ &= C_R \int\limits_0^{\infty} \frac{1-A(t)\cos(\mu-y)t}{t^{R+1}}\,dt \qquad (0<R\leqq R_0),\end{aligned}$$

minthogy $a(x)$ típusa folytán $A(t)$ valós és páros függvény. $\mathbf{T}_R(\eta)$ létezik, ha (3. 1)-nek egyetlen minimuma van. Feltételeink folytán a (3. 1) alatti függvényt deriválhatjuk y szerint úgy, hogy a deriválást és integrálást felcseréljük; ekkor az $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x-y|^R a(x)dx$ függvényt minimalizáló y értékek az

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{A(t)\sin(y-\mu)t}{t^R}\,dt = 0 \qquad (0<R\leqq R_0)$$

egyenlet gyökei lesznek. Mivel feltételeink folytán a bal oldalon álló integrál y

[2] Ha a ξ sztochasztikus változó sűrűségfüggvénye $a(x)$, az utóbbi összefüggés az $\mathbf{E}(|\xi|^R)$ $(0<R<2)$ R-edik abszolút momentumot szolgáltatja. Ha pl. ξ karakterisztikus függvénye $e^{-c|t|^\alpha}$ $(c>0,\ 0<\alpha\leqq 2)$, $0<R<\alpha\leqq 2$ esetén

$$\mathbf{E}(|\xi|^R) = \frac{2^R\Gamma\left(\frac{1+R}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-R}{\alpha}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2-R}{2}\right)}\,c^{\frac{R}{\alpha}}.$$

Ha ξ sűrűségfüggvénye normális $(\alpha=2)$, ebből $R=1$ mellett az ismert $\mathbf{E}(|\xi|) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{c}$ összefüggést kapjuk.

folytonos függvénye, $y=\mu$-nél zérussá válik; egy keresett gyök tehát $y=\mu$. Több gyök azonban nincs is, mert $y\neq\mu$ esetén

$$\int_0^\infty \frac{A(t)\sin(y-\mu)t}{t^R}\,dt = \sum_{r=0}^\infty \int_{r\pi/(y-\mu)}^{(r+1)\pi/(y-\mu)} \frac{A(t)}{t^R}\sin(y-\mu)t\,dt =$$

$$= \sum_{r=0}^\infty (-1)^r \int_0^{\pi/(y-\mu)} \frac{A[t+r\pi/(y-\mu)]}{[t+r\pi/(y-\mu)]^R}\sin(y-\mu)t\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/(y-\mu)} \left\{\sum_{r=0}^\infty (-1)^r \frac{A[t+r\pi/(y-\mu)]}{[t+r\pi/(y-\mu)]^R}\right\}\sin(y-\mu)t\,dt > 0,$$

figyelembe véve, hogy $0<t\leqq\pi/(y-\mu)$ esetén a { }-ben álló függvénysor — mely az $\frac{A(t)}{t^R}$-re tett feltevés folytán rögzített t mellett *Leibniz*-sort ad — pozitív összegű és egyenletesen konvergens.

(3. 1)-nek tehát egyetlen minimuma van; ezzel a bizonyítás kész.

MEGJEGYZÉS. Az előzőkből következik, hogy esetünkben

$$\text{(3. 2)}\qquad \mathbf{T}_R(\eta) = \min_{-\infty<y<\infty} C_R \int_0^\infty \frac{1-A(t)\cos(\mu-y)t}{t^{R+1}}\,dt = C_R\int_0^\infty \frac{1-A(t)}{t^{R+1}}\,dt.$$

3. 2. TÉTEL. *Legyenek ζ_1 és ζ_2 független, szimmetrikus stabilis sűrűségfüggvényű sztochasztikus változók, melyeknek sűrűségfüggvényei $s(x;\,\alpha,0,c_1,\gamma_1)$ ill. $s(x;\,\alpha,0,c_2,\gamma_2)$, ahol $0<\alpha<2$. Ekkor $0<R<\alpha<2$ mellett $\mathbf{T}_R(\zeta_1)$, $\mathbf{T}_R(\zeta_2)$ és $\mathbf{T}_R(\zeta_1+\zeta_2)$ léteznek és*

$$[\mathbf{T}_R(\zeta_1+\zeta_2)]^{\alpha/R} = [\mathbf{T}_R(\zeta_1)]^{\alpha/R}+[\mathbf{T}_R(\zeta_2)]^{\alpha/R}.$$

Bizonyítás. $1<\alpha<2$ és $1\leqq R<\alpha<2$ esetében a tétel a 2. 2. tétel alesete. A többi esetben vegyük figyelembe, hogy $s(x;\,\alpha,0,c_1,\gamma_1)$ ill. $s(x;\,\alpha,0,c_2,\gamma_2)$ karakterisztikus függvényei

$$\varphi_1(t) = e^{i\gamma_1 t}e^{-c_1|t|^\alpha},$$

ill.

$$\varphi_2(t) = e^{i\gamma_2 t}e^{-c_2|t|^\alpha}.$$

A 3. 1. tétel ζ_1 és ζ_2-re, valamint a $\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)=e^{i(\gamma_1+\gamma_2)t}e^{-(c_1+c_2)|t|^\alpha}$ karakterisztikus függvényű $\zeta_1+\zeta_2$ sztochasztikus változóra alkalmazható, vagyis ekkor $\mathbf{T}_R(\zeta_1)$, $\mathbf{T}_R(\zeta_2)$ és $\mathbf{T}_R(\zeta_1+\zeta_2)$ létezik. Ekkor azonban ζ_1 és ζ_2-re — értelemszerű átfogalmazással — fennáll a 2. 2. tétel bizonyításának (B) része, és ezzel állításunkat igazoltuk.

1. MEGJEGYZÉS. A megfelelő $\mathbf{N}_R(\zeta_1)$ ill. $\mathbf{N}_R(\zeta_2)$-re is fennáll bizonyos egyszerű összefüggés; a levezetést mellőzzük.

2. MEGJEGYZÉS. Ha egy ζ szimmetrikus stabilis sűrűségfüggvényű sztochasztikus változó, $\varphi(t)=e^{i\gamma t}e^{-c|t|^{\alpha}}$ $(0<\alpha<2,\ c>0)$ karakterisztikus függvénnyel, akkor $\mathbf{T}_R(\zeta)$ $(0<R<\alpha<2)$ kiszámítható. Ekkor ugyanis (vö. (3. 2)-vel)

$$\mathbf{T}_R(\zeta)=C_R\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-c|t|^{\alpha}}}{t^R}\,dt=C_R\left[\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-t^{\alpha}}}{t^{R+1}}\,dt\right]c^{R/\alpha}=$$

$$=\frac{2^R\Gamma\left(\frac{1+R}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-R}{\alpha}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{2-R}{2}\right)}c^{R/\alpha}=\mathbf{E}(|\xi|^R).$$

Adott α mellett R alkalmas megválasztásával $\mathbf{T}(\zeta)$ alakja erősen egyszerűsíthető.

4.

Záradékul megemlítjük még a következőket:

[1] 283. o.-án bevezettük a következő *„(a)-keskenyebbség”* definíciót:

Legyenek $F_1(x)$ és $F_2(x)$ nem-elfajult, szigorúan egycsúcsú (azaz bizonyos $x=a$ „csúcshelytől” balra alulról konvex, jobbra alulról konkáv) eloszlásfüggvények. Ha $F_2^{-1}(x)-F_1^{-1}(x)$ $(0<x<1)$ monoton csökkenő, de nem konstans függvény, akkor azt mondjuk, hogy *„$F_2(x)$ grafikonja, G_2, (a)értelemben keskenyebb, mint $F_1(x)$ grafikonja, G_1”*, és ezt a viszonylatot $G_2 \overset{a}{\prec} G_1$-gyel jelöljük.

Ezt a definíciót az indokolja, hogy G_2 G_1-hez viszonyítva abszcisszatengely menti „összenyomással” keletkezik.

W. R. VAN ZWET [6] és [7] munkáiban egy hasonló, de kevésbé általános definíciót közöl. Ez — kissé átfogalmazva — így hangzik:

Egy $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvényt $x=x_0$ körül szimmetrikusnak nevezünk, ha minden valós x-re $F(x_0-x)+F(x_0+x)=1$. Legyen $F_1(x)$ ill. $F_2(x)$ folytonos, szigorúan monoton, szimmetrikus eloszlásfüggvény; $F_2(x)$ legyen $x=x_0$ körül szimmetrikus. Azt mondjuk, hogy $F_2(x)$ (keskenységben) megelőzi $F_1(x)$-et (jelben: $F_2(x)\underset{s}{<}F_1(x)$), ha $F_1^{-1}[F_2(x)]$ konvex $x>x_0$-ra.

Látható, hogy a mi definíciónk ennél bizonyos értelemben tágabb, hiszen szimmetricitást nem köt ki. Részletesebb összehasonlításra itt nem térhetünk ki, csak a következőt említjük meg:

W. R. VAN ZWET keskenyebbség-fogalma igen jól felhasználható matematikai statisztikai vizsgálatokban. Érdemes volna megvizsgálni a mi „(a)-keskenyebbség” fogalmunk alkalmazási lehetőségeit is.

IDÉZETT IRODALOM

[1] MEDGYESSY PÁL: Eloszlás- és sűrűségfüggvény-grafikonok alakjának jellemzéséről, I. *MTA III. Oszt. Közl.* **14** (1964) 279—292.
[2] M. LOÈVE: *Probability theory*, 2nd ed. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, 1960.
[3] B. V. GNYEGYENKO—A. N. KOLMOGOROV: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
[4] И. А. Ибрагимов—Ю. В. Линник: *Независимые и стационарно связанные величины.* Изд. „Наука", Москва, 1965.
[5] M. A. BROMWICH—T. M. MACROBERT: *An introduction to the theory of infinite series.* 2nd ed., rev.. Macmillan, London, 1955.
[6] W. R. VAN ZWET: *Convex transformations of random variables. Math. Centre Tracts* **7** (1964). Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964.
[7] W. R. VAN ZWET: Convex transformations: A new approach to skewness and kurtosis. *Statistica Neerlandica* **18** (1964) 433—441.

(Beérkezett: 1966. VIII. 30.)

ON THE CHARACTERIZATION OF THE SHAPE OF GRAPHS OF DISTRIBUTION AND DENSITY FUNCTIONS, II.

by

P. MEDGYESSY

Summary

In case of random variables ξ for which $\mathbf{D}^2(\xi)=\infty$ the quantity $\mathbf{T}_R(\xi)$ defined by (1.2) (a straightforward generalisation of the variance) may be introduced as a measure of dispersion. — Under certain circumstances $\mathbf{T}_R(\xi)$ behaves like the variance; especially if ξ_1 and ξ_2 are independent stable stochastic variables of characteristic exponent $\alpha(1<\alpha<2)$ then for $\mathbf{T}_R(\xi_1+\xi_2)$ (2.1) holds. If, moreover, the characteristic function of ξ_1 and ξ_2, resp. has the analytical form $e^{i\gamma t}e^{-c|t|^\alpha}$ then (2.1) holds also for $0<\alpha\leqq 1$.

A CSOPORTOK JELLEMZÉSÉRŐL

Írta: LAJOS SÁNDOR

F legyen félcsoport, vagyis elemeknek olyan halmaza, amely zárt egy kétváltozós asszociatív műveletre vonatkozólag. Ebben a cikkben multiplikatív írásmódot alkalmazunk, vagyis szorzásnak nevezzük az iménti műveletet.

SZÁSZ GÁBOR [8] nyomán az F félcsoportot balról egyszerűsíthető félcsoportnak nevezzük, ha elemeire érvényes a baloldali egyszerűsítési szabály, azaz

$$ax = ay$$

fennállásából $x = y$ következik tetszőleges F-hez tartozó a, x, y elemekre. Analóg módon értelmezhető a jobbról egyszerűsíthető félcsoport. F-et egyszerűsíthető félcsoportnak nevezzük, ha mind balról, mind jobbról egyszerűsíthető.

Regulárisnak nevezzük az F félcsoportot, ha bármely a eleméhez létezik legalább egy olyan $x \in F$ elem, amelyre

$$(\ast) \qquad axa = a.$$

Mint ismert, egy félcsoportot csoportnak nevezünk, ha van kétoldali egységeleme és mindegyik elemének van kétoldali inverze (lásd [2]). Egy véges, egyszerűsíthető félcsoport szükségképpen csoport (lásd [7]). Általában azonban az egyszerűsíthetőség nem elegendő ahhoz, hogy egy félcsoport csoport legyen.

Bebizonyítjuk a következő tételt, amely négy (egymással ekvivalens) szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy tetszőleges félcsoport csoport legyen.

TÉTEL. *Egy tetszőleges F félcsoportra vonatkozólag az alábbi állítások egymással ekvivalensek:*

(1) *F csoport;*

(2) *F egyszerűsíthető és reguláris;*

(3) *F-nek mindegyik a elemére az $axa = a$ egyenlet F-ben egyértelműen megoldható;*

(4) *F reguláris és az $exe = e$ egyenletnek F mindegyik e idempotens elemére csak egy megoldása van;*

(5) *F reguláris és csak egy idempotens eleme van.*

Bizonyítás. (1)-ből következik (2), mivel bármely csoportban érvényes mind a bal, mind a jobb oldali egyszerűsítési szabály, s az a elem inverze kielégíti a $(\ast)$ egyenletet.

(2)-ből következik (3). Tegyük fel, hogy az F félcsoport egyszerűsíthető és reguláris. Akkor az F bármelyik a eleméhez létezik olyan x elem, amelyre $(\ast)$ fennáll. Ha még egy y elem is kielégítené a $(\ast)$ egyenletet, akkor $axa = aya$ következne, s ebből az egyszerűsíthetőség következtében $x=y$ adódik. Így az $axa=a$ egyenletnek csak egy megoldása van, vagyis fennáll (3).

Az, hogy (3)-ból (4) következik, nyilvánvaló.

(4)-ből következik (5). Először megmutatjuk, hogy a (4) feltételt kielégítő F félcsoport idempotens elemei egymással felcserélhetők. Legyen e és f az F-nek két különböző idempotens eleme. Ha $a=ef$ és $\bar{a}=xax$, ahol x a $(*)$ egyenlet megoldása, akkor könnyű belátni, hogy

$$axax=(ax)e(ax)=ax,$$

és hasonló módon

$$xaxa=(xa)f(xa)=xa.$$

Innen a (4) feltétel alapján következik, hogy $ax=e$ és $xa=f$. Így

$$\bar{a}=xe=fx.$$

Ebből azonban adódik, hogy

$$\bar{a}e=\bar{a}=f\bar{a}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\bar{a}=\bar{a}a\bar{a}=\bar{a}ef\bar{a}=\bar{a}\bar{a},$$

vagyis az $\bar{a}$ elem idempotens eleme az F félcsoportnak. Azonban az $\bar{a}a\bar{a}=\bar{a}$ és $\bar{a}\bar{a}\bar{a}=\bar{a}$ összefüggésekből (4) alapján $a=\bar{a}$ következik. Így azt nyertük, hogy

$$ae=a=fa,$$

vagyis

$$efe=ef=fef.$$

A $b=fe$ elemből kiindulva, a fentivel analóg meggondolás mutatja, hogy

$$eb=b=bf,$$

azaz

$$efe=fe=fef.$$

Így azt nyertük, hogy

$$ef=fe,$$

tehát az F félcsoport idempotens elemei felcserélhetők egymással.

Most megmutatjuk, hogy F-nek csak egyetlen idempotens eleme van. Legyen ismét $a=ef$, ahol e, f az F-nek idempotens elemei. Akkor az idempotens elemek felcserélhetősége miatt $aea=a$ és $afa=a$. A (4) feltétel alapján innen adódik, hogy $e=f$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (4) feltételt kielégítő F félcsoport (5)-öt is kielégíti.

(5)-ből következik (1). Legyen F reguláris félcsoport és e az F-nek egyetlen idempotens eleme. Ha a az F-nek tetszőleges eleme, akkor létezik a $(*)$ egyenletet kielégítő $x\in F$ elem: $axa=a$. Innen következik, hogy

$$(ax)(ax)=ax,$$

vagyis

$$ax=e.$$

Hasonló módon igazolható, hogy

$$xa=e.$$

is fennáll. Az x elem tehát kétoldali inverze a-nak, ha e egységeleme F-nek. e azonban egységelem, mert

$$ae = a(xa) = a$$

és

$$ea = (ax)a = a.$$

F tehát csakugyan csoport.

Ezzel tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy az (1) és (2) feltételek ekvivalenciáját már THIERRIN [10] igazolta, s az, hogy (5)-ből (1) következik, CLIFFORD és PRESTON [1] könyvében bizonyítás nélkül ki van mondva. Arra, hogy egy félcsoport reguláris legyen, a [3, 4] dolgozataimban adtam szükséges és elégséges feltételeket. Ha az F félcsoport reguláris és ezenkívül csupán balról egyszerűsíthető, akkor F nem lesz szükségképpen csoport. Ezzel kapcsolatban lásd [5] és [9]. A tételben szereplő állítások közül az első négynek az ekvivalenciáját egy korábbi dolgozatomban bizonyítottam [6]. A csoportokat (m, n)-ideálok segítségével jellemeztem a [4] dolgozat második részében.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] CLIFFORD A. H. és G. B. PRESTON: *The algebraic theory of semigroups*, vol. I, Providence, 1961.
[2] KUROS A. G.: *Csoportelmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
[3] LAJOS S.: A remark on regular semigroups, *Proc. Japan Acad.* **37** (1961), 29—30.
[4] LAJOS S.: A félcsoportok ideálelméletéhez, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.* **11** (1961), 57—66; II. rész: **14** (1964), 293—299.
[5] LAJOS S.: A remark on right groups, *Matematički Vesnik* (Beograd), **1** (**16**), (1964), 247—248.
[6] LAJOS S.: On characterization of groups, *Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Math. Astr. Phys.*, **14** (1966), 55—56.
[7] RÉDEI L.: *Algebra*, I. kötet, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
[8] SZÁSZ G.: Hazai eredmények a félcsoportelmélet területén az 1956—1965 években, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Tud. Oszt. Közl.* **16** (1966), 281—292.
[9] SZÉP J.: Zur Theorie der Halbgruppen, *Publ. Math.*, **4** (1955-56), 344—347.
[10] THIERRIN G.: Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-groupe soit un groupe, *C. R. Acad. Sci.* (Paris) **232** (1951), 376—378.

(Beérkezett: 1966. IX. 1.)

SOME CHARACTERIZATIONS OF GROUPS

by

S. LAJOS

Summary

In this paper the author proves the following

THEOREM. *For any semigroup S the following conditions are equivalent:*

(1) *S is a group;*
(2) *S is regular and cancellative;*
(3) *For each element a in S the equation axa=a has exactly one solution x in S;*
(4) *S is regular and for every idempotent e of S the equation exe=e has only one solution x in S;*
(5) *S is a regular semigroup containing exactly one idempotent element.*

A KOLMOGOROV-EGYENLŐTLENSÉGRŐL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF

KOLMOGOROV egyenlőtlensége eredeti formájában a következő: legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy mindegyikük szórása létezik. Jelölje M_i a ξ_i változó várható értékét, D_i pedig a szórását, és legyen $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$. Ha $\lambda > 0$ tetszőleges szám és $P(\cdot)$ jelöli a zárójelben levő esemény valószínűségét, akkor

$$P\left(\operatorname*{Max}_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i) \right| \geq \lambda S_n \right) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

KOLMOGOROV egyenlőtlenségét többféle módon általánosították. Ilyen volt például a martingálokra vonatkozó általánosítás [3]. Nemrégen RÉNYI ALFRÉD [1] feltételes KOLMOGOROV-egyenlőtlenséget vezetett le. Jelen dolgozatnak az a célja, hogy a feltételes valószínűségi mérték helyett — amely abszolút folytonos az eredeti P valószínűségi mértékre nézve — tetszőleges, a P mértékre nézve abszolút folytonos Q valószínűségi mértéket véve, általánosítsa RÉNYI ALFRÉD és mások eredményét [6].

Nyilvánvaló, hogy ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók teljesen függetlenek a P mérték szerint, várható értékük és szórásuk létezik, akkor ugyanezen valószínűségi változók a Q mérték szerint nem feltétlenül lesznek függetlenek. Ily módon a

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M(\xi_i)) \right| \geq \varepsilon \right) \qquad (\varepsilon > 0)$$

Q-valószínűségek megbecslése azt jelenti, hogy a Q-ra nézve nem független valószínűségi változók összegei maximumának valószínűségi viselkedését is ismerjük, ha Q abszolút folytonos a P mértékre nézve. Megemlítjük, hogy az e dolgozatban leírt 3. Tételt határeloszlástételek bizonyítására fel lehetett használni ([6]) abban a speciális esetben, mikor Q a P valószínűségből képzett feltételes valószínűség.

Először néhány triviális általánosítást mutatunk a következő megjegyzésekben.

1. MEGJEGYZÉS. Ha dQ/dP, vagyis a Q mérték *Radon—Nikodym* deriváltja a P mérték szerint (mint valószínűségi változó), független a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változóktól és ez utóbbiak is teljesen függetlenek, akkor

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M(\xi_i)) \right| \geq \lambda D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)\right) = \int_{\Omega} \chi \frac{dQ}{dP} dP =$$

$$= \int_{\Omega} \chi \, dP \cdot \int_{\Omega} \frac{dQ}{dP} dP \leq \frac{1}{\lambda^2} \qquad (\lambda > 0),$$

ahol χ az

$$A = \left\{ \operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M(\xi_i)) \right| \geqq \lambda D \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \right) \right\}$$

esemény indikátora, azaz $\chi = 1$, ha az A és $\chi = 0$, ha nem az A esemény következik be. Ez esetben tehát a *Kolmogorov*-egyenlőtlenségben szereplő felső becslés érvényes.

2. Megjegyzés. Ha $\left| \frac{dQ}{dP} \right| \leqq K$, ahol K véges, akkor a következő triviális becslést kapjuk:

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M(\xi_i)) \right| \geqq \lambda D \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \right) \right) \leqq \frac{K}{\lambda^2}.$$

Megjegyezzük, hogy ez esetekben a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók másodrendű momentumainak létezését tételeztük csak fel.

A következőkben az $\{\Omega, \mathscr{A}\}$ mérhető teret vesszük alapul, ahol Ω az alaptér, $\mathscr{A}$ pedig az Ω bizonyos részhalmazaiból alkotott σ-algebra. $\mathscr{A}$ elemeit eseményeknek is nevezzük. Az $\{\Omega, \mathscr{A}\}$ mérhető téren értelmezett P és Q mértékeket valószínűségeknek nevezzük, ha Ω mértéke 1. Az Ω téren értelmezett $\mathscr{A}$ szerint mérhető függvényeket ez esetben valószínűségi változóknak nevezzük. Ezek absztrakt Lebesgue-integráljait pedig várható értéknek fogjuk nevezni. A ξ valószínűségi változó várható értékét az $M(\xi)$ jellel jelöljük.

A következő eredmény az [1] dolgozat tételének általánosítása.

1. Tétel. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ az $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ valószínűségi mezőn értelmezett független valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy negyedik momentumuk létezik. Legyen $M(\xi_i) = M_i$, $D(\xi_i) = D_i$, $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$ és λ tetszőleges pozitív szám. Legyen továbbá Q az $\{\Omega, \mathscr{A}\}$ mérhető téren értelmezett és a P mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték, amelyre teljesül, hogy P szerinti Radon—Nikodym deriváltja, dQ/dP, négyzetesen integrálható. Ekkor*

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i) \right| \geqq \lambda S_n \right) \leqq \frac{c_n \sqrt{\int\limits_{\Omega} \left(\frac{dQ}{dP} \right)^2 dP}}{\lambda^2},$$

ahol

$$c_n = 2 + \sqrt{3 + \left(\frac{F_n}{S_n} \right)^4} \quad \text{és} \quad F_n^4 = \sum_{i=1}^{n} M((\xi_i - M_i)^4).$$

Bizonyítás. Legyen $\vartheta_k = \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i)$. Jelölje A_k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ a következő eseményt:

$$|\vartheta_i| \leqq \lambda S_n, \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1) \quad \text{és} \quad |\vartheta_k| > \lambda S_n,$$

és A_1 jelölje a $|\vartheta_1| > \lambda S_n$ eseményt. Legyen $g = dQ/dP$ és α_k az A_k esemény indikátora $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ekkor

$$\alpha_i \alpha_j = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j, \quad \text{és} \quad 0 \leqq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqq 1.$$

Fennál továbbá, hogy

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-M_i)\right|\geqq \lambda S_n\right)=\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)g\,dP=M\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g\right).$$

Vizsgáljuk a $g\vartheta_n^2$ várható értékét. Könnyű látni, hogy

$$(*)\qquad M(g\vartheta_n^2)\geqq\sum_{k=1}^{n}M(g\alpha_k\vartheta_k^2)+2\sum_{k=1}^{n-1}M(g\alpha_k\vartheta_k(\vartheta_n-\vartheta_k)).$$

A jobb oldalon a második összeg a következő alakban is írható:

$$2\sum_{j=2}^{n}M(g\beta_j),$$

ahol

$$\beta_j=(\xi_j-M_j)\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k\qquad (j=2,3,\ldots,n).$$

A $\{\beta_j\}$ $(j=2,3,\ldots,n)$ rendszer szubortonormált. Ugyanis, ha például $j<i$, akkor a ξ_i-M_i valószínűségi változó független a P valószínűségre nézve a $\beta_i\beta_j$ szorzatban levő összes többi valószínűségi változótól, és így

$$M(\beta_i\beta_j)=0\qquad (i\neq j).$$

Másrészt

$$M(\beta_j^2)=M[(\xi_j-M_j)^2]M\left[\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k\right)^2\right]\leqq D_j^2S_n^2<+\infty.$$

Ugyanis

$$M\left[\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k\right)^2\right]=M\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k^2\right)\leqq M(\vartheta_{j-1}^2)\leqq S_n^2,$$

hiszen

$$M\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\vartheta_k^2\right)\leqq M\left(\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k(\vartheta_k+(\xi_{k+1}-M_{k+1})+\ldots+(\xi_{j-1}-M_{j-1}))^2\right),$$

mivel az α_k és ϑ_k valószínűségi változók csak a $\xi_1,\ldots,\xi_k$ változóktól függenek.

Alkalmazva *Cauchy*, majd *Bessel* egyenlőtlenségét, nyerjük, hogy

$$\left|M\left(g\sum_{j=2}^{n}\beta_j\right)\right|=\left|M\left(\sum_{j=2}^{n}\left(g\frac{\beta_j}{\sqrt{M(\beta_j^2)}}\right)\sqrt{M(\beta_j^2)}\right)\right|\leqq$$

$$\leqq\sqrt{\sum_{j=2}^{n}M^2\left(g\frac{\beta_j}{\sqrt{M(\beta_j^2)}}\right)\sum_{j=2}^{n}M(\beta_j^2)}\leqq\sqrt{\int_{\Omega}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2dP}\,S_n^2.$$

Figyelembe véve, hogy $\alpha_k=1$ esetén $\vartheta_k^2\geqq\lambda^2S_n^2$, és felhasználva legutóbbi egyenlőtlenségünket, $(*)$ alapján

$$(**)\quad M(g\vartheta_n^2)\geqq Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-M_i)\right|\geqq\lambda S_n\right)\lambda^2S_n^2-2\sqrt{\int_{\Omega}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2dP}\,S_n^2.$$

Másrészről

$$M(g\vartheta_n^2) \leqq \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}\,\sqrt{M(\vartheta_n^4)}.$$

Minthogy

$$M(\vartheta_n^4) \leqq F_n^4 + 3S_n^4,$$

azért ezt összehasonlítva a $(\ast\ast)$ egyenlőtlenséggel, nyerjük tételünk állítását.

3. MEGJEGYZÉS. Legyen speciálisan $Q(A) = P(A|C)$, ahol $P(C) > 0$ és C tetszőleges esemény. Ez esetben mod P egyértelműen

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{\chi_C(\omega)}{P(C)},$$

ahol $\chi_c(\omega)$ a C esemény indikátora. Ekkor, ha az 1. Tétel többi feltétele teljesül,

$$P\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n | C\right) \leqq \frac{c_n}{\lambda^2\sqrt{P(C)}}.$$

Ez a formula RÉNYI ALFRÉD eredménye [1].

Tételünk szépséghibája, hogy az eredeti *Kolmogorov*-egyenlőtlenség feltételeivel szemben a valószínűségi változók negyedik momentumának létezését fel kellett tételezni. Jelenlegi módszerünk nem ad lehetőséget arra, hogy csak a második momentumok létezését tételezzük fel. Azonban $(2+\delta)$-rendű momentumok létezése már elegendő, ahol $\delta > 0$ tetszőleges szám. Ennek belátásához szükségünk van a következő állításra.

J. MARCINKIEWICZ és A. ZYGMUND tétele [4]. *Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, 0 várható értékű valószínűségi változókból álló sorozat. Ekkor minden $p \geqq 1$ esetén fennáll*

$$A_p \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{p/2} dP \leqq \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right|^p dP \leqq B_p \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{p/2} dP,$$

ha az itt szereplő integrálok léteznek. A_p és B_p csak a p számtól függő állandók.

Fogalmazzuk meg állításunkat $(2+\delta)$-rendű momentumok esetére.

2. TÉTEL. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ az $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ valószínűségi mezőn értelmezett független valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy $(2+\delta)$-rendű momentumuk létezik, ahol $\delta > 0$. Legyen $M(\xi_i) = M_i$, $D(\xi_i) = D_i$, $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$ és $\lambda > 0$ tetszőleges szám. Legyen továbbá Q az $\{\Omega, \mathscr{A}\}$ mérhető téren értelmezett és a P mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték. Feltesszük, hogy dQ/dP — a Q mérték P szerinti Radon—Nikodym-deriváltja — $(2+\delta)/\delta$-rendű momentuma létezik. Ekkor*

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n\right) \leqq \frac{C_n\left[\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{2+\delta}{\delta}} dP\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}}{\lambda^2},$$

ahol

$$C_n = \frac{(2+B_\delta)\sum_{j=1}^{n}\left[M(|\xi_j-M_j|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}}}{S_n^2},$$

és B_δ csak a δ-tól függő állandó.

Bizonyítás. Felhasználjuk az 1. Tétel bizonyításánál alkalmazott jelöléseket. Az

$$M(g\vartheta_n^2)$$

várható érték felülről való becslésénél alkalmazzuk egymás után HÖLDER, MARCINKIEWICZ és ZYGMUND, továbbá MINKOWSKY egyenlőtlenségét:

$$M(g\vartheta_n^2) \leqq \left[M\left(g^{\frac{2+\delta}{\delta}}\right)\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\left[M(|\vartheta_n|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

MARCINKIEWICZ és ZYGMUND tételéből nyerjük:

$$M(|\vartheta_n|^{2+\delta})^{\frac{2}{2+\delta}} \leqq \left[B'_\delta M\left(\left(\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-M_j)^2\right)^{\frac{2+\delta}{\delta}}\right)\right]^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

Végül a *Minkowsky*-egyenlőtlenség alapján

$$\left[M(|\vartheta_n|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}} \leqq B_\delta\sum_{j=1}^{n}\left[M(|\xi_j-M_j|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

Ily módon

$$M(g\vartheta_n^2) \leqq B_\delta\left[M\left(g^{\frac{2+\delta}{\delta}}\right)\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}\cdot\sum_{j=1}^{n}\left[M(|\xi_j-M_j|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

Az $M(g\vartheta_n^2)$ alulról való becslésekor ugyanúgy járhatunk el, mint az 1. Tétel bizonyításakor, ily módon kapjuk a $(**)$ egyenlőtlenséget. Ha $\delta<2$, akkor $(2+\delta)/\delta>2$, és így a *Hölder*-egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{M(g^2)} \leqq \left[M\left(g^{\frac{2+\delta}{2}}\right)\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}},$$

továbbá

$$S_n^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}\left[M(|\xi_j-M_j|^{2+\delta})\right]^{\frac{2}{2+\delta}} = C.$$

Ezért $(**)$ alapján

$$M(g\vartheta_n^2) \geqq Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-M_i)\right| \geqq \lambda S_n\right)\lambda^2 S_n^2 - 2\left[M\left(g^{\frac{2+\delta}{\delta}}\right)\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}C.$$

Összevetve az $M(g\vartheta_n^2)$ várható értékre adódó felső és alsó becsléseket, kapjuk tételünk állítását.

4. MEGJEGYZÉS. Tételezzük fel, hogy

a) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ azonos eloszlásúak, vagy pedig, hogy

b) létezik olyan $c>0$ szám, hogy $i=1,2,\ldots,n$ esetén

$$[M(|\xi_j-M_j|^{2+\delta})]^{\frac{1}{2+\delta}}\leqq c[M((\xi_j-M_j)^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Ez esetben tételünk állítása a következő:

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-M_i)\right|\geqq\lambda S_n\right)\leqq\frac{K\left[\int\limits_{\Omega}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^{\frac{2+\delta}{\delta}}dP\right]^{\frac{\delta}{2+\delta}}}{\lambda^2},$$

ahol K az a), ill. b) esetnek megfelelő állandó.

Mint említettük, jelen problémakörben nem tudunk megszabadulni annak feltételezésétől, hogy a valószínűségi változók kettőnél magasabb rendű momentumai is léteznek. Az alábbiakban bebizonyítunk egy aszimptotikus formulát, amelynél elegendő a második momentumok létezése.

3. TÉTEL. *Legyenek $\xi_1,\xi_2,\ldots$ független valószínűségi változók és létezzenek $M(\xi_i)=M_i$, $D^2(\xi_i)=D_i^2$. Legyen továbbá $S_n^2=\sum_{i=1}^{n}D_i^2$ és*

$$\zeta_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-M_i)}{S_n}.$$

Feltételezzük, hogy $n\to+\infty$ esetén ζ_n határeloszlása létezik és ζ_n^2 egyenletesen integrálható. Legyen Q a P mértékre nézve abszolút folytonos valószínűségi mérték, és tegyük fel, hogy dQ/dP, a Q mérték P szerinti Radon—Nikodym-deriváltja, korlátos. Ekkor létezik olyan, a Q mértéktől függő, $n_0=n_0(Q)$ egész szám, hogy $n\geqq n_0$ esetén

$$Q\left(\operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(\xi_i-M_i)\right|\geqq\lambda S_n\right)\leqq\frac{3\sqrt{\int\limits_{\Omega}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2dP}}{\lambda^2}.$$

Az e tételben megfogalmazott egyenlőtlenség hátránya, hogy csak a ζ_n változók határeloszlásának létezése esetén áll fenn, és a ζ_n^2 egyenletes integrálhatóságát is meg kell követelnünk. Hátránya az is, hogy nem minden n esetén érvényes. Jogosságát viszont az bizonyítja, hogy KOLMOGOROV egyenlőtlenségét határeloszlástételek, nagy számok erős törvényei stb. bizonyítására szokták használni, tehát az esetben, mikor n nagy. Jelen egyenlőtlenségünk egy speciális esetét, a $Q(A)=$ $=P(A|C)$ ($P(C)>0$, C rögzített) esetet, a [6] dolgozatban határeloszlástételek bizonyítására alkalmaztuk.

Tételünk bizonyításához a következő segédtételre van szükségünk:

LEMMA. *Legyen $\xi_1,\xi_2,\ldots$ az $\{\Omega,\mathcal{A},P\}$ valószínűségi mezőn értelmezett független valószínűségi változók sorozata és*

$$\zeta_n=\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n-A_n}{B_n},$$

ahol $B_n \to +\infty$. Tételezzük fel, hogy a $\{\zeta_n\}$ sorozatnak létezik határeloszlása. Legyen továbbá $f(x)$ valós értékű folytonos függvény, és tegyük fel, hogy az $\{|f(\zeta_n)|\}$ valószínűségi változó sorozat egyenletesen integrálható. Ha a Q valószínűségi mérték abszolút folytonos a P valószínűségre nézve és dQ/dP — a Q Radon—Nikodym-deriváltja a P mérték szerint — korlátos, akkor

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega} f(\zeta_n)\,dP = \lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega} f(\zeta_n)\,dQ.$$

Bizonyítás. Abból, hogy a $\{\zeta_n\}$ sorozatnak van határeloszlása, következik, hogy az $\{f(\zeta_n)\}$ sorozatnak is van határeloszlása, sőt erősen keverő is

$$G(y) = \int_{\{f(x)<y\}} dF(x)$$

határeloszlással, ahol $F(x)$ a $\{\zeta_n\}$ sorozat határeloszlása. Ebből, továbbá az $\{|f(\zeta_n)|\}$ sorozat egyenletes integrálhatóságából következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega} f(\zeta_n)\,dP = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dG(y)$$

(lásd pl. Loève [5], 196. oldal).

Minthogy Q a P mértékre nézve abszolút folytonos, és $\{f(\zeta_n)\}$ erősen keverő ([2]), adódik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} Q(f(\zeta_n) < y) = G(y).$$

Tehát az $\{f(\zeta_n)\}$ sorozat P és Q szerinti határeloszlása ugyanaz. Az $\{|f(\xi_n)|\}$ sorozat a Q mérték szerint is egyenletesen integrálható, mert dQ/dP korlátos. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega} f(\zeta_n)\,dQ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dG(y).$$

Ily módon a Lemma bizonyítást nyert.

A 3. *Tétel bizonyítása.* Fel fogjuk használni az 1. Tétel jelöléseit és az annak bizonyítása közben adódott (✳ ✳) egyenlőtlenséget. Becsüljük meg most felülről a

$$M(g\vartheta_n^2)$$

várható értéket. Minthogy a Lemma összes feltétele teljesül, azért

$$\lim_{n\to+\infty} M(g\zeta_n^2) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega} \zeta_n^2\,dQ = 1,$$

mert

$$\int_{\Omega} \zeta_n^2\,dP = 1.$$

Másrészt

$$\sqrt{\int_{\Omega}\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP} > 1, \qquad (Q \not\equiv P),$$

tehát bizonyos $n_0 = n_0(Q)$ indextől kezdve

$$M(g\zeta_n^2) < \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP} \qquad (n \geqq n_0)$$

vagyis, ha $n \geqq n_0$

$$M(g\vartheta_n^2) \leqq \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}\, S_n^2.$$

Ez és a $(**)$ egyenlőtlenség együttesen adják tételünk állítását.

5. MEGJEGYZÉS. Legyen speciálisan $Q(A) = P(A)B$, ahol $P(B) > 0$ és B rögzített esemény. A 3. Tétel feltételei mellett létezik olyan, csak a B-től függő n_0 index, hogy $n \geqq n_0$ esetén

$$P\left(\operatorname{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left|\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n \middle| B\right) \leqq \frac{3}{\sqrt{P(B)}\lambda^2}.$$

Ez az eredmény, amelyet a 3. Tétel speciális eseteként kaptunk, a [6] dolgozatban jelent meg.

IRODALOM

[1] A. RÉNYI, On Kolmogoroff's inequality *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Sci.* **6** (1961) Series A 411—415.
[2] A. RÉNYI, On mixing sequences of sets. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 215—228.
[3] J. L. DOOB, *Stochastic processes.* John Wiley and Sons, New York, 1953.
[4] J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND, Sur les fonctions indépendantes. *Fundamenta Mathematicae.* **29** (1937) 60—90.
[5] M. Лоэв, Теория вероятностей. Изд. Иностранной Литературы. Москва. 1962.
[6] J. MOGYORÓDI, A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. *Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. of Sci.* **7** (1962) Series A 409—424.

(Beérkezett: 1966. IX. 3.)

ON KOLMOGOROV'S INEQUALITY

By

J. MOGYORÓDI

Summary

Generalizing the results of [1] and [6] we prove the following: Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be independent random variables defined on the probability space $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ and having finite fourth moment. Denote by M_i, D_i^2 and f_i^4 the mean value, the variance and the central fourth moment, resp., of the variable $\xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Let further $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$, $F_n^4 = \sum_{i=1}^{n} f_i^4$. Let Q be any probability measure, which is absolutely continuous with respect to P. If dQ/dP — the Radon—Nikodym derivative of Q with respect to P — is square integrable, then (Theorem 1.)

$$Q\left(\operatorname{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left|\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i)\right| \geqq \lambda S_n\right) \leqq \frac{C_n \sqrt{\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}}{\lambda^2}$$

where $\lambda > 0$ is arbitrary and

$$C_n = 2 + \sqrt{3 + \left(\frac{F_n}{S_n}\right)^2}.$$

By the aid of a theorem, due to J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, we prove a similar theorem (Theorem 2) supposing only the existence of the moment of order $2+\delta$ ($\delta > 0$) of the variable $\xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

Theorem 3. gives an asymptotic inequality. In this case we suppose only the existence of the second order moment of the variable ξ_i ($i = 1, \dots, n$). Let us suppose also that

$$\zeta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - M_i)}{S_n}$$

has a limiting distribution, ζ_n^2 is uniformly integrable and that dQ/dP is bounded. Then there exists an index $n_0 = n_0(Q)$ such that for $n \geqq n_0$ we have.

$$Q\left(\operatorname{Max}_{1 \leqq k \leqq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (\xi_i - M_i) \right| \geqq \lambda S_n \right) \leqq \frac{3\sqrt{\int\limits_{\Omega} \left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 dP}}{\lambda^2}.$$

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1966. XII. 23. – Terjedelem: 10,75 (A/5) ív, 12 ábra

66-6466 Szegedi Nyomda

Ára: 23,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

1967. március 31.

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVII. KÖTET 2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1967

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XVII. kötet 2. szám.

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia II. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790 057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae.

ELOSZLÁSOK ELTÉRÉSÉNEK INFORMÁCIÓ-TÍPUSÚ MÉRTÉKSZÁMAI, I.*

Írta: CSISZÁR IMRE

0. §. Bevezetés

Az információelméletben és a matemetikai statisztikában egyaránt fontos szerepet játszik a valószínűségeloszlások egymástól való eltérésének S. KULLBACK által bevezetett információelméleti mértékszáma, a „megkülönböztetési információ" vagy I-divergencia (l. [20], [21]); ugyanezt a mennyiséget sokszor információnyereségnek, relatív információnak, vagy általánosított entrópiának is nevezik. Az I-divergencia általános definíciójával, főbb tulajdonságaival, valamint különböző interpretációival számos szerző foglalkozott, így A. PEREZ [24], [25], M. SZ. PINSZKER [27], G. KALLIANPUR [17], VINCZE I. [37] stb. A *Shannon*-féle információmennyiségen alapuló I-divergencia általánosításaként RÉNYI A. [29], [30] bevezette az α-rendű I-divergencia (információnyereség) fogalmát is.

Az irányított divergencia jellegű I-divergencia helyett gyakran célszerűbb a belőle származtatható szimmetrikus mennyiség, az ún. J-divergencia használata; ez utóbbi mennyiség — az információelmélettől függetlenül — már JEFFREYS [16] könyvében is szerepel. A J-divergencia segítségével bizonyította be HÁJEK [13], hogy két *Gauss*-mérték mindig vagy ekvivalens vagy ortogonális egymásra.

Az I-divergencia alkalmazásai közül disszertációm témájával kapcsolatban az elégséges statisztika fogalmának KULLBACK és LEIBLER [20] által adott információelméleti jellemzését, valamint a határeloszlástételek elméletében való alkalmazásokat kell megemlítenem. Az a gondolat, hogy információelméleti fogalmak felhasználhatók határeloszlástételek bizonyítására, JU. V. LINNIKtől származik [22].

Bár a LINNIK által tárgyalt esetben (centrális határeloszlástétel) az információelméleti módszer a szokásos módszereknél lényegesen bonyolultabban vezet csak célhoz, pl. *Markov*-láncok ergodicitásának tárgyalására a módszer egyszerűen és szemléletes módon alkalmazható (erre RÉNYI Alfréd mutatott rá, l. [29], [30]); a végtelen *Markov*-láncok ergodicitására vonatkozó tételnek éppen az „információelméleti" bizonyítása a legegyszerűbb (D. G. KENDALL [18]).

Az I-divergencia előnyös tulajdonságainak jelentős része az $f(u)=u\log u$ függvény konvexitásának következménye. (Pl. a határeloszlástételek bizonyítására való alkalmazhatóságra vonatkozólag l. RÉNYI és KENDALL említett dolgozatait.) Ennek alapján disszertációmban bevezetem (1. fejezet) a valószínűségeloszlások egymástól való eltérésének egy általánosított mértékszámát, az f-eltérést, ahol $f(u)$ tetszőleges konvex függvény lehet.

Ebből a mértékszámból kiindulva természetes módon beszélhetünk az eloszlások f-környezeteiről és — speciális esetként — információs környezeteiről. Így az alapul

* A dolgozat a szerző kandidátusi disszertációja, amelyet 1966. november 23-án védett meg. Jelen közlemény a dolgozat 1. és 2. §-át, s a teljes irodalomjegyzéket tartalmazza.

vett mérhető téren értelmezett valószínűségeloszlások halmaza egy ún. *Fréchet*-féle (V)-térré válik (vö. [34]), értelmezhető tehát az eloszlások f-konvergenciájának és (speciálisan) információ-konvergenciájának a fogalma. Az f-konvergencia és az egyenletes konvergencia viszonyával, valamint azzal a kérdéssel, hogy az f-környezetek milyen esetben teszik az eloszlások halmazát topologikus térré, disszertációm 2. fejezetében foglalkozom. Az eredmények között szerepel egy PINSZKERTŐL [27] származó, az I-divergencia és az eloszlások variációs távolsága közötti egyenlőtlenség általános megfelelője. A 3. fejezet az f-eltéréseknek közvetett megfigyelések esetén való csökkenését, valamint az elégségesség, ill. ε-elégségesség f-eltérésekkel megadható feltételeit tárgyalja; itt az elégséges statisztika fogalmának általánosításaként bevezetem az elégséges csatorna fogalmát is. A 4. fejezet a kompakt csoportokon értelmezett valószínűségi mértékek konvolúcióhatványainak konvergenciájára vonatkozó tételnek egy, az f-eltérés felhasználásán alapuló egyszerű bizonyítását tartalmazza, s rámutat az f-eltérések néhány más alkalmazási lehetőségére is.

Disszertációm alapját a [4], [5], [6], [7] dolgozataimban publikált eredményeim képezik, de ezek jelentős részét az azóta talált — még nem publikált — általánosabb, ill. élesebb formában tárgyalom.

1. §. Az I-divergencia és az f-eltérés

Legyen $(X, \mathscr{X})$ tetszőleges mérhető tér, azaz X tetszőleges halmaz és $\mathscr{X}$ az X részhalmazainak valamely σ-algebrája. Az $(X, \mathscr{X})$-en értelmezett μ mértéket valószínűségi mértéknek, vagy más szóval valószínűségeloszlásnak nevezzük, ha $\mu(X)=1$.

Legyen μ_1 és μ_2 két valószínűségi mérték $(X, \mathscr{X})$-en és $\mathfrak{A}=(A_1, A_2, \dots, A_n)$ az X egy véges mérhető felosztása (azaz $A_i \in \mathscr{X}$, $i=1, \dots, n$; $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$; $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$). A μ_1 és μ_2 eloszlás I-divergenciája az $\mathfrak{A}$ felosztásra, vagy másképpen az $\mathfrak{A}$ által generált $[\mathfrak{A}] \subset \mathscr{X}$ algebrára vonatkozólag definíció szerint

$$I_{\mathfrak{A}}(\mu_1 \| \mu_2) = I_{[\mathfrak{A}]}(\mu_1 \| \mu_2) = \sum_{k=1}^{n} \mu_1(A_k) \log \frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}; \tag{1.1}$$

ahol megállapodás szerint $0 \log 0 = 0 \log \frac{0}{0} = 0$ és $0 \log \frac{a}{0} = +\infty$, ha $a > 0$. A logaritmus alapjára vonatkozólag megjegyzendő, hogy az információelméletben a 2 alapú logaritmus használata a legmegszokottabb, de gyakori az e alapú logaritmus alkalmazása is; minthogy disszertációmban a 2 alapú logaritmus alkalmazása semmiféle előnnyel sem járna, egyszerűség kedvéért mindig a természetes logaritmust használom.

Ismeretes, hogy ha $\mathfrak{A}_2$ az $\mathfrak{A}_1$-nél finomabb véges mérhető felosztás, azaz, ha $[\mathfrak{A}_1] \subset [\mathfrak{A}_2]$, akkor

$$I_{\mathfrak{A}_1}(\mu_1 \| \mu_2) \leqq I_{\mathfrak{A}_2}(\mu_1 \| \mu_2). \tag{1.2}$$

Az (1.2) egyenlőtlenségnek, valamint az I-divergencia következőkben említendő (jól ismert) tulajdonságainak bizonyítását az 1. § további részében általánosabb formában, az f-eltérésekre megfogalmazva fogom megadni.

Az (1. 2) monotonitási tulajdonság alapján természetszerű a tetszőleges (nem szükségképpen véges) $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ algebrára vonatkozó I-divergencia következő definíciója:

$$(1.3) \qquad I_{\mathscr{X}'}(\mu_1 \| \mu_2) = \sup_{[\mathfrak{A}] \subset \mathscr{X}'} I_{\mathfrak{A}}(\mu_1 \| \mu_2).$$

Itt a felső határ az összes $[\mathfrak{A}] \subset \mathscr{X}'$ véges algebrákra vonatkozik, más szóval az összes olyan $\mathfrak{A}$ véges mérhető felosztásokra, melyeknek minden eleme $\mathscr{X}'$-höz tartozik.

(1. 3)-ból azonnal következik, hogy az $\mathscr{X}$ bármely két $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}''$ részalgebrája esetén is

$$(1.2') \qquad I_{\mathscr{X}'}(\mu_1 \| \mu_2) \leqq I_{\mathscr{X}''}(\mu_1 \| \mu_2).$$

Az egész $\mathscr{X}$ σ-algebrára vonatkozó I-divergencia definíciója (1. 3) speciális eseteként adódik:

$$(1.4) \qquad I(\mu_1 \| \mu_2) = I_{\mathscr{X}}(\mu_1 \| \mu_2) = \sup_{\mathfrak{A}} \sum_{k=1}^{n} \mu_1(A_k) \log \frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)},$$

ahol a szuprémum az X tér összes $\mathfrak{A}$ véges mérhető felosztásaira vonatkozik. Ehelyett elég volna olyan felosztásokra szorítkozni, melyeknek elemei valamely az X σ-algebrát generáló $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ algebrához tartoznak, ugyanis ismeretes, hogy bármely $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ algebrára vonatkozó I-divergencia megegyezik az $\mathscr{X}'$ által generált σ-algebrára vonatkozó I-divergenciával.

Az I-divergencia mindig nemnegatív és az $I_{\mathscr{X}'}(\mu_1 \| \mu_2) = 0$ egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az $\mathscr{X}'$ algebrán $\mu_1 = \mu_2$. Fontos továbbá az I-divergencia integrálelőállítására vonatkozó tétel (vö. [17], [24], [27]):

$$(1.5) \qquad I(\mu_1 \| \mu_2) = \begin{cases} \displaystyle\int \log \frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)} \mu_1(dx), & \text{ha} \quad \mu_1 \ll \mu_2 \\ +\infty, & \text{ha} \quad \mu_1 \not\ll \mu_2 \end{cases}$$

vagy ekvivalens módon,

$$(1.5') \qquad I(\mu_1 \| \mu_2) = \int p_1(x) \log \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \lambda(dx),$$

ahol λ tetszőleges σ-véges mérték, melyre vonatkozólag mind μ_1, mind μ_2 abszolút folytonos és $p_i(x) = \frac{\mu_i(dx)}{\lambda(dx)}$ $(i = 1, 2)$. Sokszor közvetlenül ezt a formát tekintik az I-divergencia definíciójának, mint pl. S. KULLBACK [21] könyvében.

Jegyezzük meg, hogy az I-divergencia bevezetésekor KULLBACK az információmennyiség *Shannon*-féle mértékszámából indul ki (SHANNON [33]), sőt ezen túlmenőleg, az I-divergenciát a *Shannon*-féle entrópia természetes általánosításának tekinti. A *Shannon*-féle entrópia ill. differenciális entrópia $H = -\sum p_k \log p_k$, ill. $H = -\int p(x) \log p(x) dx$ képlete azonban csak akkor tekinthető (előjeltől eltekintve) az (1.5) formula speciális esetének, ha az utóbbiban μ_2 gyanánt tetszőleges σ-véges mértéket is megengedünk (konkrét esetben azt a mértéket, melynél minden pont mértéke 1, ill. a *Lebesgue*-mértéket). Az ilyen — tetszőleges σ-véges μ_2-vel adódó — általánosított entrópia is alkalmazható az információelméletben, vö. PEREZ [24], [25], bár erre az I-divergencia előnyös tulajdonságainak egy része (pl. a nemnegativitás) már nem érvényes. Számos szerző azonban (pl. PINSZKER [27]) az általánosított entrópia elnevezéssel a disszertációmban I-divergenciának nevezett mennyiséget jelöli, tehát felteszi, hogy nemcsak μ_1, hanem μ_2 is valószínűségi mérték; így azonban a terminológia kissé következetlen, s ezért helyesebbnek tartom az I-divergencia elnevezést.

Az $I(\mu_1 \| \mu_2)$ irányított divergenciának többféle interpretációja ismeretes. S. KULLBACK megkülönböztetési információként értelmezte (information for discrimination): ha μ_1 és μ_2 két hipotézis az $(X, \mathcal{X})$ téren érvényes valószínűség-eloszlásra vonatkozólag, és a μ_1 hipotézis a helyes, akkor X egy véletlenszerűen választott x elemének megfigyelése átlagosan $I(\mu_1 \| \mu_2)$ információt szolgáltat a μ_1 hipotézis javára, a μ_2 ellenében. Ezt az interpretációt alátámasztja az a tény, hogy ha a μ_1 hipotézis és a μ_2 ellenhipotézis között n független megfigyelés alapján akarunk dönteni, az elsőfajú hiba valószínűségét tetszőlegesen rögzítve, és a legjobb próbát használva, a másodfajú hiba valószínűsége $\beta_n = e^{-nI(\mu_1\|\mu_2)+o(n)}$ (vö. [21], [24], [32]). Az I-divergencia tehát valóban a két eloszlás statisztikai megkülönböztethetőségét méri. Az (1. 2') egyenlőtlenség úgy értelmezhető, hogy egy durvább kísérlet nem adhat több információt a két eloszlás megkülönböztetésére, mint egy finomabb.

Felfogható az $I(\mu_1 \| \mu_2)$ mennyiség egy olyan kísérlet által szolgáltatott információnyereség mértékszámaként is, melynek alapján a μ_2 a priori eloszlást a μ_1 a posteriori eloszlással helyettesíthetjük (vö. RÉNYI [29]). Egy harmadik lehetséges interpretációt (az $X = R^1$ esetre) VINCZE István adott [37], eszerint $I(\mu_1 \| \mu_2)$ a μ_1 eloszláshoz tartozó információ mértékszáma, ha érdeklődésünk eloszlása a μ_2 mértéknek felel meg.

Említést érdemel végül, hogy az információelméletben központi szerepet játszó információ-mértékszám, a két valószínűségi változó $I(\xi, \eta)$ kölcsönös információja, az I-divergencia speciális esetének tekinthető. Valóban, ha a ξ, ill. η valószínűségi változó eloszlását μ_ξ-vel, ill. μ_η-val, együttes eloszlásukat pedig $\mu_{\xi\eta}$-val jelöljük, (ahol μ_ξ, ill. μ_η valamely $(X, \mathcal{X})$, ill. $(Y, \mathcal{Y})$ mérhető téren, $\mu_{\xi\eta}$ pedig az $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ szorzattéren értelmezett valószínűségi mérték), akkor, mint jól ismert (GELFAND—JAGLOM [12]; l. még [24], [10])

$$(1.5a) \qquad I(\xi, \eta) = \begin{cases} \displaystyle\int \log \frac{\mu_{\xi\eta}(dx, dy)}{(\mu_\xi \times \mu_\eta)(dx, dy)} \mu_{\xi\eta}(dx, dy) & \text{ha} \quad \mu_{\xi\eta} \ll \mu_\xi \times \mu_\eta \\ +\infty & \text{ha} \quad \mu_{\xi\eta} \not\ll \mu_\xi \times \mu_\eta \end{cases}$$

azaz

$$I(\xi, \eta) = I(\mu_{\xi\eta} \| \mu_\xi \times \mu_\eta).$$

A kölcsönös információ ezenkívül — bizonyos regularitási feltételek teljesülése esetén — még az $I(\xi, \eta) = MI(\mu_{\xi|\eta} \| \mu_\xi) = MI(\mu_{\eta|\xi} \| \mu_\eta)$ alakban is kifejezhető az I-divergencia segítségével, vö. (3. 66).

Az I-divergencia valamennyi interpretációja megegyezik abban, hogy ez a mennyiség bizonyos értelemben a valószínűségeloszlások egymástól való eltérésének mértékszáma. A továbbiakban az I-divergenciának ezt az utóbbi tulajdonságát tartjuk csak szem előtt, s minthogy ez lényegében csak az $f(u) = u \log u$ függvény konvexitásán múlik, vizsgálni fogjuk azokat az analóg mennyiségeket is, melyek az $u \log u$ függvénynek tetszőleges konvex függvénnyel való helyettesítésével adódnak.

Bocsássuk előre a következő jól ismert lemmát (JENSEN-*egyenlőtlenség*):

1. 1. LEMMA. *Legyen ξ valamely $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett, véges várható értékű valószínűségi változó, melynek értékkészlete valamely $[a_1, a_2]$ (véges vagy végtelen) intervallumba esik és $f(u)$ az $[a_1, a_2]$ intervallumban értelmezett alulról konvex függvény, amely az intervallum belsejében folytonos (az a_1 és a_2 végpontokban $f(u)$ értéke lehet $+\infty$ is). Ekkor*

$$(1.6)\qquad Mf(\xi) \geqq f(M\xi).$$

Ha $f(u)$ az $u_0 = M\xi$ pontban szigorúan konvex (azaz, ha $f(u)$ az u_0 pont egyetlen környezetében sem lineáris), akkor (1.6)-ban az egyenlőség csak $P\{\xi = M\xi\} = 1$ esetén áll fenn.

Bizonyítás. Legyen $M\xi = u_0$; feltehetjük, hogy $a_1 < u_0 < a_2$, mert ellenkező esetben biztosan $P\{\xi = M\xi\} = 1$. Az $f(u)$ függvény konvex volta miatt

$$(1.7)\qquad f(u) \geqq f(u_0) + b(u - u_0) \qquad (a_1 \leqq u \leqq a_2),$$

ahol b az $f(u)$ függvény $u_0 = M\xi$ pontbeli jobb és bal oldali deriváltjának számtani közepe. (Tehát ha $f(u)$ differenciálható az u_0 pontban, akkor $b = f'(u_0)$.) Az (1.7)-et $u = \xi$-re alkalmazva és várható értéket véve (1.6) adódik; ha $f(u)$ az $u_0 = M\xi$ pontban szigorúan konvex, akkor (1.7)-ben $u \neq u_0$ esetén határozott egyenlőtlenség áll, amivel a lemma második állítását is igazoltuk.

MEGJEGYZÉS. Természetesen az 1. 1. lemma bármely pozitív valószínűségű feltétel melletti feltételes várható értékekre is alkalmazható, továbbá a fentiekhez teljesen hasonlóan igazolható ($u_0 = M(\xi|\mathcal{F}_1)$ választással), hogy ha $\mathcal{F}_1$ az $\mathcal{F}$ tetszőleges rész-σ-algebrája, akkor 1 valószínűséggel

$$(1.6')\qquad M(f(\xi)|\mathcal{F}_1) \geqq f(M(\xi|\mathcal{F}_1)),$$

és ha $f(u)$ szigorúan konvex, az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül 1 valószínűséggel, ha $P\{\xi = M(\xi|\mathcal{F}_1)\} = 1$ (vagyis ha ξ majdnem mérhető $\mathcal{F}_1$-re vonatkozólag).

A továbbiakban jelöljön $f(u)$ egy, a $(0, +\infty)$ intervallumban értelmezett folytonos, alulról konvex függvényt. Legyen megállapodás szerint

$$f(0) = \lim_{u \to +0} f(u)$$

$$(1.8)\qquad 0 \cdot f\left(\frac{0}{0}\right) = 0$$

$$0 \cdot f\left(\frac{a}{0}\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon f\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) = a \lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} \qquad (0 < a < +\infty)$$

(az $f(u)$ függvény konvexitása miatt a határértékek biztosan léteznek; értékük természetesen lehet $+\infty$ is, de $-\infty$ nem).

Az $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren értelmezett μ_1 és μ_2 valószínűségi mértékeknek az X tér valamely $\mathfrak{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ véges mérhető felosztásához vagy más szóval az $[\mathfrak{A}] \subset \mathcal{X}$ véges algebrához tartozó f-eltérését a következőképpen definiáljuk:

$$(1.9)\qquad \mathcal{I}_{f;\mathfrak{A}}(\mu_1, \mu_2) = \sum_{k=1}^{n} \mu_2(A_k) f\left(\frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}\right).$$

$f(u) = u \log u$ esetén (1.9) éppen az (1. 1) formulát adja. (1. 2)-höz hasonlóan érvényes a következő összefüggés:

$$\mathcal{I}_{f;\mathfrak{A}_1}(\mu_1, \mu_2) \leqq \mathcal{I}_{f;\mathfrak{A}_2}(\mu_1, \mu_2) \qquad ([\mathfrak{A}_1] \subset [\mathfrak{A}_2] \subset \mathcal{X}). \tag{1. 10}$$

Valóban, ha $\mathfrak{A}_1 = (A_1^1, \ldots, A_n^1)$, $\mathfrak{A}_2 = (A_1^2, \ldots, A_m^2)$,

$$A_k^1 = \bigcup_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} A_i^2 \qquad (k = 1, \ldots, n;\ 1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1} = m+1),$$

akkor a tetszőleges $a_1, \ldots, a_l$; $b_1, \ldots, b_l$ nemnegatív számokra érvényes

$$\sum_{k=1}^{l} b_k f\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \geqq \left(\sum_{k=1}^{l} b_k\right) f\left(\frac{\sum_{k=1}^{l} a_k}{\sum_{k=1}^{l} b_k}\right) \tag{1. 11}$$

egyenlőtlenség értelmében

$$\sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} \mu_2(A_i^2) f\left(\frac{\mu_1(A_i^2)}{\mu_2(A_i^2)}\right) \geqq \mu_2(A_k^1) f\left(\frac{\mu_1(A_k^1)}{\mu_2(A_k^1)}\right) \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{1. 12}$$

amiből (1. 10) azonnal következik. Maga az (1. 11) egyenlőtlenség pozitív a_k és b_k számok esetén az 1. 1 lemma speciális esete, és az (1. 8) megállapodásokból könnyen következik, hogy az egyenlőtlenség akkor is érvényben marad, ha az a_k és b_k számok közül egy vagy több 0-val egyenlő. Általánosabban érvényes a következő:

1. 2. LEMMA. *Ha $\alpha(x)$ és $\beta(x)$ két nemnegatív integrálható függvény valamely $(X, \mathcal{X}, \lambda)$ mértéktéren, ahol λ tetszőleges σ-véges mérték, és $E \in \mathcal{X}$, $\lambda(E) > 0$, akkor*

$$\int_E \beta(x) f\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right) \lambda(dx) \geqq \int_E \beta(x)\lambda(dx) f\left(\frac{\int_E \alpha(x)\lambda(dx)}{\int_E \beta(x)\lambda(dx)}\right). \tag{1. 13}$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán álló integrál biztosan értelmezve van. Ha $\int_E \beta(x)\lambda(dx) > 0$ és az $f(u)$ konvex függvény az $u_0 = \int_E \alpha(x)\lambda(dx) \Big/ \int_E \beta(x)\lambda(dx)$ pontban szigorúan konvex, az egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha az E halmazon[1] *$\alpha(x) = u_0 \beta(x)$ $[\lambda]$.*

Bizonyítás. Az $f(u)$ függvény konvex volta miatt található olyan A és B véges valós szám, hogy $f(u) \geqq A + Bu$ $(0 \leqq u < +\infty)$. Ebből következik, hogy az (1. 13) bal oldalán álló integrál negatív része $\geqq A \int \beta(x)\lambda(dx) + B \int \alpha(x)\lambda(dx) > -\infty$, s ezért az integrál értelmezve van. Az (1. 13) egyenlőtlenség $\beta(x) > 0$ esetén közvetlenül az 1.1. lemmából adódik (az $(E, \mathcal{X}_E, P_E)$ valószínűségi mezőn értelmezett $\xi(x) = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$

[1] Itt és a továbbiakban azt, hogy valamilyen mérték szerint majdnem mindenütt, a szokott módon az illető mérték szögletes zárójelbe tételével jelöljük.

valószínűségi változóra alkalmazva, ahol $P_E(B)=\dfrac{\int_B \beta(x)\lambda(dx)}{\int_E \beta(x)\lambda(dx)}$, ha $B\in\mathcal{X}_E$, azaz $B\in\mathcal{X}$, $B\subset E$). A bizonyítás az általános esetben is az 1. 1. lemmáéhoz teljesen hasonló, csak azt kell megjegyeznünk, hogy az (1. 7) egyenlőtlenségben formálisan $u=\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$-et írva és $\beta(x)$-szel végigszorozva még $\beta(x)=0$ esetén is helyes egyenlőtlenséget kapunk, tekintettel az (1. 8) megállapodásokra (ha $\int_E \beta(x)\lambda(dx)=0$, akkor u_0 nincs értelmezve, de ekkor (1. 13) triviálisan teljesül).

Az (1. 10) monotonitási tulajdonság alapján, az I-divergencia esetéhez hasonlóan, természetes módon definiálhatjuk a μ_1 és μ_2 mérték tetszőleges $\mathcal{X}'\subset\mathcal{X}$ algebrához, illetőleg az egész $\mathcal{X}$-hez tartozó f-eltérését:

$$(1.14)\qquad \tilde{\mathcal{I}}_{f;\mathcal{X}'}(\mu_1,\mu_2)=\sup_{\substack{[\mathfrak{A}]\subset\mathcal{X}'\\ \mathfrak{A}\text{ véges felosztás}}}\mathcal{I}_{f;\mathfrak{A}}(\mu_1,\mu_2),$$

$$(1.15)\qquad \tilde{\mathcal{I}}_f(\mu_1,\mu_2)=\tilde{\mathcal{I}}_{f;\mathcal{X}}(\mu_1,\mu_2)=\sup_{\mathfrak{A}}\sum_{k=1}^{n}\mu_2(A_k)f\left(\frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}\right),$$

ahol a felső határ az X tér összes $\mathfrak{A}$ véges mérhető felosztására vonatkozik. Célszerűbbnek látszik azonban az (1. 5), ill. (1. 5') integrálképlet analogonját választani kiindulásul:

1. 1. Definíció. *Az $(X,\mathcal{X})$ mérhető téren értelmezett μ_1 és μ_2 valószínűségi mértékek f-eltérésének ($f(u)$ tetszőleges konvex függvény) az*

$$(1.16)\qquad \mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\int p_2(x)f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)\lambda(dx)$$

mennyiséget nevezzük, ahol λ valamely, a μ_1, μ_2 mértékpárt domináló (azaz $\mu_1\ll\lambda$, $\mu_2\ll\lambda$) σ-véges mérték és $p_i(x)$ a μ_i mérték λ-ra vonatkozó sűrűségfüggvénye, vagyis Radon—Nikodym deriváltja [2]*:*

$$p_i(x)=\frac{\mu_i(dx)}{\lambda(dx)}\qquad (i=1,2).$$

Az 1. 2. lemma szerint az (1. 16) integrál mindig értelmezve van, és értéke nyilvánvalóan nem függ a λ domináló mérték választásától. Továbbá, ugyancsak az 1. 2. lemma szerint

$$(1.17)\qquad \mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2)\geqq\int p_2(x)\lambda(dx)f\left(\frac{\int p_1(x)\lambda(dx)}{\int p_2(x)\lambda(dx)}\right)=f(1),$$

[2] Az egyszerűség kedvéért itt és a továbbiakban mindig feltételezzük, hogy a szóban forgó *Radon—Nikodym* deriváltak úgy vannak rögzítve, hogy mindenütt (tehát nemcsak majdnem mindenütt) végesek és nemnegatívak. Az $\int$ jel az integrációs tartomány feltüntetése nélkül az egész térre vonatkozó integrált jelenti.

ahol az egyenlőség — feltéve, hogy $f(u)$ az $u_0=1$ pontban szigorúan konvex — csak $\mu_1=\mu_2$ esetén teljesül.

Természetesen két mérték f-eltérése $+\infty$ is lehet: (1. 8) értelmében biztosan ez a helyzet, ha $f(0)=+\infty$ és $\mu_2 \not\ll \mu_1$ vagy ha $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=+\infty$ és $\mu_1 \not\ll \mu_2$. Ha azonban mind $f(0)$, mind $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}$ véges, akkor (1. 17) miatt $\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)$ minden esetben véges.

Az f-eltérés fenti definíciója alkalmazható az $\mathscr{X}$ σ-algebra bármely $\mathscr{X}_0$ rész-σ-algebrájára is, amely esetben $p_1(x)$ és $p_2(x)$ a vizsgált szűkebb σ-algebrára vonatkozó $\bar{p}_1(x)$ és $\bar{p}_2(x)$ *Radon—Nikodym* deriváltakkal helyettesítendő:

$$\mathscr{I}_{f;\mathscr{X}_0}(\mu_1,\mu_2)=\int \bar{p}_2(x) f\left(\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}\right)\lambda(dx). \tag{1. 16'}$$

Látható, hogy az $\mathscr{X}$ véges részalgebráira (melyek egyúttal rész-σ-algebrák is) így éppen az (1. 9) formulával definiált $\mathscr{I}_{f;\mathfrak{A}}(\mu_1,\mu_2)$ érték adódik. Mint látni fogjuk, az f-eltérés most adott definíciója az általános esetben is ekvivalens az előzőleg javasolttal, azaz $\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\tilde{\mathscr{I}}_f(\mu_1,\mu_2)$. Megjegyzem még, hogy az 1. 1. definíció tetszőleges σ-véges mértékekre is kiterjeszthető volna, feltéve, hogy az (1. 16) integrál értelmezve van (ami véges mértékek esetén automatikusan teljesül). A következőkben azonban mindig csak a valószínűségi mértékek esetére szorítkozom, bár a kapott eredmények egy része az általánosabb esetre is kiterjeszthető, vö. [6].

Az 1. 1. definíció az I-divergencia integrálelőállításának közvetlen analogonja; valóban, (1. 5') és (1. 16) alapján — az (1. 8) megállapodás figyelembevételével — nyilvánvaló, hogy

$$I(\mu_1\|\mu_2)=\mathscr{I}_{u\log u}(\mu_1,\mu_2)=\mathscr{I}_{-\log u}(\mu_2,\mu_1). \tag{1. 18}$$

Hasonlóképpen a Rényi Alfréd által ([29], [30]) bevezetett

$$I_\alpha(\mu_1\|\mu_2)=\frac{1}{\alpha-1}\log\int p_1^\alpha(x)p_2^{1-\alpha}(x)\lambda(dx) \qquad (0<\alpha<+\infty) \tag{1. 19}$$

α-adrendű I-divergencia (információnyereség) — melynek a közönséges (elsőrendű) I-divergencia az $\alpha\to1$ határátmenettel adódó speciális esete — ugyancsak származtatható f-eltérésként:

$$I_\alpha(\mu_1\|\mu_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}\log|\mathscr{I}_{-u^\alpha}(\mu_1,\mu_2)| & (0<\alpha<1)\\[2mm] \dfrac{1}{\alpha-1}\log\mathscr{I}_\alpha(\mu_1,\mu_2) & (\alpha>1).\end{cases} \tag{1. 20}$$

Tehát az α-adrendű I-divergencia ($\alpha\neq1$) az $f_\alpha(u)=u^\alpha\operatorname{sgn}(\alpha-1)$ konvex függvénynek megfelelő f-eltérés monoton függvénye. Jegyezzük meg, hogy míg $\alpha\geqq1$ esetén $I_\alpha(\mu_1\|\mu_2)$ csak akkor lehet véges, ha $\mu_1\ll\mu_2$, a $0<\alpha<1$ esetben $I_\alpha(\mu_1\|\mu_2)$ mindig véges, kivéve, ha $\mu_1\perp\mu_2$ (tehát ha van olyan $E\in\mathscr{X}$, hogy $\mu_1(E)=\mu_2(X-E)=1$).

A mértékek egymástól való eltérésének legmegszokottabb mértékszáma, a

$$\varrho(\mu_1,\mu_2)=|\mu_1-\mu_2|=\int|p_1(x)-p_2(x)|\lambda(dx) \tag{1. 21}$$

variációs távolság is tekinthető f-eltérésnek. (Mint ismeretes, az $(X, \mathscr{X})$ mérhető téren értelmezett valószínűségi mértékek a variációs távolsággal teljes metrikus teret alkotnak.) Valóban, ha $f(u) = |u-1|$, akkor

$$(1.22) \qquad \mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2) = \mathscr{I}_{|u-1|}(\mu_1, \mu_2) = \int p_2(x) \left| \frac{p_1(x)}{p_2(x)} - 1 \right| \lambda(dx) = |\mu_1 - \mu_2|.$$

Ugyancsak az f-eltérések közé tartozik az eloszlások különbözőségének a matematikai statisztikában használt χ^2-mértékszáma is, melyet (a diszkrét esetben) a $\sum \frac{(p_i - q_i)^2}{q_i}$ képlet értelmez. Látható, hogy a χ^2-eltérés nem más, mint az $f(u) = (u-1)^2$ konvex függvénynek megfelelő f-eltérés. Egyébként (1. 20) alapján nyilvánvaló, hogy a χ^2-eltérés és a másodrendű I-divergencia között az $I_2(\mu_1 \| \mu_2) = \log(1 + \chi^2(\mu_1, \mu_2))$ függvénykapcsolat áll fenn.

Azt, hogy az 1. 1. definícióval meghatározott $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)$ mennyiséget bármely konvex f esetén eltérés-mértékszámnak fogjuk fel, az indokolja, hogy (1. 17) értelmében $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)$ a minimális értékét $\mu_1 = \mu_2$ esetén veszi fel (és csak ekkor, feltéve, hogy $f(u)$ az $u_0 = 1$ pontban szigorúan konvex), tehát a skála alkalmas eltolásával olyan mértékszámhoz jutunk, amely mindig nemnegatív és csak $\mu_1 = \mu_2$ esetén nulla. Ezzel szemben az f-eltérés általában nem szimmetrikus, azaz $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2) = \mathscr{I}_f(\mu_2, \mu_1)$ általában nem teljesül, s ugyancsak nem áll fenn általában a háromszög-egyenlőtlenség sem[3]. Ha $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)$-ben μ_1 és μ_2 sorrendjét felcseréljük, egy másik, f^* konvex függvénynek megfelelő f-eltérést kapunk, nevezetesen (figyelembe véve az (1. 8) megállapodásokat is)

$$(1.23) \qquad \mathscr{I}_f(\mu_2, \mu_1) = \mathscr{I}_{f^*}(\mu_1, \mu_2),$$

ahol

$$(1.24) \qquad f^*(u) = uf\left(\frac{1}{u}\right).$$

Itt az (1. 24) egyenlőséggel definiált $f^*(u)$ függvény konvex volta az $f(u)$ konvexitásának közvetlen következménye, ui. az $f(u)$ konvex volta miatt bármely a és b pozitív számra és $0 < \alpha < 1$ számra

$$\frac{\alpha a}{\alpha a + (1-\alpha)b} f\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{(1-\alpha)b}{\alpha a + (1-\alpha)b} f\left(\frac{1}{b}\right) \geqq f\left(\frac{1}{\alpha a + (1-\alpha)b}\right)$$

vagyis $\alpha f^*(a) + (1-\alpha) f^*(b) \geqq f^*(\alpha a + (1-\alpha)b)$.

Az $I(\mu_1 \| \mu_2)$ irányított divergencia helyett információelméleti különbözőség-mértékszámként szokták használni a $J(\mu_1, \mu_2) = I(\mu_1 \| \mu_2) + I(\mu_2 \| \mu_1)$ szimmetrikus kifejezést, az ún. J-divergenciát is, sőt ez utóbbi mennyiség bevezetése (az információelmélettől függetlenül) időben meg is előzte az I-divergenciát (l. JEFFREYS [16]). A J-divergencia, éppúgy, mint bármely $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2) + \mathscr{I}_f(\mu_2, \mu_1)$ alakú szimmetrikus mennyiség, szintén tekinthető f-eltérésnek, az $f + f^*$ konvex függvénnyel; azaz pl.

$$(1.25) \qquad J(\mu_1, \mu_2) = \mathscr{I}_{(u-1)\log u}(\mu_1, \mu_2).$$

[3] Ez azt jelenti, hogy az f-eltérés a topológiában megszokott értelemben nem „eltérés", hanem csak tágabb értelemben vett eltérés-mértékszám, éppúgy, mint az I-divergencia is.

Az $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)$ és $\mathscr{I}_f(\mu_2, \mu_1)$ más szimmetrikus függvényeit (pl. szorzatát) is lehetne a két valószínűségeloszlás különbözősége mértékszámának tekinteni. A $J_\alpha(\mu_1, \mu_2) = I_\alpha(\mu_1 \| \mu_2) + I_\alpha(\mu_2 \| \mu_1)$ α-rendű J-divergencia pl. az $\mathscr{I}_{f_\alpha}(\mu_1, \mu_2)\mathscr{I}_{f_\alpha}(\mu_2, \mu_1)$ szorzat monoton függvényeként áll elő, ahol $f_\alpha(u) = u^\alpha \operatorname{sgn}(\alpha - 1)$. Az ilyen típusú mennyiségekkel azonban disszertációmban nem kívánok részletesebben foglalkozni.

Megemlítem még, hogy ha ξ és η két tetszőleges valószínűségi változó, a $\mu_{\xi\eta}$ együttes eloszlás és a marginális eloszlások $\mu_\xi \times \mu_\eta$ szorzatának f-eltérése a ξ és η közötti összefüggés mértékszámának tekinthető. Az $f(u) = u \log u$ esetben így éppen az $I(\xi, \eta)$ kölcsönös információ adódik, $f(u) = (u-1)^2$ (vagy $f(u) = u^2 - 1$) esetén pedig a $\varphi^2(\xi; \eta)$ négyzetes kontingencia.

Megjegyzés. Az információelméletben mind az entrópia, mind az I-divergencia elemi információmennyiségek középértékeként jelenik meg. A legmegszokottabb a közönséges lineáris közepelés, de, mint Rényi A. [29] kimutatta, az exponenciális közepelés is fontos információmennyiségekre vezet (α-rendű entrópia, ill. I-divergencia). Más függvényekkel való közepelésnél az információ additív tulajdonsága már veszendőbe megy. Mégis, mint Aczél J. és Daróczy Z. [1] dolgozatukban rámutattak, valamely $\mathscr{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ diszkrét eloszláshoz tartozó információmennyiség mérésére bizonyos értelemben az $I_k = -\log p_k$ elemi információmennyiségek minden olyan

$$I(\mathscr{P}) = g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k g(-\log p_k)\right) \tag{1.26}$$

középértéke megfelel, melyben a g folytonos és szigorúan monoton függvény olyan, hogy

$$f(u) = ug(-\log u) \tag{1.27}$$

szigorúan konvex[4]. Ha az (1. 26)-nak megfelelő I-divergencia jellegű mennyiséget akarjuk képezni — tetszőleges, de egyszerűség kedvéért egymásra nézve abszolút folytonos eloszlásokra — a $-\log p_k$ elemi információ helyett az $l(x) = \log \frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}$ likelihood-függvény (-1)-szeresét kell átlagolnunk és az eredmény (-1)-szeresét vennünk (vö. [29], 262. o.); ekkor az 1. 1. definíció és (1. 27) figyelembevételével a következő adódik:

$$I_g(\mu_1 \| \mu_2) = -g^{-1}\left[\int g(-\log l(x))\mu_1(dx)\right] = \tag{1.28}$$

$$= -g^{-1}\left[\int f\left(\frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}\right)\mu_2(dx)\right] = -g^{-1}(\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)).$$

A $g_\alpha(u) = e^{(1-\alpha)u} \operatorname{sgn}(\alpha - 1)$ esetben (1. 28) éppen (1. 20)-at adja.

Másfelől, ha $f(u)$ tetszőleges folytonos konvex függvény $[0, +\infty]$-ben, amely a 0 pontban szigorúan konvex és $f(0) = 0$, akkor $f(u)/u$ szigorúan monoton növekedő, $g(u) = e^u f(e^{-u})$ pedig szigorúan monoton fogyó folytonos függvény és $f(u)$ és $g(u)$ eleget tesz (1. 27)-nek. Ilyenkor tehát bizonyos értelemben célszerűbbnek látszana

[4] Az ilyen általános típusú információmértékszám bevezetését az [1] dolgozat szerzői Hincsinnek és A. Adamnak tulajdonítják; Hincsin ill. Adam általuk idézett munkáiban azonban ilyen jellegű általánosított információmértékszámokról nem esik szó.

$\mathcal{I}_f(\mu_1, \mu_2)$ helyett az (1. 28) mennyiséggel foglalkozni. Valójában azonban — a következők szempontjából — az f-eltérés és annak bármely szigorúan monoton növekvő folytonos függvénye ekvivalens eltérésmértékszámnak tekinthető, ezért elég az egyszerűbben kezelhető f-eltérések vizsgálatára szorítkozni.

Az f-eltérés (1. 15) és (1. 16) definíciójának ekvivalenciája, vagyis az $\mathcal{I}_f(\mu_1, \mu_2) = \tilde{\mathcal{I}}_f(\mu_1, \mu_2)$ egyenlőség tetszőleges f konvex függvény esetére is lényegében ugyanúgy bizonyítható, mint az $f(u) = u \log u$ speciális esetben, csupán annak figyelembe vétele jelent némi nehézségtöbbletet, hogy az $f(u)$ konvex függvény 0, ill. $+\infty$-beli viselkedése többféle lehet. A következő bizonyítás, az említett okból szükséges kisebb módosításokkal, DOBRUSINnak az $f(u) = u \log u$ esetre adott bizonyítása gondolatmenetét követi (vö. [10]).

Legyen

$$
(1.29)\quad \begin{cases} A_0 = \{x\colon p_2(x) > p_1(x) = 0\}, & A_\infty = \{x\colon p_2(x) = 0\}, \\ A_\delta = \{x\colon 0 < p_1(x) < \delta p_2(x)\}, & A_M = \{x\colon p_1(x) \geqq M p_2(x) > 0\}, \\ A_k = \left\{x\colon h_k \leqq \dfrac{p_1(x)}{p_2(x)} < h_{k+1}\right\} & (k = 1, \dots, n), \end{cases}
$$

ahol $\delta = h_1 < h_2 < \dots < h_{n+1} = M$ a $[\delta, M]$ intervallumnak olyan felosztása, hogy a $[h_k, h_{k+1}]$ intervallumok mindegyikében az $f(u)$ függvény ingadozása kisebb, mint ε. Ekkor $\mathfrak{A} = (A_0, A_\varepsilon, A_1, A_2, \dots, A_n, A_M, A_\infty)$ az X térnek egy véges mérhető felosztása.

(1. 29) valamint (1. 8) alapján nyilvánvaló, hogy

$$
(1.30)\quad \begin{aligned} &\int_{A_0} p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) \lambda(dx) = \mu_2(A_0) f\left(\frac{\mu_1(A_0)}{\mu_2(A_0)}\right); \\ &\int_{A_\infty} p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) \lambda(dx) = \mu_2(A_\infty) f\left(\frac{\mu_1(A_\infty)}{\mu_2(A_\infty)}\right); \\ &\int_{A_k} p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) \lambda(dx) \leqq \mu_2(A_k) \left[f\left(\frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}\right) - \varepsilon \right] \qquad (k = 1, \dots, n). \end{aligned}
$$

Jegyezzük meg, hogy $\delta \to 0$, ill. $M \to +\infty$ esetén $\mu_2(A_\delta) \to 0$ és $\mu_1(A_M) \to 0$ [5], és így, kihasználva, hogy az $f(u)$ függvény konvexitása miatt alkalmas K pozitív számra

$$
(1.31)\qquad f(u) > -K, \quad u f\left(\frac{1}{u}\right) > -K \qquad (0 \leqq u \leqq 1),
$$

az A_δ és A_M halmaz (1. 26) definíciója értelmében alkalmasan választott $\delta > 0$ és

[5] Ui. ha $\delta_j \downarrow 0$ ill. $M_j \uparrow +\infty$, akkor $\{A_{\delta_j}\}$ ill. $\{A_{M_j}\}$ üres metszettel bíró monoton csökkenő halmazsorozat, tehát $\mu_i(A_{\delta_j}) \to 0$, $\mu_i(A_{M_j}) \to 0$ $(i = 1, 2)$.

$M > 0$ esetén

$$(1.32)\qquad \begin{aligned} &\mu_2(A_\delta) f\left(\frac{\mu_1(A_\delta)}{\mu_2(A_\delta)}\right) > \mu_2(A_\delta)\cdot(-K) > -\varepsilon \\ &\mu_2(A_M) f\left(\frac{\mu_1(A_M)}{\mu_2(A_M)}\right) > \mu_1(A_M)\cdot(-K) > -\varepsilon. \end{aligned}$$

Az (1. 30) és (1. 32) összefüggések szerint

$$(1.33)\qquad \int\limits_{X-A_\delta-A_M} p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)\lambda(dx) \leqq \mathscr{I}_{f;\mathfrak{A}}(\mu_1,\mu_2) - 3\varepsilon.$$

Ha az (1. 33) egyenlőtlenség jobb oldalán $\mathscr{I}_{f;\mathfrak{A}}(\mu_1,\mu_2)$ helyett $\tilde{\mathscr{I}}_f(\mu_1,\mu_2)$-t írunk, az egyenlőtlenség még inkább igaz marad; sőt ekkor a bal oldalon az integrációs tartományt az egész X térnek is vehetjük, ui. ha δ_j ill. M_j monoton csökkenőleg, ill. növekedőleg tart 0-hoz, ill. $+\infty$-hez, akkor az $X-A_{\delta_j}-A_{M_j}$ halmazsorozat monoton növekedőleg tart X-hez. Így végül, minthogy a jobb oldalon szereplő $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, nyerjük, hogy

$$(1.34)\qquad \mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2) \leqq \tilde{\mathscr{I}}_f(\mu_1,\mu_2).$$

Az ellenkező irányú egyenlőtlenség még egyszerűbben igazolható. Valóban, az 1. 2. lemma szerint bármely $\mathfrak{A}=(A_1,\dots,A_n)$ véges mérhető felosztásra

$$(1.35)\qquad \int\limits_{A_k} p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)\lambda(dx) \geqq \mu_2(A_k) f\left(\frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}\right) \qquad (k=1,\dots,n)$$

azaz összegezve

$$(1.36)\qquad \mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2) \geqq \mathscr{I}_{f;\mathfrak{A}}(\mu_1,\mu_2).$$

Ezzel az $\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\tilde{\mathscr{I}}_f(\mu_1,\mu_2)$ egyenlőtlenséget bebizonyítottuk. Belátható továbbá, hogy az imént igazolt

$$(1.37)\qquad \mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2) = \sup_{\mathfrak{A}} \sum_{k=1}^{n} \mu_2(A_k) f\left(\frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}\right)$$

egyenlőség akkor is érvényben marad, ha a felső határt az X tér összes véges mérhető felosztásai helyett csak azokra a felbontásokra vesszük, melyeknek elemei egy rögzített, az $\mathscr{X}$-algebrát generáló $\mathscr{X}'$ algebrába tartozó halmazok, más szóval, hogy ilyenkor $\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\tilde{\mathscr{I}}_{f;\mathscr{X}'}(\mu_1,\mu_2)$. Valóban, ismét DOBRUSINnak az $f(u)=$ $=u\log u$ esetre vonatkozó bizonyítását követve, legyen $\mathfrak{A}=(A_1,\dots,A_n)$ X-nek egy rögzített véges (mérhető) felosztása; ekkor bármely $\delta > 0$ esetén megadhatók olyan $B_1,\dots,B_n$ diszjunkt halmazok, hogy $B_k \in \mathscr{X}'$ $(k=1,\dots,n)$, továbbá[6]

$$(1.38)\qquad \mu_1(A_k \circ B_k) \leqq n\delta, \quad \mu_2(A_k \circ B_k) \leqq n\delta \qquad (k=1,\dots,n)$$

és

$$(1.39)\qquad \mu_1(B_{n+1}) \leqq n\delta, \quad \mu_2(B_{n+1}) \leqq n\delta \qquad \left(B_{n+1} = X - \bigcup_{k=1}^{n} B_n\right)$$

[6] $A \circ B = (A-B) \cup (B-A)$.

(vö. [10], 54—55. o.). Az $f(u)$ függvény folytonossága miatt nyilvánvaló (figyelembe véve (1. 8)-at is), hogy bármely adott $\varepsilon > 0$ és $M > 0$ esetén $\delta > 0$ megválasztható olyan kicsire, hogy

$$\mu_2(B_k)f\left(\frac{\mu_1(B_k)}{\mu_2(B_k)}\right) > \mu_2(A_k)f\left(\frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}\right) - \varepsilon, \tag{1. 40}$$

valahányszor $\mu_2(A_k)f\left(\frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}\right) < +\infty$ és

$$\mu_2(B_k)f\left(\frac{\mu_1(B_k)}{\mu_2(B_k)}\right) > M, \tag{1. 41}$$

ha

$$\mu_2(A_k)f\left(\frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}\right) = +\infty;$$

végül — figyelembe véve (1. 31)-et —

$$\mu_2(B_{n+1})f\left(\frac{\mu_1(B_{n+1})}{\mu_2(B_{n+1})}\right) > -\varepsilon. \tag{1. 42}$$

Az (1. 40), (1. 41) és (1. 42) egyenlőtlenségek értelmében

$$\sum_{k=1}^{n+1} \mu_2(B_k)f\left(\frac{\mu_1(B_k)}{\mu_2(B_k)}\right) > \sum_{k=1}^{n} \mu_2(A_k)f\left(\frac{\mu_1(A_k)}{\mu_2(A_k)}\right) - (n+1)\varepsilon, \tag{1. 43}$$

ha a jobb oldal véges, ill. a bal oldal tetszőlegesen naggyá tehető, ha a jobb oldal végtelen. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Az (1. 10) monotonitási tulajdonságból nyilvánvalóan következik, hogy (1. 37)-ben a felső határ képzésénél az összes $\mathcal{X}'$-beli halmazokra való véges felosztások osztálya helyett szorítkozhatunk ennek bármely olyan részosztályára is, amely olyan tulajdonságú, hogy az előbbi osztály minden felosztásához található benne egy finomabb felosztás.

Eredményünket tétel formájában megfogalmazva:

1. 1. TÉTEL. *Legyen $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ tetszőleges olyan algebra, amely az $\mathcal{X}$ σ-algebrát generálja és jelölje R az X tér véges felosztásainak olyan összességét, hogy minden R-beli $\mathfrak{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ felosztásra $A_k \in \mathcal{X}'$ $(k = 1, \ldots, n)$, továbbá, hogy X-nek minden $\mathcal{X}'$-beli halmazokra való véges felosztásához található nála finomabb R-beli felosztás. Ekkor*

$$\mathcal{I}_f(\mu_1, \mu_2) = \int p_2(x)f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)\lambda(dx) = \sup_{\mathfrak{A}\in R} \sum_{k=1}^{n} \mu_2(A_k)f\left(\frac{\mu_1(R_k)}{\mu_2(R_k)}\right). \tag{1. 44}$$

Ha az $\mathcal{X}$ σ-algebrát X részhalmazainak valamely megszámlálható rendszere generálja, akkor az R osztály választható egy alkalmas finomodó felosztássorozatnak és ilyenkor (1. 44)-ben sup helyett lim is írható. Ez a helyzet pl. akkor, ha X tetszőleges, a második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus tér és $\mathcal{X}$ a *Borel*-halmazok σ-algebrája, azaz a nyílt halmazok összessége által generált σ-algebra.

2. §. Az f-eltérések által indukált topológiai struktúra vizsgálata

Minthogy az I-divergenciát és általánosabban az f-eltéréseket a valószínűség-eloszlások egymástól való eltérésének mértékszámaként interpretáltuk, természetes módon felvetődik a kérdés, hogy ezek a mértékszámok milyen topológiai struktúrát indukálnak a valószínűségeloszlások terében.

Legyen $\mathcal{M}$ az $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren értelmezett valószínűségeloszlások egy halmaza és $f(u)$ tetszőleges, $(0, +\infty)$-ben értelmezett folytonos konvex függvény.

2. 1. Definíció. *Valamely $\mu_0 \in \mathcal{M}$ eloszlás f-környezetein az*

$$U_f(\mu_0; \varepsilon) = \{\mu : \mathcal{I}_f(\mu, \mu_0) - f(1) < \varepsilon, \mu \in \mathcal{M}\} \tag{2. 1}$$

alakú eloszláshalmazokat értjük.

Ha speciálisan $f(u) = u \log u$ vagy $f(u) = u^\alpha \operatorname{sgn}(\alpha - 1)$, akkor (első, ill. α-rendű) információs környezetekről beszélünk, minthogy ezek a $\{\mu : I_\alpha(\mu \| \mu_0) < \varepsilon', \mu \in \mathcal{M}\}$ alakban is felírhatók.

A 2. 1. definícióval $\mathcal{M}$ ún. *Fréchet*-féle (V)-térré vált (vö. [34]), amely még azzal a tulajdonsággal is rendelkezik, hogy bármely $\mu_0 \in \mathcal{M}$ „pont" tetszőleges véges számú környezetének közös része maga is μ_0 környezete, továbbá, ha $f(u)$ az $u_0 = 1$ pontban szigorúan konvex, akkor (1. 17) értelmében bármely $\mu_0 \in \mathcal{M}$ összes f-környezetének egyetlen közös pontja μ_0. Ezen túlmenőleg az is belátható, hogy az f-környezetekre teljesül a *Hausdorff*-féle T_2 axióma is, azaz bármely két $\mu_1 \neq \mu_2$ eloszlásnak van egymást nem metsző f-környezete (l. a 2. 1. tételt).

Ismeretes, hogy (V)-terekben már sok topológiai jellegű fogalom értelmezhető, noha természetesen nem minden (V)-tér topologikus tér (látjuk majd, a valószínűségeloszlások halmaza sem válik minden esetben topologikus térré a környezetek 2. 1. definíciójával). Így minden (V)-térben beszélhetünk konvergenciáról; a 2. 1. definíciónak megfelelően egy $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ($\mu_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, \ldots$) eloszlássorozatról azt mondjuk, hogy f-konvergál a $\mu_0 \in \mathcal{M}$ valószínűségeloszláshoz, jelölve

$$\mu_n \xrightarrow{f} \mu_0 \qquad (n \to \infty) \tag{2. 2}$$

ha minden $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$, hogy $n \geqq n_0$ esetén $\mu_n \in U_f(\mu_0; \varepsilon)$, más szóval, ha

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{I}_f(\mu_n, \mu_0) = f(1). \tag{2. 3}$$

Speciálisan $f(u) = u \log u$, ill. $f(u) = u^\alpha \operatorname{sgn}(\alpha - 1)$ esetén (első-, ill. α-rendű) információkonvergenciáról fogunk beszélni. Nyilvánvaló ugyanis, hogy $f(u) = u^\alpha \operatorname{sgn}(\alpha - 1)$ esetén $\mathcal{I}_f(\mu_n, \mu_0) \to f(1)$ ekvivalens azzal, hogy $I_\alpha(\mu_n \| \mu_0) \to 0$.

MEGJEGYZÉSEK. *1.* A 2. 1. definíció a mértékek sorrendjét tekintve önkényes; ez azonban nem jelenti az általánosság korlátozását, mert a sorrend felcserélése (1. 23) és (1. 24) szerint az f konvex függvénynek az f^* konvex függvénnyel való helyettesítésével ekvivalens. Az f-konvergenciát definiálhatnánk úgy is, hogy mind (2. 3)-at, mind pedig a $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{I}_f(\mu_0, \mu_n) = f(1)$ limeszrelációt feltesszük; az így adódó konvergenciafogalom azonban könnyen láthatóan az $\tilde{f} = f + f^*$ konvex függvénynek megfelelő $\tilde{f}$-konvergenciával ekvivalens, így pl. az $f(u) = u \log u$ esetben a $J(\mu_1, \mu_2) = \mathcal{I}_{(u-1)\log u}(\mu_1, \mu_2)$ J-divergencia nullához tartásával.

2. Az f-konvergencia természetesen nemcsak közönséges sorozatokra értelmezhető, hanem *Moore-Smith* féle általánosított sorozatokra, ill. az $\mathcal{M}$ tér részhalmazaiból álló rácsokra (filterbázisokra) is, és ekkor a konvergenciafogalom már egyértelműen meghatározza az $\mathcal{M}$ (V)-tér topológiai struktúráját. A továbbiakban azonban egyszerűség kedvéért csak sorozatkonvergenciáról fogunk beszélni.

3. Az információkonvergencia fogalmát [4] dolgozatomban vezettem be, ahol még a gyengébb „majdnem teljes" információkonvergenciával is foglalkoztam. Az ebben a fejezetben tárgyalt eredmények a [4] dolgozatomban az α-rendű I-divergenciára (vagyis az $f(u)=u^\alpha \operatorname{sgn}(\alpha-1)$, ill. $f(u)=u \log u$ esetre) kapott eredmények tetszőleges f-eltérésekre vonatkozó megfelelői. A 2. 1. tétel azonban lényegesen élesebb a [4] dolgozat megfelelő tételénél; ezt az élesítést az tette lehetővé, hogy a [4]-beli lemma helyett most az élesebb 2. 1. lemmát alkalmazom.

Az (1. 22) összefüggés szerint a variációs távolság értelmében vett konvergencia is az f-konvergencia speciális esete. A variációs távolság 0-hoz tartása a mértékek egyenletes konvergenciájával ekvivalens, vagyis azzal, hogy

$$\sup_{E\in\mathcal{X}} |\mu_1(E)-\mu_0(E)| \to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{2.4}$$

Valóban, ha μ_1 és μ_2 két valószínűségi mérték $(X,\mathcal{X})$-en, akkor bármely $E\in\mathcal{X}$ halmazra $\mu_1(E)-\mu_2(E) = \mu_2(X-E)-\mu_1(X-E)$, tehát

$$\sup_{E\in\mathcal{X}}\big(\mu_1(E)-\mu_2(E)\big) = \sup_{E\in\mathcal{X}}\big(\mu_2(E)-\mu_1(E)\big) = \sup_{E\in\mathcal{X}}|\mu_1(E)-\mu_2(E)|$$

és így

$$|\mu_1-\mu_2| = \sup_{E\in\mathcal{X}}\big(\mu_1(E)-\mu_2(E)\big)+ \tag{2.5}$$

$$+\sup_{E\in\mathcal{X}}\big(\mu_2(E)-\mu_1(E)\big) = 2\sup_{E\in\mathcal{X}}|\mu_1(E)-\mu_2(E)|.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy az f-konvergencia — feltéve, hogy az $f(u)$ függvény az $u_0=1$ pontban szigorúan konvex — mindig maga után vonja a valószínűségi mértékek egyenletes konvergenciáját. Ehhez felhasználjuk a következő, önmagában is érdekesnek látszó segédtételt, amely a *Jensen*-egyenlőtlenségben (1. 1. lemma) az egyenlőség közelítő fennállásának szükséges feltételére, azaz, szemléletesen szólva, az egyenlőség feltételének stabilitására vonatkozik (a jelölések ugyanazok, mint az 1. 1. lemmában).

2. 1. LEMMA. *Ha az $f(u)$ függvény az $u_0=M\xi$ pontban szigorúan konvex, akkor*

$$M|\xi-M\xi| \leqq \varphi_f\big(Mf(\xi)-f(M\xi)\big). \tag{2.6}$$

ahol $\varphi_f(v)$ egy (f-től függő) alkalmas monoton függvény, melyre $\lim_{v\to+0}\varphi_f(v)=\varphi_f(0)=0$ és $\varphi_f(v)>0$, ha $v>0$. Ha az $u_0=M\xi$ helyen $f(u)$ kétszer differenciálható és $f''(u_0)>$ $>a>0$, akkor a 0 elég kis δ_0 sugarú környezetében $\varphi_f(v)\leqq C\sqrt{v}$, ahol a C állandó választható pl. $C=\sqrt{\frac{8}{a}}$-nak. Ha $u_0=M\xi$ valamely r_0 sugarú környezetének (a_1, a_2)-be *eső részében mindenütt* $f''(u) \geqq a > 0$, *akkor választható* $\delta_0 = \frac{a}{2} r_0^2$, *tehát ekkor*

$$M|\xi - M\xi| \leqq C\sqrt{\delta} \quad \text{ha} \quad Mf(\xi) - f(M\xi) \leqq \delta \leqq \frac{a}{2} r_0^2. \tag{2.7}$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $a_1 < u_0 < a_2$; az $f(u)$ függvény konvex volta miatt $|u - u_0| \geqq \varepsilon_1 > 0$ esetén az (1. 7) egyenlőtlenségen túlmenőleg még

$$f(u) \geqq f(u_0) + b(u - u_0) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} |u - u_0| \tag{2.8}$$

is teljesül, ahol $\varepsilon_2 = \min \{f(u_0 + \varepsilon_1) - f(u_0) - b\varepsilon_1, f(u_0 - \varepsilon_1) - f(u_0) + b\varepsilon_1\}$; minthogy $f(u)$ az $u_0 = M\xi$ pontban szigorúan konvex, $\varepsilon_2 > 0$. (1. 7)-ből és (2. 8)-ból

$$Mf(\xi) \geqq f(M\xi) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \int_{|\xi - M\xi| \geqq \varepsilon_1} |\xi - M\xi| P(d\omega) \tag{2.9}$$

és így $Mf(\xi) - f(M\xi) \leqq \delta$ esetén

$$M|\xi - M\xi| = \int_{|\xi - M\xi| < \varepsilon_1} |\xi - M\xi| P(d\omega) + \tag{2.10}$$

$$+ \int_{|\xi - M\xi| \geqq \varepsilon_1} |\xi - M\xi| P(d\omega) \leqq \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \delta.$$

Ha mármost az eddig tetszőleges $\varepsilon_1 > 0$ számot δ függvényében úgy választjuk, hogy $\delta \downarrow 0$ esetén mind ε_1, mind $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \delta$ monoton csökkenőleg nullához tartson, akkor (2. 10)-ben $\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \delta = \varphi_f(\delta) \downarrow 0$; ezzel (2. 6)-ot igazoltuk. Az $f''(u_0) > a > 0$ esetben az

$$f(u_0) + b(u - u_0) + \frac{a}{2} (u - u_0)^2 \tag{2.11}$$

parabola egy elég kis intervallumban biztosan az $f(u)$ függvény görbéje alatt halad, így elég kis $\varepsilon_1 > 0$ esetén $\varepsilon_2 \geqq \frac{a}{2} \varepsilon_1^2$. Ezért pl. $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{2\delta}{a}}$ választással (2. 10)-bő $M|\xi - M\xi| < \sqrt{\frac{8}{a}} \sqrt{\delta}$ adódik (ha δ elég kicsi), tehát (2. 6)-ban valóban $\varphi_f(\delta) \leqq C\sqrt{\delta}$, ahol

$$C = \sqrt{\frac{8}{a}}. \tag{2.12}$$

Végül, ha u_0 valamely r_0 sugarú környezetének (a_1, a_2)-be eső részében $f''(u) \geqq a > 0$, akkor a (2. 11) parabola az $(u_0 - r_0, u_0 + r_0) \cap [a_1, a_2]$ intervallumban végig az $f(u)$ görbéje alatt halad, tehát az előbbi meggondolás $\varepsilon_1 \leqq r_0$, $\delta \leqq \frac{a}{2} r_0^2$ esetén biztosan alkalmazható. Ezzel a lemmát teljes egészében bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉSEK. *1.* Ha $f''(u_0)=0$ és az u_0 pontban a magasabbrendű deriváltak közül a $2k$-adik az első, amely nem tűnik el, akkor (2. 6)-ban $\varphi_f(v)$ választható $C_k\sqrt[2k]{v}$-nek, ha v elég kicsi. Ennek bizonyítása a fentihez teljesen hasonló. Ha az $f(u)$ görbének az $u_0=M\xi$ helyen törése van, már $\varphi_f(v)=C_0v$ is megfelelő, ahol C_0 az u_0-beli jobb és bal oldali derivált különbségének felével egyenlő.

2. Ha $f''(u)\geqq a>0$ az (a_1, a_2) intervallumban mindenütt fennáll, akkor $f(u)$ görbéje az egész intervallumban a (2. 11) parabola fölött halad; ebből erre az esetre a (2. 7)-nél erősebb

$$D^2\xi = M|\xi-M\xi|^2 \leqq \frac{2}{a}\delta \tag{2. 13}$$

becslés adódik (a *Schwarz*-egyenlőtlenség alapján (2. 13)-ból következik (2. 7), mégpedig $C=\sqrt{\frac{2}{a}}$-val). Az általános esetben azonban hasonló becslés nem adható, sőt $D^2\xi$-nek nem is kell léteznie.

3. Könnyen látható, hogy ha $f''(u_0)>0$ létezik, az $M|\xi-M\xi|<C\sqrt{\delta}$ (ha δ elég kicsi) becslésben a $\sqrt{\delta}$ nagyságrend pontos. Valóban, $A>f''(u_0)$ esetén egy elég kis $[u_0-\varepsilon_0, u_0+\varepsilon_0]$ intervallumban $f(u)\leqq f(u_0)+b(u-u_0)+\frac{A}{2}(u-u_0)^2$; ezért, ha pl. ξ értéke $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ valószínűséggel $u_0\pm\sqrt{\frac{2\delta}{A}}$, ahol $\delta\leqq\frac{A}{2}\varepsilon_0^2$ tetszőlegesen kicsi, akkor $Mf(\xi)-f(M\xi)\leqq\delta$ és ugyanakkor $M|\xi-M\xi|=\sqrt{\frac{2\delta}{A}}$.

4. A (2. 7) becslésben a C állandó (2. 12) értéke általában javítható. Bár ennek a továbbiak szempontjából nincs jelentősége, a C pontos értékének meghatározása — adott $f(u)$ esetén — semmilyen elvi problémát sem jelent. Valóban, ha ξ tetszőleges $[a_1, a_2]$-beli értékkészletű, véges $M\xi=u_0$ várható értékű valószínűségi változó, akkor az $\Omega_1=\{\omega\colon \xi(\omega)\geqq u_0\}$, $\Omega_2=\{\omega\colon \xi(\omega)<u_0\}$, $\xi^*(\omega)=M(\xi|\Omega_i)$ ha $\omega\in\Omega_i$ $(i=1,2)$ jelöléssel (feltehetjük, hogy $P(\Omega_i)>0$, $i=1,2$, mert különben $M|\xi-M\xi|=0$), nyilvánvalóan $M\xi^*=M\xi=u_0$, $M|\xi-u_0|=M|\xi^*-u_0|$, végül a *Jensen*-egyenlőtlenség (1. 1 lemma) szerint $M(f(\xi)|\Omega_i)\geqq f(M(\xi|\Omega_i))$ $(i=1,2)$, amiből $Mf(\xi)\geqq Mf(\xi^*)$. Ezért a C állandó $C_{\min}$ pontos értékének megállapításához elegendő az olyan ξ^* valószínűségi változókra szorítkozni, melyek csak két különböző értéket vehetnek fel és így valamely adott $f(u)$ függvényhez és u_0 értékhez tartozó $C_{\min}$ meghatározása elemi szélsőértékfeladatra vezet. Pl. az $f(u)=u\log u$ esetben azt a minimális C értéket kell megkeresnünk, amelyre még teljesül a

$$C\sqrt{px\log x+(1-p)\frac{u_0-px}{1-p}\log\frac{u_0-px}{1-p}-u_0\log u_0} \geqq 2p|x-u_0|$$

egyenlőtlenség $\left(0\leqq p\leqq 1 \text{ és } 0\leqq x\leqq\frac{u_0}{p}\right)$ vagy x helyére $\frac{y}{p}$-t írva,

$$\psi(p,y) = y\log\frac{y}{p}+(u_0-y)\log\frac{u_0-y}{1-p}-u_0\log u_0-\frac{4}{C^2}(y-u_0p)^2 \geqq 0$$
$$(0\leqq p\leqq 1;\ 0\leqq y\leqq u_0);$$

itt

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = (y - u_0 p)\left(-\frac{1}{p(1-p)} + \frac{8u_0}{C^2}\right),$$

tehát ha $C \geqq \sqrt{2u_0}$, akkor $p < \frac{y}{u_0}$ esetén $\frac{\partial \psi}{\partial p} \leqq 0$, $p > \frac{y}{u_0}$ esetén pedig $\frac{\partial \psi}{\partial p} \geqq 0$ és így mindenképpen $\psi(p, y) \geqq \psi\left(\frac{y}{u_0}, y\right) = 0$. Ha viszont $C < \sqrt{2u_0}$, akkor elég kis abszolút értékű ε-ra $\psi\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{u_0}{2}\right) < 0$, tehát az $f(u) = u \log u$ függvényre $C_{\min} = \sqrt{2u_0}$. Jegyezzük meg, hogy ebben az esetben a (2. 7) egyenlőtlenség (ahol $C = \sqrt{2u_0}$) δ-ra vonatkozó megszorítás nélkül érvényes, de kis δ értékekre szorítkozva se adható $C_{\min} = \sqrt{2u_0}$-nál jobb konstans.

A következőkben a 2. 1. lemma alábbi változatára lesz szükségünk (a jelölések ugyanazok, mint az 1. 2. lemmában):

2. 2. LEMMA. *Ha az $f(u)$ konvex függvény az u_0 pontban szigorúan konvex, akkor megadható olyan $\varphi_f(v)$ függvény, melyre $v \downarrow 0$ esetén $\varphi_f(v) \downarrow 0$, hogy ha*

$$\frac{\int_E \alpha(x)\lambda(dx)}{\int_E \beta(x)\lambda(dx)} = u_0 \tag{2. 14}$$

és

$$\frac{1}{\int_E \beta(x)\lambda(dx)} \int_E \beta(x) f\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right) \lambda(dx) \leqq f(u_0) + \delta, \tag{2. 15}$$

akkor

$$\int_E |\alpha(x) - u_0 \beta(x)| \lambda(dx) \leqq \varphi_f(\delta) \int_E \beta(x)\lambda(dx). \tag{2. 16}$$

Speciálisan, ha $f''(u)$ létezik és pozitív: $f''(u_0) > a > 0$, akkor elég kis $\delta > 0$ esetén (2. 14) *és a* (2. 15) *egyenlőtlenség fennállásából*

$$\int_E |\alpha(x) - u_0 \beta(x)| \lambda(dx) \leqq C\sqrt{\delta} \int_E \beta(x)\lambda(dx) \tag{2. 17}$$

következik, ahol a C állandó (2. 12) *szerint választható. Ha az u_0 pont valamely r_0 sugarú környezetében $f''(u) \geqq a > 0$, akkor az előbbi állítás minden $\delta \leqq \frac{a}{2} r_0^2$ esetén igaz.*

Bizonyítás. Ha $\beta(x)$ az E halmazon mindenütt pozitív, a 2. 2. lemma éppen úgy speciális esete a 2. 1. lemmának, mint az 1. 2. lemma az 1. 1. lemmának. A bizonyítás az általános esetben is teljesen analóg a 2. 1. lemma bizonyításával, minthogy a (2. 8) egyenlőtlenség, az (1. 7)-hez hasonlóan, u helyére formálisan $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$-et írva és $\beta(x)$-szel végigszorozva, akkor is érvényben marad, ha $\beta(x) = 0$.

2. 1. TÉTEL. *Ha az f konvex függvény az $u_0=1$ pontban szigorúan konvex, akkor megadható olyan $\varphi_f(v)$ függvény, melyre $v\downarrow 0$ esetén $\varphi_f(v)\downarrow 0$, hogy*

$$\varrho(\mu_1,\mu_2)=|\mu_1-\mu_2|\leqq\varphi_f(\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)-f(1)). \tag{2. 18}$$

Ha $f''(1)>a>0$, akkor elég kis δ esetén választható $\varphi_f(\delta)=C\sqrt{\delta}$; speciálisan, ha az $u_0=1$ hely valamely r_0 sugarú környezetében $f''(u)\geqq a>0$, akkor ez $\delta\leqq\frac{a}{2}r_0^2$ esetén biztosan megfelelő, azaz

$$\varrho(\mu_1,\mu_2)=|\mu_1-\mu_2|\leqq C\sqrt{\delta}\quad\text{ha}\quad \mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)-f(1)\leqq\delta\leqq\frac{a}{2}r^2. \tag{2. 19}$$

Itt a C állandó pl. (2. 12) szerint választható.

Bizonyítás. A tétel állítása közvetlenül következik a 2. 2. lemmából, ha E-nek az egész X teret választjuk és $\alpha(x)$, ill. $\beta(x)$ helyére a μ_1, ill. μ_2 mérték $p_1(x)$, ill. $p_2(x)$ sűrűségfüggvényét helyettesítjük, mikor is $u_0=1$.

KOROLLÁRIUM.

$$|\mu_1-\mu_2|\leqq\sqrt{2I(\mu_1\|\mu_2)}. \tag{2. 20}$$

Bizonyítás. Minthogy $I(\mu_1\|\mu_2)=\mathscr{I}_{u\log u}(\mu_1,\mu_2)$ és $1\log 1=0$, $(u\log u)''=\frac{1}{u}$, a 2. 1. tétel értelmében $|\mu_1-\mu_2|\leqq C\sqrt{I(\mu_1\|\mu_2)}$. A 2. 1. lemmához fűzött 4. megjegyzés értelmében itt a C konstans lehető legjobb értéke $C_{\min}=\sqrt{2}$; a 2. 1. tétel közvetlen alkalmazásával csak az a gyengébb becslés adódik, hogy $I(\mu_1\|\mu_2)\leqq\frac{r_0^2}{2(1+r_0)}$ esetén $|\mu_1-\mu_2|\leqq\sqrt{8(1+r_0)}\sqrt{I(\mu_1\|\mu_2)}$ így speciálisan mindenképpen $|\mu_1-\mu_2|\leqq$ $\leqq 4\sqrt{I(\mu_1\|\mu_2)}$.

MEGJEGYZÉS. A $|\mu_1-\mu_2|\leqq C\sqrt{I(\mu_1\|\mu_2)}$ egyenlőtlenség lényegében PINSZKER-től származik, aki [27] munkájában kimutatta, hogy $\mu_1\ll\mu_2$, $\frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}=a(x)$ esetén

$$\int|\log a(x)|\mu_1(dx)\leqq\int\log a(x)\,\mu_1(dx)+\Gamma\sqrt{\int\log a(x)\mu_1(dx)}=I(\mu_1\|\mu_2)+\Gamma\sqrt{I(\mu_1\|\mu_2)},$$

ahol Γ alkalmas abszolút konstans, továbbá, hogy $|\mu_1-\mu_2|\leqq 2\int|\log a(x)|\mu_1(dx)$. (A bizonyítást részletesen arra az esetre közli, amikor μ_1 valamely (ξ,η) valószínűségi változó pár együttes eloszlása, μ_2 pedig a marginális eloszlások direkt szorzata, amikor is $I(\mu_1\|\mu_2)$ az $I(\xi,\eta)$ kölcsönös információt adja, megjegyzi azonban, hogy az eredmény az általános esetben is igaz.)

A 2. 1. tétel szerint az ilyen típusú becslés sokkal általánosabban is érvényes, s az itt adott bizonyítás az $f(u)=u\log u$ speciális esetre szorítkozva is egyszerűbb az eredetinél, főleg ha (2. 20) helyett megelégszünk a gyengébb $|\mu_1-\mu_2|\leqq 4\sqrt{I(\mu_1\|\mu_2)}$ egyenlőtlenséggel. Megemlítem még, hogy az utóbbi esetre a (2. 20)-nál gyengébb $|\mu_1-\mu_2|\leqq 2\sqrt{I(\mu_1\|\mu_2)}$ becslés egyszerűen igazolható, de ugyancsak az $u\log u$ függvény speciális tulajdonságainak felhasználásával, l. [32], 33. o. (2. 19)-ben a $\sqrt{\delta}$ nagyságrend minden esetben pontos (ha $f''(1)>0$ létezik), mint ez a 2. 1. lemmához fűzött 3. megjegyzésből következik.

A 2. 1. tételből azonnal következik, hogy ha a valószínűségi mértékek valamely μ_n sorozata (vagy általánosabban egy $\{\mu_d\}_{d\in D}$ *Moore—Smith*-sorozata) f-konvergál egy μ_0 mértékhez, akkor az illető mértékek egyenletesen is konvergálnak μ_0-hoz, feltéve, hogy az $f(u)$ konvex függvény az $u_0=1$ pontban szigorúan konvex. Ha az $f(u)$ függvényről még azt is feltesszük, hogy $f(0)=\lim\limits_{u\to+0} f(u)$ és $0f\left(\frac{1}{0}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}$ véges, akkor megfordítva, az egyenletes konvergenciából is következik az f-konvergencia. Pontosabban, igaz a következő

2. 2. TÉTEL. *Ha mind* $\lim\limits_{u\to+0} f(u)$, *mind* $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}$ *véges, akkor*

$$\mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2)\leqq f(1)+C_1\sqrt{\varrho(\mu_1,\mu_2)}, \tag{2. 21}$$

ahol C_1 *csak az f függvénytől függő állandó.*

Bizonyítás. A feltételből következik, hogy a $(0, 1)$ intervallumban mind $f(0)$, mind $uf(1/u)$ korlátos, tehát alkalmas K_1 és K_2 állandóval

$$|f(u)-f(1)|<K_1,\quad u\left|f\left(\frac{1}{u}\right)-f(1)\right|<K_2\qquad (0<u\leqq 1). \tag{2. 22}$$

Legyen $\varepsilon<1$ tetszőleges pozitív szám és vezessük be a

$$\begin{cases} E_\varepsilon^1 = \{x\colon (1-\varepsilon)p_1(x)\geqq p_2(x);\ p_1(x)>0\} \\ E_\varepsilon^2 = \{x\colon (1-\varepsilon)p_2(x)\geqq p_1(x)\}, \\ E_\varepsilon = X-(E_\varepsilon^1\cup E_\varepsilon^2) = \left\{x\colon 1-\varepsilon<\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}<\dfrac{1}{1-\varepsilon}\right\} \end{cases} \tag{2. 23}$$

jelölést. Ekkor $x\in E_\varepsilon$ esetén

$$\left|f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)-f(1)\right|\leqq K_\varepsilon\cdot\varepsilon, \tag{2. 24}$$

ahol

$$K_\varepsilon=\max\left\{\left|\frac{f(1)-f(1-E)}{\varepsilon}\right|,\ \left|\frac{f\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)-f(1)}{\frac{1}{1-\varepsilon}-1}\right|\right\}$$

és ε csökkentésével K_ε is csökken (kihasználva $f(u)$ konvexitását). Jegyezzük meg továbbá, hogy (2. 22) és (2. 23) értelmében

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{E_\varepsilon^1}\left|f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)-f(1)\right|\frac{p_2(x)}{p_1(x)}p_1(x)\lambda(dx)\leqq K_2\mu_1(E_\varepsilon^1), \\ \displaystyle\int\limits_{E_\varepsilon^2}\left|f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)-f(1)\right|p_2(x)\lambda(dx)\leqq K_1\mu_2(E_\varepsilon^2) \end{cases} \tag{2. 25}$$

és hogy (2. 23) szerint

$$\varrho(\mu_1, \mu_2) \geqq \int_{E_\varepsilon^i} |p_1(x)-p_2(x)|\,\lambda(dx) \geqq \varepsilon\mu_i(E_\varepsilon^i) \qquad (i = 1, 2). \tag{2. 26}$$

A (2.24), (2. 25) és (2. 26) egyenlőtlenségből végül azt kapjuk, hogy

$$\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)-f(1) \leqq \int \left| f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) - f(1) \right| p_2(x)\lambda(dx) = \tag{2. 27}$$

$$= \int_{E_\varepsilon} + \int_{E_\varepsilon^1} + \int_{E_\varepsilon^2} \leqq K_\varepsilon \cdot \varepsilon + \frac{K_1+K_2}{\varepsilon}\,\varrho(\mu_1, \mu_2).$$

Innen, pl. az $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\varrho(\mu_1, \mu_2)}$ választással éppen (2. 21) adódik, figyelembe véve, hogy ekkor $\varepsilon \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ és így (2. 27)-ben $K_\varepsilon \leqq K_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

A 2. 2. tétel feltételei mellett tehát — feltéve, hogy $f(u)$ az $u_0 = 1$ pontban szigorúan konvex — az f-környezetek (metrizálható) topologikus teret definiálnak, ugyanis az f-környezetek rendszere ekvivalens a ϱ metrika szerinti környezetek rendszerével (tehát az f-konvergencia a mértékek egyenletes konvergenciájával). Ha azonban $f(0) = +\infty$ vagy $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$, akkor ez az ekvivalencia általában már nem teljesül, sőt, ekkor az eloszlások $\mathscr{M}$ halmazán az f-környezetekkel definiált (V)-tér általában nem is topologikus tér, még akkor sem, ha az X alaptér megszámlálható és $\mathscr{M}$-nek az összes olyan eloszlások halmazát vesszük, melyeknél X minden pontja pozitív mértékű.

Ha $\mathscr{M}$-ben az f-környezetek topológiát definiálnának, akkor minden $\mu_0 \in \mathscr{M}$ esetén teljesülnie kellene a következő (T) tulajdonságnak:

(T) *minden $U_f(\mu_0; \varepsilon)$ környezethez található olyan $U_f(\mu_0; \varepsilon')$ környezet, hogy minden $\mu \in U_f(\mu_0; \varepsilon')$ eloszlásnak van olyan $U_f(\mu; \varepsilon'')$ környezete, hogy $U_f(\mu; \varepsilon'') \subset U_f(\mu_0; \varepsilon)$.*

2. 3. TÉTEL. *Ha $\mathscr{M}$ valamely megszámlálhatóan végtelen X halmazon értelmezett összes olyan valószínűségi mértékek halmazát jelenti, melyeknél minden $x \in X$ pont pozitív mértékű és az $f(u)$ konvex függvényre vagy $f(0) = +\infty$ vagy $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$, akkor a (T) tulajdonság egyetlen $\mu_0 \in \mathscr{M}$ eloszlásra sem teljesül.*

Bizonyítás. Az X megszámlálható halmazon minden valószínűségeloszlás egy $\mathscr{P} = (p_1, p_2, \ldots)$ számsorozattal adható meg, ahol p_i az $\{x_i\}$ $(x_i \in X)$ egy pontból álló halmaz mértékét jelenti $\left(p_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots;\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1\right)$. Speciálisan az $\mathscr{M}$-beli eloszlásokat az jellemzi, hogy mindegyik $p_i > 0$. A $\mathscr{P} = (p_1, p_2, \ldots)$ és $Q = (q_1, q_2, \ldots)$ eloszlások f-eltérésére az 1. 1. definícióból a következő adódik:

$$\mathscr{I}_f(\mathscr{P}, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right). \tag{2. 28}$$

A tétel állításánál többet is fogunk bizonyítani, nevezetesen azt, hogy ha az $f(u)$ konvex függvényre $f(0) = \lim_{u\to+0} f(u) = +\infty$ vagy $\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$ (vagy mindkettő) teljesül, akkor az X-en értelmezett bármely $\mathscr{P} = (p_1, p_2, \ldots) \in \mathscr{M}$ eloszláshoz és $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $Q \in \mathscr{M}$ eloszlás, hogy $\mathscr{I}_f(Q, \mathscr{P}) < f(1) + \varepsilon$, továbbá ehhez és bármely $\varepsilon' > 0$-hoz (ε' függhet Q-tól is) olyan $\mathscr{R} \in \mathscr{M}$ eloszlás, hogy $\mathscr{I}_f(\mathscr{R}, Q) < f(1) + \varepsilon'$, de $\mathscr{I}_f(\mathscr{R}, \mathscr{P}) = +\infty$. Valóban, ha $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{q}_k$ tetszőleges pozitív tagú konvergens sor, melyre

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k f\left(\frac{\hat{q}_k}{p_k}\right) < +\infty, \tag{2.29}$$

továbbá $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{r}_k$ olyan pozitív tagú konvergens sor, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{q}_k f\left(\frac{\hat{r}_k}{\hat{q}_k}\right) < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k f\left(\frac{\hat{r}_k}{p_k}\right) = +\infty, \tag{2.30}$$

akkor a $Q = (q_1, q_2, \ldots) \in \mathscr{M}$ eloszlást a

$$q_k = \begin{cases} c p_k & \text{ha } k < N \\ \hat{q}_k & \text{ha } k \geqq N \end{cases} \qquad c = \frac{1 - \sum_{k=N}^{\infty} \hat{q}_k}{\sum_{k=1}^{N-1} p_k} \tag{2.31}$$

egyenlőséggel definiálva, elég nagy N esetén

$$\mathscr{I}_f(Q, \mathscr{P}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k f\left(\frac{q_k}{p_k}\right) = f\left(\frac{1}{c}\right) \sum_{k=1}^{N-1} p_k + \sum_{k=N}^{\infty} p_k f\left(\frac{\hat{q}_k}{p_k}\right) < f(1) + \varepsilon \tag{2.32}$$

adódik (kihasználva (2. 29)-et és azt, hogy $N \to \infty$ esetén $c \to 1$), és hasonlóképpen az

$$r_k = \begin{cases} c' q_k, & \text{ha } k < N' \\ \hat{r}_k, & \text{ha } k \geqq N' \end{cases} \qquad c' = \frac{1 - \sum_{k=N'}^{\infty} \hat{r}_k}{\sum_{k=1}^{N'-1} q_k} \tag{2.33}$$

összefüggéssel definiált $\mathscr{R} = (r_1, r_2, \ldots) \in \mathscr{M}$ eloszlásra elég nagy $N' > N$ esetén

$$\mathscr{I}_f(\mathscr{R}, Q) < f(1) + \varepsilon', \tag{2.34}$$

ugyanakkor azonban

$$\sum_{k=N'}^{\infty} p_k f\left(\frac{r_k}{p_k}\right) = \sum_{k=N'}^{\infty} p_k f\left(\frac{\hat{r}_k}{p_k}\right) = +\infty, \tag{2.35}$$

tehát $\mathscr{I}_f(\mathscr{R}, \mathscr{P}) = +\infty$.

Így tehát már csak azt kell igazolni, hogy mind az $f(0) = +\infty$, mind a $\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$ esetben léteznek a (2.29) és (2. 30) feltételt kielégítő $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{q}_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{r}_k$ konvergens sorok.

Ha $f(0) = +\infty$, akkor válasszuk meg az $\alpha_k \to +\infty$ számsorozatot úgy, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k p_k$ még konvergens legyen és legyen $\hat{q}_k = p_k f^{-1}(\alpha_k)$ (ahol $f^{-1}(\alpha)$ az $f(u) = \alpha$ egyenletnek eleget tevő u értékek legkisebbikét jelöli; ha ilyen érték nincs, akkor legyen pl. $f^{-1}(\alpha) = 1$). Ekkor $\frac{\hat{q}_k}{p_k} \to 0$, tehát $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{q}_k$ konvergens és (2. 29) teljesül. Ezután legyen $\beta_k \to +\infty$ olyan számsorozat, melyre $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \hat{q}_k$ konvergens, de $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k p_k$ divergens; $\frac{\hat{q}_k}{p_k} \to 0$ miatt ilyen sorozat biztosan létezik. Ha mármost $\hat{r}_k = \hat{q}_k f^{-1}(\beta_k)$ (ahol f^{-1} értelmezése ugyanaz, mint fentebb), akkor (2. 30) is teljesül, figyelembe véve, hogy $\frac{\hat{q}_k}{p_k} \to 0$ miatt elég nagy k-ra $f\left(\frac{\hat{r}_k}{p_k}\right) > f\left(\frac{\hat{r}_k}{q_k}\right) = \beta_k$.

A $\lim_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$ esetben a következő lemmából indulunk ki.

2. 3. LEMMA. *Ha* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *tetszőleges pozitív tagú konvergens sor és* $\psi(u)$ *tetszőleges,* $u > 0$ *esetén értelmezett pozitív értékű függvény, melyre* $\lim_{u \to \infty} \psi(u) = +\infty$, *akkor létezik olyan* $b_k \to +\infty$ *számsorozat, hogy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k < +\infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \psi(b_k) = +\infty. \tag{2. 36}$$

A lemma bizonyítása. Legyen $\psi_1(u)$ olyan monoton növekedőleg végtelenhez tartó folytonos függvény, melyre $0 < \psi_1(u) \leqq \psi(u)$ $(0 < u < +\infty)$; ilyen ψ_1 nyilván létezik. Tekintsük a természetes számok olyan gyorsan növekvő n_l sorozatát, hogy a $\sum_{k=n_l}^{\infty} a_k = \frac{1}{c_l \psi_1(c_l)}$ összefüggéssel definiált c_l pozitív számokra $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_1(c_l)} < +\infty$ legyen. Ekkor a $b_k = \sum_{n_l \leqq k} c_l$ monoton növekedőleg végtelenhez tartó sorozat megfelel a (2. 36) követelményeknek, ugyanis c_l értelmezése szerint

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \sum_{k=n_l}^{\infty} a_k = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_1(c_l)} < +\infty$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \psi(b_k) \geqq \sum_{l=1}^{\infty} c_l \psi_1(c_l) \sum_{k=n_l}^{\infty} a_k = \sum_{l=1}^{\infty} 1 = +\infty;$$

itt felhasználtuk, hogy $\psi(u) \geqq \psi_1(u)$ és $\psi_1(u)$ monoton volta miatt $b_k \psi(b_k) \geqq b_k \psi_1(b_k) \geqq \geqq \sum_{n_l \leqq k} c_l \psi_1(c_l)$.

Alkalmazzuk most a 2. 3. lemmát a $\sum p_k$ sorra (vagyis $q_k = p_k$), a $\psi(u) = f^{-1}\left(\frac{u}{f^{-1}(u)}\right)$ választással; itt, az előző esettől eltérőleg, $f^{-1}(u)$-n a legnagyobb olyan v értéket értjük, melyre $f(v) = u$ (ha ilyen v nincs, akkor legyen pl. $f^{-1}(u) = 1$.)

A lemma feltételei teljesülnek, mert a $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=+\infty$ feltétel értelmében $\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)=+\infty$.

Tekintsük a lemma szerinti b_k számokat és legyen

$$\hat{q}_k=p_kf^{-1}(b_k);\quad \hat{r}_k=\hat{q}_kf^{-1}\left(\frac{b_k}{f^{-1}(b_k)}\right)=\hat{q}_k\psi(b_k). \tag{2. 37}$$

Ekkor $f\left(\frac{\hat{q}_k}{p_k}\right)=b_k$, (ha k elég nagy), tehát (2. 36) első fele éppen (2. 29)-et adja. Továbbá (2. 37) második feléből $f\left(\frac{\hat{r}_k}{\hat{q}_k}\right)=\frac{b_k}{f^{-1}(b_k)}=b_k\frac{p_k}{q_k}$ és így (2. 36) első fele a (2. 30) első felét is szolgáltatja. Végül az $f(u)$ konvex volta és $\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=+\infty$ miatt $f(u)$ görbéje elég nagy u_0 esetén biztosan az origót az $(u_0, f(u_0))$ ponttal összekötő egyenes fölött halad, ha $u>u_0$; ezt $u_0=\frac{\hat{q}_k}{p_k}$-ra és $u=\frac{\hat{r}_k}{p_k}$-ra alkalmazva, (2. 37) felhasználásával

$$f\left(\frac{\hat{r}_k}{p_k}\right)>\frac{f\left(\frac{\hat{q}_k}{p_k}\right)}{\frac{\hat{q}_k}{p_k}}\cdot\frac{\hat{r}_k}{p_k}=f\left(\frac{\hat{q}_k}{p_k}\right)\frac{\hat{r}_k}{\hat{q}_k}=b_k\psi(b_k) \tag{2. 38}$$

(ha k elég nagy), tehát (2. 30) második fele is következik (2. 36) második feléből. Ezzel a 2. 3. tétel bizonyítását befejeztük.

A 2. 3. tétel természetesen azt is jelenti, hogy az $f(0)+\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=+\infty$ esetben az f-konvergencia (általános értelemben, azaz *Moore—Smith*-sorozatokra, ill. rácsokra értve) nem tekinthető topologikus térbeli konvergenciafogalomnak, illetőleg, hogy az eloszlássorozatok konvergenciája nem származtatható az első megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topológiából. Nyitva maradó kérdés, hogy megadható-e egyáltalán $\mathcal{M}$-ben olyan topológia, amelyben az eloszlássorozatok konvergenciája ekvivalens az f-konvergenciával.

Láttuk, hogy $f(0)+\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=+\infty$ esetén abból, hogy μ_n egyenletesen (más szóval a ϱ variációs távolság szerint) tart μ-höz, még nem következik a $\mu_n\to\mu$ f-konvergencia. Ha azonban azt az erősebb kikötést tesszük, hogy még $(\mu_n(A)-\mu(A))/ /(\mu_n(A)+\mu(A))$ is A-ban egyenletesen nullához tart $(A\in\mathcal{X},\ \mu_n(A)+\mu(A)>0)$, ami könnyen láthatólag azzal ekvivalens, hogy elég nagy n-re már $\mu_n\ll\mu$ és $p_n(x)=\frac{\mu_n(dx)}{\mu(dx)}$ egyenletesen tart 1-hez $[\mu]$, akkor $u_n\xrightarrow{f}\mu$ már biztosan teljesül. Ez egyszerűen abból következik, hogy $\mu_n\ll\mu$, vrai sup $|p_n(x)-1|<\delta$ esetén nyilvánvalóan ($\lambda=\mu$ választással)

$$\mathcal{I}_f(\mu_n,\mu)=\int f(p_n(x))\mu(dx)\leqq f(1)+\varepsilon, \tag{2. 39}$$

ahol[7]

$$\varepsilon = \max |f(u) - f(1)| \to 0, \quad \text{ha} \quad \delta \to 0.$$

Másképpen megfogalmazva, ha a valószínűségeloszlások terében bevezetjük pl. a

$$(2.40) \quad \varrho'(\mu_1, \mu_2) = \log \max \left(q(\mu_1, \mu_2), q(\mu_2, \mu_1)\right); q(\mu_i, \mu_j) = \operatorname{vrai\,sup} \frac{\mu_i(dx)}{\mu_j(dx)}$$

metrikát, mely szerint az $(X, \mathscr{X})$-en értelmezett összes, valamely rögzített μ_0 mértékkel ekvivalens μ eloszlások teljes metrikus teret alkotnak (ha eltekintünk attól, hogy $\varrho'(\mu_1, \mu_2)$ értéke $+\infty$ is lehet), akkor a $\mu_n \xrightarrow{\varrho'} \mu$ konvergenciából mindig következik a $\mu_n \xrightarrow{f} \mu$ f-konvergencia. Ugyanakkor azonban a 2. 2. és 2. 3. tételből nyilvánvaló (és közvetlenül is könnyen igazolható), hogy az f-konvergenciából semmilyen f esetén sem következik a ϱ'-konvergencia[8], feltéve, hogy a vizsgált eloszláshalmaz elég tág.

Eredményeinket az információkonvergencia esetére alkalmazva megállapíthatjuk, hogy a ϱ' metrika szerinti konvergenciából (vagyis $\frac{\mu_n(A) - \mu(A)}{\mu_n(A) + \mu(A)}$ egyenletesen 0-hoz való tartásából) mindig következik az információkonvergencia, de megfordítva nem. Az α-rendű információkonvergencia $0 < \alpha < 1$ esetén ekvivalens a mértékek variációs távolság szerinti (vagyis egyenletes) konvergenciájával, $\alpha \geqq 1$ esetén azonban, bár az információkonvergencia maga után vonja a mértékek egyenletes konvergenciáját, a megfordítás már nem érvényes. Ebből a szempontból tehát az α-rendű információ $0 < \alpha < 1$ esetén kedvezőbben viselkedik, mint a közönséges (elsőrendű) információ. Szemléletesen szólva ennek az az oka, hogy $0 < \alpha < 1$ esetén az α-rendű információ a kis valószínűségekre nem érzékeny, $\alpha \geqq 1$ esetén azonban igen; ez a tulajdonság, amely abban is megnyilvánul, hogy $\alpha \geqq 1$ esetén $I_\alpha(\mu_1 \| \mu_2)$ végtelenné válik, ha $\mu_1 \not\ll \mu_2$, $0 < \alpha < 1$ esetén viszont nem, ismét alátámasztja RÉNYI Alfrédnak [30] azt a megállapítását, hogy a különböző α-rendű információmennyiségek közötti választás lehetősége sokszor előnyös lehet és nem biztos, hogy mindig az elsőrendű információ használata a legcélszerűbb. Ezt a megállapítást kiegészíthetjük azzal, hogy az f-eltérések a választékot még inkább bővítik (bár ezek már nem rendelkeznek az információ additív tulajdonságával), ami egyes esetekben szintén hasznosnak bizonyulhat.

Az f-eltérésekkel kapcsolatban felvethető az a kérdés is, hogy található-e olyan $\varphi(t)$ szigorúan monoton növekedő folytonos függvény, hogy $\varphi(\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2))$ kvázitávolság legyen $\mathscr{M}$-ben, azaz eleget tegyen a háromszögegyenlőtlenségnek. A 2. 3. tétel értelmében ilyen φ függvény létezése csak akkor várható, ha $f(0) < +\infty$, $\lim\limits_{u \to \infty} \frac{f(u)}{u} < +\infty$, így például az $I(\mu_1 \| \mu_2)$ I-divergenciának, illetőleg a $J(\mu_1, \mu_2)$ J-divergenciának semmilyen szigorúan monoton folytonos függvénye sem lehet kvázitávolság, ill. távolság (sőt jóval általánosabb típusú függvényei sem, vö. [5]).

[7] Ha $f''(1)$ létezik és $f''(1) < A$, akkor (2. 39)-ben ε választható $\frac{1}{2} A\delta^2$-nek is, ha δ elég kicsi; kihasználva, hogy ekkor $f(u) \leqq f(1) + b(u-1) + \frac{A}{2}(u-1)^2$, ha $|u-1| \leqq \delta$.

[8] KULLBACK [21] könyvében a 71. oldalon levő 2.1 lemma második állítása téves.

Az $f(u) = -u^\alpha$ $(0<\alpha<1)$ esetre vonatkozólag megemlítem azt a lényegében CZIPSZER Jánostól származó eredményt, hogy ilyenkor a $\varphi(t)=(1+t)^{\alpha'}$ $(\alpha'=\min(\alpha, 1-\alpha))$ függvény megfelelő, vagyis a

$$\Delta_\alpha(\mu_1, \mu_2) = \left[1 - \int p_1^\alpha(x) p_2^{1-\alpha}(x)\lambda(dx)\right]^{\alpha'}$$

$(0<\alpha<1;\ \alpha'=\min(\alpha, (\alpha, 1-\alpha))$ mennyiség eleget tesz a háromszögegyenlőtlenségnek, azaz kvázitávolság $\mathcal{M}$-ben. Speciálisan $\alpha=\frac{1}{2}$ esetén $\Delta_{\frac{1}{2}}(\mu_1, \mu_2)$ nem más, mint a *Bhattacharyya*-féle távolság. Ezzel a kérdéskörrel FISCHER Jánossal közös [9] dolgozatunkban foglalkoztunk.

IDÉZETT IRODALOM

[1] J. ACZÉL und Z. DARÓCZY: „Charakterisierung der Entropien positiver Ordnung und der Shannonschen Entropie". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963) 95—121.
[2] A. BHATTACHARYYA: „On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation". *Sankhya* **8** (1946) 1—14.
[3] D. BLACKWELL: „Equivalent comparisons of experiments". *Ann. Math. Stat.* **24** (1953) 265—272.
[4] I. CSISZÁR: „Informationstheoretische Konvergenzbegriffe im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen". *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **7** (1962) 137—158.
[5] I. CSISZÁR: „Über topologische und metrische Eigenschaften der relativen Information der Ordnung α". *Transactions of the Third Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prague,* 1964; 63—73.
[6] I. CSISZÁR: „Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten". *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **8** (1963) 85—108.
[7] I. CSISZÁR: „A note on limiting distributions on topological groups". *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **9** (1964) 595—599.
[8] I. CSISZÁR: „On infinite products of random elements and infinite convolutions of probability distributions on locally compact groups". *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie* **5** (1966) 279—295.
[9] I. CSISZÁR—J. FISCHER: „Informationsentfernungen im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen". *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **7** (1962) 159—180.
[10] R. L. DOBRUSIN: „A Shannon-féle alaptétel általános megfogalmazása az információelméletben". *MTA III. Oszt. Közleményei* **9** (1961) 427—456, **10** (1962) 51—103 és 141—167. (Az orosz eredeti: Успехи Математических Наук, **14** (1959) 3—104.)
[11] J. L. DOOB: *Stochastic Processes,* Wiley, New York, 1953.
[12] I. M. GELFAND—J. JAGLOM: „Über die Berechnung der Menge an Information über eine zufällige Funktion, die in einer anderen zufälligen Funktion enthalten ist". *Arbeiten zur Informationstheorie II. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin,* 1958, 7—56.
[13] Я. Гаек: „Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса". *Чехосл. Мат. Журнал* **8** (1958) 610—619.
[14] P. R. HALMOS and L. J. SAVAGE: „Application of the Radon—Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics". *Ann. Math. Stat.* **20** (1949) 225—241.
[15] K. ITO and Y. KAWADA: „On the probability distribution on a compact group". *Proc. Phys. Math. Soc. Japan,* **22** (1940) 977—998.
[16] H. JEFFREYS: *Theory of Probability, 2nd edition.* Clarendon Press, Oxford, 1948.
[17] G. KALLIANPUR: „On the amount of information contained in a σ-field". *Contributions to probability and statistics, the Harald Cramér volume, Stanford,* 1960. 265—271.
[18] D. G. KENDALL: „Information theory and the limit theorem for Markov chains and processes with a countable infinity of states". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **15** (1964) 137—143.
[19] Б. М. Клосс: „О вероятностных распределениях на бикомпактных топологических группах". *Теория Вер. и Примен.* **4**/1959/255—290.

[20] S. KULLBACK and R. A. LEIBLER: „On information and sufficiency". *Ann. Math. Stat.* **22** (1951) 79—87.

[21] S. KULLBACK: *Information Theory and Statistics.* Wiley, New York, 1959.

[22] Ю. В. Линник: „Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдеберга". *Теория Вер. и Примен.* 4/1959/ 311—321.

[23] M. LOÈVE: *Probability Theory.* Van Nostrand, 1955.

[24] A. PEREZ: „Notions généralisées d'incertitude, d'entropie et d'information du point de vue de la théorie de martingales". *Transactions of the First Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Prague,* 1957; 183—208.

[25] A. PEREZ: „Sur la théorie de l'information dans le cas d'un alphabet abstrait". *Transactions of the First Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. Prague,* 1957; 209—243.

[26] A. PEREZ: „Information, ε-sufficiency and data reduction problems". *Kybernetika (Ceskoslovenské Akademie Ved)* **1** (1965) 297—322.

[27] M. С. Пинскер: „Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов". *Пробл. пер. инф.* 7. Изд. А. Н. СССР., Москва, 1960.

[28] A. PRÉKOPA, A. RÉNYI, K. URBANIK: „О предельнам распределении для сумм независимых случайных величин на бикомпактных топологических группах". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 11—16.

[29] RÉNYI ALFRÉD: „Az információelmélet néhány alapvető kérdése". *MTA III. Oszt. Közleményei* **10** (1960) 251—282.

[30] A. RÉNYI: „On measures of entropy and information". *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley,* 1961; 541—561.

[31] A. RÉNYI: „On the amount of information concerning an unknown parameter in a sequence of observations". *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **9** (1964) 617—624.

[32] M. SAKAGUCHI: *Information Theory and Decision Making.* Statistics Dept., George Washington University, 1964.

[33] C. E. SHANNON and W. WEAVER: *The Mathematical Theory of Communication.* Urbana, 1949.

[34] W. SIERPINSKI: *General Topology.* University of Toronto Press, Toronto, 1956.

[35] K. STROMBERG: „Probabilities on a compact group". *Transactions of the American Math. Soc.* **94** (1960) 295—309.

[36] K. URBANIK: „On the limiting probability distribution on a compact topological group". *Fundamenta Math.* **44** (1957) 243—261.

[37] VINCZE ISTVÁN: „Az információelmélet egy fogalmának értelmezéséről". *Matematikai Lapok* **10** (1959) 255—266.

(Beérkezett: 1966. I. 20.)

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSA GEOMETRIAI KÖZELÍTŐ MÓDSZEREKKEL

Írta: POGÁNY CSABA

Kárteszi Ferenc professzor 60. születésnapjára

Bevezetés

Lineáris egyenletrendszerek megoldását többféle módon lehet interpretálni. Ebben a cikkben a feladatok megfogalmazása és a megoldási módszerek is szemléletes geometriai tényekre épülnek, ezért szerepel a címben is a geometriai jelző.

A lineáris egyenletrendszer közismert alakja,

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m = 0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

alkalmasan választott $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ vektorokkal átírható az

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_1(\mathbf{x} - \mathbf{b}_1) = 0 \\
&\mathbf{a}_2(\mathbf{x} - \mathbf{b}_2) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\mathbf{a}_m(\mathbf{x} - \mathbf{b}_m) = 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

formába, ahol $\mathbf{a}_i(\mathbf{x} - \mathbf{b}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - b_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Átírható továbbá az (1) alapforma a következő alakba is

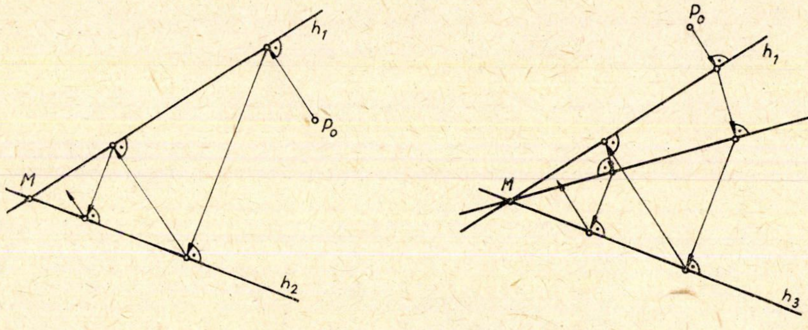
$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}'_1 x_1 + \mathbf{a}'_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}'_n x_n = \mathbf{b}, \qquad \text{ahol} \\
&\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \qquad \text{és} \\
&\mathbf{a}'_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{3}
$$

(1)-nek mindkét átfogalmazása szemléletes geometriai tartalommal rendelkezik. A (2)-ben szereplő egyenletek az n-dimenziós euklideszi térben hipersíkok egyenletei, és a feladat ezek közös részének (vagy a közös rész egy pontjának) meghatározása. (3)-ban viszont a feladat egy vektornak adott vektorok lineáris kombinációjaként való előállítása (vagy kicsit általánosabban) olyan lineáris kombináció előállítása, amely a lehető legközelebb van egy adott vektorhoz. Mivel a szóbanforgó tér pontjai és ezen tér dimenziószámával azonos elemszámú rendezett számsorozatok között a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, a következőkben — a szemléletesség kedvéért — végig a geometriai kifejezésmód fog szerepelni.

A Kaczmarz- és a Cimmino-féle eljárás

1937-ből, illetve 1938-ból származik a következő két, kimondottan geometriai alapú módszer.

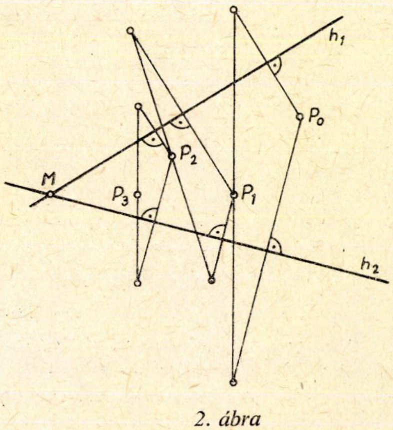
A KACZMARZ-módszer (2) alapján könnyen megfogalmazható. Tetszőlegesen választott kiindulópont (közelítő gyökrendszer) vetületét kell képezni az (első egyenlet által definiált) első hipersíkra, majd e vetületi pont vetületét a második hipersíkra, és így tovább, az n-edik hipersíkra való vetítés után az utoljára kapott vetületi pont kerül a kiinduló közelítő pont helyébe és ezzel kell folytatni a vetítéseket ad infinitum. Az így kapott végtelen pontsorozatról bebizonyítható, hogy ha létezik a hipersíkoknak nem üres közös része, akkor a sorozat elemeinek a közös résztől vett távolsága nullához tart. (Lásd [1] és [2].)



1. ábra

Az eljárást egy-egy 2 dimenziós esetben az 1*a*. és 1*b*. ábra szemlélteti, ahol a h_1 és h_2, ill. h_1, h_2 és h_3 hipersíkok közös részét M jelöli, a kiindulópontot P_0, az első néhány vetítést pedig a nyilak reprezentálják.

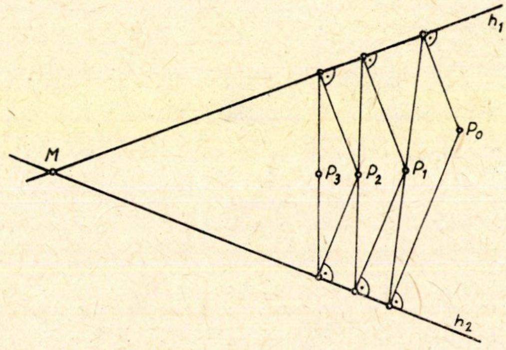
Nem nehéz belátni, hogy a konvergencia sebessége kicsi, ha a hipersíkok normálvektorai közel párhuzamosak.



2. ábra

A következő, CIMMINO-féle eljárás szintén a hipersíkok közös részéhez konvergáló pontsorozatot állít elő. A (tetszőlegesen választott) kiinduló (közelítő) pontot egyszerre kell tükrözni valamennyi hipersíkra és a kapott tükörkép-pontok súlypontja lesz az újabb közelítő pont, majd ezt kell tükrözni a hipersíkokra, és a kapott tükörkép-pontok súlypontja lesz a következő közelítő pont és így tovább. Az így kapott végtelen pontsorozat (ha létezik a hipersíkoknak nem üres közös része, akkor) biztosan a közös részhez tart ([1] és [2]). Egy 2-dimenziós esetet szemléltet a 2. ábra, ahol $P_0, P_1, P_2, \ldots$ az egyes közelítéseket reprezentáló pontok.

Erről a módszerről is megállapítható, hogy lassabb a konvergencia akkor, ha a hipersíkok normálvektorainak egyenesei kis szöget zárnak be egymással.



3. ábra

Tükrözéssel és vetítéssel kapcsolatos módszerek

A következőkben felsorolásra kerülő módszerek részletesebb diszkussziója megtalálható [1]-ben és [2]-ben. Valamennyinek közös vonása a lineáris egyenletrendszer feladatának (2) alapján való interpretálása, továbbá az, hogy ezeknél a hipersíkokra való igen egyszerű vetítési és tükrözési műveletek játsszák a fő szerepet, és az eljárások ezeknél bonyolultabb műveletet elenyésző kis részben tartalmaznak csak.

