A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VIII. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ · BUDAPEST

1958

NÉVMUTATÓ

TARTALOMJEGYZÉK

1. szám

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

2. szám

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

3. szám

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

4. szám

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VIII. KÖTET 1. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1958

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

VIII. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

GRÁFOKKAL KAPCSOLATOS MAXIMUM—MINIMUM TÉTELEK

(II. RÉSZ)

GALLAI TIBOR (Budapest)

6. §.*

6. 1. Tetszőleges zárt láncokra vonatkozó maximum—minimum tétel

(6. 1. 1). A Γ gráf pontjain és alapélein legyenek értelmezve az egész értékű $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvények. A p pontláncot *á-lefogónak* mondjuk, ha minden (nemcsak pozitív) zárt g láncra $|p, g| \geqq \psi(g)$.

Az *á*-lefogó pozitív pontláncok halmazát $\tilde{P}_l$-vel jelöljük. (4. 1. 13)-hoz hasonlóan kimondhatjuk, hogy $\tilde{P}_l$ nem üres.

Az elférő zárt láncok halmazát $\tilde{G}_e$-vel jelöljük. Ha minden X-re $\varphi(X) \geqq 0$, akkor $g = 0$ elférő volta biztosítja, hogy $\tilde{G}_e$ nem üres.

(6. 1. 2). TÉTEL: *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{g \in \tilde{G}_e} \psi(g) = \min_{p \in \tilde{P}_l} \varphi(p).$$

BIZONYÍTÁS: (I). Γ-ból új alapélek csatolásával egy Γ' gráfot értelmezünk. [Vesd össze [1] 217. o. és [5] 211. o.-lal.] Γ' pontjai azonosak Γ pontjaival. Γ minden alapéle Γ'-nek is alapéle változatlan kezdő- és végponttal. Γ bármely x alapéléhez egy új $\bar{x}$ alapélt rendelünk oly módon, hogy ha x kezdő- és végpontja Y, ill. Z, akkor $\bar{x}$ kezdő- és végpontja Z, ill. Y legyen. Az új alapélek halmazának nincs közös eleme Γ éleinek halmazával, és e két egyenlő számosságú halmaz egyesített halmaza adja Γ' éleinek halmazát.

A ψ függvény értelmét a $\psi(\bar{x}) = -\psi(x)$ egyenlettel az új alapélekre is kiterjesztjük.

* A dolgozat első része a MTA III. Osztálya Közleményei VII/3—4. számában található (305—338. o.). A 35. oldalon terminológiajegyzéket közlünk.

Felhívjuk a figyelmet a **11.** §-t követő „Kiegészítés"-re. Ebben a (4. 1. 16), ill. az (1. 2) TÉTELre az I. részben közöltnél lényegesen egyszerűbb bizonyítást adunk, s egyben utalunk arra is, hogy a **7.**, **8.** és **11.** § tételeinek igazolásai is lényegesen egyszerűsíthetők, ill., hogy e bizonyítások a (4. 1. 16) TÉTELre adott új bizonyítással részben összevonva is elvégezhetők.

Értelmezéseinkből következik, hogy ha $\bar{x}$ a tetszőleges x alapélhez rendelt új élt jelenti és X tetszőleges pont, akkor $(\bar{x}, X) = -(x, X)$ és $|\bar{x}, X| = |x, X|$.

(II). A Γ-hoz tartozó tetszőleges f lánchoz egy Γ'-höz tartozó *pozitív* f' láncot rendelünk: Legyen x Γ-nak tetszőleges alapéle, $\bar{x}$ az ehhez rendelt új él. Ha $f(x) \geqq 0$, akkor legyen $f'(x) = f(x)$ és $f'(\bar{x}) = 0$, ha $f(x) < 0$, akkor legyen $f'(x) = 0$ és $f'(\bar{x}) = -f(x)$.

Értelmezésünkből következik, hogy bármely összetartozó x és $\bar{x}$ élpárra és bármelyik X pontra

$$f'(x)\psi(x) + f'(\bar{x})\psi(\bar{x}) = f(x)\psi(x),$$
$$f'(x)(x, X) + f'(\bar{x})(\bar{x}, X) = f(x)(x, X),$$
$$f'(x)|x, X| + f'(\bar{x})|\bar{x}, X| = |f(x)|\,|x, X|.$$

Ezekből az összefüggésekből adódik, hogy $\psi(f') = \psi(f)$, minden X-re $(f', X) = (f, X)$ és $|f', X| = |f, X|$, végül bármilyen p pontláncra (a Γ-hoz tartozó pontláncok Γ'-nek is pontláncai, és megfordítva)

$$|p, f'| = \Sigma |p(X)|\,|f', X| = \Sigma |p(X)|\,|f, X| = |p, f|.$$

Ezek szerint, ha f zárt, ill. elférő, akkor f' is az. Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy ha P'_l-vel jelöljük a Γ'-höz tartozó pozitív lefogó pontláncok halmazát, akkor ha $p \in P'_l$, úgy $p \in \tilde{P}_l$.

Ha a Γ'-höz tartozó pozitív zárt elférő láncok halmazát G'_e-vel jelöljük, akkor megállapításainkból a következő két egyenlőtlenség írható fel:

$$(*) \qquad \min_{p \in \tilde{P}_l} \varphi(p) \leqq \min_{p \in P'_l} \varphi(p), \qquad \max_{g \in \tilde{G}_e} \psi(g) \leqq \max_{g' \in G'_e} \psi(g').$$

(III). A Γ'-höz tartozó tetszőleges *pozitív* f' lánchoz egy Γ-hoz tartozó f láncot rendelünk: Legyen x tetszőleges alapéle Γ-nak, $\bar{x}$ pedig az ehhez rendelt új él. Legyen $f(x) = f'(x) - f'(\bar{x})$.

Értelmezésünkből, valamint az (I) alattiakból következik, hogy bármely összetartozó x és $\bar{x}$ élpárra és bármelyik X pontra

$$f(x)\psi(x) = f'(x)\psi(x) + f'(\bar{x})\psi(\bar{x}),$$
$$f(x)(x, X) = f'(x)(x, X) + f'(\bar{x})(\bar{x}, X),$$
$$|f(x)|\,|x, X| \leqq |f'(x)|\,|x, X| + |f'(\bar{x})|\,|\bar{x}, X|.$$

Ezekből következik, hogy $\psi(f) = \psi(f')$, minden X-re $(f, X) = (f', X)$ és $|f, X| \leqq |f', X|$, végül bármely p pontláncra

$$|p, f| = \Sigma |p(X)|\,|f, X| \leqq \Sigma |p(X)|\,|f', X| = |p, f'|.$$

E szerint, ha f' zárt, ill. elférő, akkor f is az. Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy ha $p \in \tilde{P}_l$, akkor $p \in P'_l$.

Megállapításainkból felírható a következő két egyenlőtlenség:

$$\min_{p\in\tilde P_l} \varphi(p) \geqq \min_{p\in P_l'} \varphi(p), \qquad \max_{g\in\tilde G_e} \psi(g) \geqq \max_{g'\in G_e'} \psi(g').$$

Ezekből, (*)-ból, valamint a (4. 1. 16) TÉTELből következik a bizonyítandó tétel helyessége.

6. 2. Általánosított körláncok és körrendszerek

(6. 2. 1). Az **5.** §-hoz hasonlóan a (6. 1. 2) TÉTELből általánosabb értelemben vett körláncokra, ill. körrendszerekre vonatkozó tétel nyerhető.

Jelöljük Γ köreinek halmazát $\check K$-val. Általánosított körláncon, röviden *á-körláncon* bármely, a $\check K$ halmazon értelmezett nem negatív egész értékű $\tilde z(k)$ függvényt értünk. A $|\tilde z, X|$, $\psi(\tilde z)$ jeleket az (5. 1) alattiaknak megfelelően értelmezzük. $\tilde z$ elférő, ha minden X-re $|\tilde z, X| \leqq \varphi(X)$. Az elférő *á*-körláncok halmazát $\tilde L_e$-vel jelöljük.

A p pontlánc *á-körlefogó,* ha $\check K$ bármely k elemére $|p, k| \geqq \psi(k)$.

Nyilvánvaló, hogy ha p *á*-lefogó, akkor *á*-körlefogó is. (4. 1. 12)-höz hasonlóan belátható ennek fordítottja. Ezek szerint az *á*-körlefogó pontláncok halmaza azonos $\tilde P_l$-lel.

Az **5.** §-ban alkalmazott eljárással a (6. 1. 2) TÉTELből a következő tétel adódik:

(6. 2. 2). TÉTEL: *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{\tilde z\in\tilde L_e} \psi(\tilde z) = \min_{p\in\tilde P_l} \varphi(p).$$

(6. 2. 3). A (6. 2. 2) TÉTEL, a bevezetésben közölt tételekhez hasonlóan láncfogalom nélkül is kimondható:

A Γ gráfban legyenek értelmezve a $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ egész értékű függvények. Γ egy *tetszőleges* irányított k körének $\psi(k)$ értékén az éleihez rendelt ψ értékek megfelelő előjellel vett összegét értjük. Az összegezésnél egy él értékét $+$ vagy — jellel kell venni aszerint, hogy k befutásának iránya a tekintett él irányításával megegyezik, vagy azzal ellentétes.

A köröknek egy $\tilde z = (k_1, \ldots, k_n)$ sorozatát *á-körrendszernek* nevezzük. (Ugyanaz a kör többször is szerepelhet; a körök sorrendje mellékes; az üres sorozatot is *á*-körrendszernek tekintjük.)

Egy $\tilde z$ *á*-körrendszer $\psi(\tilde z)$ értékét, valamint $\tilde z$ elférő voltát az (1. 1) alattiaknak megfelelően értelmezzük. Egy $\pi = (X_1, \ldots, X_n)$ pontrendszer *á-lefogó,* ha bármely k kört is vizsgálunk, $X_1, \ldots, X_n$ közül a k körön elhelyezkedők száma nagyobb, vagy egyenlő $\psi(k)$-nál.

Az elférő $\tilde{a}$-körrendszerek halmazát $\tilde{\Lambda}_e$-vel, az $\tilde{a}$-lefogó pontrendszerek halmazát $\tilde{\Pi}_l$-lel jelöljük.

Az (5. 4) alattiakhoz hasonlóan belátható, hogy a (6. 2. 2) TÉTEL lényegében azonos a következő tétellel:

(6. 2. 4). TÉTEL: *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{\tilde{\varkappa} \in \tilde{\Lambda}_e} \psi(\tilde{\varkappa}) = \min_{\pi \in \tilde{\Pi}_l} \varphi(\pi).$$

7. §.

7. 1. Lefogó láncok és az ezekkel kapcsolatos kitérők

A **7. 1—7. 3** pontokban az (1. 3) TÉTEL bizonyításához szükséges fogalmakat és segédtételeket tárgyalunk.

(7. 1. 1). A Γ gráf pontjain legyen értelmezve a $\varphi(X)$ egészértékű függvény. Egy f láncot *lefogónak* nevezünk, ha minden X-re $|f, X| \geqq \varphi(X)$.

Legyen a a **7. 1** pontban rögzített tetszőleges lefogó lánc. E szerint minden X-re $|a, X| \geqq \varphi(X)$.

A c láncot φ és a-hoz tartozó *lUV-kitérőnek*, röviden lUV-kitérőnek nevezzük, ha (1) c UV-lánc, (2) $a(a+c) \geqq 0$, (3) minden X-re $|a+c, X| \geqq \varphi(X)-(X, U)-(X, V)$.

Értelmezésünk szerint $c=0$ lUU-kitérő (U tetszőleges pont).

A c láncot φ és a-hoz tartozó *zárt l-kitérőnek*, röviden zárt l-kitérőnek nevezzük, ha (1′) c zárt lánc, (2′) $a(a+c) \geqq 0$, (3′) minden X-re $|a+c, X| \geqq \varphi(X)$.

Értelmezésünk szerint a $c=0$ lánc zárt l-kitérő.

A $\tilde{c}$ lánc a c lUV-kitérő *elhagyható része*, ha $\tilde{c}$ zárt kitérő, $\tilde{c} \neq 0$, $\tilde{c} \subset c$, $c-\tilde{c}$ lUV-kitérő.

Értelmezésünk szerint, ha a c lUV-kitérő egyben zárt kitérő és $c \neq 0$, akkor maga c is elhagyható része c-nek.

Egy lUV-kitérő *primitív*, ha nincs elhagyható része.

Egy c lUV-kitérő egy *kanonikus* UV-bejárásán c-nek egy olyan $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ UV-bejárását értjük, amelyhez tartozó $c_{ij} = \sum_{l=i+1}^{j} e_l$ részlánc lX_iX_j-kitérő minden szóbajövő i, j indexpárra. A $c=0$ lUU-kitérőnél a $\xi=0$ vonalat kanonikus UU-bejárásnak tekintjük.

(7. 1. 2). LEMMA: *Ha a c lUV-kitérő primitív, akkor létezik kanonikus bejárása.*

A bizonyítást a **3. 2** LEMMÁra való visszavezetéssel végezzük el.

(I). Legyen c tetszőleges IUV-kitérő. Tekintsük az $a' = a+c$ és $c' = -c$ láncokat. Ekkor $a = a'+c'$, $c = -c'$.

A gráf pontjainak halmazán egy $\varphi'(X)$ függvényt értelmezünk:

$$(*)\qquad \varphi'(X) = \max\{|a', X|, |a'+c', X| - (X, U) - (X, V)\}.$$

Mivel $|a', X| \geq 0$, azért minden X-re $\varphi'(X) \geq 0$.

Minden X-re $|a', X| \leqq \varphi'(X)$. Másszóval az a' lánc a φ' függvényt tekintve elférő.

(II). c' a φ' és a'-höz tartozó VU-kitérő.

Állításunk bizonyításához vegyük figyelembe, hogy (2. 5. 7) miatt c' VU-lánc. $a'(a'+c') = (a+c)a \geq 0$. $(*)$ alapján minden X-re $|a'+c', X| \leq \varphi'(X)+(X, U)+(X, V)$.

(III). Ha $\bar{c}' \subset c'$ és $\bar{c}'$ φ' és a'-höz tartozó ZY-kitérő, akkor $\bar{c} = -\bar{c}'$ IYZ-kitérő és $\bar{c} \subset c$.

Állításunkat az alábbiakban bizonyitjuk: $\bar{c} \subset c$, mert $\bar{c}c = \bar{c}'c' \geq 0$ és $|\bar{c}| = |\bar{c}'| \leqq |c'| = |c|$. $\bar{c}$ YZ-lánc. $a(a+c) \geqq 0$ és $\bar{c} \subset c$-ből (2. 2. 9) alapján következik, hogy $a(a+\bar{c}) \leqq 0$.

Igazolnunk kell még, hogy minden X-re $|a+\bar{c}, X| + (X, Y) + (X, Z) \geqq \varphi(X)$.

Ha az $|a, X| \leqq \varphi(X)$, ill. a (7. 1. 1) (3)-ból származó $|a'+c', X| \leqq \varphi(X)$, ill. $|a', X| + (X, U)+(X, V) \leqq \varphi(X)$ egyenlőtlenségeket figyelembe vesszük, akkor elég igazolni, hogy minden X-re az

$$(1)\qquad |a'+c'-\bar{c}', X| + (X, Y)+(X, Z) \geq |a'+c', X|,$$

$$(2)\qquad |a'+c'-\bar{c}', X| + (X, Y)+(X, Z) \geq |a', X| + (X, U)+(X, V)$$

egyenlőtlenségek egyike fennáll. $\bar{c}'$-re tett kikötéseink miatt minden X-re igaz az alábbi egyenlőtlenségek egyike:

$$(1')\qquad |a'+\bar{c}', X| - (X, Y)-(X, Z) \leq |a', X|,$$

$$(2')\qquad |a'+\bar{c}', X| - (X, Y)-(X, Z) \leq |a'+c', X| - (X, U)-(X, V).$$

Mivel (2. 4. 11) szerint

$$|a'+c', X| - |a'+c'-\bar{c}', X| = |a'+\bar{c}', X| - |a', X|$$

és

$$|a'+c', X| - |a'+\bar{c}', X| = |a'+c'-\bar{c}', X| - |a', X|,$$

azért (1')-ből (1), (2')-ből pedig (2) következik.

(IV). Ha $\bar{c}' \subset c'$ és $\bar{c}'$ φ'- és a'-höz tartozó zárt kitérő, akkor $\bar{c} = -\bar{c}'$ zárt I-kitérő és $\bar{c} \subset c$.

Állításunk bizonyitását (III) mintájára végezhetjük el, csak (X, Y) és (X, Z) helyére kell mindenütt zérust tenni.

(V). A (III) és (IV) állításokból könnyen belátható, hogy ha $\tilde{c}'$ c'-nek elhagyható része, akkor $\tilde{c} = -\tilde{c}'$ c-nek elhagyható része. Ebből következik az a megállapítás, hogy ha c primitív, akkor c' is az. (III)-ból azt is könnyen igazolhatjuk, hogy ha $\xi' = (X_0' e_1' X_1' \dots X_{n-1}' e_n' X_n')$ c'-nek egy kanonikus VU-bejárása, akkor az $X_i = X_{n-i}'$ $(i = 0, \dots, n)$, $e_i = -e_{n+1-i}'$ $(i = 1, \dots, n)$ jelöléseket használva $\xi = (X_0 e_1 X_1 \dots X_{n-1} e_n X_n)$ c-nek egy kanonikus UV-bejárása.

Az elmondottak alapján **3. 2**-ből egyszerűen belátható lemmánk állítása.

7. 2. Általánosított kitérők. Csatolási tételek

(7. 2. 1). A **7. §** további részében feltesszük, hogy az a lánc pozitív, azaz hogy $a \geqq 0$.

Miután a **7. §** további részében szereplő kitérők mind l-kitérők, éspedig mind b-irányú l-kitérők [(3. 1. 8)], a továbbiakban b-irányú l-kitérő helyett röviden kitérőt mondunk.

Az $a \geqq 0$ kikötés miatt az

$$(2'') \qquad a + c \geqq 0$$

feltétel egyenértékű az $a(a+c) \geqq 0$ egyenlőtlenség és a c lánc b-irányú voltának egyidejű fennállásával. Egy lánc kitérő voltának igazolásához a következőkben mindig a (7. 1. 1) alatti (1) és (3), ill. (1′) és (3′), valamint (2″) fennállását bizonyítjuk.

(7. 2. 2). Egyszerűen belátható a következő állítás:

Ha c UV-kitérő, akkor $c = c' + \sum_{i=1}^{n} c_i$, ahol c' primitív UV-kitérő, c_i pedig zárt kitérő $(i = 1, \dots, n)$.

A d UV-láncot *általánosított UV-kitérőnek* (röviden ált. UV-kitérő) nevezzük, ha $d = c + \sum_{i=1}^{n} c_i$, ahol c UV-kitérő, c_i pedig zárt kitérő $(i = 1, \dots, n)$.

Egyszerűen belátható az alábbi két állítás:

Ha d ált. UV-kitérő és c_i zárt kitérő $(i = 1, \dots, n)$, akkor $d' = d + \sum_{i=1}^{n} c_i$ ált. UV-kitérő.

Ha d ált. UV-kitérő, akkor $d = c' + \sum_{i=1}^{n} c_i$, ahol c' primitív UV-kitérő, c_i zárt kitérő $(i = 1, \dots, n)$.

(7. 2. 3). *Ha c UV-kitérő és az f $U'U$-pályára $f \neq 0$ és $f \geqq 0$, akkor $c' = f + c$ $U'V$-kitérő és $|a + c', U'| = \varphi(U') - (U', V) + 1/2$.*

Bizonyítás: c' $U'V$-lánc. $a+c' = a+f+c \geqq 0$, mert $a+c \geqq 0$ és $f \geqq 0$. Mivel $|a+c, X| \geqq \varphi(X)-(X, U)-(X, V)$ és $|f, X| \geqq (X, U')+(X, U)$, azért

$$|a+c', X| = |a+c, X|+|f, X| \geqq \varphi(X)-(X, V)+(X, U').$$

Az elmondottakból következik állításunk.

(7. 2. 4). *Ha a c UV-kitérőre $|a+c, U| \geqq \varphi(U)-(U, V)+1/2$, továbbá az $e = U'U$ $\tilde{a}$-élre $(c, e) \leqq 0$, akkor $c' = e+c$ $U'V$-kitérő.*

Bizonyítás: c' $U'V$-lánc. Ha $e(x) = 0$, akkor $a+c \geqq 0$-ból $a(x)+c'(x) \geqq 0$ következik. Ha x alapéle e-nek, akkor $e(x) = -1$, $a(x) = 1$, $c(x) \geqq 0$, tehát ekkor is $a(x)+c'(x) \geqq 0$. E szerint $a+c' \geqq 0$.

Ha $X \neq U, X \neq U'$, akkor $|a+c', X| = |a+c, X| \geqq \varphi(X)-(X, V)$.

$$|a+c', U'| = |a+c, U'|-\frac{1}{2} \geqq \varphi(U')-(U', V)-(U', U').$$

$$|a+c', U| = |a+c, U|-\frac{1}{2} \geqq \varphi(U)-(U, V).$$

(7. 2. 5). *Ha c primitív UV-kitérő és f olyan $U'U$-pálya, melyre $f \neq 0$ és $f \geqq 0$, továbbá ha $e = U''U'$ egy $\tilde{a}$-él, akkor $d = e+f+c$ ált. $U''V$-kitérő.*

Bizonyítás: Ha $(c, e) \leqq 0$, akkor (7. 2. 3) és (7. 2. 4) alapján igaz a tétel. Tegyük fel, hogy $(c, e) > 0$. Ekkor $c \neq 0$. Legyen $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ c-nek egy kanonikus UV-bejárása. Feltevésünk szerint van olyan k index $(1 \leqq k \leqq n)$, melyre $e_k = e$. Ekkor $X_{k-1} = U''$, $X_k = U'$.

c_{0k} UU'-kitérő, s így (7. 2. 3) szerint $\bar{c} = f+c_{0k}$ olyan $U'U'$-kitérő, melyre $|a+\bar{c}, U'| \geqq \varphi(U')-(U', U')+1/2 = \varphi(U')$. E szerint $\bar{c}$ zárt kitérő.

$c_{k-1\,n}$ $U''V$-kitérő. Ennek alapján látható, hogy

$$d = e_k+f+c_{0\,k-1}+c_{k-1\,n} = f+c_{0k}+c_{k-1\,n} = \bar{c}+c_{k-1\,n}$$

valóban ált. $U''V$-kitérő.

(7. 2. 6). *Ha c primitív UV-kitérő és $|a, U| \geqq \varphi(U)+1$, akkor $|c, U| \leqq 1/2$ és $|a+c, U| \geqq \varphi(U)+1/2$.*

Bizonyítás: Tekintsük c-nek egy $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ kanonikus UV-bejárását. Ha $|c, U| > 1/2$ volna, akkor van olyan k index, melyre $0 < k \leqq n$ és $X_k = U$. Legyen az ilyen k indexek közül a legkisebbik j. Ekkor $X_j = U$ és $|c_{0j}, U| = 1$. Ezért

$$|a+c_{0j}, U| \geqq |a, U|-|c_{0j}, U| \geqq \varphi(U).$$

A c_{0j} UX_j-kitérő tehát zárt kitérő. c_{jn} kitérő volta, valamint $c_{0j} \neq 0$ miatt c_{0j} c-nek elhagyható része. Ez ellentmond c primitív voltának.

Ha $|c, U| \leqq 1/2$, akkor $|a+c, U| \geqq |a, U|-|c, U| \geqq \varphi(U)+1/2$.

(7. 2. 7). *Ha az a lánc zárt, c primitív UV-kitérő, $|a, U| > \varphi(U)$ és $e = U'U$ $\tilde{a}$-él, akkor $c' = e + c$ $U'V$-kitérő.*

BIZONYÍTÁS: Miután a zárt (2. 5. 4) szerint $|a, U|$ egész szám. Ezért $|a, U| > \varphi(U)$-ból $|a, U| \geqq \varphi(U) + 1$ következik. Alkalmazhatjuk tehát a (7. 2. 6) tételt. E szerint $|c, U| \leqq 1/2$.

Igazoljuk, hogy $(c, e) \leqq 0$. Ha ugyanis $(c, e) > 0$ volna, akkor $c \neq 0$ és c-nek egy $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ UV-bejárásánál van olyan k index, melyre $e_k = e = U'U$. Mivel $e_1 = UX_1$, azért látható, hogy $|c, U| \geqq 1$, s ez ellentmond $|c, U| \leqq 1/2$-nek.

(7. 2. 6) szerint $|a + c, U| \geqq \varphi(U) + 1/2$, s így a (7. 2. 4) tételből nyerjük (7. 2. 7) igazolását.

7. 3. Elférő pontláncok

(7. 3. 1). Legyen értelmezve a gráf alapéleinek halmazán egy $\psi(x)$ egész értékű függvény.

A p pontlánc *elférő*, ha bármely pozitív zárt g láncra $|p, g| \leqq \psi(g)$.

Miután minden esetben $|p, g| \geqq 0$, elférő pontlánc csak akkor létezhet, ha minden pozitív zárt g láncra $\psi(g) \geqq 0$. Amennyiben ez a feltétel teljesül a $p = 0$ pontlánc elférő, s ekkor a pozitív elférő pontláncok halmaza — ezt P_e-vel jelöljük — nem üres.

A **2. 6** alattiak segítségével könnyen igazolható a következő három állítás.

(7. 3. 2). *Ha bármely pozitív k körre $\psi(k) \geqq 0$, akkor minden pozitív zárt g láncra $\psi(g) \geqq 0$.*

(7. 3. 3). *Ha bármely pozitív k körre $|p, k| \leqq \psi(k)$, akkor p elférő.*

(7. 3. 4). *Ahhoz, hogy a lefogó pozitív zárt láncok halmaza — ezt G_l-lel jelöljük — ne legyen üres, szükséges és elegendő, hogy minden pozitív értékű ponton át haladjon pozitív (nem azonosan zérus) kör.*

(7. 3. 5). *Ha $g \in G_l$ és $p \in P_e$, akkor $\psi(g) \geqq \varphi(p)$.*

BIZONYÍTÁS: Mivel $p \geqq 0$, azért $|g, X| \geqq \varphi(X)$-ből $p(X)|g, X| \geqq p(X)\varphi(X)$ következik. Ennélfogva

$$\psi(g) \geqq |p, g| = \Sigma\, p(X)|g, X| \geqq \Sigma\, p(X)\varphi(X) = \varphi(p).$$

(7. 3. 5)-ből következik az alábbi állítás:

(7. 3. 6). *Feltéve, hogy G_l és P_e nem üres*

$$\min_{g \in G_l} \psi(g) \geqq \max_{p \in P_e} \varphi(p).$$

A **7. 4** pontban az alábbi tételt igazoljuk:

(7. 3. 7). TÉTEL: *Feltéve, hogy minden pozitív zárt lánc értéke nem negatív, valamint, hogy G_l nem üres*

$$\min_{g \in G_l} \psi(g) = \max_{p \in P_e} \varphi(p).$$

7. 4. A (7. 3. 7) tétel bizonyítása

(7. 4. 1). A **7. 4** pontban feltesszük, hogy minden pozitív zárt g láncra $\psi(g) \geq 0$, valamint, hogy van pozitív zárt lefogó lánc. Ekkor létezik a

$$\min_{g \in G_l} \psi(g) = \mu$$

érték.

A **7. 4** és **7. 5** pontokban jelentsen a egy olyan pozitív zárt lefogó láncot, melyre $\psi(a) = \mu$.

A (7. 3. 7) TÉTELt bebizonyítjuk, ha kimutatjuk egy olyan elférő q pontlánc létezését, melyre $\varphi(q) = \psi(a)$. Egy ilyen q pontláncot az a lánchoz tartozó kitérők segítségével szerkesztünk meg.

(7. 4. 2). *Ha c zárt kitérő, akkor $\psi(c) \geq 0$.*

BIZONYÍTÁS: Az a lánc és a kitérők értelmezése folytán $a + c \in G_l$. Ezért $\psi(a) + \psi(c) = \psi(a+c) \geq \mu$, tehát $\psi(c) \geq 0$.

A (7. 2. 2) alattiakból és (7. 4. 2)-ből következik az alábbi állítás:

(7. 4. 3). *Ha d ált. UV-kitérő, akkor létezik olyan c primitív UV-kitérő, melyre $\psi(c) \leq \psi(d)$.*

(7. 4. 4). *Az általánosított kitérőkhöz tartozó értékek halmaza alulról korlátos.*

BIZONYÍTÁS: (4. 2. 8) jelöléseit megtartva könnyen belátható, hogy a gráf bármely f ívére (tehát körére is) $|\psi(f)| \leq v_T \psi_m$.

Bevezetjük a következő jelölést: $\max_{x \in \Psi} a(x) = \alpha$.

Legyen c tetszőleges UV-kitérő. (2. 5. 20) és (2. 5. 19) szerint $c = f + \sum_{i=1}^{n} k_i$, ahol f UV-ív, k_i kör, és $f \subset c$, $k_i \subset c$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Ha k_i pozitív, akkor $\psi(k_i) \geq 0$. Ha k_i nem pozitív, azaz van olyan x, melyre $k_i(x) < 0$, akkor ugyanezen x-re $c(x) < 0$. $a + c \geq 0$-ból egy ilyen x-re $a(x) > 0$ és $|c(x)| \leq |a(x)| \leq \alpha$ következik. Ezekből egyrészt látható, hogy ugyanazon az x alapélen legfeljebb α számú k_i kör vehet fel negatív értéket, másrészt megállapítható, hogy azon x-ek száma, amelyeken valamelyik k_i

negatív, kisebb vagy egyenlő mint a éleinek száma $[r(a)]$. Kimondhatjuk tehát, hogy a nem pozitív k_i körök száma kisebb vagy egyenlő mint $\alpha r(a)$.

A fentiek alapján

$$\psi(c) = \psi(f) + \sum_{i=1}^{n} \psi(k_i) \geqq - r_T \psi_m - \alpha r(a) r_T \psi_m = -\beta.$$

Ha d tetszőleges ált. UV-kitérő, akkor (7. 4. 3) szerint van olyan c UV-kitérő, melyre $\psi(d) \geqq \psi(c)$. Ennélfogva $\psi(d) \geqq -\beta$.

(7. 4. 5). Legyen X egy tetszőleges a-pont és jelöljük $H(X)$-szel valamennyi ált. XV-kitérő halmazát (V tetszőleges). A $c = 0$ XX-kitérőre tekintettel $H(X)$ nem üres. Legyen

$$s(X) = \min_{d \in H(X)} \psi(d).$$

(7. 4. 4) szerint $s(X)$ véges érték. A $c = 0$ kitérőre való tekintettel $s(X) \leqq 0$.

(7. 4. 3)-ból belátható az alábbi állítás:

(7. 4. 6). *Ha X a-pont, úgy létezik olyan c primitív XV-kitevő, melyre $\psi(c) = s(X)$.*

(7. 4. 7). *Ha X és Y a-pontok, és f olyan $X'Y$-pálya, melyre $f \neq 0$ és $f \geqq 0$, továbbá az f' XX'-pálya vagy zérussal, vagy pedig egy $\tilde{a}$-éllel azonos, akkor*

$$s(X) \leqq \psi(f') + \psi(f) + s(Y).$$

Bizonyítás: Van olyan c primitív YV-kitérő, melyre $\psi(c) = s(Y)$. (7. 2. 3) és (7. 2. 5) szerint, ekkor $d = f' + f + c$ ált. XV-kitérő. Ezért $\psi(f') + \psi(f) + \psi(c) = \psi(d) \geqq s(X)$.

A (7. 4. 7) tételből (4. 3. 4) mintájára könnyen belátható a következő állítás.

(7. 4. 8). *Ha $e = XY$ és $e' = XY'$ két a-él, akkor*

$$s(Y) + \psi(e) = s(Y') + \psi(e').$$

(7. 4. 9). A $q(X)$ pontláncot a következőképpen értelmezzük:

(1). Ha X a-pont, akkor (2. 5. 6) szerint van $e = XY$ a-él. Ekkor legyen

$$q(X) = s(Y) - s(X) + \psi(e).$$

(7. 4. 8) szerint $q(X)$ nem függ az e él megválasztásától.

(2). Ha X b-pont, azaz ha $|a, X| = 0$ (ebben az esetben csak $q(X) \leqq 0$ állhat fenn), akkor legyen $q(X) = 0$.

(7. 4. 7)-ből (4. 3. 7) mintájára könnyen igazolható, hogy *a q pontlánc pozitív.*

(7. 4. 9)-ből könnyen belátható az alábbi állítás:

(7. 4. 10). *Legyen az f UV-út egy a-pálya és legyen $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ f-nek UV-bejárása, végül legyen $e = VW$ egy a-él, akkor*

$$\sum_{i=0}^{n} q(X_i) = s(W) - s(U) + \psi(f) + \psi(e).$$

Megjegyzés: A tétel állítása az $f = 0$ esetben is igaz, ha az $f = 0$ lánc egyetlen pontjának az $X_0 = U = V$ a-pontot tekintjük.

(7. 4. 10)-ből (4. 3. 9) mintájára belátható a következő állítás:

(7. 4. 11). *Ha a k kör a-pálya, akkor* $|q, k| = \psi(k)$.

(7. 4. 12). *A q pontlánc elférő.*

Bizonyítás: (7. 3. 3)-ra való tekintettel elég megmutatni, hogy ha k tetszőleges pozitív kör, akkor $|q, k| \leqq \psi(k)$.

Legyen k tetszőleges pozitív kör. (7. 4. 1) szerint $\psi(k) \geqq 0$.

(I). Ha k nem tartalmaz a-pontot, akkor minden k-hoz tartozó X pontra $q(X) = 0$, s így $|q, k| = \Sigma |q(X)| |k, X| = 0 \leqq \psi(k)$.

Ha k a-pálya, akkor (7. 4. 11) szerint igaz a bizonyítandó állítás.

(II). Az (I) alatti eseteket kizárva feltehetjük, hogy $k \neq 0$, k tartalmaz a-pontot, és k vagy csupa b-élből áll, vagy tartalmaz a-élt is és b-élt is.

A továbbiakban pontosan a (4. 3. 10) (II) alattiak mintájára járhatunk el, egészen az a_i pontjaihoz tartozó $q(X)$ értékek összegének megadásáig. Most

$$q_i = s(C_i) - s(A_i) + \psi(a_i) + \psi(e_i').$$

Változatlanul fennáll a $|q, k| = \Sigma q_i$ egyenlőség. A $|q, k| \leqq \psi(k)$ egyenlőtlenség igazolásához a

$$(*) \qquad \Sigma s(C_i) \leqq -\Sigma \psi(e_i') + \Sigma \psi(b_i) + \Sigma s(A_i)$$

egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk. Hogy ezt beláthassuk, vegyük tekintetbe, hogy $-e_i' = C_i A_i$ egy $\tilde{a}$-él, továbbá, hogy a b_i $A_i' A_{i+1}$-pályára $b_i \neq 0$ és $b_i \geqq 0$. Ezért (7. 4. 7) szerint

$$s(C_i) \leqq -\psi(e_i') + \psi(b_i) + s(A_{i+1}).$$

Ha ezeket az egyenlőtlenségeket $i = 1$-től m-ig összegezzük, a $(*)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ezzel (7. 4. 12) bizonyítását befejeztük.

(7. 4. 6) és (7. 2. 7)-ből (4. 3. 11) mintájára igazolható az alábbi állítás:

(7. 4. 13). *Ha X a-pont és $|a, X| > \varphi(X)$, akkor* $q(X) = 0$. Ebből következik:

(7. 4. 14). *Ha X a-pont és $q(X) > 0$, akkor* $|a, X| = \varphi(X)$.

(7. 4. 14) és (7. 4. 11)-ből (4. 3. 13) mintájára igazolható, hogy

$$\varphi(q) = \psi(a).$$

(7. 4. 1) szerint ezzel befejeztük a (7. 3. 7) TÉTEL bizonyítását.

7. 5. Lefogó körláncok

Ebben a pontban az **5. §**-ban foglaltakhoz hasonlóan a (7. 3. 7) TÉTELnek körláncokra, ill. körrendszerekre vonatkozó megfelelőjét bizonyitjuk.

(7. 5. 1). A z körláncot *lefogónak* mondjuk, ha minden X-re $|z, X| \geq \varphi(X)$.

A lefogó körláncok halmazát A_l-lel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy A_l és G_l egyidejűleg üresek, ill, nem üresek.

(5. 2) mintájára igazolható, hogy ha A_l és G_l nem üresek, akkor

$$\min_{z \in A_l} \psi(z) = \min_{g \in G_l} \psi(g).$$

Ebből, valamint (7. 3. 2), (7. 3. 3), (7. 3. 4) és (7. 3. 7)-ből következik az alábbi tétel:

(7. 5. 2). TÉTEL: *Ha minden pozitív értékű ponton át halad pozitív nem azonosan zérus kör és minden pozitív k körre $\psi(k) > 0$, akkor*

$$\min_{z \in A_l} \psi(z) = \max_{p \in P_v} \varphi(p).$$

Az (5. 4) alattiak mintájára belátható, hogy a (7. 5. 2) TÉTEL lényegében azonos a körrendszerekre kimondott (1. 3) TÉTELlel.

8. §.

8. 1. Véges láncok

A **8. §**-ban végtelen gráfokra terjesztjük ki tételeinket. A végtelen gráfok értelmezése a **2. 1** alatti definíciótól csak annyiban különbözik, hogy a Φ és Ψ halmazok végtelenek is lehetnek.

Pontláncon, élláncon és körláncon végtelen gráfok esetén is csak *véges láncot* értünk, azaz olyan láncot, mely csak véges sok ponthoz, alapélhez, ill. körhöz rendel 0-tól különböző értéket. E megállapodás következtében a láncokkal kapcsolatos $\sum_x$, $\sum_X$ és $\sum_k$ jelek valójában véges összegeket jelölnek, és a **2. §** és **3. §** értelmezései és állításai végtelen gráfok esetén is érvényben maradnak.

8. 2. Végtelen gráfok elférő élláncaira és körláncaira vonatkozó tételek

A **4. 1** pont értelmezései és állításai a (4. 1. 13), (4. 1. 15) és (4. 1. 16) tételek kivételével érvényesek végtelen gráfokra is. Az említett három tétel további kikötések nélkül általában nem érvényes. E pont további részében a (4. 1. 16) TÉTELnek megfelelő alábbi tételt bizonyítjuk:

(8. 2. 1). TÉTEL: *Ha $\varphi \geq 0$ és csak véges sok 0-pont van, továbbá, ha G_l láncaihoz és a 0-pontot tartalmazó pozitív körökhöz tartozó értékek halmaza felülről korlátos, akkor P_l nem üres és*

$$\max_{g \in G_e} \psi(g) = \min_{p \in P_l} \varphi(p).$$

A bizonyítást a **4. 2** és **4. 3** pontok lépéseit követve végezzük el. Feltételezve a G_e-hez tartozó g láncok $\psi(g)$ értékeinek korlátosságát, megállapíthatjuk, hogy a **4. 2** pont értelmezései és tételei a (4. 2. 8) tétel kivételével változatlanul érvényben tarthatók (kitérőn φ és a-hoz tartozó b-irányú kitérőt értünk). A (4. 2. 8) tételt a (8. 2. 6) tétellel helyettesítjük. Ennek igazolásához egy fogalmat és néhány tételt előrebocsátunk.

(8. 2. 2). Az X pontból az Y pontot *elérhetőnek* mondjuk, ha létezik egy pozitív 0-pontmentes XY-ív.

Értelmezésünk szerint X-ből X elérhető.

2. 6 alapján látható, hogy ha létezik egy pozitív 0-pontmentes XY-pálya, akkor X-ből Y elérhető. Ebből a megállapításból egyszerűen következik, hogy ha X-ből Y és Y-ból Z elérhető, akkor X-ből Z is elérhető.

(8. 2. 3). *Ha V-ből U elérhető, akkor létezik olyan $\psi(U, V)$ korlát, hogy minden f pozitív elférő UV-ívre (amennyiben ilyen létezik) $\psi(f) \leq \psi(U, V)$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen f egy tetszőleges pozitív elférő UV-ív és legyen $f \neq 0$. Létezik egy f_0 pozitív 0-pontmentes VU-ív. Az $U = V$ esetben legyen $f_0 = 0$, és ekkor tekintsük U-t f_0 pontjának.

$g = f + f_0 \neq 0$ egy zárt pozitív lánc. **2. 6** szerint $g = \sum_{i=1}^{n}{}' k_i$, ahol $n \geq 1$, k_i pozitív kör, és $0 \neq k_i \subset g$ $(i = 1, \ldots, n)$. Mivel f elférő, nem tartalmazhat 0-pontot, s így g, és ezzel együtt a k_i körök sem tartalmaznak 0-pontot. Ebből következik, hogy a k_i körök mind elférők, s így $\psi(k_i) \leq \mu$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Bármilyen X pontra $2 \geq |f, X| + |f_0, X| \geq |g, X| = \sum' |k_i, X|$. Ezért egy X-ponton át legfeljebb két különböző sorszámú k_i kör haladhat keresztül.

Bármelyik k_i tartalmaz f_0-hoz tartozó pontot. Ellenkező esetben ugyanis $k_i \subset f$. Ez azonban csak az $U = V$ esetben állhat fenn, és pedig csak olyan módon, hogy $k_i = f$. Azonban f tartalmazza az f_0-hoz tartozó U pontot.

Ha f_0 pontjainak számát $\lambda(f_0)$-lal jelöljük, akkor az előzőek alapján megállapíthatjuk, hogy $n \leqq 2\lambda(f_0)$. Ebből $\psi(g) = \sum_{i=1}^{n} \psi(k_i) \leqq 2\lambda(f_0)\mu$ és $\psi(f) = \psi(g) - \psi(f_0) \leqq 2\lambda(f_0)\mu - \psi(f_0)$.

Legyen

$$\psi(U, V) = \max\{2\lambda(f_0)\mu - \psi(f_0), 0\}.$$

Ekkor az $f = 0$ esetben is érvényes a $\psi(f) \leqq \psi(U, V)$ egyenlőtlenség.

(8. 2. 4). *Ha U és V a-pontok és V-ből U elérhető, akkor bármely olyan f UV-pályára, amely h-pálya $\psi(f) \leqq \psi(U, V)$.*

BIZONYÍTÁS: Ha $f = 0$, vagy ha f egy a-él, akkor (8. 2. 3) szerint igaz állításunk. Ha $f \neq 0$ és f nem a-él, akkor csupa pozitív b-élből áll és belső pontjai b-pontok. Ekkor **2. 6** szerint $f = f' + \sum_{i=1}^{n} k_i$, ahol $0 \neq f' \subset f$, $k_i \subset f$, f' pozitív UV-ív, k_i pozitív kör ($i = 1, \ldots, n$).

f elférő voltából következik, hogy f' és k_i is elférők ($i = 1, \ldots, n$).

Miután f h-pálya, $|f, U| \leqq 1$. Ebből és $|f', U| \geqq 1$-ből $|k_i, U| = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) következik. Ugyanígy látható be, hogy $|k_i, V| = 0$ ($i = 1, \ldots, n$). A k_i körök tehát nem tartalmazhatnak a-pontot, és így elférő voltukból következik, hogy valamennyien zárt kitérők. Ekkor (4. 2. 5) szerint $\psi(k_i) < 0$ ($i = 1, \ldots, n$).

f'-re alkalmazható a (8. 2. 3) tétel. E szerint

$$\psi(f) = \psi(f') + \sum_{i=1}^{n} \psi(k_i) \leqq \psi(f') \leqq \psi(U, V).$$

(8. 2. 4)-ből és az a-pontok számának véges voltából következik az alábbi állítás:

(8. 2. 5). *Ha $a \neq 0$, akkor létezik egy olyan ψ_a érték, hogy ha U és V tetszőleges olyan a-pontok, hogy V-ből U elérhető és f olyan UV-pálya, amely h-pálya, akkor $\psi(f) \leqq \psi_a$.*

(8. 2. 6). *Ha $a \neq 0$, akkor mindazon általánosított UV-kitérők értékeinek halmaza felülről korlátos, amely kitérőknél U és V a-pontok és V-ből U elérhető.*

BIZONYÍTÁS: (4. 2. 7) miatt elég a tételt primitív UV-kitérőkre bizonyítani. Legyenek U és V a-pontok, f_0 egy pozitív 0-pontmentes VU-ív, c egy primitív UV-kitérő és $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ c-nek egy kanonikus UV-bejárása. Feltehető, hogy $c \neq 0$, tehát $n \geqq 1$.

(I). Igazoljuk, hogy ha $0 \leqq j < k \leqq n$, akkor X_k-ból X_j elérhető. E célból értelmezzük az f_i $X_{i-1}X_i$-útat a következőképpen: Ha e_i a-él vagy b-él, akkor legyen $f_i = e_i$. Ha e_i egy $\bar{a}$-él, akkor legyen f_i egy olyan $X_{i-1}X_i$-út, melyre $f_i \subset a$. ((2. 5. 21) szerint ilyen út létezik.) Valamennyi $f_i \geqq 0$, és az $f_{\varrho\sigma} = \sum_{i=\varrho+1}^{\sigma} f_i$ $X_\varrho X_\sigma$-pálya is pozitív ($\varrho < \sigma$, $\varrho, \sigma = 1, \ldots, n$). a és $a + c$ elférő láncok, s így nem tartalmaznak 0-pontot. Ugyanez áll akkor c-re, valamint az f_i és $f_{\varrho\sigma}$ pályákra is. Az $\bar{f} = f_{kn} + f_0 + f_{0j}$ lánc tehát pozitív 0-pontmentes $X_k X_j$-pálya. Ennélfogva X_k-ból X_j valóban elérhető.

(II). Legyenek a $0, 1, \ldots, n$ sorszámok közül azok, amelyekhez tartozó X_i pontok a-pontok, rendre $i_0, i_1, \ldots, i_m$.

$m > 1, 0 = i_0 < \cdots < i_m = n$. Vezessük be az $X_{i_j} = X_j'$ és a $c_{i_{j-1}i_j} = c_j$ rövidítéseket. Ekkor $\sum_{j=1}^{m} c_j = c$, $c_j \subset c$.

(I)-ből következik, hogy X_j'-ből X_{j-1}' elérhető, ξ kanonikus voltából pedig következik, hogy a c_j pályák vagy h-pályák, vagy $\bar{a}$-élek.

a alapéleinek Ψ_a halmaza véges és nem üres. Ezért létezik a $\max_{x \in \Psi_a} |\psi(x)| = \psi_a'$ érték is. (8. 2. 5)-re való tekintettel felírhatjuk tehát, hogy

$$(*) \qquad \psi(c_j) \leqq \psi_a + \psi_a'.$$

(III). (3. 1. 3) szerint c-nek egy tetszőleges, X-szel jelölt a-ponthoz illeszkedő éleinek száma

$$\nu_X(c) = 2|c, X| \leqq 4\varphi(X) + 2 \leqq 4\varphi_a + 2,$$

ahol φ_a az a-lánc pontjaihoz tartozó φ értékek maximuma.

Egy c_j pálya éleinek és az a-pontoknak illeszkedését vizsgálva, minden j-re pontosan két illeszkedést állapíthatunk meg. Ezért, ha a pontjainak számát $\lambda(a)$-val jelöljük

$$2m \leqq \lambda(a)(4\varphi_a + 2), \quad \text{azaz} \quad m \leqq \lambda(a)(2\varphi_a + 1).$$

Ebből és (*)-ból

$$\psi(c) = \sum_{j=1}^{m} \psi(c_j) \leqq \lambda(a)(2\varphi_a + 1)(\psi_a + \psi_a').$$

(8. 2. 7). Legyen X tetszőleges a-pont. (4. 3. 1)-től eltérően most $H(X)$-en azon ált. UX-kitérők halmazát értjük, amelyeknél U egy tetszőleges X-ből elérhető a-pont. A $c = 0$ XX-kitérőre tekintettel most is megállapíthatjuk, hogy $H(X)$ nem üres. Legyen most

$$s(X) = \max_{d \in H(X)} \psi(d).$$

(4. 3. 2) és (4. 3. 3) helyett a következő egyszerűen belátható állításokat szerepeltetjük:

(8. 2. 8). *Ha X a-pont, akkor létezik olyan c primitív UX-kitérő, melynél U egy X-ből elérhető a-pont és $\psi(c) = s(X)$.*

(8. 2. 9). *Ha X és Y a-pontok és Y-ból X elérhető, továbbá, ha az f XY-lánc alternáló, akkor* $s(X)+\psi(f)\leqq s(Y)$.

(4. 3. 4) változatlanul érvényes. Ezt beláthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy ha az $e=UV$ él akár a-él, akár $\bar{a}$-él, U-ból V és V-ből U elérhető [(2. 5. 21)].

A (4. 3. 5) alatt értelmezett ψ_0 létezése abból a feltevésünkből következik, hogy a 0-pontot tartalmazó pozitív körök értékeinek halmaza felülről korlátos.

A (4. 3. 6) értelmezést változatlanul fenntartjuk. Az értelmezett q lánc végessége az a lánc, valamint a 0-pontok számának véges voltából következik.

A (4. 3. 7) tétel érvényességét (8. 2. 9) alapján könnyen beláthatjuk.

(4. 3. 8) és (4. 3. 9) bizonyításukkal együtt változatlanul fenntarthatók.

A (4. 3. 10) tétel is érvényes. A bizonyításhoz most csak azt kell hozzáfűzni, hogy a C_i pontok is a-pontok, és hogy A_{i+1}-ből C_i elérhető. Ez utóbbi megállapítás így látható be: k pozitív 0-pontmentes kör, és így $k-b_i$ egy pozitív 0-pontmentes $A_{i+1}A_i'$-út. $e_i'=A_i'C_i$ a-él. Tehát A_{i+1}-ből A_i', A_i'-ből C_i elérhető.

A (4. 3. 11) tétel is változatlanul érvényes. A bizonyításhoz csak azt kell hozzáfűzni, hogy U X-ből és Y-ból elérhető a-pont. Az Y-ból való elérhetőség abból következik, hogy U X-ből, és (2. 5. 21) szerint X Y-ból elérhető.

(4. 3. 12) és (4. 3. 13) bizonyításukkal együtt változatlanul érvényesek.

Ezzel beláttuk a (8. 2. 1) TÉTEL helyességét.

A (8. 2. 1) TÉTELből az **5. §**-ban közölt módon belátható az alábbi tétel:

(8. 2. 10). TÉTEL: *Ha $\varphi\geqq 0$ és a 0-pontok száma véges, továbbá ha az elférő körláncokhoz és a 0-pontot tartalmazó pozitív körökhöz tartozó értékek halmaza felülről korlátos, akkor P_l nem üres és*

$$\max_{x\in A_e}\psi(x)=\min_{p\in P_l}\varphi(p).$$

(8. 2. 11). A bevezetés és az (5. 4) pont mintájára a (8. 2. 10) tétel végtelen gráfok véges körrendszereire is megfogalmazható.

A **6. §** eljárásával a (6. 1. 2) tétel az alábbi módosítással terjeszthető ki végtelen gráfokra:

(8. 2. 12). TÉTEL: *Ha $\varphi\geqq 0$ és a 0-pontok száma véges, továbbá $\tilde{G}_e$ láncaihoz és a 0-pontot tartalmazó körökhöz tartozó értékek halmaza felülről korlátos, akkor $\tilde{P}_l$ nem üres és*

$$\max_{g\in\tilde{G}_e}\psi(g)=\min_{p\in\tilde{P}_l}\varphi(p).$$

Hasonló módosításokkal vihetők át az $\acute{a}$-körláncokra és $\acute{a}$-körrendszerekre vonatkozó (6. 2. 2) és (6. 2. 4) TÉTELek is végtelen gráfokra.

8. 3. Végtelen gráfok lefogó él- és körláncaira vonatkozó tételek

(8. 3. 1). *A* (7. 3. 7) TÉTEL *érvényes végtelen gráfokra.*

A **7.** §-beli bizonyítást a **8. 2** alattiakhoz hasonlóan kell módositani. A (7. 4. 3) tételig bezárólag (7. 3. 4) kivételével valamennyi tétel bizonyításával együtt érvényben tartható. A (7. 4. 4) tételt a (8. 3. 3) tétellel helyettesítjük. Ennek bizonyítása végett előrebocsátjuk a következőket:

A **8. 3** pontban az X pontból az Y pontot akkor mondjuk *elérhetőnek*, ha létezik egy pozitív XY-pálya. Itt is igaz, hogy X-ből X elérhető, valamint hogy ha X-ből Y és Y-ból Z elérhető, akkor X-ből Z is elérhető.

(8. 3. 2). *Ha U és V olyan a-pontok, hogy V-ből U elérhető, akkor van $f \neq 0$ pozitív VU-pálya, és bármely d ált. UV-kitérőre* (**8. 3**-ban kitérőn mindig b-irányú l-kitérőt értünk) $\psi(d) \geqq -\psi(f)$.

BIZONYÍTÁS: (I). Ha $V \neq U$, akkor f létezése annak következménye, hogy V-ből U elérhető. Ha $V = U$, akkor **2. 6** szerint $a = \sum_{i=1}^{n} k_i$, k_i pozitív kör, $0 \neq k_i \subset a$ $(i = 1, \ldots, n)$. (Ha U a-pont, akkor $a \neq 0$!) A k_i körök közül valamelyik tartalmazza U-t. Ha k_j az, akkor $f = k_j$ egy pozitív, nem azonosan zérus UU-pálya.

(II). (7. 4. 3) következtében ált. kitérők helyett elegendő kitérőkkel foglalkozni. Legyen c egy UV-kitérő. Igazoljuk, hogy $\bar{c} = c + f$ zárt kitérő. $\bar{c}$ zárt lánc. $a + c \geqq 0$ és $f \geqq 0$-ból $a + \bar{c} \geqq 0$. Minden X-re $|a + c, X| \geqq \varphi(X) - |X, U| - |X, V|$, és $f \neq 0$ miatt $|f, X| \geqq |X, U| + |X, V|$. Ezért minden X-re $|a + \bar{c}, X| = |a + c, X| + |f, X| \geqq \varphi(X)$.

Ezután (7. 4. 2) alapján megállapíthatjuk, hogy $\psi(c) + \psi(f) = \psi(\bar{c}) \geqq 0$. Tehát valóban $\psi(c) \geqq -\psi(f)$.

(8. 3. 2)-ből az a lánc véges voltára való tekintettel belátható a következő tétel:

(8. 3. 3). *Ha $a \neq 0$, akkor mindazon ált. UV-kitérők értékeinek halmaza alulról korlátos, mely kitérőknél U és V a-pontok és V-ből U elérhető.*

Ha (7. 4. 5)-től kezdve ugyanolyan természetű változtatásokat hajtunk végre az értelmezéseken és tételeken, mint amilyeneket (8. 2. 7)-től kezdve elvégeztünk, akkor belátjuk, hogy a (7. 3. 7) TÉTEL valóban érvényes végtelen gráfokra.

(8. 3. 4). Miután (7. 3. 4) általában nem érvényes, könnyen belátható, hogy a körláncokra vonatkozó (7. 5. 2) TÉTEL azzal a változtatással érvényes végtelen gráfokra, amely szerint a pozitív értékű pontokon áthaladó pozitív nem azonosan zérus körök létezése helyett Δ nem üres voltát kötjük ki.

Az elmondottak alapján azt is megállapíthatjuk, hogy *az* (1. 3) TÉTEL *változatlan fogalmazásban érvényes végtelen gráfokra.*

9. §.

Ebben a paragrafusban, az előzően bizonyított tételeket speciális véges gráfokra, ill. speciális φ és ψ függvényekre alkalmazva további maximum—minimum tételeket vezetünk le. A tételeket, kettő kivételével, nem láncokra, hanem az (1. 2) és (1. 3) TÉTELekhez hasonlóan rendszerekre mondjuk ki. Semmi akadálya nincs azonban, hogy megállapításainkat láncokra fogalmazzuk át. Megjegyezzük, hogy rendszerekkel kapcsolatban alapél helyett élt mondunk. A tételeket, további kikötések csatolása révén végtelen gráfokra is kiterjeszthetjük.

9. 1. Az (1. 2) és (1. 3) TÉTEL két különböző irányú általánosítása

(9. 1. 1). Az első általánosítást oly módon hajtjuk végre, hogy az előző paragrafusokban szereplő, a gráf pontjain értelmezett φ függvény értelmét a gráf éleire is kiterjesztjük. A gráf pontjain és élein értelmezett egész értékű φ esetében egy $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ körrendszert akkor nevezünk *elférőnek*, ha bármely X pontot, ill. x élt is vizsgálunk a $k_1, \ldots, k_n$ körök közül az X-en, ill. az x-en átmenők száma kisebb vagy egyenlő $\varphi(X)$-, ill. $\varphi(x)$-nél. Hasonló értelemben definiáljuk most a *lefogó* körrendszer fogalmát is.

A pontrendszerek helyett most *pont-élrendszereket* szerepeltetünk. A $\tau = (X_1, \ldots, X_m, x_1, \ldots, x_n)$ pont-élrendszerből hiányozhatnak a pontok vagy az élek és τ üres is lehet. A felírt τ rendszer értéke: $\varphi(\tau) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$. (Ha pontok, ill. élek nem szerepelnek, akkor az első, ill. a második összeg elmarad. Az üres τ rendszerre $\varphi(\tau) = 0$.)

Egy τ pont-élrendszert *elférőnek*, ill. *lefogónak* mondunk, ha bármely *alapirányú* k kört is vizsgálunk a τ-ban felsorolt elemek közül a k körön elhelyezkedők száma kisebb vagy egyenlő, ill. nagyobb vagy egyenlő $\psi(k)$-nál.

Ha az elférő, ill. a lefogó körrendszerek halmazát továbbra is A_e és A_l-lel, az elférő és lefogó pont-élrendszerek halmazát R_e és R_l-lel jelöljük, akkor érvényesek a következő tételek:

(9. 1. 2). *Ha* $\varphi \geqq 0$, *akkor*

$$\max_{\varkappa \in A_e} \psi(\varkappa) = \min_{\tau \in R_l} \varphi(\tau).$$

(9. 1. 3). *Ha minden alapirányú k körre* $\psi(k) \geqq 0$, *és* A_l *nem üres, akkor*

$$\min_{\varkappa \in A_l} \psi(\varkappa) = \max_{\tau \in R_e} \varphi(\tau).$$

E tételek bizonyítását az (1. 2) és (1. 3) TÉTELekből kiindulva, úgy hajthatjuk végre, hogy az eredeti Γ gráfból alkalmas módon egy új Γ' gráfot hozunk létre. Eljárásunk röviden kifejezve a következő: Γ minden élét egy-egy új szögpont felvételével „megfelezzük“. Egy él két darabjának irányítása az eredeti él irányításának feleljen meg; a darabokhoz rendelt ψ értékek a teljes él ψ értékének felével legyenek egyenlők. A Γ'' gráfban a φ függvényt csak a szögpontokban értelmezzük, éspedig úgy, hogy a régi szögpontokban változatlanul meghagyjuk az eredeti φ értékeket, az új, élfelező pontokhoz pedig mindig a megfelezett él φ értékét rendeljük. Könnyen ellenőrizhető, hogy a Γ''-re kimondott (1.2) és (1.3) TÉTELek azonosak a Γ-ra vonatkozó (9.1.2) és (9.1.3) TÉTELekkel.

A (9.1.2) és (9.1.3) TÉTELekből egyszerűen juthatunk azokhoz a módosított tételekhez, amelyeknél a φ függvény csak az éleken van értelmezve. Röviden kifejezve azt kell tennünk, hogy a pontokhoz tartozó φ értékek mindegyikét a (9.1.2) TÉTELnél ∞-re, a (9.1.3) TÉTELnél pedig 0-ra változtatjuk.

Az (1.2) és (1.3) TÉTELek általánosításához hasonlóan általánosítható a (6.2.4) TÉTEL is.

(9.1.4). A másik irányú általánosításnál a ψ függvény értelmét a gráf szögpontjaira terjesztjük ki. A szögpontokon és éleken értelmezett egész értékű ψ függvény esetében egy *alapirányú k* kör *$\psi(k)$ értékén* az éleihez és pontjaihoz rendelt ψ értékek összegét értjük. Egy körrendszer értéke a rendszerhez tartozó körök értékeinek összege. A körrendszerek és pontrendszerek elférő és lefogó voltának (1.1) alatti értelmezését formálisan megtartjuk, természetesen $\psi(\varkappa)$-nak az előbb adott módosított értelmet tulajdonítjuk. Ezekután megállapítjuk, hogy az (1.2) és (1.3) TÉTELek változatlan alakban érvényesek az újfajta ψ függvények esetében is.

A szóbanforgó általánosításokat oly módon vezethetjük vissza az (1.2) és (1.3) TÉTELekre, hogy FORD és FULKERSON egy gondolatát felhasználva a Γ gráfhoz egy új Γ' gráfot értelmezünk (vesd öszsze [5] 212. oldallal). Γ' értelmezését röviden így írhatjuk le: Γ minden pontját „kettéhasítjuk“, és bármely pontból származó két pont egyikéhez az eredeti pontba befutó, másikához pedig az eredetiből kifutó éleket illesztjük, ezenkívül az előzőleg említett pontból a másikba egy új élt vezetünk. Pontosabban Γ bármelyik X pontjához egy X^- és egy X^+ pontot, és egy új z_X élt veszünk fel. Γ' pontjai az X^- és X^+ pontok, élei pedig Γ valamennyi x éle, valamint az új z_X élek. A pontok és élek illeszkedését így határozzuk meg: Ha $(x, X) = 0$, akkor $(x, X^-) = 0$, $(x, X^+) = 0$. Ha $(x, X) = 1/2$, akkor $(x, X^-) = 1/2$, $(x, X^+) = 0$. Ha $(x, X) = -1/2$, akkor $(x, X^-) = 0$, $(x, X^+) = -1/2$. Végül $(z_X, X^-) = -1/2$, $(z_X, X^+) = 1/2$.

A Γ gráf pontjain értelmezett φ függvény segítségével Γ' pontjaira így értelmezünk egy φ' függvényt: $\varphi'(X^-) = \varphi'(X^+) = \varphi(X)$. A Γ gráf pontjain és élein értelmezett ψ függvényből egy, Γ'-nek csak az élein értelmezett ψ'

függvényt hozunk létre: Γ valamennyi x élén legyen $\psi'(x)=\psi(x)$, az új z_X éleken legyen $\psi'(z_X)=\psi(X)$.

Könnyű megmutatni, hogy ha az ily módon létrehozott Γ' gráfra és a φ' és ψ' függvényekre alkalmazzuk az (1. 2) és (1. 3) TÉTELeket, akkor ezekből az eredeti Γ gráfra vonatkozó, fentebb említett általánosítások levezethetők.

A szóbanforgó általánosított tételekből megint létrehozhatók azok a módosított tételek, amelyekben a ψ függvény csak a gráf pontjaiban van értelmezve. Ehhez nem kell mást tenni, mint valamennyi élhez tartozó ψ értéket 0-nak választani.

A (6. 2. 4) TÉTELből, a ψ függvénynek a szögpontokra való kiterjesztésével adódó általánosítás nem érvényes.

Megjegyzés: Az (1. 2) és (1. 3) TÉTELeknek nehézség nélkül létrehozhatók ama általánosításai, amelyeknél mind a φ, mind a ψ függvény pontokra is, élekre is értelmezve van.

9. 2. Útrendszerek

(9. 2. 1). Legyen Γ véges gráf. Φ_α és Φ_β Γ pontjainak nem üres, közös pont nélküli részhalmazai. A Φ_α, Φ_β és $\Phi-(\Phi_\alpha+\Phi_\beta)$ halmazok (Φ Γ pontjainak halmaza) pontjait rendre α-, β- és γ-*pontoknak* nevezzük. Jelentse a következőkben ϱ és σ az α és β betűk bármelyikét. *Alapirányú úton*, olyan irányított utat értünk ([7] 29. o.), melynek befutási iránya minden érintett élen megegyezik az él irányításával. Egy utat $\varrho\sigma$-*útnak* nevezünk, ha alapirányú és ha kezdőpontja ϱ-pont, végpontja σ-pont és belső pontjai γ-pontok.

Legyen w tetszőleges irányított út, X tetszőleges pont. A $[w, X]$ jel értelmét így határozzuk meg: Ha X akár belső, akár határpontja w-nek, akkor $[w, X]=1$. Ha X nem pontja w-nek, akkor $[w, X]=0$.

Megjegyezzük, hogy $[w, X]$ értéke az út határpontjaiban eltér (éppen kétszerese) a **2.** §-ban egy f útra értelmezett $[f, X]$ értéknek.

Útrendszeren az $\alpha\beta$-utak egy olyan $\omega=(w_1, \ldots, w_n)$ sorozatát értjük, amelyben egy út többször is előfordulhat. Az üres, $\omega=0$-lal jelölt sorozatot is útrendszernek tekintjük. (Csak sorrendben különböző útsorozatokat azonos rendszereknek tekintjük.)

Bevezetjük az $[\omega, X]=\sum_{i=1}^{n}[w_i, X]$ jelet. Ha $\omega=0$, akkor legyen $[\omega, X]=0$. $[\omega, X]$ a $w_1, \ldots, w_n$ sorozat azon útjainak számát jelenti, melyek az X pontot tartalmazzák.

A $\pi=(X_1,\ldots,X_n)$ pontrendszerrel és a w úttal kapcsolatban bevezetjük a $[\pi,w]=\sum_{i=1}^{n}[w,X_i]$ jelet. Ha $\pi=0$, akkor legyen $[\pi,w]=0$. $[\pi,w]$ a π rendszer azon pontjainak számát jelenti, melyek a w úton helyezkednek el.

Ha $\pi=(X_1,\ldots,X_n)$ és $\omega=(w_1,\ldots,w_m)$, akkor legyen

$$[\pi,\omega]=\sum_{i=1}^{m}[\pi,w_i]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[w_i,X_j]=\sum_{j=1}^{n}[\omega,X_j].$$

Ha π és ω valamelyike üres, akkor legyen $[\pi,\omega]=0$.

Az $\omega_1,\ldots,\omega_n$ útrendszerek útjainak egyesítése révén létrejövő útrendszert $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$-nel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy ekkor $[\omega,X]=\sum_{i=1}^{n}[\omega_i,X]$ minden X pontra fennáll.

(9.2.2). Legyen értelmezve a gráf pontjain a $\varphi(X)$ egész értékű függvény. Egy ω útrendszer *elférő*, ill. *lefogó*, ha minden X-re $[\omega,X]\leqq\varphi(X)$, ill. $[\omega,X]\geqq\varphi(X)$. Az elférő, ill. a lefogó útrendszerek halmazát Ω_e és Ω_l-lel jelöljük.

(9.2.3). Legyen értelmezve a gráf élein a $\psi(x)$ egész értékű függvény. Az alapirányú w út $\psi(w)$ *értékén* w éleihez tartozó értékek összegét értjük. Ha $\omega=(w_1,\ldots,w_n)$, akkor legyen $\psi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\psi(w_i)$. Ha $\omega=0$, akkor legyen $\psi(\omega)=0$. Ha $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)$, akkor $\psi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\psi(\omega_i)$.

Egy π pontrendszer *útelférő*, ill. *útlefogó*, ha bármely w $\alpha\beta$-útra $[\pi,w]\leqq\psi(w)$, ill. $[\pi,w]\geqq\psi(w)$. Ha nincs $\alpha\beta$-út, akkor tekintsük az üres, $\pi=0$-lal jelölt pontrendszert útlefogónak.

Ha π útelférő, ill. útlefogó, akkor könnyen belátható, hogy bármely ω útrendszerre $[\pi,\omega]\leqq\psi(\omega)$, ill. $[\pi,\omega]\geqq\psi(\omega)$.
Az útelférő, ill. útlefogó pontrendszerek halmazát Σ_e, ill. Σ_l-lel jelöljük.

(9.2.4). Körökkel és körrendszerekkel kapcsolatban használni fogjuk az **5.** §-ban a láncfogalom segítségével értelmezett $|k,X|$ és $|\varkappa,X|$ jeleket. Ezek a láncfogalomtól függetlenül is definiálhatók: $|k,X|=1$, ha X pontja k-nak, $|k,X|=0$, ha X nem pontja k-nak. $|\varkappa,X|$ azon $\varkappa$-hoz tartozó körök száma, melyek X-et tartalmazzák.

A $|\pi,k|$ jelet most vezetjük be. Jelentse ez a π pontrendszerben felsorolt pontok közül azoknak a számát, melyek a k körön helyezkednek el. Ha $\pi=(X_1,\ldots,X_n)$, akkor $|\pi,k|=\sum_{i=1}^{n}|k,X_i|$.

9. 3. Elférő útrendszerekre vonatkozó tételek

E pontban a $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvényekre az alábbi feltevéseket tesszük:

(9. 3. 1). $\varphi \geqq 0$.

(9. 3. 2). Minden w útra, mely $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$-, $\beta\beta$-út $\psi(w) \leqq 0$, és minden olyan alapirányú k körre, mely nem tartalmaz α-pontot is és β-pontot is $\psi(k) \leqq 0$.

(9. 3. 1)-ből, $\omega = 0$-ra tekintettel következik, hogy Ω_r nem üres. Γ végességéből könnyen belátható, hogy Ω_r véges halmaz, és hogy Σ_l nem üres.

(9. 3. 3). TÉTEL: *A* (9. 3. 1) *és* (9. 3. 2) *feltevések fennállása esetén*

$$\max_{\omega\in\Omega_r} \psi(\omega) = \min_{\pi\in\Sigma_l} \varphi(\pi).$$

BIZONYÍTÁS: (I). Feltevésünk szerint $\mu_1 = \max_{\omega\in\Omega_r} \psi(\omega)$ és $\bar{\mu}_1 = \min_{\pi\in\Sigma_l} \varphi(\pi)$ létező, véges értékek. A $\mu_1 = \bar{\mu}_1$ egyenlőséget, egy új Γ' gráf megszerkesztésével az (1. 2) TÉTELre vezetjük vissza. Γ'-t Γ-ból új élek csatolásával hozzuk létre: Γ minden egyes β-pontját minden egyes α-ponttal egy-egy új éllel összekötjük, és az új éleket a β-pontból az α-pont felé irányítjuk. A ψ függvény értéke valamennyi új élen legyen zérus.

(II). Legyen k egy tetszőleges Γ'-höz tartozó alapirányú kör. Megmutatjuk, hogy létezik olyan Γ-hoz tartozó ω_k útrendszer, melyre minden X-nél $[\omega_k, X] \leqq [k, X]$ és $\psi(\omega_k) \geqq \psi(k)$.

Állításunk igazolásához vegyük először tekintetbe, hogy ha k nem tartalmaz α-pontot is meg β-pontot is, akkor nem tartalmazhat új élt, s így k Γ-nak is köre. (9. 3. 2) miatt $\psi(k) \leqq 0$. Ekkor $\omega_k = 0$ kielégíti követeléseinket.

Tegyük fel tehát, hogy k tartalmaz α-pontot is, β-pontot is. Ezek a pontok a k kört a $v_1, \ldots, v_n$ egymáshoz csatlakozó alapirányú utakra bontják ($n \geqq 2$). Ezek az utak vagy Γ-hoz tartozó $\varrho\sigma$-utak, vagy egyetlen új élből állnak. (9. 3. 2), valamint ψ-nek az új éleken történt értelmezése szerint $\psi(v_i) > 0$ csak abban az esetben állhat fenn, ha v_i $\alpha\beta$-út. Ha a v_i utak között nincsenek $\alpha\beta$-utak, akkor $\psi(k) = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i) \leqq 0$, és ekkor $\omega_k = 0$ kielégíti követeléseinket. Ha a v_i utak között vannak $\alpha\beta$-utak, jelöljük ezeket $w_1, \ldots, w_m$-mel. Megmutatjuk, hogy ekkor $\omega_k = (w_1, \ldots, w_m)$ megfelel kikötéseinknek. Valóban

$$\psi(\omega_k) = \sum_{i=1}^{m} \psi(w_i) \geqq \sum_{j=1}^{n} \psi(v_j) = \psi(k),$$

és mivel két w_i-nek nem lehet közös pontja $[\omega_k, X] \leqq [k, X]$.

(III). Γ' minden alapirányú k köréhez rendeljük hozzá a (II) alatt értelmezett ω_k útrendszert, és ebből kiindulva minden Γ'-höz tartozó

$\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ körrendszerhez rendeljük hozzá a Γ-hoz tartozó $\omega_\varkappa = (\omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_n})$ útrendszert. E hozzárendelések segítségével igazoljuk, hogy $\mu_1 \geqq \mu_1'$, ahol $\mu_1' = \max\limits_{\varkappa \in A_c'} \psi(\varkappa)$ és A_c' a Γ'-höz tartozó elférő $\varkappa$ körrendszerek halmazát jelenti.

Valóban, ha $\varkappa = (k_1, \ldots, k_n)$ tetszőleges körrendszere Γ'-nek, akkor

$$\psi(\omega_\varkappa) = \sum_{i=1}^{n} \psi(\omega_{k_i}) \geqq \sum_{i=1}^{n} \psi(k_i) = \psi(\varkappa),$$

és bármilyen X-re

$$[\omega_\varkappa, X] = \sum_{i=1}^{n} [\omega_{k_i}, X] \leqq \sum_{i=1}^{n} [k_i, X] = [\varkappa, X].$$

Ha $\varkappa \in A_c'$, azaz ha bármely X-re $[\varkappa, X] \leqq \varphi(X)$, akkor minden X-re $[\omega_\varkappa, X] \leqq \varphi(X)$, tehát $\omega_\varkappa \in \Omega_c$.

Az elmondottakból következik állításunk.

(IV). Igazoljuk, hogy $\mu_1 \leqq \mu_1'$.

Bármely Γ-hoz tartozó w $\alpha\beta$-utat, a végpontjából a kezdőpontjába futó új éllel egy Γ'-höz tartozó alapirányú k_w körré egészítünk ki. Nyilvánvalóan fennállnak az alábbi egyenlőségek: $\psi(k_w) = \psi(w)$, minden X-re $[k_w, X] = [w, X]$.

Ha $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ tetszőleges, $\omega = 0$-tól különböző útrendszer, akkor legyen $\varkappa_\omega = (k_{w_1}, \ldots, k_{w_n})$. Ha $\omega = 0$, akkor legyen $\varkappa_\omega = 0$. Fennállnak az alábbi egyenlőségek: $\psi(\varkappa_\omega) = \psi(\omega)$ és minden X-re $[\varkappa_\omega, X] = [\omega, X]$.

Látható, hogy ha $\omega \in \Omega_c$, akkor $\varkappa \in A_c'$.

Az elmondottakból valóban következik, hogy $\mu_1 \leqq \mu_1'$.

$\mu_1 \leqq \mu_1'$-ből és $\mu_1 \geqq \mu_1'$-ből $\mu_1 = \mu_1'$ folyik.

(V). Jelöljük Π_l'-vel a Γ'-höz tartozó körlefogó pontrendszerek halmazát. Bebizonyítjuk, hogy $\Pi_l' = \Sigma_l$.

Ha $\pi = (X_1, \ldots, X_n) \in \Sigma_l$ és k tetszőleges alapirányú köre Γ'-nek, akkor (II) jelöléseit és megállapitásait használva

$$[\pi, k] = \sum_{i=1}^{n} [k, X_i] \geqq \sum_{i=1}^{n} [\omega_k, X_i] = [\pi, \omega_k] \geqq \psi(\omega_k) \geqq \psi(k),$$

tehát $\pi \in \Pi_l'$.

Ha $\pi \in \Pi_l'$ és w tetszőleges $\alpha\beta$-út, akkor (IV) jelöléseit és megállapitását használva:

$$[\pi, w] = \sum_{i=1}^{n} [w, X_i] = \sum_{i=1}^{n} [k_w, X_i] = [\pi, k_w] \geqq \psi(k_w) = \psi(w),$$

tehát $\pi \in \Sigma_l$. Ezzel igazoltuk állításunkat.

Az (1. 2) TÉTELből, valamint $\mu_1 = \mu_1'$ és $\Pi_l' = \Sigma_l$-ből következik a (9. 3. 3) TÉTEL fennállása.

(9. 3. 4). A (9. 3. 3) TÉTEL érvényességét végtelen gráfokra is kiterjeszthetjük a következő kikötések mellett: (1) A 0-pontok száma véges. (2) Az elférő útrendszerek és a 0-pontot tartalmazó $\alpha\beta$-utak ψ értékeinek halmaza felülről korlátos.

Az alábbiakban olyan speciális gráfokat, ill. ψ függvényeket adunk meg, melyekre a (9. 3. 2) kikötések teljesülnek.

(9. 3. 5). A Γ gráfot *aciklikusnak* nevezzük, ha a $k=0$ kört nem tekintve, nem tartalmaz alapirányú kört.

Legyen Γ egy aciklikus gráf és legyenek a Φ_α és Φ_β halmazok oly módon kijelölve, hogy az α-pontokhoz csak kifutó élek, a β-pontokhoz csak befutó élek illeszkedjenek. Ekkor a gráfban nincs $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$-, $\beta\beta$-út, sem pedig alapirányú kör, s így (9. 3. 2) kikötései tetszőleges ψ függvény mellett fennállnak. Ebben az esetben tehát a (9. 3. 3) TÉTEL is bármilyen ψ függvény mellett érvényes.

(9. 3. 6). A (9. 3. 5) alatt tárgyaltak speciális esetével állunk szemben, amidőn Γ minden élének kezdőpontja α-pont, végpontja β-pont. A gráf ekkor *páros körüljárású* ([7] 170. o.), és minden $\alpha\beta$-út egyetlen élre, egy útrendszer pedig egy *élrendszerre* redukálódik. A (9. 3. 3) TÉTEL állítása ebben az esetben irányítás nélküli gráfokra is megfogalmazható.

A Γ *irányítás nélküli* gráf éleinek egy $\varepsilon=(x_1,\ldots,x_n)$ sorozatát *élrendszernek* nevezzük. (Egy él többször is szerepelhet; az élek sorrendje mellékes; az $\varepsilon=0$-lal jelölt üres sorozatot is élrendszernek tekintjük.)

A gráf pontjain, ill. élein legyenek értelmezve a nem negatív egész értékű $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvények. Legyen $\psi(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i)$, és ha $\varepsilon=0$, akkor legyen $\psi(\varepsilon)=0$.

Az ε élrendszer *1-elférő*, ill. *1-lefogó*, ha bármely X ponthoz ε-nak $\varphi(X)$-nél nem több, ill. nem kevesebb éle illeszkedik. A π pontrendszer *1-elférő*, ill. *1-lefogó*, ha bármely x élhez π-nek $\psi(x)$-nél nem több, ill. nem kevesebb pontja illeszkedik.

(9. 3. 3) alapján most a következő tétel mondható ki (vesd össze [5], 214—218. o.):

(9. 3. 7). TÉTEL: *Egy páros körüljárású gráfban az 1-elférő élrendszerek ψ értékeinek maximuma egyenlő az 1-lefogó pontrendszerek φ értékeinek minimumával.*

E tétel a $\varphi=1$ esetben EGERVÁRYnak egy tételét adja meg ([3] 17. o. I.)

(9. 3. 8). Most a gráfra és a Φ_α és Φ_β halmazokra nem teszünk megszorításokat. A $\psi(x)$ függvényre a következőket írjuk elő: Minden olyan x-re, melynek mindkét határpontja α-pont, vagy egyik határpontja sem α-pont

$\psi(x) = 0$, minden olyan x-re, melynek csak kezdőpontja, ill. csak végpontja α-pont, $\psi(x) = 1$, ill. $\psi(x) = -1$.

Előírásaink következtében az $\alpha\beta$-, $\beta\alpha$-, $\alpha\alpha$-, $\beta\beta$-utak ψ értéke rendre 1, -1, 0, 0. Minden alapirányú k körre $\psi(k) = 0$. A $\psi(x)$ függvény tehát eleget tesz a (9. 3. 2) kikötéseknek.

Egy $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ útrendszerre $\psi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \psi(w_i) = n$, $\psi(\omega)$ tehát az ω rendszerhez tartozó utak számát adja meg.

Mivel most bármely w $\alpha\beta$-útra $\psi(w) = 1$, egy π pontrendszer akkor és csakis akkor útlefogó, ha π-nek van bármely w $\alpha\beta$-úton pontja.