1. ELJÁRÁS

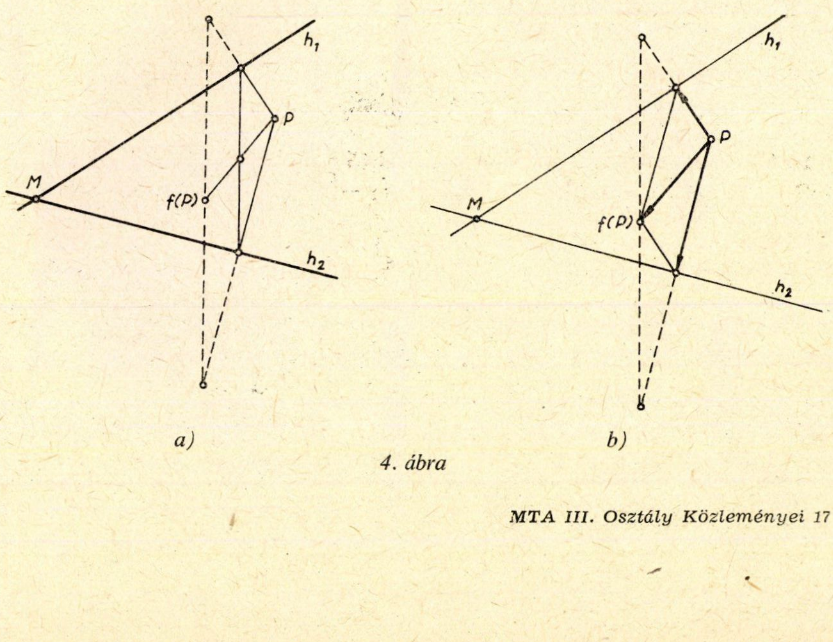
Ez a módszer egy

$$P_0,\ P_1=f(P_0),\ P_2=f(P_1)=f(f(P_0)),\ \ldots$$

pontsorozatot állít elő, ahol $f(P)$ a P-nek a hipersíkokra vonatkozó vetületeinek a súlypontja. A konvergencia gyorsaságára hasonló igaz, mint a KACZMARZ- és a CIMMINO-módszernél. Egy 2-dimenziós esetet szemléltet a 3. ábra.

2. ELJÁRÁS

A CIMMINO-féle eljárás pontsorozata úgy áll elő, hogy egy tetszőleges P pontra alkalmazunk egy eljárást, ami szintén pontot ad $(f(P))$, majd az így kapott pontra újra ugyanazt az eljárást alkalmazzuk és így tovább. Az egész eljárást jellemezni



a) *b)*

4. ábra

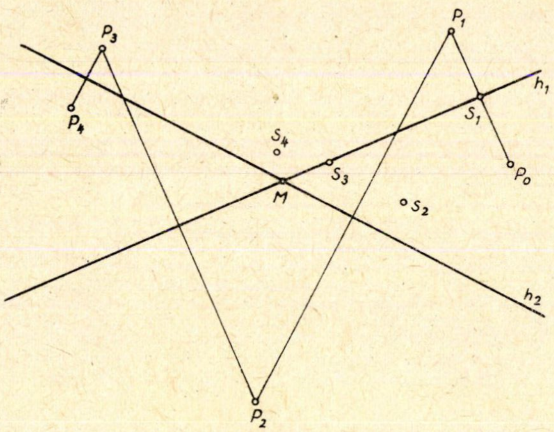
lehet tehát egy képzési szabállyal. A CIMMINO-féle eljárás pontsorozatát azonban még az alábbi képzési szabályok is meghatározzák.

a) a P-ből képzett pont: P-nek a tükörképe P-nek a hipersíkokra vonatkozó vetületeinek a súlypontjára (4*a*. ábra),

b) a P-ből képzett pont helyvektora: P helyvektorának és P-ből a hipersíkokig futó vektoroknak az összege (4*b*. ábra).

3. ELJÁRÁS

Ez a módszer azon alapszik, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott pontnak a hipersíkokra vonatkozó egyes tükörképeiből és ezek egyes tükörképeiből stb. előálló ponthalmazban két egymástól legtávolabbinak a súlypontja soha sincs távolabb a hipersíkok közös részétől, mint a kiválasztott pont. Ennek az eljárásnak több kidolgozott változata van, bővebben l. [1] és [2].



5. *ábra*

4. ELJÁRÁS

A következő módszer azon a tételen alapszik, hogy tetszőleges pontot tükrözve az első hipersíkra, a kapott pontot a másodikra és így tovább, az n-edikre történt tükrözés után e tükörponttal kezdve elölről az eljárást és ezt így folytatva ad infinitum, az így előálló végtelen pontsorozat súlypontjának a hipersíkok metszetétől (ha ez nem üres) vett távolsága nullához tart. Ennek az eljárásnak is több számítástechnikai célokra kidolgozott változata van. (Bővebben l. [1] és [2].) Az 5. ábra egy 2-dimenziós esetet szemléltet, ahol az s_i az első $i+1$ pont súlypontját jelöli, $i=1, 2, \dots$.

Egy elemi trigonometrikus megfontoláson alapuló módszer

Az itt következő iterációs eljárás közelítő pontsorozatának meghatározása az alábbi módon történik. Legyen $f(P) \overset{\text{def}}{=} f(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - \lambda \mathbf{s}$, ahol $\mathbf{p}$ a P pont helyvektora, és

$$\lambda = \frac{d}{v} \left(= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \right),$$

$$d = \frac{1}{n} \mathbf{p} \, \Sigma \, \mathbf{a}_i - \frac{1}{n} \Sigma \, b_i$$

valamint

$$v = \frac{1}{n} \mathbf{s} \, \Sigma \, \mathbf{a}_i$$

és

$$\mathbf{s} = \frac{\Sigma\, \mathbf{a}_i}{|\Sigma\, \mathbf{a}_i|}.$$

Ily módon tetszőleges kiindulási P_0 ponthoz definiálható a $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ pontsorozat, ahol

$$f(P_0) = P_1$$

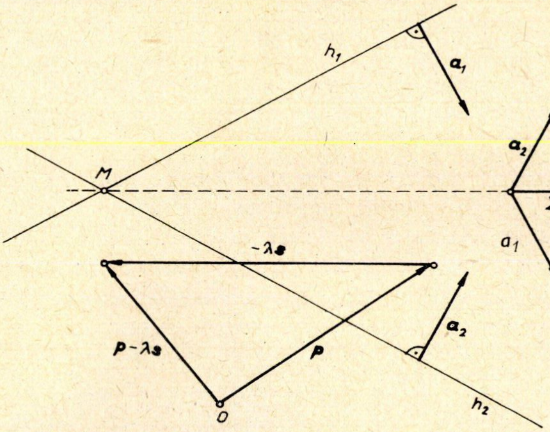
$$f(P_1) = P_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$f(P_{n-1}) = P_n$$

$$\cdots\cdots$$

Fel kell tenni, hogy $\Sigma \mathbf{a}_i \neq 0$. Továbbá nyilván feltehető, hogy $|\mathbf{a}_i| = 1$ és az is, hogy $\mathbf{a}_i \mathbf{p} - b_i \geqq 0$ mindig, hiszen az egyenletrendszer sorainak esetről esetre alkalmas számmal való szorzása után e két feltétel teljesülése mindig elérhető. Az eljárás geometriai háttere és interpretációja a következő (6. ábra).



6. ábra

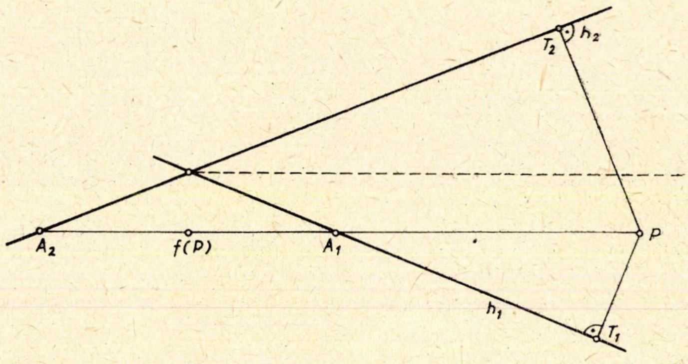
Mivel a hipersíkok normálvektorai úgy vannak irányítva, hogy P mindegyik hipersík ugyanolyan „előjelű" félterében van, az egység hosszúságú normálvektorok összege a kétdimenziós esetben az egyik szögfelezővel párhuzamos irányú. A kiindulási pontra illesztett, ezzel az iránnyal párhuzamos egyenesen lesz a következő közelítést reprezentáló pont, amelyik már közelebb van a hipersíkok metszetéhez, illetve soha nincs messzebb az előző pontnál. Hasonlóan közelebbi, illetve nem távolabbi pontot ad az n-dimenziós esetben P-nek a fent definiált „szögfelező" irányában való alkalmas mértékű elmozgatása. Itt az alkalmas szögfelező irányának definiálására

$$\Sigma \mathbf{a}_i\text{-t}$$

használjuk fel, ha

$$\Sigma \mathbf{a}_i \neq 0, \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_i \mathbf{p} - b_i \geqq 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A 2-dimenziós esetet vizsgálva megállapítható továbbá az is, hogy, ha P a szögfelezőn van, akkor a szögfelező irányában mennyivel kell elmozdulnia P-nek, hogy pontosan a hipersíkok (itt egyenesek) metszetébe jusson. Ez igen egyszerű elemi geometriai feladat, egy háromszög oldalának meghatározásából áll. Nem nehéz belátni azt sem, hogy ha P nincs a szögfelezőn, P-ből $f(P)$-be, a közelítő pontba, a PT_1A_1 és PT_2A_2 háromszögek megfelelő A_1P és A_2P oldalainak számtani közepével is el lehet jutni (7. ábra).

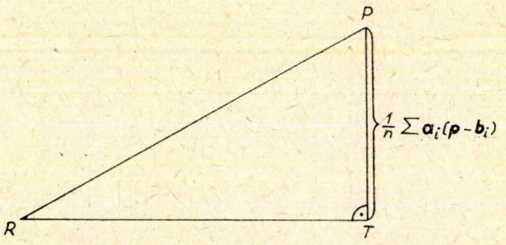


7. ábra

A többdimenziós esetben viszont nem biztos még az sem, hogy PT_1A_1 keletkezéséhez hasonló módon mindig háromszögek fognak fellépni, azaz nincs biztosítva az, hogy az A_1PT szögnek megfelelő szögek között nem fordul elő derékszög. (Könnyen belátható, hogy ez már a 3-dimenziós esetben is előfordulhat.) Ezekután az eljárás lényege — geometriai terminológiával — az, hogy az n-dimenziós esetben a

$$Pf(P) = PR$$

távolságot egy olyan „átlagháromszögből" (8. ábra) kell meghatározni, amelynek egyik oldala PT a P pont átlagtávolsága a hipersíkoktól és a P-nél levő szög koszinusza a fent definiált szögfelező egységvektor és az egyes hipersíkok normálvektorai skalárszorzatának az átlaga.



8. ábra

Mivel az eljárás csak a hipersíkok és a kiindulási pont relatív helyzetétől függ, a hipersíkokat és a kiindulási pontot el lehet úgy mozgatni párhuzamos eltolással, hogy valamennyi hipersík átmenjen a koordinátarendszer kezdőpontján. A bizonyítás céljaira tehát elég homogén egyenletrendszereket vizsgálni. Ekkor viszont

$$|\mathbf{p}| > |f(\mathbf{p})| > 0, \quad \text{ha} \quad P \notin M \tag{4}$$

biztosítja a konvergenciát, mert WEIERSTRASS tétele értelmében egy origó középpontú $|\mathbf{p}|$ sugarú gömbfelület és a hipersíkok közös részének ortogonális kiegészítő altere metszetén $|\mathbf{p}|-|f(\mathbf{p})|$ felveszi a minimumát, m-et, ami nem 0, és $\frac{m}{|\mathbf{p}|}$ a $|\mathbf{p}|$-től is független. (4) viszont ekvivalens a következő egyenlőtlenségekkel

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}>\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}-2\lambda\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}+\lambda^2\mathbf{s}\cdot\mathbf{s},$$

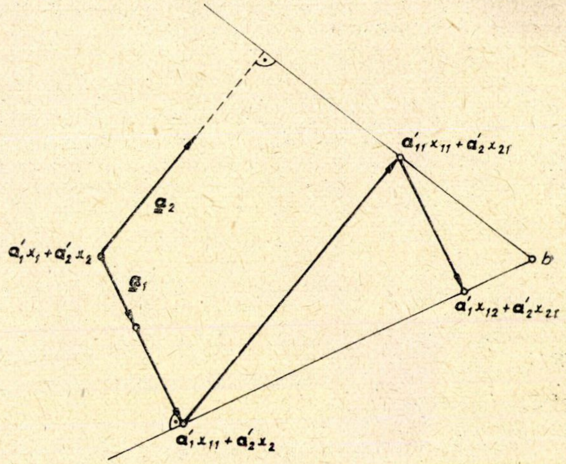
$$0>-2\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}}\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}+\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}}\right)^2\mathbf{s}\cdot\mathbf{s},$$

$$0>-\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{s})^2}{\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}}. \tag{5}$$

(5) viszont triviális, mert $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}=1$, és $\mathbf{p}=P\notin M$. A fentiekkel kapcsolatban megjegyezhető, hogy ha a hipersíkok közös része nem üres, akkor $\mathbf{a}_i\mathbf{p}-b_i\geqq 0$, $i=1,2,\ldots,m$, és $P\notin M$ feltételekből következik, hogy $|\Sigma\mathbf{a}_i|\neq 0$.

Egy megjegyzés a KACZMARZ-módszerrel kapcsolatban

Említésre érdemes egy, a lineáris egyenletrendszer (3)-ban említett felírásmódján alapuló módszer és a KACZMARZ-féle eljárás közötti érdekes kapcsolat. (L. [2].) A módszer a következő. Tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ együtthatókat rögzítve az így kapott lineáris kombináció nem szükségképpen esik egybe $\mathbf{b}$-vel. Abban az esetben, amikor e lineáris kombináció nem esik egybe $\mathbf{b}$-vel, a többi együttható változatlanul tartása mellett megválasztható x_1 úgy, hogy ez a lineáris kombináció olyan legyen, hogy minden más x_1 és változatlan $x_2, \ldots, x_n$ melletti lineáris kombinációnál közelebb legyen $\mathbf{b}$-hez. Az új x_1-et és $x_3, \ldots, x_n$-et változatlanul hagyva x_2 is megválasztható x_1-éhez hasonló módon. Az eljárást folytatva az n-edik együtthatónak hasonló módon való megválasztása után újra az első együtthatóra térve az eljárás a kívánt pontosság eléréséig folytatható. Egy 2-dimenziós esetet szemléltet a 9. ábra, ahol a lineáris kombinációknak rögtön a komponensei vannak ábrázolva. Igen egyszerű belátni, hogy a fenti módon kapott együtthatókkal elkészített vektorsorozat a $\mathbf{b}$-re illesztett rendre $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_n$ normálvektorú hipersíkokra való egymásutáni vetítések eredményeként áll elő, abból a pontból kiindulva, amely az első, kiindulásnál vett lineáris kom-



9. ábra

binációnak felel meg. Az így kapott pontsorozat **b**-nek az $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_n$ vektorok által generált altérre vonatkozó vetületéhez tart.

A felsorolt módszereket az ismeretlenek nagy számánál érdemes alkalmazni, és mivel valamennyi könnyen programozható, különösen alkalmasnak látszanak egyenletrendszereknek számológéppel való megoldására.

IRODALOM

[1] POGÁNY CSABA: Geometriai approximációs módszerek el nem tűnő determinánsú lineáris egyenletrendszerek megoldására. *Gépek és Programok.* 5. kötet Budapest, 1963.

[2] POGÁNY CSABA: Megjegyzések lineáris egyenletrendszerek geometriai megoldási módszereiről. *Gépek és Programok* 6—7 kötet Bp. 1963.

(Beérkezett: 1966. IV. 25.)

SOLUTION OF LINEAR EQUATION SYSTEMS BY GEOMETRICAL APPROXIMATION METHODS

by POGÁNY, CSABA

To professor Ferenc Kárteszi on his 60th birthday

Summary

Five geometrical procedures will be given here for solving linear equations. All of them are always convergent to the intersection of hyperplanes associated to the equations of an arbitrary system of equations and for an arbitrary starting point if a solution exists at all. They are, therefore, suitable for electronic computers.

We are not going to prove the convergence of the methods except the last. The other proofs can be found in [1] and [2].

Let us suppose that the system of linear equations (of n variables and m equations) has a solution.

As it is well-known, to solve a linear equation system is equivalent to determine the intersection S of hyperplanes of an n-dimensional Euclidian space.

The procedures presented generate one solution, that is, one point of the intersection S of the hyperplanes (associated to the equations).

The procedures are as follows.

PROCEDURE 1

Let P_0 be an arbitrary point of the n-dimensional space. We project the point P_0 on each hyperplane associated to the corresponding equation. The centre of gravity of these m points is determined (P_1). The above mentioned procedure is now repeated with P_1 insteated of P_0. One obtains the centre of gravity P_2, and so on (Fig. 3).

The sequence

$$P_0, P_1, P_2, \ldots$$

tends to a point P ($P \in S$), that is,

$$\lim P_n = P.$$

PROCEDURE 2

This is a modified version of CIMMINO's method. The basic difference is in the way of generating the sequence

$$P_0, P_1, P_2, \ldots$$

of CIMMINO. (Fig. 4*a* and Fig. 4*b*).

This method is illustrated by Fig. 4*a*. Another modification is shown on Fig. 4*b*.

We start with an arbitrary point P_0. P_1 is generated like in the above mentioned procedure.

Consider the point P_0', the reflected image of P_0 in P_1. P_0'' is generated from P_0' on the same way as P_0' obtained from P_0, and so on.

We obtain a sequence of points

$$P_0, P_0', P_0'', \ldots$$

where

$$\lim P_0^{(n)} = P, \quad P \in S.$$

PROCEDURE 3

This is an iteration method. Using a function $f(A)$, described later, we construct the following sequence

$$f(P_0) = P_1$$

$$f(P_1) = P_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(P_n) = P_{n+1}$$

where

$$\lim f(P_n) = P, \qquad P \in S.$$

(P_0 is an arbitrary point.)

Several functions $f(A)$ of the above type can be given, we are going to present one of them. We determine the reflected images

$$A^1, A^2, \ldots, A^m$$

of the point A with respect to the planes of the system. This process will be repeated several times for all points obtained in the previous step. Then from these set of points, we select a pair of points of greatest possible distance.

We define $f(A)$ as the midpoint of this pair of points.

PROCEDURE 4

First we number the hyperplanes. Starting with an arbitrary point P, we generate the infinite sequence of points

$$P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$$

by reflecting P in the first plane then the image in the second, and so on. (The planes are to be taken in a cyclic order.)

It can be proved that the centre of gravity S_i of the subsets

$$P_1;\ P_1, P_2;\ P_1, P_2, P_3;\ \ldots$$

of this sequence converges to a point $P' \in S$. (Fig. 5.)

Convergence can be improved by constructing iterative methods using this procedure.

PROCEDURE 5

This is an iterative method, too, for an arbitrary point P_0 a point sequence

$$f(P_0) = P_1$$

$$f(P_1) = P_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f(P_n) = P_{n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

is determined using the function $f(P)$ defined as follows. If P is a point let us denote the associated vector by $\mathbf{p}$, that is $P = \mathbf{p}$.

Let $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} - b_i = 0$ the equation of the i-th hyperplane ($i = 1, 2, \ldots, m$) and $|\mathbf{a}_i| = 1$.

Let

$$f(P) = f(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - \lambda \mathbf{s},$$

(Fig. 6) where

$$\lambda = \frac{d}{v} \left(= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \right),$$

and

$$d = \frac{1}{n} \mathbf{p} \sum \mathbf{a}_i - \frac{1}{n} \sum b_i$$

(It is supposed that $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{p} - b_i \geqq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$)

$$v = \frac{1}{n} \mathbf{s} \, \Sigma \, \mathbf{a}_i$$

$$s = \frac{\Sigma \, \mathbf{a}_i}{|\Sigma \, \mathbf{a}_i|}.$$

(It is supposed that $|\Sigma \mathbf{a}_i| \neq 0$.)

Proof of convergency: To show the idea of the proof given in this paper we deal here only with the special case when the intersection S of the hyperplanes consists of the single point 0.

The procedure depends only on the relative positions of the hyperplanes and the point P_0, therefore, the hyperplanes can be represented by the following equations

$$g_1(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} - b_1 = 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} - b_2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_m(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x} - b_m = 0$$

where $|\mathbf{a}_i| = 1$ and $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Without loss of generality it can be supposed that

$$g_i(\mathbf{p}) \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

We are going to demonstrate that

$$|\mathbf{p}| > f(\mathbf{p}) > 0 \qquad \text{if } P \notin S.$$

The last inequality is equivalent to the following inequalities

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} > \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - 2\lambda \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} + \lambda^2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$$

$$0 > -2 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} + \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \right)^2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$$

$$0 > -\frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})^2}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}.$$

This latest one is trivial in case

$$\mathbf{p} = P \notin S.$$

Since the function $\frac{|f(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|}$ is a continuous function on the closed, bounded domain $|\mathbf{x}| = |\mathbf{p}|$ (for a fixed $\mathbf{p}$), further

$$0 < \frac{|f(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|} < 1,$$

due to the theorem of WEIERSTRASS there exists a $\delta > 0$ such that

$$|f(\mathbf{x})| < (1 - \delta)|x|.$$

From the definition of $f(\mathbf{x})$ it is clear that this holds for the same δ independently from the value of $|\mathbf{p}|$. Consequently the sequence $P_1, P_2, \ldots$ tends to 0.

FOLYTONOSSÁGI STRUKTÚRÁK SZINTOPOGÉN JELLEMZÉSE, I.*

Írta: GACSÁLYI SÁNDOR

TARTALOM

Bevezetés

„Grundlagen der allgemeinen Topologie" című művében [3] CSÁSZÁR ÁKOS egységes tárgyalását adta a topologikus tér, az uniform tér és a szomszédsági tér fogalmának. Ez az egységes tárgyalás, illetve a topologikus tér fogalmának messzemenő általánosítása a tér folytonossági struktúrájának rendezési relációk révén történő megadásával, a szintopogén struktúra fogalmának bevezetésével vált lehetségessé.

Az utóbbi évek során az irodalomban vizsgálatot nyertek a topologikus tér, az uniform tér és a szomszédsági tér fogalmán kívül más folytonossági struktúra-féleségek is:

E-leképezések [8], szomszédsági függvények [1], limitációk [4], [11], és valamennyiüknél korábban pszeudo-topológiák és prae-topológiák [2].

* Jelen közlemény a dolgozat teljes tartalom- és irodalomjegyzékét, valamint I., II., III. fejezetét tartalmazza.

A jelen értekezés célja mármost az, hogy mindezeket a [3] monográfia 7. fejezetében foglalt alapvető vizsgálatok szellemében jellemezze, féltopogén és topogén rendezések, illetve ilyenekből alkotott megfelelő struktúrák segítségével.

Az értekezés öt fejezetből áll. Az első fejezet tárgya az HACQUE-féle „E-leképezés" és a féltopogén rendezés fogalmának ekvivalenciája, valamint néhány féltopogén rendezésre vonatkozó összefüggés. — A második fejezetben tárgyaljuk a „szomszédsági függvény" BANASCHEWSKItől és MARANDÁtól származó fogalmának a szimmetrikus topogén struktúra fogalmával való ekvivalenciáját, és alternatív bizonyítását adjuk BANASCHEWSKI és MARANDA szomszédsági függvények inverzére vonatkozó tételének. — A harmadik fejezet a szomszédsági függvény fogalmának egy „ferde" (aszimmetrikus) általánosításával foglalkozik.

A negyedik fejezet célja a „limitáció" KOWALSKYtól és FISCHERtől származó fogalmának jellemzése topogén rendezések segítségével. Itt legelőször a limitáció fogalmának egy fontos speciális esetével foglalkozunk, és megmutatjuk, hogy az ún. „főlimitáció" fogalma ekvivalens a perfekt topogén rendezés fogalmával. Az általános esetben a limitáció fogalmának szintopogén jellemzése a perfekt topogén rendezésekből alkotott szűrő fogalmával lehetséges. Hogy e rendezés-szűrők és a limitációk között kölcsönösen egyértelmű megfelelés adódjék, a szűrőkre nézve egy maximalitási feltételt kell kirónunk. E maximalitási feltételt (τ-maximalitás) utóbb közvetlenül, a limitációk és rendezés-szűrők közötti megfeleléstől függetlenül is jellemezzük.

Az értekezés utolsó, ötödik fejezetében a történetileg leghamarabb felmerült limesztér-fogalmat, G. CHOQUET pszeudo-topológia fogalmát vizsgáljuk. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy a pszeudo-topológiák speciális limitációk, majd pedig szükséges és elegendő feltételt adunk meg arra nézve, hogy egy limitáció (illetve a neki megfelelő τ-maximális rendezés-szűrő) pszeudo-topológia legyen. Ezekben a rendezés-szűrőkben természetes módon ki tudunk tüntetni maximális rendezéseket, és az említett szükséges és elegendő feltétel egy maximális rendezésekre vonatkozó „metszet-zártsági" követelmény formájában adódik.

Mindezen vizsgálatok a modern általános topológia nézőpontjainak egységesítését, valamint a szintopogén módszerek alkalmazási körének kiterjesztését szolgálják.

I. fejezet

1. §. Féltopogén rendezések és E-leképezések

A féltopogén rendezés fogalma alapvető szerepet játszik a [3] monográfiában kifejtett általános topológiai elméletben. Lényegében véve az egész elmélet különböző speciális tulajdonságokkal felruházott féltopogén rendezésekkel, illetve ilyen rendezésekből alkotott halmazokkal foglalkozik: a féltopogén rendezések mintegy az elmélet elemi építőköveit alkotják.

Értekezésünk jelen első fejezetének mármost az a célja, hogy a féltopogén rendezéseknek a [3] monográfia második fejezetében kifejtett elméletéhez néhány kiegészítést nyújtson. Evégből legelőször is definiáljuk a féltopogén rendezés fogalmát, majd az ún. E-leképezés MICHEL HACQUE francia matematikustól [10] származó fogalma segítségével a féltopogén rendezéseknek egy ekvivalens jellemzését adjuk.

1. DEFINÍCIÓ. Az E halmazon értelmezett féltopogén rendezésnek nevezünk egy az E halmaz összes részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ halmazán definiált $<$ relációt, ha az eleget tesz a következő feltételeknek:

(O1) $$\emptyset < \emptyset, \quad E < E;$$

(O2) $$A < B \Rightarrow A \subseteq B;$$

(O3) $$A \subseteq A' < B' \subseteq B \Rightarrow A < B. \quad \blacksquare$$ [1]

Egy E halmazon értelmezett összes féltopogén rendezések halmaza parciálisan rendezetté tehető a következő megállapodás révén:

$< \subseteq <_1$ akkor és csak akkor, ha $A < B \Rightarrow A <_1 B$ tetszőleges A, $B \subseteq E$ részhalmazok esetén.

Az így definiált „$\subseteq$" reláció természetesen nem más, mint az, amelyet a féltopogén rendezések halmazán a $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$ szorzathalmaz tartalmazási relációja indukál.

E természetes parciális rendezés alapulvétele mellett egy E tér összes féltopogén rendezéseinek halmaza teljes hálót alkot. E háló $<_M$ egységeleme, illetve $<_m$ zéruseleme az

$$A <_M B \Leftrightarrow A \subseteq B,$$

illetve az

$$A <_M B \Leftrightarrow (A = \Phi \quad \text{és/vagy} \quad B = E)$$

feltétel révén jellemezhető, tetszőleges uniók és metszetek viszont a megfelelő relációknak, mint $\mathfrak{P}(E) \times \mathfrak{P}(E)$ részhalmazainak uniója, illetve metszete révén vannak adva.

Mindezen állítások helyessége könnyen belátható akár közvetlenül, akár pedig a féltopogén rendezések és E-leképezések közötti most tárgyalandó megfelelés révén.

2. DEFINÍCIÓ. Tetszőleges E halmaz esetén E-leképezésnek nevezünk egy $\varrho\colon \mathfrak{P}(E) \Rightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{P}(E)]$ leképezést[2], ha teljesülnek rá a következő feltételek:

(E0) $$\varrho(A) \neq \emptyset \quad \text{és} \quad Y \supseteq X \in \varrho(A) \Rightarrow Y \in \varrho(A);$$

(E1) $$\varrho(\emptyset) = \mathfrak{P}(E);$$

(E2) $$X \in \varrho(A) \Rightarrow A \subseteq X;$$

(E3) $$A \subseteq B \Rightarrow \varrho(A) \supseteq \varrho(B). \quad \blacksquare$$

Az összes E-leképezések halmaza parciálisan rendezett halmazzá válik a

$$\varrho_1 \subseteq \varrho_2 \Leftrightarrow \varrho_1(X) \subseteq \varrho_2(X) \quad (X \subseteq E)$$

megállapodás révén.

[1] A $\blacksquare$ jel a szokásos módon a bizonyítások, illetve a bizonyításra nem szoruló állítások vagy definíciók végét jelenti. — A definíciókban szereplő feltételeknél, amennyiben azok az irodalomban már előfordultak, megtartjuk az eredeti előfordulási helyen használt számozást, illetve jelölést.

[2] Tehát a ϱ leképezés a tér minden egyes részhalmazához hozzárendeli a tér részhalmazainak egy osztályát.

E parciális rendezés alapulvétele mellett az összes E-leképezések halmaza teljes hálót alkot. E háló ϱ_M egységeleme, illetve ϱ_m zéruseleme a

$$\varrho_M(X)=\{Y|X\subseteqq Y\} \quad (X\subseteqq E),$$

illetve a

$$\varrho_m(\emptyset)=\mathfrak{P}(E), \quad \varrho_m(X)=\{E\}, \quad \text{ha} \quad X\neq\emptyset$$

feltétel révén jellemezhető, tetszőleges uniók és metszetek viszont az

$$(\bigcup \varrho_\nu)(X)=\bigcup \varrho_\nu(X), \quad \text{illetve a} \quad (\bigcap \varrho_\nu)(X)=\bigcap \varrho_\nu(X)$$

formulával adhatók meg. (Könnyű belátni, hogy ϱ_M és ϱ_m, valamint a ϱ_ν E-leképezésekkel együtt $\bigcup \varrho_\nu$ és $\bigcap \varrho_\nu$ is E-leképezések.)

A féltopogén rendezéseknek és az E-leképezéseknek eddig felsorolt tulajdonságai között nyilvánvaló a szoros analógia. Valójában a két fogalomalkotás ekvivalens egymással. Érvényes ugyanis a következő

1. TÉTEL. (1) *Ha a* $<$ *reláció féltopogén rendezés az E halmazon, akkor a*

$$\varrho_<(A)=\{X|A<X\}$$

megállapodás egy E-leképezést definiál.

(2) *Ha* ϱ *egy E-leképezés, akkor az*

$$A<_\varrho B \Leftrightarrow B\in\varrho(A)$$

megállapodás féltopogén rendezést definiál E-n.

(3) $< \to \varrho_<$ *és* $\varrho \to <_\varrho$ *kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E tér összes féltopogén rendezései osztályának az összes E-leképezések osztályára és viszont. E leképezések rendezéstartók.*

Bizonyítás.[3] Közvetlenül belátható, hogy a fentiekben definiált $\varrho_<$ valóban E-leképezés, $<_\varrho$ pedig féltopogén rendezés E-n.

Ugyancsak könnyen belátható a definíciók alapján, hogy ha $< = <_\varrho$, akkor $\varrho_< = \varrho$ vagyis, hogy $\varrho_{(<_\varrho)}=\varrho$, illetve az, hogy ha $\varrho=\varrho_<$, akkor $<_\varrho=\varrho$, azaz $<_{(\varrho_<)} = <$. A rendezéstartás is világos. ▌

A most bizonyított tétel alapján minden féltopogén rendezésekre vonatkozó eredménynek természetes módon megfelel egy E-leképezésekre vonatkozó eredmény és viszont. Az általánosság csorbítása nélkül szorítkozhatunk tehát a két fogalomalkotás közül az egyikre; a féltopogén rendezéseket választjuk és ezekre nézve bizonyítunk be a következő paragrafusban néhány eredményt.

2. §. Néhány eredmény féltopogén rendezésekre vonatkozólag

A relációk jól ismert szorzatfogalmát specializálva definiálhatjuk féltopogén rendezések szorzatát:

3. DEFINÍCIÓ. Egy E halmazon értelmezett két féltopogén rendezés, $<_1$ és $<_2$, szorzatán a következőképpen értelmezett $<_1<_2$ relációt értjük:

$$A<_1<_2B \Leftrightarrow A<_1X<_2B \quad \text{valamely} \quad X\subseteqq E\text{-re.}$$

[3] Vö. a 7. tétel bizonyítását.

Könnyű belátni, hogy $<_1<_2$ valóban féltopogén rendezés, vagyis teljesíti az (O1), (O2) és (O3) feltételeket.

Az (O3) feltétel révén azonnal adódik az egyszerű

2. TÉTEL. *Adott E halmazon értelmezett tetszőleges $<_1$ és $<_2$ féltopogén rendezések esetén $<_1<_2 \subseteqq <_1$ és $<_1<_2 \subseteqq <_2$. Speciálisan $<^2 \subseteqq <$ bármely $<$ féltopogén rendezésre. A $<^2 = <$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $A<B$-ből következik olyan C halmaz létezése, hogy $A<C<B$.* ▌

4. DEFINÍCIÓ. Egy E halmaz részhalmazaiból alkotott halmazrendszeren az E halmaz részhalmazainak tetszőleges olyan osztályát értjük, amely tartalmazza az üres halmazt és E-t. ▌

Mint ismeretes (v. ö. [3], 2. fejezet), minden σ halmazrendszer generál egy féltopogén rendezést:

$$A<B \Leftrightarrow A \subseteqq S \subseteqq B \quad \text{valamely} \quad S \in \sigma\text{-ra.}$$

Másrészt tudjuk, hogy nem minden féltopogén rendezés generálható halmazrendszerrel (vö. [3], (2. 3)).

Arra nézve, hogy egy féltopogén rendezés halmazrendszerrel legyen generálható, szükséges és elegendő feltételt ad a következő

3. TÉTEL. (1) *Egy E halmazon adott tetszőleges $<$ féltopogén rendezés esetén*

$$\sigma_< = \{S | S<S\}$$

halmazrendszer, és ez a halmazrendszer egy olyan $<_1$ féltopogén rendezést generál, amelyre teljesül $<_1 \subseteqq <$.

(2) *A $<$ féltopogén rendezés akkor és csak akkor generálható egy σ halmazrendszerrel, ha $<_1 = <$ és ekkor $\sigma = \sigma_<$.*

Bizonyítás. (1) $\emptyset \in \sigma_<$ és $E \in \sigma_<$ az (O1) feltétel szerint. Továbbá $A<_1B$, vagyis $A \subseteqq S \subseteqq B$ ahol $S<S$, (O3) szerint maga után vonja, hogy $A<B$.

(2) Ha egy $<$ féltopogén rendezést egy σ halmazrendszer generál, akkor ez a σ egyértelműen meg van határozva[4]: $\sigma = \{S|S<S\} = \sigma_<$, és így $< = <_1$. Fordítva, ha $< = <_1$, akkor a $<$ relációt a $\sigma_<$ rendszer generálja. ▌

4. TÉTEL. *Ha egy $<$ féltopogén rendezést egy halmazrendszer generál, akkor ez a $<$ reláció idempotens: $< = <^2$.*

Bizonyítás. Azt már tudjuk, hogy $<^2 = < \cdot < \subseteqq <$. Másrészt $A<B$, vagyis $A \subseteqq S \subseteqq B$ $(S \in \sigma)$ alapján nyilván következik $A<S<B$, vagyis $A<^2B$.

A féltopogén rendezésekre kirótt különféle feltételek között fontos szerepet játszik a perfektségnek nevezett additivitási tulajdonság.

Egy $<$ féltopogén rendezést perfektnek nevezünk, ha teljesíti a következő feltételt:

(P) $$A_i<B_i \ (i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i < \bigcup_{i \in I} B_i.$$

(Vö. [3], 4. fejezet.)

A perfekt féltopogén rendezéseket a következőképpen jellemezhetjük:

[4] Vö. [3], (2. 1).

5. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy E halmazon értelmezett $<$ féltopogén rendezés perfekt legyen, az alábbi két feltétel mindegyike szükséges és elegendő:*

a) *Tetszőleges $X, Y \subseteq E$ részhalmazok esetén $X < Y$ maga után vonja olyan legbővebb X-et tartalmazó X_M részhalmaz létezését, amelyre $X_M < Y$ még teljesül.*

b) *Tetszőleges $Y \subseteq E$ halmazhoz van olyan M halmaz, hogy $M < Y$ és minden $X < Y$ tulajdonságú X halmazra $X \subseteq M$.*

Bizonyítás. Az a) feltétel szükséges: Valóban, $X < Y$ esetén legyen

$$\mathfrak{A} = \{A | X \subseteq A \,\&\, A < Y\}.$$

Nyilván $X \in \mathfrak{A}$ és $\bigcup \{A | A \in \mathfrak{A}\}$ lesz a kívánt X_M.

Az a) feltétel elegendő: Ha $A_i < B_i$ $(i \in I)$, akkor az (03) feltétel révén adódik

$$\bigcap \{A_i | i \in I\} < \bigcup \{B_i | i \in I\}.$$

Legyen most X_M az a legbővebb $\bigcap \{A_i | i \in I\}$-t tartalmazó halmaz, amelyre még teljesül

$$X_M < \bigcup \{B_i | i \in I\}.$$

X_M legnagyobb volta és $A_i < \bigcup \{B_i | i \in I\}$ alapján $A_i \subseteq X_M$ $(i \in I)$, és így

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq X_M < \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i < \bigcup_{i \in I} B_i.$$

A b) feltétel szükséges: (P) alapján nyilvánvaló, hogy az $M = \bigcup \{A | A < Y\}$ halmaznak megvan a kívánt tulajdonsága.

A b) feltétel elegendő: Valóban, legyen $A_i < B_i$ $(i \in I)$. Ekkor (03) szerint $A_i < B = \bigcup \{B_i | i \in I\}$ tetszőleges $i \in I$-re. Ha most tekintjük a B-hez feltevés szerint tartozó M-et, akkor nyilván teljesül

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq M < \bigcup_{i \in i} B_i,$$

és így $\bigcup \{A_i | i \in I\} < \bigcup \{B_i | i \in I\}$. ▌

Egy $<$ féltopogén rendezést koperfektnek nevezünk, ha a $<^c$ komplementér reláció perfekt. (Definíció szerint $A <^c B \Leftrightarrow E - B < E - A$.)

Könnyű belátni, hogy egy $<$ féltopogén rendezés akkor és csak akkor koperfekt, ha teljesül

$$A_i < B_i \ (i \in I) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i < \bigcap_{i \in I} B_i.$$

Az előző tételből, amely a koperfekt féltopogén rendezések komplementérjeit jellemzi, azonnal adódik a következő

5a. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy E halmazon értelmezett $<$ féltopogén rendezés koperfekt legyen, az alábbi két feltétel mindegyike szükséges és elegendő:*

a) *Tetszőleges $X, Y \subseteq E$ részhalmazok esetén $X < Y$ maga után vonja Y olyan legszűkebb Y_m részhalmazának létezését, amelyre $X < Y_m$ még teljesül.*

b) *Tetszőleges $Y \subseteq E$ halmazhoz van olyan K halmaz, hogy $Y < K$ és minden $Y < X$ tulajdonságú X halmazra $K \subseteq X$.* ▌

Az eddigiek során tárgyalt fogalmak között figyelemre méltó összefüggést állapít meg a következő

6. TÉTEL. *Egy perfekt vagy koperfekt féltopogén rendezés akkor és csak akkor idempotens, ha halmazrendszer által van generálva.*

Bizonyítás. Mivel a 4. tétel szerint halmazrendszerrel generált féltopogén rendezés mindig idempotens, elég lesz azt megmutatni, hogy ha egy perfekt vagy koperfekt féltopogén rendezés idempotens, akkor halmazrendszerrel generálható.

Legyen tehát $<$ egy perfekt, idempotens féltopogén rendezés. Ha $X<Y$, akkor létezik legnagyobb X_M, amelyre $X \subseteq X_M < Y$. Mivel $<$ idempotens, van olyan Z halmaz, hogy $X_M < Z < Y$. Innen X_M „legnagyobb" volta miatt $X_M = Z$ következik. Ezek szerint $X_M < X_M$, vagyis $X_M \in \sigma_<$. Látjuk, hogy $X<Y$ maga után vonja $X \subseteq X_M \subseteq Y$ $(X_M \in \sigma_<)$ teljesülését, azaz $X<Y \Rightarrow X <_1 Y$. Így $< \subseteq <_1$, és ebből a 3. tétel szerint $< = <_1$ következik.

Legyen most $<$ koperfekt idempotens féltopogén rendezés. Ha $X<Y$, akkor létezik legkisebb Y_m, amelyre $X < Y_m \subseteq Y$. Mivel $<$ idempotens, van olyan Z, hogy $X<Z<Y_m$. Innen Y_m „legkisebb" volta miatt $Z = Y_m$ adódik. Így $Y_m < Y_m$, vagyis $Y_m \in \sigma_<$. Látjuk, hogy

$$X<Y \Rightarrow X \subseteq Y_m \subseteq Y \quad (Y_m \in \sigma_<)$$

és íg $< = <_1$. ∎

MEGJEGYZÉSEK. 1) A bizonyítás során az X_M halmaz „legnagyobb" volta helyett („X_M tartalmaz minden olyan A halmazt, amelyre $X \subseteq A < Y$"), elegendő csupán arra hivatkozni, hogy X_M maximális (vagyis, hogy X_M nincs valódi részhalmazként tartalmazva olyan A halmazban, amelyre $X \subseteq A < Y$).

Hasonlóképpen, Y_m „legkisebb" volta helyett már minimalitása elegendő.

2) Ha a $<$ féltopogén rendezés szimmetrikus, vagyis $< = <^c$ azaz $A<B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow E-B<E-A$, akkor az 5. és 5*a*. tételekben foglalt feltételek természetesen ekvivalensek (és teljesülésük esetén $<$ biperfekt topogén rendezés. Vö. [3], 5. fejezet).

3) Ha az E halmaz végtelen, akkor van E-n legalább egy olyan idempotens féltopogén rendezés, amely nem generálható halmazrendszerrel. Valóban, legyen $X<Y$ akkor és csak akkor, ha $X=\emptyset$ vagy $Y=E$ vagy pedig $X \subseteq Y$ és $Y-X$ végtelen.[5] Könnyű belátni, hogy ez idempotens féltopogén rendezés, valamint azt is, hogy nem generálható halmazrendszerrel: $S<S$ nem lehetséges $\emptyset \neq S \neq E$ esetén.

4) Ha az E halmaz legalább három elemből áll, akkor megadható rajta nem-idempotens és így halmazrendszerrel nem generálható féltopogén rendezés. Valóban, legyen $\emptyset < X$ tetszőleges $X \subseteq E$-re, és legyen $E<E$, valamint $\emptyset \neq X \neq E$ esetén legyen $X<Y \Leftrightarrow X \subset Y$. Könnyű belátni, hogy az így definiált $<$ reláció a kívánt tulajdonságokkal rendelkező féltopogén rendezés.

II. fejezet

3. §. Szomszédsági függvények és szimmetrikus topogén struktúrák

A szomszédsági függvény fogalmát BANASCHEWSKI és MARANDA vezették be [1] dolgozatukban, a következőképpen:

5. DEFINÍCIÓ. Egy E halmazon értelmezett szomszédsági függvényen az E halmaz részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ osztályát az E-n definiált szűrők $\Phi(E)$ osztályába[6]

[5] Vagyis: $X<Y$ akkor és csak akkor, ha a három feltétel közül legalább az egyik teljesül.
[6] Szűrőnek tekintjük és $\Phi(E)$ elemeihez soroljuk $\mathfrak{P}(E)$-t is (improprius szűrő).

leképező olyan α függvényt értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(A1) $$B \in \alpha(A) \Rightarrow B \supseteq A;$$

(A2) $$A \subseteq B \Rightarrow \alpha(A) \supseteq \alpha(B);$$

(A3) $$B \in \alpha(A) \Rightarrow E - A \in \alpha(E - B);$$

(A4) Ha $B \in \alpha(A)$, akkor van olyan C, hogy $B \in \alpha(C)$ és $C \in \alpha(A)$. ▌

Egy E halmazon értelmezett szomszédsági függvények osztálya parciálisan rendezett halmazzá válik a következő megállapodás révén:

$$\alpha \subseteq \alpha' \Leftrightarrow \alpha(A) \subseteq \alpha'(A) \quad \text{tetszőleges} \quad A \subseteq E\text{-re.}$$

Vezessük most be a szimmetrikus topogén struktúra fogalmát:

6. DEFINÍCIÓ. Az E halmazon értelmezett szimmetrikus topogén struktúrának nevezünk egy az E halmaz összes részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ halmazán definiált $<$ relációt, ha az eleget tesz a következő feltételeknek:

(01) $\emptyset < \emptyset,\ E < E;$

(02) $A < B \Rightarrow A \subseteq B;$

(03) $A \subseteq A' < B' \subseteq B \Rightarrow A < B;$

(S) $A < B \Rightarrow E - B < E - A;$

(Q″) $\left.\begin{matrix} A < B \\ A' < B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cup A' < B \cup B';$

(7. 9) Ha $A < B$, akkor van olyan C, hogy $A < C < B$. ▌

Megjegyzés. (S)-ből és (Q″)-ből következik

(Q′) $\left.\begin{matrix} A < B \\ A' < B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cap A' < B \cap B'.$

Hasonlóképpen, (S)-ből és (Q′)-ből következik (Q″), tehát a definícióban (Q″)-t (Q′)-vel lehet helyettesíteni. ▌

A definíció alapján világos, hogy a szimmetrikus topogén struktúrák úgy tekinthetők, mint speciális féltopogén rendezések. — Nyilvánvaló, hogy egy E halmazon definiált szimmetrikus topogén struktúrák halmaza parciálisan rendezetté válik a féltopogén rendezésekre bevezetett rendezési reláció révén.

A következő tétel azt mutatja meg, hogy az előbbiekben bevezetett két fogalomalkotás egymással ekvivalens:

7. TÉTEL. (1) *Ha* $<$ *az* E *halmazon definiált szimmetrikus topogén struktúra, akkor az* E *részhalmazain az*

$$\alpha_<(A) = \{X \mid A < X\}$$

feltétellel definiált $\alpha_<$ *függvény szomszédsági függvény* E*-n.*

(2) *Ha α szomszédsági függvény az E halmazon, akkor az E részhalmazai között*

$$A <_\alpha B \Leftrightarrow B \in \alpha(A)$$

révén definiált $<_\alpha$ reláció szimmetrikus topogén struktúra E-n.

(3) *$< \to \alpha_<$ és $\alpha \to <_\alpha$ kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E-n értelmezett szimmetrikus topogén struktúrák osztályának az E fölötti szomszédsági függvények osztályára és viszont. E leképezések rendezéstartók.*

Bizonyítás. Az (03) és (Q′) feltételek alapján könnyű belátni, hogy

$$\alpha_<(A) = \{X | A < X\}$$

tetszőleges $A \subseteq E$ esetén szűrő. Ez a szűrő teljesíti az (A1)—(A4) feltételeket. Valóban, ha $B \in \alpha_<(A)$, vagyis $A < B$, akkor (02) szerint $A \subseteq B$, tehát teljesül (A1).

Legyen most $A \subseteq B$ és $C \in \alpha_<(B)$, vagyis $B < C$. Az (03) feltétel szerint $A \subseteq B < C \Rightarrow$ $\Rightarrow A < C$, tehát $C \in \alpha_<(A)$. Ezek szerint $\alpha_<(A) \supseteq \alpha_<(B)$, vagyis teljesül (A2).

Ami (A3)-at illeti, $B \in \alpha_<(A) \Leftrightarrow A < B \Leftrightarrow E - B < E - A \Leftrightarrow E - A \in \alpha_<(E - B)$.

Végül, ha $B \in \alpha_<(A)$, vagyis $A < B$, akkor (7. 9) szerint van olyan C, hogy $A < C < B$, vagyis, hogy $B \in \alpha_<(C)$ és $C \in \alpha_<(A)$. Ezzel bebizonyítottuk (A4)-et is.

(2) (01): Nyilván teljesül $E \in \alpha(E)$, tehát érvényes $E <_\alpha E$. Az (A3) feltételből most már következik $\supset \in \alpha(\emptyset)$, vagyis $\emptyset <_\alpha \emptyset$.

(02): $A <_\alpha B \Leftrightarrow B \in \alpha(A) \Rightarrow A \subseteq B$ az (A1) feltétel szerint.

(03): Legyen $A \subseteq A' <_\alpha B' \subseteq B$. Ekkor $B \supseteq B' \in \alpha(A') \subseteq \alpha(A)$ és következésképpen $B \in \alpha(A)$, vagyis $A <_\alpha B$.

(S): $A <_\alpha B \Leftrightarrow B \in \alpha(A)$ és $E - B <_\alpha E - A \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B)$. Így az (S) szimmetriatulajdonság (A3)-ból következik.

(Q″) bizonyítása végett először is megjegyezzük, hogy

$$\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B).$$

Valóban, $\alpha(A \cup B) \subseteq \alpha(A) \cap \alpha(B)$ az (A2) feltétel alapján. Fordítva, ha $X \in \alpha(A) \cap$ $\cap \alpha(B)$, akkor (A3) szerint $E - A \in \alpha(E - X)$ és $E - B \in \alpha(E - X)$, tehát $E - (A \cup B) =$ $= (E - A) \cap (E - B) \in \alpha(E - X)$, és így, ismét csak (A3) szerint, $X \in \alpha(A \cup B)$.

Ha most már $A <_\alpha B$ és $A' <_\alpha B'$, vagyis $B \in \alpha(A)$ és $B' \in \alpha(A')$, akkor $B \cup B' \in$ $\in \alpha(A) \cap \alpha(A') = \alpha(A \cup A')$, vagyis $A \cup A' <_\alpha B \cup B'$.

A (7. 9) interpolációs tulajdonság (A4)-ből következik:

Ha $A <_\alpha B$ vagyis $B \in \alpha(A)$, akkor van olyan C, hogy $B \in \alpha(C)$ és $C \in \alpha(A)$, vagyis $C <_\alpha B$ és $A <_\alpha C$.

(3) Tekintsük a $< \to \alpha_<$ és $\alpha \to <_\alpha$ leképezéseket. Ha $\alpha = \alpha_<$, akkor $<_\alpha = <$. Valóban, $A <_\alpha B$ azt jelenti, hogy $B \in \alpha(A)$, és $\alpha = \alpha_<$ esetén $A <_\alpha B \Leftrightarrow B \in \alpha_<(A) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A < B$.

Legyen másrészt $\alpha \to <_\alpha$ és $< \to \alpha_<$. Ha $< = <_\alpha$, akkor $\alpha_< = \alpha$. Valóban,

$$\alpha_<(A) = \{X | A < X\},$$

és $< = <_\alpha$ esetén adódik

$$\alpha_<(A) = \{X | A <_\alpha X\} = \{X | X \in \alpha(A)\} = \alpha(A).$$

Rendezéstartás: Legyen $\alpha \subseteq \alpha_1$, vagyis $\alpha(A) \subseteq \alpha_1(A)$ tetszőleges $A \subseteq E$-re. Ekkor $<_\alpha \subseteq <_{\alpha_1}$. Valóban,

$$A <_\alpha B \Leftrightarrow B \in \alpha(A) \Rightarrow B \in \alpha_1(A) \Leftrightarrow A <_{\alpha_1} B.$$

Másrészt, ha $< \subseteqq <_1$, akkor $\alpha_< \subseteqq \alpha_{<_1}$. Valóban,

$$B \in \alpha_<(A) \Leftrightarrow A < B \Rightarrow A <_1 B \Leftrightarrow B \in \alpha_{<_1}(A). \blacksquare$$

A most bizonyított tételből, valamint a szomszédsági relációknak a [3] monográfia 7. fejezetében adott jellemzéséből következik a szomszédsági függvény és a szomszédsági tér fogalmának ekvivalenciája. Ezt az utóbbi ekvivalenciát közvetlenül is be lehet bizonyítani. (Vö. [1].)

4. §. Egy kompatibilitási fogalom. Szomszédsági függvény inverze

A [3] monográfia 6. fejezetében bevezetést nyert egy $<$ féltopogén rendezés $f^{-1}(<)$ inverz képének a fogalma. E fogalomnak, valamint a szimmetrikus topogén struktúrák és szomszédsági függvények közötti megfelelésnek a segítségével értelmezhetjük egy α szomszédsági függvény $f^{-1}(\alpha)$ inverzét, mint azt a szomszédsági függvényt, amely az α-nak megfelelő $<$ szimmetrikus topogén struktúra $f^{-1}(<)$ inverzéhez tartozik. A szomszédsági függvény inverz képére ilyen módon nyert definíció megegyezik azzal, amelyet BANASCHEWSKI és MARANDA [1] dolgozatukban adnak. Szomszédsági függvények inverz képének tárgyalásánál a megfelelő szimmetrikus topogén struktúra inverz képére való visszavezetés előnyösen alkalmazható.

Annak érdekében, hogy a fentebb vázolt meggondolásokat részletesen végrehajthassuk, mindenekelőtt be kell vezetnünk egy kompatibilitási fogalmat:

7. DEFINÍCIÓ. Egy az E halmazon értelmezett $<$ topogén struktúrát[7] az E-nek egy E' halmazba való f leképezésével kompatibilisnak nevezünk, ha $f(x) = f(y)$-ból következik, hogy tetszőleges $X \subseteqq E$-re $\{x\} < X \Leftrightarrow \{y\} < X$. $\blacksquare$

8. TÉTEL. *Ha az E halmazon értelmezett $<$ topogén struktúra kompatibilis az E-nek E'-be való f leképezésével, akkor*

$$A < X \Rightarrow f^{-1}(f(A)) < X$$

tetszőleges A, $X \subseteqq E$ esetén.

Bizonyítás. Az (03) feltétel szerint $A < X$-ből következik $\{a\} < X$ tetszőleges $a \in A$-ra. Legyen most $x \in f^{-1}(f(A))$. Akkor $f(x) = f(a_0)$ valamely $a_0 \in A$-ra, és $\{a_0\} < X$-ből következik $\{x\} < X$. Ezek szerint $A < X$-ből következik $\{x\} < X$, ha csak $x \in f^{-1}(f(A))$, innen viszont $f^{-1}(f(A)) \subseteqq X$ adódik. Ezek szerint

$$(*) \qquad A < X < H \Rightarrow f^{-1}(f(A)) < H.$$

Mármost (7.9) szerint $A < X$-ből következik $A < K < X$ valamely K-ra, és így $(*)$ felhasználásával adódik $f^{-1}(f(A)) < X$. (Fordítva viszont, ha $f^{-1}(f(A)) < X$, akkor $A \subseteqq f^{-1}(f(A))$ miatt természetesen $A < X$.) $\blacksquare$

MEGJEGYZÉSEK. 1. A kompatibilitásnak a 8. tételben foglalt következménye valójában ekvivalens a kompatibilitást definiáló feltétellel. Teljesüljön ugyanis

$$A < X \Rightarrow f^{-1}(f(A)) < X.$$

[7] Topogén struktúra alatt olyan topogén rendezést értünk, amely eleget tesz a (7.9) interpolációs feltételnek. Másszóval: Ha a 6. definícióban az (S) feltételt a (Q') feltétellel helyettesítjük, a topogén struktúra definícióját kapjuk. (Vö. 7. §.)

Ha most $f(x)=f(y)$ és $\{x\}<X$, akkor $f^{-1}(f(x))<X$, és így $y\in f^{-1}(f(x))$, valamint (03) miatt $\{y\}<X$.

2. A 8. tételben foglalt implikáció ekvivalens még a formálisan gyengébb

$$A<X \Rightarrow f^{-1}(f(A))\subseteq X$$

feltétellel is, amint ezt (7. 9) és (03) felhasználásával könnyen be lehet látni: $A<X\Rightarrow$ $\Rightarrow A<K<X \Rightarrow f^{-1}(f(A))\subseteq K<X \Rightarrow f^{-1}(f(A))<X$. ∎

Ezek szerint a 7. definícióval bevezetett kompatibilitási fogalom nem más, mint a [3] monográfia 9. fejezetében bevezetett kompatibilitás topogén struktúrákra vonatkozó speciális esete. (Vö. [3], (9. 26).)

9. TÉTEL.[8] *Legyen adva az E halmaznak egy f leképezése az E' halmazra. Ha $<$ az E halmazon definiált és az f leképezéssel kompatibilis szimmetrikus topogén struktúra, akkor az E' halmazon az $A'<'B' \Leftrightarrow f^{-1}(A')<f^{-1}(B')$ feltétellel definiált $<'$ reláció szimmetrikus topogén struktúra és $<\,=f^{-1}(<')$.*

Bizonyítás. Könnyű belátni, hogy $<'$ szimmetrikus topogén struktúra. Valóban, ha $A'<'B'$, vagyis $f^{-1}(A')<f^{-1}(B')$, akkor $f^{-1}(A')<C<f^{-1}(B')$ valamely $C\subseteq E$-re. Az (03) feltétel és a 8. tétel szerint $f^{-1}(A')<f^{-1}(f(C))<f^{-1}(B')$, vagyis $A'<'f(C)<'B'$. Ez azt mutatja, hogy $<'$ eleget tesz a (7. 9) feltételnek. Ami a 6. definícióban foglalt többi feltétel teljesülését illeti, ez bizonyítást nyert a [3] monográfia 6. fejezetében. (Vö. [3], (6. 30)—(6. 34).)

Vezessük be most ideiglenesen a $<^*=f^{-1}(<')$ jelölést. Ekkor $A<^*B$ azt jelenti, hogy $f(A)<'E'-f(E-B)$, vagyis, hogy

$$f^{-1}(f(A))<f^{-1}(E'-f(E-B)),$$

azaz

$$f^{-1}(f(A))<E-f^{-1}(f(E-B)).$$

Innen (03) alapján következik $A<E-f^{-1}(f(E-B))$, és (S) és (03) révén adódik

$$f^{-1}(f(E-B))<E-A \Rightarrow E-B<E-A \Rightarrow A<B.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $A<^*B \Rightarrow A<B$. Ha most ennek a meggondolásnak az egyes lépésein fordított irányban haladunk végig[9], a fordított implikáció bizonyítását kapjuk. ∎

Jelöljük most $\Pi(E)$-vel az E halmazon definiált összes szomszédsági függvények halmazát. A szomszédsági függvények és szimmetrikus topogén struktúrák közötti kölcsönösen egyértelmű kapcsolat segítségével fogjuk vizsgálni azt az összefüggést, amely $\Pi(E)$ és $\Pi(E')$ között E-nek E'-be való adott f leképezése esetén létesül.

Legyen $\alpha'\in\Pi(E')$. A megfelelő $<_{\alpha'}=<'$ szimmetrikus topogén struktúra $A'<'B'\Leftrightarrow B'\in\alpha'(A')$ révén van definiálva. Ha most f az E-t E'-be képezi le, akkor az E'-n értelmezett $<'$-nek megfelel E-n egy $f^{-1}(<')=\,<$ reláció (vö. [3], (6. 1)):

$$A<B \Leftrightarrow f(A)<'E'-f(E-B),$$

azaz

$$A<B \Leftrightarrow E'-f(E-B)\in\alpha'[f(A)].$$

[8] Vö. [3], 6. és 9. fejezet. — Az előbbi megjegyzés értelmében ez a tétel a [3] monográfia (9. 29) tételének speciális esete. Teljesség kedvéért részletes bizonyítását adjuk, amely nem használja fel a szintopogén struktúrák általános elméletét, hanem csupán a [3] monográfia első hat fejezetében foglaltakat.

[9] Eközben (03) helyett a megfelelő helyeken a 8. tételre kell hivatkozni.

Ez a $<$ reláció szimmetrikus topogén struktúra E-n (vö. [3], 107. o.), és így létezik E-n a megfelelő $\alpha_< = \alpha$ szomszédsági függvény, amely

$$\alpha(A) = \alpha_<(A) = \{X | A < X\},$$

vagyis

$$\alpha(A) = \{X | E' - f(E - X) \in \alpha'[f(A)]\}$$

révén van definiálva. Ezt a szomszédsági függvényt nevezzük az α szomszédsági függvény f leképezés szerinti inverzének. Jelölve: $\alpha = f^{-1}(\alpha')$.

Szomszédsági függvény inverzének fontos tulajdonságát juttatja kifejezésre a következő

10. TÉTEL. *Legyen f az E halmaznak E'-be való leképezése, és legyen $\alpha' \in \Pi(E')$, valamint $\alpha = f^{-1}(\alpha')$. Ekkor tetszőleges $A \subseteq E$ esetén az $\alpha(A)$ szűrőt $f^{-1}\{\alpha'[f(A)]\}$ generálja.*

Bizonyítás. Ha $X \in \alpha(A)$, akkor

$$X \supseteq f^{-1}[E' - f(E - X)] \in f^{-1}\{\alpha'[f(A)]\}.$$

Másrészt, ha $H = f^{-1}(H')$, ahol $H' \in \alpha'[f(A)]$, akkor $f(E - H) \cap H' = \emptyset$. Így

$$E' - f(E - H) \supseteq H' \in \alpha'[f(A)],$$

tehát $H \in \alpha(A)$. ▮

A következő két tétel érvénye azonnal világos:

11. TÉTEL. *Szomszédsági függvények és egy f leképezés szerinti inverzeik között a megfelelés rendezéstartó, vagyis ha $\alpha_1' \subseteq \alpha_2'$ az E' halmazon, akkor $f^{-1}(\alpha_1') \subseteq f^{-1}(\alpha_2')$ az E-n.* ▮

12. TÉTEL. *Azok az E fölötti α szomszédsági függvények, amelyek egy f leképezésre vonatkozó inverz képek, kompatibilisak az*

$$R_f = \{(x, y) | f(x) = f(y);\ x, y \in E\}$$

ekvivalenciarelációval abban az értelemben, hogy

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \alpha(\{x\}) = \alpha(\{y\}). ▮$$

13. TÉTEL. *Ha f az E halmaznak az E' halmazra való leképezése, akkor az E' fölötti α' szomszédsági függvények és E fölötti $\alpha = f^{-1}(\alpha')$ inverzeik között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn, amelynek révén $\Pi(E')$ az R_f relációval kompatibilis $\alpha \in \Pi(E)$-k halmazára képeződik le.*

Bizonyítás. Az, hogy f^{-1} révén $\Pi(E')$ kölcsönösen egyértelmű módon képeződik le $\Pi(E)$-be, közvetlen folyománya annak, hogy (az egész) E'-re történő leképezés esetén a megfelelő szimmetrikus topogén struktúrák közötti kapcsolat kölcsönösen egyértelmű (vö. [3], (6. 5)).

Már rámutattunk, hogy szomszédsági függvénynek egy f leképezésre vonatkozó inverze mindig kompatibilis az R_f relációval. Csak azt kell még megmutatni, hogy bármely R_f-fel kompatibilis $\alpha \in \Pi(E)$ esetén van olyan $\alpha' \in \Pi(E')$, hogy $f^{-1}(\alpha') = \alpha$, ez azonban közvetlen folyománya a 9. tételnek. ▮

A 10—13. tételek együttvéve BANASCHEWSKI és MARANDA szomszédsági függvények inverzére vonatkozó eredményét adják.

III. fejezet

5. §. Ferde szomszédsági függvények és szomszédsági függvények

Egy komplex szám akkor és csak akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával. Ebben a paragrafusban hasonló jellemzését adjuk a szomszédsági függvényeknek egy általánosabb fogalom, az ún. ferde szomszédsági függvény segítségével. Ez utóbbit a következőképpen definiáljuk:

8. DEFINÍCIÓ. Egy E halmazon értelmezett ferde szomszédsági függvényen az E halmaz részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ osztályát az E-n definiált szűrők $\Phi(E)$ osztályába leképező olyan α függvényt értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(S0) $\emptyset \in \alpha(\emptyset)$;

(S1) $B \in \alpha(A) \Rightarrow B \supseteq A$;

(S2) $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$;

(S3) Ha $B \in \alpha(A)$, akkor van olyan C, hogy $B \in \alpha(C)$ és $C \in \alpha(A)$.

MEGJEGYZÉSEK. 1. A következő példa azt mutatja, hogy (S0) nem vezethető le a többi feltételből:

Legyen $\emptyset \neq T \subseteq E$ és $X \in \alpha(A) \Leftrightarrow A \cup T \subseteq X$. Ekkor az (S1), (S2) és (S3) feltételek teljesülnek, de (S0) nem teljesül.

2. $A \subseteq B \Rightarrow \alpha(A) \supseteq \alpha(B)$. Valóban, $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$, és akkor (S2) szerint $\alpha(B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$, tehát $\alpha(A) \supseteq \alpha(B)$. ▌

9. DEFINÍCIÓ. Ha α ferde szomszédsági függvény az E halmazon, akkor azt a $\mathfrak{P}(E)$-t $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}(E)]$-be leképező $\bar{\alpha}$ függvényt, amely a

(C) $B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B)$

feltétel révén van adva, az α függvény konjugáltjának nevezzük. ▌

A definíció jogosultságát alátámasztja a következő

14. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti α ferde szomszédsági függvény $\bar{\alpha}$ konjugáltja maga is ferde szomszédsági függvény.*

Bizonyítás. Először is megmutatjuk, hogy $\bar{\alpha}(A)$ szűrő, tetszőleges $A \subseteq E$ esetén. Az $\bar{\alpha}(A)$ osztály mindenesetre nem üres. Valóban, (S0) szerint $\alpha(\emptyset) = \mathfrak{P}(E)$, és így $E \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(\emptyset)$ érvényes tetszőleges $A \subseteq E$-re. Továbbá

$$B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B)$$

és

$$C \supseteq B \Leftrightarrow E - B \supseteq E - C \Rightarrow \alpha(E - B) \subseteq \alpha(E - C)$$

alapján következik

$$E - A \in \alpha(E - C) \Leftrightarrow C \in \bar{\alpha}(A).$$

Másrészt

$$\left.\begin{array}{l} B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B) \\ C \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - C) \end{array}\right\} \Rightarrow E - A \in \alpha(E - B) \cap \alpha(E - C) =$$

$$= \alpha[(E - B) \cup (E - C)] = \alpha[E - (B \cap C)],$$

vagyis

$$E-A\in\alpha[E-(B\cap C)]\Leftrightarrow B\cap C\in\bar{\alpha}(A).$$

Ellenőrizzük most a 8. definíció feltételeinek teljesülését[10]:

$(\overline{S0})$: $\emptyset\in\bar{\alpha}(\emptyset)\Leftrightarrow E\in\alpha(E)$.

$(\overline{S1})$: $B\in\bar{\alpha}(A)\Leftrightarrow E-A\in\alpha(E-B)\Rightarrow E-A\supseteq E-B\Leftrightarrow B\supseteq A$.

$(\overline{S2})$: Az alábbi feltételek mindegyike ekvivalens a rákövetkezővel:

$$C\in\bar{\alpha}(A\cup B),$$

$$E-(A\cup B)\in\alpha(E-C),$$

$$(E-A)\cap(E-B)\in\alpha(E-C),$$

$$E-A\in\alpha(E-C)\,\&\,E-B\in\alpha(E-C),$$

$$C\in\bar{\alpha}(A)\,\&\,C\in\bar{\alpha}(B),$$

$$C\in\bar{\alpha}(A)\cap\bar{\alpha}(B).$$

$(\overline{S3})$: Legyen $B\in\bar{\alpha}(A)\Leftrightarrow E-A\in\alpha(E-B)$.
Ekkor (S3) szerint van olyan $E-C$ halmaz, hogy $E-A\in\alpha(E-C)$ és $E-C\in\alpha(E-B)$, vagyis, hogy $B\in\bar{\alpha}(C)$ és $C\in\bar{\alpha}(A)$. ∎

A konjugált függvény definíciójában szereplő (C) feltétel közvetlen folyományaként adódik a

15. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti tetszőleges ferde szomszédsági függvény esetén* $\bar{\bar{\alpha}}=\alpha$. ∎

Most már meg tudjuk adni szomszédsági függvényeknek ferde szomszédsági függvények segítségével történő ama jellemzését, amelyet bevezetőben említettünk.

Mindenekelőtt könnyű belátni, hogy egy szomszédsági függvény mindig ferde szomszédsági függvény: (S0) az (A3) feltétel révén adódik $E\in\alpha(E)$-ből, azt is megmutattuk már, hogy (S2) teljesül (vö. 169. o.), és (S1)=(A1), (S3)=(A4).

Másrészt viszont, mivel egy ferde szomszédsági függvény mindig teljesíti az (A1), (A2) és (A4) feltételeket[11] (vö. 173. o., 2.) megjegyzés), pontosan akkor lesz szomszédsági függvény, ha még (A3)-at is teljesíti. (A3) és (C) összehasonlítása révén most már adódik a

16. TÉTEL. *Egy α ferde szomszédsági függvény akkor és csak akkor szomszédsági függvény, ha* $\alpha=\bar{\alpha}$. ∎

[10] Ha (K) az α-ra kirótt feltétel, akkor a megfelelő $\bar{\alpha}$-ra vonatkozó feltételt $(\overline{K})$-sal jelöljük.

[11] A szomszédsági függvény fogalmának „ferde" általánosítására a legegyszerűbb lehetőség volna az (A3) feltételt az 5. definícióból elhagyni, és a ferde szomszédsági függvényeket a fennmaradó (A1), (A2) és (A4) feltételekkel definiálni. E definíció alapulvétele mellett azonban nem sikerülne a 14. tételt bizonyítani, ti. nem tudnánk megmutatni azt, hogy $\bar{\alpha}(A)$ két halmazzal együtt azok metszetét is tartalmazza.

6. §. Ferde szomszédsági függvényekre vonatkozó néhány további eredmény

Jelöljük egy E téren adott összes ferde szomszédsági függvények halmazát $\pi(E)$-vel. A jól ismert $\alpha \subseteq \alpha' \Leftrightarrow \alpha(A) \subseteq \alpha'(A)$ $(A \subseteq E)$ megállapodás révén a $\pi(E)$ halmaz parciálisan rendezetté válik. E parciális rendezésre vonatkozólag a konjugált képzésének művelete izoton:

17. TÉTEL. $\alpha \subseteq \alpha' \Rightarrow \bar{\alpha} \subseteq \bar{\alpha}'$.

Bizonyítás.

$$X \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E-A \in \alpha(E-X) \Rightarrow E-A \in \alpha'(E-X) \Leftrightarrow X \in \bar{\alpha}'(A). \blacksquare$$

A most következő vizsgálatokban alapvető szerepe lesz a következő inkompatibilitási fogalomnak:

10. DEFINÍCIÓ. Két halmazrendszert, $\mathfrak{a}$-t és $\mathfrak{b}$-t, inkompatibilisnak nevezünk, ha van olyan $A \in \mathfrak{a}$ és $B \in \mathfrak{b}$, hogy $A \cap B = \emptyset$. Jelölve: $\mathfrak{a} \triangle \mathfrak{b}$. ▌

MEGJEGYZÉS. Két szűrő pontosan akkor inkompatibilis, ha a legszűkebb mindkettőjüket tartalmazó szűrő egyenlő $\mathfrak{P}(E)$-vel, a tér improprius szűrőjével. ▌

Az [1] dolgozatban bizonyítást nyert, hogy a szomszédsági függvény definíciójában szereplő (A2), (A3) és (A4) feltételeket az egyetlen

(A5) $\alpha(A) \triangle [B] \Rightarrow \alpha(A) \triangle \alpha(B)$

feltétellel lehet helyettesíteni.[12]

A következő két tétel azzal a feltételpárral foglalkozik, amely ferde szomszédsági függvények esetén megfelel (A5)-nek.

18. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti tetszőleges α ferde szomszédsági függvény eleget tesz a következő feltételeknek:*

(D) $\alpha(A) \triangle [B] \Rightarrow \alpha(A) \triangle \bar{\alpha}(B)$,

$(\bar{\text{D}})$ $\bar{\alpha}(A) \triangle [B] \Rightarrow \bar{\alpha}(A) \triangle \alpha(B)$.[13]

Bizonyítás. Legyen α ferde szomszédsági függvény, és tegyük fel, hogy $\alpha(A) \triangle [B]$, vagyis, hogy $X \cap B = \emptyset$ valamely $X \in \alpha(A)$-ra. (S3) szerint $X \in \alpha(Y)$ és $Y \in \alpha(A)$ valamely $Y \subseteq E$-re. Mármost $X \in \alpha(Y) \Leftrightarrow E-Y \in \bar{\alpha}(E-X)$ és $B \cap X = \emptyset \Rightarrow B \subseteq E-X \Rightarrow$ $\Rightarrow \bar{\alpha}(B) \supseteq \bar{\alpha}(E-X)$ alapján adódik $E-Y \in \bar{\alpha}(B)$.

Ezek szerint $Y \in \alpha(A)$ és $E-Y \in \bar{\alpha}(B)$, vagyis $\alpha(A)$ és $\bar{\alpha}(B)$ inkompatibilis. Ezzel bebizonyítottuk (D)-t, és $(\bar{\text{D}})$ most már a 14. és 15. tételek alapján következik. ▌

(D) és $(\bar{\text{D}})$ együtt helyettesíthetik a ferde szomszédsági függvény definíciójában szereplő feltételek egy részét. Lényegében véve ezt mondja ki a következő

[12] Itt $[B] = \{X \mid B \subseteq X \subseteq E\}$, vagyis $[B]$ a B halmaz által generált „főszűrő".

[13] (D) és $(\bar{D})$ helyett azt írhatnánk, hogy

$$\beta(A) \triangle [B] \Rightarrow \beta(A) \triangle \bar{\beta}(B), \qquad \beta = \alpha, \bar{\alpha}.$$

19. TÉTEL. *Legyen* α $\mathfrak{P}(E)$*-nek* $\Phi(E)$*-be való leképezése, amely teljesíti a következő feltételeket:*

(S0) $\emptyset \in \alpha(\emptyset)$;

(S1) $B \in \alpha(A) \Rightarrow B \supseteq A$;

(S2′) $\alpha(A) \cap \alpha(B) \subseteq \alpha(A \cup B)$.

Legyen továbbá az $\bar{\alpha}$: $\mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}[\mathfrak{P}(E)]$ *leképezés a*

(C) $B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E - A \in \alpha(E - B)$

feltétellel definiálva. Ha most még teljesülnek a

(D) $\alpha(A) \triangle [B] \Rightarrow \alpha(A) \triangle \bar{\alpha}(B)$

és

($\overline{\text{D}}$) $\bar{\alpha}(A) \triangle [B] \Rightarrow \bar{\alpha}(A) \triangle \alpha(B)$

feltételek, akkor α *és* $\bar{\alpha}$ *egymásra nézve konjugált ferde szomszédsági függvények.*

Bizonyítás. Elegendő lesz megmutatni, hogy α teljesíti az (S2) és (S3) feltételeket. — Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy

(L) $A \subseteq B \Rightarrow \alpha(A) \supseteq \alpha(B)$.

Valóban, ha $A \subseteq B$ és $X \in \alpha(B)$, akkor $\alpha(B) \triangle [E - X] \Rightarrow \alpha(B) \triangle \bar{\alpha}(E - X)$, és így $Y \cap Z = \emptyset$ valamely $Y \in \alpha(B)$ és $Z \in \bar{\alpha}(E - X)$ halmazokra. $Y \supseteq B \supseteq A$ alapján most már $A \cap Z = \emptyset \Rightarrow \bar{\alpha}(E - X) \triangle [A] \Rightarrow \bar{\alpha}(E - X) \triangle \alpha(A)$. Így viszont $V \cap W = \emptyset$ valamely $V \in \alpha(A)$ és $W \in \bar{\alpha}(E - X)$ halmazokra. Látjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{r} V \in \alpha(A) \\ V \subseteq E - W \end{array}\right\} \Rightarrow E - W \in \alpha(A),$$

míg másrészt[14]

$$W \in \bar{\alpha}(E - X) \Rightarrow W \supseteq E - X \Rightarrow E - W \subseteq X.$$

Ezek szerint $X \in \alpha(A)$, és teljesül (L).

(L)-ből most már következik $\alpha(A \cup B) \subseteq \alpha(A) \cap \alpha(B)$, és ez, (S2′)-vel együtt, (S2)-t adja.

(S3) bizonyítása végett legyen $B \in \alpha(A)$, vagyis $\alpha(A) \triangle [E - B]$. Ekkor (D) szerint $\alpha(A) \triangle \bar{\alpha}(E - B)$, vagyis $X \cap Y = \emptyset$ valamely $X \in \alpha(A)$ és $Y \in \bar{\alpha}(E - B)$ halmazokra. Látjuk, hogy $Y \in \bar{\alpha}(E - B) \Rightarrow B \in \alpha(E - Y)$ és

$$\left.\begin{array}{r} X \cap Y = \emptyset \Rightarrow X \subseteq E - Y \\ X \in \alpha(A) \end{array}\right\} \Rightarrow E - Y \in \alpha(A).$$

Ezek szerint (S3) is teljesül.

[14] (S_1) és (C) alapján természetesen teljesül

$$B \in \bar{\alpha}(A) \Rightarrow B \supseteq A.$$

7. §. Ferde szomszédsági függvények és topogén struktúrák

A szomszédsági függvények és szimmetrikus topogén struktúrák közötti ekvivalencia alapján azt lehet sejteni, hogy ferde szomszédsági függvényekre is adható hasonló szintopogén jellemzés, éspedig a szimmetriakövetelmény elejtésével, a topogén struktúra fogalma révén. Ebben a paragrafusban bebizonyítjuk ennek a sejtésnek a helyességét.

Mindenekelőtt emlékeztessünk a topogén struktúra fogalmának definíciójára:

11. DEFINÍCIÓ. Az E halmazon értelmezett topogén struktúrának nevezünk egy az E halmaz összes részhalmazainak $\mathfrak{P}(E)$ halmazán definiált $<$ relációt, ha az eleget tesz a következő feltételeknek:

(O1) $\emptyset < \emptyset,\ E < E$;

(O2) $A < B \Rightarrow A \subseteq B$;

(O3) $A \subseteq A' < B' \subseteq B \Rightarrow A < B$;

(Q′) $A < B \,\&\, A' < B' \Rightarrow A \cap A' < B \cap B'$;

(Q″) $A < B \,\&\, A' < B' \Rightarrow A \cup A' < B \cup B'$;

(7.9) $A < B \Rightarrow (\exists C) A < C < B$. ▌

A korábban tetszőleges féltopogén rendezésekre elfogadott

$$<_1 \subseteq <_2 \Leftrightarrow A <_1 B \rightarrow A <_2 B \ (A,\ B \subseteq E)$$

konvenció révén természetesen egy E tér fölötti topogén struktúrák halmaza is parciálisan rendezetté válik.

Ferde szomszédsági függvények szintopogén jellemzése mármost a következő, a 7. tétellel szoros analógiát mutató tétel révén lehetséges:

20. TÉTEL. (1) *Ha $<$ az E halmazon definiált topogén struktúra, akkor az E részhalmazain az*

$$\alpha_<(A) = \{X \mid A < X\}$$

feltétellel definiált $\alpha_<$ függvény ferde szomszédsági függvény E-n.

(2) *Ha α ferde szomszédsági függvény az E halmazon, akkor az E részhalmazai között*

$$A <_\alpha B \Leftrightarrow B \in \alpha(A)$$

révén definiált $<_\alpha$ reláció topogén struktúra E-n.

(3) *$< \rightarrow \alpha_<$ és $\alpha \rightarrow <_\alpha$ kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E-n értelmezett topogén struktúrák osztályának az E fölötti ferde szomszédsági függvények osztályára és viszont. E leképezések rendezéstartók.*

Bizonyítás. Tetszőleges $A \subseteq E$ esetén $\alpha_<(A) = \{X \mid A < X\}$ szűrő. Ez egyszerűen adódik az (O1), (O3) és (Q′) feltételekből. Megmutatjuk, hogy az $\alpha_<(A)$ szűrő teljesíti az (S0)—(S3) feltételeket.

(S0): $\emptyset \in \alpha_<(\emptyset)$ abból következik, hogy $\emptyset < \emptyset$.

(S1): $B \in \alpha_<(A) \Rightarrow B \supseteqq A$ (O2)-ből következik.

(S2): $\alpha_<(A \cup B) = \alpha_<(A) \cap \alpha_<(B)$.

Valóban, (O3) felhasználásával adódik

$$X \in \alpha_<(A \cup B) \Leftrightarrow A \cup B < X \left\} \begin{array}{l} \Rightarrow A < X \Leftrightarrow X \in \alpha_<(A) \\ \Rightarrow B < X \Leftrightarrow X \in \alpha_<(B) \end{array} \right\} \Rightarrow X \in \alpha_<(A) \cap \alpha_<(B).$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\alpha_<(A \cup B) \subseteqq \alpha_<(A) \cap \alpha_<(B)$. Másrészt (Q″) segítségével azt kapjuk, hogy

$$X \in \alpha_<(A) \cap \alpha_<(B) \left\} \begin{array}{l} \Rightarrow A < X \\ \Rightarrow B < X \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B < X \Leftrightarrow X \in \alpha_<(A \cup B),$$

vagyis, hogy $\alpha_<(A) \cap \alpha_<(B) \subseteqq \alpha_<(A \cup B)$.

(S3): $B \in \alpha_<(A) \Rightarrow (\exists C)\, B \in \alpha_<(C)\ \&\ C \in \alpha_<(A)$.

Ez közvetlen folyománya (7. 9)-nek.

(2) Az $A <_\alpha B \Leftrightarrow B \in \alpha(A)$ reláció teljesíti a 11. definícióban felsorolt valamennyi követelményt.

(O1): (S0) és $E \in \alpha(E)$ révén adódik $\emptyset <_\alpha \emptyset$ és $E <_\alpha E$.

(O2): Az $A <_\alpha B \Rightarrow A \subseteqq B$ implikáció (S1)-ből következik.

(O3): $A \subseteqq A' <_\alpha B' \subseteqq B \Rightarrow A <_\alpha B$ azért teljesül, mert[15]

$$B \supseteqq B' \in \alpha(A') \subseteqq \alpha(A) \Rightarrow B \in \alpha(A).$$

(Q′):

$$\left. \begin{array}{l} A <_\alpha B \Leftrightarrow B \in \alpha(A') \subseteqq \alpha(A \cap A') \\ A' <_\alpha B' \Leftrightarrow B' \in \alpha(A') \subseteqq \alpha(A \cap A') \end{array} \right\} \Rightarrow B \cap B' \in \alpha(A \cap A') \Leftrightarrow A \cap A' <_\alpha B \cap B'.$$

(Q″):

$$\left. \begin{array}{l} A <_\alpha B \Leftrightarrow B \in \alpha(A) \\ A' <_\alpha B' \Leftrightarrow B' \in \alpha(A') \end{array} \right\} \Rightarrow B \cup B' \in \alpha(A) \cap \alpha(A') = \alpha(A \cup A') \Leftrightarrow A \cup A' <_\alpha B \cup B'.$$

(7. 9): $A <_\alpha B \Rightarrow (\exists C) A <_\alpha C <_\alpha B$ közvetlenül folyik (S3)-ból.

(3) A 7. tétel részére adott bizonyítás változtatás nélkül megtartja érvényét. ▮

Ha $<$ topogén struktúra, akkor $<^c$ is az. Ezt be lehet bizonyítani közvetlenül a 11. definíció alapján, de azonnal adódik a következő egyszerű tételből is:

[15] $\alpha(A') \subseteqq \alpha(A)$ a 8. Definícióhoz fűzött 2. megjegyzés szerint.

21. TÉTEL. *Egy E halmazon definiált tetszőleges α ferde szomszédsági függvény esetén*

$$<_{\bar{\alpha}} = (<_\alpha)^c.$$

Bizonyítás.

$$\left.\begin{array}{r} A <_{\bar{\alpha}} B \Leftrightarrow B \in \bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow \\ A(<_\alpha)^c B \Leftrightarrow E-B <_\alpha E-A \Leftrightarrow \end{array}\right\} E-A \in \alpha(E-B). \blacksquare$$

8. §. Ferde szomszédsági relációk. Egy ellenpélda

Amint ez az [1] dolgozatból ismeretes, a szomszédsági függvény fogalma ekvivalens a szomszédsági reláció JEFREMOVICStól és SZMIRNOVtól származó fogalmával. Egymásnak megfelelő szomszédsági függvény és szomszédsági reláció között a kapcsolatot az

$$A\delta_\alpha B \Leftrightarrow E-B \notin \alpha(A),$$

illetve

$$\alpha_\delta(A) = \{X | A\bar{\delta} E-X\}$$

formulákkal definiált $\alpha \to \delta_\alpha$, illetve $\delta \to \alpha_\delta$ leképezések létesítik. Éppen ez az ekvivalencia az, ami indokolttá teszi a „szomszédsági függvény" elnevezést.

Ebben a paragrafusban a szomszédsági függvények és szomszédsági relációk közötti kapcsolat analógiájára a ferde szomszédsági függvényeket jellemezzük alkalmasan definiált „ferde szonszédsági relációk" segítségével. Ez utóbbiakat a következőképpen definiáljuk:

12. DEFINÍCIÓ. Egy E halmaz fölötti ferde szomszédsági reláción olyan $\mathfrak{P}(E)$-n definiált δ relációt értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek (ahol $\bar{\delta}$ a δ reláció tagadását jelenti):

(P1) $\begin{cases} A \cup B\bar{\delta} C \Leftrightarrow A\bar{\delta} C \,\&\, B\bar{\delta} C, \\ C\bar{\delta} A \cup B \Leftrightarrow C\bar{\delta} A \,\&\, C\bar{\delta} B; \end{cases}$

(P2) $x\delta x$ tetszőleges $x \in E$-re;

(P3) $A\bar{\delta}\varnothing$ és $\varnothing\bar{\delta} A$ tetszőleges $A \subseteqq E$-re;

(P4) Ha $A\bar{\delta} B$, akkor léteznek diszjunkt X és Y halmazok úgy, hogy $A\bar{\delta} E-X$ és $E-Y\bar{\delta} B$. $\blacksquare$

Egy E tér fölötti ferde szomszédsági relációk halmaza parciálisan rendezetté válik a

$$\delta \subseteqq \delta_1 \Leftrightarrow A\delta B \to A\delta_1 B \quad (A,\ B \subseteqq E)$$

megállapodás révén.

A következő két tétel segédszerepet fog játszani a továbbiak során:

22. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti tetszőleges δ ferde szomszédsági reláció esetén*

$$(A\bar{\delta} B \,\&\, A_1 \subseteqq A \,\&\, B_1 \subseteqq B) \Rightarrow A_1 \bar{\delta} B_1.$$

Bizonyítás.

$$A\bar{\delta} B \Leftrightarrow A_1 \cup A\bar{\delta} B \Rightarrow A_1\bar{\delta} B \Leftrightarrow A_1\bar{\delta} B \cup B_1 \Rightarrow A_1\bar{\delta} B_1. \blacksquare$$

23. TÉTEL.
$$(A\delta B \mathbin{\&} A \subseteq A_1 \mathbin{\&} B \subseteq B_1) \Rightarrow A_1 \delta B_1 .$$

Bizonyítás.

$A_1 \bar{\delta} B_1$-ből $A \bar{\delta} B$ következnék az előző tétel szerint. ∎

A ferde szomszédsági függvényeknek az előbbiekben említett jellemzése mármost a következő tétel révén valósítható meg:

24. TÉTEL. (1) *Ha α ferde szomszédsági függvény az E halmazon, akkor az E részhalmazai között*
$$A\delta_\alpha B \Leftrightarrow E - B \notin \alpha(A)$$
révén definiált δ_α reláció ferde szomszédsági reláció E-n.

(2) *Ha δ ferde szomszédsági reláció E-n, akkor az*
$$\alpha_\delta(A) = \{X \mid A \bar{\delta} E - X\}$$
révén definiált α_δ: $\mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}[\mathfrak{P}(E)]$ leképezés ferde szomszédsági függvény E-n.

(3) $\alpha \to \delta_\alpha$ *és* $\delta \to \alpha_\delta$ *kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E-n értelmezett ferde szomszédsági függvények osztályának az E fölötti ferde szomszédsági relációk osztályára és viszont. E leképezések a parciális rendezést megfordítják.*

Bizonyítás. (1) Azt kell megmutatni, hogy δ_α teljesíti a 12. definícióban szereplő (P1)—(P4) feltételeket.

(P1): Az alábbi feltételek mindegyike ekvivalens a rákövetkezővel:
$$A \cup B \bar{\delta}_\alpha C,$$
$$E - C \in \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B),$$
$$E - C \in \alpha(A) \mathbin{\&} E - C \in \alpha(B),$$
$$A \bar{\delta}_\alpha C \mathbin{\&} B \bar{\delta}_\alpha C.$$

Ezzel megkaptuk a (P1)-ben szereplő első feltételt. A második feltétel viszont így adódik:
$$C \bar{\delta}_\alpha A \cup B,$$
$$E - (A \cup B) \in \alpha(C),$$
$$(E - A) \cap (E - B) \in \alpha(C),$$
$$E - A \in \alpha(C) \mathbin{\&} E - B \in \alpha(C),$$
$$C \bar{\delta}_\alpha A \mathbin{\&} C \bar{\delta}_\alpha B.$$

(P2): $x\delta_\alpha x$ fennáll tetszőleges $x \in E$-re, mert (S1) szerint $E - x \notin \alpha(x)$.

(P3): $A \bar{\delta}_\alpha \varnothing \Leftrightarrow E \in \alpha(A)$ világos, és $\varnothing \bar{\delta}_\alpha A \Leftrightarrow E - A \in \alpha(\varnothing)$ (S0) szerint.

(P4): $A \bar{\delta}_\alpha B \Leftrightarrow E - B \in \alpha(A) \Rightarrow \alpha(A) \triangle [B] \Rightarrow \alpha(A) \triangle \bar{\alpha}(B)$. A legutolsó feltétel itt viszont éppen azt jelenti, hogy léteznek olyan diszjunkt X és Y halmazok, hogy $X \in \alpha(A)$ és $Y \in \bar{\alpha}(B) \Leftrightarrow E - B \in \alpha(E - Y)$, vagyis $A \bar{\delta}_\alpha E - X$ és $E - Y \bar{\delta}_\alpha B$.

(2) Megmutatjuk, hogy α_δ teljesíti a 8. definíció feltételeit.

Mindenekelőtt $\alpha_\delta(A)$ nem üres tetszőleges $A \subseteq E$-re, mivel $E \in \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow A\bar{\delta}\emptyset$ teljesül (P3) miatt.

Felhasználva a megfelelő helyen a 22. tételt, kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{r} X \in \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow A\bar{\delta}E-X \\ Y \supseteq X \Leftrightarrow E-Y \subseteq E-X \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{\delta}E-Y \Leftrightarrow Y \in \alpha_\delta(A).$$

Továbbá (P1) szerint

$$\left.\begin{array}{r} X \in \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow A\bar{\delta}E-X \\ Y \in \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow A\bar{\delta}E-Y \end{array}\right\} \Rightarrow A\bar{\delta}(E-X)\cup(E-Y) \Leftrightarrow A\bar{\delta}E-(X\cap Y) \Leftrightarrow X\cap Y \in \alpha_\delta(A).$$

Látjuk, hogy $\alpha_\delta(A)$ szűrő.

(S0): $\emptyset \in \alpha_\delta(\emptyset) \Leftrightarrow \emptyset\ \bar{\delta}E$ (P3) miatt teljesül.

(S1): $B \in \alpha_\delta(A) \Rightarrow B \supseteq A$.

Valóban, legyen $B \in \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow A\bar{\delta}E-B$, és tegyük fel, hogy $A\cap(E-B) \neq \emptyset$. Ekkor $x \in A\cap(E-B)$ valamely $x \in E$-re, és a 23. tétel szerint $x\delta x \Rightarrow A\delta(E-B)$. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy

$$A\cap(E-B) = \emptyset \Leftrightarrow B \supseteq A.$$

(S2): $\alpha_\delta(A\cup B) = \alpha_\delta(A)\cap\alpha_\delta(B)$.

Valóban,

$$X \in \alpha_\delta(A\cup B) \Leftrightarrow A\cup B\bar{\delta}E-X \Leftrightarrow A\bar{\delta}E-X \,\&\, B\bar{\delta}E-X \Leftrightarrow X \in \alpha_\delta(A) \,\&\, X \in \alpha_\delta(B).$$

(S3): $B \in \alpha_\delta(A) \Rightarrow (\exists C) B \in \alpha_\delta(C) \,\&\, C \in \alpha_\delta(A)$.

Legyen $B \in \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow A\bar{\delta}E-B$. Ekkor (P4) szerint léteznek olyan diszjunkt X és Y halmazok, hogy $A\bar{\delta}E-X$ és $E-Y\bar{\delta}E-B$. Mármost $X\cap Y = \emptyset \Rightarrow X \subseteq E-Y$, így $E-Y \in \alpha_\delta(A)$ és (S3) teljesül $C = E-Y$-ra.

(3) A bizonyítás ugyanaz, mint a „szimmetrikus esetben", vagyis, mint a szomszédsági függvényekre és szomszédsági relációkra vonatkozó megfelelő tétel esetén (vö. [1], Proposition 7.):

Tekintsük az $\alpha \to \delta_\alpha$ és $\delta \to \alpha_\delta$ leképezéseket. Ha $\delta = \delta_\alpha$, akkor $\alpha_\delta = \alpha$. Valóban,

$$\alpha_\delta(A) = \{X | A\bar{\delta}E-X\} = \{X | X \in \alpha(A)\} = \alpha(A).$$

Legyen másrészt $\delta \to \alpha_\delta$ és $\alpha \to \delta_\alpha$. Ha itt $\alpha = \alpha_\delta$, akkor $\delta_\alpha = \delta$. Valóban,

$$A\delta_\alpha B \Leftrightarrow E-B \notin \alpha(A) \Leftrightarrow E-B \notin \alpha_\delta(A) \Leftrightarrow E-B \notin \{X | A\bar{\delta}E-X\} \Leftrightarrow A\delta B.$$

Ezek a leképezések megfordítják a parciális rendezéseket: $\alpha \subseteq \alpha_1 \Rightarrow \delta_\alpha \supseteq \delta_{\alpha_1}$. Valóban, $A\delta_{\alpha_1}B \Leftrightarrow E-B \notin \alpha_1(A) \Rightarrow E-B \notin \alpha(A) \Leftrightarrow A\delta_\alpha B$.

Hasonlóképpen $\delta \subseteq \delta_1 \Rightarrow \alpha_\delta \supseteq \alpha_{\delta_1}$. Valóban, $X \in \alpha_{\delta_1}(A) \Leftrightarrow A\bar{\delta}_1 E-X \Rightarrow A\bar{\delta}E-X \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow X \in \alpha_\delta(A)$. ▌

A ferde szomszédsági függvények és ferde szomszédsági relációk közötti kapcsolat ismeretében természetes módon felvetődik a következő kérdés: Ha tekintünk egymásra nézve konjugált α és $\bar{\alpha}$ függvényeket, vajon milyen kapcsolat fog fennállni a megfelelő δ_α és $\delta_{\bar{\alpha}}$ relációk között? Erre a kérdésre válaszol az egyszerű

25. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti tetszőleges α ferde szomszédsági függvény esetén $A\delta_{\bar{\alpha}}B \Leftrightarrow B\delta_\alpha A$.*

Bizonyítás.

$$A\bar{\delta}_{\bar{\alpha}}B \Leftrightarrow E-B\in\bar{\alpha}(A) \Leftrightarrow E-A\in\alpha(B) \Leftrightarrow B\bar{\delta}_\alpha A. \blacksquare$$

Mindazon meggondolások, amelyeket az eddigiek során ferde szomszédsági függvények, topogén struktúrák és ferde szomszédsági relációk egymásközötti kapcsolataira nézve végeztünk, azon a hallgatólagos feltételezésen nyugodtak, hogy ezek a „ferde" fogalomalkotások különböznek a megfelelő „szimmetrikus" fogalmaktól (szomszédsági függvény, szimmetrikus topogén struktúra, szomszédsági reláció).

Nézzünk most meg egy egyszerű példát, amely ezt igazolja.

Legyen E a valós számtengely és A, $B\subseteqq E$ esetén legyen

$$A\bar{\delta}B \Leftrightarrow (x\in A\,\&\,y\in B)\to x<y.$$

Az így megadott δ reláció teljesíti a 12. Definíció feltételeit. (P1), (P2) és (P3) teljesülése azonnal világos, (P4) belátása végett viszont legyen $X=\{x|x\leqq a$ valamely $a\in A$-ra$\}$ és $Y=E-X$.

Ezek szerint δ ferde szomszédsági függvény, de nem szomszédsági függvény, mert nem üres A és B halmazok esetén az $A\bar{\delta}B$ és $B\bar{\delta}A$ relációk kölcsönösen kizárják egymást.

Ennek a δ relációnak a 24. tétel szerint megfelel egy α_δ ferde szomszédsági függvény, ez utóbbinak pedig a 20. tétel szerint egy $<_{\alpha_\delta}$ topogén struktúra. Ezek példát szolgáltatnak olyan ferde szomszédsági függvényre, amely nem szomszédsági függvény, és olyan topogén struktúrára, amely nem szimmetrikus topogén struktúra.

Valóban, amint erre a jelen paragrafus elején rámutattunk, az egymásnak megfelelő szomszédsági függvény és szomszédsági reláció közötti kapcsolatot ugyanazok a formulák létesítik a szimmetrikus és a ferde esetben. Másszóval: a ferde szomszédsági függvények és ferde szomszédsági relációk közötti kölcsönösen egyértelmű megfelelés révén a szomszédsági függvények osztálya a szomszédsági relációk osztályára képeződik le. Ha tehát a szóban forgó δ-nak megfelelő α_δ szomszédsági függvény volna, δ-nak szomszédsági relációnak kellene lennie, ami ellentmondás.

Tekintve most még, hogy a 7. tétel és a 20. tétel összehasonlításából adódóan a ferde szomszédsági függvények és topogén struktúrák közötti kölcsönösen egyértelmű megfelelés révén a szomszédsági függvények osztálya a szimmetrikus topogén struktúrák osztályára képeződik le, az is adódik, hogy $<_{\alpha_\delta}$ nem-szimmetrikus topogén struktúra.

Állításaink helyességét természetesen közvetlenül is meg lehet mutatni, α_δ és $<_{\alpha_\delta}$ explicit jellemzése révén:

$$\alpha_\delta(A)=\{X|A\bar{\delta}E-X\}=\{X|(x\in A\,\&\,y\in E-X)\to x<y\},$$

és

$$A<_{\alpha_\delta}B \Leftrightarrow B\in\alpha_\delta(A),$$

azaz

$$A<_{\alpha_\delta}B \Leftrightarrow (x\in A\,\&\,y\in E-B)\to x<y.$$

IRODALOM

[1] BANASCHEWSKI, B.—MARANDA, J. M.: Proximity Functions. *Math. Nachr.* **23** (1961), 1—37.
[2] CHOQUET, G.: Convergences. *Ann. Univ. Grenoble*, **23** (1947—48), 57—112.
[3] CSÁSZÁR, Á.: *Grundlagen der allgemeinen Topologie.* Akadémiai Kiadó, B. G. Teubner, Budapest—Leipzig, 1963.
[4] FISCHER, H. R.: Limesräume. *Math. Annalen* **137** (1959), 269—303.
[5] GACSÁLYI, S.: On proximity functions and symmetrical topogenous structures. *Publ. Math. Debrecen*, **11** (1964), 165—174.
[6] GACSÁLYI, S.: On Hacque's *E*-mappings and on semi-topogenous orders. *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 265—270.
[7] GACSÁLYI, S.: Skew proximity functions. *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 271—280.
[8] GACSÁLYI, S.: On limitings and topogenous orders. *Publ. Math. Debrecen*, **13** (1966), sajtó alatt.
[9] GACSÁLYI, S.: A characterization of G. Choquet's pseudo-topologies. *Math. Nachr.* (sajtó alatt).
[10] HACQUE, M.: Sur les *E*-structures. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **254** (1962), 1905—1907 és 2120—2122.
[11] KOWALSKY, H. J.: Limesräume und Komplettierung. *Math. Nachr.* **12** (1954), 301—340.
[12] SCHMIDT, J.: Beiträge zur Filtertheorie. I. *Math. Nachr.* **7** (1952), 359—378.

DIMENZIÓ ÉS KONVEXITÁS*, I

Írta: DEÁK ERVIN

TARTALOMJEGYZÉK

* E dolgozat lényegében a szerző kandidátusi disszertációja több változtatással, amelyek egy része az értekezés opponensei, BOGNÁR MÁTYÁS és SOÓS GYULA néhány bíráló megjegyzése és javaslata nyomán született. Az opponenseknek e helyen is köszönetet mondok munkájukért.
A felhasznált ismert fogalmakat és tételeket (viszonylag egyszerűeket is) igyekeztem idézni, mégpedig lehetőleg jól ismert tankönyvekből vagy monográfiákból; első megjelenésük adatait csak akkor adom meg, ha a történeti vonatkozás e dolgozat anyagának szempontjából is érdekes.
Az értekezés anyagának az a része, amely e dolgozat I., II. és III. részének felel meg, idegen nyelven megjelent vagy sajtó alatt van a [16], [17], [18], [20], [21], [22] dolgozatokban.
A dolgozat jelen I. része az I. fejezetet tartalmazza. Az itt közölt tartalomjegyzék, a rövidítések és jelölések mutatója, a definíciók mutatója és az irodalomjegyzék azonban a dolgozat egészére vonatkozik.

Rövidítések és jelölések mutatója

VT vektortér (lineáris tér), kizárólag a valós számok teste fölött,
TVT topologikus vektortér (kizárólag Hausdorff-tér),
LKT lokálisan konvex topologikus vektortér,
GLKT gyenge topológiájú lokálisan konvex tér,
IS iránystruktúra,
IT iránytér,
TIT topologikus iránytér;
„tér": nem-üres topologikus tér,
a „kompakt" szót a „bikompakt" értelemben használjuk,
„reguláris tér", „teljesen reguláris tér", „normális tér", „kompakt tér" mindig T_0-axióma nélkül értendő,
$\tau(X)$ egy X tér topológiai súlya (Basisgrad),
minden rendezés lineáris rendezés, és minden rendezés jele $\prec$, amely a különbözőséget is kifejezi,
$A \subset B$: A valódi részhalmaza B-nek,
A° ill. A^-: egy tér A részhalmazának belseje, ill. zárt burka,
Gr A: egy tér A részhalmazának határa,
ind X: az X tér MENGER—URISZON-dimenziója,
Dim X: az X tér iránydimenziója,
E_α (tetszőleges α kardinális számra): a számegyenes példányai α számosságú családjának topologikus szorzata,
„euklidészi tér": ugyanez véges α-ra,
„Hilbert-tér": a valós l^2-tér,
$M(E)$: egy vektortér E részhalmazát tartalmazó legszűkebb lineáris sokaság,
$L(E)$: az L vektortér E részhalmaza által kifeszített lineáris altér,
$[E]$: egy vektortér E részhalmazának konvex burka,
(x, y) ill. $[x, y]$: egy vektortér x, y pontjai által meghatározott nyílt, ill. zárt egyenes szakasz.

*

Dim X	(1. 14)
$\mathscr{G}(\mathscr{R}; \mathscr{F})$, $\mathscr{G}(\mathscr{F})$, $\mathscr{F}(\mathscr{R}; \mathscr{G})$, $\mathscr{F}(\mathscr{G})$	(1. 2)
$G(\mathscr{R}; F)$, $G(F)$, $F(\mathscr{R}; G)$, $F(G)$ $\bar{G}(\mathscr{R}; F)$, $\bar{G}(F)$, $\bar{F}(\mathscr{R}; G)$, $\bar{F}(G)$ $\underline{G}(\mathscr{R}; F)$, $\underline{G}(F)$, $\underline{F}(\mathscr{R}; G)$, $\underline{F}(G)$	(1. 6)
$G_E(\mathscr{R})$, $F_E(\mathscr{R})$	(11. 12. 1)
$G_x(\mathscr{R})$, $F_x(\mathscr{R})$, G_x, F_x	(6. 2. 1), (11. 12)
G_t^f, F_t^f	(6. 5. 1), (11. 15. 13)
$\mathscr{M}_F(\mathscr{R})$, $M_F(\mathscr{R})$, $\mathscr{N}_G(\mathscr{R})$, $N_G(\mathscr{R})$ $\mathscr{M}_F$, M_F, $\mathscr{N}_G$, N_G	(6. 1)
$M_E(\mathscr{R})$, $N_E(\mathscr{R})$	(12. 2. 1)

Definíciók mutatója

IRODALOMJEGYZÉK

[1] ACZÉL J.: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Berlin 1961.
[2] ALEKSZANDROV, P. SZ.: Szovremennoje szosztojanije teorii razmernosztyi, *Uszp. Mat. Nauk.* VI(6/46), 43—68 (1951).
[3] ALEKSZANDROV, P. SZ.: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe.* Bp. Akad. K. 1952.
[4] ALEXITS GY.: A halmazelméleti geometria újabb fejlődése. *Mat. Fiz. Lapok* XLV, 38—77, 1938.
[5] ARROW, K. J.—ENTHOVEN, A. C.: Quasi-concave programming, *Econometrica* **29**, 778—800 (1961).
[6] BIRKHOFF, G.: Three observations on linear algebra, *Rev. Univ. Nac. Tucuman,* **Ser. (A) 5**, 147—150 (1946).
[7] BIRKHOFF, G.: *Lattice Theory, rev. ed.,* New York, 1948.
[8] BOURBAKI, N.: Topologie générale, *Éléments de math. I,* **livre III,** 2. e. (1958).
[9] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques, *Éléments de math.* XV, **livre V. chap. I, II.** (1953).

[10] BROUWER, L. E.: Beweis der Invarianz der Dimensionszahl, *Math. Ann.* **70**, 161—165 (1911).
[11] BROUWER, L. E. J.: Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *Journal f. d. Reine u. Angew. Math.* **142**, 146—152 (1913).
[12] CSÁSZÁR Á.: Sur une classe des fonctions non mesurables, *Fund. Math.*, **36**, 72—76 (1949).
[13] DAY, M.: *Normed Linear Spaces*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1958.
[14] DEÁK E.: Über konvexe und interne Funktionen, sowie eine gemeinsame Verallgemeinerung von beiden. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math. V*, 109—154 (1962).
[15] DEÁK E.: Bemerkung zu einem Beweis der Quadrierbarkeit der n-dimensionalen konvexen Mengen. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.* VIII, 89—92 (1965).
[16] DEÁK E.: Ein neuer topologischer Dimensionsbegriff, *Revue Roum. Math. Pures Appl.* **10**, 31—42 (1965).
[17] DEÁK E.: Eine vollständige Charakterisierung der Teilräume eines euklidischen Raumes mittels der Richtungsdimension, *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **9**, A sorozat, 437—465 (1964).
[18] DEÁK E.: Über die inwendigen Punkte konvexer Mengen, *Revue Roum. Math. Pures Appl.* 11, 1225—1231 (1966).
[19] DEÁK E.: Über Abbildungen mit konvexitätserhaltender Inversion, *Mathematica* **8** (**31**), 217—233 (1966).
[20] DEÁK E.: Eine Verallgemeinerung des Begriffs des linearen Raumes und der Konvexität, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sectio Math.*, **9**, 45—59 (1966).
[21] DEÁK E.: Topologische Richtungsräume — eine Verallgemeinerung des Begriffs des lokalkonvexen Raumes mit der schwachen Topologie, *Studia Sci. Math. Hung.* 1, 297—308 (1966).
[22] DEÁK E.: Extremalpunktsbegriffe für Richtungsräume und eine Verallgemeinerung des Krein—Milmanschen Satzes für topologische Richtungsräume, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **18**, 113—131 (1967).
[23] DEÁK E.: Bemerkungen zu meiner vorangehenden Arbeit „Ein neuer topologischer Dimensionsbegriff", *Revue Roum. Math. Pures Appl.* (sajtó alatt).
[24] FAN, KY: On the Krein—Milman theorem, *Proc. Symp. Pure Math.* vol. **VII**: Convexity, 211—221, Amer. Math. Soc. (1963).
[25] FLORES, A.: Existenz n-dimensionaler Komplexe, die nicht in den R_{2n} einbettbar sind, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **5**, 17—23 (1934).
[26] FRÉCHET, M.: Les dimensions d'un ensemble abstrait, *Math. Ann.* **68**, 145—168 (1910).
[27] HAMEL, G.: Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$, *Math. Ann.* **60**, 459—462 (1905).
[28] HUREWICZ, W.: Normalbereiche und Dimensionstheorie, *Math. Ann.* **96**, 736—764 (1927).
[29] HUREWICZ, W.: Über das Verhalten separabler Räume zu kompakten Räumen, *Proc. Koninklijke Akad. Wet. Amsterdam* **30**, 425—430 (1927).
[30] HUREWICZ, W.: Sur la dimension de produits Cartésiens. *Annals of Math.* (2) **36**, 194—197 (1935).
[31] HUREWICZ, W.—WALLMAN, H.: *Dimension Theory,* Princeton Univ. Press. 1948.
[32] JERISON, M.: A property of extreme points of compact convex sets, *Proc. Am. Math. Soc.* **5**, 782—783 (1954).
[33] KELLEY, J. L.: *General Topology*, Toronto—New York—London, D. Van Nostrand, 1955.
[34] KELLEY, J. L.—NAMIOKA, J.: *Linear Topological Spaces*. D. Van Nostrand, Princeton, 1963.
[35] KLEE, V.: Extreme points of convex sets without completeness of the scalar field. *Mathematika II/1* N° **21**, 59—62 (1964).
[36] KOVÁCS L. B.: Kvázi-konkáv programozási feladat megoldása gradiens vetítési módszerrel. *MTA III. Oszt. Közl.* **XIII**, **2**, 157—178 (1963).
[37] KOWALSKY, H. J.: *Topologische Räume,* Basel—Stuttgart, Birkhäuser, 1961.
[38] KÖTHE, G.: *Topologische lineare Räume I.* (Die Grundlehren der Math. Wiss. Bd 107.) Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1960.
[39] KREIN, M.—MILMAN, D.: On extreme points of regularly convex sets, *Studia Math.* **9**, 133—138 (1940).
[40] LEBESGUE, H.: Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant à des espaces de n et $n+p$ dimensions, *Math. Ann.* **70**, 166—168 (1911).
[41] MARCUS, S.: Sur une classe de fonctions définies par des inégalités, introduite par M. Á. Császár, *Acta Sci. Math.* **19**, 192—218 (1958).
[42] MEHDI, M. R.: On convex functions, *Journal London Math. Soc.* **39**, 321—326 (1964).

[43] MENGER, K.: Über die Dimensionalität von Punktmengen I, *Monatshefte f. M. u. Ph.* **33**, 148—160 (1923).
[44] MENGER, K.: *Dimensionstheorie*. Leipzig—Berlin, B. G. Teubner 1928.
[45] MORITA, K.: Star-finite converings and the star-finite property, *Math. Japon.* **1**, 60—68 (1948).
[46] MORITA, K.: On the dimension of normal spaces, II., *Journal Math. Soc. Japan* **2**, 16—33 (1950).
[47] NAGATA, J.: *Modern Dimension Theory*. P. Noordhoff N. V. — Groningen, North-Holland Publ. Comp. — Amsterdam, 1965.
[48] NÖBELING, G.: Über eine n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}, *Math. Ann.* **104**, 71—80 (1931).
[49] POINCARÉ, H.: *Pourquoi l'espace a trois dimensions*. Dernières pensées, 57—97, Paris 1913.
[50] PONTRJAGIN, L.: Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension, *C. R. Acad. Sci. Paris* **190**, 1105—1107 (1930).
[51] PONTRJAGIN, L.—TOLSTOVA, G.: Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes, *Math. Ann.* **105**, 734—745 (1931).
[52] RÉVÉSZ P.: Néhány megjegyzés Birkhoff 111. problémájáról. *MTA III. Oszt. Közl.*, **XI**, 3, 273—287 (1961).
[53] SIERPIŃSKI, W.: *General Topology*, Toronto, 1952.
[54] SZMIRNOV, JU. M.—SZKLJARENKO, E. G.: Nyekotorie voproszi teorii razmernosztyi, *Trudi csetvert. vszjeszoj. szjezda*, Leningrád, 1961, tom I, 219—224.
[55] TUMARKIN, L.: Concerning infinite-dimensional spaces, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. Proc. Symp. Prague Sept. 1961, *Czechosl. Acad. Sci.*, Prague 1962, 352—353.
[56] URYSOHN, P.: Les multiplicités cantoriennes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **175**, 440—442 (1922).

0. §. Bevezetés

E dolgozat kiindulópontja és mindvégig központi gondolata: az iránystruktúra fogalma. Ennek a fogalomalkotásnak az az alapja, hogy egy topologikus vektortér, ill. (topológia nélküli) lineáris tér valamely folytonos, ill. tetszőleges lineáris formájához tartozó félterei rendszerének bizonyos strukturális (rendezési stb.) tulajdonságaival tetszőleges (algebrai struktúra nélküli) topologikus terek, ill. absztrakt halmazok részhalmazaiból alkotott bizonyos rendszerek is rendelkeznek.

Ilyen tulajdonságok pl. a következők: egy rögzített (folytonos, ill. tetszőleges) lineáris formához tartozó félterek két diszjunkt osztályt alkotnak oly módon, hogy bármelyik osztály bármelyik (topológiailag, ill. csak algebrailag) nyílt, ill. zárt féltere a másik osztály valamely zárt, ill. nyílt félterének komplementuma; mindegyik osztály az inklúzió által rendezve van, s e rendezésben minden nyílt féltérre közvetlenül a hozzátartozó zárt féltér következik; ha végül mindkét osztályt kiegészítjük az üres halmazzal és az egész térrel mint „nem-valódi" (egyaránt nyílt és zárt) félterekkel, akkor igaz az, hogy bármelyik osztályon belül nyílt félterek, ill. zárt félterek tetszőleges egyesítése, ill. metszete is ugyanazon osztálynak ugyanolyan típusú féltere.

E tulajdonságoknak a lineáris struktúrától elvonatkoztatott megfogalmazása szolgáltatja mármost azokat az ún. *irányaxiómákat*, amelyek mind a topologikus terek, mind az absztrakt halmazok ún. *irányainak* definíciójában szerepelnek; az *iránystruktúrák* pedig irányok bizonyos rendszerei. Ezek a definíciók az említett „belső" tulajdonságok mellett még olyan „külső" (vagyis az alapul vett térre, ill. halmazra utaló) tulajdonságokat követelnek meg az iránynak és az iránystruktúrának nevezendő rendszerektől, amelyek lényegében azt biztosítják, hogy e rendszerek bizonyos tekintetben „eléggé gazdagok" legyenek. Ismeretes, hogy

(0. 1) *egy lokálisan konvex tér gyenge topológiáját (vagyis a megfelelő lineáris térnek a legdurvább olyan lokálisan konvex topológiáját, amelyre nézve a kiinduló topológiában folytonos lineáris formák még folytonosak) karakterizálja az a tulajdonsága, hogy az összes topológiailag nyílt félterek családja e topológiának szubbázisa* ([38] 237).

Analóg módon bármely topologikus tér topológiája származtatható egy iránystruktúrából ((1. 13) tétel), és egy absztrakt halmaz bármely iránystruktúrája a halmaz egy topológiáját generálja (13. §).

A dolgozat az iránystruktúra fogalmára természetesen épülő két témakörről szól. Az I. és a II. fejezet adott topologikus terek különböző iránystruktúráinak vizsgálatát tartalmazza, különös tekintettel a minimális (a lehető legkevesebb irányt tartalmazó) iránystruktúrákra és arra a dimenziójellegű kardinális számra, az *iránydimenzióra*, amely ennek értelmében minden topologikus térhez egyértelműen tartozik. A dolgozatnak ez a része tehát dimenzióelméleti jellegű. A III. fejezetben viszont rögzített iránystruktúrákkal ellátott absztrakt halmazok *(irányterek)* és az iránystruktúrájuk által generált topológiával felruházott irányterek *(topologikus irányterek)* szerkezetét vizsgáljuk a lineáris terek, ill. a gyenge topológiájú lokálisan konvex terek általánosításaként, különös tekintettel a konvexitás fogalmának alkalmas általánosításaira.

*

A dimenzióelméleti rész vezérfonalát a MENGER—URISZON-féle, az újabb szokás szerint ind X-szel jelölt „kis induktív dimenzió" alaptulajdonságai szolgáltatják.

(0. 2) A MENGER—URISZON-DIMENZIÓ DEFINÍCIÓJA ([43], [56], vagy pl. [31] 10, 24):

1° $\operatorname{ind} \emptyset = -1$;

2° egy X topologikus tér dimenziója valamely $x \in X$ pontban legfeljebb n ($n=0, 1, 2, \ldots$), ha x környezetrendszerének van olyan halmazokból alkotott bázisa, amelyek határának dimenziója n-nél kisebb;

3° $\operatorname{ind} X \leqq n$, ha X dimenziója minden $x \in X$ pontban legfeljebb n;

4° $\operatorname{ind} X = n$, ha n a legkisebb egész szám, amelyre $\operatorname{ind} X \leqq n$.

Ezt a definíciót általában kiegészítik ezzel a meghatározással:

5° $\operatorname{ind} X = \infty$, ha egyetlen $n \geqq -1$ egész számra sem teljesül, hogy $\operatorname{ind} X = n$.

E dolgozatban azonban célszerű lesz 5° helyett inkább azt mondani, hogy az ilyen térnek *nincs* kis induktív dimenziója; az $\operatorname{ind} X = \infty$ jelölés amúgy is csak annak szimbolikus kifejezése, hogy X-nek nincs *véges* dimenziója.

Használatos a (0. 2) definíció 1°—4° részének transzfinit változata is, amelyben a természetes számok szerepét (nem okvetlenül véges) rendszámok veszik át. Ez finomítja ugyan a terek dimenzió szerinti osztályozását, de az egzisztencia problémája itt is fennmarad. A Hilbert-térnek pl. transzfinit dimenziója sincs ([31] 51). Egyáltalán csak „viszonylag kevés" végtelen dimenziójú térhez lehet ily módon egy transzfinit rendszámot rendelni, és csak „viszonylag kevés" végtelen rendszám lehet valamely tér transzfinit dimenziója ([31] 50). A nem-metrizálható terek köréből egyszerű példát adunk (3. 3. 1)-ben olyan X térre, amelyre ind X sem az eredeti, sem a transzfinit értelemben nem létezik.

A Dim X-szel jelölt iránydimenzió elméletének felépítésénél mármost az ind X-re vonatkozó következő, immár klasszikus alaptételeket tekintettük mintának:

(0. 3) ind X *topologikus invariáns.*

(0. 4) ind X *monoton, azaz egy tér dimenziója nem lehet kisebb valamely alterének dimenziójánál* ([31], 27).

(0. 5) *Az* E_n *euklidészi térre* ind $E_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ([11], 148 vagy pl. [31], 41).

(0. 6) MENGER SZORZATTÉTELE. *Ha* X *és* Y *szeparábilis metrikus terek és mindkettőnek van dimenziója, akkor az* $X \times Y$ *topologikus szorzat dimenziója is létezik és*

$$\mathrm{ind}\,(X \times Y) \leqq \mathrm{ind}\, X + \mathrm{ind}\, Y.$$

([44], 246, vagy pl. [31], 33.)

(0. 7) HUREWICZ EGYESÍTÉSI TÉTELE. *Ha* X *szeparábilis metrikus tér és* $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, *ahol minden* X_k *az* X*-ben* F_σ*-halmaz, továbbá*

$$\mathrm{ind}\, X_k \leqq n \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

akkor

$$\mathrm{ind}\, X \leqq n$$

([28], 754, vagy pl. [31], 30).

(0. 8) HUREWICZ KOMPAKTIFIKÁCIÓS TÉTELE. *Bármely olyan szeparábilis metrikus tér, amelynek van dimenziója, topologikusan beágyazható egy ugyanolyan dimenziójú kompaktumba* ([29], vagy pl. [31], 65).

(0. 9) MENGER ÉS NÖBELING BEÁGYAZÁSI TÉTELE. (a) *Ha* X *szeparábilis metrikus tér és* ind $X \leqq n$ *valamely* n *nem-negatív egész számra, akkor* X *topologikusan beágyazható az* E_{2n+1} *euklidészi térbe* (MENGER, [44] 298, 301, vagy pl. [31] 60);

(b) *minden* n *nem-negatív egész számra van* E_{2n+1}*-nek „univerzális" n-dimenziós altere, vagyis olyan, amelybe minden legfeljebb n-dimenziós szeparábilis metrikus tér topologikusan beágyazható; nevezetesen azoknak az* E_{2n+1}*-pontoknak a halmaza, amelyeknek legfeljebb* n *koordinátája racionális* (NÖBELING [48], PONTRJAGIN—TOLSZTOVA [51], vagy pl. [31] 64);

(c) *minden nem-negatív* n *egész számhoz meg lehet adni olyan n-dimenziós szeparábilis metrikus teret (nevezetesen* E_{2n+1} *egy alterét), amely nem ágyazható be topologikusan az* E_{2n} *térbe; az* (a) *tétel tehát ilyen értelemben nem élesíthető* (FLORES [25]).

Hivatkozni fogunk még az euklidészi terek dimenziójának topologikus invarianciájára:

(0. 10) BROUWER ÉS LEBESGUE INVARIANCIA-TÉTELE. *Ha* E_n, E_m *euklidészi terek és* $n > m$, *akkor az* E_n *tér nem ágyazható be topologikusan* E_m*-be.*

(E nevezetes tétel a (0. 3), (0. 4) és (0. 5) tételek következménye; első bizonyításai ([10], [40]) azonban a MENGER—URISZON-elmélettől függetlenül, mégpedig azt közvetlenül megelőzve keletkeztek.)

A dimenzióelmélet más dimenziófogalmakkal is dolgozik: a ČECH-féle — Ind X-szel jelölt — *nagy induktív dimenzióval* és a LEBESGUE-féle — dim X-szel jelölt — *lefedési dimenzióval* (csak az általános topológia körébe eső fogalmakat említjük).

A szeparábilis metrikus terek körében e háromféle dimenzió, egzisztenciáját és értékét illetően egyaránt egybeesik, s ez jelentős könnyebbséget jelentett a MENGER—URISZON-dimenzió elméletének felépítésénél. A MENGER—URISZON-dimenzió azonban, bár a szeparábilis metrikus terek vizsgálatánál általában előnyösebb akár a ČECH-féle akár a LEBESGUE-déle dimenziónál, ebből a körből kilépve szinte alig kezelhető, és még tetszőleges metrikus terekre sem ekvivalens az utóbbiakkal. Ez a körülmény szabta meg a természetes korlátait a dimenzióelmélet e klasszikus részének, amelynek legjobb összefoglalása W. HUREWICZ és H. WALLMAN [31] könyve (1941-ben jelent meg először); röviden és igen világosan tájékoztat róla ALEXITS GYÖRGY 1938-ban megjelent magyar nyelvű [4] ismertető cikke is. (Az első ilyen tárgyú monográfia MENGER 1928-ban megjelent [44] könyve volt).

Ind X és dim X azonban minden metrikus X térre ekvivalens, s a dimenzióelmélet újabb szakasza túlnyomóan a metrikus terekre alkalmazott nagy induktív és lefedési dimenzióval foglalkozik. Az idézett alaptételek közül is sikerült többet ilyen értelemben általánosítani és egészen új kutatási irányokat is követnek ebben a körben. Nem-metrizálható tereknél azonban újra igen nagy nehézségek jelentkeznek. Minderről legkönnyebben J. NAGATA nemrég megjelent [47] könyvéből, vagy több ismertető cikk közül pl. P. Sz. ALEKSZANDROV [2] dolgozatából lehet tájékozódni.

Az iránydimenzió vizsgálata túllépi a metrikus terek körét is, de a szokásos dimenziófogalmak közül még csak a MENGER—URISZON-dimenzióval hoztuk közvetlen kapcsolatba, mégpedig a szeparábilis metrikus terek körében (bár a (5.4) tétel bizonyítását HUREWITZ egyesítési tétele helyett pl. K. MORITA egyesítési tételére ([46] 22) alapozva azt nyerjük, hogy minden X véges iránydimenziójú normális T_1-térre ind $X \leq$ Dim X; részletesen l. a IV. fejezetben). Ezért a továbbiakban is csak a MENGER—URISZON-elméletre és a jól ismert HUREWICZ—WALLMAN-féle könyvre hivatkozunk.

Természetes hát az a — lényegében csak terminológiai — kérdés, hogy milyen „kötelező" tulajdonságok avatnak egy függvényt, amely a topologikus terek valamely családját a kardinális számok vagy a rendszámok összességébe képezi le, „dimenzióvá".

(0. 11) HUREWICZ és WALLMAN *szerint* ([31] 154) *egy ilyen függvény „megérdemli" a dimenzió nevet, ha*

(a) *topologikus invariáns,*

(b) *monoton, és*

(c) *megkülönbözteti a különböző euklidészi tereket.*

(A (c) követelményt az összes használatos dimenziófogalmak „túlteljesítik", amennyiben minden E_n euklidészi térhez éppen az n számot rendelik. Figyelemre méltó, hogy az említett szerzők felfogásában még az utóbbi nagyon természetes tulajdonság sem okvetlen tartozéka a „dimenziójelleg"-nek.)

E kritérium alapján tartjuk helyénvalónak az „iránydimenzió" elnevezést (Dim X monotonitását a 2. §-ban, Dim $E_n = n$-et pedig az 5. §-ban bizonyítjuk), annak ellenére, hogy az iránydimenzió értéke sok térnél különbözik a MENGER—URISZON-dimenzióétól. (Maga MENGER is hangsúlyozta több, akár a szeparábilis metrikus terek körében sem ekvivalens dimenziófogalom létjogosultságát, pl. [44], 76, 317). Az ind $X \neq$ Dim X esetre több példát mutatunk be a 2. §-ban. Megjegyezzük azonban, hogy szeparábilis metrikus X térnél e két dimenzió eltérése nem lehet „nagyon nagy": ind X és Dim X között az (5. 3. 1) aszimptotikus kapcsolat áll fenn.

Az iránydimenzió tulajdonságai sok formai analógiát mutatnak a MENGER—URISZON-dimenzióval, hatósugara azonban nagyobb: minden topologikus térnek van iránydimenziója ((1. 13) tétel) és minden kardinális szám iránydimenziója valamely térnek ((3. 3) tétel). Ez az általánosság, valamint egyes — a MENGER—URISZON-dimenzió megfelelő alaptételeivel analóg, de tetszőleges topologikus terekre, ill. ilyenek tetszőleges (nem okvetlenül véges) családjaira érvényes — tételek, pl. a (2. 6), (a) tétel (MENGER (0. 6) szorzattételének analogonja) reményt nyújtanak arra, hogy az iránydimenzió elmélete a szeparábilis metrikus tereken túl is jól kiépíthető lesz. (Igaz viszont, hogy HUREWICZ (0. 7) egyesítési tételének analogonját csak lényegesen erősebb megszorításokkal sikerül bebizonyítani (2. 7)-ben.)

A (8. 1) „1. beágyazási tétel" (TYIHONOV (8. 2) beágyazási tételének általánosítása) pl. az (1. 19)-ben definiált „gyengén rendes" T_0-terek osztályára vonatkozik, amelyről (8. 3)-ban kimutatjuk, hogy a TYIHONOV-terek osztályával azonos. (Az iránystruktúra fogalma tehát a teljesen reguláris T_0-terek fontos osztályának egy újabb teljes karakterizálását teszi lehetővé.) HUREWICZ (0. 8) kompaktifikációs tételének analogonja iránydimenzióra, a (8. 6) tétel, az (1. 20)-ban definiált „rendes" T_0-terek osztályára vonatkozik, amely a TYIHONOV-terek osztályának része, és magába foglalja az összes tökéletesen normális T_0-tereket, tehát az összes metrikus tereket is ((7. 4) és (7. 5) tétel). A (8. 4) „2. beágyazási tétel" szintén a rendes T_0-terekre vonatkozik. Ez a tétel TYIHONOV beágyazási tételének egy analogonja (e két tétel viszonyát a 9. §-ban elemezzük), amelyben az iránydimenzió — durván szólva — a topológiai súly szerepét veszi át.

Az iránydimenzió azonban — az imént vázolt általánossággal látszólag ellentmondásban — közelebb áll az euklidészi dimenzióhoz, mint a klasszikus dimenziófogalmak (amint ezt már a definíciója is sejteni engedi). A (10. 1) „3. beágyazási tétel" ui. MENGER és NÖBELING (0. 9) beágyazási tételének olyan analogonja, amelyben $2n+1$ helyett n áll. E tétel szolgáltatja dolgozatunk dimenzióelméleti részének a II. fejezet címében is jelzett főeredményét: egy szeparábilis metrikus X tér akkor és csak akkor altere egy E_n euklidészi térnek, ha $\mathrm{Dim}\, X \leqq n$ ((10. 8) tétel). Így tehát az iránydimenzióval nem csak az összes euklidészi terek altereinek összességét lehet karakterizálni (mint a MENGER—URISZON-dimenzióval, vö. (5. 4), 2°), hanem minden egyes euklidészi tér altereinek osztályát is:

Szeparábilis metrikus X tér iránydimenziója pontosan azt mutatja, hogy van-e, s ha igen, melyik a legkisebb euklidészi tér, amelybe X topologikusan beágyazható.

*

Az iránytér, ill. a topologikus iránytér fogalma a lineáris tér, ill. a gyenge topológiájú lokálisan konvex tér fogalmának általánosítása (11. és 13. §). Iránytérekben bevezetjük a „sík", „féltér", „támaszsík", „támaszpont" fogalmakat a megfelelő, lineáris terekben szokásos fogalmak általánosításaként ((11. 5)—(11. 12)). Bevezetünk három, az $\mathfrak{R}$ iránystruktúrából levezetett konvexitás-fogalmat: az erős $\mathfrak{R}$-konvexitás (12. 1), az $\mathfrak{R}$-konvexitás (12. 3) és a gyenge $\mathfrak{R}$-konvexitás (12. 7) fogalmát. Ha az utóbbi kettőt egy lineáris tér „természetes" vagy „algebrai" iránystruktúrájára ((11. 15), (11. 16)) alkalmazzuk, egyaránt a konvexitás közönséges fogalmát kapjuk ((12. 11) tétel). Rámutatunk arra, hogy a közönséges konvexitás egy lokálisan konvex tér „természetes" vagy „topológiai" iránystruktúrájából ((l. (13. 11)) is ugyanúgy származtatható, mint az alapul szolgáló lineáris tér — általában bővebb — természetes iránystruktúrájából ((13. 15) tétel); szűkebben fogalmazva: egy lokálisan konvex térben akkor is megállapítható, hogy mely halmazok konvexek, ha nem ismerjük a teljes lineáris struktúrát, azaz a tér (algebrai) konjugáltját, hanem csak a (topológiai) duálisát.

A 14. §-ban bevezetjük egy iránytér valamely részhalmaza „kvázi-$\mathfrak{R}$-belsejének" fogalmát ((14. 1)—(14. 3)), amelyre az extremális pont fogalmának 16. §-beli általánosításánál lesz szükségünk.

Egy lineáris tér bármely kételemű halmazának a tér természetes iránystruktúrájára vonatkoztatott kvázi-$\mathfrak{R}$-belseje a két pont által meghatározott nyílt egyenes szakasz ((14. 7) tétel), tetszőleges halmaz kvázi-$\mathfrak{R}$-belsejét pedig a (14. 5) képlet adja meg. Egy lokálisan konvex tér bármely véges algebrai dimenziójú részhalmazának a tér algebrai, ill. topológiai iránystruktúrájára vonatkoztatott kvázi-$\mathfrak{R}$-belseje ugyanaz ((14. 8) tétel).

A kvázi-$\mathfrak{R}$-belső pont fogalma lényegében az algebrai belső pont, ill. az intern pont (l. a (15. 1) definíciót) fogalmát pótolja általános irányterekben. E kapcsolat kimutatásának szenteljük a 15. §-t, s eredményül a (15. 6) tételt nyerjük: egy lineáris tér bármely, intern ponttal bíró konvex halmazának a tér természetes iránystruktúrájára vonatkoztatott kvázi-$\mathfrak{R}$-belseje egybeesik a halmaz intern pontjainak halmazával.

A fejezet fő feladatának a klasszikus KREIN—MILMAN-tételnek topologikus irányterekre való általánosítását tekintjük. (Az epizódjellegű 15. §-tól eltekintve az egész fejezet lényegében a (17. 2) tétel előkészítése.)

(0. 12) KREIN ÉS MILMAN TÉTELE. *Lokálisan konvex T_2-térben bármely kompakt, konvex halmaz egyben extremális pontjai halmazának zárt konvex burka* ([39], vagy [38], 335).

E célra a 16. §-ban az extremális pont fogalmának két különböző általánosítását vezetjük be irányterekre: az $\mathfrak{R}$-extremális pont és a gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pont fogalmát ((16. 1), (16. 3)). Kimutatjuk, hogy lokálisan konvex térben — a konvexitáshoz hasonlóan — az extremális pont közönséges fogalma is levezethető ($\mathfrak{R}$-extremális pontként és gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pontként egyaránt) pusztán a tér topologikus iránystruktúrájából, vagyis lényegében a duálisából ((16. 5) tétel).

Végül a 17. §-ban megfogalmazzuk és bebizonyítjuk a (0. 12) tétel (17. 1), (a) analogonját, ill. a vele ekvivalens (17. 2) tételt. Befejezésül pedig megmutatjuk, hogy a (17. 1), (a) tétel — több formai és fogalmazási eltérés ellenére — nemcsak analogonja, hanem csakugyan általánosítása (0. 12)-nek; pontosan: (17. 1), (a) implikálja a KREIN—MILMAN-tétel (17. 3) ekvivalens átfogalmazását.

*

A IV. fejezet vegyes tartalmú; fő feladatának az I., II. és III. fejezet anyagával kapcsolatos nyitott kérdések, problémák ismertetését tekintjük. Megvizsgáljuk, hogy milyen irányokban lehetne az eddigieket továbbfejleszteni és milyen alkalmazásokra kellene törekedni.

Ebben a keretben továbbá történeti és irodalmi megjegyzéseket teszünk, és néhány további tétellel, valamint példával is kiegészítjük a dolgozat anyagát.

Különös figyelmet fordítunk egy valós függvénytani témakörre (bizonyos függvényegyenlőtlenségekkel definiált függvényosztályok vizsgálata), amelyről kimutatjuk, hogy szoros kapcsolatba hozható az iránytér és a topologikus iránytér fogalmával.

I. FEJEZET

AZ IRÁNYDIMENZIÓ FOGALMÁNAK BEVEZETÉSE. AZ EUKLIDÉSZI TEREK IRÁNYDIMENZIÓI

1. §. Az alapfogalmak: irány, iránystruktúra, iránydimenzió

(1. 1) DEFINÍCIÓ. *Egy X tér egy iránya* nyílt G és zárt F halmazokból alkotott (G, F) rendezett párok olyan $\mathscr{R}$ rendszere, amelyre a következő *irányaxiómák teljesülnek*:

(1. 1. 1.) $(\emptyset, \emptyset)$, $(X, X) \in \mathscr{R}$;

(1. 1. 2) minden $(G, F) \in \mathscr{R}$ párra $G \subseteqq F$; ha pedig (G_1, F_1), $(G_2, F_2) \in \mathscr{R}$, akkor az $F_1 \subseteqq G_2$, $F_2 \subseteqq G_1$ inklúziók egyike teljesül;

(1. 1. 3) az $\mathscr{R}$-beli párok első tagjainak mindig $\mathscr{G}$-vel jelölt családja az egyesítésre nézve zárt, azaz

$$\bigcup \{G\colon G \in \mathscr{G}^*\} \in \mathscr{G} \qquad (\mathscr{G}^* \subset \mathscr{G}, \mathscr{G}^* \neq \emptyset);$$

(1. 1. 4) az $\mathscr{R}$-beli párok második tagjainak mindig $\mathscr{F}$-fel jelölt családja a metszésre nézve zárt, azaz

$$\bigcap \{F\colon F \in \mathscr{F}^*\} \in \mathscr{F} \qquad (\mathscr{F}^* \subset \mathscr{F}, \mathscr{F}^* \neq \emptyset).$$

(1. 1a) MEGJEGYZÉS. Egy $\mathscr{R}$ irány (G_1, F_1), (G_2, F_2) elemeit akkor és csak akkor tekintjük különbözőknek, ha halmazelméleti értelemben azok, vagyis ha a $G_1 \neq G_2$, $F_1 \neq F_2$ egyenlőtlenségek egyike fennáll, függetlenül a formai (jelölésbeli) különbségektől. Előfordul majd pl., hogy valamely t paraméter különböző értékeihez ugyanaz a (G_t, F_t) pár tartozik; ilyenkor a megfelelő ekvivalencia-osztályok egy-egy reprezentánsából alkotott halmazt értjük $\mathscr{R}$-en. Egyedüli kivétel ez alól a (2. 7) tétel bizonyítása.

(1. 2) JELÖLÉSEK. Valamely $\mathscr{R}$ irányhoz tartozó $\mathscr{G}$ és $\mathscr{F}$ családokat egymásra, ill. az $\mathscr{R}$-re vonatkoztatva a

$$\mathscr{G}(\mathscr{R}; \mathscr{F}), \ \mathscr{F}(\mathscr{R}; \mathscr{G}), \ \mathscr{G}(\mathscr{R}), \ \mathscr{F}(\mathscr{R})$$

szimbólumokkal is fogjuk jelölni *(az első kettőben egyértelműség esetén az $\mathscr{R}$ index el is hagyható)*. Ugyanezen szimbólumok szolgálnak majd valamely $\mathscr{R}$ irányhoz tartozó $\mathscr{G}(\mathscr{R})$, $\mathscr{F}(\mathscr{R})$ családok egymással kapcsolatos tetszőleges részcsaládjainak (amelyeket pl. egy $\mathscr{R}^* \subset \mathscr{R}$ részhalmaz kiválasztásával nyerünk) jelölésére is, tekintet nélkül arra, hogy az utóbbiak teljesítik-e az összes irányaxiómákat. (Az (1. 1. 2) axiómát természetesen egy irány bármely részhalmaza is teljesíti.) Részletesen:

$$\mathscr{F}(\mathscr{R}; \mathscr{G}^*) = \{F\colon F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}), \text{ létezik egy } G \in \mathscr{G}^*, \text{ amelyre } (G, F) \in \mathscr{R}\} \quad (\mathscr{G}^* \subseteqq \mathscr{G}(\mathscr{R})),$$

$$\mathscr{G}(\mathscr{R}; \mathscr{F}^*) = \{G\colon G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}), \text{ létezik egy } F \in \mathscr{F}^*, \text{ amelyre } (G, F) \in \mathscr{R} \quad (\mathscr{F}^* \subseteqq \mathscr{F}(\mathscr{R})),$$

$$\mathscr{F}(\mathscr{R}^*) = \{F\colon F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}), \text{ létezik egy } G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}), \text{ amelyre } (G, F) \in \mathscr{R}^*\} \quad (\mathscr{R}^* \subseteqq \mathscr{R}),$$

$$\mathscr{G}(\mathscr{R}^*) = \{G\colon G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}), \text{ létezik egy } F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}), \text{ amelyre } (G, F) \in \mathscr{R}^*\} \quad (\mathscr{R}^* \subseteqq \mathscr{R}).$$

(1. 3) DEFINÍCIÓ. Egy X tér valamely $\mathcal{R}$ irányára vonatkoztatva a $\mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R})$ halmazcsalád elemeit, továbbá ezek komplementumait *féltereknek* nevezzük; közöttük megkülönböztetünk *alsó és felső féltereket*, továbbá *nyílt és zárt féltereket*, az alábbiak szerint:

féltér	nyílt	zárt
alsó	G	F
felső	$X \setminus F$	$X \setminus G$

$(G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),\ F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})).$

(Az elnevezéssel kapcsolatban vö. (3. 1)-gyel.)

(1. 4) MEGJEGYZÉS. Mivel a „nyílt féltér", „zárt féltér" kifejezések esetleg félreérthetők (ha pl. valamely féltér nyílt halmaz, de nem „nyílt féltér" az (1. 3) értelemben, más szóval az

$$(\mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \mathcal{G}(\mathcal{R})) \cup (\{X \setminus G\colon G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})\} \setminus \{X \setminus F\colon F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})\})$$

családnak egy nyílt-zárt eleme), megjegyezzük, hogy szükség esetén *bármely $\mathcal{R}$ irány kibővíthető úgy, hogy minden olyan féltér, amely nyílt, ill. zárt halmaz, az* (1. 3) *értelemben nyílt féltér, ill. zárt féltér legyen.*

Ha ui. $(G, F) \in \mathcal{R}$ és F nyílt halmaz, de $F \notin \mathcal{G}(\mathcal{R})$, ill. G zárt halmaz, de $G \notin \mathcal{F}(\mathcal{R})$, akkor $\mathcal{R}$-hez csatolhatjuk az (F, F), ill. (G, G) párt. (A két eset egyszerre is előfordulhat.)

Könnyen belátható, hogy egy $\mathcal{R}$ iránynak e kiegészítései függetlenek egymástól, és a kibővített rendszer szintén irány.

(1. 5) TÉTEL. *Egy $\mathcal{R}$ irányban szereplő bármely alsó féltér az $\mathcal{R}$-nek legfeljebb két különböző elemében fordul elő.*

Bizonyítás. Ha (G, F_1), (G, F_2), $(G, F_3) \in \mathcal{R}$, akkor az (1. 1. 2) irányaxióma második része szerint van olyan $i, j \in \{1, 2, 3\}$ indexpár, hogy $F_i \subseteqq G$ és $F_j \supseteqq G$, és ezért — (1. 1. 2) első része következtében — $F_i = G = F_j$.

(1. 6) JELÖLÉSEK. Azt a tényt, hogy $(G, F) \in \mathcal{R}$, a $G = G(\mathcal{R}; F)$, vagy az $F = F(\mathcal{R}; G)$ szimbólummal is ki fogjuk fejezni. (1. 5) szerint a $G(\mathcal{R}; F)$ és $F(\mathcal{R}; G)$ szimbólumok nem okvetlenül egyértelműek, de legfeljebb kétértelműek. Jelöljük $\underline{G}(\mathcal{R}; F)$-fel, ill. $\overline{G}(\mathcal{R}; F)$-fel a szűkebb, ill. bővebb $G(\mathcal{R}; F)$ halmazt és $\underline{F}(\mathcal{R}; G)$-vel ill. $\overline{F}(\mathcal{R}; G)$-vel a szűkebb, ill. bővebb $F(\mathcal{R}; G)$ halmazt. *Egyetlen $\mathcal{R}$ irány szereplése esetén az $\mathcal{R}$ indexet elhagyjuk.* Ha egy állítást $G(F)$-re, ill. $F(G)$-re mondunk ki, az $\underline{G}(F)$-re és $\overline{G}(F)$-re, ill. $\underline{F}(G)$-re és $\overline{F}(G)$-re egyaránt vonatkozik.

Minden esetben

$$G \subseteqq G^- \subseteqq \underline{F}(G) \subseteqq \overline{F}(G) \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})),$$

$$\underline{G}(F) \subseteqq \overline{G}(F) \subseteqq F^\circ \subseteqq F \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})),$$

és ezen inklúziók bármelyike lehet egyenlőség.

(1. 7) TÉTEL. *Minden* $\mathscr{R}$ *irányra*

(1. 7. 1) $\underline{F}(G)\subset\bar{F}(G) \Rightarrow G=\underline{F}(G) \quad (G\in\mathscr{G}(\mathscr{R})),$

(1. 7. 2) $\underline{G}(F)\subset\bar{G}(F) \Rightarrow F=\bar{G}(F) \quad (F\in\mathscr{F}(\mathscr{R})),$

(1. 7. 3) $G_1\subset G_2 \Rightarrow F(G_1)\subseteqq G_2 \quad (G_1, G_2\in\mathscr{G}(\mathscr{R})),$

(1. 7. 4) $F_1\subset F_2 \Rightarrow F_1\subseteqq G(F_2) \quad (F_1, F_2\in\mathscr{F}(\mathscr{R})).$

Mindez az (1. 1. 2) irányaxióma közvetlen következménye.

(1. 8) TÉTEL. *Ha* $\mathscr{R}^*$ *egy* $\mathscr{R}$ *irány nem-üres valódi részhalmaza, és* $\mathscr{F}(\mathscr{R}^*)$*-nak nincs legbővebb, ill.* $\mathscr{G}(\mathscr{R}^*)$*-nak nincs legszűkebb tagja, akkor*

$$\bigcup\{F\colon F\in\mathscr{F}(\mathscr{R}^*)\}=\bigcup\{G\colon G\in\mathscr{G}(\mathscr{R}^*)\}\in\mathscr{G}(\mathscr{R}),$$

ill.

$$\bigcap\{G\colon G\in\mathscr{G}(\mathscr{R}^*)\}=\bigcap\{F\colon F\in\mathscr{F}(\mathscr{R}^*)\}\in\mathscr{F}(\mathscr{R}),$$

tehát az alsó félterek $\mathscr{G}(\mathscr{R})\cup\mathscr{F}(\mathscr{R})$ *családja tetszőlegesen sok halmaz egyesítésének és metszésének műveletére nézve egyaránt zárt, s így ugyanez érvényes a felső félterek családjára is.*

Ez közvetlen következménye az (1. 1. 2) és az (1. 1. 3) ill. (1. 1. 4) irányaxiómáknak.

(1. 9) TÉTEL. *Bármely* X *tér bármely* $\mathscr{R}$ *irányára:*

(1. 9. 1) *Az alsó félterek* $\mathscr{G}(\mathscr{R})\cup\mathscr{F}(\mathscr{R})$ *családja, és ezáltal a* $\mathscr{G}(\mathscr{R})$, $\mathscr{F}(\mathscr{R})$ *családok is a* $\subset$ *relációval rendezve vannak.*

Ez (1. 1. 2) következménye.

(1. 9. 2) *Az* $\mathscr{R}$ *halmaz a*

$$(G_1, F_1)\prec(G_2, F_2) \quad ((G_1, F_1), (G_2, F_2)\in\mathscr{R},\ F_1\subseteqq G_2)$$

relációval rendezve van.

Ez is (1. 1. 2)-ből következik. $\mathscr{R}$ bármely két eleme között fennáll ui. valamelyik irányban a $\prec$ viszony, és ez a reláció nyilvánvalóan tranzitív; ha pedig $(G_1, F_1)\prec$ $\prec(G_2, F_2)$ és $(G_2, F_2)\prec(G_1, F_1)$, akkor $G_1\subseteqq F_1\subseteqq G_2\subseteqq F_2\subseteqq G_1$, tehát $(G_1, F_1)=$ $=(G_2, F_2)$.

(1. 9. 3) *A* $\mathscr{G}(\mathscr{R})\cup\mathscr{F}(\mathscr{R})$, $\mathscr{G}(\mathscr{R})$, $\mathscr{F}(\mathscr{R})$ *családok mindegyike, ill. az* $\mathscr{R}$ *halmaz az* (1. 9. 1), *ill.* (1. 9. 2) *szerinti rendezésben hézagmentes.*

Ez (1. 5)-ből és (1. 8)-ból következik.

(1. 9. 4) MEGJEGYZÉSEK.

1° *A továbbiakban egy féltércsalád, ill. egy* $\mathscr{R}$ *rendszer rendezésén mindig az* (1. 9. 1), *ill.* (1. 9. 2) *szerinti természetes rendezést értjük.*

2° Egy X tér minden $\mathscr{R}$ irányának (mint rendezett halmaznak) nyilván $(\emptyset, \emptyset)$ az első és (X, X) az utolsó eleme.

3° Mivel egy $\mathscr{R}$ irány rendezése csak (1. 1. 2)-től függ, minden nem-üres $\mathscr{R}^*\subset\mathscr{R}$ részhalmazt ismét az (1. 1. 2) szerinti, vagyis az $\mathscr{R}$-től örökölt rendezéssel ellátottnak tekintünk.

(1. 10) TÉTEL. *Bármely* X *tér bármely (rendezett) iránya, a rendezés-topológiával ellátva, kompakt Hausdorff-tér.*

Bizonyítás. Minden rendezés-topologikus tér T_2-tér, és amennyiben

(a) rendezés-teljes (azaz minden felülről korlátos részhalmazának van szuprémuma), és

(b) van első és utolsó eleme,

akkor kompakt is (pl. [37], 81).

Az (a), ill. (b) feltétel (19. 4), 2°, ill. (1. 9. 3) szerint teljesül.

(1. 11) DEFINÍCIÓ. Egy X tér olyan $\mathscr{R}$ irányainak nem-üres $\mathfrak{R}$ rendszerét, amelyekben szereplő összes nyílt félterek a topológia egy szubbázisát szolgáltatják, *a tér egy iránystruktúrájának* (rövidítve: IS) nevezzük.

(1. 11a) MEGJEGYZÉSEK. 1° Egy tér $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ irányait akkor és csak akkor tekintjük különbözőnek, ha mint halmazok különbözők, függetlenül minden egyéb (jelölési, indexezési, származtatási) különbségtől (vö. az (1. 1) utáni megjegyzést); egy iránystruktúra számosságának fogalmát is ilyen értelemben használjuk. Egyetlen — elkerülhetetlen — kivétel a (2. 7) tétel bizonyítása.

2° Annak feltétele, hogy egy X tér irányainak valamely

$$\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_k \colon k = 1, 2, \ldots, n\}$$

véges rendszere az X térnek IS-ja legyen, így is fogalmazható: minden $x \in X$ ponthoz és annak minden U környezetéhez találhatók olyan

$$G_k \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_k),\ F_k \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

félterek, amelyekre

(1. 11. 1) $$x \in \bigcap_{k=1}^{n} (G_k \setminus F_k) \subseteqq U.$$

Ha ui. ebben a metszetben nem minden $\mathfrak{R}$-beli irány volna képviselve, akkor minden hiányzóból szerepeltethetjük az $X \setminus \emptyset$ tényezőt; (1. 9. 1) és (1. 8) szerint pedig megállapodhatunk abban, hogy minden $\mathscr{R}_k$ irányból *csak egy* $G_k \setminus F_k$ alakú tényező szerepeljen.

(1. 12) *Egy X tér minden nyílt és minden zárt halmaza féltér X valamely irányára vonatkozóan;* a $\emptyset$ és X halmazokra pl.

(1. 12. 1) $$\mathscr{R}_X = \{(\emptyset, \emptyset), (X, X)\}$$

egy ilyen irány, bármely nemtriviális nyílt G, ill. zárt F halmaz pedig pl. az

(1. 12. 2) $$\mathscr{R}_G = \{(\emptyset, \emptyset), (G, G^-), (X, X)\},$$

ill.

(1. 12. 3) $$\mathscr{R}_F = \{(\emptyset, \emptyset), (F^\circ, F), (X, X)\}$$

nyilvánvaló irányokra nézve féltér. Ebből könnyen következik:

(1. 13) TÉTEL. *Minden térnek van iránystruktúrája.*

Ha ui. $\mathfrak{G}$ egy X tér összes nem-üres nyílt halmazainak családja (vagy akár csak egy bázisa), akkor az (1. 12. 2) jelöléssel

(1. 13. 1) $$\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_G \colon G \in \mathfrak{G}\}$$

a térnek egy IS-ja.

A kardinális számok nagyság szerinti jólrendezettsége alapján minden tér IS-i között van minimális számosságú, s innen származnak a következő — az I. és a II. fejezet alapjául szolgáló — definíciók:

(1. 14) DEFINÍCIÓ. (a) Egy X tér — $\mathrm{Dim}\, X$-szel jelölt — *iránydimenziója:* iránystruktúrái számosságainak minimuma;
(b) $\mathrm{Dim}\, \emptyset = 0$.
Ez a definíció minden X térhez egyértelműen hozzárendel egy $\mathrm{Dim}\, X \geqq 1$ kardinális számot.*

(1. 15) DEFINÍCIÓ. Egy X tér minden olyan $\mathfrak{R}$ IS-ját, amelyre $\overline{\overline{\mathfrak{R}}} = \mathrm{Dim}\, X$, X *minimális iránystruktúrájának* nevezzük.
Szükségünk lesz az irány fogalmának következő élesítésére is:

(1. 16) DEFINÍCIÓ. Egy X tér valamely $\mathscr{R}$ iránya *rendes irány,* ha

(1. 16. 1) $$\bigcup\{F \setminus G \colon (G, F) \in \mathscr{R}\} = X.$$

(1. 17) DEFINÍCIÓ. Egy X tér valamely $\mathfrak{R}$ IS-ja *rendes iránystruktúra,* ha minden $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ irány rendes.
(1. 18) A rendes irányokat a 6. §-ban vizsgáljuk meg közelebbről. Itt annyit jegyzünk meg, hogy
(a) egy $\mathscr{R}$ iránynak (1. 4) értelmében való kibővítése az irány rendességét, ill. nem-rendességét nem változtatja meg;
(b) minden X térnek van rendes iránya; ilyen pl. az

(1. 18. 1) $$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, X), (X, X)\}$$

irány;
(c) rendes IS-ja azonban nem minden térnek van (pl. T_0-térnek akkor és csak akkor, ha teljesen reguláris, l. a (8. 3) tételt), ezért szükséges a következő

(1. 19) DEFINÍCIÓ. Egy tér *gyengén rendes,* ha van rendes iránystruktúrája.
Kérdéses továbbá, hogy egy gyengén rendes tér minimális IS-i között is van-e rendes:

(1. 20) DEFINÍCIÓ. Egy tér *rendes,* ha van rendes minimális iránystruktúrája.

2. §. Az iránydimenzió monotonitása. Egy szorzat- és egy egyesítési tétel

E paragrafusban adott terek adott IS-iból az alterek, szorzatterek, ill. egyesítések számára természetes módon adódó IS-kkal foglalkozunk.

(2. 1) DEFINÍCIÓ. Legyen $f \colon Y \to X$ egy nem-üres halmaz tetszőleges leképezése egy X térbe. Valamely X-beli *$\mathscr{R}$ irány, ill. $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_\alpha \colon \alpha \in A\}$ iránystruktúra f-re vonat-*

* $\mathrm{Dim}\, X$ definícióját módosíthatnánk úgy, hogy bizonyos (nem-üres) terek — pl. az indiszkrét terek, s köztük a 0-dimenziós euklidészi tér — iránydimenziója is 0 legyen. Ez egyrészt erősítené az analógiát a MENGER—URISZON-dimenzióval, és lehetővé tenné pl. a (10. 1) beágyazási tétel harmonikus (bár nem lényeges) kiegészítését; másrészt azonban nehézségeket okozna egyes tételek (pl. a (2. 7) egyesítési tétel) megfogalmazásánál.

kozó inverz képének az

(2. 1. 1) $$\mathscr{R}' = \{(f^{-1}[G], f^{-1}[F]) : (G, F) \in \mathscr{R}\},$$

ill.

(2. 1. 2) $$\mathfrak{R}' = \{\mathscr{R}'_\alpha : \alpha \in A\}$$

rendszert nevezzük.

MEGJEGYZÉS. Előfordulhat, hogy $\mathscr{R}$, ill. $\mathfrak{R}$ több különböző elemének ugyanazon elem felel meg $\mathscr{R}'$-ben, ill. $\mathfrak{R}'$-ben. Ekkor az (1. 1a) megjegyzés értelmében mindig hallgatólagosan feltesszük, hogy az egybeeső elemeket egyetlen reprezentánsuk képviseli.

(2. 2) TÉTEL. *Ha X, Y tetszőleges terek és f: $Y \to X$ folytonos leképezés, akkor minden X-beli (rendes) $\mathscr{R}$ irány $\mathscr{R}'$ inverz képe Y-ban (rendes) irány.*

Bizonyítás. Az
$$f^{-1}[G] \ (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R})),\ f^{-1}[F] \ (F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}))$$
halmazok f folytonossága miatt nyíltak, ill. zártak, az (1. 1. 1)—(1. 1. 4) irányaxiómák pedig még tetszőleges leképezésnél is nyilván teljesülnek. Hasonlóan, ha $\mathscr{R}$ rendes,
$$\bigcup\{f^{-1}[F] \setminus f^{-1}[G] : (G, F) \in \mathscr{R}\} = \bigcup\{f^{-1}[F \setminus G] : (G, F) \in \mathscr{R}\} =$$
$$= f^{-1}[\bigcup\{F \setminus G : (G, F) \in \mathscr{R}\}] = f^{-1}[X] = Y,$$
azaz $\mathscr{R}'$ is rendes.

A (2. 2) tétel feltételei mellett egy X-beli iránystruktúra inverz képe nem okvetlenül IS-ja Y-nak. Ennek biztosítására a folytonosságnál erősebb feltételre van szükség:

(2. 3) TÉTEL. *Legyen X tetszőleges tér. Ha egy nem-üres Y halmazt egy tetszőleges f: $Y \to X$ leképezésből származó inverzkép-topológiával látunk el — vagyis Y egy részhalmaza akkor és csak akkor nyílt, ha valamely X-beli nyílt halmaz inverz képe — akkor minden X-beli (rendes) $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_\alpha : \alpha \in A\}$ IS $\mathfrak{R}'$ inverz képe (rendes) IS-ja az Y térnek.*

Bizonyítás. 1° Az $\mathfrak{R}'$ rendszer $\mathscr{R}'_\alpha$ elemei (2. 2) szerint — $\mathfrak{R}$ rendessége esetén rendes — irányok az Y térben.

2° Ha $y \in Y$ tetszőleges pont és V y-nak tetszőleges nyílt környezete, vagyis $V = f^{-1}[U]$ valamely $U \subseteq X$ nyílt halmazra, akkor létezik olyan $A^* \subseteq A$ véges halmaz, és vannak olyan
$$G_\alpha \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha),\ F_\alpha \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha) \qquad (\alpha \in A^*)$$
félterek, hogy
$$f(y) \in \bigcap\{G_\alpha \setminus F_\alpha : \alpha \in A^*\} \subseteq U,$$
tehát
$$y \in \bigcap\{f^{-1}[G_\alpha] \setminus f^{-1}[F_\alpha] : \alpha \in A^*\} \subseteq V;$$
$\mathfrak{R}'$ tehát IS-ja Y-nak.

(2. 4) DEFINÍCIÓ. Egy X tér valamely $\mathscr{R}$ iránya, ill. $\mathfrak{R}$ IS-ja által egy nem-üres *X' altérben indukált iránynak, ill. IS-nak* az $\mathscr{R}$-nek, ill. az $\mathfrak{R}$-nek az injektív leképe-

zésre vonatkozó $\mathcal{R}'$, ill. $\mathfrak{R}'$ inverz képét nevezzük, vagyis

$$\mathcal{R}' = \{(G \cap X', F \cap X') \colon (G, F) \in \mathcal{R}\},$$

$$\mathfrak{R}' = \{\mathcal{R}' \colon \mathcal{R} \in \mathfrak{R}\}.$$

Az injektív leképezésből származó inverzkép-topológia éppen az X' altér (relatív) topológiája, s ennek alapján következnek a (2. 2) tételből az alterekre vonatkozó állítások:

(2. 5) TÉTEL. *Legyen X' egy X tér tetszőleges nem-üres altere.*

(a) AZ IRÁNYDIMENZIÓ MONOTONITÁSA: $\mathrm{Dim}\, X' \leqq \mathrm{Dim}\, X$.

(b) *Ha az X tér gyengén rendes, X' is az.*

(c) *Ha az X tér rendes és* $\mathrm{Dim}\, X = 1$, *akkor X' is ilyen tulajdonságú.*

Bizonyítás. 1° Ha $\mathfrak{R}$ az X térnek egy minimális IS-ja, akkor (2. 3) szerint

$$\mathrm{Dim}\, X' \leqq \overline{\overline{\mathfrak{R}'}} \leqq \overline{\overline{\mathfrak{R}}} = \mathrm{Dim}\, X,$$

tehát (a) teljesül. (Megjegyezzük, hogy több $\mathfrak{R}$-beli irány által indukált irányok esetleges egybeesése következtében $\overline{\overline{\mathfrak{R}'}} < \overline{\overline{\mathfrak{R}}}$ is előfordulhat.)

2° (b), ill. (c) bizonyításához elegendő a (2. 3) tételt az X tér egy rendes, ill. rendes minimális IS-ja által X'-ben indukált IS-ra alkalmazni, továbbá (c)-nél hivatkozni arra, hogy nem-üres tér iránydimenziója definíció szerint legalább 1.

A következő két — lényegében együtt bizonyítható — tétel egyike, a (2. 6), (a) tétel, a MENGER—URISZON-elmélet (0. 6) szorzattételének analogonja. Megfogalmazása — mivel a koordinátaterek számát és azok minőségét illetően egyaránt mentes minden megszorítástól — általánosabb, mint a klasszikus szorzattételé, vagy akár az utóbbi különböző ismert általánosításaié.

(2. 6) SZORZATTÉTELEK. (a) *Terek tetszőleges nem-üres $\{X_\beta \colon \beta \in B\}$ családjának*

$$X = \times\{X_\beta \colon \beta \in B\}$$

topologikus szorzatára

(2. 6. 1) $$\mathrm{Dim}\, X \leqq \Sigma\{\mathrm{Dim}\, X_\beta \colon \beta \in B\}.$$

(b) *Gyengén rendes terek tetszőleges nem-üres családjának topologikus szorzata szintén gyengén rendes tér.*

Bizonyítás. 1° Legyen

$$\mathfrak{R}_\beta = \{\mathcal{R}_{\beta,\alpha} \colon \alpha \in A_\beta\} \qquad (\beta \in B)$$

a megfelelő X_β koordinátaterek egy-egy IS-ja, f_β az X szorzattér vetülete a megfelelő X_β térre és

(2. 6. 2) $$E' = f_\beta^{-1}[E] = \{x \in X \colon x_\beta \in E\} \qquad (E \subseteqq X_\beta,\ \beta \in B),$$

ahol x_β az $x \in X$ pontnak X_β-beli koordinátáját jelenti.

Mivel az f_β leképezése minden $\beta \in B$-re folytonos, a (2. 2) tétel szerint minden $\mathcal{R}_{\beta,\alpha}$ $(\alpha \in A_\beta,\ \beta \in B)$ irány $\mathcal{R}'_{\beta,\alpha}$ inverz képe a megfelelő f_β-ra vonatkozóan az X tér egy iránya.

2° Bebizonyítjuk, hogy ezen irányok

(2. 6. 3) $$\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}'_{\beta,\alpha}\colon \alpha\in A_\beta,\ \beta\in B\}$$

halmaza IS-ja X-nek.

Legyen $x\in X$ és U x-nek egy környezete. Legyen továbbá $B^*\subseteqq B$ olyan véges, nem-üres halmaz és legyenek

$$U_\beta\subseteqq X_\beta \qquad (\beta\in B^*)$$

olyan nyílt halmazok, hogy — a (2. 6. 2) jelöléssel —

(2. 6. 4) $$x\in\bigcap\{U'_\beta\colon \beta\in B^*\}\subseteqq U.$$

Legyenek továbbá $A^*_\beta\subseteqq A_\beta$ olyan véges nem-üres halmazok,

$$\mathscr{R}_{\beta,\alpha}\in\mathfrak{R}_\beta \qquad (\alpha\in A^*_\beta,\ \beta\in B^*)$$

olyan irányok és

$$G_{\beta,\alpha}\in\mathscr{G}(\mathscr{R}_{\beta,\alpha}),\ F_{\beta,\alpha}\in\mathscr{F}(\mathscr{R}_{\beta,\alpha}) \qquad (\alpha\in A^*_\beta,\ \beta\in B^*)$$

olyan félterek, hogy

(2. 6. 5) $$x_\beta\in\bigcap\{G_{\beta,\alpha}\setminus F_{\beta,\alpha}\colon \alpha\in A^*_\beta\}\subseteqq U_\beta \qquad (\beta\in B^*).$$

Ekkor (2. 6. 4) és (2. 6. 5) szerint

$$x\in\bigcap\{(G_{\beta,\alpha}\setminus F_{\beta,\alpha})'\colon \alpha\in A^*_\beta,\ \beta\in B^*\}=\bigcap\{G'_{\beta,\alpha}\setminus F'_{\beta,\alpha}\colon \alpha\in A^*_\beta,\ \beta\in B^*\}\subseteqq U,$$

ahol

$$G'_{\beta,\alpha}\in\mathscr{G}(\mathscr{R}'_{\beta,\alpha}),\quad F'_{\beta,\alpha}\in\mathscr{F}(\mathscr{R}'_{\beta,\alpha}) \qquad (\alpha\in A^*_\beta,\ \beta\in B^*),$$

tehát a (2. 6. 3) rendszer valóban IS-ja X-nek, qu.e.d.

3° Az (a) tétel bizonyítására tegyük fel, hogy minden $\mathfrak{R}_\beta$ *minimális* IS-ja a megfelelő X_β-nak, azaz

$$\overline{\overline{\mathfrak{R}}}_\beta=\operatorname{Dim}X_\beta \qquad (\beta\in B).$$

Ekkor, állításunknak megfelelően,

$$\operatorname{Dim}X\leqq\overline{\overline{\mathfrak{R}}}\leqq\sum\{\overline{\overline{\mathfrak{R}}}_\beta\colon \beta\in B\}=\sum\{\operatorname{Dim}X_\beta\colon \beta\in B\}.$$

4° A (b) tétel bizonyítására elég belátni, hogy amennyiben minden $\mathfrak{R}_\beta$ *rendes* IS-ja a megfelelő X_β-nak, $\mathfrak{R}$ is rendes IS-ja X-nek, s ez azonnal következik a rendesség (1. 16. 1) definíciójából és a triviális

$$(M\setminus N)'=M'\setminus N' \qquad (M,N\subseteqq X_\beta,\ \beta\in B)$$

azonosságból.

A következő tétel HUREWICZ (0. 7) egyesítési tételével analóg. Itt viszont sajnos lényegesen erősebb feltételeknek kell alávetni az összeadandókat, mint a példaképül szolgáló klasszikus tételben:

(2. 7) EGYESÍTÉSI TÉTEL. *Ha* $\{X_k\colon k=1,2,\dots\}$ *egy* X *tér nyílt-zárt halmazainak egy megszámlálható családja, és*

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k,$$

akkor

$$\operatorname{Dim}X=\sup\{\operatorname{Dim}X_k\colon k=1,2,\dots\}.$$

Bizonyítás. Legyen A olyan halmaz, amelyre

$$\overline{\overline{A}} = \sup \{\mathrm{Dim}\, X_k : k = 1, 2, \ldots\},$$

továbbá

$$\mathfrak{R}_k = \{\mathscr{R}_{k,\alpha} : \alpha \in A\} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

a megfelelő X_k terek egy-egy IS-ja. (Itt kivételesen megengedjük az (1. 1a), (1. 11a) megállapodásokkal szemben, hogy valamely k-ra az $\mathscr{R}_{k,\alpha}$ irányok között, továbbá valamely k, α párra $\mathscr{R}_{k,\alpha}$ elemei között csupán az indexezéssel megkülönböztetett egyenlők is szerepeljenek.) Az

$$X_0 = \emptyset,$$

$$E' = E \cup \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} X_i \right)$$

$$\left(E \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_{k,\alpha}) \cup \mathscr{F}(\mathscr{R}_{k,\alpha});\ k = 1, 2, \ldots;\ \alpha \in A \right)$$

jelölésekkel az

$$\mathscr{R}_\alpha = \left\{ (G', F') : (G, F) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{R}_{k,\alpha} \right\} \cup \{(X, X)\} \qquad (\alpha \in A)$$

rendszerek az X tér irányaivá válnak (az irányaxiómák nyilvánvalóan teljesülnek).

Legyen most $x \in X$ és U az x pontnak egy környezete. Legyen továbbá

(2. 7. 1) $$k_x = \min \{k : x \in X_k\}.$$

Legyen $A^* \subseteqq A$ olyan véges nem-üres halmaz és legyenek

$$G_\alpha \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_{k_x,\alpha}),\ F_\alpha \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_{k_x,\alpha}) \qquad (\alpha \in A^*)$$

olyan félterek, hogy

(2. 7. 2) $$x \in \bigcap_{\alpha \in A^*} (G_\alpha \setminus F_\alpha) \subseteqq U \cap X_{k_x}.$$

Mivel (2. 7. 1) szerint $x \notin \bigcup_{i=0}^{k_x - 1} X_i$, (2. 7. 2)-ből

$$x \in \bigcap_{\alpha \in A^*} (G'_\alpha \setminus F'_\alpha) \subseteqq \bigcap_{\alpha \in A^*} (G_\alpha \setminus F_\alpha) \subseteqq U$$

következik, ahol

$$G'_\alpha \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha),\ F'_\alpha \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha) \qquad (\alpha \in A^*).$$

Az X térnek tehát

$$\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_\alpha : \alpha \in A\}$$

egy IS-ja, és $\mathrm{Dim}\, X \leqq \overline{\overline{A}}$. Mivel pedig

$$\mathrm{Dim}\, X \geqq \mathrm{Dim}\, X_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

miatt $\mathrm{Dim}\, X \geqq \overline{\overline{A}}$, végül is $\mathrm{Dim}\, X = \overline{\overline{A}}$ következik, qu.e.d.

3. §. Vegyes tételek és példák

(3. 1) *Egy topologikus tér iránystruktúrájának fogalma az euklidészi terek Descartes-koordinátastruktúrájának általánosítása.* Ha ui. n természetes szám és

$$E_n = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \colon -\infty < x^{(i)} < \infty \ (i = 1, 2, \dots, n)\},$$

$$(3.\ 1.\ 1) \qquad \begin{matrix} G_{i,t} = \{x \colon x^{(i)} < t\} \\ F_{i,t} = \{x \colon x^{(i)} \leqq t\} \end{matrix} \qquad (-\infty < t < \infty,\ i = 1, 2, \dots, n),$$

akkor minden

$$\mathscr{R}_i = \{(\emptyset, \emptyset)\} \cup \{(G_{i,t}, F_{i,t}) \colon -\infty < t < \infty\} \cup \{(E_n, E_n)\}$$

halmaz egy (rendes) iránya, az

$$(3.\ 1.\ 2) \qquad \mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_i \colon i = 1, 2, \dots, n\}$$

rendszer pedig egy rendes IS-ja az E_n euklidészi térnek. Az E_n eme „szokásos" iránystruktúrájában szereplő félterek — az üres halmaz és az egész tér kivételével — megegyeznek a szokásosan féltérnek nevezett halmazokkal (s ez indokolja az (1. 3)-ban bevezetett „féltér" elnevezést); az (1. 11. 1)-beli véges metszetek pedig éppen az E_n tér nyílt intervallumainak felelnek meg.

Nyilvánvaló tehát, hogy

$$(3.\ 1.\ 3) \qquad \operatorname{Dim} E_n \leqq n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

és természetesen $\operatorname{Dim} E_1 = 1$; azt az eléggé kézenfekvő sejtést, hogy minden n-re $\operatorname{Dim} E_n = n$ (más szóval, hogy minden E_n szokásos IS-ja minimális IS) az 5. §-ban igazoljuk (az $n = 2$ esetre (2. 5), 1°-ben külön bizonyítást is adunk).

(3. 2) TÉTEL. *Minden X térre* $\operatorname{Dim} X \leqq \tau(X)$.

A bizonyításhoz elegendő az (1. 13. 1) példát figyelembe venni.

Így például minden megszámlálható bázisú X térre $\operatorname{Dim} X \leqq \aleph_0$. Ismét kézenfekvő a sejtés, hogy a Hilbert-tér — amely univerzális tere az összes szeparábilis metrikus tereknek, tehát az összes euklidészi tereknek is — iránydimenziója $\aleph_0$; ezt (5. 2)-ben igazoljuk.

(3. 3) TÉTEL. *Bármely $\mathfrak{a} > 0$ kardinális számhoz található olyan X tér, amelyre* $\operatorname{Dim} X = \mathfrak{a}$.

Bizonyítás. 1° Véges $\mathfrak{a}$-ra az (5. 1) tétel igazolni fogja állításunkat, azonban már itt is bemutathatunk egy egyszerű példát.

Legyen n egy természetes szám és X_n az a topologikus tér, amelynek alaphalmaza $\{1, 2, \dots, n+1\}$, és nem-üres nyílt halmazai az

$$\{1, 2, \dots, k\} \qquad (k = 1, 2, \dots, n+1)$$

halmazok (amelyeknek családja egyben X_n egyetlen bázisa). E térben bármely nem-üres nyílt halmaz lezárása maga X_n, s ezért csupán a

$$\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, F), (X_n, X_n)\} \qquad (F \text{ nem-üres zárt halmaz})$$

és a

$$\{(\emptyset, \emptyset), (G, X_n), (X_n, X_n)\} \qquad (G \text{ nem-triviális nyílt halmaz})$$

típusú $\mathscr{R}$ irányok szolgáltatnak legalább egy nem-triviális

$$G \setminus F \quad (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}),\ F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}))$$

halmazt. Mivel azonban ezen irányok bármelyike *csak egy* ilyen bázis-halmazt szolgáltat, a tér minden IS-ja legalább n irányt tartalmaz, és ennyi (alkalmasan választott) irány elegendő is; vagyis $\mathrm{Dim}\, X_n = n$, qu.e.d.

2° Ha az $\mathfrak{a}$ kardinális szám végtelen, a fenti konstrukció egy variánsa — a jólrendezési tétel alkalmazásával — még többet nyújt: olyan $X_\mathfrak{a}$ teret szolgáltat, amelyre

$$\overline{\overline{X_\mathfrak{a}}} = \mathrm{Dim}\, X_\mathfrak{a} = \tau(X_\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

Tekintsük ui. egy $\mathfrak{a}$ számosságú $X_\mathfrak{a}$ halmaznak egy jólrendezését, és topologizáljuk X-et úgy, hogy éppen a rendezés szerinti kezdetek legyenek a nyílt halmazok. E topológiának van egy minimális bázisa, amely minden más bázisnak részcsaládja, ti. a

$$\{B_x\colon\ x \in X_\mathfrak{a}\}$$

halmazcsalád, ahol

$$B_x = \{y\colon\ y \in X_\mathfrak{a},\, y \preceq x\} \qquad (x \in X_\mathfrak{a}).$$

Ebből $\tau(X_\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, és — az 1°-beli meggondolással — $\mathrm{Dim}\, X_\mathfrak{a} = \tau(X_\mathfrak{a})$ következik, qu.e.d.

(3. 3. 1) MEGJEGYZÉS. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$\mathrm{ind}\, X_n = n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

A 2°-ben leírt $X_\mathfrak{a}$ tereknek (végtelen $\mathfrak{a}$-ra) azonban nincs MENGER—URISZON-dimenziójuk, még a transzfinit értelemben sem. Ez könnyen belátható, ha figyelembe vesszük, hogy egy ilyen (jólrendezett) $X_\mathfrak{a}$ tér első pontja legszűkebb nyílt környezetének (ez éppen a megfelelő egypontos halmaz) határa $X_\mathfrak{a}$-val homeomorf. Ebben a pontban — és hasonlóan minden véges kezdet utolsó pontjában, vagyis megszámlálhatóan végtelen sok pontban — tehát a MENGER—URISZON-dimenzió biztosan nem létezik.

(3. 4) TÉTEL. *Ha egy legalább* 3 *pontot tartalmazó* X T_0*-tér olyan tulajdonságú, hogy bármely* $x \in X$ *pontra az* $X \setminus \{x\}$ *altér összefüggő, akkor* $\mathrm{Dim}\, X \geqq 2$.

Bizonyítás. 1° Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, vagyis, hogy $\mathrm{Dim}\, X = 1$, tekintsük az X térnek valamely egyetlen irányt tartalmazó $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}\}$ IS-ját, és rendezzük az X halmazt a következőképpen:

ha $x_1, x_2 \in X$ és $x_1 \neq x_2$, akkor és csak akkor legyen $x_1 \prec x_2$, ha létezik olyan $M \in \mathscr{G}(\mathscr{R}) \cup \mathscr{F}(\mathscr{R})$ féltér, amelyre $x_1 \in M$ és $x_2 \notin M$.

Ez a reláció valóban rendezi az X halmazt:

(a) Ha $x_1, x_2 \in X$ és $x_1 \neq x_2$, akkor az $x_1 \prec x_2$, $x_2 \prec x_1$ relációk egyike fennáll. Legyen ui. V pl. x_1-nek olyan nyílt környezete, amely x_2-t nem tartalmazza, és legyenek $G \in \mathscr{G}(\mathscr{R})$, $F \in \mathscr{F}(\mathscr{R})$ olyan félterek, hogy $x_1 \in G \setminus F \subseteqq V$. Ekkor aszerint, hogy $x_2 \notin G$, ill. $x_2 \in F$, $x_1 \prec x_2$, ill. $x_2 \prec x_1$.

(b) Az $x_1 \prec x_2$, $x_2 \prec x_1$ relációk nem állhatnak fenn egyidejűleg. Az első, ill. második ui. olyan M ill. N alsó féltér létezését jelenti, amelyre $x_1 \in M$, $x_2 \notin M$, ill. $x_1 \notin N$, $x_2 \in N$. Ha ilyen M és N léteznék, sem az $M \subset N$, sem az $N \subset M$ inklúzió, sem pedig $M = N$ nem állhatna fenn, holott az $\mathscr{R}$-beli alsó félterek (1. 9. 1) szerint az inklúzióval teljesen rendezve vannak.

(c) A $\prec$ reláció tranzitív. Ha ui. $x_1 \prec x_2$ és $x_2 \prec x_3$, akkor léteznek olyan M, N alsó félterek, amelyekre

$$x_1 \in M,\ x_2 \notin M,\ x_2 \in N,\ x_3 \notin N.$$

Ekkor (1. 9. 1) szerint $M \subset N$, s ezért $x_1 \in N$, vagyis $x_1 \prec x_3$.

2° Legyen most x_0 a rendezett X halmaz egy tetszőleges, de nem első és nem utolsó — vagyis olyan eleme, amelyre

$$Y = \{x \in X : x \prec x_0\} \neq \emptyset, \quad Z = \{x \in X : x \succ x_0\} \neq \emptyset.$$

Az $Y \cup Z = X / \{x_0\}$ altér a feltevés szerint összefüggő, tehát

$$Y^- \cap Z^- \cap (Y \cup Z) \neq \emptyset. \tag{3.4.1}$$

3° Fennáll továbbá

$$Y^- \cap Z = Z^- \cap Y = \emptyset, \tag{3.4.2}$$

más szóval: bármely $x \in Z$, ill. $x \in Y$ pontnak van olyan nyílt U környezete, amelyre $Y \cap U = \emptyset$, ill. $Z \cap U = \emptyset$.

Ezt példaképpen az $x_1 \in Z$ esetre bizonyítjuk be. Minden $x \in Y$ ponthoz rendeljünk egy olyan M_x alsó félteret, amelyre $x \in M_x$ és $x_0 \notin M_x$. Ekkor (1. 8) szerint

$$M = \bigcup \{M_x : x \in Y\} \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R}),$$

és $Y \subseteqq M$, továbbá ($x_0 \notin M$ miatt) $x_1 \notin M$.

Ha mármost az M halmaz zárt, akkor $X \setminus M$ az x_1 pont keresett U környezete. Ha azonban M nem zárt, azaz $M \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$, akkor $x_1 \notin \underline{F}(M)$, különben $x_0 \notin M$ és $x_0 \prec x_1$ miatt léteznie kellene egy N féltérnek, amelyre $M \subset N \subset \underline{F}(M)$, s ez ellentmond az (1. 1. 2) irányaxiómának; ez esetben tehát $X \setminus \underline{F}(M)$ az x_1 pont keresett nyílt U környezete. ((3. 4. 2) másik részének bizonyítása teljesen analóg.)

4° A (3. 4. 1), (3. 4. 2) következmények ellentmondanak egymásnak; ezzel a $\operatorname{Dim} X = 1$ feltevést megcáfoltuk, s a tételt bebizonyítottuk.

(3. 5) *A (3. 4) tétel néhány alkalmazása:*

1° $\operatorname{Dim} E_n \geqq 2$ $(n = 2, 3, \ldots)$, tehát (3. 1. 3) szerint speciálisan $\operatorname{Dim} E_2 = 2$. Az E_1, E_2 terek — s mint az 5. §-ban bizonyítani fogjuk, az összes euklidészi terek — $\operatorname{Dim} X$ és $\operatorname{ind} X$ egyezésének legfontosabb példái. A (3. 4) tétel azonban a legérdekesebb példákat a $\operatorname{Dim} X > \operatorname{ind} X$ esetre szolgáltatja.

2° Ha K az E_2 tér egy zárt körvonala, $\operatorname{Dim} K = 2$ (vö. $\operatorname{ind} K = 1$). Ez az egyszerű példa világosan szemlélteti az $\operatorname{ind} X$, ill. $\operatorname{Dim} X$ definíciójának lokális, ill. globális jellege okozta különbséget: a MENGER—URISZON-elmélet lokális szemléletében a körvonal ekvivalens a számegyenessel.

3° *Legyen* $n \geqq 2$, $X \subset E_n$ *és*

$$\overline{\overline{E_n \setminus X}} < \aleph; \tag{3.5.1}$$

ekkor az X *altérre* $\operatorname{Dim} X \geqq 2$.

Bizonyítás. A (3. 4) tétel szerint elegendő azt kimutatni, hogy minden ilyen X tér összefüggő. Ha valamely ilyen X térben léteznének nem-üres, diszjunkt s a teret együtt kitöltő nyílt U, V halmazok, akkor bármely $x \in U$, $y \in V$ pontpárra és minden E_n-beli folytonos, $\{x, y\}$-t tartalmazó L vonalra

$$(3.\ 5.\ 2) \qquad L \cap (E_n \setminus X) \neq \emptyset.$$

Legyen ekkor $\mathscr{L}$ az $\{x, y\}$-t tartalmazó folytonos vonalaknak olyan kontinuum-számosságú családja, amelyre

$$(3.\ 5.\ 3) \qquad L_1 \cap L_2 = \{x, y\} \qquad (L_1, L_2 \in \mathscr{L})$$

(ilyen $\mathscr{L}$ család triviálisan létezik). Mivel ekkor (3. 5. 2) és (3. 5. 3) szerint

$$\bigcup \{L \cap (E_n \setminus X) \colon L \in \mathscr{L}\}$$

kontinuum-számosságú halmaz, $\overline{\overline{E_n \setminus X}} = \aleph$; ez azonban ellentmond a (3. 5. 1) feltevésnek, qu.e.d.

Legyen pl. E_2^1 az E_2 tér azon pontjainak halmaza, amelyeknek nem mindkét koordinátája racionális. Ekkor $\overline{\overline{E_2 \setminus E_2^1}} = \aleph_0 < \aleph$, tehát az előbbiek szerint az E_2^1 altérre Dim $E_2^1 \geqq 2$, s figyelembe véve (3. 1. 3)-at és az iránydimenzió (2. 5), (a)-ban bizonyított monotonitását, Dim $E_2^1 = 2$ (vö. ind $E_2^1 = 1$, pl. [31] 29, 42).

A következő példák rendes IS-kra és rendes terekre vonatkoznak.

(3. 6) TÉTEL. *Minden diszkrét X tér rendes, és iránydimenziója* 1.

Bizonyítás. 1° Tekintsük X alaphalmazának egy rendezését, és jelöljük $\mathscr{A}$-val az alaphalmaz összes kezdeteinek családját. Ekkor az

$$\mathscr{R} = \{(A, A) \colon A \in \mathscr{A}\}$$

rendszer az X tér egy iránya (az (1. 1. 1), (1. 1. 2) axiómák triviálisan, az (1. 1. 3), (1. 1. 4) axiómák pedig

$$\begin{array}{l} \bigcup \{A \colon A \in \mathscr{A}^*\} \in \mathscr{A} \\ \bigcap \{A \colon A \in \mathscr{A}^*\} \in \mathscr{A} \end{array} \qquad (\mathscr{A}^* \subseteqq \mathscr{A},\ \mathscr{A}^* \neq \emptyset)$$

alapján teljesülnek); $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}\}$ pedig IS-ja X-nek, hiszen az

$$(3.\ 6.\ 1) \qquad \begin{array}{l} A_x = \{y \colon y \in X,\ y \prec x\} = \bigcup \{A \colon A \in \mathscr{A},\ x \notin A\} \\ B_x = \{y \colon y \in X,\ y \preceq x\} = \bigcap \{A \colon A \in \mathscr{A},\ x \in A\} \end{array}$$

kezdetekre $A_x \in \mathscr{F}(\mathscr{R})$, $B_x \in \mathscr{G}(\mathscr{R})$ és

$$(3.\ 6.\ 2) \qquad \{x\} = B_x \setminus A_x \qquad (x \in X).$$

Ezzel igazoltuk, hogy Dim $X = 1$. (Megjegyzés: ind $X = 0$.)

2° X-nek 1°-ben leírt IS-ja nyilván nem rendes, sőt példája a „legkevésbé rendes" IS-nak, hiszen

$$\bigcup \{F \setminus G \colon (G, F) \in \mathscr{R}\} = \emptyset.$$

Az $\mathscr{R}$ irány azonban rendes iránnyá egészíthető ki. Legyen ui.

$$\mathscr{R}_1 = \{(A_x, B_x) \colon x \in X\},\ \mathscr{R}' = \mathscr{R} \cup \mathscr{R}_1.$$

(3. 6. 1) szerint $\mathscr{R}'$ is iránya X-nek, s mivel tartalmazza $\mathscr{R}$-t, $\mathfrak{R}' = \{\mathscr{R}'\}$ IS-ja X-nek.

Végül: $\mathfrak{R}'$ rendes IS, hiszen (3. 6. 2) szerint

$$\bigcup\{F\setminus G\colon (G,F)\in\mathscr{R}'\} = \bigcup_{x\in X}(B_x\setminus A_x) = X.$$

Ezzel igazoltuk az X tér rendességét.

MEGJEGYZÉS. Egy tér rendessége megállapításának e módszerét (ti. valamely minimális IS irányainak kiegészítését rendes irányokká) sikerrel alkalmazhatjuk a rendes tereknek egy — a diszkrét terek osztályát tartalmazó, de annál sokkal bővebb — osztályánál, a tökéletesen normális tereknél (7. §).

Itt, további egyszerű példaként, a rendezés-topologikus terek osztályát említjük meg, amely az iránydimenzió vizsgálatánál fontos szerepet játszik ((8. 4) és a 9. §).

(3. 7) TÉTEL. *Minden rendezés-topologikus X tér rendes, és iránydimenziója* 1.

Bizonyítás. 1° (2. 5), (c) szerint az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az X halmaz rendezése teljes, hiszen, mint ismeretes, bármely nem-teljes rendezésű rendezés-topologikus tér topologikusan beágyazható egy teljes rendezésűbe.

2° Legyen

$$\text{(3. 7. 1)}\qquad \begin{matrix} G_x=\{y\colon y\in X,\ y\prec x\} \\ F_x=\{y\colon y\in X,\ y\preceq x\}\end{matrix}\qquad (x\in X);$$

ekkor az

$$\text{(3. 7. 2)}\qquad \mathscr{R}=\{(\emptyset,\emptyset)\}\cup\{(G_x,F_x)\colon x\in X\}\cup\{(X,X)\}$$

rendszer nyilván teljesíti az (1. 1. 1), (1. 1. 2) irányaxiómákat, az (1. 1. 3), (1. 1. 4) axiómák teljesülése pedig abból következik, hogy az

$$\begin{matrix} x^*=\sup\{x\colon x\in X^*\} \\ x_*=\inf\{x\colon x\in X^*\}\end{matrix}\qquad (X^*\subseteqq X,\ X^*\neq\emptyset)$$

jelölésekkel — a rendezés teljessége miatt —

$$\bigcup\{G_x\colon x\in X^*\}=G_{x^*},\quad \bigcap\{F_x\colon x\in X^*\}=F_{x_*}.$$

$\mathscr{R}$ tehát az X tér egy iránya.

3° (3. 7. 1)-ből kitűnik, hogy $\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}\}$ az X-nek IS-ja, tehát Dim $X=1$.

4° Az $\mathscr{R}$ irány rendes, hiszen

$$x\in F_x\setminus G_x\qquad (x\in X).$$

X tehát rendes tér.

MEGJEGYZÉSEK. 1° Minden rendezés-topologikus X térre ind $X\leqq 1$.

2° A (3. 7) tétel nem fordítható meg. Bármely indiszkrét tér, amely legalább 2 pontot tartalmaz, példa olyan 1-iránydimenziójú rendes térre (l. (1. 12. 1)), amely nem rendezés-topologikus.

Befejezésül megemlítjük, hogy az összes, e §-ban példaképpen felhozott X tereknél a Dim $X\geqq$ ind X viszony áll fenn a kétféle dimenzió között; a 4. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy ez az egyenlőtlenség minden szeparábilis metrikus X térre teljesül.

4. §. Egy összefüggés szeparábilis metrikus terek iránydimenziója és Menger—Uriszon-dimenziója között

E paragrafus fő feladata az alapvető (4. 5. 1) reláció bebizonyítása. Ehhez segédtételként felhasználjuk majd a (4. 1) lemmát és a (4. 2) tétel első korolláriumát.

(4. 1) LEMMA. *Ha egy X T_0-tér egy*

$$\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_\alpha : \alpha \in A\}$$

IS-jából származó valamely

(4. 1. 1) $$\bigcap \{F_\alpha \setminus G_\alpha : (G_\alpha, F_\alpha) \in \mathscr{R}_\alpha, \alpha \in A\}$$

típusú halmaza nem-üres, akkor csak egy pontot tartalmaz.

Bizonyítás. Bármely $x, y \in X$, $x \neq y$ pontpárhoz létezik egy $\alpha_0 \in A$ index és léteznek olyan $G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_{\alpha_0})$, $F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_{\alpha_0})$ félterek, hogy pl.

(4. 1. 2) $$x \in G \setminus F,$$

de

(4. 1. 3) $$y \notin G \setminus F.$$

Ha valamely (4. 1. 1)-típusú $P \subseteqq X$ halmazra $x, y \in P$, akkor (4. 1. 2) és (1. 9. 1) miatt

$$F \subseteqq G_{\alpha_0} \subset F_{\alpha_0} \subseteqq G,$$

ez azonban (4. 1. 1) és (4. 1. 3) szerint lehetetlen.

(4. 2) TÉTEL. *Ha $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_\alpha : \alpha \in A\}$ egy X tér egy IS-ja és $A^* \subset A$ tetszőleges nem-üres részhalmaz, akkor minden*

(4. 2. 1) $$X^* = \bigcap \{F_\alpha \setminus G_\alpha : \alpha \in A^*\}$$

$$((G_\alpha, F_\alpha) \in \mathscr{R}_\alpha,\ G_\alpha \subset F_\alpha\ (\alpha \in A^*))$$

típusú altérre

$$\operatorname{Dim} X^* \leqq \overline{\overline{A \setminus A^*}}.$$

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy ha $X^* \neq \emptyset$ és

$$\mathfrak{R}^* = \{\mathscr{R}^*_\alpha : \alpha \in A\}$$

X^*-nak $\mathfrak{R}$ által indukált IS-ja (2. 4), akkor

$$\mathfrak{R}^{**} = \{\mathscr{R}^*_\alpha : \alpha \in A \setminus A^*\}$$

is IS-ja X^*-nak.

Legyen $x \in X^*$ és U^* x-nek tetszőleges nyílt környezete X^*-ban, vagyis

$$x \in U^* \subseteqq X^* \quad \text{és} \quad U^* = X^* \cap U$$

x-nek valamely X-beli nyílt U környezetére. Ekkor létezik olyan véges, nem-üres $A_1 \subseteqq A$ halmaz, és léteznek olyan

$$\Gamma_\alpha \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha),\ \Phi_\alpha \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha) \qquad (\alpha \in A_1)$$

félterek, hogy

$$x \in \bigcap\{\Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha : \alpha \in A_1\} \subseteq U.$$

Mivel

$$x \in (F_\alpha \setminus G_\alpha) \cap (\Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha) \qquad (\alpha \in A^* \cap A_1),$$

azért

$$\Phi_\alpha \subseteq G_\alpha, \ \Gamma_\alpha \supseteq F_\alpha \qquad (\alpha \in A^* \cap A_1),$$

tehát

(4. 2. 2) $$X^* \subseteq \bigcap\{\Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha : \alpha \in A^* \cap A_1\}.$$

Az

$$E^* = X^* \cap E \ (E \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_\alpha) \cup \mathcal{F}(\mathcal{R}_\alpha), \ \alpha \in A)$$

jelöléssel (4. 2. 2)-ből

$$X^* \cap (\bigcap\{\Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha : \alpha \in A_1\}) = X^* \cap (\bigcap\{\Gamma_\alpha \setminus \Phi_\alpha : \alpha \in A_1 \setminus A^*\}) =$$
$$= \bigcap\{\Gamma_\alpha^* \setminus \Phi_\alpha^* : \alpha \in A_1 \setminus A^*\},$$

ahol

$$\Gamma_\alpha^* \in \mathcal{G}(\mathcal{R}_\alpha^*), \ \Phi_\alpha^* \in \mathcal{F}(\mathcal{R}_\alpha^*) \qquad (\alpha \in A_1 \setminus A^*);$$

tehát

$$x \in \bigcap\{\Gamma_\alpha^* \setminus \Phi_\alpha^* : \alpha \in A_1 \setminus A^*\} \subseteq U^*,$$

s ezzel, mivel $A_1 \setminus A^*$ véges, nem-üres részhalmaza $A \setminus A^*$-nak (ha eltekintünk a triviális $U^* = X^*$ esettől), a bizonyítást befejeztük.

(4. 3) ELSŐ KOROLLÁRIUM. *Bármely — szükségképpen véges iránydimenziójú — X tér tetszőleges véges, de 1-nél nagyobb számosságú $\mathfrak{R}$ IS-jának bármely $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ irányából származó minden*

$$X^* = F \setminus G \qquad ((G, F) \in \mathcal{R}, \ R \subset F)$$

altérre

$$\operatorname{Dim} X^* < \overline{\overline{\mathfrak{R}}}.$$

(4. 4) MÁSODIK KOROLLÁRIUM. *Bármely* $1 < \operatorname{Dim} X < \aleph_0$ *iránydimenziójú X tér tetszőleges minimális IS-jában szereplő minden nem-üres M féltérre*

$$\operatorname{Dim} \operatorname{Gr} M < \operatorname{Dim} X.$$

Ezek után rátérhetünk a $\operatorname{Dim} X$ és $\operatorname{ind} X$ közötti kapcsolat levezetésére.

(4. 5) TÉTEL. *Minden véges iránydimenziójú, szeparábilis metrikus X tér* MENGER—URISZON-*dimenziója létezik és véges, sőt*

(4. 5. 1) $$\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Dim} X.$$

A *bizonyítást* a $\operatorname{Dim} X$-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

1° Ha $\operatorname{Dim} X = 1$ és $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}\}$ az X tér egy minimális IS-ja, akkor bármely $x \in X$ ponthoz és annak bármely U környezetéhez találhatók olyan $G \in \mathcal{G}(\mathcal{R})$, $F \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ félterek, hogy $x \in G \setminus F \subseteq U$. A

$$\operatorname{Gr}(G \setminus F) = (G \setminus F)^- \setminus (G \setminus F) \subseteq (\underline{F}(G) \setminus \bar{G}(F)) \setminus (G \setminus F) = (\underline{F}(G) \setminus G) \cup (F \setminus \bar{G}(F))$$

inklúzióból és a (4. 1) lemmából világos, hogy $\operatorname{Gr}(G \setminus F)$ legfeljebb két pontból álló metrikus, tehát diszkrét tér; ebből pedig

$$\operatorname{ind} \operatorname{Gr} (G \setminus F) \leqq 0$$

következik, tehát $\operatorname{ind} X \leqq 1$, s ezzel tételünket — (1. 14), (b)-t is figyelembe véve — a $\operatorname{Dim} X \leqq 1$ esetre bebizonyítottuk.

2° Legyen $\operatorname{Dim} X = n$ ($n > 1$) természetes szám), és tegyük fel, hogy a tétel a $\operatorname{Dim} X \leqq n-1$ esetre igaz. Legyen

$$\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$$

az X tér egy minimális IS-ja, $x \in X$ tetszőleges pont és $U \subseteqq X$ az x pont tetszőleges környezete. Legyenek a

$$G_k \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_k), \; F_k \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

félterek olyanok, hogy

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} (G_k \setminus F_k) \subseteqq U$$

(l. az (1. 11)-beli megjegyzést). Mármost

$$\text{(4. 5. 2)} \quad \operatorname{Gr} \bigcap_{k=1}^{n} (G_k \setminus F_k) \subseteqq \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{Gr} (G_k \setminus F_k) \subseteqq \bigcup_{k=1}^{n} [(\underline{F}(G_k) \setminus G_k) \cup (F_k \setminus \bar{G}(F_k))],$$

és az indukciós feltevés és (4. 3) szerint

$$\text{(4. 5. 3)} \quad \begin{matrix} n-1 \geqq \operatorname{Dim} (\underline{F}(G_k) \setminus G_k) \geqq \operatorname{ind} (\underline{F}(G_k) \setminus G_k) \\ n-1 \geqq \operatorname{Dim} (F_k \setminus \bar{G}(F_k)) \geqq \operatorname{ind} (F_k \setminus \bar{G}(F_k)) \end{matrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

HUREWICZ (0. 7) tételét alkalmazva (4. 5. 2)-re

$$\text{(4. 5. 4)} \quad \operatorname{ind} \operatorname{Gr} \bigcap_{k=1}^{n} (G_k \setminus F_k) \leqq \max_{k=1,2,\ldots,n} \{\max [\operatorname{ind} (\underline{F}(G_k) \setminus G_k), \operatorname{ind} (F_k \setminus \bar{G}(F_k))]\}.$$

Végül (4. 5. 3)-ból és (4. 5. 4)-ből

$$\text{(4. 5. 5)} \qquad \operatorname{ind} \operatorname{Gr} \bigcap_{k=1}^{n} (G_k \setminus F_k) \leqq n-1,$$

tehát $\operatorname{ind} X \leqq n = \operatorname{Dim} X$ következik, qu.e.d.

5. §. Az euklidészi terek iránydimenziója. A II. fejezet főfeladatának ismertetése

A (4. 5) tétel első alkalmazásaként megállapítjuk az euklidészi terek iránydimenzióit:

(5. 1) TÉTEL.

$$\operatorname{Dim} E_n = n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bizonyítás. (0. 5), (4. 5) és (3. 1. 3) szerint

$$n = \operatorname{ind} E_n \leqq \operatorname{Dim} E_n \leqq n.$$

Ezzel — miután Dim X monotonitását már bebizonyítottuk — végérvényesen tisztáztuk az iránydimenzió fogalmának dimenzió-jellegét, a HUREWICZ—WALLMAN-féle (0. 11) kritérium szellemében.

(A 10. §-ban bizonyítandó 3. beágyazási tétel (5. 1)-nek egy a MENGER—URISZON-elmélettől független bizonyítását teszi lehetővé, l. (10. 2)).

Második alkalmazásként a HILBERT-tér iránydimenzióját nyerjük:

(5. 2) TÉTEL. *A* HILBERT-*tér iránydimenziója* $\aleph_0$.

Bizonyítás. A H HILBERT-térre (3. 2) szerint Dim $H \leqq \aleph_0$, (5. 1) szerint pedig Dim $H \geqq n$ $(n=1, 2, \ldots)$ érvényes, tehát Dim $H=\aleph_0$, qu.e.d.

A 3. §-ban példákat adtunk a Dim $X >$ ind X esetre. Dim X azonban nem lehet „sokkal nagyobb" ind X-nél, ha X szeparábilis metrikus tér: a (4. 5. 1) egyenlőtlenséget egy ind X és Dim X közötti aszimptotikus összefüggéssé egészíthetjük ki:

(5. 3) TÉTEL. *Ha X szeparábilis metrikus tér és* ind $X < \infty$, *akkor*

$$\text{ind}\, X \leqq \text{Dim}\, X \leqq 1+2\, \text{ind}\, X. \tag{5. 3. 1}$$

Bizonyítás. A jobb oldali egyenlőtlenség MENGER—NÖBELING tételéből (amely szerint X topologikusan beágyazható az $E_{1+2\,\text{ind}\,X}$ térbe) és Dim X monotonitásából következik.

(5. 4) Az (5. 3) tételnek két fontos, közvetlen következményét fogalmazzuk meg:

1° *A* MENGER—NÖBELING-*tétel akkor is igaz marad, ha szövegében* ind *X-et* Dim *X-szel helyettesítjük*, hiszen ezzel a tételt legfeljebb gyengítjük.

2° *Szeparábilis metrikus X terekre az* „ind *X létezik és véges*" és „Dim *X véges*" *kijelentések ekvivalensek*, vagyis ez a két dimenziófogalom az euklidészi terek altereinek osztályát, mint a szeparábilis metrikus terek osztályának részét, egyaránt a dimenzió végességével karakterizálja.

(5. 5) Míg azonban a MENGER—URISZON szerint legfeljebb n-dimenziós szeparábilis metrikus terek minden (0. 9) szerinti univerzális euklidészi terének MENGER—URISZON-dimenziója legalább $2n+1$, addig a legfeljebb n iránydimenziójú szeparábilis metrikus terek osztályánál (az egyes tereknél fellépő Dim $X >$ ind X eltolódás miatt) ezen „beágyazási szám" csökkenése várható.

Dolgozatunk II. fejezetének főfeladata annak bizonyítása lesz, hogy ez a „beágyazási szám" az egyáltalán számításba vehető minimumra, vagyis n-re csökkenthető; más szóval: a legfeljebb n-iránydimenziójú szeparábilis metrikus tereknek az E_n *tér univerzális tere.*

E feladat elvégzéséhez vizsgálatainkat az eddigi jórészt tetszőleges IS-k és tetszőleges terek helyett rendes IS-kra és ennek megfelelően a gyengén rendes, ill. rendes terek (a metrikus tereket is tartalmazó) osztályára kell konkretizálnunk. Ez a második fejezet tartalma.

(Beérkezett: 1966. november 15.)

VÉGTELEN SOROK CAUCHY-SZORZATÁNAK HARDY-FÉLE PROBLÉMÁJÁRÓL

Írta: PÁL LÁSZLÓ

1. Megállapodás szerint e dolgozatban adott $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ $\sum_{m=0}^{\infty} c_m, \ldots$ végtelen sorokat jelöljük tagjaiknak megfelelően a $A, B, C, \ldots$ betűkkel, függetlenül attól, hogy e sorok konvergensek-e vagy sem valamilyen adott értelemben.

ÉRTELMEZÉS: Az

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{és} \quad B = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \tag{1}$$

végtelen sorok „*Cauchy-féle szorzatsorának*" nevezzük — és $C(A, B)$-vel jelöljük — a

$$C = \sum_{m=0}^{\infty} c_m = \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k+l=m} a_k b_l \Big) \tag{2}$$

végtelen sort[1].

A továbbiakban a *Cauchy*-féle szorzatsort — a (2)-beli jelölésnek megfelelően — röviden „C-szorzatsornak" fogjuk nevezni.

Ismeretes, hogy a C-szorzatképzés nem rendelkezik az ún. perfekt tulajdonsággal, azaz lehetséges, hogy konvergens (1)-beli sorokra a (2) szorzatsor divergens. Legyenek például

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \quad \text{és} \quad B = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\sqrt{l+1}}. \tag{3}$$

E sorok a *Leibniz*-féle kritérium szerint konvergensek, azonban a

$$C(A, B) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{m+1-k}} \right] \equiv \sum_{m=0}^{\infty} c_m \tag{4}$$

szorzatsoruk divergens, ugyanis a

$$|c_m| \geqq (m+1) \frac{1}{\sqrt{m+1}} \frac{1}{\sqrt{m+1}} = 1, \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

egyenlőtlenségek miatt a (4) sor tagjai nem tartanak zéróhoz.

[1] E szorzatképzés természetes módon adódik hatványsorok szorzásakor, ha a szorzatsort is hatványsor alakjában írjuk fel, azaz a szorzatsorban egy tagba foglaljuk az azonos x^m hatványokat adó tagszorzatokat:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} \right) x^m.$$

E példában szereplő A és B sorok mindketten szükségképpen feltételesen konvergensek, ugyanis a klasszikus MERTENS [1] tétel szerint, ha az (1) alatti sorok konvergensek és legalább egyikük abszolút konvergens, akkor C-szorzatuk szükségképpen konvergens sor lesz.

Megemlítjük még, hogy a C-szorzatsor összegproblémája régóta megoldott kérdés, ugyanis érvényes a következő ABELtől [2] eredő

[1, 1] TÉTEL. *Ha az* (1) *sorok konvergensek és C-szorzatsoruk is konvergens, akkor a szorzatsor összege szükségképpen a tényezősorok összegeinek szorzata.*

Nyitott marad azonban a kérdés, hogy *milyen további alkalmas feltételek biztosítják két feltételesen konvergens sor C-szorzatsorának konvergenciáját?*

Az első ilyen irányú kutatások PRINGSHEIMtől erednek. Vizsgálatai lényegében abban az esetben adnak elegendő feltételeket a C-szorzat konvergenciájára, amikor a feltételesen konvergens tényezősorok közül legalább az egyik abszolút konvergenssé válik tagjainak olyan zárójelezése mellett, amelyben az egyes zárójeleken belüli eredeti tagok száma egy rögzített érték alatt marad valamennyi zárójelre nézve [3]. A további *Pringsheim*-féle vizsgálatok az előbb említett általános esetnek arra a speciális esetére vonatkoznak, amikor a tényezősorok *Leibniz*-típusú alternáló sorok [4]. Idevágó eredményei — melyekre HARDY adott először elegáns bizonyítást — az alábbi tételben foglalhatók össze:

[1, 2] TÉTEL. *Ha* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ *és* $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *monoton fogyó zérussorozatok, akkor a Leibniz-típusú*

$$A=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha_n \quad \text{és} \quad B=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta_n \tag{6}$$

sorok C-szorzatsorának konvergenciájára

1. *szükséges és elegendő, hogy a* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}c_n=C$ *szorzatsor tagjai zéróhoz tartsanak, azaz*

$$|c_n|=(\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\ldots+\alpha_n\beta_0)\to 0 \qquad (n\to\infty) \tag{7}$$

2. *szükséges és elegendő, hogy*

$$\begin{aligned}(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n)\beta_n\to 0\\ (\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_n)\alpha_n\to 0\end{aligned} \qquad (n\to\infty). \tag{8}$$

3. *elegendő (de nem szükséges), hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty \tag{9}$$

legyen,

4. *szükséges (de nem elegendő), hogy tetszőlegesen adott* $\varepsilon>0$ *rögzített kitevőre*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n\beta_n)^{1+\varepsilon}<\infty \tag{10}$$

fennálljon.

E tételből látható, hogy alternáló sorok esetében a tényezősorok tagjaira tett alkalmas nagyságrendi feltételek mellett biztosítani tudjuk a C-szorzatsor konvergenciáját. Ebből az észrevételből kiindulva felvetődik a kérdés, hogy nem lehet-e hasonló jellegű eredményt tetszőleges (tehát nem szükségképpen alternáló) feltételesen konvergens sorok esetében is elérni?

Az első ilyen értelmű mélyebben fekvő eredményt HARDY [5] találta, amennyiben aránylag egyszerűen igazolta a következő állítást:

[1, 3] TÉTEL. *Ha az* $A=\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *és* $B=\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ *sorok konvergensek és tagjaikra érvényesek az*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{és} \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{11}$$

nagyságrendi feltételek [2], *akkor C-szorzatsoruk konvergens.*

Az [1, 2] és [1, 3] tételek figyelembevételével HARDY a következő kérdéskört veti fel [3]:

Tekintsük az egyszerűség kedvéért az alábbi két sor C-szorzásának speciális problémáját:

$$\pm 1^{-s} \pm 2^{-s} \pm 3^{-s} \pm \ldots, \quad \pm 1^{-t} \pm 2^{-t} \pm 3^{-t} \pm \ldots. \tag{12}$$

Ha $0<s\leqq\frac{1}{2}$, $0<t\leqq\frac{1}{2}$ vagy általánosabban, ha s és t pozitívok és $s+t\leqq 1$, akkor biztosan meg tudjuk választani a (12) alatti sorok előjelezését olyan módon, hogy maguk e sorok konvergensek, azonban C-szorzatuk oszcilláló. Elegendő tekintenünk a váltakozó előjelű $1^{-s}-2^{-s}+3^{-s}- \ldots$, $1^{-t}-2^{-t}+3^{-t}- \ldots$ sorokat. A szorzatsor γ_n-el jelölt n-edik tagjának abszolút értékére ez esetben azt kapjuk, hogy

$$|\gamma_n| = \sum_{r=1}^{n} r^{-s}(n+1-r)^{-t}, \tag{13}$$

amely n-nel együtt végtelenhez tart, ha $s+t<1$ illetőleg $s+t=1$ esetén az

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s(1-x)^{1-s}} = \frac{\pi}{\sin s\pi} \tag{14}$$

véges határértékhez (és így a szorzatsor evidensen divergens).

Másrészt, ha $s=1$, $t=1$, akkor az [1, 3] tétel alapján a szorzatsor mindig konvergens lesz, amennyiben a (12) sorok előjelezését úgy választjuk meg, hogy a tényezősorok konvergensek legyenek.

Tekintsük végül azokat az eseteket, amikor $s+t>1$, de s és t közül legalább az egyik kisebb 1-nél, (pl. $s=t=\frac{3}{4}$, vagy $s=\frac{1}{2}$, $t=1$). Ilyenkor vagy az igaz, hogy konvergens (12) alatti sorokra a C-szorzatsor is mindig konvergens, vagy pedig lehet találni a (12) soroknak olyan „konvergens előjelezését”, melyre szorzatsoruk divergens.

[2] A LANDAU-féle O és o szimbólumokat a szokásos értelemben használjuk.
[3] A közölt kérdésfelvetés és az arra vonatkozó sejtés, értelemszerű fordítás az [5] alatt megadott dolgozat 419—420. oldalairól.

HARDY sejtése az volt, hogy az utóbb említett eset áll fenn, azonban megjegyezte, hogy sejtésének igazolására nem tud konkrét példát konstruálni.

E dolgozat következő 2. pontjában az említett *Hardy*-féle problémát a modern ortogonális sorelmélet segítségével fogjuk megvizsgálni és kimutatjuk, hogy $s > \frac{1}{2}$ és $t > \frac{1}{2}$ esetén zéró a valószínűsége annak, hogy a (12)-beli soroknak meg tudjuk adni olyan előjelezéseit, amelyekre e sorok maguk konvergensek, de ugyanakkor *C*-szorzatuk divergens. A dolgozat további 3. pontjában a [2, 9] tétel további általánosításával és módosításaival fogunk foglalkozni.

2. Mindenekelőtt ismertetjük az ortogonális sorok elméletének néhány alapvető fogalmát és tételét, melyeket a későbbiekben fel fogunk használni.

[2, 1] ÉRTELMEZÉS: Adott $[a, b]$ $(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$ intervallumon értelmezett, mérhető és négyzetesen integrálható függvényekből álló $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ függvénysorozatot (a közönséges értelemben) ortonormált függvénysorozatnak nevezzük, ha e sorozat elemeire érvényesek a következő egyenlőségek[4]:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0; & \text{ha} \quad n \neq m \\ 1; & \text{ha} \quad n = m \end{cases} \tag{15}$$

[2, 2] ÉRTELMEZÉS: Ha $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ adott ortonormált függvénysorozat valamely $[a, b]$ intervallumon és $\{c_n\}$ adott számsorozat, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots \tag{16}$$

függvénysort a $\{\varphi_n(x)\}$ rendszer szerint haladó ortogonális sornak nevezzük.

Mivel egy ortonormált $\{\varphi_n(x)\}$ rendszer függvényeit az $[a, b]$ alapintervallum egy nullaértékű halmazán tetszőleges módon adhatjuk meg, ezért a (16) sorok pontonkénti konvergenciájának csak a majdnem mindenütt való konvergencia szempontjából van általában értelme.

Ismeretes, hogy az egyik legfontosabb ilyen típusú konvergenciatétel, mely az általános (16)-beli ortogonális sorokra érvényes, és még abszolút értékben monoton fogyó $\{c_n\}$ együtthatósorozat esetén sem élesíthető [6] a következő RADEMACHER [7] és MENSOV [8] által bizonyított

[2, 1] TÉTEL. *Ha $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tetszőleges ortonormált függvényrendszer az $[a, b]$ intervallumon, és $\{c_n\}$ olyan együtthatósorozat, melyre a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < \infty \tag{17}$$

feltétel teljesül, akkor a $\Sigma c_n\varphi_n(x)$ ortogonális sor az $[a, b]$-nek majdnem minden x pontjában konvergens[5].

E fontos tétel bizonyítása az ún. *Mensov*-féle lemma segítségével igen egyszerűen nyerhető, amelyet a későbbiek érdekében külön tételként is felhasználunk. E lemma állítása a következő:

[4] A mérhetőség, integrálhatóság és az integrál fogalmát a Lebesgue-féle értelemben használjuk.

[5] A továbbiakban a majdnem mindenütt kifejezés helyett az m. m. rövidítést használjuk.

[2, 2] TÉTEL. *Legyen* $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_N(x)$ *tetszőlegesen adott, véges sok függvényből álló ortonormált rendszer az* $[a, b]$ *intervallumon,* $c_0, c_1, \ldots, c_N$ *pedig tetszőlegesen előírt számokból álló együtthatórendszer. Ekkor mindig megadható olyan* $\delta_N(x)$ *nem-negatív függvény, amely az* $[a, b]$ *számközön négyzetesen integrálható, és a*

$$\sum_{n=0}^{N} c_n \psi_n(x) \tag{18}$$

összeg bármely i, j $(0 \leqq i < j \leqq N)$ *indexpárra vett*

$$\sum_{n=i}^{j} c_n \psi_n(x) = s_{ij}(x) \tag{19}$$

szeletét abszolút értékben majorizálja, azaz

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq i \leqq j \leqq N} |s_{ij}(x)| \leqq \delta_N(x), \tag{20}$$

és egyben eleget tesz az alábbi egyenlőségnek:

$$\int_a^b \delta_N^2(x)\,dx = O\left((\log^2 N) \sum_{n=0}^{N} c_n^2\right). \tag{21}$$

Mivel a [2, 1] és [2, 2] tételek bizonyításai a szóban forgó $\{\varphi_n\}$ és $\{\psi_n\}$ rendszerekről pusztán a (15)-beli ortogonalitási relációkat használják fel, ezért magától értetődő módon általánosíthatók az ortogonalitás fogalmának általánosabb értelmezésével. Számunkra elegendő lesz a [2, 1] és [2, 2] tételek kétváltozós $\{\varphi_n(x, y)\}$ és $\{\psi_n(x, y)\}$ ortonormált rendszerekre értelemszerűen kiterjesztett formája, amelyhez pusztán a megfelelő ortogonalitás fogalmát ismertetjük:

[2, 3] ÉRTELMEZÉS: A $\{\varphi_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ kétváltozós függvények a síknak egy mérhető $N = \{(x, y)\}$ ponthalmazán ortonormált rendszert alkotnak, ha azon mérhetők, négyzetesen integrálhatók és az

$$\iint_N \varphi_n(x, y)\varphi_m(x, y)\,dx\,dy = \begin{cases} 0; & \text{ha } n \neq m \\ 1; & \text{ha } n = m \end{cases} \tag{22}$$

egyenlőségek bármely (n, m) indexpárra érvényesek.

Magától értetődő, hogy konkréten megadott speciális ortonormált függvényrendszerek esetében nemcsak a (15) és (22) relációkra támaszkodhatunk, hanem a konvergenciakérdések vizsgálatánál kihasználhatjuk a szóban forgó függvényrendszer egyéb speciális tulajdonságait is.

Különösen fontos lesz számunkra a *Rademacher*-féle [7] ortonormált függvényrendszer szerint haladó ortogonális sorok, az ún. *Rademacher-sorok* konvergenciaelmélete.

[2, 4] ÉRTELMEZÉS: A $[0, 1]$ intervallumon értelmezett

$$r_n(x) = \operatorname{sign}(\sin 2^n \pi x), \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{23}$$

függvényrendszert *Rademacher*-féle rendszernek nevezzük, ahol a

$$\operatorname{sign}\alpha = \begin{cases} +1; & \text{ha} \quad \alpha > 0 \\ 0; & \text{ha} \quad \alpha = 0 \\ -1; & \text{ha} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

szimbólum jelenti az α előjelét.

Az értelmezésből adódik, hogy a [0, 1] intervallumot a $k/2^n$ ($k=0, 1, 2, 3, \ldots 2^n$) osztáspontokkal 2^n számú egyenlő szakaszra bontva, az $r_n(x)$ n-edik *Rademacher*-függvény az egyes szakaszokon felváltva a $+1$ és -1 állandó értékeket veszi fel, míg az osztáspontokon az értéke 0, azaz

$$(24) \qquad r_n(x) = \begin{cases} (-1)^k; & \text{ha} \quad x \in \left(\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right) \\ 0; & \text{ha} \quad x = \dfrac{k}{2^n} \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$$

Ha tehát valamely $x \in [0, 1]$ valós számnak a diadikus kifejtése

$$(25) \qquad x = 0 \cdot \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots \qquad (\alpha_i = 0, 1),$$

akkor

$$(26) \qquad r_n(x) = \begin{cases} 1; & \text{ha} \quad \alpha_n = 0 \\ -1; & \text{ha} \quad \alpha_n = 1 \\ 0; & \text{ha} \quad \alpha_n \text{ kétértelmű.} \end{cases}$$

Az értelmezés alapján azonnal látható, hogy az $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *Rademacher*-rendszer ortonormált a [0, 1] intervallumon.

Az e rendszer szerint haladó ún. *Rademacher*-féle sorok nevezetes konvergencia-tulajdonsággal rendelkeznek.

[2, 3] TÉTEL. *Ha* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *olyan együtthatósorozat, melyre*

$$(27) \qquad \sum c_n^2 < \infty,$$

akkor az ilyen együtthatókkal képezett

$$(28) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x)$$

Rademacher-sor konvergens m. m. $x \in [0, 1]$ *helyen* [7].

[2, 4] TÉTEL. *Ha a* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *együtthatósorozatra*

$$(29) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty$$

akkor a (28) *Rademacher-sor m. m. divergens a* [0, 1]-*ben* [9].

E két tételnek alapvető jelentősége van, amennyiben a feltételesen konvergens sorok konvergenciaelméletét a valószínűségelmélet szempontjából tekintjük.

Mindenekelőtt vegyük figyelembe, hogy az $r_n(x)$ *Rademacher*-függvények a $[0, 1]$ szakasz diadikusan irracionális $x\left(\neq\frac{p}{2^q}\right)$ pontjaiban $+1$ vagy a -1 értékeket veszik fel a (26)-nak megfelelően, és így egy ilyen x helyen a $\Sigma c_n r_n(x)$ sor az illető helytől függően a $\Sigma|c_n|$ sornak egy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm |c_n| \tag{30}$$

előjelezéssel ellátott sorát szolgáltatja. Az így kapott sornak az x helytől függő előjelezését (26) alapján a következőképpen is jellemezhetjük:

Minden $[0, 1]$-beli x értéket írjunk fel az

$$x = 0 \cdot \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{31}$$

végtelen diadikus tört alakban, és minden x-hez ennek megfelelően rendeljük hozzá a $(+1)$ és (-1) számokból alkotott ama

$$\Delta = \Delta(x) = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\pm 1, \pm 1, \ldots\} \tag{32}$$

előjelsorozatot, melyre

$$\delta_n = \begin{cases} 1; & \text{ha} \quad \alpha_n = 0 \\ -1; & \text{ha} \quad \alpha_n = 1 \end{cases} \tag{33}$$

és fordítva minden adott (32)-beli Δ előjelsorozathoz rendeljük hozzá azt a végtelen diadikus tört alakjában felírt $[0, 1]$-beli

$$x = x(\Delta) = 0 \cdot \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{34}$$

számot, melynek α_n jegyeire

$$\alpha_n = \frac{1-\delta_n}{2}. \tag{35}$$

Ilyen módon az összes előjelsorozatoknak a halmazát a diadikusan racionális $p2^{-q}$ ($q = 0, 1, 2, \ldots$; $p = 0, 1, \ldots 2^q$) helyektől eltekintve [6] kölcsönösen egyértelműen leképeztük a $[0, 1]$-beli valós számok halmazára.

Figyelembe véve, hogy a diadikusan racionális pontok halmaza megszámlálható és így nullamértékű halmaz a $[0, 1]$-ben, a tekintett leképezés segítségével a (32)-beli előjelsorozatok bármely adott $\mathscr{D} = \{\Delta\}$ halmazának megfelel a $[0, 1]$ intervallumnak egy $H = H(\mathscr{D})$ részhalmaza, és amennyiben e H halmaz mérhető, a $\mathscr{D}$-hez hozzárendelhetünk egy mértéket is, nevezetesen a H halmaz mértékét. E leképezés és mérték segítségével természetes módon adódik a következő

[2, 5] ÉRTELMEZÉS: A $+1$ és -1 „előjelekből” alkotott $\Delta = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\pm 1\}$ előjelsorozatoknak egy $\mathscr{D} = \{\Delta\}$ halmazáról akkor mondjuk, hogy majdnem minden előjelsorozatot („végtelen előjeleloszlást”) tartalmaz, ha $\mathscr{D}$-beli Δ elemeknek (34) és (35) alapján megfelelő $x = x(\Delta)$ pontok $H = H(\mathscr{D})$ halmaza 1 mértékű halmaz a $[0, 1]$-ben.

Értelmezésünk után a [2, 3] és [2, 4] tételek a következő szemléletes és egységes formában mondhatók ki

[6] Az $x = p2^{-q}$ értékek diadikus kifejtése nem egyértelmű.

[2, 5] TÉTEL. *Ha* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a nem-negatív valós számoknak egy adott sorozata, akkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n \tag{36}$$

végtelen sor majdnem minden előjelezés mellett konvergens, illetve divergens, aszerint, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \tag{37}$$

pozitív tagú sor konvergens, illetve divergens.

Még szemléletesebbé válik az utóbbi tétel jelentősége, ha figyelembe vesszük a *Rademacher*-rendszer függvényeinek a valószínűségelmélettel való kapcsolatát [10].

A [2, 4] értelmezés alapján az első n darab *Rademacher*-függvény a 2^n számú n elemből álló

$$r_1(x) = \pm 1, \; r_2(x) = \pm 1, \dots r_n(x) = \pm 1 \tag{38}$$

előjelvariációk mindegyikét egy-egy 2^{-n} mértékű intervallumon veszi fel. E mérték egyben annak a valószínűsége, hogy véletlen módon kapott n elemű előjelvariáció egy előre megadott n-elemű előjelvariáció legyen.

A valószínűség abszolút additivitását felhasználva megengedhetünk megszámlálhatóan végtelen sok elemű előjelvariációkat is, és így az előzővel összhangban a következő megállapítást tehetjük:

[2, 6] ÉRTELMEZÉS: Ha $\mathcal{D} = \{\Delta\}$ a $\Delta = \{\delta_n\} = \{\pm 1\}$ előjelsorozatoknak egy adott halmaza, akkor annak valószínűsége, hogy egy véletlen módon kapott $\pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots$ előjelsorozat a $\mathcal{D}$ eleme legyen, egyenlő ama $M = \{x\} \subseteq [0, 1]$ ponthalmaznak a mértékével, amelynek x pontjaira az $r_1(x), r_2(x), \dots \equiv \pm 1, \pm 1, \dots$ sorozat $\mathcal{D}$-be tartozik, feltéve, hogy az M halmaz mérhető.

Utóbbi értelmezésünk után a [2, 5] tétel valószínűségelméleti megfogalmazása a következő formát ölti:

[2, 6] TÉTEL. *A pozitív tagú* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *végtelen sorból véletlen előjelezéssel kapott* $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ *végtelen sor* 1 *valószínűséggel konvergens, illetve divergens aszerint, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ *sor konvergens, illetve divergens.*

A [2, 5] és [2, 6] tételek más szóval azt fejezik ki, hogy a konvergens sorokat „lényegében" a négyzetesen konvergens sorok alkotják.

Mindeme előkészítések után térjünk vissza az 1. pontban felvetett *Hardy*-féle problémára.

A [2, 5] és [2, 6] tételt a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-t}$ hiperharmonikus sorra alkalmazva közvetlenül nyerhető a

[2, 7] TÉTEL. *A rögzített* $t > 0$ *értékre vett* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-t}$ *hiperharmonikus sorból véletlen előjelezéssel nyert* $\sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-t}$ *sor* 1 *valószínűséggel konvergens, ha* $t > \frac{1}{2}$, *és* 1*-valószínűséggel divergens, ha* $t \leq \frac{1}{2}$.

Utóbbi tétel figyelembevételével a *Hardy*-féle probléma alapján természetszerűen vetődik fel a következő kérdés: Mit tudunk állítani a lényegében konvergens hiperharmonikus sorok C-szorzatsorairól? A válasz érdekében igazoljuk, hogy érvényes a következő

[2, 8] TÉTEL. *Ha $s>\frac{1}{2}$ és $t>\frac{1}{2}$, akkor az egymástól függetlenül véletlen előjelezéssel ellátott 1 valószínűséggel konvergens*

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\pm(n^{-s}) \quad \text{és} \quad B=\sum_{k=1}^{\infty}\pm(k^{-t}) \tag{39}$$

sorok C-szorzata is szintén konvergens.

Bizonyítás: Az s és t-re tett feltevéseink alapján a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2t} \tag{40}$$

sorok konvergens hiperharmonikus sorok és így a [2, 3] tétel alkalmazásával nyerjük, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n(x)}{n^s} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k(y)}{k^t} \tag{41}$$

Rademacher-sorok a $0\leqq x\leqq 1$, illetve a $0\leqq y\leqq 1$ intervallumokon m. m. konvergensek.

Ha tehát igazolni tudjuk, hogy a (41) alatti függvénysorok

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^s(m+1-k)^t}\,r_k(x)r_{m+1-k}(y)\right) \tag{42}$$

C-szorzatsora a sík N egységnégyzetének, azaz a

$$N=\{(x,y);\quad 0\leqq x\leqq 1,\, 0\leqq y\leqq 1\} \tag{43}$$

halmaznak majdnem minden (x, y) pontjában konvergens, akkor az ismert *Fubini*-féle tétel alapján [11] állításunk bizonyítást nyer.

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a (39)-beli sorokból nyert abszolút sorok olyan

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^t} \tag{44}$$

monoton fogyó pozitív tagú sorok, hogy még a

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\log^2 n\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\log^2 n \tag{45}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\log^2 n\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2t}}\log^2 n$$

sorok is konvergensek. Valóban az s és t kitevőkre tett feltevéseink alapján megadhatók olyan pozitív σ és τ értékek, melyekre

$$s=\tfrac{1}{2}+\sigma,\quad t=\tfrac{1}{2}+\tau \tag{46}$$

és így a (45) alatti sorok a konvergens

$$(47)\qquad \begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1+\sigma}}\frac{\log^2 n}{n^{\sigma}}\right) &= o(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}<\infty\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{1+\tau}}\frac{\log^2 n}{n^{\tau}}\right) &= o(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\tau}}<\infty\end{aligned}$$

sorokat szolgáltatják.

Észrevételünk után tételünk bizonyítást nyer, amennyiben igazoljuk a következő általánosabb állítást:

[2, 9] TÉTEL. *Ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ olyan monoton fogyó nullsorozatok, amelyekre a*

$$(48)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n<\infty \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \log^2 n<\infty$$

feltételek teljesülnek, akkor a m.m. $x\in[0, 1]$ és $y\in[0, 1]$ értékekre konvergens

$$(49)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(y)$$

Rademacher-soroknak C-sorozatsora, azaz a

$$(50)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} r_k(x) r_{n+1-k}(y)\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x, y)$$

üggvénysor m. m. $(x, y)\in N$ pontban konvergens.

E tétel bizonyítása érdekében először is vegyük figyelembe, hogy az (50) alatti C-szorzatsorban a zárójeleket elhagyva olyan

$$(51)\qquad \sum_{i,k} a_i b_k r_i(x) r_k(y) = \sum_{i,k} a_i b_k R_{ik}(x, y)$$

kétváltozós függvénysort kapunk, amelyben szereplő

$$(52)\qquad R_{ik}(x, y) = r_i(x) r_k(y)$$

függvények az N egységnégyzeten ortonormált függvényrendszert alkotnak, azaz bármely két (i, k) és (l, m) természetes számokból álló rendezett számpárra érvényesek a (22) formuláknak megfelelő

$$(53)\qquad \iint_N R_{ik} R_{lm}\, dx\, dy = \iint_N r_i(x) r_k(y) r_l(x) r_m(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[r_k(y) r_m(y) \int_0^1 r_i(x) r_l(x)\, dx \right] dy = \begin{cases} 0; & \text{ha} \quad (i, k) \neq (l, m) \\ 1; & \text{ha} \quad (i, k) = (l, m)\end{cases}$$

egyenlőségek.

Mivel $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ monoton fogyó zérósorozatok, és így minden n indexre $a_n > 0$ és $b_n > 0$, az (52) alatti jelöléssel a szóban forgó (50)-beli C-szorzatsor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x,y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{i+k=n+1} a_i^2 b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \frac{\sum\limits_{i+k=n+1} a_i b_k R_{ik}(x,y)}{\Big(\sum\limits_{i+k=n+1} a_i^2 b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x,y) \tag{54}$$

alakban írható, ahol a

$$\Phi_n(x,y) = \frac{\sum\limits_{i+k=n+1} a_i b_k R_{ik}(x,y)}{\Big(\sum\limits_{i+k=n+1} a_i^2 b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}} \tag{55}$$

függvények az (53) relációk alapján evidensen szintén egy ortonormált függvényrendszert alkotnak a N egységnégyzeten.

Mindezek után a [2, 9] tétel állítása igazolást nyer, ha a [2, 1] tétel kétváltozós formájának figyelembevételével ki tudjuk mutatni, hogy az (54) alatti $\sum c_n \Phi_n(x,y)$ ortogonális sor $\{c_n\}$ együtthatóinak segítségével képezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \log^2 n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{i+k=n+1} a_i^2 b_k^2\Big) \log^2 n \tag{56}$$

pozitív tagú sor konvergens.

Ennek érdekében jelöljük a (48)-beli feltevés miatt konvergens $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ sorok összegét α-, illetve β-val, és becsüljük meg felülről az (56) sor tagjait.

Mivel $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ monoton fogyó zérussorozatok, így a szóban forgó becslést a következő egyszerű formában végezhetjük el $n \geqq 2$ esetén[7]:

$$c_n^2 \log^2 n \leqq (\log n)^2 \Bigg(\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_k^2 a_{n+1-k}^2 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_k^2 b_{n+1-k}^2\Bigg) < \tag{57}$$

$$< (\log n)^2 \Bigg(a^2_{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 + b^2_{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\Bigg) = \Big(\beta a^2_{\left[\frac{n}{2}\right]} + \alpha b^2_{\left[\frac{n}{2}\right]}\Big) \log^2 n.$$

Innen azonnal adódik az (56) alatti sorra a következő majorizáció:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2 \log^2 n < 2\beta \sum_{k=1}^{\infty} a^2_{\left[\frac{2k+1}{2}\right]} \log^2 (2k+1) + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} b^2_{\left[\frac{2k+1}{2}\right]} \log^2 (2k+1) < \tag{58}$$

$$< 2(\alpha+\beta) \Bigg\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \log^2 (2k+1) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \log^2 (2k+1)\Bigg\} <$$

$$< 2(\alpha+\beta) \Bigg\{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \log^2 (3k)\Bigg\} < 2(\alpha+\beta) \Bigg\{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)(2\log^2 3 + 2\log^2 k)\Bigg\} <$$

$$< O(1) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) + O(1) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \log^2 k < \infty,$$

[7] $[\omega]$ = entier $\omega = \omega$ egész része jelölést felhasználva.

amivel az (56) alatti sor konvergenciáját, és így a [2, 8] és [2, 9] tételeinket igazoltuk. Egyben a valószínűségelmélet megvilágításában választ nyertünk az 1. pontban felvetett *Hardy*-féle problémára, amely megmutatja a HARDY által sejtett példa effektív megadásának nehézségét, miszerint az ő általa említett példának a megadhatósága 0 valószínűséggel rendelkezik.

3. A [2, 9] tétel bizonyításában erősen kihasználtuk a (49)-beli tényezősorok $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ együtthatóinak monoton fogyó voltát.

E pontban megmutatjuk, hogy a [2, 9] tétel érvényessége akkor is megmarad, ha az abban szereplő $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ együtthatósorozatok monotonitására tett feltevésünket elejtjük, sőt azt is igazoljuk, hogy a tényezősorokból adódó C-szorzatsor konvergenciája még akkor is megmarad, ha az abban szereplő zárójeleket felbontjuk.

[3, 1] TÉTEL. *Ha* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *és* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tetszőleges olyan sorozatok, melyekre a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \log^2 n < \infty \tag{59}$$

feltételek teljesülnek, akkor a m. m. $x \in [0, 1]$ *és* $y \in [0, 1]$ *értékekre konvergens*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n r_n(y) \tag{60}$$

Rademacher-sorok C-szorzatsora még akkor is konvergens lesz m. m. $(x, y) \in N$ *pontban, ha az abban szereplő tagok zárójeleit felbontjuk.*

Bizonyítás. A szóban forgó (60)-beli sorok C-szorzatsorát az (54) alatt megismert átalakítással felírva olyan

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x, y) \tag{61}$$

$N = \{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$-ben ortogonális sort kapunk, amelyre[8]

$$c_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_{n+1-k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{62}$$

és

$$\Phi_n(x, y) = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} r_k(x) r_{n+1-k}(y)}{c_n}.$$

Mivel az (59) feltevések miatt $\sum a_n^2$ és $\sum b_n^2$ konvergens sorok, ezért a [2, 3] tétel alapján a (60) alatti sorok m. m. $x \in [0, 1]$ és $y \in [0, 1]$ értékekre konvergensek lévén, CESÀRO [12] ismert tétele szerint az (61) alatti ortogonális sor m. m. $(x, y) \in N$ pontban $(C, 1)$ szummábilis a tényezősorok összegeinek a szorzatához.

Ha tehát a (61)-beli C-szorzatsor részletösszegeire bevezetjük az

$$s_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k(x, y) \tag{63}$$

[8] Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy valamennyi n indexre $c_n \neq 0$.

jelölést, azt kapjuk, hogy e részletösszegek

$$\sigma_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k(x, y) \tag{64}$$

számtani közepei m. m. $(x, y) \in \overset{\prime}{N}$ pontban konvergensek. Ha figyelembe vesszük még, hogy a (61) ortogonális sorra (62) és (59) alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_{n+1-k}^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right) < \infty, \tag{65}$$

akkor alkalmazhatjuk KOLMOGOROV [13] egy nevezetes eredményét, amely szerint ha egy ortogonális sor majdnem mindenütt $(C, 1)$ szummábilis és az együtthatóinak négyzeteiből alkotott sor konvergens, akkor a sor részletösszegeinek 2^n indexű részsorozata m. m. konvergens.

Arra jutunk tehát, hogy pusztán a $\sum a_n^2 < \infty$ és $\sum b_n^2 < \infty$ feltevések mellett a (60) sorok (61) alatti C-szorzatsorának

$$s_{2^n}(x, y) = \sum_{k=1}^{2^n} c_k \Phi_k(x, y) \tag{66}$$

részletösszegei m. m. $(x, y) \in N$ pontban konvergensek, midőn $n \to \infty$.

Bevezetve tehát a

$$R_{i,k}(x, y) = r_i(x) r_k(y) = R_{i,k} \tag{67}$$

N-ben ortonormált függvényeket, a (66)-ban szereplő függvénysorozat két egymás után következő elemének különbségére a (61)-beli C-szorzatsor alábbi (általános értelemben vett) szeletét nyerjük:

$$s_{2^{k+1}} - s_{2^k} = \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} c_i \Phi_i(x, y) = \tag{68}$$

$$= (a_1 b_{2^k+1} R_{1,2^k+1} + a_2 b_{2^k} R_{2,2^k} + \ldots + a_{2^k+1} b_1 R_{2^k+1,1}) +$$
$$+ (a_1 b_{2^k+2} R_{1,2^k+2} + a_2 b_{2^k+1} R_{2,2^k+1} + \ldots + a_{2^k+2} b_1 R_{2^k+2,1}) +$$
$$+ \ldots +$$
$$+ (a_1 b_{2^{k+1}} R_{1,2^{k+1}} + a_2 b_{2^{k+1}-1} R_{2,2^{k+1}-1} + \ldots + a_{2^{k+1}} b_1 R_{2^{k+1},1}).$$

Ha ebben az összegben a zárójeleket elhagyjuk és az így kapott összegnek n-edik részletösszegét $s_{k,n}^*(x, y)$-nal jelöljük, akkor a [3, 1] tétel igazolása érdekében elegendő belátnunk, hogy az n index választásától függetlenül

$$s_{k,n}^*(x, y) - s_{2^k}(x, y) \to 0 \tag{69}$$

m. m. $(x, y) \in N$-re, midőn $k \to \infty$.

A [2, 2] tételben kimondott *Mensov*-lemmának kétváltozós ortonormált rendszerekre való alkalmazása alapján minden k indexhez megadható egy olyan $\delta_k(x, y) \in \mathcal{L}^2(N)$ függvény, hogy bármely n-re a N egységnégyzet minden (x, y) pontjában

$$|s_{k,n}^*(x, y) - s_{2^k}(x, y)| \leqq \delta_k(x, y), \tag{70}$$

és ugyanakkor bármely k-ra (68) szerint az

$$(71)\qquad \iint_N \delta_k^2(x,y)\,dx\,dy \leqq$$

$$\leqq O(1)\{\log((2^k+1)+(2^k+2)+\ldots+2^{k+1})\}^2 \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \Big(\sum_{\nu+\mu=i+1} a_\nu^2 b_\mu^2\Big)$$

egyenlőtlenségek fennálljanak, ahol az utóbbi egyenlőtlenség jobb oldalának utolsó tényezőjében a (68)-beli összeg együtthatóinak négyzetösszege áll. Ha ez utóbbi összegben minden belső zárójelbeli összeget durván szólva első és második felére bontjuk, és bevezetjük a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = A < \infty$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = B < \infty$ jelölést, akkor a (71) egyenlőtlenség bal oldalára könnyen tudunk egy alkalmasabb felső becslést adni:

$$(72)\qquad \iint_N \delta_k^2(x,y)\,dx\,dy \leqq$$

$$\leqq O(1)\left\{\log\left(2^k\frac{2^k+1+2^{k+1}}{2}\right)\right\}^2 \left\{A\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^{k+1}} b_i^2 + B\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^{k+1}} a_i^2\right\}.$$

Ha végül feltesszük, hogy $k \geqq 2$ úgy $2^{k-1}(2^k+1+2^{k+1}) \leqq 2^{k-1}(2\cdot 2^{k+1}) = 2^3(2^{k-1})^2 \leqq (2^{k-1})^3$ és így (72)-ből

$$(73)\qquad \iint_N \delta_k^2(x,y)\,dx\,dy = O(1)\,\{\log^2(2^{k-1})\} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^{k+1}} (b_i^2+a_i^2),$$

amiből azonnal adódik, hogy

$$(74)\qquad \sum_{k=2}^{\infty} \iint_N \delta_k^2(x,y)\,dx\,dy = O(1)\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^{k+1}} (a_i^2+b_i^2)\log^2 i\right) =$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\log^2 n < \infty$$

és így a BEPPO LEVI tétel szerint a

$$(75)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k^2(x,y)$$

pozitív tagú függvénysor m. m. $(x,y)\in N$ pontban konvergens, tehát m. m. $(x,y)\in N$ pontra

$$(76)\qquad \delta_k(x,y) \to 0,$$

midőn $k\to\infty$, amiből (70) és (69) egybevetésével tételünk igazsága adódik.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] F. Mertens: Über die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **79**, (1875) 182—184.

[2] N. H. Abel: Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\dots$$

Journal für die reine und angewandte Mathematik **1** (1826) 311—339 (317—318).

[3] A. Pringsheim: Ueber die Multiplications bedingt convergenter Reihen, *Mathematische Annalen* **21** (1883) 327—378.

[4] A. Pringsheim: Eine Anwendung auf die Multiplication zweier trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* **26** (1886) 157.

[5] G. H. Hardy: The multiplication of conditionally convergent series. *Proceedings of the London mathematical Society* II, **6** (1908) 410—422.

[6] K. Tandori: Über die orthogonalen Funktionen I, *Acta Sci. Math. Szeged* **18** (1957) 57—130.

[7] H. Rademacher: Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen* **87** (1922) 112—138.

[8] D. Mensov: Sur les séries de fonctions othogonales I, *Fundamenta Math.* **4** (1923) 82—105.

[9] J. Hincsin—A. Kolmogorov: Über die Konvergenz der Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden. *Recueil Math. Moscou* (Mat. Sbornik) **32** (1925) 668—677.

[10] H. Steinhaus: Les probabilites dénombrables et leur rapport á la théorie de la mesure, *Fundamenta Math.* **4** (1923) 286—310.

[11] G. Fubini: Sugli integrali multipli, *Rend. Accad. Lincei Roma,* **16** (1907) 608—614.

[12] E. Cesáro: Sur la multiplication des series, *Bulletin des sciences mathematiques II*, **14** (4890) 14—

[13] A. Kolmogorov: Une contribution á l'étude de la convergence des series de Fourier, *Fund. Math.* **5** (1924) 96—97.

(Beérkezett: 1967. II. 13.)

ON A PROBLEM OF G. H. HARDY CONCERNING TO C-MULTIPLICATION OF INFINITE SERIES

by L. G. Pál

Summary

In 2 the following theorem is proved: If two hyperharmonic series $\sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-s}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-t}$ converge with probability 1 (i. e. if $s, t > \frac{1}{2}$) then their Cauchy-product series converges too.

3 contains the following generalization of theorem [2, 9]: If for two given series $A=\sum a_n$ and $B=\sum b_n$ the conditons

$$\sum a_n^2 \log^2 n<\infty, \qquad \sum b_n^2 \log^2 n<\infty$$

are satisfied, then the Cauchy-product of A and B is convergent.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

MARKOV-FOLYAMATOK ÉS AZ ANALÍZIS EGYES VELÜK KAPCSOLATOS PROBLÉMÁI[1]

Írta: E. B. DINKIN

1. A *Markov*-folyamatok elméletének kezdeti kialakulásától fogva nyilvánvaló volt, hogy szoros kapcsolat áll fenn a *Markov*-folyamatok és az analízis egyes problémái között. Nem hiába viselte A. N. KOLMOGOROV ebben a tárgykörben alapvető munkája, amelyet 1931-ben tett közzé, „A valószínűségelmélet analitikus módszereiről" címet [39] (orosz fordítás: [38]). Jelentős részében az említett összefüggéseket tanulmányozza A. JA. HINCSIN 1933-ban megjelent, „A valószínűségelmélet aszimptotikus törvényei" című könyve is [52] (orosz fordítás: [51]).

Az ötvenes években — és különösen az utolsó öt évben — a *Markov*-folyamatok elmélete az intenzív fejlődés új szakaszába lépett. Ha korábban a valószínűségelmélet és az analízis közötti kapcsolatok bizonyos fokig egyoldalúaknak voltak is mondhatók (a valószínűségelmélet saját céljaira felhasználta az analízis eredményeit és módszereit), napjainkban mindinkább kialakul a fordított helyzet is: az analízis egyes problémáinak vizsgálatában valószínűségelméleti módszereket alkalmaznak. Így nemcsak heurisztikus következtetésekre jutnak a valószínűségelmélet módszerei révén, hanem számos esetben szigorú bizonyítást is kapnak analitikus eredményekre. A lineáris operátorok félcsoportjai elméletének módszereit felhasználva lehetségessé vált a *Markov*-folyamatok tág osztályait korábbiaknál alaposabban osztályozni. Új, mély összefüggésekre bukkantak rá a *Markov*-folyamatok elmélete és a potenciálelmélet között. Kritikai felülvizsgálásnak vetették alá az elmélet alapjait: a „szigorúan *Markov*-folyamat" fogalom, amely újdonság volt, rendkívüli fontosságra tett szert a *Markov*-folyamatok egész elmélete szempontjából. Ezekben az újabb irányokban intenzív munka folyik az egész világon; sok kiváló matematikus veti latba képességeit: FELLER, DOOB, HUNT, RAY, CHUNG, KAC és még sokan

[1] Ez a cikk kibővített szövege annak a szemleszerű előadásnak, amelyet a szerző 1959. október 20-án mondott el a Moszkvai Matematikai Társaság ülésén (ezt az ülést a Moszkvai Egyetemen E. B. Dinkin vezetésével működő szeminárium tudományos munkabeszámolójának szentelték). (*Uszpehi Matematicseszkih Nauk* 15 (1960): 2, 3—24).

mások az USA-ban, ITO, YOSIDA, MARUYAMA és tanítványai Japánban, KENDALL, REUTER és mások Angliában, FORTET Franciaországban. A szovjet matematikusok is aktívan részt vesznek ebben az alkotó versengésben. A *Markov*-folyamatok elméletének új irányaival foglalkozó matematikusok egy csoportja a Moszkvai Egyetemen a szerző vezetésével szemináriumot létesített. A jelen szemlében azokról az alapvető eredményekről lesz szó, amelyeket e szeminárium résztvevői értek el az 1955/56. tanévtől kezdve. Így figyelmünket különösen azokra az új eredményekre fordítjuk, amelyek az utóbbi néhány évben születtek. Természetesen szemlénkben szó lesz külföldi matematikusoknak olyan munkáiról is, amelyek a szeminárium tematikájával vannak kapcsolatban. E tekintetben azonban nem tarthatunk igényt a teljességre.

A bevezető 1. §-ban röviden összefoglaljuk a *Markov*-folyamatok elméletéből számunkra szükséges alapfogalmakat. A szeminárium munkájának legfőbb irányairól a 2—7. §-ban adunk beszámolót. A befejező 8. § bizonyos tájékoztatást tartalmaz a szeminárium résztvevőiről és történetéről.

1. §. Bevezetés

2. Mit értünk *Markov*-folyamaton? Hadd kezdjem a *Markov*-folyamatok egy fontos osztályával (az úgynevezett diffúziós folyamatokkal), amelyek a *Brown-mozgásnak* nevezett fizikai jelenséget írják le. Ismeretes, hogy valamely folyadékban elkevert festék részecskéi kaotikusan mozognak, szakadatlanul változtatva mozgásuk irányát. Ennek a mozgásnak az oka a részecskék ütközései a folyadék molekuláival. A *Brown*-mozgás első matematikai elméletét EINSTEIN és SMOLUCHOWSKI alkotta meg. Az A. N. KOLMOGOROVtól származó korszerűbb formában ez az elmélet a következő. Alapvető matematikai fogalom a $P(t, x, \Gamma)$ függvény, amely annak a valószínűségét adja meg, hogy az x pontból elindult részecske t idő múlva a Γ halmazba kerül. E függvény tulajdonságaira tett néhány feltevésből azután levezethető, hogy

$$P(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)\, dy,$$

ahol $p(t, x, y)$ a

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial p^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1}$$

parabolikus differenciálegyenlet alapmegoldása. A most megfogalmazott eredmény lehetővé teszi, hogy a *Brown*-mozgással kapcsolatos egész sor fontos kérdésre választ adjunk a differenciálegyenletek elméletének módszereivel. Emellett azonban egész sor más, nem kevésbé fontos probléma nem tárgyalható a vázolt elmélet keretében. Például érdekelhet minket az is, mennyire gyorsan fognak a festékrészecskék leülepedni valamilyen elnyelő felületre. Hacsak nem vezetünk be bizonyos kiegészítő feltételeket, akkor ennek a problémának a megoldását csupán a $P(t, x, \Gamma)$ függvény felhasználásával nem lehet megkapni.

3. A *Brown*-mozgás eddigieknél pontosabb matematikai modelljének nemcsak azokkal a valószínűségekkel kell számolnia, amelyek egyetlen időpontra vonatkoznak, hanem a folyamat egész lefolyására vonatkozó valószínűségeket is figyelembe kell vennie. Ekkor az elmélet tárgya már a mozgás x_t realizációja lesz. A mozgás véletlenszerű jellegét az a feltevés fejezi ki matematikai formában, hogy $x_t = x_t(\omega)$, ahol ω valamilyen Ω halmaz — „az elemi események tere" — egy eleme, és ezen a halmazon a P_x valószínűségi mértékek bizonyos összessége van megadva. Azokat az A halmazokat, amelyekre a $P_x(A)$ értékek definiálva vannak, a folyamattal kapcsolatos eseményeknek nevezzük, és a $P_x(A)$ értéket úgy értelmezzük, mint az A esemény valószínűségét azon feltétel mellett, hogy a mozgás az x pontból indul el. A folyamattal kapcsolatos események közé tartozik például az $\{x_t \in \Gamma\}$ esemény. A $P_x\{x_t \in \Gamma\} = P(t, x, \Gamma)$ valószínűséget a folyamat átmenet-függvényének nevezzük. Az első modellben ezt a folyamat egyetlen matematikai jellemzőjének tekintettük, most azonban alárendelt szerepet kap.

Az a matematikai fogalom, amelyet megkaptunk, a tulajdonképpeni *Markov*-folyamat, korszerű felfogásban. *Markov*-folyamatnak nevezzük az (x_t, P_x) párt, ahol $x_t = x_t(\omega)$ egy függvény, amely $t \geqq 0$ és $\omega \in \Omega$ esetén van értelmezve, P_x pedig az Ω eseménytér bizonyos részhalmazain értelmezett valószínűségi mértékek összessége. Az a fázistér, amelybe az x_t függvény értékei esnek, a *Brown*-féle mozgás esetében a háromdimenziós tér bizonyos tartománya. Általában azonban ez egy tetszőleges E halmaz, amelyben értelmezve van „mérhető részhalmazok" bizonyos rendszere. Az az alapfeltevés, amelyet az x_t függvénynek és a P_x mértéknek ki kell elégítenie, a *Markov*-féle elv: ismert jelen esetében a jövő független a múlttól. Pontosabban, x_t ismert értéke mellett a részecske további mozgásának prognózisa nem függ a t időpontig lefolyt mozgás jellegétől.

4. Az az általános szkéma, amely a *Markov*-folyamatokat kapcsolatba hozza az analízissel, a fázistérben értelmezett függvények eltolásának fogalmára van alapozva. Rögzítsünk valamilyen t időpontot. Legyen $f(x)$ a fázistérben értelmezett mérhető függvény. Ekkor $f(x_t)$ valamilyen függvény az Ω térben. Ennek a függvénynek a P_x mérték szerinti integrálja az eltolt függvény értéke az x pontban. Képletben ez így írható fel:

$$T_t f(x) = M_x f(x_t) = \int_E f(y) P(t, x, dy);$$

ahol $P(t, x, \Gamma)$ az átmenet-függvény. A T_t függvény-eltolás egy lineáris operátor. A *Markov*-féle elvből következik, hogy $T_s T_t = T_{s+t}$ $(s, t \geqq 0)$, vagyis a T_t operátorok félcsoportot alkotnak. Tekintsük most a „végtelen kicsi eltolás operátorát", amelynek definíciója

$$Af(x) = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}. \tag{2}$$

Ezt az operátort a *Markov*-folyamat *infinitezimális* operátorának nevezzük. Ha Af definiálva van, akkor $T_t f$ megoldása a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \tag{3}$$

egyenletnek, $u(0, x) = f(x)$ kezdeti feltétel mellett.

Diffúziós foyamat esetében, (amely *Brown*-mozgást ír le) az infinitezimális operátort az

$$Af = \sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{4}$$

képlet adja[2] (ahol az $a_{ij}(x)$ számok minden x-re pozitív szemidefinit matrixot képeznek). Ebben az esetben a (3) egyenlet lényegében véve egyenértékű az (1) egyenlettel.

Általában a folyamat átmenet-függvényét úgy tekinthetjük, mint a (3) egyenlethez tartozó alapmegoldást, vagy *Green*-függvényt. Az a körülmény azonban, hogy a P_x mértékek bizonyos rendszere rendelkezésünkre áll, megengedi, hogy elméletünk keretei között sokkalta gazdagabb konstrukciókat és transzformációkat vezessünk be, mint ahogy az csupán a differenciálegyenletek elméletének keretében lehetséges volna. Például abban a képletben, amely a T_t eltolás-operátort definiálja, a t állandót helyettesíthetjük a τ véletlen időponttal. A T_τ operátorok már nem fejezhetők ki átmenet-függvény segítségével. Mindazonáltal ilyen operátorok révén lehetséges például kifejezni a *Dirichlet*-probléma megoldását tetszőleges elliptikus egyenlet és tetszőleges tartomány esetében.

2. §. A Markov-folyamatok elméletének általános problémái

5. Ezek a problémák a *Markov*-folyamatok elméletének megalapozásával kapcsolatosak, és túlnyomórészt halmazelméleti jellegűek. Három ilyen problémára térek itt ki.

Az első közülük a folyamat realizációi jellegének kérdése. Példaként tekintsünk egy diffúziós folyamatot, amelynek infinitezimális operátorát a (4) képlet definiálja. Vajon folytonos lesz-e ennek a folyamatnak minden realizációja? Ez a probléma alapvető jelentőségű nemcsak a *Brown*-mozgás vizsgálata szempontjából, hanem a (4) differenciáloperátorral kapcsolatos bármely analitikus probléma kvalitatív megoldása szempontjából is. Milyen is a válasz erre a kérdésre? Mindenekelőtt, a kérdés nem egészen helyesen van felvetve. Arról van szó, hogy a realizációk halmazát nem határozza meg egyértelműen az infinitezimális operátor, vagy az átmenet-függvény. Ezért sokkal helyesebb így tenni fel a kérdést: létezik-e olyan (4) infinitezimális operátorral rendelkező *Markov*-folyamat, amelynek minden realizációja folytonos? Erre a kérdésre igenlő a válasz. A *Markov*-folyamatok elméletében diffúziós folyamaton a (4) infinitezimális operátorral rendelkező folyamatok közül mindig azokat értjük, amelyeknek minden realizációja folytonos. Ezt a folytonos realizációjú folyamatot az A operátor lényegében véve egyértelműen meghatározza.

Egy általános kritériumot, amely lehetővé teszi annak megállapítását, milyen átmenet-függvényeknek felelnek meg a folytonos realizációjú *Markov*-folyamatok, 1952-ben E. B. DINKIN vezetett be [35]. Nem sokkal később ugyanerre az eredményre jutott KINNEY amerikai matematikus [82] is. Ez a kritérium egészen egyszerű, de csak elégséges és nem szükséges. 1957-ben L. V. SZEREGIN [43] egy másik, kissé bonyo-

[2] Pontosabban, az A operátort a (4) képlet az összes kétszer folytonosan differenciálható függvényekre vonatkozólag adja meg. Mindamellett értelmezési tartományába esnek bizonyos, nem ennyire sima függvények is. Ily módon az infinitezimális operátor bizonyos kiterjesztése a (4) differenciáloperátornak.

lultabb, ugyanakkor azonban erősebb kritériumot vezetett be, amely az esetek tág osztályában nemcsak elégséges, hanem szükséges is a realizációk folytonosságához.

A *Dinkin—Kinney*-féle kritériumra támaszkodva egyszerű elégséges feltétele adható meg a realizációk folytonosságának az infinitezimális operátor segítségével. Ennek a feltételnek a leglényegesebb része az a követelmény, hogy az operátor lokális jellegű legyen, vagyis $Af(x_0)$ értéke ne változzék meg, amidőn a függvény az x_0 pont bizonyos környezetén kívül megváltozik. Ez a feltétel nyilván teljesül az összes differenciáloperátorokra. Ebből megkapható a diffúziós folyamatok realizációinak folytonosságáról szóló fentebb említett tétel. DINKIN, KINNEY és SZEREGIN munkáiban a folytonosság feltételei mellett feltételek találhatók arra is, hogy a folyamat összes realizációi jobbról folytonosak legyenek, vagy pedig ne legyen másodfajú szakadásuk. A *Markov*-folyamatok bizonyos speciális osztályánál a relációk jobbról való folytonosságára egészen finom feltételeket kapott A. A. JUSKEVICS [57], [58].

6. A másik probléma, amely a *Markov*-folyamatok elméletében felmerült, az a kérdés, mi a hatásköre a *Markov*-féle elvnek, annak, hogy ismert jelen mellett a jövő független a múlttól.

A folyamat minden realizációját vágjuk szét két részre: a valamilyen Γ halmaz első elérésének τ időpontjáig tartó részre, és az ezen időpont utáni részre. Tegyük fel, hogy ismerjük x_τ-t. Lényeges-e a mozgás ismerete a τ időpontig ahhoz, hogy megjósolhassuk a mozgás lefolyását a τ időpont után? A fizikai szemlélet negatív választ kíván. Mindazonáltal ilyen válasz egyáltalán nem következik a *Markov*-folyamat definíciójából, minthogy abban a t rögzített időpont szerepel, nem pedig a τ véletlen időpont. Azokat a *Markov*-folyamatokat, amelyek esetében az a feltétel, hogy ismert jelen mellett a jövő a múlttól független, nemcsak állandó időpontra, hanem a τ véletlen időpontok jól definiált osztályára is teljesül, szigorú értelemben vett *Markov*-folyamatoknak vagy röviden szigorúan *Markov*-folyamatoknak nevezzük.

Az első munka, amely szabatosan megfogalmazza és bizonyítja bizonyos folyamatok szigorú *Markov*-tulajdonságát, J. L. DOOB [64] dolgozata volt. DOOB e munkájában *Markov*-folyamatok bizonyos speciális osztályát vizsgálta, melyben a fázistér megszámlálható volt. Ugyanebből a szempontból 1953-ban A. A. JUSKEVICS tanulmányozott általánosabb típusú folyamatokat, amelyeknél az állapotok halmaza szintén megszámlálható volt [56]).

A szigorúan *Markov*-folyamatokat, mint a *Markov*-folyamatok önálló osztályát az 1955—1956. években kezdte tanulmányozni E. B. DINKIN [22], [23], [26], valamint E. B. DINKIN és A. A. JUSKEVICS [36] [3]. DINKIN megmutatta, hogy a szigorú *Markov*-tulajdonságból kiindulva, valamint ehhez hozzávéve a folyamat realizációinak folytonosságára vonatkozó bizonyos követelményeket, ki lehet számítani a folyamatok infinitezimális operátorait. E. B. DINKIN és A. A. JUSKEVICS dolgozatában először szerepel a szigorú értelemben vett *Markov*-folyamatok általános definíciója, valamint példákat adnak olyan *Markov*-folyamatokra, amelyek nem szigorúan *Markov*-félék, végül szó van azokról a feltételekről is, amelyek elegendőek ahhoz, hogy egy *Markov*-folyamat szigorúan *Markov*-féle legyen.

[3] 1956-ban három amerikai dolgozat is megjelent (HUNT [78], CHUNG [62], RAY [86]) melyeknek szerzői — JUSKEVICStől és DINKINtől függetlenül — a szigorú Markov-tulajdonság különböző formáit tanulmányozták a *Markov*-folyamatok bizonyos speciális osztályára.

Ezek a feltételek a következők. Meg kell követelni, hogy bizonyos topológiában a folyamat összes realizációi jobbról folytonosak legyenek, az eltolás-operátorok pedig a folytonos, korlátos függvényeket újból folytonosakba vigyék át. Nem nehéz belátni, hogy diffúziós folyamatok esetében mindkét feltétel teljesül, úgyhogy a diffúziós folyamatok egyszersmind szigorúan *Markov*-félék is.

Az utolsó három évben egész sor munka jelent meg, amelyben további analízisnek vetik alá a szigorú *Markov*-tulajdonságot (A. A. JUSKEVICS [57], [59], R. BLUMENTHAL [60], E. B. DINKIN [27], G. MARUYAMA [84], P. LEVI [83], D. RAY [87]). Igen érdekes D. RAY munkája, amelyben megmutatja, hogy elég általános feltételek mellett kiterjeszthető a *Markov*-folyamat fázistere úgy, hogy a folyamat szigorúan *Markov*-félévé váljék.

A szigorúan *Markov*-folyamatokról szóló alapvető eredmények, valamint a realizációk folytonosságának legfőbb kritériumai helyet kaptak E. B. DINKIN [33] monográfiájában is.

7. A harmadik halmazelméleti probléma, amelyet érinteni akarok, a fázistér legtermészetesebb topologizálásának kérdése. A *Markov*-folyamat definíciójában semmiféle topológia sem szerepel. Az E fázistér tetszőleges absztrakt halmaz, amelyben mérhető részhalmazok bizonyos rendszere van megadva. Mindazonáltal, amint már láttuk a *Markov*-folyamatok tanulmányozásakor, be kell vezetni ilyen vagy olyan topológiát a fázistérben. 1959-ben E. B. DINKIN [31] a következő javaslatot tette a legtermészetesebb topológia definíciójára: a Γ halmazt nyíltnak nevezzük, ha tetszőleges $x \in \Gamma$ mellett az x-ből kiinduló realizáció 1 valószínűséggel Γ határain belül marad pozitív időtartam lefolyása alatt.[4] E legtermészetesebb topológiáról érdekes tulajdonságok bizonyíthatók be az úgynevezett standard folyamatok tág osztályára, — ide tartoznak az összes, az alkalmazásokban előforduló folyamatok, speciálisan az összes diffúziós folyamatok is. Kimutatható, hogy ilyen folyamatok esetében az x pont akkor és csak akkor tartozik a Γ halmaz természetes lezárásába, ha az x-ből kiinduló részecske 1 valószínűséggel eléri Γ-t tetszőleges kis időtartam alatt. Az $f(x)$ függvény akkor és csak akkor folytonos e legtermészetesebb topológiában, amidőn $f(x_t)$ 1 valószínűséggel t jobbról folytonos függvénye. Ez utóbbi eredmény I. V. GIRSZANOVtól származik [15].

I. V. GIRSZANOV [15] és M. G. SUR [54] bebizonyították, hogy az $f(x)$ függvény folytonossága a természetes topológiában olyan tulajdonság, amely eltoláskor megmarad. Ez a feltétel — ti., hogy az eltolások az összes folytonos függvényt folytonosba viszi át —, igen fontos szerepet játszanak a *Markov*-folyamatok elméletében (láttuk, hogy ez az egyik a két feltétel közül, amelyek biztosítják egy *Markov*-folyamat szigorúan *Markov* jellegét). Durván szólva ez a feltétel azt jelenti, hogy egymáshoz közeli pontokból kiindult realizációk egyformán viselkednek. Ennek a feltételnek a szerepére először W. FELLER mutatott rá. Ezért azokat a folyamatokat, amelyek eleget tesznek ennek a feltételnek, *Feller*-folyamatoknak nevezzük. SUR és GIRSZANOV eredményének, amely azt mondja ki, hogy természetes topológiában az összes standard folyamatok *Feller*-félék, jelentős elvi érdekessége is van.

A természetes topológia egyáltalán nem az egyetlen topológia, amely a *Markov*-folyamatok elmélete szempontjából érdekes. Speciálisan, érdekes valamely a folyamat-

[4] A *Brown*-mozgás esetében, amely a *Laplace*-operátornak felel meg, ez a topológia egybeesik azzal a topológiával, amelyet korábban H. CARTAN [61] és J. L. DOOB [65], [66] tanulmányoztak.

tal invariáns módon kapcsolatban álló bizonyos egyenletes struktúrának a definíciója, amelyet I. V. GIRSZANOV javasolt [15]. A *Brown*-mozgás esetében ezt a struktúrát a közönséges euklidészi metrika indukálja.

3. §. Az infinitezimális operátor alakja. Általánosított diffúziós folyamatok

8. Milyen operátorok lesznek *Markov*-folyamatok infinitezimális operátorai? Ennek a kérdésnek sarkalatos jelentősége van a *Markov*-folyamatok elmélete szempontjából, minthogy egészen általános feltételek mellett az infinitezimális operátor alapján egyértelműen előállítható az átmenet-függvény (lásd [25]), az átmenetfüggvény révén pedig áttekinthető az ennek a függvénynek megfelelő folyamatok teljes osztálya. Másrészről ez a kérdés az analízis szempontjából is érdekes, mert ez a következő kérdéssel ekvivalens: milyen operátorokra lehet alkalmazni valószínűségelméleti vizsgálati módszereket?

Az infinitezimális operátor alakja tanulmányozásának fontos eszköze E. B. DINKIN egy általános tétele [22], [26].

E tétel állítása a következő képletbe foglalható:

$$Af(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{T_{\tau_U} f(x) - f(x)}{M_x \tau_U}. \tag{5}$$

Itt U az x pont környezete; τ_U az U-ból való első kilépés időpontja; a határátmenet során U az x-re húzódik össze.

Ennek a képletnek figyelemre méltó a hasonlósága a (2) képlethez, amely az infinitezimális operátort definiálja. Mindazonáltal — nem tekintve most a formális hasonlóságot — az átmenet az egyik képletről a másikra távolról sem triviális. Ennél az átmenetnél lényegesen fel kell használni azt, hogy a tekintett folyamat szigorúan *Markov*-féle és jobbról folytonos. Teljes szigorúsággal csak azt mondhatjuk, hogy az alaptétel idézett alakja csupán *Feller*-folyamatokra érvényes, de kicsit más alakjában átvihető nem-*Feller*-folyamatokra is.

Az (5) képlet jobb oldalán álló főtag a következő alakban is írható:

$$T_{\tau_U} f(x) = M_x f[x(\tau_U)] = \int_E f(y) \Pi_x(dy),$$

ahol Π_x a valószínűségeloszlást jelenti arra a pontra nézve, amelybe a részecske U-ból való kilépésének pillanatában esik. Ha a folyamat folytonos, akkor ez az eloszlás U határán összpontosul. Ebben az esetben az A infinitezimális operátor előállítására nyert recept, amelyet az (5) képlet ad meg, erősen emlékeztet annak a jól ismert receptjére, hogyan lehet megkapni a közönséges *Laplace*-operátort a gömbre történő átlagolás operátorából; a különbség csupán az, hogy az általános esetben az átlagolást nem egyenletes mérték szerint végezzük el, mint a *Laplace*-operátor esetében, hanem bizonyos nem egyenletes mérték szerint. Kézenfekvő minden olyan operátort, amelyet ilyen recept segítségével kaptunk, *általánosított másodrendű elliptikus differenciáloperátornak* nevezni. Ezt az elnevezést még az is jogosulttá teszi, hogy az ilyen operátorok a közönséges elliptikus operátorok számos tulajdonságával rendelkeznek, valamint az is, hogy ha bizonyos tartományban az (5) jobb oldalán álló határérték létezik oly függvényekre, amelyeket a koordináták és a koordináták páronkénti szorzatai adnak meg, akkor minden kétszer differenciálható függvényre ez a határérték leírható közönséges elliptikus differenciáloperátorral (amely esetleg degenerált).

Így, ha egy *Feller*-folyamat folytonos, akkor annak infinitezimális operátora általánosított, másodrendű elliptikus differenciáloperátor.

Ebben az értelemben *bármely folytonos Feller-folyamat úgy tekinthető, mint egy általánosított diffúziós folyamat.*

9. Az a gondolat, hogy bármely, folytonos realizációjú *Feller*-folyamat általánosított diffúziós folyamat is, további támogatásra talál a számegyenesen értelmezett folyamatok esetében.

Azt találjuk, hogy ebben az esetben az infinitezimális operátor egy általánosított második derivált,

$$Af(x) = D_v D_u f(x), \tag{6}$$

ahol $D_u f$ az u függvény szerinti derivált, vagyis az f növekménye és az u függvény növekménye hányadosának határértéke. Ebben a képletben az u és v tetszőleges növekvő függvények; az u függvénynek folytonosnak kell lennie (a v függvény szakadásos is lehet). Ha az u és v függvények kétszer differenciálhatók, akkor a (6) operátor a következő alakban írható:

$$Af(x) = a(x)\frac{d^2 f}{dx^2} + b(x)\frac{df}{dx}, \tag{6'}$$

vagyis közönséges diffúziós folyamattal van dolgunk. Úgy fogható fel a dolog, hogy a (6) képlettel megadott általános folytonos egydimenziós folyamat diffúziós folyamat is, amelynél az $a(x)$ és $b(x)$ együtthatók (bizonyos értelemben) általánosított függvények.

A (6) képlet könnyen levezethető az (5) képletből. Mégis, legelőször ezt W. FELLER egészen más, tisztán analitikus módszerrel vezette le. ([73], lásd még [77]). FELLER jelentős dolgozata a *Markov*-folyamatok elmélete fejlődésének egyik legfontosabb ösztönzője volt az utóbbi években.

10. A közelmúltban egész sor eredményt kaptak a (6) operátornak megfelelő folytonos folyamatok tulajdonságaival kapcsolatban.

Speciálisan A. B. VENTCEL [5] kimutatta, hogy az ilyen folyamatok átmenetfüggvénye a következő alakban írható:

$$P(t, x, \Gamma) = \int p(t, x, y)\, dv(y),$$

ahol $p(t, x, y) = p(t, y, x)$ a

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D_v D_u p$$

egyenlet alapmegoldása.

A. D. VENTCEL [4] dolgozatában jelentős további eredményt ért el egy másik problémával kapcsolatban is, amelyet még a 30-as években vizsgált I. G. PETROVSZKIJ [41] jelentős munkájában. Ennek a problémának a valószínűségelméleti értelmezése a következő: ki kell számítani, hogy mi a nagyságrendje a mozgó részecske t idő alatt az x kiindulási ponttól való maximális eltérésének, amidőn $t \to 0$. Az x tengely transzformálása révén az általános eset visszavezethető az $u(x) \equiv x$ esetre (ebben az esetben $b(x) \equiv 0$). I. G. PETROVSZKIJ teljesen megoldotta a problémát annak a folyamatnak az esetére, amely a d^2/dx^2 operátornak felel meg. Nem nehéz megmutatni, hogy tetszőleges, reguláris $a(x)$ együttható esetén a mozgó részecske viselkedése ugyanolyan lesz, mint PETROVSZKIJ esetében. A. D. VENTCEL megvizsgálta a (6) operátornak megfelelő általános folyamatokat és megmutatta, hogy ezek esetében lényeges kvalitatív eltérések lehetnek a *Petrovszkij*-féle esettől. Durván szólva, a *Petrovszkij*-féle esetben a részecske maximális eltérése a kiindulási helyzettől (t idő alatt) $t^{\frac{1}{2}}$ rendű. VENTCEL megmutatta, hogy ha az $a(x)$ együtthatónak szingularitása van a mozgás kiindulási pontjában, akkor az említett eltérésnek tetszőleges t^α rendje lehet, ahol $0 < \alpha < 1$. Azon pontokban pedig, amelyekben $v(x)$-nek szakadása van, az eltérésnek rendje t.

A valószínűségelméleti szkémába belefoglalhatók az

$$a(x)\frac{d^2f}{dx^2}+b(x)\frac{df}{dx}+c(x)f \qquad (c \leqq 0)$$

típusú, az eddigieknél általánosabb differenciáloperátorok is. Ilyen operátoroknak azok a *Markov*-folyamatok felelnek meg, amelyek valamilyen véletlen időpontban megszakadnak. Amint azt nemrég E. B. DINKIN megmutatta [90], az ilyen típusú, az egyenesen értelmezett megszakadó folytonos folyamatok általános alakját úgy lehet megkapni, hogy a (6) képletet az

$$Af = D_r D_u \left(\frac{f}{\pi}\right) \tag{7}$$

képlettel behelyettesítjük, ahol $1/\pi$ bizonyos általánosított értelemben alulról konkáv függvény.

11. Amikor az (5) alaptételből levezetjük a (6) képletet, egyszersmind egyszerű kifejezést is kapunk az u és v függvényekre a folyamat egyes szemléletes valószínűségi jellemzőinek segítségével. Tegyük fel, hogy a mozgás bizonyos szakaszon folyik le, ekkor ilyen szemléletes jellemzők lesznek: annak a $p(x)$ valószínűsége, hogy az x pontból kiindulva a jobb oldali végpontot korábban elérjük, mint a bal oldalit; az $m(x)$ átlagos idő, amely eltelik az x-ből való kilépés időpontjától kezdve a határ eléréséig.

Két analóg, szemléletes jellemzőt bevezethetünk többdimenziós folyamatok esetében is. A *III. Össz-szövetségi Matematikus Gyűlésen* tartott összefoglaló előadásában E. B. DINKIN felvetette a következő problémát [29]: a többdimenziós folyamatok milyen osztályai esetében áll fenn, hogy ez a két jellemző teljesen meghatározza a folyamatot? 1958-ban I. V. GIRSZANOV [14] bebizonyította, hogy egyik ilyen típusú osztály azon többdimenziós diffúziós folyamatok osztálya, amelyek esetében az $a_{ij}(x)$ matrix nem elfajult.

12. Főképpen a folytonos realizációjú folyamatokkal foglalkoztam eddig. Lényeges eredmények sorakoznak azonban a nem-folytonos realizációjú folyamatokra vonatkozóan is. Többek között E. B. DINKIN [28] megadta a tisztán ugrásokból álló folyamatok teljes osztályozását. Ezek olyan folyamatok, amelyekben a mozgás teljesen ugrások formájában történik, vagyis amelyekben egy részecske, mely bizonyos pozitív időn át a kiindulási pontban tartózkodik, később újabb pontra ugrik át, abból pedig egy másik pontba és így tovább. Az ilyen folyamatok tanulmányozásakor az alapvető nehézségeket az okozza, hogy esetünkben transzfinit ugrássorozatok lehetségesek. Az ilyen folyamatok vizsgálatának menete néhány éven át egyhelyben állott. Ma azonban teljesen megoldották már a problémákat.

4. §. Markov-folyamatokkal kapcsolatos harmonikus, szubharmonikus és szuperharmonikus függvények

13. Emlékezzünk vissza a szuperharmonikus függvények szokásos definíciójára. Az $f(x)$ függvény *szuperharmonikus*, ha

a) f-nek tetszőleges, x-ben elhelyezett középpontú gömbfelületre vonatkozó átlaga kisebb vagy egyenlő $f(x)$-szel;

b) $f(x)$ felülről folytonos.

Ha az első feltétel akkor is teljesül, midőn a kisebb vagy egyenlő jelet az egyenlőségjellel cseréljük fel, akkor az f függvényt *harmonikusnak* nevezzük. Ha a feltétel nagyobb vagy egyenlő jellel áll fenn, akkor f-et *szubharmonikusnak* nevezzük. Vizsgálódásunkat konkretizálandó, a jövőben csak szuperharmonikus függvényekről fogunk beszélni.

Minden *Markov*-folyamat kapcsolatba hozható bizonyos függvényosztályokkal, amelyek a közönséges szuperharmonikus függvények analogonjai. Az *a)* és *b)* feltételeket a következőkkel kell helyettesíteni:

a') $T_\tau f(x) \leqq f(x)$ (τ tetszőleges nyílt halmazból történő első kilépés időpontja);

b') $T_{\tau_n} f(x) \to f(x)$, ha $P_x\{\tau_n \to 0\} = 1$.

A diffúziós folyamat esetében, amely a *Laplace*-operátornak felel meg, az *a')*—*b')* feltételek ekvivalensek az *a)*—*b)* feltételekkel. Ennek a ténynek a bizonyítása egyáltalán nem egyszerű, könnyű azonban rávilágítani arra, miért következik *a)* az *a')*-ből. Legyen τ az első kilépés időpontja abból a gömbből, amelyet az S gömb körülvesz. Ekkor a *Laplace*-operátor minden mozgással szemben fennálló invarianciája folytán a részecske a gömb középpontjából kilépve, a határ elérésének időpontjában egyenletes eloszlású lesz az S gömbön. Ezért $T_\tau f(x) = M_x f(x_\tau)$ az S gömbre vett átlagra redukálódik.

A *Markov*-folyamattal kapcsolatos szuperharmonikus függvény fogalmát E. B. DINKIN vezette be [31] munkájában[5]. Itt a szerző bebizonyítja, hogy a *Markov*-folyamatokkal kapcsolatos nem-negatív szuperharmonikus függvények osztálya azonos az úgynevezett excesszív függvények osztályával, amelyet 1957-ben G. A. HUNT vezetett be [79]. HUNT úgy definiálja az excesszív függvényt, mint egy olyan nemnegatív függvényt, amely eltoláskor nem növekedik. Pontosabban, teljesülniük kell a következő feltételeknek:

a") tetszőleges t mellett $T_t f(x) \leqq f(x)$;

b") $T_t f(x) \to f(x)$, amidőn $t \to 0$.

[5] Diszkrét paraméterű *Markov*-folyamatokkal kapcsolatos harmonikus, szubharmonikus és szuperharmonikus függvényeket W. FELLER és J. L. DOOB vizsgáltak [74] illetve [69] munkájukban. Bizonyos speciális diffúziós folyamatok esetére ezeknek a függvényeknek a vizsgálata megtalálható J. L. DOOB [64]—[66] munkáiban.

HUNT egész sor nagy jelentőségű tételt bizonyított be az excesszív függvényekről. Figyelembe véve az excesszív és szuperharmonikus függvények közötti összefüggést, HUNT eredményeiből a következő következtetések vonhatók le:

1. Nevezzük az f függvényt *simának*, ha Af értelmezve van. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy sima függvény szuperharmonikus legyen, az hogy $Af \leqq 0$.

2. Minden nem-negatív szuperharmonikus függvény sima szuperharmonikus függvények valamely nemcsökkenő sorozatának határértéke.

3. Az összes szuperharmonikus függvény folytonos a természetes topológiában.

14. Az excesszív függvény fogalmával szoros kapcsolatban van az excesszív valószínűségi változó fogalma. Ez a fogalom csak a közelmúltban keletkezett (lásd E. B. DINKIN [34], [90]). Hogy ezt definiálhassuk, bizonyos kitérőt kell tennünk. A $t \to t+h$ időtranszformáció alkalmazásával az x_t valószínűségi változó x_{t+h}-ba megy át. Ez a transzformáció kézenfekvő módon kiterjeszthető az összes valószínűségi változóra, amely egy *Markov*-folyamattal kapcsolatos. Így keletkezik aztán egy bizonyos operátor, amely az Ω téren megadott függvényeket transzformál. Ezt szokásos θ_h-val jelölni.

A ξ nem-negatív valószínűségi változót *excesszívnek* nevezzük akkor, ha

α) $\theta_h \xi \leqq \xi$, tetszőleges h-ra;

β) $\theta_h \xi \to \xi$, amidőn $h \to 0$.

Excesszív valószínűségi változóra példa a

$$\xi = \int_0^\infty f(x_t)\, dt, \quad \text{ahol} \quad f \geqq 0$$

valószínűségi változó. Valóban

$$\theta_h \xi = \int_0^\infty f(x_{t+h})\, dt = \int_h^\infty f(x_t)\, dt,$$

amiből világos, hogy az α) és β) feltételek teljesülnek.

Nem nehéz igazolni, hogy ha ξ excesszív valószínűségi változó, akkor

$$f(x) = M_x \xi \tag{8}$$

excesszív függvény.

Egy nagy jelentőségű tételből, amelyet V. A. VOLKONSZKIJ bizonyított be [12], [13], következik, hogy minden korlátos excesszív függvény előállítható (8) alakban. L. V. SZEREGIN példákat adott olyan nem korlátos excesszív függvényekre, melyek (8) alakban nem írhatók fel. Nagyon érdekes volna megvizsgálni azt, hogy milyen tág a nem-korlátos excesszív függvényeknek az az osztálya, amelyet a (8) alakban még előállítható függvények alkotnak.

15. A (8) előállítás speciális esete a szuperharmonikus függvények potenciál alakjában történő előállításának. A háromdimenziós térben a *Newton*-féle potenciál definiálható a

(9) $$V(x) = \int_E \frac{f(y)\,dy}{\|x-y\|}$$

képlettel (az integrálás a *Lebesgue*-mérték szerint történik, $\|x\|$ az x vektor hosszát jelenti, $f(y)$ pedig egy nem-negatív függvény, amely úgy tekinthető, mint valamilyen eloszlás sűrűségfüggvénye.

Megmutatható, hogy a (9) képlet a következő alakra írható át:

(10) $$V(x) = M_x \int_0^\infty f(x_t)\,dt,$$

ahol x_t a *Laplace*-operátornak megfelelő diffúziós folyamat a háromdimenziós térben. A (10) képletnek tetszőleges *Markov*-folyamatra is van értelme, és ez lehetővé teszi, hogy potenciált konstruáljunk tetszőleges ilyen folyamathoz. Megjegyezzük, hogy a (10) előállítás speciális esete a szuperharmonikus függvények excesszív valószínűségi változó segítségével történő előállításának: ξ helyett $\int_0^\infty f(x_t)dt$ veendő.

A szuperharmonikus függvényekre vonatkozó, szemináriumunkban kapott eredmények közül okvetlenül megemlítendő még M. G. SUR egy tétele [55], amely azt mondja ki, hogy RIESZ klasszikus tétele — mely szerint tetszőleges szuperharmonikus függvény felbontható egy harmonikus függvény és egy potenciál összegére —, átvihető a szuperharmonikus függvények ama osztályára, amely valamilyen nem elfajult diffúziós folyamattal (vagyis tetszőleges másodrendű elliptikus differenciáloperátorral) van kapcsolatban.

5. §. Additív funkcionálok és a Markov-folyamatok velük kapcsolatos transzformációi

16. A φ_t valószínűségi változók rendszerét a *Markov*-folyamat *additív funkcionáljának* nevezzük, ha

1. $\theta_h\varphi_t = \varphi_{t+h} - \varphi_h$;

2. φ_t-t a folyamat t időpontig terjedő szakasza meghatározza.

Markov-folyamat additív funkcionáljára példa a

$$\varphi_t = \int_0^t f(x_t)\,dt.$$

A *Brown*-mozgás esetében ismeretes még egy fontos példa additív funkcionálra, az úgynevezett sztochasztikus integrál,

$$\varphi_t = \int_0^t b(x_t)\,dt,$$

(ezzel kapcsolatban l. [91]-et).

Ha φ_t additív funkcionál, akkor az

$$\alpha_t = e^{\varphi_t}$$

függvényt *multiplikatív funkcionálnak* nevezzük. Az előbbiek szerint ez eleget tesz a 2. feltételnek, az 1. feltétel helyett azonban egy analóg tulajdonság teljesül, amelyben a kivonás jel osztás jellel van felcserélve.

17 [6]. A multiplikatív funkcionálok jelentősége a *Markov*-folyamatok elmélete szempontjából nyilvánvaló a következőkből. Legyen

$$\tilde{P}(t, x, \Gamma) = \int_{x_t \in \Gamma} \alpha_t P_x(d\omega).$$

Belátható, hogy ha α_t multiplikatív funkcionál, amelyre $M_x \alpha_t \leqq 1$, akkor létezik egy *Markov*-folyamat, melynek átmenet-függvénye $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$ lesz. Általában véve ez a folyamat megszakadó is lehet.

Természetszerűleg felmerül a kérdés: mikor választható meg a $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$ átmenet-függvénynek megfelelő folyamat oly módon, hogy ugyanazok a realizációi legyenek, mint a kiindulási folyamatnak?

Azt találjuk, hogy ehhez elégséges, hogy létezzék egy ξ valószínűségi változó, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\alpha_t \theta_t \xi \leqq \xi$, minden t-re,
2. $M_x \xi = 1$, minden x-re,
3. $\theta_h \xi \to \xi$, amidőn $h \to 0$.

Ha ez a feltétel teljesül, akkor a $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$ átmenet-függvényű folyamat megkonstruálható ugyanazzal a realizáció halmazzal, csak — durván szólva — véletlenszerűen meg kell *rövidíteni* ezeket a realizációkat.

Tekintsük most ezeknek a transzformációknak három fontos speciális osztályát.

18. Ha az 1. feltétel egyenlőségjellel teljesül, akkor semmiféle lerövidítést nem kell végezni a realizációkon. Ebben az esetben az új folyamatra való áttérés a P_x mérték transzformációjára vezet, a

$$\tilde{P}_x(A) = \int_A \xi P_x(d\omega) \tag{11}$$

képlet szerint.

Ez az eset speciálisan akkor áll fenn, amidőn a kiindulási folyamat megszakadó diffúziós folyamat, az α_t funkcionált pedig az

$$\alpha_t = \exp\left[-\int_0^t b(x_u)\, dx_u - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(x_u)\, dx_u\right] \tag{12}$$

képlet adja meg. ξ helyett ez esetben $\lim\limits_{t \to \zeta} \alpha_t$ vehető, ahol ζ a folyamat megszakadásának időpontja. A (11) transzformáció arra vezet, hogy a folyamat infinitezimális

[6] A 17—20. pontokban kifejtett eredmények megtalálhatók E. B. Dinkin [34], [92] (lásd még [90]) munkájában.

operátorához hozzá kell venni a $b(x)\frac{d}{dx}$ tagot. Többdimenziós esetben analóg konstrukció segítségével a nem elfajult diffúziós folyamat infinitezimális operátorához tetszőleges elsőrendű differenciáloperátort kell hozzá venni (lásd [16], valamint [42], ahol további irodalmi utalások is találhatók).

19. A folyamat transzformációjára a második fontos példát kapjuk, ha az α_t funkcionál minden t-re eleget tesz az $\alpha_t \leqq 1$ feltételnek. Akkor az 1.—3. feltételek $\xi = 1$-re teljesülnek. Ezt a folyamatokra alkalmazott operációt már korábban is alkalmazta E. B. DINKIN [33] (lásd ezenkívül [32]-t is). Az ekkor kapott folyamatokat a kiindulási folyamat *alfolyamatainak* nevezzük.

Az alfolyamat képezése arra vezethető vissza, hogy a kiindulási folyamat realizációja bizonyos valószínűségeloszlást követve megszakad: α_t ekkor annak a valószínűségét adja meg, hogy a megszakadás a t időpont után következik be.

20. A folyamat transzformációjára adandó harmadik fontos példa az excesszív valószínűségi változókkal kapcsolatos.

Legyen ξ valamilyen excesszív valószínűségi változó és $f(x) = M_x \xi$ a megfelelő excesszív függvény. Ekkor

$$\alpha_t = \frac{f(x_t)}{f(x_0)}$$

multiplikatív funkcionál, az α_t, $\frac{\xi}{f(x_0)}$ pár pedig eleget tesz az 1.—3. feltételeknek. Ily módon a folyamatnak egy érdekes transzformációját kapjuk, amely az infinitezimális operátort az

$$\tilde{A}g = \frac{1}{f} A(fg)$$

képlet szerint transzformálja. Ezt a transzformációt korábban még nem tanulmányozták.

21. Az additív funkcionálokkal kapcsolatos a folyamatok még egy nagyon fontos transzformációja is, amelynek tárgyalása azonban túllépné a tárgyalt szkéma kereteit. Ez az úgynevezett véletlenszerű időmegváltoztatás.

Legyen $\tau(t)$ egy monoton növekvő sztochasztikus függvény. Helyettesítsük az x_t függvényt az $\tilde{y}_t = x_{\tau(t)}$ függvénnyel. Ahhoz, hogy ezen transzformáció után újból *Markov*-folyamatot kapjunk, elégséges, hogy az a φ_t függvény, amely a $\tau(t)$ növekvő függvény inverze, additív funkcionált határozzon meg. (Ez az eredmény csak a kiinduló (x_t, P_x) folyamatra tett bizonyos kikötések mellett van bebizonyítva.)

A *Markov*-folyamatoknál az idő véletlenszerű megváltoztatását először V. A. VOLKONSZKIJ tanulmányozta [9] munkájában. Itt többek közt bebizonyította, hogy az összes egydimenziós folytonos folyamatot megkaphatjuk a d^2/dx^2 operátorral kapcsolatos legegyszerűbb diffúziós folyamatból, éspedig úgy, hogy az x tengelyt monoton transzformációnak vetjük alá, az időt pedig véletlenszerűen megváltoztatjuk. Megjegyezzük, hogy az időnek az a véletlenszerű megváltoztatása, amely a $\varphi_t = \int_0^t f(x_u)\,du$ additív funkcionálnak felel meg, a folyamat infinitezimális operátorának az $f(x)^{-1}$ függvénnyel való megszorzódására vezet.

22. A mondottakból, úgy hiszem, eléggé világos, hogy az additív és multiplikatív funkcionáloknak igen nagy jelentősége van a *Markov*-folyamatok elmélete szempontjából. Ezért nagy érdeklődésre számíthat a következő probléma: adott folyamat esetében meghatározandó az ezen folyamathoz tartozó összes additív funkcionál. V. A. VOLKONSZKIJnak [13] sikerült meghatároznia az egydimenziós *Brown*-mozgáshoz tartozó összes nem-negatív additív funkcionált. Ha azonban lemondunk a nemnegatív jelleg megköveteléséről, vagy pedig több dimenzióra térünk át, akkor a probléma mindmáig megoldatlan. Úgy gondoljuk, hogy ez az egyik legaktuálisabb probléma a *Markov*-folyamatok elméletében.

Nagy érdeklődésre számíthat még a *Markov*-folyamatok transzformációjával kapcsolatos kérdések köre. Ebben az esetben egy bizonyos új kalkulussal van dolgunk, amely a rendelkezésre álló analitikus eszközök tárházát gazdagítja.

6. §. Sztochasztikus integrálegyenletek

23. Legyen x_t, ill. $\tilde{x}_t$ az a folyamat, amely a d^2/dx^2, ill. az

$$L = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d}{dx}+m(x)\frac{d}{dx}$$

operátornak felel meg. Amint azt K. ITO [80], [81] megmutatta, az x_t és $\tilde{x}_t$ folyamatok megválaszthatók úgy, hogy az

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_0 + \int_0^t m(\tilde{x}_t)\,dt + \int_0^t \sigma(\tilde{x}_t)\,dx_t \tag{13}$$

összefüggés álljon fenn köztük. Jobb oldalt egy sztochasztikus integrál áll, amellyel már találkoztunk az additív funkcionálokról szóló fejezetben. A (13) egyenletnek egyszerű fizikai értelme van. Ha ezt a következő alakban írjuk:

$$d\tilde{x}_t = m(\tilde{x}_t)\,dt+\sigma(\tilde{x}_t)\,dx_t, \tag{14}$$

akkor azt fejezi ki, hogy a részecske ismert $\tilde{x}_t=x$ helyzetekor a mozgás kis idő alatt lényegében véve egy $m(x)$ sebességű determinált mozgásból, és egy $\sigma(x)$ együtthatóval jellemzett diffúzióból (amely a d^2/dx^2 operátornak felel meg) tevődik össze.

A (13) képletet úgy tekinthetjük, mint egy integrálegyenletet, amely lehetővé teszi $\tilde{x}_t$ kifejezését x_t segítségével. Ennek az egyenletnek a megoldására a szukcesszív approkszimáció módszerét alkalmazhatjuk. Analóg integrálegyenlet írható fel többdimenziós folyamatok esetére is. Ily módon igen alkalmas analitikus apparátust kapunk ahhoz, hogy olyan problémákat, amelyek általános elliptikus, másodrendű differenciáloperátorokkal kapcsolatosak, a *Laplace*-operátorra vonatkozó feladatokra vezessünk vissza. Nem egészen pontosan, inkább szemléletesen mindezeket nagyjából így mondhatjuk el: ITO módszere lehetővé teszi, hogy a folyamat átmenetvalószínűségeire vonatkozó parciális differenciálegyenletek tanulmányozását pótolhassuk a folyamat realizációira vonatkozó közönséges differenciálegyenletek tanulmányozásával. Igaz, hogy ezek a differenciálegyenletek sztochasztikusak, de ugyanúgy tanulmányozhatók, mint a közönséges differenciálegyenletek: visszavezethetjük őket egy olyan integrálegyenletre, amely a szukcesszív approkszimáció módszerével megoldható.

24. A sztochasztikus differenciálegyenletek módszerét ITO sikeresen alkalmazta egész sor konkrét analitikus és valószínűségelméleti probléma megoldásában. Ezt a módszert használva fel, I. V. GIRSZANOV [18] megmutatta, hogy a (4) differenciáloperátor nem elfajult voltával kapcsolatos elég tág megkötések mellett az ennek megfelelő diffúziós folyamat a következő tulajdonságú lesz: az összes korlátos, *Borel*-mérhető függvények a $T_t(t>0)$ eltolással folytonos függvényekbe mennek át. Ez annak a *Feller*-féle feltételnek egy erősebb alakja, amelyről a 2. § végén szó volt; az ezen tulajdonsággal rendelkező folyamatokat *erősen Feller-folyamatoknak* nevezzük. Az erősen *Feller*-folyamat fogalmát I. V. GIRSZANOV vezette be és tanulmányozta [17] munkájában.

A. V. SZKOROHOD [88], [89] a sztochasztikus differenciálegyenletek módszerével tanulmányozta egyes egydimenziós diffúziós folyamatok peremérték-problémáit.

M. I. FREJDLIN [44] felhasználta ezt a módszert oly elliptikus egyenletekkel kapcsolatos peremérték-problémák vizsgálatában, amelyek egy tartományon belül elfajultak. Itt meg kell jegyezni, hogy a differenciálegyenletek elvont elméletében használt számos módszertől eltérően ITO módszere tökéletesen érzéketlen a differenciáloperátor elfajulásával szemben. Valóban, ez tette lehetővé, hogy M. I. FREJDLIN lényeges előrehaladást érjen el az említett probléma vizsgálatában, amelyet eddig eléggé intenzíven vizsgáltak már a klasszikus analízis eszközeivel.

Az *Ito*-féle sztochasztikus egyenletek másik nagy előnye az, hogy alkalmazásuk egyáltalán nem válik bonyolultabbá, amidőn a dimenziószám növekszik. Az áttérés egy dimenzióról n dimenzióra csaknem automatikusan történik. Emellett K. DAMBISZ [19] nemrég kimutatta, hogy majdnem ugyanolyan egyszerű az áttérés végtelen nagy dimenziószámra is. A diffúziós folyamatokra a *Hilbert*-térben általa felírt sztochasztikus integrálegyenletek lehetővé teszik, hogy tanulmányozzuk oly függvényekre vonatkozó elliptikus és parabolikus differenciálegyenleteket is, melyek argumentumai végtelen halmazt alkotnak. Ez az elmélet talán még rendkívül jelentőssé válik, egyelőre azonban csak az első lépéseket tették meg ezen a téren.

7. §. A differenciálegyenletek elméletének peremérték-problémái és a realizációk aszimptotikus viselkedése

25. Egy, a (4)-hez hasonló analitikus képlet megadása általában véve nem határozza meg teljesen a folyamat infinitezimális operátorát. Az infinitezimális operátor fogalmának lényeges részét képezi azon függvények összességének megadása, amelyen ez az operátor definiálva van. Ez a függvényhalmaz, jól definiált simasági követelmények mellett, bizonyos peremfeltételekkel van megadva; azonban a peremfeltételeket általában véve nem lehet egyértelműen megadni. Egyik legfontosabb feladat a peremfeltételek összes lehetséges típusának a tanulmányozása. Azt tapasztaljuk, hogy minden peremfeltétel-típus a realizációk aszimptotikus viselkedésének meghatározott típusával kapcsolatos (aszimptotikus viselkedés itt a tartomány határához való közeledésre vonatkozik).

W. FELLER [70], [71], [76] [7] leírta az összes lehetséges típusú peremfeltételt egydimenziós diffúziós és általánosított diffúziós folyamatok esetében. Emellett áttekin-

[7] FELLER említett munkái közül az elsőben lényeges hiba volt, amelyet először A. D. VENTCEL javított ki [2] munkájában.

tést adott a differenciáloperátornak a határ közelében fellépő összes elfajulási esetéről. A többdimenziós probléma lényegesen nehezebb. Valamit foglalkoztak ezzel a differenciálegyenletek elméletének specialistái. Valószínűségelméleti módszereket használva fel azonban lényeges előrehaladást sikerült elérni ezen a területen. A. D. VENTCEL [3], [6] tanulmányozta a peremfeltételek legáltalánosabb alakját oly elliptikus egyenletek esetében, amelyek nem fajulnak el reguláris határon. Ugyanő ennek során új típusú peremfeltételeket talált, amilyeneket eddig nem tanulmányoztak a differenciálegyenletek elméletében.

Azok közül a munkák közül, amelyek a peremérték-problémák területén az utóbbi években külföldön megjelentek, okvetlenül meg kell említeni J. L. DOOB [67], [68] dolgozat-ciklusát, amely az első peremérték-problémával foglalkozik, a legáltalánosabb megfogalmazásban.

R. Z. HASZMINSZKIJ [46] az elliptikus egyenletekre vonatkozó első peremérték-problémát tanulmányozta abban az esetben, amidőn az egyenlet a tartomány határán elfajul. Ennek folyamán sikerült olyan eredményeket elérnie, amelyek lényegesen általánosabbak és teljesebbek, mint amelyek M. V. KELDIS, M. I. VISIK és mások korábbi munkáiban találhatók.

Amint már a 6. §-ban említettük, M. I. FREJDLIN [44] tanulmányozta az első peremérték-problémát oly egyenletek esetében, amelyek a tartományon belül elfajulnak.

A peremérték-problémák mellett érdeklődésre tarthatnak számot a differenciálegyenletek elméletében az aszimptotikus problémák is, például az a probléma, hogyan viselkedik egy parabolikus differenciálegyenlet $u(t, x)$ megoldása, amidőn $t \to \infty$. A valószínűségelméletben az ilyen jellegű tételeket *ergodikus tételeknek* nevezzük. E tételeket úgy is lehet tanulmányozni, ha vizsgáljuk a folyamat realizációinak viselkedését, amidőn $t \to \infty$. Az egydimenziós általánosított *Brown*-féle mozgás esetét MARUYAMA és TANAKA tanulmányozták [85] munkájukban. Többdimenziós esetben igen érdekes eredményeket kapott R. Z. HASZMINSZKIJ [49].

8. §. Befejezés

26. Ebben a rövid áttekintésben nem nyílt lehetőség számomra akár csak érinteni is egész sor olyan munkát, amelyet a szeminárium résztvevői végeztek. Felsorolok néhányat közülük: F. I. KARPELEVICS, V. N. TUTUBALIN és M. G. SUR [37] munkája a *Lobacsevszkij*-féle síkban lefolyó *Brown*-mozgás kapcsolatáról a hullámvezetők fizikai elméletével, M. G. SUR munkája a *Markov*-láncok ergodikus tulajdonságairól [53], R. Z. HASZMINSZKIJ munkája valamely *Markov*-folyamat additív funkcionáljainak határeloszlásairól [50], továbbá ugyanezen szerző [47] munkája az $Af(x)+c(x)f(x)=0$ egyenlet pozitív megoldásairól (ebben a munkában többek között bebizonyította, hogy egy elliptikus operátor legkisebb sajátértéke stabilitással rendelkezik bizonyos nagy tartomány-megváltoztatásokkal szemben); LJAN CSZSI-SUEN [40] és A. D. VENTCEL és LJAN CSZSI-SUEN [7] munkái a feltételes *Markov*-folyamatokról, — és egész sor más mű.

27. Záradékul néhány szót szeretnék szólni szemináriumunk történetéről és állományáról.

A *Markov*-folyamatokkal foglalkozó szeminárium az 1957/58. tanév folyamán vált ki az általános valószínűségelméleti tudományos szeminárium kötelékéből, amely utóbbi a Moszkvai Állami Egyetemen az előadó vezetése alatt az 1954/55. tanévtől kezdve működött. Mindazonáltal meg kell jegyezni, hogy azok a témák, amelyek a *Markov*-folyamatok elméletének új fejezeteivel kapcsolatosak, már az 1955. tanévtől kezdve meghatározták az általános szeminárium tudományos alapirányvonalát. A szeminárium állandó és aktíve dolgozó résztvevői: A. D. VENTCEL, B. A. VOLKONSZKIJ, I. V. GIRSZANOV, E. B. DINKIN, L. V. SZEREGIN, V. TUTUBALIN, M. I. FREJDLIN, R. Z. HASZMINSZKIJ, M. G. SUR, A. A. JUSKEVICS. Néhány matematikus — akik ugyan nem voltak állandó résztvevői a szemináriumnak — egész sor érdekes tudományos eredményt adott a szemináriumon felvetett problémákkal kapcsolatban. A nevezettek előadásokat tartottak a szemináriumon, melyek aztán élénk vitát váltottak ki. Ezek a személyek: A. V. SZKOROHOD, aki 1957-ben befejezte az aspirantúrát a Moszkvai Egyetemen és jelenleg a Kijevi Egyetemen dolgozik, valamint JU. V. BLAGOVESCSENSZKIJ, aki a Dubnai Egyesült Atommagkutató Intézetben dolgozik. 1958-tól kezdve aktívan részt vesz a szemináriumon kínai kollégánk, LJAN CSZSI-SUEN.

Az 1958—1959-es tanévben a szemináriumban 10 hallgató készítette el diplomamunkáját. Ezek közül több önálló tudományos eredményeket tartalmaz, amelyek jelenleg már a sajtó alá rendezés állapotában vannak.

Az alább következő irodalomjegyzékben fel vannak tüntetve mindazok a munkák, amelyek a Moszkvai Egyetemen a *Markov*-folyamatok elméletével foglalkozó szemináriumon készültek, függetlenül attól, meg vannak-e említve szemlénkben vagy sem. Más munkákból az irodalomjegyzék csak olyanokat tartalmaz, amelyekre hivatkozás történik cikkünkben.

IRODALOMJEGYZÉK*

[1] Ю. В. Благовещенский: О диффузионных процессах с малой дисперсией. (Előnyomat.)

[2] А. Д. Вентцель: Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка. ДАН 111:2 (1956), 269—272.

[3] А. Д. Вентцель: О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов. Теория вероятн. и ее прим. 4:2 (1959), 172—185.

[4] А. Д. Вентцель: О локальном поведении траекторий диффузионного процесса, 1960. (Előnyomat.)

[5] А. Д. Вентцель: О плотности вероятностей перехода одномерного диффузионного процесса. (Előnyomat.)

[6] А. Д. Вентцель: Общие граничные задачи, связанные с диффузионными процессами. УМН 15:2 (1960), 202—204.

[7] А. Д. Вентцель, Лян-Чжи-шуэн: Условные марковские процессы. (Előnyomat.)

[8] В. А. Волконский: Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний. Теория вероятн. и ее прим. 2:2 (1957), 230—255.

[9] В. А. Волконский: Случайная замена времени в строго марковских процессах. Теория вероятн. и ее прим. 3:3 (1958), 332—350.

[10] В. А. Волконский: Непрерывные одномерные марковские процессы и аддитивные функционалы от них. Теория вероятн. и ее прим. 4:2 (1959), 208—211.