A (9. 3. 3) TÉTEL most a következő alakban mondható ki:

(9. 3. 9). TÉTEL: *Az elférő útrendszerek útjai számának maximuma egyenlő az útlefogó pontrendszerek* φ *értékeinek minimumával, feltéve, hogy* $\varphi \geqq 0$.

Ez a tétel lényegében azonos a „max-flow min-cut" tétel egyik esetével, ([1], [5]).

Ha $\varphi = 1$, akkor (9. 3. 9) a MENGER-féle gráftételt adja irányított gráfokra megfogalmazva ([6] 188. o.).

Megjegyzés: A „max-flow min-cut" tétel többi esete ([1], [4], [5]) a (9. 3. 10) alattiak, a **9. 1** alatt említett általánosítások és a **11.** §-beli kiterjesztések segítségével nyerhető.

(9. 3. 10). A (6. 2. 4) TÉTELből kiindulva a (9. 3. 3) TÉTELhez hasonló tételt nyerhetünk olyan utakra, melyeknek alapirányú voltát nem követeljük meg. A (9. 3. 8) feltételeknek eleget tevő ψ függvényt itt is felhasználhatjuk. Ezen a módon eljuthatunk az irányítás nélküli gráfokra vonatkozó „max-flow min-cut" tételhez, valamint a MENGER-féle gráftételhez ([8] 222. o.).

9. 4. Lefogó útrendszerekre vonatkozó tételek

(9. 4. 1). Feltesszük, hogy Γ aciklikus gráf, valamint, hogy az α-pontokhoz csak kifutó, a β-pontokhoz csak befutó élek illeszkednek.

A ψ függvényről feltesszük, hogy minden w $\alpha\beta$-útra $\psi(w) \geqq 0$.

Az utóbbi feltevésből a $\pi = 0$ pontrendszerre való tekintettel következik, hogy Σ_e nem üres.

(9. 4. 2). TÉTEL: *A* (9. 4. 1) *kikötések fennállása esetén, feltéve, hogy* Ω_l *nem üres*

$$\min_{\omega \in \Omega_l} \psi(\omega) = \max_{\pi \in \Sigma_e} \varphi(\pi).$$

A (9. 4. 2) TÉTEL bizonyítása az (1. 3) TÉTEL alapján a (9. 3. 3) TÉTEL bizonyításához hasonlóan végezhető el.

A (9. 4. 2) TÉTELnek két speciális esetét említjük:

(9. 4. 3). Γ-ban csak α- és β-pontok vannak, tehát a gráf páros körüljárású. Ekkor az útrendszerek helyére élrendszerek lépnek, és a tétel állítása, (9. 3. 7)-hez hasonlóan, irányítás nélküli gráfokra is megfogalmazható (vesd össze [5], 214—218. o.):

(9. 4. 4). TÉTEL: *Egy páros körüljárású gráfban az 1-lefogó élrendszerek ψ értékeinek minimuma egyenlő az 1-elférő pontrendszerek φ értékeinek maximumával, feltéve hogy minden x-re $\psi(x) \geqq 0$.*

Megjegyzés: Az 1-lefogó élrendszerek létezése abból a feltevésünkből következik, hogy a gráf minden pontjához illeszkedik él.

A (9. 4. 4) TÉTELnek a $\varphi(X) = 1$ és $\psi(x) = 1$ függvényekhez tartozó esete KÖNIG DÉNEStől származik. [Szóbeli közlés (1932).]

(9. 4. 5). A gráfra a (9. 4. 1) alattiakon kívül további kikötéseket nem teszünk. $\psi(x)$-ről feltesszük, hogy minden α-ponthoz illeszkedő x élre $\psi(x) = 1$, minden más élre pedig $\psi(x) = 0$.

Most minden w $\alpha\beta$-útra $\psi(w) = 1$, és bármely ω útrendszerre $\psi(\omega)$ a rendszerhez tartozó utak számát adja meg. Egy π pontrendszer csak akkor lehet útelférő, ha bármely w $\alpha\beta$-úton a rendszernek legfeljebb egy pontja helyezkedik el.

A (9. 4. 2) TÉTEL most a következő alakban mondható ki:

(9. 4. 6). TÉTEL: *A (9. 4. 1) feltételeket kielégítő gráfban a lefogó útrendszerek útjai számának minimuma egyenlő az útelférő pontrendszerek φ értékeinek maximumával, feltéve hogy létezik lefogó útrendszer.*

E tételnek a $\varphi = 1$ függvényhez tartozó esete tartalmazza DILWORTHnak véges, félig rendezett halmazokra vonatkozó egyik tételét ([2] 161. o. 1. 1).

9. 5. További, irányítás nélküli gráfokra vonatkozó maximum-minimum tételek

(9. 5. 1). Legyen Γ irányítás nélküli gráf. Γ X pontjain, ill. x alapélein legyen értelmezve a *nem negatív* egész értékű $\varphi(X)$, ill. $\psi(x)$ függvény. Élláncon, ill. pontláncon most csak *nem negatív* egész értékű $f(x)$, ill. $p(X)$ függvényeket értünk.

(9. 5. 2). Az $e(x)$ éle f-nek, x alapéle f-nek, f éleinek száma, f X-hez illeszkedő éleinek száma, f-hez tartozó pont, f X-beli terhelése fogalmakat, valamint az $|x, X|$, $|f, X|$ jeleket a **2.** §-nak megfelelően értelmezzük.

Ha f X-hez illeszkedő éleinek száma n, és $n \neq 0$, akkor azt fogjuk mondani, hogy X *f-nek n-nedfokú pontja.* E szerint X f-nek páros-, illetve páratlan fokú pontja, ha $|f, X|$ pozitív egész, ill. tört szám. A

$$\sum_X{}' |f, X| = \sum_X{}' \sum_x{}' f(x)\,(x, X) = \sum_x{}' f(x) \Big(\sum_X{}' (x, X)\Big) = \sum_x{}' f(x)$$

egyenletből megállapíthatjuk, hogy *bármely lánc páratlan fokú pontjainak száma páros.*

Egy láncot most akkor mondunk *zártnak,* ha nincsen páratlan fokú pontja.

Úton olyan f láncot értünk, melyhez van olyan $X_0x_1X_1 \dots X_{n-1}x_nX_n$ ($n \geqq 1$) pont-élsorozat (bejárás), amelyben valamennyi pont különböző, x_i határpontjai X_{i-1} és X_i, $f(x_i) = 1$ ($i = 1, \dots, n$) és $f(x) = 0$, ha x valamennyi x_i-től különbözik. X_0 és X_n az út határpontjai.

Körön olyan k láncot értünk, melyre vagy $k = 0$, vagy amelyhez található olyan e él, hogy $f = k - e$ út. Értelmezésünk szerint körnek tekintjük azt az egyetlen x' alapélt tartalmazó k láncot is, melyre $k(x') = 2$ és $k(x) = 0$, ha $x \neq x'$.

A lánc éleinek számára vonatkozó indukcióval könnyen belátható a (2. 5. 19) tételnek megfelelő alábbi állítás:

(9. 5. 3). *Minden zárt lánc körök összegeként állítható elő.*

Új élek csatolásával, (2. 5. 20) bizonyításhoz hasonlóan egyszerűen igazolható a következő megállapítás:

(9. 5. 4). *Minden nem zárt lánc előállítható egy zárt lánc és közös határpont nélküli utak összegeként.* (Mindegyik út f-nek két páratlan fokú pontját köti össze.)

(9. 5. 5). Legyen $|p, x| = \sum_X{}' p(X)\,(x, X) = \frac{1}{2}\,(p(Y) + p(Z))$, ahol Y és Z az x alapél határpontjai.

A $|p, f|$, $\varphi(p)$ és $\psi(f)$ jeleket a **4. 1** pontnak megfelelően értelmezzük. f *elférő,* ill. *lefogó,* ha minden X-re $|f, X| \leqq \varphi(X)$, ill. $|f, X| \geqq \varphi(X)$. p *elférő,* ill. *lefogó,* ha minden x-re $|p, x| \leqq \psi(x)$, ill. $|p, x| \geqq \psi(x)$.

Az egyetlen alapélt tartalmazó köröket szem előtt tartva könnyen igazolható, hogy p akkor és csak akkor elférő, ill. lefogó, ha minden k körre $|p, k| \leqq \psi(k)$, ill. $|p, k| \geqq \psi(k)$.

Az elférő, ill. lefogó élláncok halmazát F_e, ill. F_l-lel, az elférő, ill. lefogó zárt láncok halmazát G_e, ill. G_l-lel, az elférő, ill. lefogó pontláncok halmazát P_e és P_l-lel jelöljük. Egyszerűen belátható, hogy a felsorolt hat halmaz egyike sem üres.

(9. 5. 6). $$\max_{f \in F_e} \psi(f) = \max_{g \in G_e} \psi(g).$$

BIZONYÍTÁS: Elegendő azt igazolni, hogy ha $f \in F_e$, akkor van olyan g, melyre $g \in G_e$ és $\psi(g) \geqq \psi(f)$.

Legyen f tetszőleges eleme F_e-nek. Ha f zárt, akkor nincs mit igazolni. Ha f nem zárt, akkor tekintsük f-nek egy (9. 5. 4) szerinti $f = g' + \sum_{i=1}^{m} f_i$ előállítását (g' zárt, $m \geqq 1$, az f_i-k közös határpont nélküli utak). Az f_i utak mindegyikét egy-egy zárt g_i lánccal fogjuk helyettesíteni. E célból tekintsünk egy f_i utat. Legyen $X_0 x_1 X_1 \ldots X_{n-1} x_n X_n$ ennek egy bejárása. Alkossuk meg a

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{r} \psi(x_{2j-1}) \qquad (n-1 \leqq 2r-1 \leqq n)$$

és a

$$\psi_2 = \sum_{j=1}^{s} \psi(x_{2j}) \qquad (n-1 \leqq 2s \leqq n)$$

összeget. A g_i láncot így értelmezzük: Ha $\psi_1 \geqq \psi_2$, akkor legyen $g_i(x_{2j-1}) = 2$ $(j = 1, \ldots, r)$ és minden más alapélre $g_i(x) = 0$. Ha $\psi_1 < \psi_2$, akkor legyen $g_i(x_{2j}) = 2$ $(j = 1, \ldots, s)$ és minden más alapélre $g_i(x) = 0$.

Látható, hogy g_i zárt, $\psi(g_i) \geqq \psi(f_i)$, valamint, hogy g_i terhelése X_0 és X_n kivételével minden pontban ugyanakkora mint f_i-é, az X_0 és X_n pontokban pedig $\pm 1/2$-lel különbözik f_i terhelésétől. Ezek alapján — φ egészértéküségét figyelembe véve — megállapíthatjuk, hogy a $g = g' + \sum_{i=1}^{m} g_i$ lánc eleme G_e-nek, valamint, hogy $\psi(g) \geqq \psi(f)$.

A közölt bizonyításhoz hasonlóan igazolható a következő tétel:

(9. 5. 7). $$\min_{f \in F_l} \psi(f) = \min_{g \in G_l} \psi(g).$$

Igazoljuk a következő tételt:

(9. 5. 8). TÉTEL: $$\max_{g \in G_e} \psi(g) = \min_{p \in P_l} \varphi(p).$$

BIZONYÍTÁS: Hozzuk létre a Γ gráfból az irányított Γ' gráfot oly módon, hogy Γ minden x éléhez egy olyan új $\bar{x}$ élt veszünk fel, melynek határpontjai azonosak x határpontjaival, majd pedig az x és $\bar{x}$ éleket úgy irányítjuk, hogy az egyiknek kezdőpontja a másiknak végpontja legyen. (Vesd össze: [1], 217. o. és [5], 211. o.) Legyen $\psi(\bar{x}) = \psi(x)$. Könnyen belátható, hogy bármely Γ-beli körnek megfeleltethető egy ugyanazokon a pontokon áthaladó és ugyanakkora ψ értékkel rendelkező Γ'-beli *pozitív* kör, és megfordítva, minden Γ'-beli *pozitív* körhöz hozzárendelhető egy ugyanazokon a pontokon átmenő és ugyanakkora ψ értékű Γ-beli kör. E megfeleltetés, valamint (9. 5. 3), ill. (2. 5. 19) alapján G_e bármely eleméhez megszerkeszthető egy ugyanakkora ψ értékű Γ'-höz tartozó elférő körlánc, és minden Γ'-höz tartozó elférő körlánchoz található G_e-nek egy ugyanakkora ψ értékkel rendelkező eleme.

Ugyancsak egyszerűen ellenőrizhető hogy egy p pontlánc Γ-ban és Γ'-ben egyidejűleg lefogó [(9. 5. 5), (4. 1. 12)].

Az elmondottak alapján megállapítható, hogy ha Γ'-re az (5. 3) TÉTELt alkalmazzuk, akkor megkapjuk a (9. 5. 8) TÉTELt.

A közölt bizonyításhoz hasonlóan látható be (7. 5. 2)-ből a következő tétel:

(9. 5. 9). TÉTEL: $\min_{g \in G_l} \psi(g) = \max_{p \in P_p} \varphi(p).$

Megjegyzés: A (9. 5. 8) és (9. 5. 9) TÉTELek nehézség nélkül átfogalmazhatók körláncokra és körrendszerekre.

(9. 5. 10). A (9. 5. 6)—(9. 5. 9) tételekből élrendszerekre vonatkozó tételeket származtatunk:

Nevezzünk egy $\varepsilon = (x_1, \ldots, x_n)$ élrendszert *2-elférőnek*, ill. *2-lefogónak*, ha bármely X ponthoz illeszkedő élei számának *fele* nem nagyobb, ill. nem kisebb $\varphi(X)$-nél. A π pontrendszert pedig nevezzük *2-elférőnek*, ill. *2-lefogónak*, ha bármely x élhez illeszkedő pontjai számának *fele* nem nagyobb, ill. nem kisebb $\psi(x)$-nél. Ekkor (9. 5. 6) és (9. 5. 8)-ból, ill. (9. 5. 7) és (9. 5. 9)-ből a következő tételek adódnak:

(9. 5. 11). TÉTEL: *A 2-elférő élrendszerek ψ értékeinek maximuma egyenlő a 2-lefogó pontrendszerek φ értékeinek minimumával.*

(9. 5. 12). TÉTEL: *A 2-lefogó élrendszerek ψ értékeinek minimuma egyenlő a 2-elférő pontrendszerek φ értékeinek maximumával.*

Megjegyzés: A (9. 5. 8) és (9. 5. 11), ill. a (9. 5. 9) és (9. 5. 12) TÉTELek a (9. 3. 7), ill. a (9. 4. 4) TÉTELekből is levezethetők.

10. §.

Ebben a paragrafusban a maximum-minimum tételekből *faktorizációs* tételeket vezetünk le.

10. 1. Irányított gráfok 1-faktorai

(10. 1. 1). Egy *irányított* gráf *1-faktorán* az alapirányú körök egy olyan rendszerét értjük, melynél a gráf minden pontján át a rendszernek egyetlen köre halad keresztül ([9] 922. o.)

Egy 1-faktor köreihez tartozó élek száma a gráf pontjainak számával egyenlő.

Értelmezzük a gráf pontjain és élein a φ, ill. a ψ függvényt oly módon, hogy $\varphi(X) = 1$ és $\psi(x) = 1$ legyen. Ebben az esetben egy $\varkappa$ körrendszer akkor elférő, ill. lefogó, ha minden ponton át legfeljebb, ill. legalább egy köre halad a rendszernek, és a $\psi(\varkappa)$ érték a $\varkappa$-hoz tartozó körök élei, ill. szögpontjai számának összegét adja meg. Ezek szerint megállapíthatjuk, hogy a gráfnak akkor és csak akkor van 1-faktora, ha a $\max_{\varkappa \in A_{\pi}} \psi(\varkappa)$, vagy a $\min_{\varkappa \in A_{l}} \psi(\varkappa)$ érték megegyezik a gráf pontjainak számával. Miután $\varphi(\pi)$ a π pontrendszer pontjainak számát jelenti, (1.2) és (1.3) alapján kimondhatjuk a következő — két duális vonatkozású állítást tartalmazó — tételt:

(10.1.2). *Egy irányított gráfnak 1-faktora akkor és csak akkor létezik, ha a (kör)lefogó, ill. a (kör)elférő pontok minimális, ill. maximális száma egyenlő a gráf pontjainak számával.*

Kevesebb fogalmat felhasználó fogalmazásban:

(10.1.3). TÉTEL: *Egy irányított gráfnak 1-faktora akkor és csak akkor létezik, ha a pontoknak minden olyan $X_1, \dots, X_n$ $(n \geq 1)$ sorozatához (ugyanaz a pont többször is szerepelhet), ahol n kisebb (nagyobb) a gráf pontjainak számánál, létezik olyan alapirányú kör, melyen a felsorolt pontokból a kör pontjainak számánál kevesebb (több) helyezkedik el.*

10.2. Irányítás nélküli gráfok Q-faktorai

(10.2.1). Egy irányítás nélküli gráf *Q-faktorán* köreinek olyan rendszerét értjük, melynél a gráf minden pontján át a rendszernek egyetlen köre halad, és ahol a (9.5.2) alattiaknak megfelelően *kétszögpontú körnek tekintünk egyetlen élt* ([9] 930. o.).

Bármely Q-faktorból létrehozott ama élrendszer, mely a Q-faktor kettőnél több pontot tartalmazó köreinek éleit egyszer, a kétszögpontú köröknek tekintett éleket pedig kétszer tartalmazza, olyan, hogy a gráf minden pontjához az élrendszernek két éle illeszkedik. Megfordítva. bármely olyan élrendszer, amelynek a gráf minden pontjához két éle illeszkedik, egy Q-faktorból a fent leírt módon hozható létre [(9.5.3)]. Azt is megállapíthatjuk, hogy a szóbanforgó élrendszer éleinek száma megegyezik a gráf pontjainak számával.

A gráf pontjain, ill. élein értelmezzük a φ, ill. ψ függvényt megint úgy, hogy $\varphi(X) = 1$ és $\psi(x) = 1$ legyen. Ebben az esetben egy ε élrendszer akkor 2-elférő, ill. 2-lefogó, ha minden ponthoz legfeljebb, ill. legalább *két* éle illeszkedik a rendszernek. A $\psi(\varepsilon)$ érték ε éleinek számát adja meg. Az elmondottakból világos, hogy egy gráfnak akkor és csak akkor van Q-faktora, ha a 2-elférő, ill. 2-lefogó élrendszerek értékeinek maximuma, ill. minimuma megegyezik a gráf pontjainak számával. Mivel a $\varphi(\pi)$ érték π pontjainak számát adja meg, (9.5.11) és (9.5.12) alapján kimondható az alábbi — két duális vonatkozású állítást tartalmazó tétel:

(10.2.2). *Egy irányítás nélküli gráfnak akkor és csak akkor van Q-faktora, ha a 2-lefogó (2-elférő) pontok minimális (maximális) száma megegyezik a gráf pontjainak számával.*

Kevesebb fogalmat felhasználó alakban:

(10. 2. 3). TÉTEL: *Egy irányítás nélküli gráfnak akkor és csak akkor van Q-faktora, ha a pontoknak minden olyan* $X_1, \ldots, X_n$ ($n \geqq 1$) *sorozatához (ugyanaz a pont többször is szerepelhet), ahol n kisebb (nagyobb) a gráf pontjainak számánál létezik olyan él, melyhez a sorozatnak kettőnél kevesebb (több) pontja illeszkedik.*

(10. 2. 3). Megmutatjuk, hogy a (10. 2. 2) tételből egyszerű módon következik a Q-faktorok létezésének TUTTE által adott feltétele ([9] 930. o.).

Nevezzünk egy gráfot $\bar{Q}$-tulajdonságúnak, ha létezik pontjainak az alább felsorolt feltételeket kielégítő Φ_1 és Φ_2 részhalmaza:

(1) Φ_1 és Φ_2-nek nincs közös pontja.

(2) Φ_1-ben több pont van mint Φ_2-ben.

(3) Minden olyan élnek, melynek egyik határpontja Φ_1-hez tartozik, másik határpontja Φ_2-höz tartozik.

(I). Jelöljük a gráf pontjainak számát λ-val. Tegyük fel, hogy van λ-nál kevesebb pontból álló olyan pontrendszer, melynek pontjai közül a gráf bármelyik éléhez legalább kettő illeszkedik. Megmutatjuk, hogy a gráf ekkor $\bar{Q}$-tulajdonságú.

Legyen $\pi = (X_1, \ldots, X_n)$ λ-nál kevesebb pontból álló olyan pontrendszer, melynek minden élhez legalább két pontja illeszkedik, és tegyük fel, hogy π egy lehető legkevesebb pontból álló ilyen rendszer.

Vannak π-ben nem szereplő pontok. Jelöljük ezeket $U_1, \ldots, U_r$-rel ($r \geqq 1$). Minden olyan élnek, melynek egyik határpontja egy U_i pont, másik határpontja π-ben legalább kétszer fordul elő. Jelöljük a π-ben többször előforduló pontokat $V_1, \ldots, V_s$-sel, az egyszer előforduló pontok számát t-vel. n minimális voltából következik, hogy π-ben egyetlen pont sem szerepelhet kettőnél többször. Ezért $n = 2s+t$ és így az $n < \lambda$ feltevésből, valamint az $r+s+t=\lambda$ egyenlőségből $s<r$ következik. A $\Phi_1 = (U_1, \ldots, U_r)$ és $\Phi_2 = (V_1, \ldots, V_s)$ halmazok tehát eleget tesznek az (1), (2) és (3) feltételeknek.

(II). Megfordítva, tegyük fel, hogy a gráf $\bar{Q}$-tulajdonságú, és legyen $\Phi_1 = (U_1, \ldots, U_r)$ és $\Phi_2 = (V_1, \ldots, V_s)$ az (1), (2) és (3) tulajdonságokkal rendelkező két halmaz. Jelöljük a gráf Φ_1 és Φ_2-ben elő nem forduló pontjait $X_1, \ldots, X_t$-vel. Ha ilyen pontok nincsenek, akkor legyen $t=0$. A $\pi = (V_1, \ldots, V_s, V_1, \ldots, V_s, X_1, \ldots, X_t)$ pontrendszer pontjainak száma $n = 2s + t < r+s+t = \lambda$. Nyilvánvaló, hogy a gráf bármely éléhez π-nek legalább két pontja illeszkedik.

(I) és (II)-ból, valamint (10. 2. 3)-ból következik TUTTE említett tétele:

Egy gráfnak akkor és csak akkor van Q-faktora, ha nem $\bar{Q}$-*tulajdonságú.*

11. §.

Ebben a paragrafusban megmutatjuk, hogy *véges* gráfoknál az előzően tárgyalt tételekből hogyan nyerhetők nemcsak egész értékeket felvevő φ és ψ függvények esetén maximum—minimum tételek. Eljárásunkat a (4. 1. 16) TÉTELlel kapcsolatban mutatjuk meg.

11. 1. A láncfogalom általánosítása. Racionális értékű φ és ψ függvények

(11. 1. 1). A **11.** §-ban, ha más kikötést nem teszünk, pont- és élláncon a gráf pontjain, ill. alapélein értelmezett *tetszőleges valós értékeket* felvevő $p(X)$, ill. $f(x)$ függvényt értünk. A $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvényekről sem tesszük fel az egészértékűséget, csak azt kötjük ki, hogy valós értékűek legyenek, valamint, hogy φ *a* **11.** §-*ban ne vegyen fel negatív értékeket.* A φ, ill. ψ függvényre vonatkozó mindazon egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket, melyekben az argumentum nincs feltüntetve minden X-re, ill. minden x-re fennállónak gondoljuk. Az előző paragrafusokban értelmezett mindazon fogalmakat és jeleket, melyekben az egészértékűség nem játszik szerepet — ha másképp nem rendelkezünk — változatlan definícióval a tetszőleges valós értékű függvények esetében is használni fogjuk. Pl. g zárt lánc, ha minden X-re $(g, X) = \sum_x g(x)(x, X) = 0$. Az előzőekben igazolt tételek közül mindazok, melyekben az egészértékűség mellékes, érvényesek maradnak a nem egész értékű esetekben is. Körön továbbra is egy (2. 5. 16) alatt értelmezett egész értékű $k(x)$ láncot értünk. Kiemeljük, hogy a (2. 5. 17) tétel, bizonyításával együtt változatlanul érvényes tetszőleges valós értékű láncokra is. A (2. 5. 18) tételre, valamint ennek **2. 6** alatti, pozitív láncokra vonatkozó megfelelőjére ugyanezt kimondhatjuk azzal a megjegyzéssel, hogy a λ_i számok egész voltát természetesen nem követeljük meg. Az említett **2. 6** alatti tételből a szóbanforgó módosítással létrehozott tételre a (2. 5. 18a) megjelöléssel fogunk hivatkozni.

A G_e, ill. P_l jellel valamennyi pozitív zárt elférő éllánc, ill. pozitív lefogó pontlánc halmazát jelöljük. Az egész értékű pozitív zárt elférő élláncok, ill. az egész értékű pozitív lefogó pontláncok halmazát G_e^*, ill. P_l^*-gal jelöljük. $G_e^* \subset G_e$, $P_l^* \subset P_l$. A φ-re tett kikötések miatt G_e és G_e^* nem üres. (2. 5. 18a) következtében változatlanul érvényes a (4. 1. 12) tétel, és ebből kifolyólag a (4. 1. 13) tétel is. P_l és P_l^* tehát nem üresek. Kiemeljük, hogy (4. 1. 14)-hez hasonlóan belátható, hogy ha $g \in G_e$ és $p \in P_l$, akkor $\psi(g) \leq \varphi(p)$. Erre a megállapításra (4. 1. 14a) megjelöléssel fogunk hivatkozni. Bevezetjük a

$$\max_{g\in G_e} \psi(g) = \mu, \quad \min_{p\in P_l} \varphi(p) = \bar{\mu}$$

$$\max_{g\in G_e^*} \psi(g) = \mu^*, \quad \min_{p\in P_l^*} \varphi(p) = \bar{\mu}^*$$

jeleket. A μ^* és $\bar{\mu}^*$ értékek létezése könnyen belátható, μ és $\bar{\mu}$ létezését a későbbiek során bizonyítjuk be.

(11. 1. 2). *Ha φ és ψ egész értékű függvények, akkor μ és $\bar{\mu}$ léteznek, és $\mu = \bar{\mu}$, továbbá van olyan g_0 és p_0, melyekre $g_0 \in G_e^*$, $p_0 \in P_l^*$ és $\psi(g_0) = \mu$, $\varphi(p_0) = \bar{\mu}$.*

BIZONYÍTÁS: Legyenek g_0 és p_0 olyan láncok, melyekre $g_0 \in G_e^*$, $p_0 \in P_l^*$ és $\psi(g_0) = \mu^*$, $\varphi(p_0) = \bar{\mu}^*$. (4. 1. 16) szerint $\psi(g_0) = \varphi(p_0)$. Ha $g \in G_e$ és $p \in P_l$, akkor (4. 1. 14a) miatt $\psi(g) \leqq \varphi(p_0)$ és $\psi(g_0) \leqq \varphi(p)$. Ezekből $\psi(g) \leqq \psi(g_0)$ és $\varphi(p_0) \leqq \varphi(p)$ következik. Megállapíthatjuk tehát, hogy $\mu = \psi(g_0)$ és $\bar{\mu} = \varphi(p_0)$, valamint hogy $\mu = \bar{\mu}$.

(11. 1. 3). *Ha φ és ψ racionális értékű függvények, akkor μ és $\bar{\mu}$ léteznek és $\mu = \bar{\mu}$, továbbá ha n olyan pozitív egész szám, melyre $\varphi' = n\varphi$ és $\psi' = n\psi$ egész értékű függvények, akkor van olyan g_0 és p_0, melyekre $g_0 \in G_e$, $p_0 \in P_l$, ng_0 és np_0 egész értékűek, és $\psi(g_0) = \mu$, $\varphi(p_0) = \bar{\mu}$.*

BIZONYÍTÁS: (11. 1. 2) szerint φ' és ψ'-höz van olyan g_0' és p_0', melyekre $g_0' \in G_e^{*\prime}$, $p_0' \in P_l^{*\prime}$ és $\psi'(g_0') = \mu' = \bar{\mu}' = \varphi'(p_0')$. (A vesszővel megjelölt menynyiségeknek φ' és ψ'-vel kapcsolatban ugyanaz a jelentésük, mint a megfelelő vessző nélküli jeleknek φ és ψ-vel kapcsolatban.) Könnyen belátható, hogy $g_0 = \frac{1}{n} g_0'$ és $p_0 = \frac{1}{n} p_0'$-re $g_0 \in G_e$ és $p_0 \in P_l$. Ugyancsak belátható, hogy ha $g \in G_e$ és $p \in P_l$, akkor $g' = ng$ és $p' = np$-re $g' \in G_e'$ és $p' \in P_l'$.

Fennállnak a $\psi'(g') \leqq \psi'(g_0')$ és $\varphi'(p') \geqq \varphi'(p_0')$ egyenlőtlenségek. Ezekből n^2-tel való osztás révén $\psi(g) \leqq \psi(g_0)$ és $\varphi(p) \geqq \varphi(p_0)$ adódik. E szerint a μ és $\bar{\mu}$ értékek valóban léteznek: $\mu = \psi(g_0) = \frac{1}{n}\mu'$, $\bar{\mu} = \varphi(p_0) = \frac{1}{n}\bar{\mu}'$. Fennáll a $\mu = \bar{\mu}$ egyenlőség, és biztosítva van a kívánt tulajdonságú g_0 és p_0 láncok létezése.

11. 2. Tetszőleges valós értékű φ és ψ függvények esete

Legyenek φ és ψ — a **11. 2** pontban rögzített — tetszőleges valós értékeket felvevő (a $\varphi \geqq 0$ feltételnek eleget tevő) függvények. Megmutatjuk, hogy a μ és $\bar{\mu}$ értékek ekkor is léteznek, valamint hogy $\mu = \bar{\mu}$.

(11. 2. 1). Tartalmazza az $X_1, \ldots, X_\lambda$, ill. az $x_1, \ldots, x_\nu$ sorozat a gráf valamennyi pontját, ill. alapélét, éspedig mindegyiket egyszer. Tekintsünk egy λ és egy ν dimenziós euklideszi teret, és jelöljük ezeket R_λ, ill. R_ν-vel. A $p(X)$ pontláncot meghatározó, $(p(X_1), \ldots, p(X_\lambda))$ értékrendszerhez egy R_λ-beli, az $f(x)$ élláncot meghatározó $(f(x_1), \ldots, f(x_\nu))$ értékrendszerhez egy R_ν-beli pontot rendelünk, melyeket p, ill. f-fel jelölünk. Ezzel a pont-, illetve élláncokat egy-egyértelműen megfeleltettük az R_λ, ill. az R_ν tér pontjanak. A P_l és G_e halmazoknak R_λ és R_ν egy-egy ponthalmaza felel meg, melyeket P_l, ill. G_e-vel jelölünk.

A P_l és G_e halmazok zártak. Ugyanis ha $f_1, f_2, \ldots \to f$, akkor $(f_n, X) \to (f, X)$ és $|f_n, X| \to |f, X|$. Ezért ha $f_n \in G_e$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor $f \in G_e$. Hasonlóan látható be P_l zártsága is.

A G_e halmaz korlátos. Ez abból következik, hogy ha $g \in G_e$, akkor $0 \leq g \leq 2\varphi_m$, ahol $\varphi_m = \max(\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_\lambda))$. Miután $\psi(g)$ g-nek folytonos függvénye, $\psi(g)$ a G_e korlátos és zárt halmazon felveszi μ maximumát.

A P_l halmaznak kiválasztjuk egy korlátos zárt részhalmazát. E célból P_l minden egyes p eleméhez hozzárendeljük a $p'(X) = \min(p(X), \psi_K)$ pontláncot, ahol $\psi_K = \max\limits_{k \in K} |\psi(k)|$ (K a pozitív körök halmaza). Látható, hogy $p' \in P_l$ és $\varphi(p') \leq \varphi(p)$. Jelöljük P_l valamennyi eleméből a fenti hozzárendelés révén megalkotott p' pontláncok halmazát P_l'-vel. P_l'-nek $[P_l']$ lezázása is korlátos és $[P_l'] \subset P_l$. $\varphi(p)$ a p változónak folytonos függvénye. Ez a $[P_l']$ halmazon felveszi minimumát, amely minimum, a hozzárendelés $\varphi(p') \leq \varphi(p)$ tulajdonsága miatt egyben φ-nek P_l-beli $\bar{\mu}$ minimumát is jelenti.

(11. 2. 2). $\mu = \bar{\mu}$.

Bizonyítás*: Legyenek $\varphi^{(n)}$ és $\psi^{(n)}$ racionális értékű függvények $(n = 1, 2, \ldots)$, és tegyük fel, hogy

(1) $$\lim_{n \to \infty} \varphi^{(n)} = \varphi, \quad \lim_{n \to \infty} \psi^{(n)} = \psi, \quad \varphi^{(n)} \geq 0.$$

(Általában jelentsenek a felső (n) indexszel megjelölt mennyiségek $\varphi^{(n)}$ és $\psi^{(n)}$-nel kapcsolatban ugyanazt, mint a megfelelő index nélküliek φ és ψ-vel kapcsolatban.)

(11. 1. 3) és (11. 2. 1) szerint található olyan $g_0^{(n)} \in G_e^{(n)}$ és $p_0^{(n)} \in P_l^{(n)}$, melyekre

(2) $$\psi^{(n)}(g_0^{(n)}) = \varphi^{(n)}(p_0^{(n)})$$

és $$(n = 1, 2, \ldots)$$

(3) $$p_0^{(n)} \leq \psi_K^{(n)}.$$

* Az itt közölt — az eredetinél lényegesen rövidebb — bizonyítás Czipszer János-tól származik.

A $0 \leq g_0^{(n)} \leq 2\varphi_m^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ egyenlőtlenségekből, valamint (3)- és (1)-ből következik, hogy a $g_0^{(n)}$ és $p_0^{(n)}$ él-, ill. pontláncok halmaza korlátos, és így kiválasztható belőlük egy-egy konvergens részsorozat:

$$g_0^{(i_n)} \to g_0, \quad p_0^{(i_n)} \to p_0.$$

Könnyen belátható, hogy $g_0 \in G_e, p_0 \in P_l$ és $\psi(g_0) = \varphi(p_0)$. Ebből, valamint (4. 1. 14a)-ból következik, hogy $\mu = \bar{\mu}$.

Terminológiajegyzék

(Kiegészítés)

Jelölések

$[w, X]$, $[\omega, X]$, $[\pi, w]$ (9. 2. 1); $|\pi, k|$, $|k, X|$, $|\kappa, X|$ (9. 2. 4); $|p, X|$ (9. 5. 4). $\tilde{P}_l$, $\tilde{G}_e$ (6. 1. 1); $\tilde{K}$, $\tilde{\Lambda}_e$ (6. 2. 1); $\hat{\Pi}_l$ (6. 2. 3); G_l (7. 3. 4); P_e (7. 3. 1); Λ_l (7. 5. 1); R_e, R_l (9. 1. 1); Ω_e, Ω_l (9. 2. 2); Σ_e, Σ_l (9. 2. 3); F_e, Q_l (9. 5. 1).

Fogalmak

α-pont (9. 2. 1); aciklikus gráf (9. 3. 5); alapirányú út (9. 2. 1); $\acute{a}$-lefogó (6. 1. 1), (6. 2. 3); $\acute{a}$-körlánc (6. 2. 1); $\acute{a}$-körlefogó (6. 2. 1); $\acute{a}$-körrendszer (6. 2. 3); $\alpha\beta$-út (9, 2. 1); β-pont (9. 2. 1) elférő pontlánc (7. 3. 1); elférő útrendszer (9. 2. 2); 1-elférő (9. 3. 6); 2-elférő (9. 5. 6); elérhető pont (8. 2. 2), (8. 3. 1); élrendszer (9. 3. 6); éllefogó pontlánc (9. 5. 3); 1-faktor (10. 1. 1); Q-faktor (10. 2. 1); lefogó körlánc (7. 5. 1); lefogó lánc (7. 1. 1); lefogó útrendszer (9. 2. 2); 1-lefogó (9. 3. 6); 2-lefogó (9. 5. 6); l-kitérő (7. 1. 1); lUV-kitérő (7. 1. 1); pont-élrendszer (9. 1. 1); útrendszer (9. 2. 1); útelférő (9. 2. 3); útlefogó (9. 2. 3); véges lánc **8. 1**.

Kiegészítés

A **9. 1** részben utaltunk azokra az (1. 2) és (1. 3) TÉTELekből nyerhető tételekre, melyeknél a φ függvényt a gráf *alapélein* értelmezzük. Időközben kiderült, hogy e tételeknek közvetlen, az (1. 2) és (1. 3) TÉTELek bizonyításához hasonló felépítésű igazolása sokkal rövidebben végezhető el, mint maguknak az (1. 2) és (1. 3) TÉTELeknek a bizonyítása. Az éleken értelmezett φ függvénnyel kapcsolatos tételekből azonban egy FORD és FULKERSONtól származó — (9. 1. 4) alatt már alkalmazott — eljárással ([5] 212. o.) igen egyszerűen nyerhetők azok a tételek, melyeknél a φ függvény a pontokban van értelmezve. Ezen az úton az (1. 2) és (1. 3), ill. a (4. 1. 16) és (7. 3. 7) TÉTELeknek a dolgozatunkban közöltnél lényegesen egyszerűbb bizonyításához juthatunk.

A következőkben a (4. 1. 16), ill. az (1. 2) TÉTELlel kapcsolatban közöljük ezt az egyszerűbb bizonyítást. Tárgyalásunk során az előző paragrafusokból csak az alább felsorolt részek egyes fogalmait és tételeit használjuk fel: **1. §**, **2. 1**, (2. 2. 1)—(2. 2. 8), **2. 3**, (2. 4. 1)—(2. 4. 8), **2. 5**, **2. 6**, (3. 1. 1), **4. 1**, **5. §**.

K. 1. Jelentsen $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ az irányított Γ gráf x alapélein értelmezett — a **K. 1**, **K. 2** és **K. 3** szakaszokban rögzített — egész értékű függvényeket. Feltesszük, hogy $\varphi \geqq 0$. Azokat az x alapéleket, melyekre $\varphi(x)=0$ *0-éleknek* nevezzük. Ha $f(x)$ tetszőleges éllánc, akkor $\varphi(f)=\sum_x' f(x)\varphi(x)$ és $\psi(f)= = \sum_x' f(x)\psi(x)$.

A $h(x)$ és $f(x)$ *pozitív* láncok illeszkedési rendjén a $|h, f| = \sum_x' h(x)f(x)$ értéket értjük.

Az $f(x)$ láncot φ-re vonatkozóan *elférőnek*, (röviden: elférő) mondjuk, ha minden x-re $|f(x)| \leqq \varphi(x)$, azaz röviden, ha $|f| \leqq \varphi$. G^{φ}-vel az elférő pozitív zárt láncok halmazát jelöljük. A $g=0$ láncra, valamint Γ végességére való tekintettel megállapítható, hogy G^{φ} nem üres véges halmaz.

A **K. 1**, **K. 2** és **K. 3** szakaszokban a $h(x)$ pozitív élláncot *lefogónak*, ill. *körlefogónak* nevezzük, ha minden pozitív zárt g láncra, ill. minden pozitív k körre $|h, g| \geqq \psi(g)$, ill. $|h, k| \geqq \psi(k)$. (4. 1. 12)-hoz hasonlóan belátható, hogy a lefogó és körlefogó pozitív élláncok halmaza egymással azonos. E halmazt $H^{\prime}$-lel jelöljük. (4. 1. 13)-hoz hasonlóan belátható, hogy $H^{\prime}$ nem üres.

(4. 1. 14)-hez hasonlóan belátható a következő állítás:

(K. 1. 1). *Ha* $g \in G^{\varphi}$ *és* $h \in H^{\prime}$, *akkor* $\psi(g) \leqq \varphi(h)$.

A **K. 2** és **K. 3** szakaszokban a (4. 1. 16)-nak megfelelő alábbi tételt igazoljuk:

(K. 1. 2). TÉTEL:

$$\max_{g \in G^{\varphi}} \psi(g) = \min_{h \in H^{\prime}} \varphi(h).$$

K. 2. A **K. 1**-ben foglaltakból nyilvánvaló, hogy a (K. 1. 2)-ben szereplő szélső értékek léteznek. Legyen $a \in G^{\varphi}$ és legyen $\psi(a) = \max_{g \in G^{\varphi}} \psi(g)$. A **K. 2** és **K. 3** szakaszokban az a láncot rögzítettnek gondoljuk. (K. 1. 1) miatt (K. 1. 2) bizonyításához elegendő egy olyan $h(x)$ láncot szerkeszteni, melyre $h \in H^{\prime}$ és $\varphi(h) = \psi(a)$. Egy ilyen $h(x)$ szerkesztését több lépésben végezzük el.

(K. 2. 1). Egy $c(x)$ láncot *UV-kitérőnek* nevezünk az $U=V$ esetben, ha $c=0$, az $U \neq V$ esetben, ha c UV-út és $0 \leqq a+c \leqq \varphi$.

Egy k kört *körkitérőnek* nevezünk, ha $0 \leqq a+k \leqq \varphi$. (A $k=0$ kör is körkitérő.)

Értelmezésünkből egyszerűen belátható az alábbi három megállapítás:

(K. 2. 2). *A c UV-kitérőt annak egy tetszőleges Z pontja a c_1 UZ-kitérőre és a c_2 ZV-kitérőre bontja szét* ($c_1+c_2=c$, $c_1\subset c$, $c_2\subset c$).

(K. 2. 3). *Ha c_1 UV-kitérő, c_2 VW-kitérő és a c_1 és c_2 kitérőknek V-n kívül nincs közös pontjuk, akkor c_1+c_2 UW-kitérő.*

(K. 2. 4). *Ha c_1 UV-kitérő, c_2 VU-kitérő és c_1 és c_2-nek U és V-n kívül nincs más közös pontja, akkor c_1+c_2 körkitérő.*

(K. 2. 5). *Ha k körkitérő, akkor $\psi(k)\leqq 0$.*

BIZONYÍTÁS: Ha k körkitérő, akkor $a+k\in G'$, tehát $\psi(a+k)=\psi(a)+$ $+\psi(k)\leqq\psi(a)$.

(K. 2. 6). *Ha c UV-kitérő és az $e=VW$ él pedig VW-kitérő, akkor van olyan c' UW-kitérő, melyre $\psi(c)+\psi(e)\leqq\psi(c')$.*

BIZONYÍTÁS: Ha W nem pontja c-nek, akkor (K. 2. 3) szerint $c'=c+e$ megfelelő. Ha W c-nek pontja, akkor (K. 2. 2) szerint W c-t a c_1 UW-kitérőre és a c_2 WV-kitérőre bontja szét. (K. 2. 4) szerint $k=c_2+e$ körkitérő, tehát (K. 2. 5) alapján $\psi(k)=\psi(c_2)+\psi(e)\leqq 0$. Ezért a $c_1=c+e-k$ UW-kitérőre $\psi(c_1)=\psi(c)+\psi(e)-\psi(k)\geqq\psi(c)+\psi(e)$.

K. 3. A gráf egy X pontjához tartozó $L(X)$ halmazon valamennyi UX-kitérő halmazát értjük, ahol U a gráf tetszőleges pontja. A $c=0$ XX-kitérőre, valamint Γ véges voltára való tekintettel megállapítható, hogy $L(X)$ nem üres véges halmaz. E szerint

$$s(X)=\max_{c\in L(X)}\psi(c)$$

minden X pontra létező véges érték.

(K. 3. 1). *Ha az $e=XX'$ él XX'-kitérő, akkor $s(X)+\psi(e)\leqq s(X')$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen c olyan UX-kitérő, melyre $\psi(c)=s(X)$. (K. 2. 6) szerint van olyan c' UX'-kitérő, melyre $\psi(c)+\psi(e)\leqq\psi(c')$. Mivel $\psi(c')\leqq$ $\leqq s(X')$, azért $s(X)+\psi(e)\leqq s(X')$.

(K. 3. 2). Jelöljük a 0-élt tartalmazó pozitív körök ψ értékeinek maximumát ψ_1^0-gyel, és legyen $\psi^0=\max(0,\psi_1^0)$.

A $h(x)$ élláncot a következőképpen értelmezzük:

(1) ha $\varphi(x)=0$, akkor legyen $h(x)=\psi^0$,

(2) ha $\varphi(x)>0$ és $a(x)=0$, akkor legyen $h(x)=0$,

(3) ha $a(x)>0$, akkor legyen $h(x)=s(X)-s(X')+\psi(x)$, ahol X és X' az x alapél kezdő, ill. végpontja,

(K. 3. 3). $h\geqq 0$.

BIZONYÍTÁS: Csak a (K. 3. 2) alatti (3) esettel kell foglalkozni. Legyen x olyan él, melyre $a(x) > 0$. x kezdő és végpontja X és X', és legyen az $e = X'X$ él alapéle x. Ekkor $e(x) = -1$, $\psi(e) = -\psi(x)$. e $X'X$-kitérő, mert $0 \leqq a + e \leqq a \leqq \varphi$. (K. 3. 1) szerint $s(X') + \psi(e) \leqq s(X)$, tehát $h(x) = s(X) - s(X') + \psi(x) \geqq 0$.

(K. 3. 4). *Ha* $a(x) < \varphi(x)$, *és* x *kezdő és végpontja* X *és* X', *akkor* $s(X) - s(X') + \psi(x) \leqq 0$.

BIZONYÍTÁS: Legyen az $e = XX'$ él alapéle x. Ekkor $e(x) = 1$, $\psi(e) = \psi(x)$. e XX'-kitérő, mert $0 \leqq a + e \leqq \varphi$. (K. 3. 1) szerint $s(X) + \psi(e) \leqq s(X')$, tehát $s(X) - s(X') + \psi(x) \leqq 0$.

(K. 3. 4)-ből következik az alábbi két állítás:

(K. 3. 5). *Ha* $\varphi(x) > 0$, $a(x) = 0$ *és* X *és* X' *az* x *alapél kezdő- és végpontja, akkor* $h(x) \geqq s(X) - s(X') + \psi(x)$.

(K. 3. 6). *Ha* $0 < a(x) < \varphi(x)$, *akkor* $h(x) = 0$.

(K. 3. 7). $h(x)$ *lefogó.*

BIZONYÍTÁS: Elegendő h körlefogó voltát igazolni. Legyen k tetszőleges pozitív kör. A $|h, k| \geqq \psi(k)$ egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk. Feltehető, hogy $k \neq 0$.

Ha k tartalmaz egy 0-élt, azaz van z, melyre $k(z) = 1$ és $\varphi(z) = 0$, akkor $|h, k| = \sum_x h(x) k(x) \geqq h(z) = \psi^0 \geqq \psi(k)$.

Ha k nem tartalmaz 0-élt, akkor legyen k egy bejárása $\xi = (X_0 e_1 X_1 \ldots \ldots X_{n-1} e_n X_n)$ $(X_n = X_0)$. Jelöljük e_i alapélét x_i-vel. (K. 3. 2) és (K. 3. 5) szerint $h(x_i) \geqq s(X_{i-1}) - s(X_i) + \psi(x_i)$. $(i = 1, \ldots, n)$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva $|h, k| = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) = \psi(k)$ adódik.

(K. 3. 8). *Ha a* k *pozitív kör csupa* a*-élből áll, akkor* $|h, k| = \psi(k)$.

BIZONYÍTÁS: Az előző bizonyítás jelöléseit használva $h(x_i) = s(X_{i-1}) - s(X_i) + \psi(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk a bizonyítandó állítást.

(K. 3. 9). $\varphi(h) = \psi(a)$.

BIZONYÍTÁS: Minden x-re $h(x)\varphi(x) = h(x)a(x)$. Ugyanis, ha $h(x) = 0$, akkor nyilvánvaló állításunk, ha $h(x) \neq 0$ és $a(x) = 0$, akkor $\varphi(x) = 0$ miatt igaz, ha $h(x) \neq 0$ és $a(x) \neq 0$, akkor (K. 3. 2) és (K. 3. 6)-ból következik helyessége.

2.6 szerint $a = \sum_{i=1}^{n} k_i$, $k_i \subset a$, k_i pozitív kör $(i = 1, \ldots, n)$. Ebből

(K. 3. 9) bizonyításának és (K. 3. 8) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\varphi(h) = \sum_x' h(x)\varphi(x) = \sum_x' h(x)a(x) = \sum_x' h(x)\left(\sum_{i=1}^{n}{}' k_i(x)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}{}'\left(\sum_x' h(x)k_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n}{}' |h, k_i| = \sum_{i=1}^{n}{}' \psi(k_i) = \psi(a).$$

Ezzel a (K. 1. 2) TÉTEL bizonyítását befejeztük.

K. 4. A (4. 1. 16) TÉTEL bizonyítását (K. 1. 2)-re vezetjük vissza. E célból [vö. [5] 212. o. és (9. 1. 4)] Γ-ból oly módon hozunk létre egy új Γ' gráfot, hogy Γ minden egyes X pontját egy X^- és egy X^+ pontra „hasítjuk ketté", majd X^--hoz illesztjük az eredetileg X-be befutó, X^+-hoz pedig az X-ből kifutó éleket, és egy új, z_X-szel jelölt éllel összekötjük a X^- pontot az X^+ ponttal (z_X-nek X^- a kezdő- és X^+ a végpontja). Γ' tehát az X^- és X^+ pontokból, a Γ gráf x alapéleiből és az új z_X alapélekből áll. E konstrukció legfontosabb következménye, hogy Γ' minden pozitív köre egy X^- (ill. X^+) ponttal együtt tartalmazza az X^+ (ill. az X^-) pontot és a z_X élt. Ez lehetővé teszi, hogy Γ és Γ' pozitív körei (s ezzel együtt pozitív zárt láncai) között egy természetesen adódó kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítsünk. Ugyancsak kézenfekvő megfeleltetés létesíthető Γ pozitív pontláncai és Γ' azon pozitív élláncai között, melyek csak az új z_X alapéleken vesznek fel pozitív értékeket.

A (4. 1. 16)-ban szereplő — a Γ gráf pontjain, ill. élein értelmezett — $\varphi(X)$ és $\psi(x)$ függvényből egy-egy, a Γ' élein értelmezett φ' és ψ' függvényt alkotunk meg: az eredeti x éleken $\varphi'(x)$ értékét elegendő nagynak választjuk, pl. legyen $\varphi'(x) = (1+\varphi_m)(1+\mu_1)$ $[\varphi_m = \max\limits_{x\in\Phi} \varphi(X)$, $\mu_1 = \min\limits_{p\in P_1} \varphi(p)]$ és legyen $\psi'(x) = \psi(x)$, az új z_X éleken pedig legyen $\varphi'(z_X) = \varphi(X)$ és $\psi'(z_X) = 0$.

Az említett megfeleltetések segítségével könnyen belátható, hogy a Γ', φ' és ψ'-re alkalmazott (K. 1. 2) TÉTEL a Γ, φ és ψ-re vonatkozó (4. 1. 16) TÉTEL érvényességét igazolja.

K. 5. A (4. 1. 16) TÉTELből az **5.** § szerint nyerjük az (1. 2) TÉTELt.

A fenti eljáráshoz hasonló módon nyerhetünk a (7. 3. 7) és az (1. 3) TÉTELre is egyszerű bizonyítást. (Ez a bizonyítás — alkalmas átalakítással — legnagyobb részében a (K. 1. 2)-re adott bizonyítással összevonva is elvégezhető.)

A (K. 1. 2) TÉTEL érvényessége a **8.** §-ban foglaltakhoz hasonlóan — a bizonyítás egyszerű módosításával — végtelen gráfokra is kiterjeszthető. A bizonyítás más irányú átalakításával pedig elérhető, hogy a tétel fennállása nemcsak egész értékeket felvevő φ, ψ függvényekre és élláncokra is igazolást nyerjen. (Ily módon elkerülhető a **11.** §-ban alkalmazott kiterjesztési eljárás.)

IRODALOM

[1] G. B. Dantzig and D. R. Fulkerson: On the max-flow min-cut theorem of networks, Linear Inequalities and Related Systems, *Annals of Math. Study*, **38** (1956) 215—221.

[2] R. P. Dilworth: A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Math.*, **51** (1950) 161—166.

[3] Egerváry J.: Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól, *Mat. és Fiz. Lapok*, **XXXVIII** (1931) 16—27.

[4] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson: Maximal flow through a network, *Canadian J. of Math.*, **VIII** (1956) 399—404.

[5] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson: A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, *Canadian J. of Math.*, **IX** (1957) 210—218.

[6] T. Gallai (Grünwald): Ein neuer Beweis eines Mengerschen Zatzes, *J. of the London Math. Soc.*, **13** (1938) 188—192.

[7] D. König: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig, (1936).

[8] K. Menger: *Kurventheorie*, Leipzig und Berlin, (1932) 221—228.

[9] W. T. Tutte: The 1-factors of oriented graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953) 922—931.

(Beérkezett: 1957. IX. 7. A „Kiegészítés" beérkezett: 1957. XII. 23.)

A GEOMETRIAI OBJEKTUMOK ELMÉLETÉHEZ

(I. RÉSZ)

ACZÉL JÁNOS (Debrecen)

BEVEZETÉS

0. 1. § Értelmezések, történet, célkitűzés

1. DEFINÍCIÓ: 1937-ben jelent meg J. A. SCHOUTEN—J. HAANTJES [1] (ld. Irodalomjegyzék) és A. WUNDHEILER [2] cikke, melyek meglevő és részben már így nevezett fogalmakból és eredményekből (ezekre nézve lásd pl. [1], [18], [55]) általánosítva, mai alakjában, precízen definiálják a *geometriai objektum* fogalmát. Ezt mi itt a következő formában ismertetjük (vö. [55]).

Az *n-komponensű*

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mennyiség, mely az *m-dimenziós* tér egy pontjában van értelmezve, *geometriai objektum*, ha e *tér*

$$\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\}$$

koordinátarendszerének egy (reguláris)

$$\bar{\xi}^k = \varphi^k(\xi^j), \qquad \left|\frac{\partial \bar{\xi}^k}{\partial \xi^j}\right| \neq 0$$

$j, k = 1, 2, \ldots, m$ *koordinátatranszformációjánál** a

$$\bar{z} = f[z, \varphi^k(\xi^j)]$$

* Részletesen kiírva

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^1 &= \varphi^1(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m), \\ \bar{\xi}^2 &= \varphi^2(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \bar{\xi}^m &= \varphi^m(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m), \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{\xi}^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \bar{\xi}^1}{\partial \xi^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\xi}^1}{\partial \xi^m} \\ \frac{\partial \bar{\xi}^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \bar{\xi}^2}{\partial \xi^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\xi}^2}{\partial \xi^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \bar{\xi}^m}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \bar{\xi}^m}{\partial \xi^2} & \cdots & \frac{\partial \bar{\xi}^m}{\partial \xi^m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

A következőkben is gyakran fog egy szimbólum az indexek összes megengedett értékeinek behelyettesítésével kapható összesség helyett állni.

transzformációs képlettel transzformálódik, ahol *az f funkcionális alakja* már *független a koordinátarendszertől.* A $\varphi^k(\xi^j)$ függvényekről fel szokták tenni, hogy *analitikusak* (vagy hogy annyiszor folytonosan deriválhatók, ahányadik derivált az adott meggondolásban előfordul). Így $\bar{z}$-nak a $\varphi^k(\xi^j)$ *függvényektől* való függése helyettesíthető *megszámlálhatóan sok paramétertől,* pl. e függvények Taylor sorának együtthatóitól való függéssel.

Ha e $\varphi^k(\xi^j)$ függvényektől való függés már *véges sok* (p darab), ezek által már meghatározott

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\} = \{\sigma_1[\varphi^k(\xi^j)], \sigma_2[\varphi^k(\xi^j)], \ldots, \sigma_p[\varphi^k(\xi^j)]\} = S$$

paramétertől való függéssel leírható:

$$\bar{z} = f(z, S), \tag{1}$$

úgy *speciális geometriai* objektummal van dolgunk. — Így speciális r-ed *osztályú* az objektum, ha

$$S = \{\xi^j, \bar{\xi}^k, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k\},$$

ahol

$$A_{j_1 j_2 \ldots j_q}^k = \frac{\partial^q \bar{\xi}^k}{\partial \xi^{j_1} \partial \xi^{j_2} \cdots \partial \xi^{j_q}}\bigg|_{\xi_j = \xi_j^0}, \quad |A_j^k| \neq 0, \quad \begin{matrix} k, j, j_i = 1, 2, \ldots, m \\ q = 1, 2, \ldots, r \end{matrix}$$

$$p = m\left[2 + m + \binom{m+1}{2} + \cdots + \binom{m+r-1}{r}\right] = m\left[\binom{m+r}{r} + 1\right]$$

tehát, ha

$$\bar{z} = f(z, \xi^j, \bar{\xi}^k, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k). \tag{2}$$

V. Wagner [16], S. Gołąb [26] és A. Nijenhuis [55] kimutatták, hogy elég az ún. *tiszta differenciális geometriai* (röviden *differenciális geometriai,* vagy *differenciálgeometriai*) *objektum*okkal foglalkozni, amelyeknél a (2) transzformációs képletben $\xi^j, \bar{\xi}^k$ *nem szerepel:*

$$\bar{z} = f(z, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k), \quad \left(p = m\left[\binom{m+r}{r} - 1\right]\right), \tag{3}$$

mert ezekre visszavezethetők a nem tiszta differenciális geometriai objektumok is. A visszavezetés az ekvivalencia fogalma segítségével történik.

Egy y objektum *függvénye* a z objektumnak, ha

$$y = u(z), \tag{4}$$

ahol az u függvény (mely m darab m-változós függvény összességét jelenti) *független a koordinátarendszertől* ([35], [55]). *y ekvivalens* z-vel, ha a (4)-ben szereplő u függvény ezen kívül *egyértelműen megfordítható:*

$$z = u^{-1}(y).$$

A nem tiszta differenciális geometriai objektumok abban az értelemben vezethetők vissza a tiszta differenciálisokra, hogy ha az előbbiekhez a koordinátákat komponensekként hozzávesszük, az így nyert geometriai objektum ekvivalens lesz egy tiszta differenciális geometriai objektumból ugyancsak a koordináták hozzávételével előálló geometriai objektummal. Így mi is csak differenciálgeometriai objektumokkal (a következőkben röviden: objektumokkal) foglalkozunk. Ez annál is előnyösebb, mert míg a koordinátatranszformációk és velük az

$$S = \{\xi^j, \bar{\xi}^k, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k\}$$

paraméterek két transzformáció összetételére nézve nem alkotnak csoportot (félcsoportot se) csak ún. gruppoidot [55] (az S-sel jellemzett koordinátatranszformáció után csak akkor végezhető el a

$$T = \{\eta^k, \bar{\eta}^l, B_k^l, B_{k_1 k_2}^l, \ldots, B_{k_1 k_2 \ldots k_r}^l\}, \qquad \left(B_{k_1 k_2 \ldots k_q}^l = \frac{\partial^q \bar{\eta}^l}{\partial \eta^{k_1} \partial \eta^{k_2} \cdots \partial \eta^{k_q}} \bigg|_{\eta^k = \overset{0}{\eta}{}^k} \right)$$

-val jellemzett második koordinátatranszformáció, ha $\eta^k = \bar{\xi}^k$), addig a differenciálgeometriai objektumoknál a paraméterek a koordinátatranszformációk összetételére, mint műveletre nézve mindig csoportot alkotnak:

$$S \circ T = \{A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k\} \circ \{B_k^l, B_{k_1 k_2}^l, \ldots, B_{k_1 k_2 \ldots k_r}^l\} =$$
$$= \{C_j^l, C_{j_1 j_2}^l, \ldots, C_{j_1 j_2 \ldots j_r}^l\},$$

ahol pl.

$$C_j^l = \sum_{k=1}^{m} B_k^l A_j^k = B_k^l A_j^k, \qquad C_{j_1 j_2}^l = B_k^l A_{j_1 j_2}^k + B_{k_1 k_2}^l A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2}$$

stb. az összetett függvények deriválásának szabálya szerint. (Szorzásban ismételten előforduló indexre nézve mindig összegezünk.) — E csoportnak gyakran *alcsoportjait és az azokhoz tartozó objektumokat* fogjuk vizsgálni.

Abból ugyanis, hogy az (1)-ben (vagy (3)-ban) szereplő f függvény független a koordinátatranszformációtól, és abból, hogy két koordinátatranszformáció egymás után való elvégzése ugyanolyan hatással kell legyen z-re, mint az egyesített koordinátatranszformáció, következik, hogy

$$\bar{\xi}^k = \varphi^k(\xi^j), \quad \bar{\bar{\xi}}^l = \psi^l(\bar{\xi}^k) = \psi^l[\varphi^k(\xi^j)]$$

-nál

(5) $$f[f(z, S), T] = f(z, S \circ T),$$

illetve

(6) $$f[f(z, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k, \ldots, A_{j_1 j_2 \ldots j_r}^k), B_k^l, B_{k_1 k_2}^l, \ldots, B_{k_1 k_2 \ldots k_r}^l] =$$
$$= f(z, C_j^l, C_{j_1 j_2}^l, \ldots, C_{j_1 j_2 \ldots j_r}^l)$$

lesz, ahol

$$A^k_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \frac{\partial^q \bar{\xi}^k}{\partial \xi^{j_1} \partial \xi^{j_2} \cdots \partial \xi^{j_q}}\bigg|_{\xi^j = \xi^j_0}, \qquad B^l_{k_1 k_2 \ldots k_q} = \frac{\partial^q \bar{\bar{\xi}}^l}{\partial \bar{\xi}^{k_1} \partial \bar{\xi}^{k_2} \cdots \partial \bar{\xi}^{k_q}}\bigg|_{\bar{\xi}^k = \bar{\xi}^k_0},$$

$$C^l_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \frac{\partial^q \bar{\bar{\xi}}^l}{\partial \xi^{j_1} \partial \xi^{j_2} \cdots \partial \xi^{j_q}}\bigg|_{\xi^j = \xi^j_0}, \text{ pl. } C^l_j = B^l_k A^k_j,\ C^l_{j_1 j_2} = B^l_k A^k_{j_1 j_2} + B^l_{k_1 k_2} A^{k_1}_{j_1} A^{k_2}_{j_2}, \ldots$$

Az *egydimenziós* objektumoknál megfelelő jelöléseink a következők lesznek:

(I) $$\bar{\xi} = \varphi(\xi), \qquad \alpha_q = \frac{d^q \bar{\xi}}{(d\xi)^q}\bigg|_{\xi = \xi_0}, \qquad \alpha_1 \neq 0,$$

(7) $$\bar{z} = f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

(8) $$f[f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r] = f(z, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r),$$

(II) $$\bar{\bar{\xi}} = \psi(\bar{\xi}) = \psi[\varphi(\xi)], \ \beta_q = \frac{d^q \bar{\bar{\xi}}}{(d\bar{\xi})^q}\bigg|_{\bar{\xi} = \bar{\xi}_0}, \ \gamma_q = \frac{d^q \bar{\bar{\xi}}}{(d\xi)^q}\bigg|_{\xi = \xi_0},$$

pl. $\gamma_1 = \beta_1 \alpha_1, \ \gamma_2 = \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_1^2, \ \gamma_3 = \beta_1 \alpha_3 + 3\beta_2 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_3 \alpha_1^3, \ldots$

(az összetett függvény differenciálási szabálya szerint).

Látjuk, hogy a többkomponensű z mennyiséget egy (indexnélküli) betűvel jelöltük. Gyakran célszerű lesz a direkt összeg és szorzat

(9) $$y \pm z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \pm z_1 \\ y_2 \pm z_2 \\ \vdots \\ y_n \pm z_n \end{pmatrix}$$

és

(10) $$y \cdot z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_1 \\ y_2 z_2 \\ \vdots \\ y_n z_n \end{pmatrix}$$

jelöléseit is használnunk.

Azonos komponens-, dimenzió- és osztályszámú geometriai objektumokat gyakran azonos *típusúak*nak fogunk nevezni.

Néha fontosak a *lineáris* geometriai objektumok, amelyeknek transzformációs képletében (pl. (1), (2), (3), (7)-ben) z első fokon szerepel.

Így például a *sűrűségek*, köztük a

$$(\overline{dr}) = (dr)\,|A^k_j| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m)$$

transzformációs képletű térfogatdifferenciálok egykomponensű m-dimenziós elsőosztályú lineáris (differenciálgeometriai) objektumok; a *vektorok*, köztük a

$$\bar{r}^k = A^k_j r^j \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

transzformációs képletű kontravariáns vektorok m-komponensű m-dimenziós elsőosztályú lineáris objektumok; a *tenzorok*, köztük a

$$\bar{a}_{ij} = \bar{A}_i^k \bar{A}_j^l a_{kl} \qquad \left(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ A_i^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i}\right)$$

transzformációs képletű kétszer kovariáns tenzorok (ilyenek a kvadratikus alakok együtthatói) m^2 — (általában m^n) — komponensű m-dimenziós elsőosztályú lineáris objektumok; *az affin leképezés objektuma* a

$$\bar{\Gamma}_{ij}^q = A_n^q \bar{A}_i^k \bar{A}_j^l \Gamma_{kl}^n + A_k^q \bar{A}_{ij}^k \qquad \left(i, j, q = 1, 2, \ldots, m;\ \bar{A}_{ij}^k = \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial \bar{\xi}^i \partial \bar{\xi}^j}\right)$$

transzformációs képlettel (ilyen a másodfajú Christoffel-szimbólum) m^3-komponensű m-dimenziós másodosztályú lineáris objektum; viszont például egy kétdimenziós kontravariáns vektor két komponensének $t = \frac{v^2}{v^1}$ hányadosa a

$$\bar{t} = \frac{A_2^2 t + A_1^2}{A_2^1 t + A_1^1}$$

transzformációs képlet szerint transzformálódik és így egykomponensű kétdimenziós elsőosztályú *nemlineáris* differenciálgeometriai objektum.

2. KLASSZIFIKÁCIÓELMÉLET: Az adott típusú objektumok meghatározásával (ekvivalenciától eltekintve teljes felsorolásával) foglalkozó klasszifikációelmélet a legnagyobb terjedelemben kidolgozott ága a geometriai objektumok elméletének, mégis a tárgyban rejlő rendkívüli nehézségek miatt mindezideig csak igen primitív objektumtípusok teljes felsorolása sikerült.

Így S. GOŁĄB [4], [5] meghatározta az ún. *Δ-típusú objektumokat*, melyeknek

$$\bar{z} = f(z, |A_j^k|)$$

a transzformációképlete. Ez lényegében azonos feladat az *egykomponensű, egydimenziós, elsőosztályú objektumok* meghatározásával. S. GOŁĄB az f függvényt folytonosan differenciálhatónak tételezte fel.

J. S. DUBNOV [24] és G. PENSOV [19], [38] a (7)-ben szereplő f függvény *analiticitásá*t feltételezve intézték el az összes *egykomponensű egydimenziós* objektumokat, amennyiben bebizonyították, hogy ezek *legfeljebb harmadosztályúak lehetnek* és meghatározták az *első-, másod- és harmadosztályú* ilyen objektumokat (mindenesetre az elsőosztályúakra adott felsorolásuk nem teljes). Ők V. WAGNER [16], [34] nyomán a problémát a Lie-csoportok elméletére vezették vissza. Mint S. GOŁĄB [18], [27], [36] rámutatott, e módszerrel nem is csökkenthető az analiticitás feltétele. Ő direkt módszerével, mely lényegében függvényegyenleteknek differenciálással való megoldásán alapul, elérte és élesítette ugyanezen eredményeket, az f függvényről ismét csak *folytonos* *differenciálhatóságot* tételezve fel ([4], [5], [18], [23], [27]). Így ő is bebizonyította, hogy nincs harmadiknál magasabb osztályú egykomponensű egydimenziós objektum és meghatározta az első-, másod- és harmadosztályúakat. Ezekről kimutatta, hogy a skalárokon és biskalárokon (koordinátatranszformációnál invariáns, ill. sign $|A_j^k|$, speciálisan sign α_1-gyel szorzódó objektumokon) kívül mind ekvivalensek a következő objektumok egyikével:

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1} \quad \textit{(közönséges sűrűség)}, \tag{11}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{|\alpha_1|} \quad \textit{(Weyl-féle sűrűség)}, \tag{12}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \quad \textit{(az affin összefüggés objektuma)}, \tag{13}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \quad \textit{(a projektív összefüggés objektuma)}, \tag{14}$$

amelyek a zárójelben megnevezett ismert lineáris objektumok egykomponensű, egydimenziós esetei.

A jelen dolgozat I. RÉSZében ugyanezeket az eredményeket kapjuk (tehát mind azt, hogy a harmadiknál magasabb osztályú objektumok nem léteznek, mind pedig az első három osztálybeliek felsorolását) a (7)-beli f-re vonatkozó mindennemű *differenciálhatósági feltétel nélkül*, csupán (az első és az utolsó változóban való) *folytonosságot* és azt tételezve fel, hogy $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ semelyik z-nél *nem független α_r-től*. Amennyiben, mint ez szokásos, feltesszük, hogy bármely z és y-hoz van $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ úgy, hogy $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = y$ (y a z-ből „elérhető") legyen, úgy ez utóbbi feltétel csak azt jelenti (lásd [18], [27]), hogy $f(y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ valóban függ α_r-től, tehát objektumaink *pontosan* r-edosztályúak. Itt feltesszük, hogy $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *minden* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$-re és $r \geqq 2$ esetén *egy*, $r = 1$ esetén *két intervallumban fekvő* z-kre van definiálva. Amennyiben a fentihez hasonló elérhetőségi feltétel, továbbá folytonosság és az is fel van tételezve, hogy

$$f(z, 1, 0, \ldots, 0) = z$$

(identikus koordinátatranszformációnál az objektum nem változik), úgy ez utóbbi feltevés mindig teljesül ([4], [18]). Érdekes, hogy a jelen dolgozatban követett módszerrel, mely függvényegyenleteknek differenciálás nélkül való megoldásán alapszik, rövidebb, bár gyakran finomabb meggondolásokkal érünk célt. Különösen a harmadiknál magasabb osztályú objektumok nem-létezésének bizonyítása rövidült meg lényegesen [27]-hez képest (vö. [76]). — Három ismételten felhasznált ismert tételt az eredetitől ([27] és [42]) kissé eltérő alakban újra bebizonyítunk a **0. 2** és az **1. 2** paragrafusban.

Az *egykomponensű többdimenziós* objektumok klasszifikációját G. PENSOV [19] végezte el. A *többkomponensű* objektumok közül az ún. *„egyszerű“* objektumokat, melyeknek nincs olyan (4) függvénye, amely alacsonyabb osztályú lenne, mint az eredeti objektum, V. WAGNER [34] határozta meg. G. PENSOV [38] kimutatta, hogy n-komponensű egydimenziós objektum legfeljebb $(2n+1)$-edosztályú lehet, de ezek közül csak (az egy- és) a kétkomponensűeket határozza meg. A *kétkomponensű többdimenziós* objektumokat is feldolgozta [49]. Mindezen munkák *analiticitási* feltevésekkel élnek. S. GOŁĄB [21], [36] kétszeri deriválhatóság feltevésével határozta meg az elsőosztályú egykomponensű többdimenziós objektumokat.

A *kétkomponensű egydimenziós* objektumok közül bizonyos *speciális alakúakat* O. E. GHEORGHIU analiticitásnál gyengébb feltételek mellett is meghatároz (pl. [43], [53], [66]), azonban lényegesen többet használ fel, mint amenynyit explicite feltételez.

G. PENSOVnak *kétkomponensű egydimenziós* objektumokra vonatkozó eredményei ([38]) az *első-, másod- és harmadosztályú* esetben azt mondják ki, hogy ezek az objektumok mindig *ekvivalensek vagy olyan objektumokkal, amelyek egykomponensű objektumokra bomlanak fel* (tehát az első komponens külön transzformálódik, mint ugyanolyan, vagy alacsonyabb osztályú egykomponensű objektum és hasonlóan a második komponens is), *vagy a*

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1}{a_1}, \quad \bar{y}_2 = \frac{y_2}{a_1^2} + y_1 \frac{a_2}{a_1^3} - \frac{3}{2}\frac{a_2^2}{a_1^4} + \frac{a_3}{a_1^3} \tag{15}$$

transzformációs képletű *Pensov-féle lineáris objektummal.*

Mi a jelen dolgozat II. RÉSZében, felhasználva egy általunk ([77]) bebizonyított tételt általános alakú *speciális objektumok* transzformációs képletének alakjáról bizonyos elég szoros megoldhatósági feltételek mellett, bebizonyítjuk, hogy *akárhány komponensű egydimenziós első-, másod- és harmadosztályú objektumok* mindig *ekvivalensek vagy egykomponensű objektumokra felbomló objektumokkal, vagy a Pensov-féle objektummal* (utóbbi természetesen csak a kétkomponensű harmadosztályú egydimenziós objektumoknál fordul elő). Feltevéseink a

$$f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \eta_1\right] = x, \text{ ill. } f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \eta_1, \eta_2\right] = x, \text{ ill. } f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \eta_1, \eta_2, \eta_3\right] = x, \tag{16}$$

ill.

$$f\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, 1, \eta_2, \eta_3\right] = x, \tag{17}$$

ill.

$$f\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}, \eta_1, 0, \eta_3\right] = x \tag{18}$$

(y_0 $(n-r)$-dimenziójú; ε_1, ε_2, ε_3 konstans) n-komponensű [(17) és (18)-ban $n=2$] egyenletek *egyértelmű megoldhatóságát* követelik meg az

$$y=\begin{pmatrix}y_0\\ \eta_1\end{pmatrix}, \text{ ill. } y=\begin{pmatrix}y_0\\ \eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}, \text{ ill. } y=\begin{pmatrix}y_0\\ \eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix},$$

$$\text{ill. } y=\begin{pmatrix}\eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}, \text{ ill. } y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_3\end{pmatrix} \qquad (\eta_1 \neq 0)$$

n-komponensű mennyiségekre vonatkozóan. (18) esetén még egy további, pl. egy pontban való differenciálhatóságra vonatkozó feltételre is van szükség (vö. [78]). Bár e feltételek speciálisnak tűnnek, HOSSZÚ M. [80] azóta bebizonyította, hogy minden megoldhatósági feltétel nélkül sem kapunk lényegesen más transzformácios képletű objektumokat.

3. KOVARIÁNS DERIVÁLT: Az egydimenziós ξ mennyiségtől függő z vektor deriváltját

$$z' = z'(\xi) = \frac{dz}{d\xi} = \begin{pmatrix}\frac{dz_1}{d\xi}\\ \vdots\\ \frac{dz_n}{d\xi}\end{pmatrix}$$

-vel jelöljük. Egy

$$y = u(z)$$

vektor-vektorfüggvény deriváltja az

$$u'(z) = \left\| \frac{\partial u_l}{\partial z_k} \right\| \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

mátrix. Ilyen függvények deriválására hasonló tételek érvényesek, mint közönséges függvényekre (összeg, szorzat, összetett és inverz függvények stb. deriválása). Pl.

$$\begin{gathered}(u^{-1}\{u[z(\xi)]\cdot x(\xi) \dotplus y(\xi)\})' = \\ u'(u^{-1}\{u[z(\xi)]\cdot x(\xi) \dotplus y(\xi)\})^{-1}\{u'[z(\xi)]z'(\xi)\cdot x(\xi) \dotplus u[z(\xi)]\cdot x'(\xi) \dotplus y'(\xi)\},\end{gathered} \tag{19}$$

ahol $\dotplus$-szal, ill. ponttal a (9)-ben, ill. (10)-ben definiált direkt összeget, ill. szorzatot, pont nélkül egymás mellé írva mátrix vektorral való szorzatát jelöltük. $u^{-1}(y)$ az u függvény inverz függvénye, $u'(z)^{-1}$ az $u'(z)$ mátrix inverze.

Ezek után értelmezhetjük a *kovariáns deriváltat* az egydimenziós térben definiált objektumokra (jelen dolgozatunkban csak erre lesz szükségünk), mint *a* z *objektumból,* $\frac{dz}{d\xi}$ *deriváltjából és egy eggyel magasabb osztályú* y *segédobjektumból alkotott*

$$Dz = g\left(z, \frac{dz}{d\xi}, y\right) \tag{20}$$

függvényt, ahol g alakja *a koordinátarendszertől független és* Dz maga is z*-vel azonos típusú objektum.*

A kovariáns deriváltnak szűkebb értelmezését adta J. A. SCHOUTEN (lásd pl. [64]), ilyen általánosságban S. GOLĄB [58], [59] definiálta és megadta *az egykomponensű első- és másodosztályú egydimenziós objektumok kovariáns deriváltját,* ill. az előbbiek közül csak *a* (11)*-gyel ekvivalens objektumokét,* bizonyítás nélkül, az utóbbiakról pedig bebizonyította, hogy *tetszőleges* reguláris koordinátatranszformáció esetén *nincs* kovariáns deriváltja, de meghatározta az $\alpha_1 = 1$, *ill.* $\alpha_1 > 0$ *koordinátatranszformáció-alcsoporthoz tartozó kovariáns deriváltakat.* A (20)-ban szereplő g függvény *differenciálhatóság*át feltételezi.

A jelen dolgozat III. RÉSZében *tetszőleges komponensszámú egydimenziós első- és másodosztályú objektumok kovariáns deriváltját* határozzuk meg, az I. RÉSZben folytonossági, ill. a II. RÉSZben a (16) és (17) megoldhatósági feltételek mellett nyert objektumokat tekintve, *anélkül, hogy a* (20)*-beli* g *függvényről bármit feltennénk.* Természetesen ezek az eredmények tartalmazzák GOLĄB fenti eredményeit (vö. [79]).

Befejezésül néhány nyílt problémát említünk meg.

Talán ha szokatlan is, de nem lesz érdektelen, hogy az IRODALOMJEGYZÉKben minden általunk ismert, közvetlenül a geometriai objektumok elméletével foglalkozó munka szerepel.

0. 2. § Segédtétel

1. ÖSSZETETT FÜGGVÉNY DERIVÁLTJAI: S. GOLĄB [27] egy lemmáját itt valamivel élesebb alakban bizonyítjuk. Az általunk itt használt

$$\bar{\xi} = \varphi(\xi), \quad \bar{\bar{\xi}} = \psi(\bar{\xi}) = \psi[\varphi(\xi)],$$

$$\frac{d^q\bar{\xi}}{(d\xi)^q} = \alpha_q, \quad \frac{d^q\bar{\bar{\xi}}}{(d\bar{\xi})^q} = \beta_q, \quad \frac{d^q\bar{\bar{\xi}}}{(d\xi)^q} = \gamma_q = \gamma_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q) \tag{21}$$

jelöléssel az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$\gamma_1 = \beta_1\alpha_1, \quad \gamma_2 = \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2, \quad \gamma_3 = \beta_1\alpha_3 + 3\beta_2\alpha_1\alpha_2 + \beta_3\alpha_1^3, \tag{22}$$

$$\gamma_4 = \beta_1\alpha_4 + \beta_4\alpha_1^4 + 4\beta_2\alpha_1\alpha_3 + 6\beta_3\alpha_1^2\alpha_2 + 3\beta_2\alpha_2^2, \ldots \tag{23}$$

Általában érvényes a következő

1. SEGÉDTÉTEL: *A* (21) *jelöléssel minden* $q \geqq 4$*-re*

$$\gamma_q = \beta_1\alpha_q + \beta_q\alpha_1^q + q\beta_2\alpha_1\alpha_{q-1} + \binom{q}{2}\beta_{q-1}\alpha_1^{q-2}\alpha_2 + \tag{24}$$
$$+ \tilde{\gamma}_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-2};\ \beta_1, \beta_2,, \ldots, \beta_{q-2})$$

érvényes, ahol

$$\tilde{\gamma}_q = \alpha_2\delta_2 + \alpha_3\delta_3 + \cdots + \alpha_{q-2}\delta_{q-2} = \beta_2\varepsilon_2 + \beta_3\varepsilon_3 + \cdots + \beta_{q-2}\varepsilon_{q-2} \tag{25}$$

és δ_p *az* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-2}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-2}$*-nek,* ε_p *pedig az* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-2}$*-nek polinomja* $(p = 2, 3, \ldots, q-2)$.