[11] В. А. Волконский: Построение неоднородных марковских процессов с помощью случайной замены времени. Теория вероятн. и ее прим. 6 (1961), 47—56.

* A cikk megjelenésekor még sajtó alatt levő dolgozatok adatait — lehetőség szerint — kiegészítettük. (*Ford.*)

[12] В. А. Волконский: Аддитивные функционалы от марковских процессов. ДАН **127**:4 (1959), 735—738.
[13] В. А. Волконский: Аддитивные функционалы от марковских процессов. Труды Моск. матем. о-ва **9** (1960), 143—189.
[14] И. В. Гирсанов: Об одном свойстве невырожденных диффузионных процессов. Теория вероятн. и ее прим. **4**:3 (1959), 355—361.
[15] И. В. Гирсанов: О некоторых топологиях, связанных с марковским процессом. ДАН **129**:3 (1959), 488—491.
[16] И. В. Гирсанов: Об абсолютной непрерывности одного класса мер. Теория вероятн. и ее прим. **5** (1960), 314—330.
[17] И. В. Гирсанов: Сильно феллеровские процессы. 1. Теория вероятн. и ее прим. **5**:2 (1960), 7—28.
[18] И. В. Гирсанов: Сильно феллеровские процессы. 2. (1960) (Előnyomat.)
[19] К. Е. Дамбис: Стохастические интегральные уравнения в гильбертогом пространстве. Diplomamunka, МГУ, 1959.
[20] Е. Б. Дынкин: О новых аналитических методах в теории марковских случайных процессов. Вестн. ЛГУ **11** (1955), 247—266.
[21] Е. Б. Дынкин: Функционалы от траекторий марковских случайных процессов. ДАН **104** (1955), 691—694.
[22] Е. Б. Дынкин: Бесконечно малые операторы марковских случайных процессов. ДАН **105** (1955), 206—209.
[23] Е. Б. Дынкин: Непрерывные одномерные марковские процессы. ДАН **105** (1955), 405—408.
[24] Е. Б. Дынкин: Марковские процессы с непрерывным временем. Труды III Всесоюзного математического съезда **2** (1956), 44—47.
[25] Е. Б. Дынкин: Марковские процессы и полугруппы операторов. Теория вероятн. и ее прим. **1**:1 (1956), 25—37.
[26] Е. Б. Дынкин: Инфинитезимальные операторы марковских процессов. Теория вероятн. и ее прим. **1**:1 (1956), 38—60.
[27] Е. Б. Дынкин: Неоднородные строго марковские процессы. ДАН **113** (1957), 261—263.
[28] Е. Б. Дынкин: Скачкообразные марковские процессы. Теория вероятн. и ее прим. **3**:1 (1958), 41—60.
[29] Е. Б. Дынкин: Новые методы в теории марковских процессов. Труды III Всесоюзного матем. съезда **3** (1958), 334—342.
[30] Е. Б. Дынкин: Одномерные непрерывные строго марковские процессы. Теория вероятн. и ее прим. **4**:1 (1959), 3—54.
[31] Е. Б. Дынкин: Естественная топология и эксцессивные функции, связанные с марковским процессом. ДАН **127**:1 (1959), 17—19.
[32] Е. Б. Дынкин: Марковские процессы и их подпроцессы. (1960). (Előnyomat.)
[33] Е. Б. Дынкин: Основания теории марковских процессов. Москва, 1959.
[34] Е. Б. Дынкин: Преобразования марковских процессов, связанные с аддитивными функционалами. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability (1960). Berkeley,1961. Vol. 2, 117—142.
[35] Е. Б. Дынкин: Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса. Изв. АН СССР, сер. матем. **16** (1952), 563—572.
[36] Е. Б. Дынкин, А. А. Юшкевич: Строго марковские процессы. Теория вероятн. и ее прим. **1**:1 (1956), 149—155.
[37] Ф. И. Карпелевич, В. Н. Тутубалин, М. Г. Шур: Предельные теоремы для композиций распределений в плоскости и пространстве Лобачевского. Теория вероятн. и ее прим. **4**:4 (1959), 432—436.
[38] А. Н. Колмогоров: Об аналитических методах в теории вероятностей. УМН. **5** (1938), 5—41.
[39] Kolmogorov, A.: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.* **104** (1931), 415—458.
[40] Лян Чжи-шуэн: Об условных марковских процессах. Теория вероятн. и ее прим. **5**:2 (1960), 227—228.
[41] Petrovsky, I.: Über das Irrfahrtproblem. *Math. Ann.* **109** (1934), 425—444.
[42] Ю. В. Прохоров: Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. Теория вероятн. и ее прим. **1**:2 (1956), 177—238.

[43] Л. В. Серегин: Условия непрерывности вероятностных процессов. Теория вероятн. и ее прим. **6** (1961), 3—30.
[44] М. И. Фрейдлин: Первая краевая задача для вырождающихся эллиптических уравнений. (Előnyomat.)
[45] Р. З. Хасьминский: Распределение вероятностей для функционалов от траектории случайного процесса диффузионного типа. ДАН **104**:1 (1955), 22—25.
[46] Р. З. Хасьминский: Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные уравнения, вырождающиеся на границе области. Теория вероятн. и ее прим. **3**:4 (1958), 430—451.
[47] Р. З. Хасьминский: О положительных решениях уравнения $\mathfrak{U}u+vu=0$. Теория вероятн. и ее прим. **4**:3 (1959), 332—341.
[48] Р. З. Хасьминский: Эргодические свойства диффузионных процессов и стабилизация решений параболических уравнений. (Előnyomat.)
[49] Р. З. Хасьминский: Эргодические свойства диффузионных процессов и стабилизация решений параболических уравнений. Теория вероятн. и ее прим. **5**:2 (1960), 196—214.
[50] Р. З. Хасьминский: О предельных распределениях сумм условно независимых случайных величин, связанных с цепью Маркова. Теория вероятн. и ее прим. **6** (1961), 119—125.
[51] А. Я. Хинчин: Асимптотические законы теории вероятностей. ОНТИ, Москва—Ленинград, 1936.
[52] Khintchine, A.: *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, 1933.
[53] М. Г. Шур: Эргодические свойства марковских цепей, инвариантных на однородных пространствах. Теория вероятн. и ее прим. **3**:2 (1958), 137—152.
[54] М. Г. Шур: О феллеровском свойстве марковских процессов. ДАН **129** (1959), 1250—1253.
[55] М. Г. Шур: Гармонические и супергармонические функции, связанные с диффузионными процессами. Сиб. матем. ж. **1** (1960), 277—296.
[56] А. А. Юшкевич: О дифференцируемости переходных вероятностей однородного марковского процесса со счетным числом состояний. Diplomamunka, МГУ, 1953; Учен. зап. МГУ 9, вып. **186** (1959), 141—159.
[57] А. А. Юшкевич: О строго марковских процессах. Теория вероятн. и ее прим. **2**:2 (1957), 187—213.
[58] А. А. Юшкевич: Некоторые свойства марковских процессов со счетным числом состояний (1960). (Előnyomat.)
[59] А. А. Юшкевич: К определению строго марковского процесса. Теория вероятн. и ее прим. **5**:2 (1960), 237—243.
[60] Blumenthal, R.: An extended Markoff property. *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), 52—72.
[61] Cartán, H.: Théorie générale du balayage en potentiel Newtonien. *Ann. Univ. Grenoble (N. S.), Sect. Sci. Math. Phys.* **22** (1946), 221—280.
[62] Chung, K. L.: Foundations of the theory of continuous parameter Markov chains. *Proc. Third Berkeley Symposium Math. Stat. and Prob.* (1954—1955). Berkeley, 1956. Vol. 2, 29—40.
[63] Chung, K. L.: On a basic property of Markov chains. *Ann. of Math.* **68**: 1 (1958), 126—149.
[64] J. L. Doob: Markoff chains — denumerable case. *Trans. Amer. Math. Soc.* **58**:3 (1945), 455—473.
[65] Doob, J. L.: Semimartingales and subharmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **77**:1 (1954), 86—121.
[66] Doob, J. L.: A probability approach to the heat equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* **80**:1 (1955), 216—280.
[67] Doob, J. L.: Probability methods applied to the first boundary value problem. *Proc. Third Berkeley Symposium Math. Stat. and Prob.* (1954—1955). Berkeley, 1956. Vol. 2, 49—80.
[68] Doob, J. L.: Probability theory and the first boundary value problem. *Illinois Journ. Math.* **2**:1 (1958), 19—36.
[69] Doob, J. L.: Discrete potential theory and boundaries. *Journ. Math. Mech.* **8** (1956), 433—458.
[70] Feller, W.: The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations *Ann. Math.* **55** (1952), 468—519. (Fordítás: В. Феллер: Параболические дифференциальные уравнения и соответствующие им полугруппы преобразований. Математика **1**:4 (1957), 105—153.

[71] FELLER, W.: Diffusion processes in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.* **77**:1 (1954), 1—31. (Fordítás: В. Феллер: Одномерные диффузионные процессы. Математика 2:2 (1958), 119—146.)
[72] FELLER, W.: The general diffusion operator and positivity-preserving semi-groups in one dimension. *Ann. Math.* **60**:3 (1954), 417—436.
[73] FELLER, W.: On second order differential operators. *Ann. Math.* **61**:1 (1955), 90—105.
[74] FELLER, W.: Boundaries induced by nonnegative matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.* **83**:1 (1956), 19—54.
[75] FELLER, W.: On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. *Ann. Math.* **65**:3 (1957), 527—570.
[76] FELLER, W.: Generalized second order differential operators and their lateral conditions. *Illinois Journ. Math.* **1**:4 (1957), 459—504.
[77] FELLER, W.: On the intrinsic form for second order differential operators. *Illinois Journ. Math.* 2:1 (1958), 1—18.
[78] HUNT, G. A.: Some theorems concerning Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.* **81**:2 (1956), 294—319.
[79] HUNT, G. A.: Markov processes and potentials, I—III. *Illinois Journ. Math.* **1** (1957), 44—93: **1** (1957), 316—369; **2** (1958), 151—213.
[80] ITO, K.: On a stochastic integral equation. *Proc. Japan. Acad.* **22** (1946), 32—35.
[81] ITO, K.: On stochastic differential equations. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **4** (1951), 1—51. (Fordítás: К. Ито: О стохастических дифференциальных уравнениях. Математика **1**:1 (1957), 78—116.)
[82] KINNER, J. R.: Continuity properties of sample functions of Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), 280—302.
[83] LÉVY, P.: Processus markoviens et stationaires. Cas dénombrable. *Ann. Inst. H. Poincaré* **16**:1 (1958), 7—25.
[84] MARUYAMA, G.: On the strong Markov property. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., (A)*, **13**:1 (1959), 17—29.
[85] MARUYAMA, G.—TANAKA, H.: Some properties of one dimensional diffusion processes. *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., (A)* **11**:2 (1957), 117—141.
[86] RAY, D.: Stationary Markov processes with continuous paths. *Trans. Amer. Math. Soc.* **82**:2 (1956), 452—493.
[87] RAY, D.: Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes. *Ann. Math.* 70:1 (1959), 43—78.
[88] А. В. Скороход: Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами. Теория вероятн. и ее прим. **6** (1961), 287—298; **7** (1962), 5—25.
[89] А. В. Скороход: Диффузионный процесс с замедленным отражением на границе (1960). (Előnyomat.)
[90] Е. Б. Дынкин: Марковские процессы и их инфинитезимальные операторы. Москва. (Előnyomat.)
[91] Е. Б. Дынкин: Аддитивные функционалы от винеровского процесса, определяемые стохастическими интегралами. Теория вероятн. и ее прим. 5 (1960), 441—452.
[92] Е. Б. Дынкин: О некоторых преобразованиях марковских процессов. ДАН **133** (1960), 269—272.

Fordította: Medgyessy Pál
a matematikai tudományok
kandidátusa

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1967. III. 25. – Terjedelem: 11,50 (A/5) ív, 9 ábra

67-5583 Szegedi Nyomda

Ára: 25,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

INDEX

Megjelent 1967. VI. 30.

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVII. KÖTET 3. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1967

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVII. kötet 3. szám.

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia II. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790 057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYA OSZTÁLYVEZETŐSÉGÉNEK 1967. ÉVI BESZÁMOLÓJA*

I.

Az Akadémia ezévi Közgyűlésén lejár a három évvel ezelőtt választott Osztályvezetőség, a bizottságok, az osztálytitkár és az osztálytitkár-helyettes megbízatása. Az Osztályvezetőség ezért a jelen ülésen egyrészt visszapillantást kíván nyújtani az elmúlt három évről, másrészt igyekszik meghatározni az elkövetkező három év legfontosabb feladatait.

Az osztály működési területe a matematikát, a fizikát, valamint a csillagászatot öleli fel, és szoros kapcsolatban van a műszaki, a kémiai, a geo-, újabban pedig a közgazdasági, a nyelv- és a biológiai tudományokkal is. A szaktudományi kutatások részleteredményei — amelyekről a meghívóval együtt kiküldött melléklet nyújt vázlatos áttekintést —, ha azokat önmagukban nézzük, csak az adott terület szakembereit érdeklik. Ha azonban eme eredmények együttes hatását tekintjük, megállapíthatjuk, hogy e kutatások következményei és felhasználásuk az egész társadalmat érintik. A kutatómunka jelentős közügy, és ez a megállapítás az osztályunkban képviselt tudományok mindegyikére érvényes.

Az elmúlt évben fontos eseményeknek voltunk tanúi, amelyeknek jelentős kihatása van osztályunk tevékenységére. Ezek az események főleg: a Politikai Bizottság 1966. február 1-i határozata a tudományos kutatómunka helyzetéről és a legfontosabb tennivalókról, valamint a IX. Pártkongresszus.

Az MSZMP Politikai Bizottsága és IX. Kongresszusa megállapította, hogy a tudomány művelői és intézményei számottevő eredményeket értek el tudományos életünk fejlődésének meggyorsításában, s annak a célkitűzésnek a megvalósításában, hogy a tudományos kutatások sikeresen szolgálják a szocialista építőmunkát. Talán szerénytelenség nélkül mondhatjuk, hogy ez a megállapítás a III. Osztályhoz tartozó több tudományágra is vonatkoztatható. — A Politikai Bizottság és a Pártkongresszus megállapításának megfelelően a hozzánk tartozó tudományterületek többségénél is erősödtek a nemzetközi kapcsolatok, növekedett több tudományág eredményeinek hazai és nemzetközi megbecsülése. Őszintén meg kell azonban azt is mondanunk, hogy nem minden esetben használjuk fel kellően a nemzetközi tudományos együttműködésben rejlő lehetőségeket. Például több olyan területen folynak kutatások, vagy legalábbis történnek erőfeszítések kutatások végzésére, ahol a hazai ráfordítások viszonylag kevés eredményt ígérnek, s ezért célszerű lenne az igényeket nemzetközi együttműködés révén, vagy némely esetben szellemi import útján kielégíteni. — Foglalkozott a Politikai Bizottság és a Pártkongresszus annak a megállapításnak a taglalásával is, hogy a magyar tudomány eredményei ma még általában elmarad-

* Felolvasta Budó Ágoston akadémikus, osztálytitkár a Magyar Tudományos Akadémia 1967. évi Nagygyűlése Osztályülésén 1967. május 4-én.

nak az anyagi és szellemi bázis adta lehetőségekhez képest. A kutatások jobb megszervezésével, koordinálásával, az erőknek a súlyponti feladatokra való fokozottabb koncentrálásával a hozzánk tartozó egyes tudományterületeken is növelhető bizonyos mértékig a kutatások eredményessége. Ezt meg is kell tennünk. Nem hallgathatjuk el azonban azt a körülményt sem, hogy a természettudományi kutatások egyre költségesebbekké válnak, és ez napjainkban már a matematika jónéhány ágára is vonatkozik. Sajnos, ilyen vonatkozásban erőfeszítéseink ellenére is nagy az elmaradás, amelyet a szinte minden területen meglevő magasszínvonalú szellemi bázis sem ellensúlyozhat. — Talán a szilárdtestek kutatásának a kivételével a hozzánk tartozó tudományterületekre is vonatkozik az a megállapítás, hogy ma még nem kielégítő a tudomány és a gyakorlat közötti kapcsolat. Ez azonban nemcsak a kutatók hibájául róható fel. Nagyon időszerű volt az a megállapítás, hogy a kutatókat és a tudományos intézményeket az anyagi és erkölcsi érdekeltség jelenlegi rendszere kevéssé ösztönzi arra, hogy a társadalmilag legfontosabb feladatok megoldásával minél eredményesebben foglalkozhassanak. — A Politikai Bizottság és a Pártkongresszus foglalkozott azzal is, hogy az Akadémia feladatainak ellátásában bizonyos egyoldalúság következett be: saját kutatóhálózatának fejlesztése és irányítása érdekében végzett munkájához viszonyítva elmaradás mutatkozik a más területeken folyó alapkutatásokért viselt országos felelősségének betöltésében. Mint a beszámolóból a későbbiek során látjuk majd, a III. Osztály testületei szinte minden területen, de különösen a szilárdtestek kutatása vonatkozásában igyekeztek ezt a feladatot is ellátni.

A továbbiakban az említett szempontok figyelembevételével elemezzük az Osztályvezetőség, a bizottságok, az intézetek tevékenységét és az egyes tudományterületeken folyó kutatásokat.

II.

Fontos feladat a kutatások fejlesztési főirányainak a kijelölése. Ehhez mélyreható elemzés szükséges. Meg kell határozni, hogy ezidő szerint melyek számunkra a legfontosabb tudományágak, meg kell ítélni ezek hazai helyzetét, várható szerepét a társadalmi haladásban, és sok más mellett figyelembe kell venni az anyagi lehetőségeket is. Mindez csak hosszabb idejű, igen körültekintő, felelősségteljes előkészítő munkával érhető el.

Az Osztály keretében működő Matematikai Bizottság az elmúlt időszakban többször foglalkozott a hazai algebrai, a numerikus módszerek és a számítástechnikai kutatásokkal. A Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság igen alapos, körültekintő munkával felmérte a hazai szilárdtest-kutatások helyzetét, meghatározta az elkövetkező évek feladatait. Ugyanezt tette a Magfizikai Albizottság a magfizikai kutatások vonatkozásában. Az Osztályvezetőség azért, hogy a jelen beszámolóban részletesebben elemezhesse az említett tudományágak helyzetét, és konkrétabban meghatározhassa a feladatokat, a hozzánk tartozó más, ugyancsak fontos tudományágak helyzetével most csak egészen vázlatosan foglalkozik. A következő évek osztályülésein viszont éppen az utóbbi tudományágak helyzetének részletes elemzésére kerül majd sor.

III.

1. *A matematikusokkal, a matematikai kutatásokkal és a matematika oktatásával* szemben valamennyi tudományág és az egész népgazdaság nagy követelményeket támaszt napjainkban. Ezek a követelmények az elkövetkező években csak növekedni fognak, mert hiszen a többi tudományág nagymértékű fejlődése, fokozottabb törekvése a szabatosságra, a technika fejlődése, a gazdasági életben a termelés tökéletesítésére irányuló igény és az optimális irányítás problémái mind nagyobb lehetőséget nyújtanak a matematikai eredmények, módszerek és a matematikai gondolkodásmód alkalmazására. Az ezekből eredő igények kielégítése legtöbbször új matematikai kutatásokat tesz szükségessé. Ezenkívül hazánkban is fokozottabb fejlődésnek indultak a matematika azon ágai, amelyek lehetővé teszik az alkalmazásokat olyan területeken is, amelyeken nemcsak a kvantitatív, hanem a kvalitatív módszerek is fontos szerepet játszanak. Ugyanakkor azt is tapasztaljuk, hogy egyes régebbi, úgynevezett „tiszta" matematikai eredmények is adott helyzetben váratlanul felhasználásra kerülnek, így még a közvetlen hasznosításra való törekvés szempontjából is nagyjelentőségűek az elméleti matematikai kutatások.

A matematikusok feladata tehát egyrészt a matematika elméleti ágainak intenzív fejlesztése, főként azoké, amelyek a fejlődés követése és az alkalmazások szempontjából napjainkban a legfontosabbaknak látszanak; ezek az *analízis bizonyos ágai, valószínűségszámítás, matematikai statisztika, információelmélet, operációkutatás, matematikai logika, matematikai gépek és programozásuk elmélete, a gazdasági alkalmazások szempontjából fontos, diszkrét módszerekkel dolgozó matematikai ágak*, másrészt a matematika alkalmazásainak szervezettebb, tervszerűbb és koordináltabb művelése. Az elmúlt három évben matematikusaink fokozottabban törekedtek e célkitűzést megvalósítani, de még több, sok esetben nem pusztán matematikusoktól függő nehézség vár elhárításra. Jelen beszámolónkban — mint a bevezetőben említettük — részletesebben csak a hazai algebrai, a numerikus módszerek és a számítástechnikai kutatások helyzetével foglalkozunk.

2. Az *algebra*, amely korábban is a nagy, alapvető matematikai ágak közé tartozott, századunkban mélyreható változásokon ment át, mind belső arculatát, mind pedig a matematika más területeihez való viszonyát tekintve. Világossá vált, hogy az algebra elsődleges célja azoknak a matematikai struktúráknak a vizsgálata, amelyekben az alapvető összefüggések szerepét elsősorban műveletek, továbbá rendezési és egyéb relációk játsszák. Az algebrán kívül eső kutatási területeken pedig — számos matematikán kívüli területet is ideértve — alkalmazásra kerültek a modern algebra módszerei, gondolatai, számos esetben pedig egyes speciális eredményei is. A struktúrafogalom mellett az az elv, amely szerint izomorf struktúrák nem különböztetendők meg, és a modellezés általános fogalma — ezek algebra eredete vitathatatlan —, ma már a matematika mellett a kibernetikában, sőt más tudományokban is fontos szerephez jutnak.

Helyénvaló tehát kissé részletesebben megvizsgálni, hogy az elmondottak szerint oly nagyjelentőségű algebra művelése hazánkban milyen szinten folyik, melyek azok a jelenségek, amelyek, ha önelégültségre nem is, de elégedettségre mindenesetre feljogosítanak; másrészt melyek azok a körülmények, amelyek a szóban forgó tudományág fejlődésére gátlóan hatnak.

Hazánkban 8 intézményben folynak algebrai kutatások, ezek a következők: ELTE Matematikai Intézete, a szegedi József Attila Tudományegyetem Bolyai

Intézete, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézete, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematikai Tanszéke, a szegedi és a nyíregyházi Tanárképző Főiskolák matematikai tanszékei, az MTA Matematikai Kutató Intézete és a Központi Fizikai Kutató Intézet Matematikai Főosztálya.

Végigtekintve az utóbbi években elért eredményeken, örömmel állapíthatjuk meg, hogy kutatóink az algebra sok ágában végeztek kutatásokat és több területen értek el számottevő, nemzetközileg elismert eredményeket. Az itthon és külföldön publikált nagyszámú dolgozatok többsége olyan kérdésekkel foglalkozik, amelyek a jelenlegi algebrai érdeklődés homlokterében állnak. Mint már említettük, az algebrai kutatások az utóbbi évtizedben világszerte átalakultak, és e fejlődésben a magyar matematikusok nemzetközileg elismert szerepet játszanak. Így pl. a magyar algebrai kutatásokat kívánta elismerni a Nemzetközi Matematikai Unió, amikor hazai algebristákat bízott meg néhány évvel ezelőtt egy algebrai kollokvium szervezésével. Ugyanakkor nem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy több fontos, világszerte művelt súlyponti tárgykör nálunk nem szerepel; ez főképpen a súlyosabb, nagyobb előképzettséget igénylő területeket és határterületeket érinti éppen.

A hazai kutatások többsége egyéni, kevés olyan terület van, amelyen két vagy több kutató együttműködve ért volna el eredményeket. Ma, amikor szerte a világon megfigyelhető a kollektív jellegű, koncentrált kutatások előretörése, célszerűnek látszik arra törekedni, hogy olyan fontos súlyponti kutatási irányok alakuljanak ki a hazai algebrai vizsgálatokban, amelyekben több haladottabb kutató tud együttműködni és amelyekbe fiatalok is be tudnak kapcsolódni. Az adottságokat és a fontosságot figyelembevéve, súlyponti kutatási irányok a következők lehetnének: *az automaták és a félcsoportok algebrai elmélete*, *lineáris algebra*, *topológikus algebrai struktúrák*, *univerzális algebrák*, *gyűrűelmélet*, *csoportelmélet*, *hálók és más rendezett algebrai struktúrák elmélete*. Külön kiemelendők a határterületeken folyó és a gyakorlati alkalmazásokat elősegítő algebrai kutatások, amelyek fejlesztése érdekében szorosabb együttműködésre lenne szükség az alkalmazókkal.

Alapvető kérdés a kutatók fejlődésének és kedvező munkafeltételeinek a biztosítása. Tanúi vagyunk annak, hogy az algebrában is forradalom ment végbe, mint a matematika több más ágában. Az algebra határterületeinek és alkalmazásainak váratlanul erős előretörése szükségessé teszi azt, hogy a kutatók nemcsak saját területükkel foglalkozzanak behatóbban, hanem alaposan megismerjék, és ha szükséges, kritikusan szemléljék az új irányokat, módszereket, az új alkalmazási lehetőségeket, ami sok esetben saját kutatási területükre is hat. Ennek érdekében tervszerűbbé kell tenni és összhangba hozni, de nem uniformizálni a kutatásokat. A megfelelő utánpótlás neveléséhez pedig szükség volna több magyar nyelvű modern algebrai könyvre.

3. Elmaradtunk a nemzetközi színvonaltól a *numerikus módszerek és a számítástechnika* kutatásában. A mulasztások pótlása rendkívül sürgős, mert a népgazdaság szempontjából igen fontos területek műveléséről van szó.

Jelentős előrehaladásra kerülhet sor e téren azáltal, hogy az Akadémia a *Számítástechnikai Központ* részére egy korszerű nagyteljesítményű számológépet vásárol.

A gép beszerzése nagy felelősséget ró a Központra, amely jelenleg is vegyes profilú és egyben kutató és szolgáltató jellegű intézmény. Az új gép vásárlása lehetővé teszi, hogy a Központ — megfelelő profilrendezés után — a kutatási és szolgáltató tevékenységét az eddigieknél eredményesebben lássa el.

A gép fogadása előtti előkészítő időszakban, valamint a gép üzemeltetésének kezdeti szakaszában átmenetileg még a kutatókapaciást is nagyobb mértékben igénybe kell venni a felmerülő szolgáltató jellegű feladatok megoldására, így pl. tanfolyamok tartására, programok készítésére, rendszerprogramozási munkára stb.

Tekintettel arra, hogy a Központ egyik fő feladata lesz az akadémiai intézmények számára biztosítani a számológépet igénylő munkák elvégzését, ezért mindenek előtt azokat a szerveket kell létrehozni, amelyek ezekkel az intézményekkel az együttműködést biztosítják. A *Matematikai Kutató Intézet* részére lehetővé kell tenni, hogy időosztásos rendszerben közvetlen (on-line) kapcsolata legyen a géppel, amivel a Matematikai Kutató Intézet régóta esedékes gépigénye is megoldódik. Ezenkívül más akadémiai intézetek számára — amelyek ezt igénylik — lehetővé kell tenni, hogy közvetlen telex-összeköttetéssel és kihelyezett perifériával on-line kapcsolatban álljanak a számológéppel.

Már a gép fogadására való felkészülés időszakában a Központnak különböző szintű programozói tanfolyamokat kell tartania azon akadémiai intézetek munkatársai számára, akik rendszeresen igénybe kívánják venni a számológépet. Kívánatos ugyanis, hogy a későbbiek során a Központ csak a nem-rutin jellegű feladatok programozásában nyújtson rendszeres támogatást.

Szükség volna mind a tudományegyetemi és a műszaki egyetemi matematika-oktatás folyamán, mind pedig a mérnökök, közgazdászok továbbképzése alkalmával a számológépekkel megoldandó feladatok programozását mint egyikét a matematikai tárgyaknak, tanítani. Régóta felmerült indokolt igény a mérnök-matematikus képzés megindítása. Egyetemet végzett matematikusok mellett nagy hiány van középfokú képzettségű szakemberekben is, elsősorban programozókban. Fontos lenne ezért számítástechnikai felsőfokú technikum létesítése.

IV.

1. A *fizika* területén az elmúlt néhány évtized alatt a legintenzívebben fejlődő és gyakorlati hatásaikban is forradalmi változásokat előidéző tudományágaknak a *szilárdtestfizika* és a *magfizika* tekinthetők. Mint már előbb említettük, a beszámolóban a fizikán belül most ezzel a két tudományággal kívánunk kissé részletesebben foglalkozni, annál is inkább, mert a szilárdtestek kutatása a kiemelt akadémiai feladatok közé tartozik.

2. A *szilárdtestfizika* terén az elmúlt három év alatt a hazai kutatók figyelemre méltó eredményeket értek el a mágneses anyagok szerkezetének vizsgálatában, valamint a különböző ötvözetek fizikai tulajdonságait meghatározó tényezők felismerésével kapcsolatban. Többek között felfedeztek egy új elsőrendű mágneses fázisátalakulást a Mn_3Pt-ben, elsőnek figyelték meg rugalmatlan neutronszórással a mágneses szennyező elemek hatását a magnon spektrumra. Ezek a vizsgálatok a KFKI-ben kihasználják az atomkutatás nyújtotta lehetőségeket (pl. neutron-diffrakció, neutron-szórás, Mössbauer-effektus, mágneses rezonancia), és több vonatkozásban gyakorlati szempontból is hasznosaknak bizonyultak. Értékes kapcsolat alakult ki a KFKI és a Csepeli Fémmű, valamint az ELTE Kísérleti Fizikai Tanszék között, a vizsgálatok egy részét pedig a Dubnai Egyesített Atomkutató Intézettel és a Kurcsatovról elnevezett Atomenergia Intézettel (Szovjetunió) közösen végezték.

Értékes eredményekre vezetve folytatódtak a kristálymagképződés, kristálynövekedés és a kristályhibák vizsgálatára vonatkozó munkák az akadémiai tanszéki kutató csoportokban, a KFKI Szilárdtestfizikai Laboratóriumában és az egyes egyetemi tanszékeken. Kiemelkedők az ún. lavina-effektus és egyes extrém tisztaságú kristályok előállítására és tulajdonságaira, továbbá a fémek, ötvözetek és ionkristályok rácshibáinak tanulmányozására, a rácshibák keletkezésére és mozgására vonatkozó eredmények.

A Műszaki Tudományok Osztályához tartozó Műszaki Fizikai Kutató Intézetben, valamint a III. Osztályhoz tartozó Lumineszcencia és Félvezető Akadémiai Tanszéki Kutató Csoportban a több irányban folyó lumineszcencia kutatás nemzetközi színvonalát jelzi, hogy a Nemzetközi Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unió támogatásával közel 500 külföldi résztvevővel 1966-ban Budapesten rendeztük meg a kétévenként más-más országban tartandó Nemzetközi Lumineszcencia Kongresszust. A Kongresszuson a Műszaki Fizikai Kutató Intézet és a Lumineszcencia és Félvezető Akadémiai Tanszéki Kutató csoport eredményei, ill. a munkatársak által tartott előadások élénk érdeklődést keltettek a résztvevők körében. Ezen intézmények tudományos munkája iránti érdeklődést mutatta, hogy a Kongresszuson megkezdett diszkussziók az intézmények látogatása során is folytatódtak.

A jövőben hazai viszonyaink között a szilárdtestfizikai kutatások fejlesztése különösen indokolt, mivel népgazdaságunk számos szektorában a szükséges előrehaladás és a nemzetközileg versenyképes termékek gyártása csak a hazai szilárdtestfizikai kutatások megfelelő irányú, koncentrált művelésével biztosítható. Ezért az Osztály elhatározta, hogy az erőket olyan területekre törekszik összpontosítani, amelyeken a kutatás kellő termelési bázisa már jelenleg is biztosítva van, és a szóban forgó termelési bázis a népgazdaságon belül nagy fontosságú.

A tárgyilagos véleményalkotáshoz, a konkrét célkitűzések felelős meghatározásához elengedhetetlenül szükséges volt, hogy a III. Osztály keretében működő, a III. és a VI. Osztály közös területe, a Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság helyszíni látogatások révén ismerkedjék meg mindazon akadémiai, egyetemi és ipari intézmények tevékenységével, amelyek szilárdtestek kutatásával foglalkoznak. Az említett cél érdekében az elmúlt két év alatt 5 akadémiai, 3 egyetemi és 6 ipari intézmény meglátogatására került sor. A látogatások során a Bizottság egy-egy napot kitöltő program keretében gondosan tanulmányozta és elemezte az egyes intézményekben folyó kutatási problémákat. Az ipari intézmények a helyszíni látogatás során ismertették a Bizottsággal alapkutatási igényeiket. A helyszíni látogatások első eredménye volt, hogy az akadémiai és egyetemi intézmények 3 éves tudományos terveiket úgy állították össze, hogy azok tükrözik a kapcsolódó kiemelt iparágak tudományos szükségleteit, támaszkodnak a szocialista országok közötti nemzetközi együttműködésre, és figyelembe veszik a tudomány belső fejlődéséből adódó igényeket.

A helyszíni látogatások és az azokat követő igen élénk diszkussziók során kitűnt, hogy a hazai szilárdtest-kutatás terén két olyan nagy témakör van, amelyben megfelelő és a népgazdaság szempontjából is fontos termelési bázissal rendelkezünk. Ezek a következők:

a) a félvezető anyagok és eszközök alap- és alkalmazott kutatása (lényegében félvezető-fizikai, fiziko-kémiai és technológiai kutatások);

b) a műszeripari, híradástechnikai és elektronikai fém-félgyártmányok, finomkohászati anyagok alap- és alkalmazott kutatása (lényegében fémek és ötvözetek kutatása).

A kellő ipari bázist az Egyesült Izzó és a Csepeli Vas- és Fémmű biztosítja, a termelés értéke évente több milliárd forintot jelent, és egyre növekvő tendenciájú.

Az Egyesült Izzó félvezető termelése a második ötéves terv folyamán ötszöröződött, a harmadik ötéves terv pedig a jelenlegi termelést kívánja négyszeresére növelni. Félvezető iparunk azonban a rohamos fejlődés ellenére is elmaradt a fejlett ipari országok mögött. A mennyiségi és minőségi igény a finomkohászati termékek területén is jelentkezik, amelyek fontosságát még fokozza, hogy ezek szolgáltatják az alapanyagot a híradástechnikai, a műszer- és erősáramú iparunk számára is. Az Egyesült Izzó termelése minden területen (elektroncsövek, vákuumtechnika, fényforrások, félvezetők) a Csepeli Vas- és Fémművek által előállított alapanyagokra támaszkodik. Így az említett két nagy ipari bázis és a velük kapcsolatos alapkutatási feladatok is szorosan összefüggnek.

Az előbbiek alapján indokolt, hogy az Osztály a szilárdtestkutatásban az említett két termelési bázis tudományos megalapozására törekszik. Az alapkutatások terén azonban eleve le kell mondanunk arról, hogy az egész terület minden részletére kiterjedő alapkutatási hálózat kiépítésére kerüljön sor. Az alapkutatás tematikájának összeállításakor intézményeink és az Osztály úgy járt el, hogy olyan, a népgazdaság számára fontos témák növelésére igyekezett szorítkozni, amelyekhez a szükséges személyi és anyagi ellátottság biztosított vagy biztosítható, és amelyeken értékes eredmények elérése remélhető.

A fentieken túlmenően az elkövetkező években újabb feladatok felszínre kerülésével is számolni kell. Előreláthatóan kiemelkedő fontosságú lesz a távlati fejlesztés során a szupravezetők, az új laser anyagok és az új elveken működő szilárdtest-eszközök (félvezető plazma-eszközök, új speciális tranzisztorok, integrált áramkörök) kutatása.

A szellemi bázis a hazai szilárdtestfizikai kutatások szinte minden fontos ágazatában jól fejlődött, és nemzetközi szinten van. A kutatások hatékony műveléséhez azonban nélkülözhetetlen néhány olyan nagyobb beruházás, amelyek erősen meghaladják az intézetek, de még az egyes akadémiai tudományos osztályok jelenlegi kereteit is. A kutatások fejlődését lényegesen elő fogja segíteni, ha egyes nagy műszerek (pl. analitikus tömegspektográf, elektronmikroszonda, nagy felbontású magrezonancia berendezés, héliumcseppfolyósító) beszerzésére több osztály társul.

3. Az *alacsonyenergiájú atommag-fizikai* kutatások területén kisebb létszámú, lelkes kutatógárda működik a Központi Fizikai Kutató Intézetben, az Atommag Kutató Intézetben, az MTA Elméleti Fizikai Kutató Csoportban, az ELTE Elméleti Fizikai Tanszéken, a VII. Osztályhoz tartozó Izotóp Intézetben és a Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében. Ez a kutatógárda — Budapesten 54 kutató és Debrecenben is 54 kutató — eredményesen használta fel a viszonylag szerény hazai technikai lehetőségeket.

Nemzetközi szintet is megütő új eredmények születtek a magreakciók mechanizmusának és a mag szerkezetének, a maghasadás tulajdonságainak vizsgálata során. A kutatóhelyek értékes eredményeket értek el a magreakciók és a radioaktív bomlásokra vonatkozó magspektroszkópiai, a nyomelemek humuszsavakon történő abszorpciójának kutatásában. Sikeresen továbbfejlesztették a magmodelleket, és azokat alkalmazták magszerkezeti problémák megoldására. A magyar kutatók eredményesen tevékenykednek a dubnai Egyesített Atomkutató Intézetben is, így például új alfa-sugárzó izotópokat állítottak elő, továbbá eredményesen bekapcsolódtak a késleltetett protonemisszió vizsgálatába, valamint sikeres együttműködés alakult ki a gyorsítófejlesztés és a nukleáris elektronika terén is.

Az utóbbi eredmények is mutatják, hogy a kutatások terén a nemzetközi kapcsolatok a lehetőségeken belül egészségesen fejlődtek. Kutatóink a dubnai Egyesített Atomkutató Intézeten kívül eredményesen együttműködnek a Kurcsatovról elnevezett Atomenergia Intézettel, és felvették a kapcsolatot az Obnyinszk-i Intézettel is. Az együttműködések keretében közös mérésekre és kísérleti berendezések közös kidolgozására került sor. Hasznos volt az együttműködés a rossendorfi és zágrábi magfizikai intézetekkel is.

A fenti, csak vázlatosan ismertetett értékes eredmények ellenére — bár a magyar kutatók képzettsége nemzetközi színvonalú — az atomkutatás technikai eszközeinek és a megfelelő atomgyorsítónak a hiánya miatt hazánk lemaradt az atomfizika területén, és ez a lemaradás az utóbbi években még tovább fokozódott. Az említett berendezések hiánya miatt a dubnai együttműködési lehetőségeket sem lehet kellően kihasználni. Ezen a helyzeten bizonyos javulást fog jelenteni, hogy a harmadik ötéves tervben az Atommag Kutató Intézetben egy 5 MeV-es generátor épül. Nem kielégítő a külföldi intézetekkel való információcsere lehetősége, és különböző okok miatt még mindig nem megfelelő a nemzetközi munkamegosztásban való részvétel sem.

A jövőben nagyobb figyelmet kell fordítani a hazai magfizikai kutatások fejlesztésére, és jobban ki kell használni a nemzetközi együttműködés adta lehetőségeket, mert e kutatásoknak fontos közvetett szerepük van abban, hogy más tudományágak és a gyakorlat számára korszerű módszereket dolgozzanak ki.

4. A *nagyenergiájú kölcsönhatások és elemi részecskék fizikájával* a KFKI-ban, az MTA Elméleti Fizikai Kutató Csoportban, az MTA Elméleti Fizikai Tanszéki Kutató Csoportban és két egyetemei intézetben foglalkoznak. E témák iránt az általános érdeklődés, a befektetett munka és anyagi áldozat világszerte fokozódott, így pl. 1967-ben lép működésbe a Moszkva melletti Szerpuhovban épített 70 GeV energiájú gyorsító, amely a dubnai Egyesített Atomkutató Intézeten keresztül egész új kutatási lehetőségeket fog a hazai kutatócsoportok számára is nyújtani.

A nagyenergiájú fizikai kutatásoknak egyes területeken sikerült lépést tartaniok az általános fejlődéssel. Több olyan részeredmény született az elmúlt 3 éves időszakban, amely igen pozitív nemzetközi visszhangot váltott ki, amelyre több, tekintélyes kutatócentrumban dolgozó fizikus hivatkozott, és amelyet sok külföldről érkezett előadás, szeminárium, nyári iskola tartására vonatkozó felkérés követett. Az említett területek egyre szorosabb összefüggésbe jutnak a csillagászati kutatásokkal, és így azok intenzív művelése a csillagászat fejlődését is elősegíti. Ugyanakkor azonban messze vagyunk attól, hogy azokat a lehetőségeket, amelyeket a tudományosan kvalifikált kutatók és a hagyományokkal rendelkező hazai kutatócentrumok nyújtanak, megfelelően kihasználjuk. Rendkívül gyorsan fejlődő, hatalmas centrumokban koncentrálódó, módszereit gyorsan változtató tudományágról van szó. Az eredményes munka szempontjából alapvető jelentőségű, hogy a káderhelyzet lépést tartson az általános fejlődéssel, és a nemzetközi kapcsolatok az eddiginél rugalmasabb feltételek mellett legyenek fejleszthetők.

A nagyenergiájú és elemi részek fizikája területén végzett kísérleti jellegű munka alapvető feltétele a nemzetközi együttműködés. Az e téren elért eredmények főként a dubnai Egyesített Atomkutató Intézettel, illetőleg kisebb részben a Bolgár Tudományos Akadémia Fizikai Intézetével (ill. a Muszala-csúcsi bolgár-magyar hegyilaboratóriummal) való szoros együttműködésnek köszönhetők.

5. A *fizika egyéb területeit* illetően, nemzetközileg elismert eredményeket értek el kutatóink az atomok és molekulák stacionárius és nemstacionárius állapotainak és a fény ezekkel való kölcsönhatásainak vizsgálatában (amelyek során elsőként sikerült kísérletileg rubinlaserekkel a többfotonos hidegemissziót kimutatni), a kvantumkémia, továbbá az atom- és molekulaszerkezet és a pszeudopotenciálok módszerének kiépítése terén, valamint a spektroszkópia különböző ágaiban. E kutatások eredményeit vázlatosan ugyancsak a melléklet tartalmazza.

V.

A *Csillagvizsgáló Intézetben* eredményesen foglalkoztak a változó csillagokra vonatkozó kutatásokkal. Jelentős eredmények születtek a gömbhalmazok RR Lyrae csillagaival kapcsolatosan, továbbá elméleti téren a változócsillagok periódusfluktuációinak vizsgálatában a bolyongási probléma alkalmazásával.

A mátrai obszervatóriumban folytatódott a szupernova-kutatás és a nyílthalmazok háromszínfotometriai vizsgálata. A közelmúltban a piszkéstetői obszervatórium egy 50 cm-es tükörátmérőjű Cassagrain távcsővel, és egy a főműszerhez tartozó, 2 fok törésszögű objektív prizmával és ellipszométerrel gyarapodott, ami a Mátrában végezhető kutatások körének jelentős kiszélesedését fogja eredményezni.

Rendszeresen folyt a mesterséges holdak vizuális és fotografikus megfigyelése a budapesti, bajai, miskolci és szombathelyi megfigyelőállomásokon; megkezdődtek a fotoelektromos észlelések is. Nemzetközi kooperáció keretében elsősorban a rövidperiódusú légsűrűségingadozásoknak a naptevékenységgel való összefüggését vizsgálták.

A *Napfizikai Obszervatóriumban* a napfoltokra, fáklyákra és protuberanciákra vonatkozó vizgálatok keretében sikerült bizonyos, a napfoltokra vonatkozó észlelési effektusokat a napfáklyák „átlátszatlanságára” visszavezetni.

Mind a budapesti, mind a debreceni egyetemeken a csillagászok aktívan részt vesznek az egyetemi oktatásban; főleg ennek köszönhető, hogy megszűnt a csillagászati káderprobléma. Továbbá bővült a csillagászati intézmények hálózata; a Baja Városi Tanács Csillagvizsgáló Intézete 1966. január 1-től a budapesti Csillagvizsgáló Intézet részlegeként működik.

A jövőt illetően szükséges lenne a mátrai obszervatórium programjának bővítése fotoelektromos és polarizációs mérésekkel. Kívánatos lenne Kubában egy kisebb állomás felszerelése a déli égbolt megfigyelésére. Ugyancsak helyes lenne közös csillagászati-geodéziai beruházásként egy Zeiss műhold kamera beszerzése. A Napfizikai Obszervatórium fotoheliográfjait megfelelőbb helyre (toronyba) kellene elhelyezni és be kellene szerezni napspektroszkópiára alkalmas műszereket is.

VI.

Az Akadémia alapkutatásokkal kapcsolatos feladatainak ellátását elősegíti Kormányunk azon határozata, amely a *Központi Fizikai Kutató Intézetet* az Országos Atomenergia Bizottságtól az Akadémiának adta át 1967. január 1-én. Ezzel az ország legnagyobb alapkutatási intézete, amelyet annak idején az Akadémia alapított, újra az Akadémián belül a III. Osztály keretébe került vissza, ami elő fogja segíteni, hogy ezen jelentős tudományos eredményeket felmutató, nagy tekintélyű intézet szervesen illeszkedjék be az Akadémia alapkutatási koncepcióiba, és még szorosabbá váljanak kapcsolatai a többi akadémiai kutatóhelyekkel. Az Intézetnek a III. Osztályhoz való csatolása nagymértékben növeli kutatási kapacitásunkat, de egyben felelősségünket is azért, hogy e kutatóhely munkája minél nagyobb mértékben szolgálhassa a társadalmi haladást.

Az Osztály annak érdekében, hogy a KFKI felügyeletét és testületi irányítását eredményesen megvalósíthassa, vezető tudósokból és népgazdasági szakemberekből álló testületet — KFKI Bizottság — alakított, amely az Osztályvezetőségnek van alárendelve.

Örömmel tájékoztatjuk az Osztályülést, hogy Debrecenben, az *Atommag Kutató Intézetben* létesítendő 5 MeV-es Van de Graaf generátor és a hozzátartozó laboratóriumok, továbbá az Intézet könyvtára stb. elhelyezésére szolgáló épületek építése a jövő év elején elkezdődik. Az elkövetkező három évben pedig befejezik az Intézetben a generátor tervezését, és megkezdik az építését is. A programnak megfelelően ebben az évben az Atommag Kutató Intézetben sor kerül egy Elektrosztatikus Gyorsító Osztály szervezésére is.

Előreláthatóan az 1969. év közepére a Budaörsi úton felépül az Akadémia új kutató telepe. Ezen a telepen nyer elhelyezést — külön-külön épületben — többek között az *MTA Elméleti Fizikai Kutató Csoportja, az MTA Kristálynövekedési Tanszéki Kutató Csoportja és az MTA Kristályfizikai Tanszéki Laboratóriuma.*

Itt említjük meg, hogy Szegeden, a budapesti Matematikai Kutató Intézet szegedi részlegeiből megalakult az *Akadémiai Tanszéki Analízis Kutató Csoport* és az *Akadémiai Tanszéki Matematikai Logika és Automaták Elmélete Kutató Csoport.* A csoportok a Szegedi Akadémiai Székházban működnek. Részben a Székházban nyer elhelyezést az Akadémiai Tanszéki Lumineszcencia és Félvezető Kutató Csoport is.

A *Számítástechnikai Központ* részére a közeljövőben beszerzendő új, nagyteljesítményű, modern elektronikus számológép a Központ jelenlegi helyén, a Várban műszaki okok miatt nem helyezhető el. Ezért a Központ és az új számológép elhelyezésére is a Budaörsi úti akadémiai telephelyen kerül sor.

VII.

Az elmúlt 3 évben az Osztály és kutatóhelyeink változatlanul nagy gondot fordítottak a *tudományos utánpótlás* nevelésére, a kutatói gárda szakmai színvonalának állandó emelésére.

A szervezett tudományos utánpótlás fő formája az aspiránsképzés, amely a Tudományos Minősítő Bizottság keretében, de az Osztály, az osztály tagjai és tudományos fokozattal rendelkező kutatóink hathatós közreműködésével folyik.

A TMB felkérésére bizottságaink meghatározták a matemetika és fizika ama területeit, amelyeken az aspiránsképzést elsődlegesen szükségesnek tartják, és az Osztályvezetőség is rendszeresen véleményt nyilvánított doktori disszertációt benyújtó kutatók tudományos munkásságáról. Az osztály tagjai, doktoraink és kandidátusaink jelentős számban irányítják az aspiránsok munkáját, és vesznek részt közvetlenül is más módon a tudományos minősítés munkájában.

Úgy véljük, hogy az osztály és a TMB közötti tartalmi kapcsolatok bővítése és további fejlesztése a tudományos utánpótlás terén folyó munkát eredményesebbé tehetné. Célszerű lenne pl., ha a TMB megfelelő szakbizottságai évenként tájékoztatnák az osztály megfelelő bizottságait tevékenységükről, ugyanakkor az Osztályvezetőség is bátrabban élhetne a kezdeményezés jogával, így pl. indokolt esetben javaslatot tehetne doktori ösztöndíjak odaítélésére stb.

A tudományos káderutánpótlásnak természetesen nem az aspiránsképzés az egyetlen formája. Jelentős az a szakmai nevelő tevékenység, amely intézeteinkben és tanszéki kutató csoportjainkban folyik, és amelyből nem kevésbé aktívan veszik ki részüket kutatóhelyeink különböző beosztású vezetői.

Vezetői beosztásokban dolgozó tudósaink, kutatóink döntő többsége hivatásszeretettől áthatva, lelkesen és rendszeresen foglalkozik munkatársaikkal. Ugyancsak jelentős szerepe van a szakmai továbbfejlődésben — nemcsak fiatalabb, de idősebb kutatóinknál is — az intézeteink többségében rendszeresen megtartott szemináriumoknak is. Természetesen kutatóink fejlődését még számos más tényező befolyásolja (pl. külföldi tanulmányutak stb.), amelyeket azonban most nem kívánok részletezni.

Ezt a nevelő tevékenységet összességében igen eredményesnek mondhatjuk. Bizonyítja ezt a megállapítást az, hogy intézeteink a különböző tudományos vezetői állásokra — csekély kivétellel — saját nevelésű munkatársakat tudnak állítani, továbbá e nevelő munka eredményeként igen szép számmal születnek kandidátusi és doktori értekezések is.

A kádermunka eredményei között kell megemlítenünk azt is, hogy kutatóhelyeinken mutatkozik bizonyos egészséges mértékű fluktuáció a kutatói állományban, hiányosság azonban, hogy ez eléggé véletlenszerű. Törekedni kell a kutatói állomány tervszerű minőségi fejlesztésére, szem előtt tartva, hogy ez megfelelő tapintattal történjék, ne okozzon senkiben bizonytalanságot és kishitűséget.

VIII.

Jelentősen erősödtek *külföldi tudományos kapcsolataink.* Az elmúlt három évben 489 külföldi kiküldés valósult meg az osztály, ill. az Akadémia keretében, ebből 21 három hónapnál hosszabb tanulmányút volt. Külföldi kutatók is nagy számban látogatták az osztály intézményeit, ill. tudományos rendezvényeit. Az utóbbi 3 évben meghívásunkra vagy saját költségükre 154 külföldi kutató látogatott hozzánk. Ezekből a számszerű és más adatokból is megállapítható, hogy a magyar matemetikusoknak, fizikusoknak és csillagászoknak külföldi tudósokkal való kapcsolatai igen eredményesek.

Kutatóink neves külföldi intézményektől kapnak meghívást, és azokban értékes előadásokat tartanak. E kapcsolatok számottevő része elősegítette kutatóink látókörének bővülését és némely területen kutatási témáink nemzetközi koordinálását. Előfordulnak azonban a külföldi utazás terén túlzások is: néhányan túl gyakran, illetőleg túlságosan hosszú ideig tartózkodnak külföldön. Előfordult néhány esetben az is, hogy egyesek disszidáltak.

Erőteljes fejlődés mutatkozik a kiutazások terén a hasznosságot illetően. A kiküldetési tervek összeállításakor az Osztályvezetőség azt a gyakorlatot igyekezett követni, hogy hosszabb időtartamú tanulmányútban elsősorban olyan fiatal kutatók részesüljenek, akik kiemelt témával foglalkoznak. Ezt a törekvést a jövőben — a szilárdtestfizikai kutatások vonatkozásában — még tovább kell fokozni. Célszerűnek látszik a szilárdtestfizika területéről — a magfizikához hasonlóan — főleg munkacsoportokat kiküldeni hosszabb időtartamra a megfelelő külföldi intézetekbe.

Mint már a bevezetőben említettük, a nemzetközi kooperáció — belföldi kooperáció mellett — fontos eleme a napjainkban egyre nélkülözhetetlenebbé váló kollektív kutatási módszernek. Ma már e kooperációk a hozzánk tartozó területek túlnyomó részén egyre inkább kezdenek élőkké válni, ami a téma munkamegosztásos művelésén, anyagok kicserélésén, kölcsönös látogatásokon át közös publikációkban lefektetett eredményekig vezet. Fontos feladat az új Osztályvezetőség előtt, hogy a reális alapot nélkülöző kooperációk megszüntetése mellett a valóságos együttműködéseket minél nagyobb mértékben támogassa és fejlessze.

Az utóbbi években matematikusaink, fizikusaink és csillagászaink egyre intenzívebb tevékenységet fejtenek ki a nemzetközi tudományos szervezetekben. Az osztály nemzetközi szervezetekben 6 kollektív és 4 egyéni tudományos tagsággal rendelkezik. Az utóbbi három évet illetően elsősorban a *Nemzetközi Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unióval (IUPAP)* fennálló kapcsolatainkban számolhatunk be jelentős fejlődésről. Az osztály kezdeményezésére a baráti országok IUPAP bizottságai a legkülönbözőbb kérdésekben állásfoglalásaikat közösen alakítják ki; az együttműködés eredményeként a legutóbbi, 1966. évi Közgyűlés 6 magyar kutatót beválasztott az IUPAP különböző bizottságaiba. Az együttműködés eredményeként több nemzetközi tudománypolitikai kérdésben sikerült egységes állásfoglalást kialakítani. A *Nemzetközi Matematikai Unió* az 1966. évi moszkvai közgyűlésen magyar matematikust választott a Végrehajtó Bizottságba. Az Unió ismételten felkért központi előadókat a magyar matematikusok közül tudományos rendezvényeire. Csillagászaink aktívan részt vesznek a *Nemzetközi Csillagászati Unió* tevékenységében; az Unió magyar tagjainak száma 8-ra emelkedett; többen közülük bizottsági, ill. bizottságvezetőségi tagok. Az Unió a Csillagvizsgáló Intézetet bízta meg a változócsillagok megfigyelését koordináló Information Bulletin kiadásával; az utóbbi 3 évben a Bulletin további 98 száma jelent meg. Az elmúlt évben kollektív tagsággal beléptünk a *Nemzetközi Sugárvédelmi Társaságba.* A Társaság alakuló közgyűlése magyar sugárvédelmi fizikust is beválasztott az intéző bizottságba.

A beszámolási időszakban magyar csillagász hosszabb ideig tartózkodott Kubában, ahol felkérésre a kubai csillagászati kutatások megindításához nyújtott értékes segítséget. Az UNESCO felkérte a Matematikai Kutató Intézetet, hogy a fejlődő országok matematikusai részére ismét rendezzen valószínűségszámítási és matematikai statisztikai hosszabb időtartamú tanfolyamot.

A hazai matematikai, fizikai és csillagászati kutatások nemzetközi elismerését jelenti az a körülmény is, hogy az utóbbi években e területeken a nemzetközi szervezetek felkérésére, azok égisze alatt több tudományos tanácskozás megrendezésére került sor hazánkban. Nemzetközi szervezetek felkérésére további 5 tudományos tanácskozás hazai megrendezésének előkészítésével foglalkozik az osztály.

IX.

Az osztály tudományos életének hazai fórumaként — az egyes kutatóhelyek belső életén túlmenően — elsősorban a *tudományos tanácskozások, viták* tekintendők. Örvendetes fejlődésnek indultak a testületi üléseken a szervezett előadások és szakmai viták. Különösen kiemelkedő tevékenységet fejtett ki e téren a Szilárdtestfizikai Komplex Bizottság, a Matematikai Bizottság, a Spektroszkópiai Albizottság, a Magfizikai Albizottság és a Szputnyikmegfigyelési Albizottság.

Az elmúlt három évben több tudományos tanácskozást rendeztünk, ezek, valamint a felolvasó ülések keretében tartott előadások felsorolása a mellékletben találhatók meg. A tanácskozások túlnyomó többsége eredményes volt.

A tanácskozásokat az osztály úgy igyekezett megszervezni, hogy azokon nemcsak befejezett eredmények, hanem folyamatban levő kutatások ismertetésére, megvitatására és megoldatlan problémák kitűzésére is alkalom nyílott. Mint már említettük egyik kiemelkedő rendezvény volt 1966-ban az IUPAP hozzájárulásával Budapesten tartott Nemzetközi Lumineszcencia Kongresszus.

A tudományos élet egyik legjellegzetesebb vonása a *publikációs tevékenység.* A publikációk száma világszerte és természetesen nálunk is gyorsan növekszik. A beszámolási időszakban változatlanul gondot okozott ez a — csak részben örvendetes — tény, mert folyóirataink száma ténylegesen nem emelkedett és terjedelemnövelést is csak részben sikerült elérni.

Az *Acta Mathematica* az elmúlt években is változatlan terjedelemben jelent meg, pedig a belföldi publikációs igények az elmúlt időszakban is tovább növekedtek, és külföldi szerzők is nagy számban küldik dolgozataikat a folyóiratnak. A Szerkesztőség a meglevő magas tudományos színvonal biztosítása és a változatlan terjedelem miatt jelentős számú dolgozat közlését utasítja vissza, az igényeket mégsem tudja kielégíteni és a cikkek közlése hosszú időt vesz igénybe.

1966-ban — a Matematikai Kutató Intézet Közleményei utódaként — az Osztály folyóirataként megindult a *Studia Scientiarum Mathematicarum*, amelynek elsőrendű feladata, hogy helyet biztosítson a matematika alkalmazásaival foglalkozó cikkeknek. A folyóiratról még korai volna értékelést mondani, de reméljük, hogy beváltja azokat az igényeket, amelyeket vele szemben az Osztályvezetőség, ill. a matematikus közélet támaszt.

Az *Acta Physica* is az előző évekhez hasonlóan magas tudományos színvonalon biztosította kutatóink publikációs igényeit. A folyóirat 1966-tól évenként 2 kötetben, 50 ív terjedelemben jelenik meg. Az Acta Physica más meglévő folyóiratokkal együtt a fizikusok publikálási igényeit ma még kielégíti, de várható, hogy a terjedelem emelése ellenére ismét nehézségek lesznek, mert az igények növekednek bel- és külföldi szerzők részéről egyaránt.

Magyar nyelvű folyóirataink — az Osztályközlemények és a Magyar Fizikai Folyóirat — megfelelően látták el feladataikat az elmúlt időszakban is.

A *könyvkiadás* — hasonlóan a folyóiratkiadáshoz — az osztály tevékenységének jelentős részét képezi. Az elmúlt 3 évben e téren is történt előrehaladás. Mindenek előtt azt kell kiemelnünk, hogy a beszámolási időszakban kizárólag hazai szerzők munkái kerültek kiadásra, nagyobb részt idegen nyelveken. Az Osztályvezetőség és bizottságaink kiadásra javasolták mindazon műveket, amelyek az állandóan növekvő szakmai igényeknek megfeleltek és jelentős tudományos eredményről számoltak be. Ennek eredményeként kiadványaink iránt változatlanul nagy a bel- és külföldi szakkörök érdeklődése és azokról igen elismerő recenziók jelennek meg a különböző szakfolyóiratokban. Ezzel kapcsolatban említjük meg, hogy az Akadémia 1966. évi nívó-díjában két kiadványunk részesült: Fejes Tóth László lev. tag: Regular Figures című könyve 30 000 Ft-os, Láng László, a kémiai tudományok kandidátusa szerkesztésében megjelenő Ultraibolya színképatlasz pedig 10 000 Ft-os díjban.

Könyveink többsége — az Elnökség határozatának megfelelően — a távlati kutatási tervekhez kapcsolódik, emellett jelentek meg olyan színvonalas munkák is, amelyek gyakorlati igényeket elégítenek ki.

Problémát okoz könyvkiadási tevékenységünkben, hogy szerzőink jelentős része a vállalt kéziratleadási határidőket nem tartja be, és ezért az osztály rendelkezésére álló keretek felhasználása nem minden esetben történik meg.

Kiadványaink nagy többségének magas tudományos színvonala, kedvező bel- és külföldi fogadtatása és nem utolsósorban a kutatómunka által támasztott igények szükségessé tennék könyvkiadásunk volumenének emelését, és a rendelkezésünkre álló keretek erre lehetőséget is biztosítanának.

X.

Tisztelt Osztályülés, Kedves Vendégeink!

Áttekintve az utóbbi három évben végzett munkát, megállapíthatjuk, hogy kutatóink és intézményeink számottevő eredményeket értek el tudományos életünk fejlődésének meggyorsításában, és annak a célkitűzésnek megvalósításában, hogy a tudományos kutatások sikeresen szolgálják szocialista építőmunkánkat.

Sok még azonban a hozzánk tartozó területeken is a ki nem aknázott lehetőség, a fejlődés nem minden fontos területen megfelelő ütemű, és található még több más hiányosság is. Az eddigieknél még szorosabb összhangot kell biztosítani a társadalmi szükségletek és a tudományos tevékenység között. A legfontosabb feladatok megoldásához bátrabban kell a jövőben koncentrálnunk a rendelkezésre álló anyagi és szellemi kapacitást. Nem szabad szem elől tévesztenünk, hogy a kutatások bázisának hatékonyabb koordinálása, az anyagi és szellemi erők szervezettebb összefogása az eddiginél jelentősebb eredmények elérését teszi lehetővé. Ezért a következő években a meglevő intézmények korszerűsítése, felszerelésük, műszerezettségük javítása kell hogy képezze a fő feladatot.

ELOSZLÁSOK ELTÉRÉSÉNEK INFORMÁCIÓ-TÍPUSÚ MÉRTÉKSZÁMAI, II.*

ÍRTA: CSISZÁR IMRE

3. § Az f-eltérés csökkenése közvetett megfigyelés esetén

Legyen $(X, \mathscr{X})$ tetszőleges mérhető tér és μ_1, μ_2 két valószínűségeloszlás $(X, \mathscr{X})$-en. Ha nem közvetlenül az X tér elemeit figyeljük meg, hanem csak valamilyen függvényüket, esetleg bizonyos megfigyelési hibával is terhelve, akkor szemléletesen nyilvánvaló, hogy a μ_1 és μ_2 által a közvetett megfigyelés kimeneteleinek $(Y, \mathscr{Y})$ terében indukált $\tilde{\mu}_1$ és $\tilde{\mu}_2$ eloszlások nem különbözhetnek egymástól jobban, mint az eredeti eloszlások. Ha tehát az f-eltérés megfelelő mértékszáma az eloszlások egymástól való eltérésének, akkor teljesülnie kell a

$$\mathscr{I}_f(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \leqq \mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2) \tag{3.1}$$

egyenlőtlenségnek, és az egyenlőség fennállása azt kell hogy jelentse, hogy a közvetett megfigyelés valamilyen értelemben elégséges a (μ_1, μ_2) mértékpárra vonatkozólag.

A közvetett megfigyelés legegyszerűbb esete az, amikor x-et korlátozott pontossággal figyeljük meg, ami matematikailag azt jelenti, hogy az $\mathscr{X}$ σ-algebrát valamely $\mathscr{X}_0$ rész- σ-algebrájával helyettesítjük; ez gyakorlatilag sokszor úgy valósul meg, hogy valamilyen $y=T(x)$ statisztikát vizsgálunk, ahol T az $(X, \mathscr{X})$-nek mérhető leképezése $(Y, \mathscr{Y})$-ba. Foglalkozni fogok azonban azzal az általánosabb esettel is, amikor a közvetett megfigyelés y eredménye csak sztochasztikusan függ x-től, olyan értelemben, hogy minden $x \in X$-nek megfelel egy $\nu(B|x)$ valószínűségeloszlás $(Y, \mathscr{Y})$-on, ahol $\nu(B|x)$ minden rögzített $B \in \mathscr{Y}$ esetén $\mathscr{X}$-mérhető. Az információelméletben szokásos kifejezéssel ilyenkor azt mondjuk, hogy egy (X, ν, Y) megfigyelési csatorna van adva, melynek bemeneti tere $(X, \mathscr{X})$, kimeneti tere $(Y, \mathscr{Y})$ és átmenetfüggvénye $\nu(B|x)$ (vö. pl. PEREZ [25]). Természetesen ha a megfigyelő csatorna zaj nélküli, akkor az $y=T(x)$ esettel van dolgunk.

KULLBACK és LEIBLER [20] jól ismert tétele szerint (lásd még PEREZ [24]) az $y=T(x)$ esetben mindig

$$I(\tilde{\mu}_1 \| \tilde{\mu}_2) \leqq I(\mu_1 \| \mu_2) \qquad (\tilde{\mu}_i = \mu_i T^{-1}; \quad i=1,2), \tag{3.2}$$

és $I(\mu_1 \| \mu_2) < +\infty$ esetén az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha T elégséges statisztika a μ_1, μ_2 mértékpárra vonatkozólag. Lényegében ismeretesnek tekinthető továbbá[9], hogy a (3.2) egyenlőtlenség akkor is érvényben marad, ha a T statiszti-

* A dolgozat első része, az 1. és 2. §, valamint a teljes irodalomjegyzék az MTA III. Oszt. Közlemények **17** (1967) számának 123–149. oldalán jelent meg.

[9] Tudomásom szerint ebben az általános formában a (3.2) egyenlőtlenség explicite nem található meg az irodalomban, diszkrét kimeneti tér esetére azonban feladatként szerepel KULLBACK [21] könyvében (35. o. 8.37. feladat), egyébként pedig, mint látni fogjuk, a csatornákra vonatkozó (3.2) egyenlőtlenség közvetlen következménye a T statisztikákra vonatkozó (3.2) egyenlőtlenségnek.

kát egy (X, ν, Y) zajos megfigyelési csatornával pótoljuk; ekkor $\tilde{\mu}_i$ értelmezése

$$\tilde{\mu}_i(B) = \int \nu(B|x)\mu_i(dx) \qquad (B \in \mathcal{Y};\quad i = 1, 2). \tag{3.3}$$

A következőkben ennek a tételnek a tetszőleges f-eltérésekre vonatkozó analogonját, valamint az egyenlőség feltétele stabilitásának kérdését tárgyalom. Külön hivatkozás nélkül használni fogom a feltételes valószínűségek és várható értékek következő jól ismert tulajdonságait (lásd pl. [11], [23]):

Egy $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett véges várható értékű ξ valószínűségi változónak valamely $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ σ-algebrára vonatkozó $M(\xi|\mathcal{F}_0)$ feltételes várható értékén olyan $\mathcal{F}_0$-mérhető függvényt értünk, melyre bármely $\mathcal{F}_0$-beli E halmaz esetén $\int\limits_E M(\xi|\mathcal{F}_0)P(d\omega) = \int\limits_E \xi P(d\omega)$. Az $M(\xi|\mathcal{F}_0)$ két különböző verziója csak nullmértékű halmazon különbözhet egymástól. A $P(A|\mathcal{F}_0) = M(\chi_A|\mathcal{F}_0)$ függvényt (ahol χ_A az $A \in \mathcal{F}$ halmaz indikátorfüggvénye) az A esemény $\mathcal{F}_0$-ra vontakozó feltételes valószínűségének nevezzük. Ha $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt $\mathcal{F}$-beli halmazok, akkor 1 valószínűséggel $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i|\mathcal{F}_0) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i|\mathcal{F}_0)$. Bármely $\mathcal{F}_0$-mérhető szorzó kiemelhető a feltételes várható értékből: ha η $\mathcal{F}_0$-mérhető, akkor 1 valószínűséggel $M(\eta\xi|\mathcal{F}_0) = \eta M(\xi|\mathcal{F}_0)$.

3. 1. definíció (Halmos és Savage [14]). *Az $(X, \mathcal{X})$ mérhető térnek az $(Y, \mathcal{Y})$ mérhető térbe való T mérhető leképezését az $(X, \mathcal{X})$-en értelmezett $\{\mu_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ eloszláscsaládra vonatkozólag elégséges statisztikának nevezzük, ha a $\mu_\theta(A|y) = \mu_\theta(A|T^{-1}\mathcal{Y})$ feltételes valószínűségeknek létezik egy közös (θ-tól nem függő) verziója, azaz, ha minden $A \in \mathcal{X}$ esetén van olyan $\pi_A(x)$ $\mathcal{Y}$-mérhető függvény, melyre*

$$\int\limits_B \pi_A(y)\mu_\theta T^{-1}(dy) = \int\limits_{T^{-1}B} \pi_A(Tx)\mu_\theta(dx) = \mu_\theta(A \cap T^{-1}B) \quad (B \in \mathcal{Y}) \tag{3.4}$$

Hasonlóképpen egy $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ σ-algebrát akkor nevezünk elégségesnek $\{\mu_\theta\}_{\theta\in\Theta}$-ra nézve, ha a $\mu_\theta(A|\mathcal{X}_0)$ $(A \in \mathcal{X})$ feltételes valószínűségeknek létezik közös (θ-tól független) $\pi_A(x)$ verziója:

$$\int\limits_B \pi_A(x)\mu_\theta(dx) = \mu_\theta(A \cap B) \quad (B \in \mathcal{Y},\quad \theta \in \Theta;\quad \pi_A(x)\quad \mathcal{X}_0 \text{ mérhető.}) \tag{3.4'}$$

Legyen μ_1 és μ_2 két tetszőleges eloszlás $(X, \mathcal{X})$-en és $\mathcal{X}_0$ az $\mathcal{X}$ tetszőleges rész-σ-algebrája; jelölje $\bar{\mu}_i$ a μ_i $\mathcal{X}_0$-ra való megszorítását $(i = 1, 2)$.

Jelölje $C \in \mathcal{X}_0$ a $\bar{\mu}_1$ $\bar{\mu}_2$-re nézve szinguláris komponensének hordozóját ($\bar{\mu}_1 \ll \bar{\mu}_2$ esetén $C = \emptyset$) és értelmezzük a μ_{12} mértéket a következőképpen:

$$\mu_{12}(A) = \int\limits_{X-C} \mu_2(A|\mathcal{X}_0)\mu_1(dx) + \mu_1(A \cap C) \qquad (A \in \mathcal{X}). \tag{3.5}$$

Itt $\mu_1(dx)$ helyett természetesen $\bar{\mu}_1(dx)$ is írható, minthogy $\mu_2(A|\mathcal{X}_0)$ definíció szerint $\mathcal{X}_0$-mérhető. A (3. 5) formula által egyértelműen definiált μ_{12} valószínűségi mértéknek a következőkben fontos szerepe lesz. A 3. 1 definícióból közvetlenül következik, hogy ha $\mathcal{X}_0$ elégséges σ-algebra a μ_1, μ_2 eloszláspárra nézve, akkor $\mu_{12} = \mu_1$. Könnyen láthatóan a megfordítás is igaz, ugyanis $\mu_{12} = \mu_1$ esetén (3. 5)-

ből következik, hogy egy $N_1 \cup N_2$ $(\mu_1(N_1)=\mu_2(N_2)=0)$ alakú halmaz kivételével (ahol $N_2=C$) mindenütt $\mu_2(A|\mathscr{X}_0)=\mu_1(A|\mathscr{X}_0)$ s ezért a kétféle feltételes valószínűségnek van közös verziója.

Ha a μ_i $(i=1,2)$ mértékek λ domináló mértéke olyan, hogy még a λ $\mathscr{X}_0$-ra való $\bar{\lambda}$ megszorítása is σ-véges, akkor jelölje $p_i(x)$, ill. $\bar{p}_i(x)$ a μ_i, ill. $\bar{\mu}_i$ $(i=1,2)$ mérték λ-ra, ill. $\bar{\lambda}$-ra vonatkozó sűrűségfüggvényét (*Radon—Nikodym*-deriváltját). Ekkor (3. 5)-ben vehető $C=\{x\colon \bar{p}_2(x)=0\}$, továbbá nyilván $\mu_{12} \ll \lambda$, végül μ_{12} λ-ra vonatkozó sűrűségfüggvénye a következő:

$$p_{12}(x)=\begin{cases}\dfrac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}p_2(x), & \text{ha} \quad \bar{p}_2(x)>0\\ p_1(x), & \text{ha} \quad \bar{p}_2(x)=0.\end{cases} \tag{3.6}$$

Ezt elég arra az esetre igazolni, amikor λ maga is valószínűségi mérték, mert ha valamely λ domináló mértékre érvényes a (3. 6) előállítás, akkor nyilván minden vele ekvivalensre is, és minden σ-véges mértékhez található vele ekvivalens valószínűségi mérték. Mármost ha λ valószínűségi mérték, a λ szerint várható értéket jelöljük M-mel. Ekkor felhasználva, hogy az $\mathscr{X}_0$ szerinti feltételes várható értékből $\mathscr{X}_0$-mérhető szorzó kihozható,

$$\begin{aligned}\int_A p_{12}(x)\lambda(dx) &= M\left(\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2}\chi_{A-C}p_2\right)+M(p_1\chi_{A\cap C}) =\\ &= M\left(\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2}\chi_{X-C}M(\chi_A p_2|\mathscr{X}_0)\right)+\mu_1(A\cap C) =\\ &= M\left(\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2}\chi_{X-C}\mu_2(A|\mathscr{X}_0)\bar{p}_2\right)+\mu_1(A\cap C) =\\ &= \int_{X-C}\mu_2(A|\mathscr{X}_0)\bar{p}_1(x)\lambda(dx)+\mu_1(A\cap C) = \mu_{12}(A),\end{aligned} \tag{3.7}$$

azaz valóban $p_{12}(x)=\dfrac{\mu_{12}(dx)}{\lambda(dx)}$.

3. 1. LEMMA. *Az $\mathscr{X}_0 \subset \mathscr{X}$ σ-algebra akkor és csak akkor elégséges a μ_1, μ_2 mértékpárra vonatkozólag, ha $\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ $(\mu_1+\mu_2)$-majdnem mérhető $\mathscr{X}_0$-ra vonatkozólag, azaz, ha $(\mu_1+\mu_2)$-majdnem mindenütt értelmezve van és egyenlő egy $\mathscr{X}_0$-mérhető függvénynyel; itt megállapodásszerűen $\dfrac{a}{0}=+\infty$, ha $a>0$, de $\dfrac{0}{0}$ nincs értelmezve.*

Bizonyítás. Ha $\mathscr{X}_0$ elégséges, vagyis, ha $\mu_{12}=\mu_1$, akkor

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}=\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)} \qquad [\mu_1+\mu_2] \tag{3.8}$$

ahol a jobb oldal definíció szerint $\mathscr{X}_0$-mérhető. Valóban, (3. 6)-ból következik, hogy ha $p_{12}(x)=p_1(x)$ $[\lambda]$ akkor $\bar{p}_2(y)>0$ esetén, vagyis az $X-C$ halmazon $(\mu_2(C)=0)$ mindenesetre fennáll (3. 8); de ugyanez igaz a $C=\{\bar{p}_2(x)=0\}$ halmazon is (mindkét oldalon $+\infty$-nel), mert $\bar{p}_2(x)=0$ esetén még inkább $p_2(x)=0$ $[\lambda]$ és ugyanígy $p_1(x)>0$-ból következik, hogy $\bar{p}_1(x)>0$ $[\lambda]$. Megfordítva, ha $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ $(\mu_1+\mu_2)$-majdnem mérhető $\mathscr{X}_0$-ra nézve, akkor választhatjuk $p_1(x)$-nek és $p_2(x)$-nek olyan verzióját, hogy az $N=\{x: p_1(x)=p_2(x)=0\}\in\mathscr{X}$ halmaz komplementerén értelmezett $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ függvényt alkalmas módon kiterjesztve az egész X-re, $\mathscr{X}_0$-mérhető függvényt kapunk. Így speciálisan az

$$N_1'=\left\{x: \frac{p_1(x)}{p_2(x)}=0,\ x\in X-N\right\} \quad \text{és} \quad N_2'=\left\{x: \frac{p_1(x)}{p_2(x)}=+\infty,\ x\in X-N\right\}$$

halmazhoz létezik olyan $N_1''\subset N$ és $N_2''\subset N$ halmaz, hogy $N_1'\cup N_1''\in\mathscr{X}_0$ és $N_2'\cup N_2''\in\mathscr{X}_0$. Ha mármost N_0-val jelöljük az N halmaz $\mathscr{X}_0$-mérhető magját a $\bar{\lambda}$ mérték szerint, vagyis, ha $N_0\in\mathscr{X}_0$ olyan halmaz, hogy $N-N_0$ minden $\mathscr{X}_0$-beli részhalmaza nulla $\bar{\lambda}$-mértékű ($\bar{\lambda}$ σ-végessége miatt ilyen N_0 létezik), akkor a konstrukcióból nyilvánvaló, hogy $\bar{p}_i(x)$ alkalmas verziójára $N_i=\{x: \bar{p}_i(x)=0\}=$ $=N_i'\cup N_i''\cup N_0$ $(i=1,\ 2)$. Ez azt jelenti, hogy az $X-C=X-N_2\in\mathscr{X}_0$ halmazon $\mu_1\ll\mu_2$, továbbá itt $\frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}$-nek van $\mathscr{X}_0$-mérhető verziója, amely $x\notin N$ esetén $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$-szel egyenlő, végül $X-C$-n $\frac{\bar{\mu}_1(dx)}{\bar{\mu}_2(dx)}=\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}$ (μ_1 persze nem szükségképpen valószínűségi mérték $X-C$-n). Ebből, kihasználva, hogy tetszőleges μ valószínűségi mértékre és $\nu\ll\mu$ véges mértékre — a feltételes várható érték definíciója szerint —

$$M_\mu\left(\frac{\nu(dx)}{\mu(dx)}\,\middle|\,\mathscr{X}_0\right)=\frac{\bar{\nu}(dx)}{\bar{\mu}(dx)}, \tag{3.9}$$

azonnal következik, hogy $X-C$-n $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}=\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}$ $[\mu_2]$. Ez azonban (3. 6) szerint (figyelembe véve még, hogy $X-C$-n $p_2(x)$ csak $p_1(x)$-szel egyidejűleg tűnhet el, ti. ha $x\in N$) éppen azt jelenti, hogy $\mu_{12}=\mu_1$, azaz $\mathscr{X}_0$ elégséges, ami bizonyítandó volt.

Megjegyzés. A 3. 1 lemma valójában nem más, mint az elégséges statisztikákra vonatkozó jólismert faktorizációs kritérium egy változata, a következők szempontjából célszerű megfogalmazásban.

3. 1. Tétel. *Ha μ_1 és μ_2 két tetszőleges valószínűségi mérték az $(X, \mathscr{X})$ mérhető téren és $\mathscr{X}_0$ az $\mathscr{X}$ tetszőleges rész-σ-algebrája, akkor bármely f konvex függvényre*

$$\mathscr{I}_{f;\mathscr{X}_0}(\mu_1, \mu_2)\leqq\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2). \tag{3. 10}$$

Ha f szigorúan konvex, és $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)<+\infty$, (3. 10)*-ben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $\mathscr{X}_0$ elégséges σ-algebra a μ_1, μ_2 mértékpárra nézve.*

Bizonyítás. Maga a (3. 10) egyenlőtlenség az 1. 1 tétel triviális következménye. Az egyenlőség feltételének meghatározásához azonban célszerű közvetlenül az 1. 1 definícióból kiindulni.

Ha $\mu_1 \ll \mu_2$, akkor az 1. 1 lemmához fűzött megjegyzés és (3. 9) felhasználásával $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2) < +\infty$ esetén

$$\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2) = Mf\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = Mf\left(\frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}\right) =$$

$$(3.11) \qquad = M\left(M\left(f\left(\frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}\right) \middle| \mathscr{X}_0\right)\right) \geqq Mf\left(M\left(\frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)} \middle| \mathscr{X}_0\right)\right) =$$

$$= Mf\left(\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2}\right) = \mathscr{I}_f(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2) = \mathscr{I}_{f;\mathscr{X}_0}(\mu_1, \mu_2)$$

(a várható érték ebben a bizonyításban mindenütt a μ_2 mértékre vonatkozik), ahol az egyenlőség — feltéve, hogy f szigorúan konvex — akkor és csak akkor áll fenn, ha $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ μ_2-majdnem mérhető $\mathscr{X}_0$-ra vonatkozólag, ami a 3. 1 lemma értelmében éppen azzal ekvivalens, hogy $\mathscr{X}_0$ elégséges σ-algebra μ_1, μ_2-re nézve.

Az általános esetben jelölje μ_1', ill. μ_1'' a μ_1-nek μ_2-re abszolút folytonos, ill. szinguláris komponensét, $p_1'(x)$, ill. $p_1''(x)$ pedig ezek sűrűségfüggvényét (a λ domináló mértékre vonatkozólag). Ekkor $p_2(x) > 0$ esetén $p_1'(x) = p_1(x)$, $p_2(x) = 0$ esetén $p_1'(x) = 0$, továbbá $p_1'(x) + p_1''(x) = p_1(x)$. μ_1' és μ_1'' $\mathscr{X}_0$-ra való megszorítását, továbbá ezek sűrűségfüggvényét (feltesszük, hogy λ-nak $\mathscr{X}_0$-ra való $\bar{\lambda}$ megszorítása is σ-véges) $\bar{\mu}_1'$, $\bar{\mu}_1''$, $\bar{p}_1'(x)$, $\bar{p}_1''(x)$-szel jelölve,

$$\frac{\mu_1'(dx)}{\mu_2(dx)} = \frac{p_1'(x)}{p_2(x)} \quad [\mu_2], \qquad \frac{\bar{\mu}_1'(dx)}{\bar{\mu}_2(dx)} = \frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)} \quad [\bar{\mu}_2]$$

és így (3. 11)-hez hasonlóan

$$(3.11') \qquad \int p_2(x) f\left(\frac{p_1'(x)}{p_2(x)}\right) \lambda(dx) = Mf\left(\frac{p_1'}{p_2}\right) \geqq Mf\left(\frac{\bar{p}_1'}{\bar{p}_2}\right) = \\ = \int \bar{p}_2(x) f\left(\frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)}\right) \lambda(dx),$$

ahol az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\frac{p_1'(x)}{p_2(x)} = \frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)} \quad [\mu_2],$$

vagyis ha

$$(3.12) \qquad \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = \frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)} \quad \text{ha} \quad p_2(x) > 0 \quad [\lambda].$$

Mármost (3. 11′)-ből, felhasználva az (1. 8) megállapodást és az (1. 2) lemma (1. 11) speciális esetét ($a_1=\bar p_1''(x)$, $b_1=0$, $a_2=\bar p_1'(x)$, $b_2=\bar p_2(x)$ választással):

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2) &= \int\limits_{p_2(x)=0} p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)\lambda(dx) + \int\limits_{p_2(x)>0} p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right)\lambda(dx) = \\
&= \mu_1''(X)\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u} + \int p_2(x) f\left(\frac{p_1'(x)}{p_2(x)}\right)\lambda(dx) \geqq \\
&\geqq \int 0 f\left(\frac{\bar p_1''(x)}{0}\right)\bar\lambda(dx) + \int \bar p_2(x) f\left(\frac{\bar p_1(x)}{\bar p_2(x)}\right)\bar\lambda(dx) \geqq \\
&\geqq \int \bar p_2(x) f\left(\frac{\bar p_1''(x)+\bar p_1'(x)}{\bar p_2(x)}\right)\lambda(dx) = \mathcal{I}_f(\bar\mu_1,\bar\mu_2) = \mathcal{I}_{f;\mathcal{X}_0}(\mu_1,\mu_2).
\end{aligned}\tag{3.13}$$

Itt a második egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $\bar p_2(x)>0$ esetén $\bar p_1''(x)=0$ $[\lambda]$; ez a feltétel egyrészt azt jelenti, hogy (3. 12)-ben $\bar p_1'(x)$ helyére $\bar p_1(x)$ írható, másrészt — minthogy $p_1(x)>p_2(x)=0$ esetén $p_1''(x)=p_1(x)>0$, és így még inkább $\bar p_1''(x)>0$ $[\lambda]$ — azt is jelenti, hogy ha $p_1(x)>p_2(x)=0$, akkor mindig $\bar p_2(x)=0$ $[\lambda]$, tehát $p_1(x)>p_2(x)=0$ esetén is λ-majdnem mindenütt $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}=\frac{\bar p_1(x)}{\bar p_2(x)}$ $(=+\infty)$ $[\lambda]$. Ezt (3. 13)-mal egybevetve éppen (3. 8)-ra jutunk, tehát arra, hogy $\mathcal{X}_0$ elégséges. Megfordítva, ha $\mathcal{X}_0$ elégséges, akkor (3. 8) értelmében (3. 10)-ben biztosan egyenlőség van. Ezzel a 3. 1 tétel bizonyítását befejeztük.

KOROLLÁRIUM. *Ha $y=T(x)$ $(X, \mathcal{X})$-nek tetszőleges mérhető leképezése $(Y, \mathcal{Y})$-ba, akkor — a $\tilde\mu_i=\mu_i T^{-1}$ jelöléssel —*

$$\mathcal{I}_f(\tilde\mu_1,\tilde\mu_2)\leqq\mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2);\tag{3.10a}$$

ha f szigorúan konvex és $\mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2)<+\infty$, (3. 10a)*-ban akkor és csak akkor teljesül az egyenlőség, ha T elégséges statisztika μ_1, μ_2-re nézve.*

Bizonyítás. Akár az 1. 1 tételből, akár magából az 1. 1 definícióból nyilvánvaló, hogy $\mathcal{I}_f(\tilde\mu_1,\tilde\mu_2)=\mathcal{I}_{f;T^{-1}\mathcal{Y}}(\mu_1,\mu_2)$. Mivel a 3. 1 definíció értelmében T akkor és csak akkor elégséges statisztika a μ_1,μ_2 mértékpárra nézve, ha $T^{-1}\mathcal{Y}$ elégséges σ-algebra, a korollárium valóban következik a 3. 1 tételből.

A tetszőleges megfigyelési csatornákra vonatkozó analóg eredmény megfogalmazásához először is jegyezzük meg, hogy az $(X, \mathcal{X})$ bemeneti téren értelmezett bármely μ (σ-véges) mérték indukál az $(X\times Y, \mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ szorzattéren egy μ^* (σ-véges) mértéket:

$$\mu^*(A\times B)=\int\limits_A \nu(B|x)\mu(dx) \qquad (A\in\mathcal{X},\quad B\in\mathcal{Y})\tag{3.14}$$

és innen az egész $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$-ra a μ^* mérték a szokásos kiterjesztéssel adódik; μ^*-nak az $(Y, \mathcal{Y})$-ra való vetületét jelöljük $\tilde\mu$-mal:

$$\tilde\mu(B)=\int \nu(B|x)\mu(dx) \qquad (B\in\mathcal{Y}).\tag{3.15}$$

Célszerű továbbá az elégséges statisztika mintájára bevezetni az elégséges csatorna fogalmát.

3.2. definíció. *Az (X, v, Y) csatornát elégségesnek nevezzük az $(X, \mathcal{X})$ bemeneti téren értelmezett $\{\mu_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ eloszláscsaládra nézve, ha a $\mu_\theta(A|y)$ $(A\in\mathcal{X})$ feltételes valószínűségeknek létezik θ-tól nem függő közös verziója, vagyis ha minden $A\in\mathcal{X}$ esetén van olyan $\pi_A(y)$ $\mathcal{Y}$-mérhető függvény, melyre*

$$\int_B \pi_A(y)\tilde{\mu}_\theta(dy) = \mu_\theta^*(A\times B) \qquad (B\in\mathcal{Y},\quad \theta\in\Theta). \tag{3.16}$$

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a közvetett megfigyelés (az y kimeneti jel megfigyelése) ugyanannyi információt nyújt az ismeretlen $\theta\in\Theta$ paraméterre vonatkozólag, mintha közvetlenül az x-et figyeltük volna meg; más szóval, ha a megfigyelési csatorna zajos is (pl. a megfigyelés csak valamilyen hibával történhetik), a zaj okozta információveszteség csak az ismeretlen paraméter meghatározása szempontjából lényegtelen információkat érinti.

Az elégségesség fogalmát BLACKWELL [3] még ennél is általánosabban, két tetszőleges kísérletre értelmezte. Eszerint — az általam használt jelölésekkel — tetszőleges $(Y, \mathcal{Y})$ kísérletet elégségesnek nevezünk az $(X, \mathcal{X})$ kísérletre nézve, a $\theta\in\Theta$ ismeretlen paraméterekre vonatkozólag, ha minden $\theta\in\Theta$-nak megfelel az $(X\times Y, \mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ szorzattéren egy μ_θ^* eloszlás (amely azonban nem szükségképpen (3. 14) alakú) és ezek mindegyikére teljesül (3. 16), alkalmas $\pi_A(y)$ függvénnyel. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy y megfigyelése legalább annyi információt szolgáltat a θ ismeretlen paraméterre vonatkozólag, mint az x megfigyelése.

Ez az általánosítás azonban már csak részben van összhangban az elégségesség szemléletes fogalmával, mert ehhez, legalábbis véleményem szerint, az a kép fűződik, hogy a második kísérlet már eleve nem lehet jobb („informatívabb") az eredetinél, hanem annak valamilyen értelemben „durvítása", tehát csak azt kívánhatjuk, hogy ez a durvítás az ismeretlen paraméterre vonatkozólag rendelkezésre álló információt ne csökkentse.

3. 2. TÉTEL. *Az $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren értelmezett bármely μ_1 és μ_2 eloszlásra, tetszőleges (X, v, Y) megfigyelési csatorna és f konvex függvény esetén*

$$\mathcal{I}_f(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \leqq \mathcal{I}_f(\mu_1, \mu_2). \tag{3.17}$$

Ha f szigorúan konvex és $\mathcal{I}_f(\mu_1, \mu_2) < +\infty$, (3. 17)-ben akkor és csak akkor teljesül az egyenlőség, ha az (X, v, Y) csatorna elégséges a μ_1, μ_2 mértékpárra vonatkozólag.

Bizonyítás. A 3. 1 tétel szerint mindenestre

$$\mathcal{I}_f(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \leqq \mathcal{I}_f(\mu_1^*, \mu_2^*) \tag{3.18}$$

(ahol μ_i^* $(i=1, 2)$ (3. 14)-nek megfelelően van értelmezve), másrészt ugyancsak a (3. 1) tétel szerint

$$\mathcal{I}_f(\mu_1, \mu_2) = \mathcal{I}_f(\mu_1^*, \mu_2^*), \tag{3.19}$$

minthogy az $\mathcal{X}' = \{A\times Y: A\in\mathcal{X}\}$ σ-algebra a csatorna definíciója értelmében biztosan elégséges az $(X\times Y, \mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ szorzattéren értelmezett bármely eloszláscsaládra nézve. Természetesen a (3. 19) egyenlőség közvetlenül is könnyen következik az 1. 1 definícióból, mert μ_i^*-nak a (3. 14) szerinti λ^*-ra vonatkozó $p_i^*(x, y)$ sűrűségfüggvénye (3. 14)-ből következőleg λ^*-majdnem mindenütt $p_i(x)$-szel egyenlő $(i=1, 2)$. (3. 18) és (3. 19) együtt éppen a (3. 17) egyenlőtlenséget szolgáltatja. Az egyenlőség feltétele (szigorúan konvex f függvény és $\mathscr{I}_f(\mu_1^*, \mu_2^*)=\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)<+\infty$ esetén) a 3. 1 tétel értelmében az, hogy $\mathscr{Y}'=\{X\times B\colon B\in\mathscr{Y}\}$ elégséges σ-algebra legyen az $(X\times Y, \mathscr{X}\times\mathscr{Y})$-on értelmezett μ_1^*, μ_2^* mértékpárra nézve, vagyis, hogy bármely $C\in\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ halmazhoz létezzék olyan $\mathscr{Y}$-mérhető $\pi_C(y)$ függvény, hogy

$$\begin{aligned}\int_B \pi_C(y)\tilde{\mu}_i(dy) &= \int_{X\times B} \pi_C(y)\mu_i^*(dx, dy) = \\ &= \mu_i^*(C\cap(X\times B)) \qquad (B\in\mathscr{Y}, \quad i=1, 2).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Mivel az $A\times B_1$ $(A\in\mathscr{X}, B_1\in\mathscr{Y})$ alakú halmazok generálják $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$-t, (3. 20)-at elég a $C=A\times B_1$ esetre megkövetelni. Ebből nyilvánvaló, hogy az iménti feltétel éppen az (X, v, Y) csatorna elégségességével ekvivalens, ui., ha (3. 20) teljesül, akkor $\pi_A'(y)=\pi_{A\times Y}(y)$ eleget tesz (3. 16)-nak (ahol $\Theta=\{1, 2\}$), másrészt pedig, ha valamely $\pi_A'(y)$ függvényre (3. 16) teljesül, akkor $\pi_{A\times B_1}(y)=\pi_A'(y)\chi_{B_1}(y)$ választással (3. 20) is teljesül $C=A\times B_1$-re (ahol $\chi_{B_1}(y)$ a $B_1\in\mathscr{Y}$ halmaz indikátorfüggvényét jelöli).

Ezzel a 3. 2 tételt bebizonyítottuk.

A 3. 2 tétellel kapcsolatban felmerül az a kérdés, hogy hogyan jellemezhetők azok a csatornák, melyek valamely mértékpárra vonatkozólag elégségesek. Erre ad választ a következő

3. 2. LEMMA. *Az (X, v, Y) csatorna akkor és csak akkor elégséges az $(X, \mathscr{X})$ bemeneti téren értelmezett μ_1, μ_2 eloszláspárra vonatkozólag, ha Y előállítható*

$$Y = \bigcup_{0\le s\le+\infty} B_s \qquad (B_{s_1}\cap B_{s_2}=\emptyset, \quad s_1\ne s_2) \tag{3.21}$$

alakban, ahol a $[0, +\infty]$ intervallum minden $[a, b]$ részintervallumára $\bigcup_{a\le s\le b} B_s\in\mathscr{Y}$ és[10] $\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}=s$ *esetén* $v(B_s|X)=1$, *ha* $x\in X-X_0$, *ahol* $\mu_1(X_0)=\mu_2(X_0)=0$. *Itt a* (3. 21) *előállításban vehető* $B_s=\left\{y\colon \dfrac{\tilde{p}_1(y)}{\tilde{p}_2(y)}=s\right\}$ $(s>0)$ *és* $B_0=\{y\colon \tilde{p}_1(y)=0\}$.

Bizonyítás. Legyen

$$\begin{aligned}A_k^n &= \left\{x\colon \frac{k-1}{2^n}p_2(x) \le p_1(x) < \frac{k}{2^n}p_2(x)\right\} \qquad (k=1, 2, \dots) \\ B_k^n &= \left\{y\colon \frac{k-1}{2^n}\tilde{p}_2(y) \le \tilde{p}_1(y) < \frac{k}{2^n}\tilde{p}_2(y)\right\} \qquad (n=1, 2, \dots)\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}A_\infty &= \{x\colon p_1(x)>p_2(x)=0\} \\ B_\infty &= \{y\colon \tilde{p}_1(y)>\tilde{p}_2(y)=0\}\end{aligned} \tag{3.23}$$

[10] Azzal a megállapodással, hogy $a>0$ esetén $\dfrac{a}{0}=+\infty$.

ahol a $p_i(x)$, ill. $\tilde{p}_i(y)$ sűrűségfüggvények $(i=1,2)$ tetszőleges λ, ill. $\tilde{\lambda}$ domináló mértékre vonatkoznak (feltesszük, hogy λ és $\tilde{\lambda}$ a (3. 15) kapcsolatban állnak egymással, bár még erre sem volna szükség). Ha az (X, ν, Y) csatorna elégséges a μ_1, μ_2 mértékpárra nézve, akkor a (3. 22) halmazokra (3. 14) és (3. 16) értelmében

$$(3.24) \qquad \frac{k-1}{2^n}\mu_2^*(A_k^n\times B_l^n) \leqq \mu_1^*(A_k^n\times B_l^n) \leqq \frac{k}{2^n}\mu_2^*(A_k^n\times B_l^n)$$

és

$$(3.25) \qquad \frac{l-1}{2^n}\mu_2^*(A_k^n\times B_l^n) \leqq \mu_1^*(A_k^n\times B_l^n) \leqq \frac{l}{2^n}\mu_2^*(A_k^n\times B_l^n),$$

ahol (mind (3. 24)-ben, mind (3. 25)-ben) a második egyenlőtlenségben csak akkor állhat egyenlőség, ha $\mu_i^*(A_k^n\times B_l^n)=0$ $(i=1,2)$. (3. 24) és (3. 25) miatt $k\neq l$ esetén szükségképpen $\mu_i^*(A_k^n\times B_l^n)=0$ $(i=1,2)$, s ennek, hasonló meggondolás alapján, $k=+\infty$, ill. $l=+\infty$ esetén is érvényben kell maradnia, ha $A_\infty^n=A_\infty$, $B_\infty^n=B_\infty$. Ez azonban (3. 14) értelmében azt jelenti, hogy $x\in A_k^n$ esetén $\nu(B_k^n|x)=1$ $(k=1,2,\ldots,+\infty;\ n=1,2,\ldots)$, kivéve esetleg egy mind μ_1, mind μ_2 szerint 0 mértékű X_0 halmazt. Ha tehát $B_s=\bigcap_{n=1}^{\infty}B^n_{[2^n s]+1}=\left\{y:\frac{\tilde{p}_1(y)}{\tilde{p}_2(y)}=s\right\}$ $(0<s<+\infty)$, $B_0=\{y:\tilde{p}_1(y)=0\}$ és B_∞ a (3. 23) szerinti, akkor $x\in X-X_0$ esetén valóban $\nu(B_s|x)=1$. Megfordítva, ha Y előállítható a (3. 21) alakban, akkor $s(y)$-nal jelölve azt az s értéket, amelyre $y\in B_s$, nyilvánvalóan

$$(3.26) \qquad s(y)=\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad [\mu_1^*+\mu_2^*].$$

Itt, a (3. 21) előállításra vonatkozó feltevésünk szerint $s(y)$ $\mathscr{Y}$-mérhető, másrészt pedig, mint a 3. 2 tétel bizonyításában is megjegyeztük, (3. 14)-ből azonnal következik, hogy $p_i^*(x,y)=p_i(x)$ $[\lambda^*]$. (3. 26) tehát azt jelenti, hogy $\frac{p_1^*(x,y)}{p_2^*(x,y)}$ $(\mu_1^*+\mu_2^*)$-majdnem mindenütt egyenlő egy $\mathscr{Y}'$-mérhető függvénnyel, ahol $\mathscr{Y}'=\{X\times B:\ B\in\mathscr{Y}\}$. Ekkor azonban a 3. 1 lemma szerint $\mathscr{Y}'$ elégséges σ-algebra a μ_1^*, μ_2^* mértékpárra nézve, és így (X, ν, Y) elégséges csatorna.

MEGJEGYZÉS. A 3. 2 lemma értelmében, ha az (X, ν, Y) csatornához nem létezik n hosszúságú 0 hibavalószínűségű kód (azaz, ha nem léteznek olyan $x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n\in X$ elemek, hogy bármely két $\nu(\cdot|x_i)$ és $\nu(\cdot|x_k)$ $(i\neq k)$ mérték ortogonális egymásra), akkor az (X, ν, Y) csatorna egyetlen olyan μ_1, μ_2 mértékpárra vonatkozólag se lehet elégséges, melyre a $p_1(x)/p_2(x)$ likelihood-hányados minden $X-X_0$ alakú halmazon $(\mu_1(X_0)=\mu_2(X_0)=0)$ legalább n különböző értéket vesz fel. Ha speciálisan még 2 hosszúságú 0 hibavalószínűségű kód sem létezik, akkor a csatorna egyetlen $\mu_1\neq\mu_2$ mértékpárra vonatkozólag se lehet elégséges; ilyenkor tehát a 3. 2 tétel szerint az $\mathscr{I}_f(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2)=\mathscr{I}_f(\mu_1,\mu_2)<+\infty$ egyenlőség csak $\mu_1=\mu_2$ esetén állhat fenn (ha f szigorúan konvex).

Vizsgáljuk meg most a 3. 1 és 3. 2 tétellel kapcsolatban az egyenlőség feltétele stabilitásának kérdését, vagyis azt a kérdést, hogy milyen esetben érvényes a (3. 1) egyenlőtlenségben közelítőleg egyenlőség. Ehhez szükség lesz a 2. 1 lemma feltételes várható értékekre vonatkozó megfelelőjére. (A jelölések ugyanazok, mint az 1. 1 és 2. 1 lemmában.)

3. 3. LEMMA. *Ha az E Borel-halmaz minden pontja r_0 sugarú környezetének (a_1, a_2)-be eső részében $f''(u) \geqq a > 0$, akkor bármely $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$ σ-algebra esetén a*

$$Mf(\xi) - Mf(M(\xi|\mathscr{F}_0)) \leqq \delta \tag{3.27}$$

egyenlőtlenségből

$$M|\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| \leqq \sqrt{\frac{8\delta}{a}} + \int\limits_{M(\xi|\mathscr{F}_0) \notin E} |\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| P(d\omega) \tag{3.28}$$

következik, feltéve, hogy $\delta \leqq \frac{1}{2} a r_0^2$.

Bizonyítás. A 2. 1 lemma bizonyítása szerint $0 < \varepsilon_1 \leqq r_0$ esetén

$$f(u) \geqq f(u_0) + b(u - u_0) + \frac{a}{2} \varepsilon_1 |u - u_0| \chi_{u_0, \varepsilon_1}(u) \chi_E(u_0), \tag{3.29}$$

ahol $\chi_{u_0, \varepsilon_1}$ az $(u - \varepsilon_1, u_0 + \varepsilon_1)$ intervallum komplementer halmazának, χ_E pedig az E halmaznak az indikátorfüggvényét jelöli; a b együttható értéke természetesen függ u_0-tól. Ha (3. 29)-ben ε_1-et $\sqrt{\frac{2\delta}{a}}$-nak választjuk, az $u_0 = M(\xi|\mathscr{F}_0)$, $u = \xi$ helyettesítéssel, majd integrálással, (3. 27) figyelembevételével (3. 29)-ből

$$\int\limits_{\substack{|\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| \geqq \sqrt{\frac{2\delta}{a}} \\ M(\xi|\mathscr{F}_0) \in E}} |\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| P(d\omega) \leqq \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\delta} \tag{3.30}$$

adódik; ebből, minthogy

$$\int\limits_{|\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| < \sqrt{\frac{2\delta}{a}}} |\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| P(d\omega) \leqq \sqrt{\frac{2\delta}{a}},$$

éppen a (3. 28) becslést kapjuk.

Abban az esetben, ha $M(\xi|\mathscr{F}_0) \in E$ egy valószínűséggel teljesül, (3. 28)-ban a második tag természetesen eltűnik. Biztosan ez a helyzet pl. akkor, ha mindenütt $f''(u) \geqq a > 0$; ez utóbbi esetben azonban még több is igaz, nevezetesen a 2. 1 lemmához fűzött 2. megjegyzés pontos analógiájára

$$M(\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0))^2 \leqq \frac{2}{a} \delta. \tag{3.31}$$

Említést érdemel továbbá a 3. 3 lemma alábbi következménye:

3. 4. LEMMA. *Ha alkalmas $a > 0$ és $c^* > 0$-ra $f''(u) \geqq \min\left(a, \frac{c^*}{|u|}\right)$ $(a_1 < u < a_2)$, akkor a (3. 27) egyenlőtlenségből bármely $\delta > 0$ esetén következik, hogy*

$$M|\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| \leqq 4 \sqrt{\frac{M|\xi|}{c^*} \delta}. \tag{3.32}$$

Bizonyítás. Legyen

$$E_n = \left\{u: |u| < n\frac{c^*}{2a}\right\} \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{3.33}$$

$E_0 = \emptyset$, és jelölje Ω_n az $M(|\xi|\,|\mathscr{F}_0) \in E_n - E_{n-1}$ eseményt, azaz

$$\Omega_n = \{\omega: M(|\xi|\,|\mathscr{F}_0) \in E_n - E_{n-1}, \omega \in \Omega\} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{3.34}$$

Ha $P(\Omega_n) > 0$, akkor tekintsük az $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, P_n)$ valószínűségi mezőt (ahol $\mathscr{F}_n = \{F: F \in \mathscr{F}, F \subset \Omega_n\}$ és $P_n(F) = \frac{P(F)}{P(\Omega_n)}$, ha $F \in \mathscr{F}_n$); ezen a várható értéket M_n-nel jelölve, nyilvánvalóan

$$M_n(\xi|\mathscr{F}_{0,n}) = M(\xi|\mathscr{F}_0) \quad [P_n] \quad (\omega \in \Omega_n) \tag{3.35}$$

(ahol $\mathscr{F}_{0,n} = \mathscr{F}_0 \cap \mathscr{F}_n$; ξ-nek az Ω_n-re való megszorítását egyszerűség kedvéért nem jelöltem külön), továbbá

$$M_n|\xi - M_n(\xi|\mathscr{F}_{0,n})| = \frac{1}{P(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} |\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| P(d\omega). \tag{3.36}$$

Ezért, minthogy (3. 33) szerint az E_n minden pontja $r_n = n\frac{c^*}{2a}$ sugarú környezetének (a_1, a_2)-be eső részében $f''(u) \geqq \frac{a}{2n}$, a 3. 3 lemmából következik, $|M(\xi|\mathscr{F}_0)| \leqq \leqq M(|\xi|\,|\mathscr{F}_0)$ figyelembevételével, hogy

$$\frac{1}{P(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} |\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| P(d\omega) \leqq 2\sqrt{\frac{2\delta_n \cdot 2n}{a}}, \tag{3.37}$$

ha

$$\delta_n \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2n} r_n^2 = \frac{n}{4} \cdot \frac{c^{*2}}{a},$$

ahol

$$\delta_n = M_n f(\xi) - M_n f(M_n(\xi|\mathscr{F}_{0,n})) = \frac{1}{P(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} (f(\xi) - Mf(M(\xi|\mathscr{F}_0))) P(d\omega). \tag{3.38}$$

Másrészt viszont (3. 33) és (3. 34) miatt mindenképpen

$$\frac{1}{P(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} |\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| P(d\omega) \leqq \frac{1}{P(\Omega_n)} \cdot 2 \int_{\Omega_n} M(|\xi|\,|\mathscr{F}_0) P(d\omega) \leqq n\frac{c^*}{a}, \tag{3.39}$$

ami azt jelenti, hogy (3. 37) $\delta_n > \frac{n}{4}\frac{c^{*2}}{a}$ esetén is teljesül. Mármost (3. 37)-ből és

(3. 38)-ból a *Schwarz*-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$M|\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |\xi - M(\xi|\mathscr{F}_0)| P(d\omega) \leqq$$

$$\frac{4}{\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{\infty} P(\Omega_n) \sqrt{n\delta_n} \leqq \frac{4}{\sqrt{a}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} P(\Omega_n) n} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} P(\Omega_n)\delta_n} \leqq \tag{3.40}$$

$$\leqq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sqrt{1 + \frac{2a}{c^*} MM(|\xi||\mathscr{F}_0)} \cdot \sqrt{\delta} \leqq 4 \sqrt{\left(\frac{M|\xi|}{c^*} + \frac{1}{2a}\right)\delta}.$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

3. 3. TÉTEL. *Legyen μ_1 és μ_2 az $(X, \mathscr{X})$ téren értelmezett két valószínűségi mérték, legyen $\mathscr{X}_0$ az $\mathscr{X}$ valamely rész-σ-algebrája és tegyük fel, hogy az $f(u)$ konvex függvény második deriváltjának bármely véges intervallumban pozitív alsó korlátja van. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható olyan, csak f-től és ε-tól függő $C_\varepsilon > 0$ és $\delta_\varepsilon > 0$, hogy*

$$\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2) - \mathscr{I}_{f;\mathscr{X}_0}(\mu_1, \mu_2) \leqq \delta \leqq \delta_\varepsilon \quad (\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2) < +\infty) \tag{3.41}$$

esetén mindig[11]

$$\mu_2\left(\left\{x: \left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)} - \frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}\right| \leqq C_\varepsilon \sqrt{\delta}\right\}\right) \geqq 1 - \varepsilon. \tag{3.42}$$

Bizonyítás. A 3.1 tétel bizonyítását követjük. (3. 41) teljesülése esetén (3. 11′)-ben mindenesetre

$$Mf\left(\frac{p_1'(x)}{p_2(x)}\right) - Mf\left(\frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)}\right) \leqq \delta, \tag{3.43}$$

ahol M a μ_2 szerinti várható értéket jelöli; ezért a 3. 3 lemmát valamely $E=(0, \gamma)$ intervallumra alkalmazva, nyerjük, hogy

$$\int_{\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)} < \gamma} \left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)} - \frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}\right| p_2(x)\lambda(dx) \leqq 2\sqrt{\frac{2\delta}{a_{\gamma+r_0}}}, \tag{3.44}$$

ha $\delta \leqq \frac{a_{\gamma+r_0}}{2} r_0^2$, ahol $a_{\gamma+r_0} > 0$ az $f''(u)$ alsó határa a $(0, \gamma + r_0)$ intervallumban. (3. 44)-ből természetesen következik, hogy bármely $\Gamma_1 > 0$ esetén

$$\mu_2\left(\left\{x: \left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)} - \frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)}\right| > \Gamma_1\sqrt{\delta}\,;\ \frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)} < \gamma\right\}\right) \leqq \frac{2}{\Gamma_1}\sqrt{\frac{2}{a_{\gamma+r_0}}}. \tag{3.45}$$

[11] A (3. 42)-ben szereplő halmaz értelmezése természetesen magában foglalja a $p_2(x)\bar{p}_2(x) > 0$ feltételt is.

Másrészt a (3. 13) egyenlőtlenségből látható, hogy (3. 41) teljesülése esetén

$$\mu_2\left(\left\{x: 0f\left(\frac{\bar{p}_1''(x)}{0}\right)+\bar{p}_2(x)f\left(\frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)}\right)-\bar{p}_2(x)f\left(\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}\right) \geqq \delta\Gamma_2\bar{p}_2(x)\right\}\right) \leqq \frac{1}{\Gamma_2}, \tag{3.46}$$

ahol $\Gamma_2>0$ tetszőleges. A (3. 46)-ban szereplő halmaz komplementerének azon a részén, ahol $\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)} \leqq \gamma$, a 2. 2 lemma értelmében (a lemmát két 1 mértékű pontból álló E halmazra alkalmazva)

$$\bar{p}_1''(x) \leqq \sqrt{\frac{8\Gamma_2\delta}{a_{\gamma+r_0}}}\,\bar{p}_2(x), \tag{3.47}$$

ha

$$\Gamma_2\delta \leqq \frac{a_{\gamma+r_0}}{2}r_0^2.$$

Minthogy az $A_\gamma=\left\{x: \frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)} \geqq \frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)} \geqq \gamma\right\}$ halmazra nyilvánvalóan $\mu_2(A_\gamma) \leqq \frac{1}{\gamma}$, (3. 45), (3. 46) és (3. 47)-ből következik, hogy az

$$A^*=\left\{x: \left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)}-\frac{\bar{p}_1'(x)}{\bar{p}_2(x)}\right| \leqq \Gamma_1\sqrt{\delta},\ \frac{\bar{p}_1''(x)}{\bar{p}_2(x)} \leqq \sqrt{\frac{8\Gamma_2\delta}{a_{\gamma+r_0}}};\ p_2(x)\bar{p}_2(x)>0\right\}$$

halmaz μ_2-mértéke $\mu_2(A^*) \geqq 1-\frac{1}{\gamma}-\frac{2}{\Gamma_1}\sqrt{\frac{2}{a_{\gamma+r_0}}}-\frac{1}{\Gamma_2}$. Ebből azonban a $\gamma=\Gamma_2=\frac{3}{\varepsilon}$, $\Gamma_1=\frac{6}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{a_{\gamma+r_0}}}$ választással következik, hogy a $C_\varepsilon=\Gamma_1+\sqrt{\frac{8\Gamma_2}{a_{\gamma+r_0}}}$ konstanssal érvényes a (3. 42) becslés, ha $\delta \leqq \frac{\varepsilon a_{\gamma+r_0}}{6}r_0^2=\delta_\varepsilon$ (ahol $r_0>0$ még tetszőlegesen választható).

MEGJEGYZÉS. Természetesen, ha a $\bar{\mu}_1$ és $\bar{\mu}_2$ olyan, hogy $(\bar{\mu}_1+\bar{\mu}_2)$-majdnem mindenütt $\gamma_1 \leqq \frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)} \leqq \gamma_2$ és a $(\gamma_1-r_0, \gamma_2+r_0)\cap(0, +\infty)$ intervallumban $f''(u) \geqq a>0$, akkor a fenti bizonyításból az is következik, hogy (3. 41) esetén mindig $\int\left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)}-\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}\right|p_2(x)\,\lambda(dx) \leqq \sqrt{\frac{8\delta}{a}}$, hacsak $\delta \leqq \frac{a}{2}r_0^2$. Hasonló élesebb eredmény az f-re vonatkozó erősebb megszorítás esetén a μ_1 és μ_2-re vonatkozó külön feltevés nélkül is igaz:

3. 4. TÉTEL. *Legyen μ_1 és μ_2 az $(X, \mathscr{X})$ mérhető téren értelmezett két valószínűségi mérték, legyen $\mathscr{X}_0$ az $\mathscr{X}$ valamely rész-σ-algebrája és jelölje μ_{12} a (3. 5) képlettel értelmezett eloszlást. Tegyük fel továbbá, hogy az $f(u)$ konvex függvényre $f''(u) \geqq \min\left(a, \frac{c^*}{u}\right)>0$ $(0<u<+\infty)$. Ekkor*

$$\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)-\mathscr{I}_{f;\mathscr{X}_0}(\mu_1, \mu_2) \leqq \delta \quad (\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)<+\infty) \tag{3.48}$$

(ahol δ tetszőleges nemnegatív szám) csak úgy lehetséges, ha

$$|\mu_1-\mu_{12}| = \int\left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)}-\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}\right| p_2(x)\lambda(dx) \leqq 4\sqrt{\frac{2a+c^*}{2ac^*}\delta}. \tag{3.49}$$

Bizonyítás. Az f függvényre vonatkozó feltevésünkből következik, hogy $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=+\infty$, ezért $\mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2)$ csak $\mu_1\ll\mu_2$ esetén lehet véges. Ebben az esetben $|\mu_1-\mu_{12}|$ (3. 6) szerint valóban a (3. 49)-beli integrállal egyenlő.

Az $(X,\mathcal{X},\mu_2)$ valószínűségi mezőn értelmezett $\xi(x)=\frac{p_1(x)}{p_2(x)}=\frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}$ valószínűségi változóra és az $\mathcal{X}_0$ σ-algebrára alkalmazhatjuk a 3. 4 lemmát, minthogy (3. 48) éppen (3. 27)-nek felel meg, lévén (3. 9) értelmében $M(\xi|\mathcal{X}_0)=\frac{\bar{\mu}_1(dx)}{\bar{\mu}_2(dx)}=\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}$. (3. 32) szerint — figyelembe véve (3. 6)-ot is — nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} M|\xi-M(\xi|\mathcal{X}_0)| &= \int\left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)}-\frac{\bar{p}_1(x)}{\bar{p}_2(x)}\right| p_2(x)\lambda(dx) = \\ &= |\mu_1-\mu_{12}| \leqq 4\sqrt{\left(\frac{M|\xi|}{c^*}+\frac{1}{2a}\right)\delta} = 4\sqrt{\frac{2a+c^*}{2ac^*}\delta}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

ami bizonyítandó volt.

KOROLLÁRIUM. *Ha a* 3. 3, *ill.* 3. 4 *tétel feltevései mellett valamely* $y=T(x)$ *statisztikára*

$$\mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2)-\mathcal{I}_f(\mu_1T^{-1},\mu_2T^{-1})\leqq\delta, \tag{3.41a}$$

akkor az $\mathcal{X}_0=T^{-1}\mathcal{Y}$ *σ-algebrát tekintve teljesülnie kell* (3. 42)*-nek, ill.* (3. 49)*-nek, az előbbi esetben feltételezve még azt is, hogy* $\delta\leqq\delta_\varepsilon$.

A 3.4 tétel bizonyításánál az $f''(u)\geqq\min\left(a,\frac{c^*}{u}\right)>0$ feltételt lényegesen kihasználtuk és enélkül általában nem is igaz az, hogy $\mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2)-\mathcal{I}_{f;\mathcal{X}_0}(\mu_1,\mu_2)$ csak úgy lehet kicsi, ha $|\mu_1-\mu_{12}|$ is kicsi. Valóban, tekintsük pl. az $X=\{-1,0,1\}$ téren, ahol $\mathcal{X}$ az X összes részhalmazaiból áll, a $\mu_1=(0,0,1)$ és $\mu_2=\left(\frac{1}{2N},1-\frac{1}{N},1-\frac{1}{N}\right)$ eloszlást (tehát a $\lambda(\{x\})=1$, $x=0,\pm1$ által megadott domináló mértékre vonatkozó sűrűségfüggvények $p_1(-1)=p_1(0)=0$, $p_1(1)=1$, $p_2(-1)=p_2(1)=\frac{1}{2N}$, $p_2(0)=1-\frac{1}{N}$), továbbá a $T(x)=x^2$ statisztikát, illetőleg az ennek megfelelő $\mathcal{X}_0=\{\emptyset,\{0\},\{-1,1\},X\}$ σ-algebrát. Ekkor $\bar{p}_1(0)=0$, $\bar{p}_1(-1)=\bar{p}_1(1)=\frac{1}{2}$ és $\bar{p}_2(x)=p_2(x)$ $(x=0,\pm1)$, tehát $\mathcal{I}_f(\mu_1,\mu_2)-\mathcal{I}_{f;\mathcal{X}_0}(\mu_1,\mu_2)=\frac{1}{2N}(f(0)+f(2N)-2f(N))$, másrészt pedig (3. 6) alapján $|\mu_1-\mu_{12}|=\sum\limits_{i=-1}^{+1}|p_1(i)-\bar{p}_1(i)|=1$. Így pl. $\mathcal{I}_{-u^\alpha}(\mu_1,\mu_2)-$

$-\mathscr{I}_{-u^\alpha;\mathscr{X}_0}(\mu_1, \mu_2)$ $(0<\alpha<1)$ tetszőlegesen kicsi lehet, annak ellenére, hogy $|\mu_1-\mu_{12}|=1$.

Hasonlóan egyszerű ellenpéldával igazolható, hogy ha még az $f''(u)\geqq a_\gamma>0$ $(0<u<\gamma)$ feltétel se teljesül, akkor általában nem marad érvényben a 3. 3 tétel állítása sem (vö. [6]).

A 3.3, ill. 3. 4 tételből könnyen megkaphatjuk a tetszőleges (X, ν, Y) megfigyelési csatorna esetére vonatkozó analóg eredményt is.

Legyen μ_1 és μ_2 két tetszőleges eloszlás $(X, \mathscr{X})$-en, jelölje λ egy σ-véges domináló mértéküket. Tekintsük az $(X\times Y, \mathscr{X}\times\mathscr{Y})$ szorzattéren a (3. 14) szerint értelmezett μ_1^*, μ_2^*, λ^* mértékeket és ezek (3. 15) szerinti $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\lambda}$ vetületét $(Y, \mathscr{Y})$-ra; λ-t úgy választjuk, hogy $\tilde{\lambda}$ is σ-véges legyen. A megfelelő sűrűségfüggvényeket jelölje $p_i(x)$, $p_i^*(x, y)$, $\tilde{p}_i(y)$ $(i=1, 2)$; mint már megjegyeztük, $p_i^*(x, y)=p_i(x)$ $[\lambda]$ $(i=1, 2)$. Az $(X\times Y, \mathscr{X}\times\mathscr{Y})$ szorzattéren értelmezzük a (3. 5)-nek megfelelő μ_{12}^* mértéket, ahol $\mathscr{X}_0$ szerepét most az $X\times B$ $(B\in\mathscr{Y})$ alakú halmazok alkotta $\mathscr{Y}'$ σ-algebra játssza; (3. 6) értelmében μ_{12}^* λ^*-ra vonatkozó sűrűségfüggvénye

$$(3.51)\qquad p_{12}^*(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{p}_1(y)}{\tilde{p}_2(y)} p_2(x) & \text{ha} \quad \tilde{p}_2(y)>0 \\ p_1(x) & \text{ha} \quad \tilde{p}_2(y)=0 \end{cases}$$

(tekintettel arra, hogy $p_i^*(x, y)=p_i(x)$ $[\lambda^*]$ $(i=1, 2)$). A $\mu_1\ll\mu_2$, $\mu_1^*\ll\mu_2^*$ esetben természetesen $p_1(x)=p_1^*(x, y)=0$, ha $\tilde{p}_2(y)=0$ $[\lambda^*]$.

A 3. 3, ill. 3. 4 tételt az $(X\times Y, \mathscr{X}\times\mathscr{Y})$ szorzattéren értelmezett μ_1^* és μ_2^* mértékekre és az $\mathscr{Y}'$ σ-algebrára alkalmazva, figyelembevéve (3. 19)-et, a következő eredményt kapjuk:

3. 5. TÉTEL. *Ha az f konvex függvény második deriváltjának minden véges intervallumban pozitív alsó korlátja van, akkor az*

$$(3.52)\qquad \mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)-\mathscr{I}_f(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2)\leqq\delta \qquad (\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)<+\infty)$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(3.53)\qquad \mu_2^*\left(\left\{(x, y): \left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)}-\frac{\tilde{p}_1(y)}{\tilde{p}_2(y)}\right| \leqq C_\varepsilon\sqrt{\delta}\right\}\right) \geqq 1-\varepsilon,$$

ha δ elég kicsi $(\delta\leqq\delta_\varepsilon)$. Ha az f függvényre még $f''(u)\geqq\min\left(a, \dfrac{c^*}{u}\right)>0$ $(0<u<\infty)$ is teljesül, akkor (3. 52)*-ből minden esetben*

$$(3.54)\qquad |\mu_1^*-\mu_{12}^*| = \int\limits_{p_2(x)\tilde{p}_2(y)>0} \left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)}-\frac{\tilde{p}_1(y)}{\tilde{p}_2(y)}\right| p_2(x)\lambda^*(dx, dy) \leqq 4\sqrt{\frac{2a+c^*}{2ac^*}\delta}$$

következik.

Természetesen a 3. 5 tétel speciális esetként — $(Y, \mathscr{Y})=(X, \mathscr{X})$; $\nu(B|x)=\chi_B(x)$ tartalmazza a 3. 3 és 3. 4 tételt. A 3. 3 tételhez fűzött megjegyzés most is érvényes. A $\gamma_1\leqq\dfrac{\tilde{p}_1(y)}{\tilde{p}_2(y)}\leqq\gamma_2$ feltétel biztosan teljesül pl. akkor, ha minden $x_1, x_2\in X$ és $B\in\mathscr{Y}$ esetén $\gamma_1\leqq\dfrac{\nu(B|x_1)}{\nu(B|x_1)}\leqq\gamma_2$.

MEGJEGYZÉS. Az f-eltérés „kis” csökkenésének szükséges feltételével először [6] dolgozatomban foglalkoztam, ahol bebizonyítottam a 3. 5 tétel első felét, amely ekvivalens a 3. 3 tétellel. A 3. 4 tétel (és a 3. 5 tétel második fele) ennek az eredménynek az élesítése az f függvényre vonatkozó erősebb megszorítás mellett. Az I-divergencia speciális esetére a 3. 4 tételhez hasonló éles becslést explicite először PEREZ [26] adott, bár ezt burkolt formában már PINSZKER [27] munkája is tartalmazza. Az I-divergencia esetére a bizonyítás egyszerűen azon az észrevételen alapszik, hogy — az általam használt jelölésekkel —

$$I(\mu_1\|\mu_2)=I_{\mathscr{X}_0}(\mu_1\|\mu_2)+I(\mu_1\|\mu_{12}) \tag{3. 55}$$

és így közvetlenül alkalmazható egy (2. 20) típusú becslés; megjegyzendő, hogy burkoltan már a *Kullback—Leibler*-tétel eredeti bizonyítása is a (3. 55) összefüggésen alapult. Hasonló összefüggés azonban tetszőleges f-eltérésekre nem érvényes (valójában az $I(\mu_1\|\mu_{12})$ tag nem más, mint a μ_1 és μ_2 mértékek átlagos feltételes I-divergenciája, tehát (3. 55) az információ additivitását fejezi ki), ezért az általános esetre vonatkozó bizonyításhoz új gondolatra volt szükség.

PEREZ [26] dolgozatában (301., majd 305. o.) bevezette az ε-elégségesség fogalmát, az $\mathscr{X}_0\subset\mathscr{X}$ σ-algebra ε-elégségességén azt értve, hogy az $I_{\mathscr{X}_0}(\mu_1\|\mu_2)$ I-divergencia ε-nál kevesebbel különbözik $I(\mu_1\|\mu_2)$-től. Megjegyzi, hogy itt a közönséges I-divergencia helyett a RÉNYI-féle α-rendű I-divergencia vagy általánosabban az általam vizsgált f-eltérések fogalmából is ki lehetne indulni. Természetes általánosításként persze beszélhetünk tetszőleges megfigyelési csatornák ε-elégségességéről is. A PEREZ által tárgyalt — *Bayes*-féle döntési eljárásokra vonatkozó — alkalmazások elsősorban a $|\mu_1-\mu_{12}|$ variációs távolság becslésére támaszkodnak, így a 3. 4 tétel értelmében ebből a szempontból az $f''(u)\geqq\min\left(a,\frac{c^*}{u}\right)>0$ $(0<u<\infty)$ feltételnek eleget tevő f-eltérések tekinthetők „jóknak”.

A 3. 3—3. 5 tételeket az α-rendű I-divergencia esetére alkalmazva (figyelembevéve (1. 20)-at), megállapíthatjuk, hogy $1\leqq\alpha\leqq2$ esetén alkalmas C konstanssal érvényes a

$$|\mu_1-\mu_{12}|\leqq C\sqrt{I_\alpha(\mu_1\|\mu_2)-I_{\alpha;\mathscr{X}_0}(\mu_1\|\mu_2)}, \tag{3. 56}$$

illetőleg a

$$|\mu_1^*-\mu_{12}^*|=C\sqrt{I_\alpha(\mu_1\|\mu_2)-I_\alpha(\tilde\mu_1\|\tilde\mu_2)} \tag{3. 57}$$

egyenlőtlenség. Ha azonban $0<\alpha<1$, akkor ilyen becslés általában már nem érvényes, csak az igaz, hogy az eredeti $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ és a közvetett megfigyeléshez tartozó $\frac{\bar p_1(x)}{\bar p_2(x)}$, ill. $\frac{\tilde p_1(x)}{\tilde p_2(x)}$ likelihood-hányados különbsége egy kis μ_2 (ill. μ_2^*) mértékű halmaztól eltekintve az információ csökkenés négyzetgyökével becsülhető. Végül, ha $\alpha>2$, akkor általában még ez sem állítható. Persze, ha valamilyen — a μ_1 és μ_2 eloszlásokra és az $\mathscr{X}_0$ σ-algebrára, ill. a megfigyelési csatorna $\nu(B|x)$ átmenetfüggvényére vonatkozó — feltétel biztosítja azt, hogy $\frac{\bar p_1(x)}{\bar p_2(x)}$, ill. $\frac{\tilde p_1(y)}{\tilde p_2(y)}$ a $0<\alpha<1$ esetben véges felső korláttal, vagy az $\alpha>2$ esetben pozitív alsó korláttal rendelkezik, akkor (3. 56), ill. (3. 57) minden esetben teljesül.

A 3. fejezet befejezéséül szeretnék rámutatni arra, hogy eredményeim milyen összefüggésben vannak az információelméletnek a matematikai statisztikában a *Bayes*-féle felfogás alapján való alkalmazásaival (vö. pl. PEREZ [26], RÉNYI [31]). Legyen $\{\mu_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ tetszőleges eloszláscsalád az $(X, \mathscr{X})$ téren és a θ paraméternek legyen valamilyen π a priori eloszlása, ahol tehát π valószínűségi mérték a Θ halmaz részhalmazainak egy olyan $\mathscr{T}$ σ-algebráján, amelyre vonatkozólag $\mu_\theta(A)$ minden rögzített $A\in\mathscr{X}$ esetén mérhető. Ekkor a μ_θ eloszláscsalád felfogható egy $(\Theta, \mathscr{T})$ bemeneti terű csatorna átmenetfüggvényének is, és beszélhetünk a θ és x együttes π^* eloszlásáról, amely a $(\Theta\times X, \mathscr{T}\times\mathscr{X})$ szorzattéren van értelmezve, valamint a π által az $(X, \mathscr{X})$-en indukált $\tilde{\mu}=\mu$ eloszlásról is:

$$\pi^*(C\times A) = \int_C \mu_\theta(A)\pi(d\theta) \qquad (C\in\mathscr{T},\quad A\in\mathscr{X}), \tag{3.58}$$

$$\mu(A) = \tilde{\pi}(A) = \int_\Theta \mu_\theta(A)\pi(d\theta) \qquad (A\in\mathscr{X}). \tag{3.59}$$

Ha x közvetlen megfigyelése helyett valamely (X, ν, Y) megfigyelési csatornát használunk, akkor ez az előbbi csatornával sorbakapcsoltnak tekintendő, miáltal egy újabb $(\Theta, \tilde{\mu}_\theta, Y)$ csatornát kapunk, melynek átmenetfüggvényét

$$\tilde{\mu}_\theta(B) = \int \nu(B|x)\mu_\theta(dx) \qquad (B\in\mathscr{Y}) \tag{3.60}$$

értelmezi. A π-nek megfelelő eloszlás $(\Theta\times Y, \mathscr{T}\times\mathscr{Y})$-on, ill. $(Y, \mathscr{Y})$-on

$$\tilde{\pi}^*(C\times B) = \int_C \tilde{\mu}_\theta(B)\pi(d\theta) = \int_C\int_X \nu(B|x)\mu_\theta(dx)\pi(d\theta) \qquad (B\in\mathscr{Y},\quad C\in\mathscr{T}), \tag{3.61}$$

ill.

$$\tilde{\mu}(B) = \int_\Theta \tilde{\mu}_\theta(B)\pi(d\theta) = \int_X \nu(B|x)\mu(dx) \qquad (B\in\mathscr{Y}). \tag{3.62}$$

(Minthogy itt egyszerre több csatornáról van szó, a * és $\sim$ jelölések már nem alkalmazhatók olyan magától értetődő következetességgel, mint korábban, de talán még így is elősegítik az áttekintést.)

A *Bayes*-féle felfogásnak az információelmélet statisztikai alkalmazásai szempontjából az az előnye, hogy lehetővé teszi az ismeretlen paraméterre vonatkozólag egy megfigyelés által átlagosan szolgáltatott információmennyiség értelmezését, a kölcsönös információ (1. 5a) képlete alapján. Esetünkben ez az információmennyiség közvetlen megfigyelés esetén $I(x, \theta)=I(\pi^*\|\pi\times\mu)$, közvetett megfigyeléskor pedig $I(y, \theta)=I(\tilde{\pi}^*\|\pi\times\tilde{\mu})$.

Mármost a 3. 2 tételből $\big(f(u)=u\log u$ választással$\big)$ azonnal következik a szemléletes jelentésű

$$I(y, \theta)\leqq I(x, \theta) \tag{3.63}$$

egyenlőtlenség; valóban, $\tilde{\pi}^*$ és $\pi\times\tilde{\mu}$ a π^* és $\pi\times\mu$ eloszlásból az immár negyedik $(\Theta\times X, \hat{\nu}, \Theta\times Y)$ megfigyelési csatorna alkalmazásával kapható meg, ahol

$$\hat{\nu}(D|\theta, x)=\nu(D_\theta|x) \qquad \big(D\in\mathscr{T}\times\mathscr{X};\ D_\theta=\{x\colon (\theta, x)\in D\}\big).$$

A (3. 63) egyenlőtlenség természetesen közvetlenül is könnyen következik a három valószínűségi változó információjára vonatkozó összefüggésből (vö. [10], [27]), ha figyelembe vesszük, hogy a θ, x, y valószínűségi változók *Markov*-láncot alkotnak.

Ha (3. 63)-ban a jobb és bal oldal különbsége ε-nál kisebb, akkor Perez [26] fogalomalkotásának természetes általánosításával az (X, ν, Y) csatornát ε-elégségesnek nevezhetjük a π^*, $\pi\times\mu$ mértékpárra nézve, s a 3. 5 tétel felhasználásával megállapíthatjuk $\left(\text{a } \frac{\pi^*(d\theta, dx)}{(\pi\times\mu)(d\theta, dx)}, \text{ ill. } \frac{\tilde{\pi}^*(d\theta, dy)}{(\pi\times\tilde{\mu})(d\theta, dy)}\right.$ sűrűségfüggvényt $p(x, \theta)$-val, ill. $\left.\tilde{p}(y, \theta)\text{-val jelölve}\right)$, hogy az ilyen értelemben vett ε-elégségesség esetén

$$(3.64) \qquad \int |p(x, \theta)-\tilde{p}(y, \theta)|\,(\pi\times\mu^*)(d\theta, dx, dy) \leq 4\sqrt{\varepsilon}$$

(sőt (3. 55) és (2. 20) felhasználásával itt a jobb oldalon $\sqrt{2\varepsilon}$ is írható).

A (3. 63) egyenlőtlenség még egy másik, szemléletesebb módon is megkapható a 3. 2 tételből, ha feltételezzük, hogy az $\mathscr{X}$ és $\mathscr{Y}$ σ-algebrát az X, ill. Y tér megszámlálható sok részhalmaza generálja. Valóban, az (1. 5a) képlet értelmében $I(x, \theta)$ csak akkor lehet véges, ha $\pi^*\ll\pi\times\mu$. Jelöljük ekkor a $\frac{\pi^*(d\theta, dx)}{(\pi\times\mu)(d\theta, dx)}$ sűrűségfüggvényt $p(x, \theta)$-val, mikoris (3. 58) értelmében

$$\pi^*(C\times A) = \int_C \mu_\theta(A)\pi(d\theta) = \int_C\int_A p(x, \theta)\mu(dx)\pi(d\theta) \qquad (A\in\mathscr{X}, \quad C\in\mathscr{T}).$$

Ez azt jelenti, hogy bármely rögzített $A\in\mathscr{X}$ esetén

$$(3.65) \qquad \mu_\theta(A) = \int_A p(x, \theta)\mu(dx) \qquad [\pi].$$

Minthogy feltevésünk szerint $\mathscr{X}$-et X-nek megszámlálható sok részhalmaza generálja, (3. 65)-ben a kivételes null-mértékű halmaz A-tól függetlennek is választható, amiből következik, hogy $\mu_\theta\ll\mu$ és $\frac{\mu_\theta(dx)}{\mu(dx)}=p(x, \theta)$ $[\pi]$. Így tehát, (1. 5) és (1. 5a) szerint, figyelembe véve (3. 58)-at

$$(3.66) \qquad I(x, \theta) = \int \log p(x, \theta)\pi^*(d\theta, dx) = \int I(\mu_\theta\|\mu)\pi(d\theta).$$

Hasonlóképpen adódik, hogy

$$(3.67) \qquad I(y, \theta) = \int I(\tilde{\mu}_\theta\|\tilde{\mu})\pi(d\theta).$$

Megjegyzés. Az $\mathscr{X}$, ill. $\mathscr{Y}$ σ-algebrára vonatkozó szeparabilitási feltétel nélkül a (3. 66), ill. (3. 67) egyenlőség már nem szükségképpen érvényes. Így pl. ha $X=\Theta=[0, 1]$ és $\mathscr{X}=\mathscr{T}$ a véges vagy megszámlálható halmazok és komplementereik által alkotott σ-algebra, továbbá μ_θ az $x=\theta$ pontban koncentrált eloszlás, π pedig az a mérték, melynél a megszámlálható halmazok nulla, komplementereik pedig egy mértékűek, akkor $I(x, \theta)=0$, ugyanakkor pedig $\mu=\pi$, $\mu_\theta\not\ll\mu=\pi$, tehát

$$\int I(\mu_\theta\|\mu)\pi(d\theta) = +\infty.$$

A (3. 66) és (3. 67) összefüggés szerint a (3. 63) egyenlőtlenség a 3. 2 tételnek magára az (X, v, Y) csatornára való alkalmazásával is kiadódik. S $I(x, \theta) < +\infty$ esetén az egyenlőségnek az a feltétele, hogy az (X, v, Y) csatorna π-majdnem minden μ_θ, μ párra vonatkozólag elégséges legyen. Ez viszont — figyelembe véve (3. 59)-et és azt, hogy $\mu_\theta \ll \mu$ $[\pi]$ — a 3. 2 definíció értelmében azzal ekvivalens, hogy az (X, v, Y) csatorna elégséges a $\{\mu_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ eloszláscsalád valamely $\{\mu_\theta\}_{\theta \in \Theta - N}$ részcsaládjára nézve, ahol $\pi(N) = 0$. Természetesen ugyanezekre az eredményekre jutunk akkor is, ha (X, v, Y) megfigyelési csatorna helyett valamely $y = T(x)$ statisztikát (tehát zaj nélküli megfigyelési csatornát) vizsgálunk.

Az említett eredmények kapcsolatba hozhatók az elégségesség fogalmának egy RÉNYI Alfréd által adott új értelmezésével is. Eszerint valamely ξ valószínűségi változó egy $\eta = T(\xi)$ függvényét elégségesnek nevezzük a ζ valószínűségi változóra nézve, ha az $I(\eta, \zeta) \leqq I(\xi, \zeta)$ egyenlőtlenségben az egyenlőség érvényes. Ennek a fogalomalkotásnak természetes általánosításaként bármely három *Markov*-láncot alkotó ζ, ξ, η valószínűségi változó esetén mondhatjuk, hogy η ξ-elégséges a ζ-ra nézve, ha $I(\eta, \zeta) = I(\xi, \zeta)$. Az előbbiek szerint, az ilyen értelemben vett elégségesség $I(\xi, \zeta) < +\infty$ esetén azzal ekvivalens, hogy a ξ-t η-ba átvivő csatorna elégséges egy olyan eloszláscsaládra vonatkozólag, amely ξ-nek a ζ majdnem minden lehetséges értéke melletti feltételes eloszlásaiból áll. (Itt egyszerűség kedvéért közönséges értelemben vett, tehát valós vagy n-dimenziós vektor értékű valószínűségi változókra szorítkozunk, ahol az alapul vett σ-algebra a *Borel*-halmazok σ-algebrája; ekkor a kérdéses feltételes eloszlások biztosan léteznek, vö. pl. [11].) Ez a feltétel még úgy is megfogalmazható, hogy a kérdéses három valószínűségi változó nemcsak a ζ, ξ, η sorrendben alkot *Markov*-láncot, hanem a ζ, η, ξ sorrendben is.

Hasonló meggondolások érvényesek $f(u) = u \log u$ helyett más $f(u)$ szigorúan konvex függvényekre is, ha a kölcsönös információ helyére mindenütt az együttes eloszlásnak és a marginális eloszlások szorzatának megfelelő f-eltérését írjuk.

4. § Az f-eltérések alkalmazása határeloszlástételek bizonyítására

Az I-divergencia és általában az f-eltérés, mint az eloszlások egymástól való eltérésének mértékszáma, felhasználható valószínűségeloszlások konvergenciájának bizonyítására[12]; a 2. §-ban igazoltuk, hogy az f-konvergencia (az $u_0 = 1$ pontban szigorúan konvex $f(u)$ függvény esetén) mindig maga után vonja az eloszlások egyenletes konvergenciáját. *Markov*-láncok esetén, ha létezik μ stacionárius eloszlás, a 3. 2 tételből következőleg az $\mathscr{I}_f(\mu_n, \mu)$ f-eltérések sorozata monoton csökkenő, ahol μ_n az n-edik lépésbeli eloszlást jelöli. Megfelelő további feltételek teljesülése esetén az is igazolható, hogy $\lim_{n \to \infty} \mathscr{I}_f(\mu_n, \mu) = f(1)$, amiből már következik, hogy μ_n egyenletesen tart a μ stcionárius eloszláshoz. *Markov*-láncok ergodicitására ilyen „információelméleti" bizonyítást először RÉNYI A. [29], majd később, általánosabb esetre, D. KENDALL [18] adott. Mint [6] dolgozatomban megmutattam, egyszerűbb esetekben a meggondolást lehet úgy módosítani, hogy maga a stacionárius eloszlás létezése is kiadódjék a módszerből; erre vonatkozó eléggé általános feltételeket azonban eddig még nem találtam.

[12] Az a gondolat, hogy bizonyos, az információelméletben használatos mennyiségek felhasználhatók határeloszlástételek bizonyítására, Ju. V. LINNIKtől származik, l. [22].

Megjegyzendő, hogy a határeloszlástételek bizonyítására való alkalmazások szempontjából a különböző $f(u)$ (szigorúan konvex) függvényeknek megfelelő f-eltérések nem mindig egyenértékűek. Így pl. LINNIK [22] dolgozatában a logaritmus függvény konkrét tulajdonságai messzemenőleg ki vannak használva; természetesen nyitott kérdés marad azonban, hogy nem lehet-e találni olyan $f(u) \neq u \log u$ konvex függvényt, amellyel a centrális határeloszlástétel „információelméleti" bizonyítása egyszerűbben volna elvégezhető. A *Markov*-láncok ergodicitásának bizonyítására bizonyos esetekben minden f szigorúan konvex függvény egyformán jó, azonban pl. a KENDALL [18] által vizsgált esetben szükség volt az $f(u) > f(0) = 0$ feltételre is. Érdekes megjegyezni, hogy ez utóbbi feltétel az α-rendű I-divergenciák közül az $\alpha > 1$ esetet tünteti ki.

A következőkben a kompakt csoportokon értelmezett valószínűségeloszlások konvolúcióhatványainak konvergenciájára vonatkozó *Urbanik—Klossz—Stromberg*-féle tételre[13] (l. [19], [35], [36]) adok egy új bizonyítást, amely az f-eltérések tulajdonságain alapszik; ez egyúttal azt is megmutatja, hogy az f-eltérések olyan határeloszlástételek bizonyítására is alkalmazhatók, melyeknél egyenletes konvergencia nem állítható, csak gyenge konvergencia.

Legyen G kompakt topologikus csoport, $\mathscr{B}$ a *Borel*-halmazok σ-algebrája; G-n értelmezett valószínűségeloszláson a $\mathscr{B}$ σ-algebrán értelmezett reguláris valószínűségi mértéket értünk. A $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ eloszlássorozatról akkor mondjuk, hogy gyengén konvergál a μ határeloszláshoz, ha minden G-n értelmezett $h(x)$ folytonos valós függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \int h(x)\mu_n(dx) = \int h(x)\mu(dx). \tag{4.1}$$

Két G-n értelmezett eloszlás, μ és ν, konvolúcióját a

$$(\mu\times\nu)(B) = \int \mu(Bx^{-1})\nu(dx) = \int \nu(x^{-1}B)\mu(dx) \qquad (B\in\mathscr{B}) \tag{4.2}$$

vagy az ezzel ekvivalens

$$\int h(x)(\mu\times\nu)(dx) = \iint h(xy)\mu(dx)\nu(dy) \tag{4.2'}$$

képlet értelmezi.

Ha μ tetszőleges valószínűségeloszlás G-n, akkor mindazon C kompakt halmazok C_μ metszete, melyekre $\mu(C) = 1$, maga is 1 valószínűségű: $\mu(C_\mu) = 1$. Ezt a C_μ halmazt nevezzük a μ eloszlás hordozójának. Ismeretes, hogy[14]

$$C_{\mu\times\nu} = C_\mu C_\nu \tag{4.3}$$

(vö. pl. B. M. KLOSSZ, [19]).

4.1. TÉTEL. *Valamely G-n értelmezett ν eloszlás ν^n konvolúcióhatványainak (ahol $\nu^1 = \nu$, $\nu^{n+1} = \nu^n \times \nu$, $n = 1, 2, \ldots$) sorozata akkor és csak akkor konvergál gyenge értelemben valamely határeloszláshoz, ha G-nek a C_ν-t tartalmazó H_ν leg-*

[13] Ez felfogható egy speciális MARKOV-lánc ergodicitási tételnek is, ahol a stacionárius eloszlás ismeretes.

[14] A szorzás komplexusszorzat-értelemben veendő: $AB = \{ab : a\in A, b\in B\}$.

szűkebb kompakt részcsoportjának nincs olyan valódi kompakt normálosztója, melynek C_ν egyetlen mellékosztályában van; ekkor ν^n a H_ν csoporton értelmezett Haar-mértékhez (pontosabban ennek G-re való természetes kiterjesztéséhez) konvergál.

MEGJEGYZÉS. A ν^n konvolúcióhatványok konvergenciájára 1956-ban PRÉKOPA, RÉNYI és URBANIK adott egy elégséges feltételt [28]. A szükséges és elégséges feltételt először K. URBANIK [36] és — tőle függetlenül — B. M. KLOSSZ [19] határozta meg, azonban, ITO és KAWADA [15] cikkének egy hibás eredményére támaszkodva, a feltételt $[C_\nu]=[C_\nu C_\nu^{-1}]$ alakban adták meg (ahol $[A]$ G-nek az $A\subset G$ halmazt tartalmazó legszűkebb kompakt részcsoportját jelöli). A hibát K. STROMBERG [35] vette észre, megállapítván, hogy URBANIK, illetőleg KLOSSZ bizonyítása valójában a 4. 1 tételt szolgáltatja. Az alábbi bizonyítás (vö. [7]) az f-eltérések tulajdonságain alapszik.

Bizonyítás. A (4. 3) összefüggés értelmében $C_{\nu^n}\subset[C_\nu]=H_\nu$, ezért elegendő a H_ν részcsoportra szorítkoznunk; más szóval, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük és a továbbiakban fel is tesszük, hogy $[C_\nu]=H_\nu=G$. A tétel szükségességi állítása triviális. Valóban, ha ν^n (gyengén) konvergens, akkor bármely G/N faktor-csoportban is a megfelelő ν'^n sorozat (gyengén) konvergens (ahol $\nu'=\nu\Pi^{-1}$, Π-vel jelölve a G-nek G/N-be való kanonikus leképezését; N a G tetszőleges kompakt normálosztója). Ha azonban $C_\nu\subset xN=x'\in G/N$, akkor ν'^n konvergens volta azzal ekvivalens, hogy az x'^n sorozat konvergens a G/N csoportban, ami csak úgy lehetséges, ha x' a G/N egységeleme, tehát $C_\nu\subset N$, és ez (minthogy $[C_\nu]=G$) $N\neq G$ esetén lehetetlen. Ezért csak az elégségességet kell bizonyítani.

Jelöljük ω-val a *Haar*-mértéket G-n; az $\mathscr{I}_f(\nu^n,\omega)$ f-eltérések vizsgálata közvetlenül általában nem volna célravezető, ezért a ν^n eloszlásokat először alkalmasan „kisimítjuk". Legyen $h(x)$ a G-n értelmezett tetszőleges nemnegatív folytonos függvény, melynek az ω *Haar*-mérték szerinti integrálja 1-gyel egyenlő.

Jelöljük μ_0-val a

$$\mu_0(A)=\int_A h(x)\omega(dx) \qquad (A\in\mathscr{B}) \tag{4.4}$$

által definiált eloszlást, és legyen

$$\mu_n=\mu_0\times\nu^n \qquad (n=1,2,\dots). \tag{4.5}$$

Ekkor nyilvánvalóan $\mu_n\ll\omega$ és μ_n-nek ω-ra vonatkozó sűrűségfüggvénye

$$p_n(x)=\int h(xy^{-1})\nu^n(dy), \tag{4.6}$$

amiből speciálisan

$$p_{n+l}(x)=\int p_n(xy^{-1})\nu^l(dy) \qquad (l=1,2,\dots). \tag{4.7}$$

Tekintsük mármost az

$$\mathscr{I}_n=\mathscr{I}_f(\mu_n,\omega)=\int f(p_n(x))\omega(dx) \qquad (n=1,2,\dots) \tag{4.8}$$

f-eltéréseket, ahol $f(u)$ tetszőleges, $[0,+\infty)$-ben folytonos, szigorúan konvex függvény (tehát $f(0)<+\infty$). A konvolúció (4. 2) definíciója értelmében $\mu\times\nu$ úgy is tekinthető, mint egy (G, ν, G) csatorna $(G, \mathscr{B})$ bemeneti terén értelmezett μ mértéknek az ugyancsak $(G, \mathscr{B})$ kimeneti téren megfelelő $\tilde{\mu}$ mérték (vö. (3. 15)), ahol a csatorna átmenetfüggvénye $\nu(B|x) = \nu(x^{-1}B)$. A 3. 2 tételt erre a csatornára alkalmazva, és figyelembe véve, hogy $\mu_n \times \nu = \mu_{n+1}$, $\omega \times \nu = \omega$, azt kapjuk, hogy $\mathscr{I}_{n+1} \leqq \mathscr{I}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Ezért, figyelembe véve (1. 17)-et is, létezik az

$$\mathscr{I} = \lim_{n\to\infty} \mathscr{I}_n \tag{4.9}$$

véges határérték. Igazolni fogjuk, hogy itt $\mathscr{I} = f(1)$, azaz $\mu_n \xrightarrow{f} \omega$ (vö. (2. 3)).

A G csoport kompakt volta miatt a $h(x)$ folytonos függvény egyenletesen is folytonos, és így (4. 6)-ból következik, hogy a $p_n(x)$ sűrűségfüggvények egyenletesen egyenlő mértékben folytonosak. Következésképpen, ismét használva G kompaktságát, a $p_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ függvénysorozat bármely részsorozatából kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat. Ha sikerül megmutatni, hogy ezek mindegyike az azonosan 1 függvényhez konvergál, ez azt fogja jelenteni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = 1 \quad \text{egyenletesen.} \tag{4.10}$$

Mármost, ha

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k}(x) = \tilde{p}(x) \quad \text{egyenletesen,} \tag{4.11}$$

akkor — felhasználva a (4. 7) összefüggést — bármely $l \geqq 1$ egész számra

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k+l}(x) = \int \tilde{p}(xy^{-1})\nu^l(dx) = \tilde{p}^{(l)}(x) \quad \text{egyenletesen.} \tag{4.12}$$

Ezért, $\tilde{\mu}$-mal, ill. $\tilde{\mu}^{(l)}$-lel jelölve a $\tilde{p}(x)$, ill. $\tilde{p}^{(l)}(x)$ sűrűségfüggvényű eloszlást (ahol a sűrűségfüggvények az ω *Haar*-mértékre vonatkoznak),

$$\mathscr{I}_f(\tilde{\mu}, \omega) = \mathscr{I}_f(\tilde{\mu}^{(l)}, \omega) = \mathscr{I}. \tag{4.13}$$

Minthogy azonban $\tilde{\mu}^{(l)} = \tilde{\mu} \times \nu^l$, $\omega = \omega \times \nu^l$, (4. 13)-ból a 3. 2 tétel szerint az következik, hogy a ν^l-lel való konvolúciónak megfelelő csatorna (melynek átmenetfüggvénye $\nu^{(l)}(B|x) = \nu^l(x^{-1}B)$) elégséges a $\tilde{\mu}$, ω mértékpárra nézve. Ezért, a 3. 2 lemma értelmében, a $B_s = \{y: \tilde{p}^{(l)}(y) = s\}$ páronként diszjunkt kompakt halmazokra

$$\nu^l(x^{-1}B_{\tilde{p}(x)}) = 1, \tag{4.14}$$

eltekintve esetleg bizonyos $x \in G_0$ pontoktól, ahol $\omega(G_0) = 0$. Itt azonban valójában $G_0 = \emptyset$. Ha ui. valamely $x_0 \in G$ esetén $\nu^l(x_0^{-1}B_{\tilde{p}(x_0)}) < 1$, akkor a ν^l mérték regularitása miatt még egy alkalmas $U \supset x_0^{-1}B_{\tilde{p}(x_0)}$ nyílt halmaz ν^l-mértékre is 1-nél kisebb. Ekkor azonban a G egységelemének alkalmas V (nyílt) környezetére $Ux_0 \supset \supset VB_{\tilde{p}(x_0)}$ és így $V_1^{-1}V_1 \subset V$ esetén $U \supset (V_1x_0)^{-1}(V_1B_{\tilde{p}(x_0)})$. Ha mármost az egységelem $V_2 \subset V_1$ környezetét úgy választjuk, hogy $x \in V_2x_0$ esetén $|\tilde{p}(x) - \tilde{p}(x_0)| < \min_{y \notin VB_{\tilde{p}(x_0)}} |\tilde{p}^{(l)}(y) - \tilde{p}^{(l)}(x_0)|$ legyen (itt a jobboldal $\tilde{p}^{(l)}(x)$ folytonossága és $G - VB_{\tilde{p}(x_0)}$ kompakt volta miatt létezik és pozitív), akkor a V_2x_0 minden x pontjára $x^{-1}B_{\tilde{p}(x_0)} \subset U$, tehát $V_2x_0 \subset G_0$, ami ellentmond annak, hogy $\omega(G_0) = 0$.

(4. 14)-ből a G_s halmazok kompaktsága miatt $x^{-1}B_{\tilde{p}(x)} \supset C_{\nu^l}$, azaz $xC_{\nu^l} \subset B_{\tilde{p}(x)}$ következik. Ezért $xC_{\nu^l} \cap yC_{\nu^l} \neq \emptyset$, azaz $y \in xC_{\nu^l}C_{\nu^l}^{-1}$ esetén szükségképpen $\tilde{p}(y) =$

$=\tilde{p}(x)$ és indukcióval ugyanez következik

$$y \in x \overset{1}{\breve{C}}_{\nu^l} C_{\nu^l}^{-1} \overset{2}{\breve{C}}_{\nu^l} C_{\nu^l}^{-1} \dots \overset{n}{\breve{C}}_{\nu^l} C_{\nu^l}^{-1} \qquad (n=1, 2, \dots)$$

esetére is. Így tehát $\tilde{p}(x)$-nek állandónak kell lennie a

$$H^{(l)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{1}{\breve{C}}_{\nu^l} C_{\nu^l}^{-1} \overset{2}{\breve{C}}_{\nu^l} C_{\nu^l}^{-1} \dots \overset{n}{\breve{C}}_{\nu^l} C_{\nu^l}^{-1}$$

csoport bármely rögzített baloldali mellékosztályán, speciálisan magán H^l-en is ($l=1, 2, \dots$). Mármost a (4. 3) szerinti $C_{\nu^l} = \overset{1}{\breve{C}}_\nu \overset{2}{\breve{C}}_\nu \dots \overset{n}{\breve{C}}_\nu$ összefüggésből közvetlenül következik, hogy bármely

$$x = x_1 x_2 \dots x_n \qquad (x_i \in C_\nu, \quad i = 1, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots) \tag{4.15}$$

alakú elemre $xN_0x^{-1} \subset N_0$, ahol $N_0 = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} H^{(l)}$ és így természetesen az N_0 csoport N zárt burkára is $xNx^{-1} \subset N$. Másrészt azonban a $[C_\nu] = G$ feltevés értelmében, kihasználva még, hogy a G kompakt csoport bármely x_i eleme x_i^n hatványainak az egységelem torlódási pontja, a (4. 15) alakú elemek halmaza mindenütt sűrű G-ben; tehát N (kompakt) normálosztója G-nek. Ezért, minthogy C_ν az N-nek egyetlen mellékosztályába esik (ha ui. egy tetszőleges G csoport valamely C nem üres részhalmazára és H részcsoportjára $CC^{-1} \subset H$, akkor bármely $x_0 \in C$-re $C \subset CC^{-1}x_0 \subset Hx_0$), feltételünk értelmében $N = G$, azaz $N_0 = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} H^{(l)}$ mindenütt sűrű G-ben és így a $\tilde{p}(x)$ folytonos függvény az egész G csoporton állandó. Ez csak úgy lehetséges, ha $\tilde{p}(x)$ az azonosan 1 függvénnyel egyenlő, amivel (4. 10)-et igazoltuk, s ezzel egyúttal azt is, hogy $\mathscr{I} = f(1)$, azaz $u_n \xrightarrow{f} \omega$. Ebből a $\nu^n \to \omega$ gyenge konvergencia már közvetlenül következik, ugyanis tetszőleges G-n értelmezett $h(y)$ folytonos valós függvény előállítható $h(y) = \alpha h_1(y^{-1}) - \beta h_2(y^{-1})$ alakban, ahol $h_1(x)$ és $h_2(x)$ nemnegatív folytonos függvények, melyeknek az ω *Haar*-mérték szerinti integrálja 1-gyel egyenlő. Ekkor pedig az imént bizonyított (4. 10) összefüggés értelmében (x-nek a G egységelemét választva)

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int h(y)\nu^n(dy) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\alpha \int h_1(y^{-1})\nu^n(dy) - \beta \int h_2(y^{-1})\nu^n(dy)\right) = \\ &= \alpha - \beta = \int h(y^{-1})\omega(dy) = \int h(y)\omega(dy). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Természetesen ha a ν mérték abszolút folytonos az ω *Haar*-mértékre nézve és sűrűségfüggvénye folytonos függvény, akkor a μ_n „kisimított mértékek" bevezetésére nincs szükség, hanem magukra a ν^n mértékekre következik, hogy ω-ra vonatkozó sűrűségfüggvényük egyenletesen tart 1-hez; ilyenkor tehát ν^n még a (2. 40) metrika értelmében is tart ω-hoz (ami persze közvetlenül is egyszerűen igazolható). Megjegyzendő, hogy az iménti bizonyítás szempontjából minden $f(u)$ szigorúan konvex függvény egyformán „jó", még az $f(u)$ 0-pontbeli folytonosságának feltevése sem volt lényeges, mert a (4. 4)-beli $h(x)$ függvényt vehettük volna szigorúan pozitívnak is.

Érdekes nyitott kérdés, hogy lokálisan kompakt csoportok esetén mikor konvergál a ν^n sorozat a (nem normálható) egyenletes eloszláshoz, abban az értelemben, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu^n(A)}{\nu^n(B)} = \frac{\omega(A)}{\omega(B)}$, ha A és B pozitív és véges *Haar*-mértékű *Borel*-halmazok, melyeknek a határa nulla *Haar*-mértékű. Ezt a problémát ilyen általánosságban RÉNYI Alfréd vetette fel. Lehetséges, hogy az f-eltérések erre az esetre is alkalmazhatók lesznek, eddig azonban ebben az irányban nem értem el eredményt. Megemlítem végül, hogy a lokálisan kompakt csoportokon értelmezett tetszőleges $\mu_1, \mu_2, \dots$ eloszlássorozatokból képezett $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ konvolúciósorozatok aszimptotikus viselkedésével [8] dolgozatomban foglalkoztam, itt azonban más módszert használtam. Mindazonáltal valószínűnek látszik, hogy az f-eltérések különböző eloszlások konvolúcióinak határeloszlására vonatkozó tételek bizonyítására is alkalmazhatók.

INFORMATION-TYPE MEASURES OF DIVERGENCE OF PROBABILITY DISTRIBUTIONS

BY I. CSISZÁR

Summary

Let $(X, \mathscr{X})$ be a measurable space and λ a σ-finite measure on $(X, \mathscr{X})$. Probability measures on $(X, \mathscr{X})$ and their densities (with respect to λ) are denoted by μ and p, respectively, both with the same indices (if any).

Definition 1. 1. The f-divergence of two probability distributions μ_1 and μ_2 is

$$\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2) = \int p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) \lambda(dx) \tag{1.16}$$

Here $f(u)$ stands for an arbitrary convex function defined for $0 < u < +\infty$ and expressions of form $f(0)$ and $0 f\left(\frac{a}{0}\right)$ are understood as in (1. 8); the value of $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)$ does not depend on the choice of λ.

An equivalent definition of $\mathscr{I}_f(\mu_1, \mu_2)$ is indicated by theorem 1. 1; in (1. 44) R stands for an arbitrary class of finite measurable partitions of $(X, \mathscr{X})$ that spans $\mathscr{X}$.

The class of f-divergences includes the variation distance

$$|\mu_1 - \mu_2| = \int |p_1(x) - p_2(x)|\, \lambda(dx) \quad (f(u) = |u-1|), \text{ the } X^2\text{-divergence}$$

$$X^2(\mu_1, \mu_2) = \int \frac{(p_1(x) - p_2(x))^2}{p_2(x)} \lambda(\mathrm{d}x) \quad (f(u) = (u-1)^2), \text{ Kullback's } I\text{-divergence}$$

$$I(\mu_1 \| \mu_2) = \int p_1(x) \log \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \lambda(dx) \quad (f(u) = u \log u), \text{ Jeffrey's } \mathscr{J}\text{-divergence}$$

$$\mathscr{J}(\mu_1, \mu_2) = I(\mu_1 \| \mu_2) + I(\mu_2 \| \mu_1) \qquad \text{etc.}$$

One motivation of the paper is to extend known results concerning Kullback's I-divergence to the class of f-divergences.

In section 2 we define f-neighbourhoods in an arbitrary set $\mathscr{M}$ of probability distributions on $(X, \mathscr{X})$, see (2. 1). The topological structure obtained in this way on $\mathscr{M}$ is finer than the one induced

by the variation distance (Theorem 2. 1), but in general, it is not a topology in the usual sense, unless both $f(0)$ and $\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}$ are finite (Theorem 2. 3). In the latter case, however, the f-neighbourhoods define the topology of the varation distance on $\mathcal{M}$ (Theorem 2. 2).

In section 3 we consider indirect observations characterized either by a sub- σ-algebra $\mathcal{X}_0$ of $\mathcal{X}$ or, more generally, by a stochastic kernel ν from $(X, \mathcal{X})$ to another measurable space $(Y, \mathcal{Y})$. If $\tilde{\mu}_i$ denotes the restriction of μ_i to $\mathcal{X}_0$ or the measure on $(Y, \mathcal{Y})$ induced by μ_i and ν, we have $\mathcal{I}_f(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) \leqq \mathcal{I}_f(\mu_1, \mu_2)$ (theorems 3. 1 and 3. 2), the equality holds if and only if (provided that f is strictly convex) the indirect observation is sufficient with respect to the pair μ_1, μ_2 (sufficiency of observation channels is defined analogously to sufficiency of sub- σ-algebras and of statistics). Also some necessary conditions of „small" decrease of the f-divergence are presented, that can be interpreted as „ε-sufficiency (Theorems 3. 3—3. 5). Section 3 concludes with a discussion of the implications of the results for the amount of information from a statistical observation with respect to the unknown parameter, if the Bayesian point of view is adopted.

Section 4 contains a new proof of the well-known necessary and sufficient condition of convergence of the convolution powers of a probability distribution on a compact group, based on properties of f-divergences.

FOLYTONOSSÁGI STRUKTÚRÁK SZINTOPOGÉN JELLEMZÉSE, II.*

ÍRTA: GACSÁLYI SÁNDOR

IV. Fejezet

9. § Definíciók. Főlimitációk és perfekt topogén rendezések

A limitáció fogalmát, amelynek szintopogén jellemzése értekezésünk jelen fejezetének alapvető célja, H. R. FISCHER [4] nyomán a következőképpen vezetjük be:

13. DEFINÍCIÓ. Egy $\tau: E \to \mathfrak{P}[\Phi(E)]$ leképezést[16] az E halmaz fölötti limitációnak nevezünk, ha tetszőleges $x \in E$-re teljesülnek a következő feltételek:

(L1) $$\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \tau(x) \Rightarrow \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \in \tau(x)$$

és

$$\left.\begin{matrix} \mathscr{F} \in \tau(x) \\ \mathscr{G} \supseteqq \mathscr{F} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathscr{G} \in \tau(x).$$

(L2) $$\dot{x} = \{H | x \in H \subseteqq E\} \in \tau(x). \blacksquare$$

Egy E tér fölötti limitációk $\mathscr{T} = \mathscr{T}(E)$ halmaza parciálisan rendezetté válik a

$$\tau \subseteqq \tau' \Leftrightarrow \tau(x) \subseteqq \tau'(x) \qquad (x \in E)$$

megállapodás révén.

Ha az E halmazon limitáció van adva, E-t limesztérnek nevezhetjük. A limesztér fogalma úgy tekinthető, mint a topologikus tér fogalmának általánosítása. Valóban, ha egy topologikus tér minden egyes pontjához hozzárendeljük mindazon szűrőket, amelyek a topológia értelmében az illető ponthoz konvergálnak (a pont környezetszűrőjét tartalmazzák), limitációt kapunk. Limesztérként felfogott topologikus téren tehát az adott x ponthoz tartozó szűrők $\tau(x)$ osztálya mindig egy jóldefiniált szűrő, az x pont környezetszűrője által van generálva. Ha hasonlót kívánunk meg topologikus tér helyett most már limitációra nézve, a limitáció fogalmának fontos speciális esetéhez, az ún. főlimitációhoz jutunk:

14. DEFINÍCIÓ. Egy $\tau: E \to \mathfrak{P}[\Phi(E)]$ leképezést az E halmaz fölötti főlimitációnak nevezünk, ha tetszőleges $x \in E$-re teljesülnek a következő feltételek:

(L2) $$\dot{x} \in \tau(x).$$

(L3) Van olyan E fölötti $\mathfrak{V}(x)$ szűrő, hogy

$$\tau(x) = \{\mathscr{F} | \mathscr{F} \supseteqq \mathfrak{V}(x)\}. \blacksquare$$

* A dolgozat teljes tartalom- és irodalomjegyzéke, valamint az I., II., és III. fejezete a *MTA III. Osztály Közleményei* **17** (1967) száma 161–183. oldalán jelent meg.

[16] Vagyis egy olyan leképezést tekintünk, amely az E tér minden egyes pontjához hozzárendeli E fölötti szűrőknek egy osztályát.

Az (L3) feltételből nyilván következik (L1), tehát egy főlimitáció mindig limitáció.

A főlimitáció fogalma a szintopogén elmélet keretében igen egyszerűen jellemezhető: a főlimitációk ekvivalensek a perfekt topogén rendezésekkel. Ez utóbbiak, mint ismeretes, a következőképpen vannak definiálva:

15. DEFINÍCIÓ. Az E halmazon értelmezett perfekt topogén rendezésnek nevezünk egy az E halmaz részhalmazai között definiált $<$ relációt, ha az eleget tesz a következő feltételeknek:

(O1) $$\emptyset < \emptyset,\ E < E;$$

(O2) $$A < B \Rightarrow A \subseteq B;$$

(O3) $$A \subseteq A' < B' \subseteq B \Rightarrow A < B;$$

(O′) $$\left.\begin{matrix} A < B \\ A' < B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cap A' < B \cap B';$$

(P′) $$A_i < B(i \in I) \Rightarrow U\{A_i | i \in I\} < B$$

tetszőleges I indexhalmazra. ▌

Egy E halmaz fölötti perfekt topogén rendezések halmaza parciálisan rendezetté válik a

$$< \subseteq <_1 \Leftrightarrow A < B \rightarrow A <_1 B \qquad (A, B \subseteq E)$$

megállapodás révén.

A főlimitációk és perfekt topogén rendezések közötti ekvivalencia mármost részletesen megfogalmazva a következőt jelenti:

26. TÉTEL. (1) *Ha a $<$ reláció perfekt topogén rendezés az E halmazon, akkor*

$$\mathfrak{V}(x) = \{V | x < V\}$$

tetszőleges $x \in E$ esetén szűrő, és a

$$\tau_<(x) = \{\mathcal{F} | \mathcal{F} \supseteq \mathfrak{V}(x)\} \qquad (x \in E)$$

leképezés főlimitáció E-n.

(2) *Ha τ főlimitáció E-n és minden $x \in E$-re*

$$\tau(x) = \{\mathcal{F} | \mathcal{F} \supseteq \mathfrak{V}(x)\},$$

akkor az

$$A <_\tau B \Leftrightarrow x \in A \rightarrow B \in \mathfrak{V}(x)$$

feltétel révén definiált $<_\tau$ reláció perfekt topogén rendezés E-n.

(3) *$< \rightarrow \tau_<$ és $\tau \rightarrow <_\tau$ kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E-n értelmezett perfekt topogén rendezések osztályának az E fölötti főlimitációk osztályára és viszont. E leképezések a parciális rendezéseket megfordítják.*

Bizonyítás. (1) Közvetlenül belátható.

(2) (O1): $\emptyset <_\tau \emptyset$ és $E <_\tau E$ világos.

(O2): (L2) és (L3) szerint $\dot{x} \supseteqq \mathfrak{V}(x)$, vagyis $B \in \mathfrak{V}(x) \Rightarrow x \in B$. Így a $<_\tau$ reláció definíciója szerint $A <_\tau B \Rightarrow A \subseteqq B$.

(O3): Legyen $A \subseteqq A' <_\tau B' \subseteqq B$. Ekkor

$$x \in A \Rightarrow x \in A' \Rightarrow B' \in \mathfrak{V}(x) \Rightarrow B \in \mathfrak{V}(x).$$

(O′): Legyen $A <_\tau B$ és $A' <_\tau B'$. Ekkor

$$x \in A \cap A' \left\} \begin{array}{l} \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \in \mathfrak{V}(x) \\ \Rightarrow x \in A' \Rightarrow B' \in \mathfrak{V}(x) \end{array} \right\} \Rightarrow B \cap B' \in \mathfrak{V}(x).$$

(P′): Legyen $A_i <_\tau B$ $(i \in I)$. Ekkor

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow (x \in A_{i_0} \text{ valamely } i_0 \in I\text{-re}) \Rightarrow B \in \mathfrak{V}(x).$$

(3) Tekintsük a $< \to \tau_<$ és $\tau \to <_\tau$ leképezéseket. Ha $\tau = \tau_<$, akkor $<_\tau = <$. Valóban, $A <_\tau B$ akkor és csak akkor, ha $x \in A \Rightarrow B \in \mathfrak{V}(x)$. Ha most $\tau = \tau_<$, akkor $\mathfrak{V}(x) = \{V | x < V\}$ és így $A <_\tau B$ akkor és csak akkor, ha $x \in A \Rightarrow x < B$, ez pedig pontosan akkor igaz, ha $A < B$. (A „pontosan akkor" ekvivalencia abból következik, hogy a $<$ reláció teljesíti a (P′) feltételt.)

Legyen másrészt $\tau \to <_\tau$ és $< \to \tau_<$. Ha $< = <_\tau$ akkor $\tau_< = \tau$. Valóban, $< = <_\tau$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{V}_{\tau_<}(x) = \{V | x <_\tau V\} = \{V | V \in \mathfrak{V}(x)\} = \mathfrak{V}(x),$$

tehát valóban $\tau_< = \tau$.

Még csak azt kell megmutatni, hogy $<_1 \subseteqq <_2 \Leftrightarrow \tau_{<_1} \supseteqq \tau_{<_2}$. Mármost az alábbi feltételek mindegyike ekvivalens a rákövetkezővel:

$$<_1 \subseteqq <_2;$$

$$\mathfrak{V}_1(x) = \{V | x <_1 V\} \subseteqq \{V | x <_2 V\} = \mathfrak{V}_2(x)$$

minden $x \in E$-re[17];

$$\tau_{<_1}(x) = \{\mathscr{F} | \mathscr{F} \supseteqq \mathfrak{V}_1(x)\} \supseteqq \{\mathscr{F} | \mathscr{F} \supseteqq \mathfrak{V}_2(x)\} = \tau_{<_2}(x)$$

minden $x \in E$-re;

$$\tau_{<_1} \supseteqq \tau_{<_2}. \blacksquare$$

MEGJEGYZÉSEK. 1. Könnyű belátni, hogy a most bizonyított tétel (1) része akkor is megtartja érvényét, ha a $<$ reláció definíciójából mellőzzük a (P′) feltételt, vagyis ha ún. féltopogén $\cap$-rendezésekből indulunk ki. Ekkor azonban a tétel (2) része nem az adott $<$ relációhoz fog visszavezetni, hanem e helyett a $<$ relációt tartalmazó legszűkebb perfekt topogén rendezést kapjuk, vagyis a [3] monográfia terminológiája szerint a $<^p$ relációt. A féltopogén $\cap$-rendezések és főlimitációk közötti kapcsolat tehát nem kölcsönösen egyértelmű. Kölcsönösen egyértelmű megfelelést kapunk féltopogén $\cap$-rendezések ekvivalenciaosztályai és főlimitációk között, az ekvivalencia alábbi definíciója mellett: $<_1 \sim <_2$ akkor és csak akkor, ha $<_1^p = <_2^p$. Ha most még minden egyes ekvivalenciaosztályt (egyértelműen meg-

[17] A $\mathfrak{V}_1(x) \subseteqq \mathfrak{V}_2(x)$ $(x \in E) \Rightarrow <_1 \subseteqq <_2$ implikáció a (P′) feltétel révén adódik.

határozott) perfekt reprezentáns elemével helyettesítünk, az imént bizonyított tételre jutunk vissza.

2. A [3] monográfia 7. fejezete értelmében a (klasszikus) topológia fogalma ekvivalens a perfekt topogén struktúra fogalmával. Mármost egy perfekt topogén rendezés akkor és csak akkor perfekt topogén struktúra, ha teljesül reá

$$(7.9) \qquad A < B \Rightarrow (\exists C) \quad A < C < B.$$

Tekintve, hogy a $<$ reláció perfekt, (7. 9) ekvivalens a gyengébb

$$(7.9a) \qquad \text{tetszőleges } x \in E\text{-re} \quad x < B \Rightarrow (\exists C) \quad x < C < B;$$

feltétellel.

Valóban, ha $A < B$ akkor az

$$x < C_x < B \qquad (x \in A)$$

relációkból következik

$$A < \bigcup \{C_x | x \in A\} < B.$$

Ezek szerint egy τ főlimitáció akkor és csak akkor topológia, ha a belőle az előző tétel értelmében származó $<_\tau$ reláció még a (7. 9a) feltételt is teljesíti.

10. § Általános limitációk és rendezésszűrők

Az előző paragrafusban szintopogén jellemzését adtuk a főlimitációknak a perfekt topogén rendezések segítségével. Ezekután felmerül a kérdés, nem lehet-e hasonló jellemzést találni általános limitációk esetén is? Látni fogjuk, hogy ez valóban lehetséges, mégpedig egy új fogalomnak, a perfekt topogén rendezésekből alkotott szűrő fogalmának a bevezetése révén. Teljesség kedvéért adjuk meg e fogalom részletes definícióját:

16. DEFINÍCIÓ. E fölötti perfekt topogén rendezéseknek egy nem üres $\mathscr{H}$ halmazát az E halmaz fölötti perfekt topogén rendezésszűrőnek[18] nevezzük, ha teljesíti a szűrőaxiómát:

$$(\mathrm{F}) \qquad <_1, <_2 \in \mathscr{H} \Rightarrow <_1 \cap <_2 \in \mathscr{H},$$

$$\left.\begin{matrix} <_1 \in \mathscr{H} \\ <_1 \subseteq <_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow <_2 \in \mathscr{H}. \blacksquare$$

Minden rendezésszűrőhöz tartozik egy limitáció a következő tétel értelmében:

27. TÉTEL. *Ha $\mathscr{H}$ perfekt topogén rendezésszűrő az E halmazon, akkor tetszőleges $x \in E$ és $< \in \mathscr{H}$ esetén $\mathscr{F}_<(x) = \{V | x < V\}$ szűrő E-n, és $\tau_{\mathscr{H}}(x) = \{\mathscr{G} | \mathscr{G} \supseteq \mathscr{F}_<(x)$ valamely $< \in \mathscr{H}$-ra$\}$ $(x \in E)$ limitáció E-n.*

Bizonyítás. $\mathscr{F}_<(x)$ nyilván szűrő tetszőleges $x \in E$-re és $< \in \mathscr{H}$-ra. Ha most $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2 \in \tau_{\mathscr{H}}(x)$ vagyis $\mathscr{G}_1 \supseteq \mathscr{F}_{<_1}(x)$ és $\mathscr{G}_2 \supseteq \mathscr{F}_{<_2}(x)$ $(<_1, <_2 \in \mathscr{H})$, akkor

$$\mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2 \supseteq \mathscr{F}_{<_1}(x) \cap \mathscr{F}_{<_2}(x) = \mathscr{F}_{<_1 \cap <_2}(x),$$

[18] Rövidség kedvéért gyakran csak rendezésszűrőt, illetve szűrőt fogunk mondani.

ahol $<_1 \cap <_2 \in \mathscr{H}$. Az (L1) feltétel többi része világos, és nyilván teljesül (L2) is.

Egy E halmaz fölötti két rendezésszűrőt τ-ekvivalensnek fogunk nevezni, ha a most bizonyított tétel értelmében ugyanaz a limitáció felel meg nekik:

$$\mathscr{H}_1 \sim_\tau \mathscr{H}_2 \Leftrightarrow \tau_{\mathscr{H}_1} = \tau_{\mathscr{H}_2}.$$

Egy rendezésszűrőt τ-maximálisnak nevezünk, ha minden τ-ekvivalens rendezésszűrőt tartalmaz. Más szóval a $\mathscr{H}_M$ rendezésszűrő τ-maximális, ha

$$\mathscr{H} \sim_\tau \mathscr{H}_M \Rightarrow \mathscr{H} \subseteqq \mathscr{H}_M.$$

Ha egy τ-ekvivalenciaosztály tartalmaz τ-maximális elemet, akkor az természetesen egyértelműen meg van határozva, és egyenlő az adott osztályhoz tartozó összes szűrők egyesítési halmazával. Egyelőre mindenesetre még nyílt kérdés, hogy léteznek-e egyáltalán τ-maximális rendezésszűrők. Látni fogjuk, hogy ez a kérdés szorosan összefügg eredeti problémánkkal, a limitációk szintopogén jellemzésével.

Az előző tételben láttuk, hogyan lehet rendezésszűrőből kiindulva limitációhoz jutni, most viszont azt mutatjuk meg, miképpen lehet limitációnak rendezésszűrőt megfeleltetni:

28. TÉTEL. *Legyen τ limitáció az E halmazon. A $\mathbf{X}\{\tau(x)|x \in E\}$ Descartes-szorzat minden egyes $\{\mathscr{F}_x(\in \tau(x))|x \in E\}$ elemének feleltessük meg azt a $<$ relációt, amely*

$$A < B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \in \mathscr{F}_x)$$

révén van definiálva. Az összes ilyen $<$ relációk $\mathscr{H}_\tau$ halmaza perfekt topogén rendezésszűrő az E halmazon, és a $\tau \to \mathscr{H}_\tau$ és $\mathscr{H} \to \tau_{\mathscr{H}}$ leképezések szorzata a $\mathscr{T}(E)$ halmaz önmagára való identikus leképezése.

Bizonyítás. A $<$ relációk perfekt topogén rendezések. A 15. Definíció követelményeinek teljesülése hasonló módon ellenőrizhető, mint ahogyan ez a 26. tétel (2) részének bizonyításánál történt. — Mutassuk meg, hogy a $\mathscr{H}_\tau$ halmaz perfekt topogén rendezésszűrő E-n:

Legyen $<_1, <_2 \in \mathscr{H}_\tau$. Ekkor

$$A <_1 B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \in \mathscr{F}_x),$$

$$A <_2 B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \in \mathscr{G}_x),$$

és így $< \; = \; <_1 \cap <_2$-re

$$A < B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \in \mathscr{F}_x \cap \mathscr{G}_x).$$

Minthogy $\tau(x)$ az $\mathscr{F}_x$ és $\mathscr{G}_x$ szűrőkkel együtt $\mathscr{F}_x \cap \mathscr{G}_x$-et is tartalmazza, $< \in \mathscr{H}_\tau$.

Legyen most $< \in \mathscr{H}_\tau$, vagyis

$$A < B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \in \mathscr{F}_x),$$

és legyen $< \subseteqq <_1$, ahol $<_1$ perfekt topogén rendezés E-n. Ekkor $A <_1 B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow$ $\Rightarrow x <_1 B)$, és ha azt írjuk, hogy $\mathfrak{V}_1(x) = \{V | x <_1 V\}$, akkor

$$A <_1 B \Leftrightarrow \big(x \in A \Rightarrow B \in \mathfrak{V}_1(x)\big).$$

Mármost $\mathfrak{V}_1(x) \supseteqq \mathscr{F}_x \cap \dot{x} \in \tau(x)$, és így $\mathfrak{V}_1(x) \in \tau(x)$. Ez azt mutatja, hogy $<_1 \in \mathscr{H}_\tau$.

Tekintsük most a $\tau \to \mathscr{H}_\tau$ és $\mathscr{H} \to \tau_{\mathscr{H}}$ leképezéseket. Ha $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\tau$, akkor $\tau_{\mathscr{H}} = \tau$. Valóban, $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\tau$ esetén

$$\tau_{\mathscr{H}}(x) = \{\mathscr{G} | \mathscr{G} \supseteqq \mathscr{F}_<(x) \text{ valamely } < \in \mathscr{H}_\tau\text{-ra}\}.$$

Mármost $< \in \mathscr{H}_\tau$ azt jelenti, hogy

$$A < B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \in \mathscr{F}_x \in \tau(x)).$$

Ezek szerint

$$\mathscr{F}_<(x) = \{V | x < V\} = \{V | x \in V \in \mathscr{F}_x\} = \mathscr{F}_x \cap \dot{x}.$$

Innen $\mathscr{F}_<(x) \subseteqq \mathscr{F}_x$ adódik, és így $\mathscr{F}_<(x) \in \tau_{\mathscr{H}}(x)$ maga után vonja, hogy $\mathscr{F}_x \in \tau_{\mathscr{H}}(x)$. Látjuk, hogy $\tau(x) \subseteqq \tau_{\mathscr{H}}(x)$. (Ha a $<$ reláció befutja $\mathscr{H}_\tau$-t, akkor $\mathscr{F}_x$ befutja $\tau(x)$-et.)

Ahhoz, hogy a fordított $\tau_{\mathscr{H}}(x) \subseteqq \tau(x)$ inklúziót bebizonyítsuk, elég lesz megmutatni, hogy $\mathscr{F}_<(x) \in \tau(x)$ tetszőleges $< \in \mathscr{H}_\tau$-ra. Ez azonban igaz, hiszen az imént láttuk, hogy

$$\mathscr{F}_<(x) = \mathscr{F}_x \cap \dot{x} \quad \text{és} \quad \dot{x} \in \tau(x).$$

Az előző tételben konstruált $\mathscr{H}_\tau$ rendezésszűrőre nézve további fontos felvilágosítást nyújt a következő

29. TÉTEL. *Ha $\mathscr{H}$ perfekt topogén rendezésszűrő és $\tau = \tau_{\mathscr{H}}$, akkor $\mathscr{H}_\tau \sim_\tau \mathscr{H}$ és $\mathscr{H} \subseteqq \mathscr{H}_\tau$.*

Bizonyítás. A legutóbbi tétel szerint a $\mathscr{H} \to \tau_{\mathscr{H}}$ leképezés révén a $\mathscr{H}_\tau$ szűrő τ-ba megy át. Másrészt az eredetileg adott $\mathscr{H}$ szűrőnek ugyanez a $\tau_{\mathscr{H}} = \tau$ képe van (éppen ez a definíciója τ-nak), tehát $\mathscr{H}_\tau \sim_\tau \mathscr{H}$. Továbbá $< \in \mathscr{H}$-ra

$$A < B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow B \in \mathscr{F}_<(x)),$$

és $\mathscr{F}_<(x) \in \tau_{\mathscr{H}}(x)$ miatt $< \in \mathscr{H}_\tau$ adódik. Látjuk, hogy $\mathscr{H} \subseteqq \mathscr{H}_\tau$. ▮

A 28. és a 29. tételből közvetlenül folyik a

30. TÉTEL. *Egy E tér fölötti bármely perfekt topogén rendezésszűrő tartalmazva van egy τ-ekvivalens τ-maximális szűrőben, vagy ami ugyanazt jelenti, minden τ-ekvivalenciaosztály tartalmaz τ-maximális elemet.*

Bizonyítás. Egy tetszőleges $\mathscr{H}$ rendezésszűrőnek megfelel a 28. tétel szerint egy $\tau_{\mathscr{H}}$ limitáció, és $\tau = \tau_{\mathscr{H}}$-nak megfelel a 29. tétel szerint egy olyan $\mathscr{H}_\tau$ szűrő, amelyre $\mathscr{H} \sim_\tau \mathscr{H}_\tau$ és $\mathscr{H} \subseteqq \mathscr{H}_\tau$. Mivel itt $\mathscr{H}_\tau$ csak τ-tól függ de nem függ magától $\mathscr{H}$-tól, azért ez a $\mathscr{H}_\tau$ τ-maximális. ▮

A kapott eredmények alapján most már a limitáció fogalmának következő szintopogén jellemzését tudjuk adni:

31. TÉTEL. (1) *Ha $\mathscr{H}$ τ-maximális perfekt topogén rendezésszűrő az E halmazon, akkor tetszőleges $x \in E$ és $< \in \mathscr{H}$ esetén $\mathscr{F}_<(x) = \{V | x < V\}$ szűrő E-n, és*

$$\tau_{\mathscr{H}}(x) = \{\mathscr{G} | \mathscr{G} \supseteqq \mathscr{F}_<(x) \text{ valamely } < \in \mathscr{H}\text{-ra}\} \quad (x \in E)$$

limitáció E-n.

(2) *Legyen τ limitáció az E halmazon. A $\mathsf{X}\{\tau(x) | x \in E\}$ Descartes-szorzat minden egyes $\{\mathscr{F}_x(\in \tau(x)) | x \in E\}$ elemének feleltessük meg azt a $<$ relációt, amely*

$$A < B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B \in \mathscr{F}_x)$$

révén van definiálva. Az összes ilyen $<$ *relációk* $\mathscr{H}_\tau$ *halmaza* τ*-maximális perfekt topogén rendezésszűrő E-n.*

(3) $\mathscr{H} \to \tau_{\mathscr{H}}$ *és* $\tau \to \mathscr{H}_\tau$ *kölcsönösen egyértelmű, egymásra nézve inverz leképezései az E-n értelmezett* τ*-maximális perfekt topogén rendezésszűrők osztályának az E fölötti limitációk osztályára és viszont. E leképezések rendezéstartók.*[19]

Bizonyítás. (1) Az állítás a 27. tétel speciális esete.

(2) $\mathscr{H}_\tau$ rendezésszűrő a 28. tétel szerint, és τ-maximális a 30. tétel szerint.

(3) Tekintsük a $\mathscr{H} \to \tau_{\mathscr{H}}$ és $\tau \to \mathscr{H}_\tau$ leképezéseket. Ha $\tau = \tau_{\mathscr{H}}$, akkor $\mathscr{H}_\tau = \mathscr{H}$. Valóban, $\tau = \tau_{\mathscr{H}}$ alapján következik $\mathscr{H} \sim_\tau \mathscr{H}_\tau$ és mivel $\mathscr{H}$ és $\mathscr{H}_\tau$ mindketten τ-maximálisak, egyenlőknek kell lenniök.

Legyen másrészt $\tau \to \mathscr{H}_\tau$ és $\mathscr{H} \to \tau_{\mathscr{H}}$. Ha $\mathscr{H} = \mathscr{H}_\tau$, akkor $\tau_{\mathscr{H}} = \tau$. Ez nyilván nem más, mint a 28. tétel állításának befejező része, és ott már bizonyítást nyert.

Végül $\mathscr{H}_{\tau_1} \subseteqq \mathscr{H}_{\tau_2} \Leftrightarrow \tau_1 \subseteqq \tau_2$ egyszerű következménye annak, ahogyan a $\mathscr{H}$-kat a τ-k, a τ-kat pedig a $\mathscr{H}$-k segítségével definiáltuk. ▌

A most leírt kölcsönösen egyértelmű megfeleléssel kapcsolatban természetesen hasonló helyzet áll fenn, mint amilyet a 26. tételnél tapasztaltunk:

τ-maximális rendezésszűrők helyett rendezésszűrők τ-ekvivalenciaosztályairól is beszélhetnénk.

11. § A τ-ekvivalencia és a τ-maximalitás közvetlen jellemzése. Kiegészítések

Az előző paragrafusban rendezésszűrők τ-ekvivalenciáját a megfelelő limitációk egyenlőségével definiáltuk. Most mindenekelőtt megmutatjuk, hogyan lehet a τ-ekvivalenciát közvetlenül, a $\mathscr{H} \to \tau_{\mathscr{H}}$ hozzárendelésre való hivatkozás nélkül bevezetni. A τ-ekvivalencia közvetlen tárgyalása révén a τ-maximalitásra vonatkozó ismereteinket is ki tudjuk majd egészíteni.

Meggondolásaink számára kiindulásul a következő definíció szolgál:

17. Definíció. Legyenek $<_1$ és $<_2$ perfekt topogén rendezések az E halmazon, és legyen $x \in E$.

$$<_2 \subseteqq_x <_1 \Leftrightarrow \{V | x <_2 V\} \subseteqq \{V | x <_1 V\}.$$

($<_2 \subseteqq_x <_1$: a $<_2$ reláció az x helyen kisebb, mint $<_1$). ▌

A perfekt topogén rendezés definíciójában szereplő (P′) feltételből azonnal következik a

32. Tétel. *Egy E halmazon definiált tetszőleges* $<_1$ *és* $<_2$ *perfekt topogén rendezésekre* $<_2 \subseteqq <_1$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* $<_2 \subseteqq_x <_1$ *minden* $x \in E$*-re.* ▌

Az is világos, hogy a 27. tételből folyik a

33. Tétel. *Tetszőleges* $\mathscr{H}_1$ *és* $\mathscr{H}_2$ *E fölötti rendezésszűrők esetén* $\tau_{\mathscr{H}_1} \subseteqq \tau_{\mathscr{H}_2}$ *akkor és csak akkor teljesül, ha tetszőleges* $x \in E$ *és* $<_1 \in \mathscr{H}_1$ *esetén van olyan* $<_2 \in \mathscr{H}_2$*, hogy* $<_2 \subseteqq_x <_1$. ▌

[19] A $\mathscr{H}$-k parciális rendezése természetesen

$$\mathscr{H}_1 \subseteqq \mathscr{H}_2 \Leftrightarrow (< \in \mathscr{H}_1 \Rightarrow < \in \mathscr{H}_2)$$

révén van adva.

Ha az előző tételben megfogalmazott követelmény teljesül (vagyis, ha $\tau_{\mathscr{H}_1} \subseteqq \tau_{\mathscr{H}_2}$), akkor azt mondjuk, hogy $\mathscr{H}_2$ τ-durvább, mint $\mathscr{H}_1$. Nyilván érvényes a következő

34. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti két rendezésszűrő akkor és csak akkor τ-ekvivalens, ha mindegyikük τ-durvább a másiknál.* ▌

Ez a τ-ekvivalencia fentebb említett közvetlen definíciója. Hasznossága ki fog derülni az alábbi meggondolásokból:

Legyenek $\mathscr{H}_0$, $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ rendezésszűrők az adott E halmaz fölött. Ha azt írjuk, hogy $\{\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2\} = \{<| \text{ a } < \text{ reláció perfekt topogén rendezés és } <_1 \cap <_2 \subseteqq <$ valamely $<_1 \in \mathscr{H}_1$-re és $<_2 \in \mathscr{H}_2$-re$\}$, akkor $\{\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2\}$ nyilván rendezésszűrő E-n (mégpedig a legszűkebb $\mathscr{H}_1$-et is és $\mathscr{H}_2$-t is tartalmazó rendezésszűrő), és érvényes a

35. TÉTEL.

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{H}_1 \sim_\tau \mathscr{H}_0\\ \mathscr{H}_2 \sim_\tau \mathscr{H}_0\end{array}\right\} \Rightarrow \{\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2\} \sim_\tau \mathscr{H}_0.$$

Bizonyítás. Adott $< \in \mathscr{H}_0$ és $x \in E$ esetén léteznek olyan $<_1 \in \mathscr{H}_1$ és $<_2 \in \mathscr{H}_2$ perfekt topogén rendezések, hogy $<_1 \subseteqq_x <$ és $<_2 \subseteqq_x <$, és így $<_1 \cap <_2 \subseteqq_x <$ adódik, ahol

$$<_1 \cap <_2 \in \{\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2\}.$$

Másrészt legyen $< \in \{\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2\}$, vagyis legyen $<_1 \cap <_2 \subseteqq <$ valamely $<_1 \in \mathscr{H}_1$ és $<_2 \in \mathscr{H}_2$ esetén. Ekkor adott $x \in E$-hez találhatók olyan $<_\alpha$, $<_\beta \in \mathscr{H}_0$ relációk, hogy $<_\alpha \subseteqq_x <_1$ és $<_\beta \subseteqq_x <_2$, de akkor még az is igaz, hogy

$$<_\alpha \cap <_\beta \subseteqq_x <_1 \cap <_2 \subseteqq <,$$

és ilyen módon $<_\alpha \cap <_\beta \subseteqq_x <$ adódik, ahol $<_\alpha \cap <_\beta \in \mathscr{H}_0$. ▌

τ-maximális elem létezése minden τ-ekvivalenciaosztályban most már közvetlenül adódik a következő tételből:

36. TÉTEL. *Ha $\mathscr{H}_0$ rendezésszűrő az E halmazon, akkor az*

$$\mathscr{U} = \bigcup \{\mathscr{H} | \mathscr{H} \sim_\tau \mathscr{H}_0\}$$

egyesítési halmaz szintén rendezésszűrő E-n, és $\mathscr{U} \sim_\tau \mathscr{H}_0$.

Bizonyítás. $\mathscr{U}$ nem üres, mivel $\mathscr{H}_0$ sem az. Továbbá $\mathscr{U}$ eleget tesz az (F) szűrőaxiómának. Valóban, a $<_1$, $<_2 \in \mathscr{U} \Rightarrow <_1 \cap <_2 \in \mathscr{U}$ implikáció közvetlen folyománya a 35. tételnek. Az (F) axióma másik része világos, és világos az is, hogy $\mathscr{U} \sim_\tau \mathscr{H}_0$. ▌

A most bizonyított tételből nyilván következik a 30. tétel, sőt a 30. tétel állítását még a következő pontosabb alakban is megfogalmazhatjuk:

30a. TÉTEL. *Egy E tér fölötti bármely rendezésszűrő tartalmazva van egy τ-ekvivalens τ-maximális szűrőben, amely úgy áll elő, mint az adott szűrővel τ-ekvivalens összes szűrők egyesítési halmaza. Más szóval: minden τ-ekvivalenciaosztály* *tartalmaz τ-maximális elemet, az adott osztályhoz tartozó összes szűrők egyesítési halmazát.* ∎[20]

Mint ismeretes (vö. [4], 273. o.) egy E tér fölötti τ limitációnak természetes módon megfelel egy $\psi\tau$ főlimitáció. Valóban, legyen

$$\mathfrak{V}(x) = \bigcap\{\mathscr{F} | \mathscr{F} \in \tau(x)\} \quad \text{és} \quad \psi\tau(x) = \{\mathscr{G} | \mathscr{G} \supseteq \mathfrak{V}(x)\}.$$

A τ-nak megfelelő $\mathscr{H}_\tau$ rendezésszűrő és a $\psi\tau$-nak a 26. tétel szerint megfelelő $<_{\psi\tau}$ perfekt topogén rendezés között egyszerű kapcsolat áll fenn:

37. TÉTEL.
$$<_{\psi\tau} = \bigcap\{< | < \in \mathscr{H}_\tau\}.$$

Bizonyítás. $A <_{\psi\tau} B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in A \Rightarrow B \in \mathfrak{V}(x)$, vagyis ha $x \in A$-ból következik $B \in \mathscr{F}$ minden $\mathscr{F} \in \tau(x)$-re.

Másrészt, hogyha azt írjuk, hogy $<_D = \bigcap\{< | < \in \mathscr{H}_\tau\}$, akkor $A <_D B$ akkor és csak akkor, ha $A < B$ teljesül minden $< \in \mathscr{H}_\tau$-ra, vagyis, ha $x \in A$-ból következik $B \in \mathscr{F}$ minden $\mathscr{F} \in \tau(x)$-re, ez pedig ugyanaz a feltétel, mint az előbb. (Ha $<$ befutja $\mathscr{H}_\tau$-t, akkor $\mathscr{F}$ befutja $\tau(x)$-et. $\dot{x} \in \tau(x)$ miatt nyilván teljesül $x \in B$.) ∎

A [3] monográfiában alapvető szerepet játszik a szintopogén struktúra fogalma. Éppen ezért felmerül a kérdés, vajon mi a kapcsolat szintopogén struktúrák és limitációk között? Nem nehéz belátni, hogy a két fogalom között a kapcsolatot a topológia (topologikus tér) fogalma létesíti. Érvényes ugyanis a következő

38. TÉTEL. *Ha $\mathfrak{S}$ szintopogén struktúra az E halmazon, akkor tetszőleges $x \in E$-re $\mathfrak{V}(x) = \{V | x < V$ valamely $< \in \mathfrak{S}$-re$\}$ szűrő, és a $\mathfrak{V}(x) (x \in E)$ szűrők az E halmaz egy topológiájának a környezetszűrői.*

Bármely a $\mathfrak{V}(x)$ $(x \in E)$ környezetszűrők révén adott E fölötti topológia származtatható ilyen módon a megfelelő perfekt topogén struktúrából.

Bizonyítás. Ennek a tételnek a bizonyítása implicite benne foglaltatik a [3] monográfiában. (Vö. [3], (15. 10) és (7. 20).) ∎

Az elmondottak szerint egy E halmaz fölötti szintopogén struktúrához természetes módon tartozik egy főlimitáció, míg viszont egy főlimitáció akkor és csak akkor származtatható ilyen módon egy szintopogén struktúrából, ha a $\mathfrak{V}(x)$ $(x \in E)$ generáló szűrői egy E fölötti topológia környezetszűrői. (Az ilyen főlimitációkat a [4] dolgozat egyszerűen topológiáknak nevezi.) Annak érdekében, hogy szintopogén struktúrák ekvivalenciaosztályai és topológiát megadó főlimitációk között kölcsönösen egyértelmű megfelelést kapjunk, szintopogén struktúrák ekvivalenciáját az

$$\mathfrak{S}_1 \sim \mathfrak{S}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{S}_1^{tp} = \mathfrak{S}_2^{tp}$$

megállapodással kell definiálni (vö. [3], (8. 54)).

[20] A tételnek ez a pontosabb alakja természetesen az előző paragrafus eredményeiben is bennefoglaltatik.

V. Fejezet

12. § Pszeudo-topológiák és limitációk kapcsolatára vonatkozó legegyszerűbb eredmények

Mint ismeretes, a limitáció és a fölimitáció fogalmának KOWALSKY és FISCHER által történt bevezetését megelőzte szorosan rokon fogalomalkotásoknak — ún. pszeudo-topológiáknak és prae-topológiáknak — a vizsgálata G. CHOQUET [2] munkájában.

A pszeudo-topológia fogalmát az általunk használt terminológiában a következőképpen definiálhatjuk:

18. DEFINÍCIÓ. Egy $\varrho: E \to \mathfrak{P}[\Phi(E)]$ leképezést az E halmaz fölötti pszeudotopológiának nevezünk, ha tetszőleges $x \in E$-re teljesülnek a következő feltételek:

(F1)
$$\left.\begin{matrix}\mathscr{F} \in \varrho(x) \\ \mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'\end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathscr{F}' \in \varrho(x);$$

(F2)
$$\mathscr{F} \notin \varrho(x) \Rightarrow (\exists \mathscr{F}')\{(\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}') \& [\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}'' \to \mathscr{F}'' \notin \varrho(x)]\};$$

(F3)
$$\dot{x} \in \varrho(x). \blacksquare$$

MEGJEGYZÉS. Az (F2) feltétel nyilván ekvivalens a következővel:

(F2a) Ha $\mathscr{F} \notin \varrho(x)$, akkor $\mathscr{U} \notin \varrho(x)$ valamely az $\mathscr{F}$ szűrőt tartalmazó $\mathscr{U}$ ultraszűrőre.

A továbbiakban az (F2) feltételnek rendszerint erre az (F2a) alakjára fogunk hivatkozni. ▌

A pszeudo-topológiák és limitációk közötti kapcsolat tisztázása felé az első lépést a következő tétel jelenti:

39. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti bármely pszeudo-topológia limitáció E-n.*

Bizonyítás. Csak azt kell megmutatni, hogy

$$\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \varrho(x) \Rightarrow \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \in \varrho(x).$$

Tegyük fel, hogy $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \varrho(x)$ de $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \notin \varrho(x)$. Ekkor (F2a) szerint létezik olyan $\mathscr{U}$ ultraszűrő, hogy $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \subseteq \mathscr{U}$ és $\mathscr{U} \notin \varrho(x)$. Ebből azt következtetjük, hogy

(∗)
$$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{U} \quad \text{és/vagy} \quad \mathscr{G} \subseteq \mathscr{U}.$$

Valóban, $\mathscr{F} \nsubseteq \mathscr{U}$ és $\mathscr{G} \nsubseteq \mathscr{U}$ esetén $E-F \in \mathscr{U}$ és $E-G \in \mathscr{U}$ teljesülne valamely $F \in \mathscr{F}$-re és $G \in \mathscr{G}$-re. Ebből azonban

$$(E-F) \cap (E-G) = E-(F \cup G) \in \mathscr{U}$$

következnék, ami ellentmond annak, hogy

$$F \cup G \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \subseteq \mathscr{U}.$$

Ezek szerint kiinduló feltevésünk maga után vonja a (∗) feltétel teljesülését, a (∗) feltételből viszont (F1) szerint $\mathscr{U} \in \varrho(x)$ következik, ami ellentmondás. A kapott ellentmondás bizonyítja, hogy $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \in \varrho(x)$. ▌

A pszeudo-topológiák és limitációk közötti kapcsolatot részletesebben a következő két paragrafusban fogjuk vizsgálni. Itt viszont említsük még meg, hogy G. CHOQUET említett [2] dolgozatában fontos szerepet játszik a pszeudo-topológia fogalmának egy speciális esete, az ún. prae-topológia, amelyet a következőképpen definiálhatunk:

19. DEFINÍCIÓ. Egy E halmaz fölötti pszeudo-topológiát E fölötti prae-topológiának nevezünk, ha tetszőleges $x \in E$-re teljesül az

$$\text{(U 2')} \qquad \bigcap \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \varrho(x)\} \in \varrho(x)$$

feltétel. ▌

A prae-topológia fogalmának egyszerű jellemzését adja a következő

40. TÉTEL. *A prae-topológia és a főlimitáció fogalma megegyezik: minden E fölötti prae-topológia főlimitáció E-n, és megfordítva.*

Bizonyítás. Ha egy ϱ pszeudo-topológia az (U2′) feltételt is teljesíti, akkor nemcsak limitáció, hanem főlimitáció is, mert (L3) teljesül

$$\mathfrak{B}(x) = \bigcap \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \varrho(x)\} \qquad (x \in E)\text{-re.}$$

Másrészt viszont egy τ főlimitáció mindig teljesíti az (F2a) feltételt. Valóban, legyen $\mathcal{F} \notin \tau(x)$. Ekkor $\mathcal{U} \notin \tau(x)$ valamely az $\mathcal{F}$ szűrőt tartalmazó $\mathcal{U}$ ultraszűrőre, mert ellenkező esetben

$$\mathcal{F} = \bigcap \{\mathcal{U} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}\} \in \tau(x)$$

teljesülne, ami ellentmondás. (Ismeretes, hogy minden szűrő előáll az őt tartalmazó ultraszűrők metszeteként. Vö. [12], 374. o., Satz 4.)

13. § Pszeudo-topológiák szintopogén jellemzése: Előkészítés

Az előző paragrafusban láttuk, hogy minden pszeudo-topológia limitáció. A 31. tétel szerint ez azt jelenti, hogy minden pszeudo-topológiának megfelel egy τ-maximális rendezésszűrő, és felmerül a kérdés, hogy megfordítva viszont milyen feltételt kell egy τ-maximális rendezésszűrőre kiróni, hogy a neki megfelelő limitáció pszeudo-topológia legyen? Ebben és a következő paragrafusban erre a kérdésre keresünk választ.

Mindenekelőtt ekvivalens átfogalmazását adjuk a pszeudo-topológia és a prae-topológia definíciójának, hogy ezáltal jobban kidomborodjék a két fogalom kapcsolata egymással és a limitáció fogalmával. Ez a következő definíció segítségével lesz lehetséges (vö. [12], 375. o.):

20. DEFINÍCIÓ. Egy E halmaz fölötti ultraszűrők egy U osztályát zártnak nevezzük, ha van olyan E fölötti $\mathcal{F}$ szűrő, hogy U megyegyezik az $\mathcal{F}$-et tartalmazó ultraszűrők osztályával. Más szóval: ultraszűrőknek egy U osztálya zárt, ha minden a $\bigcap \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in U\}$ szűrőt tartalmazó ultraszűrő U-hoz tartozik.

Azt mondjuk, hogy E fölötti szűrőknek egy F osztálya $\bigcap$-zárt, ha F bármely részhalmazának metszete F-hez tartozik; F $\bigcap$-zárt P tulajdonságú részhalmazokra nézve, ha F bármely P tulajdonságú részhalmazának a metszete F-hez tartozik. ▌

Ezek után ki tudjuk mondani a következő tételt:

41. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti τ limitáció akkor és csak akkor pszeudotopológia, ha bármely $x \in E$-re $\tau(x)$ $\bigcap$-zárt ultraszűrők zárt osztályaira nézve. — τ akkor és csak akkor prae-topológia, ha bármely $x \in E$-re $\tau(x)$ $\bigcap$-zárt, vagy ami ugyanazt jelenti, ha $\tau(x)$ $\bigcap$-zárt ultraszűrők tetszőleges osztályaira nézve.*

Bizonyítás. Az állítások helyessége azonnal következik az előző paragrafusban tárgyalt (F2a), (U2′) és (F1) feltételekből, valamint abból, hogy minden szűrő előáll az őt tartalmazó ultraszűrők metszeteként. ▌

A 31. tétel értelmében adott E halmaz fölött a limitációkat azonosíthatjuk a τ-maximális rendezésszűrőkkel. Ennek megfelelően most azt fogjuk keresni, hogyan lehet az előző tételt τ-maximális rendezésszűrőkre átfogalmazni, ezáltal ugyanis szükséges és elegendő feltételt kapunk majd arra nézve, hogy egy τ-maximális rendezésszűrő pszeudo-topológia legyen.

Célkitűzésünk megvalósítása érdekében mindenekelőtt bevezetünk egy további fogalmat, a „ponthoz kötött perfekt topogén rendezés" fogalmát:

21. DEFINÍCIÓ. Egy E halmaz feletti $<$ perfekt topogén rendezést az $x \in E$ ponthoz kötöttnek nevezünk, ha tetszőleges $y \in E$ esetén $x \neq y \in A \Rightarrow y < A$.

Ha a $<$ reláció legalább egy x ponthoz kötött, akkor kötöttnek mondjuk. ▌

MEGJEGYZÉS. A kötött perfekt topogén rendezéseket rövidség kedvéért olykor csak kötött rendezéseknek, ill. kötött relációknak fogjuk hívni. ▌

Érvényes a következő egyszerű

42. TÉTEL. *A $\subseteq$ reláció minden $x \in E$ ponthoz kötött. Valódi perfekt topogén rendezés legfeljebb egy ponthoz lehet kötött.*

Bizonyítás. Legyen a $<$ reláció x-hez és y-hoz kötött, ahol $x \neq y$. Ekkor tetszőleges $z \in E$ esetén $z \neq x$ és $z \neq y$ közül legalább az egyik teljesül. Így $z \in B \Rightarrow z < B$. de akkor $A \subseteq B \Rightarrow (z < B$ tetszőleges $z \in A$-ra$) \Rightarrow A < B$. ▌

Legyen most $x \in E$ és $\mathscr{F}$ tetszőleges E fölötti szűrő. Legyen továbbá

$$A <_{x;\mathscr{F}} B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \,\&\, (x \in A \Rightarrow B \in \mathscr{F})].$$

Könnyű belátni, hogy ez a megállapodás perfekt topogén rendezést definiál. Érvényes továbbá a

43. TÉTEL. *A $<_{x;\mathscr{F}}$ perfekt topogén rendezés az x ponthoz kötött. — Megfordítva, minden az x ponthoz kötött perfekt topogén rendezés felírható $<_{x;\mathscr{F}}$ alakban alkalmasan választott $\mathscr{F}$ szűrővel.*

KOROLLÁRIUM. *Egy $<$ perfekt topogén rendezés akkor és csak akkor kötött, ha van olyan $x \in E$ és olyan E fölötti $\mathscr{F}$ szűrő, hogy $< \,=\, <_{x;\mathscr{F}}$.*

Bizonyítás. Az első állítás világos.

Ami a második állítást illeti, először is megjegyezzük, hogy bármely $<$ perfekt topogén rendezés egyértelműleg meg van határozva a

$$\mathfrak{B}(x) = \{V | x < V\} \qquad (x \in E)$$

szűrők által, minthogy

$$A < B \Leftrightarrow B \in \bigcap \{\mathfrak{B}(x) | x \in A\}.$$

Az x ponthoz kötött rendezések mármost pontosan azok, amelyekre $y \neq x \Rightarrow \mathfrak{B}(y) = \dot{y}$ és egy az x ponthoz kötött rendezés akkor és csak akkor valódi, azaz $\neq \subseteq$, ha $\mathfrak{B}(x) \neq \dot{x}$.

Legyen most $< \, = \, <_{x;\mathscr{F}}$. Ekkor $y \neq x$-re

$$\mathfrak{B}(y) = \dot{y}, \quad \text{és} \quad \mathfrak{B}(x) = \dot{x} \cap \mathscr{F}.$$

Most már világos, hogy ha a $<$ perfekt topogén rendezés az x ponthoz kötött, akkor $< \, = \, <_{x;\mathscr{F}}$ teljesül minden az $\dot{x} \cap \mathscr{F} = \{V | x < V\}$ feltételnek eleget tevő $\mathscr{F}$ szűrőre. (Ilyen $\mathscr{F}$ mindenesetre létezik, pl. maga a $\mathfrak{B}(x) = \{V | x < V\}$ szűrő.) ▌

Az előző bizonyítás során fontos szerepet játszott a kötött rendezéseknek egy tulajdonsága, amely megérdemli, hogy explicit formában, tételként leszögezzük:

44. TÉTEL. *Ha egy perfekt topogén rendezés előáll* $< \, = \, <_{x;\mathscr{F}}$ *alakban, akkor* $\{V | x < V\} = \dot{x} \cap \mathscr{F}$ *és* $\{V | y < V\} = \dot{y}$ $(y \neq x)$. ▌

A következő tétel limitációk és kötött rendezések között létesít kapcsolatot:

45. TÉTEL. *Ha* τ *limitáció E-n,* $x \in E$ *és* $\mathscr{F}$ *az E fölötti szűrő, akkor*

$$<_{x;\mathscr{F}} \in \mathscr{H}_\tau \Leftrightarrow \mathscr{F} \in \tau(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{F} \in \tau(x)$. Ha most azt írjuk, hogy $\mathscr{A}_x = \mathscr{F}$ és $\mathscr{A}_y = \dot{y}$, ha $x \neq y \in E$, akkor

$$\{\mathscr{A}_y | y \in E\} \in \mathbf{X}\{\tau(y) | y \in E\},$$

és világos, hogy

$$A <_{x;\mathscr{F}} B \Leftrightarrow (y \in A \Rightarrow y \in B \in \mathscr{A}_y).$$

Innen most már a $\mathscr{H}_\tau$ τ-maximális rendezésszűrőnek a 28. tételben foglalt definíciója szerint következik $<_{x;\mathscr{F}} \in \mathscr{H}_\tau$.

Másrészt legyen $< \, = \, <_{x;\mathscr{F}} \in \mathscr{H}_\tau$. Ekkor az előző tétel szerint $\dot{x} \cap \mathscr{F} = \{V | x < V\}$, és így a limitációk és τ-maximális rendezésszűrők között fennálló kölcsönösen egyértelmű $\tau \leftrightarrow \mathscr{H}_\tau$ megfelelés alapján $\dot{x} \cap \mathscr{F} \in \tau(x)$, tehát annál inkább $\mathscr{F} \in \tau(x)$. ▌

MEGJEGYZÉS. Ha minden $x \in E$-hez tartozik egy $\mathscr{F}_x \in \tau(x)$, akkor $\bigcap \{<_{x;\mathscr{F}_x} | x \in E\} \in \mathscr{H}_\tau$, és bármely $< \in \mathscr{H}_\tau$ előáll ilyen alakban. ▌

Azok a τ-maximális rendezésszűrők, amelyek pszeudo-topológiák, most már a következőképpen jellemezhetők:

46. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti* $\mathscr{H}_\tau$ τ-*maximális rendezésszűrő akkor és csak akkor pszeudo-topológia, ha bármely* $x \in E$ *és bármely* $\{\mathscr{U}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ *zárt ultraszűrőhalmaz esetén*

$$<_{x;\mathscr{U}_\gamma} \in \mathscr{H}_\tau (\gamma \in \Gamma) \Rightarrow \bigcap \{<_{x;\mathscr{U}_\gamma} | \gamma \in \Gamma\} \in \mathscr{H}_\tau.$$

Bizonyítás. Az állítás a 45. és a 41. tétel következménye. Valóban, $<_{x;\mathscr{U}}$ helyett $<(x; \mathscr{U})$-t írva látjuk, hogy teljesül a

$$<(x; \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{U}_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} <(x; \mathscr{U}_\gamma)$$

azonosság. Így a 45. tétel szerint a bizonyítandó implikáció ekvivalens az

$$\mathscr{U}_\gamma \in \tau(x) \, (\gamma \in \Gamma) \Rightarrow \bigcap \{\mathscr{U}_\gamma | \gamma \in \Gamma\} \in \tau(x)$$

implikációval, vagyis a zárt ultraszűrőhalmazokra vonatkozó $\bigcap$-zártsággal. ▌

A most bizonyított tétel elvezet bennünket a következő kérdésfeltevéshez: Ha az $\mathcal{F}$ szűrőtől megköveteljük, hogy ultraszűrő legyen, vajon milyen hatással lesz ez a megszorítás a $<_{x;\mathcal{F}}$ perfekt topogén rendezésre?

Először is néhány segédszerepet játszó összefüggést bizonyítunk:

47. TÉTEL. *Legyenek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ szűrők az E halmazon. Ekkor*

$$<_{x;\mathcal{F}} \subseteqq <_{x;\mathcal{G}} \Leftrightarrow \dot{x} \cap \mathcal{F} \subseteqq \dot{x} \cap \mathcal{G}$$

és

$$<_{x;\mathcal{F}} = <_{x;\mathcal{G}} \Leftrightarrow \dot{x} \cap \mathcal{F} = \dot{x} \cap \mathcal{G}.$$

KOROLLÁRIUM

$$<_{x;\mathcal{F}} \subset <_{x;\mathcal{G}} \Leftrightarrow \dot{x} \cap \mathcal{F} \subset \dot{x} \cap \mathcal{G}.$$

Bizonyítás. Az alábbi feltételek mindegyike ekvivalens a rákövetkezővel:

(I) $$<_{x;\mathcal{F}} \subseteqq <_{x;\mathcal{G}};$$

(II) $$A <_{x;\mathcal{F}} B \Rightarrow A <_{x;\mathcal{G}} B;$$

(III) $$y <_{x;\mathcal{F}} B \Rightarrow y <_{x;\mathcal{G}} B \quad (y \in E);$$

(IV) $$x <_{x;\mathcal{F}} B \Rightarrow x <_{x;\mathcal{G}} B;$$

(V) $$\dot{x} \cap \mathcal{F} \subseteqq \dot{x} \cap \mathcal{G}.$$

Az, hogy (I) $\Leftrightarrow$ (II) világos; a (II) $\Leftrightarrow$ (III) ekvivalencia abból következik, hogy $<_{x;\mathcal{G}}$ perfekt; (III) $\Leftrightarrow$ (IV) azért igaz, mert $y \neq x$ estén mind $y <_{x;\mathcal{F}} B$, mind pedig $y <_{x;\mathcal{G}} B$ ekvivalens azzal, hogy $y \in B$. Végül (IV) $\Leftrightarrow$ (V) abból következik, hogy $\{B | x <_{x;\mathcal{F}} B\} = \dot{x} \cap \mathcal{F}$ és $\{B | x <_{x;\mathcal{G}} B\} = \dot{x} \cap \mathcal{G}$.

Az öt feltétel nyilván ekvivalens marad, ha „$\subseteqq$", illetve „$\Rightarrow$" helyett mindegyikben azt írjuk, hogy „$=$", illetve „$\Leftrightarrow$". ∎

48. TÉTEL. *Tetszőleges $<_{x;\mathcal{F}}$ $(x \in E,\ \mathcal{F} \in \Phi(E))$ relációnak van maximális generáló szűrője, vagyis van olyan $\mathcal{F}_M$ szűrő, hogy $<_{x;\mathcal{F}} = <_{x;\mathcal{F}_M}$ és*

$$\mathcal{F}_M \subset \mathcal{H} \in \Phi(E) \Rightarrow <_{x;\mathcal{F}_M} \neq <_{x;\mathcal{H}}.$$

KOROLLÁRIUM.

$$\mathcal{F}_M \subset \mathcal{H} \in \Phi(E) \Rightarrow <_{x;\mathcal{F}_M} \subset <_{x;\mathcal{H}}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a $< = <_{x;\mathcal{F}}$ relációt generáló szűrőknek egy láncát (lineárisan rendezett halmazát). A lánc halmazelméleti uniója, amely szintén szűrő, ugyanazt a $<$ relációt fogja generálni. Valóban, ha $\{\mathcal{F}_\alpha | \alpha \in A\}$ a szóban forgó lánc, akkor $\dot{x} \cap \mathcal{F}_\alpha = \dot{x} \cap \mathcal{F}$ minden $\alpha \in A$-ra, és így

$$\dot{x} \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{F}_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in A} (\dot{x} \cap \mathcal{F}_\alpha) = \dot{x} \cap \mathcal{F}.$$

Az állítás most már a *Zorn*-lemmából következik.

Ami a korolláriumot illeti, $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{H} \Rightarrow \dot{x} \cap \mathcal{F}_M \subseteqq \dot{x} \cap \mathcal{H} \Rightarrow <_{x;\mathcal{F}_M} \subseteqq <_{x;\mathcal{H}}$, és a már bizonyított állítás szerint az utolsó „$\subseteqq$" relációnál nem állhat egyenlőség. ∎

MEGJEGYZÉSEK. 1. Könnyű belátni, hogy egy $< = <_{x;\mathcal{F}}$ perfekt topogén rendezés $\mathcal{F}_M$ maximális generáló szűrője akkor és csak akkor lesz az improprius szűrő[21] (vagyis

[21] Nem-valódi szűrőnek is nevezhetnénk, tekintettel arra, hogy a tőle különböző szűrőket valódiaknak óhajtjuk hívni.

az adott E halmaz hatványhalmaza), ha $<$ megegyezik a tartalmazási relációval. Ha megállapodunk, hogy egy $<$ perfekt topogén rendezést valódinak fogunk nevezni, ha $< \neq \subseteq$, akkor azt mondhatjuk, hogy egy $<_{x;\mathcal{F}}$ perfekt topogén rendezés maximális generáló szűrői akkor és csak akkor valódiak, ha maga $<_{x;\mathcal{F}}$ valódi.

2. A tartalmazási reláció nyilván írható $\subseteq = <_{y;\dot{y}}$ alakban tetszőleges $y \in E$-re, és maximális generáló szűrője, minthogy egyenlő az improprius szűrővel, egyértelműen van meghatározva. Hogyha viszont a $< = <_{x;\mathcal{F}}$ perfekt topogén rendezés valódi, akkor az $x \in E$ pont a $\{V | x < V\} \subset \dot{x}$ feltétel által egyértelműleg meg van határozva (vö. 44. tétel), de egyértelműségi állítás általában nem érvényes az $\mathcal{F}_M$ maximális generáló szűrőre.

14. § Pszeudo-topológiák szintopogén jellemzése: a főeredmény

22. DEFINÍCIÓ. Egy E halmaz fölötti $<$ perfekt topogén rendezést maximálisnak nevezünk, ha a tartalmazási reláció az egyetlen perfekt topogén rendezés, amelyben valódilag tartalmazva van: $< \subset <_1 \Leftrightarrow <_1 = \subseteq$. ∎

Maximális $<$ reláció természetesen mindig valódi.

A most következő tételek egymásutánja elvezet bennünket egy E halmaz fölötti maximális perfekt topogén rendezések jellemzéséhez. Először is érvényes a következő

49. TÉTEL. *Ha egy kötött reláció maximális, akkor összes maximális generáló szűrői ultraszűrők.*

Bizonyítás. Ha a $< = <_{x;\mathcal{F}}$ reláció maximális és $\mathcal{F}_M$ ennek a relációnak maximális generáló szűrője, akkor $\mathcal{F}_M$ ultraszűrő.

Valóban, tegyük fel, hogy $\mathcal{F}_M$ nem ultraszűrő. Ekkor $\mathcal{F}_M$ az őt (valódilag) tartalmazó ultraszűrők metszete, és biztosan egynél több ultraszűrőben van valódilag tartalmazva. Másrészt a 48. tétel korolláriuma szerint

$$\mathcal{F}_M \subset \mathcal{H} \Rightarrow <_{x;\mathcal{F}_M} \subset <_{x;\mathcal{H}},$$

és $<_{x;\mathcal{F}} = <_{x;\mathcal{F}_M}$ maximalitása miatt $<_{x;\mathcal{H}} = <_{x;\dot{x}}$. A 47. tétel szerint most már $\dot{x} \cap \mathcal{H} = \dot{x}$, vagyis $\dot{x} \subseteq \mathcal{H}$. Ez azt mutatja, hogy $\dot{x}$ az egyetlen valódi szűrő, amely valódilag tartalmazza $\mathcal{F}_M$-et. A kapott ellentmondás bizonyítja, hogy $\mathcal{F}_M$ ultraszűrő. ∎

Érvényes továbbá a következő egyértelműségi állítás:

50. TÉTEL. *Ha egy valódi kötött reláció ultraszűrővel generálható, akkor ez az ultraszűrő egyértelműen meg van határozva.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $< = <_{x;\mathcal{U}} = <_{x;\mathcal{V}}$, ahol az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ ultraszűrőkre teljesül $\mathcal{U} \neq \dot{x}$, $\mathcal{V} \neq \dot{x}$ és $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$. Ekkor $\dot{x} \supset \dot{x} \cap \mathcal{U} = \dot{x} \cap \mathcal{V}$ és[22] $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \mathfrak{P}(E)$. Másrészt a szűrőműveletek jól ismert disztributív tulajdonsága szerint

$$\dot{x} = \dot{x} \cap (\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) = (\dot{x} \cap \mathcal{U}) \vee (\dot{x} \cap \mathcal{V}) = \dot{x} \cap \mathcal{U} = \dot{x} \cap \mathcal{V},$$

ami ellentmondás. ∎

A 49. és az 50. tételből következik az

[22] $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ természetesen az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ mindegyikét tartalmazó legszűkebb szűrőt jelenti. Ismeretes, hogy ez általában különbözik $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$-től.

51. TÉTEL. *Ha egy kötött reláció maximális, akkor egyértelműen meghatározott maximális generáló szűrője van, amely ultraszűrő.* ▌

Ennek a tételnek a megfordítása is érvényes:

52. TÉTEL. *Ha egy valódi kötött reláció ultraszűrővel generálható, akkor maximális, és az ultraszűrő az egyértelműen meghatározott maximális generáló szűrője.*

Bizonyítás. Legyen $< = <_{x;\mathscr{U}}$ valamely $x \in E$-re és valamely E fölötti $\mathscr{U} \neq \dot{x}$ ultraszűrőre. Megmutatjuk, hogy a $<$ reláció maximális.

Legyen $< \subset <_1$, ahol $<_1$ az E fölötti perfekt topogén rendezés. Ekkor bármely $y \in E$-re teljesül

$$\{V|y<V\} \subseteqq \{V|y<_1 V\}.$$

Mármost $\{V|y<V\} = \dot{y}$ ha $y \neq x$, és így

$$\dot{y} = \{V|y<V\} = \{V|y<_1 V\} \qquad (y \neq x).$$

Erre való tekintettel, valamint annak alapján, hogy a $<$ és a $<_1$ reláció is perfekt, $< \subset <_1$-ből azt következtethetjük, hogy

$$\{V|x<V\} \subset \{V|x<_1 V\},$$

minthogy különben a minden $y \in E$-re teljesülő

$$\{V|y<V\} = \{V|y<_1 V\}$$

egyenlőségből $< = <_1$ következnék. Mármost nyilván $<_1 = <_{x;\mathscr{F}}$ minden olyan $\mathscr{F}$ szűrő esetén, amely teljesíti az $\dot{x} \cap \mathscr{F} = \{V|x<_1 V\}$ feltételt.

Legyen most egy ilyen $\mathscr{F}$ rögzítve, és legyen $\mathscr{V}$ egy $\mathscr{F}$-et tartalmazó ultraszűrő: $\mathscr{F} \subseteqq \mathscr{V}$. Ekkor

$$<_{x;\mathscr{U}} \subset <_{x;\mathscr{F}} \subseteqq <_{x;\mathscr{V}} \Rightarrow \dot{x} \cap \mathscr{U} \subset \dot{x} \cap \mathscr{V},$$

és így $\mathscr{U} \neq \mathscr{V}$. Ezek szerint

$$\dot{x} = \dot{x} \cap (\mathscr{U} \vee \mathscr{V}) = (\dot{x} \cap \mathscr{U}) \vee (\dot{x} \cap \mathscr{V}) = \dot{x} \cap \mathscr{V},$$

vagyis $\dot{x} = \mathscr{V}$. Ez azt mutatja, hogy $\dot{x}$ az egyetlen $\mathscr{F}$-et tartalmazó ultraszűrő, vagyis, hogy $\mathscr{F} = \dot{x}$, és következik, hogy $<_1 = \subseteqq$. Ezzel a $<$ reláció maximalitását bebizonyítottuk. A többi az előző két tétel alapján adódik. ▌

Az 50—52. tételek alapján kimondható most már az

53. TÉTEL. *Valódi kötött rendezés akkor és csak akkor maximális, ha ultraszűrővel generálható. Ekkor ez az ultraszűrő egyértelműen meghatározott és a rendezés egyértelműen meghatározott maximális generáló szűrőjét alkotja.*[23] ▌

Nyilván kívánatos a most kapott tétel érvényét kötött, vagyis $< = <_{x;\mathscr{F}}$ alakú speciális relációkról tetszőleges perfekt topogén rendezésekre kiterjeszteni. Ezt a következő egyszerű tétel révén érhetjük el:

54. TÉTEL. *Ha egy $<$ perfekt topogén rendezés valódi, akkor $< \subseteqq <_{x;\mathscr{F}}$ valamely $x \in E$-re és valamely E fölötti $\mathscr{F} \neq \dot{x}$ valódi szűrőre. Más szóval: Minden valódi perfekt topogén rendezés majorálható valódi kötött rendezéssel.*

[23] Tehát a szóban forgó $\mathscr{U}$ ultraszűrő kétféle értelemben is egyértelműen meghatározott: $\mathscr{U}$ az egyetlen olyan ultraszűrő, amely generálja az adott $<$ relációt, és $\mathscr{U}$ az egyetlen olyan szűrő, amely maximális generáló szűrője a $<$ relációnak.

Bizonyítás. Ha $< \neq \subseteq$, akkor a $<$ reláció perfekt voltából kifolyólag $\{V|x<V\}\subset\dot{x}$ valamely $x\in E$-re, és ha azt írjuk, hogy $\mathscr{F}=\{V|x<V\}$, akkor $<\subseteq<_{x;\mathscr{F}}$. ▮

KOROLLÁRIUM. *Az olyan perfekt topogén rendezés, amely nem írható fel $<=<_{x;\mathscr{F}}$ alakban, nem lehet maximális. Más szóval: Minden maximális perfekt topogén rendezés kötött.* ▮

Kapott eredményeink alapján most már a maximális perfekt topogén rendezéseket a következőképpen jellemezhetjük:

55. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti $<$ perfekt topogén rendezés akkor és csak akkor maximális, ha $<=<_{x;\mathscr{U}}$ valamely $x\in E$-re és valamely E fölötti $\mathscr{U}\neq\dot{x}$ ultraszűrőre, és akkor $x\in E$ egyértelműleg meg van határozva, és $\mathscr{U}$ a $<$ reláció egyértelműen meghatározott maximális generáló szűrője.*

Bizonyítás. A feltétel szükséges: Legyen $<$ maximális. Ekkor az 54. tétel korolláriuma szerint $<=<_{x;\mathscr{F}}$ egy egyértelműleg meghatározott $x\in E$-re, és alkalmazható az 53. tétel.

A feltétel elegendő: Tegyük fel, hogy $<=<_{x;\mathscr{U}}$ valamely $x\in E$-re és egy E fölötti $\mathscr{U}\neq\dot{x}$ ultraszűrőre. Ekkor a $<$ reláció nyilván valódi, tehát az $x\in E$ pont egyértelműen meg van határozva, és alkalmazható az 52. tétel. ▮

A most bizonyított tétel választ ad arra a kérdésre, amelyet a 46. tételhez kapcsolódóan feltettünk, és ezáltal lehetővé válik a 46. tételnek egy olyan átfogalmazása, amely a korábbinál kielégítőbb jellemzését adja a pszeudo-topológia fogalmának.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a 46. tétel akkor is megtartja érvényét, ha a $<_{x;\mathscr{U}_y}\in\mathscr{H}_\tau$ relációk közül kizárjuk a tartalmazási relációt, vagyis a tételben szereplő $\bigcap$-zártsági követelmény megfogalmazásánál valódi relációkra szorítkozhatunk.

Célszerű lesz még a következő

23. DEFINÍCIÓ. Ugyanazon $x\in E$ ponthoz kötött maximális perfekt topogén rendezések egy $\{<_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ osztályát zártnak nevezzük, ha a megfelelő maximális generáló szűrők $\{\mathscr{U}_\gamma|\gamma\in\Gamma\}$ halmaza zárt ultraszűrőhalmaz. ▮

Ennek a definíciónak a segítségével a 46. tételből a következő eredményt nyerjük:

56. TÉTEL. *Egy E halmaz fölötti τ-maximális rendezésszűrő akkor és csak akkor pszeudo-topológia, ha $\bigcap$-zárt maximális perfekt topogén rendezések zárt halmazaira nézve.* ▮

Ezzel megvalósítottuk értekezésünk jelen V. Fejezetének alapvető célkitűzését, a pszeudo-topológiáknak τ-maximális rendezésszűrők segítségével történő jellemzését.

Megjegyezzük még, hogy a 11. § eredményei alapján ez a jellemzés „limitációmentesnek”, vagyis csupán perfekt topogén rendezések segítségével történőnek tekinthető.

ON THE SYNTOPOGENOUS CHARACTERIZATION OF CONTINUITY STRUCTURES

BY S. GACSÁLYI

Summary

In his book [3], Á. CSÁSZÁR has given a unified treatment of the notions of topological space, uniform space and proximity space, by defining the continuity structure of the space with the help of orders (transitive relations) satisfying certain special requirements, and by introducing the concept of syntopogenous structure.

Besides topologies, uniformities and proximities, other types of continuity structures have attracted attention during the last few years, and it is to a syntopogenous characterization of some of these that the present paper is devoted. By a syntopogenous characterization we mean one in terms of semi-topogenous or topogenous orders and suitably defined structures consisting of such orders.

The paper falls into five chapters. The first of these establishes the equivalence of HACQUE's E-mappings with semi-topogenous orders, as well as some results on semi-topogenous orders. — In the second chapter a proof is given for the equivalence between proximity functions and symmetrical topogenous structures. This chapter contains also an alternative proof of the theorem of BANASCHEWSKI and MARANDA on the inverse of a proximity function. — The third chapter is devoted to a „skew" (i. e. asymmetrical) generalization of the notion of proximity function.

It is the aim of the fourth chapter to give a characterization in terms of topogenous orders of the notion of limiting as introduced by KOWALSKY and FISCHER. First of all, it is shown that so called principal limitings are equivalent to perfect topogenous orders. In order to obtain a syntopogenous characterization of general limitings, one has recourse to the notion of a filter of perfect topogenous orders. By imposing upon these filters a certain maximality condition (τ-maximality), one obtains one-to-one counterparts of limitings. This maximality condition can also be characterized independently of the one-to-one correspondence existing between limitings and τ-maximal filters.

The fifth chapter, the concluding one of the paper, deals with G. CHOQUET's pseudo-topologies, which were historically the first type of general continuity space to emerge. It is shown that pseudo-topologies are special limitings, and a necessary and sufficient condition is given for a limiting (or, equivalently, for the corresponding τ-maximal filter) to be a pseudo-topology. In τ-maximal filters it is possible to single out in a natural way maximal elements, and the necessary and sufficient condition just mentioned is a „$\cap$-closedness condition" relative to these.

It is the aim of these investigations to help a unification of different aspects of modern set-theoretical topology, and to extend the field of applications of the syntopogenous method.

DIMENZIÓ ÉS KONVEXITÁS, II.*

ÍRTA: DEÁK ERVIN

II. FEJEZET

EGY EUKLIDÉSZI TÉR ÖSSZES ALTEREI OSZTÁLYÁNAK TELJES KARAKTERIZÁLÁSA AZ IRÁNYDIMENZIÓVAL

6. § Rendes irányok és gyengén rendes terek

(6. 1) SEGÉDTÉTEL. Az

(6. 1. 1)
$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_F(\mathcal{R}) = \{G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}),\quad \bar{F}(\mathcal{R};G) \supset F\} \\ &M_F(\mathcal{R}) = \bigcap\{G : G \in \mathcal{M}_F(\mathcal{R})\} \end{aligned} \qquad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\}),$$
$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_G(\mathcal{R}) = \{F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}),\quad G(\mathcal{R};F) \subset G\} \\ &N_G(\mathcal{R}) = \bigcup\{F : F \in \mathcal{N}_G(\mathcal{R})\} \end{aligned} \qquad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\})$$

jelölésekkel, ahol $\mathcal{R}$ egy tetszőleges X tér tetszőleges iránya (az $\mathcal{R}$ indexet — ha csak egy irány szerepel a tárgyalásban — el is hagyjuk)

(6. 1. 2)
$$\mathcal{M}_F \neq \emptyset \quad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\}),$$
$$\mathcal{N}_G \neq \emptyset \quad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\}),$$

(6. 1. 3)
$$M_F \in \begin{cases} \mathcal{G}(\mathcal{R}) & (\mathcal{M}_F\text{-nek van első eleme}), \\ \mathcal{F}(\mathcal{R}) & (\mathcal{M}_F\text{-nek nincs első eleme}), \end{cases}$$
$$N_G \in \begin{cases} \mathcal{F}(\mathcal{R}) & (\mathcal{N}_G\text{-nek van utolsó eleme}), \\ \mathcal{G}(\mathcal{R}) & (\mathcal{N}_G\text{-nek nincs utolsó eleme}). \end{cases}$$

(6. 1. 4)
$$M_F \supseteqq F \quad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\}),$$
$$N_G \subseteqq G \quad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\}).$$

Ezek az állítások részben triviálisak, részben pedig (1. 8)-ból azonnal következnek.

* Az I. rész a MTA III. Oszt. Közleményei **17** (1967) számának 185.—213. oldalán jelent meg. A rövidítések és jelölések teljes mutatóját, a definíciók teljes mutatóját és a teljes irodalomjegyzéket is az I. részhez csatoltuk.

(6. 2) LEMMA. *A*

$$(6.2.1)\qquad \begin{aligned} G_x(\mathscr{R}) &= \bigcup\{G: G\in\mathscr{G}(\mathscr{R}),\quad x\notin G\}\\ F_x(\mathscr{R}) &= \bigcap\{F: F\in\mathscr{F}(\mathscr{R}),\quad x\in F\}\end{aligned}$$

jelölésekkel — ahol $\mathscr{R}$ egy tetszőleges X tér tetszőleges iránya (az $\mathscr{R}$ indexet egyértelműség esetén itt is elhagyjuk) — a következők érvényesek:

(a) $$G_x\in\mathscr{G}(\mathscr{R}),\quad F_x\in\mathscr{F}(\mathscr{R}),\quad x\in F_x\setminus G_x\quad (x\in X);$$

(b) *minden olyan $x\in X$ pontra, amelyre $(G_x, F_x)\in\mathscr{R}$ és minden $M\in\mathscr{G}(\mathscr{R})\cup\mathscr{F}(\mathscr{R})$ féltérre, amelyre*

$$x\notin M,\quad ill.\quad x\in M,$$

fennáll

$$G_x\supseteqq M,\quad ill.\quad F_x\subseteqq M;$$

(c) *bármely $x\in X$ ponthoz akkor és csak akkor létezik $\mathscr{R}$-nek olyan (G, F) eleme, amelyre $x\in F\setminus G$, ha $(G_x, F_x)\in\mathscr{R}$, s ez esetben (G_x, F_x) $\mathscr{R}$ egyetlen ilyen tulajdonságú eleme;*

(d) *ha valamely $x\in X$ pontra $(G_x, F_x)\notin\mathscr{R}$, akkor*

$$\bar{F}(G_x) = N_{\underline{G}(F_x)}\subset M_{\bar{F}(G_x)} = \underline{G}(F_x),$$

és $(\underline{G}(F_x), F_x)$ közvetlenül $(G_x, \bar{F}(G_x))$-re következik $\mathscr{R}$ rendezésében.

Bizonyítás. (a) az (1. 1. 3), ill. (1. 1. 4) irányaxiómából következik.

(b) az (1. 7) tétel következménye.

(c) bizonyításához elegendő arra rámutatni, hogy ha $x\in F\setminus G$ valamely $(G, F)\in\mathscr{R}$-re, akkor (1. 7) szerint $F=F_x$ és $G=G_x$. Végül (d) a könnyen belátható

$$x\in\underline{G}(F_x)\setminus\bar{F}(G_x)\qquad ((G_x, F_x)\notin\mathscr{R})$$

összefüggésből következik.

(6. 3) TÉTEL. *A következő állítások — tetszőleges X tér tetszőleges $\mathscr{R}$ irányára — ekvivalensek:*

(a) *$\mathscr{R}$ rendes irány;*

(b) $M_F = F\qquad (F\in\mathscr{F}(\mathscr{R})\setminus\{X\})$;

(c) $N_G = G\qquad (G\in\mathscr{G}(\mathscr{R})\setminus\{\emptyset\}$;

(d) $(G_x, F_x)\in\mathscr{R}\qquad (x\in X)$.

Bizonyítás. 1° <u>(d)⇒(b), (d)⇒(c).</u>

Ha ui.

$$F\in\mathscr{F}(\mathscr{R})\setminus\{X\},\quad x\notin F,\quad \text{ill.}\quad G\in\mathscr{G}(\mathscr{R})\setminus\{\emptyset\},\quad x\in G,$$

akkor (6. 2), (b) szerint

$$F\subseteqq G_x\subset F_x = \bar{F}(G_x),\quad \text{ill.}\quad \underline{G}(F_x) = G_x\subset F_x\subseteqq G,$$

tehát $G_x \in \mathcal{M}_F$, ill. $F_x \in \mathcal{N}_G$. Ebből

$$M_F \subseteqq \bigcap \{G_x : x \notin F\} = F, \quad \text{ill.} \quad N_G \supseteqq \bigcup \{F_x : x \in G\} = G,$$

és végül — (6. 1. 4) miatt — $M_F = F$, ill. $N = G$ következik, qu. e. d.

2° (b)$\Rightarrow$(d), (c)$\Rightarrow$(d).

Ha ui., ellenkezőleg, léteznék olyan $x \in X$ pont, amelyre $(G_x, F_x) \notin \mathcal{R}$, akkor (6. 2), (d) szerint

$$M_{\bar{F}(G_x)} \supset \bar{F}(G_x), \quad N_{\underline{G}(F_x)} \subset \underline{G}(F_x)$$

volna, tehát (b), ill. (c) nem teljesülne az

$$F = \bar{F}(G_x) \qquad (\in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \setminus \{X\}),$$

ill.

$$G = \underline{G}(F_x) \qquad (\in \mathcal{G}(\mathcal{R}) \setminus \{\emptyset\}),$$

félterekre, qu.e.d.

3° (a)$\Leftrightarrow$(d). Ez ui. nem más, mint (6. 2), (c) egy része.

(6. 4) TÉTEL. *Tetszőleges X tér tetszőleges rendes $\mathcal{R}$ irányára*

(a) $G = \{x : x \in X, (G_x, F_x) \prec (G, \underline{F}(G))\} \quad (G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}))$,

(b) $F = \{x : x \in X, (G_x, F_x) \preceq (\bar{G}(F), F)\} \quad (F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}))$.

Bizonyítás. 1° A (6. 3) tétel szerint

$$(G_x, F_x) \in \mathcal{R} \qquad (x \in X).$$

Ha $x \in G$ $(G \in \mathcal{G}(\mathcal{R}))$, akkor a (6. 2) definíció és (1. 9. 1) szerint $G_x \subset G$, s végül (1. 7) szerint

(6. 4. 1) $$(G_x, F_x) \prec (G, \underline{F}(G));$$

megfordítva: (6. 4. 1)-ből (1. 1. 2) szerint $F_x \subseteqq G$ és (6. 2), (a) szerint $x \in G$ következik. Ezzel (a)-t bebizonyítottuk.

2° Ha $x \in F$ $(F \in \mathcal{F}(\mathcal{R}))$, akkor (6. 2) és (1. 9. 1) szerint $F_x \subseteqq F$ és (1. 7) szerint

(6.4.2) $$(G_x, F_x) \preceq (\bar{G}(F), F);$$

megfordítva: (6. 4. 2)-ből (1. 1. 2) szerint $F_x \subseteqq F$ és ebből (6. 2) alapján $x \in F$ következik. Ezzel (b)-t is bebizonyítottuk.

A továbbiakban szükségünk lesz a következő tételre, amely majd főeredményünk bizonyításánál is lényeges szerepet kap. A tétel arra az ismert egyszerű tényre utal, hogy egy rendezéstopologikus tér valamely részhalmazának az öröklött rendezésből származó rendezéstopológiája gyakran nem esik egybe a részhalmaz relatív topológiájával; csak annyi igaz, hogy a rendezéstopológia mindig durvább az altértopológiánál, hiszen a részhalmaz bármely nyílt rendezés-félintervalluma az eredeti tér megfelelő nyílt rendezés-félintervallumának a nyoma, s így a relatív topológiában is nyílt halmaz.

(6. 5) TÉTEL. (a) *Az E_1 tér valamely nem-üres A részhalmazának relatív topológiája akkor és csak akkor esik egybe a természetes rendezéséből származó rendezés-*

topológiával, ha az E_1 tér $E_1 \setminus A$ alterének korlátos komponensei között nincs féligzárt intervallum.

(b) *Ha egy R nem-üres rendezett halmaznak legfeljebb megszámlálhatóan sok ugrása van, és létezik R-nek megszámlálható, R-ben sűrű (vagyis R minden nem-üres nyílt rendezésintervallumát metsző) R' részhalmaza, akkor R hasonló a valós számok természetes rendezésű halmazának egy olyan részhalmazához, amelynek E_1-re vonatkozó komplementuma nem tartalmaz korlátos féligzárt intervallum alakú komponenst.*

(c) *Az E_1 tér bármely nem-üres B részhalmaza, az E_1-től örökölt rendezésből származó rendezéstopológiával ellátva, homeomorf E_1-nek valamely A alterével.*

Bizonyítás. (a) Bevezető megjegyzésünk szerint elég azt megmutatni, hogy a mondott feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy A relatív topológiája durvább legyen a rendezéstopológiájánál. Használjuk az

$$A^x = \{x' \in A : x' < x\}, \qquad A_x = \{x' \in A : x' > x\} \qquad (x \in A)$$

jelöléseket.

Ha mármost az $E_1 \setminus A$ térnek van egy $(x_1, x_2]$, ill. $[x_1, x_2)$ alakú komponense $(x_1 < x_2)$, akkor

$$x_1 \in A, \qquad x_2 \notin A, \qquad \inf\{x : x \in A_{x_1}\} = x_2,$$

ill.

$$x_2 \in A, \qquad x_1 \notin A, \qquad \sup\{x : x \in A^{x_2}\} = x_1$$

(a szuprémum és az infimum képzése itt és a továbbiakban E_1-re vonatkozik), s az

$$\{x \in A : x \leqq x_1\}, \quad \text{ill.} \quad \{x \in A : x \geqq x_2\}$$

halmaz A relatív topológiájában nyílt, hiszen egybeesik az A^{x_2}, ill. A_{x_1} halmazzal; A rendezéstopológiájában azonban nem nyílt, mert A-nak bármely x_1-et, ill. x_2-t tartalmazó nyílt rendezés-félintervalluma x_1-nél (sőt x_2-nél) nagyobb, ill. x_2-nél (sőt x_1-nél) kisebb A-elemet is tartalmaz.

Ha viszont $E_1 \setminus A$ korlátos komponensei között nincs féligzárt intervallum, és x_0 A-nak nem első és nem utolsó pontja, akkor

$$\sup\{x : x \in A^{x_0}\} \in A, \quad \text{ill.} \quad \inf\{x : x \in A_{x_0}\} \in A.$$

Legyen most $x_1 < x_0$, ill. $x_2 > x_0$. Ekkor tehát az

$$y_1 = \sup\{x : x \in A^{x_0}\}, \quad \text{ha} \quad \sup\{x : x \in A^{x_0}\} < x_0,$$

$$y_1 \in A \cap (x_1, x_0), \quad \text{ha} \quad \sup\{x : x \in A^{x_0}\} = x_0,$$

ill.

$$y_2 = \inf\{x : x \in A_{x_0}\}, \quad \text{ha} \quad \inf\{x : x \in A_{x_0}\} > x_0,$$

$$y_2 \in A \cap (x_0, x_2), \quad \text{ha} \quad \inf\{x : x \in A_{x_0}\} = x_0$$

választással $y_1, y_2 \in A$ és

$$x_0 \in A_{y_1} \subseteqq A_{x_1}, \quad \text{ill.} \quad x_0 \in A^{y_2} \subseteqq A^{x_2},$$

vagyis x_0-nak E_1 szokásos szubbázisából eredő bármely relatív környezete tartalmazza x_0-nak A rendezéstopológiájára vonatkozó valamely környezetét, s a bizonyítást befejeztük.

(b) Legyen R'' az R összes üres nyílt rendezésintervallumai végpontjainak halmaza és $R^* = R' \cup R''$. Tegyük fel továbbá, hogy amennyiben R-nek van első eleme, úgy az eleme R^*-nak is. R^* megszámlálható:

$$R^* = \{x_1, x_2, \ldots\} \tag{6.5.1}$$

(ez a sorozatbarendezés általában különbözik a természetes rendezéstől), tehát — mint ismeretes — hasonló a (0, 1)-beli racionális számok, sőt a (0, 1)-beli diadikusan racionális számok D halmazának egy részhalmazához: „Legyen $f(x_1) = \frac{1}{2}$. Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemekhez már hozzárendeltük a (0, 1) intervallum $d_1, d_2, \ldots, d_n$ diadikusan racionális számait; legyen ezek közül d_i a legkisebb és d_k a legnagyobb. Ha x_{n+1} megelőzi az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemek mindegyikét, vagy pedig mindegyik után következik, akkor legyen

$$f(x_{n+1}) = \frac{d_i}{2}, \quad \text{ill.} \quad f(x_{n+1}) = \frac{1+d_k}{2};$$

ha pedig x_{n+1} az x_p és x_q elemek között ($p \leqq n$, $q \leqq n$) áll úgy, hogy ezek a szomszédai, akkor legyen

$$f(x_{n+1}) = \frac{d_p + d_q}{2}.$$

Ily módon megalkottuk az R^* halmaznak egy hasonló leképezését a D halmazba" ([3] 49).

Legyen most

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in R^*), \\ \sup\{f(x^*) : x^* \in R^*, \quad x^* \prec x\} & (x \in R \setminus R^*). \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy a $\varphi\colon R \to E_1$ leképezésre

$$y, z \in R, \quad y \prec z \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(z). \tag{6.5.2}$$

Ha ui. $\{y, z\} \subseteq R^*$, akkor (6. 5. 2) φ definíciója szerint triviálisan teljesül. Ha viszont $\{y, z\} \nsubseteq R^*$, akkor y és z valamelyike nem végpontja egyetlen üres nyílt rendezésintervallumnak sem, tehát léteznek

$$y^*, z^* \in R^*, \quad y \preceq y^* \prec z^* \preceq z$$

pontok, s így valóban

$$\varphi(y) \leqq \varphi(y^*) < \varphi(z^*) \leqq \varphi(z).$$

A φ leképezés tehát egy-egyértelmű és rendezéstartó, s így R hasonló $\varphi[R]$-hez.

Tegyük fel most ellentétben a tétel utolsó követelményével, hogy az $E_1 \setminus \varphi[R]$ tér korlátos komponensei között található egy $\langle a, b\rangle$ (valamelyik oldalról) féligzárt intervallum ($a < b$). Ekkor

$$\{x \in R : \varphi(x) \leqq a\} \neq \emptyset, \qquad \{x \in R : \varphi(x) \geqq b\} \neq \emptyset,$$

és ezért φ definíciója alapján

$$\{x \in R^* : \varphi(x) \leqq a\} \neq \emptyset, \qquad \sup\{x \in R^* : \varphi(x) \leqq a\} = a,$$

$$\{x \in R^* : \varphi(x) \geqq b\} \neq \emptyset, \qquad \inf\{x \in R^* : \varphi(x) \geqq b\} = b.$$

Az $\langle a, b\rangle$ intervallum féligzárt voltából pedig következik, hogy vagy $a \notin R$, vagy $b \notin R$. Ha tehát i és j olyan indexek, hogy a megfelelő (6. 5. 1)-beli elemekre

$$2a-b<\varphi(x_i)\leqq a, \qquad b\leqq \varphi(x_j)<2b-a,$$

akkor x_i és x_j nem szomszédosak R^* természetes rendezésében, sőt közöttük R^*-nak végtelen sok eleme van. Legyen hát k az első olyan index, amelyre $k>\max\{i,j\}$ és $x_i \prec x_k \prec x_j$; ekkor

$$a<\varphi(x_k)=\frac{\varphi(x_i)+\varphi(x_j)}{2}<b,$$

amiből $\varphi(x_k)\in E_1\setminus\varphi[R]$ következnék, s így ellentmondásra jutottunk. A tételt ezzel bebizonyítottuk.

(c) E_1 bármely nem-üres természetes rendezésű részhalmazára teljesülnek (b) feltételei, s így a (c) tétel közvetlen következménye (b)-nek és (a)-nak. Ezzel befejeztük (6. 5) bizonyítását.

E tétel felhasználásával befejezésül folytonos valós függvények, ill. ilyenek bizonyos családjai által generált rendes irányokat, ill. IS-kat vizsgálunk, különös tekintettel a teljesen reguláris terekre.

(6. 6) TÉTEL. *Ha f egy X téren értelmezett folytonos valós függvény, akkor a*

$$(6.6.1)\qquad \begin{aligned} G_t^f &= \{x\in X: f(x)<t\} \\ F_t^f &= \{x\in X: f(x)\leqq t\}\end{aligned} \qquad (-\infty<t<\infty),$$

$$(6.6.2)\qquad \mathscr{R}^f=\{(\emptyset,\emptyset)\}\cup\{(G_t^f,F_t^f):-\infty<t<\infty\}\cup\{X,X)\}$$

jelölésekkel

(a) *$\mathscr{R}^f$ rendes iránya X-nek;*

(b) *$\mathscr{R}^f$ a természetes rendezéséből származó rendezéstopológiával ellátva E_1 valamely alterével homeomorf.*

Bizonyítás. 1° $\mathscr{R}^f$ a számegyenes (3. 1)-beli „szokásos" (a (11. 16) vagy a (13. 11), (c) definíció kifejezésével „természetes") IS-jának (2. 1) szerinti inverz képe az f leképezésre nézve; vö. (2. 2). Ez (2. 3) alapján igazolja (a)-t. (A félterek az f függvény különböző típusú nívóhalmazai.)

2° $\mathscr{R}^f$ rendezett halmazként hasonló a rendezett E_1 halmaz egy részhalmazához, ti. az $\mathscr{R}^f$ elemeiben indexként szereplő t-értékek halmazához. (Itt figyelembe kell venni, hogy az (1. 1a) megjegyzés értelmében $\mathscr{R}^f$-nek különböző t-értékekhez tartozó egybeeső elemeit ezen t-értékek egyikével képezett (G_t^f, F_t^f) pár képviseli.) Ez a (6. 5) tétel alapján (b)-t igazolja.

Az E_n euklidészi tér „szokásos" irányai (vö. (3. 1)) is ilyen irányok. Minden térnek van folytonos valós függvény által generált rendes iránya (az (1. 17. 1) irányt pl. bármely konstans függvény generálja). Folytonos valós függvények valamely családja által generált IS-kat keresve azonban a teljesen reguláris terekre kell szorítkoznunk.

(6. 7) Ha X teljesen reguláris tér és $\mathfrak{F}$ az összes X-en definiált, folytonos valós f függvények családja, akkor (6. 6) jelöléseivel

$$\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}^f: f\in\mathfrak{F}\}$$

az X tér egy rendes IS-ja. Az összes nyílt félterek családja (sőt csupán az alsó nyílt féltereké is) itt nemcsak szubbázisa, hanem bázisa is a topológiának.

Ezt a triviális megjegyzést élesíthetjük azáltal, hogy lényegesen csökkentjük a felhasznált f függvények számát.

(6. 8) Ismeretes, hogy egy teljesen reguláris X tér bármely x pontjához és ennek bármely U környezetéhez található olyan U^* környezet, amelyre $U^{*-} \subseteqq U$, sőt, az $U^{*-}, X \setminus U$ diszjunkt zárt halmazok folytonos függvénnyel szétválaszthatók ([3], 263), azaz létezik olyan $f \in \mathfrak{F}$ függvény és olyan t valós szám, hogy

$$\sup_{x \in U^{*-}} f(x) < \inf_{x \in X \setminus U} f(x).$$

Legyen tehát $\mathscr{B}$ az X tér egy bázisa és $\mathscr{C} = \{(U, V): U, V \in \mathscr{B}, U^- \subseteqq V, U^-$ és $X \setminus V$ folytonos függvénnyel szétválasztható$\}$; rendeljünk továbbá minden $(U, V) \in \mathscr{C}$ párhoz egy $f_{(U,V)} \in \mathfrak{F}$ függvényt, amely U^--t és $X \setminus V$-t szétválasztja, és legyen végül

$$\mathfrak{F}^* = \{f_{(U,V)}:(U, V) \in \mathscr{C}\}.$$

Ha mármost W egy $x \in X$ pont valamely környezete, létezik olyan $(U, V) \in \mathscr{C}$ pár, amelyre

$$x \in U, \ V \subseteqq W,$$

és olyan t valós szám, amelyre

$$f_{(V,U)}(x) < t \ (x \in U), \ f_{(V,U)}(x) \geqq t \ (x \in X \setminus V).$$

A $\{G_t^f: f \in \mathfrak{F}^*, \ -\infty < t < \infty\}$ család tehát bázisa, s ezért az

$$\mathfrak{R}^* = \{\mathscr{R}^f: f \in \mathfrak{F}^*\} \tag{6.7.1}$$

rendszer (rendes) IS-ja X-nek.

Összefoglalva megállapíthatjuk:

(6. 9) TÉTEL. *Minden teljesen reguláris X tér gyengén rendes, sőt van legfeljebb $\tau(X)$ számosságú (folytonos való. függvények által generált) rendes IS-ja is.*

Ha ui. $\tau(X)$ véges, akkor az állítás abból következik, hogy minden pontnak van egy legszűkebb nyílt környezete; végtelen súlyú X térre pedig $\overline{\overline{\mathfrak{R}^*}} \leqq \overline{\overline{\mathscr{C}}} \leqq \tau(X)$ miatt (6. 7)-ből következik a tétel, ha $\mathscr{B}$-nek minimális bázist választunk.

7. § A rendes tereknek egy osztálya: a tökéletesen normális terek

A 3. beágyazási tételnél szükségünk lesz a szeparábilis metrikus terek rendességének tényére. E §-ban rendes tereknek egy minden metrikus teret is tartalmazó osztályát mutatjuk be.

(7. 1) DEFINÍCIÓ. *Tökéletesen normális tér:* olyan normális tér, amelyben minden zárt halmaz G_δ-típusú ([8], chap. 9, § 4).

A tökéletesen normális terek rendességének bizonyítására a következő segédtételt fogjuk alkalmazni:

(7. 2) LEMMA. *Ha F és Φ egy tökéletesen normális tér diszjunkt zárt halmazai, létezik olyan f: $X \to [0, 1]$ folytonos valós függvény, hogy*

$$f^{-1}(0) = F, \qquad f^{-1}(1) = \Phi. \tag{7.2.1}$$

Bizonyítás. A tétel az ismert, normális terekre vonatkozó „Nagy URISZON-lemma" élesítése tökéletesen normális terekre, s a bizonyítás is annak felhasználásával történhet.

1° Elegendő olyan $f_{F;\Phi}\colon X\to[0,1]$ folytonos valós függvény létezését kimutatni, amelyre

$$f_{F,\Phi}^{-1}(0)=F,\qquad f_{F,\Phi}^{-1}(1)\supseteqq\Phi.$$

Ez esetben ui. az

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+f_{F,\Phi}(x)-f_{\Phi,F}(x)\right)$$

függvény teljesíti a (7. 4. 1) feltételt.

2° Legyen $\{G_n;\ n=1,2,\dots\}$ nyílt halmazok olyan sorozata, hogy

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető továbbá

$$X\setminus\Phi\supseteqq G_1\supseteqq G_2\supseteqq\dots\supseteqq G_n\supseteqq G_{n+1}\dots\,. \tag{7.2.2}$$

A „Nagy URISZON-lemma" szerint minden n természetes számhoz létezik olyan $f_n\colon X\to[0,1]$ folytonos valós függvény, hogy

$$f_n^{-1}(0)\supseteqq F,\qquad f_n^{-1}(1)\supseteqq X\setminus G_n.$$

Ekkor az

$$f_{F,\Phi}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}f_n(x)\qquad(x\in X)$$

függvény is folytonos, és — mint könnyen belátható —

$$f_{F,\Phi}^{-1}(0)=F,\qquad f_{F,\Phi}^{-1}(1)\supseteqq X\setminus G_1\supseteqq\Phi,$$

s ezzel a bizonyítást 1° szerint befejeztük.*

(7. 3) TÉTEL. *Egy tökéletesen normális X tér bármely nem-rendes $\mathscr{R}$ iránya rendezéshűen beágyazható egy $\mathscr{R}'$ rendes irányba.*

Bizonyítás. 1° Legyen a (6. 2. 1)-beli M_F jelöléssel

$$\mathscr{F}_0=\{F\colon F\in\mathscr{F}(\mathscr{R})\setminus\{X\},\quad F\subset M_F\}. \tag{7.3.1}$$

A (6. 3) tétel és (6. 1. 4) szerint az $\mathscr{R}$ irány nem-rendessége ekvivalens azzal, hogy $\mathscr{F}_0\neq\emptyset$.

Mindenekelőtt azt bizonyítjuk, hogy

$$M_F\in\mathscr{G}(\mathscr{R})\qquad(F\in\mathscr{F}_0) \tag{7.3.2}$$

* Ugyanerre a bizonyítási eljárásra céloz BOURBAKI [8]-ban (a chp. 9, § 4, Ex. 7. feladatban) egy gyengébb — a (7. 2. 1) követelés második részét elhagyó és a T_1-axiómát is feltételező — tétellel kapcsolatban. (Megjegyzi még, hogy normális T_1-tér esetében (7. 2. 1) első része elegendő feltétele is a tér tökéletesen normális voltának.) Az itteni erősebb eredmény eléréséhez a BOURBAKI-javasolta bizonyítást csak (7. 2. 2)-vel kellett kiegészítenünk.

— ui. (1. 8) szerint $M_F \in \mathscr{G}(\mathscr{R}) \cup \mathscr{F}(\mathscr{R})$ —, ill. pontosabban:

(7. 3. 3) $$M_F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}) \Rightarrow M_F = \underline{G}(M_F) \quad (F \in \mathscr{F}_0).$$

Mivel $F \subset M_F$ $(F \in \mathscr{F}_0)$, (1. 7) szerint

(7. 3. 4) $$M_F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}) \Rightarrow F \subseteqq \underline{G}(M_F) \quad (F \in \mathscr{F}_0).$$

Ha mármost (7. 3. 3)-mal ellentétben léteznék olyan $F \in \mathscr{F}_0$, amelyre $M_F \in \mathscr{F}(\mathscr{R})$ és

(7. 3. 5) $$\underline{G}(M_F) \subset M_F,$$

akkor a (6. 1. 1)-beli $\mathscr{M}_F$ jelöléssel $\underline{G}(M_F) \in \mathscr{M}_F$ és következőleg

$$M_F \subseteqq \underline{G}(M_F)$$

volna, ami azonban ellentmond (7. 3. 5)-nek. Ezzel bebizonyítottuk (7 .3. 2)-t a (7. 3. 3) alakban.

A továbbiakban — (7. 3. 2) alapján — M_F helyett G_F-fet írunk, ha $F \in \mathscr{F}_0$; tehát

(7.3.6) $$G_F \in \mathscr{G}(\mathscr{R}), \quad F \subset G_F \quad (F \in \mathscr{F}_0),$$

és a $(G_F, \underline{F}(G_F))$ pár közvetlenül a $(\bar{G}(F), F)$ pár után következik $\mathscr{R}$ rendezésében.

2° Minden $F \in \mathscr{F}_0$ féltérhez rendeljünk egy — a (7. 4) lemma szerint létező — $f_F\colon X \to [0, 1]$ folytonos valós függvényt, amelyre

$$f_F^{-1}(0) = F, \qquad f_F^{-1}(1) = X \setminus G_F.$$

Legyen

$$\left.\begin{aligned} C_{F,0} &= \bar{G}(F), & C_{F,1} &= G_F \\ D_{F,0} &= F, & D_{F,1} &= \underline{F}(G_F) \end{aligned}\right\} \quad (F \in \mathscr{F}_0),$$

továbbá

$$\left.\begin{aligned} C_{F,t} &= \{x : x \in X, \ f_F(x) < t\} \\ D_{F,t} &= \{x : x \in X, \ f_F(x) \leqq t\} \end{aligned}\right\} \quad (F \in \mathscr{F}_0, \quad 0 < t < 1)$$

és végül

$$\mathscr{R}_0 = \{(\bar{G}(F), F) : F \in \mathscr{F}_0\},$$

$$(G, F)_t = \begin{cases} (C_{F,t}, D_{F,t}) & ((G, F) \in \mathscr{R}_0) \\ (G, F) & ((G, F) \in \mathscr{R} \setminus \mathscr{R}_0) \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

$$\mathscr{R}' = \{(G, F)_t : (G, F) \in \mathscr{R}, \quad 0 \leqq t \leqq 1\}.$$

3° Megjegyzendő, hogy — bár $\mathscr{R}'$ minden eleme (G, F)-fel és t-vel egyértelműen van meghatározva — $(G, F) \in \mathscr{R} \setminus \mathscr{R}_0$ esetén $(G, F)_{t_1} = (G, F)_{t_2}$ $(0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1)$ és $\mathscr{R}'$-nek ezen kívül is lehet olyan eleme, amely több különböző paraméter-értékhez (éspedig [0, 1] valamely részintervallumának összes értékeihez) tartozik. A továbbiak szempontjából azonban csak az a lényeges, hogy $(G, F) \in \mathscr{R}_0$ *esetén különböző* $t_1, t_2 \in f_F[X]$ *értékekre mindig*

$$(G, F)_{t_1} \neq (G, F)_{t_2}.$$

A következőkben bebizonyítjuk, hogy $\mathscr{R}'$ — amely nyilván rendezéshűen tartalmazza $\mathscr{R}$-et — rendes iránya X-nek.

4° $\mathscr{R}'$ nyilvánvalóan teljesíti az első két irányaxiómát. Most az (1. 1. 3) axióma teljesülését bizonyítjuk. Ha

$$\mathscr{G}^* \subset \mathscr{G}(\mathscr{R}'), \qquad \mathscr{G}^* \neq \emptyset$$

és $\mathscr{G}^*$-nak nincs utolsó eleme (az ellenkető esettel szükségtelen foglalkozni), legyen

$$\mathscr{G}_0^* = \{G\colon G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}), \text{ van olyan } 0 \leqq t \leqq 1, \text{ hogy } (G, \bar{F}(G))_t \text{ első tagja } \in \mathscr{G}^*\}.$$

Ekkor a

$$\tau(G) = \sup \{t\colon 0 \leqq t \leqq 1, C_{\bar{F}(G), t} \in \mathscr{G}^*\}$$

jelöléssel, aszerint, hogy $\mathscr{G}_0^*$-nak nincs utolsó eleme, ill. van egy — G_0-lal jelölt — utolsó eleme,

$$\bigcup \{G\colon G \in \mathscr{G}^*\} = \bigcup \{G\colon G \in \mathscr{G}_0^*\},$$

ill.

$$\bigcup \{G\colon G \in \mathscr{G}^*\} = C_{\bar{F}(G_0), \tau(G_0)}.$$

Mindkét esetben tehát

$$\bigcup \{G\colon G \in \mathscr{G}^*\} \in \mathscr{G}(\mathscr{R}'),$$

qu. e. d.

5° Hasonlóan bizonyítjuk az (1. 1. 4) irányaxióma teljesülését is. Ha

$$\mathscr{F}^* \subset \mathscr{F}(\mathscr{R}'), \qquad \mathscr{F}^* \neq \emptyset$$

és $\mathscr{F}^*$-nak nincs első eleme (az ellenkező esetben (1. 1. 4) triviálisan teljesül), legyen

$$\mathscr{F}_0^* = \{F\colon F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}), \text{ van olyan } 0 \leqq t \leqq 1, \text{ hogy } (\underline{G}(F), F)_t \text{ második tagja } \in \mathscr{F}^*\}.$$

Ekkor a

$$\tau(F) = \inf \{t\colon 0 \leqq t \leqq 1, D_{F,t} \in \mathscr{F}^*\}$$

jelöléssel és aszerint, hogy $\mathscr{F}_0^*$-nak nincs, illetve van egy — F_0-lal jelölt — első eleme,

$$\bigcap \{F\colon F \in \mathscr{F}^*\} = \bigcap \{F\colon F \in \mathscr{F}_0^*\},$$

ill.

$$\bigcap \{F\colon F \in \mathscr{F}^*\} = D_{F_0, \tau(F_0)}.$$

Mindkét esetben tehát

$$\bigcap \{F\colon F \in \mathscr{F}^*\} \in \mathscr{F}(\mathscr{R}'),$$

qu. e. d.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathscr{R}'$ X-nek iránya.

6° Végezetül megmutatjuk, hogy az $\mathscr{R}'$ irány rendes, ill. (6. 3), (d) alapján azt, hogy az $\mathscr{R}'$-re vonatkoztatott (6. 2. 1) jelölésekkel

$$(G_x, F_x) \in \mathscr{R}' \qquad (x \in X). \tag{7.3.7}$$

Legyen

$$\left.\begin{aligned} G_{(x)} &= \bigcup \{G\colon G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}), \quad x \notin G\} \\ F_{(x)} &= \bigcap \{F\colon F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}), \quad x \in F\} \end{aligned}\right\} \qquad (x \in X).$$

Ha valamely $x \in X$ pontra

$$(G_{(x)}, F_{(x)}) \in \mathscr{R},$$

akkor (6. 2), (c) szerint

$$(G_x, F_x) = (G_{(x)}, F_{(x)}) \in \mathscr{R}'.$$

Ha azonban

$$(G_{(x)}, F_{(x)}) \notin \mathscr{R},$$

akkor (6. 2), (d) szerint

$$\bar{F}(G_{(x)}) \in \mathscr{F}_0,$$

és ez esetben a

$$t_x = f_{F(G_{(x)})}(x) \qquad (0 < t_x < 1)$$

jelöléssel

$$G_x = C_{F(G_{(x)}), t_x}, \; F_x = D_{F(G_{(x)}), t_x},$$

tehát (7. 3. 7) ismét teljesül.

Ezzel teljesen bebizonyítottuk a (7. 3) tételt, amelynek következményeképpen most már megállapíthatjuk:

(7. 4) TÉTEL. *Minden tökéletesen normális tér rendes.*

(7. 5) KOROLLÁRIUM. *Minden metrikus vagy akár csak pszeudo-metrizálható tér rendes.*

8. § Az első és a második beágyazási tétel

(8. 1) ELSŐ BEÁGYAZÁSI TÉTEL. *Minden gyengén rendes T_0-tér homeomorf bármely $\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_\alpha : \alpha \in A\}$ rendes IS-jában szereplő, s a rendezéstopológiával ellátott irányaiból alkotott*

$$\mathscr{P}(\mathfrak{R}) = \mathsf{X}\{\mathscr{R}_\alpha : \alpha \in A\}$$

topologikus szorzatnak egy alterével.

Bizonyítás. 1° Legyen X gyengén rendes T_0-tér, és f X-nek az a leképezése az X valamely $\mathfrak{R}$ rendes IS-jából származó $\mathscr{P}(\mathfrak{R})$ térbe, amelyre

$$f(x)_\alpha = (G_x^\alpha, F_x^\alpha) \qquad (\alpha \in A, \; x \in X),$$

ahol $f(x)_\alpha$ az $f(x)$ pont $\mathscr{R}_\alpha$-koordinátatérbeli vetülete és (G_x^α, F_x^α) $\mathscr{R}_\alpha$-nak az x ponthoz (6. 3), (d) és (6. 2), (c) szerint egyértelműen tartozó eleme. Bebizonyítjuk, hogy az f leképezés homeomorfizmus az X tér és a $\mathscr{P}(\mathfrak{R})$ tér $f[X]$ altere között.

2° f^{-1} *egyértelmű*, azaz

(8. 1. 1) $$x, y \in X, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Legyen ui. $U \subseteq X$ olyan nyílt halmaz, amelyre pl.

(8. 1. 2) $$x \in U, \qquad y \notin U,$$

legyen továbbá $A^* \subseteq A$ olyan véges halmaz, és legyenek

$$G_\alpha \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha), \qquad F_\alpha \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha) \quad (\alpha \in A^*)$$

olyan félterek, amelyekre

(8. 1. 3) $$x \in \bigcap \{G_\alpha \setminus F_\alpha : \alpha \in A^*\} \subseteq U.$$

Mármost (8. 1. 2) és (8. 1. 3) miatt

$$y \notin G_{\alpha_0} \setminus F_{\alpha_0}$$

valamely $\alpha_0 \in A^*$ indexre. Ha $y \notin G_{\alpha_0}$, akkor

$$G_x^{\alpha_0} \subset G_{\alpha_0} \subseteqq G_y^{\alpha_0};$$

ha pedig $y \in G_{\alpha_0}$, akkor $y \in F_{\alpha_0}$, tehát

$$F_y^{\alpha_0} \subseteqq F_{\alpha_0} \subset F_x^{\alpha_0}.$$

Mindkét esetben

$$(G_x^{\alpha_0}, F_x^{\alpha_0}) \neq (G_y^{\alpha_0}, F_y^{\alpha_0}),$$

azaz $f(x)_{\alpha_0} \neq f(y)_{\alpha_0}$, s ezzel (8. 1. 1)-et bebizonyítottuk.

3° *Az f, f^{-1} függvények folytonosak.* Jelentse ui. p_α egy $p \in \mathscr{P}(\mathfrak{R})$ pont $\mathscr{R}_\alpha$-beli koordinátáját, és legyen

$$\mathscr{P}_{\alpha,G} = \{p : p \in \mathscr{P}(\mathfrak{R}),\quad p_\alpha \prec (G, \underline{F}(G))\} \qquad (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha),\quad \alpha \in A),$$

$$\mathscr{Q}_{\alpha,F} = \{p : p \in \mathscr{P}(\mathfrak{R}),\quad p_\alpha \succ (\bar{G}(F), F)\} \qquad (F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha),\quad \alpha \in A).$$

Legyen továbbá

$$\mathscr{B}_{f[X]}^{(1)} = \{\mathscr{P}_{\alpha,G} \cap f[X] : G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha),\quad \alpha \in A\},$$

$$\mathscr{B}_{f[X]}^{(2)} = \{\mathscr{Q}_{\alpha,F} \cap f[X] : F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha),\quad \alpha \in A\}.$$

Ekkor a

$$\mathscr{B}_{f[x]} = \mathscr{B}_{f[X]}^{(1)} \cup \mathscr{B}_{f[X]}^{(2)}$$

halmazrendszer az $f[X]$ tér egy szubbázisa, a topologikus szorzat értelmezése szerint. (A szorzattér

$$\mathscr{P}'_{\alpha,G} = \{p : p \in \mathscr{P}(\mathfrak{R}),\quad p_\alpha \prec (G, \bar{F}(\mathscr{G}))\} \qquad (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha),\quad \alpha \in A),$$

$$\mathscr{Q}'_{\alpha,F} = \{p : p \in \mathscr{P}(\mathfrak{R}),\quad p_\alpha \succ (\underline{G}(F), F)\} \qquad (F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha),\quad \alpha \in A)$$

alakú halmazait azért nem kell a szubbázis felírásánál tekintetbe venni, mert az (1. 7) tétel szerint minden $\alpha \in A$-ra

$$\underline{F}(G) \neq \bar{F}(G) \Rightarrow \underline{F}(G) = G \qquad (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha)),$$

$$\underline{G}(F) \neq \bar{G}(F) \Rightarrow F = \bar{G}(F) \qquad (F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha))$$

(ahol $\bar{F}(G)$-n persze $\bar{F}(\mathscr{R}_\alpha;\, G)$ értendő stb.), tehát mindenképpen

$$\mathscr{P}'_{\alpha,G} \cap f[X] = \mathscr{P}_{\alpha,G} \cap f[X] \qquad (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha), \alpha \in A),$$

$$\mathscr{Q}'_{\alpha,F} \cap f[X] = \mathscr{Q}_{\alpha,F} \cap f[X] \qquad (F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha), \alpha \in A),$$

akkor is, ha $\mathscr{P}'_{\alpha,G} \neq \mathscr{P}_{\alpha,G}$, ill. $\mathscr{Q}'_{\alpha,F} \neq \mathscr{Q}_{\alpha,F}$.)

Az f, f^{-1} függvények folytonosságának bizonyítására elegendő mármost azt kimutatni, hogy ezek a függvények az $f[X]$ tér $\mathscr{B}_{f[X]}$ szubbázisát és az X tér

$$\mathscr{B}_x = \{G : G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha),\quad \alpha \in A\} \cap \{X \setminus F : F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha),\quad \alpha \in A\}$$

szubbázisát (l. az IS (1. 11) definícióját) egymásba képezik le, azaz

(8.1.4) $$f[B_x] \in \mathscr{B}_{f[x]} \qquad (B_x \in \mathscr{B}_x),$$

(8.1.5) $$f^{-1}[B_{f[x]}] \in \mathscr{B}_x \quad (B_{f[x]} \in \mathscr{B}_{f[x]}).$$

Mármost a (6. 4) tétel (a), ill. (b) része szerint valóban

$$f[G] = \mathscr{P}_{\alpha,G} \cap f[X] \qquad (G \in \mathscr{G}(\mathscr{R}_\alpha), \quad \alpha \in A),$$

ill.

$$f[X \setminus F] = \mathscr{Q}_{\alpha,F} \cap f[X] \qquad (F \in \mathscr{F}(\mathscr{R}_\alpha), \quad \alpha \in A),$$

tehát (8. 1. 4) és — f^{-1} egyértelműsége miatt — (8. 1. 5) is teljesül.

A bizonyítást ezzel befejeztük. A tételnek több következményét említjük meg; közülük a legfontosabb:

(8. 2) TYIHONOV BEÁGYAZÁSI TÉTELE. *Bármely X teljesen reguláris T_0-tér homeomorf számegyenesek egy $\tau(X)$ számosságú családja topologikus szorzatának egy alterével* ([37] 171).

Bizonyítás. 1° A (8. 1) tétel (6. 9) szerint alkalmazható X-re.

2° Az X tér bármely (6. 9)-típusú IS-jának minden iránya — mint rendezéstopolgikus tér — (6. 6), (b) értelmében homeomorf a számegyenes egy alterével.

Az első beágyazási tétel következő alkalmazásaként a TYIHONOV-terek osztályának egy teljes karakterizálását nyerjük:

(8. 3) TÉTEL. *Egy T_0-tér akkor és csak akkor teljesen reguláris, ha gyengén rendes.*

Bizonyítás. 1° A tétel egyik része csupán a (6. 9) tétel szűkítése.

2° (8. 1) szerint bármely gyengén rendes T_0-tér beágyazható rendezéstopologikus terekként tekintett irányok — tehát (1. 10) szerint teljesen reguláris terek — topologikus szorzatába, tehát maga is teljesen reguláris.

Az első beágyazási tételnek a rendes T_0-terek osztályára szorított változata a

(8. 4) MÁSODIK BEÁGYAZÁSI TÉTEL. *Bármely X rendes T_0-tér homeomorf rendezéstopologikus terek — ti. bármely rendes minimális IS rendezéstopológiával ellátott irányai — valamely legfeljebb* Dim X *számosságú családja topologikus szorzatának egy alterével.*

A második beágyazási tételből a (2. 6), (a) szorzattétel figyelembevételével következik:

(8. 5) KOROLLÁRIUM. *Ha egy X rendes T_0-tér iránydimenziója*

$$\operatorname{Dim} X = \sum \{\mathfrak{a}_\alpha \colon \alpha \in A\},$$

ahol A nem-üres indexhalmaz és az $\mathfrak{a}_\alpha$-k nem-zérus kardinális számok, akkor X topologikusan beágyazható bizonyos

$$\operatorname{Dim} X_\alpha \leqq \mathfrak{a}_\alpha \quad (\alpha \in A)$$

iránydimenziójú X_α $(\alpha \in A)$ terek topologikus szorzatába.

Ha ui. B nem-üres indexhalmaz, A_β $(\beta \in B)$ páronként diszjunkt nem-üres halmazok és $A = \bigcup_{\beta \in B} A_\beta$, továbbá minden $\alpha \in A$-ra X_α tetszőleges tér, akkor, mint ismeretes, a

$$\mathbf{X} \{\mathbf{X}\{X_\alpha \colon \alpha \in A_\beta\} \colon \beta \in B\}$$

ismételt topologikus szorzat homeomorf a

$$\mathsf{X}\,\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$$

topologikus szorzattal.

A második beágyazási tétel második következményeként a MENGER—URISZON-elmélet HUREWICZ-féle (0. 8) kompaktifikációs tételének egy analogonját nyerjük:

(8. 6) KOROLLÁRIUM. *Bármely rendes T_0-tér topologikusan beágyazható egy vele azonos iránydimenziójú kompakt Hausdorff-térbe.*

Ez a (8. 1) tételből (1. 10) figyelembevételével következik.

A következő §-ban az első beágyazási tétel két legfontosabb következménye, a TYIHONOV-féle beágyazási tétel és a második beágyazási tétel viszonyát tisztázzuk.

9. § A második beágyazási tétel egybevetése TYIHONOV beágyazási tételével

(9. 1) Az összehasonlítandó tételek érvényességi köreinek — a rendes T_0-terek, ill. a TYIHONOV-terek osztályának — viszonya kitűnik a (8. 3) tételből: *minden rendes T_0-tér* TYIHONOV-*tér*. (Nyitott kérdés, hogy minden TYIHONOV-tér rendes-e, avagy létezik olyan TYIHONOV-tér, amelynek minimális iránystruktúrái között nincs rendes.)

(9. 2) Ha mármost a TYIHONOV-tételt is a rendes T_0-terek osztályára szorítva fogalmazzuk, érdekes analógiát találunk a két tétel között. Van ui. egy közös részük:

(9. 2. 1) *Bármely X rendes T_0-tér topologikusan beágyazható bizonyos rendezéstopologikus terek topologikus szorzatába.*

A rendes T_0-terekre leszűkített TYIHOVOV-tétel, ill. második beágyazási tételünk ehhez a közös részhez a (9. 2. 2), ill. (9. 2. 3) kiegészítést fűzi:

(9. 2. 2) *A koordinátaterekként szereplő rendezéstopologikus terek mindig választhatók számszakaszoknak, és a tényezők családja még eme legspeciálisabb választás mellett is mindig vehető legfeljebb $\tau(X)$ számosságúnak; ha pedig $\tau(X) > \aleph_0$, $\tau(X)$-nél kevesebb számszakasz biztosan nem elegendő;*

(9. 2. 3) *minden esetben elegendő rendezéstopologikus tereknek egy* Dim X *számosságú családja; ennél kevesebb pedig* (a (2. 6), (a) szorzattétel szerint) *soha sem elegendő.*

TYIHONOV tétele tehát a koordinátatereket a számuk terhére specializálja számszakaszokká; valóban, egy X rendes T_0-tér $\tau(X)$ súlya (amely (3. 2) szerint sohasem kisebb Dim X-nél) olykor jelentősen meghaladja a Dim X iránydimenziót. A második beágyazási tétel viszont a tényezőterek szükséges családjának számosságát az egyáltalán lehetséges minimumra szorítja, de a tényezők specializálása nélkül.

Példaképpen részletezzük ezeket a viszonyokat a rendes T_0-terek osztályánál, és ennek egy nagyon speciális részénél, a diszkrét terek osztályánál:

(9. 3) TÉTEL. *Jelöljük $\pi(X)$-szel azt a legkisebb kardinális számot, amely egy, valamely X teret altérként tartalmazó kocka tényezői családjának számossága. Bármely X rendes T_0-térre*

(a) $\mathrm{Dim}\, X = \pi(X) < \tau(X)$ $\quad (1 < \tau(X) < \aleph_0)$,

(b) $\mathrm{Dim}\, X \leqq \pi(X) \leqq \tau(X)$ $\quad (\tau(X) = \aleph_0)$,

(c) $\mathrm{Dim}\, X \leqq \pi(X) = \tau(X)$ $\quad (\tau(X) > \aleph_0)$;

ha pedig X diszkrét tér, (b) *és* (c) *a következőképpen élesíthető:*

(b′) $\operatorname{Dim} X = \pi(X) < \tau(X) \quad (\tau(X) = \aleph_0)$,

(c′) $\operatorname{Dim} X < \pi(X) = \tau(X) \quad (\tau(X) > \aleph_0)$.

Bizonyítás. (a) (9. 1)-nek következménye: minden X rendes T_0-tér egyúttal T_1-tér; ha $\tau(X) < \aleph_0$, akkor X diszkrét, tehát véges, és ezért beágyazható egy számszakaszba; (b) és (c) első állítása a (2. 6), (a) szorzattételből következik, (b), ill. (c) második állítása pedig az idézett TYIHONOV-tétel egy-egy része. Végül (b′) és (c′) a (3. 6) tétel szerint igaz.

(9. 4) A (9. 3) tétel (b) része nyomán természetes a kérdés: lehet-e, ill. milyen mértékben lehet a TYIHONOV-tétel és a második beágyazási tétel előnyeit egyesíteni? Más szóval: lehetségesek-e olyan TYIHONOV-típusú beágyazási tételek, amelyek

1° a megszámlálható súlyú teljesen reguláris T_0-terek közül a rendesekre (vagy, ha szükséges, egy még szűkebb osztályra, pl. a tökéletesen normális terekre) vonatkoznak;

2° amelyeknél tényezőterekként minél speciálisabb rendezéstopologikus terek szerepelnek;

3° és a tényezők családjának szükséges számossága minél kisebb (az optimális esetben a tekintett tér iránydimenziója).

Ha a 2° szempontot a legélesebben értelmezzük, azaz *számszakaszok* szorzatába való beágyazást követelünk a TYIHONOV-tétel mintájára, akkor ilyen tétel valóban csak a (megszámlálható súlyú) tökéletesen normális T_0-terekre, más szóval: a szeparábilis metrikus terekre lehet érvényes — hiszen megszámlálhatóan sok metrizálható tér topologikus szorzata is metrizálható ([37] 189). Ebben az esetben a 3° követelmény a lehető legnagyobb mértékben teljesül: „beágyazási számként” az iránydimenzió adódik. Ez a tartalma következő beágyazási tételünknek, amellyel egyúttal megoldjuk e fejezetnek a címében is jelzett fő feladatát.

10. § A harmadik beágyazási tétel. A fő feladat megoldása

E tétel a MENGER—NÖBELING-féle (0. 9) beágyazási tétel MENGER-féle szűkebb fogalmazásának analogonja és az utóbbihoz hasonlóan egészíti ki az URISZON-féle beágyazási és metrizálhatósági tételt (minden megszámlálható bázisú reguláris T_1-tér topologikusan beágyazható az $E_{\aleph_0}$ térbe, és ezért metrizálható).

(10. 1) HARMADIK BEÁGYAZÁSI TÉTEL. *Minden szeparábilis metrikus X tér topologikusan beágyazható az* $E_{\operatorname{Dim} X}$ *térbe.*

E tétel bizonyításához a második beágyazási tétel mellett a (6. 5) tételt és néhány segédtételt fogunk felhasználni.

(10. 2) MEGJEGYZÉS. A következő segédtételek bizonyításánál egy X tér valamely $\mathcal{R}$ rendezett iránya összes ugrásainak $\mathcal{U}$ halmazát azoknak a $((G_1, F_1), (G_2, F_2))$ rendezett pároknak a halmazával azonosítjuk, amelyekre

$$(G_1, F_1), \quad (G_2, F_2) \in \mathcal{R}, \quad (G_1, F_1) \prec (G_2, F_2),$$
$$\{(G, F) \in \mathcal{R} : (G_1, F_1) \prec (G, F) \prec (G_2, F_2)\} = \emptyset.$$

Ezzel kapcsolatban kihasználjuk majd azt a tényt, hogy bár $\mathcal{U}$ két elemét természetesen pontosan akkor tekintjük különbözőnek, ha az első komponensek *vagy* (nem kizáró értelemben) a második komponensek különbözőek, ez — amint $\mathcal{R}$ rendezettségéből könnyen következik — ekvivalens azzal, hogy *mind* az első, *mind* a második komponensek különbözők.

(10. 3) SEGÉDTÉTEL. *Legyen $\mathcal{R}$ egy X tér tetszőleges, rendezett halmazként tekintett iránya és*

$$\mathcal{U}^{(1)} = \{((G_1, F_1), (G_2, F_2)) \in \mathcal{U} : G_1 \subset F_1 = G_2\},$$

$$\mathcal{U}^{(2)} = \{((G_1, F_1), (G_2, F_2)) \in \mathcal{U} : F_1 = G_2 \subset F_2\}.$$

Ekkor

$$\overline{\overline{\mathcal{U}^{(1)}}} \leqq \tau(X), \qquad \overline{\overline{\mathcal{U}^{(2)}}} \leqq \tau(X).$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ X-nek egy $\tau(X)$ számosságú bázisa, és legyen $\mathcal{U}^{(1)} \neq \emptyset$, ill. $\mathcal{U}^{(2)} \neq \emptyset$. $\mathcal{U}^{(1)}$, ill. $\mathcal{U}^{(2)}$ minden egyes $((G_1, F_1), (G_2, F_2))$ eleméhez rendeljünk egy olyan $B \in \mathcal{B}$ halmazt, amelyre

$$B \cap (F_1 \setminus G_1) \neq \emptyset, \qquad B \subseteqq F_1, \tag{10.3.1}$$

ill.

$$B \cap (F_2 \setminus G_2) \neq \emptyset, \qquad B \subseteqq X \setminus G_2. \tag{10.3.2}$$

Ez lehetséges, hiszen ha $F_1 \setminus G_1 \neq \emptyset$, akkor bármely $x \in F_1 \setminus G_1$ ponthoz $F_1 = G_2$ miatt létezik olyan $B \in \mathcal{B}$ halmaz, amelyre $x \in B \subseteqq F_1$, s így (10. 3. 1) teljesül; ha pedig $F_2 \setminus G_2 \neq \emptyset$, akkor bármely $x \in F_2 \setminus G_2$ ponthoz — ismét $G_2 = F_1$ miatt — létezik olyan $B \in \mathcal{B}$, amelyre $x \in B \subseteqq X \setminus G_2$, s így (10. 3. 2) teljesül. Ily módon $\mathcal{U}^{(1)}$-et és $\mathcal{U}^{(2)}$-t egyaránt leképeztük $\mathcal{B}$ egy-egy részhalmazára.

Mindkét leképezés egy-egyértelmű. Legyen ui. $((G_1, F_1), (G_2, F_2))$, $((G_1', F_1'), (G_2', F_2'))$ két különböző eleme $\mathcal{U}^{(1)}$-nek, ill. $\mathcal{U}^{(2)}$-nek, tehát (a (10. 2) megjegyzés alapján és a vesszős, ill. vesszőtlen jelölés megfelelő alkalmazása mellett)

$$(G_1', F_1') \prec (G_1, F_1) \tag{10.3.3}$$

és

$$(G_2', F_2') \prec (G_2, F_2). \tag{10.3.4}$$

Ha mármost mindkét tekintetbe vett $\mathcal{U}^{(1)}$-, ill. $\mathcal{U}^{(2)}$-elemhez ugyanaz a $B \in \mathcal{B}$ tartoznék, akkor $\mathcal{U}^{(1)}$ esetében (10. 3. 1)-ből és (10. 3. 3)-ból $B \subseteqq F_1' \subseteqq G_1$ következnék, holott éppen (10. 3. 1) szerint $B \not\subseteqq G_1$; $\mathcal{U}^{(2)}$ esetében pedig (10. 3. 2)-ből és (10. 3. 4)-ből $B \subseteqq X \setminus G_2 \subseteqq X \setminus F_2'$ következnék, holott éppen (10. 3. 2) szerint $B \cap F_2' \neq \emptyset$. Ezzel bebizonyítottuk a segédtételt.

(10. 4) SEGÉDTÉTEL. *Egy X tér bármely rendezett $\mathcal{R}$ iránya összes ugrásainak $\mathcal{U}$ halmaza legfeljebb $3\tau(X)$ számosságú, tehát véges, ha $\tau(X) < \aleph_0$, és legfeljebb $\tau(X)$ számosságú, ha $\tau(X) \geqq \aleph_0$.*

Bizonyítás. 1° Az

$$\mathcal{U}^{(3)} = \{((G_1, F_1), (G_2, F_2)) \in \mathcal{U} : G_2 \setminus F_1 \neq \emptyset\} \tag{10.4.1}$$

jelöléssel és az előző segédtétel jelöléseivel

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}^{(1)} \cup \mathscr{U}^{(2)} \cup \mathscr{U}^{(3)},$$

s így (10. 3) eredménye alapján elegendő most már azt bizonyítani, hogy $\overline{\overline{\mathscr{U}^{(3)}}} \leqq \tau(X)$.

2° Legyen hát $\mathscr{U}^{(3)} \neq \emptyset$ és $\mathscr{B}$ egy $\tau(X)$ számosságú bázisa X-nek. Ekkor $\mathscr{U}^{(3)}$ minden egyes $((G_1, F_1), (G_2, F_2))$ eleméhez hozzárendelhetünk egy olyan $B \in \mathscr{B}$ halmazt, amelyre $B \subseteqq G_2 \setminus F_1$. Ha ez megtörtént egy rögzített $((G_1, F_1), (G_2, F_2))$-re, akkor nincs olyan

$$((G_1', F_1'), (G_2', F_2')) \in \mathscr{U}^{(3)} \setminus \{((G_1, F_1), (G_2, F_2))\}$$

ugrás, amelyre $B \subseteqq G_2' \setminus F_2'$; ui. különben (10. 2) alapján $(G_1', F_1') \neq (G_1, F_1)$, tehát vagy $(G_1', F_1') \prec (G_1, F_1)$ vagy $(G_1', F_1') \succ (G_1, F_1)$ lenne; az első változatban $F_1 \cap B = \emptyset$ és $B \subseteqq G_2'$ miatt $F_1 \subset G_2'$, tehát

$$(10.4.2) \qquad (G_1', F_1') \prec (G_1, F_1) \prec (G_2', F_2'),$$

a második változatban pedig $F_1' \cap B = \emptyset$ és $B \subseteqq G_2$ miatt $F_1' \subset G_2$, tehát

$$(10.4.3) \qquad (G_1, F_1) \prec (G_1', F_1') \prec (G_2, F_2)$$

adódnék, márpedig (10. 4. 2) és (10. 4. 3) egyaránt ellentmond (10. 4. 1)-nek.

Így tehát $\mathscr{U}^{(3)}$ egy-egyértelműen leképezhető $\mathscr{B}$ egy részhalmazára, s ezzel a bizonyítást befejeztük.

(10. 5) SEGÉDTÉTEL. *Egy X tér bármely $\mathscr{R}$ rendes iránya, rendezett halmazként, tartalmaz olyan $2\tau(X)$-nél nem nagyobb számosságú részhalmazt, amelynek $\mathscr{R}$ minden nem-üres nyílt rendezés-intervallumával van közös pontja.**

Bizonyítás. 1° Legyen X^* az X térnek egy sűrű, legfeljebb $\tau(X)$ számosságú részhalmaza és

$$\mathscr{R}^{(1)} = \{(G_x(\mathscr{R}), F_x(\mathscr{R})) : x \in X^*\}.$$

Ekkor nyilvánvalóan

$$\overline{\overline{\mathscr{R}^{(1)}}} \leqq \tau(X).$$

Legyen továbbá

$$\mathscr{R}^{(2)} = \{(G, F) \in \mathscr{R}: \ \text{van} \ (G', F') \in \mathscr{R}, \ \text{amelyre} \ G' \subset F' = G\}.$$

Ekkor

$$(10.5.1) \qquad \overline{\overline{\mathscr{R}^{(2)}}} \leqq \tau(X),$$

hiszen $(G', F') \prec (G, F)$ és ezek közvetlen szomszédok $\mathscr{R}$ rendezésében, tehát $\mathscr{R}^{(2)}$ minden egyes (G, F) eleme egyértelműen meghatározza $\mathscr{R}$-nek azt a (G', F') elemét, amelynek jóvoltából (G, F) $\mathscr{R}^{(2)}$-höz tartozik; a (10. 3)-beli $\mathscr{U}^{(1)}$ jelöléssel továbbá

$$((G', F'), (G, F)) \in \mathscr{U}^{(1)} \qquad ((G, F) \in \mathscr{R}^{(2)}),$$

* Egy R rendezett halmaz olyan részhalmazát, amely minden *nem-üres* nyílt rendezés-intervallumot metsz, a megfelelő topologikus fogalom mintájára R-ben sűrűnek lehetne nevezni. A rendezett halmazok elméletében azonban sűrűnek az olyan részhalmazt nevezik, amely *minden* nyílt rendezésintervallumot metsz. Ilyen értelemben sűrű részhalmaz pedig akkor és csak akkor létezik, ha R maga sűrű, vagyis nincsenek ugrásai.

tehát $\mathscr{R}^{(2)}$ egy-egyértelműen leképezhető $\mathscr{U}^{(1)}$ egy részhalmazára, s ebből (10. 3) szerint (10. 5. 1) következik.

Legyen végül

$$\mathscr{R}^* = \mathscr{R}^{(1)} \cup \mathscr{R}^{(2)};$$

ekkor tehát

$$\overline{\overline{\mathscr{R}^*}} \leqq 2\tau(X),$$

s most már elegendő azt megmutatni, hogy $\mathscr{R}^*$ a tételben kívánt tulajdonsággal bír.

2° Tekintsük hát $\mathscr{R}$-nek bármely két olyan (G_1, F_1), (G_2, F_2) elemét, amelyekre $(G_1, F_1) \prec (G_2, F_2)$ és

$$\mathscr{I} = \{(G, F) \in \mathscr{R} : (G_1, F_1) \prec (G, F) \prec (G_2, F_2)\} \neq \emptyset.$$

Ha mármost $G_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$, akkor bármely $x \in G_2 \setminus F_1$ pontra $F_1 \subseteqq G_x(\mathscr{R})$ és $F_x(\mathscr{R}) \subseteqq G_2$ miatt

$$(G_1, F_1) \prec (G_x(\mathscr{R}), F_x(\mathscr{R})) \prec (G_2, F_2),$$

tehát $X^* \cap (GF_2 \setminus_1) \neq \emptyset$ következtében

$$\mathscr{R}^{(1)} \cap \mathscr{I} \neq \emptyset.$$

Ha viszont $G_2 \setminus F_1 = \emptyset$, akkor $\mathscr{I}$ szükségképpen egyetlen (G, F) elemet tartalmaz, amelyre $G_1 \subset F_1 = G$, tehát $(G, F) \in \mathscr{R}^{(2)}$ s így

$$\mathscr{R}^{(2)} \cap \mathscr{I} \neq \emptyset.$$

Végül is

$$\mathscr{R}^* \cap \mathscr{I} \neq \emptyset$$

adódik s ezzel befejeztük a bizonyítást.

(10. 6) MEGJEGYZÉSEK. 1° A bizonyításnak $\mathscr{U}^{(1)}$-re alapozott részét $\mathscr{U}^{(2)}$-re, sőt $\mathscr{U}^{(1)} \cap \mathscr{U}^{(2)}$-re is alapozhatjuk, vagyis $\mathscr{R}^{(2)}$ helyett annak

$$\mathscr{R}^{(2)\prime} = \{(G, F) \in \mathscr{R} \colon \text{ van olyan } (G', F'), (G'', F'') \in \mathscr{R}, \text{ hogy } G' \subset F' = G = F = G'' \subset F''\}$$

része is megfelel a célnak.

2° Egy X tér bármely $\mathfrak{R}$ rendes IS-ját többnyire helyettesíthetjük azzal az $\mathfrak{R}'$ rendszerrel, amely $\mathfrak{R}$-ből úgy származik, hogy minden $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ irányt az $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \setminus \mathscr{R}^{(2)\prime}$ rendszerrel váltunk fel; ui. $\mathfrak{R}'$ is rendes IS-ja X-nek és $\overline{\overline{\mathfrak{R}'}} \leqq \overline{\overline{\mathfrak{R}}}$. Az $\mathscr{R}'$ irányokra vonatkozóan pedig (10. 5) bizonyítása megfelelően rövidül, és az állítás is élesíthető, ti. $2\tau(X)$ helyett $\tau(X)$-et sőt $\sigma(X)$-et (X szeparabilitási fokát) írhatjuk. E helyen azonban nem követjük tovább ezt a gondolatot; fő célunk szempontjából irreleváns.

Ezen előkészületek után most már könnyen elvégezhető

A HARMADIK BEÁGYAZÁSI TÉTEL BIZONYÍTÁSA. 1° A második beágyazási tétel szerint az X tér — amely T_0-tér és (7. 5) alapján rendes is — topologikusan beágyazható bármely rendes IS-ja rendezéstopológiával ellátott irányainak topologikus szorzatába. Ismeretes továbbá, hogy ha egy topologikus szorzat minden tényezőjét egy olyan térrel helyettesítjük, amely őt altérként tartalmazza, akkor az eredeti szorzat minden altere az új szorzatnak is altere lesz. Ezért elegendő azt belátni, hogy *van* X-nek olyan rendes *minimális* IS-ja, amelynek minden iránya topologikusan beágyazható a számegyenesbe.

2° Mármost ez valóban így van, sőt X-nek *minden* rendes IS-jára is igaz. $\tau(X) \leqq \aleph_0$ miatt ui. X minden rendes $\mathscr{R}$ irányának egyrészt (10. 4) szerint legfeljebb megszámlálhatóan sok ugrása van, másrészt (10. 5) szerint van megszámlálható és rendezési értelemben $\mathscr{R}$-ben sűrű részhalmaza; (6. 5), (b) alapján tehát X minden rendes iránya rendezett halmazként hasonló a valós számok természetes rendezésű halmazának egy részhalmazához, s ezért rendezéstopologikus térként (6. 5), (c) szerint homeomorf a számegyenes valamely alterével. Ezzel bebizonyítottuk a tételt.

(10. 7) A most bizonyított 3. beágyazási tételből (0. 4) és (0. 5) felhasználásával következik a (4. 5) tétel, hiszen ha X véges dimenziójú szeparábilis metrikus tér, akkor

$$\operatorname{ind} X \leqq \operatorname{ind} (E_{\operatorname{Dim} X}) = \operatorname{Dim} X,$$

ebből pedig (mint az 5. §-ban) következik az (5. 1) tétel.

Az alapvető (5. 1) tétel egyébként a MENGER—URISZON-elmélettől függetlenül, BROUWER és LEBESGUE (0. 10) invariancia-tételének alkalmazásával is levezethető a 3. beágyazási tételből; ha ui. valamely $n > 1$ természetes számra $\operatorname{Dim} E_n < n$ volna, akkor (10. 1) szerint és (0. 10)-zel ellentmondásban E_n homeorf volna E_{n-1} egy alterével.

A (10. 1) tétel azonban lényegesen többet mond (5. 1)-nél, ti. (egy triviális bővítéssel) így fogalmazható:

(10. 8) TÉTEL. *Egy nem-üres szeparábilis metrikus tér akkor és csak akkor homeomorf az E_n euklideszi tér egy alterével (rögzített n természetes számra), ha iránydimenziója legfeljebb n.*

Ezzel az eredménnyel pedig elvégeztük a II. fejezetnek s egyben a dolgozat dimenzióelméleti részének fő feladatát.

(Beérkezett: 1966. november 15.)

SZABÁLYOS KÖRRENDSZEREK

ÍRTA: DOMINYÁK IMRE

Bevezetés

Dolgozatunkban az euklideszi sík körfedései és körelhelyezések[1] szerepelnek. Ezeket fogjuk vizsgálni, osztályozni szimmetria viszonyaik alapján. Pontosabban, bevezetjük a szabályosság fogalmát a körrendszerekre vonatkozólag — hasonlóan az alakzatok szabályosságához —, s úgy osztjuk a körrendszereket egy-egy csoportba, hogy azonos csoportbelieknél megegyezzenek a szabályosságot előidéző szimmetria viszonyok rendszerei.

U. SINOGOWITZ [1] körelhelyezésekre megoldott egy ilyen jellegű feladatot. Dolgozatunk a körfedéseket tárgyalja SINOGOWITZ eljárása alapján, s az osztályozási szempontok is ugyanazok maradnak (a fellépő különbségek megegyeznek a két körrendszer típus megfelelő fogalmainak különbségeivel). A tárgyalás teljessége és a módszerek megegyezése miatt megmutatjuk, hogy hogyan nyerhetők SINOGOWITZ azon eredményei, amelyeket felhasználunk. De ezeknél a tárgyalásoknál figyelembe vesszük DELANUAY [2] módszerét és eredményeit is.