BIZONYÍTÁS: (23) mutatja, hogy az állítás $q = 4$-re igaz. $(\tilde{\gamma}_4 = 3\beta_2\alpha_2^2)$. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha (24)—(25) q-ra igaz, úgy deriváljuk (24)-et:

$$\gamma_{q+1} = \gamma_q' = \beta_1\alpha_{q+1} + \beta_2\alpha_1\alpha_q + q\beta_q\alpha_1^{q-1}\alpha_2 + \beta_{q+1}\alpha_1^{q+1} +$$
$$+ q\beta_2\alpha_1\alpha_q + q\beta_2\alpha_2\alpha_{q-1} + q\beta_3\alpha_1^2\alpha_{q-1} + \binom{q}{2}\beta_{q-1}\alpha_1^{q-2}\alpha_3 + \binom{q}{2}(q-2)\beta_{q-1}\alpha_1^{q-3}\alpha_2^2 +$$
$$+ \binom{q}{2}\beta_q\alpha_1^{q-1}\alpha_2 + \tilde{\gamma}_q' = \beta_1\alpha_{q+1} + \beta_{q+1}\alpha_1^{q+1} + (q+1)\beta_2\alpha_1\alpha_q + \binom{q+1}{2}\beta_q\alpha_1^{q-1}\alpha_2 +$$
$$+ \tilde{\gamma}_{q+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-1}),$$

ahol

$$\tilde{\gamma}_{q+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q-1}) =$$
$$= \alpha_2\left[q\beta_2\alpha_{q-1} + \binom{q}{2}(q-2)\beta_{q-1}\alpha_1^{q-3}\alpha_2 + \delta_2'\right] +$$
$$+ \alpha_3\left[\binom{q}{2}\beta_{q-1}\alpha_1^{q-2} + \delta_3' + \delta_2\right] + \cdots + \alpha_{q-2}[\delta_{q-2}' + \delta_{q-3}] + \alpha_{q-1}[q\beta_3\alpha_1^2 + \delta_{q-2}] =$$
$$= \beta_2[q\alpha_2\alpha_{q-1} + \varepsilon_2'] + \beta_3[q\alpha_1^2\alpha_{q-1} + \varepsilon_3' + \alpha_1\varepsilon_2] + \cdots +$$
$$+ \beta_{q-2}[\varepsilon_{q-2}' + \alpha_1\varepsilon_{q-3}] + \beta_{q-1}\left[\binom{q}{2}\alpha_1^{q-2}\alpha_3 + \binom{q}{2}(q-2)\alpha_1^{q-3}\alpha_2^2 + \alpha_1\varepsilon_{q-2}\right]$$

és ezek (24)—(25) alakú képletek, amivel az 1. SEGÉDTÉTELT bebizonyítottuk.

Ebből és (22)-ből folynak a következő

KOROLLÁRIUMOK:

1. Ha egy pontban $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-2} = 0$ $(r \geqq 3)$, akkor ott

$$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = \beta_2, \ldots, \gamma_{r-2} = \beta_{r-2},\ \gamma_{r-1} = \alpha_{r-1} + \beta_{r-1},\ \gamma_r = \alpha_r + \beta_r + r\beta_2\alpha_{r-1}.$$

2. Ha egy pontban $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\beta^2 = \cdots = \beta_{r-2} = 0$ $(r \geqq 3)$, akkor ott

$$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = \alpha_2, \ldots, \gamma_{r-2} = \alpha_{r-2},\ \gamma_{r-1} = \alpha_{r-1} + \beta_{r-1},\ \gamma_r = \alpha_r + \beta_r + \binom{r}{2}\beta_{r-1}\alpha_2.$$

3. Ha egy pontban $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ $(r \geqq 2)$, akkor ott

$$\gamma_1 = \beta_1\alpha_1,\ \gamma_2 = \beta_2\alpha_1^2, \ldots, \gamma_{r-1} = \beta_{r-1}\alpha_1^{r-1},\ \gamma_r = \beta_1\alpha_r + \beta_r\alpha_1^r.$$

4. Ha egy pontban $\beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_{r-1} = 0$ $(r \geqq 2)$, akkor ott

$$\gamma_1 = \beta_1 \alpha_1,\ \gamma_2 = \beta_1 \alpha_2, \ldots, \gamma_{r-1} = \beta_1 \alpha_{r-1},\ \gamma_r = \beta_1 \alpha_r + \beta_r \alpha_1^r.$$

5. Ha egy pontban $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{r-1} = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_{r-1} = 0$ $(r \geqq 2)$, akkor ott

$$\gamma_1 = \beta_1 \alpha_1,\ \gamma_2 = \cdots = \gamma_{r-1} = 0,\ \gamma_r = \beta_1 \alpha_r + \beta_r \alpha_1^r$$

(1 és 2-ben $r = 3$ esetén, 3, 4, 5-ben pedig $r = 2$ esetén semminek a helyébe nem kell 0-t tennünk).

2. EGYDIMENZIÓS EGY ADDITÍV PARAMÉTERŰ TRANSZFORMÁCIÓSEREG: Az alábbiakban a lehető teljesség kedvéért bizonyítással együtt szerepel a szerző [42]-ben bizonyított tételeiből folyó következő

2. SEGÉDTÉTEL: *Legyen $z \in (a, b)$; $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$; $g(z, \alpha) \in (a, b)$ (a vagy b vagy mindkettő végtelen is lehet), teljesüljön egy $z = c \in (a, b)$-re*

$$g[g(z, \alpha), \beta] = g(z, \alpha + \beta), \tag{26}$$

legyen továbbá $g(z, \alpha)$ z-ben (minden α-ra) és $g(c, \alpha)$ α-ban folytonos és $g(z, \alpha)$ semelyik $z \in (a, b)$-nél sem konstans α-ban, akkor és csak akkor van oly folytonos és szigorúan monoton $\mu(z)$ függvény, mely (a, b)-t egy-egyértelműen $(-\infty, \infty)$-re képezi le és

$$g(z, \alpha) = \mu^{-1}[\mu(z) + \alpha] \tag{27}$$

(μ^{-1} a μ inverz függvénye). Speciálisan

$$g(z, 0) = z. \tag{28}$$

(27) *minden $\alpha \in (-\infty, \infty)$, $z \in (a, b)$-ra is kielégíti* (26)-ot.

BIZONYÍTÁS: Definiáljuk

$$u(\alpha) = g(c, \alpha) \tag{29}$$

-t, akkor (26)-ból $z = c$-vel

$$g[u(\alpha), \beta] = u(\alpha + \beta). \tag{30}$$

Feltevéseink szerint $u(\alpha)$ *folytonos és nem konstans.* Bebizonyítjuk, hogy *szigorúan monoton.* Ha ugyanis volna két $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, amelyre

$$u(\varepsilon_1) = u(\varepsilon_2),$$

akkor a folytonosság miatt *egymáshoz tetszőlegesen közel* is volna ilyen. De akkor (30)-ból

$$u[\alpha + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)] = g[u(\varepsilon_2), \alpha - \varepsilon_1] = g[u(\varepsilon_1), \alpha - \varepsilon_1] = u(\alpha),$$

tehát $u(\alpha)$ *periodikus a tetszőlegesen kicsiny* $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ *periódussal,* vagyis *konstans* volna, feltevésünkkel ellentétben. Tehát $u(\alpha)$ szigorúan monoton.

Bebizonyítjuk továbbá, hogy

$$\lim_{\alpha \to -\infty} u(\alpha) = a, \qquad \lim_{\alpha \to \infty} u(\alpha) = b.$$

Ugyanis, ha pl.

$$\tilde{b} = \lim_{\alpha\to\infty} u(\alpha) < b$$

az (a, b) intervallumhoz tartozna, akkor (30)-ból $\alpha\to\infty$-nel $g(z, \beta)$ z-ben való folytonossága miatt

$$g(\tilde{b}, \beta) = \tilde{b}$$

következnék, ellentétben feltevésünkkel, hogy $g(z, \beta)$ semelyik $z \in (a, b)$-nél sem konstans β-ban. Így $\lim_{\alpha\to\infty} u(\alpha) = b$ és hasonlóan $\lim_{\alpha\to-\infty} u(\alpha) = a$ és ezek nem tartoznak az (a, b) intervallumhoz, mely tehát nyílt.

$u(\alpha)$-ról tehát már tudjuk, hogy folytonos, szigorúan monoton és $(-\infty, \infty)$-t egy-egyértelműen leképezi (a, b)-re. Tehát minden $z \in (a, b)$-hez létezik pontosan egy α úgy, hogy $z = u(\alpha)$. Ha $z = u(\alpha)$ inverz függvényét $\alpha = \mu(z)$-vel jelöljük $[u(\alpha) = \mu^{-1}(\alpha)]$, úgy (30)-ból

$$g(z, \beta) = \mu^{-1}[\mu(z) + \beta]$$

lesz, ami (27)-től csak a jelölésben tér el. Fordítva (27) kielégíti feltételeinket és (26)-ot is:

$$g[g(z, \alpha), \beta] = \mu^{-1}\{\mu[g(z, \alpha)] + \beta\} = \mu^{-1}[\mu(z) + \alpha + \beta] = g(z, \alpha + \beta).$$

Végül (27) nyilvánvalóan eleget tesz (28)-nak is, amivel a 2. SEGÉDTÉTELt teljesen bebizonyítottuk.

I. EGYKOMPONENSŰ EGYDIMENZIÓS OBJEKTUMOK

1. 1. § Nincs harmadiknál magasabb osztályú egykomponensű, egydimenziós objektum

1. TÉTEL: *Legyen $z \in (a, b)$, $\alpha_q \in (-\infty, \infty)$ $(q = 1, 2, \ldots, r)$, $\alpha_1 \neq 0$ és $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in (a, b)$ folytonos z-ben és α_r-ben minden $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ mellett; továbbá ne legyen olyan y, hogy $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ minden megválasztásánál $f(y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)$ független α_r-től. Akkor a* (I)—(II) *jelölésekkel felírt*

$$f[f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r), \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r] = f(z, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r) \tag{8}$$

függvényegyenletnek csak $r \leq 3$ esetén van megoldása.

Tehát nincs harmadiknál magasabb osztályú egykomponensű objektum az egydimenziós térben.

A *bizonyítás* itt csakúgy mint a következő tételekben (8) ismételt felhasználásával fokozatosan állapítja meg, hogyan függ f a változóitól. Feltesszük, hogy $r \geqq 2$.

Tegyünk először (8)-ba $\alpha_1 = \beta_1 = 1, \alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = \beta_2 = \cdots = \beta_{r-1} = 0$-t, akkor az 5. KOROLLÁRIUM szerint

$$f[f(z, 1, 0, \dots, 0, \alpha_r), 1, 0, \dots, 0, \beta_r] = f(z, 1, 0, \dots, 0, \alpha_r + \beta_r).$$

Ez (26) alakú egyenlet és feltevéseink szerint $f(z, 1, 0, \dots, 0, \alpha)$ folytonos z-ben és α-ban, ha pedig volna oly z, hogy $y = f(z, 1, 0, \dots, 0, \alpha)$ α-ban konstans volna, úgy $\alpha = -\frac{\alpha_r}{\alpha_1}$ választásával (8)-at és a 3. KOROLLÁRIUMot alkalmazva

$$f(y, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r) = f[f(z, 1, 0, \dots, 0, \alpha), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r] =$$
$$= f(z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_1 \alpha + \alpha_r) = f(z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, 0)$$

minden $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}$ mellett α_r-ben konstansnak bizonyúlna feltevésünkkel ellentétben.

Tehát alkalmazható a 2. SEGÉDTÉTEL és

$$f(z, 1, 0, \dots, 0, \alpha) = \mu^{-1}[\mu(z) + \alpha].$$

Ez tehát az $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ koordinátatranszformáció alcsoporthoz tartozó objektum transzformációs képlete. Másrészt ebből

(31) $$f(z, 1, 0, \dots, 0, 0) = z$$

(az identikus koordinátatranszformációnál az objektum nem változik).

Helyettesítsünk most (8)-ba $\alpha_1 = 1$-et és egyrészt

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = \cdots = \beta_{r-1} = 0$$

-t, másrészt

$$\alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0, \quad \alpha_r = -\frac{\beta_r}{\beta_1}$$

-et. A 4., ill. a 3. KOROLLÁRIUM értelmében

(32) $$\mu^{-1}\{\mu[f(z, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)] + \beta_r\} = f(z, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r + \beta_r),$$

ill.

$$f\left\{\mu^{-1}\left[\mu(z) - \frac{\beta_r}{\beta_1}\right], \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, \beta_r\right\} = f(z, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, 0)$$

lesz az eredmény. Ez utóbbi egyenletbe

$$y = \mu^{-1}\left[\mu(z) - \frac{\beta_r}{\beta_1}\right], \quad z = \mu^{-1}\left[\mu(y) + \frac{\beta_r}{\beta_1}\right],$$

(33) $$\omega(x, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}) = \mu\{f[\mu^{-1}(x), \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, 0]\}$$

-t téve

$$f(y, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}, \beta_r) = \mu^{-1}\left\{\omega\left[\mu(y) + \frac{\beta_r}{\beta_1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1}\right]\right\}$$

-et, tehát

(34) $$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r) = \mu^{-1}\left\{\omega\left[\mu(z) + \frac{\alpha_r}{\alpha_1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}\right]\right\}$$

-et kapunk. Ezzel már fény derült f-nek α_r-től való függésére.

(34)-et $\alpha_1=1$-gyel (32)-be helyettesítve, azt kapjuk, hogy

$$\omega[\mu(z)+\alpha_r, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}]+\beta_r=\omega[\mu(z)+\alpha_r+\beta_r, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}],$$

vagy $\mu(z)+\alpha_r=0$, $\beta_r=\zeta$-val

$$\omega(\zeta, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})=\zeta+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}).$$

Így végeredményben f-nek z-től való függését tisztáztuk $\alpha_1=1$ esetén. Ezt (34)-be téve

$$f(z, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r)=\mu^{-1}[\mu(z)+\alpha_r+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})].$$

Visszahelyettesítjük (8)-ba $\alpha_1=\beta_1=1$-gyel:

$$\mu(z)+\alpha_r+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})+\beta_r+\omega(0, 1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1})=$$
$$=\mu(z)+\gamma_r+\omega(0, 1, \gamma_2, \dots, \gamma_{r-1}).$$

Most feltesszük, hogy

$$r\geqq 3$$

és $\alpha_2=\dots=\alpha_{r-2}=0$, ill. $\beta_2=\dots=\beta_{r-2}=0$-t helyettesítjük az 1., illetve a 2. KOROLLÁRIUMot alkalmazva:

$$\omega(0, 1, 0, \dots, 0, \alpha_{r-1})+\omega(0, 1, \beta_2, \dots, \beta_{r-1})=r\beta_2\alpha_{r-1}+$$
$$+\omega(0, 1, \beta_2, \dots, \beta_{r-2}, \alpha_{r-1}+\beta_{r-1}),$$

ill.

$$\omega(0, 1, 0, \dots, 0, \beta_{r-1})+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1})=\binom{r}{2}\alpha_2\beta_{r-1}+$$
$$+\omega(0, 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}+\beta_{r-1}).$$

Ezen egyénletek összehasonlítása megmutatja, hogy

$$r=\binom{r}{2},$$

tehát

$$r=3,$$

vagyis $r\geqq 4$ nem lehet és ezt kellett bizonyítanunk.

1.2. § A $\bar{\xi}=\varphi(\xi)$, $\varphi'(\xi)\neq 0$, $\varphi''(\underset{0}{\xi})=\dots=\varphi^{(r-1)}(\underset{0}{\xi})=0$ koordinátatranszformációalcsoporthoz tartozó r-edosztályú egykomponensű, egydimenziós objektumok

Amit az előző paragrafusban f alakjáról megtudtunk, az ott bebizonyított negatív állításon kívül hozzásegít ahhoz, hogy a legfeljebb harmadosztályú egykomponensű egydimenziós objektumokat (elsősorban a másod- és harmadosztályúakat) meg tudjuk határozni. Erre szolgál a következő

3. SEGÉDTÉTEL: *Legyen* $z\in(a,b)$, $0\neq\alpha_1\in(-\infty,\infty)$, $\alpha_r\in(-\infty,\infty)$ *és* $f(z,\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_r)\in(a,b)$ *folytonos z-ben α_r-ben és nemkonstans α_r-ben minden α_1-nél. Akkor $r\geqq 2$ esetén*

$$(35)\qquad f[f(z,\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_r),\beta_1,0,\dots,0,\beta_r]=f(z,\beta_1\alpha_1,0,\dots,0,\beta_1\alpha_r+\beta_r\alpha_1^r)$$

általános megoldása

$$(36)\qquad f(z,\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_r)=\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\right),$$

ahol ν tetszőleges szigorúan monoton folytonos függvény és ν^{-1} az inverze.

Tehát az $\alpha_1\neq0, \alpha_2=\dots=\alpha_{r-1}=0$ koordinátatranszformációalcsoporthoz tartozó r-edosztályú egykomponensű egydimenziós objektumok ekvivalensek az

$$\bar y=\frac{y}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^r}\qquad (r\geqq 2)$$

transzformációs képletű objektummal.

Ezt a tételt az f-ről differenciálhatóságot követelve bizonyította be S. GOŁĄB [27].

BIZONYÍTÁS: Az előző paragrafus (34) és (31) képletéből az

$$\omega(\zeta,\alpha_1,0,\dots,0)=\varrho(\zeta,\alpha_1)$$

jelöléssel

$$(37)\qquad f(z,\alpha_1,0,\dots,0,\alpha_r)=\mu^{-1}\left\{\varrho\left[\mu(z)+\frac{\alpha_r}{\alpha_1},\alpha_1\right]\right\}$$

és

$$(38)\qquad \varrho(\zeta,1)=\zeta.$$

(37)-et (35)-be helyettesítve

$$\mu^{-1}\left(\varrho\left\{\varrho\left[\mu(z)+\frac{\alpha_r}{\alpha_1},\alpha_1\right]+\frac{\beta_r}{\beta_1},\beta_1\right\}\right)=\mu^{-1}\left\{\varrho\left[\mu(z)+\frac{\beta_1\alpha_r+\beta_r\alpha_1^r}{\beta_1\alpha_1},\beta_1\alpha_1\right]\right\}$$

-et, vagy $\mu(z)+\frac{\alpha_r}{\alpha_1}=\tau$, $\frac{\beta_r}{\beta_1}=\sigma$, $\alpha_1=\alpha$, $\beta_1=\beta$ jelöléssel

$$(39)\qquad \varrho[\varrho(\tau,\alpha)+\sigma,\beta]=\varrho(\tau+\sigma\alpha^{r-1},\beta\alpha)$$

-et kapunk. Ezt a függvényegyenletet kell megoldanunk. $\tau=0, \beta=1, \sigma\alpha^{r-1}=\zeta$ helyettesítésével (38) miatt

$$(40)\qquad \varrho(\zeta,\alpha)=\varrho(0,\alpha)+\zeta\alpha^{1-r}=\chi(\alpha)+\zeta\alpha^{1-r}$$

-t nyerünk, ami ϱ-nak ζ-tól való függését tisztázza. Visszahelyettesítve (39)-be, lesz

$$[\tau\alpha^{1-r}+\chi(\alpha)+\sigma]\beta^{1-r}+\chi(\beta)=(\tau+\sigma\alpha^{r-1})\alpha^{1-r}\beta^{1-r}+\chi(\alpha\beta),$$

$$\chi(\alpha)\beta^{1-r}+\chi(\beta)=\chi(\alpha\beta)$$

és mivel itt a jobboldal szimmetrikus, a balnak is annak kell lennie:

$$\chi(\alpha)\beta^{1-r}+\chi(\beta)=\chi(\beta)\alpha^{1-r}+\chi(\alpha)$$

$$\frac{\chi(\alpha)}{1-\alpha^{1-r}}=\frac{\chi(\beta)}{1-\beta^{1-r}}=\varkappa \quad \text{(konstans)}.$$

Így

$$\chi(\alpha)=\varkappa(1-\alpha^{1-r})$$

és (40)-ből

$$\varrho(\zeta,\alpha)=(\zeta-\varkappa)\alpha^{1-r}+\varkappa,$$

(37)-ből pedig

$$f(z,\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_r)=\mu^{-1}\{[\mu(z)-\varkappa]\alpha_1^{1-r}+\alpha_r\alpha_1^{-r}+\varkappa\},$$

vagy

$$\mu(z)-\varkappa=\nu(z),\quad \mu^{-1}(\zeta+\varkappa)=\nu^{-1}(\zeta)$$

-val

$$f(z,\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_r)=\nu^{-1}\left[\frac{\nu(z)}{\alpha_1^{r-1}}+\frac{\alpha_r}{\alpha_1^{r}}\right].$$

Ez (36), és mivel (36) mindig kielégíti (35)-öt, a 3. SEGÉDTÉTELt bebizonyítottuk.

1. 3. § Első-, másod- és harmadosztályú egykomponensű, egydimenziós objektumok

1. ELSŐOSZTÁLYÚ OBJEKTUMOK: (8)-ból és (22)-ből $r=1$-re

(41) $$f[f(z,\alpha_1),\beta_1]=f(z,\beta_1\alpha_1),\qquad \alpha_1\neq 0,\ \beta_1\neq 0$$

következik.

Ha ezt $z\in(a,b)$, $\alpha_1\in(0,\infty)$-re vizsgáljuk, úgy a

(42) $$\alpha_1=e^{\alpha},\ \beta_1=e^{\beta},\ f(z,\alpha_1)=f(z,e^{\alpha})=g(z,\alpha)$$

jelöléssel a

(26) $$g[g(z,\alpha),\beta]=g(z,\alpha+\beta)$$

egyenletbe megy át. Ha most $f(z,\alpha_1)$ folytonos z-ben és α_1-ben és semelyik állandó z-nél sem állandó, úgy a 2. SEGÉDTÉTEL értelmében

$$g(z,\alpha)=\mu^{-1}[\mu(z)+\alpha],$$

tehát (42)-vel

(43) $$f(z,\alpha_1)=\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\right),\ \alpha_1>0,\ f(z,1)=z,$$

ahol

$$\nu(z)=e^{-\mu(z)}>0,\qquad z\in(a,b).$$

Azonban (41)-ben α_1 negatív is lehet (csak 0 nem), azonkívül, mint a BEVEZETÉSben már említettük, z is *két* (esetleg érintkező) *intervallumban helyezkedhet el*, lásd [4], ahol az is szerepel, hogy e két intervallum csak egyszerre zsugorodhat ponttá (a két pont esetleg egybeesik). Az egy, ill. két pontból álló értelmezési tartomány a

$$\bar{z} = z$$

*skalár*okat, ill. az

$$\bar{y} = y \operatorname{sign} \alpha_1$$

-gyel ekvivalens *biskalár*okat (pszeudoskalárokat) adja ([4]). Ezeket itt figyelmen kívül hagyjuk.

A másik, (a_0, b_0)-lal jelölt z-intervallumra is áll a 2. SEGÉDTÉTEL miatt

$$f(z, e^{\alpha}) = g(z, \alpha) = \mu^{-1}[\mu(z) + \alpha].$$

Itt

$$\nu(z) = -e^{-\mu(z)} < 0, \qquad z \in (a_0, b_0)$$

-t írunk és így *pozitív* α_1-ek esetén

$$f(z, \alpha_1) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\right), \quad \alpha_1 > 0, \; f(z, 1) = z \tag{43}$$

mindkét z-intervallumra érvényes $\nu(z) \lesseqgtr 0$-lal aszerint, hogy $z \in \begin{matrix}(a_0, b_0)\\ (a, b)\end{matrix}$.

Pozitív α_1-re $f(z, \alpha_1)$ ugyanazon intervallumban fekszik, mint z. Vizsgáljuk most a *negatív* α_1-ek esetét. Az átmenetet pozitív α_1-ekről negatív α_1-ekre az $f(z, -1)$ függvény és (41) alkalmazásával fogjuk megteremteni. (41)-ből és (43)-ból következik

$$f[f(z, -1), -1] = f(z, 1) = z \tag{44}$$

$$\begin{aligned} f(z, \alpha_1) &= f[f(z, -\alpha_1), -1] = f[f(z, -1), -\alpha_1] = \\ &= f\left[\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{-\alpha_1}\right), -1\right] = \nu^{-1}\left(\frac{\nu[f(z, -1)]}{-\alpha_1}\right), \qquad \alpha_1 < 0 \end{aligned} \tag{45}$$

vagy a

$$z = c, \quad \nu^{-1}\left(\frac{\nu(c)}{-\alpha_1}\right) = y, \quad \frac{\nu[f(c, -1)]}{\nu(c)} = \delta$$

jelöléssel

$$f(y, -1) = \nu^{-1}[\delta \nu(y)]. \tag{46}$$

Ezt (44)-be téve

$$\nu^{-1}[\delta^2 \nu(z)] = z, \quad \delta^2 \nu(z) = \nu(z), \quad \delta = \pm 1$$

-et kapunk, tehát (45) és (46)-ból következik, hogy *vagy*

$$f(z, \alpha_1) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{|\alpha_1|}\right) \tag{47}$$

vagy

$$f(z, \alpha_1) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\right). \tag{48}$$

Mindkét képlet $\alpha_1 > 0$ esetén egybeesik (43)-mal, tehát minden $\alpha_1 \neq 0$-ra érvényes. Az is azonnal látható, hogy (47) is, (48) is kielégíti (41)-et. Megemlíthető, hogy az itt fontos szerepet játszott $f(z, -1)$ függvény az (a_0, b_0) és (a, b) intervallumokat az első esetben önmagukra, a második esetben egymásra képezi le.

Eredményünk a következő

2. TÉTEL: *Ha $f(z, \alpha_1)$ z-re nézve (a_0, b_0)-ban és (a, b)-ben, α_1-re nézve pedig $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$-ben folytonos és nem konstans, úgy* (41) *általános megoldása* (47) *vagy* (48) *alakú, ahol $\nu(z)$ egyértelműen megfordítható függvény. Ha $a_0 = b_0$, $a = b$, úgy f is csak egy $(a_0 = a)$ vagy két $(a_0 \neq a)$ értéket vehet fel.*

Tehát az elsőosztályú egykomponensű egydimenziós objektumok a skalárokon és a biskalárokon kívül vagy az

$$y = \frac{y}{|\alpha_1|} \tag{12}$$

Weyl-féle sűrűséggel, vagy pedig az

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1} \tag{11}$$

közönséges sűrűséggel ekvivalens objektumok.

Ez ekvivalens a Δ-típusú objektumokra vonatkozó megfelelő állítással. (BEVEZETÉS **0. 1. § 2.**)

(47), (48)-at néha

$$f(z, \alpha_1) = \mu^{-1}[\mu(z)|\alpha_1|], \qquad \mu(z) = \frac{1}{\nu(z)}$$
$$f(z, \alpha_1) = \mu^{-1}[\mu(z)\alpha_1],$$

vagy

$$f(z, \alpha_1) = \mu^{-1}[\mu(z)\alpha_1^k], \qquad \mu(z) = \nu(z)^{-k}$$

alakba írják (az utóbbi páros $k \neq 0$ esetén (47)-tel, páratlan k esetén (48)-cal ekvivalens).

2. MÁSODOSZTÁLYÚ OBJEKTUMOK: Mint a BEVEZETÉSben említettük, $r \geqq 2$-re f-nek z-re vonatkozó értelmezési tartománya *egy* (a, b) intervallumnak vehető ([18]).

A 3. SEGÉDTÉTEL $r = 2$-nél közvetlenül alkalmazható és érvényes a

3. TÉTEL: *Legyen $z \in (a, b)$, $0 \neq \alpha_1 \in (-\infty, \infty)$, $\alpha_2 \in (-\infty, \infty)$ és $f(z, \alpha_1, \alpha_2) \in$ $\in (a, b)$ folytonos z-ben és α_2-ben és nem konstans α_2-ben. Akkor* [(8), (22)]

$$f[f(z, \alpha_1, \alpha_2), \beta_1, \beta_2] = f(z, \beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2)$$

általános megoldása

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right),$$

ahol ν tetszőleges folytonos szigorúan monoton függvény a ν^{-1} inverzzel.

Tehát a másodosztályú egykomponensű egydimenziós objektumok mind ekvivalensek az affin leképezés

$$(13) \qquad \bar{y} = \frac{y}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$$

transzformációs képletű objektumával.

Előfordul az

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2) = \mu^{-1}\left(\frac{\mu(z)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right), \qquad \mu(z) = -\nu(z)$$

írásmód is.

3. HARMADOSZTÁLYÚ OBJEKTUMOK: Ezekre a 3. SEGÉDTÉTELből

$$(49) \qquad f(z, \alpha_1, 0, \alpha_3) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right).$$

Másrészt (34)-ből $r = 3$-ra

$$\nu(z) = \mu(z) - z, \quad \omega(\zeta + z, \alpha_1, \alpha_2) - z = \varrho(\zeta, \alpha_1, \alpha_2)$$

-vel

$$(50) \qquad f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \nu^{-1}\left\{\varrho\left[\nu(z) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \alpha_1, \alpha_2\right]\right\}$$

-et kapunk. E két formulát (8)-nak $r = 3$-ra specializált alakja [(22)]

$$(51) \quad f[f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta_1, \beta_2, \beta_3] = f(z, \beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1^2, \beta_1\alpha_3 + 3\beta_2\alpha_1\alpha_2 + \beta_3\alpha_1^3)$$

segítségével összekombinálva fogjuk $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ végleges alakját megkapni.

Valóban, helyettesítsünk (51)-be $\alpha_2 = 0$, ill. $\beta_2 = 0$-t, akkor (49), (50) (és a 3., ill. 4. KOROLLÁRIUM) révén

$$(52) \qquad \varrho\left[\frac{\nu(z)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} + \frac{\beta_3}{\beta_1}, \beta_1, \beta_2\right] = \varrho\left[\nu(z) + \frac{\beta_1\alpha_3 + \beta_3\alpha_1^3}{\beta_1\alpha_1}, \beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1^2\right],$$

ill.

$$(53) \qquad \frac{1}{\beta_1^2}\varrho\left[\nu(z) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \alpha_1, \alpha_2\right] + \frac{\beta_3}{\beta_1^3} = \varrho\left[\nu(z) + \frac{\beta_1\alpha_3 + \beta_3\alpha_1^3}{\beta_1\alpha_1}, \beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2\right].$$

Ha mindkét egyenletbe

$$\nu(z) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 0, \quad \frac{\beta_3\alpha_1^2}{\beta_1} = \zeta, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{\zeta}{\alpha_1^2} \text{-t}$$

és (52)-be

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 \alpha_1^2 = \sigma, \quad \beta_2 = \sigma \alpha_1^{-2}$$

-t, (53)-ba

$$\alpha_2 = \alpha_1^2, \ \beta_1 \alpha_1 = \tau_1, \ \beta_1 \alpha_2 = \beta_1 \alpha_1^2 = \tau_2; \ \alpha_1 = \frac{\tau_2}{\tau_1}, \ \alpha_2 = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2, \ \beta_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_2}$$

-t helyettesítünk,

$$\varrho(\zeta, \alpha_1, \sigma) = \varrho\left(\frac{\zeta}{\alpha_1^2}, 1, \frac{\sigma}{\alpha_1^2}\right),$$

ill.

$$\varrho(\zeta, \tau_1, \tau_2) = \frac{\zeta}{\tau_1^2} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1^4} \varrho\left[0, \frac{\tau_2}{\tau_1}, \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\zeta}{\tau_1^2} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1^4} \varrho(0, 1, 1) =$$

$$= \frac{\zeta}{\tau_1^2} + \delta \frac{\tau_2^2}{\tau_1^4}$$

-t kapunk (δ konstans). Így (51)-ből

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r^{-1}\left(\frac{r(z)}{\alpha_1^2} + \delta \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right)$$

lesz.

Hogy a δ konstans értékét meghatározzuk, ezt visszahelyettesítjük (51)-be pl. $\alpha_3 = \beta_3 = 0$-lal:

$$\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{r(z)}{\alpha_1^2} + \delta \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\right) + \delta \frac{\beta_2^2}{\beta_1^4} = \frac{r(z)}{(\beta_1 \alpha_1)^2} + \delta \frac{\beta_1^2 \alpha_2^2 + 2 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1^2 + \beta_2^2 \alpha_1^4}{(\beta_1 \alpha_1)^4} + \frac{3 \beta_2 \alpha_1 \alpha_2}{(\beta_1 \alpha_1)^3}.$$

Így kapunk

$$2\delta + 3 = 0, \qquad \delta = -\frac{3}{2}$$

-t, vagyis

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r^{-1}\left(\frac{r(z)}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right) \tag{54}$$

-t. (54) minden $z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$-ra kielégíti (51)-et. — Eredményünk tehát a következő

5. TÉTEL: *Ha* $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $[z \in (a, b);\ 0 \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (-\infty, \infty);$ $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in (a, b)]$ *folytonos* z*-ben és* α_3*-ban és nem konstans* α_3*-ban, úgy* (51) *általános megoldása* (54) *alakú folytonos és szigorúan monoton* r*-vel.*

Tehát a harmadosztályú egykomponensű egydimenziós objektumok mind ekvivalensek a projektív leképezés

$$\bar{y} = \frac{y}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \tag{14}$$

transzformációs képletű objektumával.

(54) írható az

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mu^{-1}\left(\frac{\mu(z)}{\alpha_1^2} + \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right), \qquad \mu(z) = -\nu(z)$$

alakba is.

IRODALOM

(Nem tartalmazza pl. az objektumok elméletének előtörténetét. Az orosznyelvű cikkek címei — mivel több csak referátumban volt fellelhető — mind „Russ." megjelöléssel más nyelven szerepelnek. Hasonlóan Rum. - román, Holl. - holland. A hiányzó (oldalszám) adatokat nem sikerült megállapítani. A cikkek időrendi sorrendben szerepelnek.)

[1] J. A. Schouten, J. Haantjes: On the theory of the geometric object. *Proceedinges London Math. Soc.*, (2) **42** (1937), 356—376.

[1a] J. A. Schouten, J. Haantjes: Zur Theorie des geometrischen Objektes. *Comptes rendus du Cong. Int. d. Math, Oslo 1936.* II. *Oslo*, 1937, 155-159.

[2] A. Wundheiler: Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien. (I. Intern. Konf. f. Tens. Diff. Geo. u. i. Anw., Moskau, 17—23. V. 1934) *Abh. Sem. Vekt.-Tens. An. Mosk.*, **4** (1937) 366—375.

[3] S. Gołąb: Zur Theorie des affinen Zusammenhanges im eindimensionalen Raume. I. *Opusc. Math. A*, **2** (1938) 7 9.

[4] S. Gołąb: Über die Klassifikation der geometrischen Objekte. *mat. Zeitschr.*, **44** (1938) 104—114.

[5] S. Gołąb: Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte. *Wiadom. Mat.*, **45** (1938), 97—137.

[5a] S. Gołąb: Sur quelques points concernant la notion du comitant. *Annales Soc. Pol. Math.*, **17** (1938) 177—192.

[6] B. Laptev: La théorie de S. Lie des objets géométriques qui dépendent de point et de direction. (Russ.) *Bull. Soc. Ph. Math. Kazan*, (3) **10** (1938) 4—38.

[7] E. T. Davies: Lie-derivation in generalized metric spaces. *Ann. mat. pura appl.*, (4) **18** (1939) 261—274.

[8] S. Gołąb: Über den Begriff der Pseudogruppe von Transformationen. *Math. Ann.*, **116** (1939) 768—780.

[9] A. D. Michal, A. B. Mewborn: Géométrie différentielle projective générale des géodésiques généralisées. *Comptes Rendus, Paris*, **209** (1939) 392—394.

[10] B. Laptev: Une forme invariante de la variation et la dérivée de S. Lie. (Russ.) *Bull. Soc. Ph. Math, Kazan*, (3) **12** (1940) 3—8.

[11] T. C. Doyle: Tensor decomposition with application to the contact and complex groups *Annals of Math.*, (2) 42 (1941) 698—722.

[12] N. Teodorescu: La géométrie de l'équation des ondes. III., IV. *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.*, **43** (1941) 59—68; **44** (1942) 71—84.

[13] V. Wagner: The absolute derivative of fields of local geometric objects in a compound manifold. *Dokladi Ak. Nauk*, **40** (1943) 94—97.

[14] T. Nakone: Das geometrische Objekt. *Tensor*, **7** (1944) 1—5.

[15] N. Teodorescu: Équations aux dérivées partielles et objets géométriques. *Disquisitiones Math. Phys.*, **4** (1945) 105—118.

[16] V. Wagner: The theory of geometric objects and the theory of finite and infinite continuous groups of transformations. *Dokladi Ak. Nauk.*, **46** (1945) 347—349.

[17] E. Bompiani: Enti geometrici definiti da sistemi differenziali. *Atti Ac. Naz. Lincei Rend.*, (8) **1** (1946) 887—894.

[18] S. Gołąb: Sur la théorie des objets géométriques. *Annales Soc. Pol. Math.*, **19** (1946) 7—35.

[19] G. Pensov: Classification of differential geometric objects of the class v with one component. *Dokladi Ak. Nauk*, **54** (1946) 563—566.

[20] V. Wagner: Constant fields of local geometric objects in compound manifolds with a linear connection. *Dokladi Ak. Nauk*, **53** (1946) 183—186.

[21] S. Gołąb: Sur la théorie des objets géométriques. (Réduction des objets géométriques spéciaux de première classe aux objets du type Δ). *Annales Soc. Pol. Math.*, **20** (1947) 10—27.

[22] O. E. Gheorghiu: Équations aux dérivées partielles et objets géométriques. *Comptes Rendus, Paris*, **227** (1948) 613—615.; *Bulletin Sci. Techn. Polytechn. Timişoara* **13** (1948) 223—233.

[23] S. Gołąb: Alcuni teoremi della teoria degli oggetti geometrici. *Atti Ac. Naz. Lincei Rend.*, (8) **5** (1948) 120—122.

[23a] S. Gołąb: Sur la notion de dérivée covariante. (Congrès Pol. Math. Wroclaw, 1946) *Colloquium Math.*, **1** (1948) 160.

[24] J. S. Dubnov: Tensoren und geometrische Objekte im eindimensionalen Raum. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **7** (1949) 3.

[25] O. E. Gheorghiu: Les lois de transformations des objets géométriques spéciaux linéaires de classe v avec une composante en X_1, *Comptes Rendus, Paris*, **229** (1949) 611—613.

[26] S. Gołąb: Sur les objets géométriques non-différentiels. *Bulletin Int. Ac. Pol. Sci. Cl. Sci. Math. Nat. Ser. A Sci. Math.*, **1949** 67—72.

[27] S. Gołąb: Contribution à la théorie des objets géométriques, *Prace Mat.-Fiz.*, **47** (1949) 1—15.

[28] N. N. Mihaileanu: Objets géométriques en géométrie différentielle. *Bul. Sedentilor*, **3** (1949) 29—30.

[29] P. K. Rasevski: Galois theory in fields of geometric objects. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **7** (1949) 167—186.

[30] J. A. Schouten: Lie's differential operator. (Holl.) *Math. Centr. Amsterdam Report Z. W.*, (1949) —010, 1—7.

[30a] K. Yano: Groups of transformations in generalized spaces. *Tokyo*, 1949.

[31] G. Vranceanu: Obiecte geometrice de speta a treia. *Bul. Sedentilor*, **3** (1949) 30—34.

[32] V. V. Wagner: Classification of linear connections in a composite manifold $X_{n+(1)}$ according to their holonomy groups. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **7** (1949) 205—226.

[33] V. V. Wagner: Theorie der differentiellen Objekten und Grundlagen der Differentialgeometrie. (Russ.) Nachtrag zur russischen Übersetzung der Arbeit „The foundations of differential geometry. *Cambridge*, 1932.“ von O. Veblen—J. H. C. Whitehead. *Moskau*, 1949.

[34] V. V. Wagner: Classification of simple differential geometric objects. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **69** (1949) 293—296, *Uspechi Mat. Nauk*, **5** (1950), 1 (35) 213—214.

[35] S. Gołąb: La notion de similitude parmi les objets géométriques. *Bulletin Int. Ac. Pol. Sci. Cl. Sci. Math. Nat. Sér. A Sci. Math.*, **1950** 1—7.

[36] S. GOŁĄB: Sur les objets géométriques à une composante. *Annales Soc. Pol. Math.*, **23** (1950) 79—89.

[36a] A. E. LIBER: On the classification of the affine connection in the two-dimensional space. (Russ.) *Mat. Sbornik*, **27 (69)** (1950) 249—266.

[37] J. E. PENSOV: The classification of continuous pseudo-groups of LIE transformations according to their characteristic objects. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **8** (1950) 382—413.

[38] J. E. PENSOV: On differential geometric objects of class v in X_1. (Russ.) *Mat. Sbornik*, **26 (68)**, (1950) 161—182.

[39] Y. TASHIRO: Sur la dérivée de LIE de l'être géométrique et son groupe d'invariance. *Tohoku Math. Journ.*, (2) **2** (1950) 166—181.

[40] V. V. WAGNER: On the theory of pseudogroups of transformations. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **72** (1950) 453—456.

[41] V. V. WAGNER: The theory of composite manifolds. (Russ.) *Abh. Sem. Vekt. Tens. An. Mosk.*, **8** (1950) 11—72.

[42] J. ACZÉL, L. KALMÁR, J. G. MIKUSINSKI: Sur l'équation de translation. *Studia. Math.*, **12** (1951) 112—116.

[43] O. E. GHEORGHIU: Determinarea legii de transformarea obiectelor differential geometrice de clasa a II.-a cu doua componente in X_1. *Com. Ac. R. P. R.*, **1** (1951) 1017—1020.

[44] G. F. LAPTEV: On fields of geometric objectes on imbedded manifolds. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **78** (1951) 197—200.

[45] A. E. LIBER: On comitants of geometric differential objects. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **80** (1951) 529—532.

[46] N. N. MIHAILEANU: Objets géométriques en géométrie différentielle. (Rum.) *Stu. Cerc. Mat. Ac. R. P. R. In. Mat.*, **1** (1951) 318—373.

[47] N. N. MIHAILEANU: Objets géométriques associés aux espaces à connexion projective. (Rum.) *Com. Ac. R. P. R.*, **1** (1951) 165—170.

[48] M. NEUMANN: Les objets géométriques associés aux surfaces réglées. (Rum.) *Stu. Cerc. Mat. Ac. R. P. R. In. Mat.*, **2** (1951) 445—462.

[49] J. E. PENSOV: The classification of geometric differential objects with two components. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **80** (1951) 537—540.

[50] H. PIDEK: Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre. *Annales Soc. Pol. Math.*, **24** (1951) 111—128.

[51] J. A. SCHOUTEN: Tensor analysis for physicists. *Oxford*, 1951.

[52] V. V. WAGNER: The geometry of the generalized Cartan-spaces and the theory of geometric differential objects. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **77** (1951) 777—780.

[53] O. E. GHEORGHIU: Un obiect geometric pseudolinear de clasa 1 cu doua componente. *Com. Ac. R. P. R.*, **2** (1952) 1—4.

[54] O. E. GHEORGHIU: Sur la théorie des objets géométriques I., II., III. (Rum.) *Ac. R. P. R. Bul. Sti. Soc. S. Mat.-Fiz.*, **4** (1952) 273—284.

[54a] G. F. LAPTEV: On a new invariant analytic method of differential geometric investigations. (Russ) 125 years of the non-Eudidean geometry of Lobatschewsky. *Moscow—Leningrad*, 1952, 175—178.

[54b] N. MIHAILEANU, Asupra invariantilor proiectivi ai ecuatiei lui Laplace. *Ac. R. P. R. Bul. Sti. Sec. S. Mat.—Fiz.*, **4** (1952) 829—832.

[55] A. NIJENHUIS: Theory of the geometric object. *Amsterdam*, 1952.

[56] J. HAANTJES, G. LAMAN: On the definition of geometric objects I., II. *Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, **56** *Indag. Math.*, **15** (1953) 208—215., 216—222.

[56a] G. F. LAPTEV: Differential geometry of imbedded manifolds. (Russ). *Trudy Mosk. Mat. Obs.*, **2** (1953) 275—382.

[57] O. E. GHEORGHIU: Determinarea obiectelor geometrice speciale de clasa II. *Bul. St. Timiş.*, **2** (1954), 37—40.

[58] S. GOLĄB: Über den Begriff der kovarianten Ableitung. *Nieuw. Arch. voor Wisk.*, (3) **2** (1954) 134—142.

[59] S. GOLĄB: Dérivée covariante des objets géométriques. *Annales Pol. Math.*, **1** (1954) 107—113.

[60] J. HAANTJES: On the notion of geometric object. *Convegno Int. di Geom. Diff. Ital., 1953. Roma*, 1954, 77—81.

[61] H. PIDEK: Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_1. *Annales Pol. Math.*, **1** (1954) 114—126.

[62] H. PIDEK: Sur un problème de l'algèbre des objets géométriques de classe zéro dans l'espace X_n. *Annales Pol. Math.*, 1 (1954) 127—134.

[63] P. K. RASEVSKI: Linear differential geometric objects. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **97** (1954) 609—611.

[64] J. A. SCHOUTEN: Ricci calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications. *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1954.

[65] K. YANO, Y. TASHIRO: Some theorems on geometric objects and their applications. *Nieuw Arch. voor Wisk.*, (3) **2** (1954) 134—142.

[66] O. E. GHEORGHIU: Obiecte geometrice diferentiale de clasa I. cu doua componente in X_1. *Stu. s. Cerc. Stiint. Timişoara*, **2** (1955) 21—25.

[67] O. E. GHEORGHIU: Determinarea obiectelor geometrice lineara de clasa II-a in X_n. *Stu. s. Cerc. Stiint. Timişoara*, **2** (1955) 37—40.

[68] O. E. GHEORGHIU: Obiecte geometrice de lege fractionara. *Bul. St. Baza Cercet. Timişoara Ac. R. P. R.*, **6** (1955) 965—988.

[69] O. E. GHEORGHIU: Obiecte geometrice speciale avind legea de transformare proiective. *Consf. Geom. Dif. Timişoara*, 1955, 201—208.

[70] O. E. GHEORGHIU: Obiecte geometrice asociate sistemelor de ecuatii cu derivate partiale. *Consf. Geom. Dif. Timişoara*, 1955, 231—237.

[71] S. GOLĄB, M. KUCHARZEWSKI: Zur Theorie der geometrischen Objekte. *Annales Pol. Math.*, 2 (1955) 250—253.

[72] M. H. KUYPER, K. YANO: On geometric objects and Lie-groups of transformations. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **58** *Indag. Math.*, **17** (1955) 411—420.

[73] J. E. PENSOV: On bundles of one-dimensional geometric objects of class $n \geqq 2$ in X_1^r. (Russ.) *Dokladi Ak. Nauk*, **104** (1955) 356—359.

[74] I. K. RASEVSKI: Theorie der Spinoren. (Russ.) *Uspechi Mat. Nauk*, **10** (1955), 2 (64) 3—111.

[75] I. K. RASEVSKI: Mehrdimensionale δ-Funktionen und differentialgeometrische Objekte. (Russ.) *Uspechi Mat. Nauk*, **10** (1955), 4 (66) 145—152.

[76] J. ACZÉL: Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. I., II. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **7** (1956), 339—354.

[77] J. ACZÉL, M. HOSSZÚ: On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **7** (1956), 327—338.

[77a] O. E. GHEORGHIU: Determinarea derivatei covariante a pseudotensorilor. *Bul. Sti. Tehn. Inst. Polit. Timişoara*, **1 (15)** (1956) 27—30.

[78] J. ACZÉL: Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. III., IV. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **8** (1957), 19—52,

[79] J. ACZÉL: Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. V. *Acta Math. Ac. Sci. Hung.*, **8** (1957), 53—64.

[79a] O. E. GHEORGHIU: Contributions à la théorie des objets géométriques spéciaux non différentiels avec plusieurs composantes dans l'espace X_m. I., II. *Comptes Rendus, Paris*, **245** (1957, 822—824, 887—889.

[79b] S. GOLĄB: Zur Theorie der Übertragungen. *Schriftenreihe d. Inst. f. Math. D. Ak. d. Wiss., Berlin*, 1 (1957) 162—177.

[79c] K. YANO: The theory of Lie-derivatives and its applications. *Amsterdam—Groningen*, 1957.

[79d] S. GOLĄB, H. LOPUSZANSKA-PIDEK: Sur l'algèbre des objets géométriques de première classe à une composante. *Annales Pol. Math.*, 3 (1958).

[80] M. HOSSZÚ: Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects. *Publ. Math., Debrecen*, 5 (1958).

ORTOGONÁLIS POLINOMOK KORLÁTOSSÁGÁRÓL. I.

FREY TAMÁS, Budapest

Bevezetés

Alapvetően fontos kérdés az ortogonális polinomok elméletében, hogy a $w(x) \in L[-1, 1]$ nemnegatív súlyfüggvényhez tartozó $\{\omega_n(x)\}$ ortonormált polinomok sorozata a $[-1, 1]$ intervallum valamely x_0 pontjában milyen feltételek mellett marad korlátos. Számos olyan eredmény ismeretes, amely a súlyfüggvényre vonatkozó globális — azaz az egész alapintervallumot érintő — strukturális feltételek mellett biztosítja bizonyos pontokban az $\{\omega_n(x)\}$ sorozat korlátosságát.

Ezeknek az eredményeknek az alkalmazhatóságát szélesíti KOROUS egy tétele [1], amely így hangzik:

Jelölje $\{\omega_n(x)\}$ *a* $w(x) \in L[-1, 1]$, *és* $\{\varpi_n(x)\}$ *pedig a* $p(x) \in L[-1, 1]$ *nemnegatív súlyfüggvényhez tartozó ortonormált polinomok sorozatát, és tegyük fel, hogy a két súlyfüggvény hányadosa kielégíti az alábbi összefüggéseket:*

$$0 < C_1 \leq k(x) = \frac{w(x)}{p(x)} \leq C_0; \quad -1 \leq x \leq 1; \tag{1.1}$$

$$|k(x) - k(x_0)| \leq C_2 \cdot |x - x_0|; \quad -1 \leq x \leq 1; \tag{1.2}$$

ahol x_0 *a* $[-1, 1]$ *intervallum valamelyik pontja.*

Ez esetben érvényesek a következő becslések:

$$|\omega_n(x_0)| \leq C_3 \sum_{\nu=0}^{1} |\varpi_{n-\nu}(x_0)|, \tag{1.3}$$

ill. $\qquad (n = 1, 2, \ldots)$

$$|\varpi_n(x_0)| \leq C_4 \sum_{\nu=0}^{1} |\omega_{n-\nu}(x_0)|, \tag{1.4}$$

ahol $C_0, C_1, \ldots, C_4$ (és a továbbiakban C_5, C_6 stb.) *az n indextől* *f ü g g e t l e n* *állandókat jelölnek.*[1] A tétel lényegében azt fejezi ki, hogy az (1. 1) feltételt

[1] Meg kell jegyeznünk, hogy KOROUS tételét ennél kevésbé általános alakban mondotta ki; nevezetesen (1. 1) helyett az erősebb

$$k(x) \in \mathrm{Lip}_x\, 1; \qquad -1 \leq x \leq 1,$$

premisszát szerepelteti, s így (1. 3), ill. (1. 4) az egész intervallumon érvényes. Tételének pl. SZEGŐ könyvében ([2]: Theorem 7. 1. 3; p. 157) közölt bizonyításából azonban fenti általánosítás közvetlenül leolvasható.

kielégítő súlyfüggvénypárokhoz tartozó ortonormált polinomsorozatok aszimptotikus viselkedése megegyezik azokban a pontokban, ahol a két súlyfüggvény az (1. 2) feltételt kielégíti.

Ebben a dolgozatban azt fogjuk megmutatni, hogy a fenti tételben szereplő (1. 1) és (1. 2) premisszák jelentősen gyengíthetők, anélkül, hogy az (1. 3) és (1. 4) konkluziók tartalmilag lényegesen változnának. Az 1., ill. 2. §-ban ti. igazoljuk, hogy ha a $[-1; 1]$ intervallumon végesszámú olyan pont van, ahol KOROUS tételének (1. 1) premisszája nem teljesül (azaz ahol pl. $k(x)$ nem marad korlátos), e pontok környezetében azonban a két súlyfüggvény mindegyike majorálható, ill. minorálható egy-egy hatványfüggvénnyel úgy, hogy a minoráns és majoráns exponensének különbsége 1-nél (ill. 1/2-nél) kisebb, akkor a Korous-tétel konkluziói érvényesek maradnak azzal a módosítással, hogy az (1. 3) és az (1. 4) képletben is az összegezés nem $\nu=1$-ig, hanem valamilyen, a majoráns, ill. minoráns függvények exponenseitől függő, de n-től független természetes számig történik.

E módosítás legfontosabb következménye, hogy mindazok a tételek, amelyek az egységkörön ortonormált polinomsorozatokra ismeretesek, átvihetők az ugyanilyen struktúrájú súlyfüggvénnyel a $[-1, 1]$ intervallumon ortogonális polinomsorozatokra, éspedig a súlyfüggvényre vonatkozó és annak nagyságrendjét megkötő mellékfeltétel elhagyásával is.[2]

Mielőtt a dolgozatban szereplő további általánosításokat ismertetnők, rá kell mutatnunk arra, hogy KOROUS tétele olyan esetekben is értékes felvilágosítást ad az ortonormált polinomsorozat nagyságrendjéről, amikor az nem marad egyenletesen korlátos. Ha azonban kifejezetten az egyenletes korlátosság kimutatása a célunk, a Korous-tétel (1. 2) premisszája is lényegesen enyhíthető. A 4. §-ban igazoljuk ti., hogy pl. a

$$(1.5)\qquad |\pi_n(x)| \leqq C_7; \quad (x_0-\varepsilon_0 \leqq x \leqq x_0+\varepsilon_0;\ n=1, 2, 3, \ldots)$$

feltétel mellett ($\varepsilon_0>0$) (1. 3) akkor is érvényes marad, ha (1. 2) helyett vagy csak azt követeljük meg, hogy $k(x)$ az $[x_0-\varepsilon_0; x_0+\varepsilon_0]$ intervallumon 1-nél nagyobb exponensű logaritmikus Lipschitz-feltételt (l. a 4. 1. TÉTELt), vagypedig azt, hogy $k(x)$ az x_0 *pontban* 1/2-nél nagyobb exponensű Lipschitz-feltételt elégítsen ki (l. a 4. 3. TÉTELt).

Meg kell említenünk, hogy KOROUS tétele — változatlan formában — érvényes az egységkörön ortonormált polinomok esetén is; ugyanígy az alábbiakban igazolt tételek is. A bizonyítások gondolatmenete — sőt, a formalizmus is — változtatás nélkül vihetők át erre az esetre.

[2] A szóbanforgó megkötés az alkalmazott $x=\cos\vartheta$ transzformáció következtében lép fel és azt követeli meg, hogy ne a $w(x)$ súlyfüggvénye maga, hanem $w(x)\sqrt{1-x^2}$ elégítse ki azokat a strukturális feltételeket, amelyeket az eredeti — az egységkörön értelmezett — súlyfüggvényről tételeztünk fel.

2. §. Korous tétele Jacobi-típusú súlyfüggvények esetén

21. Az alapvető segédtétel. Az első két paragrafus tételeinek igazolásánál alapvető szerepet játszik a

21. 1. LEMMA. *Tegyük fel, hogy a $w(x) \in L[-1, 1]$ súlyfüggvény*

(21. 1) $$k(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta = w(x)$$

alakba írható, ahol

(21. 2) $$0 < k \leq k(x) \leq K, \quad \text{továbbá} \quad k(x) \in \mathrm{Lip}_x 1, \quad \text{hacsak} \quad 1-\lambda \leq |x| \leq 1,$$

ahol $\lambda > 0$ tetszőleges.

Érvényesek ezesetben az

(21. 3) $$\int_{-1}^{1} \omega_n^2(x) \cdot \frac{w(x)}{(1-x)^{\varepsilon_1}} dx \leqq C_8; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

és

$$\int_{-1}^{1} \omega_n^2(x) \frac{w(x)}{(1+x)^{\varepsilon_2}} dx \leq C_9; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

relációk, feltéve, hogy ε_1 és ε_2 kielégítik az

(21. 4) $$\alpha - \varepsilon_1 > -1; \; \varepsilon_1 < \frac{1}{2}; \; \beta - \varepsilon_2 > -1; \; \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségeket.

BIZONYÍTÁS: Tételezzük fel először, hogy $k(x)$ az egész $[-1, 1]$ intervallumon Lip 1 osztálybeli függvény. Ezesetben az $\{\omega_n(x)\}$ sorozat aszimptotikus viselkedése — Korous-tételének felhasználásával — kapcsolatba hozható az $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ súlyfüggvényre ortonormált $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ Jacobi-polinomokéval — amelyeket klasszikus vizsgálatok alapján jól ismerünk — és így a tétel állításait könnyen igazolni tudjuk. Az alábbiakban (21. 3) első integráljának korlátosságát igazoljuk:

(21. 5) $$|\omega_n(x)| \leq C_{10} \{|p_n^{(\alpha,\beta)}(x)| + |p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)|\}$$

és így a Schwartz-féle egyenlőtlenség felhasználásával

(21. 6) $$\int_{-1}^{1} \omega_n^2(x) \frac{w(x)}{(1-x)^{\varepsilon_1}} dx \leq K \cdot C_{10}^2 \left\{ \int_{-1}^{1} \langle [p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 + [p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 \rangle \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{(1-x)^{\varepsilon_1}} dx + \right.$$
$$\left. + 2 \left(\int_{-1}^{1} [p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{(1-x)^{\varepsilon_1}} dx \cdot \int_{-1}^{1} [p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{(1-x)^{\varepsilon_1}} \right)^{1/2} \right\}.$$

Az egyenlőtlenség jobboldalán szereplő integrálok korlátosságát a Jacobi-polinomokra vonatkozó alábbi asszimptotikus becslések alapján igazolhatjuk ($\alpha > -1$; $\beta > -1$):

$$(21.7)\qquad p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\left\{\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\cdot\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\cdot\Gamma(n+\beta+1)}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

ahol

$$(21.8)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \binom{n+\beta}{n}; \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n},$$

továbbá

$$(21.9)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}\left\{\cos(N\vartheta+\gamma)+\frac{O_c(1)}{n\sin\vartheta}\right\},$$

ahol

$$\frac{c}{n} \leqq \vartheta \leqq \pi - \frac{c}{n}; \quad N = n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}; \quad \gamma = -\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{2}\pi,$$

azaz összegezve

$$(21.10)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) = \begin{cases} O(n^{\alpha}) & ;\ 0 \leqq \vartheta \leqq \frac{1}{n}, \\ \vartheta^{-\alpha-\frac{1}{2}}\, O\!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & ;\ \frac{1}{n} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}, \\ (\pi-\vartheta)^{-\beta-\frac{1}{2}}\, O\!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & ;\ \frac{\pi}{2} \leqq \vartheta \leqq \pi - \frac{1}{n}, \\ O(n^{\beta}) & ;\ \pi - \frac{1}{n} \leqq \vartheta \leqq \pi. \end{cases}$$

{Valamennyi összefüggés megtalálható SZEGŐ könyvében [2]: (21. 7) a 67. oldalon a (4. 3. 4) formulában, (21. 8) az 57—58. oldalakon, a (4. 1. 1) és (4. 1. 4) formulában, (21. 9) a 191—2. oldalon: Theorem 8. 21. 13, végül (21. 10) a 164. oldalon: Theorem 7. 32. 2 alatt.}

Ezek felhasználásával tekintsük pl. az

$$\int_{-1}^{1}[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(1-x)^{\varepsilon_1}}\,dx$$

integrált. Nyilván elegendő kimutatnunk, hogy a

$$(21.11)\qquad \int_{0}^{1}[p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{(1-x^2)^{\varepsilon_1}}\,dx$$

integrál, azaz (21. 7), ill. (21. 10) alapján, hogy

$$2^{\alpha+\beta}\left\{\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}\right\}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[P_n^{(\alpha,\beta)}\cos\vartheta)]^2\sin^{(1-2\varepsilon_1)}\vartheta\cdot \tag{21. 12}$$
$$\cdot\cos^{2\beta}\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin^{2\alpha}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta$$

korlátos. Mármost az utóbbiban az integrációs intervallumot felbontva az $\left[\frac{1}{n};\ \frac{\pi}{2}\right]$, ill. a $\left[0,\ \frac{1}{n}\right]$ szakaszokra és alkalmazva ott a (21. 10) becslés második, ill. első részét, állításunk közvetlenül adódik. Ugyanez vonatkozik a többi integrálra is.

Mivelhogy KOROUS tétele lokalizált formában is érvényes, a $k(x)$-re vonatkozó általánosabb (21. 2) alatti feltétel mellett is rögtön adódnak a lemma állításai. A $\left[-1;\ -1+\frac{\lambda}{2}\right]$, ill. az $\left[1-\frac{\lambda}{2};\ 1\right]$ szakaszokon ugyanis a fenti gondolatmenet mindenütt alkalmazható, a $\left[-1+\frac{\lambda}{2};\ 1-\frac{\lambda}{2}\right]$ szakaszon viszont $\frac{1}{(1-x)^{\varepsilon_1}}$ is, $(1+x)^{-\varepsilon_2}$ is két pozitív korlát között marad, s így ott a (21. 6); (21. 12) alatti integrálok közvetlenül becsülhetők.

2. 2. Jacobi-típusú súlyfüggvények esete. A 21. 1. LEMMA birtokában KOROUS tételét olyan súlyfüggvényekre is át tudjuk vinni, amelyek az alapintervallum két szélén nem korlátosak, ill., amelyek nincsenek 0-tól elhatárolva. Pontosabban: Felhasználva a bevezetésben szereplő jelöléseket, tegyük fel, hogy a két súlyfüggvény hányadosa kielégíti a

$$0<C_{11}\leqq k(x)\leqq C_{12},\quad \text{ha}\quad -1+\lambda\leqq x\leqq 1-\lambda;\ \lambda>0 \tag{22. 1}$$

és

$$|k(x)-k(x_0)|\leqq C_{13}|x-x_0|;\quad -1+2\lambda\leqq x_0-\mu\leqq x\leqq x_0+\mu\leqq 1-2\lambda \tag{22. 2}$$

feltételeket, található továbbá 12 olyan állandó, amelyek megfelelnek az alábbi követelményeknek:

$$0<w\leqq W;\ 0<p\leqq P;\ -1<a_i\leqq A_i<a_i+\frac{1}{2};$$
$$-1<b_i\leqq B_i<b_i+\frac{1}{2};\ (i=1,2) \tag{22. 3}$$

és a $-1\leqq x\leqq 1$ intervallumban

$$w(1+x)^{B_1}(1-x)^{A_1}\leqq w(x)\leqq W(1+x)^{b_1}(1-x)^{a_1},$$
$$p(1+x)^{B_2}(1-x)^{A_2}\leqq p(x)\leqq P(1+x)^{b_2}(1-x)^{a_2}. \tag{22. 4}$$

22. 1. TÉTEL: *Fenti feltételek mellett a $w(x)$, ill. $p(x)$ súlyfüggvényhez tartozó $\{\omega_n(x)\}$, ill. $\{\pi_n(x)\}$ ortonormált polinomsorozatok x_0-beli értékei között érvényesek a következő egyenlőtlenségek:*

$$(22.5)\qquad \begin{aligned} |\pi_n(x_0)| &\le C_{14}\sum_{\nu=0}^{s} |\omega_{n-\nu}(x_0)|;\\ |\omega_n(x_0)| &< C_{15}\sum_{\nu=0}^{s} |\pi_{n-\nu}(x_0)|, \end{aligned}$$

ahol s csakis az a_i; A_i; b_i; B_i exponensektől függő természetes szám.

BIZONYÍTÁS: Gondolatmenete lényegében követi KOROUS-ét, csakhogy a két súlyfüggvény közé megfelelő számú Jacobi-típusú súlyt iktatunk be, és igy — a 21. 1. LEMMA felhasználásával — lépésről-lépésre követjük a megfelelő ortonormált polinomok x_0-beli értékének nagyságrendi alakulását. Az alábbi segédsúlyfüggvényeket alkalmazzuk:

$$(22.6)\qquad j_\nu(x) = \begin{cases} C_{16}(1-x)^{\alpha_\nu}(1+x)^{\beta_\nu}; & 1-2\lambda \le |x| \le 1\\ w(x) & ; -1+2\lambda \le x \le 1-2\lambda \end{cases}$$

$[\nu = 1, 2, \ldots, (s-1)]$, ahol $\alpha_1 = A_1$; $\beta_1 = B_1$; $\alpha_{s-1} = A_2$; $\beta_{s-1} = B_2$,

$$(22.7)\qquad \text{továbbá } |\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}| < \frac{1}{2};\ |\beta_\nu - \beta_{\nu-1}| < \frac{1}{2};\ \nu = 2, 3, \ldots, (s-1).$$

A $j_\nu(x)$ Jacobi-típusú súlyhoz tartozó ortonormált polinomsorozatot $\{J_n^{(\nu)}(x)\}$-szel jelöljük.

Első lépésben igazoljuk az

$$(22.8)\qquad |\omega_n(x_0)| \le C_{17}\{|J_n^{(1)}(x_0)| + |J_{n-1}^{(1)}(x_0)|\}$$

egyenlőtlenséget. E célból elsősorban megjegyezzük, hogy a definíciók alapján érvényesek a következő becslések:

$$\left.\begin{aligned} &(22.9) && |w(x) - j_1(x)| \le C_{18}\, w(x)\\ &(22.10) && |w(x) - j_1(x)| \le C_{19}\, j_1(x)(1-x)^{a_1-\alpha_1}(1+x)^{b_1-\beta_1} \end{aligned}\right\}\ -1 \le x \le 1.$$

Így, a Korous-féle gondolatmenetet felhasználva:

$$\omega_n(x_0) = \int_{-1}^{1}\left\{\sum_{\mu=0}^{n} J_\mu^{(1)}(x_0) J_\mu^{(1)}(t)\right\}\omega_n(t)\, j_1(t)\, dt = \frac{k_n(w)}{k_n(j_1)} J_n^{(1)}(x_0) +$$

$$+\int_{-1}^{1}\omega_n(t)\{J_n^{(1)}(x_0)J_{n-1}^{(1)}(t) + J_{n-1}^{(1)}(x_0)J_n^{(1)}(t)\}\,\frac{j_1(t) - w(t)}{x_0 - t}\, dt,$$

azaz

$$\omega_n(x_0) \leq \frac{k_n(w)}{k_n(j_1)} |J_n^{(1)}(x_0)| +$$

$$+\frac{1}{\mu}\left\{\int_{-1}^{-1+2\lambda} + \int_{1-2\lambda}^{1}\right\} |\omega_n(t)| \left[|J_n^{(1)}(x_0)|\, |J_{n-1}^{(1)}(t)| + |J_{n-1}^{(1)}(x_0)|\, |J_n^{(1)}(t)| \right] |j_1(t)-w(t)|\, dt \leq$$

$$\text{(22. 11)} \qquad < \frac{k_n(w)}{k_n(j_1)} |J_n^{(1)}(x_0)| + \frac{1}{\mu}\left\{ |J_n^{(1)}(x_0)| \left[C_{18} \int_{-1}^{1} \omega_n^2(t)\, w(t)\, dt\right]^{1/2} \cdot\right.$$

$$\cdot\left[C_{19} \int_{-1}^{1} \langle J_{n-1}^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_1}\, dt\right]^{1/2} + |J_{n-1}^{(1)}(x_0)| \left[C_{18} \int_{-1}^{1} \omega_n^2(t)\, w(t)\, dt\right]^{1/2} \cdot$$

$$\left.\cdot\left[C_{19} \int_{-1}^{1} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\,(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_1}\, dt\right]^{1/2} \right\},$$

ahol

$$\frac{k_n(w)}{k_n(j_1)} = \int_{-1}^{1} \omega_n(t) J_n^{(1)}(t)\, j_1(t)\, dt \leq \left\{ \int_{-1}^{1} \omega_n^2(t)\, j_1(t)\, dt \right\}^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{-1}^{1} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\, dt \right\}^{1/2} < \left\{ \int_{-1}^{1} \omega_n^2(t)\, w(t)\, dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-1}^{1} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\, dt \right\}^{1/2} = 1,$$

továbbá

$$\text{(22. 12)} \qquad \int_{-1}^{1} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\,(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1-t)^{b_1-\beta_1}\, dt =$$

$$= \left\{ \left[\int_{-1}^{-1+\lambda} + \int_{1-\lambda}^{1} \right] + \int_{-1+\lambda}^{1-\lambda} \right\} \langle J_n^{(1)}(t)\rangle^2 j_1(t)\,(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_2}\, dt \leq C_{20}.$$

Legutolsó relációnkban felhasználtuk KOROUS tételét, amely szerint

$$\text{(22. 13)} \qquad |J_n^{(1)}(t)| \leq C_{21}\{ |p_n^{(\alpha_1,\beta_1)}(t)| + |p_{n-1}^{(\alpha_1,\beta_1)}(t)| \}, \quad \text{ha} \quad 1-\lambda \leqq |t| \leqq 1,$$

mivelhogy a $j_1(x)$ és az $(1-x)^{\alpha_1}\cdot(1+x)^{\beta_1}$ súlyok kielégítik a (1. 1) és (1. 2) premisszát, továbbá a 21. 1. LEMMÁT, amely szerint

$$\text{(21. 14)} \qquad \int_{-1}^{1} [p_{n-i}^{(\alpha_1,\beta_1)}(t)]^2 j_1(t)\,(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_1}\, dt \leq C_{22}; \; (i=0, 1),$$

minthogy $-\frac{1}{2} < a_1-\alpha_1$; $-\frac{1}{2} < b_1-\beta_1$; $a_1 > -1$; $b_1 > -1$, végül azt a tényt, hogy $[-1+\lambda;\, 1-\lambda]$-ben $|(1-t)^{a_1-\alpha_1}(1+t)^{b_1-\beta_1}|$ korlátos.

A bizonyitás azon részletei, amikor a $j_1(x)$ súlyról $j_2(x)$-re stb, végül $j_{s-2}(x)$-ről $j_{s-1}(x)$-re térünk át, (ill. megfordítva) szóról-szóra egyeznek a fentiekkel.[8]

A bizonyítás utolsó részében, amikor a $j_{s-1}(x)$ súlyról a $p(x)$-re térünk át (azaz a $\{J_m^{(s-1)}(x)\}$ sorozatról $\{\pi_n(x)\}$-re), ismét a fenti gondolatmenetet használjuk. Így adódnak lépésről lépésre a

(22. 15) $$|J_m^{(\nu)}(x_0)| \leq C_{23}\{|J_m^{(\nu-1)}(x_0)| + |J_{m-1}^{(\nu-1)}(x_0)|\},$$

ill. végül a

(22. 16) $$|\pi_m(x_0)| \leq C_{24}\{|J_m^{(s-1)}(x_0)| + |J_{m-1}^{(s-1)}(x_0)|\},$$

relációk, ezek alapján pedig (22. 5) állítás, amit igazolnunk kellett.

3. §. Az eredmények általánositása

31. Áttérés az egységkörön ortonormált polinomsorozatok esetére. A bevezetésben említettük, hogy KOROUS tétele — bizonyításával együtt — szóról szóra átvihető az egységkörön ortonormált polinomsorozatok esetére is. Ugyanez a helyzet a 2. §-ban megadott általánositással is. Ez a tény módot ad arra, hogy a súlyfüggvények szinguláris pontjait (ahol tehát $k(x)$-re nem érvényes az (1. 1) feltétel) egyrészt eltólhassuk az ortogonalítási intervallum széléről, hiszen az egységkör kerületén minden további nélkül végezhetünk transzlációt a súlyfüggvénnyel és vele együtt az ortonormált polinomsorozattal; másrészt egy további lépésben növelni is tudjuk e szinguláris pontok számát.

[8] Meg kell jegyeznünk, hogy a (22. 7) alatt szereplő feltételcsoport helyett elegendő lenne az $|\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}| < 1$; $|\beta_\nu - \beta_{\nu-1}| < 1$ feltételeket kikötnünk — így kb. feleannyi lépéssel jutunk el w-től p-ig — amikoris a (22. 10) becslés helyett az alábbi módon járhatunk el (pl. az $\alpha_j < \alpha_{j+1}$; $\beta_j < \beta_{j+1}$ esetben):

$$\int_{-1}^{1} J_m^{(j)}(x) J_m^{(j+1)}(x) \cdot j_j(x)\, dx \leq$$

$$\leq \left[\int_{-1}^{1} \langle J_m^{(j)}(x)\rangle^2 j_j(x)(1-x)^{\frac{\alpha_j+\alpha_{j+1}}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{\beta_j+\beta_{j+1}}{2}} dx\right]^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{-1}^{1} \langle J_m^{(j+1)}(x)\rangle^2 j_j(x)(1-x)^{\frac{\alpha_{j+1}-\alpha_j}{2}} (1+x)^{\frac{\beta_{j+1}-\beta_j}{2}} dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq C.$$

Valóban $-\frac{1}{2} < \frac{\alpha_j - \alpha_{j+1}}{2}$; $-\frac{1}{2} < \frac{\beta_j - \beta_{j+1}}{2}$, továbbá elegendő kicsiny $0 < \vartheta_i < \frac{1}{2}$; $i = 1, 2$ mellett

$$j_j(x)(1-x)^{\frac{\alpha_{j+1}-\alpha_j}{2}} (1+x)^{\frac{\beta_{j+1}-\beta_j}{2}} < j_{j+1}(x)(1-x)^{-\left(\frac{1}{2}-\vartheta_1\right)} (1+x)^{-\left(\frac{1}{2}-\vartheta_2\right)}.$$

Az alapvető tény, amelyre támaszkodunk, egyrészt az, hogy ismeretes az egységkörön a

$$f^{(\gamma,\delta)}(\vartheta)=2^{\gamma+\delta}(1-\cos\vartheta)^{\gamma}\cdot(1+\cos\vartheta)^{\delta} \tag{31. 1}$$

súlyfüggvényre ortonormált $\{\varphi_n^{(\gamma,\delta)}(z)\}$ polinomok összefüggése a Jacobi-polinomokéval (l. [2]: Theorem 11.5; 287—88.):

$$\begin{aligned}\varphi_{2n}^{(\gamma,\delta)}(z)&=z^n\{Ap_n^{\left(\gamma-\frac{1}{2};\,\delta-\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)+B\cdot i\cdot\sin\vartheta p_{n-1}^{\left(\gamma+\frac{1}{2};\,\delta+\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)\}\\ \varphi_{2n+1}^{(\gamma,\delta)}(z)&=z^n\{Cp_{n+1}^{\left(\gamma-\frac{1}{2};\,\delta-\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)+D\cdot i\cdot\sin\vartheta p_n^{\left(\gamma+\frac{1}{2};\,\delta+\frac{1}{2}\right)}(\cos\vartheta)\};\ z=e^{i\vartheta},\end{aligned} \tag{31. 2}$$

ahol A, B, C és D valós — n-től és ϑ-tól független — állandók; másrészt viszont az, hogy a *páros* $f(\vartheta)$ súlyra az egységkörön ortonormált $\{\psi_n(z)\}$ polinomsorozat ismeretében explicite is felírhatjuk a $[-1, 1]$ intervallumon a

$$w(x)=f[\arccos x]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{31. 3}$$

súlyra ortonormált $\{\omega_n(x)\}$ polinomsorozatot (l. [2], Theorem 11.5):

$$\omega_n(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{\psi_{2n}(0)}{\varkappa_{2n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\{z^{-n}\psi_{2n}(z)+z^n\psi_{2n}(z^{-1})\}, \tag{31. 4}$$

ahol $z=e^{i\vartheta}$; $x=\frac{z+z^{-1}}{2}$; a $\psi_{2n}(0)$ és $\varkappa_{2n}$ mennyiségekre jó becslések ismeretesek (SZEGŐ [2]).[1] Igen fontos szerepet játszik az alábbi két tény is:

a) z_0-lal jelölve az $e^{i\vartheta_0}$ mennyiséget, az

$$f_e^{(\gamma,\delta)}(\vartheta-\vartheta_0)=2^{\gamma+\delta}[1-\cos(\vartheta-\vartheta_0)]^{\gamma}[1+\cos(\vartheta-\vartheta_0)]^{\delta} \tag{31. 5}$$

súlyfüggvényre ortonormált polinomok sorozata:

$$\psi_{n;e}^{(\gamma,\delta)}(z)=\varphi_n^{(\gamma,\delta)}(z-z_0). \tag{31. 6}$$

b) A (21. 7), ill. (21. 10) és a (31. 1) relációkból leolvasható, hogy

$$|\varphi_n^{(\gamma,\delta)}(\cos\vartheta)|=\begin{cases}O(n^{\gamma}), & \text{ha } 0\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{n},\\ O(\vartheta^{-\gamma}), & \text{ha } \frac{\pi}{n}\leqq\vartheta\leq\frac{\pi}{2},\\ O[(\pi-\vartheta)^{-\delta}], & \text{ha } \frac{\pi}{2}\leqq\vartheta\leqq\pi-\frac{\pi}{n},\\ O(n^{\delta}), & \text{ha } \pi-\frac{\pi}{n}\leqq\vartheta\leq\pi,\end{cases} \tag{31. 7}$$

[1] L. pl.: (12. 3. 15) formula, p. 295., ill. (12. 5. 1) formula, p. 297.

és így

$$(31.8) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n^{(\gamma,\delta)}(e^{i\vartheta})|^2 \frac{f^{(\gamma,\delta)}(\vartheta)}{(1-\cos^2\vartheta)^{\varepsilon}}\,d\vartheta \leq C_{25},$$

$\left(\text{hacsak } \varepsilon < \frac{1}{2};\ \gamma-\varepsilon > -\frac{1}{2};\ \delta-\varepsilon > -\frac{1}{2}\right)$, azaz a 21. 1. LEMMA tartalmilag átvihető az egységkörön Jacobi-típusú súlyra ortonormált polinomsorozatokra, azzal az általánosítással, hogy nemcsak négyzetével integrálható, hanem integrálható hatványfüggvénnyel is megszorozhatjuk az eredeti súlyfüggvényt, a (31. 8) integrál mégis korlátos marad.

32. A 21.1. LEMMA általánosítása. Annak igazolása végett: hogy egyrészt a 21. 1. LEMMA olyan Jacobi-típusú súlyfüggvényekre is érvényes, amelyeknek nem egy (ill. két) szingularitásuk van, hanem tetszőlegesen (véges) sok; másrészt, hogy az egységkör súlyfüggvényeiről vissza tudjunk térni a $[-1, 1]$ intervallum súlyaira, azaz hogy párossá tudjuk tenni az egységkörön értelmezett súlyfüggvényt, anélkül, hogy annak lényeges struktúrális tulajdonságait megváltoztattuk volna, néhány további lemmát fogunk bebizonyitani.