A dolgozat végén kiválogatjuk az eredményül kapott osztályokból a stabilisokat.

E helyütt mondok köszönetet FEJES TÓTH LÁSZLÓ professzor úrnak, azért, hogy e témakörre a figyelmemet felhívta és értékes megjegyzéseivel segítségemre volt.

A szabályos körrendszer és Dirichlet-cella mozaik fogalma

Körrendszeren a továbbiakban vagy körfedést, vagy körelhelyezést értünk. Egy *körrendszert szabályosnak* nevezünk, ha tetszőleges K_1 körét átvihetjük egy tetszőleges K_2 körébe valamilyen **E** egybevágósági transzformációval[2] úgy, hogy **E** a körrendszert önmagába viszi át. Az olyan egybevágósági transzformációt, amely egy alakzatot önmagába visz át, az alakzat *szimmetria operációjának* nevezzük. Így a szabályos körrendszernél bármely két K_1 és K_2 köréhez adható a körrendszernek egy olyan szimmetria operációja, amely K_1-et K_2-be viszi át. (A szabályos, ill. nem szabályos elnevezés helyett találóbb lenne a szimmetrikus, ill. aszimmetrikus jelző, de nem vezetjük be, hanem a már megszokott elnevezést fogjuk használni.)

Körrendszer szabályossága helyett bármely tartományrendszer szabályosságát is megadhatjuk teljesen hasonló módon. Pl.: *Dirichlet-cellarendszert szabályosnak*

[1] Körelhelyezésnek nevezünk olyan körrendszert, amelyben nincsenek közös belső ponttal rendelkező körök. A körfedésnél viszont a sík minden pontja a körrendszer valamelyik körének vagy a határán, vagy a belsejében van.

[2] A síkbeli egybevágósági transzformáció vagy mozgás vagy tengelyes tükrözés, vagy ezek kombinációja. A mozgás pontkörüli forgatásból és eltolásból állhat. Lásd [4] 3—5. oldal.

nevezünk, ha bármely két D_1 és D_2 cellájához megadható a cellarendszernek egy szimmetria operációja, amely D_1-et D_2-be viszi át.

Nyilvánvaló, hogy a szabályos körrendszer *Dirichlet*-cellarendszere is szabályos. Ezért a szabályos körrendszerek kutatása kapcsolatban áll a szabályos cellarendszerek kutatásával. Ezen a kapcsolaton keresztül fogjuk felkutatni a szabályos körrendszerek típusait.

A szabályos cellarendszerek Laves- és Delanuay-osztályai

A *Dirichlet*-cellarendszerben cellaoldalhoz cellaoldal csatlakozik. Csak ilyen cellarendszerekkel fogunk foglalkozni.

A szabályos cellarendszerek egy általánosabb — ún. *Laves*-típusú cellarendszerek speciális fajtái. F. LAVES [3] a cellarendszereket topologikus transzformációk alapján osztályozta. Az általa osztályozott cellarendszert szabályosaknak tekinthetjük abban az értelemben, hogy az eddigi szabályossági definíciónkban az egybevágósági transzformációt topologikus leképezéssel helyettesítjük. Azaz topologikusan szabályosak azok a cellarendszerek, amelyekben két tetszőleges C_1 és C_2 cellához megadható egy **T** topologikus leképezés, amely a cellarendszert önmagába, C_1-et pedig C_2-be viszi át.

Egy LAVES által vizsgált cellarendszer eleget tesz még a következő feltételeknek is: a) bármelyik olyan cellasokaságnál, amelynek határa egy önmagát nem metsző zárt görbe — s az ilyent egyszeresen összefüggőnek fogjuk nevezni — az *Euler*-karakterisztika (azaz a csúcsok és cellák számának összegéből levonva az élek száma) egyenlő 1-gyel; b) teljesíti az ún. integrálhatósági alapfeltételt, azaz kiválasztható belőle olyan $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ egyszeresen összefüggő cellasokaságok sorozata, amelynek tagjainál $n \to \infty$ esetén a határcellák — vagyis amelyeknek van csúcsa a tagot határoló zárt görbén — száma a tagban levő többi cellák számához viszonyítva 0-hoz tart.

A fenti tulajdonságú cellarendszereket 11 ún. *Laves*-osztályba sorolhatjuk, ha két olyan cellarendszer egy osztályba kerül, amelyek topologikusan izomorfak (vagyis megadható egy olyan topologikus leképezés, amely az egyik cellarendszer csúcspontjait és oldalait kölcsönösen és egyértelműen hozzárendeli a másik csúcspontjaihoz és oldalaihoz). Ez a következőképpen látható be:

Egy *Laves*-osztályba tartozó cellarendszernél a topologikus szabályosság miatt minden cellának $k \geqq 3$ csúcsa van, amelyekből sorra (irányítástól eltekintve) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ él fut ki. Nevezzük az $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ számokat a megfelelő csúcsok fokszámának. Ha tekintünk a cellarendszerben egy olyan $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ cellasokaság-sorozatot, amilyen az integrálhatósági alapfeltételből következőleg létezik, és L_n, E_n, C_n jelöli a H_n-ben levő cellák, élek és csúcsok számát, akkor

$$L_n - E_n + C_n = 1,$$

másrészt

$$L_n - L_n \frac{k}{2} + L_n \left(\frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_k} \right) = \beta.$$

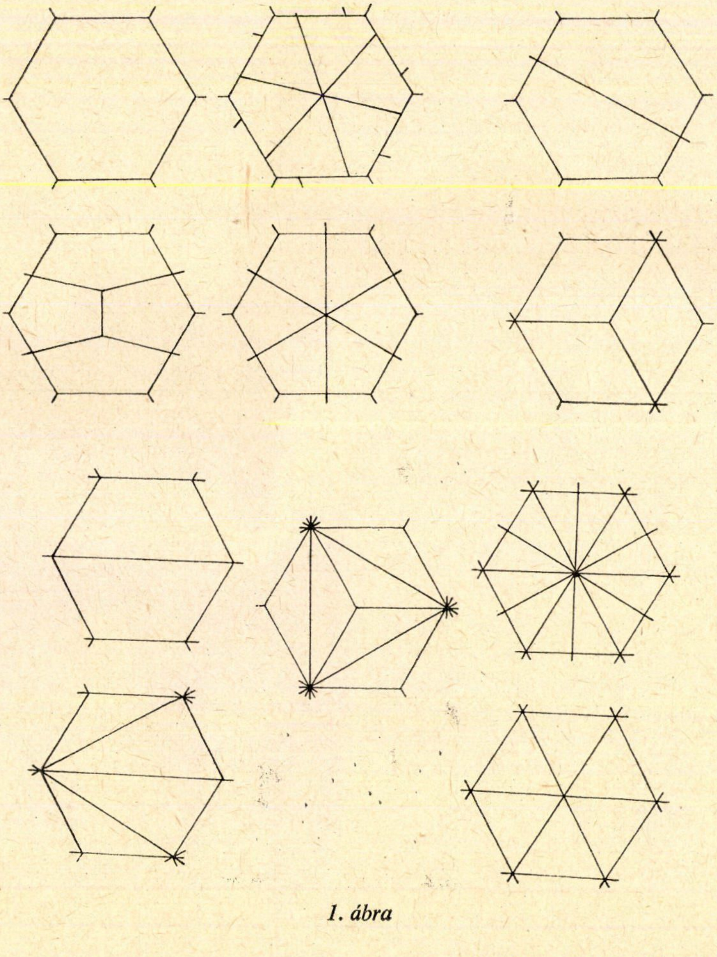
β értékének 1-től, az *Euler*-karakterisztikától való eltérése a H_n határán levő éleknél és csúcsoknál fellépő eltérésekből adódik. Az integrálhatósági alapfeltételből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta}{L_n} = 0.$$

Ezért a *Laves*-cellarendszereknél

$$1 - \frac{k}{2} + \frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_k} = 0.$$

Az ezt kielégítő $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ($k \geqq 3$, egész) számok meghatározhatók. Az $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$-ra kapott, s csak a sorrendben különböző megoldásokat egy megoldásnak véve 16 megoldás adódik. Ezek közül 6 nem határozhat meg cellarendszert. Erről az egy csúcs körüli elhelyezkedés vizsgálatával győződhetünk meg. A megmaradt 10 megoldás egyike kétféle módon is bekövetkezik (ezeknél az $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ értékek két különböző, nemciklikus felcserélésével is előállítható megfelelő mozaik), a többiek csak egy-



1. ábra

féleképpen valósulhatnak meg. A 11 osztály egy-egy reprezentánsát mutatja az 1. ábra. Az egyes osztályokban egy cella csúcsainak fokszáma: (3, 3, 3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 3, 4, 4), (3, 3, 4, 3, 4), (3, 4, 6, 4), (3, 6, 3, 6), (4, 4, 4, 4), (3, 12, 12), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (6, 6, 6).

A *Laves-osztályokban* vannak a szabályos cellarendszerek osztályai. Hogyan különböztethetjük meg egyik szabályos cellarendszert a másiktól? SINOGOWITZ és DELANUAY a cellarendszereket a szimmetria csoportjuk alapján osztályozta. Egy alakzat szimmetria csoportján az alakzat szimmetria operációiból álló csoportot értjük. SINOGOWITZ elnevezését használva egy szabályos cellarendszer *külső csoportján* a cellarendszer szimmetria csoportját fogjuk érteni. Ez mindig a 17 síkszimmetria csoport[3] valamelyike. Ha úgy osztályozzuk a cellarendszereket, hogy azonos osztályba tartoznak az azonos *Laves*-osztályú és azonos külső csoportú cellarendszerek, a *Delanuay-osztályok*hoz jutunk. 46 ilyen osztály van. Ezeket a következő módon kaphatjuk meg: megvizsgáljuk az egyes *Laves*-osztályokat, hányféle külső csoporttal valósulhatnak meg. Ennek az elvégzéséhez bevezetjük a társtranszformációkat. Egy cella *társtranszformációin* egy adott cellarendszerben azokat a szimmetria operációkat értjük, amelyek a cellát vele a közös oldalú cellába viszik át. A társtranszformáció megadásához megismerkedünk egy szimbólummal. Ennek segítségével összeszámlálhatjuk az összes bekövetkező társtranszformáció rendszereket, s ezek már meghatározzák az összes lehetséges külső csoportot is.

Jelöljük egy *Laves*-féle cellarendszer egy C cellájának oldalait sorra a, b, c, d, e, f betűkkel. (Legfeljebb hatszögű egy cella.) Az egyik társtranszformáció C-t átviszi — mondjuk — a C-vel a mentén szomszédos C'-be. C' oldalai ugyancsak a, b, c, d, e, f, azonban körbenjárási iránya lehet ellentétes is C körüljárási irányával. Ha a C-t C'-be átvivő társtranszformációnk olyan, hogy C'-nek pl. a c oldala csatlakozik C a oldalához, akkor a transzformációt ac, ill. $a\bar{c}$ jelöli C és C' egyező, ill. ellenkező körüljárási iránya esetén. Ha minden cellaoldalnál megadjuk a társtranszformációt ilyen képlettel, és az összetartozó betűpárok közé beírjuk, hogy hányad fokú csúcsból indulnak ki az eredeti cellának a betűpárban álló oldalai, megkapjuk a társtranszformációk szimbólumát, amelyet *társképletnek* fogunk nevezni. Pl. az $(aa_3\ b\bar{c}_{12}\ c\bar{b}_{12})$ szimbólum társképlet lehet a (3, 12, 12) *Laves*-osztályban, de előfordulhat, hogy ebben az osztályban nincs olyan külsőcsoportos cellarendszer, amelynél ezek jelölnék a társtranszformációkat. A társképletek mindegyikére igaz, hogy ha egy képletben szerepel $a\bar{b}$, akkor $b\bar{a}$-nak is kell benne szerepelnie, és ha cd előfordul, akkor dc is. Hogy egy társképletszerű szimbólum társképlet-e valóban az illető cellarendszerben, csak további vizsgálattal dönthetjük el. A módszer szemléltetésére bemutatjuk a (3, 12, 12) *Laves*-osztályban levő szabályos cellarendszerek *Delanuay*-osztályainak meghatározását.

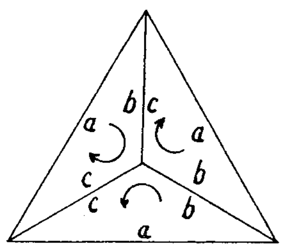
A (3, 12, 12) *Laves*-osztályban a társképletek a következők közül kerülnek ki:

1.	$(aa_{12}bb_3cc_{12})$	5.	$(aa_{12}b\bar{b}_3c\bar{c}_{12})$
2.	$(aa_{12}bb_3c\bar{c}_{12})$	6.	$(a\bar{a}_{12}bb_3c\bar{c}_{12})$
3.	$(aa_{12}b\bar{b}_3cc_{12})$	7.	$(a\bar{a}_{12}b\bar{b}_3cc_{12})$
4.	$(a\bar{a}_{12}bb_3cc_{12})$	8.	$(a\bar{a}_{12}b\bar{b}_3c\bar{c}_{12})$

[3] Lásd [4] 8—40. oldal.

9. $(aa_{12}bc_3cb_{12})$	17. $(ac_{12}bb_3ca_{12})$
10. $(aa_{12}bc_3c\bar{b}_{12})$	$\vdots$
11. $(aa_{12}b\bar{c}_3cb_{12})$	24. $(a\bar{c}_{12}b\bar{b}_3c\bar{a}_{12})$
12. $(a\bar{a}_{12}bc_3cb_{12})$	25. $(ab_{12}ba_3cc_{12})$
13. $(aa_{12}b\bar{c}_3c\bar{b}_{12})$	$\vdots$
14. $(a\bar{a}_{12}bc_3c\bar{b}_{12})$	32. $(a\bar{b}_{12}b\bar{a}_3c\bar{c}_{12})$
15. $(a\bar{a}_{12}b\bar{c}_3cb_{12})$	33. $(ab_{12}bc_3ca_{12})$
16. $(a\bar{a}_{12}b\bar{c}_3c\bar{b}_{12})$	$\vdots$
	40. $(a\bar{b}_{12}b\bar{c}_3c\bar{a}_{12})$
	41. $(ac_{12}ba_3cb_{12})$
	$\vdots$
	48. $(a\bar{c}_{12}b\bar{a}_3c\bar{b}_{12})$

A társképletek megállapítása leegyszerűsödik, ha figyelembe vesszük, hogy a cella 120°-os, 30°-os, 30°-os szögű háromszög. Jelölje $\underline{a}$ a cella leghosszabb oldalát (vagyis az alapot). Ekkor nem lehetnek társképletek a 17—48 alattiak, hiszen ab, $a\bar{b}$, ac, $a\bar{c}$ valamelyike szerepel ezekben, ami hosszabb oldalnak rövidebbhez való csatlakozását jelentené. Jelölje o_i, o_j valamelyik két oldalt. Ha a szimbólumban (irányítást figyelmen kívül hagyva) o_io_j van, de o_jo_i nincs, nem lehet társképlet, mert a szomszédosság kölcsönössége nem állna fenn. A 3-as fokszámú csúcsban csak rövid oldalak találkozhatnak. Ezért bb, cc, $b\bar{c}$, $c\bar{b}$ nem lehet a társképletben. A fenti szempontok után megmarad a 8., 9. és 12. A 8. nem társképlet, mert a 2. ábrán láthatjuk egy pozitív (óramutató járásával ellentétes) irányítású cella két, a 8.-ból adódó szomszédját. A társképletből adódóan ezek irányítása negatív lenne, így az egyik b oldalára a másik c oldala kerülne, ami a társképletnek ellentmondana. A 9. és 12. valóban társképlet (s az általuk meghatározott osztályok reprezentánsa a 89. és 90. ábrán látható).



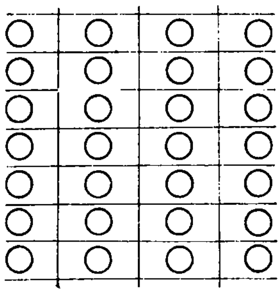
2. ábra

Hasonló eljárással mindegyik *Laves* osztályban megállapíthatók a *Delanuay*-osztályok.

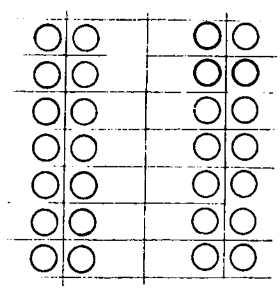
A szabályos körrendszerek felkutatásánál csak a 0-nál nagyobb sűrűségűeket[4] vizsgáljuk. Ezek *Dirichlet*-cellarendszerei (a továbbiakban D-cellarendszerei) a *Delanuay*-osztályokból kerülnek ki. Azonban azonos D-cellarendszerű körrendszerek között is vannak jelentősen különbözők. Pl. a 3. és 4. ábrán látható két körrendszernek azonos a D-cellarendszere.

Hogy hasonló jellegű különbözőségeket figyelembe vehessünk a szabályos körrendszernél, vizsgálni fogjuk a körközéppont elhelyezkedési lehetőségét a D-cellán belül. Ehhez nyújt segítséget a szabályos D-cellarendszer belső csoportja. Egy szabályos cellarendszer *belső csoportján* a cellarendszer azon szimmetriaoperációinak halmazát értjük, amely a cellarendszer valamelyik celláját önmagába viszi át.

[4] Lásd [5] 48—49. oldal.



3. ábra



4. ábra

Vagy egyszerűbben: a szabályos cellarendszer belső csoportja a cellarendszer cellájának a szimmetria csoportja.

Egy szabályos cellarendszernél a *Laves*-osztálytól függően a következő belső csoportok[5] szerepelhetnek:

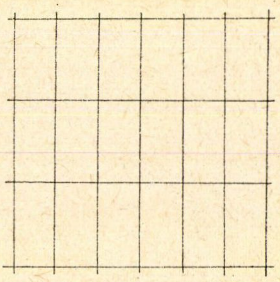
Laves-osztály	Lehetséges belső csoportok
I	$\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1(t)$, $\mathfrak{d}_1(d)$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{d}_3(t)$, $\mathfrak{d}_3(d)$, $\mathfrak{c}_6$, $\mathfrak{d}_6$
II	$\mathfrak{c}_1$
III	$\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$
IV	$\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$
V	$\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$
VI	$\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1(d')$, $\mathfrak{d}_1(d'')$, $\mathfrak{d}_2$
VII	$\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1(t)$, $\mathfrak{d}_1(d)$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2(t)$, $\mathfrak{d}_2(d)$, $\mathfrak{c}_4$, $\mathfrak{d}_4$
VIII	$\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$
IX	$\mathfrak{c}_1$
X	$\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$
XI	$\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{d}_3$

Tehát belső csoport az identikus leképezés (amely helyben hagyja az alakzatot), 180°-os, 120°-os, 90°-os, 60°-os forgatás, tengelyes tükrözés és ezek megfelelő kombinációja lehet. Egyes forgatásos tükrözésnél t, d, d', d'' jelzés is szerepel. Ezek jelölik (kétséges esetben), hogy a tükörtengely hol helyezkedik el a cellában: szemközti oldalak felezőmerőlegesén, átlón, rövidebbik átlón, hosszabbik átlón.

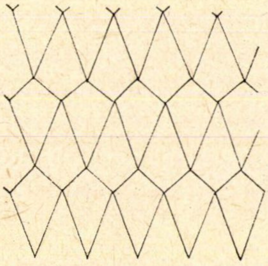
A *Delanuay*-osztályokat tovább oszthatjuk a „különböző" belső csoportok alapján. Milyen belső csoportokat tekintsünk különbözőknek? Két belső csoport izomorfiája (ugyanazokból az elemekből való felépülése) nem felel meg osztályozási szempontnak, ugyanis azonos külső és izomorf belső csoportos cellarendszereknél lehetnek különböző szimmetria viszonyok. Pl. az 5. és 6. ábrán látható cellarendszereknél vehetjük a külső csoportot $\mathfrak{W}_2^1$-nek, a belsőt $\mathfrak{d}_1$-nek, pedig a két cellarendszer különböző jellegű.

[5] Lásd [4] 14—15. oldal.

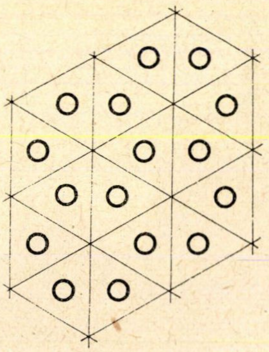
A belső csoportok osztályozása előtt megismerkedünk az azonos irányú szimmetria operációval. Tekintsük az R_1 és R_2 szabályos cellarendszert, amelyek azonos *Delanuay*-osztályba tartoznak. **T** egy topologikus transzformáció, amely R_1-et R_2-be viszi át. Legyen R_1-ben két cella A és B, s ezeknek két-két szomszédos oldaluk a_1, a_2, ill. b_1, b_2. Az R_2-ben levő A', B' cellák és a_1', a_2', b_1', b_2' cellaoldalak legyenek



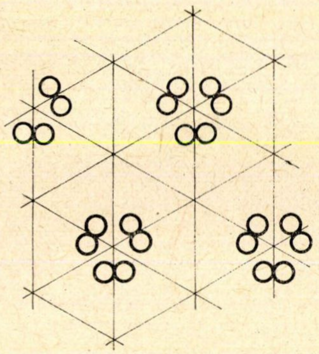
5. ábra



6. ábra



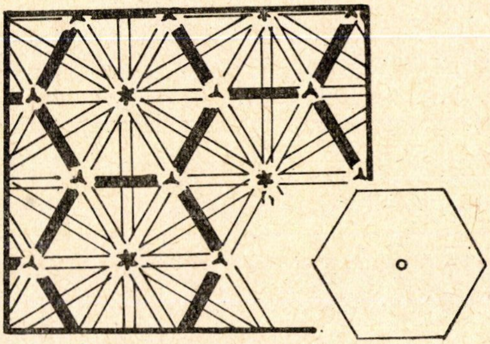
7. ábra



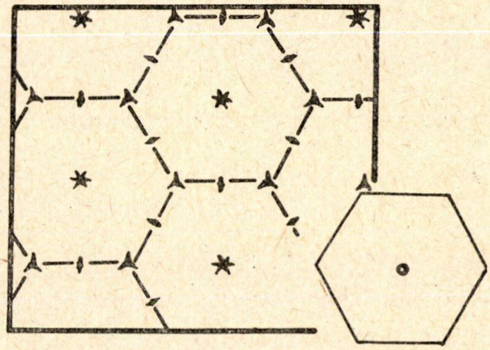
8. ábra

az A, B, a_1, a_2, b_1, b_2-nek **T**-nél adódó képei. Az **E** és **E**′ *szimmetria operációk azonos irányúak*, ha **E** A, a_1, a_2-t sorra B, b_1, b_2-be viszi át, **E**′-nél pedig A', a_1' képe B', b_1' esetén a_2' b_2'-be megy át.

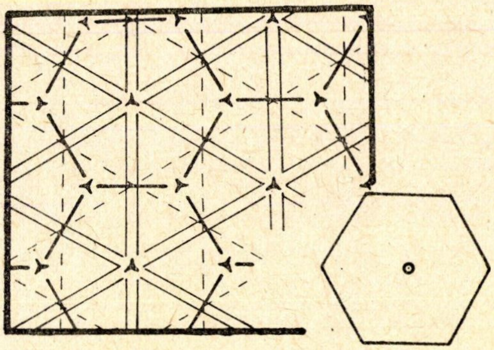
Két *belső csoport azonos felépítésű*, ha az egyik minden eleme kölcsönösen és egyértelműen hozzárendelhető a másik ugyanolyan, azonos irányú eleméhez. Ha minden *Delanuay*-osztályt tovább osztunk úgy, hogy különböző osztályokba soroljuk a nem azonos felépítésű belső csoporttal rendelkező cellarendszereket, a *Sinogowitz-osztályokhoz* jutunk. 93 *Sinogowitz*-osztály van. Ezeket a *Delanuay*-osztályok és a lehetséges belső csoportok kombinációinak összeállításával kaphatjuk meg. A 9—101. ábrákon az egyes osztályok egy-egy reprezentánsát mutatjuk be. A cellarendszerek mellett a külső csoport szimmetria elemeinek fajtáit és elhelyezkedéseit is feltüntettük. A 180°-os, 120°-os, 90°-os, ill. 60°-os forgáscentrumokat két-, három-, négy-, ill. hatágú csillagforma mutatja, a tükrözés tengelyét két vékony, egymáshoz közel levő párhuzamos (ha cellaoldalra esik vastagon húztuk ki) közép-



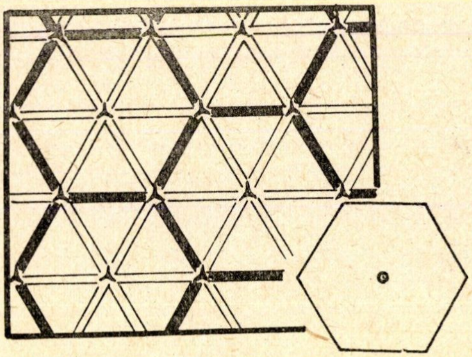
9. ábra



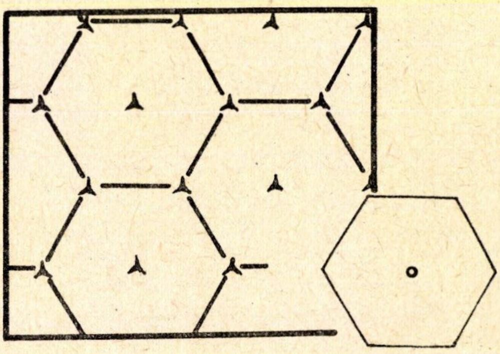
10. ábra



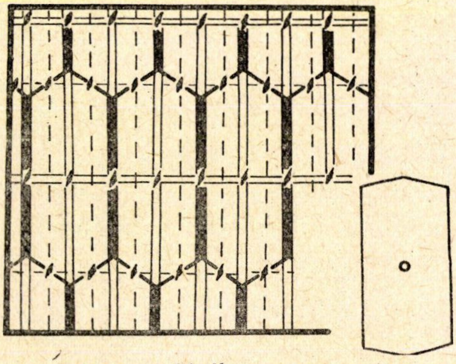
11. ábra



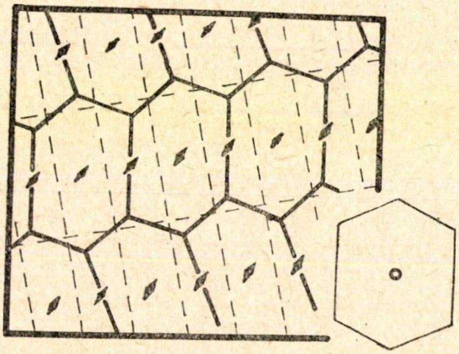
12. ábra



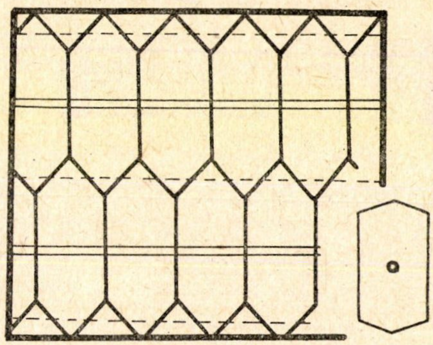
13. ábra



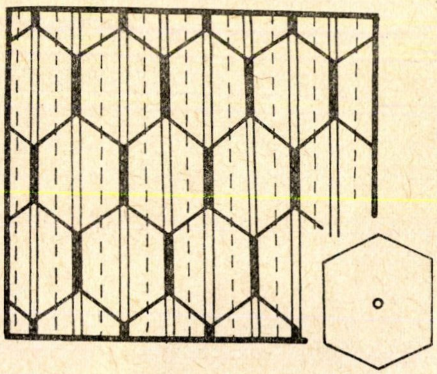
14. ábra



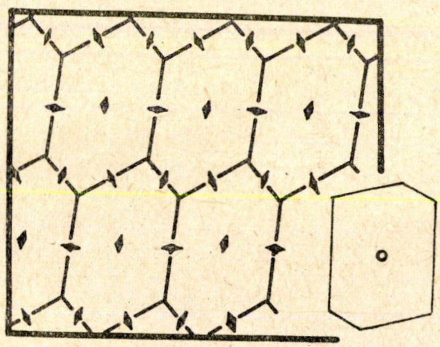
15. ábra



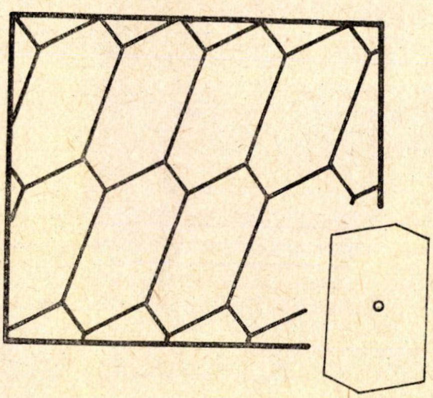
16. ábra



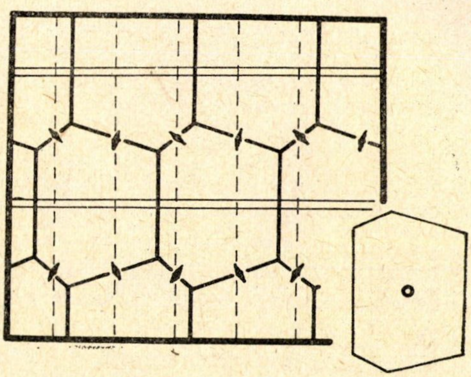
17. ábra



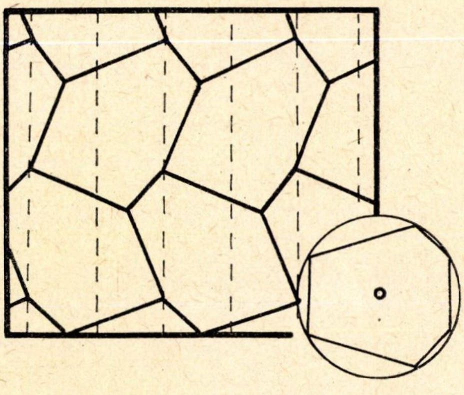
18. ábra



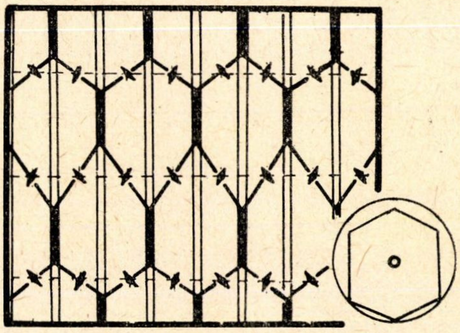
19. ábra



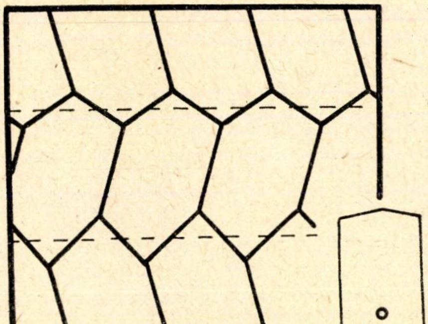
20. ábra



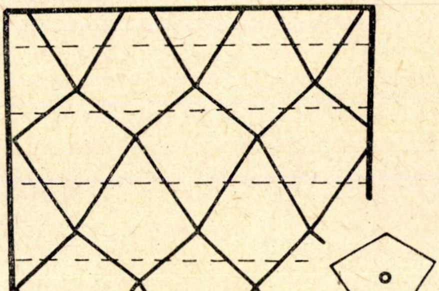
21. ábra



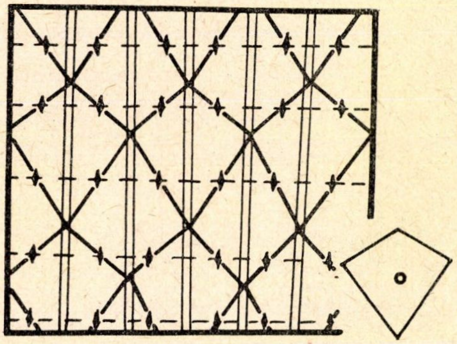
22. ábra



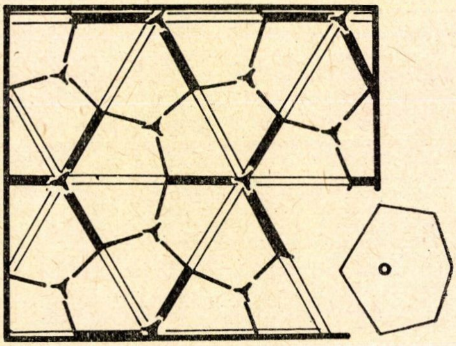
23. ábra



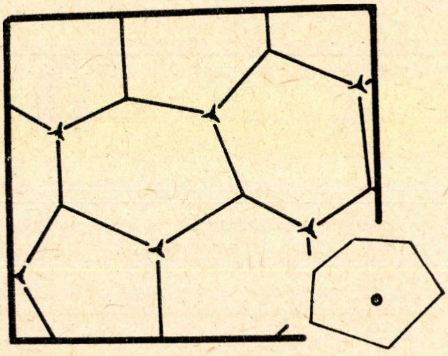
24. ábra



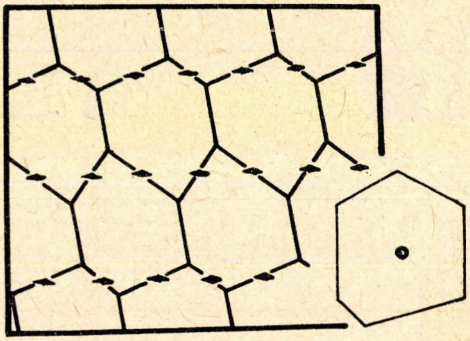
25. ábra



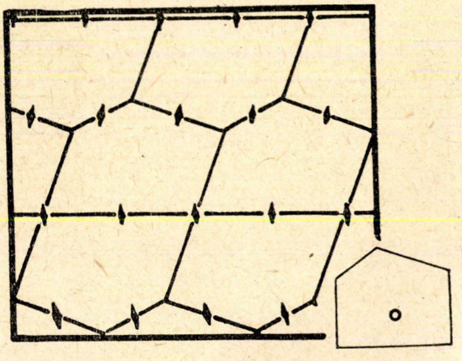
26. ábra



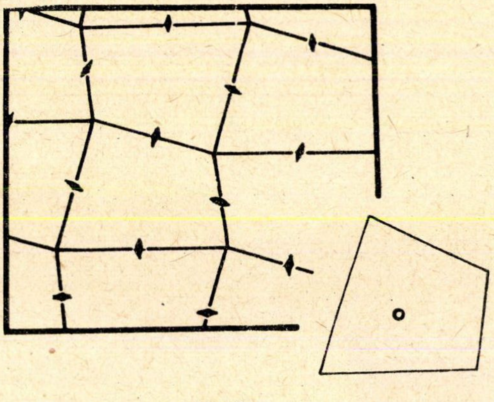
27. ábra



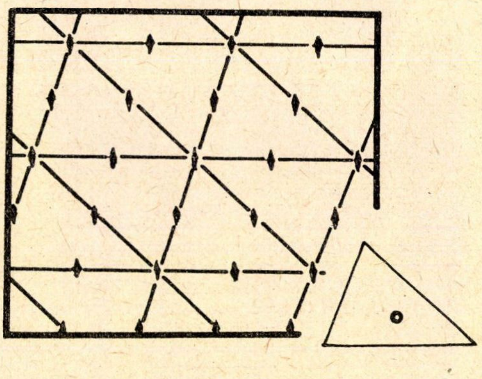
28. ábra



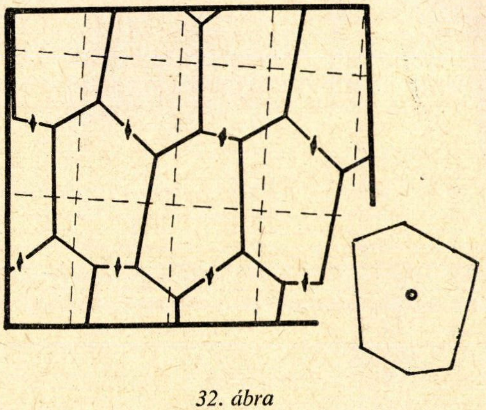
29. ábra



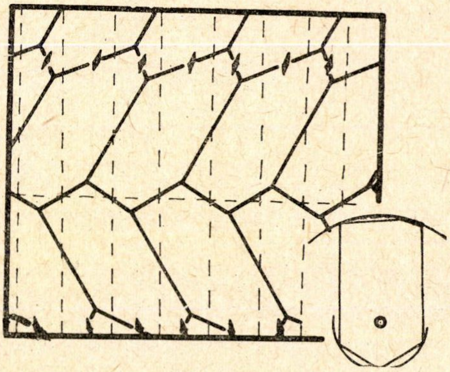
30. ábra



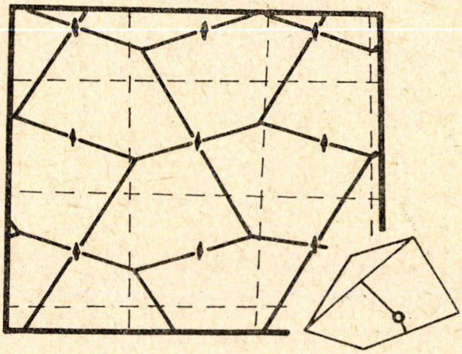
31. ábra



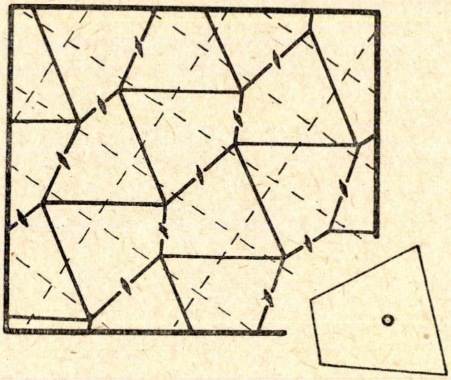
32. ábra



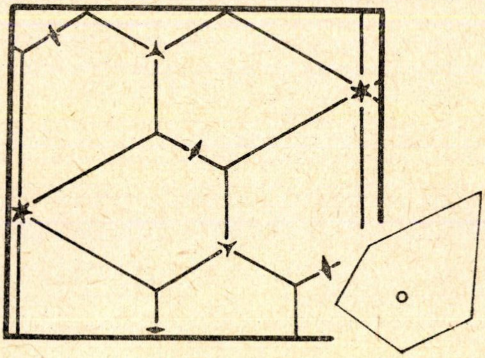
33. ábra



34. ábra

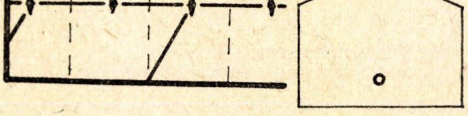


35. ábra

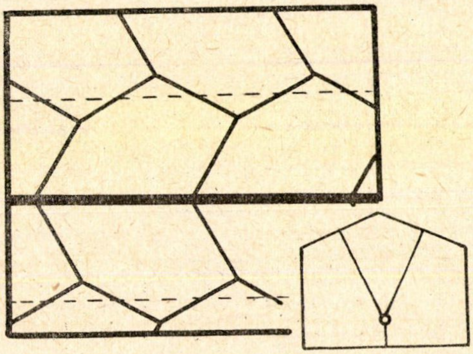


36. ábra

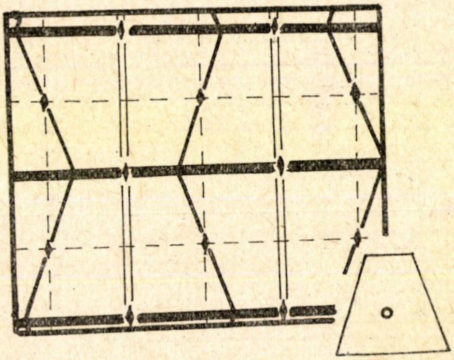
37. ábra



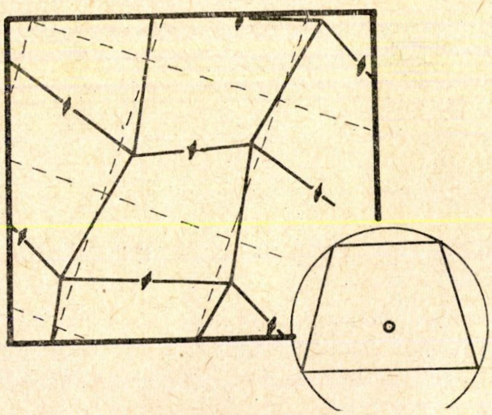
38. ábra



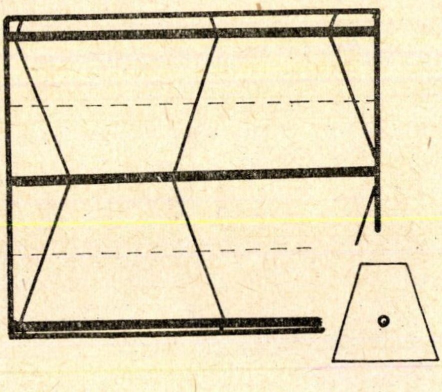
39. ábra



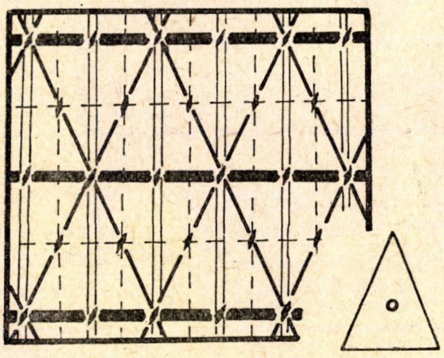
40. ábra



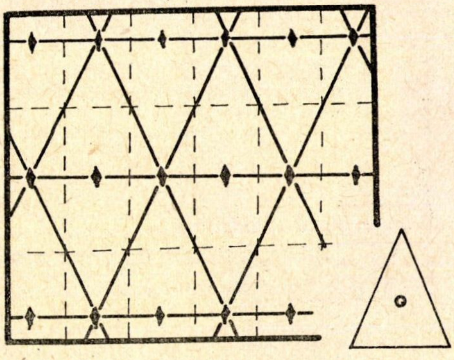
41. ábra



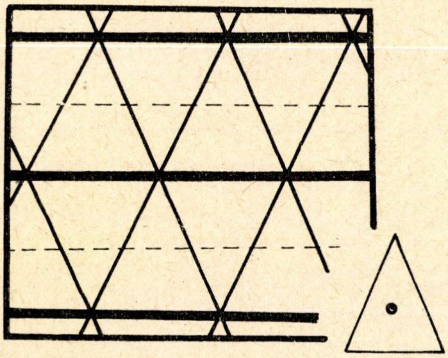
42. ábra



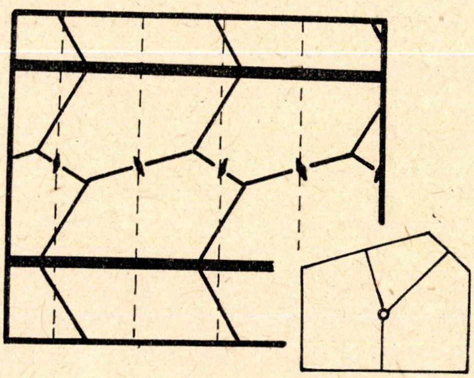
43. ábra



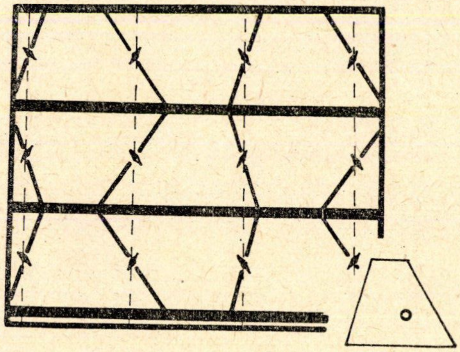
44. ábra



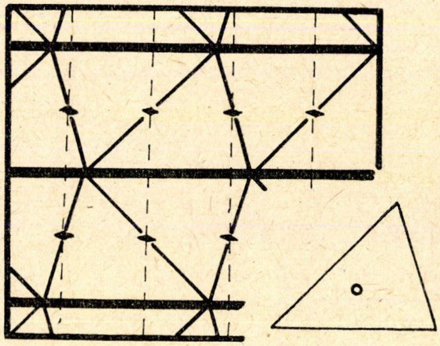
45. ábra



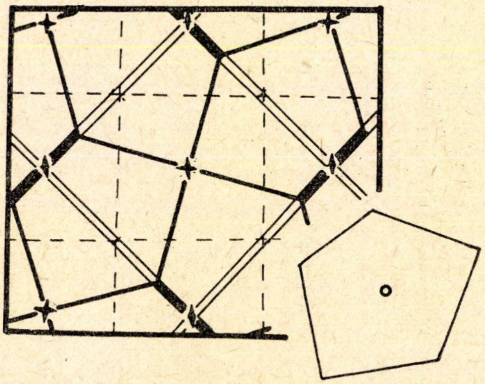
46. ábra



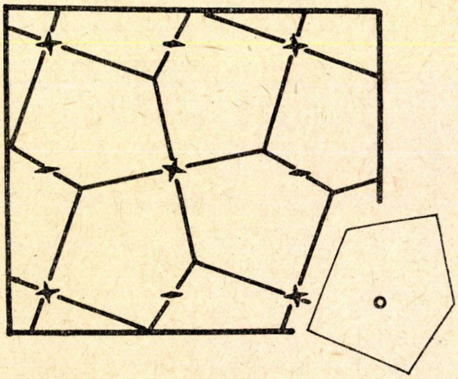
47. ábra



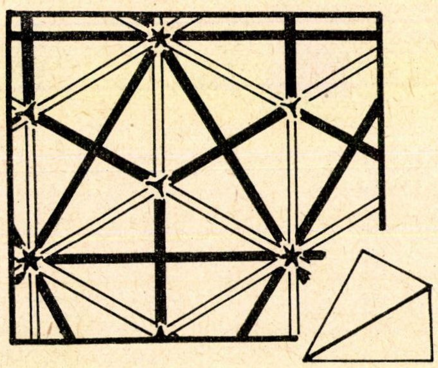
48. ábra



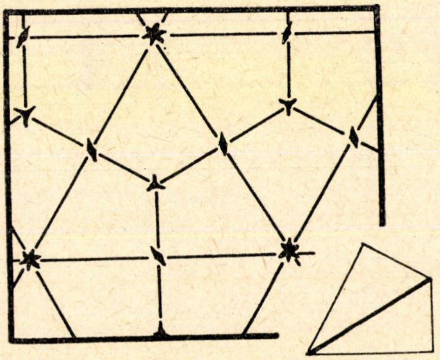
49. ábra



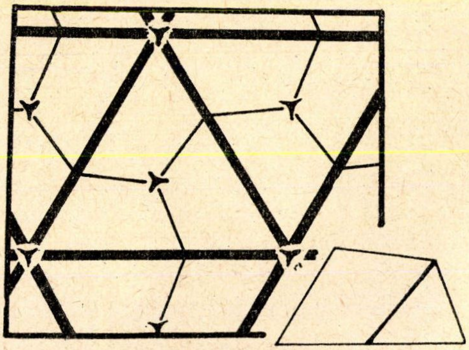
50. ábra



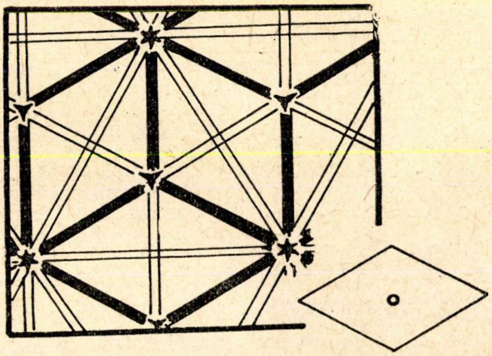
51. ábra



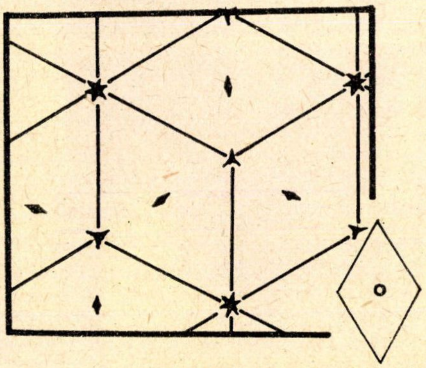
52. ábra



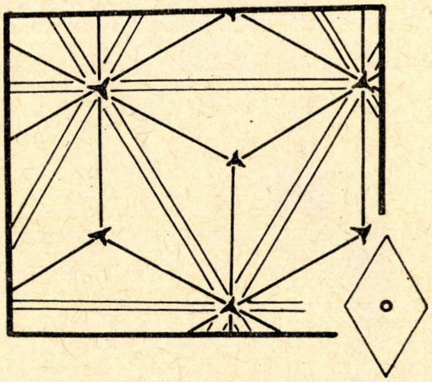
53. ábra



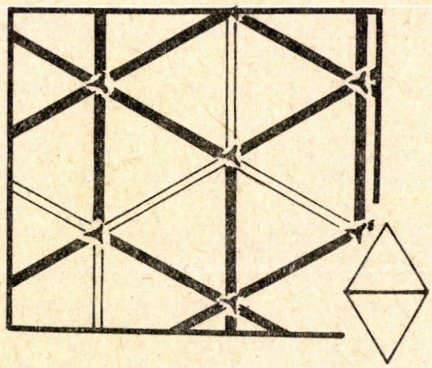
54. ábra



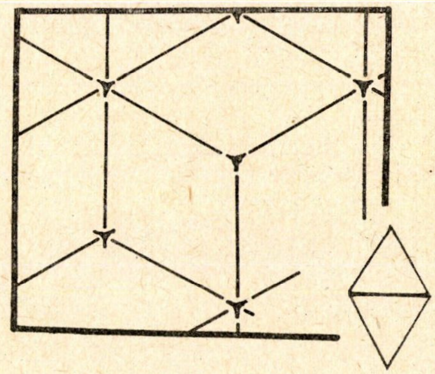
55. ábra



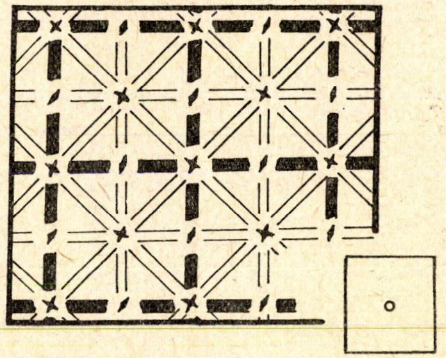
56. ábra



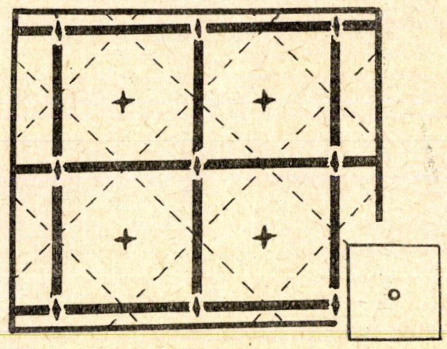
57. ábra



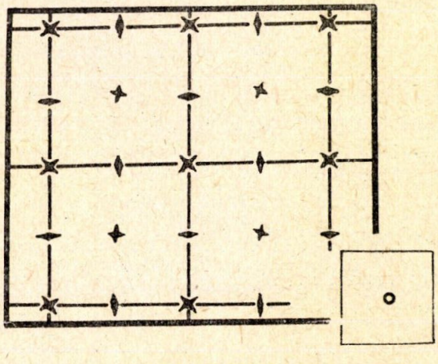
58. ábra



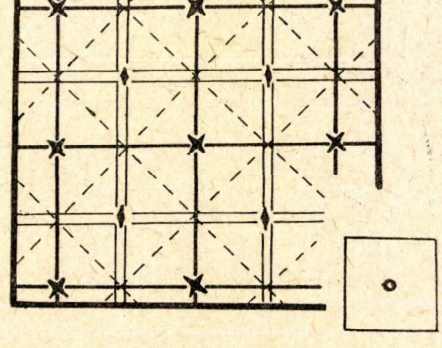
59. ábra



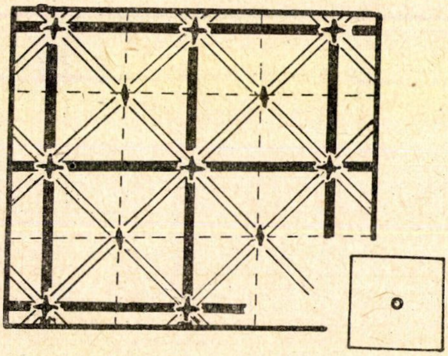
60. ábra



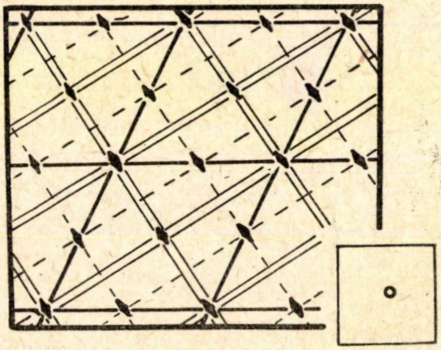
61. ábra



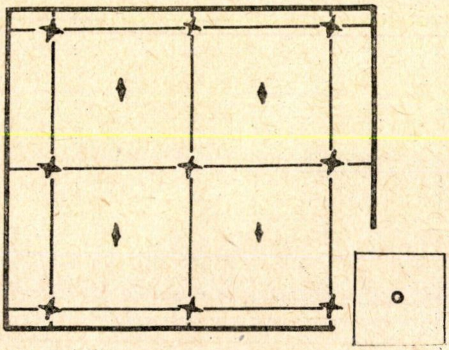
62. ábra



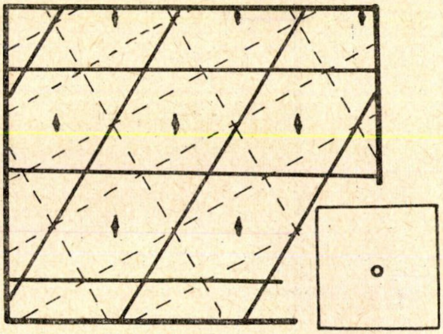
63. ábra



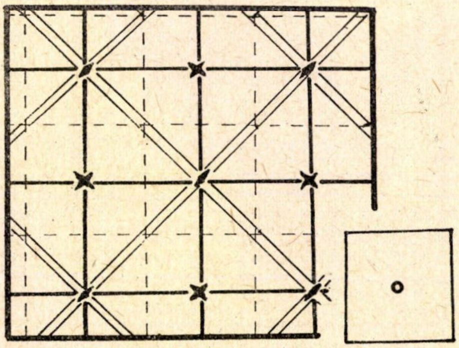
64. ábra



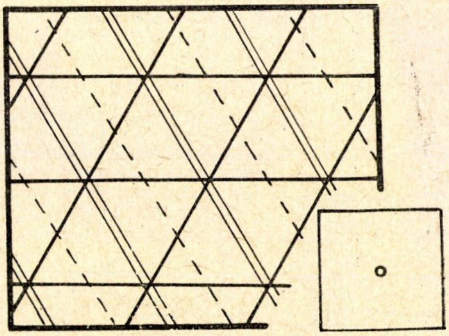
65. ábra



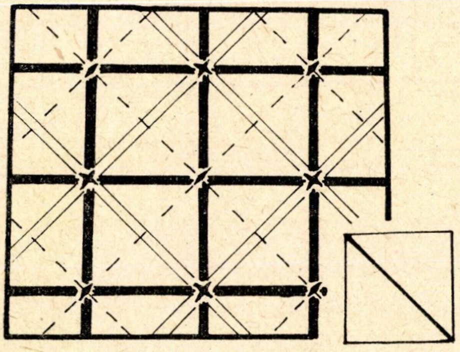
66. ábra



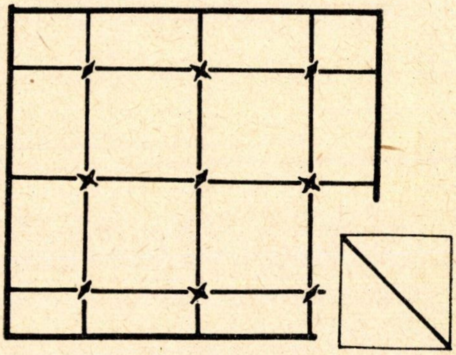
67. ábra



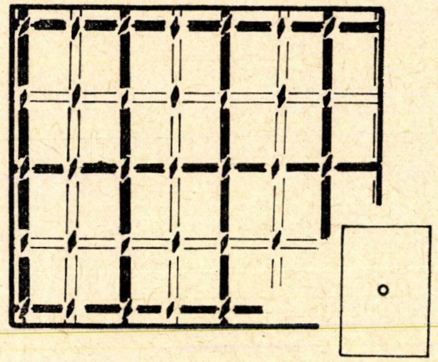
68. ábra



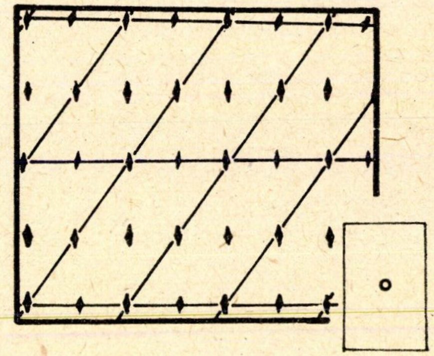
69. ábra



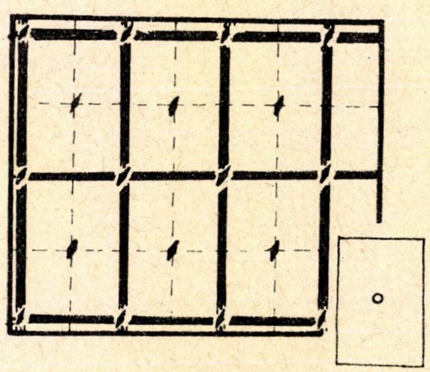
70. ábra



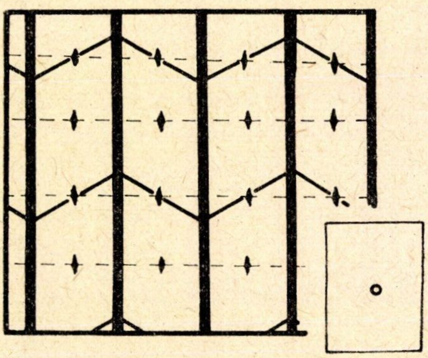
71. ábra



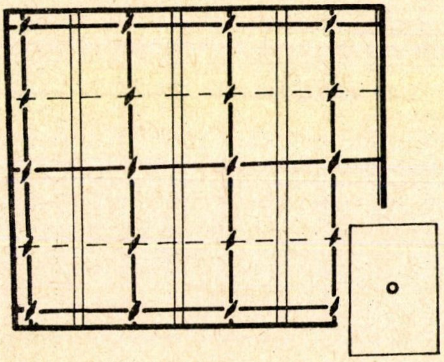
72. ábra



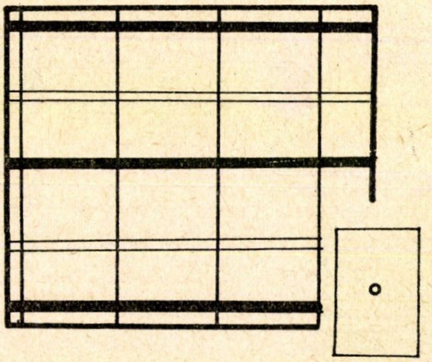
73. ábra



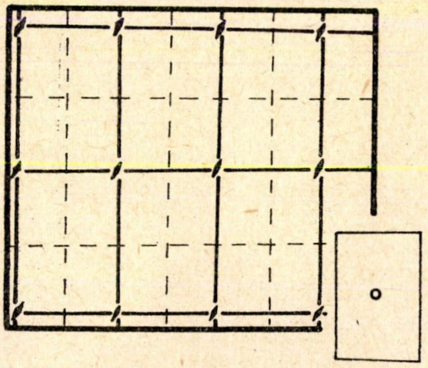
74. ábra



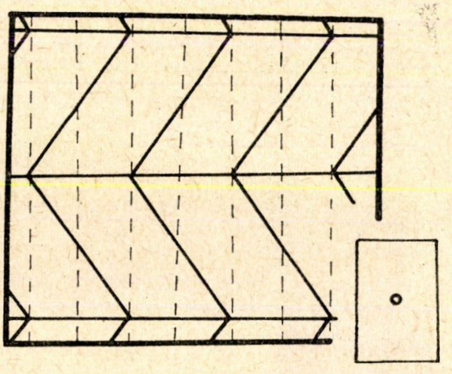
75. ábra



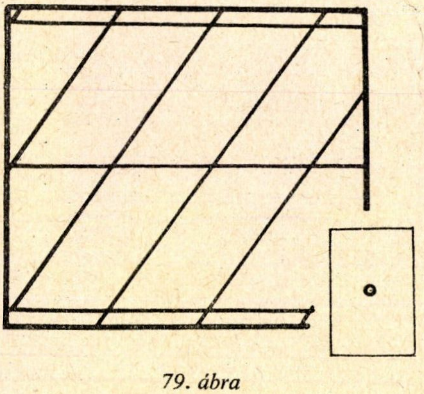
76. ábra



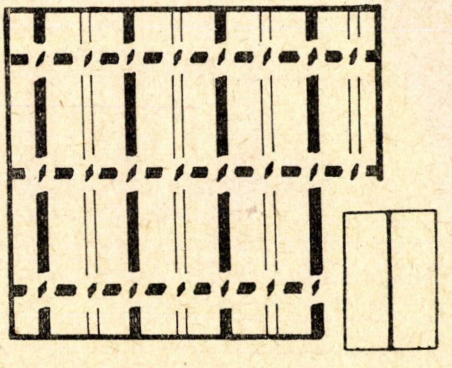
77. ábra



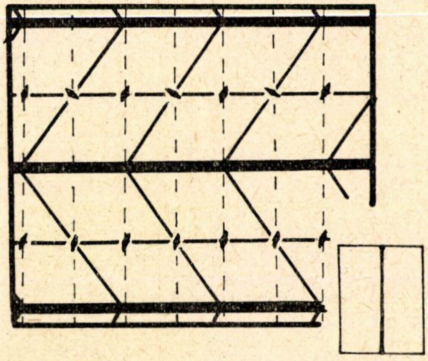
78. ábra



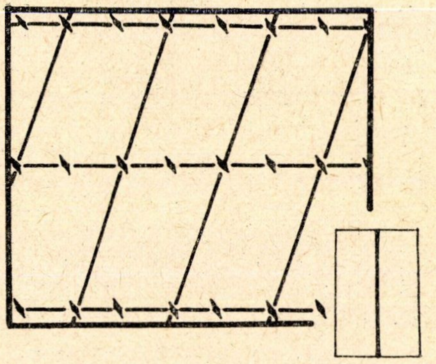
79. ábra



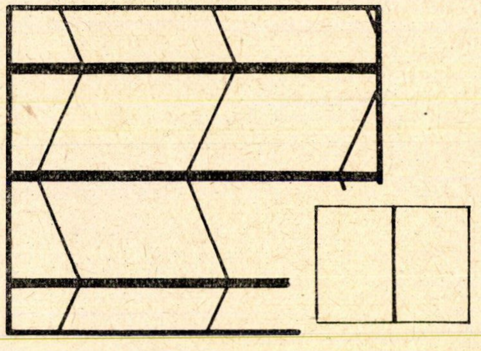
80. ábra



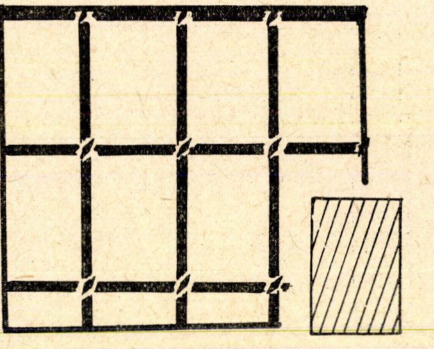
81. ábra



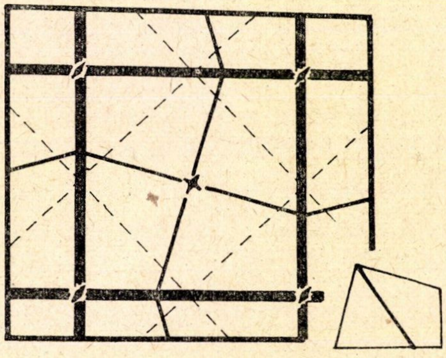
82. ábra



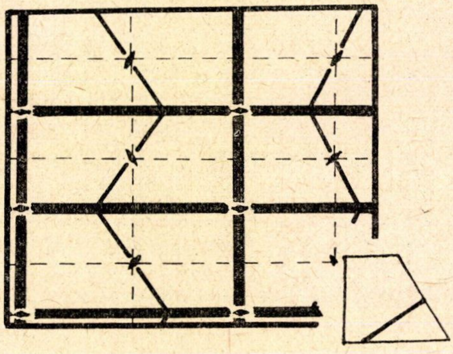
83. ábra



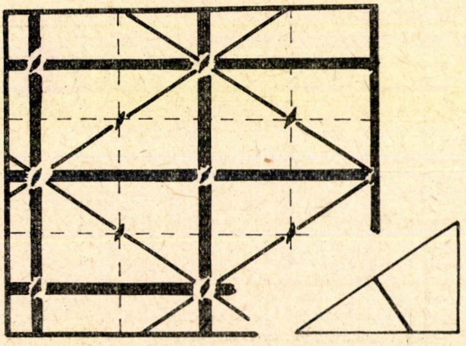
84. ábra



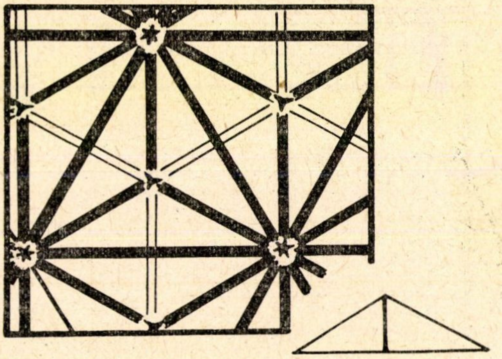
85. ábra



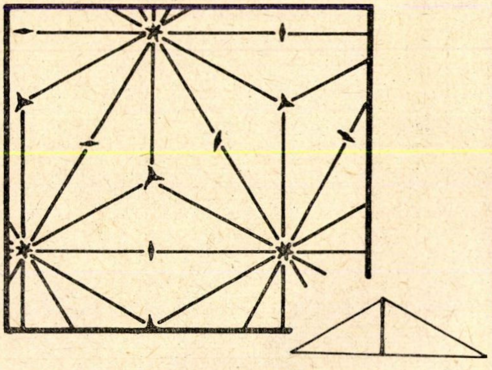
86. ábra



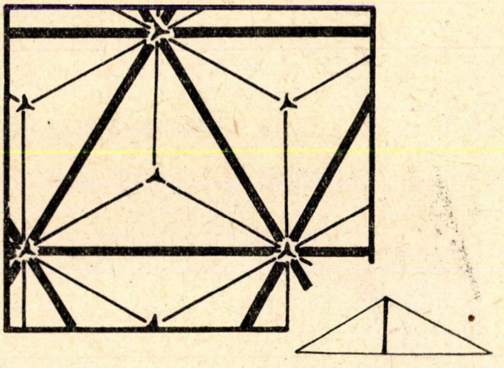
87. ábra



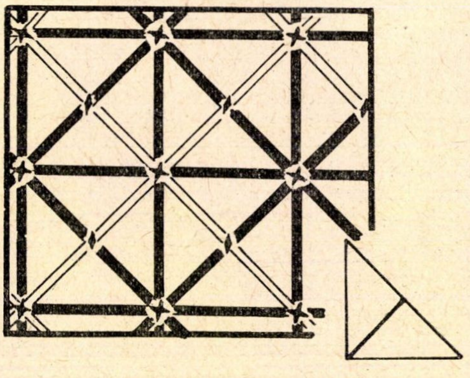
88. ábra



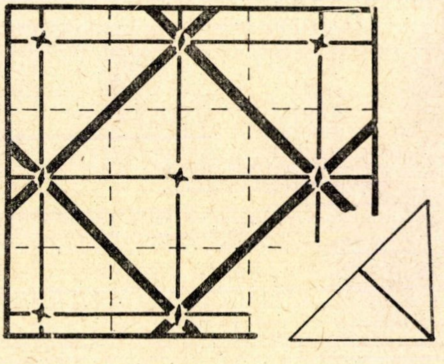
89. ábra



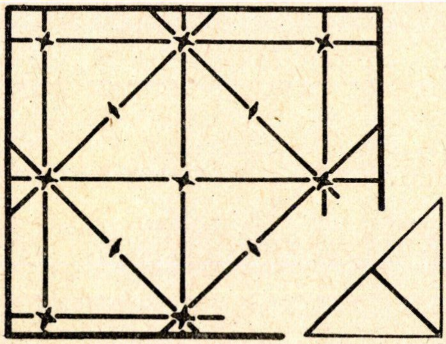
90. ábra



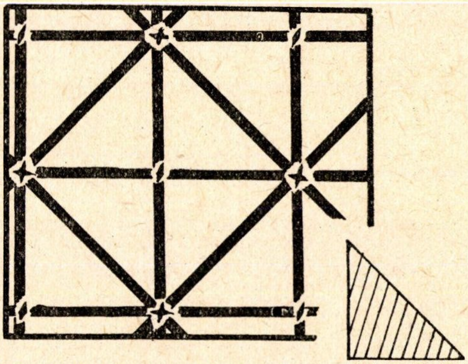
91. ábra



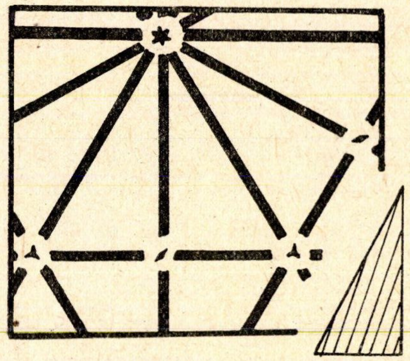
92. ábra



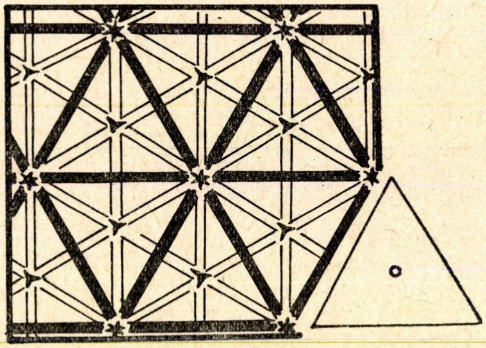
93. ábra



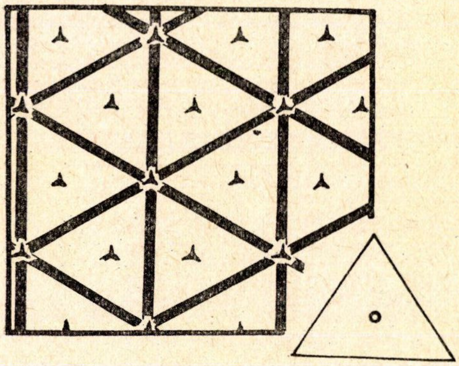
94. ábra



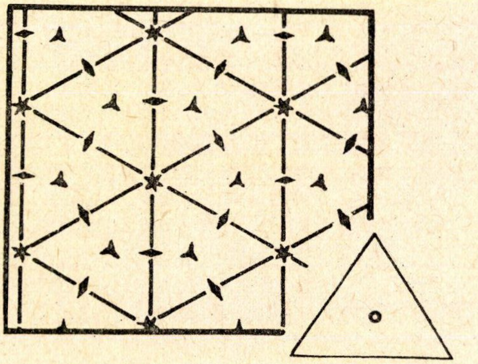
95. ábra



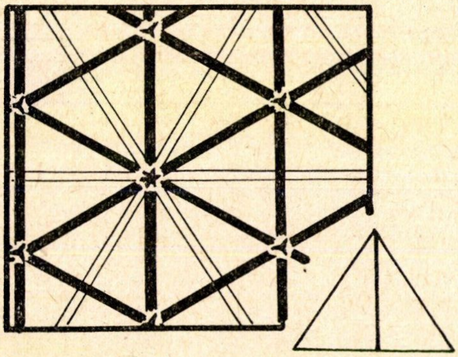
96. ábra



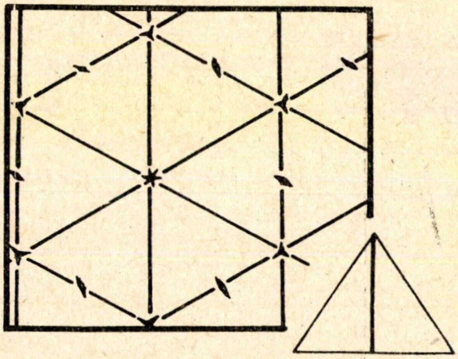
97. ábra



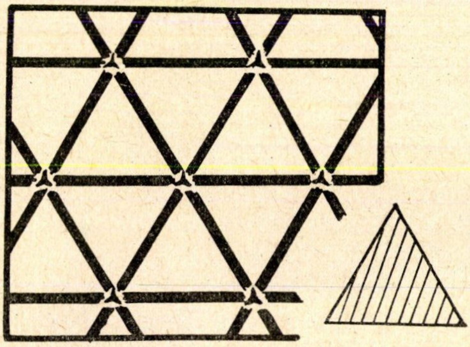
98. ábra



99. ábra



100. ábra



101. ábra

vonala, amíg a csúszótükrözés tengelyét vékony szaggatott vonal jelzi. A cellaoldalt közepes folytonos vonal mutatja (kivéve, ha tükörtengellyel esik egybe, ekkor ugyanis megvastagítottuk). Az osztályokat jellemző adatokat táblázatba foglaltuk. A táblázat oszlopaiban sorra az osztályt bemutató ábra száma, az osztály külső csoportja, belső csoportja, a cellára jellemző adatok, az osztály Sinogowitznál szereplő sorszáma, az osztályhoz tartozó D-cellarendszer külső csoportja, belső csoportja, a D-cella jellemző adatai, végül a D-cellarendszerből származtatott körfedéseket bemutató ábraszámok szerepelnek. A D-cella jellemzőit elhagytuk, amikor nem különbözött az eredeti cella adataitól. Az adatok közt szereplő $\perp$, $\|$, ill. ▯ jel két oldal merőlegességét, párhuzamosságát, ill. azt fejezi ki, hogy a két oldal egy téglalap két szemközti oldala. A két oldal zárójelbe téve a két oldal közös végpontját jelöli. Ha egy egységben, néhány egymás után következőt ugyanazok az adatok jellemeznek, csak az elsőnél tüntettük fel ezeket.

Sinogowitz-cella osztály					D-cella osztály			Körfedések
Á.	K. cs.	B. cs.	Cellaadatok	S.	K. cs.	B. cs.	Cellaadatok	Ábra
9.	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_6$	Szab. hatszög	1	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_6$	Szab. hatszög	110, 111
10.	$\mathfrak{W}_6$	$\mathfrak{c}_6$		2				
11.	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{d}_3(t)$		3				
12.	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{d}_3(d)$		4				
13.	$\mathfrak{W}_3$	$\mathfrak{c}_3$		5				
14.	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{d}_2$	$a=[]d,\ b=c=e=f$	6	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{d}_2$	$a=[]d,\ b=c=d=f$	112, 113
15.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_2$	$a=\|d,\ b=c=e=f$	8				
16.	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{d}_1(t)$	$a=[]d,\ b=c=e=f$	10				
17.	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{d}_1(d)$		13				
18.	$\mathfrak{W}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$a=\|d,\ b=\|e$	7	$\mathfrak{W}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$a=[]d,\ b=\|e,$	114, 115
19.	$\mathfrak{W}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$c=\|f$	20			$c=\|f$	
20.	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{d}_1(t)$	$a=[]d,\ b=f,\ c=e$	9	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{d}_1$	$a=[]d,\ b=f,\ c=e$	116, 117
21.	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{c}_1$	$a=d,\ b=f,\ c=e$	18				
22.	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{d}_1(d)$	$a=[]d,\ b=c,\ e=f$	12			$a=[]d,\ b=c,\ e=f$	118
23.	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{c}_1$	$a=\|d,\ b=c,\ e=f$	19			$a=b,\ c=d$	119
24.	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,\ c=d$	72				
25.	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{d}_1(d)$		56				
26.	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{d}_1(d)$	$a=b,\ ab\sphericalangle=cd\sphericalangle=$ $=120°,\ c=d=e=f$	11	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b,\ ab\sphericalangle=cd\sphericalangle=$ $=120°,\ c=d=e=f$	120, 121 122
27.	$\mathfrak{W}_3$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,\ c=d,\ e=f,$ $ab\sphericalangle=cd\sphericalangle=$ $=de\sphericalangle=120°$	14	$\mathfrak{W}_3$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,\ c=d,\ e=f,$ $ab\sphericalangle=\sphericalangle cd=$ $=de\sphericalangle=120°$	123, 124
28.	$\mathfrak{W}_2$	$\mathfrak{c}_1$	$a=\|d,\ b,\ c,\ e,\ f$	15	$\mathfrak{W}_2$	$\mathfrak{c}_1$	$a=[]d,\ b,\ c,\ d,\ e$	126, 127
29.	$\mathfrak{W}_2$	$\mathfrak{c}_1$	$a=\|b,\ c,\ d,\ e$	23			$a=[]b,\ c,\ d,\ e$	128, 129
30.	$\mathfrak{W}_2$	$\mathfrak{c}_1$	$a,\ b,\ c,\ d$	65			$a,\ b,\ c,\ d$	130, 131
31.	$\mathfrak{W}_2$	$\mathfrak{c}_1$	$a,\ b,\ c$	91			$a,\ b,\ c,$	132
32.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_1$	$a=d,\ c=e,$ $cd\sphericalangle+ef\sphericalangle+fa\sphericalangle=$ $=360°$	16	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_1$	$(cd),\ (ef),\ (fa)$ egy körön	133, 134
33.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_1$	$a=\|d,\ e=f,\ b,\ c$	17			$a=[]d,\ e=f,\ b,\ c$	135, 136
34.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_1$	$a=d,\ c=e,$ $cd\sphericalangle+ea\sphericalangle=180°$	29			$a=d,\ c=e,$ $cd\sphericalangle+ea\sphericalangle=180°$	137 138
35.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,\ c,\ d$	67			$a=b$, húrnégyszög	139

Sinogowitz-cella osztály					D-cella osztály			Körfedések
Á.	K. cs.	B. cs.	Cellaadatok	S.	K. cs.	B. cs.	Cellaadatok	Ábra
36.	$\mathfrak{W}_6$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,\ c=d,\ 2ab\sphericalangle=$	21	$\mathfrak{W}_6$	$\mathfrak{c}_1$	(bc), (de), (ad)	140, 141
			$=bc\sphericalangle=120°$				egy körön	142, 143
37.	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=[]d,\ b=c,\ e$	22	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=[]d,\ b=c,\ e$	144, 145
38.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_1$	$a=\|\|d,\ b=c,\ e$	25				146, 147
39.	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{c}_1$		26				
40.	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{d}_1(t)$	$a=c,\ b\|\|d$	51			$a=c,\ b\|\|d$	148
41.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_1$	$a=c,\ b,\ d$	68				
42.	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{c}_1$	$a=c,\ b\|\|d$	70				
43.	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b,\ c$	87			$a=b,\ c$	149
44.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_1$		92				
45.	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{c}_1$		93				
46.	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{c}_1$	$a=\|\|d,\ b,\ c,\ e$	24	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{c}_1$	$a=[]d,\ b,\ c,\ e$	150, 151
47.	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{c}_1$	$b\|\|d,\ a,\ c$	62			$b\|\|d,\ a,\ c$	152, 153
48.	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{c}_1$	$a,\ b,\ c$	90			$a,\ b,\ c$	154, 155
49.	$\mathfrak{W}_4^2$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b=d=e,\ c,$	27	$\mathfrak{W}_4^2$	$\mathfrak{d}_1$	(bc), (ed), (ae)	156, 157
			$ab\sphericalangle=de\sphericalangle=90°$				egy körön	
50.	$\mathfrak{W}_4$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,\ d=e,\ c,$	28	$\mathfrak{W}_4$	$\mathfrak{c}_1$	(ae), (bc), (cd)	158, 159
			$ab\sphericalangle=de\sphericalangle=90°$				egy körön	
51.	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b,\ c=d,$	30	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b,\ c=d,$	160, 161
			$bc\sphericalangle=da\sphericalangle=90°$				$bc\sphericalangle=da\sphericalangle=90°$	162, 163
52.	$\mathfrak{W}_6$	$\mathfrak{c}_1$		31				
53.	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,\ ab\sphericalangle=2cd\sphericalangle=$	32	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,\ ab\sphericalangle=2cd\sphericalangle=$	164, 165
			$=120°$				$=120°$	166,
54.	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_2$	$a=b=c=d,\ ab\sphericalangle=$	33	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_2$	$a=b=c=d,$	167, 168
			$=60°$				$ab\sphericalangle=60°$	
55.	$\mathfrak{W}_6$	$\mathfrak{c}_2$		34				
56.	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{d}_1(d'')$		36				
57.	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{d}_1(d')$	$a=b=c=d,$	35	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b=c=d,$	169, 170
			$ab\sphericalangle=60°$				$ab\sphericalangle=60°$	
58.	$\mathfrak{W}_3$	$\mathfrak{c}_1$		37				

	Sinogowitz-cella osztály				D-cella osztály			Körfedések
Á.	K. cs.	B. cs.	Cellaadatok	S.	K. cs.	B. cs.	Cellaadatok	Ábra
59.	$\mathfrak{W}_4^1$	$\mathfrak{d}_4$	Négyzet	38	$\mathfrak{W}_4^1$	$\mathfrak{d}_4$	Négyzet	171, 172
60.	$\mathfrak{W}_4^2$	$\mathfrak{c}_4$		39				
61.	$\mathfrak{W}_4$	$\mathfrak{c}_4$		40				
62.	$\mathfrak{W}_4^2$	$\mathfrak{d}_2(t)$		41				
63.	$\mathfrak{W}_4^1$	$\mathfrak{d}_2(d)$		43				
64.	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{d}_2(d)$	$a=b=c=d$	44				
65.	$\mathfrak{W}_4$	$\mathfrak{c}_2$	Négyzet	45				
66.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_2$	$a=b=c=d$	49				
67.	$\mathfrak{W}_4^2$	$\mathfrak{d}_1(d)$	Négyzet	55				
68.	$\mathfrak{W}_1^1$	$\mathfrak{d}_1(d)$	$a=b=c=d$	57				
69.	$\mathfrak{W}_4^1$	$\mathfrak{d}_1(d)$	Négyzet	54	$\mathfrak{W}_4^1$	$\mathfrak{d}_1$	Négyzet	173, 174
70.	$\mathfrak{W}_4$	$\mathfrak{c}_1$		59				
71.	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{d}_2(t)$	Téglalap	42	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{d}_2$	Téglalap	175, 176
72.	$\mathfrak{W}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$a=\parallel c,\ b=\parallel d$	46				
73.	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{c}_2$	Téglalap	47				
74.	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{c}_2$	$a=\parallel c,\ b=\parallel d$	48				
75.	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{d}_1(t)$	Téglalap	52				
76.	$\mathfrak{W}_1^2$	$\mathfrak{d}_1(t)$		53				
77.	$\mathfrak{W}_2^4$	$\mathfrak{c}_1$		66				
78.	$\mathfrak{W}_1^3$	$\mathfrak{c}_1$	$a=\parallel c,\ b=\parallel d$	71				
79.	$\mathfrak{W}_1$	$\mathfrak{c}_1$		73				
80.	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{d}_1(t)$	Téglalap	50	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{d}_1$	Téglalap	177, 178
81.	$\mathfrak{W}_2^3$	$\mathfrak{c}_1$	$a=\parallel c,\ b\parallel=d$	63				
82.	$\mathfrak{W}_2$	$\mathfrak{c}_1$		64				
83.	$\mathfrak{W}_1^2$	$\mathfrak{c}_1$		69				
84.	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{c}_1$	Téglalap	60	$\mathfrak{W}_2^2$	$\mathfrak{c}_1$	Téglalap	179, 180
85.	$\mathfrak{W}_4^2$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,$ $a\perp b,\ c\perp d$	58	$\mathfrak{W}_4^2$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b,$ $a\perp b,\ c\perp d$	181, 182 183, 184
86.	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{c}_1$	$a\parallel c,\ a\perp b,\ d$	61	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{c}_1$	$a\parallel c,\ a\perp b,\ d$	185, 186 187
87.	$\mathfrak{W}_2^1$	$\mathfrak{c}_1$	$a\perp b,\ c$	82			$a\perp b,\ c$	188, 189

Sinogowitz-cella osztály					D-cella osztály			Körfedések
Á.	K. cs.	B. cs.	Cellaadatok	S.	K. cs.	B. cs.	Cellaadatok	Ábra
88.	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b$, $ab\sphericalangle=120°$,	74	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b$, $ab\sphericalangle=120°$,	190, 191
			c				c	
89.	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{c}_1$		75				
90.	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{c}_2$		76				
91.	$\mathfrak{W}_4^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b$, $a\perp b$ c	78	$\mathfrak{W}_4^1$	$\mathfrak{d}_1$	$a=b$, $a\perp b$ c	192, 193
92.	$\mathfrak{W}_4^2$	$\mathfrak{c}_1$		80				
93.	$\mathfrak{W}_4$	$\mathfrak{c}_1$		81				
94.	$\mathfrak{W}_4^1$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b$, $a\perp b$, c	79	$\mathfrak{W}_4^1$	$\mathfrak{c}_1$	$a=b$, $a\perp b$, c	194, 125
95.	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{c}_1$	$ab\sphericalangle=2bc\sphericalangle=60°$	77	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{c}_1$	$ab\sphericalangle=2bc\sphericalangle=60°$	195, 196
								197, 198
96.	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_3$	Szab. háromszög	83	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_3$	Szab. háromszög	199, 200
97.	$\mathfrak{W}_3^2$	$\mathfrak{c}_3$		84				
98.	$\mathfrak{W}_6$	$\mathfrak{c}_3$		85				
99.	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_1$	Szab. háromszög	86	$\mathfrak{W}_6^1$	$\mathfrak{d}_1$	Szab. háromszög	201, 202
100.	$\mathfrak{W}_6$	$\mathfrak{c}_1$		88				203
101.	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{c}_1$	Szab. háromszög	89	$\mathfrak{W}_3^1$	$\mathfrak{c}_1$	Szab. háromszög	204, 205

A szabályos körrendszerek osztályai

A szabályos körrendszereket a szabályos D-cellák *Sinogowitz*-osztályaiból vezetjük le. A szabályos cellarendszerek *Sinogowitz*-osztályait nem tekinthetjük egyúttal D-cellák osztályainak. Ugyanis a D-cellarendszer olyan speciális mozaik[6], amelynek celláiban van egy-egy pont úgy, hogy ennek a pontrendszernek a D-cellarendszere éppen a tekintett mozaik. Ha azt akarjuk megállapítani, hogy egy *Sinogowitz*-osztályban előfordul-e D-mozaik, elég kimutatnunk, hogy létezik benne ilyen pontokkal rendelkező cellarendszer. Egy adott cellában hol lehet a fenti tulajdonságú pont? Mivel a társtranszformációk a szomszédos cellák ilyen pontjait egymásra képezik le, a két szomszédos cellának ilyen pontjai által meghatározott szakasz felező merőlegesén van a két cella közös oldala (hatványvonal), ezért egy cellában az ilyen O pont helyzetét a külső csoport a következőképpen korlátozza:

a) ha egy cellaoldal felezési pontja 180°-os forgatási centrum, O csak ennek az oldalnak a felező merőlegesén lehet;

[6] Lásd [5] 41. oldal.

b) ha egy cellarendszer külső csoportjában van transzláció, akkor a cellának van két párhuzamos oldala, s O csak ezek középpárhuzamosán lehet;

c) ha a külső csoport a cella egyik oldalát a végpontja körül egy másik oldalába forgatja, O csak e két oldal által bezárt szög szögfelezőjén lehet;

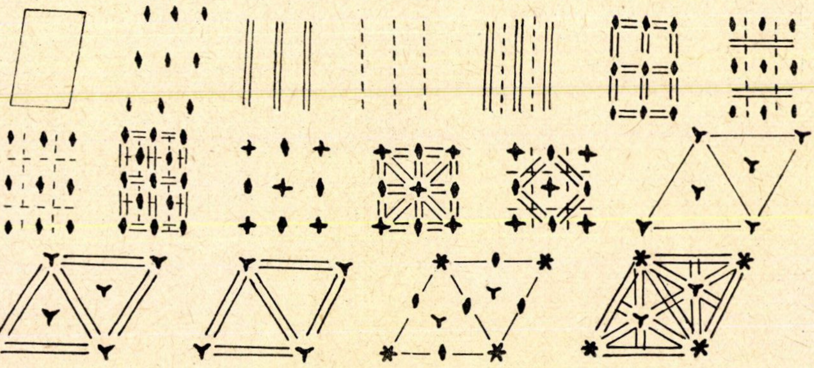
d) ha a társtranszformáció tengelyes tükrözés, O helyzetét nem korlátozza;

e) ha egyik cellaoldalt csúszótükrözés visz át a cella egy másik oldalába, O csak az egymásba átmenő oldalak által meghatározott négyszög átlói felező merőlegeseinek metszéspontja lehet.

A cellában az O pont helyzetét a belső csoport is korlátozhatja. Ugyanis, ha egy körrendszer szimmetria operációjánál egy D-cella önmagába megy át, a cellában levő körnek is önmagába kell átmennie. Ezért, ha a belső csoportban van forgatás, O csak a forgáscentrum lehet, ha van tükrözés, csak a tükörtengelyen lehet, de ha a belső csoport az identikus leképezés, O bárhol lehet.

Az elmondottak alapján megvizsgálhatjuk, hogy a 93 *Sinogowitz*-osztályban lehetnek-e D-mozaikok. Azt látjuk, hogy mindegyik osztályban találunk olyan speciális cellarendszert, amely D-mozaik. Az osztályokat bemutató ábrákon fel is tüntettük, hogy milyen speciálisnak kell lennie a cellának ahhoz, hogy D-cellává váljon. Az ábrák melletti D-cellákban oldalközépponthoz húzott vékony vonal oldalfelező merőlegest, csúcshoz húzott vékony vonal szögfelezőt jelent.

A különböző *Sinogowitz*-osztályokhoz tartozhatnak metrikusan azonos cellák. Még inkább elmondható ez a különböző *Sinogowitz*-osztályokban levő D-mozaikokról. Ha a különböző osztályú D-mozaikok által meghatározott körrendszereket vizsgáljuk, nem elegendő osztályozási szempontnak a hozzájuk tartozó D-mozaik osztályjellege. Mert pl. a 71—79 alatti osztályok mindegyikéhez ugyanazok a körrendszerek tartoznak. A körrendszerek megfelelő osztályozásához bevezetjük a



102. ábra

belső eltolás fogalmát. Szabályos körrendszer külső és belső csoportját ugyanúgy értelmezzük, mint a szabályos cellarendszerekét. A szimmetria rendszeren a szimmetria csoportban szereplő szimmetria elemek összességét értjük. Egy *körrendszer belső eltolásán* a körközéppontok olyan folytonos valódi elmozdulását értjük, amelynél a körrendszer szimmetria rendszere és belső csoportja változatlan marad. Csak belső eltolásban különbözik a 7. és 8. ábra két körrendszere, ezeknél a külső csoport szimmetria elemei tükrözések, a belső csoport az identikus leképezés. A körközéppontot a cellában bárhol vesszük fel (illetve, bárhova toljuk el), a két körrendszer szimmetriája ugyanaz marad.

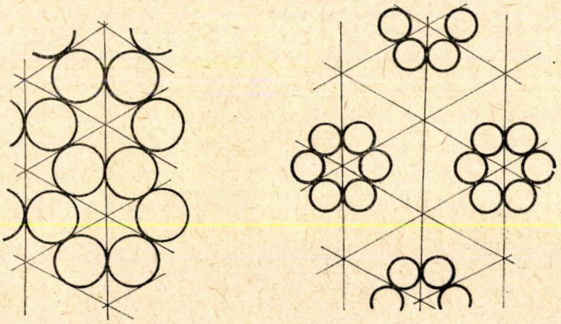
Két szabályos körrendszert azonos típusúnak nevezünk, ha

a) azonos a külső csoportjuk,

b) azonos felépítésű a belső csoportjuk,

c) van olyan affinitás, amely — legfeljebb egy belső eltolással még kiegészítve — az egyik körrendszer körközéppontjait átviszi a másik körrendszer körközéppontjaiba. 31 különböző típusú szabályos körrendszer van. Az ezeknek megfelelő szabályos D-mozaikokat is 31 típusúnak vehetjük. Táblázatunkban a cellarendszereket ilyen egységekre osztva soroltuk fel.

A belső eltolás mértéke három lényegesen különböző jellegű lehet: vagy egyáltalán nem lehet belső eltolás (úgy is mondhatjuk, hogy 0-dimenziós az elmozdulás), vagy egy szakasz mentén történhet az elmozdulás (1-dimenziós az elmozdulás),



103. ábra

vagy a cella egész belsejében mozoghatunk (2-dimenziós az elmozdulás). A 93 *Sinogowitz*-osztálynál feltüntetett D-cellákban megadtuk a belső elmozdulás jellegét is. Pont, szakasz, illetve a cella satírozása tünteti fel a 0-, 1-, illetve 2-dimenziós esetet.

Azonos típusú körrendszerek között felléphetnek szembetűnően eltérő tulajdonsággal rendelkezők is. Nézzük pl. a 103. ábrán látható körrendszereket. Ezek egy-egy körét 2 illetve 3 kör érinti, s ez a tény különböző jelleget ad a két körrendszernek, jóllehet mindkettő tekinthető azonos típusúnak (külső csoport $\mathfrak{W}_3^1$, belső csoport $\mathfrak{c}_1$, szabadsági fok 2). Ezért indokoltnak látszik további osztályokba sorolni az azonos típusú körrendszereket.

Egy *körelhelyezés határhelyzetű*, ha van benne két érintkező, úgynevezett határkör. Ugyanis a körközéppontok rögzítésénél a körsugarak nem növelhetők a körelhelyezés megszűnése nélkül. Hasonlóan egy *körfedés határhelyzetű*, ha két köre — úgynevezett határköre — a körrendszer egy D-cellájának csúcsában metszi egymást. Ugyanis ekkor a körközéppontok rögzítése esetén nem lehet csökkenteni a körök sugarát a fedés megszűnése nélkül. Az azonos típusú szabályos körrendszereket a különböző szimmetriájú határhelyzeteik alapján osztályokba soroljuk. A határhelyzet jellegét egy szabályos körrendszerben azon szimmetria operációk határozzák meg, amelyek a körrendszer egy körét átviszik a vele közös ponttal rendelkező határkörökbe. Ezek alkotják a *határhelyzet csoportot.* Két azonos típusú szabályos, határhelyzetű, *körrendszert azonos osztályú*nak nevezünk, ha

a) van olyan affinitás, amely — legfeljebb egy belső eltolás közbeiktatásával — leképezi egymásra a köreiket úgy, hogy ugyanannyi határhelyzetű kör kapcsolódjon a két körrendszer minden köréhez;

b) a határhelyzet csoportjuk azonos szimmetria elemeit egymásra transzformálja. Nyilvánvaló, hogy azonos típusú körrenszerek között mindig előfordul nem-határhelyzetű és legalább egy határhelyzetű osztály.

A szabályos körrendszer-osztályok összeszámlálása

Szabályos körrendszerek különböző osztályainak összeszámlálását úgy végezhetjük el, hogy az azonos típusú körrendszereknél megállapítjuk a különböző osztályokat. Az így nyert osztályok nem feltétlenül különböznek, hiszen a különböző típusoknál felléphetnek azonos osztályok. Ugyanis, ha két típus csak a belső eltolás mértékében különbözik, akkor a nagyobb szabadságfokúnál speciális esetként fellépnek a másik típus körrendszerei is. Ebből a speciális helyzetből eredő megegyező osztályokból csak egyet fogunk figyelembe venni (mégpedig az alacsonyabb szabadságfokú típusnál adódót).

A szabályos körelhelyezéseknél 131 különböző osztály adódik.

A szabályos körfedéseknél is minden típusban felvehető olyan két körrendszer, amelyből egyik nem-határhelyzetű, a másik határhelyzetű (utóbbiból esetleg több is), amelyek más típusnál nem fordulhatnak elő. Ez a típus és osztály fogalmából következik. A feladat, hogy felkutassuk típusonként a fenti két alaposztályon kívüli még számításba nem vett osztályokat is. Vegyük sorra a 31 típust. A típusszámok után feltüntettük a benne előforduló D-cellarendszerek ábraszámát. A magyarázat közbeni nem zárójeles számok a 110—205. ábrákon látható szabályos körfedésosztályokat jelölik. Egyes típusokban, ha triviálisan csak a két szükségképpen létező osztály szerepel, csak a két osztály ábraszámát tüntettük fel. A 110—205. ábrákon a körfedések váza látható. A nem-határhelyzetű osztályokban elég nagyra kell megnövelni a körök sugarát (úgy, hogy ne határhelyzetű fedés keletkezzen), a határhelyzetű osztályoknál a határpont össze van kötve azon körökkel, amelyeknek határpontja. Ezeknél a körök sugarát ezen szakaszok közös pontjáig kell megnövelni, hogy a felvázolt körfedés adódjon.

I. típus (9—13. ábra): 110, 111 .

II. típus (14—17): 112, 113 .

III. típus (18—19): 114 , 115 .

IV. típus (20—25): 116. A 20. köré 117. A 22.-nél három csúcson keresztül 118. Négy már az összest magával hozná, de ez 113-at adná. A négyszög köré 119.

V. típus (26): 120. A két trigires[7] (szimmetrikus) csúcson át 121. Az egyik (szimmetria tengelyen levő) trigires csúcson át 122. Más nem fordulhat elő, mert trigires csúcs és szomszédja nem lehet a körön (a szabályos hatszögnél már számí-

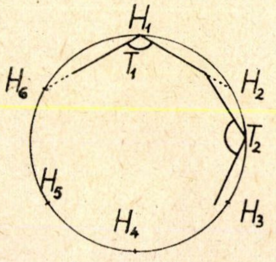
[7] A kristálytanban a 180°-os, 120°-os, 90°-os, illetve 60°-os forgatásokat digir, trigir, tetragir, ill. hexagir elnevezéssel használják.

tásba vettük), a három trigires sem lehet, mert (104. ábra), ha pl. T_2 a $\overset{\frown}{H_2 H_3}$ íven van, akkor a T_2 T_1-gyel és T_2-vel nem zárhat be a körön belül hatszöget. (Hasonló a helyzet, ha T_2 H_3 és H_4 között van.) Ha nem trigires csúcs lenne a körön, akkor mindhárom nem trigiresnek rajta kellene lenni, mert három szomszédos cella ezekkel a csúcsokkal érintkezik. De ez nem lehet, mert ha egyenlő ívekre osztják a kört, szabályos hatszög adódhatna, ha pedig nem, a cella nem záródna.

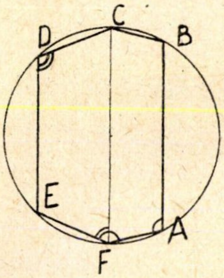
VI. típus (27): 123. Egy trigires csúcson keresztül 124. Több nem, mert a trigir és szomszédja körön való elhelyezkedése a szabályos hatszöghöz vezet, két trigirnél a trigirből induló oldalaknak egy körön kell végződniük, így az V. típus adódik.

VII. típus (28—31): 126. A hatszög köré 127. A hatszög három csúcsa köré 128. Az ötszög köré 129. Az ötszög digires-csúcsain át 130. Az ötszög nem digires csúcsain át a 128-hoz vezetne. A négyszög körül 131. A háromszög köré 132.

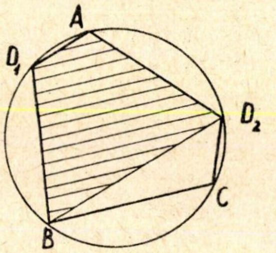
VIII. típus (32—35): 133. A három csúcson át (amelyeknél levő szögek összege 360°) 134. A hatszög köré nem lehet, mert ekkor (105. ábra) $AB \| DE$ lenne, s ez 117-hez vezet. A 33. ábra digires oldalai köré 135 és az egyenlő nem párhuzamos



104. ábra



105. ábra



106. ábra

oldalakon át 136, valamint az egész körét 137. A 34. ábra ötszögénél a digires csúcsokon át 137, a nem digires csúcsokon át úgy lehetne, hogy mindhárman, de ez speciális esete 134-nek. Az egész köré nem lehet, mert ekkor (106. ábra) a D_1 és D_2 digires csúcsoknál $D_1\sphericalangle + D_2\sphericalangle > D_1\sphericalangle + AD_2B\sphericalangle = 180°$ lenne. A négyszög köré 139.

IX. típus (36): 140. A trigires csúcson át 141. A hexagires csúcson át 142. A trigires és hexagires csúcsokon át 143. A három fennmaradó csúcson át nem mehet a kör, mert a 60°-os szög szárai között a körkerület kéthatod részénél kisebb része lenne, s így nem helyezhető el a trigires csúcs.

X. típus (37—45): 144. Az ötszög köré 145. Az ötszög digires oldala köré 146. Az ötszög egyenlő szomszédos oldalai köré 147. A trapéz köré 148. A háromszög köré 149.

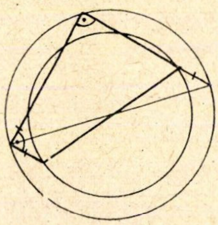
XI. típus (46—48): 150. Az ötszög tükörtengelyes oldala köré 151. Az ötszög digires oldala köré 152. Az egész ötszög köré 153. A trapéz egyik szára köré 154. Az egész trapéz köré nem lehet, mert 148-at adná. A háromszög köré 155.

XII. típus (49): 156. A tetragires csúcsok köré 157. Több nincs, mert ha egy nem-tetragiresen átmegy, hárman is át kell mennie, s így nem marad legalább félkörív szabadon a 90°-os csúcs elhelyezéséhez.

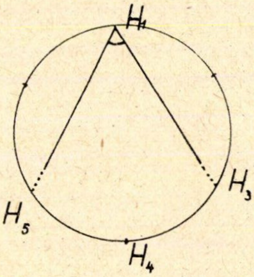
XIII. típus (50): 158. Az egyik forgáscentrumon át 159. Több nincs, mert két forgáscentrum csak akkor mehetne át, ha a körközéppont cella-határa esne (lásd 107. ábra), amit kizártunk, nem 90°-os csúcson át sem mehet, amit a XII. típusban már alkalmazott eljárással beláthatunk.

XIV. típus (51—52): 160. A tetragires csúcson át 161. A hexagires csúcson át 162. Minden csúcson át 163.

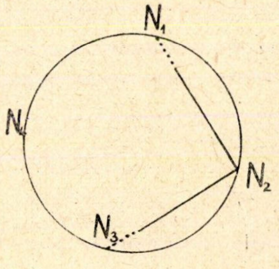
XV. típus (53): 164. A 120°-os csúcson át 165. A 60°-os csúcson át 166. Mást nem, mert (108. ábra) a 60°-os csak $\widehat{H_3 H_5}$ ív felezési pontjában lehetne, de ez 163-ra vezetne. A másik két csúcson csak úgy mehet át, ha ezek 1:2 arányban osztják az ívet, de így ugyancsak 148-at adná.



107. ábra



108. ábra



109. ábra

XVI. típus (54—56): 167. A hosszabb átló végein át 168.

XVII. típus (57—58): 169. A hosszabb átló végpontjain át 170.

XVIII. típus (59—68): 171. 172.

XIX. típus (69—70): 173. Egy csúcson át 174.

XX. típus (71—79): 175. 176.

XXI. típus (80—83): 177. Két csúcson át 178.

XXII. típus (84): 179. Egy csúcson át 180.

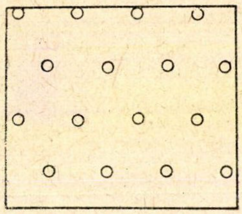
XXIII. típus (85): 181. A tetragires csúcson át 182. A digires csúcson át 183. A körülírt 184. Csak két csúcs köré nem lehet, mert (109. ábra) az N_2-ből induló oldalak végpontjai az $\widehat{N_1 N_3}$ ív pontjaiból nem 90° alatt látszanak (ha csak nem 184 adódik). Ha a másik két csúcs lenne a körön, akkor, vagy egyenlő ívekre osztják a kerületet, s 184 adódna, vagy valamelyik derékszöget nem tudnánk elhelyezni.

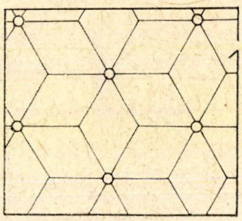
XXIV. típus (86—87): 185. A ferde szár végpontjain át 186. A ferde szár és a rövidebb párhuzamos oldalán át 187. A derékszögű háromszög átfogóján át 188. A trapéz rövidebb párhuzamos oldalánál levő derékszögű csúcson át 189.

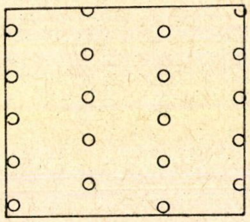
XXV. típus (88—90): 190. A két 30°-os csúcson át 191.

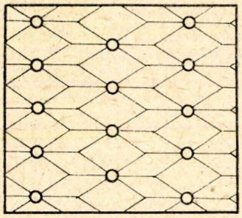
XXVI. típus (91—93): 192. Az átfogó végein át 193.

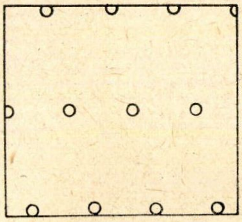
XXVII. típus (94): 194. Az átfogó egyik végén át 125.

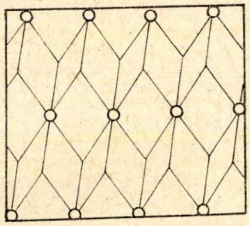

110. ábra

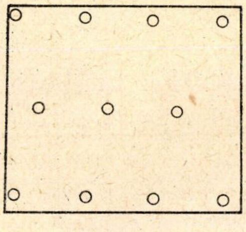

111. ábra

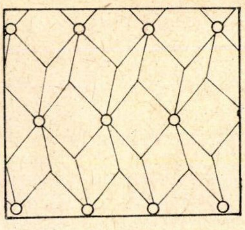

112. ábra

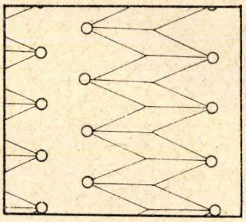

113. ábra

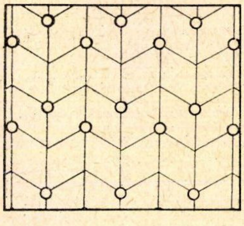

114. ábra

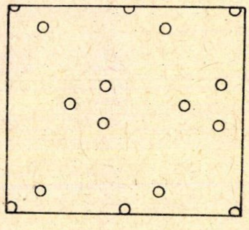

115. ábra

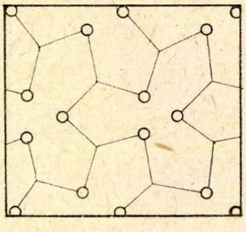

116. ábra

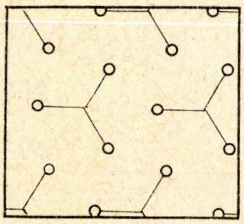

117. ábra


118. ábra

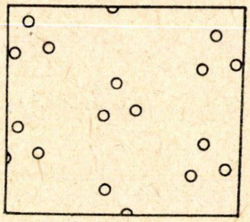

119. ábra


120. ábra

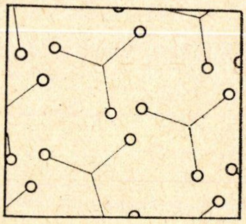

121. ábra



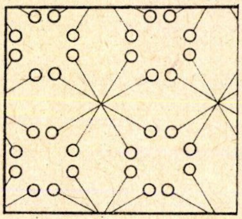
122. ábra



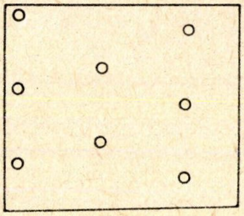
123. ábra



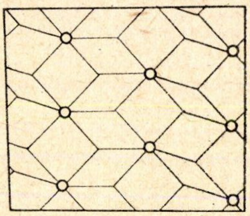
124. ábra



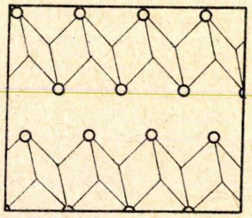
125. ábra



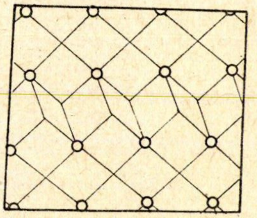
126. ábra



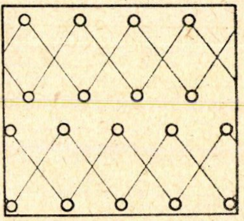
127. ábra



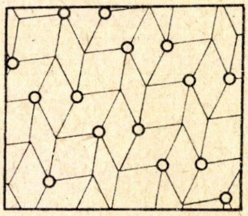
128. ábra



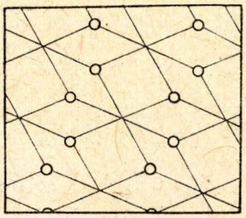
129. ábra



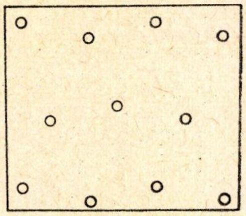
130. ábra



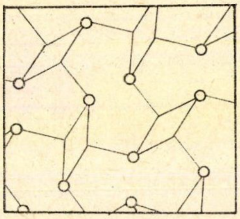
131. ábra



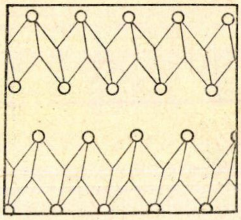
132. ábra



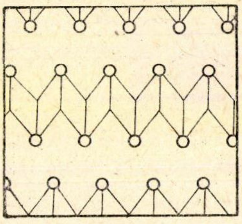
133. ábra



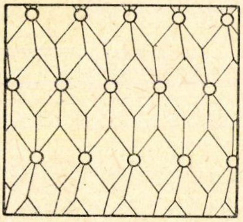
134. ábra



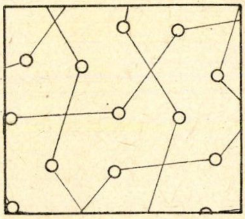
135. ábra



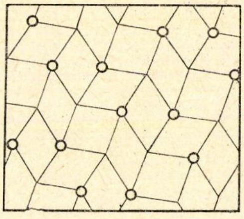
136. ábra



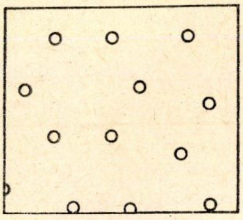
137. ábra



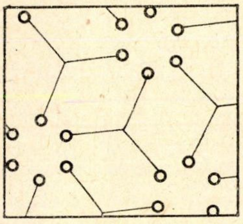
138. ábra



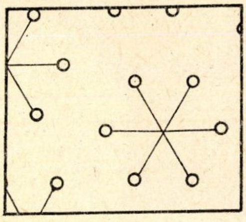
139. ábra



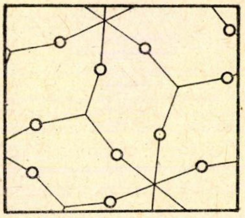
140. ábra



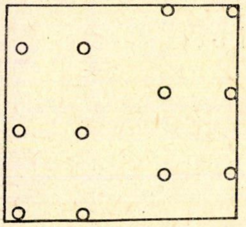
141. ábra



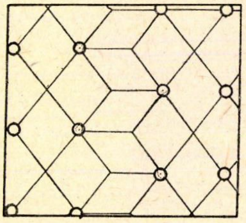
142. ábra



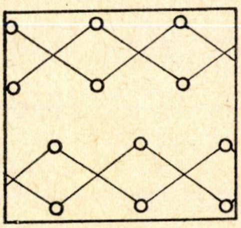
143. ábra



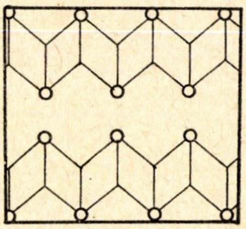
144. ábra



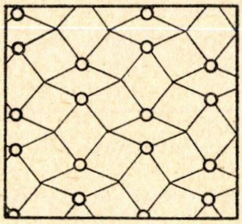
145. ábra



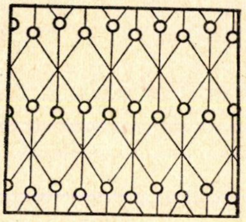
146. ábra



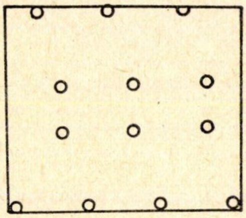
147. ábra



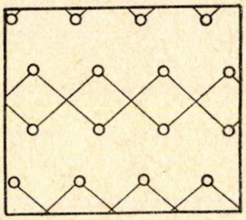
148. ábra



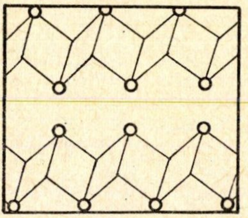
149. ábra



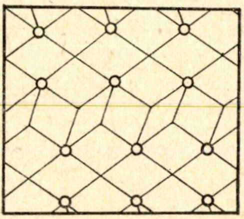
150. ábra



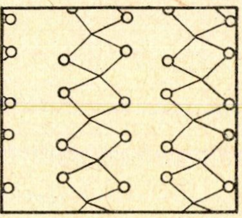
151. ábra



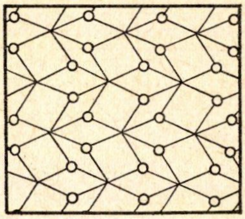
152. ábra



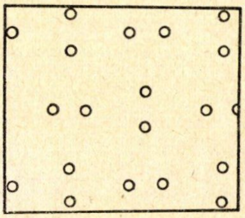
153. ábra



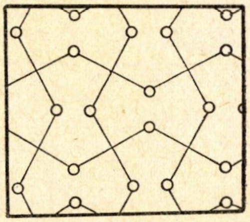
154. ábra



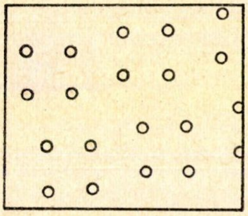
155. ábra



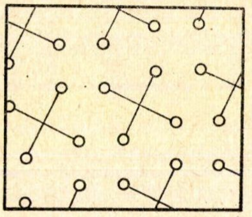
156. ábra



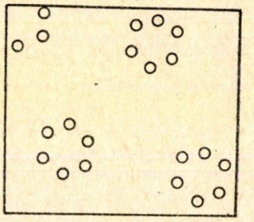
157. ábra



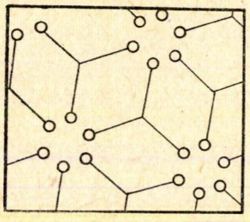
158. ábra



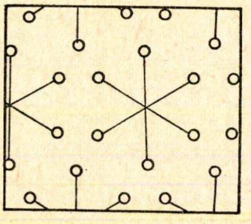
159. ábra



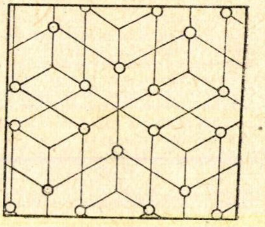
160. ábra



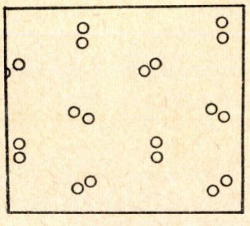
161. ábra



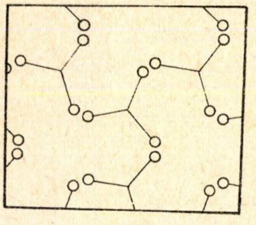
162. ábra



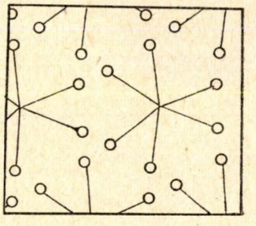
163. ábra



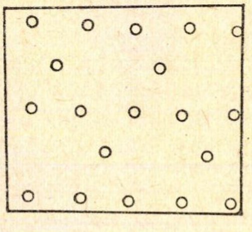
164. ábra



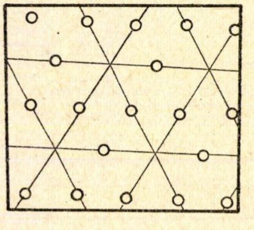
165. ábra



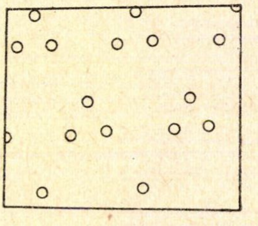
166. ábra



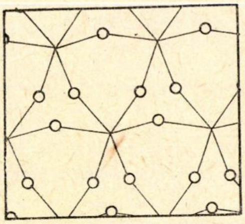
167. ábra



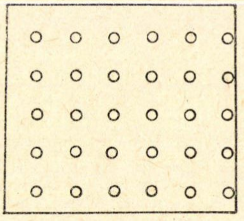
168. ábra



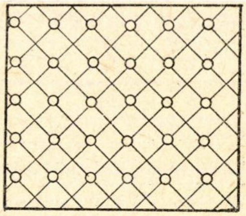
169. ábra



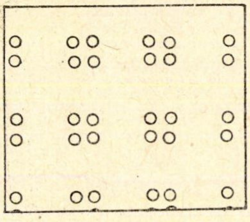
170. ábra



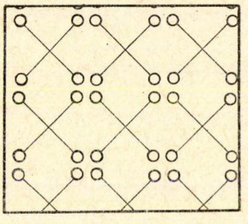
171. ábra



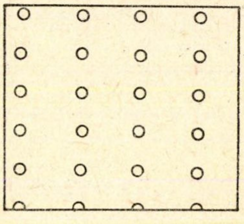
172. ábra



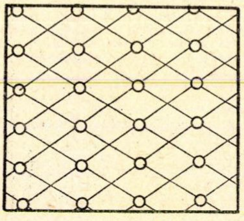
173. ábra



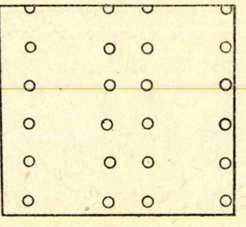
174. ábra



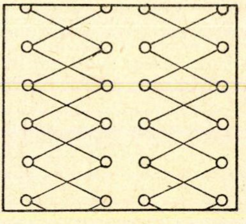
175. ábra



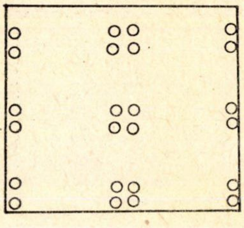
176. ábra



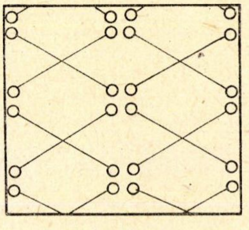
177. ábra



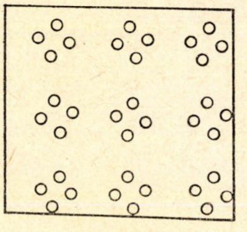
178. ábra



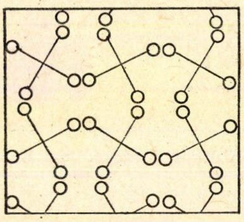
179. ábra



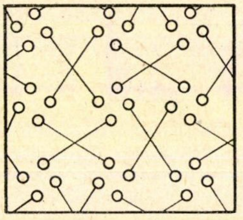
180. ábra



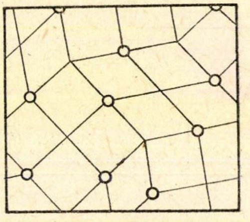
181. ábra



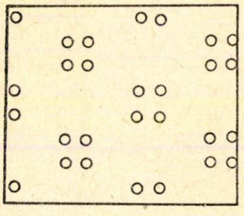
182. ábra



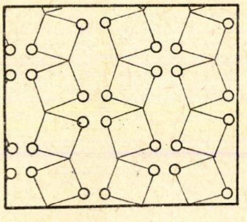
183. ábra



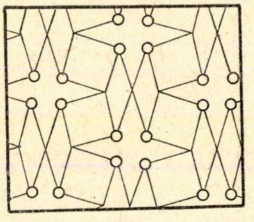
184. ábra



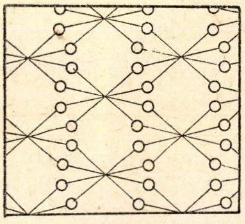
185. ábra



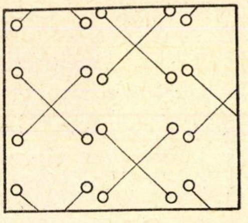
186. ábra



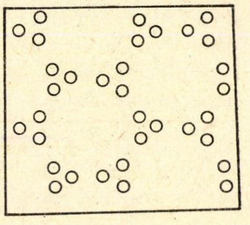
187. ábra



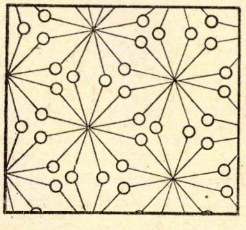
188. ábra



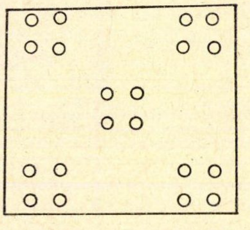
189. ábra



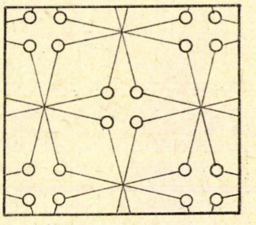
190. ábra



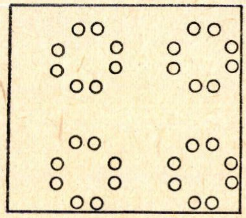
191. ábra



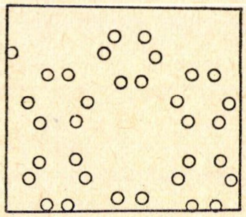
192. ábra



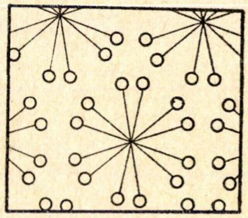
193. ábra



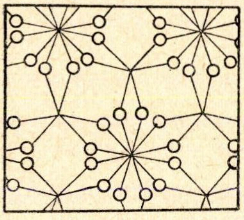
194. ábra



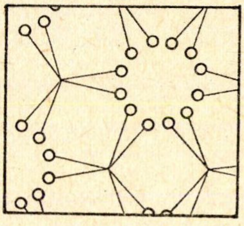
195. ábra



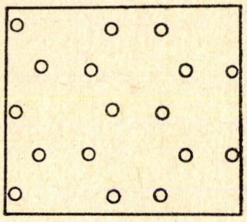
196. ábra



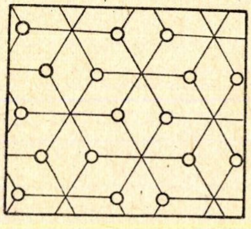
197. ábra



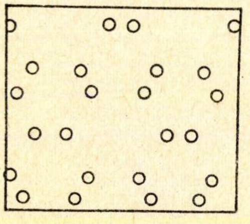
198. ábra



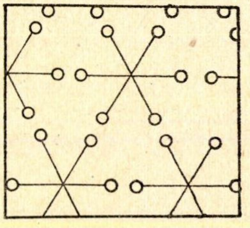
199. ábra



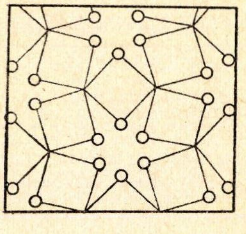
200. ábra



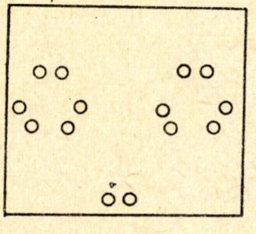
201. ábra



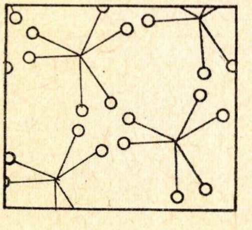
202. ábra



203. ábra



204. ábra



205. ábra

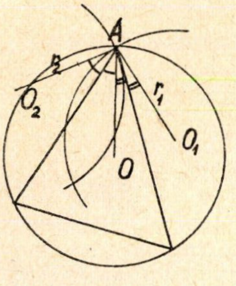
XXVIII. típus (95): 195. A hexagires csúcson át 196. A trigires és hexagires csúcsokon át 197. A trigires csúcson át 198.
XXIX. típus (96—98): 199. 200.
XXX. típus (99—100): 201. Két csúcson át 202. Egy csúcson át 203.
XXXI. típus (101): 204. Egy csúcson át 205.

A szabályos körfedéseknek 96 különböző osztálya van. Az egyes osztályokban — ha kapcsolódó köröknek nevezzük a közös határponttal rendelkező köröket — a kapcsolódó körök vagy szétszórt csoportokban, úgynevezett *szigetek*ben helyezkednek el, vagy végtelen sok kapcsolódik egy környalábbá, úgynevezett *lánccá*, vagy minden kör össze van kapcsolva egymással közbeeső határkörökön keresztül, azaz *hálót* alkot a körrendszer. A körfedésnél a sziget 1, 3, 4, 6 vagy 12 körből állhat, ha a nem-határhelyzetű körfedést úgy tekintjük, mint egy körből álló szigetek halmaza. Két körből nem állhat sziget, ez ugyanis azt jelentené, hogy egy körfedésnél csak két kör metszi egymást egy D-cella csúcsban, ami lehetetlen.

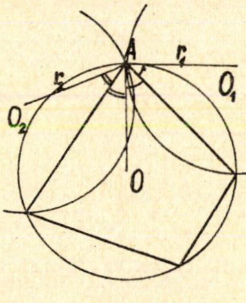
A szabályos és stabilis körrendszerek osztályai

Egy körrendszert akkor nevezünk stabilisnak[8], ha a körrendszer minden köre rögzítve van a társai által, azaz csak középpontja körüli forgást végezhet a körrendszert definiáló tulajdonság megszűnése nélkül.

A 131 szabályos körelhelyezés-osztályból 28 stabilis[9]. Most kiválogatjuk a szabályos körfedéseknél adódó stabilis osztályokat. Csak a hálókat kell megvizsgálni, ugyanis a szigeteknél egy körhöz egy határpont tartozik, ami nem rögzíti. Láncoknál viszont a határpontok egy körön úgy helyezkednek el, hogy szabadon



206. ábra



207. ábra

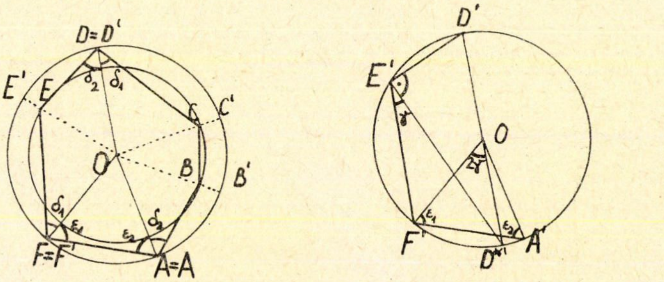
hagynak egy félkörívnél nagyobb ívet, így ezek sem rögzítik a kört. A hálók közül a háromszöges D-cellások nem jöhetnek számításba, mert (206. ábra) ha a D-cellának A-nál legkisebb szöge, $\alpha \leqq 60°$, akkor az r_1 és r_2 120°-nál nem zár be nagyobb szöget, így ezen határkörök lefedik D-nek az A-nál levő bizonyos részét, s ezért a D köré írt kör elmozdítható. Ha a körhálónál négyszög a D-cella, csak a téglalap esetén lehet stabilis a körrendszer (ekkor is csak a körülírt körök esetén). Ugyanis,

[8] Lásd [6] 401. és 403. oldal.
[9] Lásd [4] 47—52. oldal.

ha D-nek A-nál legkisebb a szöge (lásd 207. ábra) $\alpha < 90°$, akkor r_1 és r_2 által bezárt D felé eső szögtartománya $< 180°$-nál, s így a K_1 és K_2 határkör fedi D-nek A-nál levő belsejét. Ekkor viszont a kör elmozdíthatóságát A nem korlátozza. Ha az A-val szomszédos csúcsnál is 90°-nál kisebb szög van, akkor az sem korlátozza a kör mozgását (a fenti okból kifolyólag) és a kört két pont már nem rögzíti. Ha 90°-nál nem kisebbek a szomszédai, akkor az A-tól különböző csúcsok félkörívnél kisebb íven vannak. Így a 3 csúcs nem rögzít, mert elmozdítható a kör úgy, hogy e három pont továbbra is fedve maradjon.

Ezek figyelembevételével a 34 körfedéshálót egyenként megvizsgáljuk. A következőkben szereplő jelzés nélküli számok az egyes körhálóosztályoknak, illetve (a zárójelben levők) a stabilis körfedés-osztályokat bemutató ábráknak a száma.

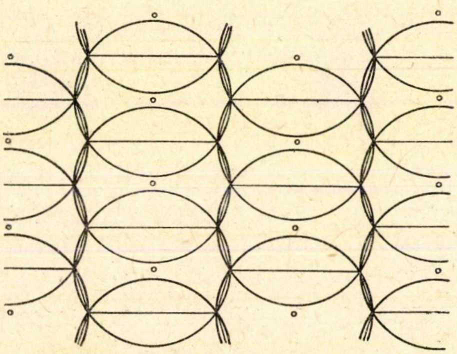
111: Stabilis (209).
113: Stabilis (210).
115: Stabilis (211).
117: Stabilis (212).
119: Négyszögű cellák.
121: Nem lehetnek diametrálisak a határpontok egy körön (nem metszenék egymást a tetragires csúcsok oldalai).
127: Stabilis (213).
129: Stabilis (214).
131: Négyszögű a cella.
132: Háromszögű a cella.
134: A betűzést a 208. ábra mutatja. Az ADF háromszög nem lehet hegyesszögű. Ugyanis $A\sphericalangle + D\sphericalangle + F\sphericalangle = 2D\sphericalangle + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqq 2D'\sphericalangle + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2E'\sphericalangle + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2(90° + \gamma) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 180° + 2\gamma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.



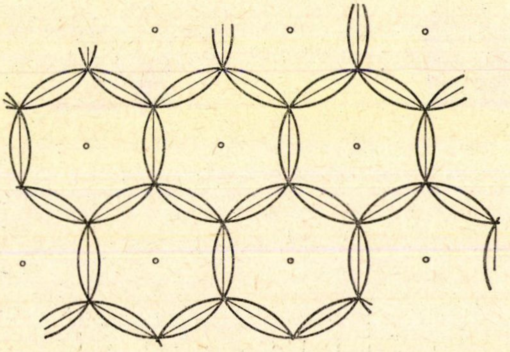
208. ábra

De ez a mennyiség, ha ADF hegyesszögű, akkor (lásd az ábra II. részét) kisebb 360°-nál, ami a cella alaptulajdonságával ellenkezne. Ha ADF derékszögű lenne, már tárgyalt típushoz jutnánk. ADF tompaszögű. Nem adódik stabilis körrendszer.

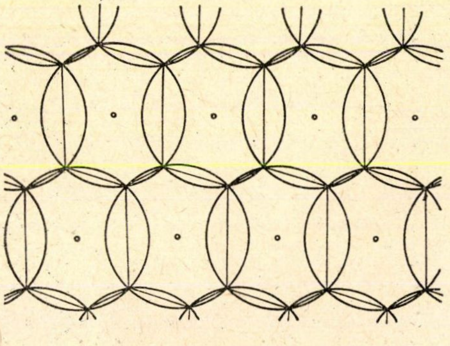
117: Stabilis (215).
138: A digires csúcsoknál levő határpontok csak akkor adhatnának stabilist, ha 90°-os szögű csúcsok lennének. Ekkor azonban körközéppont cellaoldalra esne.
139: Négyszögű a cella.



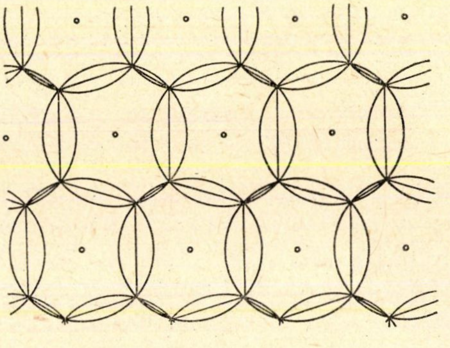
209. ábra



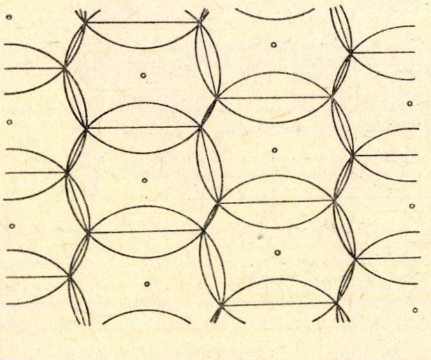
210. ábra



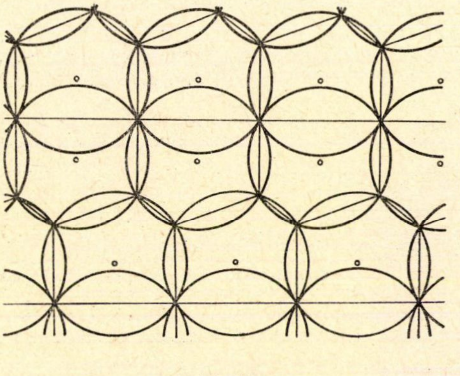
211. ábra



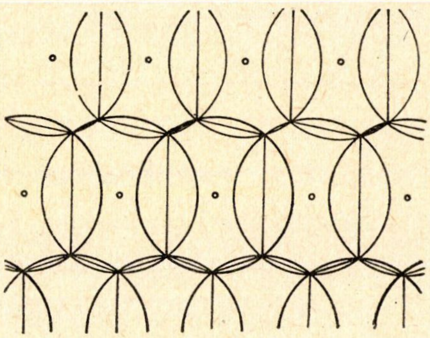
212. ábra



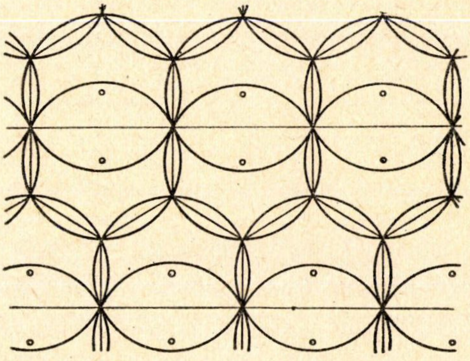
213. ábra



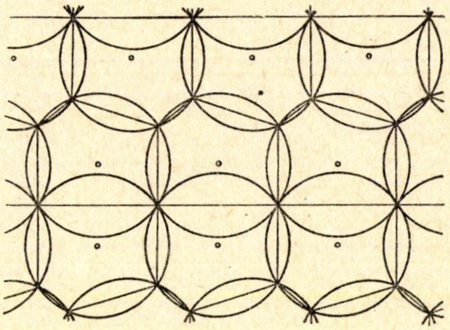
214. ábra



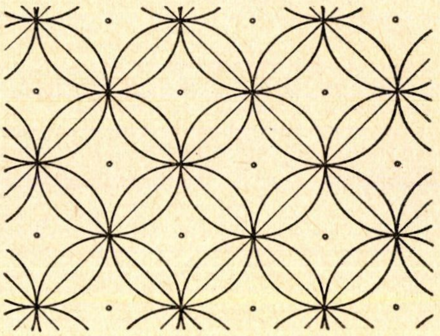
215. ábra



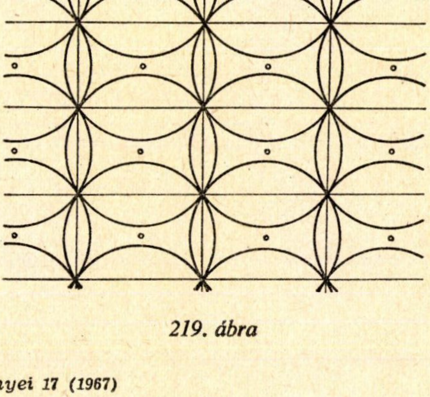
216. ábra



217. ábra



218. ábra



219. ábra

143: Ha diametrális lenne a hexagires és drigires csúcs nullává válik az 5. oldal, s négyszögű a cella.
145: Stabilis (216).
148: Négyszögű a cella.
149: Háromszögű a cella.
153: Stabilis (217).
155: Háromszög a cella.
157: Diametriális határpontoknál az ötszög egyik oldala nullává válik.
163: Négyszög a cella.
168: Négyszög a cella.
170: Négyszög a cella.
172: Stabilis (218).
176: Stabilis (219).

A továbbiaknál csak négy- és háromszögcellák szerepelnek.

IRODALOM

[1] SINOGOWITZ, U.: Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreise in der Ebene, *Z. Kristallogr.* **100** (1939) 461—508.
[2] Делоне, Б. Н.: Теория планигонов, *Известия Ак. наук СССР.* **23** (1959), 356—386.
[3] LAVES, F.: Ebenteilung und Koordinationszahl, *Z. Kristallogr.* **78** (1930) 208—241.
[4] FEJES-TÓTH, L.: *Regular Figures*, Oxford—London—New York—Paris (1964).
[5] HEPPES A.—MOLNÁR J.: Újabb eredmények a diszkrét geometriában II. *Mat. Lapok*, **13** (1962) 39—72.
[6] DOMINYÁK I.: Stabilis körrendszerek sűrűségről. *MTA. III. Oszt. Közleményei* **14** (1964) 401—413.

REGULAR SYSTEMS OF CIRCLES

BY I. DOMINYÁK

Summary

A complete list of all possible regular circle-packings of different types was given by SINOGOWITZ. In the same sense ninety-six regular circle-coverings of different types can be given. Eleven of the regular circle-coverings are stable in the sense that each circle is fixed by its neighbours, so that no circle can be moved separately without disturbing the covering.

A VÉGES SÍKOK JELLEMZÉSE

ÍRTA: REIMAN ISTVÁN

Kárteszi Ferenc professzornak
60. születésnapjára

1. Az axiómarendszerek

Véges síkgeometriáknak a véges projektív, affin és hiperbolikus síkgeometriákat nevezzük, ezeket különböző axiómarendszerekkel adhatjuk meg. A véges projektív, affin, hiperbolikus síkgeometriák szokásos axiómarendszerét jelölje rendre

$$\{P_1, P_2, P_3\}, \quad \{A_1, A_2, A_3\}, \quad \{H_1, H_2, H_3\}.$$

Ezek alapján a *véges sík* a pontoknak olyan véges halmaza, amelyben bizonyos nem üres részhalmazokat különböztetünk meg, amelyeket egyeneseknek nevezünk; továbbá teljesülnek az egyes geometriákban a következő axiómák:

P_1: Két pont pontosan egy egyenest határoz meg.

P_2: Két egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

P_3: Létezik négy pont, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen.

*

A_1: Két pont pontosan egy egyenest határoz meg.

A_2: Egy e egyeneshez egy rajta nem fekvő ponton át pontosan egy olyan egyenes létezik, amelynek e-vel nincs közös pontja.

A_3: Létezik három olyan pont, amelyik nincs egy egyenesen.

*

H_1: Két pont pontosan egy egyenest határoz meg.

H_2: Egy e egyeneshez egy nem rajta levő ponton át legalább két olyan egyenes létezik, amely az e egyenest nem metszi.

H_3: Ha S a sík pontjainak egy részhalmaza, amely tartalmaz három nem egy egyenesen fekvő pontot, és amely tartalmazza bármely két pontjának az összekötő egyenesét, akkor S a sík minden pontját tartalmazza.

*

A fenti axiómákból a projektív és affin síkok esetében már következik, hogy minden egyenesen azonos számú pont van és minden ponton azonos számú egyenes megy át. Nem ez a helyzet azonban hiperbolikus sík esetén: meg lehet adni a $\{H_1, H_2, H_3\}$ axiómáknak eleget tevő rendszert, amelyben az egyeneseken levő pontoknak a száma nem azonos [1]. Helyettesítsük a H_2 axiómát a következő, többet mondó H_2'-vel:

H_2': Egy e egyeneshez egy rajta nem fekvő ponton át pontosan $m > 1$ olyan egyenes létezik, amely e-t nem metszi.

A H_1 és H'_2 axiómákból viszont már következik, hogy a hiperbolikus sík minden egyenesén ugyanannyi pont van, feltéve, hogy létezik három nem kollineáris pont [2], jelölje ezt a pontszámot k. Az ilyen síkokat *reguláris hiperbolikus síkoknak* nevezzük. A reguláris síkok számos szimmetria-tulajdonsággal rendelkeznek, és geometriai szempontból a nem reguláris síkoknál érdekesebbeknek látszanak. A továbbiakban a vizsgált hiperbolikus síkot regulárisnak tekintjük.

2. Telített incidencia rendszerek

Mindhárom geometriai rendszer egyöntetűen jellemezhető *telített incidencia rendszer* segítségével. Ennek definiálása céljából tekintsük az egyeneseknek $\{e_1, e_2, ..., e_{n_1}\}$ és a pontoknak $\{Q_1, Q_2, ..., Q_{n_2}\}$ halmazát. Ezeken a halmazokon értelmezve van olyan $\mathscr{I}(e_i, Q_j)$ függvény, amelyre $\mathscr{I}(e_i, Q_j)=1$ vagy 0. $(i=1, 2, ..., ..., n_1;\ j=1, 2, ..., n_2)$. Az előbbi esetben azt mondjuk, hogy e_i és Q_j illeszkednek egymáshoz, az utóbbiban azt, hogy nem illeszkednek.

Jelölje N azt a számot, ahányszor az $\mathscr{I}(e_i, Q_j)$ értéke 1, amidőn $i=1, 2, ..., n_1$; $j=1, 2, ..., n_2$, ennek neve az *illeszkedések száma.*

Telített incidencia rendszernek nevezzük az $\{e_1, e_2, ..., e_{n_1}\}$ és a $\{Q_1, Q_2, ..., Q_{n_2}\}$ halmazok együttesét, ha teljesülnek a következő axiómák:

I_1: Két különböző ponthoz legfeljebb egy egyenes illeszkedik.

I_2: Az $\mathscr{I}(e_i, Q_j)$ függvény olyan, hogy az N értéke már nem növelhető anélkül, hogy I_1 érvényét ne veszítse.

Az I_1-ből következik, hogy két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet; az I_2 pedig azt is jelenti, hogy $\max N$ csak az egyenesek és pontok számának a függvénye: $\max N=F(n_1, n_2)$.

3. A véges síkok jellemzése telített incidencia rendszerekkel

A fentiek segítségével a véges síkokat a következő módon jellemezhetjük:

1. TÉTEL. *Minden véges síkgeometria olyan telített incidencia rendszer, amelyben az egyenesek száma*

$$n_1 = \frac{1}{k}(k+m)[(k+m)(k-1)+1],$$

a pontok száma

$$n_2=(k+m)(k-1)+1.$$

(k és m egész számok, $k \geqq 2$, $m \geqq 0$).

A véges síkgeometria projektív, ha $m<1$, affin, ha $m=1$, reguláris hiperbolikus, ha $m>1$.

2. TÉTEL. *Ha valamilyen k és m értékhez létezik véges síkgeometria az 1. tételben definiált n_1 számú egyenessel és n_2 számú ponttal, akkor minden olyan telített incidencia rendszer, amelyben n_1 egyenes és n_2 pont van, véges síkgeometria, mégpedig projektív, ha $m<1$, affin, ha $m=1$, reguláris hiperbolikus, ha $(k-1)^2>m>1$.*

Az 1. tétel bizonyítására vegyük figyelembe, hogy a véges sík minden egyenesén k számú pont van, és egy egyeneshez egy rá nem illeszkedő pontból m számú nem metsző létezik, ezért a sík egy tetszőleges pontjára $k+m$ egyenes illeszkedik. Mivel az egy pontra illeszkedő egyenesek a sík összes pontját tartalmazzák, a sík pontjainak a száma

$$n_2 = (k+m)(k-1)+1.$$

A sík minden pontjában megszámlálva az egyeneseket $(k+m)n_2$-t kapunk, de így minden egyenest k-szor vettünk számításba, ezért a sík egyeneseinek a száma

$$n_1 = \frac{k+m}{k} n_2 = \frac{1}{k}(k+m)[(k+m)(k-1)+1].$$

Tekintsünk most egy véges — nem szükségképpen telített — incidencia rendszert, amelyben az I_1 axióma érvényes. Rendeljük hozzá a rendszer egyeneseihez egy mátrix sorait, pontjaihoz pedig ennek a mátrixnak az oszlopait. A mátrix e_i-hez tartozó sorának és Q_j-hez tartozó oszlopának metszetében álló elem legyen $\mathscr{I}(e_i, Q_j)$; így a mátrix N számú 1-est tartalmaz, a többi eleme pedig 0. Legyenek ennek az ún. *incidencia mátrixnak* az oszlopvektorai $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n_2}$; az egyes sorokban álló 1-esek száma legyen rendre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1}$, az egyes oszlopokban állóké pedig $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n_2}$; ezekre

$$(1) \qquad \sum \alpha_i = \sum \beta_i = N.$$

Képezzük az oszlopvektorok összegének négyzetét:

$$(2) \qquad (\sum \mathbf{b}_i)^2 = \sum \mathbf{b}_i^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j.$$

A jobb oldali összeg első tagjára (1)-re való tekintettel fennáll, hogy

$$(3) \qquad \sum \mathbf{b}_i^2 = \sum \beta_i = N,$$

a második tagjában I_1 teljesülése miatt egyik összeadandó sem nagyobb 1-nél, ezért

$$(4) \qquad \sum_{i \neq j} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j \leqq 2\binom{n_2}{2} = n_2(n_2-1),$$

és egyenlőség csak akkor állhat, ha valamennyi $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j$ szorzat $(i \neq j)$ 1-gyel egyenlő, tehát ha bármely két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van. (2) bal oldala viszont

$$(\sum \mathbf{b}_i)^2 = \sum \alpha_i^2$$

alakban írható, amiből viszont az aritmetikai és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség alapján (1)-gyel összevetve következik, hogy

$$(5) \qquad \sum \alpha_i^2 \geqq \frac{(\sum \alpha_i)^2}{n_1} = \frac{N^2}{n_1},$$

és egyenlőség csakis akkor áll, ha valamennyi α_i egyenlő, azaz valamennyi egyenesnek ugyanannyi pontja van.

(3), (4) és (5) alapján (2)-ből következik, hogy

$$\frac{N^2}{n_1} \leqq N + n_2(n_2-1),$$

ebből

$$N \leqq \frac{1}{2}\left(n_1 + \sqrt{n_1^2 + 4n_1 n_2(n_2-1)}\right) = S. \tag{6}$$

Az N értékére tehát (6) egy felső becslést ad. Ha a vizsgált incidencia rendszer véges geometria, akkor (4)-ben és (5)-ben az egyenlőség jele érvényes, és így (6)-ban is $N=S$, a maximális N érték tényleg fellép, azaz a véges síkgeometriában I_2 érvényes. Mivel pedig a véges síkokon I_1 mindenkor teljesül, az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

A 2. tétel bizonyításakor induljunk ki abból a megfigyelésből, hogy az 1. tétel bizonyításakor a

$$\max N = F(n_1, n_2)$$

függvény értékét is meghatároztuk arra az esetre, ha n_1 és n_2 lehetnek egy véges sík egyenes-, ill. pontszámai, méghozzá $\max N = S$.

Tekintsünk tehát egy ilyen n_1, n_2 értékpárhoz tartozó telített incidencia rendszert. I_2-ből és előző megjegyzésünkből következik, hogy (6)-ban az egyenlőség jele érvényes, ez viszont csak úgy lehetséges, ha (4)-ben és (5)-ben is egyenlőség áll, tekintettel I_1-re. Ez viszont azt jelenti, hogy *bármely egyenesen ugyanannyi pont van*, és bármely két pontot pontosan egy egyenes köt össze, vagyis a

P_1, A_1, H_1 *axiómák teljesülnek.*

Mivel az összes illeszkedések száma I_2 miatt S-sel egyenlő, ezért egy egyenesre S/n_1 pont illeszkedik, ennek értéke éppen k. Megmutatjuk, hogy minden pontra ugyanannyi egyenes illeszkedik. Válasszunk ki ui. egy tetszőleges Q pontot, az erre illeszkedő egyenesek P_1, A_1, H_1 teljesülése miatt a sík összes pontját tartalmazzák, tehát Q-n kívül még n_2-1-et. Mivel ezeken az egyeneseken Q-n kívül még $k-1$ pont van, a Q-n átmenő egyenesek száma

$$\frac{n_2-1}{k-1} = k+m,$$

ez viszont független Q választásától, tehát *minden ponton át $k+m$ egyenes megy.*

A Q ponton átmenő egyenesek közül egy, a Q-t nem tartalmazó e egyenest pontosan k számú metsz, mivel e-nek éppen k pontja van, és így m számú nem metszi e-t, azaz

egy e egyeneshez egy rajta nem fekvő ponton át pontosan m számú olyan egyenes létezik, amely e-t nem metszi.

Ez viszont a P_2 axióma teljesülését jelenti, ha $m<1$ (vagyis $m=0$), A_2-ét, ha $m=1$, és H_2'-ét, ha $m>1$.

Hátra van még a P_3, A_3, H_3 axiómák teljesülésének az igazolása. Ha $k>2$, $m=0$, a síknak legalább 7 egyenese van, mindegyiken legalább három ponttal, így nyilvánvalóan kiválasztható 4 olyan pont, amelyek között nincs három kollineáris, tehát P_3 teljesül. Hasonlóan, $k \geqq 2$, $m=1$ esetén az egyenesek száma legalább 6, minden egyenes legalább két pontot tartalmaz, tehát létezik 3 nem kollineáris pont, azaz A_3 teljesül.

Ha végül $m > 1$ és tételünk kirovása miatt $(k-1)^2 > m$, D. W. CROWE egy lemmájából következik, hogy H_3 is teljesül [2]. Válasszunk ki ui. három nem kollineáris pontot, A-t, B-t és C-t. A C pontot az AB egyenes pontjaival összekötő k számú egyenes a síknak $k(k-1)+1$ pontját tartalmazza. Válasszuk ki most a síknak egy tetszőleges D pontját és ezt kössük össze az előbbi $k(k-1)+1$ pont mindegyikével. A D pontra $k+m$ egyenes illeszkedik, és ezek között van olyan, amely az előbbi ponthalmaznak legalább két pontját tartalmazza, azaz D hozzátartozik az A, B, C pontok által meghatározott síkhoz. Ha állításunkkal ellentétben ugyanis a D-n átmenő egyenesek mindegyike a szóban forgó pontok közül legfeljebb egyre illeszkednék, akkor $k(k-1)+1 \leqq k+m$, azaz $(k-1)^2 \leqq m$ következnék, ellentétben a feltevéssel.

Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

4. Néhány megjegyzés

Végezetül néhány megjegyzést fűzünk a telített incidencia rendszerek és a véges síkok kapcsolatához. Az már általában nem igaz, hogy minden telített incidencia rendszer tetszőleges k és m értékekre véges síkot szolgáltat. Ha pl. $k=7$, $m=0$, a telített incidencia rendszer nem véges sík, mert ha az lenne, léteznék olyan véges projektív sík, amelynél minden egyenesen 7 pont van; mint ismeretes, ilyen nem létezik. Ebben az esetben $\max N < S$.

Ha $m > 1$, a telített incidencia rendszer még abban az esetben sem lesz biztosan véges sík, ha $\max N = S$. Ha pl. $n_1 = 35$, $n_2 = 15$ (azaz $k=3$, $m=4$), bebizonyítható, hogy $\max N = 105 = S$ [3]; viszont megadható telített incidencia rendszer 35 egyenessel és 15 ponttal úgy, hogy H_1 és H_2' teljesüljön, de H_3 már nem. Ebben az esetben azonban a $(k-1)^2 > m$ feltétel nem teljesül.

IRODALOM

[1] OSTROM, T. G.: Ovals and finite Bolyai–Lobachevsky planes, *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), 899–901.

[2] CROWE, D. W.: The construction of finite regular hyperbolic planes from inversive planes of even order, *Coll. Mathematicum* **13** (1965), 247–250.

[3] REIMAN, I.: Egy gráfokkal kapcsolatos szélsőérték feladatról, *Mat. Lapok* **12** (1961), 44–53.

(Beérkezett: 1967. március 3.)

A CHARACTERIZATION OF THE FINITE PLANES

by

I. REIMAN

To Professor Ferenc Kárteszi
on his 60th birthday.

Summary

The finite projektive, affine and regular hyperbolic planes will be called *finite planes*. A finite hyperbolic planes is *regular* if each line contains the same number of points.

All three geometries, the finite projektive, affine and regular hyperbolic geometries, can be characterized unanimously by *saturated incidence structures*. To define this, consider the sets of lines and points: $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n_1}\}$ and $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n_2}\}$. A function $\mathscr{I}(e_i, Q_j\}$ $(i=1, 2, \ldots, n_1;\ j=1, 2, \ldots$ $\ldots, n_2)$ is defined on these sets, and $\mathscr{I}(e_i, Q_j) = 1$ or 0. In the firs case e_i and Q_j are incident, and in the second they are not incident. Let N denote the number of the values 1, N is called the *number of incidencies*. The sets $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n_1}\}$, $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n_2}\}$ are called saturated incidence structures, if the following axioms are satisfied:

I_1: At most one line is incident with two different points.

I_2: The function $\mathscr{I}(e_i, Q_j)$ is such that the value of N can not increased if I_1 must hold.

Two theorems are proved:

THEOREM 1. *Every finite plane is a saturated incidence structure, where*

$$n_1 = \frac{1}{k}(k+m)[(k+m)(k-1)+1]$$

is the number of lines, and

$$n_2 = (k+m)(k-1)+1$$

is the number of points (k and m are integers, $k \geqq 2$, $m \geqq 0$). Each line contains k points, and there are m lines through a given point, not incident with a line, not meeting this line.

The finite plane geometry is projective, affine and regular hyperbolic respectively, if $m<1$, (i. e. $m=0$), *$m=1$ and $m>1$ respectively.*

THEOREM 2: *If for some values k and m, there is a finite plane geometry with n_1 lines and n_2 point defined in theorem 1, then every saturated incidence structure, with n_1 lines and n_2 point, is a finite plane geometry, moreover it is projektive if $m<1$, it is affine if $m=1$ and it is regular hyperbolic if $(k-1)^2>m>1$.*

SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY SZUPERPOZÍCIÓK FELBONTÁSÁNAK EGY LÉNYEGILEG ÚJ MÓDSZERÉRŐL[1]

ÍRTA: MEDGYESSY PÁL

1.

Legyen $f(x; \alpha, \beta)$ egy kétparaméteres, egycsúcsú sűrűségfüggvény. Legyen $\alpha \in A$, $\beta \in B$, ahol az A, B értelmezési tartományok adottak. Ekkor a

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x; \alpha_k, \beta_k) \qquad (\alpha_k \in A, \quad \beta_k \in B)$$

$(p_k > 0)$ összefüggésel definiált $k(x)$ függvényt az $f(x; \alpha_k, \beta_k)$ *komponensek* p_k *súlyokkal* képezett *szuperpozíciójának* nevezzük.

Legyen adott $k(x)$ grafikonja. Egy olyan numerikus eljárást, amely az N, p_k, α_k, β_k paraméterek (vagy ezek egy része) értékének $k(x)$ grafikonja segítségével történő *közelítő* meghatározására szolgál, a $k(x)$ szuperpozíció (numerikus) *felbontásának* nevezünk.

A felbontási eljárások lényegét (vö. [1]) a következőkben foglalhatjuk össze:

A grafikonjával képviselt $k(x)$ szuperpozícióhoz bizonyos $\mathbf{L}$ lineáris operátorral hozzárendelünk egy

$$b(y) = \mathbf{L}\{k(x); y\}$$

ún. *tesztfüggvényt*. Az $\mathbf{L}$ lineáris operátort úgy választjuk meg, hogy

$$\mathbf{L}\{f(x; \alpha_k, \beta_k); y\} = g(y, \alpha_k, \beta_k)$$

egy olyan egycsúcsú *sűrűségfüggvény* legyen, amelynek grafikonja felrajzolva — megadott „keskenység”-definíció mellett — „keskenyebbnek”, kevésbé szétterülőnek mutatkozna, mint $f(x; \alpha_k, \beta_k)$ grafikonja, emellett csúcshelye valamely másik $g(y; \alpha_l, \beta_l)$ $(\alpha_l \in A, \beta_l \in B)$ sűrűségfüggvény csúcshelyétől legalább olyan távol volna, mint $f(x; \alpha_k, \beta_k)$ csúcshelye $f(x; \alpha_l, \beta_l)$ csúcshelyétől. — Mindebből az következik, hogy A) a $b(y)$ tesztfüggvény

$$b(y) = \sum_{k=1}^{N} p_k g(y; \alpha_k, \beta_k)$$

alakú lesz, vagyis ismét sűrűségfüggvény-szuperpozíció; B) ha felrajzolnánk $b(y)$ grafikonját, abban az egyes komponensek grafikonjai *különváltabban* mutatkoznának meg, mint $k(x)$ grafikonjában. Ha a különváltság elég nagymérvű, a komponensek grafikonjai szinte egymást nem is zavarva jelennének meg. Ekkor $b(y)$ grafikonjából

[1] E cikk magja megtalálható a szerző egy levelében, melyet Prof. E. BREITENBERGERNEK (Ohio University, College of Arts and Sciences, Department of Physics, Athens, Ohio, USA) 1966. december 14-én írt.

a komponensek száma — és esetleg egyes paraméterek közelítő értéke is — megállapítható volna.

Mivel mindez *közelítőleg* igaz akkor is, ha $k(x)$ grafikonjának *mért* ordinátaértékeiből a lineáris operációnak megfelelő numerikus módszerrel $b(y)$ bizonyos közelítésének G grafikonját állítjuk elő, felbontási eljárásnak G csúcsai számának, helyeinek stb. megállapítását fogjuk tekinteni.

Adott felbontási probléma esetében a feladat tehát: A) a fentebb említett lineáris operátor megtalálása; B) ennek segítségével a felbontási eljárás alapjául szolgáló $b(y)$ tesztfüggvény meghatározása; végül C) mindezek alapján numerikus módszer kidolgozása a tesztfüggvény közelítő grafikonjának előállítására.

Az [1]-ben ismertetett felbontási módszerek jórésze arra az esetre vonatkozott, amidőn $k(x)$ komponensei $f(x-\alpha_k;\beta_k)$ alakúak, ahol $\alpha_k\in(-\infty,\infty)$, $\beta_k\in(0,\infty)$, $\beta_1\leqq\beta_2\leqq\ldots\leqq\beta_N$, és az (α_k,β_k) párok mind különbözők; továbbá β_k jellemzi $f(x-\alpha_k;\beta_k)$ grafikonjának „keskenységét", pontosabban: β_k csökkenésekor e grafikon „keskenysége" is csökken. (Sok esetben β_k a szórás vagy annak valamilyen monoton függvénye volt.) Ez esetben tehát a szuperpozíció alakja

$$k(x)=\sum_{k=1}^{N}p_kf(x-\alpha_k;\beta_k)\qquad(0<\beta_1\leqq\beta_2\leqq\ldots\leqq\beta_N). \tag{1.1}$$

Ebben az esetben a felbontáshoz szükséges $b(y)$ tesztfüggvényt a következőképp állítottuk elő:

1. Képeztük $k(x)$ *Fourier*-transzformáltját, $\varkappa(t)$-t. Ha $f(x;\beta_k)$ karakterisztikus függvénye $\varphi(t;\beta_k)$, akkor

$$\varkappa(t)=\sum_{k=1}^{N}p_ke^{i\alpha_kt}\varphi(t;\beta_k).$$

2. $\varkappa(t)$-t osztottuk $\varphi(t;\lambda)$-val, ahol a λ paraméterre fenn kellett állnia a $0<\lambda<\beta_1$ egyenlőtlenségnek (ez általában teljesíthető feltétel volt); emellett $\dfrac{\varphi(t;\beta_k)}{\varphi(t;\lambda)}$ karakterisztikus függvény maradt, a hozzátartozó $g(y;\beta_k,\lambda)$ sűrűségfüggvény egycsúcsú volt, utóbbi grafikonja pedig „keskenyebb" lett, mint $f(x;\beta_k)$ grafikonja, — annál „keskenyebb", minél nagyobb volt λ.

3. $\dfrac{\varkappa(t)}{\varphi(t;\lambda)}$-nak képeztük az inverz *Fourier*-transzformáltját és ezt vettük — a következőkben $b(y)$ helyett $b(y;\lambda)$-val jelölendő — tesztfüggvénynek, vagyis

$$b(y;\lambda)=\sum_{k=1}^{N}p_kg(y-\alpha_k;\beta_k,\lambda)\qquad(0<\lambda<\beta_1)$$

volt. Ha $b(y;\lambda)$ komponenseinek kölcsönös csúcstávolságai nem voltak kisebbek, mint $k(x)$ komponenseinek kölcsönös csúcstávolságai, ez a függvény megfelelt tesztfüggvénynek; az ezt létesítő **L** lineáris operátort pedig a

$$b(y;\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iyt}}{\varphi(t;\lambda)}\left[\int_{-\infty}^{\infty}k(x)e^{itx}\,dx\right]dt \tag{1.2}$$

összefüggésből olvashattuk ki.

Példa. Legyen

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{2\beta_k \operatorname{ch}[\pi(x-\alpha_k)/2\beta_k]}. \tag{1.3}$$

Ekkor

$$\varkappa(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{i\alpha_k t}}{\operatorname{ch} \beta_k t},$$

azaz

$$\varphi(t; \beta_k) = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_k t}.$$

A

$$\frac{\varphi(t; \beta_k)}{\varphi(t; \lambda)} = \frac{\operatorname{ch} \lambda t}{\operatorname{ch} \beta_k t} \qquad (0<\lambda<\beta_1)$$

karakterisztikus függvény (vö. [1], p. 65) és a hozzátartozó sűrűségfüggvény,

$$g(y; \beta_k, \lambda) = \frac{1}{\beta_k} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{2\beta_k} \cdot \cos \frac{\pi\lambda}{2\beta_k}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{\beta_k} + \cos \frac{\pi\lambda}{\beta_k}} \qquad (0<\lambda<\beta_1)$$

egycsúcsú, és λ növekedésekor egyre „keskenyebb" (kisebb szórású). $\varkappa(t)/\varphi(t; \lambda)$ inverz *Fourier*-transzformáltja,

$$b(y; \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k g(y-\alpha_k; \beta_k, \lambda)$$

megfelel tesztfüggvénynek, mert $b(y; \lambda)$ komponensei csúcshelyeinek kölcsönös távolságai azonosak $k(x)$ komponensei csúcshelyeinek kölcsönös távolságaival.

$b(y; \lambda)$-nak $k(x)$ „grafikonja" ordinátaértékeivel történő, numerikus módszereken alapuló közelítő előállítását nagyon megnehezíti az, hogy (1. 2)-ben a két integrálás *nem cserélhető fel* és így a vonatkozó **L** lineáris operátor nem egyetlen integrálást jelent, vagyis $b(y; \lambda)$ *nem állítható elő*

$$b(y; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y, x) f(x)\, dx$$

alakban, hanem csupán a

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y; \lambda) b(y; \lambda)\, dy \tag{1.4}$$

integrálegyenlet megoldásával. Egyes esetekben ugyan (vö. [2]) ezen integrálegyenlet numerikus megoldása aránylag egyszerűen elvégezhető; $k(x)$ értékeit azonban a grafikonból csak hibákkal kaphatjuk meg és e hibák a numerikus megoldás pontosságát erősen lerontják. Elméleti meggondolásokból — melyekre itt nem térhetünk ki — az is következik, hogy e nehézségek *elvileg* elháríthatatlanok.

2.

A mondottakból következik, hogy a fentebb 1., 2., 3. alatt leírt helyett valamilyen más eljárást kell keresni a $b(y; \lambda)$ tesztfüggvény előállítására, — olyan eljárást, amelynek numerikus elvégzése kevéssé érzékeny $k(x)$ mért értékeinek hibáira. Ilyen eljárásra jutunk 1., 2., 3. következő módosításával:

1'. Képezzük $k(x)$ *Fourier*-transzformáltját, $\varkappa(t)$-t. A fenti jelölésekkel

$$\varkappa(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k e^{i\alpha_k t} \varphi(t; \beta_k).$$

2'. Legyen $\Phi(t)$ olyan karakterisztikus függvény, melyre $\frac{\Phi(t)}{\varphi(t; \lambda)}$ $(0 < \lambda < \beta_1)$ egy $M(x; \lambda)$ függvény *Fourier*-transzformáltja, azaz

$$\frac{\Phi(t)}{\varphi(t; \lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} M(x; \lambda) e^{itx}\, dx, \qquad (0 < \lambda < \beta_1) \tag{2.1}$$

emellett a

$$\frac{\varphi(t; \beta_k)}{\varphi(t; \lambda)} \Phi(t)$$

karakterisztikus függvényhez egy olyan $g^*(y; \beta_k, \lambda)$ egycsúcsú sűrűségfüggvény tartozik, melynek grafikonja „keskenyebb", mint $f(x; \beta_k)$ grafikonja, éspedig annál keskenyebb, minél nagyobb λ. — Képezzük $\varkappa(t) \frac{\Phi(t)}{\varphi(t; \lambda)}$-t.

3'. Vegyük $b(y; \lambda)$ tesztfüggvénynek $\varkappa(t) \frac{\Phi(t)}{\varphi(t; \lambda)}$ inverz *Fourier*-transzformáltját. Ekkor

$$\varkappa(t) \frac{\Phi(t)}{\varphi(t; \lambda)} = \sum_{k=1}^{N} p_k e^{i\alpha_k t} \frac{\varphi(t; \beta_k)}{\varphi(t; \lambda)} \Phi(t)$$

és

$$b(y; \lambda) = \sum_{k=1}^{N} p_k g^*(y - \alpha_k; \beta_k, \lambda) \qquad (0 < \lambda < \beta_1).$$

Ha $b(y; \lambda)$ komponenseinek kölcsönös csúcstávolságai nem kisebbek, mint $k(x)$ komponenseinek kölcsönös csúcstávolságai, ez valóban megfelel tesztfüggvénynek. *Emellett $b(y; \lambda)$ felírható*

$$b(y; \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} M(y - x; \lambda) k(x)\, dx \qquad (0 < \lambda < \beta_1)$$

alakban; ebből a $b(y; \lambda)$ tesztfüggvényt létesítő $\mathbf{L}$ lineáris operátor rögtön kiolvasható, mert $b(y; \lambda)$ *Fourier*-transzformáltja a $\varkappa(t)$ és $\Phi(t)/\varphi(t; \lambda)$ *Fourier*-transzformáltak szorzata. — Hangsúlyozandó, hogy $M(x; \lambda)$ *nem* sűrűségfüggvény.

Kimondható tehát a következő

TÉTEL. *A*

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x-\alpha_k;\beta_k)$$

sűrűségfüggvény-szuperpozíció felbontásához alapul szolgáló $b(y;\lambda)$ *tesztfüggvénynek vehető*

$$b(y;\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} M(y-x;\lambda)k(x)\,dx \qquad (0<\lambda<\beta_1). \tag{2.2}$$

E tétel alapján tehát $b(y;\lambda)$ $k(x)$ grafikonja segítségével történő kiszámításakor nem integrálegyenletet kell megoldani, hanem egy paraméteres integrált kell kiszámítani, ami $k(x)$ mérési hibáira kevéssé érzékeny. Természetesen az $M(x;\lambda)$ függvényt, illetve a $\Phi(t)$ karakterisztikus függvényt esetenként kell megkeresni.[2]

Példa. Tekintsük ismét az (1. 3) alatti

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{1}{2\beta_k \operatorname{ch}[\pi(x-\alpha_k)/2\beta_k]}$$

szuperpozíciót, illetve ennek

$$\varkappa(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{e^{i\alpha_k t}}{\operatorname{ch}\beta_k t}$$

karakterisztikus függvényét. Legyen

$$\Phi(t) = e^{-\varepsilon t^2} \quad (\varepsilon>0).$$

$\operatorname{ch}\lambda t \cdot e^{-\varepsilon t^2}$ *Fourier*-transzformáltja az

$$M(x;\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{4\varepsilon}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \cos\frac{\lambda\varepsilon x}{2}$$

függvénynek. Ha $0<\lambda<\beta_1$, $\dfrac{\operatorname{ch}\lambda t}{\operatorname{ch}\beta_k t} e^{-\varepsilon t^2}$-hez a

$$g(y;\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \frac{1}{\beta_k} \frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi y}{2\beta_k}\cdot\cos\dfrac{\pi\lambda}{2\beta_k}}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi y}{\beta_k}+\cos\dfrac{\pi\lambda}{\beta_k}}\,dx$$

sűrűségfüggvény tartozik. Ez $y=0$ körül szimmetrikus és egycsúcsú, mert a konvolúciónak alávetett függvények $x=0$ körül szimmetrikusak és egycsúcsúak (lásd pl. [3], p. 841). Könnyen kiszámítható, hogy $g(y;\lambda)$ szórásnégyzete $\beta_k^2-\lambda^2$ vagyis — a szórásnégyzetet véve „keskenység"-jellemzőnek —, $g(y;\lambda)$ grafikonja „keskenyebb", mint $f(x;\beta_k)$ grafikonja. Mivel $b(y;\lambda)$ komponensei csúcshelyeinek

[2] Kimutatható, hogy ha $k(x)$ és $b(y;\lambda)$ szórásnégyzetei léteznek, (2. 2) oly lineáris transzformáció, mely $k(x)$ szórásnégyzetét *csökkenti*, (szemben a közönséges konvolúcióval, amely növeli a szórásnégyzetet). Ezt az észrevételt azonban nem használjuk fel a jelen dolgozatban.

kölcsönös távolságai azonosak $k(x)$ csúcshelyeinek kölcsönös távolságaival, a tesztfüggvény

$$b(y;\lambda)=e^{\frac{\lambda^2}{4\varepsilon}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\cos\frac{\lambda\varepsilon(y-x)}{2}k(x)\,dx$$

lesz.

MEGJEGYZÉS. Lehetséges, hogy bizonyos $k(x)$ szuperpozíciók esetében az $M(x;\lambda)$ függvény nem adható meg zárt alakban. (Pl. csak mint függvénysor.) Értékei ekkor is táblázatba foglalhatók és ez numerikus eljáráshoz elegendő. Ilyen eset adódik elő például akkor, ha $k(x)$ normális sűrűségfüggvények szuperpozíciója; ekkor vehető pl. $\Phi(t)=e^{-e^{\varepsilon|t|}}$ $(\varepsilon>0)$, az ennek megfelelő $M(x;\lambda)$ függvény azonban csak hatványsor alakjában írható fel.

3.

Új felbontási eljárásunk numerikus végrehajtásával egy másik dolgozatban szándékozunk foglalkozni. Érdemes azonban már itt felvetni a következő kérdést: Tegyük fel, hogy a kiindulási $k(x)$ szuperpozícióra valamilyen $\zeta(x)$ „zaj" $z(x)$ realizációja rakódik rá, azaz ideális esetben sem $k(x)$ volna észlelhető, hanem $k(x)+z(x)$. Legyen $\zeta(x)$ 0 várható értékű, tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamat, $R(\tau)$ autokorreláció-függvénnyel. Hajtsuk végre $k(x)$ helyett a $k(x)+z(x)$ függvényen a (2. 2) alatti, a tesztfüggvényt szolgáltató lineáris operációt. Bizonyos feltételek mellett az eredmény $b(y;\lambda)$-nak és egy másik, tágabb értelemben stacionárius sztochasztikus folyamat — $\xi(y;\lambda)$ — egy realizációjának az összege. Mi lesz $\xi(y;\lambda)$ autokorrelációs függvénye, $B(\tau;\lambda)$, ill. hogyan kell megválasztani $M(y;\lambda)$-t, hogy $\mathbf{D}^2[\xi(y;\lambda)]$ valamilyen értelemben minimális legyen?

A (2. 2)-ben szereplő integrálás formálisan bizonyos *„szűrő"* alkalmazása az $f(x)$ „bemenő jelre". A szűrők elméletéből ismeretes, (lásd pl. [4], p. 275), hogy ha

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}M(t_1;\lambda)R(t_2-t_1)\overline{M(t_2;\lambda)}\,dt_1\,dt_2<\infty,$$

$$\mu(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{itx}M(x;\lambda)\,dx$$

és $\quad R(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau t}f(t)\,dt,\quad$ ($f(t)$ ún. spektrális sűrűségfüggvény),

akkor

$$B(\tau;\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau t}|\mu(-t)|^2f(t)\,dt,$$

amiből $\mathbf{D}^2[\xi(y;\lambda)]=B(0;\lambda)$ folytán

$$\mathbf{D}^2[\xi(y;\lambda)]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mu(-t)|^2f(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\Phi(-t)}{\varphi(-t;\lambda)}\right|^2f(t)\,dt. \tag{3.1}$$

Ez az alak előnyösebb, mert benne az esetleg zárt alakban meg nem adható $M(x; \lambda)$ függvény helyett annak *Fourier*-transzformáltja szerepel — amelyre a tesztfüggvény előállítása épült.

Legyen most $\left|\frac{\Phi(-t)}{\varphi(-t; \lambda)}\right| \leqq K$. Akkor feltevéseink alapján

$$\mathbf{D}^2[\xi(y; \lambda)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\Phi(-t)}{\varphi(-t; \lambda)}\right|^2 f(t)\, dt \leqq$$

$$\leqq K^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = K^2 \mathbf{D}^2[\zeta(x)].$$

Mindebből a következőket szűrhetjük le problémánkkal kapcsolatban:

A $\mu(t)$ Fourier-transzformáltat, illetve a $\Phi(t)$ karakterisztikus függvényt úgy kell megválasztani, hogy az a (3. 1) *jobb oldalán szereplő integrál értékét minimálissá tegye. Ha*

$$|\mu(-t)| \leqq 1, \quad \mathbf{D}^2[\xi(y; \lambda)] \leqq \mathbf{D}^2[\zeta(x)],$$

a tesztfüggvény előállítása a „zaj" torzító hatását csak csökkentheti.

$\mu(t)$, ill. $\Phi(t)$ optimális megválasztása teljes általánosságban nehéz feladat, hiszen $\Phi(t)$-nek más feltételeknek is eleget kell tennie. Éppen ezért itt csak fenti példánk esetében végzünk részletesebb vizsgálatot.

Legyen tehát $\mu(t) = \operatorname{ch} \lambda t \cdot e^{-\varepsilon t^2} = \mu(-t)$. Ennek maximális értéke $\varepsilon \geqq \frac{\lambda^2}{2}$ esetén 1, $\varepsilon < \frac{\lambda^2}{2}$ esetén pedig 1-nél nagyobb. A „zaj" befolyásának csökkenése tehát $\varepsilon \geqq \frac{\lambda^2}{2}$ esetében biztos; belátható azonban, hogy ez a megkötés a felbontási eljárást elrontja. Így tehát közelebbről meg kellene vizsgálnunk $\mathbf{D}^2[\xi(y; \lambda)]$ értékét különböző $f(t)$ spektrális sűrűségfüggvények esetére. Itt csak azt az esetet vizsgáljuk, amidőn

$$R(\tau) = \sigma^2 \cdot e^{-\frac{\tau^2}{4\delta}} \qquad (\delta > 0),$$

és így $\mathbf{D}^2[\zeta(x)] = \sigma^2$. Ekkor

$$f(t) = \sigma^2 \sqrt{4\pi\delta}\, e^{-\delta t^2}$$

és

$$\mathbf{D}^2[\xi(y; \lambda)] = \sigma^2 \sqrt{4\pi\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^2 \lambda t\, e^{-(2\varepsilon+\delta)t^2}\, dt =$$

$$= \mathbf{D}^2[\zeta(x)]\pi \sqrt{\frac{\delta}{2\varepsilon+\delta}} \left(e^{\frac{\lambda^2}{2\varepsilon+\delta}} + 1\right).$$

E kifejezés $\varepsilon > 0$ esetén δ minden értékére korlátos, és ha δ elég kicsi (azaz nagyjából ún. „fehér zaj" rakódik rá a $k(x)$ függvényre), kisebb is lehet, mint $\mathbf{D}^2[\xi(y; \lambda)]$, vagyis a (2. 2) alatt szereplő lineáris operáció lecsökkenti a „zaj" befolyását.

Kívánatos volna a tekintett példával kapcsolatban megvizsgálni, található-e $e^{-\varepsilon t^2}$ helyett olyan másik $\Phi(t)$ függvény, melynek esetében $|\mu(-t)| \leqq 1$, vagyis a „zaj" befolyása biztosan csökken a (2. 2) lineáris operáció alkalmazásakor.

IDÉZETT IRODALOM

[1] MEDGYESSY, P.: *Decomposition of superpositions of distribution functions.* Akadémiai Kiadó, Budapest 1961.

[2] MEDGYESSY PÁL: Egy konvolúciós típusú integrálegyenlet numerikus megoldása és ennek felhasználása Gauss-függvény szuperpozíciók felbontására. *Az MTA III. Oszt. Közl.* **16** (1966) 47—64.

[3] WINTNER, A.: Cauchy's stable distributions and an explicit formula of Mellin. *Amer. Jour. Math.* **78** (1956) 819—861.

[4] И. И. Гихман—А. В. Скороход: *Введение в теорию случайных процессов.* Изд. „Наука", Москва, 1965.

(Beérkezett: 1967. április 11.)

ON AN ESSENTIALLY NEW METHOD OF DECOMPOSING SUPERPOSITIONS OF DENSITY FUNCTIONS

By P. MEDGYESSY

Summary

The majority of the current methods of decomposing a superposition (1. 1) of density functions was adapted to that case when $\frac{\varphi(t;\beta_k)}{\varphi(t;\lambda)}$, where $\varphi(t;\beta_k)=\mathrm{F}\{f(x;\beta_k);t\}$ (F denotes Fourier transform) and $0<\lambda<\beta_1$ was the characteristic function of some density function $g(y;\beta_k,\lambda)$ whose dispersion was less than that of $f(x;\beta_k)$. Then a test function $b(y;\lambda)$ (whose maxima might indicate the components of the initial superposition (1. 1)) was obtained by the numerical resolution of the integral equation (cf. [2]); consequently, these methods were very sensitive to the errors of the initial data. — The present paper aims at eliminating this disadvantage by introducing an essentially new type of test function, obtained by the convolution integral (2. 2) from (1. 1); in (2. 2) $M(x;\lambda)$ is defined by (2. 1) in which $\Phi(t)$ is some characteristic function satisfying the conditions: 1). $\frac{\Phi(t)}{\varphi(t;\lambda)}$ is a Fourier transform; 2). $\mathrm{F}^{-1}\left\{\frac{\varphi(t;\beta_k)}{\varphi(t;\lambda)}\Phi(t);y\right\}$ is a unimodal density function whose dispersion is less than that of $f(x;\beta_k)$. — The method is illustrated on a superposition (1. 3) of hyperbolic cosine density functions. The effect of the transformation (2. 2) on a stationary noise superposed on (1. 1) is also investigated.

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1967. VII. 7. – Terjedelem: 12 (A/5) ív, 219 ábra

67-5688 Szegedi Nyomda

Ára: 26,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Megjelent 1967. IX. 30.

Index: 26 498

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

XVII. KÖTET

4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1967

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XVII. kötet 4. szám.

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.

Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közöl. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae.

DIMENZIÓ ÉS KONVEXITÁS, III.*

Írta: DEÁK ERVIN

III. FEJEZET

IRÁNYTEREK ÉS TOPOLOGIKUS IRÁNYTEREK. (A LINEÁRIS TÉR, A GYENGE TOPOLÓGIÁJÚ LOKÁLISAN KONVEX TÉR ÉS A KONVEXITÁS FOGALMÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSA)

11. §. Irányterek

(11. 1) DEFINÍCIÓ. *Egy nem-üres (absztrakt) X halmaz egy iránya, ill. rendes iránya* az X részhalmazaiból alkotott rendezett párok olyan $\mathscr{R}$ rendszere, amely eleget tesz az (1. 1. 1)—(1. 1. 4) irányaxiómáknak, ill. az (1. 16. 1) rendességi axiómának is.

(11. 2) DEFINÍCIÓ. Egy nem-üres X halmaz tetszőleges irányainak, ill. rendes irányainak tetszőleges nem-üres halmazát X egy *iránystruktúrájának, ill. rendes iránystruktúrájának nevezzük.*

(11. 3) DEFINÍCIÓ. *Iránytérnek* nevezünk minden $(X, \mathfrak{R})$ rendezett párt, ahol

a) X egy nem-üres halmaz,

b) $\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}_\alpha\colon \alpha\in A\}$ az X halmaz egy rendes iránystruktúrája, és

c) minden (4. 1. 1) típusú halmaz legfeljebb egy pontot tartalmaz.

(11. 4) *Megjegyzések.* 1° Az „irány", „iránystruktúra", „rendes irány" és „rendes iránystruktúra" fogalmak itteni, *absztrakt halmazra* vonatkozó definíciója mindenben megegyezik a *topologikus térre* vonatkozó (1. 1), (1. 11), (1. 16) és (1. 17) definíciókkal, kivéve azt az (1. 1)-beli (egyetlen) topológiai követelményt, hogy minden irány minden elemének első, ill. második tagja nyílt, ill. zárt halmaz legyen, és az (1. 11)-beli szubbázis-feltételt.

2° Bármely nem-üres X halmaznak van (rendes) iránya (pl. az (1. 18. 1) rendszer), tehát (rendes) IS-ja is (vö. (1. 18), c)-vel). Továbbá minden nem-üres X halmaznak van olyan rendes IS-ja, amely a (11. 3), c) „szeparáltsági" feltételt (vö. (11. 7), 4°) is teljesíti; ilyen pl. az

$$\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_x : x\in X\}$$

rendszer, ahol

$$\mathscr{R}_x=\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{x\}), (\{x\}, X), (X, X)\} \qquad (x\in X);$$

sőt, a (11. 3), c) feltételt még *egyetlen* rendes iránnyal is ki lehet elégíteni bármely nem-üres alaphalmaznál, a jólrendezési tétel felhasználásával. Így tehát az I. fejezet tárgyát képező dimenzióprobléma analogonja a II. fejezetben tárgytalanná válik (vö. azonban (11. 18)-cal).

3° E fejezetben kizárólag rendes iránystruktúrák szerepelnek, ezért nem hasz-

* Az I. rész a MTA III. Oszt. Közleményei **17** (1967) 2. számában, a II. rész pedig a **17** (1967) 3. számában jelent meg. A rövidítések és jelölések teljes mutatóját, a definíciók teljes mutatóját és a teljes irodalomjegyzéket is az I. részhez csatoltuk.

náltuk a tulajdonképpen rendes (és szeparált) iránytérnek nevezendő iránytér elnevezésénél a „rendes” jelzőt.

4° E fejezetben hallgatólagosan vagy idézve felhasználjuk a topologikus terek irányainak és IS-inak olyan — az I. fejezetben bebizonyított — tulajdonságait, ill. a rájuk vonatkozó fogalmakat, amelyek a topológiától függetlenek, tehát a (11. 1) és (11. 2) fogalmakra is érvényesek.

(11. 5) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér *$\mathcal{R}$-irányú* ($\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$) *síkjainak* (röviden: *$\mathcal{R}$-síkjainak*) az

$$\mathcal{S}(\mathcal{R}) = \{F\setminus G : (G, F)\in\mathcal{R}, G\subset F\}$$

halmazcsalád elemeit nevezzük.

(11. 6) DEFINÍCIÓ. Legyen $(X, \mathfrak{R})$ egy iránytér és $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$. Valamely $F\setminus G\in\mathcal{S}(\mathcal{R})$ *síkhoz tartozó $\mathcal{R}$-zárt, ill. $\mathcal{R}$-nyílt féltereknek* az F, $X\setminus G$, ill. G, $X\setminus F$ féltereket nevezzük; G és F, ill. $X\setminus G$ és $X\setminus F$ a síkhoz tartozó *alsó, ill. felső félterek.* Egy halmazt *$\mathfrak{R}$-zárt*, ill. *$\mathfrak{R}$-nyílt féltérnek* nevezünk, ha valamely $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$-re $\mathcal{R}$-zárt, ill. $\mathcal{R}$-nyílt féltér.

(11. 7) MEGJEGYZÉSEK. 1° Az „$\mathcal{R}$-zárt” és „$\mathcal{R}$-nyílt” kifejezéseknek itt természetesen nincs topológiai értelme, s csak az illető féltérnek $\mathcal{R}$-ben játszott szerepére utalnak.

2° A (11. 6) definíció nem ragadja meg az összes $\mathcal{R}$-irányú féltereket, hiszen egyes $(G, F)\in\mathcal{R}$ párokra $G=F$ is lehet.

3° A sík fogalmával a (11. 3)-beli b) és c) követelmény oly módon fejezhető ki, amely a lineáris terek síkjainak viselkedésére emlékeztet.

Egy X nem-üres halmaz valamely $\mathcal{R}$ iránya pl. akkor és csak akkor rendes, ha minden $x\in X$ pont eleme valamely $\mathcal{R}$-síknak (mégpedig a (6. 2. 1) jelöléssel az

$$S_x(\mathcal{R}) = F_x(\mathcal{R})\setminus G_x(\mathcal{R}) \tag{11.7.1}$$

halmaznak, amely (6. 3) szerint $\mathcal{S}(\mathcal{R})$-hez tartozik); más szóval: az $\mathcal{R}$-síkok $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ családja kitölti az X halmazt.

4° A (11. 3), c) követelmény, tekintettel $\mathcal{R}$ rendességére, az előbbi megjegyzés szerint azt jelenti, hogy X minden egypontos részhalmaza az őt tartalmazó $\mathcal{R}$-síkok ($\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$) metszete. Ez ekvivalens azzal, hogy két különböző $x, y\in X$ ponthoz mindig található egy őket — nem okvetlenül szigorúan — elválasztó $\mathcal{R}$-sík ($\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$), vagyis olyan sík, hogy x a sík által létesített egyik $\mathcal{R}$-zárt féltérben, y pedig ennek komplementumában van.

Ez tehát a topológiai T_1-axiómára emlékeztető „szétválasztási axióma”.

5° Az $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ család — definíciója alapján — egy-egyértelműen megfelel $\mathcal{R}$ egy részhalmazának, és átveszi annak természetes rendezését.

(11. 8) DEFINÍCIÓ. Legyen

$$S, S'\in \bigcup\{\mathcal{S}(\mathcal{R}) : \mathcal{R}\in\mathfrak{R}, S\neq S'\}.$$

Azt mondjuk, hogy *az S sík S'-nél $\mathcal{R}$-magasabb*, ill. *$\mathcal{R}$-alacsonyabb* valamely $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$-re, ha S, $S'\in\mathcal{S}(\mathcal{R})$ és $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ imént bevezetett rendezésében $S\succ S'$, ill. $S\prec S'$.

(Előfordulhat, hogy az S, S' halmazok egyaránt $\mathcal{R}_1$- és $\mathcal{R}_2$-síkok két különböző $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\in\mathfrak{R}$ irányra, de $\mathcal{R}_1$-re nézve más a rendezési viszonyuk, mint $\mathcal{R}_2$-re.)

Bármely $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ iránynak, ill. a hozzá tartozó $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ családnak a rendezéséből az iránytér X alaphalmazának egy féligrendezése adódik:

(11. 9) DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$, x, $x'\in X$ és $x\neq x'$. *Az x pontot x'-nél $\mathscr{R}$-magasabbnak, ill. $\mathscr{R}$-alacsonyabbnak* mondjuk, ha az $S_x(\mathscr{R})$ sík $\mathscr{R}$-magasabb, ill. $\mathscr{R}$-alacsonyabb az $S_{x'}(\mathscr{R})$ síknál.

(11. 10) DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$, $E\subseteq X$ és $E\neq\emptyset$. Egy $S\in\mathscr{S}(\mathscr{R})$ síkot az E halmaz *felső, ill. alsó $\mathscr{R}$-támaszsíkjának* nevezünk, ha $S\cap E\neq\emptyset$ és S a legmagasabb, ill. legalacsonyabb $\mathscr{R}$-sík, amely E-t metszi.

Más szóval: Ha $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$, egy $S=F\setminus G$ $((G, F)\in\mathscr{R})$ sík akkor és csak akkor felső, ill. alsó $\mathscr{R}$-támaszsíkja valamely $E\neq\emptyset$ halmaznak, ha $S\cap E\neq\emptyset$ és $E\subseteq F$, ill. $E\subseteq X\setminus G$, azaz E teljesen az S-hez tartozó alsó, ill. felső zárt féltérben van. Bármely nem üres $E\subseteq X$ halmaznak, bármely $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ irányban legfeljebb egy felső és legfeljebb egy alsó támaszsíkja van.

(11. 11) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér valamely nem-üres E halmazának egy (felső, ill. alsó) $\mathscr{R}$-támaszsíkja $(\mathscr{R}\in\mathfrak{R})$ *valódi támaszsíkja* E-nek, ha $E\setminus S\neq\emptyset$ s ebben az esetben az $S\cap E$ halmaz pontjait az E halmaz *(felső, ill. alsó) $\mathscr{R}$ irányú támaszpontjainak* nevezzük.

(11. 12) JELÖLÉSEK ÉS MEGJEGYZÉSEK. Legyen $(X, \mathfrak{R})$ iránytér.

1° Ha $E\subseteq X$ nem-üres halmaz és $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$, legyen

$$F_E(\mathscr{R}) = \bigcap\{F : F\in\mathscr{F}(\mathscr{R}), F\supseteq E\},$$
(11. 12. 1)
$$G_E(\mathscr{R}) = \bigcup\{G : G\in\mathscr{G}(\mathscr{R}), G\cap E=\emptyset\},$$

vagyis $F_E(\mathscr{R})$ a legszűkebb E-t tartalmazó alsó $\mathscr{R}$-zárt féltér és $G_E(\mathscr{R})$ a legbővebb E-t nem metsző alsó $\mathscr{R}$-nyílt féltér; ha $E=\{x\}$ egypontos halmaz, $F_{\{x\}}(\mathscr{R})$, ill. $G_{\{x\}}(\mathscr{R})$ helyett egyszerűen az $F_x(\mathscr{R})$, ill. $G_x(\mathscr{R})$ jeleket használjuk majd, ami összhangban van az utóbbiaknak (6. 2. 1)-beli értelmezésével. Legyen továbbá

$$S_E(\mathscr{R}) = F_E(\mathscr{R})\setminus \underline{G}(\mathscr{R}; F_E(\mathscr{R})),$$
(11. 12. 2)
$$T_E(\mathscr{R}) = \bar{F}(\mathscr{R}; G_E(\mathscr{R}))\setminus G_E(\mathscr{R}),$$

és végül

(11. 12. 3)
$$\mathscr{R}_E = \{(G_x(\mathscr{R}), F_x(\mathscr{R})) : x\in E\} \quad (\mathscr{R}\in\mathfrak{R})$$

(a (6. 3) tétel szerint $\mathscr{R}_E\subseteq\mathscr{R}$ minden $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$-re), és

(11. 12. 4)
$$\mathfrak{R}_E = \{\mathscr{R} : \mathscr{R}\in\mathfrak{R}, \overline{\overline{\mathscr{R}_E}} > 1\}.$$

2° Egy nem-üres E halmaznak akkor és csak akkor van $\mathscr{R}$-irányú felső, ill. alsó támaszsíkja, ha $S_E(\mathscr{R})\cap E\neq\emptyset$, ill. $T_E(\mathscr{R})\cap E\neq\emptyset$, és ekkor ez a támaszsík éppen $S_E(\mathscr{R})$, ill. $T_E(\mathscr{R})$.

3° Ha $E\subseteq X$ nem-üres halmaz, és az $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ irány $\mathscr{R}_E$ részének van első, ill. utolsó eleme (speciálisan akkor is, ha E véges), akkor

$$F_E(\mathscr{R}) = \bigcup\{F_x(\mathscr{R}) : x\in E\},$$
(11. 12. 5) ill.
$$G_E(\mathscr{R}) = \bigcap\{G_x(\mathscr{R}) : x\in E\},$$

ha viszont $\mathscr{R}_E$-nek nincs első, ill. utolsó eleme, akkor (6. 1) szerint

$$\bigcup\{F_x(\mathscr{R}): x\in E\}\in\mathscr{G}(\mathscr{R}),$$

(11. 12. 6) ill.

$$\bigcap\{G_x(\mathscr{R}): x\in E\}\in\mathscr{F}(\mathscr{R})$$

és

$$F_E(\mathscr{R})=\underline{F}(\mathscr{R};\ \bigcup\{F_x(\mathscr{R}): x\in E\}),$$

(11. 12. 7) ill.

$$G_E(\mathscr{R})=\bar{G}(\mathscr{R};\ \bigcap\{G_x(\mathscr{R}): x\in E\}).$$

4° Az $\mathfrak{R}$ iránystruktúra $\mathfrak{R}_E$ részének ekvivalens definíciói:

(11. 12. 8)
$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_E &= \{\mathscr{R}:\mathscr{R}\in\mathfrak{R}, S_E(\mathscr{R})\underset{\neq}{\supseteq} E\} =\\ &= \{\mathscr{R}:\mathscr{R}\in\mathfrak{R}, T_E(\mathscr{R})\underset{\neq}{\supseteq} E\} =\\ &= \{\mathscr{R}:\mathscr{R}\in\mathfrak{R}, (G_E(\mathscr{R}), F_E(\mathscr{R}))\notin\mathscr{R}\};\end{aligned}$$

szavakban: $\mathfrak{R}_E$ az $\mathfrak{R}$ IS azon irányainak halmaza, amelyekben E-nek nincs nemvalódi alsó vagy felső támaszsíkja. Itt valóban közömbös, hogy alsót vagy felsőt mondunk-e; ui. $S_E(\mathscr{R})\underset{\neq}{\supseteq} E$ akkor és csak akkor, ha $T_E(\mathscr{R})\underset{\neq}{\supseteq} E$ (hiszen $S_E(\mathscr{R})\supseteq E$-ből és $T_E(\mathscr{R})\supseteq E$-ből egyaránt $S_E(\mathscr{R})=T_E(\mathscr{R})$ következik).

(11. 13) Véges halmaznak nyilván minden $\mathscr{R}$ irányban van maximális és minimális magasságú pontja; más szóval: *véges halmaznak minden $\mathscr{R}$ irányban van felső és alsó támaszsíkja* (ti. az $\mathscr{R}_E$ halmaz utolsó és első eleméből képezett sík).

(11. 14) DEFINÍCIÓ. Ha $(X, \mathfrak{R})$ egy iránytér, $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ és $E\subseteq X$ nem-üres halmaz, az

(11. 14. 1)
$$\mathscr{R}|E=\{(G\cap E,\ F\cap E): (G, F)\in\mathscr{R}\}$$

halmazt az *E-re szorított $\mathscr{R}$ iránynak* nevezzük; az

(11. 14. 2)
$$\mathfrak{R}^*|E=\{\mathscr{R}|E:\mathscr{R}\in\mathfrak{R}^*\}\quad(\mathfrak{R}^*\subseteq\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*\neq\emptyset)$$

jelöléssel pedig $\mathfrak{R}|E$ *az E-re szorított $\mathfrak{R}$ iránystruktúra.*

(Nyilvánvaló, hogy minden $\mathscr{R}|E$ valóban iránya, $\mathfrak{R}|E$ pedig IS-ja az E halmaznak, és $(E, \mathfrak{R}|E)$ iránytér.)

(11. 15) *Az iránytér fogalma a lineáris tér fogalmának általánosítása.* Minden L VT egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér, ahol X az L tér alaphalmaza, az $\mathfrak{R}$ IS pedig a tér közönséges értelemben vett féltereiből épül fel.

Legyen ui. $L^{\#}$ az L-en értelmezhető lineáris formák halmaza (nem használjuk az „L konjugáltja" kifejezést, mert nem használjuk ki az $L^{\#}$ halmaz lineáris struktúráját), és minden $E\subseteq L$ halmazra

(11. 15. 1)
$$L_E^{\#}=\{f: f\in L^{\#},\ f\ E\text{-n nem konstans}\};$$

ekkor $L_L^{\#}$ az L tér nem-triviális (nem azonosan zérus) lineáris formáinak halmaza.

Legyen továbbá

(11. 15. 2)
$$\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}^f: f\in L_L^{\#}\}$$

ahol

(11. 15. 3)
$$\begin{aligned}G_t^f&=\{x:\ x\in X, f(x)<t\}\\ F_t^f&=\{x:\ x\in X, f(x)\leqq t\}\end{aligned}\qquad(f\in L_L^{\#},\ -\infty\leqq t\leqq\infty)$$

és végül

(11. 15. 4) $$\mathscr{R}^f = \{(G_t^f, F_t^f) : -\infty \leqq t \leqq \infty\} \quad (f \in L_L^\#).$$

Az $\mathscr{R}^f$-ek rendes irány volta nyilvánvaló. A (11. 3), c) követelmény is teljesül, mert különböző $x_1, x_2 \in L$ pontokhoz mindig létezik egy őket szétválasztó $f \in L_L^\#$ lineáris forma, vagyis olyan, amelyre $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ez ui. triviálisan igaz minden véges algebrai dimenziójú lineáris térben, tehát az L térnek az x_1, x_2 pontok által kifeszített lineáris alterében is; tetszőleges lineáris altér bármely lineáris formája pedig kiterjeszthető az egész tér egy lineáris formájává ([38] 74).

(11. 16) DEFINÍCIÓ. Egy L VT alaphalmazának a (11. 15)-ben leírt IS-ját *az L tér természetes vagy algebrai iránystruktúrájának* nevezzük, és $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-lel jelöljük. Az $^{(a)}$ felső indexszel fogunk továbbá minden, $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-re vonatkoztatott egyéb szimbólumot is ellátni.

(11. 17) *Megjegyzések.* 1° $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-hez az azonosan zérus függvényből származó

$$\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, L), (L, L)\}$$

(rendes) irányt csatolva, ismét L-nek egy — nem kevésbé „természetes" — IS-ját kapjuk. $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-et csupán formai okokból — egyes levezetések egyszerűsítése végett — származtatjuk $L_L^\#$-ből $L^\#$ helyett.

2° Az $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-re vonatkoztatott „féltér", „sík", „támaszsík", „támaszpont" fogalmak rendre egybeesnek a megfelelő szokásos fogalmakkal (ha a szokásos féltérekhez a $\emptyset$, L halmazokat is hozzávesszük), az „$\mathscr{R}$-magasabb" fogalom a valós tengely természetes rendezésével, az „$\mathscr{R}$-zárt féltér", ill. „$\mathscr{R}$-nyílt féltér" fogalma pedig az algebrailag zárt, ill. nyílt féltér fogalmával.

3° Minden

$$(G, F) \in \bigcup\{\mathscr{R}^f : f \in L_L^\#\} \setminus \{(\emptyset, \emptyset), (L, L)\}$$

párra $F \setminus G \neq \emptyset$, vagyis (vö. (1. 7))

(11. 17. 1) $$\begin{aligned} G_t^f &\subset \underline{F}(\mathscr{R}^f; G_t^f) = \bar{F}(\mathscr{R}^f; G_t^f) \\ \underline{G}(\mathscr{R}^f; F_t^f) &= \bar{G}(\mathscr{R}^f; F_t^f) \subset F_t^f \end{aligned} \qquad (f \in L_L^\#, -\infty < t < \infty).$$

4° Ha $E \subseteqq L$ nem-üres részhalmaz, akkor a (11. 11. 5), (11. 16) jelölésekkel

(11. 17. 2) $$\mathfrak{R}_E^{(a)}(L) = \{\mathscr{R}^f : f \in L_E^\#\}.$$

5° Ha L^* tetszőleges lineáris altere L-nek, akkor e két lineáris tér természetes IS-i között az

(11. 17. 3) $$\mathfrak{R}^{(a)}(L^*) = \mathscr{R}_{L^*}^{(a)}(L) \,|\, L^*$$

kapcsolat áll fenn (l. a (11. 14) definíciót).

6° Legyen $E \subseteqq L$ és $M(E)$ a legszűkebb E-t tartalmazó lineáris sokaság. Ismeretes, hogy $M(E)$ az E-t tartalmazó hipersíkok metszete ([38] 59), vagyis „iránystruktúrás" terminológiánkkal élve, az E halmaz összes nem-valódi $\mathscr{R}^{(a)}(L)$-támaszsíkjainak metszete. A (11. 12. 2) jelöléssel és (11. 12. 8) figyelembevételével tehát

(11. 17. 4) $$\begin{aligned} M(E) &= \bigcap\{S_E(\mathscr{R}^f) : f \in L_L^\# \setminus L_E^\#\} = \\ &= \bigcap\{S_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}^{(a)}(L) \setminus \mathfrak{R}_E^{(a)}(L)\}. \end{aligned}$$

(11. 18) Az E_n euklideszi tér (mint lineáris tér) szokásos (3. 1. 2) IS-ja a tér algebrai iránystruktúrájának része, amelyet $E_n^{\#}$ egy részhalmaza generál, s amely bizonyos értelemben minimális. Lehetne olyan (nem topológiai) elvet is találni, amelynek értelmében bármely iránytér IS-jából kiválasztható egy minimális rész-IS. (Természetesen nem az olyan triviális egyszerűsítésekre gondolunk, mint pl. egy L lineáris tér természetes iránystruktúrájából azoknak a halmazelméletileg egybeeső irányoknak egyetlen reprezentánssal való szerepeltetése, amelyek $L_L^{\#}$ különböző elemeiből — pl. $f \in L_L^{\#}$ és αf $(0<|\alpha|<\infty)$ — származnak.) Ily módon az algebrai dimenzió fogalmához hasonló (esetleg azt általánosító) dimenziófogalomhoz jutnánk.

Értekezésünk e fejezetében azonban nem erre, hanem elsősorban a konvexitásra kívánjuk figyelmünket fordítani: a következő §-ban a közönséges konvexitásnak két — az IS fogalmából származtatott — általánosítását vezetjük be, s ezzel még növekszik az iránytér fogalmának analógiája a lineáris tér fogalmával. A konvexitás szempontjából pedig inkább a „gazdag" IS-ek érdekesek (amelyekből „sok" konvex halmaz származik).

12. §. Konvexitás

(12. 1) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér valamely E halmaza *erősen $\mathfrak{R}$-konvex*, ha $\mathfrak{R}$-beli félterek metszete.

Az (1. 8) tétel szerint bármely erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz előállítható olyan féltérmetszetként, amelyben minden egyes $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ irányból pontosan egy alsó és pontosan egy felső féltér szerepel tényezőként.

Speciális erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmazok bármely $(X, \mathfrak{R})$ iránytérben: minden féltér (köztük $\emptyset$ és X is); minden $\mathfrak{R}$-sík; minden egyelemű halmaz, ui. (11. 3), c) szerint

$$\{x\} = \bigcap \{F_x(\mathscr{R}) \setminus G_x(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\} =$$
$$= \left(\bigcap \{F_x(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}\right) \cap \bigcap \{X \setminus G_x(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\} \quad (x \in X).$$

Nyilvánvaló, hogy erősen $\mathscr{R}$-konvex halmazok tetszőleges családjának metszete is erősen $\mathfrak{R}$-konvex, tehát bármely halmazt tartalmazó erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmazok között van egy legszűkebb.

(12. 2) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér valamely E halmazának ek $(\mathfrak{R}; E)$-vel jelölt *erősen $\mathfrak{R}$-konvex burka*: a legszűkebb, E-t tartalmazó erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz, vagyis az összes, E-t tartalmazó félterek metszete.

(12. 2. 1) *Megjegyzések.* 1° Az ek $(\mathfrak{R}; E)$ fogalma valóban burok-fogalom, vagyis teljesíti a szokásos burok-axiómákat:

a) növelő, azaz ek $(\mathfrak{R}; E) \supseteqq E$;

b) izoton, azaz $E_1 \subset E_2 \Rightarrow$ ek $(\mathfrak{R}; E_1) \subseteqq$ ek $(\mathfrak{R}; E_2)$;

c) idempotens, azaz ek $(\mathfrak{R};$ ek $(\mathfrak{R}; E)) =$ ek $(\mathfrak{R}; E)$;

d) az üres halmaz burka önmaga: ek $(\mathfrak{R}; \emptyset) = \emptyset$.

2° Legyen $E \subseteqq X, \mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ és $M_E(\mathscr{R})$, ill. $N_E(\mathscr{R})$ a legszűkebb E-t tartalmazó, ill. a legbővebb E-t nem metsző $\mathscr{R}$-irányú alsó féltér, vagyis

$$M_E(\mathscr{R}) = \bigcap \{M : M \in \mathscr{G}(\mathscr{R}) \cup \mathscr{F}(\mathscr{R}),\ M \supseteqq E\},$$
$$N_E(\mathscr{R}) = \bigcup \{N : N \in \mathscr{G}(\mathscr{R}) \cup \mathscr{F}(\mathscr{R}),\ N \cap E = \emptyset\}.$$

(Ezek a jelölések — mivel *rendes* $\mathscr{R}$ irányokra alkalmazzuk őket — a (6. 3) tétel szerint összhangba hozhatók a (6. 1. 1)-beli $M_F(\mathscr{R})$, $N_G(\mathscr{R})$ jelölésekkel, ha pl. az utóbbiak értelmezését $M_X(\mathscr{R})=X$-szel és $N_\emptyset(\mathscr{R})=\emptyset$-zal kiegészítjük); ekkor — ismét $\mathscr{R}$ rendessége folytán —

$$M_E(\mathscr{R}) = \bigcup_{x\in E} F_x(\mathscr{R}), \quad N_E(\mathscr{R}) = \bigcap_{x\in E} G_x(\mathscr{R}),$$

$$\operatorname{ek}(\mathfrak{R}; E) = \bigcap \{M_E(\mathscr{R})\setminus N_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R}\in\mathfrak{R}\}.$$

Ha pedig E-nek van maximális, ill. minimális $\mathscr{R}$-magasságú pontja, akkor $M_E(\mathscr{R})=F_E(\mathscr{R})$, ill, $N_E(\mathscr{R})=G_E(\mathscr{R})$; speciálisan, ha E véges halmaz, akkor

$$\operatorname{ek}(\mathfrak{R}; E) = \bigcap \{F_E(\mathscr{R})\setminus G_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R}\in\mathfrak{R}\}.$$

3° Ha $x_0\in E$, x_0 nem támaszpontja E-nek és $E_0=E\setminus\{x_0\}$, akkor $\operatorname{ek}(\mathfrak{R}; E)=$ $=\operatorname{ek}(\mathfrak{R}; E_0)$; ui. mivel minden $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$ irányhoz léteznek

$$x_1, x_2\in E_0, \; S_{x_1}(\mathscr{R})\prec S_{x_0}(\mathscr{R})\prec S_{x_2}(\mathscr{R})$$

pontok, ek $(\mathfrak{R}; E)$ izotóniáját is figyelembe véve

$$\left.\begin{aligned} M_{E_0}(\mathscr{R}) &\subseteqq M_E(\mathscr{R}) \subseteqq M_{E_0}(\mathscr{R}) \\ N_{E_0}(\mathscr{R}) &\subseteqq N_E(\mathscr{R}) \subseteqq N_{E_0}(\mathscr{R}) \end{aligned}\right. \qquad (\mathscr{R}\in\mathfrak{R}).$$

(12. 3) Definíció. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér valamely E halmaza $\mathfrak{R}$-*konvex*, ha bár mely véges részhalmazának erősen $\mathfrak{R}$-konvex burkát is tartalmazza, azaz

$$\operatorname{ek}(\mathfrak{R}; E^*) = \bigcap\{F_{E^*}(\mathscr{R})\setminus G_{E^*}(\mathscr{R}) : \mathscr{R}\in\mathfrak{R}\} \subseteqq E \quad (E^*\subseteqq E, E^* \text{ véges}).$$

Minden erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz $\mathfrak{R}$-konvex.

$\mathfrak{R}$-konvex halmazok tetszőleges családjának metszete is $\mathfrak{R}$-konvex; ebből ered a következő

(12. 4) Definíció. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér valamely E halmazának — k $(\mathfrak{R}; E)$-vel jelölt — $\mathfrak{R}$-*konvex burka*: a legszűkebb, E-t tartalmazó, $\mathfrak{R}$-konvex halmaz.

A k $(\mathfrak{R}; E)$ fogalom szintén eleget tesz a burok-axiómáknak.

(12. 5) *Véges halmaz* $\mathfrak{R}$-*konvex burka egybeesik az erősen* $\mathfrak{R}$-*konvex burkával.*

E triviális tény alapján a véges E halmazra vonatkoztatott ek $(\mathfrak{R}; E)$ és k$(\mathfrak{R}; E)$ szimbólumok mindegyikét olykor a másikkal helyettesítjük.

(12. 6) Tétel. *Egy* $(X, \mathfrak{R})$ *iránytér bármely* E *halmazának* $\mathfrak{R}$-*konvex burka egyenlő* E *összes véges részhalmazai* $\mathfrak{R}$-*konvex burkainak egyesítésével:*

$$\operatorname{k}(\mathscr{R}; E) = \operatorname{k}'(\mathscr{R}; E),$$

ahol

(12. 6. 1) $$\operatorname{k}'(\mathfrak{R}; E) = \bigcup\{\operatorname{k}(\mathscr{R}; E^*) : E^*\subseteqq E, E^* \text{ véges}\}.$$

Bizonyítás. 1° Felhasználjuk azt az egyszerű — k $(\mathfrak{R}; E)$ izotóniájából következő — tényt, hogy

(12. 6. 2) $$\bigcup_\iota \operatorname{k}(\mathfrak{R}; A_\iota) \subseteqq \operatorname{k}(\mathscr{R}; \bigcup_\iota A_\iota) \quad (A_\iota\subseteqq X).$$

2° Mivel $E \subseteqq k'(\mathfrak{R}; E) \subseteqq k(\mathfrak{R}; E)$, elegendő azt kimutatni, hogy a $k'(\mathfrak{R}; E)$ halmaz $\mathfrak{R}$-konvex, azaz, hogy bármely $E' \subseteqq k'(\mathfrak{R}; E)$ véges részhalmazra

(12. 6. 3) $$k(\mathscr{R}; E') \subseteqq k'(\mathscr{R}; E).$$

Legyen ($k'(\mathfrak{R}; E)$ definíciója szerint) minden $x \in E'$ pontnoz $E_x^* \subseteqq E$ olyan véges halmaz, amelyre

(12. 6. 4) $$x \in k(R; E_x^*)$$

(az $x \in E$ esetben $E_x^* = \{x\}$ is választható), és legyen

(12. 6. 5) $$E^* = \bigcup_{x \in E'} E_x^*.$$

Ekkor (12. 6. 4), (12. 6. 2) és (12. 6. 5) szerint

$$E' \subseteqq \bigcup_{x \in E'} k(\mathfrak{R}; E_x^*) \subseteqq k(\mathfrak{R}; E^*),$$

tehát $k(\mathfrak{R}; E') \subseteqq k(\mathfrak{R}; E^*)$, s ebből (12. 6. 1) alapján következik (12. 6. 3).

Ez az egyszerű tétel — amelynek az az ismert tény a mintája, hogy egy lineáris tér bármely nem-üres halmazának (közönségesen) konvex burka egyenlő az összes véges részhalmazok konvex burkainak egyesítésével — már sejteni engedi a közönséges konvexitás és az $\mathfrak{R}$-konvexitás közötti messzemenő *analógiát*. E paragrafus fő feladata annak kimutatása lesz, hogy analógiánál többről van szó: a konvexitás fogalma — csakúgy, mint a most bevezetendő gyenge $\mathfrak{R}$-konvexitásé — a közönséges konvexitás fogalmának *általánosítása* (l. (12. 11) és (12. 12)).

(12. 7) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér valamely E halmaza *gyengén $\mathfrak{R}$-konvex*, ha bármely kételemű részhalmazának $\mathfrak{R}$-konvex burkát is tartalmazza, azaz

$$ek(\mathfrak{R}; \{x, y\}) =$$
$$= \bigcap \{(F_x(\mathscr{R}) \cup F_y(\mathscr{R})) \setminus (G_x(\mathscr{R}) \cap G_y(\mathscr{R})) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\} \subseteqq E \quad (x, y \in E).$$

(12. 7. 1) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér valamely E halmazának — $gk(\mathfrak{R}; E)$-vel jelölt — *gyengén $\mathfrak{R}$-konvex burka:* a legszűkebb, E-t tartalmazó, gyengén $\mathfrak{R}$-konvex halmaz.

$gk(\mathfrak{R}; E)$ is burok-fogalom.

Természetesen minden $\mathfrak{R}$-konvex halmaz gyengén $\mathfrak{R}$-konvex; azonban

(12. 8) *a gyenge $\mathfrak{R}$-konvexitás és az $\mathfrak{R}$-konvexitás fogalma nem ekvivalens bármely iránytérben.*

Legyen pl.
$$X = \{0, 1, 2, 3\}, \quad \mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3\},$$

ahol az $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R}_3$ irányok nem-triviális elemei:

$$\mathscr{R}_1: \ (\emptyset, \{2, 3\}), (\{2, 3\}, \{0, 2, 3\}), (\{0, 2, 3\}, X),$$

$$\mathscr{R}_2: \ (\emptyset, \{1, 3\}), (\{1, 3\}, \{0, 1, 3\}), (\{0, 1, 3\}, X),$$

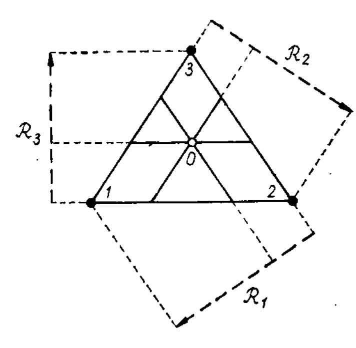
$$\mathscr{R}_3: \ (\emptyset, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, \{0, 1, 2\}), (\{0, 1, 2\}, X).$$

Könnyen ellenőrizhető a (11. 3) definíció alapján, hogy az $(X, \mathfrak{R})$ pár valóban iránytér. Tekintsük most az $E = \{1, 2, 3\}$ halmazt:

a) E gyengén $\mathfrak{R}$-konvex, hiszen minden kételemű részhalmaza — féltér lévén — erősen $\mathfrak{R}$-konvex;

b) E nem erősen $\mathfrak{R}$-konvex, mert X-en kívül más féltér nem tartalmazza, tehát ek $(\mathfrak{R}; E) = X \neq E$;

c) E — mint nem erősen $\mathfrak{R}$-konvex véges halmaz — nem is $\mathfrak{R}$-konvex.



1. ábra

(Ezt a példát szemlélteti a mellékelt ábra, amelyen az egyenesek az iránytér síkjait jelentik. Az ábrán az is látszik, hogy $\mathfrak{R}$ az euklidészi sík (mint lineáris tér) algebrai IS-ja egy részének az ábra szerinti elrendezésű négypontos részhalmazra szorításaként tekinthető, a (11. 14) definíció értelmében.)

Ha azonban L VT, akkor minden gyengén $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex halmaz $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex is. Ennek igazolására felhasználjuk majd a következő

(12. 9) TÉTELt. *Ha A egy L VT megszámlálható algebrai dimenziójú, algebrailag zárt, konvex részhalmaza, akkor*

(12. 9. 1) $$A = \mathrm{ek}^{(a)} A,$$

vagyis A erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex.

Bizonyítás. 1° Mivel tételünk feltételei és állítása egyaránt invariáns tetszőleges eltolással szemben, $A \neq \emptyset$ esetén az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $0 \in A$. Ennek az az előnye, hogy ekkor az A által kifeszített $L(A)$ lineáris altér egybeesik a legszűkebb, A-t tartalmazó lineáris sokasággal, tehát erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex halmaz; mégpedig (11. 17. 4) szerint, a (11. 12. 2) jelöléssel és (11. 17. 1) figyelembevételével

(12. 9. 2) $$L(A) = \bigcap \{F_A(\mathscr{R}) \setminus G_A(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}^{(a)}(L) \setminus \mathfrak{R}_A^{(a)}(L)\}$$

(ui. nyilvánvalóan $\mathfrak{R}_{L(A)}^{(a)}(L) = \mathfrak{R}_A^{(a)}(L)$).

2° Ismeretes, hogy megszámlálható algebrai dimenziójú lineáris tér bármely algebrailag zárt konvex halmaza egyenlő az őt tartalmazó algebrailag zárt félterek metszetével ([38] 197), s ezt az $L(A)$ tér A halmazára (amely persze $L(A)$-ban is algebrailag zárt és konvex) alkalmazva

$$A = \bigcap \{F_A(\mathscr{R}) \setminus G_A(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}^{(a)}(L(A))\}$$

adódik. Ebből pedig — figyelembe véve (11. 17. 3)-at és (11. 14)-et,

(12. 9. 3) $$\begin{aligned} A &= \bigcap \{F_A(\mathscr{R}) \setminus G_A(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}_A^{(a)}(L) | L(A)\} = \\ &= L(A) \cap \bigcap \{F_A(\mathscr{R}) \setminus G_A(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}_A^{(a)}(L)\}. \end{aligned}$$

3° Egybevetve (12. 9. 3)-at és (12. 9. 2)-t, az tűnik ki, hogy az A halmaz két erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex halmaz metszeteként maga is erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex, qu.e.d.

(12. 9. a) MEGJEGYZÉS. Eredményünk ennél valamivel többet is mond, ti.

$$A = \bigcap \{F_A(\mathscr{R}) \setminus G_A(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}^{(a)}(L)\},$$

vagyis egy VT bármely megszámlálható algebrai dimenziójú, algebrailag zárt, konvex részhalmaza az őt tartalmazó algebrailag zárt félterek metszete. Ismeretes ennek az a változata, amelyben a „megszámlálható algebrai dimenziójú" feltétel helyett „algebrai belső ponttal bíró" szerepel ([38] 197); az utóbbi egyébként pótolható az „intern ponttal bíró" feltétellel is (l. a (15. 1) definíciót).

(12. 10) KOROLLÁRIUM. *Ha E egy L VT véges, nem-üres részhalmaza, akkor*

(12. 10. 1) $$[E] = \mathrm{ek}^{(a)}E,$$

ahol $[E]$ az E halmaz (közönséges értelemben) konvex burka.

Ismeretes ui., hogy $[E]$ algebrailag zárt halmaz, tehát (12. 9. 1)-ben $A=[E]$-t véve, és felhasználva azt, hogy minden erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex halmaz — félterek, vagyis közönségesen konvex halmazok metszeteként — közönségesen konvex,

$$[E] \subseteqq \mathrm{ek}^{(a)}E \subseteqq \mathrm{ek}^{(a)}[E] = [E],$$

vagyis (12. 10. 1) valóban igaz. (Ez (12. 9)-től függetlenül, elemibb módon is bizonyítható.)

Most már könnyen beláthatjuk a háromféle konvexitás ekvivalenciáját VT-ben:

(12. 11) TÉTEL. *Ha L VT, az $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvexitás és a gyenge $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvexitás egybeesik, és megegyezik a közönséges konvexitással.*

Bizonyítás. 1° Ismeretes, hogy a közönséges konvexitás szokásos definíciója ekvivalens a következővel: egy $E \subseteqq L$ halmaz konvex, ha bármely *véges* $E^* \subseteqq E$ halmazra $[E^*] \subseteqq E$. (A szokásos definíció ugyanez *kételemű* részhalmazokra.)

2° A (12. 10) tétel következtében a gyenge $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvexitás, ill. az $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvexitás definíciója ekvivalens a közönséges konvexitás „kétpontos", ill. „véges sok pontos" definíciójával, tehát 1° szerint egymással is, qu.e.d.

(12. 12) Összefoglalva (12. 8) és (12. 11) eredményét: *a gyenge $\mathfrak{R}$-konvexitás fogalma és az $\mathfrak{R}$-konvexitás fogalma a konvexitás közönséges fogalmának két különböző általánosítása.*

13. §. Topologikus irányterek

(13. 1) DEFINÍCIÓ. Egy (nem-üres) X halmaz valamely $\mathfrak{R}$ IS-ját és $\mathcal{T}$ topológiáját *kompatibilisnek* és $\mathcal{T}$-t *az $\mathfrak{R}$ iránystruktúra topológiájának* nevezzük, ha az összes $\mathfrak{R}$-nyílt félterek családja $\mathcal{T}$-nek szubbázisa.

(13. 2) DEFINÍCIÓ. Ha $(X, \mathfrak{R})$ iránytér, és $\mathcal{T}$ az $\mathfrak{R}$ topológiája, akkor az $(X, \mathfrak{R}, \mathcal{T})$ vagy $(X, \mathcal{T}, \mathfrak{R})$ rendezett hármast *topologikus iránytérnek* nevezzük; rövidítése: TIT.

(13. 3) MEGJEGYZÉS. $(X, \mathfrak{R}, \mathcal{T})$ és $(X, \mathcal{T}, \mathfrak{R})$ ugyanazt a kettős struktúrát jelöli, de kifejezi a TIT fogalmának két különböző lehetséges felépítését:

a) Az I. fejezetben az X, $\mathcal{T}$, $\mathfrak{R}$ felépítést követtük: egy topologikus térhez kerestünk kompatibilis IS-kat (sőt — az itteni koncepciónál általánosabban — nem kívántuk meg, hogy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér legyen), s ez vezetett — mivel egy topológia több különböző IS-t is megengedhet — a minimális IS és az iránydimenzió fogalmához.

b) E fejezet szellemének — a TVT fogalmával való analógia jegyében — az $X, \mathfrak{R}, \mathscr{T}$ felépítés felel meg, vagyis egy iránytér kiegészítése TIT-ré; minden iránytérnek adhatunk kompatibilis topológiát, de ezt az IS egyértelműen meghatározza. Az ezen topológiával alkotott $(X, \mathscr{T})$ topologikus térnek a kiinduló IS az eredeti (1. 11) értelemben is IS-ja.

(13. 4) TÉTEL. *Egy topologikus T_0-tér akkor és csak akkor lehet* TIT, *ha teljesen reguláris.*

Ez a (11. 3) definíció alapján a (8. 3), (4. 1) tételekből közvetlenül következik. Ismeretes, hogy minden TVT teljesen reguláris. A TIT-ek tehát a topologikus tereknek ugyanazon osztályába tartoznak, mint a TVT-ek; azonban a TVT-ekkel ellentétben teljesen kitöltik ezt az osztályt: minden Tyihonov-térhez létezik olyan kompatibilis IS, amely vele irányteret alkot.

(13. 5) JELÖLÉS ÉS SZÓHASZNÁLAT. 1° Bármely $(X, \mathfrak{R}, \mathscr{T})$ TIT-ben minden $\mathfrak{R}$-nyílt, ill. $\mathfrak{R}$-zárt féltér nyílt, ill. zárt halmaz. Az (1. 4) megjegyzés értelmében egyszer s mindenkorra feltesszük ennek fordítottját is: bármely $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$-re minden olyan $\mathscr{R}$-irányú féltér, amely nyílt, ill. zárt halmaz, tagja a

$$\mathscr{G}(\mathscr{R}) \cup \{X \setminus F : F \in \mathscr{F}(\mathscr{R})\} \quad \text{ill.} \quad \mathscr{F}(\mathscr{R}) \cup \{X \setminus G : G \in \mathscr{G}(\mathscr{R})\}$$

családnak. Így tehát a „nyílt féltér" és „zárt féltér" kifejezés topológiai és $\mathfrak{R}$-értelme ekvivalens. A továbbiakban ezért TIT esetében e kifejezéseket használjuk az „$\mathfrak{R}$-nyílt féltér" és „$\mathfrak{R}$-zárt féltér" megjelölés helyett.

2° Mivel az $(X, \mathfrak{R}, \mathscr{T})$ hármasban $(X, \mathfrak{R})$ determinálja $\mathscr{T}$-t, a továbbiakban röviden $(X, \mathfrak{R})$-t írunk ehelyett is, annak megjelölésével, hogy *topologikus* iránytérről van szó.

A (11. 13) megjegyzés általánosítása a következő:

(13. 6) TÉTEL. *Egy* $(X, \mathfrak{R})$ TIT *bármely nem-üres, kompakt $E \subseteq X$ halmazának bármely $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ irányban van felső és alsó támaszsíkja.*

Bizonyítás. Ha E-nek nem volna pl. maximális $\mathscr{R}$-magasságú pontja, akkor rendeljünk minden $x \in E$ ponthoz egy nála $\mathscr{R}$-magasabb $x' \in E$ pontot. $\mathscr{R}$ rendessége következtében (6. 3), b) szerint (a (11. 12. 1) jelöléssel)

$$x \in G_{x'}(\mathscr{R}) \quad (x \in E),$$

tehát a $\{G_{x'}(\mathscr{R}) \colon x \in E\}$ halmazcsalád a kompakt E halmaznak egy nyílt lefedése, s ennek van egy véges része, amely szintén lefedi E-t. (1. 9. 1) szerint e véges sok $G_{x'}(\mathscr{R})$ $(x \in E)$ halmaz között van egy legbővebb, tehát $E \subseteq G_{x_0}(\mathscr{R})$ valamely $x_0 \in E$-re; ez azonban lehetetlen, hiszen (6. 2. 1) értelmében $x_0' \in E \setminus G_{x'_0}(\mathscr{R})$.

(13. 7) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ TIT valamely E halmazának — zek $(\mathfrak{R}; E)$-vel jelölt — *zárt erősen $\mathfrak{R}$-konvex burka:* a legszűkebb, E-t tartalmazó, zárt, erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz.

Ez a fogalom is nyilvánvalóan teljesíti a burok-axiómákat.

A véges halmazokról tett (12. 5) észrevételt most kiegészíthetjük: *Ha E véges halmaz egy $(X, \mathfrak{R})$ TIT-ben, akkor*

$$\begin{aligned} & \mathrm{k}(\mathfrak{R}; E) = \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E) = \mathrm{zek}(\mathfrak{R}; E) = \\ (13.7.1) \qquad & = \bigcap \{F_E(\mathscr{R}) \setminus G_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\} = \\ & = (\bigcap \{F_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}) \cap \bigcap \{X \setminus G_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}. \end{aligned}$$

Az ebben kifejezett tényeket (véges halmaz erősen $\mathfrak{R}$-konvex burka zárt, sőt zárt félterek metszete) a következőképpen általánosítjuk:

(13. 8) TÉTEL. *Egy $(X, \mathfrak{R})$ TIT bármely kompakt halmazának erősen $\mathfrak{R}$-konvex burka zárt félterek metszete.*

Ui. ez triviálisan igaz, ha $E = \emptyset$; ha pedig $E \neq \emptyset$, akkor E-nek (13. 6) szerint minden $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$ irányban van alsó és felső támaszsíkja, tehát — akárcsak a véges halmazoknál (vö. (12. 2), 2°) —

$$\text{(13.8.1)} \qquad \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E) = \bigcap \{F_E(\mathscr{R}) \setminus G_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}.$$

(13. 9) KOROLLÁRIUM. *Ha E kompakt halmaz, akkor*

$$\text{(13.9.1)} \qquad \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E) = \mathrm{zek}(\mathfrak{R}; E).$$

(13. 10) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ TIT valamely E halmazának — zk $(\mathfrak{R}; E)$-vel jelölt — *zárt $\mathfrak{R}$-konvex burka:* a legszűkebb, E-t tartalmazó zárt $\mathfrak{R}$-konvex halmaz.

zk $(\mathfrak{R}; E)$ is burok-fogalom.

(13. 10. 1) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ TIT valamely E halmazának — zgk$(\mathfrak{R}; E)$-vel jelölt — *zárt gyengén $\mathfrak{R}$-konvex burka:* a legszűkebb, E-t tartalmazó, zárt, gyengén $\mathfrak{R}$-konvex halmaz.

zgk $(\mathfrak{R}; E)$ is burok-fogalom.

(13. 11) DEFINÍCIÓ. a) *Egy L* TVT *algebrai iránystruktúrájának* a tér alapjául szolgáló L VT $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$ természetes IS-ját nevezzük.

b) *Egy L* TVT *topologikus iránystruktúrájának* a (11. 15. 2) mintára, $L^{\#}$ helyett az L tér L' (topológiai) duálisával kifejezett

$$\text{(13.11.1)} \qquad \mathfrak{R}^{(t)}(L) = \{\mathscr{R}^f : f \in L_L'\}$$

rendszert nevezzük (az L_L' szimbólum az $L_L^{\#}$-lel analóg jelentésű). Minden más, $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-re vonatkozó szimbólumot is a $^{(t)}$ felső indexszel látunk el.

c) *Egy L* GLKT *topologikus iránystruktúráját a tér természetes iránystruktúrájának nevezzük.*

(13. 12) *Megjegyzések. Ha L* LKT, *akkor az $(L, \mathfrak{R}^{(t)}(L))$ pár iránytér.* Ennek igazolására (úgy mint (11. 15)-ben) csak (4. 1. 1) teljesülését kell belátni, vagyis azt, hogy különböző $x_1, x_2 \in L$ pontok mindig szétválaszthatók egy $f \in L_L'$ *folytonos* lineáris formával. Ismeretes mármost, hogy egy L LKT bármely $x_0 \neq 0$ pontjához létezik olyan $f_0 \in L_L'$, hogy pl. $f_0(x_0) = 1$ ([28] 236). Az $x_2 - x_1$ ponthoz ennek értelmében tartozó $f \in L_L'$-re tehát

$$f(x_2) = f(x_1) + 1 \neq f(x_1).$$

Nem lokálisan konvex TVT-nek viszont esetleg nincs „elegendő" folytonos lineáris formája (ahhoz, hogy a topológiai iránystruktúrájával együtt irányteret alkosson); sőt, előfordulhat, hogy egyetlen nem-triviális folytonos lineáris forma sem létezik ([38] 161).

2° Egy L LKT-ből a (13. 11) definíció szerinti természetes módon két — általában különböző — iránytér származik: $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$ és $(L, \mathfrak{R}^{(t)}(L))$. Az $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-ből (13. 1) szerint származó topológia az L VT legdurvább olyan topológiája, amelyben *minden* lineáris forma folytonos, ez tehát általában nem egyezik meg az L tér eredeti topológiájával. De az $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-lel kompatibilis topológia is (akkor és) csak akkor esik egybe az L kiinduló topológiájával, ha L GLKT; ui. (0. 1) értelmében *tetszőleges* L LKT *topologikus iránystruktúrája éppen* L *gyenge topológiáját indukálja,* s ez indokolja a c)-beli „természetes" szót. Más szóval: ha L GLKT, akkor $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$ az I. fejezetbeli értelemben is IS-ja L-nek, mint topologikus térnek.

3° Az előbbi megjegyzésből nyilvánvaló, hogy *a topologikus iránytér fogalma — bár nem általánosítása a* TVT *fogalmának, s még csak a* LKT *fogalmának sem — a* GLKT *fogalmának általánosítása.*

Egy LKT-nek azonban — a közös duális révén — olyan szoros a kapcsolata a neki megfelelő GLKT-vel, hogy bizonyos — főleg a konvexitással kapcsolatos — fogalmak és tételek mégis úgy vihetők át TIT-ekre, hogy speciális esetként magukba foglalják a tetszőleges LKT-beli megfelelő fogalmakat és tételeket.

(13. 13) A *konvexitásra* vonatkozóan mindenekelőtt azt kell megjegyeznünk, hogy minden L LKT esetében

(13. 13. 1) $$\mathfrak{R}^{(a)}(L) \supseteqq \mathfrak{R}^{(t)}(L),$$

ha pedig nem-folytonos lineáris formák is vannak,

(13. 13. 2) $$\mathfrak{R}^{(a)}(L) \supset \mathfrak{R}^{(t)}(L).$$

Ez pedig azzal jár, hogy bármely L LKT bármely $E \subseteqq L$ halmazára

(13. 13. 3) $$\mathrm{ek}^{(a)} E \subseteqq \mathrm{ek}^{(t)} E,$$

és az $L' \subset L^{\#}$ esetben

(13. 13. 4) $$\mathrm{ek}^{(a)} E \subset \mathrm{ek}^{(t)} E$$

is előfordul egyes E halmazoknál, hiszen ez esetben az $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$ rendszerben ténylegesen több féltér szerepel, mint az L topologikus $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$ iránystruktúrájában.

Ha pl.

$$f \in L^{\#} \setminus L', \quad -\infty < t_0 < \infty,$$

akkor $F^f_{t_0}$ természetesen erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex halmaz, de nem erősen $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvex; mivel ui. $F^f_{t_0}$ az L topologikus térben sűrű halmaz (sőt még $F^f_{t_0} \setminus G^f_{t_0}$ is az, l. pl. [38] 160), nem lehet része L egyetlen olyan részhalmazának sem, amely L-ben nem sűrű, márpedig az $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-beli nem-triviális félterek mind ilyenek. Így tehát

$$\mathrm{ek}^{(a)} F^f_{t_0} = F^f_{t_0} \subset L = \mathrm{ek}^{(t)} F^f_{t_0}.$$

A konvexitás közönséges fogalmát azonban TVT-ben is tisztán algebrai — vagyis csupán a tér alapját képező VT-hez kötött — fogalomként szokás kezelni. Kézenfekvő tehát a kérdés, hogy egy L LKT-beli közönséges konvexitás ugyanúgy származtatható-e — $\mathfrak{R}$-konvexitásként és gyenge $\mathfrak{R}$-konvexitásként egyaránt — a tér *topológiai* IS-jából is, mint ahogyan (12. 11) szerint az *algebrai* IS-jából származtatható?

A kérdés magva nyilván az, hogy a (13. 13. 4) eset előfordulhat-e *véges E* halmazoknál? Erre válaszol (általánosabb fogalmazásban) a következő

(13. 14) TÉTEL. *Ha E egy L* LKT *véges algebrai dimenziójú részhalmaza, akkor*

(13. 14. 1) $$\mathrm{ek}^{(a)}E = \mathrm{ek}^{(t)}E.$$

Bizonyítás. 1° (13. 13. 3) miatt elegendő azt bizonyítani, hogy

(13. 14. 2) $$\mathrm{ek}^{(a)}E \supseteqq \mathrm{ek}^{(t)}E.$$

2° Mivel $M(E)$, az E-t tartalmazó legszűkebb lineáris sokaság, (11. 17. 4) szerint erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex halmaz,

$$\mathrm{ek}^{(a)}E \subseteqq M(E) \subseteqq L(E),$$

ahol $L(E)$ az E által kifeszített lineáris altér. Definíciója szerint pedig

$$\mathrm{ek}^{(a)}E = \bigcap \{M_E^f \setminus N_E^f : f \in L_L^{\#}\}$$

ahol

$$M_E^f = \bigcap \{M : M \in \mathscr{G}(\mathscr{R}^f) \cup \mathscr{F}(\mathscr{R}^f), M \supseteqq E\} \; (f \in L_L^{\#})$$

(a legszűkebb, E-t tartalmazó $\mathscr{R}^f$-irányú alsó féltér) és

$$N_E^f = \bigcup \{N : N \in \mathscr{G}(\mathscr{R}^f) \cup \mathscr{F}(\mathscr{R}^f), N \cap E = \emptyset\} \; (f \in L_L^{\#})$$

(a legbővebb, E-t nem metsző $\mathscr{R}^f$-irányú alsó féltér). Ezért

(13. 14. 3) $$\mathrm{ek}^{(a)}E = L(E) \cap \bigcap \{M_E^f \setminus N_E^f : f \in L_L^{\#}\}.$$

3° Minden $f \in L_L^{\#}$-hez rendeljünk egy $f' \in L'_L$-et úgy, hogy

$$f'(x) = f(x) \quad (x \in L(E))$$

legyen. Ez biztosan lehetséges, mert $L(E)$ véges algebrai dimenziójú lévén, az $L(E)$-re szorított $f|L(E)$ lineáris forma folytonos, és tetszőleges LKT bármely lineáris alterén definiált folytonos lineáris forma kiterjeszthető az egész tér egy folytonos lineáris formájává ([38] 236).

Ekkor

$$\left.\begin{aligned} L(E) \cap M_E^f &= L(E) \cap M_E^{f'} \\ L(E) \cap N_E^f &= L(E) \cap N_E^{f'} \end{aligned}\right. \quad (f \in L_L^{\#}),$$

tehát (13. 14. 3) alapján

(13. 14. 4) $$\begin{aligned} \mathrm{ek}^{(a)}E &= L(E) \cap \bigcap \{M_E^{f'} \setminus N_E^{f'} : f \in L_L^{\#}\} \supseteqq \\ &\supseteqq L(E) \cap \bigcap \{M_E^f \setminus N_E^f : f \in L'_L\} \supseteqq E. \end{aligned}$$

4° Ismert tételek segítségével belátható, hogy $L(E)$ erősen $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvex részhalmaza L-nek. Ui.

a) $L(E)$ L-nek topológiailag zárt részhalmaza (mint bármely TVT minden véges algebrai dimenziójú lineáris altere, [38] 155);

b) $L(E)$ (közönségesen) konvex halmaz;

c) bármely LKT minden konvex és topológiailag zárt részhalmaza az őt tartalmazó topológiailag zárt félterek metszete ([28] 246).

5° A (13. 14. 4) reláció második sorában szereplő, E-t tartalmazó halmaz tehát két erősen $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvex halmaz metszeteként maga is erősen $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvex, s ezért (13. 14. 4)-ből következik a bizonyítandó (13. 14. 2) inklúzió.

A (13. 14) tételt *véges* E halmazra alkalmazva most már válaszolhatunk a (13. 13)-ban felvetett kérdésre (hivatkozva (12. 10. 1)-re, ill. a (12. 11) tételre:

(13. 15) *Egy* L LKT-*ben az* $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$*-konvexitás, ill. a gyenge* $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$*-konvexitás fogalma ekvivalens az* $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$*-konvexitás, ill. a gyenge* $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$*-konvexitás fogalmával, tehát egymással és a konvexitás közönséges fogalmával is.*

(13. 16) E paragrafus eredményeit — (12. 12) mintájára — így foglalhatjuk össze:

a) *A* TIT *fogalma a* GLKT *fogalmának általánosítása.*

b) *Egy* $(X, \mathfrak{R})$ TIT-*beli* $\mathfrak{R}$*-konvexitás és gyenge* $\mathfrak{R}$*-konvexitás fogalma a* LKT-*beli konvexitás közönséges fogalmának két különböző általánosítása.*

14. §. A kvázi-belsőrész fogalma

(14. 1) Definíció. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér valamely E részhalmazának *kvázi-*$\mathfrak{R}$*-belseje* a

(14. 1. 1) $$b(\mathfrak{R}; E) = ek(\mathfrak{R}; E)\setminus \bigcup \{S_E(\mathscr{R}) \cup T_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}_E\}$$

halmaz. Szavakban: b $(\mathfrak{R}; E)$ az E erősen $\mathfrak{R}$-konvex burkának és E összes valódi támaszsíkjai egyesítésének különbsége. (L. (11. 11), (11. 12).)

(14. 2) Megjegyzések. 1° A (14. 1. 1) egyenlet jobb oldalának levonandójában nemcsak $\mathfrak{R}$-síkok, hanem esetleg üres $S_E(\mathscr{R})$ vagy $T_E(\mathscr{R})$ halmazok is szerepelhetnek.

2° Nem-üres E halmazok kvázi-$\mathfrak{R}$-belsejének ekvivalens definíciója:

(14. 2. 1) $$\begin{aligned} b(\mathfrak{R}; E) = \bigcap \{\underline{G}(\mathscr{R}; F_E(\mathscr{R}))\setminus \overline{F}(\mathscr{R}; G_E(\mathscr{R})) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}_E\} \cap \\ \cap \bigcap \{S_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\setminus \mathfrak{R}_E\}. \end{aligned}$$

3° b $(\mathfrak{R}; E)$ mindig erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz; továbbá

(14. 2. 2) $$b(\mathfrak{R}; E) = b(\mathfrak{R};\ ek\ (\mathfrak{R}; E)),$$

hiszen E és ek $(\mathfrak{R}; E)$ erősen $\mathfrak{R}$-konvex burka és valódi támaszsíkjai egyaránt közösek; végül, ha E erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz, akkor

(14. 2. 3) $$b(\mathfrak{R}; E) \subseteqq E.$$

4° A (11. 3) definíció értelmében minden egypontos halmaz az őt tartalmazó síkok metszete, tehát a (11. 12. 4) jelöléssel $\mathfrak{R}_{\{x\}} = \emptyset$ és

(14. 2. 4) $$b(\mathfrak{R}; \{x\}) = ek(\mathfrak{R}; \{x\}) = \{x\} \quad (x \in X).$$

5° TIT-ben b $(\mathfrak{R}; E)$ általában nem esik egybe E°-vel (még akkor sem, ha b $(\mathfrak{R}; E) \subseteqq E$, vö. (14. 3)), s nem is okvetlenül nyílt halmaz.

(14. 3) A kvázi-$\mathfrak{R}$-belsőrész fogalma nem magfogalom; a négy szokásos magaxióma egyike sem teljesül. A következőkben részletesen elemezzük ezeket a viszonyokat.

1° Legkönnyebb azt megmutatni, hogy $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)$ nem idempotens, és hogy nem minden $(X, \mathfrak{R})$ IT-re igaz, hogy $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; X) = X$.

Legyen pl. $(X, \mathfrak{R})$ az az IT, amelynél

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

és az

$$\mathscr{R} = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}), (\{1, 2, 3\}, X), (X, X)\}$$

jelöléssel

$$\mathfrak{R} = \{\mathscr{R}\}.$$

Itt $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; X) = \{2, 3\}$ és $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; \{2, 3\}) = \emptyset$, tehát

$$\mathrm{b}(\mathfrak{R}; \mathrm{b}(\mathfrak{R}; X)) \subset \mathrm{b}(\mathfrak{R}; X) \subset X.$$

2° Ezután megmutatjuk, hogy $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)$ nem csökkentő. Egy L VT-re vonatkozóan triviális példák adhatók meg olyan *nem konvex* $E \subseteq L$ halmazokra, amelyekre $\mathrm{b}^{(a)}E \subsetneqq E$ (vö. (15. 8)). E helyen olyan végtelen IS-jú, általános irányteret írunk le, amelyben egy $\mathfrak{R}$-*konvex* E halmazra nem teljesül (14. 2. 3).

PÉLDA. Legyenek

$$X = \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad \mathfrak{R} = \{\mathscr{R}_n : n = 1, 2, \ldots\}$$

ahol minden n-re

$$\mathscr{R}_n = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{n\}), (\{n\}, \{0, n\}), (\{0, n\}, X), (X, X)\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $\mathscr{R}_n$ iránya az X halmaznak ($\mathscr{R}_n$ rendessége nyilvánvaló, hiszen

$$X = \{0\} \cup \{n\} \cup (X \setminus \{0, n\}) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

vagyis X az $\mathscr{R}_n$-ből adódó három sík egyesítése). Szembetűnő $\mathfrak{R}$ szeparáltsága is: X minden egypontos halmaza egyúttal $\mathfrak{R}$-sík is. $(X, \mathfrak{R})$ tehát iránytér.

Most tekintsük az

$$E = \{1, 2, \ldots\}$$

halmazt. Mivel egyetlen nem-triviális $\mathfrak{R}$-féltér sem tartalmazza E-t,

$$\mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E) = X,$$

tehát E nem erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaz. E azonban $\mathfrak{R}$-konvex, mert bármely véges $E^* \subset E$ halmaz része egy E-ben foglalt erősen $\mathfrak{R}$-konvex halmaznak, ti. egy $\mathfrak{R}$-síknak:

$$E^* \subset X \setminus \{0, n^*\} \subset E \quad (n^* \in E \setminus E^*),$$

s ezért $\mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E^*) \subseteq E$.

Mármost az E halmaz minden pontja támaszpontja (hiszen minden n-re az E két $\mathscr{R}_n$-beli valódi támaszsíkja az $\{n\}$ alsó és az $X \setminus \{0, n\}$ felső támaszsík), s így

$$\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E) = \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E) \setminus E = X \setminus E = \{0\} \subsetneqq E.$$

Gyengén $\mathfrak{R}$-*konvex* és (14. 2. 3)-at nem teljesítő E halmazra egyszerűbb példa: a (12. 8)-beli $(X, \mathfrak{R})$ iránytérben az $\{1, 2, 3\}$ halmaz gyengén $\mathfrak{R}$-konvex (de nem $\mathfrak{R}$-konvex), és $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; \{1, 2, 3\}) = \{0\}$.

3° b$(\mathfrak{R}; E)$ mégis valamiféle „belseje" — nem magának az E halmaznak (ezért is használjuk a „kvázi" szót), hanem az E erősen $\mathfrak{R}$-konvex burkának (vö. (14. 2), 3°), s ez magyarázza e fogalom elnevezését.

Az elnevezésnek egy további motivációja található a következő §-ban. Természetes ui. azt kérdezni, hogy legalább minden L VT bármely *konvex* $E \subseteq L$ halmazára teljesül-e $\mathrm{b}^{(a)} E \subseteq E$? Mármost a 15. §-ban az intern ponttal bíró konvex halmazokra bebizonyítjuk ezt, sőt ezen túlmenően azt is, hogy az ilyen E halmaz kvázi-$\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-belseje E intern pontjainak halmazával esik egybe (lásd (15. 6)).

4° Mint említettük, b$(\mathfrak{R}; E)$ nem is izoton; pl. egy tetszőleges $(X, \mathfrak{R})$ iránytér tetszőleges különböző $x, y \in X$ pontjaira

$$\mathrm{b}(\mathfrak{R}; \{x\}) \subsetneqq \mathrm{b}(\mathfrak{R}; \{x, y\}). \tag{14. 3. 1}$$

A (11. 3), c) szétválasztási axióma szerint ui. $\mathfrak{R}_{\{x,y\}} \neq \emptyset$ és az $S_x(\mathscr{R})$, $S_y(\mathscr{R})$ halmazok minden $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}_{\{x,y\}}$ irányra valódi $\mathscr{R}$-támaszsíkjai az $\{x, y\}$ halmaznak; ezért

$$(S_x(\mathscr{R}) \cup S_y(\mathscr{R})) \cap \mathrm{b}(\mathfrak{R}; \{x, y\}) = \emptyset \quad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}_{\{x,y\}}),$$

s ebből (14. 2. 4) szerint (14. 3. 1) következik.

5° Egy speciális esetben azonban mégis fennáll az izotónia: tetszőleges $(X, \mathfrak{R})$ iránytérben

$$\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E_1) \subseteqq \mathrm{b}(\mathfrak{R}; E_2) \quad (E_1 \subseteqq E_2 \subseteqq X,\ \mathfrak{R}_{E_1} = \mathfrak{R}_{E_2} = \mathfrak{R}^*); \tag{14. 3. 2}$$

ekkor ui. egyrészt

$$S_{E_1}(\mathscr{R}) = S_{E_2}(\mathscr{R}) \quad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^*) \tag{14. 3. 3}$$

másrészt —

$$G_{E_2}(\mathscr{R}) \subseteqq G_{E_1}(\mathscr{R}) \subseteqq F_{E_1}(\mathscr{R}) \subseteqq F_{E_2}(\mathscr{R}) \quad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R})$$

és (1. 7) alapján —

$$\begin{aligned} &\bar{F}(\mathscr{R}; G_{E_2}(\mathscr{R})) \subseteqq \bar{F}(\mathscr{R}; G_{E_1}(\mathscr{R})) \subseteqq \\ &\subseteqq \underline{G}(\mathscr{R}; F_{E_1}(\mathscr{R})) \subseteqq \underline{G}(\mathscr{R}; F_{E_2}(\mathscr{R})) \quad (\mathscr{R} \in \mathfrak{R}^*), \end{aligned} \tag{14. 3. 4}$$

s végül (14. 3. 3)-ból és (14. 3. 4)-ből (14. 2. 1) alapján következik (14. 3. 2).

Megjegyezzük még, hogy (14. 3. 2)-ben az $\mathfrak{R}_{E_1} = \mathfrak{R}_{E_2}$ feltétel nem szükséges feltétel.

6° Bármely $(X, \mathfrak{R})$ iránytérben

$$\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E) = \mathrm{b}(\mathfrak{R}; \mathrm{k}(\mathfrak{R}; E)) \quad (E \subseteqq X). \tag{14. 3. 5}$$

Ui. minden S $\mathfrak{R}$-síkra — annak erős $\mathfrak{R}$-konvexitása folytán — $S \supseteqq E$-ből $S \supseteqq \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E)$ következik; ezért az $E_1 = \mathrm{ek}\,(\mathfrak{R}; E)$ jelöléssel $\mathfrak{R}_{E_1} \subseteqq \mathfrak{R}_E$; másrészt $E \subseteqq E_1$ miatt $\mathfrak{R}_E \subseteqq \mathfrak{R}_{E_1}$, tehát $\mathfrak{R}_{E_1} = \mathfrak{R}_E$, s így (14. 3. 2) alapján

$$\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E) \subseteqq \mathrm{b}(\mathfrak{R}; \mathrm{k}(\mathfrak{R}; E)) \subseteqq \mathrm{b}(\mathfrak{R}; \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E)) \quad (E \subseteqq X),$$

s ez (14. 2. 2)-vel összekapcsolva igazolja (14. 3. 5)-öt.

(14. 4) TÉTEL. *Ha S egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér egy síkja, és E az S által létesített $\mathfrak{R}$-zárt félterek egyikének nem üres részhalmaza,*

$$S \cap \mathrm{b}(\mathfrak{R}; E) = \emptyset \quad \text{ill.} \quad \mathrm{b}(\mathfrak{R}; E) \subseteqq S$$

akkor és csak akkor, ha

$$E \setminus S \neq \emptyset \quad \text{ill.} \quad E \subseteqq S;$$

harmadik eset tehát nincs.

Bizonyítás. 1° Legyen $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}$, $(G, F) \in \mathscr{R}$, $G \subset F$ és $S = F \setminus G$.

2° $E \setminus S \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha S nem metszi E-t vagy valódi támaszsíkja E-nek. Az első esetben $E \subseteqq G$ vagy $E \subseteqq X \setminus F$, tehát

$$\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E) \subseteqq \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E) \subseteqq G \quad \text{vagy} \quad X \setminus F,$$

s ezért

$$S \cap \mathrm{b}(\mathfrak{R}; E) = \emptyset;$$

ez utóbbi a második esetben triviálisan teljesül.

3° Ha $E \subseteqq S$ (vagyis S nem-valódi támaszsíkja E-nek), akkor

$$\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E) \subseteqq \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E) \subseteqq S.$$

(14. 5) TÉTEL. *Egy L VT minden nem-üres E részhalmazára*

$$\mathrm{b}^{(a)}(E) = M(E) \cap \{x : x \in L, \inf_{y \in E} f(y) < f(x) < \sup_{y \in E} f(y) \quad (f \in L_E^{\#})\}.$$

Ez $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)$ definíciójának (14. 2. 1) változatából, a (11. 17. 2) jelöléssel és (11. 17. 4) szerint következik.

(14. 6) TÉTEL. *Ha E egy L VT véges részhalmaza, továbbá*

(14. 6. 1) $$x_0 \in \mathrm{b}^{(a)}E; \quad x_1 \in E \setminus \{x_0\},$$

akkor $\mathrm{b}^{(a)}E$ tartalmazza az x_0-t és x_1-et összekötő egyenesnek valamely, x_0-t tartalmazó, (x_2, x_1) nyílt intervallumát.

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan igaz akkor, ha egy *tetszőleges L* VT valamely *véges* halmazának *kvázi-$\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-belseje* helyett egy *véges dimenziójú* VT valamely *konvex poliéderének algebrai belsejére* fogalmazzuk meg.

Mármost (14. 3), 6° szerint $\mathrm{b}^{(a)}E = \mathrm{b}^{(a)}[E]$, és $[E]$ egy konvex poliéder a véges dimenziójú $L(E)$ térben. Mivel pedig egy konvex poliédernek minden algebrai határpontja támaszpontja is, azért a $\mathrm{b}^{(a)}[E]$ halmaz a (14. 1) definíció szerint egybeesik $[E]$ ($L(E)$-re vonatkoztatott) algebrai belső pontjainak halmazával. Ez igazolja állításunkat.

A konvex poliéderek osztálya csak egy része azon halmazok osztályának, amelyekre a 15. §-ban kimutatjuk a kvázi-belsőrész egybeesését a kifeszített lineáris altérre vonatkozó algebrai belső pontok halmazával. Főeredményünk bizonyításához azonban csak a most bizonyított szűkebb tényre lesz szükségünk; ennek legfontosabb speciális esetét külön is megfogalmazzuk.

(14. 7) TÉTEL. *Egy L VT bármely*

$$E = \{x_1, x_2\} \qquad (x_1, x_2 \in L, \; x_1 \neq x_2)$$

kételemű részhalmazának kvázi-$\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-belseje: az E által meghatározott (x_1, x_2) nyílt szakasz.

Ez (14. 5) alapján is könnyen belátható. Mivel az E-t tartalmazó legszűkebb lineáris sokaság, az $M(E)$ halmaz éppen az x_1 és x_2 által meghatározott E' egyenes, (14. 5) értelmében és $L_E^\# = L_{E'}^\# = L_{M(E)}^\#$ miatt

$$b^{(a)}E = \{x : x \in E', \min [f(x_1), f(x_2)] < f(x) < \max [f(x_1), f(x_2)] \ (f \in L_E^\#)\} = (x_1, x_2).$$

(14. 8) TÉTEL. *Ha E egy L LKT véges algebrai dimenziójú részhalmaza, akkor*

$$b^{(t)}E = b^{(a)}E. \tag{14. 8. 1}$$

Bizonyítás. 1° A (13. 14) tétel szerint

$$ek^{(t)}E = ek^{(a)}E, \tag{14. 8. 2}$$

tehát $\mathfrak{R}_E^{(t)} \subseteqq \mathfrak{R}_E^{(a)}$ miatt

$$b^{(a)}E = ek^{(a)}E \setminus \bigcup \{S_E(\mathscr{R}) \cup T_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}_E^{(a)}(L)\} \subseteqq$$
$$\subseteqq ek^{(t)}E \setminus \bigcup \{S_E(\mathscr{R}) \cup T_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}_E^{(t)}(L)\} = b^{(t)}E,$$

s ezért (14. 8. 1) igazolásához már csak a

$$b^{(t)}E \subseteqq b^{(a)}E \tag{14. 8. 3}$$

inklúziót kell bizonyítanunk.

2° Tegyük fel, hogy (14. 8. 3) nem áll fenn; ez (14. 8. 2) miatt azt jelenti, hogy az E halmaz valamely „algebrai” valódi támaszsíkja metszi a $b^{(t)}E$ halmazt. Legyen tehát

$$x_0 \in b^{(t)}E \setminus b^{(a)}E, \tag{14. 8. 4}$$

továbbá

$$f_0 \in L_L^\# \setminus L_L'$$

olyan nem-folytonos lineáris forma, amelyre a (11. 15. 3) és az

$$S_t^f = F_t^f \setminus G_t^f \quad (f \in L_L^\#, -\infty \leqq t \leqq \infty)$$

jelölésekkel pl.

$$E \subseteqq F_{f_0(x_0)}^{f_0}, \quad E \cap G_{f_0(x_0)}^{f_0} \neq \emptyset, \quad E \cap S_{f_0(x_0)}^{f_0} \neq \emptyset, \tag{14. 8. 5}$$
$$S_{f_0(x_0)}^{f_0} \cap b^{(t)} E \neq \emptyset.$$

(Itt $S_{f_0(x_0)}^{f_0}$ *felső* $\mathscr{R}^{f_0}$-irányú támaszsíkja E-nek; *alsó* támaszsíkra analóg meggondolás alkalmazható.)

3° (14. 8. 2) felhasználásával, és hivatkozva $M(E)$ erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex voltára

$$b^{(t)}E \subseteqq ek^{(t)}E = ek^{(a)}E \subseteqq M(E) \subseteqq L(E) \tag{14. 8. 6}$$

adódik. A (13. 14) tétel bizonyításának 3° részével azonos érveléssel pedig kimutatható, hogy f_0-hoz létezik olyan $f_0' \in L_L'$, amelyre

$$f_0'(x) = f_0(x) \quad (x \in L(E)). \tag{14. 8. 7}$$

4° (14. 8. 6) és (14. 8. 7) szerint

$$f_0'(x_0) = f_0(x_0), \tag{14. 8. 8}$$

továbbá (14. 8. 5) alapján

$$E \subseteq F^{f_0'}_{f_0(x_0)}, \quad E \cap G^{f_0'}_{f_0(x_0)} \neq \emptyset, \quad E \cap S^{f_0'}_{f_0(x_0)} \neq \emptyset.$$

Az $S^{f_0'}_{f_0(x_0)}$ sík tehát szintén valódi (felső, $\mathscr{R}^{f_0'}$ irányú) támaszsíkja E-nek; ezért

$$S^{f_0'}_{f_0(x_0)} \cap \mathrm{b}^{(t)}E = \emptyset,$$

úgyhogy (14. 8. 8) miatt

$$x_0 \notin \mathrm{b}^{(t)}E,$$

s ez ellentmond (14. 8. 4)-nek. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

15. §. A kvázi-belsőrész szerepe lineáris terekben

A kvázi-belsőrész fogalmára az extremális pont fogalmának IT-ekre való általánosításainál lesz szükségünk (16. §), s erre a célra a róla eddig elmondottak elegendők. Érdemes azonban egy — a fejezet fő feladatát nem érintő — kitérőt tennünk, hogy jobban megvilágítsuk e fogalom szerepét egy VT természetes vagy egy LKT topologikus IS-jában, különös tekintettel $\mathrm{b}^{(a)}E$ kapcsolatára az intern pont fogalmával (l. a következő definíciót). A (14. 6), (14. 7) tételek ui. sejteni engedik e két fogalom szoros rokonságát, s azt, hogy mindkét tétel sokkal általánosabban is megfogalmazható. Ebben a keretben a (14. 3)-ban felvetett gyengébb kérdéssel is foglalkozunk.

(15. 1) DEFINÍCIÓ. Legyen E egy L VT nem-üres részhalmaza. Egy $x \in E$ pontot *E intern pontjának* (KÖTHE: „inwendiger Punkt", [38] 180) nevezünk, ha minden, x-et tartalmazó, $M(E)$-ben fekvő egyenesnek van egy x körüli, E-beli nyílt szakasza.

(15. 2) MEGJEGYZÉSEK. 1° Nyilvánvaló, hogy egy $x \in E$ pont akkor és csak akkor algebrai belső pontja E-nek, ha intern pontja, és $M(E) = L$ ([28] 180).

2° Világos továbbá, hogy ha $M(E) = L(E)$ (pl. $0 \in E$ vagy akár csak $0 \in M(E)$ esetén), akkor az „x intern pontja E-nek L-ben", „x algebrai belső pontja E-nek $L(E)$-ben" kijelentések ekvivalensek.

3° Ismeretes, hogy véges algebrai dimenziójú VT-ben minden nem-üres konvex halmaznak van intern pontja ([38] 180). Ebből és 2°-ből következik, hogy tetszőleges L VT minden olyan véges algebrai dimenziójú konvex halmazának, amely tartalmazza a 0 pontot, az $L(E)$ térben van algebrai belső pontja. (Végtelen dimenziójú konvex halmaznak nincs okvetlenül intern pontja, l. pl. [9] 67, [38] 180.)

(15. 3) TÉTEL. *Ha E egy L VT részhalmaza, és x_0 intern pontja E-nek, akkor $x_0 \in \mathrm{b}^{(a)}E$.*

Bizonyítás. 1° Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $x_0 \notin \mathrm{b}^{(a)}E$. Ekkor, mivel $x_0 \in M(E)$, (14. 5) szerint létezik olyan $f \in L^{\#}_E$, hogy

(15. 3. 1) $$f(x_0) \geqq \sup_{x \in E} f(x) \quad \text{vagy} \quad f(x_0) \leqq \inf_{x \in E} f(x).$$

Mivel pedig $f \in L^{\#}_E$, létezik egy olyan $x_1 \in E \setminus \{x_0\}$ pont, amelyre

(15. 3. 2) $$f(x_1) \neq f(x_0).$$

2° Legyen mármost e az x_0 és x_1 által meghatározott egyenes. Ekkor egyrészt (15. 3. 2) szerint $f \in L_e^\#$; másrészt nincs olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy

$$\{x : x \in e, f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon\} \subseteqq E$$

legyen (különben (15. 3. 1)-gyel ellentétben léteznének olyan $x_2, x_3 \in E \cap e$ pontok, amelyekre $f(x_2) < f(x_0) < f(x_3)$). Az x_0 pont tehát — feltételezésünkkel szemben — nem intern pontja E-nek.

A (14. 3)-beli kérdésre ad részleges választ a következő

(15. 4) TÉTEL. *Ha E egy L VT intern ponttal rendelkező konvex részhalmaza, akkor*

$$\mathfrak{b}^{(a)} E \subseteqq E.$$

Bizonyítás. 1° Mivel a tétel egész tartalma tetszőleges eltolással szemben invariáns, elegendő a

$$0 \in \mathfrak{b}^{(a)} E \Rightarrow 0 \in E$$

állítást bizonyítani.

2° Tegyük fel, hogy $0 \notin E$. Ekkor van olyan $f \in L(E)^\#_{L(E)}$ lineáris forma és olyan t valós szám, hogy az

$$S = \{x : x \in L(E), f(x) = t\}$$

$L(E)$-beli sík elválasztja a 0 pontot (vagyis a $\{0\}$ halmazt) az E halmaztól, vagyis

$$0 \notin (\inf_{x \in E} f(x), \sup_{x \in E} f(x));$$

az E halmaznak ui. $0 \in \mathfrak{b}^{(a)} E \subseteqq M(E)$ miatt, (15. 2), 2° szerint van algebrai belső pontja az $L(E)$ térre vonatkozóan, és ismeretes, hogy egy lineáris tér két konvex halmaza, amelyek egyikének van algebrai belső pontja, a másik pedig nem metszi az előbbinek algebrai belsejét, mindig szétválasztható (nem okvetlenül szigorúan) egy síkkal ([38] 190).

3° Az f függvény az E halmazon nem állandó (különben $L(E)$ egy saját síkjának része volna), vagyis

$$f \in L(E)^\#_E.$$

Ismeretes, hogy egy lineáris tér bármely lineáris alterén definiált lineáris forma kiterjeszthető az egész tér egy lineáris formájává ([38] 74). Legyen tehát $g \in L_L^\#$ olyan, hogy

$$g(x) = f(x) \quad (x \in L(E)).$$

Ekkor a

$$T = \{x : x \in L, \ g(x) = t\}$$

L-beli sík is elválasztja (nem okvetlenül szigorúan) a 0 pontot az E halmaztól, tehát $0 \notin \mathfrak{b}^{(a)} E$, qu.e.d.

A (15. 4) tétel a következőképpen élesíthető:

(15. 5) TÉTEL. *Ha egy L VT valamely E konvex halmazának egyáltalán van intern pontja, akkor $\mathfrak{b}^{(a)} E$ minden eleme intern pontja E-nek.*

Bizonyítás. 1° Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $0 \in E$, tehát $M(E) = L(E)$.

2° Legyen $x_0 \in \mathfrak{b}^{(a)} E$; ekkor a (15. 4) tétel szerint $x_0 \in E$.

3° Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy x_0 nem intern pontja E-nek. Ez E konvexitása miatt azt jelenti, hogy létezik egy x_0-t tartalmazó $L(E)$-beli e egyenes, amelynek az x_0 által meghatározott két nyílt félegyenesének, az e_1 és e_2 halmazoknak egyike, pl. e_1 egyáltalán nem tartalmaz E-pontot. Ekkor a (15. 4) tétel bizonyításának 2° részében már idézett szétválasztási tétel értelmében létezik egy $L(E)$-beli

$$S = \{x : x \in L(E), f(x) = t\}$$

hipersík (ahol t valós szám és $f \in L(E)^{\#}_{L(E)}$), amely az e_1 halmazt az E halmaztól (nem okvetlenül szigorúan) elválasztja.

4° Az S hipersík nyilván az $e_1 \cup \{x_0\}$, E halmazokat is elválasztja, s ezért

$$x_0 \in (e_1 \cup \{x_0\}) \cap E \subseteq S.$$

Mivel pedig $L(E) \subsetneqq S$, az x_0 pont, ill. az S halmaz valódi támaszpontja, ill. valódi támaszsíkja E-nek az $L(E)$ térben.

A most bizonyított tételből és a (15. 3) tételből következik a (15. 4) tételt általánosító és a $\mathrm{b}^{(a)}E$ és az intern pontok kapcsolatára legalább részlegesen fényt derítő

(15. 6) TÉTEL. *Ha egy L VT valamely E konvex halmazának van intern pontja, akkor $\mathrm{b}^{(a)}E$ egyenlő E intern pontjainak halmazával (tehát $M(E) = L$ esetén E algebrai belsejével).*

Ha ezt a tételt egy LKT véges algebrai dimenziójú konvex részhalmazaira alkalmazzuk, akkor — a (15. 2), 3°-ban idézett tétel alapján — összekapcsolhatjuk a (14. 8) tétellel:

(15. 7) TÉTEL. *Ha E egy LKT valamely véges algebrai dimenziójú konvex részhalmaza, akkor $\mathrm{b}^{(t)}E$ és $\mathrm{b}^{(a)}E$ egyaránt egyenlő E intern pontjainak (tudvalévően nem üres) halmazával.*

(15. 8) Már bebizonyítottuk (14. 3)-ban, hogy $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)$ nem csökkentő. Bármely L lineáris térből származó $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$ iránytérben a (14. 3)-belinél sokkal egyszerűbb példa is adható erre, ui. (14. 7) szerint

$$\mathrm{b}^{(a)}\{x_1, x_2\} \subsetneqq \{x_1, x_2\} \qquad (x_1, x_2 \in L,\ x_1 \neq x_2).$$

A (15. 6) tétel alapján mégis helyénvalónak tűnik a $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)$ fogalom elnevezése (vö. (14. 3), 3°).

(15. 9) Említettük (14. 3)-ban azt is, hogy $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; E)$ nem izoton. Egy L lineáris térben a legegyszerűbb példa erre:

$$\mathrm{b}^{(a)}\{x_1\} \subsetneqq \mathrm{b}^{(a)}\{x_1, x_2\} \qquad (x_1, x_2 \in L,\ x_1 \neq x_2)$$

(vö. (14. 2. 3) és (14. 7)). Másrészt azonban

$$\mathrm{b}^{(a)}E_1 \subseteq \mathrm{b}^{(a)}E_2 \quad (E_1 \subseteq E_2 \subseteq L,\ M(E_1) = M(E_2)) \tag{15.9.1}$$

(ez (14. 3. 2) alkalmazása az $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L)$ iránytérre, figyelembe véve (11. 17. 4)-et, de közvetlenül is könnyen bizonyítható, (14. 5) alapján).

(15. 10) Legyen L VT és $E \subseteqq L$. Mint ismeretes, az $M(E)$ lineáris sokaság az E-t tartalmazó összes hipersíkok — vagyis bizonyos erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex halmazok — metszeteként erősen $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-konvex, így

$$E \subseteqq [E] \subseteqq \mathrm{ek}^{(a)} E \subseteqq M(E),$$

s $M(E)$ izotóniája folytán

$$M(E) = M([E]) = M(\mathrm{ek}^{(a)} E).$$

Ezt egybevetve (15. 9. 1)-gyel,

$$\mathrm{b}^{(a)} E \subseteqq \mathrm{b}^{(a)}[E] \subseteqq \mathrm{b}^{(a)}\,\mathrm{ek}^{(a)} E \quad (E \subseteqq L)$$

és végül (14. 2. 2) alapján

(15. 10. 1) $$\mathrm{b}^{(a)}[E] = \mathrm{b}^{(a)} E \quad (E \subseteqq L)$$

következik.

Végül (15. 6) és (15. 10. 1) egybevetésével a $\mathrm{b}^{(a)} E$ fogalmának újabb interpretációját (és a (15. 6) tétel általánosítását) nyerjük:

(15. 11) TÉTEL. *Ha egy L VT valamely E halmazára $[E]$-nek van intern pontja, akkor $\mathrm{b}^{(a)} E$ egyenlő $[E]$ intern pontjainak halmazával.*

Ebből (14. 6) általánosítása is adódik:

(15. 12) TÉTEL. *Ha egy L VT valamely E halmazára $[E]$-nek van intern pontja, továbbá*

$$x_0 \in \mathrm{b}^{(a)} E, \quad x_1 \in [E] \setminus \{x_0\},$$

akkor $\mathrm{b}^{(a)} E$ tartalmazza az x_0 és x_1 által meghatározott egyenesnek egy x_0-t tartalmazó (x_2, x_1) nyílt szakaszát.

Bizonyítás. (15. 11) szerint x_0 intern pontja $[E]$-nek, s ezért létezik olyan $x_2 \in L$ pont, amelyre

$$x_0 \in (x_2, x_1) \subseteqq [E].$$

Mármost ismeretes (minden esetre könnyen belátható elemi tény), hogy ha y_0 intern pontja egy VT valamely A konvex halmazának, akkor minden $y_0 \in (y_2, y_1) \subseteqq A$ nyílt szakasznak minden pontja is intern pontja A-nak. Így hát (x_2, x_1) minden eleme intern pontja $[E]$-nek, vagyis (15. 11) szerint $(x_2, x_1) \subseteqq \mathrm{b}^{(a)} E$, qu.e.d.

16. §. Extremális pontok

(16. 1) DEFINÍCIÓ. Egy $(X, \mathfrak{R})$ iránytér egy E halmazának valamely $x \in E$ pontja E-nek *gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pontja*, ill. *$\mathfrak{R}$-extremális pontja*, ha nincs olyan

(16. 1. 1) $$\overline{\overline{A}} = 2 \quad \text{ill.} \quad 2 \leqq \overline{\overline{A}} < \aleph_0.$$

számosságú

(16. 1. 2) $$A \subseteqq \mathrm{ek}(\mathfrak{R}; E)$$

halmaz, amelyre

(16. 1. 3) $$x \in \mathrm{b}(\mathfrak{R}; A) \subseteqq E.$$

(16. 2) MEGJEGYZÉSEK. 1° Bármely halmaz minden $\mathfrak{R}$-extremális pontja nyilván gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pontja is.

2° A (16. 1. 2) feltételtől eltekintve a gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pont definíciója a lineáris térbeli extremális pont közönséges fogalmának átírása iránytérre (vö. a (14. 7) tétellel). A (16. 1. 2) feltétel nem lényegtelen; ha pl. $X=\{-1, 0, 1\}$ és $\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}\}$, ahol

$$\mathscr{R}=\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{-1\}), (\{-1\}, \{-1, 0\}), (\{-1, 0\}, X), (X, X)\},$$

akkor az $(X, \mathfrak{R})$ iránytér 0 pontja a (16. 1. 1) feltétel miatt $\mathfrak{R}$-extremális pontja az $E=\{0\}$ halmaznak, de gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pontja sem volna, ha a (16. 1) definícióból elhagynánk (16. 1. 2)-t, hiszen az $A=\{-1, 1\}$ halmazra $\overline{\overline{A}}=2$ és $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; A)=\{0\}$.

3° Az $\mathfrak{R}$-extremális pont fogalma nem ekvivalens a gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pont fogalmával. A (12. 8)-ban szereplő $(X, \mathfrak{R})$ iránytér 0 pontja pl. gyenge $\mathfrak{R}$-extremális pontja X-nek (hiszen minden kétpontos halmaz kvázi-$\mathfrak{R}$-belseje üres), de nem $\mathfrak{R}$-extremális pontja (mert $\mathrm{b}(\mathfrak{R}; \{1, 2, 3\})=\{0\}$).

4° Egy L VT természetes iránystruktúrájára alkalmazva a (16. 1. 2) feltétel elveszti jelentőségét, hiszen ha $x, y, z \in L$, $E \subseteqq L$ és

$$x \in (y, z) \subseteqq E,$$

akkor az $y_1 \in (x, y)$, $z_1 \in (x, z)$ választással

$$x \in (y_1, z_1) \subseteqq E, \ \{y_1, z_1\} \subseteqq E \subseteqq \mathrm{ek}^{(a)} E.$$

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy *egy L VT természetes iránystruktúrájára nézve a gyenge $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremális pont fogalma ekvivalens az extremális pont közönséges fogalmával.* A 2° megjegyzés tehát az $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$ irányterekre nézve tárgytalan.

Kimutatjuk továbbá, hogy $(L, \mathfrak{R}^{(a)}(L))$-re nézve a 3° megjegyzés is tárgytalan, vagyis igaz a következő

(16. 3) TÉTEL. *Ha L VT, az „$\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremális pont" és a „gyenge $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremális pont" fogalmak ekvivalensek egymással és az extremális pont közönséges fogalmával.*

Bizonyítás. 1° Tekintettel a (16. 2), 1°, 4° megjegyzésekre, azt kell csak megmutatni, hogy ha $E \subseteqq L$ és $x_0 \in E$ gyenge $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremális pontja E-nek, akkor $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremális pontja is.

2° Tegyük fel ezzel az állítással ellentétben, hogy bár x_0 gyenge $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremális pontja E-nek, létezik egy

(16. 3. 1) $$2 < \overline{\overline{A}} < \aleph_0, \quad A \subseteqq \mathrm{ek}^{(a)} E,$$

(16. 3. 2) $$x_0 \in \mathrm{b}^{(a)} A \subseteqq E$$

tulajdonságú A halmaz.

3° Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy

(16. 3. 3) $$x_0 \notin A.$$

Legyen ui.

$$A_0 = A \setminus \{x_0\}.$$

Ekkor

$$A_0 \subseteqq A \subseteqq \mathrm{ek}^{(a)}E,$$

és — mivel (16. 3. 2) értelmében x_0 nem támaszpontja A-nak — (12. 2. 1), 3° szerint $\mathrm{ek}^{(a)}A_0 = \mathrm{ek}^{(a)}A$, tehát (14. 2. 2) és (16. 3. 2) alapján

$$x_0 \in \mathrm{b}^{(a)}A_0 \subseteqq E;$$

végül, — mivel x_0 gyenge $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremális pontja E-nek —

$$\bar{\bar{A}}_0 > 2,$$

s így $x_0 \in A$ esetén a további meggondolásokban A_0-lal helyettesíthetnénk az A halmazt.

4° Mivel $\mathrm{b}^{(a)}A \subseteqq \mathrm{ek}^{(a)}A = [A]$, azért

$$x_0 = \sum_{x \in A} t_x x,$$

ahol a t_x valós számokra

$$t_x \geqq 0\,(x \in A), \quad \sum_{x \in A} t_x = 1,$$

és (16. 3. 3) miatt létezik egy

(16. 3. 4) $$x_1 \in A, \quad 0 < t_{x_1} < 1$$

tulajdonságú x_1 pont. Legyen mármost

$$y_0 = \sum_{x \in A \setminus \{x_1\}} \frac{t_x}{1 - t_{x_1}} x;$$

ekkor

(16. 3. 5) $$x_0 = t_{x_1} x_1 + (1 - t_{x_1}) y_0,$$

vagy más szavakkal

(16. 3. 6) $$x_0 \in (x_1, y_0) = \mathrm{b}^{(a)}\{x_1, y_0\}.$$

5° Mivel $y_0 \in [A] = \mathrm{ek}^{(a)}A$, (16. 3. 4) és (16. 3. 1) szerint

(16. 3. 7) $$\{x_1, y_0\} \subseteqq \mathrm{ek}^{(a)}E.$$

Továbbá (14. 5) alapján

(16. 3. 8) $$\mathrm{b}^{(a)}\{x_1, y_0\} \subseteqq \mathrm{b}^{(a)}A,$$

hiszen $(x_1, y_0) \in [A] \subseteqq M(A)$, ha tehát valamely $x \in (x_1, y_0)$ pontra és valamely $f \in L_A^\#$ függvényre (16. 3. 8)-cal ellentétben pl.

$$f(x) = \max_{y \in A} f(y)$$

volna, akkor ebből (16. 3. 5) és (16. 3. 4) alapján

$$f(x_0) = f(x_1) = f(y_0) = \max_{y \in A} f(y)$$

következnék, holott $x_0 \in \mathrm{b}^{(a)}A$.

6° A (16. 3. 6), (16. 3. 8), (16. 3. 2) relációkból mármost

$$x_0 \in \mathrm{b}^{(a)}\{x_1, y_0\} \subseteqq E$$

következik; ez (16. 3. 7)-tel egybefoglalva azt jelenti, hogy x_0 nem gyenge $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-extremális pontja E-nek. Mivel pedig ez ellentmond a feltételezésnek, a tételt bebizonyítottuk.

Annak kimutatására, hogy az extremális pont valamely L LKT-re alkalmazott közönséges fogalma nemcsak algebrai iránystruktúrájából, hanem topológiai iránystruktúrájából is származtatható ($\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-extremális pontként és gyenge $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-extremális pontként egyaránt), megjegyezzük, hogy

(16. 4) *egy* L LKT-*ben az* $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-*extremális pont és az* $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-*extremális pont, ill. a gyenge* $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-*extremális pont és a gyenge* $\mathfrak{R}^{(a)}(L)$-*extremális pont fogalma ekvivalens.*

Bizonyítás. Mivel minden $E \subseteqq L$ halmazra $\mathrm{ek}^{(a)}E \subseteqq \mathrm{ek}^{(t)}E$, és a (14. 8) tétel következtében minden véges $A \subseteqq L$ halmazra $\mathrm{b}^{(a)}A = \mathrm{b}^{(t)}A$, továbbá (16. 3) következtében elegendő azt belátni, hogy ha valamely $x_0 \in L$ pontra és valamely véges $A \subseteqq L$ ($\overline{\overline{A}} > 2$) halmazra

$$x_0 \in \mathrm{b}^{(a)}A \subseteqq E, \tag{16.4.1}$$

akkor létezik olyan kételemű $B \subset L$ halmaz, amelyre

$$x_0 \in \mathrm{b}^{(a)}B \subseteqq E, \quad B \subseteqq \mathrm{ek}^{(a)}E. \tag{16.4.2}$$

Márpedig tetszőleges $x_1 \in A \setminus \{x_0\}$ ponthoz (14. 6) szerint létezik olyan $x_2 \in L$ pont, hogy

$$x_0 \in (x_2, x_1) \in \mathrm{b}^{(a)}A,$$

tehát az

$$y_1 \in (x_0, x_1), \quad y_2 \in (x_0, x_2)$$

választással a $B = \{y_1, y_2\}$ halmazra (16. 4. 1) és (14. 7) szerint (16. 4. 2) teljesül (sőt $B \subseteqq E$).

Ezt az eredményt végül összekapcsoljuk a (16. 3) tétellel:

(16. 5) TÉTEL. *Egy* L LKT-*re vonatkoztatva az „*$\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-*extremális pont" és a „gyenge* $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-*extremális pont" fogalmak ekvivalensek egymással és az extremális pont közönséges fogalmával, sőt mind az öt extremális pont-fogalom ekvivalens.*

17. §. A Krein—Milman-tétel általánosítása

(17. 1) TÉTEL. *Egy* $(X, \mathfrak{R})$ TIT *bármely kompakt és erősen* $\mathfrak{R}$-*konvex* E *részhalmazára a következő állítások ekvivalensek:*

a) E *egyenlő* $\mathfrak{R}$-*extremális pontjai* $\varepsilon(\mathfrak{R}; E)$ *halmazának erősen* $\mathfrak{R}$-*konvex burkával;*

b) E-*nek minden támaszsíkján van* $\mathfrak{R}$-*extremális pontja.*

Bizonyítás. 1° Ha $E = \emptyset$, mindkét tétel triviálisan igaz (l. a (12. 2. 1), d) megjegyzést). Ezért nem-üres E halmazra szorítkozunk.

2° A (13. 8) tétel szerint bármely nem-üres, kompakt, erősen $\mathfrak{R}$-konvex E halmazra

$$E = \bigcap \{F_E(\mathscr{R}) \setminus G_E(\mathscr{R}) : \mathscr{R} \in \mathfrak{R}\}.$$

Ha mármost E-re teljesül a b) állítás, vagyis

$$\left.\begin{array}{l}(F_E(\mathscr{R})\setminus \underline{G}(\mathscr{R};F_E(\mathscr{R}))\cap \varepsilon(\mathfrak{R};E)\neq\emptyset\\ (\bar F(\mathscr{R};G_E(\mathscr{R}))\setminus G_E(\mathscr{R}))\cap \varepsilon(\mathfrak{R};E)\neq\emptyset\end{array}\right. \quad (\mathscr{R}\in\mathfrak{R}),$$

akkor (l. (12. 2. 1), 2°) az $\varepsilon(\mathfrak{R};E)=\varepsilon$ rövidítéssel

$$\left.\begin{array}{l}M_\varepsilon(\mathscr{R})=F_\varepsilon(\mathscr{R})=F_E(\mathscr{R})\\ N_\varepsilon(\mathscr{R})=G_\varepsilon(\mathscr{R})=G_E(\mathscr{R})\end{array}\right. \quad (\mathscr{R}\in\mathfrak{R}),$$

tehát

$$E=\bigcap\{M_\varepsilon(\mathscr{R})\setminus N_\varepsilon(\mathscr{R}):\mathscr{R}\in\mathfrak{R}\}=\mathrm{ek}(\mathfrak{R};\varepsilon),$$

azaz a) is teljesül.

3° Ha pedig b) nem teljesül E-re, azaz van olyan $\mathscr{R}\in\mathfrak{R}$, amelyre pl.

$$(F_E(\mathscr{R})\setminus \underline{G}(\mathscr{R};F_E(\mathscr{R}))\cap \varepsilon(\mathfrak{R};E)=\emptyset,$$

akkor — mivel

$$M_\varepsilon(\mathscr{R})\subseteqq \underline{G}(\mathscr{R};F_E(\mathscr{R}))\subset F_E(\mathscr{R}),$$

viszont

$$(F_E(\mathscr{R})\setminus \underline{G}(\mathscr{R};F_E(\mathscr{R}))\cap E\neq\emptyset$$

(a (13. 6) tétel alapján) —

$$\mathrm{ek}(\mathfrak{R};\varepsilon(\mathfrak{R};E))\neq E$$

(sőt az erősen $\mathfrak{R}$-konvex burok izotóniája folytán $\mathrm{ek}(\mathfrak{R};\varepsilon(\mathfrak{R};E))\subset E$), tehát a) sem teljesül E-re, qu.e.d.

Mármost a (17. 1), a) állítás szemmel láthatóan a KREIN—MILMAN-tétel egy analogonja TIT-ekre; igazolására pedig (17. 1) szerint elegendő a (17. 1), b) állítást bizonyítani:

(17. 2) TÉTEL. *Egy $(X,\mathfrak{R})$ TIT bármely kompakt és erősen $\mathfrak{R}$-konvex E részhalmazának minden támaszsíkján van $\mathfrak{R}$-extremális pontja.*

Bizonyítás. 1° Ismét szorítkozhatunk nem-üres E halmazra. Tekintsük E-nek egy tetszőleges $\mathscr{R}_0\in\mathfrak{R}$ iránybeli egyik (tetszőleges) S_0 támaszsíkját és az $\mathfrak{R}$ IS-nak egy $\mathscr{R}_0$-lal kezdődő jólrendezését:

$$\mathfrak{R}=\{\mathscr{R}_0,\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2,\ldots\}.$$

(Indexként minden $\mathscr{R}$-hez az őt megelőző $\mathfrak{R}$-elemek halmazának rendszámát rendeljük.) Legyen a jólrendezett $\mathfrak{R}$ halmaz rendszáma ϱ.

Most transzfinit indukcióval minden $0\leqq\alpha\leqq\varrho$ rendszámhoz egy E_α halmazt definiálunk:

a) Legyen

$$D_0=E,\ E_0=S_0\cap D_0.$$

Ekkor E_0 nem-üres, a kompakt D_0-nak a zárt S_0-lal való metszeteként kompakt, és $E_0\subseteqq E$.

b) Ha $0<\alpha<\varrho$, és minden $0\leqq\beta<\alpha$ indexre már definiáltuk E_β-t, úgy, hogy minden E_β nem-üres, kompakt, és

$$E_{\beta'}\subseteqq E_\beta\quad(0\leqq\beta<\beta'<\alpha),$$

akkor legyen

(17. 2. 1) $$D_\alpha = \bigcap\{E_\beta : \beta < \alpha\}, \quad E_\alpha = S_\alpha \cap D_\alpha,$$

ahol S_α a D_α halmaz valamelyik $\mathcal{R}_\alpha$-irányú támaszsíkja. Nem-üres kompakt halmazok fogyó transzfinit sorozatának metszeteként D_α, s vele együtt E_α is nem-üres kompakt halmaz.

c) Legyen végül

$$E_\varrho = \bigcap\{E_\alpha : 0 \leqq \alpha < \varrho\}.$$

Ez a halmaz, mint az így definiált

$$E_0 \supseteqq E_1 \supseteqq E_2 \supseteqq \ldots \supseteqq E_\alpha \supseteqq \ldots \supseteqq E_\varrho$$

transzfinit halmaz-sorozat utolsó eleme, szintén nem-üres.

2° Mivel

$$E_\varrho \subseteqq \bigcap\{S_\alpha : 0 \leqq \alpha < \varrho\},$$

az E_ϱ halmaz (11. 3), c) szerint egyetlen pontból áll. Legyen tehát

(17. 2. 2) $$E_\varrho = \{x_0\}.$$

Mivel $x_0 \in E_0$, a tétel bizonyításához most már elegendő azt kimutatni, hogy az x_0 pont az E halmaznak $\mathfrak{R}$-extremális pontja.

3° Ha ezzel az állítással ellentétben létezik olyan

(17. 2. 3) $$2 \leqq \overline{\overline{A}} \quad (< \aleph_0)$$

számosságú A halmaz, amelyre

(17. 2. 4) $$A \subseteqq D_0, \quad x_0 \in \mathrm{b}(\mathfrak{R}; A) \subseteqq E,$$

akkor egyrészt

(17. 2. 5) $$S_\alpha \cap \mathrm{b}(\mathfrak{R}; A) \neq \emptyset \quad (0 \leqq \alpha < \varrho);$$

másrészt

(17. 2. 6) $$A \subseteqq E_\alpha \quad (0 \leqq \alpha < \varrho),$$

mert ez $\alpha = 0$-ra (17. 2. 4) és (17. 2. 5) miatt (14. 4) szerint teljesül, ha pedig $0 < \alpha < \varrho$ és

$$A \subseteqq E_\beta \quad (0 \leqq \beta < \alpha),$$

akkor $A \subseteqq D_\alpha$, s ismét (17. 2. 5) alapján (14. 4) szerint $A \subseteqq S_\alpha$, amiből a transzfinit indukció tétele szerint (17. 2. 6) következik.

Mármost (17. 2. 6) folytán

$$A \subseteqq E_\varrho;$$

ez azonban (17. 2. 2)-vel összekapcsolva ellentmond (17. 2. 3)-nak. A tételt tehát bebizonyítottuk.

Befejezésül tisztázzuk a (17. 1), a) tétel viszonyát a Krein—Milman-tételhez. Ehhez jó szolgálatot tesz

(17. 3) A Krein—Milman-tétel egy ekvivalens átfogalmazása: *tetszőleges L GLKT bármely nem-üres, kompakt és erősen $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvex E halmaza egybeesik E $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-extremális pontjai halmazának erősen $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvex burkával.*

AZ EKVIVALENCIA BIZONYÍTÁSA. 1° Egy topologikus tér minden kompakt részhalmaza a tér alaphalmazának bármely, az eredetinél durvább topológiájában is kompakt. Egy LKT minden kompakt részhalmaza tehát gyengén (vagyis a gyenge topológiában) is kompakt.

2° Ismeretes, hogy tetszőleges LKT bármely konvex részhalmaza akkor és csak akkor zárt, ha gyengén zárt ([34] 154). A zárt $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvex burok eszerint csak a tér topologikus IS-jától függ, amely a megfelelő GLKT természetes IS-ja.

3° Ismeretes az is, hogy tetszőleges L LKT minden zárt, konvex részhalmaza az őt tartalmazó zárt félterek metszete ([28] 246). Eszerint L minden kompakt, konvex részhalmaza erősen $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvex ($\mathfrak{R}^{(t)}(L)$ jelenti L topológiai s egyben a megfelelő GLKT természetes IS-ját); más szóval: kompakt (sőt zárt) halmazokra szorítkozva a konvexitás ekvivalens az erős $\mathfrak{R}^{(t)}(L)$-konvexitással.

4° Figyelembe véve a (16. 5) tételt is, ezen észrevételek azt igazolják, hogy a (17. 3) tétel ekvivalens a (0. 12) tétellel, qu.e.d.

(17. 4) Ha mármost minden GLKT-et TIT-nek tekintünk (a tér természetes IS-jával), és erre alkalmazzuk a (17. 1), a) tételt, éppen a (17. 3) tételt nyerjük.

A (17. 1), a) *tétel és a vele ekvivalens* (17. 2) *tétel tehát nem csak analogonja, hanem — több formai eltérés ellenére — tartalmát tekintve általánosítása is a Krein—Milman-tételnek.*

Ezzel elvégeztük a III. fejezet számára kitűzött fő feladatot.

VÉLETLEN IDŐKÖZÖNKÉNT MŰKÖDŐ KÉSZÜLÉK ÉLETTARTAMÁNAK HATÁRELOSZLÁSÁRÓL

Írta: MOGYORÓDI JÓZSEF és TOMKÓ JÓZSEF

1. Bevezetés

A tömegkiszolgálás matematikai problémái vizsgálatakor fel szokták tételezni, hogy a kiszolgáló készülék ideálisan működik, sohasem romolhat el. A gyakorlatban azonban számolni kell az ellenkező lehetőséggel is, és vizsgálni kell ennek hatását a tömegkiszolgálás hatékonyságára. Ilyen problémák sztochasztikus modelljeivel többek között B. V. GNYEDENKO [8] és a szerzők egyike is foglalkozott ([7]).

Hasznos tudni például, hogy a kiszolgáló készülék hibátlan működési ideje milyen eloszlású és hogy a $(0, T)$ időszakasz hányadrészében hibátlan a készülék. A készülék üzemzavarait úgy szokták figyelembe venni, hogy bevezetik a kiszolgáló készülék üzembiztonsági tartalékának fogalmát. Ezen azt az általában véletlen értékű, a készülék specifikus sajátosságának megfelelő anyagi tényezőt értjük, melynek kellő mértékű hiánya vezet a készülék üzemzavarára. Célszerű bevezetni a készülék pillanatnyi üzembiztonsági tartalékának a fogalmát is, mely lényegében t időparaméterű $\{\omega(t), t \geqq 0\}$ sztochasztikus folyamatot jelent.

Ha feltételezzük, hogy a készülék szabad állapotában üzembiztonsági tartalékának csökkenése nem véletlen intenzitású, hanem egyenlő szabad időtartamok alatt egyenlő értékekkel csökken, akkor az időegység megfelelő megválasztásával elérhető, hogy a csökkenést jellemző arányossági tényező 1 legyen. Ez esetben $\omega(t)$ értelmezhető úgy, mint a t pillanatot követő azon időtartam, melynek folyamán a készülék üzembiztos állapotban marad, hacsak nem kényszerül munkavégzésre (kiszolgálásra). Kézenfekvő feltételezni, hogy munkaállapotban a készülék üzembiztonsági tartalékának csökkenése lényegesen nagyobb intenzitású, mint a szabad periódusok folyamán. Ez azt jelenti, hogy a készülék élettartamát igen jelentősen befolyásolják az üzemeltetések gyakorisága és azok időtartamai. Ennek az élettartam-eloszlásnak a meghatározása sok esetben igen komoly nehézségekbe ütközik s ha meg is adható, fölötte bonyolult szerkezetű, melyet gyakorlatilag alig alkalmazhatunk. Lehetséges azonban ezt az eloszlástörvényt egyszerű, pl. normális eloszlással közelíteni. Növeli ennek az approximációnak az értékét az is, hogy feltételei a gyakorlati problémák többségében fenn is állanak.

Tekintsük már most közelebbről a vizsgálandó modellünket. Egy készüléket bizonyos (munka, kiszolgálási) funkciók elvégzésére állítunk be, amelyek általában véletlen időtartamúak. Legyen a készülék a $t=0$ pillanatban szabad, majd jelöljék $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ a szabad állapotban való tartózkodási időket, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ pedig az egymás utáni munkaperiódusok hosszait. Feltételezzük, hogy ezek az időtartamok összességükben egymástól függetlenek, $P\{\varepsilon_i \leqq x\} = A(x)$, ill. $P\{\xi_i \leqq x\} = B(x)$ eloszlásokkal. A készülék $t=0$ pillanatbeli üzembiztonsági tartaléka legyen $\omega(0) = \eta_T$, melynek az idő folyamán történő csökkenését az alábbiak szerint képzeljük el;

Ha a t pillanatban egy szabad periódus kezdődik el, mely ε_i ideig tart, akkor

$$\omega(t+\varepsilon_i)=\omega(t)-\varepsilon_i,$$

ha pedig a t pillanatban a készülék valamely ξ_i időtartamig foglalttá válik, akkor

$$\omega(t+\xi_i) = \omega(t)-\hat{\xi}_i,$$

ahol a $\hat{\xi}_i$ $(i \geqq 1)$ azonos eloszlású valószínűségi változók csupán csak a megfelelő indexű ξ_i-ktől függenek s olyanok, hogy

$$M\xi_i < M\hat{\xi}_i.$$

Ha pl. feltételezzük, hogy a munkaperiódusok alatt is az idővel arányosan csökken a készülék üzembiztonsági tartaléka $c>1$ arányossági tényezővel, akkor $\hat{\xi}_i=c\xi_i$. Egy másik lehetséges feltételezés, hogy $\hat{\xi}_i=g(\xi_i)$, ahol $g(t)\geqq t$ szakaszonként folytonos monoton növekvő függvény. Ilyen feltételezések mellett, amint látni fogjuk, explicite jellemezhető a készülék üzembiztonsági periódusa az ε_i, ξ_i $(i\geqq 1)$ változókkal. Módszerünk azonban nem feltétlen igényli ezt az explicit előállítási lehetőséget, ezért a ξ_i és a $\hat{\xi}_i$ változók közötti függés tetszőleges lehet.

Ha figyelembe vesszük a készülék gyártási eljárásánál fellépő véletlen tényezőket, akkor kézenfekvővé válik, hogy az üzembiztonsági tartalékot nem valamilyen konstans mennyiségnek, hanem valószínűségi változónak tekintjük. A gyakorlati problémák túlnyomó többségében ez a véletlen mennyiség igen nagy érték körül ingadozik. A bevezetett paraméterezéssel is erre a körülményre akarunk utalni, s a dolgozatunk alapját képező aszimptotikus relációt a $T\to\infty$ esetre vonatkozólag fogjuk tanulmányozni.

Jelöljük mármost a készülék élettartamát (üzembiztonsági periódusának hosszát) $\tau(\eta_T)$-vel. Legyen $\delta_i=\varepsilon_i+\hat{\xi}_i$ $(i\geqq 1)$, majd értelmezzük ν_T-t mint azon legnagyobb „n" indexet, amelyre

$$\sum_1^n \delta_i \leqq \eta_T.$$

$\delta_1>\eta_T$ esetén ν_T-t 0-nak vesszük. Innen nyomban világossá válik, hogy $\tau(\eta_T)$ kielégíti a

$$\sum_1^{\nu_T}(\varepsilon_i+\xi_i) \leqq \tau(\eta_T) < \sum_1^{\nu_T+1}(\varepsilon_i+\xi_i)$$

egyenlőtlenséget. Ezáltal problémánk független valószínűségi változók véletlen tagszámú összege eloszlásának vizsgálatára vezethető vissza. Megemlítjük, hogy a $\hat{\xi}_i$ és a ξ_i közti $\hat{\xi}_i=g(\xi_i)$ funkcionális függőség esetén $\tau(\eta_T)$ az alábbi módon fejezhető ki:

$$\tau(\eta_T)=\begin{cases}\sum_1^{\nu_T}(\varepsilon_i+\xi_i)+\left[\eta_T-\sum_1^{\nu_T}\delta_i\right], & \text{ha } \sum_1^{\nu_T}\delta_i+\varepsilon_{\nu_T+1}>\eta_T\\ \sum_1^{\nu_T}(\varepsilon_i+\xi_i)+\varepsilon_{\nu_T+1}+g^{-1}\left[\eta_T-\sum_1^{\nu_T}\delta_i-\varepsilon_{\nu_T+1}\right], & \text{ha } \sum_1^{\nu_T}\delta_i+\varepsilon_{\nu_T+1}\leqq\eta_T.\end{cases}$$

Itt most $g^{-1}(t)$ annak a folytonos görbének az $y=t$ egyenesre vonatkozó tükörképét jelenti, amelyet a $g(t)$ függvény grafikonjából annak ugráshelyeinél meghúzott megfelelő függőleges szakaszok hozzávételével kapunk. Az esetre, amikor $g(t)=ct$ $(c>1)$ a [7] dolgozatban igazolt, hogy

$$P\{\tau(\eta_T)\leqq x\} = \int_0^x H_T(x+(c-1)z)\,d\Omega_z(x,z),$$

ahol

$$H_T(x) = P\{\eta_T \leqq x\},$$

és

$$\Omega(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} B^{*(n)}(x)\,[A^{*(n)}(z-x)-A^{*(n+1)}(z-x)].$$

($A^{*(n)}(x)$, $B^{*(n)}(x)$ az $A(x)$, $B(x)$ eloszlásfüggvények n-edik konvolúcióit jelölik). Ugyancsak a [7] dolgozatban a [10] cikkben tárgyalt módszer alkalmazásával a

$$\frac{D(\eta_T)}{T}\to 0, \quad \text{hacsak} \quad T\to\infty, \tag{1.3}$$

reláció teljesülése esetén igazoltuk, hogy léteznek olyan a_T és b_T normáló mennyiségek, amelyek mellett

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\frac{\tau(\eta_T)-a_T}{b_T}\leqq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{1.4}$$

Tekintettel a véletlen tagszámú független valószínűségi változók összegére vonatkozó újabb eredményekre (l. pl. [4], [5]) (1. 4)-et általánosabb esetre is igazolhatjuk. (1. 3) helyett csupán csak azt fogjuk kikötni, hogy η_T/T sztochasztikusan egy $\eta>0$ valószínűségi változóhoz tart, ha $T\to\infty$. Pontosabban megfogalmazva ez azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon>0$, $\delta>0$-hoz megadható olyan $T_0=T(\varepsilon,\delta)$ érték, hogy

$$P\{|\frac{\eta_T}{T}-\eta|>\varepsilon\}<\delta, \tag{1.5}$$

hacsak $T>T_0$. Könnyű észrevenni, hogy (1. 3) (1. 5)-nek azt a speciális esetét jelenti, amikor az η változó 1 valószínűséggel konstans. Ugyanis, a *Csebisev*-egyenlőtlenség alapján tetszőleges $\varepsilon>0$ mellett (1. 3)-ból kiindulva a

$$\lim_{T\to\infty} P\{|\frac{\eta_T}{T}-1|>\varepsilon\}=0$$

relációhoz jutunk.

2. Segédtételek

Mielőtt rátérnénk dolgozatunk központi tételére, előrebocsátunk néhány segédtételt. Szükségünk lesz az alábbi két lemmára, melyek közül az elsőnek a bizonyítása megtalálható az [1] könyv 254. oldalán, a második állítása pedig annyira egyszerű, hogy bizonyításra nem is szorul.

1. LEMMA. *Legyenek $\chi(t)$, $\varepsilon(t)$, $\delta(t)$ $(t \geqq 0)$ sztochasztikus folyamatok, amelyek közül $\chi(t)$ rendelkezik $t \to \infty$ mellett aszimptotikus eloszlással, az $\varepsilon(t)$ és $\delta(t)$ folyamatok pedig kielégítik az alábbi feltételeket:*
tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$P\{|\varepsilon(t)-1| > \varepsilon\} \to 0 \quad hacsak \quad t \to \infty$$

és

$$P\{|\delta(t)| > \varepsilon\} \to 0 \quad hacsak \quad t \to \infty.$$

Ekkor a $\chi(t)\varepsilon(t)+\delta(t)$ folyamat is rendelkezik $t \to \infty$ esetén aszimptotikus eloszlással, mely megegyezik a $\chi(t)$ megfelelő határeloszlásával.

2. LEMMA. *Legyenek $\chi_1(t)$, $\chi(t)$, $\chi_2(t)$ $(t \geqq 0)$ sztochasztikus folyamatok, melyekre minden $t > 0$ mellett fennáll az alábbi*

$$\chi_1(t) \leqq \chi(t) \leqq \chi_2(t)$$

egyenlőtlenség. Ekkor ha $\chi_1(t)$ és $\chi_2(t)$ $t \to \infty$ esetén rendelkeznek közös aszimptotikus eloszlással, akkor ugyanezzel a határeloszlással rendelkezik a $\chi(t)$ folyamat is $t \to \infty$ mellett.

A továbbiakban egy, a rekurrens folyamatokra vonatkozó ismert tételt általánosítunk. Tekintsük e célból a $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \ldots$ pontsorozatot, ahol a $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ $(i \geqq 1)$ sorozat tagjai független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Értelmezzük ν_T^*-ot mint a $(0, T)$ intervallumba eső τ_i pontok számát. Ismeretes, hogy ha $0 < D(\delta_i) < \infty$, akkor

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\frac{\nu_T^* - \frac{1}{m}T}{D(\delta_i)\sqrt{T}} \leqq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Az alábbi tételünkben ezt az állítást igazoljuk arra az esetre, amikor ν_T^* valamely véletlen hosszúságú intervallumba eső τ_i pontok számát jelenti.