32. 1. LEMMA: *Legyen*

$$(32.1) \qquad -\pi < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_r < \pi;\ -\frac{1}{2} < \gamma_j;\ (j = 1, 2, \ldots r)$$

és jelöljük az

$$(32.2) \qquad f_r^{(\gamma_j)}(\vartheta-\vartheta_j) = 2^{\gamma_j}[1-\cos(\vartheta-\vartheta_j)]^{\gamma_j}$$

Jacobi-típusú súlyfüggvényhez rendelt, az egységkörön ortonormált polinomsorozatot $\{\varphi_n^{(\gamma_j)}(z)\}$*-vel, az*

$$(32.3) \qquad f_k(\vartheta) = \prod_{j=1}^{k} f_r^{(\gamma_j)}(\vartheta-\vartheta_j)$$

súlyhoz tartozó ortonormált polinomrendszert pedig $\{\varphi_n(z;k)\}$*-val. Ez esetben*

$$(32.4) \qquad |\varphi_n(e^{i\vartheta};k)| = O[|\varphi_n^{(\gamma_j)}(e^{i\vartheta})|], \quad \textit{hacsak} \quad \frac{\vartheta_{j-1}+\vartheta_j}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\vartheta_j+\vartheta_{j-1}}{2}.$$

BIZONYÍTÁS: A 22. 1. TÉTELnél követett gondolatmenetet lényegében megismételve, teljes indukciót alkalmazunk: a lemma állítása $k = 1$ (ill. speciális $k = 2$) esetében érvényes, amit leolvashatunk a (31. 7) összefüggésekből. Tegyük fel, hogy $k = K-1$ esetén még igaz az állítás, azaz bárhogy választva a $\vartheta_j^{(K-1)}$ pontokat ($j = 1, 2, \ldots, K-1$), az $f_{K-1}(\vartheta)$ súlyhoz tartozó $\{\varphi_n(z; K-1)\}$ ortonormált polinomsorozat aszimptotikus viselkedése a $\vartheta_j^{(K-1)}$ pont környezetében ($j = 1, 2, \ldots, K-1$) megegyezik $\{\varphi_n^{(\gamma_j^{(K-1)})}(e^{i\vartheta})\}$-

éval. Igazoljuk, hogy ez esetben az állítás $k = K$ esetén is érvényes. Tekintsük pl. a $\vartheta_m^{(K)}$ pont környezetét. Az igazolásnál felhasználjuk az $(1 \leqq \nu \neq m \leqq K)$

$$f_{K-1;\nu}(\vartheta) = \prod_{j=1}^{\nu-1} f_\nu^{(\gamma_j(K))}(\vartheta - \vartheta_j^{(K)}) \cdot \prod_{j=\nu+1}^{K} f_\nu^{(\gamma_j(K))}(\vartheta - \vartheta_j^{(K)}) \tag{32.5}$$

súlyfüggvényt, és a hozzátartozó $\{\varphi_n(e^{i\vartheta}; K-1)\}$ ortonormált polinomsorozatot, amelyre a lemma állításai — feltételeink szerint — teljesülnek. A bizonyítást a $|\gamma_\nu| > \frac{1}{4}$ esetben több lépésben végezzük el, (l. a 22. 1. TÉTEL igazolását) éspedig úgy, hogy $f_{K-1;\nu}$ és f_K közé ez esetben több segédsúlyt iktatunk: $f_{K;\mathrm{I}}$-et, $f_{K;\mathrm{II}}$-t, stb., úgy, hogy egy-egy lépésnél a $\vartheta_\nu^{(K)}$ helyhez tartozó kitevő csak $\frac{1}{4}$-nél kevesebbel változzék. Tegyük tehát fel, hogy azt már igazoltuk, hogy lemmánk állítása érvényes az

$$f_{K;S;\nu}(\vartheta) = f_{K-1;\nu}(\vartheta) \cdot 2^{\gamma_s}[1 - \cos(\vartheta - \vartheta_\nu^{(K)})]^{\gamma_s} \tag{32.6}$$

súlyfüggvényhez tartozó $\{\varphi_n(z; K; S)\}$ sorozatra, és ennek alapján igazoljuk, hogy érvényes marad az

$$f_{K;S+1;\nu}(\vartheta) = f_{K;S;\nu}(\vartheta) \cdot 2^{\Delta}[1 - \cos(\vartheta - \vartheta_\nu^{(K)})]^{\Delta} \tag{32.7}$$

súlyfüggvényhez tartozó $\{\varphi_n(z; K; S+1)\}$ polinomsorozatra is, ahol $|\Delta| < \frac{1}{4}$. (A bizonyítás természetesen az első lépést is tartalmazza, ti. a $\gamma_s = 0$ választással).

Feltételeink szerint érvényesek ugyanis a következő becslések, tetszőleges α és β valós számok mellett:

$$|\alpha f_{K;S;\nu}(\vartheta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)| \leqq \begin{cases} C_{26} f_{K;S;\nu}(\vartheta) \\ C_{27} f_{K;S+1;\nu}(\vartheta) \end{cases}; \quad \vartheta \notin [\vartheta_\nu - \mu; \vartheta_\nu + \mu], \tag{32.8}$$

$$\begin{aligned} &|\alpha f_{K;S;\nu}(\vartheta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)| \leqq \\ &\leqq \begin{cases} C_{28}\, f_{K;S;\nu}(\vartheta) \cdot |\vartheta - \vartheta_\nu^{(K)}|^{-2|\Delta|} \\ C_{29}\, f_{K;S+1;\nu}(\vartheta) \cdot |\vartheta - \vartheta_\nu^{(K)}|^{-2|\Delta|} \end{cases}; \quad \vartheta_\nu^{(K)} - \mu \leqq \vartheta \leqq \vartheta_\nu^{(K)} + \mu. \end{aligned} \tag{32.9}$$

A 21. 2. TÉTEL gondolatmenetét használva tehát $(z = e^{i\Theta};\ \vartheta_{m-1} < \Theta < \vartheta_{m+1})$:

$$\begin{aligned} \varphi_n(z; K; S+1) &= \alpha_n \varphi_n(z; K; S) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\zeta; K; S+1) \sum_{\varrho=0}^{n-1} \overline{\varphi_\varrho(\zeta; K; S)}\, \varphi_\varrho(z; K; S)\, f_{K;S;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta = \\ &= \alpha_n \varphi_n(z; K; S) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\zeta; K; S+1) \frac{\overline{\varphi_n^*(\zeta; K; S)}\, \varphi_n^*(z; K; S) - \overline{\varphi_n(\zeta; K; S)}\varphi_n(z; K; S)}{1 - \bar{\zeta} z} \cdot \\ &\cdot [f_{K;S}(\vartheta) - \beta f_{K;S-1}(\vartheta)]\, d\vartheta; \quad (\zeta = e^{i\vartheta}), \end{aligned} \tag{32.10}$$

ahol $\alpha_n = \frac{\varkappa_n[\varphi_n(z; K; S+1)]}{\varkappa_n[\varphi_n(z; K; S)]} = O(1)$; $\varphi_n^*(\zeta) = \zeta^n \cdot \varphi_n(\zeta^{-1})$, és így $|\varphi_n^*(e^{i\vartheta})| = |\varphi_n(e^{i\vartheta})|$; β-t pedig úgy választottuk, hogy $[f_{K;S;\nu}(\Theta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\Theta)] = 0$ legyen. Ennek alapján:

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_n(z; K; S+1)| \leqq |\alpha_n|\,|\varphi_n(z; K; S)| + \\
&+\frac{1}{2\pi}|\varphi_n^*(z; K; S)| \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|\,|\varphi_n^*(\zeta; K; S)| \frac{|f_{K;S;\nu}(\vartheta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)|}{|1-\bar{\zeta}z|} d\vartheta + \\
&+\frac{1}{2\pi}|\varphi_n(z; K; S)| \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|\,|\varphi_n(\zeta; K; S)| \frac{|f_{K;S;\nu}(\vartheta) - \beta f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)|}{|1-\bar{\zeta}z|} d\vartheta .
\end{aligned}
\tag{32. 11}
$$

Azt kell csak igazolnunk, hogy az itt szereplő integrálok korlátosak. Felbontva az integrálokat 3 részre, az $\frac{1}{2}(\vartheta_{m-1} + \vartheta_m) \leqq \vartheta \leqq \frac{\vartheta_m + \vartheta_{m+1}}{2}$ szakaszon

$$
\frac{1}{|1-\bar{\zeta}z|}\left|1 - \beta\frac{f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)}{f_{K;S;\nu}(\vartheta)}\right| \leqq C_{30};
\tag{32. 12}
$$

emellett itt érvényes a (31. 8) egyenlőtlenség is, és így felhasználva a Schwartz-egyenlőtlenséget:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)}^{\frac{1}{2}(\vartheta_m+\vartheta_{m+1})} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|\,|\varphi_n(\zeta; K; S)|\, f_{K;S;\nu}(\vartheta) \cdot \frac{\left|1-\beta\frac{f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)}{f_{K;S;\nu}(\vartheta)}\right|}{|1-\bar{\zeta}z|} d\vartheta \leqq \\
&\leqq C_{30}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S)|^2 f_{K;S;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta\right\}^{1/2} \cdot \\
&\cdot\left\{\int_{\frac{1}{2}(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)}^{\frac{1}{2}(\vartheta_m+\vartheta_{m+1})} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|^2 f_{K;S;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta\right\}^{1/2} \leqq \\
&\leqq C_{30}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S)|^2 f_{K;S;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta\right\}^{1/2} \cdot \\
&\cdot \sqrt{C_{27}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|^2 f_{K;S+1;\nu}(\vartheta)\, d\vartheta\right\}^{1/2} \leqq C_{30}\cdot\sqrt{C_{27}} \leqq C_{31}.
\end{aligned}
\tag{32. 13}
$$

A $\left[-\pi, \frac{\vartheta_{m-1}+\vartheta_m}{2}\right]$, ill. a $\left[\frac{\vartheta_m + \vartheta_{m+1}}{2}; \pi\right]$ szakaszokon viszont a (32. 9) képletet, továbbá azt a feltételt használjuk fel, hogy $f_{K;s;\nu}(\vartheta)$-val kapcsolatosan igaz lemmánk állítása. Ezenkívül hivatkozunk a (31. 8) becslésre és végül arra, hogy

(32. 14) $$\frac{1}{|1-\bar{\zeta}z|} \leqq C_{32}, \text{ ha } \vartheta \notin \left[\frac{\vartheta_{m-1}+\vartheta_m}{2}; \frac{\vartheta_m+\vartheta_{m+1}}{2}\right].$$

Így

$$\left\{\int_{\pi}^{\frac{1}{2}(\vartheta_{m-1}+\vartheta_m)} + \int_{\frac{1}{2}(\vartheta_m+\vartheta_{m+1})}^{\pi}\right\} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|$$

$$|\varphi_n(\zeta; K; S)| \frac{|f_{k;s;\nu}(\vartheta)-f_{k;s+1;\nu}(\vartheta)\cdot\beta|}{|1-\bar{\zeta}z|} d\vartheta \leqq$$

(32. 15) $$\leqq C_{32}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S+1)|^2 f_{K;s+1;\nu}(\vartheta)d\vartheta\right\}^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(\zeta; K; S)|^2\cdot f_{K;s;\nu}(\vartheta)\cdot|\vartheta-\vartheta_\nu|^{-4|\Delta|}d\vartheta\right\}^{1/2} \leqq C_{32}\cdot C_{25}\cdot\ldots C_{33},$$

amivel lemmánk állítását is igazoltuk.

E lemma alapján, KOROUS tételét felhasználva, azonnal adódik a 21. 1. LEMMA általánosítása:

32. 2. LEMMA. *Legyen* $-\pi \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_s < \pi$ *és*

(32. 16) $$f(\vartheta) = k(\vartheta)\prod_{j=1}^{s}|\vartheta-\vartheta_j|^{\gamma_j},$$

ahol

(32. 17) $$0 < k \leqq k(\vartheta) \leqq K, \quad -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi,$$

(32.18) $$k(\vartheta) \in \mathrm{Lip}_x 1, \text{ ha } \vartheta_j-\lambda_j \leqq \vartheta \leqq \vartheta_j+\lambda_j;\ \lambda_j>0;\ j=1,2,\ldots,s;$$

végül $-1 < \gamma_j$ $(j=1,2,\ldots,s)$ *és* $\{\varphi_n(z)\}$ *az* $f(\vartheta)$ *súlyhoz tartozó, az egységkörön ortonormált polinomrendszer. Ez esetben*

(32. 19) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(e^{i\vartheta})|^2 f(\vartheta)\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{s}|\vartheta-\vartheta_j|^{\beta_j}}d\vartheta \leqq C_{34},$$

hacsak

$$-1 < \gamma_j-\beta_j \text{ és } \beta_j < 1 \ (j=1,2,\ldots,s).$$

A kapott eredményt közvetlenül átvihetjük a $[-1, 1]$ intervallumon ortonormált polinomrendszerekre is, a (31. 3)—(31. 4) transzformációs formulák alapján; könnyen párossá tudjuk ugyanis tenni a $(0, \pi)$ intervallumban szingularitásokkal rendelkező súlyfüggvényt, ti. ugyanilyen szingularitásokat veszünk fel a $(-\pi, 0]$ intervallumon is: a 32. 1. lemma értelmében a $[0, \pi)$ intervallumon az aszimptotikus viselkedése ezzel nem változik.

32. 3. LEMMA: *Legyen* $-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{s-1} < x_s = 1$, *és*

$$w(x) = k(x) \prod_{j=0}^{s} |x - x_j|^{\alpha_j}, \tag{32. 20}$$

ahol

$$0 < k \leq k(x) \leq K; \ -1 \leq x \leq 1, \tag{32. 21}$$

$$k(x) \in \mathrm{Lip}_{\varkappa} 1, \ \textit{ha}\ x \in \begin{cases} [-1; -1+\lambda_0] \\ [x_j - \lambda_j; x_j + \lambda_j]; j = 1, 2, \ldots, s-1, \\ [1-\lambda_s; 1], \end{cases} \tag{32. 22}$$

végül $-1 < \alpha_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, s)$ *és* $\{\omega_n(x)\}$ a w-re *ortonormált polinomrendszer. Ez esetben*

$$\int_{-1}^{1} \omega_n^2(x) \cdot w(x) \frac{dx}{\prod_{j=0}^{s} |x - x_j|^{\beta_j}} \leq C_{35}, \tag{32. 23}$$

ha

$$-1 < \alpha_j - \beta_j; j = 0, 1, 2, \ldots, s; \ \beta_j < 1 \ (\text{ha } j = 1, 2, \ldots, s-1); \tag{32. 24}$$

$$\beta_j < \frac{1}{2} (\text{ha } j = 0, s).$$

33. Korous tételének további általánosítása. A 32. 3. lemma birtokában a 22. 1. TÉTELt tovább általánosíthatjuk, éspedig pontosan ugyanazon gondolatmenetet alkalmazva, mint a 22. 1. TÉTELben:

33. 1. TÉTEL: *Legyen* $w(x) \in L[-1, 1]; p(x) \in L[-1, 1]$;

$$x_{-1} = -1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < \xi < x_{j+1} < \cdots < x_s = 1 = x_{s+1}; \ (j+1 < s), \tag{33. 1}$$

legyen továbbá található a

$$\begin{gathered} 0 < p \leq P; 0 < w \leq W; -1 < a_\nu \leq A_\nu < a_\nu + 1 \ (\nu = 1, 2, \ldots, s-1), \\ -1 < b_\nu \leq B_\nu < b_\nu + 1 \ (\nu = 1, 2, \ldots, s-1), \end{gathered} \tag{33. 2}$$

ill.

$$-1 < a_\nu \leq A_\nu < a_\nu + \frac{1}{2}; -1 < b_\nu \leq B_\nu < b_\nu + \frac{1}{2}; (\nu = 0; s),$$

feltételeket kielégítő állandók olyan csoportja, amellyel kielégülnek a

$$(33.3)\qquad \left.\begin{aligned} p|x-x_j|^{A_j} &\leq p(x) \leq P|x-x_j|^{a_j} \\ w|x-x_j|^{B_j} &\leq w(x) \leq W|x-x_j|^{b_j} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &ha\ \frac{x_j+x_{j-1}}{2} \leq x \leq \frac{x_j+x_{j+1}}{2}, \\ &ahol\ j=0,1,2,\ldots,s; \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek. Legyen végül

$$(33.4)\qquad \frac{w(x)}{p(x)} = k(x) \in \mathrm{Lip}\,1,\ ha\ \frac{x_j+\xi}{2} \leq x \leq \frac{\xi+x_{j+1}}{2}.$$

Ez esetben

$$(33.5)\qquad |\omega_n(\xi)| \leq C_{36} \sum_{\mu=0}^{S} |\pi_{n-\mu}(\xi)|;\quad |\pi_n(\xi)| \leq C_{37} \sum_{\mu=0}^{S} |\omega_{n-\mu}(\xi)|,$$

ahol S csak s-től, továbbá az a_j, b_j, A_j, B_j exponensektől függ.

Ezt a tételt tovább élesíthetjük, nevezetesen megengedhetjük pl. a

$$(33.6)\qquad \xi = x_{j+1}$$

egyenlőtlenséget is, amikor persze a (33.4) feltételt az $\left[\frac{x_j+\xi}{2}; \frac{\xi+x_{j+2}}{2}\right]$ szakaszra kell kikötnünk. E célból először a 32.1 LEMMÁT kell általánosítanunk:

33.2. LEMMA: *Legyen $f(\vartheta) \in L_{2\pi}$ az alábbi alakban írható:*

$$(33.7)\qquad f(\vartheta) = \sigma(\vartheta) \prod_{j=1}^{s} |\vartheta-\vartheta_j|^{\alpha_j},$$

ahol

$$(33.8)\qquad -\pi \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_j < \vartheta_0 < \vartheta_{j+1} < \cdots < \vartheta_s \leq \pi;$$
$$\alpha_j > -1;\ (j=1,2,\ldots,s)$$

és

$$(33.9)\qquad 0 < \sigma_1|\vartheta-\vartheta_0|^{\alpha_0} \leq \sigma(\vartheta) \leq \sigma_2|\vartheta-\vartheta_0|^{\beta_0};\qquad -1 < \beta_0 \leq \alpha_0 < \beta_0+1$$

továbbá

$$(33.10)\qquad \sigma(\vartheta) \in \mathrm{Lip}\,1,\ ha\ \vartheta \notin \left(\frac{\vartheta_j+\vartheta_0}{2}; \frac{\vartheta_0+\vartheta_{j+1}}{2}\right).$$

Ez esetben az $f(\vartheta)$ súlyra az egységkörön ortonormált $\{\Phi_n(z)\}$ polinomsorozat a $z_\nu = e^{i\vartheta_\nu}$ pontok ($\nu=1,2,\ldots,s$) kis környezetében ugyanolyan aszimtotikával rendelkezik, mint az

$$(33.11)\qquad f^{(\alpha_\nu)}(\vartheta) = 2^{\frac{\alpha_\nu}{2}}\,[1-\cos(\vartheta-\vartheta_\nu)]^{\frac{\alpha_\nu}{2}}$$

súlyra az egységkörön ortonormált $\{\varphi_n(z;\nu)\}$ polinomsorozat, azaz

$$(33.12)\qquad |\Phi_n(e^{i\vartheta})| = O[|\varphi_n(e^{i\vartheta};\nu)|],$$

$$(33.13)\ ha\quad \vartheta \in \left[\frac{1}{2}(\vartheta_{\nu-1}+\vartheta_\nu); \frac{1}{2}(\vartheta_\nu+\vartheta_{\nu+1})\right]\quad de\quad \vartheta \notin \left(\frac{\vartheta_j+\vartheta_0}{2}; \frac{\vartheta_0+\vartheta_{j+1}}{2}\right).$$

A lemma bizonyítása a 32. 1 és 32. 2. LEMMÁra támaszkodva, a 21. 2. TÉTEL gondolatmenetével analóg módon történik, nevezetesen az $f(\vartheta)$-ra ortonormált polinomokat (32. 10) mintájára az

$$f^*(\vartheta)=f(\vartheta)2^{\frac{\alpha_\nu}{2}}[1-\cos(\vartheta-\vartheta_\nu)]^{\frac{\alpha_\nu}{2}} \tag{33. 14}$$

súlyra ortonormált polinomsorozattal fejezzük ki.

A 33. 2. LEMMÁra támaszkodva azonnal adódik a

33. 3. TÉTEL is: *A* 33. 1. TÉTEL *konkluziói érvényesek maradnak, ha megengedjük a*

$$\xi=x_{j+1}$$

esetet, feltéve, hogy a (33. 4) *feltételt így módosítjuk:*

$$k(\xi)=k(x_{j+1})>0;\quad k(x)\in \mathrm{Lip}\,1,\ \textit{ha}\quad \frac{x_j+\xi}{2}\leqq x\leqq\frac{\xi+x_{j+2}}{2}.$$

4. §. A Lipschitz-feltétel exponensének csökkentéséről

Az alábbiakban a Korous-tételben szereplő (1. 2) feltétel enyhítésével foglalkozunk. Tételeinket az egységkörön értelmezett, nemnegatív súlyfüggvényekre vonatkozóan mondjuk ki és bizonyítjuk be, amelyeknek viszonya 0-tól elhatárolt és korlátos, ezek alapján azonban — a 2. és 3. § eredményeire támaszkodva — a [—1. 1] intervallumon értelmezett és globálisan sokkal általánosabb struktúrájú súlyfüggvényekre vonatkozó korolláriumokat is megadunk.

A tételekben szereplő két súlyfüggvény: $\varphi(\vartheta)\in L_{2\pi}$ és $\psi(\vartheta)\in L_{2\pi}$; hányadosuk:

$$\varkappa(\vartheta)=\frac{\varphi(\vartheta)}{\psi(\vartheta)};\ \log\varphi\in L_{2\pi};\ \text{emellett}\ \log\psi\in L_{2\pi};\ \psi(\vartheta)\leqq\Psi. \tag{4. 1}$$

A hányados folytonossági modulusát jelölje $\omega(\delta)=\omega(\delta;\varkappa)$. $\varkappa$ elégítse ki a

$$0<\varkappa_1\leqq\varkappa(\vartheta)\leqq\varkappa_2\quad(-\pi\leqq\vartheta\leqq\pi) \tag{4. 2}$$

feltételt. Az egységkörön ortonormált polinomok sorozatát jelöljük $\{\Phi_n(z)\}$, ill. $\{\Psi_n(z)\}$-vel.[5]

A 4. §-ban az alábbi tételeket fogjuk bizonyítani:

4. 1. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy a* (4. 1) *és* (4. 2) *feltételek mellett érvényesek az alábbi premisszák:*

$$\int_0^1\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta=C_{38}<\infty; \tag{4. 3}$$

$$|\Phi_n(e^{i\vartheta})|\leqq C_{39};\ (n=1,2,\dots;\quad -\pi\leqq\vartheta\leqq\pi). \tag{4. 4}$$

[5] Az eddig megadott jelölések, ill. premisszák valamennyi tételben szerepelnek.

Egyenletesen korlátos az egységkörön ez esetben a $\{|\Psi_n(z)|\}$ *sorozat is:*

$$|\Psi_n(e^{i\vartheta})| \leqq C_{40}; \; -\pi \leqq \vartheta \leqq \pi. \tag{4. 5}$$

4. 2. TÉTEL: *Legyen*

$$|\varphi(\vartheta) - \varphi(\vartheta_0)| \leqq C_{41}\sqrt{|\vartheta - \vartheta_0|}\, g(|\vartheta - \vartheta_0|); \tag{4. 6}$$

$$\text{ha } |\vartheta - \vartheta| \leqq C_{42}, \text{ ahol}$$

$$\int_0^{C_{42}} \frac{g^2(t)}{t}\, dt = C_{43} < \infty. \tag{4. 7}$$

Ez esetben

$$|\Phi_n(e^{i\vartheta_0})| \leqq C_{44} \; (n = 1, 2, \ldots). \tag{4. 8}$$

4. 3. TÉTEL: *Tegyük fel, hogy* (4. 2) *feltétel mellett érvényesek az alábbi premisszák:* $\varkappa(\vartheta)$ *a* ϑ_0 *pontban kielégít egy* (4. 6)—(4. 7) *típusú egyenlőtlenséget, továbbá*

$$|\Phi_n(e^{i\vartheta})| \leqq C_{45}, \text{ ha } \vartheta_0 - C_{46} \leqq \vartheta \leqq \vartheta_0 + C_{46}. \tag{4. 9}$$

Ez esetben

$$|\Psi_n(e^{i\vartheta_0})| \leqq C_{47}; \; n = 1, 2, \ldots. \tag{4. 10}$$

Először a 4. 1. TÉTELt bizonyítjuk. E célból felhasználjuk a $\{\Psi_n(z)\}$ sorozat alábbi előállítását:

$$\Psi_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(\zeta) \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\Phi_\nu(\zeta)}\, \Phi_\nu(z)\, \varphi(t)\, dt =$$

$$= \alpha_n\, \Phi(z) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(\zeta)\{\overline{\Phi_n^*(\zeta)}\, \Phi_n^*(z) - \tag{4. 11}$$

$$- \overline{\Phi_n(\zeta)}\, \Phi_n(z)\}\, \psi(t)\, \frac{\varkappa(t) - \varkappa(\vartheta)}{1 - \bar{\zeta} z}\, dt,$$

ahol

$$z = e^{i\vartheta};\; \zeta = e^{it};\; \alpha_n = O(1);\; \Phi_n^*(z) = z^n\, \overline{\Phi_n\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, \tag{4. 12}$$

és a (4. 2) feltétel következtében tetszőleges μ és ν mellett:

$$|\mu\varphi - \nu\psi| \leqq \begin{cases} C_{48}\,\varphi, \\ C_{49}\,\psi, \end{cases} \quad \text{ha} \quad -\pi \leqq \delta \leqq \pi. \tag{4. 13}$$

Jelölje mármost M_n a $|\Psi_n(e^{i\vartheta})|$ maximumát, és $z_0^{(n)} = e^{i\vartheta_0^{(n)}}$ egy olyan helyet, ahol $|\Psi_n|$ e maximumot felveszi:

$$M_n = |\Psi_n(e^{i\vartheta_0^{(n)}})| \geqq |\Psi_n(e^{i\vartheta})|. \tag{4. 14}$$

A fent szereplő integrált így becsülhetjük:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_n(\zeta)\{\overline{\Phi_n^*(\zeta)}\,\Phi_n^*(z)-\overline{\Phi_n(\zeta)}\,\Phi_n(z)\}\,\psi(t)\,\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta)}{1-\bar\zeta z}\,dt\right|\leq$$

(4.15)
$$\leq\frac{1}{2\pi}\left[\left(\int_{-\pi}^{\vartheta-\lambda}+\int_{\vartheta+\lambda}^{\pi}\right)+\int_{\vartheta-\lambda}^{\vartheta+\lambda}\right]\cdot|\Psi_n(\zeta)|\{|\overline{\Phi_n^*(\zeta)}||\Phi_n^*(z)|+$$

$$+|\overline{\Phi_n(\zeta)}||\Phi_n(z)|\}\,\psi(t)\left|\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta)}{t-\vartheta}\right|\cdot\frac{\pi}{2}\,dt\leq$$

(4.16)
$$\leq\frac{1}{4}\cdot\max_{t\in[-\pi,\pi]}|\Phi_n(e^{it})|\cdot\frac{1}{\lambda}\,2\varkappa_2\cdot2\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(\zeta)|^2\psi(t)\,dt\right\}^{1/2}\cdot\sqrt{\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi_n(\zeta)|^2\varphi(t)\,dt\right\}^{1/2}+$$

$$+2\max_{\vartheta-\lambda\leq t\leq\vartheta+\lambda}|\Psi_n(e^{it})|\cdot\frac{1}{4}\cdot\max_{t\in[-\pi,\pi]}|\Phi_n(e^{it})|^2\cdot\max_{\vartheta-\lambda\leq t\leq\vartheta+\lambda}\psi(t)\cdot\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta.$$

Így a (4. 4); (4. 3); (4. 12), ill. (4. 11) és (4. 15—16) összefüggések alapján

(4.17)
$$|\Psi_n(z)|\leq O(1)+O(1)+2\cdot\frac{M_n}{4}\,C_{39}^2\cdot\Psi\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta.$$

Könnyen belátható, hogy λ választható olyan kicsinyre, hogy az

(4.18)
$$\int_{\lambda}^{\lambda}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta\leq\frac{1}{C_{39}^2\cdot\Psi}$$

egyenlőtlenség érvényes legyen. Ugyanis a (4. 3) egyenlőségből

(4.19)
$$C_{38}=\lim_{\lambda\to0}\int_{\lambda}^{1}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta=C_{38}-\lim_{\lambda\to0}\int_{0}^{\lambda}\frac{\omega(\delta;\varkappa)}{\delta}\,d\delta$$

s így az utóbbi integrál tetszőlegesen kicsiny, ha λ elegendően kicsiny, pl. kisebb, mint $\lambda_0(C_{39};\psi)$. Ennek alapján a (4. 17) egyenlőtlenségből, felhasználva a (4. 18) és (4. 14) kifejezéseket, az

(4.20)
$$M_n\leq O(1)+\frac{1}{2}M_n$$

egyenlőtlenség adódik, aminek az

(4.21)
$$M_n=O(1)$$

közvetlen következménye. Ezzel tételünket igazoltuk.

Ezekután áttérünk a 4. 3. TÉTEL bizonyítására, amelynek gondolatmenete lényegében a 4. 1. TÉTELét követi. A (4. 11) értelmében

$$(4.22)\quad \begin{aligned}|\Psi_n(e^{i\vartheta_0})| \leqq |\alpha_n \Phi_n(e^{i\vartheta_0})| + \frac{1}{2\pi}\Big\{\Big[\int_{-\pi}^{\vartheta_0-\lambda} + \int_{\vartheta_0+\lambda}^{\pi}\Big] + \int_{\vartheta_0-\lambda}^{\vartheta_0+\lambda}\Big\}\Big[|\overline{\Phi_n^*(\zeta)}|\,|\Phi_n^*(z_0)| + \\ + |\overline{\Phi_n(\zeta)}|\,|\Phi_n(z_0)|\Big]|\Psi_n(\zeta)|\psi(t)\left|\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)}{t-\vartheta_0}\right|\frac{\pi}{2}dt.\end{aligned}$$

Minthogy a $-\pi \leqq t \leqq \vartheta_0-\lambda$, ill. $\vartheta_0+\lambda \leqq t \leqq \pi$ intervallumokban

$$(4.23)\qquad \left|\frac{\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)}{t-\vartheta_0}\right| \leqq 2\frac{1}{\lambda}\varkappa_2, \quad \varphi(t) \leqq \varkappa_2\psi(t),$$

azért

$$(4.24)\quad \begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\vartheta_0-\lambda} + \int_{\vartheta_0+\lambda}^{\pi}\Big]|\Phi_n^*(\zeta)\Phi_n^*(z_0) - \overline{\Phi_n(\zeta)}\Phi_n(z_0)||\Psi_n(\zeta)|\psi(t)\frac{|\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)|}{|1-\bar{\zeta}z_0|}dt \leqq \\ &\leqq \frac{1}{4}\cdot 2.2\frac{1}{\lambda}\varkappa_2\sqrt{\varkappa_2}C_{45}\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi_n(e^{it})|^2\varphi(t)dt\Big\}^{1/2}\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(e^{it})|^2\psi(t)dt\Big\}^{1/2} \leqq C_{50},\end{aligned}$$

tekintve, hogy az egységkörön $|\Phi_n^*(z)| = |\Phi_n(z)|$.

A (4. 22) harmadik integrálját, a 4. 3. TÉTEL feltételeit figyelembevéve, így becsülhetjük: $(0<\lambda < C_{46};\ \lambda \leqq C_{42})$

$$(4.25)\quad \begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_0-\lambda}^{\vartheta_0+\lambda}|\Psi_n(e^{it})||\overline{\Phi_n^*(\zeta)}\Phi_n^*(z_0) - \overline{\Phi_n(\zeta)}\Phi_n(z_0)|\psi(t)\frac{|\varkappa(t)-\varkappa(\vartheta_0)|}{|1-\bar{\zeta}z_0|}dt \leqq \\ &< \frac{1}{4}\cdot 2\cdot C_{45}\Big\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Psi_n(e^{it})|^2\psi(t)dt\Big\}^{1/2}\cdot\sqrt{\Psi}\cdot\Big\{\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{g^2(t)}{t}dt\Big\}^{1/2} \leqq C_{51}.\end{aligned}$$

A (4. 1) feltétel alapján $\alpha_n = O(1)$. Így a (4. 22); (4. 9) és (4. 25) összefüggések alapján következik a 4. 3. TÉTEL. A 4. 2. TÉTEL a 4. 3. TÉTEL speciális esete.

E tételek alapján — felhasználva a 2. és 3. § eredményeit — a következő korolláriumokat adjuk meg: legyen

$$(4.26)\qquad x_0 = -1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_s = 1 = x_{s+1}$$

és

$$(4.27)\qquad x_{j^*} < x_0 < x_{j^*+1}; \qquad (j^* = 1, 2, \ldots, s-1),$$

legyen továbbá található a

$$
\begin{aligned}
&-1 < a_j \leqq A_j < a_j + 1; \quad -1 < b_j \leqq B_j < b_j + 1; \quad (j = 2, 3, \ldots, s-1)\\
(4.28)\quad &-1 < a_j \leqq A_j < a_j + \frac{1}{2}; -1 < b_j \leqq B_j < b_j + \frac{1}{2}; (j = 1, s);\\
&0 < w \leqq W; 0 < p \leqq P
\end{aligned}
$$

állandók olyan csoportja, amelyekre teljesülnek a

$$
(4.29)\quad \left.\begin{aligned}
w|x-x_j|^{A_j} &\leqq w(x) \leqq W|x-x_j|^{a_j}\\
p|x-x_j|^{B_j} &\leqq p(x) \leqq P\,|x-x_j|^{b_j}
\end{aligned}\right\} \begin{aligned}
&, \text{ ha } \frac{x_{j-1}+x_j}{2} \leqq x \leqq \frac{x_j + x_{j+1}}{2};\\
&j = 1, 2, \ldots, s; j \neq j^*,\\
&\text{ill. } \frac{x_{j^*-1}+x_{j^*}}{2} \leqq x \leqq \frac{x_{j^*}+x_0}{2};\\
&\text{ill. } \frac{x_0 + x_{j^*+1}}{2} \leqq x \leqq \frac{x_{j^*+1}+x_{j^*+2}}{2},
\end{aligned}
$$

feltételek. Legyen található emellett egy olyan

$$(4.30)\qquad -1 \leqq a_0 \leqq A_0 < a_0 + 1; \quad -1 \leqq b_0 \leqq B_0 < b_0 + 1$$

kitevőpár, amelyekkel a

$$
(4.31)\quad \left.\begin{aligned}
w|x-x_0|^{A_0} &\leqq w(x) \leqq W|x-x_0|^{a_0}\\
p|x-x_0|^{B_0} &\leqq p(x) \leqq P\,|x-x_0|^{b_0}
\end{aligned}\right\} \frac{x_{j^*}+x_0}{2} \leqq x \leqq \frac{x_0 + x_{j^*+1}}{2}
$$

egyenlőtlenség is teljesül. Jelölje $\{\omega_n(x)\}$, ill. $\{\pi_n(x)\}$ a $w(x) \in L[-1, 1]$, ill. $p(x) \in L[-1, 1]$ súlyra a $[-1, 1]$ intervallumon ortonormált polinomok sorozatát és tegyük fel, hogy

$$(4.32)\qquad |\omega_n(x)| \leqq C_{52}, \quad \text{ha} \quad x_0 - \lambda \leqq x \leqq x_0 + \lambda \qquad (\lambda > 0, \text{ tetszőleges}).$$

I. KOROLLÁRIUM: *Megtartjuk a* (4.26)—(4.32) *alatti jelöléseket és premisszákat, emellett a* $w(x)$ *és* $p(x)$ *súlyfüggvények* $k(x) = \dfrac{w(x)}{p(x)}$ *hányadosáról feltesszük, hogy*

$$(4.33)\qquad |k(x) - k(x_0)| \leqq \sqrt{|x-x_0|}\cdot g(|x-x_0|), \quad \text{ha} \quad x_0 - \lambda \leqq x \leqq x_0 + \lambda,$$

ahol

$$(4.34)\qquad k(x_0) > 0; \qquad \int_0^{\lambda} \frac{g^2(t)}{t}\,dt \leqq C_{53} < \infty.$$

Ez esetben

$$(4.35)\qquad |\pi_n(x_0)| \leqq C_{54}; \quad n = 1, 2, \ldots$$

II. KOROLLÁRIUM: *Megtartjuk a* (4. 26)—(4. 32) *alatti jelöléseket és premisszákat, emellett a w és p súlyok* $k(x)$ *hányadosának* $[x_0-\lambda; x_0+\lambda]$*-beli* $\omega(\delta)=\omega(\delta; x_0-\lambda, x_0+\lambda)$ *folytonossági modulusáról feltesszük, hogy*

$$k(x_0)>0; \qquad \int_0^\lambda \frac{\omega(\delta)}{\delta}\,d\delta \leq C_{55} < \infty .$$

Ez esetben is érvényes a (4. 35) *becslés.*

IRODALOMJEGYZÉK

[1] KOROUS, J.: O rozvoji funkcí jedné reálné proměnné v řadu jistých ortogonálních polynomů . *Rozpravy Česke Ak.*, **48**, 1938, pp. 12.

[2] SZEGŐ, G.: *Orthogonal polynomials.* Am. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. **XXIII.**, 1939.

(Beérkezett: 1957. VI. 10.)

A LEGJOBB POLINOMAPPROXIMÁCIÓ LOKALIZÁLÁSÁRÓL II

FREY TAMÁS

Bevezetés

E dolgozat első részében (l. [1]) olyan trigonometrikus polinomsorozat konstrukcióját ismertettük, amely által definiált eljárás ún. belső Lebesgue-függvényei összességünkben korlátosak, ún. külső Lebesgue-függvényei exponenciálisan zérushoz tartanak, s amely bizonyos értelemben polinomreprodukciós tulajdonságokkal is rendelkezik. Ezen tulajdonságok felhasználása révén össze tudtuk hasonlítani a polinomsorozat által lokálisan nyújtott approximációt egy tetszőleges másik polinomsorozat által lokálisan, ill. globálisan biztositott megközelítéssel.

A dolgozat ezen részében bebizonyítjuk, hogy a fentebb említett polinomsorozat lokálisan is biztosítja — legalábbis nagyságrendben — azt az approximáció-fokot, amelyet a tekintett intervallum felett trigonometrikus polinomokkal egyáltalán el lehet érni (1. §), továbbá ez utóbbi és az approximálandó függvényt e szakaszon jellemző struktúrális tulajdonságai közötti kapcsolatokat adjuk meg (2. és 3. §). Így természetesen lokálisan is jellemezhetőekké válnak az egyes függvényklasszikusok, az említett polinomsorozat által lokálisan biztosított approximációs nagyságrend alapján. A megfelelő eredményeket, s a konstrukció néhány további jellemzőjét, ill. általánosítását azonban csak a dolgozat harmadik — befejező — részében ismertetjük.

01. Jelölések, amelyeket a dolgozatban állandón használunk: $C[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon, $C_{2\pi}$ pedig a 2π periódusú folytonos függvények osztályát jelenti. $H_n^{(T)}$-vel, ill. H_n-nel jelöljük a legfeljebb n-edrendű trigonometrikus, ill. legfeljebb n-edfokú polinomok halmazát.

$$\Delta^k(\delta; x; f) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} f(x - s\delta) \tag{01.1}$$

a folytonos $f(x)$ függvény x-beli, δ növekményhez tartozó k-adik (hátsó) differenciáját jelenti, $\Omega^k(\delta; f; a, b)$ pedig $|\Delta^k|$ felső határát, mialatt x végigfut az $[a+k\delta; b]$ intervallumon:

$$\Omega^k(\delta; f; a, b) = \sup_{x \in [a+k\delta; b]} |\Delta^k(\delta; x; f)|. \tag{01.2}$$

A folytonos f függvény k-adik folytonossági modulusa $[a, b]$-ben:

(01.3) $$\omega^k(\delta; f; a, b) = \sup_{0 \leq \vartheta \leq \delta} [\Omega^k(\vartheta; f; a, b)].$$

Az $f(x) \in C[a, b]$ függvényt legfeljebb n-edfokú polinomokkal approximálva, az $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ intervallumon elérhető legjobb megközelítés nagyságát $E_n(f; \alpha, \beta)$-val jelöljük. Jelentse hasonlóképp $E_n^{(T)}(f; \alpha, \beta)$ az f függvénynek legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomokkal történő approximációjakor elérhető legjobb közelítést, azaz

(01.4) $$E_n^{(T)}(f; \alpha, \beta) = \inf_{\tau \in H_n^{(T)}} \{ \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x) - \tau(x)| \}.$$

(Igen könnyen belátható, hogy $\beta - \alpha \leq 2\pi$ *esetén egy és csakis egy legjobban közelítő* $H_n^{(T)}$*-beli polinom létezik, amelyet a legalább* $2n+2$ *pontból álló ún. „Csebisev-féle váltakozás“ jellemez.* A $\beta - \alpha = 2\pi$ esetre megadott Csebisev- ill. Borel-féle bizonyítások ti. közvetlenül átvihetők a $\beta - \alpha < 2\pi$ esetre is. Az állítás egyébként HAAR tételéből (l. [2]) is könnyen leolvasható.

A következő rövidített jelöléseket is használjuk — végtelen intervallumok speciális esetében:

(01.5) $$\begin{aligned} \Omega^k(\delta; f; -\infty, \infty) &\text{ helyett } \Omega^k(\delta; f), \\ \omega^k(\delta; f; -\infty, \infty) &\text{ helyett } \omega^k(\delta; f), \\ E_n^{(T)}(f; -\infty,; \infty) &\text{ helyett } E_n^{(T)}(f). \end{aligned}$$

$C_1; C_2; \ldots$ stb.-vel az n változótól független mennyiségeket fogunk jelölni; a premisszákban szereplő mennyiségektől való függésüket, ill. becsléseiket — ha ez szükségesnek látszik — külön adjuk meg,

$\{A_n(x; f)\}$-fel jelöljük a bevezetésben említett polinomsorozatot, aholis $A_n \in H_{4n-2}^{(T)}; f \in L_{2\pi}$. $S_n(x; f)$ az f függvény Fourier sorának n-edik részletösszege. Így

(01.6) $$A_n(x; f) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{2^{n+l}} \cdot \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} S_{n+k+l}(x; f).$$

1. §. Az $\{A_n\}$ polinomsorozat approximációs jellemzése

Könnyen belátható az alábbi segédtétel:

1.1. SEGÉDTÉTEL: *Legyen* $f(x) \in C_{2\pi}$ és $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. *Tetszőleges* x_0 *ponthoz található ekkor olyan* $\{\tau_N(x; \delta; x_0)\}$ *trigonometrikus polinomsorozat, amelyre*

(11.1) $$|\tau_N(x; \delta; x_0) - f(x)| \leq \begin{cases} C_1 \cdot E_n^{(T)}(f; x_0 - 2\delta; x_0 + 2\delta) + C_2 q_1^n; & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \\ C_3; & -\infty \leq x \leq \infty \end{cases}$$

aholis $N = C_4(\delta) \cdot n$; $\tau_N(x; \delta; x_0) \in H_N^{(T)}$ *és* $0 < q_1 = q_1(\delta) < 1$.

BIZONYÍTÁS; Jelöljük $\pi_n(x; x_0; \delta; f)$-fel az $f(x) \in C_{2\pi}$ függvényt $[x_0 - 2\delta; x_0 + 2\delta]$ intervallum fölött Csebisev-értelemben legjobban approximáló legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomot, $M(x_0; \delta; f) = M$-mel pedig a $\max\limits_{x_0-2\delta \leq x \leq x_0+2\delta} |f(x)|$ mennyiséget. Ekkor:

$$(11.2) \quad |\pi_n(x; x_0; f)| \leq M + E_n^{(T)}(f; x_0 - 2\delta; x_0 + 2\delta) \leq C_5; \; x_0 - 2\delta \leq x \leq x_0 + 2\delta,$$

hiszen $\lim\limits_{n \to \infty} E_n^{(T)}(f; x_0 - 2\delta; x_0 + 2\delta) = 0$, lévén $f(x) \in C_{2\pi}$. Így CSEBISEV egy tétele alapján (l. [3]):

$$(11.3) \quad |\pi_n(x; x_0; \delta; f)| \leq 2C_5 \left[2 \sin \frac{1}{2} |x - x_0| \right]^{2n} \cdot \sin^{-2n} \delta; \; 2\delta \leq |x - x_0| \leq \pi.$$

Legyen emellett

$$(11.4) \qquad g(x; x_0; \delta) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_0 - \pi \leq x \leq x_0 - \frac{3}{2}\delta; \\ 1, & \text{ha } x_0 - \frac{3}{2} < x < x_0 + \frac{3}{2}\delta; \\ 0, & \text{ha } x_0 + \frac{3}{2}\delta \leq x \leq x_0 + \pi, \end{cases}$$

és konstruáljuk meg e függvényhez a de la Vallée-Poussion-féle

$$(11.5) \qquad \varrho_m(x; g) = \frac{1}{2\pi} \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!} \int_{-\pi}^{\pi} g(t; x_0; \delta) \cdot \cos^{2m} \frac{t - x}{2} \, dt$$

trigonometrikus polinomsorozatot.

Azonnal leolvasható, hogy

$$(11,6) \qquad |1 - \varrho_m(x: g)| \leq C_6 \sqrt{m}\, q_2^{2m}, \text{ ha } x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta,$$

$$(11.7) \qquad \text{ahol } \; 0 < q_2 = \cos \frac{\delta}{4} < 1, \; \text{ továbbá}$$

$$(11.8) \qquad |\varrho_m(x; g)| < 1; \; -\infty < x < \infty,$$

és

$$(11.9) \qquad |\varrho_m(x; g)| \leq C_7 \cdot \sqrt{m} \cdot \cos^{2m} \frac{|x - x_0| - \frac{3}{2}\delta}{2}; \qquad \frac{3}{2}\delta < |x - x_0| < \pi.$$

Ha mármost C_8-at elég nagyra választjuk, akkor

$$(11.10) \qquad 2 \frac{|\sin(x - x_0)|}{\sin \delta} \cdot \cos^{C_8} \frac{|x - x_0| - \frac{3}{2}\delta}{2} < 1; \qquad 2\delta \leq |x - x_0| \leq \pi.$$

Rögzitve egy a (11. 10) egyenlőtlenséget kielégitő természetes egész C_8-at és m-et $C_8 \cdot n$-nek választva, a

$$(11.11) \qquad \tau_N(x;\delta;x_0) = \pi_n(x;x_0;\delta;f)\cdot\varrho_m(x;g) \in H^{(T)}_{n(1+C_8)}$$

polinomsorozat megfelel követelményeinknek. Egyrészt ti.

$$(11,12) \qquad |\pi_n\varrho_m - f| \leqq |\pi_n - f| + |\pi_r|\,|1-\varrho_m|,$$

s igy a (11. 2), (11. 6), ill. (11, 7) egyenlőtlenségek alapján τ_N megfelel approximációs követelményeinknek; másrészt viszont a (11. 3), (11. 2) és (11. 6), ill. (11. 7), (11. 10) és (11. 12) egyenlőtlenségek alapján a sorozat valóban összességében korlátos.

E segédtétel alapján, felhasználva a dolgozat első részének (1. [1]) 14. 1. tételét, közvetlenül beláthatjuk azt a tényt, hogy az általunk konstruált $\{A_n(x;f)\}$ polinomsorozat lokálisan — nagyságrendet tekintve — a legjobban approximál.

Megtartva az 1. 1. SEGÉDTÉTEL f-re, ill. δ-ra vonatkozó premisszáit, érvényes az

1. 2. TÉTEL: *Tetszőleges x_0 pontban*

$$(11.13) \qquad |A_N(x_0;f) - f(x_0)| \leqq C_9 E^{(T)}_n(f; x_0-2\delta; x_0+2\delta) + C_{10} q_3^n,$$

ahol $N = C_{11}(\delta)\cdot n; 0 < q_3 = q_3(\delta) < 1; 0 < \delta \leqq \delta_0 < \frac{\pi}{2}$, *továbbá C_9 és C_{10} is csak δ-tól függ.*

2. §. A fordított tételek lokalizálása

A bevezetésben említettük, hogy meg akarjuk vizsgálni a kapcsolatot valamely (2π-nél rövidebb) szakaszon definiált, folytonos $f(x)$ függvény struktúrális tulajdonságai és trigonometrikus polinomokkal történő közelítésekor elérhető legjobb approximációs nagyságrend között. E célból egyrészt pozitív tételeket adunk meg — éspedig úgy, hogy „struktúrát megőrző módon“ 2π periódusúvá folytatjuk f-et, s ez utóbbira ismertek a pozitív tételek (1. a 3. §-t) — másrészt a fordított tételeket lokalizáljuk, s így a pozitív tételek élességét is jellemezni tudjuk. A fordított tételeket azért tárgyaljuk a pozitív tételeket megelőzően, mert a 3. §-ban néhány olyan segédtételre is támaszkodnunk kell, melyek alapját képezik a 2. § anyagának.

21. Néhány segédtétel. Az alább következő segédtételek nagyrésze már ismert — azonban más alakban szokták kimondani őket.

21. 1. SEGÉDTÉTEL: *Bármely természetes n-re*

$$\Omega^2(n\delta; f; a, b) \leqq n^2 \Omega^2(\delta; f; a, b); \tag{21.1}$$

$$\omega^2(n\delta; f; a, b) \leqq n^2 \omega^2(\delta; f; a, b), \tag{21.2}$$

tetszőleges $\lambda > 0$ *mellett pedig*

$$\omega^2(\lambda\delta; f; a, b) \leqq (\lambda + 1)^2 \omega^2(\delta; f; a, b). \tag{21.3}$$

Ugyanis:

$$\Omega^2(n\delta; f; a, b) = \sup_{x \in [a+2n\delta;\, b]} \left| \sum_{s=0}^{2} (-1)^s \binom{2}{s} f(x - sn\delta) \right| \leqq$$

$$\leqq \sup_{x \in [a+2\delta;\, b]} \left| \sum_{s=0}^{2} (-1)^s \binom{2}{s} f(x - s\delta) \right| + 2 \sup_{x \in [a+3\delta;\, b+\delta]} \left| \sum_{s=0}^{2} (-1)^s \binom{2}{s} f[x - (s+1)\delta] \right|$$

$$+ 3 \sup_{x \in [a+4\delta;\, b+2\delta]} \left| \sum_{s=0}^{2} (-1)^s \binom{2}{s} f[x - (s+2)\delta] \right| + \cdots +$$

$$+ n \sup_{x \in [a+(n+1)\delta;\, b+(n-1)\delta]} \left| \sum_{s=0}^{2} (-1)^s \binom{2}{s} f[x - (s+n-1)\delta] \right| + \tag{21.4}$$

$$+ (n-1) \sup_{x \in [a+(n+2)\delta;\, b+n\delta]} \left| \sum_{s=0}^{2} (-1)^s \binom{2}{s} f[x - (s+n)\delta] \right| + \cdots +$$

$$+ \sup_{x \in [a+2n\delta;\, b+2(n-1)\delta]} \left| \sum_{s=0}^{2} (-1)^s \binom{2}{s} f[x - (s+2n-2)\delta] \right| \leqq$$

$$\leqq \left(2 \sum_{z=1}^{n} z - n \right) \Omega^2(\delta; f; a, b) = n^2 \Omega^2(\delta; f; a, b),$$

és így (21. 1) egyenlőtlenség nyilván érvényes. Ebből azonban a (01. 3) összefüggés alapján következik a (21. 2) kapcsolat is; (21. 3) viszont (21. 2)-nek és $\omega^2(\delta)$ monotonitásának a következménye.

21. 2. SEGÉDTÉTEL: *Legyen* $f^{(k)}(x) \in C[a, b]$. *Érvényes ekkor a következő becslés:*

$$\omega^k(\delta; f; a, b) \leqq \delta^k \max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|. \tag{21.5}$$

Az állítás az általánosított középértéktétel egyszerű következménye.

21. 3. SEGÉDTÉTEL: *Legyen* $f(x) \in C[a, b]$ *és* $f'(x) \in C[a, b]$. *Érvényes ez esetben az*

$$\Omega(\delta; f; a, b) \geqq \varepsilon \cdot \delta \max_{a \leqq x \leqq b} |f'(x)|, \tag{21.6}$$

ill. az általánosabb

$$\Omega^k(\delta; f; a, b) \geqq \varepsilon \cdot \delta \cdot \Omega^{k-1}(\delta; f'; a, b) \tag{21.7}$$

egyenlőtlenség tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ *és* $0 < \delta \leqq \delta_0(\varepsilon; k)$ *mellett.*

BIZONYÍTÁS: Először a (21.6) egyenlőtlenséget igazoljuk — éspedig indirekt módon. Tegyük tehát fel, hogy létezik olyan $0<\varepsilon_0<1$, és egy $\delta_i \to 0$ sorozat, melyre $\delta_i>0$ és

$$(21.8)\qquad \Omega(\delta_i; f; a, b) < \varepsilon_0 \cdot \delta_i \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| = \varepsilon_0 \cdot \delta_i \cdot M,$$

ahol

$$(21.9)\qquad M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|;$$

s így δ_i-val történő osztás és Ω definíciójának figyelembevétele után az alábbi egyenlőtlenség adódik:

$$(21.10)\qquad \sup_{a \leq x \leq b-\delta_i} \left| \frac{f(x+\delta_i)-f(x)}{\delta_i} \right| \leq \varepsilon_0 \cdot M.$$

Jelöljük mármost ξ_0-val azon helyek egyikét, ahol $|f'(x)|$ az $[a, b]$-beli maximumát, M-et felveszi, $0<\delta_0=\delta_0(\varepsilon_0)$-val pedig egy olyan — az f' folytonossága miatt mindenesetre létező — számot, amellyel

$$(21.11)\qquad |f'(x)| > \frac{1+\varepsilon_0}{2} M, \text{ hacsak } \max\{a; \xi_0-\delta_0\} \leq x \leq \min\{\xi+\delta_0; b\}.$$

Ekkor a középértéktétel szerint

$$(21.12)\qquad \sup_{a \leq x \leq b-\delta} \left| \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} \right| = \sup_{a \leq x \leq b-\delta} |f'[x+\nu(x;\delta)\cdot\delta]| > \frac{1+\varepsilon_0}{2} M,$$

hacsak $0<\delta \leq \delta_0$, hiszen $0<\nu(x;\delta)<1$. A (21.10) és (21.12) összefüggések alapján azonban i-t elég nagyra választva az

$$(21.13)\qquad \frac{1+\varepsilon_0}{2} M < \varepsilon_0 M$$

nyilvánvaló ellentmondás adódik. Ezzel a (21, 6) egyenlőtlenséget igazoltuk.

Rendeljünk hozzá mármost δ bármely pozitív — és $d>0$-nál kisebb — értékéhez egy-egy $[a, b]$-ben folytonos és folytonosan differenciálható $f_\delta(x)$ függvényt és tegyük fel, hogy az $\{f'_\delta(x)\}$ függvénycsalád összességében egyenletesen folytonos, hacsak $\delta \in (0; d]$. Legyen továbbá

$$(21.14)\qquad M \leq M_\delta = \max_{a \leq x \leq b} |f'_\delta(x)| = |f'_\delta(\xi_\delta)| > 0, \qquad \text{ha } d > \delta > 0.$$

Igazoljuk — éspedig ismét indirekt úton — hogy a (21.6) egyenlőtlenség érvényes marad, ha benne f helyett f_δ-t, f' helyett f'_δ-t írunk. Tegyük tehát fel, hogy létezik olyan $0<\varepsilon_0<1$ és $\delta_i \to 0$ sorozat, melyre $\delta_i>0$ és

$$(21.15)\qquad \Omega(\delta_i; f_{\delta_i}; a, b) < \varepsilon_0 \cdot \delta_i M_{\delta_i},$$

azaz

$$(21.16)\qquad \sup_{a \leq x \leq b-\delta_i} \left| \frac{f_{\delta_i}(x+\delta_i)-f_{\delta_i}(x)}{\delta_i} \right| \leq \varepsilon_0 \cdot M_{\delta_i}.$$

Minthogy a függvényesalád összességében egyenletesen folytonos deriváltakkal rendelkezik, létezik — éspedig $\delta > 0$-tól függetlenül — olyan $0 < \delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) \leq d$, hogy

(21.17) $$|f'_\delta(x)| > \frac{1+\varepsilon_0}{2} M_\delta, \text{ hacsak } \max\{a; \xi_\delta - \delta_0\} \leq x \leq \min\{\xi_\delta + \delta_0; b\}.$$

Mármost a (21.16) és (21.17) relációk alapján ismét a fentebbi ellentmondásra jutunk:

(21.18) $$\frac{1+\varepsilon_0}{2} M_{\delta_i} < \varepsilon_0 M_{\delta_i}, \text{ hacsak } 0 < \delta_i \leq \delta_0(\varepsilon).$$

Így az

(21.19) $$\Omega(\delta; f_\delta; a, b) \geq \varepsilon \cdot \delta \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f'_\delta(x)|$$

egyenlőtlenség tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ mellett érvényes, ha $0 < \delta < \delta_0(\varepsilon_0)$.

A (21.7) állítás igazolásához elsősorban azt jegyezzük meg, hogy $f(x) \in C[a, b]$ és $f'(x) \in C[a; b]$ esetén

(21.20) $$\varphi_{\delta; k-1}(x) = \Delta^{k-1}(\delta; x; f)$$

olyan δ-tól függő függvénycsalád, amely a fentebbi követelményeknek eleget tesz, ti. összességükben egyenletesen folytonos deriváltakkal bír, — sőt, tekintettel Δ^{k-1} f-beli linearitására:

(21.21) $$\frac{d}{dx} \Delta^{k-1}(\delta; x; f) = \frac{d}{dx} \varphi_{\delta; k-1}(x) = \Delta^{k-1}(\delta; x; f').$$

Emellett Ω^k definíciója alapján

(21.22) $$\Omega^k(\delta; f; a, b) = \Omega(\delta; \varphi_{\delta; k-1}; a + (k-1)\delta, b).$$

Innen a (21.21), (21.22), (21.19) összefüggések és Ω definíciójának felhasználásával adódik, hogy

(21.23) $$\Omega^k(\delta; f; a, b) \geq \varepsilon \cdot \delta \max_{a+(k-1)\delta \leq x \leq b} \left| \frac{d}{dx} \Delta^{k-1}(\delta; x; f) \right| = \varepsilon \delta \Omega^{k-1}(\delta; f'; a, b),$$

tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ és $0 < \delta \leq \delta_0(\varepsilon, k)$ mellett, ahogy állítottuk.

JACKSON (1. [4]), ill. PRIVALOV (1. [5]) eredményeiből következik, hogy bármely $\tau \in H_n^{(T)}$-re, amelyre érvényes a

(21.24) $$|\tau(x)| \leq M; \quad a \leq x \leq b \qquad (b - a \leq 2\pi)$$

becslés, egyszersmind érvényes a

(21.25) $$|\tau^{(k)}(x)| \leq C_1(\nu; \beta - \alpha; k) \cdot n^k \cdot M$$

becslés is. Itt

$$[\alpha, \beta] \subset (a, b) \quad \text{és} \quad \nu = \min\{\alpha - a; b - \beta\}.$$

21.4. SEGÉDTÉTEL: *Az $f(x) \in C_{2\pi}$ függvény legyen p-szer folytonosan differenciálható. Ekkor*

$$E_n^{(T)}(f) \leq n^{-p}.\, 31.\, 12^p \omega^2 \left(\frac{1}{n}; f^{(p)}\right). \tag{21.26}$$

A $g(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon p-szer folytonosan differenciálható. Ekkor

$$E_n(g, a, b) \leq n^{-p}.\, 31.\, 12^p \omega^2 \left(\frac{1}{n}; g^{(p)}; a, b\right) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^p. \tag{21.27}$$

Bizonyításuk a Jackson-tételekkel analóg módon történhet.

22. A fordított tételek és lokalizálásuk. A fordított tételeket első alakjukban a k-adik folytonossági modulus segítségével adjuk meg, majd visszavezetjük őket a legmagasabbrendű — még folytonos — derivált második folytonossági modulusára.* Megemlítjük, hogy az alább következő első (22. 1.) TÉTELt lényegében — csak nagyságrendekre tekintve ti. — már SZTYECSKIN (l. [6]) igazolta. A bizonyítást mégis teljes részletességében közöljük, minthogy a további tételek e bizonyítás megfelelő modifikálásával igazolhatók.

22. 1. TÉTEL: *Az $f(x) \in C_{2\pi}$ függvény folytonossági modulusaira érvényesek az alábbi becslések:*

$$\begin{aligned} \Omega^k(\delta; f) &\leq \omega^k(\delta; f) \leq \\ &\leq 2(4^k+1) \frac{\sum_{s=1}^{n-1} s^{k-1} E_s^{(T)}(f)}{n^k} + (2^k+1) E_n^{(T)}(f), \\ \textit{ill.} \quad &\leq 4(4^k+1) \frac{1}{n^k} \sum_{s=1}^{n} s^{k-1} E_s^{(T)}(f) \end{aligned} \tag{22.1}$$

hacsak $\delta \leq \frac{1}{n}$, ahol k; n tetszőleges természetes számokat jelentenek.

BIZONYÍTÁS: A (22. 1) alatti egyenlőtlenség-lánc első része Ω^k és ω^k definíciójából következik. ω^k definíciójából következik továbbá, hogy

$$\omega^k(\delta; f) \leq \omega^k(\delta; \tau) + \omega^k(\delta; f - \tau); \tag{22.2}$$

tetszőleges $\tau(x)$ függvény esetén. Jelölje $\tau = T_n(x)$ azt a legfeljebb n-edrendű trigonometrikus polinomot, amely $f(x)$-et legjobban közelíti. A

$$\max |f - T_n| = E_n^{(T)}(f) \tag{22.3}$$

* Visszavezethetnők e tételeket a megfelelő derivált első folytonossági modulusára is — így a tételek tartalma valamivel egyszerűbben is áttekinthető lenne — de ismeretes, hogy akkor bizonyos határesetek nem lennének elég pontosan jellemezhetőek. A 3. §-ban egyébként még visszatérünk erre a kérdésre. (L. pl. ZYGMUND [7]).

jelöléssel nyilván

(22.4) $$\omega^k(\delta; f-T_n) \le 2^k E_n^{(T)}(f),$$

minthogy

(22.5) $$\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s} = 2^k.$$

$\omega^k(\delta; T_n)$ becslése céljából jelöljünk $\psi(z)$-vel egy olyan természetes számot, amely 2^z-nél kisebb, de 2^{z-1}-nél nem kisebb, és amelyre az $\{s^{k-1}E_s^{(T)}(f)\}$ sorozat minimumát veszi fel; azaz

(22.6) $$2^{z-1} \le \psi(z) < 2^z;\; z = 1, 2, \dots, N;$$

és

(22.7) $$[\psi(z)]^{k-1}E^{(T)}_{\psi(z)}(f) \le s^{k-1}E_s^{(T)}(f);\; s = 2^{z-1}; 2^{z-1}+1; \dots; 2^z-1;$$

továbbá

(22.8) $$2^N \le n < 2^{N+1};\; \psi(0) = 0;\; \psi((N+1)) = n;$$

$T_n(x)$-et állítsuk így elő:

(22.9) $$T_n(x) = \sum_{z=0}^{N+1} u_z(x);\; u_0(x) = T_0(x);\; u_z(x) = T_{\psi(z)}(x) - T_{\psi(z-1)}(x).$$

Ekkor

(22.10) $$|u_z(x)| = |T_{\psi(z)}(x) - T_{\psi(z-1)}(x)| \le |T_{\psi(z)} - f| + |f - T_{\psi(z-1)}| \le E^{(T)}_{\psi(z)}(f) + E^{(T)}_{\psi(z-1)}(f).$$

BERNSTEIN tételét alkalmazva az $u_z(x)$ legfeljebb $\psi(z)$-edfokú polinomra:

(22.11) $$\begin{aligned}|u_z^{(k)}(x)| &\le [\psi(z)]^k \cdot \{E^{(T)}_{\psi(z)} + E^{(T)}_{\psi(z-1)}\} \le \\ &\le [\psi(z)]^k E^{(T)}_{\psi(z)}(f) + 4^k[\psi(z-1)]^k E^{(T)}_{\psi(z-1)}(f),^*\end{aligned}$$

minthogy a (22.6) egyenlőtlenség szerint $\dfrac{\psi(z)}{\psi(z-1)} < 4$. A 21.2 LEMMA alapján nyilván

$$\omega^k(\delta; T_n) = \omega^k\left(\delta; \sum_{0}^{N+1} u_z\right) \le \delta^k \max\left|\sum_{z=1}^{N+1} u_z^{(k)}(x)\right|.$$

Tekintetbe véve tehát a (22.7) és a (22.11) összefüggéseket:

(22.12) $$\begin{aligned}\omega^k(\delta; T_n) &\le \delta^k\left\{\sum_{z=1}^{N}(4^k+1)[\psi(z)]^k E^{(T)}_{\psi(z)}(f) + [\psi(N+1)]^k E^{(T)}_{\psi(N+1)}(f)\right\} \le \\ &\le \delta^k\left\{2(4^k+1)\sum_{z=1}^{N} 2^{z-1}[\psi(z)]^{k-1} E^{(T)}_{\psi(z)}(f) + n^k E_n^{(T)}(f)\right\};\end{aligned}$$

ill. $$\le \delta^k\left\{4.(4^k+1)\sum_{z=1}^{N+1} 2^{z-1}.[\psi(z)]^{k-1} E^{(T)}_{\psi(z)}(f)\right\}.$$

* $z = 0$ esetén a második tag helyébe is természetesen 0 írandó.

Minthogy 2^{z-1} és 2^z között (a kisebb számot figyelembevéve, nagyobbat nem) éppen 2^{z-1} db. természetes szám van, ezért — $\psi(z)$ definíciója alapján —

$$2^{z-1}[\psi(z)]^{k-1}E^{(T)}_{\psi(z)}(f) \leq \sum_{s=2^{z-1}}^{2^z-1} s^{k-1}E^{(T)}_s(f). \tag{22. 13}$$

Tehát

$$\begin{aligned}\omega^k(\delta; T_n) &\leq 2(4^k+1)\delta^k \sum_{s=1}^{2^N-1} s^{k-1}E^{(T)}_s(f) + \delta^k n^k E^{(T)}_n(f) \\ &\leq \delta^k \left\{ 2(4^k+1)\sum_{s=1}^{n-1} s^{k-1}E^{(T)}_s(f) + n^k E^{(T)}_n(f) \right\},\end{aligned} \tag{22. 14}$$

és ha $\delta \leq \frac{1}{n}$, akkor valóban

$$\omega^k(\delta; f) \leq \left[2(4^k+1)\sum_{s=1}^{n-1} s^{k-1}E^{(T)}_s(f)\right]\cdot\frac{1}{n^k} + (2^k+1)E^{(T)}_n(f).$$

22. 2. TÉTEL: *Az $f(x) \in C[a, b]$ függvény k-adik folytonossági modulusára érvényes a következő becslés:*

$$\begin{aligned}\Omega^k(\delta; f; \alpha, \beta) &\leq C_3(k; \nu; b-a)\frac{1}{n^k}\sum_{s=1}^{n} s^{k-1}E^{(T)}_s(f; a, b), \\ \omega^k(\delta; f; \alpha, \beta) &\leq C_4(k; \nu; b-a)\frac{1}{n^k}\sum_{s=1}^{n} s^{k-1}E^{(T)}_s(f; a, b),\end{aligned} \tag{22. 15}$$

hacsak $\delta \leq \frac{1}{n}$, *ahol k és n tetszőleges természetes számot jelent,* $b-a < 2\pi$; $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ *és* $\nu = \min\{(\alpha-a); (b-\beta)\}$.

22. 3. TÉTEL: *Az $f(x) \in C[a, b]$ függvény k-adik folytonossági modulusára a következő becslést adhatjuk:*

$$\begin{aligned}\Omega^k(\delta; f; \alpha, \beta) &< \omega^k(\delta; f; \alpha, \beta) \leq \\ &\leq C_5(\nu; k; b-a)\frac{1}{n^k}\sum_{s=1}^{n} s^{k-1}E_s(f; a, b),\end{aligned} \tag{22. 16}$$

ha $\delta \leq \frac{1}{n}$, *továbbá k és n tetszőleges természetes számot jelenthet* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ *és* $\nu = \min\{\alpha - a; b - \beta\}$.

A 22. 2. és 22. 3. TÉTELek bizonyítása teljesen analóg a 22. 1. TÉTEL bizonyításával, csakhogy a (22. 11) becslésben az első Bernstein-féle egyenlőtlenség helyett a (21. 25) becslést, ill. a második Bernstein-féle egyenlőtlenséget kell felhasználnunk.

Mint említettük, a fordított tételeket célszerűen úgy fogalmazzuk át, hogy a legmagasabb még folytonos derivált második folytonossági modulusa szerepeljen a becslésekben.

22.4. TÉTEL: *Jelöljük k^*-gal azt a legnagyobb természetes számot, amelyhez található olyan 1 és 2 közé eső γ, hogy*

(22.17) $$\lim_{n\to\infty} n^{k^*-\gamma} E_n^{(T)}(f) < \infty; \ \lim_{n\to\infty} n^{k^*-\gamma-1} E_n^{(T)}(f) = \infty,$$

(22.18)

és legyen $$k = \max\{2; k^*\}; \ \lim_{n\to\infty} E_n^{(T)}(f) = 0.$$

Ekkor

(22.19) $$f^{(k-2)}(x) \in C_{2\pi}, \quad (f^{(0)}(x) = f(x)),$$

és

(22.20) $$\omega^2(\delta; f^{(k-2)}) < 4e(4^k+1)\cdot\varepsilon^{-(k-2)} \sup_{N\geq n} \frac{\sum_{s=1}^{N} s^{k-1} E_s^{(T)}(f)}{N^2},$$

hacsak $$0<\varepsilon<1; \ \delta \leq \min\left\{\delta_0(\varepsilon); \frac{1}{n}; \frac{1}{k}\right\}.$$

BIZONYÍTÁS: A (22.17) feltétel első része alapján a Bernstein-féle fordított tételek közvetlen következménye az, hogy $f^{(k-2)}(x) \in C_{2\pi}$ (sőt, hogy $f^{k^*-2}(x) \in \mathrm{Lip}(2-\gamma)$); hogy $f^{(k)}(x)$ nem létezhet, (sőt hogy $f^{(k^*-1)}(x) \notin \mathrm{Lip}(2-\gamma)$) az viszont a Jackson-féle approximációs tételekből és a (22.17) feltétel második részéből következik. A 22.1 TÉTEL és a 21.3. SEGÉDTÉTEL eredményei szerint pedig

(22.21) $$4(4^k+1)\frac{1}{n^k}\sum_{s=1}^{n} s^{k-1} E_s^{(T)}(f) \geq$$
$$\geq \omega^k(\delta; f) \geq \Omega^k(\delta; f) \geq \varepsilon^{k-2}\delta^{k-2}\Omega^2(\delta; f^{(k-2)}),$$

ahol $0<\varepsilon<1$ és $0<\delta\leq\delta_0(\varepsilon)$, hacsak $\delta \leq \frac{1}{n}$. Ha tehát $(n+1)^{-1} \leq \delta \leq n^{-1}$, akkor

(22.22) $$\Omega^2(\delta; f^{(k-2)}) \leq (n+1)^{k-2}\cdot 4(4^k+1)\varepsilon^{-(k-2)} \frac{\sum_{s=1}^{n} s^{k-1} E_s^{(T)}(f)}{n^k} =$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-2}\cdot 4(4^k+1)\varepsilon^{-(k-2)}\frac{\sum_{s=1}^{n} s^{k-1} E_s^{(T)}(f)}{n^2} \leq 4e(4^k+1)\varepsilon^{-(k-2)}\cdot\frac{\sum_{s=1}^{n} s^{k-1} E_s^{(T)}(f)}{n^2},$$

ha $0<\varepsilon<1$; $0<\delta\leq\delta_0(\varepsilon)$; $\frac{1}{n+1} \leq \delta \leq \frac{1}{n}$; $n \geq k$.

Minthogy pedig

$$(22.23)\qquad \omega^2(\delta; f^{(k-2)}) = \sup_{0<\vartheta\leqq\delta} \Omega^2(\vartheta; f^{(k-2)}) \leqq \sup_{N\geqq n;\ \frac{1}{N+1}\leqq\vartheta\leqq\frac{1}{N}} \Omega^2(\vartheta; f^{(k-2)}),$$

ezért

$$(22.24)\qquad \omega^2(\delta; f^{(k-2)}) \leqq 4e(4^k+1)\varepsilon^{(k-2)} \cdot \sup_{N\geqq n} \frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{N} s^{k-1}E_s^{(T)}(f),$$

hacsak $0<\varepsilon<1; 0<\delta\leqq\min\left\{\delta_0(\varepsilon); \frac{1}{n}; \frac{1}{k}\right\}$, amit igazolnunk kellett.

22, 5. TÉTEL: *Megtartva az előző tétel jelöléseit, legyen*

$$(22.25)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n^{(T)}(f; a, b)\cdot n^{k^*-\gamma} < \infty;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{k^*-\gamma+1}\cdot E_n^{(T)}(f; a, b) = \infty,$$

és

$$[\alpha,\beta]\subset(a,b);\ r = \min\{(\alpha-a); (b-\beta)\};\ b-a<2\pi.$$

Ekkor

$$(22.26)\qquad f^{(k-2)}(x)\in C[\alpha,\beta]$$

és

$$(22.27)\qquad \omega^2(\delta; f^{(k-2)}; \alpha,\beta) \leqq C_6(k; r; \varepsilon; b-a)\cdot\sup_{N\geqq n}\frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{N} s^{k-1}E_s^{(T)}(f; a, b),$$

hacsak $n\geqq k; \delta\leqq\frac{1}{n}$, ahol

$$0<\varepsilon<1; 0<\delta\leqq\delta_0(\varepsilon).$$

22. 6. TÉTEL: *Legyen*

$$(22.28)\qquad \lim_{n\to\infty} n^{k^*-\gamma}E_n(f; a, b) < \infty;\ \lim_{n\to\infty} n^{k^*-\gamma+1}E_n(f; a, b) = \infty,$$

ahol k^*, γ és k jenletése ugyanaz, mint 22. 4 TÉTEL-*ben. Ez esetben*

$$(22.29)\qquad f^{(k-2)}(x)\in C[\alpha,\beta]$$

és

$$(22.30)\qquad \begin{aligned}&\omega^2(\delta; f^{(k-2)}; \alpha,\beta)\leqq\\ &\leqq C_7(k; r; \varepsilon; b-a)\sup_{N\geqq n}\frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{N} s^{k-1}E_s(f; a, b),\end{aligned}$$

hacsak $n\geqq k; 0<\varepsilon<1; \delta\leqq\min\left(\delta_0(\varepsilon); \frac{1}{n}\right)$; r és α,β jelentése itt ugyanaz, mint a 22. 5 TÉTEL*ben.*

A 22. 5 és a 22. 6 TÉTELek bizonyítása szóról-szóra követi a 22. 4 TÉTEL bizonyítását, azzal az eltéréssel, hogy természetesen nem a 22. 1, hanem a 22. 2, ill. 22. 3 TÉTELből indulunk ki.

23. A fordított tételek néhány korolláriuma

Az előző pontban közölt tételek élességét akarjuk az alább következő néhány korollárium segítségével megvilágítani.

23. 1. KOROLLÁRIUM: *Az $f(x) \in C_{2\pi}$ függvény legyen pontosan k-szor folytonosan differenciálható, $g(x)$ pedig jelentsen olyan monoton csökkenő, x minden pozitív értékére értelmezett és folytonosan differenciálható függvényt, amelyre*

$$g(n) \geq E_n^{(T)}(f) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{23. 1}$$

és

$$\int_0^x g(\xi) \cdot \xi^{k+1} d\xi \leqq C_1 \cdot g(x) \cdot x^{k+2}. \tag{23. 2}$$

Ekkor

$$C_2 n^k E_n^{(T)}(f) \leqq \omega^2\left(\frac{1}{n}; f^{(k)}\right) \leqq C_3 \cdot \sup_{x \geq \frac{1}{n}} \{x^k \cdot g(x)\}. \tag{23. 3}$$

A (23. 2) *feltétel biztosan teljesül, ha*

a) $x \cdot \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ *monoton a* $0 < x < \infty$ *intervallumon, vagy, ha*

b) $x \dfrac{g'(x)}{g(x)} > -(k+1+\mu)$ *éspedig* μ *valamely pozitív értékére a* $0 \leq x < \infty$ *intervallumon, vagypedig, ha*

c) $x^{k+1+\mu} \cdot g(x)$ *monoton függvény a* μ *bármely pozitív értékére a* $0 \leq x < \infty$ *intervallumon. Ha a* (23. 2) *feltételt az* a) *feltétellel helyettesítjük, akkor egyszersmind*

$$C_2 n^k E_n^{(T)}(f) \leq \omega^2\left(\frac{1}{n}; f^{(k)}\right) \leqq C_4 \cdot n^k \cdot g(n), \tag{23. 4}$$

hacsak $\lim_{x \to \infty} x^k \cdot g(x) = 0$ *és* n *elegendően nagy.*

BIZONYÍTÁS: Elsősorban azt mutatjuk meg, hogy az a), ill. b) feltételből következik a c) feltétel, továbbá, hogy mindháromból következik a (23. 2) feltétel teljesülése. Evégből megjegyezzük, hogy szükségképp

$$\lim_{x \to \infty} x^{k+1+\mu} \cdot g(x) = \infty, \tag{23. 5}$$

akár a (23. 2), akár a c) feltételt kötjük ki.

Abból ugyanis, hogy $f(x)$ *pontosan* k-szor differenciálható, a Bernstein-féle fordított tételek alapján következik, hogy bármely $0 < \mu$ mellett

$$\overline{\lim}\, n^{k+1+\mu} E_n^{(T)}(f) = \infty \tag{23. 6}$$

és így annál inkább

(23. 7) $$\lim x^{k-1-\mu} g(x) = \infty.$$

c)-ből tehát azonnal következik a (23. 5) összefüggés. Ami a (23. 2) feltételt illeti, az

$$\int_0^x \xi^{k-1} \cdot g(\xi) d\xi$$

függvény feltétlenül monoton növekvő; emellett DE LA VALLÉE POUSSIN tételéből* következik, hogy

(23. 8) $$\lim_{x\to\infty} \int_0^x g(\xi) \cdot \xi^{k-1} d\xi = \infty$$

különben $f(x)$ legalább $(k+1)$-szer lenne folytonosan differenciálható. Így a (23. 2) egyenlőtlenségből is következik a (23. 5) összefüggés. Ha tehát a c) feltétel teljesül, $x^{k+1+\mu} \cdot g(x)$ monoton növekvő. Minthogy a $g(x)$ folytonosan differenciálható a feltevés szerint,** azért $\frac{d}{dx}[x^{k+1+\mu} \cdot g(x)]$ létezik, és

(23. 9) $$\frac{d}{dx}[g(x) \cdot x^{k+1+\mu}] = x^{k+\mu} g(x) \left| k+1+\mu) + x \frac{g'(x)}{g(x)} \right| \geq 0,$$

ha a c) feltétel teljesül és megfordítva. Az a), ill. a b) feltételnek azonban épp az a következménye, hogy

(23. 10) $$\frac{d}{dx}[x^{k+1+\alpha} g(x)] \geq 0.$$

Megjegyezzük még, hogy az a) feltételből az is következik, hogy az $x^\beta g(x)$ függvény β bármely értékére monoton (legalább is valamilyen $x \geq B \geq 0$ intervallumon), minthogy

(23. 11) $$\frac{d}{dx}[x^\beta g(x)] = x^{\beta-1} \cdot g(x) \left[\beta + x \frac{g'(x)}{g(x)}\right]$$

és itt a $\beta + x \frac{g'(x)}{g(x)}$ függvény folytonos és az $x \geq 0$ intervallumon — $x \frac{g'}{g}$ monotonitása miatt — legfeljebb egy 0-helye lehet.

Tekintsük most az

(23. 12) $$F(x) = C_2 g(x) \cdot x^{k+2} - \int_0^x g(\xi) \cdot \xi^{k-1} d\xi$$

* L. [8], 53—54. oldal, 39. tétel.

** Tekintve, hogy $g(x)$ közvetlenül csak a természetes számok felett bir fontossággal, ezen utóbbi kikötés nem tartalmaz lényeges megszorítást.

függvény differenciálhányadosát:

(23. 13) $$F'(x) = C_2 g(x)\cdot x^{k-1}\left|(k+2)-\frac{1}{C_2}+x\frac{g'(x)}{g(x)}\right|,$$

és ez $C_2>0$ esetben a c) — és így az a) és b) feltétel alapján is pozitív. Ha tehát C_2-t elég nagyra választjuk, akkor

$$F'(x)\geqq 0, \quad \text{hacsak} \quad x>0.$$

Minthogy még $F(0)=0$, azért $F(x)\geqq 0$, amit igazolni akartunk.

A 22. 4 TÉTEL szerint

$$\omega^2\left(\frac{1}{n};f^{(k)}\right)\leqq C_5(\varepsilon;k)\cdot\sup_{N\geqq n}\frac{1}{N^2}\sum_{s=1}^{N}s^{k-1}E_s^{(T)}(f)\leqq$$

$$\leqq \sup_{x\geqq n} C_5\cdot\int_0^x \xi^{k-1}g(\xi)d\xi\leqq C_3(\varepsilon;k)\cdot\sup_{x\geqq n}\{x^k g(x)\},$$

ahogy állítottuk, ha a (23. 2) feltétel — tehát akkor is, ha a), b), ill. c) alatti feltétel — teljesül, minthogy ez utóbbiaknak (23. 2) következménye. Tekintettel pedig arra az imént kimutatott tényre, hogy az a) feltétel teljesülése esetén $x^k g(x)$ is monoton x elég nagy értékeire, azaz a $\lim\limits_{x\to\infty} x^k g(x)=0$ feltétel mellett* itt monoton csökkenő, a (23. 4) reláció ez esetben valóban fennáll.

Megjegyezzük, hogy a 22. 4 TÉTEL alapján korolláriumunknak ezt a fogalmazást is adhatjuk:

23. 1'. KOROLLÁRIUM: *Legyen* $1<\gamma<2$, *és* k^* *az a legnagyobb természetes szám, amelyre*

(23. 14) $$k=\max\{2;k^*\},\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{k^*-\gamma}E_n^{(T)}(f)<\infty;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{k^*-\gamma+1}E_n^{(T)}(f)=\infty.$$

$g(x)$-re teljesüljenek azok a kikötések, amelyeket a 23. 1 KOROLLÁRIUM*ban kötöttünk ki. Ez esetben*

(23. 15) $$f^{(k-2)}(x)\in C_{2\pi}$$

és

(23. 16) $$C_6(k)n^{k-2}E_n^{(T)}(f)\leqq\omega^2\left(\frac{1}{n};f^{(k-2)}\right)\leqq C_7(k)\cdot\sup_{x\geqq n}\{g(x)\cdot x^{k-2}\},$$

illetve

(23. 17) $$C_6(k)n^{k-2}E_n^{(T)}(f)\leqq\omega^2\left(\frac{1}{n};f^{(k-2)}\right)\leqq C_8(k)\cdot n^{k-2}g(n),$$

ha $g(x)$-re az a) *és a* $\lim x^{k^*-2}g(x)=0$ *kikötés teljesül.*

* Ez utóbbi feltétel csak azt fejezi ki, hogy a g függvényt nem választottuk túl durván; hiszen — minthogy $f(x)$ k-szor folytonosan differenciálható — szükségképpen

$$\lim_{n\to\infty} n^k E_n^{(T)}(f)=0.$$

Az itt megadott korolláriumok — $g(x)$ mindenütt a 23. 1-ben definiált függvényt jelenti — kimondhatók természetesen az $f(x) \in C[a, b]$ függvény esetére is.

23. 2. KOROLLÁRIUM: *Az $f(x) \in C[a, b]$ függvény $(b-a \leqq 2\pi)$ legyen pontosan $k-2$-szer folytonosan differenciálható $[a, b]$-ben (azaz legyen $1 < \gamma < 2$ és k^* legyen az a legnagyobb természetes szám, amelyre*

$$(23.18)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{k^*-\gamma} E_n^{(T)}(f; a, b) < \infty;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{k^*-\gamma+1} E_n^{(T)}(f; a, b) = \infty;\ k = \max\{2; k^*\},$$

legyen továbbá $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ és $\nu = \min\{(\alpha-a); (b-\beta)\}$.
Ez esetben

$$(23.19)\qquad \omega^2\left(\frac{1}{n}; f^{(k-2)}; \alpha, \beta\right) \leqq C_9(k; \nu; b-a)\cdot \sup_{x \geqq n}\{x^{k-2}\cdot g(x)\},$$

hacsak n már elég nagy, illetve

$$(23.20)\qquad \omega^2\left(\frac{1}{n}; f^{(k-2)}; \alpha; \beta\right) \leqq C_{10}(k; \nu; b-a)\cdot n^{k-2}\cdot g(n),$$

hacsak n már elég nagy és $g(x)$-re az a) *alatti és a* $\lim x^{k^*-2} g(x) = 0$ *feltétel teljesül.*

23. 3. KOROLLÁRIUM: *Az $f(x) \in C[a, b]$ függvény legyen $[a, b]$-ben pontosan $k-2$-szer folytonosan differenciálható* azaz k^* legyen az a legnagyobb természetes szám, amelyre

$$(23.21)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{k^*-\gamma} E_n(f; a, b) < \infty;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{k^*-\gamma+1} E_n(f; a, b) = \infty,\ \text{ahol } 1 < \gamma < 2;$$

legyen továbbá $k = \max\{2; k^*\}; [\alpha, \beta] \subset (a, b)$ és $\nu = \min\{(\alpha-a); (a-\beta)\}$.
Ez esetben

$$(23.22)\qquad \omega^2\left(\frac{1}{n}; f^{(k-2)}; \alpha, b\right) \leqq C_{11}(k; \nu; b-a) \sup_{x \geqq n}\{x^{k^*-2} g(x),$$

hacsak n már elég nagy, illetve

$$(23.23)\qquad \omega^2\left(\frac{1}{n}; f^{(k-2)}; \alpha, \beta\right) \leqq C_{12}(k; \nu; b-a)\cdot n^{k-2} g(n),$$

hacsak n már elég nagy és $g(x)$-re az a) *alatti és a* $\lim_{x\to\infty} x^{k^*-2}\cdot g(x) = 0$ *feltétel teljesül.*

3. §. Folytonos függvények periódikus folytatásáról

Az alábbiakban igyekszünk pontosabban tisztázni azt, hogy milyen kapcsolat áll fenn az $E_n^{(T)}(f; a, b)$ mennyiség nagyságrendje és az $f(x)$ függvény $[a, b]$ felett mutatott struktúrális sajátosságai között. E célból a következőképp járunk el: Megkíséreljük $f(x)$-et az $[a, b]$ intervallumból kiindulva periódikusan úgy folytatni, hogy az így kapott $C_{2\pi}$ osztálybeli függvény struktúrális tulajdonságai a lehető legjobbak legyenek. Minthogy az így nyert függvény legjobb megközelítésének mértéke az $E_n^{(T)}(f; a, b)$ értéket majorálja, s az előbbit JACKSON tételei alapján felülről jól tudjuk becsülni, azért az utóbbira is kapunk felső becslést. Ezt összehasonlítva a fordított tételekből $E_n^{(T)}(f;\, a,\, b)$-re adódó alsó becsléssel, ez utóbbit is, a folytatás módjának jóságát is megfelelően tudjuk jellemezni.

31. Struktúrát megőrző folytatás

Meggondolásainkban lényeges szerepet játszik a második folytonossági modulus alábbi két tulajdonsága:

31. 1. SEGÉDTÉTEL: *Legyen $f(x) \in C[a, b]$. Ekkor található olyan mindenütt folytonos $g(x)$ függvény, amelyre:*

(31. 1) $$g(x) = f(x), \quad \text{ha} \quad a \leq x \leq b$$

és

(31. 2) $$\omega^2(\delta; g) \leq 5\omega^2(\delta; f; a, b); \qquad \left(\delta \leq \frac{b-a}{2}\right).$$

BIZONYÍTÁS: Egy ilyen $g(x)$ függvényt pl. a végpontokon történő sorozatos tükrözésekkel állíthatunk elő, így pl.:

(31. 3) $$g(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 2f(a)-f(2a-x), & \text{ha} \quad 2a-b \leq x \leq a \\ f(x)\;, & \text{ha} \quad a \leq x \leq b \\ 2f(b)-f(2b-x), & \text{ha} \quad b \leq x \leq 2b-a \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

A $\Delta^2(\vartheta; \xi; f)$ és $\Delta^2(\vartheta; x; g)$ mennyiségeket fogjuk egymással összehasonlítani, ahol ξ és x olyan (ϑ-tól függő) helyeket jelentenek, hogy a két differenciában előforduló függvényértékek között épp a tükrözés teremtsen kapcsolatot (így pl., ha $x \in [2a-b; a]$, akkor $\xi = 2a - x + 2\vartheta$). Ha x és ϑ olyan számpár, hogy az x; $x-\vartheta$ és $x-2\vartheta$ koordinátájú pontok valamennyien ugyanarra a tükrözött szakaszra esnek, akkor található olyan $\xi \in [a, b]$ pont, amelyre

(31. 4) $$\Delta^2(\vartheta; \xi; f) = \mp \Delta^2(\vartheta; x; g).$$

Azokat a differenciákat kell tehát részletesen vizsgálnunk, amelyeknél az „alappontok" két különböző „tükrözéshez" tartoznak. Természetesen itt is elegendő néhány speciális eset vizsgálata. Tekintsük először az

(31. 5) $$x \in (b; 2b-a); \quad x-\vartheta \in (a, b); \quad x-2\vartheta \in (a, b)$$

esetet, amikoris $g(x)$-et ilyen alakban írjuk fel:

(31. 6) $$g(x) = g(b) + \gamma(x),$$

vagyis

(31.7) $\quad \gamma(b) = 0; \quad \gamma(b-z) = -\gamma(b+z),\;$ ha $\; a-b \leqq z \leqq b-a,$

továbbá

(31.8) $$\Delta^2(\vartheta; x; g) = \Delta^2(\vartheta; x; \gamma).$$

Bevezetjük még az $x = b+z$ jelölést és külön vizsgáljuk

a) a $\quad z \leqq \frac{\vartheta}{2}$ és

b) a $\quad z > \frac{\vartheta}{2}$

esetet. Mindkét esetben a „tükörkép"-tulajdonságot felhasználva olyan segédpontokat iktatunk be a második differenciában szereplő pontok közé, hogy az így fellépő második differenciák alappontjai már egy ugyanazon tükrözött szakaszra essenek.

Ad a):

$$\begin{aligned}
\Delta^2(\vartheta; x_1; \gamma) &= \gamma(x_1) - 2\gamma(x_1-\vartheta) + \gamma(x_1-2\vartheta) = \\
&= \gamma(b+z_1) - 2\gamma[b-(\vartheta-z_1)] + \gamma[b-(2\vartheta-z_1)] = \\
&= -\gamma(b-z_1) - 2\gamma[b-(\vartheta-z_1)] + \gamma[b-(2\vartheta-z_1)] = \\
&= 2\gamma(b) - 4\gamma[b-(\vartheta-z_1)] + 2\gamma[b-2(\vartheta-z_1)] - \\
&- \{\gamma[b-z_1] - 2\gamma[b-(\vartheta-z_1)] + \gamma[b-(2\vartheta-3z_1)]\} + \\
&+ \{\gamma[b-(2\vartheta-3z_1)] - 2\gamma[b-2(\vartheta-z_1)] + \gamma[b-(2\vartheta-z_1)]\} = \\
&= 2\Delta^2(\vartheta-z_1; b; f) - \Delta^2(\vartheta-2z_1; b-z_1; f) + \\
&+ \Delta^2(z_1; b-[2\vartheta-3z_1]; f),
\end{aligned}$$

minthogy $\gamma(b) = 0$ és $\gamma(b+z) \equiv -\gamma(b-z)$.

Ad b): Ha viszont $z_1 > \frac{\vartheta}{2}$, akkor

$$\begin{aligned}
\Delta^2(\vartheta; x_1; \gamma) &= \gamma(b+z_1) - 2\gamma[b-(\vartheta-z_1)] + \gamma[b-(2\vartheta-z_1)] = \\
&= \gamma(b+z_1) + \gamma(b+\vartheta-z_1) - \gamma(b-\vartheta+z_1) + \gamma(b-2\vartheta+z_1) = \\
&= \gamma(b+z_1) - 2\gamma\left(b+\frac{\vartheta}{2}\right) + \gamma(b+\vartheta-z_1) - \\
&- 2\gamma\left(b-\frac{\vartheta}{2}\right) + \gamma(b-2\vartheta+z_1) - \gamma(b-\vartheta+z_1) = \\
&= \Delta^2\left(z_1-\frac{\vartheta}{2}; b+z_1; \gamma\right) + \\
&+ 2\gamma(b) - 4\gamma\left(b-\frac{\vartheta}{2}\right) + 2\gamma(b-\vartheta) -
\end{aligned}$$

$$-\left\{\gamma(b-\vartheta+z_1)-2\gamma\left(b-\frac{\vartheta}{2}\right)+\gamma(b-z_1)\right\}+$$
$$+\{\gamma(b-z_1)-2\gamma(b-\vartheta)+\gamma(b-2\vartheta+z_1)\}=$$
$$=\Delta^2\left(z_1-\frac{\vartheta}{2};\,b+z_1;\,\gamma\right)+2\Delta^2\left(\frac{\vartheta}{2};\,b;\,\gamma\right)-$$
$$-\Delta^2\left(z_1-\frac{\vartheta}{2};\,b+z_1-\vartheta;\,\gamma\right)+\Delta^2(\vartheta-z_1;\,b-z_1;\,\gamma)=$$
$$=-2\Delta^2\left|z_1-\frac{\vartheta}{2};\,b-(\vartheta-z_1);\,f\right|+2\Delta^2\left(\frac{\vartheta}{2};\,b;\,f\right)+$$
$$+\Delta^2(\vartheta-z_1;\,b-z_1;\,f).$$

Ha tehát $z_1 \leq \frac{\vartheta}{2}$, akkor

$$\text{(31. 9)}\qquad |\Delta^2(\vartheta;x;\gamma)| \leq 2|\Delta^2(\vartheta_1;\eta_1;f)|+2|\Delta^2(\vartheta_2;\eta_2;f)|+|\Delta^2(\vartheta_3;\eta_3;f)|,$$

ha viszont $z_1 > \frac{\vartheta}{2}$, akkor

$$\text{(31. 10)}\qquad |\Delta^2(\vartheta;x;\gamma)| \leq 2|\Delta^2(\vartheta_4;\eta_4;f)|+2|\Delta^2(\vartheta_5;\eta_5;f)|+|\Delta^2(\vartheta_6;\eta_6;f)|,$$

ahol

$$\text{(31. 11)}\qquad \left.\begin{array}{c} 0<\vartheta_i<\vartheta \\ \eta_i\in[a+2\vartheta_i;\,b] \end{array}\right\} \quad (i=1,2,\ldots,6).$$

Valamennyi többi ilyen speciális eset — beleértve azt is, amikor pl. x és $x-\vartheta$ vannak a $(2b-a;b)$ intervallumban, viszont $x-2\vartheta\in(a,b)$ — a fentebb bemutatott tükrözésekkel az itt tárgyalt esetbe vezethető vissza, azokra is érvényes tehát egy (31. 9—10) típusú egyenlőtlenség. Ami végül az $x-\vartheta=b$ esetet, ill. a vele ekvivalensen eseteket illeti:

$$\text{(31. 12)}\qquad \Delta^2(\vartheta;\,b+\vartheta;\,g)=0,$$

ismét a tükrözés miatt. Végül a (31. 9—11) összefüggések alapján

$$\text{(31. 13)}\qquad \begin{aligned} \omega^2(\delta;g;-\infty,\infty)&=\omega^2(\delta;g)=\sup_{0\leq\vartheta\leq\delta}\{\sup_x|\Delta^2(\vartheta;x;g)|\}\leq \\ &\leq 5\sup_{0\leq\vartheta_i\leq\delta}\{\sup_{\eta_i\in[a+2\vartheta_i;\,b]}|\Delta^2(\vartheta_i;\eta_i;f)|\}\leq 5\omega^2(\delta;f;a,b), \end{aligned}$$

q. e. d.

31. 2. SEGÉDTÉTEL: *Az $f(x)\in C[a,b]$ függvényhez legyen található egy olyan C állandó és a ϑ_i számok olyan monoton csökkenő, zérushoz tartó sorozata, hogy*

$$\text{(31. 14)}\qquad \omega^2(\vartheta_i;f;a,b)\leq C\vartheta_i^2;\qquad i=1,2,\ldots.$$

*Ez esetben $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon folytonosan differenciálható és $f'(x)\in Z[a,b]$.**

* $Z[a,b]$-vel jelöljük a $g\in C[a,b]$, függvények azon osztályát, melyekhez található olyan G szám, hogy $\omega^2(\delta;g;a,b)\leq G\delta$ legyen.

BIZONYITÁS: A 31. 1. segédtétel alapján található olyan pl. az $[a-\varepsilon;\ b+\varepsilon]$ intervallumon ($\varepsilon > 0$) folytonos $g(x)$ függvény, amelyre

(31. 15) $$f(x) = g(x); \qquad a \leqq x \leqq b$$

és

(31. 16) $$\omega^2(\vartheta_i; g; a-\varepsilon; b+\varepsilon) \leqq 5C\vartheta_i^2; \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Emellett a 21. 1. SEGÉDTÉTEL szerint

(31. 17) $$\omega^2(\lambda\delta; g; a-\varepsilon; b+\varepsilon) \leqq (\lambda+1)^2\omega^2(\delta; g; a-\varepsilon; b+\varepsilon),$$

és így δ minden ϑ_1-nél kisebb értékére:

(31. 18) $$\omega^2(\delta; g; a-\varepsilon, b+\varepsilon) = \omega^2\left(\vartheta_k \frac{\delta}{\vartheta_k}; g; a-\varepsilon; b+\varepsilon\right) \leqq$$
$$\leqq \left(\frac{\delta}{\vartheta_k}+1\right)^2 \omega^2(\vartheta_k; g; a-\varepsilon, b+\varepsilon) \leqq 5C\left(\frac{\delta}{\vartheta_k}+1\right)^2 \vartheta_k^2 \leqq 20C\cdot\delta^2,$$

hiszen a k indexet választhatjuk úgy, hogy $\vartheta_k < \delta$ legyen. Ezért, a 21. 6. SEGÉDTÉTEL szerint

$$E_n(g; a-\varepsilon, b+\varepsilon) \leqq C_1(C; \vartheta_1; a, b, \varepsilon)\cdot n^{-2}$$

és így a Zygmund-féle fordított tétel alapján (l. [7]) valóban érvényesek a

(31. 19) $$f'(x) = g'(x) \in C[a, b]; \ f'(x) = g'(x) \in Z[a, b]$$

relációk.

E segédtétel igen fontos korolláriuma, hogy ha

(31. 20) $$f(x) \in C[a, b], \quad \text{de} \quad f'(x) \notin C[a, b]$$

akkor szükségképp

(31. 21) $$\delta^2 = o\{\omega^2(\delta; f; a, b)\}.$$

31. 3. TÉTEL. *Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumon pontosan k-szor folytonosan differenciálható függvény ($b-a \leqq \pi$). Található ekkor olyan $g(x) \in C_{2\pi}$ függvény, amelyre*

(31. 22) $$g(x) = f(x); \qquad a \leqq x \leqq b$$

(31. 23) $$g^{(j)}(x) \in C_{2\pi} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

és

(31, 24) $$\omega^2(\delta; g^{(k)}) \leqq 6\omega^2(\delta; f^{(k)}; a, b),*$$

hacsak δ elegendően kicsi.

* Emelett $|g(x)|$ maximuma csakis a $\max\limits_{a \leqq x \leqq b} |f^{(j)}(x)|$ mennyiségektől ($j = 0, 1, \ldots, k$) és $(b-a)$-tól függ.

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel először, hogy $b-a=\frac{\pi}{m}$, ahol m természetes szám. A 31. 1. SEGÉDTÉTEL alapján $f^{(k)}(x)$ folytatható úgy, hogy a folytatás: $G^{(k)}(x)$ $a\leq x\leq b$ esetén megegyezik $f^{(k)}(x)$-szel, második folytonossági modulusa pedig legfeljebb ötszöröse $f^{(k)}(x)$-ének. Jelöljük K-val az $f^{(k)}(b)-f^{(k)}(a)$ különbséget. A folytatás módjából és a $b-a=\frac{\pi}{m}$ feltételből következik, hogy

$$G^{(k)}(x+2\pi)=G^{(k)}(x)+2mK, \tag{31.25}$$

ha $a\leq x\leq a+2\pi$. Legyen

$$\begin{aligned} a_k &= \int_a^{a+2\pi} G^{(k)}(t)\,dt, \\ a_{k-1} &= \int_a^{a+2\pi} [a+2\pi-t]\,G^{(k)}(t)\,dt, \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_1 &= \int_a^{a+2\pi} \frac{1}{(k-1)!}[a+2\pi-t]^{k-1}\,G^{(k)}(t)\,dt. \end{aligned} \tag{31.26}$$

Könnyen konstruálhatunk egy olyan $[a, b+2\pi]$-ben legalább kétszer folytonosan differenciálható $H^{(k)}(x)$ függvényt, amelyre

$$H^{(k)}(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } a\leq x b \\ -2mK, & \text{ha } a+2\pi\leq x\leq b+2\pi \end{cases} \tag{31.27}$$

és

$$\begin{aligned} &\int_a^{a+2\pi} H^{(k)}(t)\,dt = -a_k, \\ &\int_a^{a+2\pi} H^{(k)}(t)\cdot(a+2\pi-t)\,dt = -a_{k-1}-2\pi f^{(k-1)}(a), \\ &\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &\int_a^{a+2\pi} \frac{1}{(k-1)!}(a+2\pi-t)^{k-1}H^{(k)}(t)\,dt = \\ &= -a_1-2\pi f'(a)-\cdots-\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(2\pi)^{k-1}, \end{aligned} \tag{31.28}$$

továbbá

$$\omega^2(\delta; H^{(k)}; a, b+2\pi) < \omega^2(\delta; f^{(k)}; a, b),$$

hacsak δ már elég kicsiny.

Itt a legutolsó egyenlőtlenség egyszerűen abból következik, hogy $\omega^2(\delta; H^{(k)}) = O(\delta^2)$, lévén $H^{(k)}$ kétszer folytonosan differenciálható, ezzel szemben — a 31.2. SEGÉDTÉTEL szerint: $\delta^2 = o\{\omega^2(\delta; f^{(k)}; a, b)\}$. $H^{(k)}(x)$ maga egyébként előállítható pl. mint a $H_1^{(k)}(x)$ és a $H_2^{(k)}(x)$ függvények összege, amelyek közül $H_1^{(k)}(x)$ a kétszeri differenciálhatóságon kívül teljesíti a (31.27) feltételt — két állandó függvény és két harmadfokú parabola-ív segítségével összeállíthatunk ilyen kifejezést — $H_2^{(k)}(x)$ pedig, a kétszeri differenciálhatóságon kívül, kielégíti a $H_2^{(k)}(x) = 0$, feltételt (ha $a \leqq x \leqq b$, vagy $a + 2\pi \leqq x \leqq b + 2\pi$) és a (31.28) feltételeket (pontosabban, ezek $H_2^{(k)}(x)$-re vonatkozóan — $H_1^{(k)}(x)$ miatt — adott módon változnak meg). Ilyen függvényt viszont a

$$\sum_{s=1}^{K} d_s(x-b)^{s+2}(x-a-2\pi)^{s+2}; \qquad K \geqq k \tag{31.29}$$

összeg d_s együtthatóinak megfelelő választásával könnyen konstruálhatunk — a felírt függvényt b-től balra, ill. $a+2\pi$-től jobbra az azonosan 0 függvénnyel folytatva.

Így a

$$g(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^x \frac{1}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}[G^{(k)}(t)H^{(k)}(t)]dt + \\ \displaystyle + f^{(k-1)}(a)\frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + f(a); & a \leqq x \leqq a + 2\pi, \\ g(x+2r\pi); \quad r = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots \end{cases} \tag{31.30}$$

függvény kielégíti a (31.22), (31.23) és a (31.24) feltételeket.

A $b-a = \dfrac{\pi}{m}$ kikötéstől igen könnyen megszabadulhatunk. Az általános esetben ti. a $G^{(k)}(x)$ függvényt két lépésben kaphatjuk meg; az $f^{(k)}(x)$ függvényt ez esetben a 31.1 SEGÉDTÉTELben leírt módon folytatjuk az $[a, a+\pi]$ intervallumra, majd ez utóbbi $\varphi^{(k)}(x)$ függvényből kiindulva, ismét a 31.1 SEGÉDTÉTELben leírt módon tükrözéssel nyerjük a $G^{(k)}(x)$ függvényt. A (31.25) reláció így nyilván fennáll a $K = \varphi^{(k)}(a+\pi) - f^{(k)}(a)$ és $m = 1$ választással. Azonnal adódik, hogy (δ elegendően kis értékeire)

$$\omega^2(\delta; G^{(k)}) \leqq 5\omega^2(\delta; \varphi^{(k)}; a, a+\pi) \leqq 25\omega^2(\delta; f^{(k)}; a, b), \tag{31.31}$$

azonban, a 31.1. SEGÉDTÉTELben felhasznált okoskodás segítségével az élesebb

$$\omega^2(\delta; G^{(k)}) \leqq 5\omega^2(\delta; f^{(k)}; a, b) \tag{31.32}$$

egyenlőtlenség is következik, ha a $\varphi^{(k)}(x)$ függvényt nem tekintjük, hanem az ott leírt módon a $\Delta^2(\delta; x; G^{(k)})$ és a $\Delta^2(\vartheta; \xi; f^{(k)})$ mennyiségeket közvetlenül hasonlítjuk össze.

A tételhez kapcsolódó lábjegyzet állítása a konstrukcióból közvetlenül belátható.

32. Az approximációs középnagyságrendről. A 31. pontban tárgyaltakkal kapcsolatosan célszerű bevezetni az $f(x) \in C[a,b]$ — az $[a, b]$ intervallumon csak véges sokszor differenciálható — függvény „approximációs középnagyságrendjének“ fogalmát, amelyet $Ke_n^{(T)}(f; a, b)$-vel jelölünk és a következőkép definiálunk: legyen k^* az a legnagyobb természetes szám, amelyhez még található olyan 1 és 2 közé eső γ, hogy

$$(32.1)\qquad \lim_{n\to\infty} n^{k^*-\gamma} E_n^{(T)}(f; a, b) < \infty, \quad \text{de} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{k^*-\gamma+1} E_n^{(T)}(f; a, b) = \infty,$$

továbbá

$$(32.2)\qquad k = \max(2; k^*).$$

Ez esetben

$$(32.3)\qquad Ke_n^{(T)}(f; a, b) = \sup_{N\geq n} \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^{N} s^{k-1} E_s^{(T)}(f; a, b) \right\} \cdot \frac{1}{n^{k-2}}.$$

A megelőző pont eredményeit így foglalhatjuk röviden össze:

32. 1. KOROLLÁRIUM: A (32. 1-2) *feltételek mellett tetszőleges* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ *intervallumhoz található olyan* $g(x) \in C_{2\pi}$ *függvény, amelyre*

$$(32.4)\qquad g(x) = f(x); \qquad \alpha \leq x \leq \beta,$$

$$(32.5)\qquad g^{(j)}(x) \in C_{2\pi}; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, k-2;$$

$$(32.6)\qquad \max|g(x)| = G = G[\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|;\ \max_{a\leq x\leq b}|f'(x)|;\ \ldots$$
$$\ldots;\ \max_{a\leq x\leq b}|f^{(k-2)}(x)|;\ r;\ b-a]$$

és végül

$$(32.7)\qquad E_n^{(T)}(g) \leq C_1(r; k; b-a; G)\cdot Ke_n^{(T)}(f; a, b)$$

ahol $r = \min\{(\alpha-a); (b-\beta)\}$.

E korollárium egyszerű következménye a 31. 3., a 22. 5. és 21. 4. SEGÉDTÉTELnek.

E korollárium alapján az $\{A_n(x; f)\}$ polinomsorozat lokális approximációs jóságát, valamely x_0 pontban, amelynek tetszőleges $\delta > 0$ sugarú környezetéhez tartozik approximációs középnagyságrend, a következőképpen is jellemezhetjük:

32. 2. KOROLLÁRIUM: *Fentebbi jelöléseket és feltételeket tekintve érvényes az*

$$(32.8)\qquad |A_n(x_0; f) - f(x_0)| \leq C_2(\delta; k)\cdot Ke_n^{(T)}(f; x_0-\delta;\ x_0+\delta)$$

becslés.

Ez a 32. 1. KOROLLÁRIUM és a dolgozat első részében közölt (l. [1]) 14. 1 tétel triviális következménye. Megjegyezzük még, hogy amennyiben f az $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ intervallumon végtelen sokszor differenciálható, ill. ha analitikus, már az 1.2. tételből következően tudjuk, hogy x_0-ban $\{A_n(x;f)\}$ gyorsabban approximál, mint n bármely hatványa, ill. hogy exponenciális rendben approximál.

IRODALOM

[1] FREY, T.: A legjobb polinomapproximáció lokalizálásáról I. *MTA III. Oszt. Közl.*, 3—4 (1957) 403—412.

[2] HAAR, A.: Die Minkowskische Geometrie und die Annährung an stetige Funktionen. *Math. Annalen*, **78** (1918) 294—311.

[3] CSEBISEV, P. L.: *O funkcijah malo udaljajuscsihszja ot nulja Szocsinyenyija* II. 335—356 p.

[4] JACKSON, L, D.: A generalized problem in weighted approximation. *Transact of Am. Math., Soc.* (1924) 133—154.

[5] PRIVALOV, J.: Intégrale de Cauchy, *Saratov, Izv. Univ. Fiz. Mat.* fasc., 11: 1 (1918).

[6] SZTYECSKIN, S. B.: O porjadke najlucssih priblizsenyij nyeprerüvnüh funkcij. *Izv. Ak. Nauk. SSSR.* T. **15** (1951) 219—242.

[7] ZYGMUND, A.: Smooth functions, *Duke Mat. Journal*, **12** (1945) 47—76.

[8] DE LA VALLÉE-POUSSIN, CH.: *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* Paris, 1919.

(Beérkezett: 1957. VI. 3.)

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL*

AZ INFORMÁCIÓ-TOVÁBBÍTÁS ELMÉLETE

A. N. KOLMOGOROV**

I. AZ ELMÉLET KELETKEZÉSE ÉS TARTALMA

Amidőn másodszor lépek Akadémiánk közgyűlése elé, azzal a megjegyzéssel szeretném kezdeni, hogy mai előadásom témája szorosan összefügg annak az előadásnak a témájával, amelyet az Akadémia közgyűlésén 1947-ben *„Folytonos spektrumú rezgések statisztikai elmélete"* címen tartottam.[1]

Valóban, az információelmélet tartalmilag leggazdagabb és — tisztán matematikai oldalról nézve — legérdekesebb részét: a stacionárius üzemben dolgozó, folytonos közléseket továbbító távközlési csatornák elméletét, — nem lehetett volna megalkotni, ha korábban nem dolgozták volna már ki a stacionárius sztochasztikus folyamatok elméletét, és speciálisan, ezen folyamatok spektrális elméletét.

A távközlés és információ-megőrzés különböző feladatai iránt való érdeklődés elég régóta tart. Lényegében már régen felmerült egy információ „mennyisége" értékelésének problémája. Az a probléma, hogy egy információ mennyiségére be lehet-e vezetni valamilyen univerzális számszerű mértéket, különösen fontos azokban az esetekben, amidőn egy bizonyos típusú információt át kell alakítani minőségileg másfajta információvá. — Információ átalakítására tipikus feladat folytonosan változó argumentumú folytonos függvények tabellázásának feladata. Ha például a kétváltozós $f(x, y)$ függvényt

* A Szerkesztőség, Kolmogorov cikkének közlésével, új rovatot nyit, amelyben a nemzetközi szakirodalom legjelentősebb és legmodernebb közleményeit kívánja magyar nyelven hozzáférhetővé tenni.

** (Сессия Академии Наук СССР по научным проблемам автоматизации производства 15—20 Октября 1956 г. Пленарные заседания. Изд. А. Н. СССР, Москва 1957. 66—99 стр.)

[1] L. [1]. Azon kérdések matematikai oldalának részletesebb kifejtése, amelyeknek ezt az 1947-es előadásomat szenteltem, a [2] cikkben található. Jelenleg analóg szerepet játszik a II. FEJEZET, amely kis változtatásokkal annak az előadásnak az összefoglalása, amelyet B. V. GNYEGYENKO nevemben felolvasott a *Rádiómérnökök Amerikai Intézete (Massachusetts Institute of Technology)* információelméleti symposiumán (1956. szeptember); ez sok részében azon az előadáson alapszik, amelyet I. M. GELFAND- és A. M. JAGLOMmal együtt az *Össz-szövetségi Matematikai Kongresszuson* olvastam fel 1956. júniusában.

$(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$ ε pontossággal kell megadni és tudjuk, hogy növekménye, Δf, abszolút értékben nem nagyobb ε-nál, amikor

$$|\Delta x| \leq \varepsilon_x, \qquad |\Delta y| \leq \varepsilon_y,$$

akkor nyilván elegendő az f függvényt x szerint ε_x és y szerint ε_y lépésekkel tabellázni, azaz közelítőleg

$$N \sim \frac{1}{\varepsilon_x \varepsilon_y}$$

számú értékét adni meg. Ha megengedjük, hogy $|f| \leq 1$, a függvény egy értékének rögzítéséhez közelítőleg elég

$$K \sim \log_{10}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

tizedesjegy. Így, ha a most vázolt tervet követjük, a táblázatba összesen közelítőleg

$$NK \sim \frac{1}{\varepsilon_x \varepsilon_y} \log_{10}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

számú tizedesjegyet kell felvenni (nem számítva az x és y változók értékeinek felírását, ami szabványosan megy mindazon f függvényeknél, amelyek a mondott megkötéseknek eleget tesznek). Mindnyájan tudjuk, hogy a dolog ilyen primitív kezelése, különösen többváltozós függvények esetében, óriási terjedelmű és gyakorlatilag kivitelezhetetlen táblázatokra vezetne. Valóban, elég „síma" függvények tabellázásakor a független változók lépéseit a táblázatban jelentősen nagyobbra választják és az argumentum közbenső értékei esetén a függvény értékének megkeresésére interpolációhoz folyamadnak, valamilyen p rendűig (többváltozós függvények táblázatai esetén gyakran a negyedik, vagy hatodik rendűig) terjedő differenciák segítségével. Ezenfelül $f(x, y)$ első jegyeit, amelyek közeli argumentumoknál meg szoktak ismétlődni, nem írják ki adott (x, y) értékpároknak megfelelő egyes táblázatrekeszekben, hanem pl. csak a sor elején írják ki, amely sok ilyen rekeszből áll.

A táblázat-szerkesztés leírt módjai általánosan és régóta ismeretesek; ennek ellenére az idevágó általános elméleti vizsgálódások, amelyeknek ki kellene mutatniok, mi az a *minimális* információmennyiség, amely szükséges ahhoz, hogy adott ε pontossággal lerögzítsünk egy tetszőleges, csupán bizonyos általános feltételeknek alávetett f függvényt, jelenleg még kezdeti stádiumban vannak. Például, csak nemrég közöltem [3] cikkemben explicit alakban a

$$H_\varepsilon(F^n_{p,\alpha}) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{p+\alpha}} \tag{1}$$

formulát, amely azt mutatja, milyen rendben növekedik $\varepsilon \to 0$-nál az az infor–

mációmennyiség, amely szükséges ahhoz, hogy fixálhassunk egy korlátos tartományban adott $F^n_{p,\alpha}$ n-változós függvényt, amelynek p-nél kisebb rendű deriváltjai korlátosak, p-edrendű deriváltjai pedig α kitevőjű Lipschitz-feltételnek tesznek eleget.[2]

Teljesen világos, hogy egy információ transzformálásának és megőrzésének kérdései döntő jelentőségűek a modern számológépek konstrukciójának és alkalmazási módjainak kidolgozásánál. Itt a tárolóberendezés „memóriakapacitását" az ezen berendezés által tárolható kettes számrendszerbeli jegyek (0 vagy 1) számával jellemezzük. Az a módszer, hogy információmennyiséget úgy mérünk, hogy tetszőleges információt összehasonlítunk valamilyen számú kettes számrendszerbeli számjegy alakjában megadott információval, ma már szabványossá vált az információelméletben.

Áttérve a „távközlési csatornák" elméletéből való feladatokra, abban a formájukban, amely a távíró vagy távbeszélővonalak és hozzájuk hasonló berendezések működésével kapcsolatos, kezdjük azzal az igen egyszerű feladattal, hogy továbbítani kell tízes számrendszerbeli jegyek

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{2}$$

sorozatát, kettes számrendszerbeli számok

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \tag{3}$$

sorozatának segítségével. Engedjük meg, hogy a (2) sorozat az időben úgy lép fel, hogy időegység alatt egy jegy mutatkozik. Azt kérdezzük, milyen sebességgel kell továbbítani a (3) sorozat kettes számrendszerbeli jegyeit, ha azt kívánjuk, hogy a kiindulási (2) sorozatnak a (3) sorozat alapján való reprodukálása az idővel korlátlanul növekedő késés nélkül történjék. Ha minden a_n jegyet egyenként leképezünk kettes számrendszerbeli jegyek segítségével, egy a_n jegyre *négy* kettes számrendszerbeli jegyet kell számítanunk (mert $2^3 = 8 < 10$ és csak $2^4 = 16 > 10$). Ha a (2) sorozat minden egyes (a_{2n-1}, a_{2n}) jegypárját kell továbbítani kettes számrendszerbeli jegyek egy csoportja segítségével, ehhez *hét* kettes számrendszerbeli jegyet kell felhasználni (minthogy $2^6 = 64 < 100$ és csupán $2^7 = 128 > 100$); három tízes számrendszerbeli jegy továbbításához elég *tíz* kettes számrendszerbeli jegyet igénybe venni (minthogy $2^9 < 1000$, de $2^{10} = 1024 > 1000$) é. i. t. A (3) sorozatbeli jegyek képzésének sebessége, vagyis azon kettes számrendszerbeli jegyek

[2] (1) baloldalát illetőleg l. a dolgozat II. részét, különösen a II. 3. §-t. Ezt a képletet A. G. Vituskin képletének nevezhetjük, minthogy ő [4] dolgozatában más viszonylatban világítja meg az $n/(p+\alpha)$ kitevő szerepét: ugyanitt lényegében megtalálható az (1) képlet bizonyításának fele, nevezetesen azon tény bizonyítása, hogy $H_\varepsilon(F^n_{p,\alpha})$ rendje nem lehet *kisebb* az (1) képlettel adottnál.

száma, amelyet átlagban időegység alatt továbbítani kell, egyenlő (az említett átviteli szisztémáknak megfelelően) a következőkkel:

$$r_1 = 4, \quad r_2 = 7/2 = 3{,}5; \quad r_3 = 10/3 = 3{,}33\ldots$$

Könnyen bebizonyítható, hogy az itt felbukkanó sorozat a

$$r = \log_2 10 = 3{,}32\ldots$$

határértékhez tart. Egyszersmind ez a r alsó korlátja is a (3) sorozat jegyei azon előállítási sebességeinek, amelyek mellett szisztematikusan növekvő késlekedés nélkül lehet a (2) sorozatot továbbítani.

Már ezen a kétségtelenül naiv példán is megfigyelhetünk sok olyan típikus jelenséget, amelyekkel az információ-továbbítás modern elméletei kidolgozása során akkor találkoztak, amidőn ezeket a távközlési csatornák lényegesen általánosabb típusaira kezdték alkalmazni.

1. Az információ-előállítás sebessége (ha nem tekintjük annak *minőségi* különbségeit) megenged bizonyos észszerű *kvantitatív* mérést. Speciálisan — ha lerögzítjük, hogy az időegység alatt átlagosan v jel jön, amelyek közül mindegyik k értéket vehet fel — az információelőállítás sebességének mértékéül logikus a következő számot tekinteni:

$$\bar{H} = v \log_2 k.$$

(A mi példánkban

$$\bar{H} = \log_2 10 = 3{,}32\ldots$$

a (2) sorozat esetében és

$$\bar{H}' = v \log_2 2 = v$$

a (3) sorozat esetében, hogyha időegység alatt v jelet létesítünk).

A következők szempontjából megjegyezzük, hogy pontosan (hibák nélkül) dolgozó távközlési csatornák esetében azt a sebességet, amellyel ezek információkat továbbítanak, logikus „csatornakapacitásnak“ nevezni. A mi esetünkben a (3) sorozat csatornakapacitása — hogyha ezt távközlési csatornaként fogjuk fel — $\bar{C} = \bar{H}' = v$-vel egyenlő. Általános esetben a csatornakapacitást kicsit másképp definiálják; erre később még visszatérünk. — Ezen megjegyzés után fogalmazzuk meg a második általános elvet:

2. Annak a szükséges feltétele, hogy egy $\bar{H}$ sebességgel keletkező információt szisztematikusan növekvő késlekedés nélkül továbbítani lehessen egy olyan távközlési csatornán át, amelynek csatornakapacitása $\bar{C}$;

$$\bar{H} \leqq \bar{C}.$$

Az összesek közt a leglényegesebb azonban a harmadik elv, amelynek a tartalma az alább közlendő megfogalmazásban még nem eléggé határozott, mégis talán ebben található az a leglényegesebb újdonság, amelyet SHANNON információ távközlési csatornákon át való továbbításának elméletére vonatkozó munkáiban nyilvánosságra hozott:

3. Már abban az esetben is, amidőn a továbbításra kerülő információ lényeges minőségi különbséget mutat fel azon információhoz viszonyítva, amelyet a távközlési csatorna közvetlenül felvenni és továbbítani képes —

$$\bar{H} < \bar{C}$$

fennállása esetén elvileg lehetséges szisztematikusan növekedő késlekedés nélkül lefolytatni a továbbítást, hogyha a továbbításra kerülő információt a távközlési csatornára kerülése előtt alkalmas módon „kódoljuk", — azután pedig, hogy az a csatornát elhagyta, „visszakódoljuk". Mindamellett azonban általánosságban véve az a helyzet, hogy amidőn H $\bar{C}$-hoz közeledik, a kódolás és visszakódolás módjai elkerülhetetlenül bonyolódnak és (amidőn $\bar{H} \to \bar{C}$) egyre jobban és jobban mutatkozik a továbbítás késlekedése.

Megjegyezzük, hogy az a késlekedés, amelyről a **3.** elvben szó van, $\bar{H} \to \bar{C}$ esetén növekedik, ha azonban az információforrás állandó, és $\bar{H} < \bar{C}$, akkor bizonyos korlát adható neki, amelyik megmarad akkor is, amidőn a csatorna működése korlátlanul folytatódik.

Következő példa gyanánt tekintsük egy olyan szövegnek a továbbítását, amely az orosz ábécé betűiből áll. Minthogy ábécénkben 33 különböző betű van, formálisan

$$N \quad 33^n$$

különböző, n hosszúságú „szöveget" (vagyis n betűből álló sorozatot) lehet képezni. Az az információmennyiség, amelyet az ilyen módon meghatározott szövegek közül valamelyik tartalmaz, a megelőzők szerint:

$$I = n \log 33$$

(itt és a következőkben mindenütt 2 alapú logaritmust használunk anélkül, hogy ezt külön megjegyeznénk). A gyorsírás létezése mutatja azonban, hogy a tényleges, a nyelvben előforduló szövegeket lényegesen rövidebb módon is lehet továbbítani. Ez teljesen érthető: az n betűből álló „értelmes" szövegek N^* száma nyilvánvalóan összehasonlíthatatlanul kisebb N-nél. Ezért elvileg lehetséges egy olyan írás-szisztéma („ideális" gyorsírás), amelyik ezen N^* számú értelmes szöveg közül akármelyiknek a rögzítésére csupán

$$I^* \sim \log N^*$$

kettes számrendszerbeli jegyet kívánna. A „szöveg komprimálása" ezen elvi lehetőségének teljes kihasználása, persze, bármilyen gyorsírási rendszer vagy szövegkódolás segítségével történő megvalósítás határain kívül fekszik (amenynyiben ezek a módszerek egyszerű formális szabályoknak tesznek eleget): a ténylegesen használt nyelvben előforduló szövegek megszerkesztésének törvényszerűségei aligha lesznek bármikor is teljes alapossággal megfogalmazhatók.

Fordítsuk most figyelmünket a nyelvbeli szövegek csupán egyetlen sajátságára: arra, hogy különböző betűk különböző gyakorisággal fordulnak bennük elő. Ha rögzítjük az

$$n_1, n_2, \ldots, n_k$$

számokat, amelyek azt mutatják, hogy egy n (betű) hosszúságú szövegben az

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

betűk hányszor fordulnak elő (természetesen itt

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n),$$

akkor az n (betű) hosszúságú szövegek száma

$$N' = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

-ra csökken le. Ha felhasználjuk az úgynevezett Stirling-formulát, amely itt egyébként csak a gyengébb

$$\log (n!) \sim n \log n$$

alakjában szükséges, könnyen kiszámítható, hogy nagy n_i-k esetén

$$I' = \log N' \sim -n \sum_i p_i \log p_i,$$

ahol a

$$p_i = \frac{n_i}{n}$$

mennyiségek az egyes betűk előfordulásának gyakoriságai. A kapott eredményt így fejezhetjük ki: p_i gyakoriságú egyes betűk felhasználása esetén a továbbítható információ mennyisége „a szöveg egy betűjére számítva" a következő:

$$H = -\sum_i p_i \log p_i. \tag{4}$$

Egyenlő gyakoriságok esetén, vagyis ha

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = \frac{1}{k},$$

újból megkapjuk a

$$H = \log k$$

összefüggést, tetszőleges más p_i gyakoriságok esetén pedig

$$H < \log k.$$

Könnyen megadhatók olyan kódolási módszerek, amelyek lehetővé teszik, hogy tetszőleges szöveget, amelyben az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ betűk $p_1, p_2, \ldots, p_k$ gyakoriságokkal fordulnak elő, úgy továbbíthassunk, hogy (elég hosszú szövegek továbbítása esetén) az átlagban egy betűre eső kettes számrendszerbeli jegyek száma tetszőleges kevéssel különbözzék attól a H-tól, amelyet a (4) képlet határoz meg. Ebben mégegyszer kitűnik a fentebb megfogalmazott elvek közül a harmadik.

Most azonban abba fogjuk hagyni elemi példák vizsgálatát és rátérünk az általános elmélet alapjaira.[3]

A (4) képlet a tisztán statisztikai értelmezésen kívül (amelyben a p_i-k gyakoriságok) valószínűségi értelmezést is megenged. Tegyük fel, hogy adva van a ξ valószínűségi változó

$$\mathbf{P}(\xi = x_i) = p_i \tag{5}$$

valószínűségeloszlása. Ha csupán ez az eloszlás van megadva, akkor arra a kérdésre, hogy az

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

lehetséges értékek közül melyikkel lesz ξ a valóságban egyenlő, a válasz bizonyos értelemben határozatlan marad. Ha közöljük, hogy ξ egyenlő valamelyik meghatározott x_i-vel, megszüntetjük ezt a határozatlanságot, vagyis bizonyos kiegészítő információt közlünk a ξ mennyiségre vonatkozólag. Az [5] eloszlás határozatlanságának mértékét ennek ún. *entrópiája* fejezheti ki, amelyet a már ismert (4) képlet szolgáltat. Ugyanez a formula fejezi ki azt az információmennyiséget is, amelyik szükséges ahhoz, hogy megszüntessük azt a határozatlanságot, amelyik akkor mutatkozik, amidőn ξ-t csupán az (5) eloszlással adjuk meg, vagyis azt az információmennyiséget, amely ξ értéke pontos közlésében foglaltatik benne.

Tegyük fel továbbá, hogy adva van két valószínűségi változó, ξ és η együttes valószínűségeloszlása,

$$\mathbf{P}(\xi = x_i,\ \eta = y_j) = p_{ij}.$$

Ha $\eta = y_j$ adva van, akkor ξ feltételes eloszlással:

$$\mathbf{P}(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = p_{i|j}$$

-vel fog rendelkezni. Az az információmennyiség, amelyet ξ pontos értékének megadása képvisel, feltéve, hogy az $\eta = y_j$ érték már ismeretes, — a következő:

$$H(\xi \mid \eta = y_j) = -\sum_i p_{i|j} \log p_{i|j},$$

ennek átlaga pedig a következő:

$$\mathbf{M}H(\xi \mid \eta) = -\sum_j \mathbf{P}(\eta = y_j) \sum_i p_{i|j} \log p_{i|j}.$$

[3] A szerző az általános elmélet *összefoglalását* adja. Az az olvasó, aki ebben a tárgykörben még teljesen tájékozatlan, a részleteket megtalálhatja BALATONI J. és RÉNYI A.: *„Az entrópia fogalmáról“* c. dolgozatában (MTA Mat. Kut. Int. Közl. I. (1956) 1—2. füzet 9—40. o.) Ez a dolgozat A. JA. HINCSIN később megemlítendő [5] dolgozatának anyagát is felöleli és tovább fejleszti; általában kiegészíti a jelen munkát. (Ford.)

Kézenfekvő feltenni, hogy az

$$I(\eta, \xi) = H(\xi) - \mathbf{M} H(\xi \mid \eta) \tag{6}$$

különbség az a ξ-re vonatkozó információmennyiség, amelyik már benne van η megadásában. Könnyen kiszámítható, hogy $I(\xi, \eta)$-t a következő alakban írhatjuk:

$$I(\eta, \xi) = \sum_{i,j}' p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{\mathbf{P}(\xi = x_i)\mathbf{P}(\eta = y_j)}, \tag{7}$$

amelyben ξ és η szerepe teljesen egyforma: a ξ-re vonatkozó információ mennyisége η-ban, valamint az η-ra vonatkozó információ mennyisége ξ-ben számszerint egymással egyenlők.

Könnyen bebizonyítható, hogy a

$$I(\xi, \xi) = H(\xi) \tag{8}$$

összefüggés mindig fennáll.

Most már fáradság nélkül meghatározható egy információ olyan távközlési csatornán át való továbbításának sebessége, amely hibákkal dolgozik és egy ilyen csatorna csatornakapacitása (a megelőzők szerint a csatornakapacitást úgy definiáljuk, mint információtovábbítás lehetséges sebességeinek felső határát). Vegyünk még egy elemi példát. Tegyük fel, hogy a „bemenő oldalán" rávisszük egy csatornára az η jeleket, amelyek 0 vagy 1-gyel egyenlők, a „kimenő oldalán" pedig ezeknek megfelelően η' jeleket kapunk és emellett

$$\mathbf{P}(\eta' = 0) = 1 - \Delta, \quad \mathbf{P}(\eta' = 1) = \Delta, \quad \text{ha} \quad \eta = 0,$$
$$\mathbf{P}(\eta' = 0) = \Delta, \quad \mathbf{P}(\eta' = 1) = 1 - \Delta, \quad \text{ha} \quad \eta = 1.$$

Könnyen kiszámítható, hogy a

$$C = \sup I(\eta, \eta') = 1 + [\Delta \log \Delta + (1 - \Delta) \log (1 - \Delta)] \tag{9}$$

felső határt akkor érjük el, amikor

$$\mathbf{P}(\eta = 0) = \mathbf{P}(\eta = 1) = \frac{1}{2}.$$

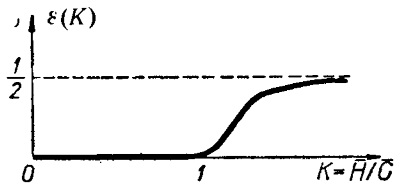
A (9) képlet szerint az az $I(\eta, \eta')$ információmennyiség, amelyet (egy betűre számítva) az említett csatornával továbbíthatunk, 0-sal egyenlő, hogyha $\Delta = \frac{1}{2}$. Ez teljesen érthető, minthogy valószínűségszámítási szempontból nézve ebben az esetben az η és η' jelek függetlenek. A csatornakapacitás $C = 1$ maximális értékét a $\Delta = 0$ és $\Delta = 1$ esetekben kapjuk meg. A $\Delta = 0$ esetben a csatorna hiba nélkül dolgozik: 1 valószínűséggel $\eta = \eta'$. Bár a második esetben 1 valószínűséggel $\eta \neq \eta'$, η ebben az esetben is könnyen rekonstruálható η' alapján: egyszerűen 0 helyett 1-et kell olvasni és megfordítva. Az összes fennmaradó esetekben

$$0 < C < 1.$$

Amikor SHANNON a negyvenes évek vége felé felvetette azt a gondolatot, hogy információmennyiséget a (4), (6), (7) képletekkel mérjenek és megfigyelte, hogy olyan távközlési csatornák esetén is, amelyek hibákkal dolgoznak, az információforrásra és a csatorna szerkezetére vonatkozó elég általános feltételek mellett is érvényben marad a fentebb megfogalmazott második és harmadik elv, — ezzel egyúttal a modern információelmélet alapjait is lefektette, olyan diszciplina formájában, amely szisztematikus fejlődésre képes.

Minden nagy felfedezésben vannak n e m v á r t elemek. Ebben is különbözik egy nagy felfedezés a mindennapos tudományos munka fokozatos eredmény-felhalmozódásától. Rámutatok itt arra, hogy mit látok én magam minőségileg újnak és nem vártnak, már az információelmélet fentebb vázolt elemeiben is:

1. Első vizsgálatra az „információ" nem szkaláris mennyiség. Információk megjelenési formái rendkívül különbözők lehetnek. Már korábban is várható volt, hogy ilyen vagy olyan módszerek jöhetnek szóba egy információ „mennyiségének" mérésére, nem volt azonban világos, lehetséges-e minőségileg különböző információkat (amelyekre ez vagy az a megfelelő kvantitatív mérték egyforma volt) távközlési csatornákon át való továbbításuk vagy memória-berendezésekben való megőrzésük nehézsége szempontjából ténylegesen is ekvivalenseknek tekinteni.



1. ábra

Bebizonyosodott, hogy létezik információ mennyiségének egy ilyen kiváltképpen „szabályos" mértéke, és ez lehetővé teszi egész sereg olyan probléma végleges megoldását, amelyeknél egyáltalában nem volt világos, hogy a megoldás apriori független-e az információ legfinomabb kvalitatív sajátságaitól.

2. Hibákkal dolgozó távközlési csatornák (vagy memóriaberendezések) esetében attól lehetett tartani, hogy elég kis valószínűséggel beálló hibával bíró továbbítás elérése a továbbítási sebesség igen nagymérvű csökkenését vonja maga után. Ezzel az aggodalommal szemben azonban kiderült, hogy a $\bar{H} < \bar{C}$ feltétel fennállása esetén rögtön lehetséges lesz információ továbbítása úgy, hogy hiba fellépésének valószínűsége tetszőleges kicsi legyen. Ennek a ténynek a megvilágítására a következőkre utalok. Legyen adva egy távközlési csatorna, amelynek a csatornakapacitása C. Tekintsük azt a problémát, hogy ezen át olyan, kettes számrendszerbeli jegyeket kell továbbítani, amelyek időegység alatt H számban keletkeznek. Akkor az egyes jegyek továbbításakor jelentkező hiba valószínűségének tetszőleges közelséggel elérhető minimuma univerzális $\varepsilon(K)$ függvénye lesz a $K = \bar{H}/\bar{C}$ hányadosnak (1. az 1. ábrán). $K < 1$ esetén $\varepsilon(K)$ értéke zérus, K további növekedésekor azonban nőni kezd és

$K \to \infty$ esetében $1/2$-hez tart (analitikusan $K > 1$-nél az $\varepsilon(K)$ függvényt az $\frac{1}{K} = 1 + \varepsilon \log \varepsilon + (1-\varepsilon) \log (1-\varepsilon)$, $(\varepsilon < 1/2)$ egyenletből kell meghatározni). Függvényünk tehát $K \leq 1$-nél pontosan zérussal egyenlő értékekből kiindulva csupán $K \geq 1$-nél kezd el növekedni.

Persze, ahogy már korábban is megjegyeztük, C-hoz közeli H-knál az, hogy azt akarjuk elérni, hogy a hibának kis valószínűsége legyen, gyakran igen bonyolult szabályokat von maga után az információ kódolására vonatkozólag, és azt eredményezi, hogy a csatorna kimenő oldalánál az információ „kiadása" nagy késéssel fog történni. Elvileg fontos tény azonban a bonyolult kódolási eljárásoknak a hibák kiküszöbölése szempontjából kétségtelenül nagy hatóereje is; ennek az alkalmazásaira még visszatérünk.

Információmennyiség mérése SHANNON által javasolt módjainak (vagyis a (4) és (7) képleteknek) a megalapozása kétféleképp képzelhető el.

Először, kimondhatók ilyen vagy olyan kézenfekvő axiómatikus követelések, amelyeknek az információmennyiség mértékének eleget kell tennie. A $H(\xi)$ mennyiséggel kapcsolatban — vagyis ha a (8) képletet feleltetjük meg annak az információmennyiségnek, amelyet egy ξ valószínűségi változóra vonatkozólag magának a ξ változónak a megadása tartalmaz, — az információelmélet megalapozása problémájának ilyen tárgyalásmódja mintaszerűen világos formában található meg A. JA. HINCSIN [5] munkájában. Érdekes volna ennek kapcsán megalkotni egy ugyanannyira természetes axiómatikát egy valószínűségi változóban egy másik valószínűségi változóra vonatkozólag tartalmazott $I(\xi, \eta)$ információmennyiség általánosabb fogalmával kapcsolatban is. A nehézség ott van, (l. ennek az előadásnak a II. FEJEZETÉT), hogy a folytonos esetben $H(\xi)$ és $H(\eta)$, egyenként véve, általában végtelenek és $I(\xi, \eta)$-t nem lehet a (6) képlet szerint számítani ki.

Az axiómatikus irányzat kutatásainak mérlegeként lerögzíthetjük, hogy $I(\xi, \eta)$-n kívül nem létezhet más, valamennyire is természetes általános szkaláris jellemzője annak az információnak, amelyet egy ξ valószínűségi változó egy másik, η valószínűségi változóra vonatkozólag tartalmaz. Mindazonáltal, minthogy „információ" természeténél fogva nem kötelezően szkaláris mennyiség (a valóságban nem is az) semmiféle, az említett irányzatot követő axiómatikus vizsgálat nem adhat feleletet arra a kérdésre, milyen teljességgel jellemzi az $I(\xi, \eta)$ mennyiség a minket érdeklő „információt". Amint a megelőző fejtegetésekből érthető is, erre a kérdésre bizonyos feleletet azok a tételek adnak, amelyek alapjai az információtovábbítás elméletének fentebb megfogalmazott második és harmadik általános alapelve. Ezen tételek értelmében az esetek egész kiterjedt osztályánál a távközlési csatorna vagy a memóriaberendezés információ továbbítására vagy megőrzésére való alkalmasságát meglehetős teljességgel jellemezhetjük egyetlen C számmal (ha időegység alatti viszonyokról van szó, C-sal), magának az információnak továbbítására vagy megőrzésre való alkalmasságát pedig egyetlen H számmal (vagy, ha időegység alatti viszonyokról van szó $\bar{H}$-sal. Mindennél az információ kvalitatív sajátosságai lényegtelennek mutatkoznak. Nehéz kiértékelni ilyenfajta eredmények jelentőségét, ha számbavesszük, hogy milyen széles körben alkalmaznak a modern technikában pl. olyan átalakításokat, mint a televízióban továbbítandó képek átalakítása elektromos rezgésekké és megfordítva (az információtovábbítás elméletének terminológiája szerint ez speciális esete a „kódolásnak" és „visszakódolásnak") s. i. t. Egyúttal meg kell említeni, hogy bármennyire is elbűvölők az információelmélet elgondolásai, egy információ kvalitatív sajátosságainak említett háttérbe szorulása csak bizonyos közelítéssel és meghatározott feltételek mellett valósul meg. Ezek a feltételek az alaposan megvizsgált esetekben — durván szólva — abból állnak, hogy nagymennyiségű homogén információt kell felhalmozni úgy, hogy emellett bonyolult kódolási módszereknek is megvalósíthatók legyenek, és az információleadás utóbbinál fellépő késlekedésének sem szabad káros kihatásúnak lennie. Emellett azt is világosan kell látni, hogy ezen elképzelések realitásának pontos matematikai megalapozása egyelőre csak eléggé korlátozott feltevések mellett történt meg. Magának SHANNONnak a munkáiban is, melyek gondolatokban kétségtelenül igen gazdagok — a tárgyalásmód gyakran igen ködös. Elég általános feltételek mellett diszkrét jeleket továbbító stacionáriusan dolgozó távközlési csatornák esetében a „Shannon-féle tételeket" csak később bizonyították be kifogástalanul, tiszta matematikával foglalkozó kutatók, egész sor munkájukban. Az ilyen irányú munkák közt legjobban lezárt jellege A. JA. HINCSIN [6] munkájának van.

Az információelméletnek az alapvető matematikai kutatásokon jelentősen túlmenő tárgyalásával, amelyet az alkalmazási irányzat kutatói dolgoztak ki, a szovjet olvasó elég teljességgel megismerkedhetik a [7], [8], [9] könyvek alapján ([7]-ben benne foglaltatik SHANNON alapvető [10] munkájának a fordítása, GOLDMAN [9] könyvének orosz fordítása pedig nemsokára megjelenik).

Az információelméletnek a nehezebben kezelhető folytonos esetre való alkalmazását illetőleg az elmélet leglényegesebb elemei már SHANNON előtt is felbukkantak. Az információmennyiség egy olyan logaritmikus mértéke, amely teljesen analóg a Shannon-féle $H(\xi)$ kifejezéssel, alapja azoknak az aszimptotikus statisztikai módszereknek, amelyeket FISHER még 1921—1925-ben kidolgozott (l. [11] 32—33. fej.)[4]

[4] Általánosan ismert az a körülmény is, hogy a $H(\xi)$ kifejezés formálisan azonos az entrópiának a fizikában használt kifejezésével. Ezt az egybeesést én teljesen elegendőnek tartom annak indokolására, hogy a $H(\xi)$ mennyiséget az információelméletben is „entrópiá-

SHANNON munkáihoz még közelebb állnak V. A. KOTYELNYIKOV eredményei [12], amelyekhez még 1933-ban jutott. Ezekben fogalmazta meg ő információ folytonos jelek segítségével történő továbbítása spektrális elméletének alapgondolatát, amelyről részletesen fogok beszélni ennek az előadásnak a II. FEJEZETÉBEN.

II. AZ ELMÉLET FELÉPÍTÉSÉNEK ALAPELVEI FOLYTONOS KÖZLEMÉNYEK ESETÉBEN

Eléggé rávilágítottunk arra, hogy az információelméletben és közlemények diszkrét jelek segítségével való továbbításának elméletében mi a szerepe egy ξ valószínűségi változó

$$H(\xi) = -\sum_k p_k \log p_k$$

entrópiájának (ξ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékeket $p_1, p_2, \ldots, p_n$ valószínűségekkel veheti fel). A továbbiakban arra a gondolatra támaszkodom, hogy az az alapvető fogalom, amely tökéletesen tetszőleges folytonos közlemények és jelek esetére is általánosítható, nem közvetlenül maga az entrópia fogalma, hanem a ξ valószínűségi változóban foglalt, az η változóra vonatkozó $I(\xi, \eta)$ információmennyiség fogalma. A diszkrét esetben ezt a mennyiséget szabályszerűen kiszámíthatjuk SHANNON ismert

$$I(\xi, \eta) = H(\eta) - \mathbf{M} H(\eta \mid \xi)$$

képlete alapján.[5]

Sűrűségfüggvénnyel bíró véges dimenziós eloszlások esetére SHANNON az $I(\xi, \eta)$ mennyiséget a következő analóg képlettel definiálja:

$$I(\xi, \eta) = h(\eta) - \mathbf{M} h(\eta \mid \xi),$$

ahol $h(\eta)$ a „differenciális entrópia":

$$h(\eta) = -\int p_\eta(y) \log p_\eta(y)\, dy,$$

$h(\eta \mid \xi)$ pedig az analóg módon definiált feltételes differenciális entrópia. Általánosan ismert, hogy a $h(\xi)$ mennyiségnek nincs közvetlen reális értelme, amellett nem is invariáns az x-ek terében lefolytatott koordináta-transzfor-

nak" nevezik: az ilyen matematikai analógiákat mindig alá kell húzni, mert ha rájuk tereljük a figyelmet, azzal előmozdíthatjuk a tudomány fejlődését. Túlzás volna azonban úgy tekinteni a dolgokat, hogy azok a fizikai elméletek, amelyek az entrópia fogalmával kapcsolatosak, már kész formában magukban rejtik az információelmélet elemeit is: entrópiatípusú kifejezéseket információmennyiség mértékeként, — amennyire én tudom, — először FISHER használ előbb említett munkájában.

[5] Ezekben a számomra célszerűnek látszó jelölésekben $H(\eta \mid x)$ η feltételes entrópiája $\xi = x$ feltétel mellett, $\mathbf{M} H(\eta \mid \xi)$ pedig ezen feltételes entrópia várható értéke, változó ξ esetén.

mációval szemben. Végtelen dimenziós eloszlások esetére a $h(\xi)$ kifejezésnek általában nincs is analogonja.

Bizonyos sajátos értelemben a ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó entrópiája mindig végtelen. A folytonos jelek csak azért nem szolgálhatnak korlátlanul nagyterjedelmű információ továbbítására, mert mindig csak korlátolt pontossággal figyelhetjük meg őket. Utóbbi folytán — miután már megadtuk a megfigyelés ε pontosságát — logikus definiálni a ξ valószínűségi változó ezen ε-nak megfelelő $H_\varepsilon(\xi)$ „ε-entrópiáját". Ezt tette SHANNON is (ő a „közlések létesítésének sebessége" elnevezést használta). Bár nem változtat a dolog lényegén, hogy erre a mennyiségre új elnevezést vezetünk be, legyen szabad javasolnom az említett elnevezést, mert az jobban kihangsúlyozza a fogalom széleskörű jelentőségét, valamint a közönséges pontos entrópiával való mély analógiáját. Már most rámutatok arra, hogy — amint arról a 3. §-ban szó lesz — az ε-entrópiára érvényben marad az a tétel, amely szerint a normális eloszlásnak (mind a végesdimenziós, mind pedig a végtelen dimenziós esetben) extrémális szerepe van. — Az 1—2 §-okban, nem is törekedve feltétlenül újat hozni, megadom az $I(\xi, \eta)$ mennyiség definíciójának és alapvető sajátságainak absztrakt megfogalmazását, valamint a Shannon-féle közleménytovábbítási elmélet kiindulási problematikájának áttekintését. A 3—6 §-okban bizonyos konkrét eredményekről lesz szó, amelyeket szovjet matematikusok a legutóbbi időben kaptak. Különösen hangsúlyozni akartam az ε-entrópia $\varepsilon\to 0$ esetén való aszimptotikus viselkedése vizsgálatának fontosságát. Az itt nyitott perspektívák megértéséhez hasznos szolgálatot tehet [3] dolgozatom, amelyben a tárgyalás más fogalmakkal történik.

1. §. Egy valószínűségi változóban egy másikra vonatkozólag bennfoglalt információ mennyisége

Legyenek ξ, ill. η valószínűségi változók, amelyek lehetséges értékei az X, ill. Y halmazokból valók, legyenek továbbá

$$P_\xi(A) = \mathbf{P}(\xi \in A), \quad P_\eta(B) = \mathbf{P}(\eta \in B)$$

a megfelelő valószínűségeloszlások és

$$P_{\xi\eta}(C) = \mathbf{P}((\xi, \eta) \in C)$$

a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása. Definíció szerint a ξ valószínűségi változóban az η valószínűségi változóra vonatkozólag bennfoglalt információ mennyiségét adja meg az

$$(1) \qquad I(\xi, \eta) = \int_X \int_Y P_{\xi\eta}(dx\,dy) \log \frac{P_{\xi\eta}(dx\,dy)}{P_\xi(dx)\,P_\eta(dy)}$$

képlet. Ennek a képletnek a pontos értelme bizonyos magyarázatra szorul, mert az $I(\xi, \eta)$ mennyiségnek a továbbiakban közlendő általános tulajdonságai csak akkor érvényesek, ha bizonyos halmazelméleti jellegű korlátozásokat teszünk a P_ξ, P_η és $P_{\xi\eta}$ eloszlásokra; most azonban nem időzöm ennél a kérdésnél. Mindenesetre az általános elméletet különösebb fáradság nélkül fel lehet építeni olyan formában, hogy aztán egészen általános természetű ξ és η valószínűségi változókra (vektorokra, függvényekre, általánosított függvényekre s. i. t.) egyaránt alkalmazni lehessen. Az (1) definíciót SHANNON-nak lehet tulajdonítani, bár ő csak a

$$P_\xi(A) = \int_A p_\xi(x)\,dx, \quad P_\eta(B) = \int_B p_\eta(y)\,dy$$

$$P_{\xi\eta}(C) = \iint_C p_{\eta\xi}(x, y)\,dx\,dy$$

esettel foglalkozott, mikor is (1) az alábbiba megy át:

$$I(\xi, \eta) = \iint_{X\,Y} p_{\xi\eta}(x, y) \log \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x)\,p_\eta(y)}\,dx\,dy.$$

Olykor hasznos lesz, ha a $P_{\xi\eta}$ eloszlást a

$$P_{\xi\eta}(C) = \iint_C a(x, y)\,P_\xi(dx)\,P_\eta(dy) + S(C) \tag{2}$$

alakban állítjuk elő, ahol az $S(C)$ függvény szinguláris a

$$P_\xi \times P_\eta$$

szorzatra vonatkozólag. Ha az S szinguláris komponens eltűnik, az

$$\alpha_{\xi\eta} = a(\xi, \eta) \tag{3}$$

képlet 1 valószínűséggel egyértelműen meghatározza az $\alpha_{\eta,\xi}$ valószínűségi változót. Olykor hasznos lesz az I. M. GELFAND és A. M. JAGLOM által a [13]-ban megfogalmazott következő

TÉTEL: *Ha $S(X \times Y) > 0$ akkor $I(\xi, \eta) = \infty$. Ha $(X \times Y) = 0$, akkor*

$$\begin{aligned} I(\xi, \eta) &= \iint_{X\,Y} a(x, y) \log a(x, y)\,P_\xi(dx)\,P_\eta(dy) \\ &= \iint_{X\,Y} \log a(x, y)\,P_{\xi\eta}(dx\,dy) = \mathbf{M} \log \alpha_{\xi\eta}. \end{aligned} \tag{4}$$

Soroljuk fel az $I(\xi, \eta)$ mennyiség néhány alapvető tulajdonságát:

I. $I(\xi, \eta) = I(\eta, \xi)$.

II. $I(\xi, \eta) \geqq 0$; $I(\xi, \eta) = 0$ csak akkor áll fenn, ha ξ és η függetlenek.

III. Ha a (ξ_1, η_1) és (ξ_2, η_2) párok függetlenek,

$$I((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)) = I(\xi_1, \eta_1) + I(\xi_2, \eta_2).$$

IV. $I((\xi, \eta), \zeta) \geqq I(\eta, \zeta)$.

V. $I((\xi, \eta), \zeta) = I(\eta, \zeta)$ csakis akkor áll fenn, ha ξ, η, ζ Markov-féle sorozat, azaz ha ζ feltételes eloszlása, rögzített ξ és η mellett, csupán η-től függ.

A IV. tulajdonságot illetőleg hasznos megjegyezni a következőket:

A

$$H(\xi) = I(\xi, \xi)$$

entrópia esetében a (ξ, η) pár entrópiájára vonatkozó

$$H(\xi, \eta) \geqq H(\xi), \quad H(\xi, \eta) \geqq H(\eta)$$

alsó becsléseken kívül, amelyek I. és IV-ből következnek, érvényes a következő felső becslés is:

$$H(\xi, \eta) \leqq H(\xi) + H(\eta).$$

Arra az információra, amelyet ζ a (ξ, η) párra vonatkozólag tartalmaz, nincs analóg becslés:

$$I(\xi, \zeta) = 0, \quad I(\eta, \zeta) = 0$$

-ból még nem következik — amint az elemi példákkal igazolható —, hogy fennáll az

$$I((\xi, \eta), \zeta) = 0$$

egyenlőség.

A továbbiak szempontjából emeljük ki azt a speciális esetet, amidőn ξ és η valószínűségi vektorok:

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m),$$

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+n}),$$

a

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+n}$$

változók pedig normális eloszlásúak és második centrális momentumaik

$$s_{ij} = \mathbf{M}[(\xi_i - \mathbf{M}\xi_i)(\xi_j - \mathbf{M}\xi_j)].$$

Ha a

$$C = |s_{ij}| \qquad 1 \leqq i, j \leqq m+n$$

determináns zérustól különböző, akkor — ahogy ezt I. M. GELFAND és A. M. JAGLOM kiszámította —

$$I(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \log \frac{AB}{C}, \tag{5}$$

ahol

$$A = |s_{ij}|_{1 \leqq i, j \leqq m}, \quad B = |s_{ij}|_{m < i, j \leqq m+n}.$$

Egyébként gyakran célszerű egy másik tárgyalásmód, amely akkor is alkalmazható, ha a $C > 0$ korlátozást elhagyjuk. Mint tudjuk [14], az X és Y tér koordinátáinak alkalmas lineáris transzformációjával elérhető, hogy az összes

s_{ij} második momentumok — azokat kivéve, amelyekre $i = j$ vagy $j = m + i$, — zérussá válnak. Ha így választjuk meg a koordinátákat,

$$(6) \qquad I(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \sum_k [1 - r^2(\xi_k, \eta_k)],$$

ahol az összegezés azon

$$k \leq \min(m, n)$$

értékekre történik, amelyekre a korrelációs együttható

$$r(\xi_k, \eta_k) = \frac{s_{k, m+k}}{\sqrt{s_{k,k} \cdot s_{m+k, m+k}}}$$

kifejezésében levő nevező zérustól különböző.

2. §. Shannon elmélete alapjainak absztrakt tárgyalása

SHANNON a

$$\xi \to \eta \to \eta' \to \xi'$$

szkéma szerint lefolyó közlemény-továbbításokat vizsgálja, ahol az

$$\eta \to \eta'$$

„továbbító berendezést" az η' „kimenő jelnek" adott η „bemenő jel" esetén fennálló

$$P_{\eta'|\eta}(B'|y) = \mathbf{P}(\eta' \in B' | \eta = y)$$

feltételes eloszlása jellemzi, valamint a bemenő jel P_η eloszlásának bizonyos

$$P_\eta \in V$$

korlátozása. A „kódolás"

$$\xi \to \eta$$

és a „visszakódolás"

$$\eta' \to \xi'$$

műveleteit a következő feltételes eloszlások jellemzik:

$$P_{\eta|\xi}(B|x) = \mathbf{P}(\eta \in B | \xi = x)$$
$$P_{\xi'|\eta'}(A'|y') = \mathbf{P}(\xi' \in A' | \eta' = y').$$

SHANNON alapproblémája a következőképp fogalmazható meg: Adva vannak a ξ „bemenő közlemények", a ξ' „kimenő közlemények", az η bemeneti jelek és az η' kimeneti jelek lehetséges értékeinek X, X', Y, Y' terei, adva vannak a továbbító berendezés jellemzői, vagyis a $P_{\eta'|\eta}$ feltételes eloszlások, és a bemenő jel számára megengedhető P_η eloszlások V osztálya; végül, adva van a bemenő oldalra jutó közlemény

$$P_\xi(A) = \mathbf{P}(\xi \in A)$$

eloszlása, valamint a „továbbítás pontosságának követelményei", $P_{\xi\xi'} \in W$, ahol W a bemenő oldalra jutó közlemény és kimenő oldalon kijövő közlemény

$$P_{\xi\xi'}(C) = \mathbf{P}((\xi, \xi') \in C)$$

együttes eloszlásának valamilyen osztálya.

Azt kérdezzük, lehetséges-e kódolási és visszakódolási szabályokat megadni és — ha igen — hogyan kell hangozniok ezeknek (vagyis milyeneknek kell lenniök a $P_{\eta|\xi}$ és $P_{\xi'|\eta'}$ feltételes eloszlásoknak), hogy amidőn a P_ξ, $P_{\eta|\xi}$, $P_{\eta'|\eta}$, $B_{\xi'|\xi}$ eloszlások alapján s azon feltétel mellett, hogy a

$$\xi, \eta, \eta', \xi'$$

sorozat Markov-féle, a $P_{\xi\xi'}$ eloszlást kiszámítjuk,

$$P_{\xi\xi'} \in W$$

-t kapjunk?

SHANNONnal megegyezésben definiáljuk a továbbító berendezés „csatornakapacitását" a következő képlettel:

$$C = \sup_{P_\eta \in V} I(\eta, \eta')$$

és vezessük be a

$$H_W(\xi) = \inf_{P_{\xi\xi'} \in W} I(\xi, \xi')$$

mennyiséget, amelyet SHANNON — időegységre vonatkoztatása esetén — a „közlemények létesítése sebességének" nevez. Ekkor az 1. §-beli V. tulajdonságból azonnal következik a továbbítás lehetőségének szükséges feltétele:

$$H_W(\xi) \leq C. \tag{7}$$

Mint már említettük, összehasonlíthatatlanul mélyebb SHANNONnak az az ötlete, hogy elég hoszú idő óta működő „távközlési csatornák" esetében a (7) feltétel bizonyos értelemben és bizonyos igen tág feltételek mellett egyszersmind „majdnem elégséges" is. Matematikai szempontból nézve itt arról van szó, hogy ilyen típusú határeloszlástételeket kell bebizonyítani: Tegyük fel, hogy az X, X', Y, Y' terek, a P_ξ és $P_{\eta'|\eta}$ eloszlások, a V és W osztályok és így a C és $H_W(\xi)$ mennyiségek is bizonyos T paramétertől függnek (az alkalmazásokban ez a továbbító berendezés működése időtartamának a szerepét játsza.) Bizonyos egészen általános jellegű feltételek mellett bebizonyítandó, hogy a

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{C^T}{H_W^T(\xi)} > 1 \tag{8}$$

feltétel elég nagy T-k esetén elegendő ahhoz, hogy lehetséges legyen a fentebb kimondott feltételeknek eleget tevő továbbítás. Ilyen megfogalmazás mellett a feladat persze kissé határozatlan. Mindamellett szántszándékkal kerültem itt, hogy a stacionárius sztochasztikus folyamatok elméletének terminológiájához folyamodjam, minthogy a stacionárius jelleg feltételezése nélkül is lehetséges igen érdekes eredményeket kapni a körvonalazott problémakörben [15].

Az említett típusú határeloszlástételekkel a diszkrét esetben számos jelentős munka foglalkozik. Közülük különösen ki kell emelnem A. JA HINCSIN már említett [6] munkáját.

Az általánosságban vizsgált folytonos esettel — különös módon — még úgyszólván egyáltalán nem is foglalkoztak.

3. §. Az ε-entrópia kiszámítása és becslése egyes speciális esetekben

Ha a

$$P_{\xi\xi'} \in W$$

feltételt úgy fogalmazzuk meg, hogy ξ és ξ' 1 valószínűséggel pontosan egyezzék, vagyis, hogy

$$\mathbf{P}(\xi = \xi') = 1$$

legyen, akkor

$$H_W(\xi) = H(\xi).$$

Ennek megfelelően természetesen adódik, hogy az általános esetben $H_W(\xi)$-t „a ξ valószínűségi változóhoz W reprodukálási pontosság esetén tartozó entrópiának" nevezzük.

Tegyük fel most, hogy az X' tér egybeesik X-szel, vagyis, hogy azokat a módozatokat vizsgáljuk, amelyekkel a $\xi \in X$ pont helyzetére vonatkozó közlést ugyanezen X tér ξ' pontja megadása segítségével közelítőleg továbbíthatunk, — továbbá, hogy e térben bevezettünk bizonyos $\varrho(x, x')$ „távolságot", amely eleget tesz a „metrikus terek" szokásos axiómáinak. Kézenfekvő megkövetelni, hogy

$$\mathbf{P}\{\varrho(\xi, \xi') \leqq \varepsilon\} = 1 \qquad (W_\varepsilon^0),$$

vagy, hogy

$$\mathbf{M}\varrho^2(\xi, \xi') \leqq \varepsilon^2 \qquad (W_\varepsilon)$$

érvényes legyen.

A P_ξ eloszlás „ε-entrópiájának" ezt a két fajtáját

$$H_{W_\varepsilon^0}(\xi) = H_\varepsilon^0(\xi)$$

-vel, ill.

$$H_{W_\varepsilon}(\xi) = H_\varepsilon(\xi)$$

-vel fogjuk jelölni.

Ami a $H_\varepsilon^0(\xi)$ ε-entrópiát illeti, itt csak bizonyos becsléseket akarok ismertetni

$$H_\varepsilon^0(X) = \sup_{P_\xi} H_\varepsilon^0(\xi)\text{-re}$$

vonatkozólag, (a felső határ az X tér összes P_ξ valószínűségeloszlásaira értendő). $\varepsilon=0$-nál, mint ismeretes,

$$H_0^0(X)=\sup_{P_\xi} H(\xi)=\log N_X,$$

ahol N_X az X halmaz elemeinek a száma. $\varepsilon>0$ esetén

$$\log N_X^c(2\varepsilon)\leq H_\varepsilon^0(X)\leq \log N_X^a(\varepsilon),$$

ahol $N_X^a(\varepsilon)$ és N_X^c az X tér azon karakterisztikái, amelyeket [3] dolgozatomban vezettem be. Az $N_X(\varepsilon)$ függvények $\varepsilon\to 0$-nál mutatkozó aszimptotikus sajátságai, — amelyeket egész sor konkrét X tér esetére [3]-ban tanulmányoztam, — érdekes analogonjai a $H_\varepsilon(\xi)$ függvény továbbiakban kifejtendő aszimptotikus tulajdonságainak.