1. TÉTEL. *Legyen $\{\eta_T;\ T > 0\}$ pozitív értékű sztochasztikus folyamat és tegyük fel, hogy η_T/T, $T \to \infty$ esetén sztochasztikusan valamely $\eta > 0$ valószínűségi változóhoz konvergál. Jelentse most ν_T az előbb említett pontsorozatnak a $(0, \eta_T)$ véletlen intervallumba eső pontjainak számát. Más szóval, ν_T az a legnagyobb „n" index, amelyre $\tau_n \leqq \eta_T$ még teljesül. Az $m = M\delta_i > 0$, $D^2 = D^2(\delta_i) > 0$ létezése esetén*

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\frac{\nu_T - \frac{\eta_T}{m}}{D\sqrt{\frac{\eta_T}{m^2}}} < x\right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Bizonyítás. Ha $T > 0$ és $n > 0$, ahol n egész, akkor

(2. 1) $$P\{\nu_T < n\} = P\{\tau_n \geqq \eta_T\}.$$

Legyen

$$n = \left[\frac{\eta_T}{m} + x\sqrt{\frac{D^2\eta_T}{m^3}}\right],$$

ahol $[x]$ az x szám egész részét jelenti. Minthogy

$$P\{\nu_T < n\} = P\left\{\frac{\nu_T - \eta_T/T}{\sqrt{D^2\eta_T/m^3}} < \frac{n-\eta_T/m}{\sqrt{D^2\eta_T/m^3}}\right\},$$

és η_T sztochasztikusan $+\infty$-hez konvergál, ezért

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\left|\frac{\eta-\eta_T/m}{\sqrt{D^2\eta_T/m^3}} - x\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Alkalmazzuk most az 1. lemmát a

$$\chi(T) = \frac{\nu_T - \eta_T/m}{\sqrt{D^2\eta_T/m^3}}, \quad \varepsilon(T) \equiv 1, \quad \delta(T) = -\frac{n-\eta_T/m}{\sqrt{D^2\eta_T/m^3}} + x$$

folyamatokra. Ily módon, a

$$\lim_{T\to\infty} P\{\nu_T < n\} = \lim_{T\to\infty} P\left\{\frac{\nu_T-\eta_T/m}{\sqrt{D^2\eta_T/m^3}} < x\right\}$$

egyenlőséghez jutunk, hacsak létezik a bal oldali határérték. Másrészről

$$P(\tau_n \geqq \eta_T) = P\left\{\frac{\tau_n - n\cdot m}{\sqrt{nD^2}} \geqq \frac{\eta_T - n\cdot m}{\sqrt{nD^2}}\right\}.$$

Ekkor η_T-nek a $T\to\infty$ melletti viselkedéséről tett feltevésünk értelmében

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\left|\frac{\eta_T - n\cdot m}{\sqrt{nD^2}} + x\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Az 1. lemma ismételt alkalmazásával, megfelelően értelmezve a benne szereplő mennyiségeket, kapjuk a

$$\lim_{T\to\infty} P\{\tau_n \leqq \eta_T\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\tau_n - nm}{\sqrt{nD^2}} \geqq -x\right\}$$

egyenlőséget, feltéve, hogy létezik a bal oldal határértéke. A centrális határeloszlás-tétel szerint viszont

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\tau_n - nm}{\sqrt{nD^2}} \geqq -x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Ezen két utóbbi reláció (2. 1)-re való tekintettel éppen állításunkat igazolja.

KOROLLÁRIUM. A ν_T/T, $T\to\infty$ esetén sztochasztikusan az η/m valószínűségi változóhoz konvergál.

A korollárium bizonyítása annyira egyszerű, hogy azt itt mellőzzük.

Szükségünk lesz ANSCOMBE [11] 1. tételének következő általánosítására, melynek bizonyítása a [4] cikkben megtalálható.

2. TÉTEL. *Legyenek $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n, \dots$ független, azonos eloszlású, véges szórással rendelkező valószínűségi változók. Legyen $m = M(\delta_i)$, $D^2 = D^2(\delta_i)$. Legyen továbbá $\{\nu_k\}_{k=1,2,\dots}$ pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat és tegyük*

fel, hogy ν_n/n sztochasztikusan valamely pozitív ν valószínűségi változóhoz konvergál. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{\nu_n}(\delta_i - m)}{D\sqrt{\nu_n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Végül hivatkozni fogunk még a következő állításra:

3. LEMMA. *Legyen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ azonos eloszlású független valószínűségi változókból álló sorozat és tegyük fel, hogy a változók második momentuma létezik. Legyen továbbá ν_T, $T>0$ pozitív egész értékű valószínűségi változók serege olyan, hogy ν_T/T a $\nu>0$ valószínűségi változóhoz konvergál, mikor $T\to\infty$. Ekkor $\delta_{\nu_T}/\sqrt{\nu_T}$ $T\to\infty$ esetén sztochasztikusan zérushoz konvergál.*

Bizonyítás. Legyenek $0<a<b$ olyan számok, hogy

$$P\{a \leqq \nu < b\} > 1-\delta$$

teljesüljön, ahol $\delta>0$ tetszőleges rögzített szám. Minthogy $T\to\infty$ esetén

$$P\left\{\left|\frac{\nu_T}{T} - \nu\right| > \varepsilon\right\} \to 0,$$

azért létezik olyan t_1, hogy $T \geqq t_1$ mellett

$$P\left\{\left|\frac{\nu_T}{T} - \nu\right| < \varepsilon\right\} \geqq 1-\delta$$

teljesül. Legyen $N_1 = [T(a-\varepsilon)]$, $N_2 = [T(b+\varepsilon)]$ és jelölje $F(x)$ a δ_i változók közös eloszlásfüggvényét. Minthogy

$$P\left\{\left|\frac{\delta\nu_T}{\sqrt{\nu_T}}\right| > \varepsilon\right\} \leqq 2\delta + P\left\{\left|\frac{\delta\nu_T}{\sqrt{\nu_T}}\right| > \varepsilon,\ a \leqq \nu < l,\ \left|\frac{\nu_T}{T} - \nu\right| < \varepsilon\right\} \leqq$$

$$\leqq 2\delta + P\left\{\frac{\max\limits_{N_1 \leqq n \leqq N_2} |\delta_n|}{\sqrt{N_1}} > \varepsilon\right\},$$

ily módon

$$P\left\{\left|\frac{\delta\nu_T}{\sqrt{\nu_T}}\right| > \varepsilon\right\} \leqq (N_2 - N_1)\big(1 - F(\varepsilon\sqrt{N_1}) + F(-\varepsilon\sqrt{N_1})\big) + 2\delta.$$

Az $F(x)$ eloszlásfüggvény második momentumának létezése biztosítja, hogy

$$\lim_{x\to\infty} x^2(1-F(x)) = \lim_{x\to\infty} x^2 F(-x) = 0.$$

Tekintettel arra, hogy $(N_2 - N_1)/N_1$ korlátos marad, ha $T\to\infty$ és a $\delta>0$ számot tetszőlegesen kicsivé választhatjuk, ezért előbbi megjegyzésünk alapján adódik, hogy

$$\lim_{T\to\infty} P\left\{\frac{|\delta\nu_T|}{\sqrt{\nu_T}} > \varepsilon\right\} = 0,$$

bármilyen is az $\varepsilon>0$ szám. Ezzel állításunkat igazoltuk.

3. $\tau(\eta_T)$ határeloszlása

Az **1** pontban említettek szerint legyen $\omega(0)=\eta_T$ és tegyük fel, hogy $T\to+\infty$ esetén η_T/T sztochasztikusan a pozitív η valószínűségi változóhoz konvergál. Feltesszük azt is, hogy $D(\varepsilon_i)<+\infty$, $D(\xi_i)<+\infty$ és $D(\hat{\xi}_i)<+\infty$. Legyen $\nu_T=0$, ha $\eta_T\leqq\varepsilon_1+\hat{\xi}_1$ és $\nu_T=n$, ha

$$\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i+\hat{\xi}_i)\leqq\eta_T<\sum_{i=1}^{n+1}(\varepsilon_i+\hat{\xi}_i).$$

Az 1. tétel korolláriumát alkalmazva a

$$\tau_n=\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i+\hat{\xi}_i)$$

valószínűségi változó sorozatra, belátható, hogy ν_T/T sztochasztikusan az η/m_2 valószínűségi változóhoz konvergál, mikor $T\to+\infty$, ahol $m_2=M(\varepsilon_i+\hat{\xi}_i)$. Amint láttuk, a $\tau(\eta_T)$ valószínűségi változó eleget tesz a

$$\sum_{i=1}^{\nu_T}(\varepsilon_i+\xi_i)\leqq\tau(\eta_T)<\sum_{i=1}^{\nu_T+1}(\varepsilon_i+\xi_i)$$

egyenlőtlenségnek. Vezessük be a $\tau^*(\eta_T)$ jelölést a

$$\sum_{i=1}^{\nu_T}(\varepsilon_i+\xi_i)$$

összegre. Bebizonyítjuk a következő tételt.

3. Tétel. *Ha η_T/T sztochasztikusan az $\eta>0$ valószínűségi változóhoz konvergál, akkor*

$$\lim_{T\to+\infty}P\left(\frac{\tau(\eta_T)-a\eta_T}{\sqrt{b\eta_T}}<x\right)=\Phi(x).$$

E képletben

$$a=\frac{m_1}{m_2},\quad m_1=M(\varepsilon_1+\xi_1),\quad m_2=M(\varepsilon_1+\hat{\xi}_1),$$

$$b=\frac{D^2\left(\varepsilon_1+\xi_1-\frac{m_1}{m_2}(\varepsilon_1+\hat{\xi}_1)\right)}{m_2}=\frac{D^2}{m_2}.$$

Bizonyítás. Nyilván

$$\frac{\tau^*(\eta_T)-\frac{m_1}{m_2}\eta_T}{D\sqrt{\nu_T}}\leqq\frac{\tau(\eta_T)-\frac{m_1}{m_2}\eta_T}{D\sqrt{\nu_T}}\leqq\frac{\tau^*(\eta_T)-\frac{m_1}{m_2}\eta_T+\varepsilon_{\nu_T+1}+\xi_{\nu_T+1}}{D\sqrt{\nu_T}}.\tag{3.1}$$

Megmutatjuk, hogy ezen egyenlőtlenség bal és jobb oldalán álló sztochasztikus folyamatok $T \to +\infty$ esetén vett határeloszlása létezik és standard normális eloszlású. Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \sum_{i=1}^{\nu_T+1} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)}{D\sqrt{\nu_T}} \leqq \frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \eta_T}{D\sqrt{\nu_T}} \leqq \frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \sum_{i=1}^{\nu_T} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)}{D\sqrt{\nu_T}}, \tag{3. 2}$$

továbbá, hogy

$$M\left(\varepsilon_i + \xi_i - \frac{m_1}{m_2} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)\right) = 0.$$

A ν_T/T valószínűségi változó sztochasztikusan az η/m_2 valószínűségi változóhoz konvergál. Ezért a 2. tétel értelmében

$$\lim_{T \to +\infty} P\left(\frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \sum_{i=1}^{\nu_T} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)}{D\sqrt{\nu_T}} < x\right) = \Phi(x).$$

(3. 2) bal oldalának határeloszlását a *Cramér*-féle 1. lemma alapján nyerjük; nevezetesen, ha bizonyítást nyer, hogy az

$$\frac{\varepsilon_{\nu_T+1} + \hat{\xi}_{\nu_T+1}}{D\sqrt{\nu_T}}$$

valószínűségi változó $T \to +\infty$ esetén sztochasztikusan zérushoz konvergál, akkor a *Cramér*-lemma alapján (3. 2) bal oldalának is $\Phi(x)$ a határeloszlása. Most a 3. Lemma összes feltételei teljesülnek. Ily módon

$$\frac{\varepsilon_{\nu_T+1} + \hat{\xi}_{\nu_T+1}}{D\sqrt{\nu_T}}$$

sztochasztikusan zérushoz konvergál. Az 1. lemma értelmében pedig ekkor

$$\lim_{T \to +\infty} P\left(\frac{\tau^*(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2} \sum_{i=1}^{\nu_T+1} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)}{D\sqrt{\nu_T}} < x\right) = \Phi(x).$$

A 3. lemma feltételei teljesülnek az

$$\eta_n = \varepsilon_n + \xi_n$$

valószínűségi változó sorozatra is, ezért $T \to \infty$ esetén

$$\frac{\eta_{\nu_T}}{D\sqrt{\nu_T}}$$

sztochasztikusan zérushoz konvergál. Figyelembe véve előbbi limeszrelációnkat, az 1. és 2. lemma alapján mondható, hogy (3. 1) középső tagjának határeloszlása is normális. A *Cramér*-lemma alapján bizonyításunkat a következőképpen fejezhetjük be: minthogy ν_T/T sztochasztikusan az η/m_2 változóhoz konvergál, azért

$$\frac{\tau^*(\eta_T)-\frac{m_1}{m_2}\eta_T}{D\sqrt{\nu_T}}$$

határeloszlása nem változik meg, ha ν_T helyébe a

$$\frac{T\eta}{m_2}$$

valószínűségi változót írjuk és ugyancsak változatlan marad, ha ez utóbbi helyébe az η_T/m_2 változó kerül.

KOROLLÁRIUM. Ha az $\eta_T/T \Rightarrow \eta$ sztochasztikus konvergencia helyett az erősebb

$$\lim_{T\to+\infty} P\left(\left|\frac{\eta_T}{T}-\eta\right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{T}}\right) = 0$$

feltételt rójuk ki, akkor teljesül a

$$\lim_{T\to+\infty} P\left(\frac{\tau(\eta_T)-\frac{m_1}{m_2}T\eta}{D\sqrt{\frac{T\eta}{m_2}}} < x\right) = \Phi(x)$$

limeszreláció is. Valóban, vegyünk egy olyan $\delta > 0$ számot, hogy

$$P(\eta > \delta) > 1-\varepsilon'$$

teljesüljön, ahol $\varepsilon' > 0$ tetszőleges előre adott szám. Ekkor

$$P\left(\left|\frac{\eta_T-T\eta}{\sqrt{T\eta}}\right| > \varepsilon\right) \leqq \varepsilon' + P(|\eta_T-T\eta| > \sqrt{T\delta}\,\varepsilon) = \varepsilon' + P\left(\left|\frac{\eta_T}{T}-\eta\right| > \frac{\sqrt{\delta}\,\varepsilon}{\sqrt{T}}\right).$$

Minthogy az $\varepsilon' > 0$ számot tetszőleges kicsivé választhatjuk, azért ez utóbbi reláció a *Cramér*-lemma alapján állításunkat jelenti.

A korolláriumban kirótt feltétel teljesül, ha $M(\eta_T) = T$ és $D(\eta_T)/T \to 0$ $(T \to +\infty)$. Ez esetben $P(\eta \equiv 1) = 1$ és

$$\lim_{T\to+\infty} P\left(\frac{\tau(\eta_T)-aT}{\sqrt{b_T}} < x\right) = \Phi(x).$$

4. Néhány megjegyzés

A 3. tétel bizonyításakor az 1. tétel és a 2. tétel eredményeit használtuk fel. Azonban az 1. tételnél nem lényeges a δ_i változók szórásának létezése. Ezt mutatja a következő állítás.

4. TÉTEL. *Legyen η_T pozitív értékű sztochasztikus folyamat és tegyük fel, hogy $T \to +\infty$ esetén η_T/T sztochasztikusan az $\eta > 0$ valószínűségi változóhoz konvergál. Legyenek $\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ valószínűségi változók és tegyük fel, hogy a $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak és közös $G(x)$ eloszlásfüggvényükre fennáll a*

$$\lim_{x \to +\infty} \bigl(1 - G(x)\bigr) x^\gamma = A$$

reláció, ahol $A > 0$ és $0 < \gamma < 2$ állandók. Jelölje ν_T azt a legnagyobb n indexet, amelyre teljesül, hogy $\tau_n < \eta_T$. Ekkor, ha $1 < \gamma < 2$,

$$\lim_{T \to +\infty} P\left(\frac{\nu_T - \dfrac{\eta_T}{m}}{\left(\dfrac{A\eta_T}{m^{1+\gamma}}\right)^{1/\gamma}} < x \right) = 1 - F_\gamma(-x), \quad (-\infty < x < +\infty),$$

ahol m az $F_\gamma(x)$ eloszlásfüggvény várható értéke. Ha $0 < \gamma < 1$, akkor

$$\lim_{T \to +\infty} P\left(\frac{\nu_T}{\left(\dfrac{\eta_T}{A^{1/\gamma}}\right)^\gamma} < y \right) = 1 - F_\gamma\left(y^{-\frac{1}{\gamma}}\right), \quad (0 < y < +\infty).$$

E limeszrelációkban $F_\gamma(x)$ azt a stabilis eloszlásfüggvényt jelöli, amelynek karakterisztikus függvénye a

$$\varphi_\gamma(t) = \exp\left\{ -|t|^\gamma \left(\cos\frac{\pi\gamma}{2} - i \sin\frac{\pi\gamma}{2} \operatorname{sign} t \right) \Gamma(1-\gamma) \right\}$$

formula által van meghatározva. Ismeretes, hogy $\gamma < 1$ esetén $F_\gamma(x) = 0$, ha $x \leqq 0$, míg $\gamma \geqq 1$ esetén $F_\gamma(x) > 0$ minden x-re.

A 4. tétel bizonyítása az 1. tétel bizonyításához hasonló módon történik. A tételből következik, hogy $1 < \gamma < 2$ esetén a ν_T/T valószínűségi változó $T \to +\infty$ esetén sztochasztikusan az η/m valószínűségi változóhoz konvergál.

Az 1. és 4. tételek FELLER [3] megfelelő eredményeinek általánosításai.

A 2. tétel is megfogalmazható általánosabban.

5. TÉTEL. *Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók sorozata és tegyük fel, hogy valamilyen $\{B_n\}$ ($B_n \to +\infty$, ha $n \to +\infty$) és $\{C_n\}$ számsorozatokra teljesül, hogy az*

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n} - C_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

valószínűségi változóknak létezik a határeloszlása, mikor $n \to +\infty$. Feltesszük, hogy

$B_n = n^\alpha L(n)$ alakú, ahol $\alpha > 0$ és tetszőleges rögzített $c > 0$ esetén $L([cn])/L(n) \to 1$, mikor $n \to +\infty$. Ha v_n olyan pozitív egész értékű változók sorozata, hogy v_n/n sztochasztikusan valamely pozitív v valószínűségi változóhoz konvergál, akkor az η_{v_n} határeloszlása ugyanaz, mint az η_n sorozaté.

Ez utóbbi két állítás segítségével a $\tau(\eta_T)$ határeloszlására nézve a következő állítás érvényes:

6. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $m_1 = M(\varepsilon_1 + \xi_1)$ és $m_2 = M(\varepsilon_1 + \hat{\xi}_1)$ létezik és a $H(x) = P(\varepsilon_1 + \xi_1 < x)$, illetőleg a $G(x) = P\left(\varepsilon_1 + \xi_1 - \frac{m_1}{m_2}(\varepsilon_1 + \hat{\xi}_1) < x\right)$ eloszlásfüggvényekre teljesülnek a*

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - H(x)) x^\gamma = A,$$

ill. a

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - G(x)) x^\alpha = Bc_1, \quad \lim_{x \to -\infty} G(x) |x|^\alpha = Bc_2$$

limeszrelációk, ahol $1 < \gamma < 2$, $1 < \alpha < 2$, $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$, $c_1 + c_2 > 0$ és $A > 0$, $B > 0$ állandók. Ekkor, ha η_T pozitív értékű sztochasztikus folyamat, amelyre teljesül, hogy η_T/T sztochasztikusan a pozitív η változóhoz konvergál, fennáll a

$$\lim_{T \to +\infty} P\left(\frac{\tau(\eta_T) - \frac{m_1}{m_2}\eta_T}{\left(\frac{T\eta B}{m_2}\right)^{1/\alpha}} < x\right) = F_\alpha(x)$$

limeszreláció, ahol $F_\alpha(x)$ az α, c_1, c_2 $(c_1 + c_2 > 0)$ paraméterekhez tartozó stabilis eloszlásfüggvény.

A 6. tétel a stabilis határeloszlásokra vonatkozó ismert eredmények felhasználásával ugyanúgy bizonyítható, mint a 3. tétel. Egyedüli problémát az

$$\frac{\varepsilon_{v_T+1} + \xi_{v_T+1}}{v_T^{1/\alpha}},$$

ill. az

$$\frac{\varepsilon_{v_T+1} + \hat{\xi}_{v_T+1}}{v_T^{1/\alpha}}$$

valószínűségi változók sztochasztikus zérushoz való konvergenciája jelent.

Ezt bizonyítani a következő lemmák segítségével lehet.

4. LEMMA. ([6]) *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók és legyen $k_n \leqq m_n$ két pozitív egész számokból álló végtelenhez tartó sorozat. Jelöljön A_n tetszőleges, a $\{\xi_{k_n}, \ldots, \xi_{m_n}\}$ valószínűségi változók által generált σ-algebrába tartozó eseményt. Ekkor, ha A tetszőleges rögzített esemény,*

$$\limsup_{n \to +\infty} (P(A_n A) - P(A_n) P(A)) = 0.$$

5. LEMMA. *Legyen $\eta_1, \eta_2, \dots$ azonos eloszlású független valószínűségi változók sorozata és tegyük fel, hogy közös $F(x)$ eloszlásfüggvényükre teljesülnek a*

$$\lim_{x \to +\infty} (1-F(x))x^\alpha = Bc_1, \quad \lim_{x \to -\infty} F(x)|x|^\alpha = Bc_2$$

limeszrelációk, ahol $0<\alpha<2$, $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$, $c_1+c_2>0$ és $B>0$ állandók. Legyen ν_T pozitív egész értékű valószínűségi változókból álló sorozat és tegyük fel, hogy $T \to +\infty$ esetén ν_T/T sztochasztikusan a $\nu>0$ valószínűségi változóhoz konvergál. Ekkor $\eta_{\nu_T}/(\nu_T)^{1/\alpha}$ sztochasztikusan zérushoz konvergál.

Bizonyítás. Legyenek $0<a<b$ olyan számok, hogy

$$P(a \leqq \nu < b) > 1-\delta$$

teljesüljön, ahol $\delta>0$ később meghatározandó rögzített szám. Létezik olyan T_1 szám, hogy $T \geqq T_1$ esetén

$$P\left(\left|\frac{\nu_T}{T}-\nu\right| < \frac{a}{2}\right) \geqq 1-\delta.$$

Osszuk fel az $\left(\frac{a}{2}, b+\frac{a}{2}\right)$ intervallumot az a_i $\left(i=0,1,2,\dots,k;\ a_0=\frac{a}{2},\ a_k=b+\frac{a}{2}\right)$ osztópontokkal, úgy, hogy teljesüljön az

$$\frac{a_i-a_{i-1}}{a_{i-1}} \leqq \delta \quad (i=1,2,\dots,k)$$

egyenlőtlenség és jelölje N_i a $[Ta_i]$ egész számot. Ekkor nyilván

$$P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_T}}{\nu_T^{1/\alpha}}\right| > \varepsilon\right) \leqq 2\delta + \sum_{i=1}^{k_1} P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_T}}{\nu_T^{1/\alpha}}\right| > \varepsilon,\ a_{i-1} \leqq \nu < a_i,\ \left|\frac{\nu_T}{T}-\nu\right| < \frac{a}{2}\right) \leqq$$

$$\leqq 2\delta + \sum_{i=1}^{k_1} P\left(\max_{N_{i-1} \leqq n \leqq N_i} |\eta_n| > \varepsilon N_{i-1}^{1/\alpha}, a_{i-1} \leqq \nu < a_i\right),$$

ahol $\varepsilon>0$ tetszőleges rögzített szám.

A 4. lemmát alkalmazva az összeg egyes tagjaira, nyerjük, hogy

$$\limsup_{T \to +\infty} P\left(\max_{N_{i-1} \leqq n \leqq N_i} |\eta_n| > \varepsilon N_{i-1}^{1/\alpha}, a_{i-1} \leqq \nu < a_i)\right) \leqq$$

$$\leqq \lim_{T \to +\infty} \frac{N_i - N_{i-1}}{N_{i-1}} N_{i-1}((1-F(\varepsilon N_{i-1}^{1/\alpha})+F(-\varepsilon N_{i-1}^{1/\alpha}))P(a_{i-1} \leqq \nu < a_i) =$$

$$= \frac{a_i-a_{i-1}}{a_{i-1}} \frac{c_1 B + c_2 B}{\varepsilon^\alpha} P(a_{i-1} \leqq \nu < a_i),$$

mivel az $F(x)$ eloszlásfüggvény az α kitevőjű, $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$, $c_1+c_2>0$ állandókkal jellemzett stabilis eloszlás normális vonzási tartományába tartozik. Ily módon

$$P\left(\left|\frac{\eta_{\nu_T}}{\nu_T^{1/\alpha}}\right| > \varepsilon\right) \leqq 2\delta + \frac{\delta B(c_1+c_2)}{\varepsilon^\alpha} \sum_{i=1}^{k} P(a_{i-1} \leqq \nu < a_i) \leqq 2\delta + \frac{\delta B(c_1+c_2)}{\varepsilon^\alpha}.$$

Minthogy $\delta>0$ tetszőleges kicsivé választható, azért az utóbbi egyenlőtlenség éppen állításunkat igazolja.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] H. CRAMÉR: *Mathematical methods of statistics*, University Press. Princeton, 1946.

[2] L. TAKÁCS: On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. **8** (1957) 169—191.

[3] W. FELLER: Fluctuation theory of recurrent events, *Transactions of the American Mathematical Society*, **67** (1947) 98—119.

[4] J. MOGYORÓDI: A central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 7 (1962) 409—424.

[5] J. MOGYORÓDI: On limiting distributions of some special sequences of random variables, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungaricae* (sajtó alatt).

[6] J. R. BLUM, D. L. HANSON, J. I. ROSENBLATT: On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*. **1** (1963) 389—393.

[7] Й. Томко: Некоторые задачи обслуживания ненадежным прибором. Кандидатская диссертация. Москва, 1964.

[8] Б. В. Гнеденко: Об одной задаче массового обслкживания, *Transactions of the Second Prague conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes*. 1959. Prague.

[9] TOMKÓ J.: Tömegkiszolgálási problémákról, I., II., III. MTA III. oszt. Közleményei **15** (1965), **16** (1966), **17** (1967).

[10] A. RÉNYI: On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957).

[11] F. J. ANSCOMBE: Large-sample theory of sequential estimation. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **48** (1952) 600—607.

(Beérkezett: 1967. IV. 20.)

О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРЕБЫВАНИЯ В ИСПРАВНОМ СОСТОЯНИИ ПРИБОРА, РАБОТАЮЩЕГО ПО СЛУЧАЙНЫМ ПРОМЕЖУТКАМ ВРЕМЕНИ

J. TOMKÓ — J. MOGYORÓDI

Резюме

Рассмотрим некоторый прибор, имеющий случайный ресурс η_T в начальный момент его включения. Значит, прибор способен выполнять работу в течение времени конечной длительности. Предполагается, что убывание речурса за время бездействия происходит пропорционально времени, а за проработанное время ξ убывает на $\hat{\xi}$ где $M\hat{\xi} > M\xi$. Проще говоря, износ прибора интенсивнее во время работы, чем когда он свободен. Вследствие этого, на длительность исправного периода прибора сильно влияет частата и длины рабочих времен. В работе изучается асимптотическое поведение распределения длительности жизни прибора. В допущениях, что при $T \to \infty$ η_T/T стремится стохастически к случайной величине $\eta > 0$ и, что как свободные ε_i, так и рабочие периоды ξ_i и величины $\hat{\xi}_i$ имеют конечную дисперсию, доказана асимптотическая нормалность упомянутого распределения. Далее этого, авторы дают достаточное условие для того, чтобы предельное распределение исправного периода прибора было устойчивым с параметрами α, c_1, c_2 $(c_1 + c_2 > 0)$.

TÖMEGKISZOLGÁLÁSI PROBLÉMÁKRÓL, III.

Írta: TOMKÓ JÓZSEF

Bevezetés

Tekintsünk egy egycsatornás kiszolgáló rendszert, amelybe λ paraméterű homogén *Poisson*-folyamat szerint érkeznek az igények. Tételezzük fel, hogy az igények kiszolgálási időtartamai mind egymás között, mind pedig a beérkezési folyamattól is függetlenek s közös $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkeznek. Gyakori az a feltételezés, hogy egy elkezdődött kiszolgálás zavartalan lefolyását semmilyen körülmény sem akadályozhatja meg, avagy, hogy a rendszerben felhalmozódott igények egymás utáni kiszolgálásai fennakadás nélkül mennek végbe. Nyilvánvaló, hogy ezekkel a szkémákkal nem tárgyalhatók a gyakorlatban felmerülő összes tömegkiszolgálási problémák. Előfordulnak az ún. elsőbbségi szituációk, melyek szerint a rendszerbe két vagy több típusú igény érkezik be s feltételezett, hogy a magasabb típusú igények a kiszolgálásban mindig megelőzik az alacsonyabb típusúakat, avagy félbeszakíthatják azok kiszolgálásait. Egy speciális elsőbbségi rendszerrel találjuk magunkat szemben, ha a kiszolgáló készüléket nem tekintjük abszolút megbízhatónak. Ha a készüléken előfordul egy hiba, akkor a folyamatban levő kiszolgálás félbeszakad s egyúttal a várakozó igények rendeléseire is csak a hiba kijavítása után kerülhet sor. Sok esetben a készülék elromlása odavezet, hogy a rendszerben tartózkodó igények mind elvesznek s újonnani felhalmozódásuk csak akkor lehetséges, ha a készülék kijavítása megtörtént. Ilyen rendszerek stacionárius állapotvalószínűségeit tanulmányoztuk az [1] dolgozatunkban. Rendszerünk effektivitásának átfogóbb jellemzése felveti a készülék egy hibátlan periódusa alatt kiszolgált igények száma eloszlásának vizsgálatát. Annak érdekében, hogy a gyakorlatban felmerülő problémáinkat mind valósághűebben tanulmányozzuk, feltételeztük, hogy a készülék ún. üzembiztonsági tartalékának csökkenése a munkaperiódusok folyamán intenzívebb, mint a szabad periódusok alatt. Minthogy a szabad és a munkaperiódusok véletlen időtartamúak, a készülék hibátlan működési ideje nem lehet arányos az üzembiztonsági tartalékával. Ha például a készülék üzembiztonsági tartaléka minden egyes felújítás után T értéket vesz fel, akkor a hibátlan működési idők véletlen jellegűek s felmerül eloszlástörvényeik meghatározásának a problémája. Dolgozatunkban diszkutálni fogjuk a készülék egy üzembiztonságos periódusa alatt kiszolgált igények számának eloszlását. Magának az üzembiztonságos periódusnak a vizsgálatával a [3] dolgozatban foglalkozunk. Mielőtt rátérnénk a probléma részletesebb tanulmányozására, felelevenítjük az [1] és a [2] dolgozatban használt néhány fogalmat és jelölést.

A készülék üzembiztonsági tartalékán azt az általában véletlen értékű, a készülék specifikus sajátosságának megfelelő anyagi tényezőt értjük, amelynek kellő mértékű hiánya esetén a készülék hibás lesz. A készülék üzembiztonsági tartaléka mind a szabad, mind a munkaperiódusok alatt az idővel arányosan $c=1$, ill. $c>1$ arányossági tényezővel csökken. Jelölje most $\omega(t)$, $t \geqq 0$ a készülék t pillanatbeli üzembiztonsági tartalékának értékét. Ha a t pillanatban javítás folyik, akkor $\omega(t)$-t zérusnak értelmezzük. A készülék üzembiztonsági tartaléka a felújítások (javítások) befejeződési pillanataiban (ezeket a pillanatokat r_i-kel fogjuk jelölni) általában véletlen $\eta_i = \omega(r_i + 0)$ $(i \geqq 1)$ értékekre ugrik. Fel fogjuk tételezni, hogy az η_i $(i \geqq 1)$ valószínűségi változók függetlenek egymástól, a kiszolgálási időtartamoktól, továbbá a beérkezési folyamattól, valamint, hogy azonos eloszlásúak $P\{\eta_i \leqq x\} = H(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

1. Tiszta elvesztéses rendszer

Tekintsünk valamilyen készüléket vagy berendezést, melyet bizonyos véletlen hosszúságú időtartamok alatt üzemeltetünk. Tételezzük fel, hogy kezdetben a készülék valamely ε_1 időtartamig szabad állapotban volt, s hogy ez idő alatt az ü.b. tart.-a ε_1 értékkel csökkent. Majd ezután egy ξ_1 hosszúságú ideig üzemeltettük a készüléket, mely idő alatt $\hat{\xi}_1$ mennyiségű ü. b. tartalékot veszít a készülék. Ezután a szabad periódusok ε_i-k és az üzemeltetési időszakok ξ_i-k, melyek folyamán ε_i-vel, ill. $\hat{\xi}_i$-vel csökken a készülék ü. b. tartaléka, váltogatják egymást mindaddig, amíg csak a készülékben hiba nem lép fel. Feladatunk meghatározni annak a valószínűségét, hogy pl. k $(k \geqq 0)$ alkalommal sikerült a készülékünket üzemeltetni. Jelöljük η-val a készülék ü.b. tartalékát, N pedig jelentse egy hibátlan periódusa alatti üzemeltetések számát. Mármost az $\{N = n\}$ esemény ekvivalens a

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i) \leqq \eta < \sum_{i=1}^{n+1} (\varepsilon_i + \hat{\xi}_i)\right\}$$

eseménnyel. Az esetben, amikor az egyesített $\{\varepsilon_i, \hat{\xi}_i, (i \geqq 1)\}$ sorozat tagjai független valószínűségi változók $P\{\varepsilon_i \leqq x\} = A(x)$ és $P\{\hat{\xi}_i \leqq x\} = \hat{F}(x)$ eloszlásfüggvényekkel, a

$$P\{N = n/\eta = y\} = P_n(y)$$

feltételes valószínűség

$$P_n(y) = k^{*(n)}(y) - k^{*(n+1)}(y)$$

alakban adható meg, ahol $k(y) = A(y) * \hat{F}(y)$, $k^{*(n)}(y)$ pedig a $k(y)$ el. o. fv. önmagával vitt n-edik Lebesque—Stieltjes konvolúciója. Magára a feltétel nélküli $P_n = P\{N = n\}$ eloszlásra pedig kapjuk a

$$P_n = \int_0^\infty P_n(y)\, dH(y) \tag{1}$$

előállítást. A készülék üzembiztonsági periódusa alatti üzemeltetések számának átlagértékét az

$$M\{N\} = \int_0^\infty m(t)\, dH(t) \tag{2}$$

integrál szolgáltatja, melyben $m(t)$ az $\{\varepsilon_i + \hat{\xi}_i,\ i \geqq 1\}$ sorozat által értelmezett felújítási folyamat ún. felújítási függvénye, azaz, jelöléseinknek megfelelően

$$m(t) = M\{N/\eta = t\}.$$

Tekintsük most az [1] dolgozat 1. §-ának esetét. Eszerint egy kiszolgáló készülékhez λ paraméterű homogén Poisson-folyamat szerint érkeznek az igények, melyek csak akkor maradhatnak a rendszerben, ha a készülék hibátlan és szabad. Minden más esetben elvesznek. A készülék ü. b. tart.-ának csökkenése a bevezetésben mondottak szerint megy végbe. Tehát ha ε ideig szabad a rendszer, akkor ε-nal, ha pedig ξ ideig tartott egy igény kiszolgálása, akkor $c\xi = \hat{\xi}$, $(c > 1)$ értékkel csökken a készülék ü. b. tartaléka. Könnyű észrevenni, hogy a készülék egy hibátlan periódusa alatt kiszolgált igények számának eloszlását ill. várható értékét az $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ és az $\hat{F}(x) = F\left(\frac{x}{c}\right)$ ($F(x)$ a kiszolgálási idő el. o. fv.-e) választása mellett (1), ill. (2) formula alapján adhatjuk meg.

2. Két lemma

Ha feltételezzük, hogy a beérkező igények a rendszerben maradnak, hacsak a készülék nem hibás, akkor egy üzembiztonságos periódus alatt kiszolgált igények számának eloszlását már nem ilyen könnyű megadni. Mielőtt rátérnénk ennek tanulmányozására, előrebocsátunk két lemmát. Tekintsük a bevezetésben körülírt egycsatornás rendszert, kizárva azonban most a készülék esetleges meghibásodásait. A beérkező igények minden esetben a rendszerben maradnak, szükség szerint várakoznak a kiszolgálásukra. A készülék szabad és munka(foglaltsági)-periódusai váltogatják egymást s ebben semmilyen körülmény sem idézhet elő fennakadást. A készüléknek egy olyan foglaltsági periódusát, melynek folyamán pontosan n igény kiszolgálása folyt le, jelöljük ζ_n $(n \geqq 1)$-nel. A $G_n(x) = P\{\zeta_n \leqq x\}$ eloszlásfüggvények sorozatának vizsgálatával több szerző foglalkozott (lásd pl. [4], [7], [8]). Szükségünk lesz Takács L. ([4], 62. old., 5.4. tétel) alábbi eredményére:

1. LEMMA. Legyen $\operatorname{Re} s \geqq 0$ mellett

$$\Gamma_n(s) = \int_0^\infty e^{-su} dG_n(u), \quad \Phi(s) = \int_0^\infty e^{-su} dF(u)$$

Ekkor, hacsak $|z| \leqq 1$

$$\sum_{n=1}^\infty \Gamma_n(s) z^n = \gamma(s, z)$$

ahol $w = \gamma(s, z)$ a

$$w = z\Phi(s + \lambda(1 - w))$$

egyenlet legkisebb abszolút értékű gyöke.

Tételezzük most fel, hogy a $t = 0$ pillanatban a készülékünk szabad volt, majd tekintsük az alábbi valószínűségeket; $k \geqq 0$-ra

$$q_k(t) = P\left\{\begin{array}{l}\text{a } t \text{ pillanatban a készülék szabad s e pillanatig} \\ \text{pontosan } k \text{ igény kiszolgálása fejeződött be}\end{array}\right\}$$

2. LEMMA. Legyenek

$$\bar{q}_k(s) = \int_0^\infty q_k(t) e^{-st} dt, \quad Q(s, z) = \sum_{k=0}^\infty \bar{q}_k(s) z^k$$

Ekkor $\operatorname{Re} s \geqq 0$, $|z| \leqq 1$ mellett

$$Q(s,z) = \frac{1}{s+\lambda[1-\gamma(s,z)]}$$

Bizonyítás. Jelölje $F_{t,n_1,n_2,\ldots,n_r}$ azt az eseményt, hogy a t pillanatban a készülék szabad, továbbá, hogy e pillanatig r foglaltsági periódus folyt le, melyek alatt megfelelően, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ igény kiszolgálása fejeződött be. A foglaltsági periódusok közti szabad időközök hosszai legyenek y_i-k, a foglaltsági időtartamok pedig x_i-k $(i=1,2,\ldots,r)$. Ekkor

$$P\{F_{t,\,n_1,\,n_2,\ldots,n_r}\} =$$

$$= \int\limits_{\substack{y_1+x_1+\ldots+y_r+x_r<t \\ y_1+x_1+\ldots+y_r+x_r+y_{r+1}\geqq t \\ x_i\geqq 0,\ y_i\geqq 0 \quad (i=1,2,\ldots r)}} \lambda e^{-\lambda y_1} dy_1, dG_{n_1}(x_1)\lambda e^{-\lambda y_2} dG_{n_2}(x_2)\, dy_2 dG_{n_r}(x_r)\lambda e^{-\lambda y_{r+1}} dy_{r+1}$$

Elvégezve itt az integrálást y_{r+1} szerint, majd bevezetve a

$$G_{n_1,\,n_2,\ldots n_r}(x) = G_{n_1}(x) * \ldots * G_{n_r}(x)$$

és az

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_r,$$

jelöléseket, az alábbiakhoz jutunk;

$$P\{F_{t,n_1,n_2,\ldots n_r}\} = \int\limits_{\substack{X+y_1+\ldots+y_r<t \\ y_i\geqq 0 \ (i=1,\ldots,r)}} \lambda^r e^{-\lambda(t-X)} dy_1\, dy_2 \ldots dy_r\, d\,G_{n_1,n_2,\ldots n_r}(X)$$

Figyelembe véve, hogy bármely természetes egész r-re

$$\int\limits_{\substack{y_1+\ldots+y_r<T \\ 0\leqq y_i;\ 1\leqq i\leqq r}} dy_1\, dy_2 \ldots dy_r = \frac{T^r}{r!}$$

kapjuk, hogy

$$P\{F_{t,\,n_1\ldots n_r}\} = \int\limits_{X=0}^{t} e^{-\lambda(t-x)} \frac{[\lambda(t-X)]^r}{r!}\, d\,G_{n_1 n_2 \ldots n_r}(X)$$

Ennek alapján a $q_k(t)$ valószínűségekre nyerjük az alábbi formulákat;

$$q_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$k \geqq 1$ mellett

$$q_k(t) = \sum_{r=1}^{k} \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_r=k} \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-x)} \frac{[\lambda(t-x)]^r}{r!}\, dG_{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_r}(x)$$

Következésképpen,

$$\bar{q}_0(s) = \frac{1}{s+\lambda}$$

$$\bar{q}_k(s) = \sum_{1}^{k} \sum_{n_1+\ldots+n_r=k} \lambda^r \frac{1}{(s+\lambda)^{r+1}} \Gamma_{n_1}(s)\ldots\Gamma_{n_r}(s) \quad (k \geqq 1)$$

és $\operatorname{Re} s \geqq 0$, $|z| \leqq 1$ mellett

$$Q(s, z) = \sum_{0}^{\infty} \bar{q}_k(s) z^k =$$

$$= \frac{1}{s+\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{r=1}^{k} \sum_{n_1+\dots+n_r=k} \frac{\lambda^r}{(s+\lambda)^{r+1}} \Gamma_{n_1}(s) \dots \Gamma_{n_r}(s).$$

Az összegezési sorrendek felcserélésével jutunk a

$$Q(s, z) = \frac{1}{s+\lambda} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^r [\gamma(s, z)]^r\right] =$$

$$= \frac{1}{s+\lambda} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{\lambda \gamma(s, z)}{s+\lambda}\right)^r = \frac{1}{s+\lambda[1-\gamma(s, z)]}$$

összefüggéshez, s ezzel lemmánkat igazoltuk is.

3. Várakozás, ha a készülék hibátlan — elvész az igény, ha a készülék hibás

Tételezzük fel tehát most a továbbiakban, hogy egy beérkezett igény a rendszerben marad, hacsak a készülék nem hibás. A célul kitűzött feladatunk megoldása az alábbi módon értelmezett Markov-folyamat vizsgálatával történhet:

A tekintendő folyamat paraméterének a szokásostól eltérően nem az időt, hanem az ü. b. tartaléknak a készülék utolsó javítása óta történt csökkenését vesszük. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a folyó üzembiztonságos periódusunk a $t=0$ pillanatban kezdődött el. Jelöljük $t(u)$-val azt az időt, melynek folyamán az ü. b. tartalék u értékkel csökken. Tekintsük mármost a

$$\gamma(u) = \{\nu(u), \mu(u), \xi(u)\}$$

három komponensű folyamatot, ahol $\nu(u)$ jelenti a $t(u)$ időpillanatig kiszolgált igények számát, $\mu(u)$ és $\xi(u)$ pedig jelentik a $t(u)$ pillanatban a rendszerben tartózkodó igények számát, ill. azon igény kiszolgálására már ráfordított ü. b. tartalékot, amely lefoglalja a készüléket az adott pillanatban. Feltételezéseink értelmében a bevezetett $\gamma(u)$ homogén Markov-folyamatot alkot. Tekintsük ezek után a $\gamma(u)$ folyamat fázisterében indukálódó valószínűségi eloszlást, melyet kimerítően jellemeznek a

$$P_n^k(x, u) = \begin{cases} P\{\nu(u) = n, \ \mu(u) = k, \ \xi(u) \leqq x\} & \text{ha} \quad x, u \geqq 0 \\ 0, & \text{máskor} \end{cases}$$

$n \geqq 0$, $k \geqq 0$ függvények. Feltételezni fogjuk, hogy az említett eloszlásunk sima abban az értelemben, hogy minden $n \geqq 0$ és $k \geqq 1$ mellett léteznek a

$$p_n^k(x, u) = \frac{\partial P_n^k(x, u)}{\partial x}$$

deriváltak. Ezen kívül szükséges még azt is kikötnünk, hogy a normált

$$q_n^k(x, u) = \frac{p_n^k(x, u)}{1 - F\left(\frac{x}{c}\right)}$$

függvények parciálisan differenciálhatók az u változójuk szerint.

Vezessük be még a további jelöléseket:

$$q_n(u) = P\{\nu(u) = n,\ \mu(u) = 0\}; \qquad n \geqq 0$$

$$P_n(u) = P\{\nu(u) = n\}; \qquad n \geqq 0.$$

Feladatunk lényegében a $P_n(u)$ valószínűségek, illetve az $L(u, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) z^n$ generátorfüggvény meghatározására vezetődik vissza. Valóban, ha $L(u, z)$ ismert, akkor egy üzembiztonságos periódus alatt kiszolgált igények számának generátorfüggvénye

$$\int_0^{\infty} L(u, z)\, dH(u)$$

alakban adható meg.

Az $L(u, z)$ függvény meghatározásához levezetünk egy integro-differenciál egyenletrendszert a $q_n(u)$, $q_n^k(x_1 u)$ $(n \geqq 0, k \geqq 1)$ függvényekre. Figyelembe véve a $\gamma(u)$ folyamatban rövid h idő alatt bekövetkezhető változások valószínűségeinek nagyságrendjeit, a szokásos meggondolásokkal az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$q_0(u+h) = q_0(u)(1 - \lambda h) + 0(h)$$

$$q_n(u+h) = q_n(u)(1 - \lambda h) + \int_0^u p_{n-1}^1(x, u)\, h \frac{dF\left(\frac{x}{c}\right)}{1 - F\left(\frac{x}{c}\right)} + o(h)$$

$$p_n^1(x, u+h) = p_n^1(x-h, u)\left(1 - \frac{\lambda}{c} h\right) \frac{1 - F\left(\frac{x}{c}\right)}{1 - F\left(\frac{x-h}{c}\right)} + o(h); \quad n \geqq 0$$

$$p_n^k(x, u+h) = p_n^k(x-h, u)\left(1 - \frac{\lambda}{c} h\right) \frac{1 - F\left(\frac{x}{c}\right)}{1 - F\left(\frac{x-h}{c}\right)} +$$

$$+ p_n^{k-1}(x-h, u) \frac{\lambda}{c} h \frac{1 - F\left(\frac{x}{c}\right)}{1 - F\left(\frac{x-h}{c}\right)} + o(h); \quad n \geqq 0, \quad k \geqq 1.$$

Ha most ezen összefüggéseknek mindkét oldalát rendre elosztjuk $1-F\left(\frac{x}{c}\right)$-vel, s azután áttérünk a $h\to 0$ határesetre, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$q_0'(u)+\lambda q_0(u)=0$$

(4)
$$q_n'(u)+\lambda q_n(u)=\int_0^u q_{n-1}^1(x,u)\,dF\left(\frac{x}{c}\right);\quad n\geqq 1$$

$$\frac{\partial q_n^1}{\partial u}+\frac{\partial q_n^1}{\partial x}+\frac{\lambda}{c}q_n^1=0;\quad n\geqq 0$$

$$\frac{\partial q_n^k}{\partial u}+\frac{\partial q_n^k}{\partial x}+\frac{\lambda}{c}(q_n^k-q_n^{k-1})=0;\quad n\geqq 0, k\geqq 1.$$

A megfelelő peremfeltételeket a

$$p_0^1(0,u+h)\,h=q_0(u)\lambda h+o(h)$$

$$p_n^1(0,u+h)\,h=q_n(u)\lambda h+h\int_0^n p_{n-1}^2(x,u)\frac{dF\left(\frac{x}{c}\right)}{1-F\left(\frac{x}{c}\right)}+o(h);\quad n\geqq 1$$

$$p_n^k(0,u+h)\,h=h\int_0^n p_{n-1}^{k+1}(x,u)\frac{dF\left(\frac{x}{c}\right)}{1-F\left(\frac{x}{c}\right)}+o(h);\quad n\geqq 0,\quad k\geqq 2$$

egyenletekből olvashatjuk le. Ennek alapján kapjuk, hogy

$$q_0^1(0,u)=\lambda q_0(u)$$

(6)
$$q_n^1(0,u)=\lambda q_n(u)+\int_0^u q_{n-1}^2(x,u)\,dF\left(\frac{x}{c}\right);\quad n\geqq 1$$

$$q_n^k(0,u)=\int_0^u q_{n-1}^{k+1}(x,u)\,dF\left(\frac{x}{c}\right);\quad n\geqq 1, k\geqq 2.$$

Továbbá, minthogy feltételeztük, hogy a $t=0$ pillanatban javítás fejeződik be, ezért a rendszer a $t=0$ pillanatban 1 valószínűséggel üres, azaz

$$q_0(0)=1,\quad q_n(0)=0\quad (n\geqq 1)$$

(7)
$$q_0(u)=e^{-\lambda u},\quad q_0^1=\lambda e^{-\lambda u}$$

$$q_0^k(0,u)=0\quad (k\geqq 2).$$

A $P_n(u)$ $n \geqq 0$ valószínűségeket mármost a következőképpen állíthatjuk elő:

$$(8)\quad \begin{aligned} P_0(u) &= q_0(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^u q_0^k(x,u) \left[1 - F\left(\frac{x}{c}\right)\right] dx \\ P_n(u) &= q_n(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^u q_n^k(x,u) \left[1 - F\left(\frac{x}{c}\right)\right] dx; \quad n \geqq 1. \end{aligned}$$

Legyen most

$$r_n(x,u) = \sum_0^{\infty} q_n^k(x,u); \quad n \geqq 0.$$

A (4)-es és az (5)-ös egyenletek értelmében $\frac{\partial r_n}{\partial x} + \frac{\partial r_n}{\partial u} = 0$ minden $n \geqq 0$-ra. Következésképpen

$$r_n(x,u) = r_n(u-x); \quad n \geqq 0,$$

s ennélfogva (6) és (7) alapján

$$r_0(\tau) = r_0(\tau - 0) = r_0(0,\tau) = \sum_1^{\infty} q_0^k(0,\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$$

$$r_1(\tau) = r_1(0,\tau) = \sum_1^{\infty} q_1^k(0,\tau) =$$

$$= \lambda q_1(\tau) + \int_0^{\tau} q_0^2(x,\tau)\, dF\left(\frac{x}{c}\right) + \int_0^{\tau} q_0^3(x,\tau)\, dF\left(\frac{x}{c}\right) + \ldots =$$

$$= \lambda q_1(\tau) + \int_0^{\tau} \left\{\sum_{k=2}^{\infty} q_0^k(x,\tau)\right\} dF\left(\frac{x}{c}\right) =$$

$$= \lambda q_1(\tau) + \int_0^{\tau} r_0(\tau - x)\, dF\left(\frac{x}{c}\right) - \int_0^{\tau} q_0^1(x,\tau)\, dF\left(\frac{x}{c}\right) =$$

$$= \int_0^{\tau} r_0(\tau - x)\, dF\left(\frac{x}{c}\right) - q_1'(\tau).$$

Analóg módon kapjuk, hogy minden $n \geqq 1$-re

$$(9)\quad r_n(\tau) = \int_0^{\tau} r_{n-1}(\tau - x)\, dF\left(\frac{x}{c}\right) - q_n'(\tau).$$

Ha most áttérünk az

$$\bar{r}_n(s) = \int_0^\infty e^{-sn} r_n(u)\,du, \quad \bar{P}_n(s) = \int_0^\infty e^{-su} P_n(u)\,du, \quad (n < 0)$$

és a

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-su} dF(u).$$

Laplace-transzformáltakra, (8) és (9) relációink a következőkbe mennek át:

$$\bar{P}_n(s) = \bar{q}_n(s) + \bar{r}_n(s)\frac{1-\Phi(cs)}{s}; \quad n \geqq 0$$

$$\bar{r}_n(s) = \bar{r}_{n-1}(s)\,\Phi(cs) - s\bar{q}_n(s); \quad n \geqq 1$$

$$\bar{r}_0(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

Következésképpen, $\operatorname{Re} s \geqq 0$ és $|z| \leqq 1$ mellett

$$\sum_1^\infty \bar{r}_n(s) z^n = z\Phi(cs) \sum_0^\infty \bar{r}_k(s) z^k - s \sum_1^\infty \bar{q}_k(s) z^k$$

azaz

$$\sum_0^\infty \bar{r}_n(s) z^n - \bar{r}_0(s) = z\Phi(cs) \sum_0^\infty \bar{r}_k(s) z^k - s\left(\sum_0^\infty \bar{q}_k(s) z^k - \bar{q}_0(s)\right).$$

Innen

$$\sum_0^\infty \bar{r}_n(s) z^n = \frac{\dfrac{\lambda}{s+\lambda} - s\left(\displaystyle\sum_0^\infty \bar{q}_k(s) z^k - \frac{1}{s+\lambda}\right)}{1 - z\Phi(cs)} = \frac{1 - sQ(s,z)}{1 - z\Phi(cs)}.$$

Végül $\operatorname{Re} s \geqq 0$ és $|z| \leqq 1$ mellett

$$\sum_0^\infty \bar{P}_n(s) z^n = \sum_0^\infty \bar{q}_n(s) z^n + \frac{1-\Phi(cs)}{s} \sum_0^\infty \bar{r}_n(s) z^n =$$

$$= Q(s,z) + \frac{1-\Phi(cs)}{s}\,\frac{1-sQ(s,z)}{1-z\Phi(cs)} = \frac{1-\Phi(cs) + s\Phi(cs)\,Q(s,z)(1-z)}{s[1-z\Phi(cs)]}.$$

Ebben a formulában csak a $Q(s,z) = \sum_0^\infty \bar{q}_k(s) z^k$ függvény ismeretlen. Ennek meghatározásához tekintsük az ü. b. tartalék csökkenéseinek értékeit, ε_i-ket és $\hat{\zeta}_r = c\zeta_r$-ket, melyek rendre a készülék szabad periódusa és egy olyan foglaltsági periódus alatt mennek végbe, amelynek folyamán pontosan r kiszolgálás történt. Fennáll, hogy

$$P\{\varepsilon_i \leqq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$$

és

$$P\{\hat{\zeta}_r \leqq x\} = G_r\left(\frac{x}{c}\right).$$

A $q_k(u)$ $(k \geqq 0)$ valószínűségeket most interpretálhatjuk az alábbi módon:

$$q_k(u) = P\left\{\begin{array}{l}\text{a } t(u) \text{ pillanatban a készülék szabad, s ez ideig} \\ \text{pontosan } k \text{ kiszolgálás történt.}\end{array}\right\}.$$

Ezek után a 2. lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$Q(s,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{q}_k(s) z^k = \frac{1}{s+\lambda[1-\gamma(cs,z)]}.$$

Eredményünket mármost a következőképpen foglalhatjuk össze:

A készülék egy üzembiztonságos periódusa alatt kiszolgált igények számának generátor-függvénye

$$\int_0^{\infty} L(u,z)\,dH(u)$$

alakban adható meg, ahol az integrál alatti függvény Laplace-transzformáltját az

$$\int_0^{\infty} e^{-su} L(u,z)\,du = \frac{[1-\Phi(cs)]\lambda[1-\gamma(cs,z)]+s[1-z\Phi(cs)]}{\{s+\lambda[1-\gamma(cs,z)]\}s[1-z\Phi(cs)]}$$

formula szolgáltatja.

4. Néhány megjegyzés a kiszolgált igények áramlatára vonatkozólag

Az előző eredményünk $c=1$ esetén lehetővé teszi egy egycsatornás várakozási rendszerből eltávozó (kiszolgált) igények áramlatának vizsgálatát, amikor is feltételezett, hogy a készülék abszolút megbízható. Legyen a $t=0$ kezdő pillanatban a rendszer üres és jelöljük $N(t)$-vel a $(0, t)$ időköz alatt kiszolgált igények számát. Ekkor

$$\int_0^{\infty} e^{-st} M\{z^{N(t)}\}\,dt = \int_0 e^{-st} L^*(t,z)\,dt = \bar{L}^*(s,z) = \tag{10}$$

$$= \frac{1-\Phi(s)+s\Phi(s)\dfrac{1-z}{s+\lambda[1-\gamma(s,z)]}}{s[1-z\Phi(s)]}.$$

E formula alapján könnyen nyerhetünk $t\to\infty$ melletti aszimptotikát az $M\{N(t)\}$ várható értékre. Valóban,

$$m^*(t) = M\{N(t)\} = \left.\frac{\partial L^*(t,z)}{\partial z}\right|_{z=1}$$

és

$$\bar{m}^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} m^*(t)\,dt = \left.\frac{\partial \bar{L}^*(s,z)}{\partial z}\right|_{z=1}.$$

Képezzük most (10) jobb oldalának z szerinti deriváltját. Kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1-\Phi(s)+s\Phi(s)\dfrac{1-z}{s+\lambda[1-\gamma(s,z)]}}{s[1-z\Phi(s)]}\right)=$$

$$=\frac{1}{s^2[1-z\Phi(s)]^2}\left\{\left[-s\Phi(s)\frac{1}{s+\lambda[1-\gamma(s,z)]}+(1-z)s\Phi(s)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{s+\lambda[1-\gamma(1-z)]}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot s[1-z\Phi(s)]+s\Phi(s)\left[1-\Phi(s)+s\Phi(s)\frac{1-z}{s+\lambda[1-\gamma(s,z)]}\right]\right\}.$$

Innen a $z\to 1$ határátmenet elvégzése után nyerjük az

$$m^*(s)=\frac{\Phi(s)}{s[1-\Phi(s)]}\left[1-\frac{s}{s+\lambda[1-\gamma(s,1)]}\right]$$

formulát (vö. [4] 78. old., 16. tétel).

Vegyük most észre, hogy ha $\lambda\mu^*=\lambda\int_0^\infty x\,dF(x)\leqq 1$, akkor

$$\gamma'(0,1)=\frac{\mu^*}{1-\mu^*\lambda}\quad\text{míg ha}\quad \lambda\mu^*>1\quad\text{akkor}\quad \lim_{s\to 0}\gamma(s,1)<1.$$

Ezek alapján egy Tauber-típusú tétel ([6], 192. old., 4. 3. tétel) felhasználásával jutunk a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m^*(t)}{t}\begin{cases}\lambda, & \text{ha}\quad \lambda\mu^*\leqq 1\\ \dfrac{1}{\mu^*}, & \text{ha}\quad \lambda\mu^*>1\end{cases}$$

aszimptotikus relációhoz.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Tomkó J.: Tömegkiszolgálási problémákról, I. *MTA III. Osztály Közleményei* **15** (1965) No 3.
[2] Tomkó J.: Tömegkiszolgálási problémákról, II. *MTA III. Osztály Közleményei* **16** (1966).
[3] Mogyoródi J. és Tomkó J.: Véletlen időközönként dolgozó készülék élettartamának határeloszlásáról, *MTA III. Osztály Közleményei* **16** (1967).
[4] Takács, L.: Introduction to the Theory of Queues. New York, Oxford University Press (1962).
[5] Б. В. Гнеденко—И. Н. Коваленко: Введение в теорию массового обслуживания. Москва. 1966.
[6] Widder, D. W.: *The Laplace Transform,* Princeton, 1941.
[7] Finch, P. D.: On the busy period in the queueing system GI/G/1, *Journal Austr. Math. Soc.* 2 (1961), pp 217.
[8] Kingman, J. F. C.: The use of Spitzer's identity in the investigation of the busy period and other quantities in the queue GI/G/1, *Jour. Austr. Math. Soc.* **2** (1962) No 3, pp 345—356.

(Beérkezett: 1967. IV. 25.)

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ, III.

J. Томко́

Резюме

Статья является продолжением работ [1] и [2] в которых изучена однолинейная система массового обслуживания с учетом ненадежности прибора. Выход прибора из строя интерпретируется израсходованием ресурса прибора. Введется рассмотрение случайный процесс $\{\omega(t), t \geqq 0\}$ означающий остаточный ресурс в момент t. По определению $\omega(t)=0$, если прибор находится в неисправным состоянии. В моменты окончания восстановлений прибора $(r_i, i \geqq 1)$ траектория процесса $\omega(t)$ имеет случайный скачок $\eta_i = \omega(r_i+0)$, а убывание этого случайного ресурса происходит пропорционально времени $c=1$ или $c>1$ коэффициентом пропорции соответственно тому, свободен прибор или занит обслуживанием. Входящий поток предполагается простейщим с параметром λ. В статьях рассмотрены следующие схемы обслуживания:

α) требевания не могут накапливаться в системе, т. е. теряются, если прибор не может немедленно начат обслуживание,

β) поступившие требования, если только прибор исправен, остаются в системе, а теряются в момент отказа прибора и в течение его восстанавления,

γ) требования не теряются, а остаются в системе до завершения их обслуживаний.

В работе [1] изучены стационарные вероятности состояний системы типа α) и β). Для схемы γ) эти же вероятности найдены в [2] и резултаты применяются одной проблеме перекрестка.

В данной работе для случаев α) и β) определяется распределение числа обслуженных требований за период исправности прибора. Формулой (10) дается преобразование — Лапласа производящей функции выходящего потока системы $MI/G/1$.

A $dd(n)$ FÜGGVÉNY ELOSZLÁSÁRÓL

Írta: KÁTAI IMRE

1.

Legyen $d(n)$ az n természetes szám pozitív osztóinak száma és $dd(n)$ jelentse e számelméleti függvény iteráltját. E dolgozatban megvizsgáljuk a $dd(n)$ függvény értékeloszlását.

Bevezetve a
$$N(x,\alpha) = \sum_{\substack{n \leqq x \\ dd(n) < \alpha \log \log n}} 1$$
jelölést, könnyű megmutatni, hogy $N(x, \alpha)/x$ egy lépcsős eloszlásfüggvényhez tart, amelynek ugrásai csak egész α helyeken lehetnek. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy milyen $N(x, \alpha)$ viselkedése, ha x végtelenhez való tartása mellett egyidejűleg egy egész számhoz közeledünk α-val. Erre ad választ tételünk. A kapott határeloszlásfüggvény — ami, kissé pongyolán mondva, különböző paraméterű normális eloszlásfüggvények keveréke — szokatlan a számelméletben, s ez adhat bizonyos érdekességet a dolgozatnak.

Tételünk bizonyításában lényegesen felhasználjuk RÉNYI ALFRÉD és TURÁN PÁL eredményét a prímosztók számának eloszlásával kapcsolatban.

Mielőtt tételünket pontosan megfogalmaznánk, bevezetünk néhány jelölést.

Legyen $U(m)$, illetve $V(m)$ az m természetes szám különböző, illetve összes (multiplicitással számolt) prímosztói száma és legyen $\lambda(m) = (-1)^{V(m)}$, a *Liouville*-függvény. A továbbiakban $p, p_1, p_2, \ldots, q$ mindig prímszámokat jelölnek.

Jelölje $\mathfrak{A}$ azoknak a K természetes számoknak a halmazát, amelyek minden prímosztójukat legalább a második hatványon tartalmazzák.

Jelölje $\mathscr{B}_K$ azoknak az n természetes számoknak a halmazát, amelyek

$$n = Km \tag{1.1}$$

alakba írhatók, ahol m négyzetmentes szám, K és m relatív prímek. Világos, hogy minden természetes szám pontosan egy $\mathscr{B}_K$ halmaz eleme.

Legyen
$$d(K) = k; \quad k = 2^{\beta} k_1,$$
ahol k_1 páratlan szám.

Így, ha $n \in \mathscr{B}_K$, akkor
$$d(n) = k_1 \cdot 2^{U(m)+\beta},$$
és
$$dd(n) = d(k_1)\big(U(m)+\beta+1\big) = d(k_1)(\beta+1) + d(k_1)\,U(m).$$

A továbbiakban a $k_2 = d(k_1)$ jelölést használjuk. Így

$$dd(n) = k_2\big(\beta + 1 + U(m)\big). \tag{1.2}$$

Legyen

(1. 3)
$$A_K = \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|K} \left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1},$$

(1. 4)
$$e_l = \sum_{\substack{K \in \mathfrak{A} \\ k_2 = l}} \frac{A_K}{K},$$

(1. 5)
$$C_K = \prod_{p|K} \left(1+\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Legyen továbbá

(1. 6)
$$z = \log \log x.$$

Jelölje $N(X, \alpha)$ a

(1. 7)
$$dd(n) < \alpha z, \quad n \leqq x$$

egyenlőtlenség megoldásszámát.

Jelölje — szokás szerint — $[\alpha]$, illetve $\{\alpha\}$ az α egész-, illetve törtrészét.

TÉTEL.
$$N(x, \alpha) = x\left\{\sum_{l \leqq [\alpha]-1} e_l + e_{[\alpha]} \Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2}\right) + e_{[\alpha]+1} \Phi\left(\frac{\{\alpha\}-1}{[\alpha]+1} z^{1/2}\right\} + O\left(\frac{x}{z^{3/4}}\right) + R(x, \alpha),$$

ahol

$$R(x, \alpha) = \begin{cases} O\left(\frac{x}{z^{1/2}}\right), & \text{ha} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1, \\ O\left(\frac{x}{z^{1/2}} \alpha^{-M}\right), & \text{ha} \quad \alpha \geqq 1, \end{cases}$$

M tetszőleges pozitív állandó, $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt.$

2. Segédtételek

Jelölje D_K azon v természetes számok összességét, amelyek prímosztói osztói K-nak.

Legyen

(2. 1)
$$P(x, K, r) = \sum_{\substack{m \leqq x \\ (m, K) = 1 \\ U(m) = r}} |\mu(m)|,$$

(2. 2)
$$P(x, 1, r) = P(x, r).$$

1. LEMMA:

(2. 3)
$$P(x, K, r) = \sum_{v \in D_K} \lambda(v) P\left(\frac{x}{v}, r - V(v)\right).$$

Bizonyítás. (2. 3) legegyszerűbben talán a következő módon látható be.

$$\sum_{\substack{m=1\\(m,K)=1}}^{\infty}\frac{w^{U(m)}|\mu(m)|}{m^s}=\prod_{p+K}\left\{1+\frac{w}{p^s}\right\}=\dot{\prod_{p}}\left\{1+\frac{w}{p^s}\right\}\prod_{p|K}\left\{1+\frac{w}{p^s}\right\}^{-1}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^{U(m)}|\mu(m)|}{m^s}\cdot\sum_{v\in D_K}\lambda(v)\frac{w^{V(v)}}{v^s}.$$

A jobb oldalon álló két sort összeszorozva, majd w^r együtthatóit összehasonlítva

$$\sum_{\substack{(m,K)=1\\U(m)=r}}\frac{|\mu(m)|}{m^s}=\sum_{v\in D_K}\left\{\frac{\lambda(v)}{v^s}\sum_{U(m)=r-V(v)}\frac{|\mu(m)|}{m^s}\right\},$$

ahonnan már rögtön következik (2. 3).

Legyen

$$S(x,r)=\sum_{\substack{U(m)=r\\m\leqq x}}1 \tag{2. 4}$$

2. LEMMA:

$$P(x,r)=\sum_{\delta^2\leqq x}\mu(\delta)\,S\left(\frac{x}{\delta^2},r-V(\delta^2)\right). \tag{2. 5}$$

Bizonyítás.

$$P(x,r)=\sum_{\substack{V(m)=r\\m\leqq x}}|\mu(m)|=\sum_{\substack{V(m)=r\\m\leqq x}}\sum_{\delta^2|m}\mu(\delta)=\sum_{\delta^2\leqq x}\mu(\delta)\sum_{\substack{V(n)=r-V(\delta^2)\\n\leqq\frac{x}{\delta^2}}}1=$$

$$=\sum_{\delta^2\leqq x}\mu(\delta)S\left(\frac{x}{\delta^2},r-V(\delta^2)\right).$$

Legyen

$$J_K(x)=\sum_{\substack{n\leqq x\\n\in\mathcal{B}_K}}1. \tag{2. 6}$$

3. LEMMA:

$$J_K(x)=\frac{A_K}{K}x+O\left(k\cdot\frac{x^{1/2}}{K^{1/2}}\right). \tag{2. 7}$$

Bizonyítás.

$$J_K(x)=\sum_{\substack{m\leqq x/K\\(m,K)=1}}|\mu(m)|=\sum_{m\leqq\frac{x}{K}}\{\sum_{\delta|(K,m)}\mu(\delta)\}\{\sum_{\substack{d^2|m\\(d,K)=1}}\mu(d)\}=$$

$$=\sum_{\substack{\delta|K\\\delta d^2K\leqq x}}\sum_{(d,K)=1}\mu(\delta d)\left[\frac{x}{Kd^2\delta}\right]=\frac{x}{K}\sum_{\delta|K}\sum_{(d,K)=1}\frac{\mu(\delta)\mu(d)}{\delta d^2}+O\left(\frac{x^{1/2}}{K^{1/2}}\cdot d(K)\right)=$$

$$=\frac{A_K}{K}x+O\left(k\cdot\frac{x^{1/2}}{K^{1/2}}\right).$$

A következőkben szükségünk lesz TURÁN PÁL következő tételére [1].

4. LEMMA:

$$\sum_{m\leq x}(U(m)-z)^2=O(xz). \tag{2.8}$$

Legfontosabb segédtételünk a következő, RÉNYI ALFRÉDtól és TURÁN PÁLtól származó tétel [2].

5. LEMMA: *Az*

$$U(m)<z+yz^{1/2},\quad m\leq x \tag{2.9}$$

egyenlőtlenséget kielégítő egészek száma

$$x\Phi(y)+O(xz^{-1/2})$$

egyenletesen y-ban, ahol

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

A 2. és az 5. lemmából egyszerűen következik, hogy a

$$M(x,y)=\sum_{r<z+yz^{1/2}}P(x,r) \tag{2.10}$$

összegre a

$$M(x,y)=\frac{6}{\pi^2}x\Phi(y)+O(xz^{-1/2}) \tag{2.11}$$

állítás y-ban egyenletesen fennáll.

Legyen

$$N\left(\frac{x}{K},K,y\right)=\sum_{r<z+yz^{1/2}}P\left(\frac{x}{K},K,r\right).$$

6. LEMMA. $K<x^{1/4}$ *esetén*

$$N\left(\frac{x}{K},K,y\right)=c_K\frac{x}{K}\Phi(y)+O\left(\frac{xk}{Kz^{1/2}}\right)+O\left(\frac{x|y|\{k+\log K\cdot\log\log K\}}{Kz\log x}\right). \tag{2.12}$$

Bizonyítás. Az 1. lemmából

$$N\left(\frac{x}{K},K,y\right)=\sum_{v\in D_K}\lambda(v)\sum_{r<z+yz^{1/2}-V(v)}{}' P\left(\frac{x}{Kv},r\right)=\sum_{v\leq\Delta}+\sum_{v>\Delta}=\sum{}_1+\sum{}_2.$$

Mivel $\Delta>1$-re

$$\sum_{\substack{v>\Delta\\ v\in D_K}}\frac{1}{v}<\sum_{v\in D_K}\frac{1}{v}\left(\frac{v}{\Delta}\right)^{1/2}<\frac{1}{\Delta^{1/2}}\prod_{p|K}\left(1+\frac{1}{p^{1/2}}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{3/2}}+\dots\right)\ll\frac{k}{\Delta^{1/2}}$$

és

$$\sum_{r=1}^{\infty}P(x,r)\ll x,$$

igy

$$\sum{}_2\ll\frac{x}{K}\sum_{\substack{v\in D_K\\ v>\Delta}}\frac{1}{v}\ll\frac{xk}{K\Delta^{1/2}}.$$

Másrészt

$$|\Phi(y_1)-\Phi(y_2)|\leqq|y_1-y_2|.$$

Legyen y' a

$$z+yz^{1/2}-V(v) = \log\log\frac{x}{Kv}+y'\left(\log\log\frac{x}{Kv}\right)^{1/2}$$

egyenlet megoldása. Könnyen látható, hogy

$$|y-y'|\ll\frac{|y|\log Kv}{z\log x}+O\left(\frac{V(v)+1}{z^{1/2}}\right).$$

Innen

$$\sum\nolimits_1 = \frac{1}{\zeta(2)}\frac{x}{K}\Phi(y)\sum_{\substack{v<\Delta\\ v\in D_K}}\frac{\lambda(v)}{v}+O\left(\frac{x}{Kz^{1/2}}\sum_{v\in D_K}\frac{V(v)+1}{v}\right)+O\left(\frac{x|y|}{Kz\log z}\sum_{v\in D_K}\frac{\log Kv}{v}\right).$$

Mivel

$$\sum_{v\in D_K}\frac{V(v)+1}{v}\ll\sum_{v\in D_K}\frac{\log v}{v}\ll\sum_{v\in D_K}\frac{1}{v^{1-\varepsilon}}\ll k,$$

és

$$\sum_{v\in D_K}\frac{1}{v}\ll\prod_{p|K}\left(1+\frac{1}{p}+\dots\right)\ll\log\log K,$$

így $\Delta=z$ választással

$$\sum\nolimits_1 = c_K\frac{x}{K}\Phi(y)+O\left(\frac{xk}{Kz^{1/2}}\right)+O\left(\frac{x|y|(k+\log K\cdot\log\log K)}{Kz\log x}\right),$$

és innen következik a lemma.

Legyen

$$T(x,K,\alpha) = \sum_{\substack{n\leqq x\\ n\in\mathscr{B}_K\\ d_2(n)<\alpha z}} 1. \tag{2.13}$$

7. Lemma. *Legyen* $1\leqq\alpha\leqq z^{3/4}$, $K\leqq z^A$. *Ekkor*

$$T(x,K,\alpha) = \frac{A_K}{K}x+O\left(k\frac{x^{1/2}}{K^{1/2}}\right)+O\left(\left(\frac{k_2}{\alpha-k_2}\right)^2\frac{x}{Kz}\right) \tag{2.14}$$

ha $k_2\leqq[\alpha]-1$,

$$T(x,K,\alpha)=O\left(k\frac{x^{1/2}}{K^{1/2}}\right)+O\left(\left(\frac{\alpha-k_2}{k_2}\right)^2\frac{x}{Kz}\right), \tag{2.15}$$

ha $k_2\geqq[\alpha]+1$,

$$T(x,K,\alpha) = \frac{c_K x}{K}\Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]}z^{1/2}\right)+O\left(\frac{xk}{Kz^{1/2}}\right)+O\left(\frac{x\frac{\{\alpha\}}{\alpha}(k+\log K\cdot\log\log K)}{Kz^{1/2}\log x}\right) \tag{2.16}$$

ha $k_2=[\alpha]$ *és*

(2. 17)

$$T(x,K,\alpha)=\frac{c_K x}{K}\,\Phi\left(\frac{\{\alpha\}-1}{[\alpha]+1}z^{1/2}\right)+O\left(\frac{xk}{Kz^{1/2}}\right)+O\left(\frac{x\frac{\{\alpha\}}{\alpha}(k+\log K\cdot\log\log K)}{Kz^{1/2}\log x}\right),$$

ha $k_2=[\alpha]+1$.

Bizonyítás. Foglalkozzunk először a $k_2\leqq[\alpha]-1$ esettel. Mivel $d_2(n)<\alpha z$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$U(m)-z\leqq\left(\frac{\alpha}{k_2}-1\right)z-(\beta+1),$$

továbbá $2^\beta\leqq d(K)\ll K^\varepsilon$, így $\beta\ll o(\log K)=O(\log z)$ és $1-\frac{\alpha}{k_2}\geqq\frac{1}{k_2}\geqq\frac{1}{z^{1/4}}$.

Legyen

$$T(x,K,\alpha)=\sum_{\substack{n\in\mathscr{B}_K\\ n\leqq x}}1-\sum\nolimits_3.$$

Ekkor

$$\sum\nolimits_3\ll\sum_{m\leqq\frac{x}{K}}\left(\frac{U(m)-z}{\frac{\alpha-k_2}{k_2}z}\right)^2\ll\left(\frac{k_2}{\alpha-k_2}\right)^2\frac{x}{K}z^{-1}.$$

A 3. lemma miatt

$$\sum_{\substack{n\in\mathscr{B}_K\\ n\leqq x}}1=\frac{A_K}{K}x+O\left(k\frac{x^{1/2}}{K^{1/2}}\right),$$

s innen rögtön következik a (2. 14) egyenlőtlenség. A (2. 15) formula hasonlóan látható be.

Legyen most $k_2=[\alpha]$. A

$$dd(n)<\alpha z,\ n\in\mathscr{B}_K,\quad n\leqq x$$

feltétel ekvivalens a

$$U(m)<\left(1+\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]}\right)z-(\beta+1),\quad m\leqq\frac{x}{K},\quad (m,K)=1,\quad \mu(m)\neq 0$$

feltétellel. Ennek megoldásszáma a 6. lemma miatt

$$T(x,K,\alpha)=N\left(\frac{x}{K},K,\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]}z^{1/2}-\frac{\beta+1}{z^{1/2}}\right)=\frac{c_K x}{K}\,\Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]}z^{1/2}\right)+$$

$$+O\left(\frac{xk}{Kz^{1/2}}\right)+O\left(\frac{x\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]}(k+\log K\cdot\log\log K)}{Kz^{1/2}\log x}\right).$$

(2. 17) bizonyítása hasonló.

3. A tétel bizonyítása

$$N(x,\alpha)=\sum_{K\in\mathfrak{A}}T(x,K,\alpha)=\sum_{\substack{K\le z^A\\K\in\mathfrak{A}}}+\sum_{\substack{K>z^A\\K\in\mathfrak{A}}}=\sum\nolimits_4+\sum\nolimits_5.$$

Könnyen belátható, hogy

$$\sum\nolimits_5\le x\sum_{\substack{K\in\mathfrak{A}\\K>z^A}}\frac{1}{K}\ll\frac{x}{z^{A/2}}.$$

Σ_4-et vágjuk négy részre annak megfelelően, hogy $k_2\le[\alpha]-1$, $k_2=[\alpha]$, $k_2=[\alpha]+1$, $k_2\ge[\alpha]+2$:

$$\Sigma_4=\Sigma_6+\Sigma_7+\Sigma_8+\Sigma_9.$$

A 7. lemmából

$$\sum\nolimits_6=x\sum_{\substack{K\in\mathfrak{A}\\k_2\le[\alpha]-1\\K\le z^A}}\frac{A_K}{K}+O\left(x^{1/2}\sum_{\substack{K<x\\K\in\mathfrak{A}}}\frac{k}{K^{1/2}}\right)+O\left(\frac{x}{z}\sum_{K<z^A}\frac{k_2^2}{K}\right)=$$

$$=x\sum_{l\le[\alpha]-1}e_l+O\left(\frac{x}{z}(\log z)^3\right),$$

ha $A\ge2$, mivel $\sum_{K>z^A}\frac{A_K}{K}\ll z^{-A/2}$. Hasonlóan

$$\sum\nolimits_9\ll\frac{x}{z}(\log z)^3\ll\frac{x}{z^{3/4}}.$$

Továbbá a (2. 16), (2. 17) egyenlőtlenségek alkalmazásával

$$\sum\nolimits_7=e_{[\alpha]}x\Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]}z^{1/2}\right)+O\left(\frac{x}{z^{1/2}}\sum_{k_2=[\alpha]}\frac{k}{K}\right)+O\left(\frac{x}{z^{1/2}\log x}\frac{\{\alpha\}}{\alpha}\sum_{k_2=l}\frac{k+\log K\cdot\log\log K}{K}\right)=$$

$$=e_{[\alpha]}x\,\Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]}z^{1/2}\right)+O\left(\frac{x}{z^{1/2}}\right).$$

Mivel $K^{\varepsilon}\ge k_1\ge k_2=l$, így

$$\sum_{k_2=[\alpha]}\frac{k}{K}\ll\sum_{K>[\alpha]^{1/\varepsilon}}\frac{k}{K}$$

és innen

$$\sum\nolimits_7=e_{[\alpha]}x\Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]}z^{1/2}\right)+O\left(\frac{x}{z^{1/2}}[\alpha]^{-1/\varepsilon}\right),$$

tetszőleges $\varepsilon>0$ állandóval.

Ugyanígy látható, hogy

$$\sum\nolimits_8=xe_{[\alpha]+1}\,\Phi\left(\frac{\{\alpha\}-1}{[\alpha]+1}z^{1/2}\right)+O\left(\frac{x}{z^{1/2}}[\alpha]^{-1/\varepsilon}\right).$$

Innen következik, hogy

$$N(x,\alpha)=x\sum_{l\le[\alpha]-1}e_l+xe_{[\alpha]}\Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]}z^{1/2}\right)+xe_{[\alpha]+1}\,\Phi\left(\frac{1-\{\alpha\}}{[\alpha]+1}z^{1/2}\right)+O\left(\frac{x}{z^{3/4}}\right)+R(x,\alpha),$$

ha $\alpha\ll z^{3/4}$.

Az $\alpha > z^{3/4}$ eset vizsgálata könnyű. Ekkor

$$N(x, \alpha) = x + O\left(x \sum_{n \leq x} \frac{dd(n)}{z^{7/4}}\right) = x + O\left(\frac{x}{z^{3/4}}\right) = x \sum_{l \leq [\alpha]-1} e_l + O\left(\frac{x}{z^{3/4}}\right),$$

mivel

$$\sum_{n \leq x} dd(n) \ll xz$$

és

$$\sum_{l \geq z^{3/4}} e_l \ll z^{-5}.$$

Innen következik a tétel.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] P. TURÁN: Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936) 125—133.
[2] A. RÉNYI and P. TURÁN: On a theorem of Erdős—Kac, *Acta Arithm.* **4** (1958) 71—74.

(Beérkezett: 1967. V. 4.)

ON THE DISTIBUTION OF $dd(n)$

by
IMRE KÁTAI

Summary

Let $d(n)$ denote the number of divisors of n, and let $dd(n)$ the number of divisors of $d(n)$. Let $N(x, \alpha)$ denote the number of solutions of the inequality

$$dd(n) < \alpha z, \qquad n \leq x,$$

where $z = \log\log x$.

We proved the following assertion

$$N(x, \alpha) = \left\{\sum_{l \leq [\alpha]-1} e_l + e_{[\alpha]} \Phi\left(\frac{\{\alpha\}}{[\alpha]} z^{1/2}\right) + e_{[\alpha]+1} \Phi\left(\frac{\{\alpha\}-1}{[\alpha]+1} z^{1/2}\right)\right\} + O\left(\frac{x}{z^{3/4}}\right) + R(x, \alpha),$$

where

$$R(x, \alpha) = \begin{cases} O\left(\dfrac{x}{z^{1/2}}\right), & \text{when} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ O\left(\dfrac{x}{z^{1/2}} \alpha^{-M}\right) & \text{when} \quad \alpha \leq 1, \quad M \text{ arbitrary constant,} \end{cases}$$

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt,$$

further $e_l \geq 0$ for $l = 1, 2, \ldots,$ and $\sum_{l=1}^{\infty} e_l = 1.$

MAXIMÁLIS INFORMÁCIÓT TARTALMAZÓ DÖNTÉSFÜGGVÉNYEK

Írta: NEMETZ TIBOR

Bevezetés

A matematikai statisztika minden területén a következtetéseket megfigyelések, kísérletek útján végzett információ-akkumuláció előzi meg. Az így nyert információmennyiséget nyilvánvalóan valamilyen módon mérni szükséges ahhoz, hogy a következtetések jóságát, megbízhatóságát vizsgálni lehessen. Az információ-mennyiség megfelelően definiált mérőszámai nagy segítséget is nyújthatnak a statisztikusnak munkájában. Ezt először R. A. FISHER ismerte fel, s az általa 1925-ben definiált információ-mérőszámot jelentős sikerrel alkalmazta a becsléselméletben. Ugyancsak alapvető e tekintetben SHANNON és WIENER munkássága, akik egymástól függetlenül az információ logaritmikus mértékét használták a hírközlés elméletében felmerülő statisztikai problémák megoldására.

Az információ SHANNON-féle mértéke azonban jól alkalmazható a hipotézisvizsgálatok területén is. Erre RÉNYI A. mutatott rá, aki [1], [2], [3], [4], [5], [6] dolgozataiban e témakör számos kérdését vizsgálta eredményesen. Jelen dolgozat szervesen kapcsolódik RÉNYI A. fenti munkáihoz. A lehetséges hipotéziseket egy ismert a priori eloszlású Θ valószínűségi változó értékeinek fogjuk fel, s következetesen BAYES álláspontjára helyezkedünk. Így van értelme beszélni a mintában, továbbá a minta valamely függvényében Θ-ra vonatkozóan tartalmazott információ mennyiségéről. A mintatér két függvénye közül kézenfekvő hasznosabbnak ítélni a hipotézisvizsgálat számára azt, amelyik Θ-ra nézve több információt tartalmaz. Ennek a szemléletnek megfelelően a hipotézisvizsgálat során a legjobb döntést azon döntési eljárások közt kell keresni, amelyek a mintában levő információ lehető legnagyobb hányadát effektíven felhasználják. Mivel azonban pl. két hipotézis esetén egy döntés és az ellenkezője ugyanannyi információt tartalmaz, valójában az eljárás csak akkor lesz jó, ha ezt az információmennyiséget célszerűen használja föl. A dolgozat a leginformatívabb döntési eljárást vizsgálja, tehát azt, amelynek megfelelő döntésfüggvény az összes döntésfüggvények körében a legtöbb információt tartalmazza Θ-ra nézve. Bebizonyítjuk, hogy ilyen döntésfüggvény egyszerű alternatíva esetén mindig létezik, mégpedig megadható a likelihood-hányadosnak megfelelően a szokásos alakban. Ez egyúttal tehát a *Neyman—Pearson* lemma *Bayesi* variánsát is szolgáltatja.

A kérdéssel kapcsolatos aszimptotikus vizsgálatokkal egy későbbi dolgozatban kívánunk foglalkozni.

A szerző köszönetét fejezi ki Rényi Alfrédnak, aki a problémakörre felhívta a figyelmét, és munkájában sok segítséget nyújtott.

Az optimális döntésfüggvény meghatározása

Legyen az $\{\Omega^*, \mathfrak{M}^*, P^*\}$ valószínűségi mezőn egy Θ valószínűségi változó értelmezve, melynek két lehetséges értéke Θ_0 és Θ_1. Legyen továbbá értelmezve véges, vagy megszámlálhatóan végtelen sok $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változó, a megfigyelések. Jelölje minden r pozitív egész szám esetén $\mathfrak{M}_1^r$ a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát, $\mathfrak{M}$ pedig egy olyan σ-algebrát, melyre fennáll a $\mathfrak{M}_1^r \subset \mathfrak{M}$ reláció r minden értéke mellett. $\mathfrak{M}$ elemei ekkor Ω részhalmazai, ahol Ω az Ω^*-nak önmagával való megszámlálhatóan végtelen dimenziós direkt szorzatát jelöli. Legyen megadva az $\{\Omega, \mathfrak{M}\}$ mérhető téren két valószínűségi mérték: P_0 és P_1 annak megfelelően, hogy $\Theta = \Theta_0$ vagy $\Theta = \Theta_1$. Abban az esetben, ha Θ értékét nem áll módunkban közvetlenül megfigyelni, dönteni akarunk véges sok megfigyelés alapján a $\Theta = \Theta_0$ és $\Theta = \Theta_1$ hipotézisek között (a hipotéziseket a továbbiakban rendre H_0-lal, ill. H_1-gyel fogjuk jelölni.) A legjobb döntéstől azt várjuk el, hogy ennek eredményeként minimálisra csökkenjen a Θ-ra nézve fennálló bizonytalanság. Döntésünk következtében ez a bizonytalanság legfeljebb annyival csökkenhet, amenynyi információt a döntés alapjául szolgáló megfigyelés tartalmaz Θ-ra nézve. Ez utóbbi információmennyiséget egy döntési utasítás általában csökkenti, mivel a mintatéren értelmezett tetszőleges kétértékű függvény általában kevesebb információt nyújt, mint ami a mintából nyerhető (lásd RÉNYI [1]). A feladat tehát tulajdonképpen olyan döntésfüggvény keresése, melynél ez az információveszteség a lehető legkisebb.

Jelöljük ξ-vel a megfigyelés eredményét. Megjegyezzük, hogy ξ nem szükségképpen véges dimenziós; — jelölhet végtelen dimenziós megfigyelésvektort is. ξ lehetséges értékei alkotják az X mintateret. Nyilvánvaló, hogy a döntési utasítást csak akkor adjuk meg, ha a mintatér minden x eleméhez hozzárendeljük a Θ_0 és Θ_1 értékek valamelyikét mint lehetséges döntést. Jelölje ezt a hozzárendelést $\delta(x)$. Általános esetben, randomizált döntés esetén ez a hozzárendelés egy valószínűségi törvényszerűség, tehát $\delta(x)$ maga is valószínűségi változó lesz. Ez azt jelenti, hogy $\xi = x$ esetén Θ-tól függetlenül $\alpha_k(x)$ valószínűséggel döntünk a Θ_k érték mellett, azaz $\alpha_k(x) = P(\delta = \Theta_k | \xi = x)$, $(k = 0, 1)$, ahol $\alpha_0(x) + \alpha_1(x) \equiv 1$ és $0 \leqq \alpha_k(x) \leqq 1$. Keressük tehát azt a $\delta(x)$ függvényt, amelyben a Θ-ra vonatkozóan tartalmazott információ mennyisége a lehető legnagyobb. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$w_k = P^*(\Theta = \Theta_k); \quad (k = 0, 1)$$

$$h(p) = \begin{cases} -p \log p - (1-p) \log (1-p), & \text{ha} \quad 0 < p < 1 \\ 0 & , \text{ha} \quad p = 0, \quad \text{vagy} \quad p = 1. \end{cases}$$

Ekkor a Θ-ra nézve a priori fennálló bizonytalanság *Shannon*-féle mértéke*

$$H(\Theta) = h(w_0) = -w_0 \log w_0 - (1-w_0) \log (1-w_0).$$

Egy tetszőleges $\delta(x)$ döntésfüggvényben Θ-ra vonatkozóan tartalmazott információ mennyisége pedig (lásd LINDLEY [7]):

$$I(\delta, \Theta) = H(\Theta) - E[H(\Theta|\delta)],$$

* Itt és a továbbiakban log(.) kettes alapú logaritmust jelent.

ahol $H(\Theta|\delta)$ a Θ feltételes entrópiája adott δ mellett, azaz

$$H(\Theta|\delta)=h[P(\Theta=\Theta_0|\delta)],$$

míg $E[H(\Theta|\delta)]$ jelöli a $H(\Theta|\delta)$ valószínűségi változó várható értékét.

A fenti definíció mellett az információ mennyiség szimmetrikus, $\delta(x)$ ugyanannyi információt tartalmaz Θ-ra vonatkozóan, mint Θ a $\delta(x)$-re nézve, azaz

$$I(\delta,\Theta)=I(\Theta,\delta).$$

Bevezetve az

$$y_0=P(\delta=\Theta_0|\Theta=\Theta_0)$$

és

$$y_1=P(\delta=\Theta_0|\Theta=\Theta_1)$$

jelöléseket, könnyen látható, hogy

$$I(\Theta,\delta) = h(w_0y_0+w_1y_1)-w_0h(y_0)-w_1h(y_1).$$

A $h(x)$ függvény konvexitásából következik, hogy $I(\Theta,\delta)\geqq 0$. Továbbá, $w_0w_1\neq 0$ esetén egyenlőség akkor és csak akkor áll fönn, ha $y_0=y_1$, azaz, ha a $P(\delta(x)= =\Theta_0|\Theta=\Theta_k)$ feltételes valószínűség értéke nem függ k-tól ($k=0,1$). Ennek speciális esete az a szemléletesen nyilvánvaló tény, hogy semmi információt sem nyerünk, ha döntési eljárásunk a megfigyeléstől teljesen független, azaz, ha a $P(\delta(x)=\Theta_0)$ valószínűség nem függ x-től, akkor $I(\delta,\Theta)=0$.

Vizsgáljuk most meg azt is, milyen esetben tartalmazhat a döntésfüggvény minden információt Θ-ra nézve. Némi számolás után a hiányzó információ mennyiségére a következő összefüggés adódik:

$$H(\Theta)-I(\delta,\Theta) = (w_0y_0+w_1y_1)h\left(\frac{w_0y_0}{w_0y_0+w_1y_1}\right)+$$

$$+[w_0(1-y_0)+w_1(1-y_1)]\cdot h\left(\frac{w_0(1-y_0)}{w_0(1-y_0)+w_1(1-y_1)}\right)$$

Ennek a segítségével egyszerűen belátható, hogy

$$H(\Theta)=I(\delta,\Theta)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $y_0=0$ és $y_1=1$, vagy $y_0=1$ és $y_1=0$. Az $\alpha_0(x)$ függvény azonban akkor és csak akkor választható meg úgy, hogy (y_0,y_1) értéke a $(0,1)$ és az $(1,0)$ értékpár egyike legyen, ha a P_0 és P_1 mértékek ortogonálisak. Ez azt jelenti, hogy érvényes a következő

TÉTEL. *A $\delta(x)$ döntésfüggvény akkor és csak akkor tartalmazhat minden információt Θ-ra nézve, ha a P_0 és P_1 mértékek ortogonálisak.*

A tartalmazott információmennyiség maximumát keresendő tekintsük $I(\delta,\Theta)$-t mint az y_0 és y_1 változók függvényét, s vizsgáljuk ezen változók szerinti viselkedését az egységnégyzetben. Megjegyezzük, hogy az értelmezési tartomány része az egységnégyzetnek, s minden $0\leqq y_0\leqq 1$ esetén létezik olyan y_1 érték, hogy $I(\delta,\Theta)$ értelmezett az (y_0,y_1) pontban. Képezve az

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = -w_k\left[\log\frac{w_0y_0+w_1y_1}{1-w_0y_0-w_1y_1}-\log\frac{y_k}{1-y_k}\right],\quad (k=0,1)$$

parciális deriváltakat, könnyen látható, hogy

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = 0$$

akkor és csak akkor, ha $y_0 = y_1$ $(k=0, 1)$. Mint láttuk, az $y_0 = y_1$ egyenes mentén minimum van. A fentiekből tehát következik, hogy a maximumhely y_0 és y_1 értelmezési tartományának határán helyezkedik el, továbbá rögzített y_0 esetén a lehető legnagyobb, vagy a lehető legkisebb y_1 mellett maximális $I(\delta, \Theta)$.

Legyen P olyan mérték, melyre nézve a P_0 és P_1 mértékek abszolút folytonosak, s jelölje $f_k(\omega)$ a P_k mértéknek P-re vonatkozó *Radon—Nikodym* deriváltját. Ekkor az $\alpha_0(x)$ függvény segítségével az y_0 és y_1 a következőképpen írható fel:

$$y_0 = \int \alpha_0 f_0 \, dP$$

$$y_1 = \int \alpha_0 f_1 \, dP.$$

Nézzük meg, hogy rögzített y_0 esetén $\alpha_0(x)$ milyen választása mellett lesz y_1 maximális, ill. minimális. Legyen $\alpha_0^*(x)$ tetszőleges, 0 és 1 közti értékeket felvevő mérhető függvény, és legyen

$$y_0^* = \int \alpha_0^* f_0 \, dP,$$

akkor tetszőleges $c \geqq 0$ esetén

$$y_1^* = \int \alpha_0^* f_1 \, dP = \int \alpha_0^* (f_1 - cf_0) \, dP + cy_0^*$$

s ezért nyilvánvalóan

$$cy_0^* - \int |f_1 - cf_0|_- \, dP \leqq y_1^* \leqq cy_0^* + \int |f_1 - cf_0|_+ \, dP,$$

ahol

$$|g(x)|_+ = \begin{cases} g(x), & \text{ha} \quad g(x) \geqq 0 \\ 0\,, & \text{ha} \quad g(x) \leqq 0 \end{cases}$$

és

$$|g(x)|_- = \begin{cases} |g(x)|, & \text{ha} \quad g(x) \leqq 0 \\ 0\,, & \text{ha} \quad g(x) \geqq 0. \end{cases}$$

Legyen

$$\alpha^c(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad f_1 > cf_0 \\ \gamma_c, & \text{ha} \quad f_1 = cf_0 \\ 0, & \text{ha} \quad f_1 < cf_0. \end{cases}$$

A fentiekből következik, hogy ha valamilyen y_0-hoz létezik c és γ_c, úgy, hogy

$$y_0 = \int \alpha^c f_0 \, dP,$$

akkor y_1 keresett maximális értéke:

$$y_1 = \int \alpha^c f_1 \, dP.$$

Könnyen látható, hogy az y_0 és y_1 szerinti értelmezési tartomány szimmetrikus az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pontra. Valóban, az (y_0, y_1) pont tükörképe az $(1-y_0, 1-y_1)$ pont, s ha az (y_0, y_1) pontot az $\alpha_0^*(x)$ függvény határozza meg, akkor annak tükörképét az $\alpha_0^{**}(x) = \alpha_1^*(x)$ függvény állítja elő. Figyelembe véve még, hogy $h(p) = h(1-p)$, adódik, hogy ha minden 0 és 1 közti y_0 előállítható

$$y_0 = \int \alpha^c f_0 \, dP$$

alakban, akkor léteznek olyan c és γ_c számok, hogy a hozzájuk tartozó $\alpha^c(x)$ függvény maximális információt szolgáltató döntésfüggvényt határoz meg. Nem randomizált esetben nyilván igaz a megfordítás is, azaz a maximális információt tartalmazó döntésfüggvényre: $\alpha_0(x) = \alpha^c(x)$ vagy $\alpha_1(x) = \alpha^c(x)$ megfelelő c és γ_c mellett.

Belátható, hogy a fenti előállítás mindig létezik. Legyen

$$\tilde{\alpha}_c = \begin{cases} 1, & \text{ha } f_1 \geqq cf_0 \\ 0, & \text{ha } f_1 < cf_0 \end{cases}$$

és

$$y_0(c) = \int \tilde{\alpha}^c f_0 \, dP.$$

Ekkor $y_0(0) = 1$, $y_0(\infty) = 0$, továbbá $y_0(c)$ c-nek monoton csökkenő függvénye, tehát legfeljebb megszámlálható szakadási helye van. Ezekben az ugrás nagysága:

$$y_0(c+0) - y_0(c-0) = \lim_{\tau \to 0} \{y_0(c+\tau) - y_0(c-\tau)\} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \left[\int\limits_{\{x: f_1 \geqq (c+\tau) f_0\}} f_0 \, dP - \int\limits_{\{x: f_1 \geqq (c-\tau) f_0\}} f_0 \, dP \right] = - \int\limits_{\{x: f_1 = cf_0\}} f_0(x) \, dP.$$

Könnyen látható az is, hogy $y_0(c)$ balról folytonos függvény. Ez azt jelenti, hogy γ_c helyes megválasztásával minden $0 \leqq y_0 \leqq 1$ érték előállítható a kívánt alakban, tehát igaz a következő

TÉTEL: *Létezik Θ-ra nézve maximális információt tartalmazó $\delta(x)$ döntésfüggvény, mégpedig megfelelő c és γ_c esetén vagy*

$$P(\delta(x) = \Theta_0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f_1 > cf_0 \\ \gamma_c, & \text{ha } f_1 = cf_0 \\ 0, & \text{ha } f_1 < cf_0, \end{cases}$$

vagy a $P(\delta(x) = \Theta_1)$ valószínűségre érvényes a fenti összefüggés.

Megjegyzés: Ha az $\{x: f_1 = cf_0\}$ halmaz P mértéke nulla minden $c \geqq 0$ esetén, akkor létezik nem randomizált optimális döntés. Ez azonban nem szükséges feltétel, mint azt az 1. és 3. példa mutatja.

Megjegyezzük még, hogy azon c értékek halmaza, melyekre $\int \alpha^c f_0 \, dP$ konstans, mindkét végén zárt véges, vagy balról zárt végtelen intervallum, s ezen intervallumban $\int \alpha^c f_1 dP$ és ezért a megfelelő információmennyiség is konstans.

A c és γ_c értékek meghatározásához segítséget nyújt az $I(\delta, \Theta)$ mennyiség (y_0, y_1) síkban vett értelmezési tartományának további vizsgálata. Láttuk, hogy a határ paraméteres egyenlete alkalmas c és γ_c esetén

$$y_0 = \int \alpha^c f_0 \, dP$$

$$y_1 = \int \alpha^c f_1 \, dP.$$

Legyen $y_0(c) = \int \tilde{\alpha}^c f_0 \, dP$ a c pont környezetében c-nek szigorúan monoton, folytonos függvénye. Akkor, mint könnyen látható,

$$c-h \leqq \frac{y_1(c-h)-y_1(c+h)}{y_0(c-h)-y_0(c+h)} \leqq c+h.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0} = c,$$

vagyis az értelmezési tartomány „felső" határának ilyen esetben létezik az érintője, és c éppen az érintő iránytangensét adja meg.

Ha az $y_0(c)$ függvénynek a c pontban szakadása van, akkor

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta y_0} = c,$$

azaz a határon γ_c különböző értékeinek egyenes szakasz felel meg.

Végül abban az esetben, ha $y_0(c)$ konstans valamilyen $[c_1, c_2)$ intervallumban, akkor itt a $\partial y_1/\partial y_0$ derivált nem létezik, csak a jobb és bal oldali deriváltak léteznek, mégpedig értékük c_2 illetve c_1. Abban az esetben, ha az $I(\delta, \Theta) = I(c, \gamma_c)$ függvény maximumát nem ilyen töréspontban veszi fel, akkor a maximum csak olyan c érték mellett lehetséges, melyre

$$c = -\frac{\dfrac{\partial I}{\partial y_0}}{\dfrac{\partial I}{\partial y_1}}.$$

Valóban, ha a (c_0, c_1) intervallum olyan, hogy

$$y_0(c, \gamma_c) = \int \alpha^c f_0 \, dP$$

c-nek illetve rögzített c esetén γ_c-nek szigorúan monoton függvénye, akkor a szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy

$$\frac{\partial I}{\partial c} = 0, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial I}{\partial \gamma_c} = 0$$

legyen. S mivel

$$\frac{\partial I}{\partial c} = \frac{\partial I}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial y_0}{\partial c} + \frac{\partial I}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial c}$$

és a feltétel miatt $\frac{\partial y_0}{\partial c} \neq 0$, így adódik, hogy szélsőérték csak ott lehet, ahol

$$\frac{\partial I}{\partial y_0} + c\frac{\partial I}{\partial y_1} = 0.$$

Ugyanez az összefüggés adódik akkor is, ha rögzített c mellett a γ_c szerinti deriváltat vizsgáljuk, s ez állításunkat bizonyítja.

Példák

1. Legyen Ω^* a pozitív féltengely, $\mathfrak{M}^*$ pedig jelölje Ω^* *Lebesgue*-mérhető részhalmazainak σ-algebráját. Legyen ξ valószínűségi változó, mely a H_0 hipotézis szerint a $(0; 1)$ intervallumban, a H_1 hipotézis szerint a $(0; d)$ intervallumban egyenletes eloszlású, ahol $d > 1$, rögzített szám. A két hipotézis között egyetlen mintaelem alapján akarunk dönteni; feladat a leghatásosabb döntésfüggvény meghatározása.

A P_0 és P_1 mértékek $\mathfrak{M}^*$-ra való megszorításai abszolút folytonosak a λ *Lebesgue*-mértékre nézve, és

$$f_0(x) = \frac{dP_0}{d\lambda} = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{másként} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \frac{dP_1}{d\lambda} = \begin{cases} 1/d, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{másként.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy a döntésfüggvény $c = \frac{1}{d}$ esetén tartalmaz maximális információt γ_c megfelelő megválasztása mellett, azaz akkor, ha

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $y_0 = \gamma$ és $y_1 = \frac{\gamma}{d}$, tehát tetszőleges w_0 esetén az

(1) $$I(\gamma) = h\left\{\left(w_0 + \frac{w_1}{d}\right)\gamma\right\} - w_0 h(\gamma) - w_1 h\left(\frac{\gamma}{d}\right)$$

függvény maximumhelyét kell megkeresni a $[0, 1]$ zárt intervallumban. Egyszerű számolás után adódik,* hogy

$$\frac{d^2 I}{d\gamma^2} = \left[\frac{1}{\ln 2}\right]^2 \frac{w_0 w_1 \left(1 - \frac{1}{d}\right)^2}{\left[1 - \gamma\left(w_0 + \frac{w_1}{d}\right)\right][1-\gamma]\left[1 - \frac{\gamma}{d}\right]}$$

és $w_0 w_1 \neq 0$ esetén, figyelembe véve, hogy $d > 1$, nyerjük:

$$\frac{d^2 I}{d\gamma^2} > 0, \quad \text{hacsak} \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1.$$

* Az $\ln x$ az e alapú logaritmust jelenti

Ebből következik, hogy a döntésfüggvény $0<\gamma<1$ esetén nem tartalmazhat maximális információt. Mivel $\gamma=0$ esetén $\alpha_0(x)$ azonosan nulla lenne, így maximumhely csak $\gamma=1$ lehet.

Ez azt jelenti, hogy $d>1$, $w_0 w_1 \neq 0$ esetén létezik nem randomizált optimális döntésfüggvény, s ez egy nulla *Lebesgue*-mértékű halmaztól eltekintve azonos a következő döntésfüggvénnyel:

$$\delta(x)=\begin{cases}\Theta_0, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ \Theta_1, & \text{ha} \quad x \geqq 1.\end{cases} \tag{2}$$

Következmények:

I. A kapott optimális döntésfüggvény összetett ellenhipotézis esetén egyenletesen leghatásosabb. Legyen a H_0 hipotézis szerint a vizsgált eloszlás a $(0, 1)$ intervallumban, míg a H_1 hipotézis szerint a $(0, d)$ intervallumban egyenletes eloszlás, ahol $d>1$, rögzített, de ismeretlen szám. A fentiek szerint a legtöbb információt tartalmazó döntésfüggvényt ekkor is a (2) összefüggés definiálja.

II. Vizsgáljuk a döntésproblémát abban az esetben, ha n független megfigyelés áll rendelkezésünkre. Ekkor a P_0 ill. P_1 mértékeknek az n-dimenziós *Lebesgue*-mértékre vonatkozó deriváltjai:

$$f_0(\underline{x})=\prod_{i=1}^{n} f_0(x_i)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad \max\limits_{(i)} x_i \leqq 1 \\ 0 & \text{másként,}\end{cases}$$

ill.

$$f_1(\underline{x})=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{d^n}, & \text{ha} \quad \max\limits_{(i)} x_i \leqq d \\ 0 & \text{másként.}\end{cases}$$

Optimalizáláshoz most is az (1) függvény maximumhelyét kell meghatározni, miközben d helyére d^n-t helyettesítünk. A maximumhely azonban nem függ d-től, így az optimális döntésfüggvény:

$$\delta(\underline{x})=\begin{cases}\Theta_0, & \text{ha} \quad \max\limits_{(i)} x_i \leqq 1 \\ \Theta_1, & \text{ha} \quad \max\limits_{(i)} x_i > 1.\end{cases}$$

III. Ha létezne olyan csak a w_0-tól függő $c(w_0)$ konstans, mely tetszőleges P_0 és P_1 esetén optimális döntéshez vezetne, akkor ez csak $c(w_0)\equiv 1$ lehetne, és így w_0-tól sem függne. A következő példa azt mutatja, hogy $w_0 \neq \frac{1}{2}$ esetén a $c(w_0)$ nem lehet azonosan 1.

2. Legyen ξ egységnyi szórású, normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke a H_0 ill. a H_1 hipotézis szerint $-m$ ill. $+m$ $(m \neq 0)$. Tehát a *Lebesgue*-mértékre vonatkozó deriváltak:

$$f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+m)^2}{2}}$$

és

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2}}.$$

Mivel $\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = e^{2xm}$, így tetszőleges c esetén

$$y_0(c) = \int_{-\infty}^{x(c)} f_0(t)\,dt,$$

$$y_1(c) = \int_{-\infty}^{x(c)} f_1(t)\,dt,$$

ahol $x(c) = \frac{1}{2m} \ln c$.

A szélsőérték létezésének szükséges feltételét alkalmazva nyerjük, hogy $c=1$ csak akkor lehet szélsőértékhely, ha

$$w_0 \log \left[\frac{w_0 y_0 + w_1 y_1}{1 - w_0 y_0 - w_1 y_1} \cdot \frac{1-y_0}{y_0} \right] = - w_1 \log \left[\frac{w_0 y_0 + w_1 y}{1 - w_0 y_0 - w_1 y_1} \cdot \frac{1-y_1}{y_1} \right].$$

Felhasználva, hogy $c=1$ esetén $y_1 = 1 - y_0$, azonos átalakítások után adódik, hogy

$$\frac{w_1 + (w_0 - w_1) y_0}{w_0 - (w_0 - w_1) y_0} = \left(\frac{y_0}{1-y_0} \right)^{w_0 - w_1}.$$

$w_0 \neq \frac{1}{2}$ esetén y_0 értéke megválasztható úgy, hogy az egyenlőség itt ne álljon fönn, továbbá $\frac{1}{2} < y_0 < 1$ legyen. Ez azt jelenti, hogy tetszőlegese $w_0 \neq \frac{1}{2}$ esetén létezik olyan m érték, s ezáltal olyan P_0 és P_1 mértékek, hogy $c=1$ nem optimális.

3. Legyen P_0 és P_1 exponenciális eloszlás, melyeknek a *Lebesgue*-mértékre vonatkozó sűrűségfüggvényei rendre

$$f_0(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geqq 0 \\ 0 & \text{másként} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda (x-a)}, & \text{ha } x \geqq a \\ 0 & \text{másként.} \end{cases}$$

Mivel

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \begin{cases} e^{\lambda a}, & \text{ha } x \geqq a \\ 0\;, & \text{ha } x < a, \end{cases}$$

így

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leqq x \leqq a \\ \gamma, & \text{ha } \quad x > a. \end{cases}$$

γ optimális értékének meghatározásánál ugyanúgy járunk el, mint fentebb. Némi számolás után adódik, hogy az információ mennyiség γ szerinti második deriváltja

$$\frac{d^2 I}{d\gamma^2} = \left[\frac{1}{\ln 2} \right]^2 \cdot \frac{w_0 w_1 \cdot (1 - e^{-\lambda a})^2}{\gamma [\gamma + w_0 (1-\gamma)(1 - e^{-\lambda a})] [1 - (1-\gamma) e^{-\lambda a}]}.$$

Nyilván $w_0 w_1 \neq 0$, $a > 0$ esetén

$$\frac{d^2 I}{d\gamma^2} > 0, \quad \text{hacsak} \quad 0 < \gamma \leqq 1$$

s így a legtöbb információt tartalmazó döntésfüggvény:

$$\delta(x) = \begin{cases} \Theta_0, & \text{ha} \quad 0 \leqq x < a \\ \Theta_1, & \text{ha} \quad x \geqq a \end{cases}$$

Rögtön látszik, hogy összetett ellenhipotézis esetén most nem létezik egyenletesen legjobb döntésfüggvény.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] RÉNYI, A.: On the amount of information concerning an unknown parameter in a sequence of observations, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **9** (1964) 617—625.

[2] RÉNYI, A.: On the amount of information in a frequency count, *35 th Session of the International Statistical Institute, Beograd*, 1965, 1—8.

[3] RÉNYI, A.: On the amount of missing information and the Neyman—Pearson lemma, *Festschrift for J. Neyman*, Wiley, London, 1966, 281—288.

[4] RÉNYI, A.: On the amount of information in a random variable concerning an event, *Journal of Mathematical Sciences (Delhi)* **1** (1966) 30—33.

[5] RÉNYI, A.: On some basic problems of statistics from the point of view of information theory, *Proceedings of the 5 th Berkeley Symposium.*

[6] RÉNYI, A.: Statistics and information theory, *Studia Scientiarum Math. Hungarica*, **2** (1967) 249—256.

[7] LINDLEY, D. V.: On a measure of the information provided by an experiment, *Ann. Math. Statist.*, 27 (1956) 986—1005.

(Beérkezett: 1967. V. 10.)

ON THE DECISION FUNCTIONS CONTAINING MAXIMAL INFORMATION

by

T. NEMETZ

Summary

The suitable measures of the amount of information are useful in the various fields of the mathematical statistics. This fact was first observed by R. A. FISHER, who used the information measure defined by himself with powerful succes in the theory of estimation. SHANNON and WIENER used the logarithmic measure of the information for answering to the questions in the theory of transmission. The measure of information defined by SHANNON is very applicable for the field of the testing hypotheses, as A. RÉNYI called the attention to this fact. The present paper is connected with RÉNYI's papers [1]—[6].

Let $S = (\Omega, \mathfrak{M}, P)$ be a probability space, and Θ a random variable in S, which has only two possible values, Θ_0 and Θ_1. Let ξ denote an arbitrary random variable in S, and let P_0 and P_1 be two probability measures on the measurable space $(\Omega, \mathfrak{M})$, for which

$$P_k(\xi \in B) = P(\xi \in B \mid \Theta = \Theta_k), \qquad (k = 0, 1)$$

in case of all *Borel*-sets B.

Let us suppose, that we observe the value of the variable ξ, and on the basic of this observation we choose one of the values $\Theta=\Theta_0$ or $\Theta=\Theta_1$. Let $\delta(x)$ describe this decision, and let the probability $\alpha_0(x)$ be given, with which we choose the value Θ_0, assuming that $\xi=x$ i.e.

$$\alpha_0(x) = P(\delta(x) = \Theta_0|\xi = x)$$

(where $\alpha_0(x)$ is a *Borel* measurable function).

We shall use the following notation:

$$w_k = P(\Theta=\Theta_k) \qquad (k=0, 1)$$

$$y_k = P(\delta=\Theta_0|\Theta=\Theta_k) \qquad (k=0, 1)$$

and

$$h(p) = -p\log p-(1-p)\log(1-p) \qquad (0\leqq p\leqq 1).$$

It is easy to see that the amount of information contained in the decision function $\delta(x)$ and concerning to the parameter Θ of the decision problem:

$$I(\delta, \Theta) = I(y_0, y_1) = h(w_0y_0+w_1y_1)-w_0h(y_0)-w_1h(y_1).$$

It is simple to prove the following

THEOREM 1. *The decesion function $\delta(x)$ may contain full information with respect to Θ, if and only if the measures P_0 and P_1 are orthogonal.*

Let P^* be a measure, such that P_0 and P_1 are both absolutely continuous with respect to P^*, and let $f_0(\omega)$ and $f_1(\omega)$ denote the *Radom—Nikodym* derivatives dP_0/dP^* and dP_1/dP^*. The following variant of the *Neyman—Pearson* lemma holds:

THEOREM 2 *Among all decision function there is a decision function $\delta(x)$, which contains maximal information concerning to Θ, and there are constants $c>O$ and $O\leqq\gamma_c\leqq 1$, such that*

$$P\{\hat{\delta}(x) = \Theta_0|\xi = x\} = \begin{cases} 1 & \text{if } f_1 > cf_0 \\ \gamma_c & \text{if } f_1 = cf_0 \\ 0 & \text{if } f_1 < cf_0. \end{cases}$$

The theorem is valid also for vector variables.

Let us introduce the following notations:

$$\tilde{\alpha}^c = \begin{cases} 1, & \text{if } f_1 \geqq cf_0 \\ 0, & \text{if } f_1 < cf_0 \end{cases}$$

and

$$y_0(c) = \int \tilde{\alpha}^c f_0\, dP^*$$

THEOREM 3. *If the decision function $\delta(x)$, defined by $\alpha_0(x) = \tilde{\alpha}^c$ is optimal, and if the function $y_0(c)$ is strictly monoton in the point c then*

$$\frac{\partial I}{\partial y_0}+c\frac{\partial I}{\partial y_1} = 0.$$

We prove, that there is no universal constant $c(w_0)$, depending only on w_0, which would be optimal for arbitrary measures P_0 and P_1.

An example is given, where for a composite hypotheses there exists uniformly optimal decision function.

NEGATÍVAN RENDEZETT ALGEBRAI STRUKTÚRÁK PRÍMELEMEIRŐL

Írta: STEINFELD OTTÓ

1. §

Ismeretes, hogy egy $\mathscr{R}$ asszociatív gyűrű (félcsoport) összes ideáljainak $\mathscr{H}_1$ halmaza egy negatívan és hálószerűen rendezett félcsoport. (Lásd pl. G. BIRKHOFF [1] vagy L. FUCHS [4].) SZÁSZ GÁBOR [10] dolgozatában kimutatta, hogy ha $\mathscr{R}$ félcsoport mindegyik ideálja prím, akkor $\mathscr{R}$ ideáljai láncot alkotnak. Ezt az eredményt [8] cikkemben olyan $\mathscr{L}$ negatívan rendezett algebrai struktúra f-prímelemeire általánosítottam, melyben a hálóműveleteken kívül egy f n-változós művelet is definiálva van. (A pontos definíciókat lásd a 2. §-ban.)

E dolgozatban egy-egy szükséges és elégséges feltételt adok arra vonatkozóan, hogy $\mathscr{L}$-nek mindegyik eleme f-prím illetve f-szemiprím legyen. (Lásd 2. 2 illetve 2. 1 tételt.) Ezekből a tételekből gyűrűk és félcsoportok ideáljaira, illetve csoportok normálosztóira korolláriumok nyerhetők. Ezek közül a 3. 1 korollárium ismert eredmény. (Lásd R. L. BLAIR [2] 9. lemmáját.)

2. §

Jelöljün $\mathscr{L}$ egy olyan algebrai struktúrát, amelynek a következő tulajdonságai vannak:

(α) $\mathscr{L}$-ben értelmezve van egy f n-változós ($n \geqq 2$) művelet;

(β) $\mathscr{L}$ egy $\leqq$ részben rendezésre teljes háló;

(γ) az f művelet mindegyik változójában izotón és $\mathscr{L}$ a monotonitási tartománya, azaz $a_i \leqq b_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ fennállásából

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \leqq f(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad (a_1, \dots, a_n, b \in \mathscr{L})$$

következik.

Az (α), (β), (γ) tulajdonságokkal rendelkező $\mathscr{L}$ algebrai struktúrát *teljes f-hálónak*, rövidebben *tf-hálónak* nevezzük. (Lásd [8].) E dolgozatban $\mathscr{L}$-lel mindig *tf*-hálót jelölünk.

Az $\mathscr{L}$-beli hálóműveleteket a szokásos $\wedge$ és $\vee$ jelekkel jelöljük. Azt mondjuk, hogy $\mathscr{L}$ *tf*-háló *f-negatívan rendezett*, ha tetszőleges $a_1, \dots, a_n (\in \mathscr{L})$ elemekre

$$f(a_1, \dots, a_n) \leqq \bigwedge_{i=1}^{n} a_i \tag{2. 1}$$

teljesül.

Ezután mindig tegyük fel, hogy $\mathscr{L}$ *tf*-háló *f*-negatívan rendezett. $\mathscr{L}$-nek p elemét *f-prímnek* nevezzük, ha az f műveletből képzett bármely f' iterált műveletre[1]

$$f'(a_1, \ldots, a_k) \leqq p \qquad (a_1, \ldots, a_k \in \mathscr{L};\ k \geqq n)$$

fennállásából legalább egy a_i $(1 \leqq i \leqq k)$ elemre $a_i \leqq p$ következik. (Vö. FUCHS [3] dolgozatában definiált (f, Φ)-prímelem fogalmával.)

Analóg módon $\mathscr{L}$-nek s eleme *f-szemiprím*, ha

$$f'(\overset{1}{\smile}{a}, \ldots, \overset{k}{\smile}{a}) \leqq s \qquad (a \in \mathscr{L})$$

fennállásából $a \leqq s$ következik.

Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{L}$ akárhány *f*-prímelemének metszete *f*-szemiprím. [8] dolgozatunkban ennek megfordítását is kimutatjuk (lásd [8] 2. 5. tételt).

2. 1. TÉTEL. *$\mathscr{L}$ f-negatívan rendezett tf-háló mindegyik eleme akkor és csak akkor f-szemiprím, ha tetszőleges $a_1, \ldots, a_n (\in \mathscr{L})$ elemekre*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i. \tag{2. 2}$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathscr{L}$-nek mindegyik eleme *f*-szemiprím, akkor tetszőleges $a_1, \ldots, a_n (\in \mathscr{L})$ elemekre $f(a_1, \ldots, a_n)$ elem is *f*-szemiprím. Minthogy a (γ) kikötés szerint

$$f\left(\bigwedge_{i=1}^{n} a_i, \ldots, \bigwedge_{i=1}^{n} a_i\right) \leqq f(a_1, \ldots, a_n),$$

ezért $f(a_1, \ldots, a_n)$ elem *f*-szemiprím volta miatt

$$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \leqq f(a_1, \ldots, a_n),$$

ami (2. 1) figyelembe vételével éppen (2. 2) összefüggést adja.

Most fordítva, tegyük fel $\mathscr{L}$-re (2. 2) teljesülését és tekintsük $\mathscr{L}$-nek egy tetszőleges b elemét. Ha az *f*-ből képzett f' műveletre és a elemre

$$f'(\overset{1}{\smile}{a}, \ldots, \overset{k}{\smile}{a}) \leqq b$$

akkor (2. 2) miatt

$$f'(\overset{1}{\smile}{a}, \ldots, \overset{k}{\smile}{a}) = a \leqq b,$$

vagyis b valóban *f*-szemiprím.

[1] Ha f egy binér szorzás, akkor f' a többtényezős szorzatokat jelöli. Ha f egy $n=3$ változós művelet, akkor például

$$f'(x_1, x_2, \ldots, x_7) = f(f(x_1, x_2, x_3), f(x_4, x_5, x_6), x_7)$$

egy *f*-ből képezett hétváltozós műveletet jelent.

A 2. 1. tétel felhasználásával bebizonyítjuk a [8] dolgozatunkban szereplő 2. 1. állítás élesítését.

2. 2. TÉTEL. *$\mathcal{L}$ f-negatívan rendezett tf-háló mindegyik eleme akkor és csak akkor f-prím, ha $\mathcal{L}$ elemei láncot alkotnak, és $\mathcal{L}$ tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ elemeire* (2. 2) *teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathcal{L}$ mindegyik eleme f-prím, akkor a 2. 1. tétel szerint $\mathcal{L}$-re teljesül a (2. 2) összefüggés. Ha a, b $\mathcal{L}$-nek két tetszőleges eleme, akkor (2. 1)-ből és abból a feltevésünkből, hogy $a \wedge b$ elem is $\mathcal{L}$-nek f-prímeleme, ez az implikáció adódik:

$$f(\overset{1}{\breve{a}}, \ldots, a, b, \ldots, \overset{n}{\breve{b}}) \leqq a \wedge b \Rightarrow a \leqq a \wedge b \leqq b \quad \text{vagy} \quad b \leqq a \wedge b \leqq a,$$

vagyis $\mathcal{L}$ elemei valóban láncot alkotnak.

Most fordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{L}$ elemei láncot alkotnak és érvényes (2. 2). Tekintsük $\mathcal{L}$-nek egy tetszőleges b elemét. Ha az f-ből képezett f' műveletre és $a_1, \ldots, a_k$ elemekre $f'(a_1, \ldots, a_k) \leqq b$, akkor (2. 2) miatt

$$f'(a_1, \ldots, a_k) = \bigwedge_{i=1}^{k} a_i \leqq b.$$

Minthogy feltevésünk szerint $\mathcal{L}$ elemei láncot alkotnak, ezért az $a_1, \ldots, a_k$ elemek között van egy minimális elem, mondjuk a_j $(1 \leqq j \leqq k)$. Erre nyilván $a_j \leqq \bigwedge_{i=1}^{k} a_i \leqq b$ teljesül, vagyis b valóban f-prímelem.

3. §

Ismeretes, hogy egy $\mathcal{R}$ asszociatív gyűrű (félcsoport) összes ideáljai a halmazelméleti tartalmazási relációra és az ideálok szorzás műveletére egy negatívan és hálószerűen rendezett $\mathcal{H}_1$ félcsoportot alkotnak. (Lásd pl. BIRKHOFF [1] vagy FUCHS [4].) Eszerint $\mathcal{H}_1$ egy speciális f-negatívan rendezett tf-háló. Az is nyilvánvaló, hogy a $\mathcal{H}_1$-ben definiálható f-prím és f-szemiprím elemek éppen $\mathcal{R}$ prím- és szemiprímideáljai.[2] A 2. 1. és 2. 2. tételeket $\mathcal{H}_1$-re alkalmazva ezt nyerjük.

3. 1. KOROLLÁRIUM. (Lásd BLAIR [2] 9. lemmáját.) *$\mathcal{R}$ asszociatív gyűrű (félcsoport) mindegyik ideálja akkor és csak akkor szemiprím, ha $\mathcal{R}$ tetszőleges $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideáljaira*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}. \tag{3.1}$$

BLAIRnek erre az eredményére SZÁSZ FERENC hívta fel a figyelmemet.

[2] $\mathcal{R}$ asszociatív gyűrű (félcsoport) $\mathfrak{p}$ ideálját *prímnek* nevezzük, ha $\mathcal{R}$ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideáljaira $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$ fennállásából $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ vagy $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$ következik.
$\mathcal{R}$-nek $\mathfrak{q}$ ideálja *szemiprím*, ha $\mathfrak{a}^2 \subseteqq \mathfrak{q}$ fennállásából $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}$ következik.

3. 2. KOROLLÁRIUM. $\mathscr{R}$ asszociatív gyűrű (félcsoport) mindegyik ideálja akkor és csak akkor prím[3], ha $\mathscr{R}$ ideáljai láncot alkotnak és teljesül rájuk a (3. 1) feltétel.

Ismeretes, hogy $\mathscr{R}$ asszociatív gyűrű (félcsoport) $\mathfrak{a}$ ideáljának *Krull—McCoy*-féle $\mathscr{P}(\mathfrak{a})$ radikálja $\mathscr{R}$ $\mathfrak{a}$-t tartalmazó összes prímideáljának metszete. Kimutatható, hogy $\mathscr{R}$-nek $\mathfrak{q}$ ideálja akkor és csak akkor szemiprím, ha $\mathscr{P}(\mathfrak{q})=\mathfrak{q}$. (Lásd McCoy [6] 4. 15. tételt.) Eszerint a 3. 1. korolláriumnak következő átfogalmazása is érvényes.

3. 3. KOROLLÁRIUM. $\mathscr{R}$ asszociatív gyűrű (félcsoport) mindegyik $\mathfrak{a}$ ideáljára akkor és csak akkor teljesül $\mathfrak{a}=\mathscr{P}(\mathfrak{a})$, ha $\mathscr{R}$ összes ideáljaira fennáll a (3. 1) összefüggés.

4. §

Jelölje $\mathscr{H}_2$ egy $\mathscr{G}$ csoport összes normálosztóinak teljes hálóját. Definiáljuk $\mathscr{H}_2$-ben még a következő binér műveletet: $\mathscr{G}$ két $\mathscr{A},\mathscr{B}$ normálosztójának $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ kölcsönös kommutátorcsoportja legyen $\mathscr{G}$ összes $a^{-1}b^{-1}ab=[a,b]$ $(a\in\mathscr{A};\, b\in\mathscr{B})$ kommutátora által generált részcsoportja. Ismeretes, hogy $\mathscr{H}_2$ e művelet bevezetésével egy negatívan és hálószerűen rendezett (kommutatív) gruppoiddá válik. (Lásd Birkhoff [1] vagy Fuchs [4].)

E. Schenkman [7] vezette be a következő fogalmat. $\mathscr{G}$ csoport $\mathscr{P}$ normálosztóját *prímnek* nevezzük, ha $\mathscr{G}$-nek $\mathscr{A},\mathscr{B}$ normálosztóira $[\mathscr{A},\mathscr{B}]\subseteq\mathscr{P}$ fennállásából $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}$ vagy $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{P}$ következik. Analóg módon definiáltuk [8]-ban a szemiprímnormálosztó fogalmát. $\mathscr{G}$-nek Q normálosztója *szemiprím*, ha $\mathscr{G}$-nek $\mathscr{A}$ normálosztójára $[\mathscr{A},\mathscr{A}]\subseteq Q$ fennállásából $\mathscr{A}\subseteq Q$ következik. Ha $\mathscr{H}_2$-ben definiáljuk a 2. §-ban bevezetett f-prím- és f-szemiprímelemek fogalmát, ezek éppen $\mathscr{G}$ prím- és szemiprímnormálosztói lesznek. A jelen esetben a 2. 1. és 2. 2. tételek a következő eredményekbe mennek át.

4. 1. KOROLLÁRIUM. $\mathscr{G}$ csoport összes normálosztója akkor és csak akkor szemiprím, ha $\mathscr{G}$-nek tetszőleges $\mathscr{A},\mathscr{B}$ normálosztóira

$$[\mathscr{A},\mathscr{B}]=\mathscr{A}\cap\mathscr{B} \tag{4. 1}$$

teljesül.[4]

4. 2. KOROLLÁRIUM. $\mathscr{G}$ csoport összes normálosztója akkor és csak akkor prím, ha $\mathscr{G}$ normálosztói láncot alkotnak és érvényes rájuk (4. 1) összefüggés.

Y. Kurata [5] dolgozatában a következőképpen definiálta csoportokra a *Krull—McCoy*-féle radikállal analóg fogalmat. $\mathscr{G}$ csoport $\mathscr{A}$ normálosztójának *Kurata-féle $\mathscr{P}(\mathscr{A})$ radikálja* $\mathscr{G}$-nek $\mathscr{A}$-t tartalmazó összes prímnormálosztójának metszete. Kimutatható, hogy $\mathscr{G}$ csoport $\mathscr{S}$ normálosztója akkor és csak akkor

[3] Egy ferdetest fölötti teljes mátrixgyűrű „triviális" példa olyan gyűrűre, melynek mindegyik ideálja prím. Szász Ferenc [9] dolgozatában kimutatta, hogy $\mathscr{R}$ asszociatív gyűrű fölötti $\mathscr{M}$ teljesen reducibilis, végtelen rangú, homogén $\mathscr{R}$-modulus $\mathscr{E}(\mathscr{M})$ teljes endomorfizmusgyűrűje Neumann-reguláris és $\mathscr{E}(\mathscr{M})$ ideáljai láncot alkotnak. Minthogy mindegyik *Neumann*-reguláris gyűrűben teljesül a (3. 1) feltétel, ezért a 3. 2. korollárium szerint $\mathscr{E}(\mathscr{M})$ mindegyik ideálja prím. Erre a „nem-triviális" példára Szász Ferenc hívta fel a figyelmemet.

[4] Minthogy $\mathscr{H}_1$ (illetve $\mathscr{H}_2$) egy hálószerűen rendezett félcsoport (illetve grupoid), ezért $\mathscr{H}_1$ (illetve $\mathscr{H}_2$) a (3. 1) (illetve (4. 1)) feltétel teljesülése esetén egy disztributív hálóvá válik.

szemiprím, ha $\mathscr{P}(\mathscr{S})=\mathscr{S}$. (Lásd STEINFELD [8] 5. 8. tételt.) Ennek alapján érvényes a 3. 3. korrolláriumnak következő analogonja.

4. 3. KOROLLÁRIUM. $\mathscr{G}$ csoport összes $\mathscr{A}$ normálosztójára akkor és csak akkor teljesül $\mathscr{P}(\mathscr{A})=\mathscr{A}$ feltétel, ha $\mathscr{G}$ normálosztóira érvényes a (4. 1) összefüggés.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] G. BIRKHOFF: *Lattice theory* (második kiadás), New York, 1948.
[2] R. L. BLAIR: Ideal lattices and the structure of rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **75** (1953), 136—153.
[3] L. FUCHS: On partially ordered algebras. II. *Acta Sci. Math.* **26** (1965) 35—41.
[4] L. FUCHS: *Teilweise geordnete algebraische Strukturen,* Budapest, 1966.
[5] Y. KURATA: A decomposition of normal subgroups in a group, *Osaka J. Math.* **1** (1964), 201—229.
[6] N. H. MCCOY: *The theory of rings,* New York—London; 1964.
[7] E. SCHENKMAN: The similarity between the properties of ideals in commutative rings and the properties of normal subgroups of groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958), 375—381.
[8] O. STEINFELD: Primelemente und Primradikale in gewissen verbandsgeordneten algebraischen Strukturen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (megjelenés alatt).
[9] SZÁSZ FERENC: A teljesen reducibilis operátormodulusokról, *MTA. III. Osztály Közleményei* **11** (1961) 417—425.
[10] G. SZÁSZ: Über Primideale von Halbgruppen, *Publ. Math. (Debrecen)* **13** (1966), 39—41.

(Beérkezett: 1967. VII. 6.)

ÜBER PRIMELEMENTE VON NEGATIV GEORDNETEN ALGEBRAISCHEN STRUKTUREN

von

O. STEINFELD

Zusammenfassung

Bekanntlich ist die Menge $\mathscr{H}_1$ aller Ideale eines assoziativen Ringes (einer Halbgruppe) $\mathscr{R}$ eine negativ und verbandsgeordnete Halbgruppe. G. SZÁSZ hat in seiner Arbeit [10] u.a. bewiesen: *Ist in einer Halbgruppe $\mathscr{R}$ jedes Ideal prim, so bilden alle Ideale von $\mathscr{R}$ eine Kette.*

In dieser Arbeit erhalten wir — als Korollar — die folgende Verschärfung des Satzes von SZÁSZ: *Jedes Ideal eines assoziativen Ringes (einer Halbgruppe) $\mathscr{R}$ ist dann und nur dann prim, wenn alle Ideale von $\mathscr{R}$ eine Kette bilden und wenn für beliebige Ideale* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *von $\mathscr{R}$*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \tag{1}$$

gilt.

Ähnlicherweise ergibt sich auch das folgende Ergebnis von R. L. BLAIR [2]: (1) *ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jedes Ideal von $\mathscr{R}$ semiprim sei.* (Siehe Korollar 3. 2 bzw. 3. 1.)

Der Begriff des Primnormalteilers bzw. des Semiprimnormalteilers einer Gruppe $\mathscr{G}$ wurde in der Arbeit [7] bzw. in [8] eingeführt. In der vorliegenden Arbeit sind analoge Sätze über die Gruppe, deren jeder Normalteiler prim (semiprim) ist, enthalten.

Bezeichne $\mathscr{H}_2$ die Menge aller Normalteiler einer beliebigen Gruppe $\mathscr{G}$. Wird das „Produkt" von $\mathscr{A}, \mathscr{B}\in\mathscr{H}_2$ als der Kommutator $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ von $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ definiert und bedeutet $\subseteqq$ das mengentheoretische Enthaltensein, so ist $\mathscr{H}_2$ ein negativ und verbandsgeordnetes Gruppoid. Einige Eigenschaften von $\mathscr{H}_1$ und $\mathscr{H}_2$ verallgemeinernd definieren wir in der Arbeit [8] eine teilweise geordnete algebraische Struktur $\mathscr{L}$, in der eine Operation f mit $n(\geqq 2)$ Variabeln definiert ist. $\mathscr{L}$ ist ausserdem

ein vollständiger Verband, deshalb nennen wir $\mathscr{L}$ einen vollständigen f-Verband oder kurzer vf-Verband. In einem f-negativ geordneten vf-Verband definieren wir die f-Primelemente bzw. f-Semiprimelemente, welche als Verallgemeinerungen der Primideale und Primnormalteiler bzw. der Semiprimideale und Semiprimnormalteiler zu betrachten sind. Es sei $\mathscr{L}$ ein f-negatív geordneter vf-Verband. Betrachten wir die folgenden vier Eigenschaften von $\mathscr{L}$:

($\mathscr{P}$) jedes Element von $\mathscr{L}$ ist f-prim;
($\mathscr{S}$) jedes Element von $\mathscr{L}$ ist f-semiprim;
($\mathscr{K}$) $\mathscr{L}$ ist als Verband eine Kette;
($\mathscr{D}$) für beliebige Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von $\mathscr{L}$ gilt

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$$

In dieser Arbeit sind die folgenden zwei Sätze bewiesen:

1. Es sei $\mathscr{L}$ ein f-negativ geordneter vf-Verband. Für $\mathscr{L}$ sind die Bedingungen ($\mathscr{S}$) und ($\mathscr{D}$) äquivalent.

2. Bezeichne $\mathscr{L}$ einen f-negativ geordneten vf-Verband. $\mathscr{L}$ besitzt dann und nur dann die Eigenschaft ($\mathscr{P}$), falls die Bedingungen ($\mathscr{K}$) und ($\mathscr{D}$) in $\mathscr{L}$ gelten.

Aus diesen Ergebnissen erhält man die erwähnten ring-, halbgruppen- und gruppentheoretischen Sätze als Korollare.

GYŰRŰK MAXIMÁLIS JOBBIDEÁLJAIRÓL

Írta: SZÁSZ FERENC

Gyűrűn ebben a dolgozatban mindvégig asszociatív gyűrűt értünk.

Ismeretes, hogy egy gyűrű bizonyos maximális jobbideáljainak milyen szerepe van a *Jacobson*-féle radikál és hasonló radikálok képzésénél. (Lásd [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10][1].

E dolgozat célja az, hogy egyrészt áttekintést adjunk a gyűrűk különféle típusú maximális jobbideáljairól, másrészt megoldjuk STEINFELD OTTÓ egy problémáját gyűrűk maximális jobbideáljaira vonatkozólag.

Az alábbiakban négy feltételt említünk meg egy gyűrű maximális jobbideáljaira vonatkozólag, amelyek közül az elsőt szerző STEINFELD OTTÓnak szóbeli közléséből vette, a többi (éspedig II, III és IV jelzésű) feltétel pedig valamilyen formában már szerepelt az irodalomban. Ezek a feltételek a következők:

I. feltétel: Az A gyűrű R maximális jobbideálja olyan, hogy minden $a \notin R$ $(a \in A)$ elemhez és minden $c \in A$ elemhez létezik olyan $b = b_{a,c} \in A$ elem, hogy

$$c^2 - abc \in R.$$

II. feltétel: Az A gyűrű R maximális jobbideálja olyan, hogy $A^2 + R = A$. Ekkor az R jobbideált KERTÉSZ A. [3] cikke alapján *homoperfektnek* nevezzük.

III. feltétel: Az A gyűrű R maximális jobbideálja olyan, hogy ha $Ax \subseteq R$, akkor $x \in R$. Ekkor az R jobbideált szerző [8], [9] dolgozatai nyomán *kvázimodulárisnak* nevezzük.

IV. feltétel: Az A gyűrű R jobbideálja olyan, hogy létezik olyan $a \in A$ elem, hogy $(1-a)A \subseteq R$, ahol $(1-a)A = \{b - ab;\, b \in A\}$. Ekkor az R jobbideált Jacobson [2] könyve alapján *modulárisnak* nevezzük.

Célszerű bevezetni a következő ideálhányados jelöléseket is. Legyen X és Y két részhalmaz az A gyűrűben, és legyen

$$(X : Y)_r = \{a;\, a \in A,\ Ya \subseteq X\},$$
$$(X : Y)_l = \{b;\, b \in A,\ bY \subseteq X\}.$$

Megjegyzendő, hogy $(X : Y)_r$ jobbideál lesz, ha X is jobbideál A-ban, és hasonlóan $(X : Y)_l$ balideál, ha X is balideál az A gyűrűben. Ha X jobbideál és Y is jobbideál, akkor $(X : Y)_r$ kétoldali ideál, továbbá, ha X és Y balideálok, akkor $(X : Y)_l$ kétoldali ideál A-ban. Nyilván $(X : Y)_r$ maximális olyan U részhalmaz és $(X : Y)_l$ maximális olyan V részhalmaz A-ban, amelyre teljesül $YU \subseteq X$, illetve $VY \subseteq X$.

[1] Megemlíthető még KERTÉSZ ANDOR „Gyűrűk Jacobson-féle radikáljáról” (*MTA III. Osztály Közleményei* **16** (1966) 441—461.) című cikke, amely összefoglaló jellegű munka.

Ezekkel a jelölésekkel a III. feltétel így írható: R olyan maximális jobbideál, amelyre $(R:A)_r \subseteq R$. JACOBSON [2] könyve I. fejezet 3. 1 állításának korolláriuma szerint minden R moduláris maximális jobbideálra az A gyűrűben $(R:A)_r \subseteq R$, ami más szóval azt jelenti, hogy a IV. feltételből következik III. Továbbá III.-ból következik II., mert, ha nem teljesül II., akkor $A^2 \subseteq R$ miatt $A = (R:A)_r \subsetneqq R$, tehát ekkor III. sem teljesülne. Végül pedig megjegyezzük, miként az alábbi tételből és annak bizonyításából látható, II.-ből is folyik I.

Megjegyezzük, hogy szerző [9] dolgozatában megadott példát olyan gyűrűre, amely tartalmaz olyan III. feltételű maximális jobbideált, amely nem IV. feltételű, és többek közt igazolta, hogy ha a gyűrű kommutatív vagy *Artin*-féle (jobbideálokra nézve minimum-feltételű), akkor mindegyik III. feltételű maximális jobbideál IV. feltételű is. Szerző ezzel a példa konstrukcióval megoldotta KERTÉSZ ANDOR [5] egy problémáját a gyűrű *Jacobson*-radikál jellemzésével kapcsolatosan. Ugyanis JACOBSON [2] könyve szerint a J *Jacobson*-féle radikál egyenlő a gyűrű összes IV. feltételű maximális jobbideáljának a metszetével, KERTÉSZ ANDOR [5] pedig azt igazolta, hogy J egybeesik az összes III. feltételű maximális jobbideál metszetével is. Ennek alapján kérdezte KERTÉSZ ANDOR, hogy a maximális jobbideálok III. feltételéből folyik-e a IV. feltétel, és szerző példával megmutatta, hogy nem következik.[2] Egyébként korábban KERTÉSZ ANDOR [3] definiált és vizsgált A gyűrű felett vett M A-jobbmodulusokban egy radikált, amelyet szerző *Kertész*-féle radikálnak nevezett el, és amely gyűrűk, mint önmaguk felett vett jobbmodulusok, esetében bizonyos mértékig hasonlít a gyűrű *Jacobson*-féle radikáljához. Az A gyűrű *Kertész*-féle radikálja egybeesik az összes II. feltételű (tehát homoperfekt) maximális jobbideál metszetével. Megoldva KERTÉSZ ANDOR [3] egy másik problémáját, szerző a [7] cikkben megadott olyan gyűrűket, amelyekben a *Kertész*-féle radikál különbözik a Jacobson-féle radikáltól. Szerző példái olyanok, hogy tartalmaznak homoperfekt, de nem kvázimoduláris maximális jobbideálokat.

Mármost STEINFELD OTTÓ szóbelileg említette szerzőnek azt, hogy ha R az A-ban kvázimoduláris maximális jobbideál, akkor minden olyan $a \in A$ elemhez, amelyre $a \notin R$ és minden $c \in A$ elemhez létezik olyan $b = b_{a,c} \in A$ elem, hogy teljesül

$$\text{(I)} \qquad c^2 - abc \in R,$$

azaz — e dolgozat elnevezéseivel — a maximális jobbideálok III. feltételéből folyik I. Ugyanis, ha K olyan jobbideál az A gyűrűben, amelyre $K \subsetneqq (R:A)_r$, és ha R kvázimoduláris maximális jobbideál A-ban, akkor $AK \subsetneqq R$ és $AK + R = A$. Továbbá $(R:A)_r \subseteq R$ és $(R:A)_l \supseteq R$ miatt $(R:A)_l = R$, tehát minden $a \in A$ és $a \notin R$ elemre $aA + R = A$. Eszerint mindegyik $c \in A$ elemhez létezik olyan $b \in A$ és $r \in R$ elempár, hogy $c = ab + r$, amiből $c^2 - abc \in R$, s ebből kifolyólag I. következik.

[2] Az A gyűrűben a P kétoldali ideál primitív (lásd JACOBSON [2]), ha létezik A-ban olyan R moduláris maximális jobbideál, amelyre $P = (R:A)_r$. Az A gyűrű J *Jacobson*-féle radikálja éppen az összes P_α primitív ideál metszete. Az A gyűrűben a Q kétoldali ideált kváziprimitívnek nevezzük (lásd [8]), ha létezik olyan R kvázimoduláris maximális jobbideál, amelyre $Q = (R:A)_r$. Nyilván minden primitív ideál egyszersmind kváziprimitív ideál is. Megoldva STEINFELD OTTÓ egy problémáját, a szerző [8] dolgozatában igazolta, hogy a J Jacobson-féle radikál egybeesik az összes kváziprimitív ideál metszetével. E dolgozatában azt kapta ugyanis, hogy ha R kvázimoduláris maximális jobbideál az A gyűrűben, akkor minden $x \notin R$, $x \in A$ elemre az $R_x = (R:x)_r$ ideálhányados moduláris maximális jobbideál. Ennek alapján igazolható, hogy ha R kvázimoduláris maximális jobbideál, akkor $(R:A)_r = ((R:x)_r:A)_r$, tehát minden kváziprimitív ideál primitív is (lásd STEINFELD OTTÓ [6] és szerző [10] dolgozatát).

Megjegyzendő, hogy I. nyilván teljesül bármely nilpotens A gyűrűnek, így minden $A^2=0$ feltételű gyűrűnek (ún. zérógyűrűnek) bármely maximális jobbideáljára. De nilpotens gyűrűben nincs kvázimoduláris valódi maximális jobbideál. STEINFELD OTTÓtól származik a kérdés, hogy nem nilpotens A gyűrűk R maximális jobbideáljának I. feltételéből következik-e a III. feltétel, azaz, hogy nem nilpotens gyűrűben a maximális jobbideálok *Steinfeld*-féle feltételéből folyik-e a kvázimodularitás.

Megadunk a nem nilpotens gyűrűk közt már jobbegységelemes véges gyűrűt is úgy, hogy egy maximális jobbideálra teljesül I., de nem teljesül a III. feltétel. Továbbá azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy az I. feltétel annyira enyhe, hogy I. minden gyűrű minden maximális jobbideáljára teljesül.

Ezért egy gyűrű összes I. feltételű maximális jobbideáljának a metszete éppen a gyűrűnek mint önmaga felett vett jobbmodulusnak a *Frattini*-féle részmodulusa (lásd ehhez még L. FUCHS [1] és A. KERTÉSZ [4] cikkeit).

TÉTEL. *Az I. feltétel minden A gyűrű minden R maximális jobbideáljára teljesül.*

Bizonyítás. Legyen A gyűrű és R az A maximális jobbideálja.

Ha $A^2\subseteqq R$, akkor $A^3\subseteqq R$, és így minden $a\in A$ és $c\in A$ elemhez van olyan $b=b_{a,c}\in A$ elem, hogy

$$c^2-abc\in R.$$

Tehát $A^2\subseteqq R$ esetén az I. feltétel teljesül.

Ha pedig $A^2\nsubseteqq R$, akkor teljes indukcióval igazolható, hogy $A^k+R=A$ minden $k\geqq 2$ természetes számra.

Ekkor R homoperfekt maximális jobbideál az A gyűrűben, és $(R:A)_l=R$. Tehát $a\notin R$ esetén mindig $aA+R=A$. Ennélfogva minden $c\in A$ elemre:

$$c^2\in Ac=(aA+R)c=aAc+Rc\subseteqq aAc+R.$$

Létezik tehát olyan $b=b_{a,c}\in A$ elem és olyan $r\in R$ elem, hogy $c^2=abc+r$, amiből a

$$c^2-abc\in R$$

állítás következik. Ismét teljesül tehát az I. feltétel az R maximális jobbideálra. Ezért az I. feltétel minden A gyűrű minden R maximális jobbideáljára teljesül.

Ezzel a tételt igazoltuk.

Az alábbi példa mutatja, hogy a jobbegységelemes (nem-nilpotens), négyelemű, nem-kommutatív gyűrű is olyan, hogy ennek egy maximális jobbideálja I. feltételű, de nem kvázimoduláris.

Ez a négyelemű gyűrű a következő: $A=\{0,x,y,x+y\}$, ahol $x+x=y+y==x^2=y^2+y=xy+x=yx=0$. Ebben az A gyűrűben az y elemmel generált $R=(y)_j$ főjobbideál, maximális jobbideál. Továbbá $R=(y)_j$ homoperfekt, mert $A^2=A$ miatt $A^2+(y)_j=A$ és $(y)_j$ nem kvázimoduláris, mert $A(x)_j=0\subseteqq(y)_j$, $A(y)_j=A\nsubseteqq(y)_j$ miatt $((y)_j:A)_r\nsubseteqq(y)_j$.

Közvetlenül is igazolható, hogy A-ban az $R=(y)_j$ főjobbideál I. feltételű. Ugyanis A-ban csak x és $x+y$ fekszenek az $R=(y)_j$ jobbideálon kívül.

1. Legyen először $a=x$ és $c=0$. Ekkor minden b elemre $c^2-abc=0\in R$.
2. Ha $a=x$ és $c=x$, akkor $b=x$ választásával $c^2-abc=x^2-x^3=0\in R$.
3. Ha $a=x$ és $c=y$, akkor $b=x$ választásával $c^2-abc=y^2-x^2y=y\in(y)_j=R$.

4. Ha $a=x$ és $c = x+y$, akkor $b=y$ választásával $c^2-abc = (x+y)^2-$ $-xy(x+y) = x+y-x = y\in(y)_j = R$.

5. Ha pedig $a = x+y$ és $c=0$, akkor $c^2-abc = 0\in R$.

6. Ha $a = x+y$ és $c=x$, akkor $b=x$ választásával $c^2-abc = x^2-(x+y)x^2 =$ $= 0\in R$.

7. Ha $a = x+y$ és $c=y$, akkor $b=x$ választásával $c^2-abc = y^2-(x+y)xy =$ $= y\in(y)_r = R$.

8. Végül, ha $a = x+y$ és $c = x+y$, akkor $b=y$ választásával $c^2-abc =$ $= (x+y)^2-(x+y)y(x+y) = x+y-x-y = 0\in R$.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] L. Fuchs: A remark on the Jacobson radical, *Acta Sci. Math. Szeged* **14** (1952) 167—168.

[2] N. Jacobson: Structure of rings, *Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Providenc* (1964).

[3] Kertész A.: Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, III. *MTA III. Oszt. Közl.* **9** (1959) 105—120.

[4] A. Kertész: A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14**:4 (1963) 595—597.

[5] A. Kertész: *Über Artinsche Ringe*, Akadémiai Kiadó, Budapest (sajtó alatt).

[6] O. Steinfeld: Eine Charakterisierung der primitiven Ideale eines Ringes, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* (sajtó alatt).

[7] Szász F.: Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról. *MTA III. Oszt. Közl.* **10** (1960) 35—38.

[8] F. Szász, Eine Charakterisierung des Jacobsonschen Radikales eines Ringes, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III., **15**:2 (1967) 53—56.

[9] F. Szász, Die Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (sajtó alatt).

[10] F. Szász, The sharpening of a result concerning primitive ideals of an associative ring, *Proc. Amer. Math. Soc.* (sajtó alatt).

(Beérkezett: 1967. VII. 6.)

ÜBER DIE MAXIMALEN RECHTSIDEALE DER RINGE

von

Ferenc Szász

Zusammenfassung

Unter einem Ring wird in dieser Arbeit stets ein assoziativer Ring verstanden. Bekanntlich spielen die maximalen Rechtsideale von gewissen Typ bei der Bildung des Jacobsonschen Radikales und ähnlicher Radikale eine wichtige Rolle.

In dieser Arbeit wird einerseits ein Übersicht über die maximalen Rechtsideale angegeben, andererseits ein wörtlich aufgeworfenes Problem von Otto Steinfeld bezüglich maximaler Rechtsideale eines Ringes gelöst. Es gilt nämlich der folgende.

Satz: *Jedes maximale Rechtsideal R eines beliebigen assoziativen Ringes A besitzt die Eigenschaft, daß ein Element $b=b_{a,c}\in A$ mit der Bedingung $c^2-abc\in R$ für jedes Element $a\notin R$ $(a\in A)$ und für jedes Element $c\in A$ existiert.*

Technikai szerkesztő: L. Ziermann Margit
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1967. VIII. 21. — Terjedelem: 7,50 (A/5) ív, 1 ábra

67-5756 — Szegedi Nyomda

Ára: 17,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

Index: 26498