Tekintsük most a $H_\varepsilon(\xi)$ ε-entrópiát. Ha X az n-dimenziós euklidesi tér és

$$P_\xi(A)=\int_A p_\xi(x)\,dx_1, dx_2,\ldots, dx_n,$$

akkor — legalább is elég sima $p_\xi(x)$ függvény esetén — fennáll a jól ismert

$$H_\varepsilon(\xi)=n\log\frac{1}{\varepsilon}+[h(\xi)-n\log\sqrt{2\pi e}]+o(1) \tag{9}$$

formula, ahol

$$h(\xi)=-\int_X p_\xi(x)\log p_\xi(x)\,dx_1, dx_2,\ldots, dx_n$$

az ún. „differenciális entrópia", amely már SHANNON legelső munkáiban is szerepel. Így az n-dimenziós térben értelmezett elég sima folytonos eloszlások esetén $H_\varepsilon(\xi)$ aszimptotikus viselkedését elsősorban a tér dimenziója határozza meg és a $h(\xi)$ differenciális entrópia csak mint a $H_\varepsilon(\xi)$ kifejezés második tagja szerepel.

Kézenfekvő azt várni, hogy a végtelen dimenziós tér tipikus eloszlásai esetén $H_\varepsilon(\xi)$ növekedése ($\varepsilon\to 0$ esetén) lényegesen gyorsabb lesz. Legegyszerűbb példaként tekintsük a Wiener-féle $\xi(t)$ sztochasztikus folyamatot, amely $0\leq t\leq 1$-re van definiálva, s amelynek a

$$\Delta\xi=\xi(t+\Delta t)-\xi(t)$$

független növekményei normális eloszlásúak, amellett

$$\xi(0)=0,\qquad \mathbf{M}\Delta\xi=0,\qquad \mathbf{M}(\Delta\xi)^2=\Delta t.$$

A. M. JAGLOM azt találta, hogy ebben az esetben az L^2 tér metrikájában

$$H_\varepsilon(\xi)=\frac{4}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2}+o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \tag{10}$$

Egy a $t_0\leq t\leq t_1$ időintervallumon értelmezett diffúziós típusú Markov-folyamat esetére, amelynél

$$\mathbf{M}\Delta\xi = A(t, \xi(t))\Delta t + o(\Delta t); \quad \mathbf{M}(\Delta\xi)^2 = B(t, \xi(t))\Delta t + o(\Delta t)$$

bizonyos kézenfekvő feltételeket megengedve az előbbinél általánosabb

$$(11) \qquad H_\varepsilon(\xi) = \frac{4}{\pi}\chi \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

képlet nyerhető, ahol

$$\chi(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{M} B(t, \xi(t))dt.$$

Az n-dimenziós euklidesi, vagy Hilbert-féle térben értelmezett n-dimenziós normális eloszlás esetében a H_ε ε-entrópia pontosan kiszámítható: egy ξ n-dimenziós vektor a koordináták alkalmas ortogonális transzformációja után a

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

alakot ölti, ahol a ξ_k koordináták kölcsönösen függetlenek és normális eloszlásúak. Adott ε mellett határozza meg a θ paramétert az

$$\varepsilon^2 = \Sigma \min (\theta^2, \mathbf{D}^2\xi_k)$$

egyenlet; ekkor, normális eloszlású ξ esetén

$$(12) \qquad H_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{D}^2\xi_k > \theta^2} \log \frac{\mathbf{D}^2\xi_k}{\theta^2}.$$

A

$$\xi' = (\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n')$$

approximáló vektort úgy kell megválasztani, hogy $\mathbf{D}^2\xi_k \leqq \theta^2$ esetén

$$\xi_k' = 0,$$

$\mathbf{D}^2\xi_k > \theta$ esetén pedig

$$\xi_k = \xi_k' + \Delta_k, \quad \mathbf{D}^2\Delta_k = \theta^2, \quad \mathbf{D}^2\xi_k' = \mathbf{D}^2\xi_k - \theta^2$$

álljon fenn és a ξ_k és Δ_k vektorok kölcsönösen függetlenek legyenek. A végtelen dimenziós eset semmiben sem különbözik a véges dimenzióstól.

Végül igen lényeges, hogy az (n-dimenziós vagy végtelen dimenziós) ξ vektorra — adott második centrális momentumok esetén — $H_\varepsilon(\xi)$ akkor vesz fel maximális értéket, ha ξ normális eloszlású.

Ez az eredmény akár közvetlenül is levezethető M. Sz. PINSZKER következő tételéből (l. [16]):

TÉTEL: *Legyen adva az* s_{ij} $(0 \leqq i, j \leqq m+n)$ *értékek pozitív definit szimmetrikus matrixa, valamint a*

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$$

vektor P_ξ *eloszlása,* ξ *második centrális momentumai legyenek egyenlők az*

s_{ij}-kel, ha $0 \leq i, j \leq m$. Tegyük fel, hogy a ξ vektor és a

$$\xi' = (\xi_{m+1}, \xi_{m+2}, \ldots, \xi_{m+n})$$

vektor együttes $P_{\xi\xi'}$ eloszlására szóló W feltétel abból áll, hogy a

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+n})$$

változók második centrális momentumai egyenlők az s_{ij}-kel, ha $0 \leq i, j \leq m+n$; akkor

$$H_W(\xi) \leq \frac{1}{2} \log \frac{AB}{C}. \tag{13}$$

A (13) képlet jelölései az 1. § tárgyalásmódjának felelnek meg. Az 1. §-ban mondottakkal való egybevetéséből világos, hogy a (13) egyenlőtlenségből egyenlőség lesz, ha P_ξ normális eloszlás.

A „közlemények létesítésének sebessége" kiszámításánál fellépő variációs feladatok megoldásának elveire SHANNON meglehetősen régen rámutatott már. [10]-ben SHANNON és WEAVER így ír: *„Sajnos, ezeket a formális megoldásokat speciális esetekben nehéz numerikusan kiértékelni és így értékük nem valami nagy".*[6] Mindazonáltal sok ilyen típusú feladat lényegében elég egyszerű, ahogy az a fentebbiekből is látható. Lehetséges, hogy az ez irányban végzett vizsgálatok lassú fejlődése azzal kapcsolatos, hogy nem értik át eléggé azt a körülményt, hogy a típikus esetekben a variációs feladatok megoldásai igen gyakran degeneráltak; például annál a fentebb vázolt feladatnál, amelyben egy normális eloszlású ξ vektor esetére kellett $H_\varepsilon(\xi)$-t kiszámítani, az n-dimenziós esetben gyakran megtörténik, hogy a ξ' vektor nem n-dimenziós, hanem csak $k (k < n)$ dimenziós, — a végtelen dimenziós esetben pedig a ξ' vektor mindig véges dimenziós.

4. §. Az információ mennyisége és a közlemények létesítésének sebessége stacionárius folyamatok esetében

Tekintsünk két stacionárius, egyszersmind stacionárius kapcsolatban levő folyamatot:

$$\xi(t), \quad \eta(t) \qquad -\infty < t < \infty.$$

Jelöljük ξ_T és η_T-vel a ξ és η folyamatok $0 < t \leq T$ időre vonatkozó szakaszait, ξ_- - és η_--szal pedig a ξ és η folyamatok lefolyását a $-\infty < t \leq 0$ negatív féltengelyen. A stacionárius kapcsolatban levő ξ és η folyamatok (ξ, η) párját megadni, ugyanazt jelenti, mint megadni egy a t tengely mentén történő eltolásra vonatkozólag invariáns $P_{\xi\eta}$ valószínűségeloszlást az $\{x(t), y(t)\}$

[6] [7] orosz fordításában: 28. §. 79. o.

függvénypárok terében. Ha ξ_--t rögzitjük, a $P_{\xi\eta}$ eloszlásból a

$$P_{\xi_T,\eta|\xi_-}(C|x_-) = \mathbf{P}\{(\xi_T,\eta)\in C|\xi_- = x_-\}$$

feltételes eloszlás lesz. Ennek az eloszlásnak a segítségével a 1. §-beliek alapján kiszámítható az

$$I(\xi_T,\eta|x)$$

feltételes információmennyiség.

Ha az

$$\mathbf{M}I(\xi_T,\eta|\xi_-)$$

várható érték véges valamilyen $T>0$-ra, akkor az összes többi $T>0$ értékekre is véges és

$$\mathbf{M}I(\xi_T,\eta|\xi_-) = T\vec{I}(\xi,\eta).$$

Az $\vec{I}(\xi,\eta)$ mennyiséget kézenfekvő így nevezni: „az η folyamatról szóló információ létesítési sebessége a ξ folyamat megfigyelésekor". Ha a ξ folyamat teljes pontossággal extrapolálható a multból a jövőbe, akkor

$$\vec{I}(\xi,\eta) = 0.$$

Ez lesz a helyzet, ha például a ξ folyamat spektruma korlátos. Általánosságban véve nem okvetlenül áll fenn az

$$\vec{I}(\xi,\eta) = \vec{I}(\eta,\xi) \tag{14}$$

egyenlőség. A ξ folyamat „regularitására" tett elég általános feltételek mellett fennáll azonban[7] az

$$\vec{I}(\xi,\eta) = \bar{I}(\xi,\eta)$$

egyenlőség, ahol

$$\bar{I}(\xi,\eta) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}I(\xi_T,\eta_T).$$

Minthogy $I(\xi_T,\eta_T) = I(\eta_T,\xi_T)$, ezért mindig fennáll, hogy

$$\bar{I}(\xi,\eta) = \bar{I}(\eta,\xi)$$

és ebből kifolyólag az $\vec{I}(\xi,\eta) = \bar{I}(\eta,\xi)$ és $\vec{I}(\eta,\xi) = \bar{I}(\eta,\xi)$ egyenletek együttes fennállása esetén (14) is érvényes. Tegyük most fel, hogy W két — ξ és ξ' — stacionárius kapcsolatban levő folyamat $P_{\xi\xi'}$ együttes eloszlásainak valamilyen osztálya. A

$$\vec{H}_W(\xi) = \inf_{P_{\xi\xi'}\in W}\vec{I}(\xi',\xi)$$

mennyiséget kézenfekvő így nevezni: „A közlemények létesítésének sebessége

[7] A folyamat regularitása itt és a továbbiakban azt jelenti, durván szólva, hogy a folyamat olyan szakaszai, amelyek a t tengely két, egymástól elég távol levő szakaszának felelnek meg, majdnem függetlenek. Gauss-folyamatok esetén itt alkalmazható a regularitásnak az a jól ismert definíciója, amelyet [17] munkámban vezettem be.

a ξ folyamatban, W reprodukálási pontosság esetében". A ξ folyamat regularitására vonatkozó bizonyos feltételek mellett és a W-re tett feltevések bizonyos kézenfekvő típusaira bebizonyítható, hogy

$$\bar{H}_W(\xi) = \bar{H}_W(\xi),$$

ahol

$$\bar{H}_W(\xi) = \inf_{P_{\xi\xi'} \in W} \bar{I}(\xi, \xi').$$

5. §. Az információmennyiség és a közleménylétesítés sebességének kiszámítása és becslése a spektrum alapján

Abban az esetben, amidőn a $P_{\xi\eta}$ eloszlás normális és a ξ és η folyamatok közül legalább az egyik reguláris, érvényes az M. SZ. PINSZKER által [18]-ban közölt

$$\bar{I}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log\left[1 - r^2(\lambda)\right] d\lambda \tag{15}$$

képlet, ahol

$$r^2(\lambda) = \frac{|f_{\xi\eta}(\lambda)|^2}{f_{\xi\xi}(\lambda)\, f_{\eta\eta}(\lambda)}$$

($f_{\xi\xi}, f_{\xi\eta}, f_{\eta\eta}$ spektrális sűrűségek). Diszkrét t idejű folyamatok esetében a normális folyamat időegységre vonatkoztatott differenciális entrópiájára,

$$\bar{h}(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} h(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_T)$$

-re ismeretes a következő egyenlőség:

$$\bar{h}(\xi) = \log(2\pi\sqrt{e}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log f_{\xi\xi}(\lambda)\, d\lambda. \tag{16}$$

Mindazonáltal folytonos idő és nem korlátos spektrum esetében a $\bar{h}(\xi)$ kifejezésnek semmilyen analogonja sincs és a Pinszker-féle formulát külön le kell vezetni.

A ξ stacionárius folyamatnak a stacionárius és ξ-vel stacionárius kapcsolatban levő ξ' folyamat segítségével történő reprodukálása pontosságát kézenfekvő a

$$\sigma^2 = \mathsf{M}[\xi(t) - \xi'(t)]^2$$

mennyiséggel jellemezni, és

$$\sigma^2 \leq \varepsilon^2$$

típusú W feltétel esetén kézenfekvő a

$$\bar{H}_\varepsilon(\xi) = \bar{H}_W(\xi)$$

mennyiséget a ξ folyamat időegységre vonatkozó ε-entrópiájának nevezni, — azon feltétel mellett pedig, hogy

$$\bar{H}_W(\xi) = H_W(\xi),$$

úgy hívni, hogy: „a közlemények létesítésének sebessége a ξ folyamatban, a továbbítás ε átlagos pontossága esetén". A véges dimenziós eloszlásokra vonatkozó megfelelő feltételekből (1.3. §) levezethető, hogy adott $f_{\xi\xi}(\lambda)$ spektrális sűrűség esetén a $\bar{H}_\varepsilon(\xi)$ mennyiség akkor éri el maximumát, ha ξ normális folyamat. A normális esetben a $\bar{H}(\xi)$ mennyiség könnyen kiszámítható az $f_{\xi\xi}(\lambda)$ spektrális sűrűség alapján, teljesen analóg módon ahhoz, ahogy azt a 3. §-ban kifejtettük, amikor n-dimenziós eloszlások esetére foglalkoztunk a $H_\varepsilon(\xi)$ mennyiséggel. A θ paramétert a következő egyenlet definiálja:

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \min(\theta^2, f_{\xi\xi}(\lambda))\, d\lambda. \tag{17}$$

Ennek a paraméternek a segítségével a $\bar{H}_\varepsilon(\lambda)$ mennyiséget a

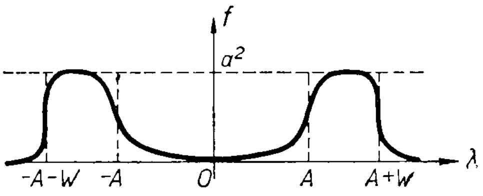
$$\bar{H}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2} \int_{f_{\xi\xi}(\lambda) > \theta^2} \log \frac{f_{\xi\xi}(\lambda)}{\theta^2}\, d\lambda \tag{18}$$

képlet alapján számíthatjuk ki.

Gyakorlati érdekessége van a 2. ábrán feltüntetett spektrális sűrűségeknek, amelyeket jól lehet approximálni a

$$g(\lambda) = \begin{cases} a^2, & \text{ha} \quad A \leq |\lambda| \leq A + W \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

fügvénnyel. Könnyen kiszámítható, hogy ebben az esetben nem túlságosan kicsi ε értékek esetén normális folyamatra közelítőleg:



2. ábra

$$\theta^2 \sim \frac{\varepsilon^2}{2W}, \qquad \bar{H}_\varepsilon(\xi) \sim W \log \frac{2Wa^2}{\varepsilon^2}. \tag{19}$$

A (19) képlet, persze, nem más, mint SHANNON jól ismert

$$R = W \log \frac{Q}{N} \tag{20}$$

formulája. Mindazonáltal van ebben bizonyos elvi újdonság, éspedig az, hogy most látjuk, miért és milyen határok közt (nem túl kicsiny ε-nál) alkalmazható ez a képlet nem korlátos spektrumú folyamatokra — a közlemények továbbítása elméletében szereplő összes, minket valóban érdeklő folyamatok pedig ilyenek.

Ha (19)-et

$$H_\varepsilon(\xi) \approx 2W \left[\log (a\sqrt{2W}) + \log \frac{1}{\varepsilon} \right] \tag{21}$$

alakban írjuk és összevetjük (9)-cel, látjuk, hogy a felhasznált frekvenciasáv $2W$ kétszeres szélessége játsza a dimenziószám szerepét. Ezt a gondolatot — ti., hogy a frekvencia kétszeres szélessége ekvivalens a bizonyos értelemben az időegységre jutó dimenziószámmal — minden bizonnyal V. A. KOTYELNYIKOV mondta ki először (l. [12]). Ennek a gondolatnak a megalapozásaként KOTYELNYIKOV arra a körülményre utalt, hogy egy függvényt, amelynek a spektruma a $2W$ szélességű sávban helyezkedik el, egyértelműen meghatároznak a függvénynek a

$$\ldots, -\frac{2}{2W}, -\frac{1}{2W}, 0, \frac{1}{2W}, \frac{2}{2W}, \ldots, \frac{k}{2W}, \ldots$$

pontokban felvett értékei. Ugyanez a bizonyításmenet SHANNONnál is megvan, aki a segítségével kapott eredményeket a (20) képlet levezetésénél is felhasználta. Mivel egy korlátos spektrumú függvény a [17]-beli értelemben mindig szinguláris és egy ilyen függvény megfigyelése egyáltalán nincs kapcsolatban újabb információ stacionárius „odaáramlásával", ilyenfajta okoskodás értelme nem volt teljesen világos, úgy hogy a (21) közelítő formula előbb bemutatott új levezetésében — azt hiszem — van valami érdekesség.

Kis ε-oknál tetszőleges normális eloszlású reguláris sztochasztikus folyamat esetén $\bar{H}_\varepsilon(\xi)$ növekedése ε csökkenésekor lényegesen gyorsabban folyik le, mint ahogy az a (21) képletből adódnék. Speciálisan, ha $f_{\xi\xi}(\lambda)$ $\lambda \to \infty$ esetén $\lambda^{-\beta}$ rendű, akkor $H_\varepsilon(\xi)$ $\varepsilon^{-2/(\beta-1)}$ rendű.

6. §. A csatornakapacitás kiszámítása és becslése egyes speciális esetekben

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a bemenő jel egy

$$\eta_t = (\eta_{t1}, \ldots, \eta_{tm})$$

m-dimenziós vektor, a kimenő jel pedig egy

$$\eta_t' = (\eta_{t1}', \ldots, \eta_{tn}')$$

n-dimenziós vektor. Ahogy már mondtuk, az $\eta_t \to \eta_t'$ továbbító berendezést jellemzik a $P_{\eta_t'|\eta_t}$ feltételes valószínűségeloszlás, valamint az η_t bemenő jelre tett bizonyos megkötések. Tegyük fel, hogy η_t' η_t-tól való függése lineáris normális korreláció jellegű, vagyis, hogy

$$\eta_t' = A\eta_t + \zeta, \tag{22}$$

ahol az A operátor lineáris, a ζ vektor pedig független η_t-tól és n-dimenziós

Gauss-eloszlású. Ami a bemenő jelre vonatkozó feltételt illeti, engedjük meg, hogy ez

(23) $$\mathbf{M}\, Q(\eta) \leqq \varepsilon^2$$

típusú, ahol a Q az $\eta_1, \ldots, \eta_m$ koordináták valamilyen pozitív definit kvadratikus alakja. Ha az Y és Y' terekben alkalmas módon választunk meg lineáris koordináta-transzformációkat, az általános eset arra az esetre vezethető vissza, amidőn

(24) $$Q(\eta) = \Sigma \eta_i^2$$

és ekkor a (22) összefüggés a következő alakban írható:

(25) $$\begin{aligned} \eta_i' &= a_i \eta_i + \zeta_i, \quad a_i \neq 0 \\ \eta_i' &= \zeta_i \end{aligned} \quad , \text{ ha } \begin{cases} 1 \leqq i \leqq k \\ i > k, \end{cases}$$

ahol $k = \min(m, n)$.

A tett feltevések mellett a csatornakapacitás, vagyis az $I(\eta, \eta')$ információmennyiségnek a tett feltevésekkel összhangban álló C felső korlátja könnyen kiszámítható. Ezt a korlátot akkor érjük el, ha az η_i-k kölcsönösen független Gauss-eloszlású valószínűségi változók, és

(26) $$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 \eta_i &= \theta^2 - \frac{\mathbf{D}^2 \zeta_i}{a_i}, \quad \text{ha } i \leqq k \text{ és } a_i \theta^2 > \mathbf{D}^2 \zeta_i, \\ \mathbf{D}^2 \eta_i &= 0 \qquad \text{minden más } i\text{-re}, \end{aligned}$$

ahol a θ^2 konstanst, mint egyszerűen belátható, egyértelműen meghatározzák a (26) megkötések és

(27) $$\sum_i \mathbf{D}^2 \eta_i^2 = \varepsilon^2.$$

Az ennek megfelelő $C = I(\eta, \eta')$ érték (vö. 3. §.)

(28) $$C = \frac{1}{2} \sum_{a_i^2 \theta^2 > \mathbf{D}^2 \zeta} \log \frac{a_i^2 \theta^2}{\mathbf{D}^2 \zeta_i}.$$

Analóg helyzettel van dolgunk stacionárius lineáris távközlési csatornák esetében, ha „a zaj Gauss-szerű“, vagyis ha

(29) $$\eta' = A \eta(t) + \zeta(t),$$

ahol A lineáris operátor, $\zeta(t)$ pedig egy, az $\eta(t)$-től független Gauss-féle stacionárius sztochasztikus folyamat. Mint tudjuk, a megfelelő spektrális sűrűségek között a következő kapcsolat áll fenn:

(30) $$f_{\eta'\eta'}(\lambda) = a^2(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda) + f_{\zeta\zeta}(\lambda).$$

Azt a feltételt, amely korlátot szab meg a csatorna bemenő teljesítményére, a következő alakban fogalmazzuk meg:

(31) $$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta\eta}(\lambda)\, d\lambda \leqq \varepsilon^2.$$

A feladat formális megoldása teljesen analóg a fentebb vizsgált véges dimenziós feladat megoldásával. A C maximális csatornakapacitást akkor érjük el, ha

$$
(32)\qquad \begin{aligned} f_{\eta\eta}(\lambda) &= \theta^2 - \frac{f_{\zeta\zeta}(\lambda)}{a^2(\lambda)} \\ f_{\eta\eta}(\lambda) &= 0 \end{aligned}, \quad \text{ha} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f_{\zeta\zeta}(\lambda)}{a^2(\lambda)} < \theta^2 \\ &\frac{f_{\zeta\zeta}(\lambda)}{a^2(\lambda)} \geqq \theta^2. \end{aligned} \right.
$$

A megfelelő $\bar{I}(\eta, \eta')$ érték a (15) képlet szerint a következő:

$$
(33)\qquad \bar{C} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{a^2(\lambda)\theta^2 > f_{\zeta\zeta}(\lambda)} \log \frac{a^2(\lambda)\theta^2}{f_{\zeta\zeta}(\lambda)}\, d\lambda.
$$

Mindjárt meg kell jegyezni, hogy a gyakorlatilag érdekes esetekben a (32) képletek szerint kiszámított $f_{\eta\eta}(\lambda)$ spektrális sűrűség zérussá válik a λ tengely bizonyos korlátos szakaszán kívül és így egy szinguláris folyamat spektrális sűrűsége lesz. Az $\eta'(t)$ folyamat ekkor (azon kézenfekvő feltevés mellett, hogy a $\zeta(t)$ folyamat reguláris) — vegyes lesz, ti. az $A\eta$ szinguláris komponens és a ζ reguláris komponens összegéből fog állani. Az η' folyamat megfigyelésekor a η folyamatról kapott információ létesítésének $\vec{I}(\eta', \eta)$ sebességét ilyen esetben egyáltalán nem adja meg az $\vec{I}(\eta', \eta) = \bar{C}$ képlet: az ti. zérussal egyenlő (l. 5. §.).

Bizonyos kiegészítő vizsgálatok segítségével lehetséges azonban kimutatni, hogy ha az $\eta(t)$ bemenő jel reguláris folyamat, — ami elvileg gyakorlatilag megvalósítható — és valóban szállít az idő folyamán keletkező információt, kaphatunk olyan $\vec{I}(\eta', \eta) = \vec{I}(\eta, \eta')$ információ-létesítési sebességet, amely tetszőlegesen közel van $\bar{C}$-hoz. Ez véglegesen igazolja a (33) formulát.

III. AZ ALKALMAZHATÓSÁG HATÁRAI

Már említettem, hogy az „információ", ha elsődleges tartalmát nézzük, nem szkaláris mennyiség és általában az a helyzet, hogy egyetlen egy szám, „az információ mennyisége" segítségével nem lehet teljesen jellemezni. Egy közvetlenül meg nem figyelhető θ objektumról a megfigyelhető objektumban tartalmazott „információnak" (és nem információmennyiségnek) az előbbinél sokkal szélesebb körű, kvalitatív fogalma — bizonyos feltételeket megengedve — szintén formális matematikai tárgyalás alá vonható; már FISHER megkezdte ezt, a jelen dolgozat elején említett munkáiban. Ez sajátságos téma, amelyről most nem beszélhetek részletesen. Ehelyett tekintsünk egy példát, amelyik azt mutatja, mennyire hibás volna azt gondolni, hogy a Shannon-féle „információmennyiség" kimerítően jellemzi mindazon kapcsolatokat, amelyek felhasználhatók arra, hogy egyes objektumokat megfigyelve, másokról is ítéletet mondhassunk. Tegyük fel, hogy a ξ, η, ζ változók bármelyike csak két értéket vehet fel, 0-t és 1-et. Tegyük fel, hogy mind a négy lehetséges értékkombinációjuk,

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

egyenként $1/4$—$1/4$ valószínűségű. Könnyen igazolható, hogy — valószínűségszámítási értelemben véve — a (ξ, η), (η, ζ), (ζ, ξ) párok mindegyikében a változók kölcsönösen függetlenek. Ezért

$$I(\xi, \zeta) = I(\eta, \zeta) = 0.$$

Másrészt, ha ξ és η értékei ismertek, ζ értéke egyértelműen meghatározható a következő táblázat szerint:

$\eta \backslash \xi$	0	1
0	1	0
1	0	1

Ezért

$$I[(\xi, \eta), \zeta] = H(\zeta) = 1.$$

Az a ζ-ra vonatkozó információmennyiség tehát, amelyet a ξ, ill. η valószínűségi változó tartalmaz, egyenként mindegyiknél zérus, (ξ, η) azonban már meghatározott (sőt kimerítő) információt tartalmaz ζ-ra vonatkozólag, amelynek a mennyiségét az 1 szám fejezi ki.

Fentebb már szó volt arról, hogy sok esetben, amidőn homogén adatok hosszú sorozatait kell továbbítani, adott távközlési csatornán át való továbbításuk elvi lehetősége meglehetős teljességgel jellemezhető a bennük tartalmazott információmennyiséggel. Rámutattunk, hogy ezen alapgondolatok alkalmazhatósági határainak felkutatása az egyik alapvető feladat az elmélet további kidolgozásában. Pontos információ továbbítása esetére (akár hibákkal dolgozó csatornán keresztül is) már sok vizsgálat történt e téren és további pozitív eredmények is remélhetők. *Nem pontos* információ továbbítása esetében azonban másként áll a dolog. Képzeljük el, hogy a fentebb vizsgált

$$\xi \to \eta \to \eta' \to \xi'$$

szkémában a bemenő oldali ξ közlés kettős számrendszerbeli jegyek sorozata, amely egy oly másik ξ_0 sorozatból származik, mely egymástól független, $1/2$—$1/2$ valószínűséggel fellépő zérusokból és egyesekből áll, emellett a

ξ sorozat minden egyes jegye csupán $1-J<1$ valószínűséggel esik egybe a ξ_0 sorozat megfelelő jegyével. Ekkor a ξ sorozatban a ξ_0 sorozatra vonatkozólag tartalmazott információmennyiséget (egy számjegyre vonatkoztatva) a már ismert

$$I = \bar{I}(\xi, \xi_0) = 1 + J \log J + (1-J) \log (1-J)$$

képlet szolgáltatja. Most úgy akarjuk továbbítani a ξ sorozatot, az $\eta \to \eta'$ távközlési csatornán keresztül, hogy olyan ξ' sorozatot kapjunk, amely tetszőleges pontossággal tájékoztat mind a ξ_0, mind a ξ sorozat „állományáról" ; ezt a követelést az

$$\bar{I}(\xi', \xi_0) = \bar{I}(\xi, \xi_0)$$

alakban formulázzuk meg. Bebizonyítható, hogy ennek szükséges feltétele az, hogy a ξ sorozatot *pontosan* továbbítsuk, azaz $C = 1$ csatornakapacitású csatornát használjunk, ámbár a nekünk szükséges hasznos (egy betűre eső) információ csupán $I < 1$-gyel egyenlő. Ennek a megjegyzésnek, úgy látom, van bizonyos jelentősége az alkalmazások szempontjából is, például amikor megérthetetlen vagy már eltorzult beszéd távbeszélő vonalakon át való továbbítása pontosságára vonatkozó követelményeket kell megállapítani.

Még folytathatnánk a hasonló megjegyzéseket. Az információelmélet ma még fejlődése kezdeti stádiumában van. Nagyon valószínű, hogy további fejlődése során azt a jelenleg uralkodó kizárólagos törekvést, hogy minden problémát információmennyiség kiszámítására vezessünk vissza, fel fogja váltani az a célkitűzés, hogy a különböző információtípusokhoz a jelenleginél teljesebb matematikai jellemzést találjunk, és ne ignoráljuk teljesen kvalitatív sajátosságaikat.

Záradékul még egy gondolatot szeretnék igen határozottan kimondani: Amidőn az információelmélet lehetséges alkalmazásait vizsgáljuk, ne tegyünk olyan a priori korlátozásokat, amelyek nem a dolog lényegéből következnek. Az a nálunk egy idő óta megfigyelhető törekvés, hogy az információelméletet olyan segédtudományként kezeljük, amely csak a technika pontosan meghatározott területein vehető igénybe, igen siralmas következményeket vonhat maga után. Már az információelmélet fogalmainak a nemrég megjelent [19] cikkben foglalt optikai alkalmazásai sem jelenhettek volna meg a maguk idejében, ha az információelmélet sokkal szélesebb körű alkalmazásairól szóló elgondolások nem érnek el hozzánk a külföldi irodalom utján. Megjegyzem, hogy — véleményem szerint — az információelmélet fogalmainak a valóságos „memóriaberendezésekre" való alkalmazása — amikor ti. az idegrendszer működését és az átöröklési jelenségeket tanulmányozzuk — teljesen szolid alapon áll és bizonyára igen lényeges lesz a tudomány említett fejezeteinek fejlődése szempontjából.

Fordította: *Medgyessy Pál*
A MTA Matematikai Kutató Intézete munkatársa

IRODALOM

[1] А. Н. Колмогоров: Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром, Материалы общего собрания АН СССР, 1947 г.

[2] А. Н. Колмогоров: Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. Юбилейный сборник А. Н. СССР, Т. I. 1947, 242—254.

[3] А. Н. Колмогоров: О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств. Д. А. Н. СССР 108, Но. 3. 1956, 385—388.

[4] А. Г. Витушкин: К тринадцатой проблеме Гильберта. ДАН СССР, 94, 4, 1954, 701—704.

[5] А. Я. Хинчин: Понятие энтропии в теории вероятностей. УМН, VIII. вып. 3 (55). 1953, 3—20.

[6] А. Я. Хинчин: Об основных теоремах теории информации. УМН, XI вып. 1 (67), 1956, 17—75.

[7] „Теория передачи электрических сигналов при наличии помех." Сборник переводов. М., 1953.

[8] А. А. Харкевич: Очерик общей теории связы. Гос. Изд.—во Техн.—Теор. Литературы. М., 1955.

[9] Goldman, Stanford: Information Theory, New York 1953.

[10] C. E. Shannon and W. Weaver: The matematical theory of communication, *Univ. of Illinois Press*, 1949, 3—89. (orosz fordítását l.: [7]-ben.)

[11] Г. Крамер: Математические методы статистики. М., 1948.

[12] В. А. Котельников: Материалы к I-му Всесоюзному съезду по вопросам реконструкции связы. 1933.

[13] А. Н. Колмогоров, А. Н. Яглом, И. М. Гельфанд: Количество информации и энтропия дла непрерывных распределений. Доклад на Третьем всесоюзном математическом съезде. 1956.

[14] А. М. Обухов: Корреляция векторов. Ученные залиски МГУ, вып. 45. 1940. 73—92

[15] Р. М. Розенблат: Труды Третьего всесоюзного математического съезда. Т. II. 1956, 132—133.

[16] М. С. Пинскер: Труды Третьего всесоюзного математического съезда. Т. I. 125,

[17] А. Н. Колмогоров: Бюллетень МГУ, т. 2, вып. 6. 1941.

[18] М. С. Пинскер: ДАН СССР, 98, 1954, 213—216.

[19] С. Г. Раутиап: О мере разрешающей способности оптического прибора ДАН СССР, 109, (1956), 743—745.

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Szász Pál doktori értekezésének nyilvános vitája

1957. május 10-én zajlott le SZÁSZ PÁL *„A hiperbolikus sík analitikus geometriájának indipendens elemei felépítése a Hilbert-féle végkalkulus alapján"* című doktori értekezésének vitája a *Bolyai János Matematikai Társulat* előadótermében. A bíráló bizottság elnöke FEJÉR LIPÓT akadémikus, titkára KÁRTESZI FERENC, a matematikai tudományok kandidátusa, az értekezés opponensei HAJÓS GYÖRGY akadémikus, RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus, VARGA OTTÓ levelező tag voltak.

Az elnök megnyitva az ülést, felkérte a titkárt, ismertesse SZÁSZ PÁL eddigi tudományos munkásságát.

SZÁSZ PÁL 1952. október 18-án nyerte el a matematikai tudományok kandidátusa fokozatot. Azóta 21 dolgozata jelent meg, további 2 sajtó alatt van. Ezek közül 18 a nem-euklideszi geometria megalapozása kérdéskörébe vág; a régebbiek közül is 7 dolgozata foglalkozik a nem-euklideszi geometria megalapozása kérdéseivel.

Ezután az elnök felkérésére SZÁSZ PÁL behatóan ismertette doktori értekezésének tartalmát.

HILBERT a *„Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie"* című dolgozatában a hiperbolikus síkgeometria olyan felépítését vázolja fel, mely a róla elnevezett axiómarendszer síkbeli illeszkedési, rendezési, egybevágósági axiómáin kívül még egy párhuzamossági axiómára támaszkodva felépíthető, tehát folytonossági axiómát nem vesz igénybe.

HILBERT minden egyes egyeneshez két-két véget rendel hozzá, mégpedig úgy, hogy párhuzamos félegyenesek közös véggel rendelkeznek. A végekre két műveletet értelmez, összeadást és szorzást. Megmutatja, hogy a végek e két műveletre nézve testet alkotnak. Az egyeneshez két vége segítségével vonalkoordinátákat rendel. A sugársor egyenlete e vonalkoordinátákban lineáris; HILBERT e nevezetes dolgozatának ez a főeredménye. Ebből „... *az egyenespárra vonatkozó speciális Pascal-tétel és a perspektív háromszögekről szóló Desargues-tétel, valamint a projektív geometria többi tétele könnyen következik. Ezek után a Bólyai—Lobacsevszkij-féle geometria ismert képletei nehézség nélkül levezethetők*" — írja HILBERT.

Ez a HILBERT által kijelölt továbbépítés feltételezi a projektív geometria olyan axiómatikus megalapozását, melyben kiderül, hogy a projektív geomteria analitikus modellje kommutatív test. Ha még a mozgási axiómákat és a párhuzamossági axiómákat is hozzávesszük, akkor a projektív geometriának a hiperbolikus geometriát jellemző részcsoportját nyerjük.

HILBERT dolgozata alapján felmerül egy, még mindig jelentős feladat: a folytonosságot nem használva, a hiperbolikus koordináta geometriát, melyben végek szerepelnek koordinátákként, úgy építeni fel, hogy ahhoz se az euklideszi geometriát, se a projektív geometriát ne vegyük igénybe. SZÁSZ PÁL ezt a feladatot a *„Weierstrass-féle homogén koordináták"* bevezetésével a hiperbolikus geometrián belül, egyszerűen és röviden oldotta meg.

Most pedig részletesebben ismertetjük SZÁSZ PÁL doktori értekezésének tartalmát.

A Hilbert-féle axióma-rendszer síkbeli I—III. axióma-csoportjaihoz nem az eredeti hiperbolikus paralelaxiómát csatolja, hanem két gyöngébb axiómával helyettesíti, melyből az I—III. axióma-csoport alapján az eredeti tételként vezethető le. A végkalkulust a Hilbert-féle felfogástól eltérő formában szerepelteti. A végek összeadását változatlanul átveszi, a szorzat definícióját azonban más formában fejezi ki. Evégből a $(0, \infty)$ egyenes irányított szakaszainak halmazában tekinti a szakaszok összeadását. Az axiómákból könyen következik, hogy az irányított szakaszok az összeadásra nézve kommutatív csoportot alkotnak. Azután az irányított szakaszok halmaza és a pozitív végek halmaza között definiál olyan egy-egyértelmű leképezést, mely az irányított szakaszok additív csoportját átviszi a pozitív végek (Hilbert-féle) multiplikatív csoportjába. Ezzel az $E(t) = \sigma$ leképezéssel — SZÁSZ távolság függvénynek nevezi — a végek szorzásának a 0 végre való kiterjesztése magától kínálkozó megállapodásként adódik. Az exponenciális függvényre emlékeztető $E(t)$ függvény segítségével még három más függvényt is bevezet, a hiperbolás függvényekre emlékeztető $C(t)$, $S(t)$, $T(t)$ távolságfüggvényeket.

Egy O csúcspontú derékszög szárainak végei az ω és ε végek, egy (P, ω) egyenes másik vége σ. A $\left(\frac{\sigma}{2}, \omega\right)$ egyenesre P-ből bocsátott merőleges P'-ben metszi az (O, ω) egyenest és t az O-tól P'-ig terjedő irányított szakaszt jelenti. SZÁSZ PÁL a P ponthoz a (σ, t) vegyes koordinátapárt rendeli. Azután a (σ, t) vegyes koordinátapárok halmaza és az (x_1, x_2, x_3) véghármasok $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$, $x_3 > 0$ relációkat kielégítő halmaza között létesít egy-egyértelmű megfeleltetést a távolságfüggvények segítségével. Bármely két x_1, x_2, x_3 és y_1, y_2, y_3 pontra nézve $x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 > 0$.

Az irányított egyenesekhez ugyancsak végekből álló u, v, w koordináta hármast rendel, ahol $u^2 + v^2 - w^2 = 1$, és viszont. Az egyeneshez rendelt u, v, w vonalkoordinátákat úgy állapítja meg, hogy a pont és egyenes illeszkedése az $ux_1 + vx_2 - wx_3 = 0$ relációval ekvivalens.

A pont x_1, x_2, x_3 és az egyenes u, v, w koordinátái a folytonossági axióma posztulálásával a pont, illetve az egyenes jól ismert Weierstrass-féle homogén koordinátáiba mennek át.

A koordináta transzformációk tanulmányozása a végek transzformációs képleteinek alapján a vonalkoordináták transzformációs képleteinek megállapításával kezdődik; ezekből és az illeszkedést jellemző relációból pedig a pontkoordináták transzformációs képletei is levezethetők. A transzformációs formulák segítségével két egyenes kölcsönös helyzetének kritériumai, a két pont egymástól való távolságát és a pontnak egyenestől való távolságát kifejező képletek, továbbá a távolság függvények egyszerű geometriai jelentése már könnyen adódnak.

SZÁSZ PÁL ezután a valós síkelemek körét a határelemek és ideális elemek bevezetésével bővíti, majd a sík kongruenciáit tárgyalja. A kongruens leképezések valóságos pontot valóságos pontba, határpontot határpontba, ideális pontot ideális pontba visznek át. A hiperbolikus síkot a mondott elemekkel bővítve, érvényessé válik az a két tétel, hogy két pont egy és csakis egy (összekötő) egyenest, két egyenes pedig, egy és csakis egy (metszési) pontot határoz meg.

SZÁSZ PÁL a dolgozat függelék jellegű utolsó paragrafusában egy euklideszinek nevezett geometriát értelmez a hiperbolikus síkon. Ebben a *„mesterséges euklideszi síkgeometriában“* a Klein—Hilbert-féle körmodellre emlékeztető modellt konstruál. A folytonossági axióma posztulálása esetén a hiperbolikus síkgeometria és ez a körmodell azonos.

Ezután HAJÓS GYÖRGY akadémikus adta elő opponensi véleményét; RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus opponensi véleményét, KÁRTESZI FERENC, a bírálóbizottság titkára olvasta fel; majd a harmadik opponens, VARGA OTTÓ levelező tag fejtette ki a dolgozatra vonatkozó véleményét. Mindhárom opponens kiemeli, hogy a doktori értekezés alapvető jelentőségű feladatot old meg. A nagy gonddal készült dolgozatban a fölmerülő nehézségek áthidalásához szükséges széles tájékozottságon alapuló ötletesség világos előadásmóddal párosul. Mindhárom opponens javasolja a dolgozat doktori értekezésként való elfogadását. HAJÓS GYÖRGY opponensi véleménye kiemeli a dolgozatban megnyilvánuló módszertani tisztaságot, logikai hiánytalanságot és azt a tényt, mely SZÁSZ PÁL számos, e tárgykörbe vágó dolgozataiból is kiviláglik, hogy e tárgykörnek legkiválóbb ismerője hazánkban. Leszögezi, hogy több kritikai megjegyzést fűz ugyan a dolgozathoz, de inkább a dolgozat tökéletesítését célzó tanácsokról, mint hibák és hiányok megállapításáról van szó. Erősebb kifogást csak a dolgozat függelékének egy kifejezésével szemben emel. Ez a 11. § ugyanis nem *„bizonyítja a hiperbolikus síkgeometria és a Klein—Hilbert-féle modell azonosságát“*, mert a folytonossági axióma posztulálása nélkül nem áll az, hogy a végek struktúrája izomorf a valós számokéval, vagy azok egy részstruktúrájával.

RÉDEI LÁSZLÓ opponensi véleményében azt kérdezi, hogy a Hilbert-féle végek alkotta testben a SZÁSZ PÁL által bevezetett elrendezés archimedeszi-e, vagy lehet nem-archimedeszi is.

VARGA OTTÓ opponensi véleménye szerint SZÁSZ PÁL dolgozata a címében ígértnél többet ad. A dolgozat ugyanis a hiperbolikus geometriának egy jól átgondolt, igen egyszerű és elemi felépítését nyújtja. A Hilbelt-féle dolgozat elgondolásainak teljes keresztülvitele a projektív geometrián át vezet a kívánt eredményhez, SZÁSZ PÁL helyesebben a hiperbolikus geometria keretei között marad. Az $E(t)$ távolságfüggvény szerepeltetése és a *„Weierstrass-féle homogén koordináták“* közvetlen bevezetése képezik a dolgozat gerincét.

Ezután SZÁSZ PÁL válaszolt az opponensek bírálatára. Az opponensek kritikai megjegyzéseinek egy részét a dolgozat kiadása alkalmával szándékozik felhasználni. Némelyik megjegyzéssel nem ért egyet. Így például a Klein-féle csoportelméleti szempontot (amelyre VARGA OTTÓ utalt) elemi keretben disszonánsnak véli. RÉDEI LÁSZLÓ kérdésére válaszolva kifejti, hogy a szóban-forgó test lehet nem-archimedeszileg rendezett is. Megköszöni az opponensek fáradozását, különösképpen HAJÓS GYÖRGY részletekbe is beható, éles észrevételeit.

Az opponensek kielégítőnek találták SZÁSZ PÁL válaszát; a külföldön tartózkodó RÉDEI LÁSZLÓ levélben közölte, hogy SZÁSZ PÁL válaszát megkapta és elfogadja.

Ezután a hozzászólásokra került sor. KALMÁR LÁSZLÓ levelező tag több kérdést is tesz fel a dolgozattal kapcsolatban, SZÁSZ PÁL ezekre röviden válaszol. KALMÁR LÁSZLÓ egy további kérdésére, mely az ún. köraxiómával függ össze, felszólalásában HAJÓS GYÖRGY is kitér és megjegyzi, hogy az a dolgozatban csak a modellekkel kapcsolatban szerepel (s teljesül, mert a szóban forgó testben minden pozitív elemnek van négyzetgyöke). KALMÁR LÁSZLÓ a dolgozat keretein túlmenő kérdést is tett fel. SZÁSZ PÁL az erre adandó választ további megfontolást igénylőnek mondta.

A vita során adott válaszokat a jelenlevők kielégítőnek találták. Ezután a bíráló bizottság határozathozatalra vonult vissza.

A bíráló bizottság határozatában megállapította, hogy *„a disszertáció tárgya jelentős, mert hiszen a folytonossági axiómát nem posztuláló hiperbolikus síkgeometria önmagában való felépítésével foglalkozik és idegen elemeket nem kever a tárgyba, még olyan mértékben sem ahogyan* HILBERT *e vizsgálatainál a projektív geometriára támaszkodott, és ahogyan az analitikus geometriához a trigonometrián át szokás jutni. A disszertáció rendkívül gondos munka eredménye, előadásmódja nagyon világos és áttekinthető.*

A disszertáció méltán sorakozik SZÁSZ PÁL e témakörbe vágó számos korábbi dolgozata mellé, amelyekkel megérdemelten szerzett nevet magának ezen a könnyűnek korántsem mondható területen. SZÁSZ PÁL világviszonylatban is elismert folytatója azoknak a vizsgálatoknak, amelyek hazánkban nagy múltra tekintenek vissza és BOLYAI JÁNOS korszakalkotó munkásságához kapcsolódnak.

Ennek alapján a bizottság egyhangúlag javasolja a *Tudományos Minősítő Bizottságnak,* hogy SZÁSZ PÁLt nyilvánítsa a matematikai tudományok doktorává.

Kárteszi Ferenc
a matematikai tudományok kandidátusa

Beszámoló T. Sós Vera kandidátusi értekezésének nyilvános vitájáról

Az értekezés címe: *„A lánctörtek egy geometriai interpretációjáról és annak alkalmazásáról a diofantikus approximáció elméletében".* A dolgozat a lánctörtelmélet új, eredeti felépítését, a diofantoszi approximáció egy szemléletes módszerét és az ezzel elért új eredményeket tartalmazza. A vitát a *Tudományos Minősítő Bizottság* 1957. június 20-án rendezte meg a *Bolyai János Matematikai Társulat* helyiségében. HAJÓS GYÖRGY akadémikus volt az értekezés vitájának elnöke, aspiránsvezető FEJÉR LIPÓT akadémikus, a disszertáció opponensei RÉNYI ALFRÉD akadémikus és SURÁNYI JÁNOS a matematikai tudományok doktora volt.

T. SÓS VERA előadta értekezésének tartalmát. Egy 0 pontból kiindulva felmérte az egységkerületű kör peremére pozitív irányba egy $0 < \alpha < 1$ hosszúságú körív $1, 2, \ldots, n, \ldots$ számú többszöröseit. Először azt bizonyítja be, hogy akárhány pontot is mért fel egymás után az 0-ból kiindulva, minden n-re, a peremen adódó diszjunkt ívek között legfeljebb három különböző hosszúságú lehet. Az n növekedésével a diszjunkt ívek hossza egyre kisebb lesz, ha α irracionális szám. Az egymástól különböző diszjunkt ívek hossza az 0-ból kiinduló két ív hossza és ezek összege. Ezzel nagyon szemléletes módon bizonyítást nyert H. STEINHAUS egy sejtése, melyet többen is bebizonyítottak.

A továbbiakban az előadó kapcsolatot ad meg az α (irracionális) szám szabályos lánctörtkifejtésének melléknevezői, közelítő törtjei és a dolgozatban definiált ún. „0-val szomszédos" multiplumok között. Megmutatja e geometriai interpretáció alkalmazhatóságát, amennyiben pl. ezen az úton bizonyítja be S. HARTMAN egy tételét, amely oly irracionális α szám körön felmért többszöröseinek egy tulajdonságát adja meg, amelynek reguláris lánctörtkifejtésében fellépő lánctörtjegyek korlátlanok.

Az értekezés legkiemelkedőbb része az, amely A. OSTROWSKI egy 1921-ben megjelent dolgozatában felvetett, eddig még meg nem oldott kérdésére válaszol:

Jelölje $(n\alpha)$ az α szám n-szeresének nem-negatív, 1-nél kisebb törtrészét. OSTROWSKI bebizonyítja, hogy nincs olyan irracionális α szám, melyre $|C_\alpha(N)| = \left|\sum_{n=1}^{N}(n\alpha) - \frac{N}{2}\right|$ korlátos marad, ha $N \to \infty$. Ugyanekkor felveti a kérdést, lehet-e oly α irracionális számot találni, amelyre $C_\alpha(N)$ egyik oldalról korlátos legyen. T. SÓS VERA konstruál olyan irracionális számot, melyre $C_\alpha(N) > -k > -\infty$ és $k > 0$, ezzel a fenti kérdésre feleletet ad. Ezt úgy nyeri, hogy a $\sum_{n=1}^{N}(n\alpha) - \frac{N}{2}$-et az „0-val szomszédos" ívek hosszai bizonyos többszöröseinek összegével fejezi ki. Az α számot a reguláris lánctörtkifejtésének jegyeivel adja meg a következő módon: $a_{2k+1} = 1, a_{2k} = k^3$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ügyes becsléssel megmutatja a fenti eredményt.

A fenti felépítéssel nyerhető további szép eredménye A. HINCSIN következő tételéhez kapcsolódik: Tetszőleges α valós számhoz található olyan β valós szám, melynél minden $x > 0$ és y egészre az $x|\alpha x - \beta - y| > c$, ahol a c konstans nem függ az α, β, x, y értékek egyikétől sem. A c konstansra a legnagyobb értéket eddig A. V. PRASAD adta meg, ő alsó korlátként $c = \frac{3}{32}$-et kapott. T. SÓS VERÁnak ennél nagyobb korlátot sikerült megadni: $c = \frac{2}{15}$. Ezt azzal éri el, hogy a β számot az $n\alpha$ $(n = 0, 1, 2\ldots)$ sorozat alkotta azon diszjunkt ívekkel hozza kapcsolatba, melyek β-t közrefogják. A lánctörtnevezők fenti geometriai interpretációjának inhomogén esetre való kiterjesztése útján valamint régebbi és újabb segédtételeivel sikerült megkapnia az eredményt. Ugyancsak megad c értékére egy felső korlátot is.

A tézisek előadása után FEJÉR LIPÓT akadémikus, aspiránsvezető történeti megjegyzést fűz a dolgozathoz. Megemlíti hogy az $n\alpha$ sorozat alkotta ponteloszlás egyenletes. Az egyenletes eloszlás fogalmát már L. DIRICHLET után H. BOHR kezdte tisztázni még WEYL előtt. RÉNYI ALFRÉD akadémikus opponensi véleményében kiemeli a dolgozat sok ötletet tartalmazó és szemléletes voltát. Ugyanez a véleménye SURÁNYI JÁNOS opponensnek is. A dolgozat módszerei még sok reményre jogosítanak a lánctörtelmélet nehezen hozzáférhető problémáinak megoldását illetően.

A vita során RÉNYI ALFRÉD opponens többek között felveti azt a kérdést, hogy vajon $|C_\alpha(N)|>0$ semmilyen α-ra nem állhat-e fenn, s kérdezi, mi a $C_\alpha(N)$-ek alsó határa. T. SÓS VERA válaszában megjegyzi, hogy $C_\alpha(N)>-\varepsilon$ (tetszőleges kis pozitív ε esetén) már bizonyos α,β-ra igaz, tehát a $C_\alpha(N)$ számok alsó határa $=0$, tehát $C_\alpha(N)>0$ nem lehetséges.

Végül a bírálóbizottság egyhangúlag javasolja a *Tudományos minősítő Bizottság*nak, hogy T. SÓS VERÁt nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

Seres Iván
a matematikai tudományok kandidátusa

Rényi Kató kandidátusi értekezésének nyilvános vitája

A vitát a *Tudományos Minősítő Bizottság* 1957. június 28-án rendezte meg Budapesten, a *Bolyai János Matematikai Társulat* helyiségében. A jelölt három évig volt aspiráns TURÁN PÁL akadémikus vezetése mellett; disszertációjának címe: „PÓLYA GYÖRGY *egy sejtéséről*". Az értekezés opponensei ERDŐS PÁL és KALMÁR LÁSZLÓ, az MTA lev. tagjai voltak; a bírálóbizottság elnökéül a TMB FEJÉR LIPÓT akadémikust kérte fel.

Az elnök megnyitója, a jelölt eddigi tudományos munkásságának ismertetése és az aspiránsvezetői vélemény felolvasása után RÉNYI KATÓ előadta disszertációjának téziseit.

A 45 oldal terjedelmű dolgozat a komplex változós függvénytan Weierstrass-elméletének ún. Hadamard-féle problémaköréből meríti tárgyát, mely annak vizsgálatával foglalkozik, milyen kapcsolat van egy analitikus függvény viselkedése és egy ezt előállító hatványsor együtthatóira vonatkozó bizonyos feltételek között. Az utóbbiak közül különösen nevezetes az ún. Hadamard-féle és a (gyengébb) Fabry-féle hézagfeltétel, melyekből következik, hogy az összegfüggvény a konvergenciakörön túl analitikusan nem folytatható; az említett két tételből sarjadt a hézagos (lakunáris) sorok kb. hatvan éves elmélete, melynek kiépítéséhez bel- és külföldön élő magyar matematikusok is kiemelkedően hozzájárultak.

A dolgozat főeredménye mármost PÓLYA 1943-ban közölt következő sejtésének bizonyítása: Ha egy $f(z)$ transzcendens egész függvénynek egy a kifejtési helyhez tartozó hatványsora eleget tesz a Fabry-féle hézagfeltételnek (röviden: Fabry-hézagos), akkor semmilyen más ponthoz tartozó hatványsora nem rendelkezhet ezzel a tulajdonsággal. (Mint nemrég kiderült, A. O. GELFOND szemináriumán — PÓLYÁtól függetlenül — szintén felvetette ezt a sejtést anélkül, hogy akár ő, akár munkatársai bebizonyították volna.) Véges konvergenciasugarú hatványsorokra a megfelelő állítás FABRY tételének közvetlen következménye. ERDŐS néhány évvel ezelőtt megmutatta, hogy a Pólya-sejtés helytálló, ha az a körüli sorfejtésről lényegesen többet: Hadamard-hézagosságot tételezünk fel; Fabry-hézagok esetén azonban e módszer nem alkalmazható.

A RÉNYI KATÓ értekezésében közölt gondolatmenet, mely két lényegében PÓLYÁtól származó segédtételre támaszkodik, megadja egyúttal a következő élesebb állítás igazolását is: Legyen $f(z)$ transzcendens egész függvény. Ha $a \neq b$, akkor

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{Z_a(n) + Z_b(n)}{n} \leq 1,$$

ahol $Z_a(n)$ és $Z_b(n)$ az $f(z)$ függvény a-hoz, ill. b-hez tartozó hatványsorának első $n+1$ együtthatója közül az eltűnők számát jelenti. — Mivel periodikus függvény minden tekintetben ugyanúgy viselkedik a független változó két olyan értékére, melyek a periódus egész számú többszörösében különböznek egymástól, természetes módon adódik az előbbi tételből egy becslés periodikus egész függvény hatványsor-kifejtésében előforduló 0 együtthatók indexsorozatának alsó sűrűségére. — Az első segédtételnek egy ERDŐS PÁLtól és RÉNYI ALFRÉDtól származó élesítése alapján lehetővé válik az említett tételek továbbfejlesztése végesrendű, speciálisan végesrendű és exponenciális típusú egész függvényekre vonatkozólag; a periodikus függvények hatványsor-együtthatóira adott becslés átvihető formális Hermite-kifejtésekre is. — A következő fejezet a fentieket egy távolabb eső területen, mégpedig a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n = b_k \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

végtelen lineáris egyenletrendszer megoldásainak aszimptotikájára alkalmazza. Minthogy a kapott eredmény ellentmondásban van egy BOREL által adott megoldás-konstrukcióval, a szerző az egyik függelékben ellenpéldával igazolja az említett Borel-féle eljárás helytelen voltát, megjegyezve, hogy a Borel-módszer hiányosságára már PÓLYA is rámutatott. — Az utolsó tétel azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy bizonyos korlátok között tetszőlegesen előírható-e egy transzcendens egész függvény két különböző hely körüli hatványsora egyesített együttható-sorozatában az eltűnő tagok alsó és felső indexsűrűsége.

Az értekezés eredményeinek ismertetését az opponensi vélemények felolvasása követte. — ERDŐS PÁL és KALMÁR LÁSZLÓ bírálata egyaránt megállapítja, hogy PÓLYA sejtésének bizonyítása, mellyel a világ különböző helyein kiváló matematikusok foglalkoztak siker nélkül, figyelemre méltó teljesítmény; továbbá, hogy a szerző érdemét nem csökkenti meggondolásainak egyszerűsége, s az, hogy a fő segédeszközöket maga PÓLYA is ismerte. Ugyancsak mindketten kiemelik, hogy a szerző nagy gondot fordított a megírás módjára. — KALMÁR LÁSZLÓ fogyatékosságként említi, hogy a jelölt nem vizsgálja meg a tárgyalt tételek és módszerek közelfekvő általánosításait, sőt még problémaként sem veti fel, meddig lehet azokat általánosítani; ilyen természetesen adódó kérdések pl., hogy a periodicitás milyen általánosabb függvényegyenlettel helyettesíthető anélkül, hogy érdektelenül bonyolult feltételekhez jutnánk, hogy a Hermite-sorokra vonatkozó tétel milyen más ortogonális sorokra vihető át stb. Felsorol még néhány elírást és kisebb jelentőségű stiláris kifogásokat. — ERDŐS PÁL szintén úgy véli, hogy érdemes lett volna néhány, az eredményekhez szorosan csatlakozó kérdést is megvizsgálni, különösen az utolsó fejezettel kapcsolatban.

RÉNYI KATÓ válaszában köszönetet mondott az opponensek kritikai megjegyzéseiért, azokkal lényegileg egyetértett. Elismerte, hogy helyes lett volna foglalkoznia az opponensek által felvetett és más nyílt problémákkal, bár az az utolsó tétel élesítése nehéznek látszik.

A jelölt válaszának elfogadása után a hozzászólásokra került a sor. FEJÉR LIPÓT felhívta a figyelmet arra, hogy a *Math. Annalen*-ben 1908-ban közölt dolgozatának egyik tétele olyan hatványsorokra vonatkozik, melyeknél a kitevők reciprokaiból álló sor konvergens. Erdemesnek tartaná annak megvizsgálását, hogy az utóbbi kikötést a (gyengébb) Fabry-féle hézagfeltétellel helyettesítve érvényben marad-e a tétel állítása, hogy ti. az előállított függvénynek — amennyiben transzcendens egész függvény — nincs Picard-féle kivételes értéke; másfelől megkérdezte, mennyiben lehet továbbmenni a diszszertáció problémakörében, ha fordítva: Fabry-hézagosság helyett az ő tételének premisszájával élünk. Az elnökön kívül a bírálóbizottság tagjai közül SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA és CSÁSZÁR ÁKOS intézett kérdéseket a jelölthöz.

RÉNYI KATÓ FEJÉR professzornak válaszolva kiemelte, hogy értekezésének bevezetésében részletesen foglalkozott a szóbanforgó tétellel s az ehhez kapcsolódó nyílt problémákkal; éppen a hozzászólásban elsőnek felvetett kérdést tartja a legérdekesebbnek. — Miután a többi kérdésre is kielégítő választ adott, a bizottság határozathozatalra vonult vissza.

A vita végén felolvasott határozat megállapítja, hogy a disszertáció eredményei értékes módon előbbrevitték a komplex függvénytan Cauchy—Hadamard-féle problémakörébe vágó ismereteinket. „*A Pólya-féle probléma érdekességét mutatja, hogy tőle függetlenül később* A. O. GELFAND *is felvetette, nehézségét pedig az, hogy éveken át több elismert matematikus hiába próbálta megoldani.*" Az értekezés meggondolásai meglepően egyszerűek, a felépítés jól tagolt, a stílus tömörsége ellenére is világos, a szerző nagy gondot fordított a könnyen érthetőségre. A disszertációval RÉNYI KATÓ nyilvánvaló jelét adta önálló tudományos kutatásra való rátermettségének. Mindezek alapján a bizottság egyhangúlag javasolja a *Tudományos Minősítő Bizottság*nak, hogy RÉNYI KATÓT nyilvánítsa a matematikai tudományok kandidátusává.

Mikolás Miklós
a matematikai tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: Alpár László

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1957. X. 5. — Terjedelem: 13,25 (A/5) ív, 2 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 57-3871 Felelős vezető: Vincze György

Ára: 28,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VIII. KÖTET 2. SZÁM

1958

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

VIII. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

A TELEFON-FORGALOM ELMÉLETÉNEK NÉHÁNY VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI KÉRDÉSÉRŐL

TAKÁCS LAJOS

A. K. Erlang születésének 80-adik évfordulójára, 1958. január 1-ére ajánlva

Bevezetés

Tekintsük egy telefonközpont működését a $0 \leqq t < \infty$ időközben. Tegyük fel, hogy a $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ véletlen időpontokban hívások érkeznek a központba $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots)$. Egyelőre a τ_1 tetszőleges pozitív valószínűségű lehet. A $\tau_{n+1} - \tau_n \, (n = 1, 2, 3, \ldots)$ időkülönbségekről feltesszük, hogy egyforma eloszlású, kölcsönösen független, pozitív valószínűségi változók, amelyek függetlenek a τ_1 változótól is. Jelölje közös eloszlásfüggvényüket $F(x)$, azaz $\mathbf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leqq x\} = F(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Legyen továbbá

(1) $$\alpha = \int_0^\infty x \, dF(x)$$

és

(2) $$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \, dF(x).$$

Megjegyezzük, hogy az a szokásos feltevés, hogy a hívások időpontjainak $\{\tau_n\}$ sorozata λ eseménysűrűségű *Poisson-folyamatot* alkot, a fenti feltevésnek azt a speciális esetét képezi, midőn $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \geqq 0$ és τ_1 eloszlásfüggvénye is $F(x)$. A fent említett általános feltételeknek megfelelő $\{\tau_n\}$ sorozatot a következőkben *rekurrens folyamatnak* fogjuk nevezni. Ha speciálisan fennáll, hogy $\alpha < \infty$ és τ_1 eloszlásfüggvénye

$$F^*(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^x [1 - F(y)] \, dy, & \text{ha} \quad x \geqq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

akkor a $\{\tau_n\}$ sorozatot *stacionárius rekurrens folyamatnak* fogjuk nevezni. Eszerint a Poisson-folyamat a stacionárius rekurrens folyamat speciális eseteként fogható fel. Megemlítjük még a stacionárius rekurrens folyamatok egy nevezetes tulajdonságát. Ha $\zeta(t)$ valószínűségi változó jelöli a t időpontnak a legközelebbi utána következő hívástól vett távolságát, akkor fennáll, hogy $\mathbf{P}\{\zeta(t) \leqq x\} = F^*(x)$ valamennyi t értékre.

A következőkben háromféle telefon-rendszer vizsgálatával foglalkozunk:

I. A veszteségi rendszer. A központban m vonal áll a hívások rendelkezésére: Ha egy hívás beérkezési időpontjában van szabad vonal, akkor létrejön kapcsolat (beszélgetés). Ha a hívás pillanatában valamennyi vonal foglalt, akkor a hívás minden következmény nélkül elvész.

II. A várakozási rendszer. A központban m vonal áll a hívások rendelkezésére. Ha egy hívás beérkezési időpontjában van szabad vonal, akkor létrejön kapcsolat. Ha a hívás pillanatában valamennyi vonal foglalt, akkor a hívás mindaddig várakozik, ameddig szabad vonal nem áll rendelkezésére és csak ezután valósul meg a kapcsolat.

III. Az egyesített várakozási és veszteségi rendszer. A központban m vonal áll a hívások rendelkezésére és a várakozó hívások maximális száma w lehet. Ha egy hívás beérkezési időpontjában van szabad vonal, akkor létrejön kapcsolat. Ha a hívás pillanatában valamennyi vonal foglalt és a várakozó hívások száma kisebb, mint w, akkor a hívás mindaddig várakozik, amíg szabad vonal nem áll rendelkezésre. Ha az összes vonal foglalt és a várakozó hívások száma w, akkor a hívás minden következmény nélkül elvész.

A következőkben a fent említett három telefon-rendszert röviden I., II. és III. modellnek nevezzük. Nyilvánvalóan a III. modell a legáltalánosabb és az I. modell ennek az a speciális esete, midőn $w=0$ és a II. modell pedig a $w=\infty$ esetnek felel meg.

Valamennyi esetben feltesszük, hogy a kapcsolatok időtartamai, az úgynevezett tartási idők, egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók, amelyek függetlenek a $\{\tau_n\}$ időpontoktól is. Közös eloszlásfüggvényük legyen

$$H(x)=\begin{cases} 1-e^{-\mu x}, & \text{ha} \quad x\geqq 0, \\ 0 \quad , & \text{ha} \quad x<0. \end{cases} \tag{3}$$

A telefon-forgalom elméletében a beszélgetési idők eloszlására vonatkozóan általában a fenti (3) feltevéssel szokás élni. Mindazonáltal érdekes lenne általánosabb $H(x)$ eloszlásfüggvények esetét is vizsgálat tárgyává tenni, amely esetre vonatkozóan eddig nem sok eredménnyel rendelkezünk.

A fenti három rendszer egyikénél sem teszünk kikötést arra vonatkozóan, hogy a szabad vonalak melyikén jön létre a kapcsolat. Ennek semmiféle szerepe sem lesz tárgyalásunkban és ezért bármilyen kiszolgálási rendszer megengedhető. Általában azzal a feltevéssel sem élünk, hogy a várakozó hívások érkezési sorrendben lesznek kiszolgálva. Egyedül a várakozási idő eloszlásának meghatározásánál tesszük fel, hogy a kapcsolások érkezési sorrendben történnek.

Jelölések. Jelölje mindhárom esetben $\eta(t)$ a t időpontban folyamatban levő kapcsolatok (foglalt vonalak) és várakozó hívások együttes számát. Általában megengedjük, hogy $\eta(0)$ tetszőleges olyan nem-negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó legyen, amely független a hívások időpontjaitól és a kapcsolatok időtartamaitól.

Az I. modellnél $\eta(t) \leqq m$ és $\eta(t)$ a foglalt vonalak számát jelöli. A II. modellnél, ha $\eta(t) \leqq m$, akkor $\eta(t)$ vonal foglalt és nincs várakozó hívás, míg ha $\eta(t) > m$, akkor m vonal foglalt és $\eta(t) - m$ hívás várakozik. A III. modellnél $\eta(t) \leqq m + w$. Ha $\eta(t) \leqq m$, akkor $\eta(t)$ vonal foglalt és nincs várakozó hívás, ellenben, ha $m < \eta(t) \leqq m + w$, akkor mind az m vonal foglalt és $\eta(t) - m$ hívás várakozik.

Vezessük be továbbá az $\eta_n = \eta(\tau_n - 0)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ valószínűségi változókat. Az η_n jelöli az n-edik hívás érkezési időpontjában a foglalt vonalak és várakozó hívások együttes számát.

Megállapodunk továbbá abban, hogy E_k állapotról beszélünk, ha a foglalt vonalak és várakozó hívások együttes száma k.

Végül jelölje $\zeta(t)$ a t időpontnak a közvetlen utána következő hívástól vett távolságát. Nyilvánvalóan $\zeta(0) = \tau_1$.

Könnyen látható, hogy az $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ $(0 \leqq t < \infty)$ változópárral jellemzett folyamat Markov-féle. Megjegyezzük azonban, hogy a Markov-jelleg csakis abban az esetben érvényes, ha a beszélgetési időtartamok eloszlása a (3) alatti $H(x)$ függvény.

Az eredmények összefoglalása. Dolgozatunkban a telefon-forgalomra vonatkozóan a korábban részletezett következő feltevésekkel élünk: a hívások időpontjainak $\{\tau_n\}$ sorozata rekurrens folyamat, a központ az I., II., illetve III. modell szerint működik, a kapcsolatok időtartamai egyforma eloszlású független valószínűségi változók a (3) alatti eloszlásfüggvénnyel. A kezdeti állapotra, amelyet az $\eta(0)$ és τ_1 változók jellemeznek, először semmilyen megszorítást sem teszünk és megvizsgáljuk az $\{\eta_n\}$ és az $\{\eta(t)\}$ változósorozat határeloszlását, midőn $n \to \infty$, illetve $t \to \infty$. Ezután az $\{\eta(0), \tau_1\}$ változó-pár eloszlásának speciális megválasztásával értelmezzük a stacionárius $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ folyamat fogalmát és erre nézve meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy egy hívás elvész, illetve a hívások várakozási idejének eloszlásfüggvényét abban az esetben, ha a hívások kiszolgálása érkezési sorrendben történik.

Részletesebben szólva: Kimutatjuk, hogy a $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ határértékek léteznek és függetlenek a kezdeti állapottól. Az I. és III. modell esetén $\{P_k\}$ mindig valószínűségeloszlás, a II. modell esetén csak akkor, ha $m\alpha\mu > 1$. Mindhárom modell esetén explicit alakban meghatározzuk a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlást. Ezután megmutatjuk, hogy ha $\alpha < \infty$ és $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény, akkor a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ határértékek léteznek és függetlenek a kezdeti állapottól. Az I. és III. modell esetén $\{P_k^*\}$ mindig valószínűségeloszlás, a II. modell esetén csak akkor, ha $m\alpha\mu>1$ feltétel is teljesül. Mindhárom esetben megadjuk, hogy a P_k^* valószínűségek miként fejezhetők ki a P_k valószínűségek segítségével. Ezt követően a stacionárius $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ folyamat fogalmát definiáljuk. Erre nézve minden t időpontban érvényes, hogy $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ és $\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\}=F^*(x)$. Meghatározzuk stacionárius folyamat esetében egy tetszőleges hívás várakozási idejének $G^*(x)$ eloszlásfüggvényét a II. és III. modell esetén, és egy tetszőleges hívás elveszésének a valószínűségét az I. és III. modell esetén. Továbbá az I. modell esetét az $m=\infty$ határesetben tárgyaljuk és ebben az esetben tárgyalásunkat kiterjesztjük a (3)-nál általánosabb $H(x)$ eloszlásfüggvényekre is. Ezenkívül néhány rokon kérdésről is teszünk említést.

A szakirodalom áttekintése. Az eddigiekben mind a három modellt részletesen tárgyalták abban a speciális esetben, midőn a $\{\tau_n\}$ sorozat λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat. Ebben az esetben a $\{P_k\}$ és $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás megegyezik egymással. Az említett Poisson-folyamat esetén a $\{P_k^*\}$ eloszlást az I. modellre A. K. ERLANG [9], a II. modellre A. K. ERLANG [9], E. C. MOLINA [32] és A. N. KOLMOGOROV [23], a III. modellre A. K. ERLANG (vö. A. JENSEN [5] pp. 84—90) és L. KOSTEN [26] határozta meg. (Vö. még TH. FRY [15] könyvét.) Azt az esetet, midőn $\{\tau_n\}$ a fentiekben értelmezett rekurrens folyamat, régebben nem vizsgálták meg ilyen részletességgel. Az I. modellt korábban C. PALM [35] és F. POLLACZEK [38] tárgyalták, de ők csak a veszteség valószínűségét (P_m-et) határozták meg. A II. esetet korábban D. G. KENDALL [21] vizsgálta. KENDALL megadta a $\{P_k\}$ eloszlás létezésének feltételét és megmutatta, hogy a $P_m, P_{m+1}, P_{m+2}, \ldots$ valószínűségek geometriai sort alkotnak. Továbbá meghatározta a várakozási idő eloszlásfüggvényét egy ismeretlen paraméter erejéig. Szerző nem régi [52], [54], [55] munkáiban mind a három modell esetében meghatározta a $\{P_k\}$ és $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlások explicit alakját. Továbbá J. W. COHEN [6] megjelenő dolgozatában ugyancsak meghatározta az I. modell esetén a $\{P_k\}$ és $\{P_k^*\}$ eloszlások explicit alakját. Jelen dolgozat legnagyobb része szerző [52], [53], [54], [55] munkáinak eredményeit tartalmazza.

MEGJEGYZÉS. A fent vázolt I. és II. modell esetét $m=1$ vonal esetén tetszőleges $H(x)$ eloszlásfüggvényre is részletesen megvizsgálták. Ez az eset azonban a telefon-forgalom szempontjából nem bír gyakorlati jelentőséggel. Az I. modell $m=1$ esetben a Geiger—Müller számlálóval történő részecskeszámlálásnál lép fel (vö. [49]). A II. modell $m=1$ esetben várakozási idő problémák tárgyalásánál lép fel. Azt az esetet, midőn $\{\tau_n\}$ Poisson-folyamat,

F. POLLACZEK [36], A. J. HINCSIN [16] és mások tárgyalták (vö. még [48]), azt az esetet pedig, midőn $\{\tau_n\}$ rekurrens folyamat, D. V. LINDLEY [30], W. L. SMITH [42], D. M. G. WISHART [60] és mások tárgyalták. A II. modellt $m > 1$ esetén, $\{\tau_n\}$ Poisson-folyamatra és tetszőleges $H(x)$-re várakozási idő problémákkal kapcsolatban F. POLLACZEK [36], D. G. KENDALL [21], J. KIEFER és J. WOLFOWITZ [22] és mások tárgyalták. Továbbá az I. modellt $\{\tau_n\}$ Poisson-folyamat esetére és tetszőleges $H(x)$-re F. POLLACZEK [37], C. PALM [34], L. KOSTEN [25], B. A. SZEVASZTJANOV [41] és mások tárgyalták.

További jelölések. Előrebocsátjuk, hogy dolgozatunk folyamán mindvégig használni fogjuk a következő jelöléseket:

$$\varphi_j = \varphi(j\mu) = \int_0^\infty e^{-j\mu x} dF(x) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

és

$$C_j = \prod_{i=1}^{j} \frac{\varphi_i}{1-\varphi_i} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

ahol $C_0 = 1$. Továbbá legyen

$$\mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k(t).$$

Végül legyen a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentuma

$$B_r = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k$$

és a $\{P_k^*\}$ eloszlás r-edik binomiális momentuma

$$B_r^* = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k^*.$$

Köszönetnyilvánítás. Köszönetemet fejezem ki J. W. COHEN (Delft), A. JENSEN (Koppenhága) és R. SYSKI (Harrow-on-the-Hill) uraknak, akik számos szakirodalom megadásával, különlenyomatok és kéziratok rendelkezésemre bocsátásával nagy segítséget nyújtottak jelen cikk megírásához.

1. §. A $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

I. A VESZTESÉGI RENDSZER

1. TÉTEL: *A $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás mindig létezik és független az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$P_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r \qquad (k=0, 1, \ldots, m), \tag{6}$$

ahol

$$B_r = C_r \frac{\sum_{j=r}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}} \qquad (r=0, 1, \ldots, m) \tag{7}$$

a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentuma.

BIZONYÍTÁS: Mindenekelőtt észrevesszük, hogy az $\{\eta_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ valószínűségi változók sorozata homogén Markov-láncot alkot a $\mathbf{P}\{\eta_{n+1}=k \mid \eta_n=j\}=p_{jk}$ átmenet-valószínűségekkel, ahol

$$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\, dF(x) \qquad (j=0, 1, \ldots, m-1) \tag{8}$$

és

$$p_{m,k} = p_{m-1,k}. \tag{9}$$

Ha a hívások közötti $\tau_{n+1}-\tau_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ időtartamok ugyanazon x állandóval egyenlők, akkor ezen feltétel mellett jelölje $\pi_{jk}(x)$ az átmenet-valószínűségeket. Ekkor az általános esetben

$$p_{jk} = \int_0^\infty \pi_{jk}(x)\, dF(x).$$

Könnyen belátható, hogy az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc irreducibilis és nem periodikus. Mivel az állapotok száma véges, tehát ergodikus is. Következőleg a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ $(k=0, 1, \ldots, m)$ határ-valószínűségek léteznek és függetlenek az η_1 változó eloszlásától és így természetesen az $\{\eta(0), \tau_1\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától is. A $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás egyértelműen meghatározható az alábbi egyenletrendszer megoldásával

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{m} p_{jk} P_j \qquad (k=0, 1, \ldots, m), \tag{10}$$

ahol

$$\sum_{k=0}^{m} P_k = 1. \tag{11}$$

(Vö. W. FELLER [10] p. 325.)

A (10) egyenletrendszer megoldására vezessük be az

$$U(z)=\sum_{k=0}^{m} P_k z^k \tag{12}$$

generátorfüggvényt. A (10) egyenletek alapján az $U(z)$ generátorfüggvényre a következő integrálegyenlet adódik:

$$\begin{aligned} U(z)=&\int_0^\infty (1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,dF(x)+\\ &+(1-z)P_m\int_0^\infty e^{-\mu x}(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})^m\,dF(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Ezután jelölje B_r $(r=0,1,\ldots,m)$ a $\{P_k\}$ eloszlás r-edik binomiális momentumát, azaz legyen

$$B_r=\sum_{k=r}^{m}\binom{k}{r}P_k. \tag{14}$$

Nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$B_r=\frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1}. \tag{15}$$

Mint látni fogjuk, a B_r $(r=0,1,\ldots,m)$ binomiális momentumok egyértelműen meghatározzák a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlást és így a feladat visszavezethető az ismeretlen B_r-ek meghatározására. (11) szerint $B_0=1$. A (13) z-szerinti j-szeres differenciálásával és $z=1$ helyettesítéssel pedig azt kapjuk, hogy

$$B_j=\left[B_j+B_{j-1}-\binom{m}{j-1}P_m\right]\varphi_j, \qquad (j=1,2,\ldots,m),$$

vagyis

$$B_j=\frac{\varphi_j}{1-\varphi_j}\left[B_{j-1}-\binom{m}{j-1}B_m\right], \qquad (j=1,2,\ldots,m), \tag{16}$$

mivel hogy (14) szerint $P_m=B_m$.

Ha B_m-et először adottnak tételezzük fel, akkor (16) a B_j $(j=1,2,\ldots,m)$ ismeretlenekre elsőrendű lineáris differenciaegyenlet, amely könnyen megoldható (vö. CH. JORDAN [20] p. 583). Osszuk el a (16) egyenlet mindkét oldalát az (5) alatt értelmezett C_j mennyiséggel, akkor azt nyerjük, hogy

$$\frac{B_j}{C_j}=\frac{B_{j-1}}{C_{j-1}}-\binom{m}{j-1}\frac{B_m}{C_{j-1}} \qquad (j=1,2,\ldots,m).$$

Ezen egyenleteket $j=1,2,\ldots,r$ értékekre összegezve

$$\frac{B_r}{C_r}=1-B_m\sum_{j=0}^{r-1}\binom{m}{j}\frac{1}{C_j},$$

ugyanis $B_0 = C_0 = 1$. Ha most a fenti egyenletben az $r = m$, akkor innen B_m is meghatározható és azt nyerjük, hogy

$$B_m = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}.$$

Így végül is

$$B_r = C_r \frac{\sum_{j=r}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{17}$$

amivel a (7) képletet igazoltuk.

A B_r $(r = 0, 1, \ldots, m)$ binomiális momentumok ismeretében a P_k valószínűségek közvetlenül felírhatók JORDAN KÁROLY alábbi képlete segítségével

$$P_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r, \tag{18}$$

amivel a (6) állítást is igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy a (18) képlet a B_r binomiális momentum (14) definíciójából is következik. Szorozzuk meg ugyanis (14) mindkét oldalát $(-1)^{r-k}\binom{r}{k}$-val és összegezzük a kapott egyenleteket $r = k, k+1, \ldots, m$-re, akkor tekintetbe véve, hogy

$$\sum_{r=k}^{\nu} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{\nu}{r} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad \nu = k, \\ 0, & \text{ha} \quad \nu \neq k, \end{cases}$$

megkapjuk (18)-at.

(18) egy más bizonyítása a Taylor-képlet felhasználásával történik. Vegyük tekintetbe, hogy (12) szerint

$$P_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k U(z)}{dz^k} \right)_{z=0} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

és mint említettük

$$B_r = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r} \right)_{z=1} \qquad (r = 0, 1, \ldots, m).$$

Ha $U(z)$ deriváltjai a $z = 1$ helyen ismeretesek, akkor ezek segítségével $U(z)$ deriváltjai a $z = 0$ helyen is kifejezhetők. Ugyanis a Taylor-képlet szerint

$$U(z) = \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r} \right)_{z=1} (z-1)^r$$

és innen

$$\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0} = \sum_{r=k}^{m} \frac{(-1)^{r-k}}{(r-k)!} \left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1},$$

ahonnan (18) már egyszerűen következik.

II. A VÁRAKOZÁSI RENDSZER

2. TÉTEL: *Ha* $m\alpha\mu > 1$, *akkor a* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *határeloszlás létezik és független az* $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ *változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$(19)\qquad P_k = \begin{cases} \sum\limits_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} U_r & (k = 0, 1, \ldots, m-1) \\ A\,\omega^{k-m} & (k = m, m+1, \ldots), \end{cases}$$

ahol ω *az*

$$(20)\qquad \int_0^\infty e^{-m\mu(1-\omega)x}\, dF(x) = \omega$$

egyenletnek egyetlen, a $(0, 1)$ *intervallumba eső valós gyöke és*

$$(21)\qquad U_r = A C_r \sum_{j=r+1}^{m} \frac{\binom{m}{j}}{C_j (1-\varphi_j)} \left[\frac{m(1-\varphi_j) - j}{m(1-\omega) - j}\right],$$

ahol

$$(22)\qquad A = \frac{1}{\dfrac{1}{1-\omega} + \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\binom{m}{j}}{C_j (1-\varphi_j)} \left[\dfrac{m(1-\varphi_j) - j}{m(1-\omega) - j}\right]}.$$

A $\{P_k\}$ *valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentumára,*

$$(23)\qquad B_r = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k$$

-ra fennáll, hogy

$$(24)\qquad B_r = \begin{cases} U_r + \dfrac{A}{1-\omega} \sum\limits_{j=0}^{r} \binom{m}{j} \left(\dfrac{\omega}{1-\omega}\right)^{r-j}, & \text{ha } r < m, \\ A \dfrac{\omega^{r-m}}{(1-\omega)^{r+1}}, & \text{ha } r \geqq m. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy ha $m\alpha\mu \leqq 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ az $\eta(0)$ változó kezdeti eloszlásától függetlenül. Ennek a ténynek bizonyításával azonban nem foglalkozunk.

BIZONYÍTÁS: Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $\{\eta_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ valószínűségi változók sorozata homogén Markov-láncot alkot az alábbiakban megadott $\mathbf{P}\{\eta_{n+1}=k\,|\,\eta_n=j\}=p_{jk}$ átmenet-valószínűségekkel

$$p_{jk}=\binom{j+1}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\,dF(x), \quad \text{ha} \quad j<m$$

$$(25)\quad p_{jk}=\binom{m}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu x}\left[\int_0^x \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!}(e^{-\mu y}-e^{-\mu x})^{m-k}\,m\mu\,dy\right]dF(x), \text{ha}\, j\geqq m \text{ és } k<m$$

$$p_{jk}=\int_0^\infty e^{-m\mu x}\frac{(m\mu x)^{j+1-k}}{(j+1-k)!}\,dF(x), \quad \text{ha} \quad j\geqq m \text{ és } k\geqq m.$$

Jelölje ismét $\pi_{jk}(x)$ az átmenet-valószínűségeket azon feltétel mellett, hogy a hívások közötti $\tau_{n+1}-\tau_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ időtartamok ugyanazon x állandóval egyenlők. Ekkor az általános esetben

$$(26)\qquad p_{jk}=\int_0^\infty \pi_{jk}(x)\,dF(x).$$

Könnyen belátható, hogy az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc irreducibilis és nem periodikus. D. G. KENDALL [21] munkájában kimutatta, hogy ha $m\alpha\mu>1$, akkor az állapotok ergodikusak és így a $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ határvalószínűségek léteznek és függetlenek az η_1 változó kezdeti eloszlásától és következőleg az $\{\eta(0),\tau_1\}$ eloszlásától is. Ebben az esetben a $\{P_k\}$ határeloszlás egyértelműen meghatározható a

$$(27)\qquad P_k=\sum_{j=k-1}^{\infty}p_{jk}P_j \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

egyenletrendszer megoldásával, ahol

$$(28)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}P_k=1$$

(vö. W. FELLER [10], p. 325).

Megjegyezzük, hogy az a tény, hogy az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc állapotai $m\alpha\mu>1$ esetén ergodikusak, könnyen igazolható F. G. FOSTER [14] tétele, illetve ennek egy változata segítségével, amelyet M. D. MOUSTAFA [33] mondott ki. Ennek a tételnek alkalmazásához elegendő csupán annyit megjegyezni, mint azt később látni is fogjuk, hogy $P_k=A\omega^{k-m}$, ahol $0<\omega<1$, $k\geqq m$ esetén kielégíti a (27) egyenletrendszert.

Ha $m\alpha\mu\leqq 1$, akkor a rendszer állapotai nem ergodikusak és fennáll $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=0$ $(k=0,1,2,\ldots)$ függetlenül az η_1 változó kezdeti eloszlásától és így az $\eta(0)$ eloszlásától is. Ezzel az esettel azonban jelenleg nem foglalkozunk.

Következő feladatunk a (27) egyenletrendszer megoldása. KENDALLt követve tekintsük először a (27) egyenletrendszert $k \geqq m$-re. Ekkor fennáll, hogy

$$(29) \qquad P_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu+k-1} \int_0^{\infty} e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^\nu}{\nu!} dF(x) \qquad (k \geqq m).$$

Válasszuk meg a pozitív valós $\omega \neq 1$ számot úgy, hogy

$$\varphi(m\mu(1-\omega)) = \omega$$

legyen. Ha $m\alpha\mu > 1$, akkor egyetlen ilyen ω van és $0 < \omega < 1$. Ugyanis $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = -\alpha$, $\varphi(\infty) = 0$ és növekvő s értékekre $\varphi(s)$ monoton csökken, ha $0 \leqq s < \infty$.

Ha feltesszük, hogy

$$(30) \qquad P_k = A\omega^{k-m}, \qquad (k \geqq m),$$

akkor láthatjuk, hogy (29) ki van elégítve, ha $k > m$, és ha $k = m$, akkor (29)-ből azt kapjuk, hogy $P_{m-1} = A/\omega$. Innen $A = \omega P_{m-1}$ és következőleg csak a $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ ismeretlenek meghatározása marad hátra. (Megjegyezzük, hogy az $m = 1$ speciális esetben a fentiek szerint a $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ követelmény már egyértelműen meghatározza a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlást, mégpedig érvényes, hogy $P_k = (1-\omega)\omega^k$.) A $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ valószínűségek kiszámítására tekintsük a (27) egyenletrendszert a $k = 0, 1, \ldots, m-1$ értékekre. Vezessük be az

$$(31) \qquad U(z) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k z^k$$

generátorfüggvényt. Erre (27) szerint fennáll, hogy

$$(32) \qquad \begin{aligned} U(z) = & \int_0^{\infty} (1-e^{-\mu x} + ze^{-\mu x}) U(1-e^{-\mu x} + ze^{-\mu x}) dF(x) + \\ & + A \int_0^{\infty} \left[\int_0^x e^{m\mu\omega y} (e^{-\mu y} - e^{-\mu x} + ze^{-\mu x})^m m\mu dy \right] dF(x) - Az^m. \end{aligned}$$

Továbbá legyen

$$(33) \qquad U_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{d^j U(z)}{dz^j} \right)_{z=1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Ekkor (30) tekintetbevételével

$$(34) \qquad U_0 = U(1) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k = 1 - \sum_{k=m}^{\infty} P_k = 1 - \frac{A}{1-\omega}.$$

A többi U_j mennyiség meghatározására differenciáljuk a (32) kifejezést j-szer és végezzük el a $z=1$ helyettesítést. Ily módon eljárva azt kapjuk, hogy

$$U_j = U_j\varphi_j + U_{j-1}\varphi_j - A\binom{m}{j}\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j},$$

ahol már tekintetbe vettük, hogy $\varphi(m\mu(1-\omega))=\omega$. Innen

$$(35)\qquad U_j = \frac{\varphi_j}{1-\varphi_j}U_{j-1} - \frac{A\binom{m}{j}}{(1-\varphi_j)}\left[\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right] \qquad (j=1,2,\ldots,m-1).$$

A (35) egyenletrendszer az U_j ismeretlenekre elsőrendű lineáris differencia-egyenlet, amely könnyen megoldható. Osszuk el a (35) egyenlet mindkét oldalát az (5) alatti C_j mennyiséggel, akkor

$$\frac{U_j}{C_j} = \frac{U_{j-1}}{C_{j-1}} - \frac{A\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)}\left[\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right].$$

Összegezzük a fenti egyenleteket $j=r+1, r+2, \ldots, m-1$-re és vegyük tekintetbe, hogy $U_{m-1}=P_{m-1}=A/\omega$, akkor azt kapjuk, hogy

$$(36)\qquad \frac{U_r}{C_r} = A\sum_{j=r+1}^{m}\frac{\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)}\left[\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right] \qquad (r=0,1,\ldots,m-1).$$

Az ismeretlen A a következőképpen határozható meg. Egyrészt (34) szerint $\frac{U_0}{C_0}=1-\frac{A}{1-\omega}$, másrészt számítsuk ki $\frac{U_0}{C_0}$-t a (36) képlet alapján, $r=0$ helyettesítéssel, és azonosítsuk a két kifejezést egymással. Így az adódik, hogy

$$(37)\qquad A = \frac{1}{\dfrac{1}{1-\omega} + \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\frac{\binom{m}{j}}{C_j(1-\varphi_j)}\left[\frac{m(1-\varphi_j)-j}{m(1-\omega)-j}\right]}$$

A fenti (36) és (37) képletek által az $U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ mennyiségek meg vannak határozva. Ezek viszont az $U(z)$ polinomot is meghatározzák. Az ismeretlen P_k $(k=0,1,\ldots,m-1)$ valószínűségek $U(z)$ segítségével (31) szerint a következőképpen fejezhetők ki:

$$P_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}.$$

Minthogy fennáll

$$\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0} = \sum_{r=k}^{m-1}\frac{(-1)^{r-k}}{(r-k)!}\left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1},$$

tehát innen következik, hogy

$$P_k=\sum_{r=k}^{m-1}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}U_r \qquad (k=0,1,\ldots,m-1). \tag{38}$$

A fentiek szerint a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlást a (30), (36), (37) és (38) képletek teljesen meghatározzák.

A B_r $(r=0,1.2,\ldots)$ binomiális momentumok a következő generátorfüggvény segítségével határozhatók meg:

$$U^*(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_kz^k=U(z)+\frac{Az^m}{1-\omega z}, \tag{39}$$

amely konvergens, ha $|z|<1/\omega$ és itt $0<\omega<1$. Mivel

$$B_r=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}P_k=\frac{1}{r!}\left(\frac{d^rU^*(z)}{dz^r}\right)_{z=1},$$

tehát

$$B_r=U_r+\frac{A}{1-\omega}\sum_{j=0}^{r}\binom{m}{j}\left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^{r-j}, \tag{40}$$

ahol $U_r=0$, ha $r\geqq m$. Ezzel a (24) képlet is igazolást nyert.

III. AZ EGYESÍTETT VÁRAKOZÁSI ÉS VESZTESÉGI RENDSZER

A korábban bevezetett jelölések mellett vezessük be az alábbi rövidítéseket is:

$$p_j=\int_0^{\infty}e^{-m\mu x}\frac{(m\mu x)^j}{j!}\,dF(x). \tag{41}$$

Továbbá a $q_0=1, q_1, q_2, \ldots$ számokat értelmezzük a következő rekurzív képlet segítségével:

$$q_k=p_0q_{k+1}+p_1q_k+\cdots+p_kq_1+p_kq_0 \qquad (k=0,1,2,\ldots). \tag{42}$$

Könnyen adódik (42) alapján, hogy a $\{q_k\}$ számsorozat generátorfüggvénye

$$\sum_{k=0}^{\infty}q_kz^k=\frac{(1-z)\varphi(m\mu(1-z))}{\varphi(m\mu(1-z))-z} \tag{43}$$

(vö. [48] p. 566.). A (43) generátorfüggvényből z szerinti differenciálással a q_k mennyiségek explicit alakban is meghatározhatók. A differenciálhányadosok az összetett függvények magasabbrendű deriváltjaira vonatkozó FAA DI BRUNO-féle képlet (vö. CH. JORDAN [20], E. LUKÁCS [31]) segítségével állíthatók elő.

Végül legyen

$$S_r = \binom{m}{r}\left\{\sum_{j=1}^{w+1} q_j p_{w+1-j} - \varphi_r \sum_{j=1}^{w} q_j \left(\frac{m}{m-r}\right)^{w-j+1} + \sum_{j=1}^{w} q_j \sum_{\nu=0}^{w} p_\nu \left(\frac{m}{m-r}\right)^{w-j+1-\nu} + \right.$$

$$\left. + p_w - \varphi_r \left(\frac{m}{m-r}\right)^{w} + \sum_{\nu=0}^{w-1} p_\nu \left(\frac{m}{m-r}\right)^{w-\nu}\right\} \qquad (r=0,1,\ldots,m-1) \tag{44}$$

és

$$S_m = p_0 q_{w+1}. \tag{45}$$

3. TÉTEL: *A* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k=0,1,\ldots,m+w)$ *határeloszlás mindig létezik és független az* $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ *változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$P_k = \begin{cases} \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} U_r & (k=0,1,\ldots,m-1) \\ A q_{m+w-k} & (k=m, m+1, \ldots, m+w), \end{cases} \tag{46}$$

ahol

$$U_r = A C_r \sum_{j=r+1}^{m} \frac{S_j}{(1-\varphi_j) C_j} \tag{47}$$

és

$$A = \frac{1}{\sum_{j=0}^{w} q_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{S_j}{(1-\varphi_j) C_j}}. \tag{48}$$

A $\{P_k\}$ *valószínűségeloszlás*

$$B_r = \sum_{k=r}^{m+w} \binom{k}{r} P_k \qquad (k=0,1,\ldots,m+w) \tag{49}$$

binomiális momentumaira fennáll, hogy

$$B_r = U_r + A \sum_{k=m}^{m+w} \binom{k}{r} q_{m+w-k}, \tag{50}$$

ahol $U_r = 0$, *ha* $r \leqq m$.

BIZONYÍTÁS: Az előző két modellhez hasonlóan most is könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az $\{\eta_n\}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ valószínűségi változók sorozata homogén Markov-láncot alkot $\mathbf{P}\{\eta_{n+1}=k \mid \eta_n = j\} = p_{jk}$ átmenet-valószínűségekkel, ahol

$$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k} dF(x), \quad \text{ha} \quad j<m,$$

$$p_{jk} = \binom{m}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}\left[\int_0^x \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!} (e^{-\mu y} - e^{-\mu x})^{m-k} m\mu\, dy\right] dF(x), \tag{51}$$

ha $m \leqq j < m+w$ és $k < m$,

$$p_{jk} = \int_0^\infty e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^{j+1-k}}{(j+1-k)!} dF(x), \quad \text{ha} \quad m \leqq j < m+w \text{ és } m \leqq k \leqq m+w,$$

$$p_{m+w,\,k} = p_{m+w-1,\,k}\,.$$

A korábbiakhoz hasonlóan jelölje ismét $\pi_{jk}(x)$ az átmenet-valószínűségeket abban az esetben, ha a $\tau_{n+1}-\tau_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$, hívások közötti időtartamok, ugyanazon x állandóval egyenlők, ekkor az általános esetben

$$(52) \qquad p_{jk} = \int_0^\infty \pi_{jk}(x)\,dF(x).$$

Könnyen látható, hogy az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc irreducibilis, nem-periodikus és mivel az állapotok száma véges, tehát ergodikus is. Eszerint a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k=0,1,\ldots,m+w)$ határvalószínűségek léteznek és függetlenek a η_1 változó kezdeti eloszlásától és így az $\{\eta(0),\tau_1\}$ változó-pár eloszlásától is. A $\{P_k\}$ határeloszlás egyértelműen meghatározható a következő egyenletrendszer megoldásával

$$(53) \qquad P_k = \sum_{j=k-1}^{m+w} p_{jk} P_j \qquad (k=0,1,\ldots,m+w),$$

ahol

$$(54) \qquad \sum_{k=0}^{m+w} P_k = 1$$

(vö. W. FELLER [10] p. 325).

Megoldandó tehát az (53) egyenletrendszer. Tekintsük először az (53) egyenleteket $k \geqq m$-re és vezessük be a $Q_k = P_{m+w-k}$ $(k=0,1,2,\ldots,w+1)$ jelölést. Mivel $p_{jk} = p_{j+1-k}$, ha $m \leqq j < m+w$, $p_{m+w,\,k} = p_{m+w-k}$ és $p_{m-1,\,m} = p_0$, tehát (53) szerint fennáll, hogy

$$Q_k = p_0 Q_{k+1} + p_1 Q_k + \cdots + p_k Q_1 + p_k Q_0 \qquad (k=0,1,\ldots,w).$$

Ha Q_0-t ismerjük, akkor ezen rekurzív képlet segítségével $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{w+1}$ sorjában meghatározható. Figyelembe véve a (42) képletet, nyílvánvalóan felírható, hogy

$$Q_k = A q_k \qquad (k=0,1,\ldots,w+1),$$

ahol A még ismeretlen. Tehát

$$(55) \qquad P_k = A q_{m+w-k} \qquad (k=m-1,m,\ldots,m+w).$$

Innen következik, hogy $A = P_{m-1}/q_{w+1}$ és így csupán a $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ ismeretlenek meghatározása marad hátra. (Megjegyezzük, hogy ha $m=1$, akkor (55) szerint $P_k = A q_{m+w-k}$ $(k=0,1,\ldots,m+w)$ és a $\sum\limits_{k=0}^{m+w} P_k = 1$ követelmény az A

állandót meghatározza.) Vezessük be a következő generátorfüggvényt

$$U(z)=\sum_{k=0}^{m-1} P_k z^k. \tag{56}$$

Tekintsük most az (53) egyenletrendszert $k<m$-re, és térjünk át a generátorfüggvényre. Ekkor azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} U(z)=&\int_0^\infty (1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})dF(x)-p_0P_{m-1}z^m+ \\ &+\sum_{j=m}^{m+w-1} P_j\int_0^\infty\left\{\int_0^x \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!}[(ze^{-\mu x}+e^{-\mu y}-e^{-\mu x})^m-z^m e^{-m\mu x}]m\mu\,dy\right\}dF(x)+ \\ &+P_{m+w}\int_0^\infty\left\{\int_0^x \frac{(m\mu y)^{w-1}}{(w-1)!}[(ze^{-\mu x}+e^{-\mu y}-e^{-\mu x})^m-z^m e^{-m\mu x}]m\mu\,dy\right\}dF(x). \end{aligned} \tag{57}$$

Legyen most

$$U_j=\frac{1}{j!}\left(\frac{d^jU(z)}{dz^j}\right)_{z=1}. \tag{58}$$

Ekkor (54) és (55) szerint

$$U_0=U(1)=\sum_{k=0}^{m-1}P_k=1-\sum_{k=m}^{m+w}P_k=1-A\sum_{j=0}^{w}q_j. \tag{59}$$

Ha (57)-et z-szerint j-szer differenciáljuk és $z=1$-et írunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$U_j=(U^j+U_{j-1})\varphi_j-AS_j \qquad (j=1,2,\ldots,m-1),$$

ahol φ_j-et (4) és S_j-t (44) és (45) értelmezi. Innen az $U_j(j=0,1,\ldots,m-1)$ ismeretlenek meghatározására az

$$U_j=\frac{\varphi_j}{1-\varphi_j}U_{j-1}-\frac{AS_j}{1-\varphi_j} \qquad (j=1,2,\ldots,m-1) \tag{60}$$

differenciaegyenletet nyerjük. Ez a korábbi (16) és (35) egyenletekhez hasonlóan oldható meg. Osszuk el a (60) egyenlet mindkét oldalát C_j-vel, akkor

$$\frac{U_j}{C_j}=\frac{U_{j-1}}{C_{j-1}}-\frac{AS_j}{(1-\varphi_j)C_j}.$$

Ezeket az egyenleteket összegezzük $j=r+1,r+2,\ldots,m-1$-re és vegyük tekintetbe, hogy $U_{m-1}=P_{m-1}=Aq_{w+1}$. Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{U_r}{C_r}=A\sum_{j=r+1}^{m}\frac{S_j}{(1-\varphi_j)C_j} \qquad (r=0,1,\ldots,m-1). \tag{61}$$

Legyen ebben a képletben $r=0$ és hasonlítsuk össze az (59) képlettel, akkor azt nyerjük, hogy

$$A=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{w} q_j+\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{S_j}{(1-\varphi_j)C_j}}. \tag{62}$$

A (61) és (62) képletek az $U_0, U_1, \ldots, U_{m-1}$ ismeretleneket meghatározzák. Ezek viszont egyértelműen meghatározzák az $U(z)$ polinomot. Az ismeretlen P_k $(k=0,1,\ldots,m-1)$ valószínűségek végül a következőképpen fejezhetők ki:

$$P_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U(z)}{dz^k}\right)_{z=0}.$$

A korábbiakhoz hasonlóan eljárva azt kapjuk, hogy

$$P_k=\sum_{r=k}^{m-1}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}U_r, \qquad (k=0,1,\ldots,m-1). \tag{63}$$

A fentiek szerint a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás az (55), (61), (62) és (63) képletekkel teljesen meg van határozva.

A B_r $(r=0,1,\ldots,m+w)$ binomiális momentumok a következő generátorfüggvény segítségével határozhatók meg:

$$U^*(z)=\sum_{k=0}^{m+w}P_k z^k=U(z)+A\sum_{k=m}^{m+w}q_{m+w-k}z^k.$$

Innen

$$B_r=\frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U^*(z)}{dz^r}\right)_{z=1}=U_r+A\sum_{k=m}^{m+w}\binom{k}{r}q_{m+w-k},$$

ahol $U_r=0$, ha $r\geqq m$. Ezzel az (50) képlet is bizonyítást nyert.

Példák

Tegyük fel, hogy a hívások időpontjainak $\{\tau_n\}$ sorozata λ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkot. Ekkor $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, ha $x\geqq 0$ és $\varphi(s)=\lambda/(\lambda+s)$. Továbbá (5) szerint

$$C_j=\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j,$$

(41) szerint

$$p_j=\frac{\lambda}{\lambda+m\mu}\left(\frac{m\mu}{\lambda+m\mu}\right)^j$$

és (42) szerint

$$q_k=\left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^k.$$

I. A VESZTESÉGI RENDSZER. Ebben az esetben (7) szerint

$$B_r = \frac{(\lambda/\mu)^r}{r!} \frac{\sum_{j=0}^{m-r} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}{\sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}} \qquad (r = 0, 1, \ldots, m) \tag{64}$$

és (6) szerint

$$P_k = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}{\sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m). \tag{65}$$

II. A VÁRAKOZÁSI RENDSZER. Ha $\lambda < m\mu$, akkor létezik a $\{P_k\}$ határeloszlás. Most (20) következtében $\omega = \lambda/m\mu$ és (22) szerint

$$A = \frac{\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{1-\frac{\lambda}{m\mu}}}. \tag{66}$$

A (21) és (24) képletek alapján

$$B_r = \begin{cases} \frac{Am!}{r!} \sum_{j=r+1}^{m} \frac{1}{(m-j)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{r-j} + \frac{A}{1-\omega} \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j} \left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^{r-j}, & \text{ha } r < m \\ A \frac{\omega^{r-m}}{(1-\omega)^{r+1}}, & \text{ha } r \geqq m. \end{cases} \tag{67}$$

Továbbá

$$P_j = \begin{cases} A \frac{m!}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-m} & (j = 0, 1, \ldots, m-1) \\ A\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{j-m} & (j = m, m+1, \ldots) \end{cases}. \tag{68}$$

III. AZ EGYESÍTETT VÁRAKOZÁSI ÉS VESZTESÉGI RENDSZER. Ebben az esetben

$$P_k = \begin{cases} A\left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^{m+w-k} \frac{m!}{m^{m-k} k!}, & \text{ha } k \leqq m \\ A\left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^{m+w-k}, & \text{ha } k \geqq m, \end{cases} \tag{69}$$

ahol

$$A=\frac{1}{\dfrac{1-\left(\dfrac{m\mu}{\lambda}\right)^{w+1}}{1-\dfrac{m\mu}{\lambda}}+\sum_{k=0}^{m-1}\left(\dfrac{m\mu}{\lambda}\right)^{m+w-k}\dfrac{m!}{m^{m-k}k!}}. \tag{70}$$

2. §. A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

Mind a három modellnél a $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás, amennyiben létezik, könnyen kifejezhető a megfelelő $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás segítségével.

4. TÉTEL: *Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és átlaga $\alpha<\infty$, akkor a $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ határértékek mindhárom modell esetén léteznek és függetlenek az $\{\eta(0),\zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától.*

Az I. modell esetén $\{P_k^*\}, (k=0,1,\ldots,m)$ mindig valószínűségeloszlás és fennáll, hogy

$$P_k^*=\frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu}\qquad(k=1,2,\ldots,m) \tag{71}$$

és

$$P_0^*=1-\sum_{k=1}^{m}P_k^*.$$

A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás B_r^* $(r=0,1,\ldots,m)$ binomiális momentumaira fennáll, hogy $B_0^*=1$ és

$$B_r^*=\frac{1-\varphi_r}{\varphi_r}\,\frac{B_r}{r\alpha\mu}\qquad(r=1,2,\ldots,m), \tag{72}$$

ahol B_r-et (7) értelmezi.

A II. modell esetén $\{P_k^*\}, (k=0,1,2,\ldots)$ valószínűségeloszlás, ha $m\alpha\mu>1$. (Az $m\alpha\mu\leqq 1$ esetben $P_k^*=0$, minden k-ra.) Fennáll

$$P_k^*=\begin{cases}\dfrac{P_{k-1}}{k\alpha\mu} & (k=1,2,\ldots,m)\\[2ex] \dfrac{P_{k-1}}{m\alpha\mu} & (k=m+1,m+2,\ldots)\end{cases} \tag{73}$$

és

$$P_0^*=1-\sum_{k=1}^{\infty}P_k^*.$$

A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás B_r^* $(r=0,1,2,\ldots)$ binomiális momentumaira fennáll, hogy $B_0^*=1$ és

$$B_r^* = \frac{B_{r-1}}{r\alpha\mu} + \frac{A}{\alpha\mu}\sum_{k=m+1}^{\infty}\left[\frac{1}{m}\binom{k}{r} - \frac{1}{r}\binom{k-1}{r-1}\right]\omega^{k-m-1}, \qquad (r=1,2,\ldots), \tag{74}$$

ahol A-t (22) és B_r-t (24) értelmezi.

A III. modell esetén $\{P_k^*\}$ $(k=0,1,\ldots,m+w)$ mindig valószínűségeloszlás és fennáll, hogy

$$P_k^* = \begin{cases} \dfrac{P_{k-1}}{k\alpha\mu}, & ha \quad k=1,2,\ldots,m \\[2ex] \dfrac{P_{k-1}}{m\alpha\mu}, & ha \quad k=m,m+1,\ldots,m+w, \end{cases} \tag{75}$$

és

$$P_0^* = 1 - \sum_{k=1}^{m+w} P_k^*.$$

A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás $B_r^*(r=0,1,\ldots,m+w)$ binomiális momentumaira fennáll, hogy $B_0^*=1$ és

$$B_r^* = \frac{B_{r-1}}{r\alpha\mu} - \frac{A}{\alpha\mu}\sum_{k=m+1}^{m+w}\left[\frac{1}{m}\binom{k}{r} - \frac{1}{r}\binom{k-1}{r-1}\right]q_{m+w-k+1} - \frac{A}{r\alpha\mu}\binom{m+w}{r-1}. \tag{76}$$

A 4. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: A bizonyítás mindhárom modell esetére közösen végezhető el. Az I. és II. modell ugyanis a III. modellnek azt a speciális esetét képezi, midőn $w=0$, illetve $w=\infty$. Ezért elegendő csupán a III. modell esetével foglalkoznunk, megengedve a $w=0$ és $w=\infty$ értékeket is. Állapodjunk meg abban, hogy az $E_{m+w}\rightarrow E_{m+w+1}$ átmeneten azt értjük, hogy egy beérkező hívás elvész és a rendszer marad az E_{m+w} állapotban, azaz $E_{m+w+1}\equiv E_{m+w}$. (Ennek csak az I. és III. modellnél van jelentősége, midőn w véges, a II. modellnél $w=\infty$ és nincs elvesző hívás.)

A bizonyításhoz két segédtételre lesz szükségünk:

1. LEMMA: *Jelölje $M_k(t)$ a $(0,t)$ időintervallumban előforduló $E_k\rightarrow E_{k+1}$ $(k=0,1,\ldots,m+w;\ E_{m+w+1}\equiv E_{m+w})$ átmenetek várható számát. Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor bármely $h>0$-ra fennáll, hogy*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_k(t+h)-M_k(t)}{h} = \frac{P_k}{\alpha}, \qquad (k=0,1,\ldots,m+w), \tag{77}$$

ahol P_k mindig a megfelelő modellre vonatkozik.

1. MEGJEGYZÉS. Ha $F(x)$ rácsos eloszlásfüggvény, akkor (77) általában nem igaz. Ha csupán az $\alpha<\infty$ feltevéssel élünk, akkor is igaz azonban, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_k(t)}{t} = \frac{P_k}{\alpha}, \qquad (k=0,1,\ldots,m+w). \tag{78}$$

A (77) és (78) képletek egyaránt érvényesek $P_k\equiv 0$ esetén is.

BIZONYÍTÁS: Könnyen belátható, hogy az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ $(k=0, 1, \ldots, m+w)$ átmenetek közötti időtartamok egyforma eloszlású független valószínűségi változók. Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény, akkor ezen valószínűségi változók sem rácsos eloszlásúak. Megmutatjuk, hogy ezen valószínűségi változók közös várható értéke α/P_k. A fent elmondottakból D. BLACKWELL [4] tételének könnyű általánosításaként adódik, hogy a (77) baloldalán álló határérték létezik, független az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától és egyenlő a szóban forgó valószínűségi változók közös várható értékének reciprok értékével. Meg kell még mutatni, hogy a kérdéses várható érték α/P_k. Tekintsük az $\{\eta_n\}$ Markov-láncot. Ennél az E_k állapot rekurrens állapot és az E_k állapotból kiindulva az első visszatérésig megtett lépésszám várható értéke $1/P_k$ (vö. W. FELLER [10] p. 325). A teljes folyamatot tekintve érvényes rá, hogy $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek csupán a hívások τ_n $(n=1,2,\ldots)$ időpontjaiban fordulhatnak elő, éspedig ha $\eta_n = k$, akkor $E_k \to E_{k+1}$ átmenet valóban elő is fordul. Az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek között megtett lépések számának a várható értéke a fentiek szerint $1/P_k$. Az egyes lépések hosszának várható értéke pedig α. Felhasználva a folyamat Markov-jellegét, A. WALD [58] jól ismert tételéből (vö. A. N. KOLMOGOROV és J. V. PROHOROV [24]) következik, hogy akkor az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek közötti időtartam várható értéke α/P_k. Ezzel (77) bizonyítást nyert.

A fent elmondottak tekintetbevételével (78) fennállása közvetlenül adódik S. TÄCKLIND [57] tételéből.

Visszatérve a 4. TÉTEL bizonyításához, most kimutatjuk, hogy a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = P_k^*$ $(k=0, 1, \ldots, m+w)$ határértékek léteznek és függetlenek az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától. Mindenekelőtt felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = \sum_{j=k-1}^{m+w} \int_0^t \pi_{jk}(t-u)\,[1-F(t-u)]\,dM_j(u), \tag{79}$$

ahol $\pi_{jk}(x)$ a $\tau_{n+1}-\tau_n = x$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ feltétel mellett számított átmenet-valószínűség (vö. (51) és (52)).

Jelölje ugyanis $\tau_1^{(j)}, \tau_2^{(j)}, \ldots, \tau_n^{(j)}, \ldots$ az egymást követő $E_j \to E_{j+1}$ átmenetek időpontjait. Ekkor egyrészt fennáll, hogy

$$M_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau_n^{(j)} \leq t\}. \tag{80}$$

Másrészt az $\eta(t)=k$ esemény több egymást kizáró módon jöhet létre: a $(0, t]$ időközben az n-edik $(n=1, 2, 3, \ldots)$, $E_j \to E_{j+1}$ $(j=k-1, k, \ldots, m+w)$ átmenet u időpontban $(0<u\leqq t)$ fordul elő, azaz $\tau_n^{(j)}=u$ és az u időpontban folyamatban levő $j+1$ beszélgetésből az $(u, t]$ időközben befejeződik $j+1-k$

és nem fejeződik be k (ennek a valószínűsége $\pi_{jk}(t-u)$), továbbá az $(u, t]$ időközben nem érkezik újabb hívás a központba (aminek a valószínűsége $1-F(t-u)$). Az elmondottak szerint fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k, A_{ut} \mid \tau_n^{(j)}=u\}=\pi_{jk}(t-u)[1-F(t-u)], \quad \text{ha} \quad 0<u \leqq t,$$

ahol A_{ut} azt az eseményt jelöli, hogy $(u, t]$ időközben nem fordul elő hívás. Most a teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=\sum_{j=k-1}^{m+w} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \pi_{jk}(t-u)[1-F(t-u)] d\mathbf{P}\{\tau_n^{(j)} \leqq u\}, \tag{81}$$

amely (80)-ra való tekintettel megegyezik (79)-cel.

A (79) határértékének meghatározására előre bocsátjuk a következő megjegyzést: Ha $g(t)$ a $(0, \infty)$ szakaszon korlátos változású függvény, akkor (77) teljesülése esetén fennáll, hogy

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t g(t-u) dM_j(u)=\frac{P_j}{\alpha} \int_0^{\infty} g(u) du \qquad (j=0, 1, \ldots, m+w). \tag{82}$$

Ez könnyen igazolható az integrál téglányösszegének alsó és felső becslése segítségével (vö. W. L. SMITH [43]). (82) alkalmazásával (79)-ből következik, hogy a $\lim\limits_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0, 1, \ldots, m+w)$ határérték létezik és független az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó kezdeti eloszlásától. Eszerint fennáll, hogy

$$P_k^*=\sum_{j=k-1}^{m+w} p_{jk}^* P_j, \tag{83}$$

ahol

$$p_{jk}^*=\frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \pi_{jk}(x)[1-F(x)] dx. \tag{84}$$

Tüstént látszik, hogy ha $\{P_j\}$ valószínűségeloszlás, akkor $\{P_j^*\}$ is az.

A (83) képlet segítségével a $\{P_k^*\}$ eloszlás máris meghatározható explicit alakban. Látni fogjuk azonban, hogy a P_k^* egyszerűbben is kifejezhető a P_j valószínűségek segítségével. Ehhez viszont egy újabb segédtételre lesz szükségünk.

2. LEMMA: *Jelölje $N_k(t)$ a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots, m+w;\ E_{m+w+1} \equiv E_{m+w})$ átmenetek várható számát. Ha $F(x)$ nemrácsos eloszlás és $\alpha<\infty$, akkor fennáll, hogy*

$$\lim_{t \to \infty} N_k'(t)=\begin{cases} k\mu P_k^*, & \text{ha} \quad k=1, 2, \ldots, m, \\ m\mu P_k^*, & \text{ha} \quad k=m, m+1, \ldots, m+w. \end{cases} \tag{85}$$

2. MEGJEGYZÉS. A fenti tétel nyilvánvaló következménye, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t}=\begin{cases} k\mu P_k^*, & \text{ha } k\leqq m,\\ m\mu P_k^*, & \text{ha } k\geqq m.\end{cases} \tag{86}$$

BIZONYÍTÁS: Határozzuk meg a $(t, t+\Delta t]$ időközben előforduló $E_k\to E_{k+1}$ átmenetek várható számát, az $N_k(t+\Delta t)-N_k(t)$ mennyiséget. Annak a valószínűsége, hogy ha $\eta(t)=k$, akkor a $(t, t+\Delta t]$ időközben egyetlen $E_k\to E_{k+1}$ átmenet történik $k\mu\Delta t+o(\Delta t)$, illetve $m\mu\Delta t+o(\Delta t)$, aszerint, amint $k\leqq m$ vagy $k\geqq m$. A várható érték kifejezésében az egynél több $E_k\to E_{k-1}$ átmenetnek megfelelő tagok összege $o(\Delta t)$, ugyanis az $E_k\to E_{k-1}$ átmenetek száma felülről becsülhető egy $m\mu$ eseménysűrűségű Poisson-folyamat $(t, t+\Delta t]$ időközben előforduló eseményeinek a számával. Hasonlóan $o(\Delta t)$ értéket nyerünk abban az esetben, ha $\eta(t)\neq k$. Így tehát felírható, hogy

$$N_k(t+\Delta t)-N_k(t)=\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}k\mu\Delta t+o(\Delta t), \quad \text{ha} \quad k\leqq m,$$

és

$$N_k(t+\Delta t)-N_k(t)=\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}m\mu\Delta t+o(\Delta t), \quad \text{ha} \quad k\geqq m.$$

Miután a $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0, 1, \ldots, m+w)$ határértékek léteznek, tehát a fentiek szerint a

$$\lim_{t\to\infty}N_k'(t)=\begin{cases} P_k^*k\mu, & \text{ha } k\leqq m,\\ P_k^*m\mu, & \text{ha } k\geqq m\end{cases}$$

határértékek is léteznek. Ezzel (85) igazolást nyert.

A fenti két segédtétel alapján most már könnyen megadhatjuk a 4. TÉTEL bizonyítását. Nyilvánvaló, hogy a $(0, t]$ időközben előforduló $E_{k-1}\to E_k$ és $E_k\to E_{k-1}$ átmenetek számának különbsége legfeljebb 1 lehet. Ekkor azonban ugyanez érvényes a megfelelő várható értékek különbségére is. Tehát fennáll, hogy

$$|M_{k-1}(t)-N_k(t)|\leqq 1.$$

Innen pedig következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_{k-1}(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t}. \tag{87}$$

Ez az egyenlőség a (78) és (86) határértékek fennállása következtében igazolja a (75) állítást. Innen (71) és (73) a $w=0$, illetve $w=\infty$ választással adódik. Mivel $\{P_k^*\}$ ezekben az esetekben valószínűségeloszlás, tehát

$$P_0^*=1-\sum_{k=1}^{m+w}P_k^*.$$

Hátra van a B_r^* $(r=1, 2, \ldots, m+w)$ binomiális momentumok meghatározása. Nyilvánvalóan $B_0^*=1$.

Az I. modell esetén egyszerűen felírható, hogy

$$B_r^* = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} P_k^* = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} \frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu}, \quad (r=1,2,\ldots,m),$$

azaz

$$B_r^* = \frac{1}{r\alpha\mu} \sum_{k=r}^{m} \binom{k-1}{r-1} P_{k-1} = \frac{1}{r\alpha\mu} \left[B_{r-1} - \binom{m}{r-1} P_m \right], (r=1,2,\ldots,m)$$

és innen (16) alkalmazásával

$$B_r^* = \frac{1-\varphi_r}{\varphi_r} \frac{B_r}{r\alpha\mu}, \tag{88}$$

ami éppen a bizonyítandó (72) képlet.

A II. és III. modell esetén felírható, hogy

$$B_r^* = \sum_{k=r}^{m+w} \binom{k}{r} P_k^* = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} \frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu} + \sum_{k=m+1}^{m+w} \binom{k}{r} \frac{P_{k-1}}{m\alpha\mu},$$

azaz

$$B_r^* = \frac{1}{r\alpha\mu} \sum_{k=r}^{m+w+1} \binom{k-1}{r-1} P_{k-1} + \frac{1}{m\alpha\mu} \sum_{k=m+1}^{m+w} \binom{k}{r} P_{k-1} - \frac{1}{r\alpha\mu} \sum_{k=m+1}^{m+w+1} \binom{k-1}{r-1} P_{k-1}$$

és innen

$$B_r^* = \frac{B_{r-1}}{r\alpha\mu} + \frac{1}{m\alpha\mu} \sum_{k=m+1}^{m+w} \binom{k}{r} P_{k-1} - \frac{1}{r\alpha\mu} \sum_{k=m+1}^{m+w+1} \binom{k-1}{r-1} P_{k-1}. \tag{89}$$

Most a II. modell esetén $w=\infty$ és (19) szerint $P_k = A\omega^{k-m}$, ha $k \geqq m$, a III. modell esetén pedig $w>0$ és (46) szerint $P_k = Aq_{m+w-k}$, ha $k \geqq m$. Ezek behelyettesítésével adódik (74) és (76).

Példák

Tekintsük ismét azt a speciális esetet, amidőn a hívások $\{\tau_n\}$ sorozata λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat. Ekkor a $\{P_k^*\}$ határeloszlás az I. és III. modell esetén mindig létezik, a II. modell esetén csak akkor létezik, ha $\lambda < m\mu$. Ekkor ugyanis $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $(x \geqq 0)$, nem-rácsos eloszlás és átlaga $\alpha = 1/\lambda$. Ebben az esetben mindhárom modellre fennáll, hogy

$$P_k^* = P_k \qquad (k=0,1,\ldots,m+w), \tag{90}$$

a megfelelő P_k valószínűségekkel. Tehát ekkor a $\{P_k^*\}$ eloszlás pontosan megegyezik a $\{P_k\}$ eloszlással. Ez a legegyszerűbben akkor látható be, ha a P_k^* (83) alatti kifejezését tekintjük. Rögtön látszik (52) és (84)-ből, hogy ha $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x \geqq 0)$, akkor $p_{jk}^* = p_{jk}$. Ekkor viszont (53) és (83) összehasonlításából kitűnik, hogy $P_k^* = P_k$ $(k=0,1,\ldots,m+w)$.

3. MEGJEGYZÉS. Észrevehetjük, hogy a (90) egyenletek (75)-re való tekintettel meg is határozzák a $\{P_k\}$ (azaz $\{P_k^*\}$ eloszlást). Ugyanis (75) alkalmazásával felírható, hogy

$$P_k = P_{k-1}\frac{\lambda}{k\mu} \qquad (k=1,2,\ldots,m), \tag{91}$$

$$P_k = P_{k-1}\frac{\lambda}{m\mu} \qquad (k=m,m+1,\ldots,m+w), \tag{92}$$

miután $\alpha = 1/\lambda$, és

$$\sum_{k=0}^{m+w} P_k = 1. \tag{93}$$

A (91) képlet ismételt alkalmazásával

$$P_k = P_0\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}, \qquad (k=0,1,\ldots,m), \tag{94}$$

és a (92) képlet ismételt alkalmazásával

$$P_k = P_m\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{k-m} = P_0\frac{(\lambda/\mu)^k}{m^{k-m}m!}, \qquad (k=m,m+1,\ldots,m+w), \tag{95}$$

ahol az I. modell esetén $w=0$, a II. modell esetén $w=\infty$ és a III. modell esetén $0<w<\infty$.

Most (93) szerint az I. modell esetén

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}, \tag{96}$$

a II. modell esetén

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{1-\frac{\lambda}{m\mu}}} \tag{97}$$

és a III. modell esetén

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1-\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{w+1}}{1-\frac{\lambda}{m\mu}}}. \tag{98}$$

A fenti eredmények megegyeznek a korábban nyert hasonló eredményekkel.

4. MEGJEGYZÉS. A (94) és (96) képletek szerint az I. modell esetén fennáll, hogy

$$P_k^* = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}{\sum_{j=0}^{m} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}, \qquad (k=0, 1, \ldots, m). \tag{99}$$

Ez a jól ismert veszteségi formula, amelyet A. K. ERLANG [8] 1918-ban nyert. Megjegyezzük azonban, hogy (99) nemcsak a speciális

$$H(x) = \begin{cases} 1-e^{-\mu x}, & \text{ha} \quad x \geqq 0, \\ 0 \quad , & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

beszélgetési idő eloszlása esetén érvényes, hanem minden olyan $H(x)$ eloszlásfüggvény esetén, amelyre $H(0)=0$ és amelynek átlaga véges, éspedig $\int_0^\infty x dH(x) = \mu^{-1}$. Ezt az észrevételt már ERLANG is megtette. (Vö. L. KOSTEN [27].) Azóta többen foglalkoztak az állítás igazolásával vagy cáfolásával. A (99) képlet fennállására F. POLLACZEK [37], C. PALM [34], L. KOSTEN [25] és B. A. SZEVASZTJANOV [41] adtak bizonyításokat. (Vö. még R. FORTET [11], [13].)

F. POLLACZEK [37] feltételezi, hogy a $(0, t)$ időközben n hívás érkezik a központba és a hívások időpontjai egymástól függetlenül egyenletesen oszlanak el a $(0, t)$ intervallumon. Ilyen feltételek mellett meghatározza annak a valószínűségét, hogy egy tetszőleges hívás k foglalt vonalat talál és kiszámítja ennek a valószínűségnek a határértékét abban az esetben, ha $t \to \infty$ és $n \to \infty$ de úgy, hogy $n/t \to \lambda$. Ilyen módon POLLACZEK megkapja a (99) alatti P_k^* határértéket. POLLACZEK ezen eredményéből a Poisson-folyamatok bizonyos tulajdonságainak felhasználásával aránylag könnyen következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_k(u)\, du = P_k^*.$$

Ha most kimutatjuk, hogy a $\lim_{t\to\infty} P_k(t)$ határérték létezik, akkor innen következik, hogy az éppen a P_k^*. C. PALM [34] és L. KOSTEN [25] bizonyításai is némi kívánnivalót hagynak maguk után az exisztencia és egyértelműség kimutatásával kapcsolatban. B. A. SZEVASZTJANOV [41] bizonyítása ezekkel szemben teljesen exakt.*

Végül megemlítjük, hogy J. W. COHEN [7] dolgozatában az Erlang-képlet további messzemenő általánosítását adta meg.

* Az Erlang-formulával kapcsolatban POLLACZEK, PALM, KOSTEN és más itt nem említett szerzők eredményeire először R. SYSKI úr volt szíves figyelmemet felhívni, amiért neki e helyen is köszönetemet fejezem ki.

3. §. A stacionárius $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ folyamat

Ismét közösen tárgyaljuk az I., II. és III. modell esetét. Az I. modellnél $w=0$, a II. modellnél $w=\infty$ és a III. modellnél $0<w<\infty$. A II. modellnél feltesszük azonban, hogy $m\alpha\mu>1$.

Jelölje $\zeta(t)$ a t időpontnak a közvetlen utána következő hívástól való távolságát. A $\zeta(t)$ valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvényére vonatkozóan a következő tételt bizonyítjuk be:

5. TÉTEL: *Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor léteznek a következő határeloszlások*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x\,|\,\eta(t)=k\}=F_k^*(x), \quad (k=0,1,\ldots,m+w), \tag{100}$$

ahol

$$F_k^*(x)=\frac{1}{\alpha P_k^*}\sum_{j=k-1}^{m+w} P_j\int_0^\infty [F(x+y)-F(y)]\,\pi_{jk}(y)\,dy \tag{101}$$

és ezek függetlenek az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától.

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás (79)-éhez hasonlóan történik. A $\{\zeta(t)\leq x, \eta(t)=k\}$ esemény több egymást kizáró módon jöhet létre: Az u időpontban (ahol $0<u\leq t$) $E_j\to E_{j+1}$ $(j=k-1, k, \ldots, m+w)$ átmenet fordul elő, azaz $\tau_n^{(j)}=u$ és a következő hívás időpontja a $(t, t+x]$ időközbe esik (aminek a valószínűsége $F(t+x-u)-F(t-u)$), továbbá az u időpontban folyamatban levő $j+1$ beszélgetésből $(u, t]$ időközben $j+1-k$ befejeződik, míg a többi k nem fejeződik be (ennek a valószínűsége $\pi_{jk}(t-u)$). Eszerint felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x, \eta(t)=k, A_{ut}\,|\,\tau_n^{(j)}=u\}=\pi_{jk}(t-u)\,[F(t+x-u)-F(t-u)], \quad \text{ha}$$

$0<u\leq t$, ahol A_{ut} azt az eseményt jelöli, hogy $(u, t]$ időközben nem fordul elő hívás. Innen a teljes valószínűségi tétel alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x, \eta(t)=k\}=\sum_{j=k-1}^{m+w}\int_0^t \pi_{jk}(t-u)[F(t+x-u)-F(t-u)]\,dM_j(u). \tag{102}$$

Megjegyezzük, hogy ha (102)-ben $x=\infty$, akkor éppen a (79) képletet kapjuk meg.

Vegyük most tekintetbe, hogy az 1. LEMMA szerint fennáll (77) és alkalmazzuk a (82) összefüggést. Ekkor (102)-ből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x, \eta(t)=k\}=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=k-1}^{m+w} P_j\int_0^\infty [F(x+y)-F(y)]\,\pi_{jk}(y)\,dy.$$

Miután

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x\,|\,\eta(t)=k\}=\frac{\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x, \eta(t)=k\}}{\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}}$$

és a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ határérték létezik, tehát így a $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\,|\,\eta(t)=k\}$ határérték is létezik és megegyezik a (101) alatti $F_k^*(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ezzel az 5. TÉTEL bizonyítása teljes.

5. MEGJEGYZÉS. Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor a $\zeta(t)$ változó eloszlására könnyen láthatóan fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\}=F^*(x), \tag{103}$$

ahol

$$F^*(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^x [1-F(y)]\,dy, & \text{ha } x\geqq 0,\\ 0, & \text{ha } x<0,\end{cases} \tag{104}$$

és ez független az $\{\eta(0),\zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásától.

A bizonyítás egyszerűen elvégezhető D. BLACKWELL [4] tétele segítségével. (Vö. még J. L. DOOB [8].) Jelölje ugyanis $m(t)$ a $(0,t]$ időközben előforduló hívások várható számát. Ekkor fennáll

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\tau_n\leqq t\}$$

és BLACKWELL tételének egyszerű folyományaként felírható, hogy tetszőleges $h>0$-ra

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t+h)-m(t)}{h}=\frac{1}{\alpha}. \tag{105}$$

Ezután megállapíthatjuk, hogy a $\{\zeta(t)\leqq x\}$ esemény akkor valósul meg, ha $(t,t+x]$ időközben legalább egy hívás előfordul. Ez pedig több egymást kizáró módon jöhet létre, mégpedig a $(t,t+x]$ intervallumban előforduló utolsó hívás lehet az $n(n=1,2,3,\ldots)$-edik. Ily módon a teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{t<\tau_n\leqq t+x<\tau_{n+1}\}.$$

A $\tau_n=u\,(t<u\leqq t+x)$ feltétel mellett azonban

$$\mathbf{P}\{t<\tau_n\leqq t+x<\tau_{n+1}\,|\,\tau_n=u\}=\mathbf{P}\{\tau_{n+1}-\tau_n>t+x-u\}=1-F(t+x-u)$$

és így

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x\}&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_t^{t+x}[1-F(t+x-u)]\,d\mathbf{P}\{\tau_n\leqq u\}=\\ &=\int_t^{t+x}[1-F(t+x-u)]\,dm(u).\end{aligned} \tag{106}$$

Most (105) felhasználásával és (82) alkalmazásával következik, hogy a (103) határérték létezik és megegyezik (104)-gyel.

A STACIONÁRIUS FOLYAMAT. Ezen előkészítés után definiálhatjuk a stacionárius folyamat fogalmát. Az általunk vizsgált folyamat Markov-folyamatnak tekinthető, ha a rendszer állapotát az $\{\eta(t), \zeta(t)\}$ valószínűségi változó-párral írjuk le. Ha feltételezzük, hogy $\alpha < \infty$ és az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlása

(107) $\mathbf{P}\{\eta(0)=k\}=P_k^*, \mathbf{P}\{\zeta(0)\leqq x \mid \eta(0)=k\}=F_k^*(x) \quad (k=0, 1, \ldots, m+w),$

akkor az $\{\eta(t), \zeta(t);\ 0\leqq t<\infty\}$ sztochasztikus folyamat stacionárius lesz. Ekkor valamennyi t értékre fennáll, hogy

(108) $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*, \mathbf{P}\{\zeta(t)\leqq x \mid \eta(t)=k\}=F_k^*(x), \quad (k=0, 1, \ldots, m+w)$

és valamennyi n-re

(109) $$\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k, \qquad (k=0, 1, \ldots, m+w).$$

A (108) állítás evidens, a (109) fennállásához elegendő megmutatni, hogy fennáll

(110) $$P_k=\sum_{j=k-1}^{m+w} P_j^* \int_0^\infty \pi_{jk}(x)\, dF_j^*(x).$$

Stacionárius folyamat esetén $\mathbf{P}\{\zeta(0)\leqq x\}=F^*(x)$ és mivel $\zeta(0)=\tau_1$, tehát érvényes, hogy a hívások $\{\tau_n\}$ sorozata rekurrens folyamatot alkot. Továbbá stacionárius folyamat esetén a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek várható száma

(111) $$M_k(t)=\frac{P_k}{\alpha}t \qquad (k=0, 1, \ldots, m+w);$$

és a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k-1}$ $(k=1, 2, \ldots, m+w)$ átmenetek várható száma

(112) $$N_k(t)=\begin{cases} k\mu P_k^* t, & \text{ha } k\leqq m, \\ m\mu P_k^* t, & \text{ha } k\geqq m. \end{cases}$$

4. §. A várakozási idő eloszlása stacionárius folyamat esetén

Tegyük fel most, hogy a hívások kiszolgálása *érkezési sorrendben* történik és állapítsuk meg a II. modell esetén egy tetszőleges hívás várakozási idejének eloszlásfüggvényét, továbbá a III. modell esetén szintén egy tetszőleges hívás várakozási idejének eloszlásfüggvényét, azon feltétel mellett, hogy a hívás nem vész el. Jelölje az n-edik érkező hívás várakozási idejét ϑ_n valószínűségi változó, amennyiben egyáltalában létezik várakozási idő. Legyen a II. modell esetén $\mathbf{P}\{\vartheta_n\leqq x\}=G^*(x)$ és a III. modell esetén hasonlóan $\mathbf{P}\{\vartheta_n \leqq x \mid \eta_n < m+w\} = G^*(x)$. Stacionárius folyamat esetén ezen valószínűségek nyilvánvalóan függetlenek n-től.

6. TÉTEL: *A II. modellnél, ha a hívások kiszolgálása érkezési sorrendben történik és stacionárius folyamatot tételezünk fel, akkor egy tetszőleges hívás várakozási idejének eloszlásfüggvénye*

$$(113) \qquad G^*(x) = 1 - \frac{Ae^{-m\mu(1-\omega)x}}{(1-\omega)}, \quad ha \quad x \geqq 0,$$

ahol A és ω jelentése ugyanaz, mint a 2. TÉTEL*ben.*

BIZONYÍTÁS: A teljes valószínűségi tétel alkalmazásával felírható, hogy

$$(114) \qquad G^*(x) = \sum_{j=0}^{m-1} P_j + \sum_{j=m}^{\infty} P_j \int_0^x e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!} m\mu\, dy.$$

Ugyanis egy hívás megérkezésének az időpontjában a rendszer $E_0, E_1, E_2, \ldots$ állapotban lehet. Az E_j állapot valószínűsége P_j. Ha $j < m$, akkor a várakozási idő zérus, ha $j \geqq m$, akkor a szóban forgó hívásnak meg kell várnia $j+1-m$ korábbi hívásból eredő beszélgetés befejezését. Az ezen beszélgetések egymást követő befejezési időpontjai pedig $m\mu$ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkotnak és így annak a valószínűsége, hogy a várakozási idő legfeljebb x:

$$\int_0^x e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!} m\mu\, dy = 1 - \sum_{\nu=0}^{j-m} e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^{\nu}}{\nu!}.$$

Az elmondottak igazolják (114) fennállását. Ha most tekintetbe vesszük, hogy (34) szerint $\sum_{j=0}^{m-1} P_j = 1 - \frac{A}{1-\omega}$ és (19) szerint $P_j = A\omega^{j-m}$, ha $j \geqq m$, akkor (114)-ből megkapjuk (113)-at, ami bizonyítandó volt.

6. MEGJEGYZÉS. A fenti esetben $G^*(0) = 1 - \frac{A}{1-\omega}$ és a várakozási idő várható értéke

$$(115) \qquad \Gamma^* = \int_0^{\infty} [1 - G^*(x)]\, dx = \frac{A}{m\mu(1-\omega)^2}$$

és ezen mennyiségek függetlenek attól, hogy a hívások kiszolgálása milyen sorrendben történik.

Tekintsük most a III. modellt stacionárius folyamat esetére. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy tetszőleges hívás elvész, (46) szerint

$$(116) \qquad P_{m+w} = A = \frac{1}{\sum_{j=0}^{w} q_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{S_j}{(1-\varphi_j)C_j}}.$$

A hívások kiszolgálása történjék érkezési sorrendben. Most $G^*(x)$ a várakozási idő feltételes eloszlásfüggvénye, azon feltétel mellett, hogy az érkező hívás nem vész el. $G^*(x)$ meghatározását a következő tétel adja.

7. TÉTEL: *A III. modellnél, ha stacionárius folyamatot tételezünk fel és feltesszük, hogy a hívások érkezési sorrendben lesznek kiszolgálva, akkor egy tetszőleges hívás várakozási idejének feltételes eloszlásfüggvénye, azon feltétel mellett, hogy a hívás nem vész el*

$$G^*(x) = 1 - \frac{A}{1-A} \sum_{k=1}^{w} q_k \sum_{j=0}^{w-k} e^{-m\mu x} \frac{(m\mu x)^j}{j!}, \tag{117}$$

ahol A és q_k jelentése ugyanaz, mint a 3. TÉTEL*ben.*

BIZONYÍTÁS: A teljes valószínűségi tétel alkalmazásával könnyen felírható, hogy

$$(1-P_{m+w})G^*(x) = \sum_{j=0}^{m-1} P_j + \sum_{j=m}^{m+w-1} P_j \int_0^x e^{-m\mu y} \frac{(m\mu y)^{j-m}}{(j-m)!} m\mu dy. \tag{118}$$

Itt a jobboldal annak a valószínűségét jelenti, hogy a hívás nem vész el és a várakozás ideje legfeljebb x. Ez az esemény több egymást kizáró módon jöhet létre: a hívás érkezésének időpontjában a rendszer E_j $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ állapotban van (aminek a valószínűsége P_j), amikor is nincs várakozási idő, vagy a rendszer E_j $(j = m, m+1, \ldots, m+w-1)$ állapotban van (aminek a valószínűsége P_j), amikor is a szóban forgó hívásnak meg kell várnia $j+1-m$ beszélgetés egymást követő befejezési időpontjait és kell, hogy ez az időtartam legfeljebb x legyen. Most ezen beszélgetések befejezésének időpontjai $m\mu$ eseménysűrűségű Poisson-folyamatot alkotnak és így a kérdéses valószínűség könnyen felírható. Ezzel (118) fennállását megindokoltuk. Mivel (46) szerint $P_k = A q_{m+w-k}$ $(k = m, m+1, \ldots, m+w)$ és (59) szerint $\sum_{k=0}^{m-1} P_k = 1 - A \sum_{j=0}^{w} q_j$, tehát (118)-ból következik (117), ami bizonyítandó volt.

7. MEGJEGYZÉS. A fenti esetben

$$G^*(0) = 1 - A \sum_{j=0}^{w} q_j \tag{119}$$

és a várakozási idő várható értéke azon feltétel mellett, hogy a hívás nem vész el

$$\Gamma^* = \int_0^\infty [1 - G^*(x)] dx = \frac{A}{m\mu(1-A)} \sum_{k=1}^{w} (w-k+1) q_k. \tag{120}$$

A $G^*(0)$ és Γ^* független attól, hogy a hívások kiszolgálása milyen sorrendben történik.

5. §. Palm képletének bizonyítása

Az I. modell esetén gyakorlati szempontból egyik legfontosabb feladat annak a valószínűségének a meghatározása, hogy egy hívás elvész. Jelölje stacionárius folyamat esetén egy tetszőleges hívás elveszésének a valószínűségét Π_m. A Π_m valószínűség nyilvánvalóan megegyezik az 1. TÉTEL P_m valószínűségével. Eszerint fennáll, hogy

$$\Pi_m = \frac{1}{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{121}$$

ahol $C_0 = 1$ és

$$C_j = \prod_{i=1}^{j} \frac{\varphi_i}{1-\varphi_i}.$$

A Π_m valószínűséget először C. PALM [35] határozta meg. Később F. POLLACZEK [38] is bebizonyította a (121) fennállását. A Π_m fenti alakja [52] dolgozatunk eredményéből is következik és J. W. COHEN [6] megjelenő munkájában is megtalálható ennek bizonyítása.

PALM és POLLACZEK eredményeiket integrálegyenletek megoldásával nyerik. Az [52] dolgozatunkban a Markov-láncok elméletét használtuk fel, de ott nemcsak a Π_m valószínűséget, hanem a teljes $\{P_j\}$ eloszlást is meghatároztuk. COHEN hasonlóképpen a Markov-láncok elméletét alkalmazta és meghatározta a teljes $\{P_j\}$ eloszlást is. Jelenleg H. ASHCROFT [1] módszerének felhasználásával elemi bizonyítást adunk a (121) képlet fennállására.

A Π_m meghatározása. Tekintsük az I. modellt stacionárius folyamat esetén. Ekkor az $\{\eta_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Markov-lánc is stacionárius lesz, amelyre $\mathbf{P}\{\eta_n = j\} = P_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ minden n-re. Eddig semmilyen feltevést sem tettünk arra vonatkozóan, hogy a hívások kiszolgálása milyen sorrendben történik. Most PALM nyomán tegyük fel, hogy a különböző vonalak $1, 2, \ldots, m$ sorszámokkal vannak megjelölve és egy beérkező hívásnak megfelelő kapcsolat azon a szabad vonalon valósul meg, amelyiknek a legkisebb a sorszáma. Ha ilyen nincs, akkor a hívás elvész. A fenti feltevéssel az általánosság megszorítása nélkül élhetünk, mivel a Π_m valószínűség nem függ a hívások kiszolgálási rendszerétől. Jelölje most Π_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ annak a valószínűségét, hogy egy beérkező hívás az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport mindegyik vonalát foglaltan találja. Eszerint Π_m annak a valószínűsége, hogy mind az m vonal foglalt, amely éppen annak a valószínűsége, hogy a hívás elvész. Továbbá jelölje Γ_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ annak a véletlen számnak a várható értékét, amely azt mutatja, hogy egy olyan hívás után, amelyik az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalak mindegyikét foglaltan találja, hanyadik hívás lesz a legközelebbi olyan hívás, amelyik az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport vonalait ugyancsak foglaltnak találja. Következőleg Γ_m annak a véletlen számnak a várható értéke, amely azt mutatja, hogy egy veszteséges hívás után hanyadik hívás lesz a legközelebbi veszteséges hívás. A Markov-láncok elméletéből könnyen következik, hogy $\Gamma_r = 1/\Pi_r$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ és így speciálisan

$$\Pi_m = 1/\Gamma_m. \tag{122}$$

A feladat tehát Γ_m meghatározására redukálódik.

A Γ_r $(r = 1, 2, \ldots, m)$ mennyiségekre könnyen felírhatjuk a következő rekurzív képletet

$$\Gamma_r = 1 + q_{r,1}\Gamma_r + q_{r,2}(\Gamma_{r-1} + \Gamma_r) + \cdots + q_{r,r}(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_r), \tag{123}$$

ahol

$$q_{r,j} = \binom{r}{j}\int_0^\infty e^{-(r-j)\mu x}(1 - e^{-\mu x})^j dF(x). \tag{124}$$

Ugyanis tekintsünk egy hívást, amely az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport vonalait foglaltan találja. A következő olyan hívásig, amely az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalakat ismét foglaltan találja, minden esetre be kell következnie legalább egy hívásnak. Nézzük meg, hogy az első hívást még hány további hívás követi a legközelebbi olyan hívásig, amely az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalakat foglaltan találja. Ha az első hívásig eltelt idő alatt az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalakon folyamatban levő r beszélgetésből pontosan j beszélgetés fejeződik be, aminek a valószínűsége a (124) alatti $q_{r,j}$, akkor $j = 0$ esetén zérus az említett hívásig megtett további hívások száma, míg $j = 1, 2, \ldots, r$ esetben az említett hívásig megtett további hívások várható száma $\Gamma_{r-j+1} + \cdots + \Gamma_r$. Ezen utóbbi várható érték fennállása azzal indokolható, hogy minden egyes hívás pillanatában az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport vonalait tetszőlegesen átszámozhatjuk, anélkül, hogy ez bármiféle változást okozna meggondolásainkban. Végezzük el az átszámozást mindig olyképpen, hogy a foglalt vonalak rendelkezzenek a legkisebb sorszámokkal. Mivel ekkor az első hívás pillanatában a foglalt vonalak csoportja $(1, 2, \ldots, r-j)$, tehát a legközelebbi olyan hívásig eltelt hívások számának várható értéke, amely az $(1, 2, \ldots, r)$ vonalakat foglaltan találja, $\Gamma_{r-j+1} + \cdots + \Gamma_r$. Végül (123)-at a teljes várható érték-tétel alapján nyerjük.

Az ismeretlen Γ_r mennyiségek könnyen meghatározhatók a (123) képletből differenciaszámítás segítségével (vö. CH. JORDAN [20]). H. ASHCROFT [1] módszerét követve a következőképpen járhatunk el:

Legyen $\Gamma_0 = 1$ és $T_0 = 0, T_{r+1} = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_r$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$. Fejezzük ki (123)-ban a Γ_r-eket a T_r-ek segítségével és vegyük tekintetbe, hogy

$$\sum_{k=0}^{r} q_{r,k} = 1,$$

akkor felírható, hogy

(125) $$T_r = \sum_{k=0}^{r} q_{r,r-k} T_{k+1} - 1.$$

Definiáljuk a differencia-képzés Δ műveletét a szokott módon ($\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$). Mint ismeretes, felírható, hogy

(126) $$\Gamma_r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \Delta^j \Gamma_0,$$

ahol $\Delta^0 \Gamma_0 = \Gamma_0 = 1$. Eszerint elegendő a $\Delta^j \Gamma_0$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) ismeretleneket meghatározni. Mivel $\Gamma_0 = \Delta T_0$, tehát $\Delta^j \Gamma_0 = \Delta^{j+1} T_0$. A differenciaszámítás ismert képlete alapján most felírhatjuk, hogy

(127) $$\Delta^j T_0 = \sum_{r=0}^{j} (-1)^{j-r} \binom{j}{r} T_r.$$

Írjuk be (125)-öt (127)-be és használjuk fel a könnyen igazolható

(128) $$\sum_{r=k}^{j} (-1)^{j-r} \binom{j}{r} q_{r,r-k} = (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \varphi_j$$

azonosságot, akkor $j \geqq 1$-re azt nyerjük, hogy

$$\Delta^j T_0 = \sum_{r=0}^{j} (-1)^{j-r} \binom{j}{r} \sum_{k=0}^{r} q_{r,r-k} T_{k+1} = \sum_{k=0}^{j} T_{k+1} \sum_{r=k}^{j} (-1)^{j-r} \binom{j}{r} q_{r,r-k} =$$
$$= \varphi_j \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} T_{k+1} = \varphi_j \, (\Delta^{j+1} T_0 + \Delta^j T_0).$$

Innen

(129) $$\Delta^{j+1} T_0 = \frac{1-\varphi_j}{\varphi_j} \Delta^j T_0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával és $\Delta T_0 = \Gamma_0 = 1$ tekintetbevételével azt nyerjük, hogy

(130) $$\Delta^j \Gamma_0 = \Delta^{j+1} T_0 = \frac{1-\varphi_1}{\varphi_1} \cdot \frac{1-\varphi_2}{\varphi_2} \cdots \frac{1-\varphi_j}{\varphi_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

és így (126) szerint

(131) $$\Gamma_r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \prod_{i=1}^{j} \frac{1-\varphi_i}{\varphi_i} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

ahol az üres szorzat alatt 1 értendő. Minthogy $\Pi_m = 1/\Gamma_m$, tehát ezzel (121) igazolást nyert.

8. MEGJEGYZÉS. A tárgyalt PALM-féle modellnél az is megengedhető, hogy a rendelkezésre álló vonalak száma végtelen legyen. Ekkor Π_m nem a veszteség valószínűsége, hanem annak a valószínűsége, hogy a hívás az $(1, 2, \ldots, m)$ csoport valamennyi vonalát foglaltan találja és így kapcsolat csak m-nél nagyobb sorszámú vonalon jöhet létre. Viszont az $(1, 2, \ldots, m)$ csoport

szempontjából mindegy az, hogy a hívás elvész, vagy a csoporton kívüli vonalak valamelyikén valósul meg a kapcsolat. Ez a modell a túláramló forgalom tanulmányozására is hasznos. Vö. R. I. WILKINSON [59] és J. RIORDAN ([59] munka függeléke).

9. MEGJEGYZÉS. Jelölje $G_r(x)$ a fent említett PALM-féle modellnél két olyan egymást követő hívás között eltelt időtartam eloszlásfüggvényét, amelyik az $(1, 2, \ldots, r)$ csoport vonalait foglaltan találja. Könnyen látható, hogy ekkor $\alpha < \infty$ esetén

$$\int_0^\infty x\,dG_r(x) = \alpha\Gamma_r.$$

C. PALM [35] munkájában a $G_r(x)$ eloszlásfüggvényekre a következő integrálegyenletrendszert állítja fel:

$$(132)\quad G_r(x) = G_{r-1}(x) - \int_0^x (1-e^{-\mu y})[1-G_r(x-y)]\,dG_{r-1}(y), \quad (r=1,2,3,\ldots),$$

ahol $G_0(x) = F(x)$.

Ha bevezetjük a

$$(133)\quad \gamma_r(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dG_r(x), \quad (r=0,1,2,\ldots)$$

Laplace—Stieltjes transzformáltakat, akkor (132) alapján ezekre a következő rekurzív képlet írható fel:

$$(134)\quad \gamma_r(s) = \frac{\gamma_{r-1}(s+\mu)}{1-\gamma_{r-1}(s)+\gamma_{r-1}(s+\mu)}, \quad (r=1,2,\ldots),$$

ahol $\gamma_0(s) = \varphi(s)$. PALM a (134) egyenletekből kiindulva határozta meg a (121) képletet.

Megjegyezzük, hogy teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$(135)\quad \gamma_r(s) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{1-\varphi(s+i\mu)}{\varphi(s+i\mu)}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{r+1}\binom{r+1}{j}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{1-\varphi(s+i\mu)}{\varphi(s+i\mu)}}, \quad (r=0,1,2,\ldots),$$

ahol az üres szorzat alatt 1 értendő.

Ha speciálisan a hívások $\{\tau_n\}$ sorozata λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat, akkor $\varphi(s) = \lambda/(\lambda+s)$ és így a (135) képlet szerint

$$(136)\quad \gamma_r(s) = \frac{\lambda B_{r-1}(s)}{B_r(s)} \quad (r=0,1,2,\ldots),$$

ahol

$$(137)\quad B_r(s) = \lambda^{r+1} + \sum_{\nu=0}^{r}\binom{r+1}{\nu}s(s+\mu)\ldots(s+(r-\nu)\mu)\lambda^\nu \quad (r=-1,0,1,2,\ldots)$$

és az üres összeg alatt zérus értendő. A (136) képletet először C. PALM [35] határozta meg (vö. még A. J. HINCSIN [19]).

10. MEGJEGYZÉS. A telefon-rendszerek I. modelljének előzőleg tárgyalt kérdése szoros kapcsolatban van egy másfajta kiszolgálási problémával. Tegyük fel, hogy $m+1$ számú automatikusan működő termelő gép egyetlen kezelő felügyeletére van bízva. A gépek $0 \leqq t < \infty$ időközben folyamatosan termelnek, de előfordulhat, hogy véletlen hibák következtében leállnak és mindaddig állva maradnak, amíg a kezelő a hibát ki nem javította és a gépet el nem indította. Tegyük fel, hogy minden egyes gépre $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben leáll, feltéve, hogy t időpontban működik és ez az esemény független minden egyéb körülménytől. Tegyük fel továbbá, hogy a kiszolgálási idők egyforma eloszlású független pozitív valószínűségi változók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. A kezelő a javításokat tetszőleges sorrendben végezheti, feltesszük azonban, hogy okvetlenül javít, ha van álló gép. Jelölje $\xi(t)$ a t időpontban működő gépek számát. Továbbá jelölje rendre $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ az egymást követő kiszolgálások végpontjait és legyen $\xi(\delta_n - 0) = \xi_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ekkor a $\{\xi_n\}$ valószínűségi változók sorozata Markov-láncot alkot és a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = j\} = P_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ határeloszlás létezik és független a ξ_1 (illetve $\xi(0)$) változó kezdeti eloszlásától. Szerző korábbi [50] dolgozatában meghatározta a $\{P_j\}$ valószínűségeloszlás explicit alakját. Mint kiderül, ez az eloszlás pontosan megegyezik a telefonforgalom I. modelljére vonatkozó 1. TÉTELben szereplő $\{P_j\}$ eloszlással.

Ha a fent említett folyamatnál $\chi(t)$ valószínűségi változó jelöli a t időpontban (esetleg) folyamatban levő javításnak a t időponttól a javítás befejezéséig tartó időtartamának hosszát, akkor ha a rendszer állapotának leírására a $\{\xi(t), \chi(t)\}$ változópárt használjuk, a folyamat Markov-féle lesz. Ha $\alpha = \int\limits_0^\infty x\,dF(x) < \infty$, akkor a $\{\xi(0), \eta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlásának megfelelő megválasztásával definiálhatjuk a stacionárius folyamat fogalmát. Stacionárius folyamat esetén a $\{\xi_n\}$ Markov-lánc is stacionárius lesz, amelyre $\mathbf{P}\{\xi_n = j\} = P_j$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ minden n-re.

Az elmondottak szerint a telefon-forgalom I. modelljére vonatkozó $\{\eta_n\}$ stacionárius Markov-lánc ugyanazon sztochasztikus viselkedést mutatja, mint az $m+1$ gép kiszolgálásával kapcsolatos $\{\xi_n\}$ stacionárius Markov-lánc.

Jelölje G_{m+1} a kiszolgálások várható számát egy kiszolgálási szakaszban. Nyilvánvalóan fennáll, hogy $G_{m+1} = 1/P_m$. Tehát G_{m+1} pontosan megegyezik a veszteséges hívások közötti hívások számának Γ_m várható értékével az I. modellnél. G_{m+1} explicit alakját H. ASHCROFT [1] és korábban R. KRONIG [28], R. KRONIG és H. MONDRIA [29] határozta meg. A fentiek szerint így Γ_m explicit alakját is megadták.

Az említett kiszolgálási problémával tudomásunk szerint először A. J. HINCSIN [17] foglalkozott. HINCSIN azonban nem adott explicit megoldást. Azt a speciális esetet, midőn $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} (x \geqq 0)$, exponenciális eloszlásfüggvény, több szerző vizsgálta (vö. pl. W. FELLER [10] p. 379).

6. §. Az I. modell $m = \infty$ esetben

Tekintsük az I. modellt abban az esetben, midőn korlátlan számú vonal áll a hívások rendelkezésére, azaz midőn nincs elvesző hívás. Az erre az esetre vonatkozó eredmények megkaphatók az I. modellre vonatkozó eredményekből $m \to \infty$ határátmenettel. Erre az esetre az alábbi tételeket bizonyítjuk be.

8. TÉTEL: *A* $\{P_k\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *határeloszlás mindig létezik és független az* $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ *változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$P_k = \sum_{r=k}^{\infty} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} C_r, \tag{138}$$

ahol C_r*-et* (5) *definiálja.*

A $\{P_k\}$ *eloszlás r-edik binomiális momentuma egyszerűen*

$$B_r = C_r. \tag{139}$$

BIZONYÍTÁS: Az $\{\eta_n\}$ valószínűségi változók $m = \infty$ esetén is Markov-láncot alkotnak $\mathbf{P}\{\eta_{n+1} = k \mid \eta_n = j\} = p_{jk}$ átmenetvalószínűségekkel, ahol

$$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^{\infty} e^{-k\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{j+1-k} \, dF(x). \tag{140}$$

Az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc, könnyen beláthatóan, irreducibilis és nem-periodikus. F. G. FOSTER [14] tétele segítségével bebizonyítható, hogy az állapotok ergodikusak. Ugyanis FOSTER tételének alkalmazásához választhatjuk magukat a (138) alatti P_k valószínűségeket. Következőleg a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\eta_n = k\} = P_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ határeloszlás létezik és független az η_1 változó (és így az $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ változó-pár) kezdeti eloszlásától. A $\{P_k\}$ határeloszlás a következő egyenletrendszer egyértelműen meghatározott megoldása

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{\infty} p_{jk} P_j \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{141}$$

(vö. W. FELLER [10] p. 325), ahol természetesen

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1. \tag{142}$$

A (141) egyenletrendszer (10)-hez hasonlóan generátorfüggvények módszerével oldható meg. Legyen

(143) $$U(z)=\sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k,$$

akkor (141) szerint fennáll, hogy

(144) $$U(z)=\int_0^{\infty}(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,U(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x})\,dF(x).$$

Vezessük be a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás B_r $(r=0,1,2,\ldots)$ binomiális momentumait

(145) $$B_r=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}P_k.$$

Ha B_r létezik, akkor (13) szerint erre fennáll, hogy

(146) $$B_r=\frac{1}{r!}\left(\frac{d^r\,U(z)}{dz^r}\right)_{z=1}.$$

Most (142) szerint $B_0=1$, és ha (144)-et z szerint r-szer differenciáljuk és $z=1$-et írunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$B_r=(B_r+B_{r-1})\,\varphi_r \qquad (r=1,2,3,\ldots),$$

azaz

$$B_r=\frac{\varphi_r}{1-\varphi_r}B_{r-1} \qquad (r=1,2,3,\ldots).$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával azt nyerjük, hogy

(147) $$B_r=C_r \qquad (r=0,1,2,\ldots),$$

amivel a (139) képlet igazolást nyert.

Miután $\lim_{r\to\infty}\varphi_r=0$, tehát

$$\lim_{r\to\infty}\frac{C_r}{C_{r-1}}=0.$$

Így (146) szerint felírható, hogy

(148) $$U(z)=\sum_{r=0}^{\infty}C_r(z-1)^r$$

és ez a sor valamennyi z értékre konvergens. Innen

(149) $$P_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^kU(z)}{dz^k}\right)_{z=0}=\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}C_r, \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

ami bizonyítandó volt.

11. MEGJEGYZÉS. Mint láttuk, a 8. TÉTEL bizonyításához elegendő kimutatni, hogy $B_r=C_r$ $(r=0,1,2,\ldots)$. Innen a $\{P_k\}$ eloszlás már könnyen

megkapható. A B_r meghatározására a következő szemléletes érvelést is alkalmazhatjuk. Definiáljuk az $\{\eta_n\}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ stacionárius Markov-láncot, amelyre $\mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k$ minden n-re. Tekintsük most egy hívás érkezésének az időpillanatát. Értelmezzük ezzel kapcsolatban az ε_n $(n=1,2,3,\ldots)$ valószínűségi változókat a következőképpen: $\varepsilon_n=1$, ha a hívás pillanatában az n-edik előző hívásból eredő beszélgetés még folyamatban van és $\varepsilon_n=0$, ha ez a beszélgetés már befejeződött. Ekkor felírható, hogy

$$P_k=\mathbf{P}\{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+\cdots=k\}, \qquad (k=0,1,2,\ldots). \tag{150}$$

Most felírható, hogy

$$B_r=\mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n+\cdots}{r}\right\}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{r}\right\}. \tag{151}$$

Okoskodásunknak ez a lépése szemléletes, ugyanis igazolni kellene, hogy a várható érték-képzés és a határérték vétele felcserélhető egymással. Mivel

$$\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{r}=\sum_{j_1+j_2+\ldots+j_r\leqq n}\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_1+j_2}\ldots\varepsilon_{j_1+j_2+\ldots+j_r},$$

ahol $j_1, j_2, \ldots, j_r$ pozitív egész számok, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\left\{\binom{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n}{r}\right\}=\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{j_r=1}^{\infty}\mathbf{M}\{\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_1+j_2}\ldots\varepsilon_{j_1+j_2+\ldots+j_r}\}.$$

Egyszerű számítás mutatja, hogy

$$\mathbf{M}\{\varepsilon_{j_1}\varepsilon_{j_1+j_2}\ldots\varepsilon_{j_1+j_2+\ldots+j_r}\}=\varphi_r^{j_1}\varphi_{r-1}^{j_2}\ldots\varphi_1^{j_r}$$

és tehát

$$B_r=\frac{\varphi_1}{1-\varphi_1}\frac{\varphi_2}{1-\varphi_2}\cdots\frac{\varphi_r}{1-\varphi_r}=C_r, \tag{152}$$

ami bizonyítandó volt.

9. TÉTEL: *Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor a* $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ *határeloszlás létezik és független az* $\{\eta(0), \zeta(0)\}$ *változó-pár kezdeti eloszlásától. Fennáll, hogy*

$$P_k^*=\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\frac{C_{r-1}}{r} \qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{153}$$

és

$$P_0^*=1-\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\frac{C_{r-1}}{r}. \tag{154}$$

A $\{P_k^*\}$ eloszlás r-edik binomiális momentuma

$$B_r^*=\frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu} \qquad (r=1,2,3,\ldots), \tag{155}$$

míg $B_0^*=1$.

BIZONYÍTÁS: Jelölje $M_j(t)$ ismét a $(0, t]$ időközben előforduló $E_j \to E_{j+1}$ átmenetek várható számát. Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha < \infty$, akkor (77) szerint fennáll, hogy bármely $h > 0$ esetén

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_j(t+h) - M_j(t)}{h} = \frac{P_j}{\alpha}, \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{156}$$

A teljes valószínűségi tétel alkalmazásával (79)-hez hasonlóan felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = \sum_{j=k-1}^{\infty} \binom{j+1}{k} \int_0^t e^{-k\mu(t-u)} (1 - e^{-\mu(t-u)})^{j+1-k} [1 - F(t-u)]\, dM_j(u).$$

Innen (156) fennállása szerint (82) alkalmazásával következik, hogy a $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t) = k\} = P_k^*$ határérték létezik és fennáll, hogy

$$P_k^* = \sum_{j=k-1}^{\infty} p_{jk}^* P_j, \tag{157}$$

ahol

$$p_{jk}^* = \frac{1}{\alpha} \binom{j+1}{k} \int_0^{\infty} e^{-k\mu x} (1 - e^{-\mu x})^{j+1-k} [1 - F(x)]\, dx. \tag{158}$$

Ha bevezetjük az

$$U^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^* z^k \tag{159}$$

generátorfüggvényt, akkor erre (157) szerint fennáll, hogy

$$U^*(z) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} (1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}) U(1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}) [1 - F(x)]\, dx. \tag{160}$$

A

$$B_r^* = \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} P_k^* = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r U^*(z)}{dz^r} \right)_{z=1} \tag{161}$$

binomiális momentumokra egyrészt $B_0^* = 1$, másrészt (160)-ból r-szeres z-szerinti deriválással és $z = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$B_r^* = [B_r + B_{r-1}] \frac{1 - \varphi_r}{r\alpha\mu}, \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots). \tag{162}$$

Miután, mint láttuk, ebben az esetben fennáll, hogy

$$B_r = [B_r + B_{r-1}] \varphi_r, \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

tehát

$$B_r^* = \frac{1 - \varphi_r}{\varphi_r} \frac{B_r}{r\alpha\mu} = \frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu}, \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots), \tag{163}$$

ami bizonyítja (155)-öt.

Innen (161) szerint következik, hogy

$$U^*(z)=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_{r-1}}{r\alpha\mu}(z-1)^r \tag{164}$$

és ez a sor mindenütt konvergens. Végül

$$P_k^*=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k U^*(z)}{dz^k}\right)_{z=0}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha\mu}\sum\limits_{r=k}^{\infty}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\dfrac{C_{r-1}}{r}, & (k=1,2,3,\ldots),\\ 1-\dfrac{1}{\alpha\mu}\sum\limits_{r=1}^{\infty}(-1)^{r-1}\dfrac{C_{r-1}}{r}, & (k=0),\end{cases} \tag{165}$$

amivel (153) és (154) bizonyítást nyert.

10. TÉTEL: *A $\{P_k^*\}$ és $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás között fennáll a következő összefüggés*

$$P_k^*=\frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu}\qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{166}$$

és

$$P_0^*=1-\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_{k-1}}{k}. \tag{167}$$

BIZONYÍTÁS: Jelölje $M_k(t)$ a $(0,t]$ időközben előforduló $E_k\to E_{k+1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ átmenetek várható számát és $N_k(t)$ a $(0,t]$ időközben előforduló $E_k\to E_{k-1}$ $(k=1,2,3,\ldots)$ átmenetek várható számát. A (78), illetve (86) képletek szerint fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_k(t)}{t}=\frac{P_k}{\alpha},\qquad (k=0,1,2,\ldots) \tag{168}$$

és

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t}=P_k^*k\mu,\qquad (k=1,2,\ldots). \tag{169}$$

Miután most is érvényes, hogy $|M_{k-1}(t)-N_k(t)|\leqq 1$, tehát

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_{k-1}(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{N_k(t)}{t}, \tag{170}$$

amely (168) és (169) tekintetbevételével igazolja a (166) képletet és nyilvánvalóan $P_0^*=1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}P_k^*$, és ez éppen a (167) képlet.

12. MEGJEGYZÉS. Az $\{\eta(t), 0\leqq t<\infty\}$ sztochasztikus folyamat felfogható, mint a $\{\tau_n\}$ rekurrens folyamat által származtatott másodlagos folyamat. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\eta(0)=0$ és τ_1 eloszlásfüggvénye is $F(x)$. Jelölje rendre $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n,\ldots$ az egymást követő beszélgetések időtartamait és legyen

$$f(u,x)=\begin{cases}1, & \text{ha } 0\leqq u\leqq x,\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases} \tag{171}$$

Ekkor felírható, hogy

(172) $$\eta(t) = \sum_{0<\tau_n \leq t} f(t-\tau_n, \chi_n).$$

Legyen $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k(t)$ és jelölje $G(t,z)$ az $\eta(t)$ valószínűségi változó generátorfüggvényét, azaz

(173) $$G(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k.$$

Szerző [45] dolgozatának 1. tétele alapján $G(t,z)$-re a következő integrálegyenlet írható fel

(174) $$G(t,z) = \int_0^t G(t-u,z)\left[1-(1-z)e^{-\mu(t-u)}\right] dF(u) + 1 - F(t).$$

Erre a lehetőségre R. SYSKI úr volt szíves a figyelmemet felhívni, rámutatván arra, hogy [45] dolgozatom eredményei alapján, illetve R. FORTET [13] munkája alapján $G(t,z)$-re a következő integrálegyenlet írható fel

(175) $$G(t,z) = 1-(1-z)\int_0^t G(t-u,z)e^{-\mu(t-u)} dm(u),$$

ahol $m(t)$ jelöli a $(0,t]$ időközben előforduló hívások várható számát.

A (174), illetve a vele ekvivalens (175) egyenlet Laplace-transzformáció alkalmazásával megoldható. A Laplace-transzformáltak megfordításával pedig a $P_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ valószínűségek is kiszámíthatók. A fent említett speciális kezdeti feltételre vonatkozó $P_k(t)$ valószínűségek ismeretében az általános esetre vonatkozó megoldás nyilvánvaló módon felírható.

Vezessük be a

(176) $$\psi(s,z) = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t,z)\, dt$$

Laplace-transzformáltat. Ekkor (174), illetve (175) fennállásából következik, hogy

(177) $$\psi(s,z) = \frac{1}{s} - \frac{(1-z)\varphi(s)}{1-\varphi(s)}\psi(s+\mu,z).$$

Ennek a képletnek ismételt alkalmazásával $\psi(s,z)$ sorjában kifejezhető $\psi(s+n\mu,z)$, $(n=1,2,3,\ldots)$, segítségével. Ha tekintetbe vesszük, hogy $\lim_{n\to\infty}\psi(s+n\mu,z)=0$, akkor végül is azt nyerjük, hogy

(178) $$\psi(s,z) = \frac{1}{s} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j(1-z)^j}{s+j\mu} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)}$$

és ez a sor minden z értékre konvergens ha $\Re(s)>0$. A z^k együtthatóját véve azt kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}\binom{j}{k}}{s+j\mu}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)},\qquad \text{ha } k>0, \tag{179}$$

míg

$$\int_0^\infty e^{-st}P_0(t)dt=\frac{1}{s}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{s+j\mu}\prod_{i=0}^{j-1}\frac{\varphi(s+i\mu)}{1-\varphi(s+i\mu)}. \tag{180}$$

Ezek megfordításával $P_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ egyértelműen meghatározható.

Láttuk, hogy a $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ határértékek léteznek és függetlenek a kezdeti állapottól. Ha $\lim\limits_{t\to\infty}P_k(t)=P_k^*$ $(k=0,1,2,\ldots)$ létezik, akkor erre fenn kell állnia annak, hogy

$$P_k^*=\lim_{s\to 0}s\int_0^\infty e^{-st}P_k(t)dt \tag{181}$$

és mivel

$$\lim_{s\to 0}\frac{s\varphi(s)}{1-\varphi(s)}=\frac{1}{\alpha},$$

tehát így azt nyerjük, hogy

$$P_k^*=\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{j}\binom{j}{k}\prod_{i=1}^{j-1}\frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)},\qquad (k=1,2,3,\ldots), \tag{182}$$

míg

$$P_0^*=1-\frac{1}{\alpha\mu}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\prod_{i=1}^{j-1}\frac{\varphi(i\mu)}{1-\varphi(i\mu)}, \tag{183}$$

ami megegyezik a 9. TÉTEL eredményeivel.

7. §. Az I. modell $m=\infty$ és stacionárius esetben

A **3.** § eredményeit szó szerint átvehetjük, ha azokban $m=\infty$-t írunk. Ha ismét $\zeta(t)$ jelöli a t időpontnak a közvetlen utána következő hívástól való távolságát, akkor a $\zeta(t)$ valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvényére fennáll az alábbi tétel:

11. TÉTEL: *Ha $F(x)$ nem-rácsos eloszlásfüggvény és $\alpha<\infty$, akkor léteznek a következő határeloszlások*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\zeta(t)\leq x\mid\eta(t)=k\}=F_k^*(x),\qquad (k=0,1,2,\ldots), \tag{184}$$

ahol

$$(185)\qquad F_k^*(x)=\frac{1}{\alpha P_k^*}\sum_{j=k-1}^{\infty}P_j\binom{j+1}{k}\int_0^{\infty}e^{-k\mu y}(1-e^{-\mu y})^{j+1-k}\,[F(x+y)-F(y)]\,dy,$$

és ezek függetlenek az $\{\eta(0),\zeta(0)\}$ *változó-pár kezdeti eloszlásától.*

Ez az 5. TÉTEL közvetlen következménye, ha abban $m=\infty$ és a szereplő valószínűségeket erre az esetre tekintjük érvényesnek.

Mint már korábban is említettük, az általunk vizsgált folyamat Markov-folyamatként tekinthető, ha a rendszer állapotát az $\{\eta(t),\zeta(t)\}$ valószínűségi változó-párral jellemezzük. Ha feltételezzük, hogy $\alpha<\infty$ és az $\{\eta(0),\zeta(0)\}$ változó-pár kezdeti eloszlása

$$(186)\qquad \mathbf{P}\{\zeta(0)\leqq x,\ \eta(0)=k\}=P_k^*F_k^*(x),\qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

akkor az $\{\eta(t),\zeta(t)\}$ sztochasztikus folyamat stacionárius lesz és ekkor tetszőleges t időpontra vonatkozó eloszlás is megegyezik a kezdeti eloszlással. Ebben az esetben valamennyi n-re fenn fog állni, hogy

$$(187)\qquad \mathbf{P}\{\eta_n=k\}=P_k\qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

vagyis az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc is stacionárius lesz. Ez onnan következik, hogy fennáll

$$(188)\qquad P_k=\sum_{j=k-1}^{\infty}P_j^*\binom{j+1}{k}\int_0^{\infty}e^{-k\mu x}(1-e^{-\mu x})^{j+1-k}\,dF_j(x).$$

Stacionárius folyamat esetén $\mathbf{P}\{\zeta(0)\leqq x\}=F^*(x)$ és mivel $\zeta(0)=\tau_1$, tehát érvényes, hogy a hívások időpontjainak $\{\tau_n\}$ sorozata stacionárius rekurrens folyamatot alkot.

8. §. Az I. modell $m=\infty$ és Poisson-féle $\{\tau_n\}$ esetben

Tekintsük az I. modellt $m=\infty$ esetén, midőn $\{\tau_n\}$ λ eseménysűrűségű Poisson-folyamat. Ekkor már az $\{\eta(t),\ 0\leqq t<\infty\}$ folyamat is Markov-féle lesz. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $\eta(0)=0$. Ekkor $\varphi(s)=\lambda/(\lambda+s)$ és a $\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k(t)$ valószínűségek Laplace-transzformáltjaira (179) és (180) képletek alapján fennáll, hogy

$$(189)\qquad \int_0^{\infty}e^{-st}P_k(t)\,dt=\sum_{j=k}^{\infty}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}\frac{\lambda^j}{s(s+\mu)\cdots(s+j\mu)},\qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Ennek megfordításával $P_k(t)$ meghatározható, azonban, mint később látni fogjuk (vö. (256) képlet), közvetlenül is felírható, hogy

$$(190)\qquad P_k(t)=\frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})}}{k!}\left[\frac{\lambda(1-e^{-\mu t})}{\mu}\right]^k.$$

13. MEGJEGYZÉS. Most az $E_k \rightarrow E_{k+1}$ átmenetek számának eloszlásával szeretnénk foglalkozni. Jelölje $R_k(x)$ az egymást követő $E_k \rightarrow E_{k+1}$ átmenetek $(k=0, 1, 2, \ldots)$ közötti időtartamok eloszlásfüggvényét és legyen ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja

$$\psi_k(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dR_k(x). \tag{191}$$

A következőkben megmutatjuk, hogy miként lehet az $R_k(x)$ eloszlásfüggvénvt, illetve a $\psi_k(s)$ Laplace—Stieltjes transzformáltat meghatározni.

Erre nézve tekintsük az $M_k(t)$ függvényt, a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \rightarrow E_{k-1}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ átmenetek várható számát. Könnyen indokolható, hogy fennáll az

$$M_k'(t) = \lambda P_k(t) \tag{192}$$

összefüggés.

Jelölje továbbá $G_0(x)$ az első $E_0 \rightarrow E_1$ átmenet és a $t=0$ időpont közti távolságnak az eloszlásfüggvényét és legyen rendre $G_1(x), G_2(x), \ldots, G_k(x), \ldots$ az egymást követő $E_0 \rightarrow E_1$, $E_1 \rightarrow E_2$, $E_2 \rightarrow E_3, \ldots, E_k \rightarrow E_{k+1}, \ldots$ átmenetek közötti időtartamok hosszának eloszlásfüggvénye. Könnyen látható, hogy a $G_r(x)$ eloszlásfüggvények éppen a 9. MEGJEGYZÉSben említett PALM-féle eloszlásfüggvények. Ha ezek Laplace—Stieltjes transzformáltjait $\gamma_r(s)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ jelöli, akkor a (136) képlet szerint erre fennáll, hogy

$$\gamma_r(s) = \frac{\lambda B_{r-1}(s)}{B_r(s)}, \qquad (r=0, 1, 2, \ldots), \tag{193}$$

ahol a $B_r(s)$ függvényeket (137) értelmezi.

Nagyon egyszerűen belátható, hogy fennáll

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dM_k(t) = \frac{\gamma_0(s)\gamma_1(s)\cdots\gamma_k(s)}{1-\psi_k(s)} \tag{194}$$

és innen (192) és (193) tekintetbevételével az adódik, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st} P_k(t)\, dt = \frac{\lambda^k}{B_k(s)\,[1-\psi_k(s)]}. \tag{195}$$

Ebből

$$\psi_k(s) = 1 - \frac{\lambda^k}{\left[\lambda^{k+1} + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k+1}{\nu} s(s+\mu)\ldots(s+(k-\nu)\mu)\lambda^\nu\right]} \cdot \frac{1}{\left[\sum_{j=k}^{\infty} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} \frac{\lambda^j}{s(s+\mu)\ldots(s+j\mu)}\right]}. \tag{196}$$

Ennek megfordításával $R_k(x)$ egyértelműen meghatározható. Speciálisan (196)-ból kiadódik, hogy

$$\varrho_k = \int_0^\infty x\,dR_k(x) = \frac{1}{\lambda e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}} \tag{197}$$

és

$$\sigma_k^2 = \int_0^\infty (x-\varrho_k)^2\,dR_k(x) = \frac{2\varrho_k}{\lambda} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k+1}{\nu} (k-\nu)! \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\nu-k} - \tag{198}$$
$$-\varrho_k^2 \left[1 + \frac{2}{k!} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1} \left(\sum_{\nu=1}^{j} \frac{1}{\nu}\right)\right].$$

A fenti képletek birtokában könnyen felírható a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek számának pontos eloszlása. Most azonban csak az aszimptotikus eloszlásról teszünk említést.

Ha $\nu_t^{(k)}$ jelöli a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek számát, akkor a folyamat kezdeti állapotától függetlenül fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{M}\{\nu_t^{(k)}\}}{t} = \frac{1}{\varrho_k} \tag{199}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2\{\nu_t^{(k)}\}}{t} = \frac{\sigma_k^2}{\varrho_k^3}. \tag{200}$$

(Vö. [49] 4. §.) Továbbá a [49] dolgozat 3. §-ának eredménye szerint felírható, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\nu_t^{(k)} - \frac{t}{\varrho_k}}{\sqrt{\frac{\sigma_k^2 t}{\varrho_k^3}}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du, \tag{201}$$

azaz a $\nu_t^{(k)}$ valószínűségi változó $t \to \infty$ esetén aszimptotikusan normális eloszlást követ.

14. MEGJEGYZÉS. Ezután jelölje $\beta_k(t)$ valószínűségi változó a $(0, t]$ időköz azon u pontjaiból álló halmaz Lebesgue-mértékét, amelyre $\eta(u) \geq k$. Az $\eta(0)$ változó kezdeti eloszlásától független aszimptotikus törvények lesznek érvényesek a $\beta_k(t)$ valószínűségi változók eloszlására, midőn $t \to \infty$.

Mindenekelőtt tekintsük folyamatunknál az egymást követő $E_k \to E_{k+1}$, $E_{k+1} \to E_k$, $E_k \to E_{k+1}, \ldots$ átmenetek időpontjait. Könnyen látható, hogy ezen időpontok közötti különbségek független valószínűségi változók. Az egymást követő $E_{k+1} \to E_k$ és $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek közötti időkülönbségek eloszlásfüggvénye éppen a PALM-féle $G_k(x)$ eloszlásfüggvény és ennek Laplace—Stieltjes transzformáltja a (136) képlet szerint

$$\gamma_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dG_k(x)=\frac{\lambda B_{k-1}(s)}{B_k(s)}. \tag{202}$$

Ha az egymást követő $E_k\to E_{k+1}$ és $E_{k+1}\to E_k$ átmenetek közötti időtartam eloszlásfüggvényét $H_k(x)$ jelöli, akkor nyilvánvalóan felírható, hogy

$$R_k(x)=\int_0^x H_k(x-y)\,dG_k(y) \tag{203}$$

és innen Laplace—Stieltjes transzformációra áttérve azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,dH_k(x)=\frac{\psi_k(s)}{\gamma_k(s)}. \tag{204}$$

Legyen most

$$\alpha_k=\int_0^\infty x\,dG_k(x),\qquad \beta_k=\int_0^\infty x\,dH_k(x) \tag{205}$$

és

$$\sigma^2_{\alpha,k}=\int_0^\infty (x-\alpha_k)^2\,dG_k(x),\qquad \sigma^2_{\beta,k}=\int_0^\infty (x-\beta_k)^2\,dH_k(x). \tag{206}$$

Ekkor (203) szerint fennáll, hogy

$$\varrho_k=\alpha_k+\beta_k \tag{207}$$

és

$$\sigma_k^2=\sigma^2_{\alpha,k}+\sigma^2_{\beta,k}. \tag{208}$$

Az α_k és $\sigma^2_{\alpha,k}$ könnyen meghatározható (202) segítségével. Mégpedig azt nyerjük, hogy

$$\alpha_k=\frac{1}{\lambda}\sum_{\nu=0}^{k}\nu!\binom{k}{\nu}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu} \tag{209}$$

és

$$\sigma^2_{\alpha,k}=\frac{2\alpha_k}{\lambda}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\nu!\binom{k}{\nu}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu}\right)-\alpha_k^2-\frac{2}{\lambda\mu}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}j!\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}. \tag{210}$$

A β_k és $\sigma^2_{\beta,k}$ hasonlóan határozható meg, de a (207) és (208) képletekből közvetlenül is felírható, miután már ϱ_k és σ_k^2 ismeretes.

Hivatkozunk [51] dolgozatunk eredményeire. Ezek szerint az $\eta(0)$ változó kezdeti eloszlásától függetlenül fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{M}\{\beta_k(t)\}}{t}=\frac{\beta_k}{\alpha_k+\beta_k} \tag{211}$$

és

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D^2\{\beta_k(t)\}}{t} = \frac{\beta_k^2 \sigma_{\alpha,k}^2 + \alpha_k^2 \sigma_{\beta,k}^2}{(\alpha_k+\beta_k)^3}. \tag{212}$$

Továbbá a $\beta_k(t)$ valószínűségi változó $t\to\infty$ esetén aszimptotikusan normális eloszlású, azaz fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\beta_k(t) - \dfrac{\beta_k t}{\alpha_k+\beta_k}}{\sqrt{\dfrac{\beta_k^2\sigma_{\alpha,k}^2 + \alpha_k^2\sigma_{\beta,k}^2}{(\alpha_k+\beta_k)^3}\, t}} \leqq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du. \tag{213}$$

A fentiekkel kapcsolatban még utalunk [47] dolgozatunkra, ahol ugyanezen problémával is foglalkozunk.

15. MEGJEGYZÉS. A fentiekben szereplő α_k, β_k, $\sigma_{\alpha,k}^2$ és $\sigma_{\beta,k}^2$ mennyiségek meghatározására egy másik eljárást is ismertetünk. Tegyük fel most, hogy $\eta(0)=k$ (k rögzített) és legyen ennél a folyamatnál is $\mathbf{P}\{\eta(t)=j\}=P_j(t)$. A (190) képlet felhasználásával egyszerűen belátható, hogy most fennáll

$$P_j(t) = \sum_{i=0}^{j} \binom{k}{i} (1-e^{-\mu t})^{k-i} e^{-i\mu t} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right]^{j-i}}{(j-i)!}. \tag{214}$$

A (214)-ből is leolvasható és a korábbiakból is következik, hogy a

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t) = P_j^* = P_j = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} \tag{215}$$

határérték létezik és látszik, hogy a konvergencia exponenciális jellegű.

Ha esetünkben is $M_k(t)$ jelöli a $(0, t]$ időközben előforduló $E_k \to E_{k+1}$ átmenetek várható számát és $N_{k+1}(t)$ jelöli a $(0, t]$ időközben előforduló $E_{k+1} \to E_k$ átmenetek várható számát, akkor ezekre fennáll, hogy

$$M_k'(t) = \lambda P_k(t) \tag{216}$$

és

$$N_{k+1}'(t) = (k+1)\mu P_{k+1}(t). \tag{217}$$

Továbbá könnyen megindokolható, hogy

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dM_k(t) = \frac{\gamma_k(s)}{1-\psi_k(s)} \tag{218}$$

és

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dN_{k+1}(t) = \frac{\psi_k(s)}{1-\psi_k(s)}. \tag{219}$$

Most a (217) és (219) felhasználásával azt nyerjük, hogy

(220) $$\psi_k(s) = \frac{(k+1)\mu \int\limits_0^\infty e^{-st} P_{k+1}(t)\,dt}{1+(k+1)\mu \int\limits_0^\infty e^{-st} P_{k+1}(t)\,dt}$$

és innen (216) és (218) szerint

(221) $$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dG_k(x) = \gamma_k(s) = \frac{\lambda \int\limits_0^\infty e^{-st} P_k(t)\,dt}{1+(k+1)\mu \int\limits_0^\infty e^{-st} P_{k+1}(t)\,dt},$$

továbbá (204) szerint

(222) $$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dH_k(x) = \frac{\psi_k(s)}{\gamma_k(s)} = \frac{(k+1)\mu \int\limits_0^\infty e^{-st} P_{k+1}(t)\,dt}{\lambda \int\limits_0^\infty e^{-st} P_k(t)\,dt}.$$

A fenti képletekből (214) tekintetbevételével a szóban forgó Laplace—Stieltjes-transzformáltak meghatározhatók. Ezek azonban látszólag bonyolultabb kifejezésekre vezetnek, mint a korábbi hasonló képletek. Mint látni fogjuk, ellenben a várható értékek, szórások (és általában a momentumok) kiszámítására jól felhasználhatók.

Most be fogjuk bizonyítani, hogy

(223) $$\alpha_k = \frac{\mathfrak{P}_k}{\lambda P_k},$$

(224) $$\beta_k = \frac{1-\mathfrak{P}_k}{\lambda P_k},$$

(225) $$\sigma^2_{\alpha,k} = \alpha_k\left(2\frac{R_k}{P_k} + \alpha_k\right) - 2\frac{R_0+R_1+\cdots+R_k}{\lambda P_k},$$

(226) $$\sigma^2_{\beta,k} = \beta_k\left(2\frac{R_k}{P_k} - \beta_k\right) + 2\frac{R_0+R_1+\cdots+R_k}{\lambda P_k},$$

ahol

(227) $$P_j = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}$$

és

(228) $$\mathfrak{P}_j = P_0 + P_1 + \cdots + P_j.$$

Továbbá

$$R_0 = -\frac{1}{\mu}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}\right) \tag{229}$$

és

$$R_j = P_j\left[\frac{R_0}{P_0}+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{P}_i}{P_i}-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=k}^{j-1}\frac{1}{P_i}\right]. \tag{230}$$

A fenti állítások bizonyítására vezessük be a következő mennyiségeket

$$R_j = \int_0^{\infty}[P_j(t)-P_j]\,dt \qquad (j=0,1,2,\ldots) \tag{231}$$

és

$$S_j = \int_0^{\infty}t[P_j(t)-P_j]\,dt \qquad (j=0,1,2,\ldots), \tag{232}$$

amelyek (214)-re való tekintettel léteznek. Felírható továbbá, hogy

$$\int_0^{\infty}e^{-st}P_j(t)\,dt = P_j s^{-1}+R_j-S_j s+o(s), \tag{233}$$

ha $s\to 0$.

Most, miután

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}\,dG_k(x) = 1-\alpha_k s+\frac{\sigma_{\alpha,k}^2+\alpha_k^2}{2}s^2+o(s^2) \tag{234}$$

és

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}\,dH_k(x) = 1-\beta_k s+\frac{\sigma_{\beta,k}^2+\beta_k^2}{2}s^2+o(s^2), \tag{235}$$

ha $s\to 0$, a (221) és (222)-ből (233) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\alpha_k = \frac{1+(k+1)\mu R_{k+1}-\lambda R_k}{\lambda P_k}, \tag{236}$$

$$\beta_k = \frac{\lambda R_k-(k+1)\mu R_{k+1}}{\lambda P_k}, \tag{237}$$

$$\sigma_{\alpha,k}^2 = \alpha_k\left(2\frac{R_k}{P_k}+\alpha_k\right)-2\frac{\lambda S_k-(k+1)\mu S_{k+1}}{\lambda P_k} \tag{238}$$

és

$$\sigma_{\beta,k}^2 = \beta_k\left(2\frac{R_k}{P_k}-\beta_k\right)+2\frac{\lambda S_k-(k+1)\mu S_{k+1}}{\lambda P_k}, \tag{239}$$

ahol tekintetbe vettük, hogy $(k+1)\mu P_{k+1}=\lambda P_k$.

Innen speciálisan kiadódik, hogy

(240) $$\varrho_k = \alpha_k + \beta_k = \frac{1}{\lambda P_k}$$

és

(241) $$\sigma_k^2 = \sigma_{\alpha,k}^2 + \sigma_{\beta,k}^2 = 2\varrho_k \frac{R_k}{P_k} + \varrho_k(\alpha_k - \beta_k).$$

A fenti képletekben már csak az R_j és S_j mennyiségek ismeretlenek. Ezek meghatározására vegyük tekintetbe, hogy a $P_j(t)$ valószínűségek kielégítik a következő differenciálegyenletrendszert:

(242) $$\frac{dP_j(t)}{dt} = \Phi_j(t) - \Phi_{j-1}(t), \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

ahol

$$\Phi_j(t) = (j+1)\mu P_{j+1}(t), -\lambda P_j(t), \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

míg $\Phi_{-1}(t) \equiv 0$. A kezdeti feltételek

(243) $$P_j(0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k, \\ 0, & \text{ha } j \neq k. \end{cases}$$

(242)-ből következik, hogy

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \int_0^\infty \Phi_{j-1}(t)\,dt + P_j - P_j(0)$$

és ennek ismételt alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)].$$

Másrészt könnyen belátható, hogy

(244) $$(j+1)\mu R_{j+1} - \lambda R_j = \int_0^\infty \Phi_j(t)\,dt = \sum_{i=0}^{j} [P_i - P_i(0)]$$

és innen $j = k$ helyettesítéssel

(245) $$(k+1)\mu R_{k+1} - \lambda R_k = \mathfrak{P}_k - 1.$$

Most a (236) és (237) képletekbe behelyettesítve (245)-öt, megkapjuk a (223) és (224) összefüggéseket.

A (242)-ből az is következik, hogy

$$\int_0^\infty t\,\Phi_j(t)\,dt = \int_0^\infty t\,\Phi_{j-1}(t)\,dt - R_j$$

és ennek ismételt alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty t\,\Phi_j(t)\,dt = -(R_0 + R_1 + \cdots + R_j).$$

Mivel könnyen láthatóan

$$(246)\qquad (k+1)\mu S_{k+1}-\lambda S_k=\int_0^\infty t\Phi_k(t)dt=-(R_0+R_1+\cdots+R_k),$$

tehát (238) és (239) szerint ezzel (225) és (226) is igazolást nyert.

Végül az R_j ismeretlenek explicit meghatározása marad csak hátra. Ezek a (244) egyenletrendszer megoldásával nyerhetők. Eszerint fennáll

$$(247)\qquad (j+1)\mu R_{j+1}-\lambda R_j=\begin{cases}\mathfrak{P}_j, & (j=0,1,\ldots,k-1)\\ \mathfrak{P}_j-1, & (j=k,k+1,\ldots)\end{cases}$$

és nyilvánvalóan

$$(248)\qquad \sum_{j=0}^{\infty} R_j=0.$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy $(j+1)\mu P_{j+1}=\lambda P_j$, akkor (247)-ből következik, hogy

$$(249)\qquad \frac{R_{j+1}}{P_{j+1}}-\frac{R_j}{P_j}=\begin{cases}\dfrac{\mathfrak{P}_j}{\lambda P_j}, & (j=0,1,\ldots,k-1)\\[2mm] \dfrac{\mathfrak{P}_j-1}{\lambda P_j}, & (j=k,k+1,\ldots).\end{cases}$$

A fenti egyenletekből összegezéssel azt nyerjük, hogy

$$(250)\qquad \frac{R_j}{P_j}-\frac{R_0}{P_0}=\sum_{i=0}^{j-1}\frac{\mathfrak{P}_i}{\lambda P_i}-\sum_{i=k}^{j-1}\frac{1}{\lambda P_i}\qquad (j=1,2,3,\ldots)$$

és ezzel (230) igazolást nyert. Végül R_0 meghatározható (248) segítségével, vagy közvetlenül is kiszámítható

$$(251)\qquad P_0(t)=e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})}(1-e^{-\mu t})^k=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k}(1-e^{-\mu t})^j$$

figyelembevételével. Eszerint

$$(252)\qquad R_0=\int_0^\infty [P_0(t)-P_0]dt=-\frac{1}{\mu}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j-k}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}\right),$$

amely éppen a (229) képlet.

Végül még megjegyezzük, hogy könnyen beláthatóak a következő azonosságok

$$\frac{\mathfrak{P}_j}{P_j}=\sum_{\nu=0}^{j}\nu!\binom{j}{\nu}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu}$$

és

$$\sum_{i=0}^{j}\frac{\mathfrak{P}_i}{P_i}=\sum_{\nu=0}^{j}\nu!\binom{j+1}{\nu+1}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\nu},$$

amelyek felhasználhatók a kérdéses várható értékek és szórásnégyzetek explicit kifejezéseiben.

9. §. Az I. modell általánosítása $m=\infty$ esetben

Tekintsük most az I. modellt abban az esetben, midőn a rendelkezésre álló vonalak száma $m=\infty$. Tegyük fel, hogy a beszélgetések időtartamai $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$ egyforma eloszlású, független, pozitív valószínűségi változók, tetszőleges

$$H(x)=\mathbf{P}\{\chi_n \leqq x\} \tag{253}$$

eloszlásfüggvénnyel. Azt is feltesszük, hogy a $\{\chi_n\}$ változók függetlenek a $\{\tau_n\}$ időpontoktól és a rendszer kezdeti állapotától. Jelölje a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát $\eta(t)$ valószínűségi változó. Stacionárius folyamat esetén pedig jelölje $\eta^*(t)$ a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát. Tárgyalásunkban két esetet különböztetünk meg, aszerint, amint $\{\tau_n\}$ λ-eseménysűrűségű Poisson-folyamat vagy $\{\tau_n\}$ a bevezetésben említett $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel jellemzett rekurrens folyamat.

A Poisson-folyamat esete. Legyen most $\{\tau_n\}$ λ-eseménysűrűségű Poisson-folyamat. Régóta ismeretes, hogy ebben az esetben, ha $\mathbf{M}\{\chi_n\}<\infty$, akkor a $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=P_k^*$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ határeloszlás létezik és független a rendszer kezdeti állapotától. Mégpedig fennáll, hogy

$$P_k^* = e^{-\lambda\varrho}\frac{(\lambda\varrho)^k}{k!}, \tag{254}$$

ahol

$$\varrho=\int_0^\infty x\,dH(x). \tag{255}$$

Ez az eredmény már A. K. ERLANG [9] vizsgálatai alapján is plauzibilisnek tekinthető. Ha feltesszük, hogy a $\{P_k^*\}$ határeloszlás létezik, akkor F. POLLACZEK [36], C. PALM [34] és L. KOSTEN [25] eredményeiből is következik (254) fennállása. Továbbá megemlítjük, hogy szerzőnek 1950-ben írt, de sajnos csak 1954-ben megjelent, [44] dolgozatában szereplő, Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatra vonatkozó általános tételéből speciálisan kiadódik a (254) eredmény. A (254) fennállására közvetlen bizonyítást adott még A. RÉNYI [39], R. FORTET [12] és C. RYLL-NARDZEWSKI [40].

Most egy rövid bizonyítást adunk (254) fennállására. Feltesszük, hogy $\eta(0)=0$. A tetszőleges kezdeti állapotra való áttérés csupán nyilvánvaló módosítást kíván. Hivatkozunk arra a tényre, hogy ha a Poisson-folyamatban $(0, t)$ időközben pontosan n esemény fordul elő, akkor ennek az n eseménynek előfordulási pontjai ugyanazon valószínűségi eloszlást követik, mint a $(0, t)$ intervallumon n független, egyenletes eloszlású pont eloszlása. (Vö. [44] p. 503.) Ha tekintetbe vesszük, hogy az $\eta(t)=k$ esemény több egymást kizáró módon jöhet létre, mégpedig a $(0, t)$ intervallumban $n=0, 1, 2, \ldots$ hívás fordulhat elő, akkor a teljes valószínűségi tétel szerint felírható, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=\sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\binom{n}{k}\left[\frac{1}{t}\int_0^t (1-H(x))dx\right]^k \left[\frac{1}{t}\int_0^t H(x)dx\right]^{n-k},$$

azaz

$$\text{(256)} \qquad \mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=e^{-\lambda\int_0^t [1-H(x)]dx}\frac{\left[\lambda\int_0^t (1-H(x))dx\right]^k}{k!}, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Mivel

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t [1-H(x)]dx=\varrho,$$

innen következik, hogy

$$\text{(257)} \qquad P_k^*=\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\eta(t)=k\}=e^{-\lambda\varrho}\frac{(\lambda\varrho)^k}{k!} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

ami bizonyítandó volt. Egyéb kezdeti feltétel esetén is hasonló módon eljárva, ugyanezen határértékre jutunk.

A vizsgált folyamat Markov-folyamatként tárgyalható, ha az $\eta(t)$ valószínűségi változó mellett megadjuk azt is, hogy az éppen folyamatban levő beszélgetések befejezéséig mennyi idő szükséges. Ha feltesszük, hogy $\varrho<\infty$ és az $\eta(0)$ változó eloszlása $\{P_k^*\}$, továbbá az $\eta(0)=k$ feltétel mellett a folyamatban levő k beszélgetés befejezéséig eltelt időtartamok együttes eloszlásfüggvénye $H^*(x_1)H^*(x_2)\ldots H^*(x_k)$, ahol

$$\text{(258)} \qquad H^*(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varrho}\displaystyle\int_0^x [1-H(y)]dy, & \text{ha} \quad x\geqq 0,\\ 0 & \text{, ha} \quad x<0,\end{cases}$$

akkor stacionárius folyamatot nyerünk, amelynél bármely t időpontra vonatkozó eloszlás megegyezik a kezdeti eloszlással. Ha stacionárius folyamat esetén $\eta^*(t)$ jelöli a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát, akkor minden t időpontra érvényes, hogy

$$\text{(259)} \qquad \mathbf{P}\{\eta^*(t)=k\}=P_k^*=e^{-\lambda\varrho}\frac{(\lambda\varrho)^k}{k!}.$$

16. MEGJEGYZÉS. Az $\{\eta(t), 0\leqq t<\infty\}$ sztochasztikus folyamat felfogható Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatként is. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\eta(0)=0$. Ha

$$\text{(260)} \qquad f(u, x)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad 0\leqq u\leqq x,\\ 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

akkor felírható, hogy

$$\eta(t) = \sum_{0 \leq \tau_n \leq t} f(t - \tau_n, \chi_n). \tag{261}$$

Szerző [44] és [46] dolgozataiban tetszőleges $f(u, x)$ függvény esetén vizsgálta a (261) alatti $\{\eta(t)\}$ folyamatot. Az ezen dolgozatban foglalt eredmények speciális eseteként nyerjük a következő tételeket.

Jelenleg csupán a stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat esetével foglalkozunk. Ekkor a kezdeti feltételeket a korábban részletezett módon kell megválasztani. Érvényes lesz, hogy az $\{\eta(t)\}$ folyamat $t \to \infty$ esetén ugyanolyan sztochasztikus viselkedést mutat, mint a stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat minden t időpontban.

Stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat esetén $\mathbf{M}\{\eta^*(t)\} = \mathbf{D}^2\{\eta^*(t)\} = \lambda\varrho$ és az

$$R(\tau) = \frac{\mathbf{M}\{\eta^*(t)\eta^*(t+\tau)\} - (\lambda\varrho)^2}{\lambda\varrho} \tag{262}$$

korrelációs függvényre fennáll, hogy

$$R(\tau) = \frac{1}{\varrho} \int_{|\tau|}^{\infty} [1 - H(x)]\,dx. \tag{263}$$

Az $\{\eta^*(t)\}$ folyamat spektrális eloszlásfüggvényére, $G(\nu)$-re (ahol $0 \leq \nu < \infty$) fennáll, hogy $G(0) = [\mathbf{M}\{\eta^*(t)\}]^2 = (\lambda\varrho)^2$ és a $0 < \nu < \infty$ értékekre

$$G'(\nu) = \frac{\lambda}{\pi^2 \nu^2} \int_0^{\infty} (1 - \cos 2\pi\nu x)\,dH(x). \tag{264}$$

Itt

$$G(\infty) = \mathbf{M}\{(\eta^*(t))^2\} = \lambda\varrho(1 + \lambda\varrho). \tag{265}$$

A fenti (263) és (264) eredményt V. E. BENEŠ [3] más úton bizonyította be. A telefon-forgalom statisztikai becslésére gyakran felhasználják a következő mennyiséget (vö. L. KOSTEN [26], V. E. BENEŠ [2] és mások munkáit)

$$\frac{1}{T} \int_0^T \eta^*(t)\,dt. \tag{266}$$

Stacionárius folyamat esetén ennek várható értéke

$$\mathbf{M}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \eta^*(t)\,dt\right\} = \lambda\varrho \tag{267}$$

és szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2\left\{\frac{1}{T} \int_0^T \eta^*(t)\,dt\right\} = \frac{2\lambda\varrho}{T^2} \int_0^T (T - \tau) R(\tau)\,d\tau, \tag{268}$$

ahol $R(\tau)$ jelentése a (263) szerinti.

*A rekurrens folyamat esete.** Legyen most $\{\tau_n\}$ a **Bevezetés**-ben említett rekurrens folyamat, amelyre $\mathbf{P}\{\tau_{n+1}-\tau_n \leqq x\} = F(x)$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Ha $\eta(t)$ jelöli a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát, akkor az $\{\eta(t)\}$ folyamat tekinthető rekurrens folyamat által származtatott másodlagos folyamatnak. Ha egyszerűség kedvéért $\eta(0)=0$ feltevéssel élünk, akkor a (260) alatti $f(u, x)$ függvény segítségével felírható, hogy

$$\eta(t) = \sum_{0<\tau_n \leqq t} f(t-\tau_n, \chi_n). \tag{269}$$

Szerző [45] dolgozatában tetszőleges $f(u, x)$ függvény esetén vizsgálta ezt a folyamatot. Az ezen dolgozatban foglalt eredmények speciális eseteként nyerjük az alábbi tételeket.

A vizsgált folyamat Markov-folyamatként kezelhető, ha az $\eta(t)$ és $\zeta(t)$ valószínűségi változók mellett megadjuk azt is, hogy az éppen folyamatban levő beszélgetések befejezéséig mennyi idő szükséges. Ha $\alpha < \infty$ és $\varrho < \infty$, akkor a kezdeti eloszlás megfelelő megválasztásával definiálhatjuk a stacionárius folyamat fogalmát. A stacionárius folyamatnál bármely t időpontra vonatkozó eloszlás megegyezik a kezdeti eloszlással. Jelölje stacionárius folyamat esetén $\eta^*(t)$ a t időpontban folyamatban levő beszélgetések számát. Ekkor érvényes lesz, hogy az $\{\eta(t)\}$ folyamat $t \to \infty$ esetén ugyanolyan sztochasztikus viselkedést mutat, mint a stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat minden t időpontban. Nevezetesen, ha $\alpha < \infty$, $\varrho < \infty$ és $F(x)$ nem-rácsos eloszlás, akkor a $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\eta(t)=k\} = P_k^*$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ határértékek léteznek és függetlenek a kezdeti állapottól. A stacionárius folyamat esetén pedig minden t-re érvényes, hogy $\mathbf{P}\{\eta^*(t)=k\} = P_k^*$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

A $\{P_k^*\}$ valószínűségeloszlás M_r^* $(r=0, 1, 2, \ldots)$ momentumai a [45] dolgozat eredményei alapján meghatározhatók. Az

$$M_r^* = \sum_{k=0}^{\infty} k^r P_k^* \tag{270}$$

momentumok a következő rekurzív képletek segítségével kaphatók meg

$$M_r^* = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \int_0^{\infty} M_j^*(t)[1-H(t)]\,dt, \qquad (r=0, 1, 2, \ldots), \tag{271}$$

ahol $M_0^*(t)=1$ és $M_1^*(t), M_2^*(t), \ldots$ sorjában meghatározható a következő képlet segítségével

$$M_r^*(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \int_0^{t} M_j^*(t-x)[1-H(t-x)]\,dm(x), \qquad (r=0, 1, 2, \ldots), \tag{272}$$

* Az idevágó kérdések részletesebb tárgyalásával a szerző sajtó alatt levő [57] munkájában foglalkozik.

ahol

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \tag{273}$$

és $F_n(x)$ jelöli az $F(x)$ eloszlásfüggvénynek önmagával való n-szeres kompozícióját.

17. MEGJEGYZÉS. Legyen $M = M_1^* = \frac{\varrho}{\alpha}$ és $D^2 = M_2^* - (M_1^*)^2$. Ekkor [45] szerint a stacionárius $\{\eta^*(t)\}$ folyamat korrelációs függvénye létezik és erre felírható, hogy

$$R(\tau) = \frac{1}{\varrho D^2} \int_{|\tau|}^{\infty} [1 - H(x)] dx + \frac{1}{\varrho D^2} \int_0^{\infty} [h(t+\tau) + h(t-\tau)] dm(t) - \frac{M^2}{D^2}, \tag{274}$$

ahol

$$h(\tau) = \int_0^{\infty} [1 - H(t)][1 - H(t+\tau)] dt \tag{275}$$

és $m(t)$ jelentése a (273) szerinti.

Ha $G(\omega)$ jelöli az $\{\eta^*(t)\}$ folyamat spektrális függvényét, amelyre $G(0) = M^2$ és $G(\infty) = M^2 + D^2$, akkor felírható, hogy

$$G(\omega) = M^2 + D^2 [G^*(\omega) - G^*(-\omega)]. \tag{276}$$

A $G^*(\omega)$ spektrális eloszlás függvényre A. J. HINCSIN [18] képlete szerint fennáll, hogy

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau \, dG^*(\omega) \tag{277}$$

és ennek megfordításával $G^*(\omega)$ egyértelműen meghatározható. Az

$$\frac{1}{T} \int_0^T \eta^*(t) dt \tag{278}$$

valószínűségi változó várható értékére és szórásnégyzetére fennáll, hogy

$$\mathbf{M} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \eta^*(t) dt \right\} = M \tag{279}$$

és

$$\mathbf{D}^2 \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \eta^*(t) dt \right\} = \frac{2D^2}{T^2} \int_0^T (T - \tau) R(\tau) d\tau, \tag{280}$$

ahol $R(\tau)$ jelentése a (274) szerinti.

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete

IRODALOM

[1] H. Ashcroft: The productivity of several machines under the care of one operator. *Journal of the Royal Statistical Society Ser. B.*, **12** (1950) 145—151.

[2] V. E. Beneš: A sufficient set of statistics for a simple telephone exchange model. *Bell System Technical Journal*, **36** (1957) 939—964.

[3] V. E. Beneš: Fluctuations of telephone traffic. *Bell System Technical Journal*, **36** (1957) 965—973.

[4] D. Blackwell: A renewal theorem. *Duke Mathematical Journal*, **15** (1948) 145—150.

[5] E. Brockmeyer—H. L. Halstrøm—Arne Jensen: The Life and Works of A. K. Erlang. (*Copenhagen*, 1948).

[6] J. W. Cohen: The full availability group of trunks with an arbitrary distribution of the inter-arrival times and a negative exponential holding time distribution, *Simon Stevin Wis- en Natuurkundig Tijdschrift*, **31** (1957) 169—181.

[7] J. W. Cohen: The generalized Engset formulas, *Philips Telecommunication Report*, 1957.

[8] J. L. Doob: Renewal theory from the point of view of the theory of probability. *Transactions of the American Mathematical Society*, **63** (1948) 422—438.

[9] A. K. Erlang: Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. *Post Office Electrical Engineer's Journal*, **10** (1918) 189—197.

[10] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications, *John Wiley, New-York*, 1950.

[11] R. Fortet: Calcul des Probabilités, Paris, 1950.

[12] R. Fortet: Random functions from a Poisson process. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, (1951) 373—385.

[13] R. Fortet: Random distributions with an application to telephone engineering. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. **II.** (1956) 81—88.

[14] F. G. Foster: On the stochastic matrices associated with certain queueing processes. *Annals of Mathematical Statistics*, **24** (1953) 355—360.

[15] Th. Fry: Probability and its Engineering Uses, *Van Nostrand, New-York*, 1928.

[16] А. Я. Хинчин: Математическая Теория стационарной очереди. Математический сборник **39** (1932) 73—84.

[17] А. Я. Хинчин: О среднем времени простоя станков. Математический сборник, **40** (1933) 119—123.

[18] A. Khintchine: Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. *Mathematische Annalen*, **109** (1934) 604—615.

[19] А. Я. Хинчин: Математические методы теории массового обслуживания. XLIX Труды Математического института имени В. А. Стеклова, Москва, 1955.

[20] Ch. Jordan: Calculus of finite differences, *Budapest*, 1939.

[21] D. G. Kendall: Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. *Annals of Mathematical Statistics*, **24** (1953) 338—354.

[22] J. Kiefer—J. Wolfowitz: On the theory of queues with many servers. *Transactions of the American Mathematical Society* **78** (1955) 1—18.

[23] A. N. Kolmogorov: Sur le problème d'attente. *Recueil Mathématique* (Математ. сборник) **38** (1931) 101—106.

[24] А. Н. Колмогоров—Ю. В. Прохоров: О суммах случайного числа случайных слагаемых. Успехи математических наук IV. в. **4**. (1949) 168—172.

[25] L. Kosten: On the validity of the Erlang and Engset loss-formulae. *Het. P. T. T. Bedrijf* **2** (1948—49) 42—45.

[26] L. Kosten: On the accuracy of measurements of probabilities of delay and of expected times of delay in telecommunication systems, I. *Applied Scientific Research,* B. **2**. (1951) 108—130, és II. **2**. (1952) 401—415.

[27] L. Kosten: The historical development of the theory of probability in telephone traffic engineering in Europe. *Teleteknik,* **1** (1957) 32—40.

[28] R. Kronig: On time losses in machinery undergoing interruption, I. *Physica's Grav,* **10** (1943) 215—224.

[29] R. Kronig—H. Mondria: On time losses in machinery undergoing interruption, II. *Physica's Grav,* **10** (1943) 331—336.

[30] D. V. Lindley: The theory of queues with a single server. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **48** (1952) 277—289.

[31] E. Lukács: Applications of Faa di Bruno's formula in mathematical statistics. *American Mathematical Monthly,* **62** (1955) 340—348.

[32] E. C. Molina: Application of the theory of probability to telephone trunking problems. *Bell System Technical Journal,* **6** (1927) 461—494.

[33] M. D. Moustafa: Input-output Markov processes. *Indagationes Mathematicae,* **19** (1957) 112—118. (*Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen,* A. **60** (1957) 112—118).

[34] C Palm: Analysis of the Erlang traffic formulae for busy-signal arragements. *Ericsson Technics,* No. 4 (1938) 39—58.

[35] C. Palm: Intensitätschwankungen im Fernsprechverkehr. *Ericsson Technics,* No. **44** (1943) 1—189.

[36] F. Pollaczek: Über eine Aufgabe der Wahrsheinlichkeitstheorie. *Mathematische Zeitschrift,* I. **32** (1930) 64—100, II. **32** (1930) 729—750.

[37] F. Pollaczek: Lösung eines geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblems. *Mathematische Zeitschrift,* **35** (1932) 230—278.

[38] F. Pollaczek: Généralisation de la théorie probabiliste des systèms téléphoniques sans dispositif d'attente. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris,* **236** (1953) 1469—1470.

[39] A. Rényi: On some problems concerning Poisson processes. *Publicationes Mathematicae, Debrecen,* **2** (1951) 66—73.

[40] C. Ryll—Nardzewski: On the non-homogeneous Poisson processes. *Colloquium Mathematicum* **3** (1955) 192—195.

[41] Б. А. Севастьянов: Эргодическая теорема для Марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. Теория вероятностей и ее применения, **2** (1957) 106—116.

[42] W. L. Smith: On the distribution of queueing times. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **49** (1953) 449—461.

[43] W. L. Smith: Regenerative stochastic processes. *Proceedings of the Royal Society,* A. **232** (1955) 6—31.

[44] Takács L.: Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról és azok fizikai alkalmazásairól. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* **4** (1954) 473—504. (Vö. On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* **5** (1954) 203—236).

[45] TAKÁCS L.: Rekurrens folyamatok által származtatott másodlagos folyamatokról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 5 (1955) 187—197. (Vö. On secondary stochastic processes generated by recurrent processes *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 7 (1956) 17—29).

[46] TAKÁCS L.: Elektroncsövek anódáram ingadozásának valószínűségszámítási tárgyalásáról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 6 (1956) 27—51. (Vö. Über die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der Anodenstromschwankungen von Elektronenröhren. *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 7 (1957) 25—50).

[47] TAKÁCS L.: Bizonyos típusú rekurrens sztochasztikus folyamatok vizsgálatáról. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei,* 3 (1954) 115—128.

[48] TAKÁCS L.: „Várakozási idő"-problémák tárgyalása Markov-folyamatok segítségével. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 4 (1954) 543—570. (Vö. Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 6 (1955) 101—129).

[49] TAKÁCS L.: Részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatokról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei;* 6 (1956) 369—421.

[50] TAKÁCS L.: Bizonyos várakozási idő problémáról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 7 (1957) 183—197. (Vö. On a stochastic process concerning some waiting time problems. Теория вероятностей и ее применения 2 (1957) 92—105).

[51] L. TAKÁCS: On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 8 (1957) 169—191. (Vö. Tartózkodási idő problémákról. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei,* 7 (1957) 371—395.)

[52] L. TAKÁCS: On the generalization of Erlang's formula. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 7 (1956) 419—433.

[53] L. TAKÁCS: On a probability problem concerning telephone traffic. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 8 (1957) 319—324.

[54] L. TAKÁCS: On a queueing problem concerning telephone traffic. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 8 (1957) 325—335.

[55] L. TAKÁCS: On a combined waiting time and loss problem concerning telephone traffic. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae. Sectio Mathematica,* 1 (1957).

[56] L. TAKÁCS: On a coincidence problem concerning telephone-traffic. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 9 (1958).

[57] S. TÄCKLIND: Elementare Behandlung vom Erneuerungsproblem für den stationären Fall. *Skandinavisk Aktuarietidskrift,* 27 (1944) 1—15.

[58] A. WALD: Sequential tests of statistical hypotheses. *Annals of Mathematical Statistics,* 16 (1945) 117—186.

[59] R. I. WILKINSON: Theories for toll traffic engineering in the USA. *Bell System Technical Journal,* 35 (1956) 421—514.

[60] D. M. G. WISHART: A queueing system with χ^2 service—time distribution. *Annals of Mathematical Statistics,* 27 (1956) 768—779.

(Beérkezett: 1957. XI. 5.)

A GEOMETRIAI OBJEKTUMOK ELMÉLETÉHEZ

(II. RÉSZ)*

ACZÉL JÁNOS

(Debrecen)

II. TÖBBKOMPONENSŰ OBJEKTUMOK

2.1 §. Speciális geometriai objektumok, melyeknél a komponensek száma nem kisebb a paraméterekénél

Érvényes a következő

5. TÉTEL: Az

(5) $$f[f(z, S), T] = f(z, S \circ T)$$

vektor-függvényegyenletnek, ahol

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_p \end{pmatrix}, \qquad \left[n \geqq p,\ z_0 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-p} \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{n-p+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right]$$

egy n-dimenziós Π halmazt, S és T pedig egy az $S \circ T$ műveletre nézve félcsoportot alkotó p-dimenziós Σ halmazt fut be ($n \geqq p$), — általános megoldása

(55) $$f(z, T) = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0(z) \\ U(z) \circ T \end{pmatrix}\right],$$

ahol $u(z) = \begin{pmatrix} u_0(z) \\ U(z) \end{pmatrix}$ $[U(z) \in \Sigma]$ *egyértelműen megfordítható vektor-vektorfüggvény, melynek inverze u^{-1}, — feltéve, hogy egy fix*

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix}$$

vektorhoz és minden $z \in \Pi$-hez pontosan egy

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ Y \end{pmatrix} \qquad (Y \in \Sigma, y_0 \in \Pi_0;\ a\ \Pi\text{-nek}\ (n-p)\ dimenziós\ vetülete);$$

* A fejezetek, paragrafusok, stb. számozása folytatása az I. részben alkalmazott számozásnak. Az irodalomjegyzéket is az I. részhez csatoltan közöltük (lásd MTA III. Osztályának Közleményei, VIII/1 (1958) 41—65.)

létezik, melyre

(56) $$f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ E \end{pmatrix}, Y\right] = z.$$

Tehát e feltételek mellett a (Σ-val jellemzett koordináta transzformáció félcsoporthoz tartozó) p-paraméteres n-komponensű ($n \geqq p$) speciális geometriai objektumok ekvivalensek az

$$\bar{y}_0 = y_0$$
$$\bar{Y} = Y \circ T$$

transzformációs képletű objektumokkal.

$n = p$ esetén a fenti képletekből $z_0, u_0(z), y_0, \bar{y}_0$ természetesen hiányzik.

E tételnek, amely kissé módosított alakja a szerző által [77]-ben bebizonyított tételnek, *bizonyítása* igen egyszerű: Először is (55) kielégíti (5)-öt:

$$f[f(z,S),T] = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0[f(z,S)] \\ U[f(z,S)] \circ T \end{pmatrix}\right] = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0(z) \\ [U(z) \circ S] \circ T \end{pmatrix}\right] =$$
$$= u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0(z) \\ U(z) \circ (S \circ T) \end{pmatrix}\right] = f(z, S \circ T).$$

Másodszor, annak bizonyítására, hogy (5)-ből következik (55), helyettesítsünk (5)-be $z = \begin{pmatrix} y_0 \\ E \end{pmatrix}$, $S = Y$-t:

$$f\left\{f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ E \end{pmatrix}, Y\right], T\right\} = f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ E \end{pmatrix}, Y \circ T\right].$$

(56)-ban z-t $y = \begin{pmatrix} y_0 \\ Y \end{pmatrix}$ feltételeink szerint egyértelműen megfordítható függvényének tekintve, $z = u^{-1}(y)$ és $y = u(z)$-t írunk

$$f(z,T) = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ Y \circ T \end{pmatrix}\right] = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0(z) \\ U(z) \circ T \end{pmatrix}\right]$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Hogy ilyen általánosságban feltételeink meglehetősen szorosak, azt mutatják pl. a következő

KOROLLÁRIUMOK:

6. *Ha fix* E_j^k ($j, k = 1, 2, \ldots, m$)*-hez és egy n-dimenziós halmaz* ($n \geqq m^2$) *minden z-jéhez pontosan egy*

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ Y_j^k \end{pmatrix} \qquad (|Y_j^k| \neq 0)$$

létezik, úgy, hogy

$$f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ E_j^k \end{pmatrix}, Y_j^k\right] = z,$$

akkor

(57) $$f[f(z, A_j^k), B_k^l] = f(z, B_k^l A_j^k)$$

általános megoldása

(58) $$f(z, A_j^l) = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0(z) \\ A_k^l\, U_j^k(z) \end{pmatrix}\right] \qquad (|A_k^l| \neq 0),$$

ahol $u(z) = \begin{pmatrix} u_0(z) \\ U_j^l(z) \end{pmatrix}$ *egyértelműen megfordítható vektor-vektorfüggvény.* $(|U_j^k(z)| \neq 0)$.

E feltétel mellett tehát az elsőosztályú n-komponensű m-dimenziós objektumok ekvivalensek az

$$\bar{y}_0 = y_0, \qquad \bar{Y}_j^l = A_k^l Y_j^k$$

transzformációs képletű lineáris objektumokkal.

7. *Ha fix* E_j^k, $E_{j_1 j_2}^k$*-höz és egy n-dimenziós halmaz*

$$\left(n \geqq m\left[m + \binom{m+1}{2}\right] = \frac{m^3 + 3m^2}{2}\right)$$

minden z-jéhez pontosan egy

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ Y_j^k \\ Y_{j_1 j_2}^k \end{pmatrix} \qquad (|Y_j^k| \neq 0)$$

létezik, úgy, hogy

$$f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ E_j^k \\ E_{j_1 j_2}^k \end{pmatrix}, Y_j^k, Y_{j_1 j_2}^k\right] = z,$$

akkor

(59) $$f[f(z, A_j^k, A_{j_1 j_2}^k), B_{k_1}^l, B_{k_1 k_2}^l] = f(z, B_k^l A_j^k, B_k^l A_{j_1 j_2}^k + B_{k_1 k_2}^l A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2})$$

általános megoldása

(60) $$f(z, A_j^l, A_{j_1 j_2}^l) = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0(z) \\ A_k^l U_j^k(z) \\ A_k^l U_{j_1 j_2}^k(z) + A_{k_1 k_2}^l U_{j_1}^{k_1}(z) U_{j_2}^{k_2}(z) \end{pmatrix}\right],$$

ahol

$$u(z) = \begin{pmatrix} u_0(z) \\ U_j^l(z) \\ U_{j_1 j_2}^l(z) \end{pmatrix} \qquad (|U_j^l(z)| \neq 0)$$

egyértelműen megfordítható vektor-vektorfüggvény.

E feltételek mellett tehát a másodosztályú n-komponensű m-dimenziós objektumok ekvivalensek az

$$\bar{y}_0 = y_0, \quad \bar{Y}_j^l = A_k^l Y_j^k, \quad \bar{Y}_{j_1 j_2}^l = A_k^l Y_{j_1 j_2}^k + A_{k_1 k_2}^l Y_{j_1}^{k_1} Y_{j_2}^{k_2}$$

transzformációs képletű lineáris objektumokkal.

[(57) és (59) a (6) egyenlet speciális esetei.] Lényegesek lesznek számunkra az egydimenziós esetek.

2. 2 §. Első-, másod- és harmadosztályú akárhány komponensű egydimenziós objektumok

1. Első- és másodosztályú objektumok. Mivel a komponensszám $n \geqq 2$-nek vehető ($n = 1$-et az **1. 3** paragrafusban intéztük el), közvetlenül alkalmazható az 5. TÉTEL, ill. a 6. és 7. KOROLLÁRIUM. Így ha van olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ konstans, hogy

$$z = f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \eta_1\right], \quad \text{ill.} \quad z = f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \eta_1, \eta_2\right]$$

egyértelműen megoldható

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix}, \quad \text{ill.} \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \qquad (\eta_1 \neq 0)$$

-ra nézve, akkor az (57) és (59) specializálásának tekinthető

$$f[f(z, \alpha_1), \beta_1] = f(z, \beta_1 \alpha_1), \tag{61}$$

ill.

$$f[f(z, \alpha_1, \alpha_2), \beta_1, \beta_2] = f(z, \beta_1 \alpha_1, \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_1^2) \tag{62}$$

függvényegyenletek megoldása az (58), ill. (60)-ból specializált

$$f(z, \alpha_1) = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0(z) \\ \alpha_1 \mu_1(z) \end{pmatrix}\right], \quad u(z) = \begin{pmatrix} u_0(z) \\ \mu_1(z) \end{pmatrix}, \quad \mu_1(z) \neq 0, \tag{63}$$

ill.

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2) = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0(z) \\ \alpha_1 \mu_1(z) \\ \alpha_2 \mu_2(z) + \alpha_2 \mu_1(z)^2 \end{pmatrix}\right], \quad u(z) = \begin{pmatrix} u_0(z) \\ \mu_1(z) \\ \mu_2(z) \end{pmatrix}, \quad \mu_1(z) \neq 0 \tag{64}$$

lesz. Ezeket kissé átalakítjuk. (63)-ba, ill. (64)-be a

$$v(z) = \begin{pmatrix} v_0(z) \\ v_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(z) \\ \dfrac{1}{\mu_1(z)} \end{pmatrix}, \quad v^{-1}\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \dfrac{1}{\eta_1} \end{pmatrix}\right] = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix}\right] = u^{-1}(y),$$

ill.

$$v(z) = \begin{pmatrix} v_0(z) \\ v_1(z) \\ v_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(z) \\ \dfrac{1}{\mu_1(z)} \\ \dfrac{\mu_2(z)}{\mu_1(z)^2} \end{pmatrix}, \quad v^{-1}\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \dfrac{1}{\eta_1} \\ \dfrac{\eta_2}{\eta_1^2} \end{pmatrix}\right] = u^{-1}\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\right] = u^{-1}(y)$$

függvényeket tesszük:

$$f(z, \alpha_1) = v^{-1}\left[\begin{pmatrix} v_0(z) \\ \dfrac{\nu_1(z)}{\alpha_1} \end{pmatrix}\right], \tag{65}$$

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2) = v^{-1}\left[\begin{pmatrix} v_0(z) \\ \dfrac{\nu_1(z)}{\alpha_1} \\ \dfrac{\nu_2(z)}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right]. \tag{66}$$

Eredményünk a következő:

6. TÉTEL. (61) *általános megoldása $z \in \Pi$-re és a szorzásra nézve félcsoportot alkotó A halmazbeli $\alpha_1 \neq 0$-kra mindig* (65) *alakú, ahol* $v(z) = \begin{pmatrix} v_0(z) \\ \nu_1(z) \end{pmatrix}$ *egyértelműen megfordítható függvény, feltéve, hogy van oly ε_1 konstans, hogy*

$$z = f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \eta_1\right],$$

$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$ $(0 \neq \eta_1 \in A, y_0 \in \Pi_0)$*-ra nézve egyértelműen megoldható. Speciálisan*

$$f(z, 1) = z.$$

Tehát e feltétel mellett az elsőosztályú n-komponensű egydimenziós objektumok mind ekvivalensek az

$$\bar{y}_0 = y_0 \qquad (\bar{y}_1 = y_1, \ldots, \bar{y}_{n-1} = y_{n-1}),$$

$$\bar{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{\alpha_1}$$

transzformációs képletű egykomponensűekre széteső lineáris objektummal.

7. TÉTEL: (62) *általános megoldása $z \in \Pi$-re és az*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \alpha_1 \\ \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_1^2 \end{pmatrix}$$

műveletre nézve félcsoportot alkotó A halmazbeli $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2$-kre — mindig (66) *alakú, ahol*

$$v(z) = \begin{pmatrix} v_0(z) \\ \nu_1(z) \\ \nu_2(z) \end{pmatrix}$$

egyértelműen megfordítható függvény, — feltéve, hogy léteznek oly $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ konstansok, hogy

$$z = f\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \eta_1, \eta_2\right]$$

egyértelműen megoldható

$$y=\begin{pmatrix} y_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \qquad \left(\eta_1 \neq 0, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in A, y_0 \in \Pi_0\right)$$

-ra nézve. Speciálisan:

$$f(z, 1, 0, 0)=z.$$

Tehát e feltétel mellett a másodosztályú n-komponensű egydimenziós objektumok mind ekvivalensek az

$$\bar{y}_0=y_0 \qquad (\bar{y}_1=y_1, \ldots, \bar{y}_{n-2}=y_{n-2}),$$

$$\bar{\eta}_1=\frac{\eta_1}{\alpha_1},$$

$$\bar{\eta}_2=\frac{\eta_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$$

transzformációs képletű egykomponensűekre széteső lineáris objektummal.

$n=2$ esetén $v_0(z), y_0, \bar{y}_0$ természetesen nem szerepelnek.

Hasonlóan kaphatjuk meg az $\alpha_2=\cdots=\alpha_{r-1}=0$-hoz tartozó r-ed osztályú objektumokat is.

O. E. GHEORGHIU [43] állítása szerint az összes differenciálható transzformációs képletű, ténylegesen azonban (a számolási hibák kiküszöbölése után) az összes

$$\bar{\zeta}_1=\frac{\zeta_1}{\alpha_1}+\delta_1(\zeta_1-\zeta_2)\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}+\delta_2(\zeta_1-\zeta_2)\alpha(\alpha_1),$$

$$\bar{\zeta}_2=\frac{\zeta_2}{\alpha_1}+\delta_1(\zeta_1-\zeta_2)\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}+\delta_2(\zeta_1-\zeta_2)\alpha(\alpha_1)$$

alakú transzformációs képlettel bíró másodosztályú kétkomponensű egydimenziós objektumokat határozza meg és bebizonyítja, hogy ezek transzformációs képlete csak

$$\bar{\zeta}_1=\frac{\zeta_1}{\alpha_1}+\delta_1\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}+\delta_2\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha_1}\right),$$

$$\bar{\zeta}_2=\frac{\zeta_2}{\alpha_1}+\delta_1\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}+\delta_2\cdot\left(1-\frac{1}{\alpha_2}\right)$$

alakú lehet. Ez utóbbiak ekvivalensek a 7. TÉTELben normálalakban kapott objektummal, ami

$$\eta_1=\zeta_1-\zeta_2, \qquad \eta_2=\frac{\zeta_2-\delta_2}{\delta_1},$$

$$\bar{\eta}_1=\frac{\eta_1}{\alpha_1},$$

$$\bar{\eta}_2=\frac{\eta_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$$

révén azonnal látható.

G. PENSOV [38] eredményeinkre $n=2$ esetén analiticitási feltétel mellett jutott.

2. *Egykomponensűekre szétesőkkel ekvivalensnek bizonyuló harmadosztályú objektumok.* Harmadosztályú objektumok függvényegyenlete (8)-ból [vö. (51)]:

$$(67)\quad f[f(z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\beta_1,\beta_2,\beta_3]=f(z,\beta_1\alpha_1,\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1^2,\beta_1\alpha_3+3\beta_2\alpha_1\alpha_2+\beta_3\alpha_1^3).$$

Rájuk az 5. TÉTEL közvetlenül csak $n\geqq 3$ (három- vagy többkomponensű egydimenziós objektumok) esetén alkalmazható: ha vannak oly $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ konstansok, hogy

$$f\left[\begin{pmatrix} y_0\\ \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix},\eta_1,\eta_2,\eta_3\right]=x$$

egyértelműen megoldható

$$y=\begin{pmatrix} y_0\\ \eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\qquad(\eta_1\neq 0)$$

-ra nézve, úgy e tétel szerint

$$f(z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=u^{-1}\left[\begin{pmatrix} u_0(z)\\ \alpha_1\mu_1(z)\\ \alpha_1\mu_2(z)+\alpha_2\mu_1(z)^2\\ \alpha_1\mu_3(z)+3\alpha_2\mu_1(z)\mu_2(z)+\alpha_3\mu_1(z)^3\end{pmatrix}\right],$$

$$u(z)=\begin{pmatrix} u_0(z)\\ \mu_1(z)\\ \mu_2(z)\\ \mu_3(z)\end{pmatrix},\quad \mu_1(z)\neq 0.$$

Ezt ismét átalakítjuk a linearizálás és egykomponensűekre való szétválasztás érdekében: bevezetjük a

$$v(z)=\begin{pmatrix} v_0(z)\\ \nu_1(z)\\ \nu_2(z)\\ \nu_3(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_0(z)\\ \dfrac{1}{\mu_1(z)}\\ \dfrac{\mu_2(z)}{\mu_1(z)^2}\\ \dfrac{\mu_3(z)}{\mu_1(z)^3}-\dfrac{3}{2}\dfrac{\mu_2(z)^2}{\mu_1(z)^4}\end{pmatrix},$$

$$v^{-1}\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \frac{1}{\eta_1} \\ \frac{\eta_2}{\eta_1^2} \\ \frac{\eta_3}{\eta_1^3}-\frac{3}{2}\frac{\eta_2^2}{\eta_1^4} \end{pmatrix}\right]=u^{-1}\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}\right]=u^{-1}(y),$$

függvényeket és

$$f(z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=v^{-1}\left[\begin{pmatrix} v_0(z) \\ \frac{\nu_1(z)}{\alpha_1} \\ \frac{\nu_2(z)}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \frac{\nu_3(z)}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{pmatrix}\right], \tag{68}$$

$$v(z)=\begin{pmatrix} v_0(z) \\ \nu_1(z) \\ \nu_2(z) \\ \nu_3(z) \end{pmatrix}$$

-t kapunk.

Mivel az $n=1$ esetet az **1. 3 §.** *3*-ban elintéztük, ezért itt már csak az $n=2$ (kétkomponensű harmadosztályú egydimenziós objektumok) esete van hátra. Annak érdekében, hogy az 5. TÉTELt mégis alkalmazhassuk, (67)-et specializáljuk úgy, hogy legfeljebb két paraméter szerepeljen benne. Kézenfekvő $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ közül az egyiket konstansnak tartani, de úgy, hogy az adódó kétparaméteres sokaság (fél)csoport maradjon a

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1\alpha_1 \\ \beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_1^2 \\ \beta_1\alpha_3+3\beta_1\alpha_1\alpha_2+\beta_3\alpha_1^2 \end{pmatrix} \tag{69}$$

művelet alatt. Ilyen kétféle van: $(1,\alpha_2,\alpha_3)$ és $(\alpha_1, 0, \alpha_3)$. Az előbbivel itt, az utóbbival a következő pontban foglalkozunk.

Vizsgáljuk tehát a (67)-ből $\alpha_1=\beta_1=1$-gyel adódó

$$f[f(z,1,\alpha_2,\alpha_3),1,\beta_2,\beta_3]=f(z,1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+3\beta_2\alpha_2+\beta_3)$$

egyenletet. Ez (5) alakú egyenlet, tehát az 5. TÉTEL értelmében, ha

$$f\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}, 1, \eta_2, \eta_3\right]=z$$

$y=\begin{pmatrix}\eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}$-ra egyértelműen megoldható, úgy

$$f(z,1,\alpha_2,\alpha_3)=u^{-1}\left[\begin{pmatrix}\mu_2(z)+\alpha_2\\ \mu_3(z)+3\alpha_2\mu_2(z)+\alpha_3\end{pmatrix}\right],\ u(z)=\begin{pmatrix}\mu_2(z)\\ \mu_3(z)\end{pmatrix},$$

vagy

$$w(z)=\begin{pmatrix}\omega_2(z)\\ \omega_3(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_2(z)\\ \mu_3(z)-\frac{3}{2}\mu_2(z)^2\end{pmatrix},$$

$$w^{-1}\left[\begin{pmatrix}\eta_2\\ \eta_3-\frac{3}{2}\eta_2^2\end{pmatrix}\right]=u^{-1}\left[\begin{pmatrix}\eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\right]=u^{-1}(y)$$

jelöléssel

(70) $$f(z,1,\alpha_2,\alpha_3)=w^{-1}\left[\begin{pmatrix}\omega_2(z)+\alpha_2\\ \omega_3(z)-\frac{3}{2}\alpha_2^2+\alpha_3\end{pmatrix}\right],\ w(z)=\begin{pmatrix}\omega_2(z)\\ \omega_3(z)\end{pmatrix},$$

$f(z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ meghatározása érdekében elő kell állítanunk a már ismert vagy könnyen meghatározható speciális esetekből. (67)-ből minden esetre

(71) $$f(z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=f\left[f\left(z,1,\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right),\alpha_1,0,0\right]=f\left[f(z,\alpha_1,0,0),\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2},\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right].$$

Ebbe (70)-et behelyettesítjük és bevezetjük az

$$y=w(z),\ x=\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\\ \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}-\dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\end{pmatrix}$$

(72) $$w\{f[w^{-1}(y),\alpha_1,0,0]\}=g(y,\alpha_1)$$

jelöléseket, mely utóbbiról (67) miatt

(73) $$g[g(y,\alpha_1),\beta_1]=g(y,\beta_1\alpha_1)$$

áll; így kapjuk a (9), (10) írásmódot használva, hogy

$$g(y+x,\alpha_1)=g(y,\alpha_1)+x\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}.$$

Ezt az egyenletet kell a (73) feltétel mellett megoldanunk. [(73) nyilván azonos alakú (61)-gyel, de (63) behelyettesítése hosszadalmasabb volna.] Vegyünk e célból

$$y=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ g\left[\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\alpha_1\right]=h(\alpha_1)$$

-et, akkor

(74) $$g(x,\alpha_1)=h(\alpha_1)+x\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix},$$

ami tisztázza g függését x-től. Ezt most (73)-ba téve

$$h(\beta_1)+h(\alpha_1)\cdot\begin{pmatrix}\beta_1^{-1}\\ \beta_1^{-2}\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\beta_1^{-2}\end{pmatrix}=h(\beta_1\alpha_1)+y\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\beta_1^{-2}\end{pmatrix},$$

$$h(\alpha_1)\cdot\begin{pmatrix}\beta_1^{-1}\\ \beta_1^{-2}\end{pmatrix}+h(\beta_1)=h(\alpha_1\beta_1)$$

-et kapunk. Mivel a jobboldal szimmetrikus, a baloldal is az és a változókat szétválasztva:

$$h(\alpha_1)\cdot\begin{pmatrix}\beta_1^{-1}\\ \beta_1^{-2}\end{pmatrix}+h(\beta_1)=h(\beta_1)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}+h(\alpha_1),$$

$$h(\alpha_1)\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1-\alpha_1^{-1}}\\ \dfrac{1}{1-\alpha_1^{-2}}\end{pmatrix}=h(\beta_1)\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1-\beta_1^{-1}}\\ \dfrac{1}{1-\beta_1^{-2}}\end{pmatrix}=k, \qquad (k=\text{konstans})$$

$$h(\alpha_1)=k\cdot\begin{pmatrix}1-\alpha_1^{-1}\\ 1-\alpha_1^{-2}\end{pmatrix}=k-k\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}$$

-t kapunk. Így már teljesen meghatároztuk g-t. Ugyanis (74)-ből

$$g(x,\alpha_1)=k+(x-k)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix},$$

(72)-ből pedig

$$f(z,\alpha_1,0,0)=w^{-1}\left\{k+[w(z)-k]\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}\right\},$$

vagy

$$v(z)=w(z)-k,\quad v^{-1}(y)=w^{-1}(y+k)$$

-val

$$f(z,\alpha_1,0,0)=v^{-1}\left[v(z)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}\right]=v^{-1}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{v_2(z)}{\alpha_1}\\ \dfrac{v_3(z)}{\alpha_1^2}\end{pmatrix}\right]$$

lesz.

Ugyanezt a függvénycserét (70)-en is végrehajtjuk:

$$f(z,1,\alpha_2,\alpha_3)=v^{-1}\left[\begin{pmatrix}v_2(z)+\alpha_2\\ v_3(z)+\alpha_3-\dfrac{3}{2}\alpha_2^2\end{pmatrix}\right]$$

és mindezt beírjuk (71)-be:

$$f(z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=v^{-1}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{v_2(z)}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{v_3(z)}{\alpha_1^2}-\dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right], \tag{75}$$

$$\nu(z)=\begin{pmatrix}\nu_2(z)\\ \nu_3(z)\end{pmatrix}.$$

Ez ki is elégíti (67)-et és így eredményünk a következő

8. TÉTEL: (67) *általános megoldása* $z\in\Pi$*-re és egy a* (69) *műveletre nézve félcsoportot alkotó* A *halmaz* $\alpha_1\neq 0, \alpha_2, \alpha_3$*-aira*, (68), *ill.* (75) *alakú, ha* z *n-dimenziós és* $n\geqq 3$, *ill.* $n=2$ *és léteznek oly* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *konstansok, hogy*

$$f\left[\begin{pmatrix}y_0\\ \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}, \eta_1, \eta_2, \eta_3\right]=z, \quad \textit{ill.} \quad f\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}, 1, \eta_2, \eta_3\right]=z$$

egyértelműen megoldható

$$y=\begin{pmatrix}y_0\\ \eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}, \quad \left[\eta_1\neq 0, \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\in A, y_0\in\Pi_0\right],$$

ill.

$$y=\begin{pmatrix}\eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\in A$$

-ra. Speciálisan

$$f(z, 1, 0, 0)=z.$$

Tehát e feltételek mellett a harmadosztályú n-komponensű egydimenziós objektumok mind ekvivalensek az

$$\bar{y}_0=y_0,$$

$$\bar{\eta}_1=\frac{\eta_1}{\alpha_1},$$

$$\bar{\eta}_2=\frac{\eta_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2},$$

$$\bar{\eta}_3=\frac{\eta_3}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

transzformációs képletű egykomponensűekre széteső lineáris objektummal.

$n=3$ esetén $v_0, y_0, \bar{y}_0$, $n=2$ esetén $y_0, \eta_1, \bar{y}_0, \bar{\eta}_1$ nem szerepel.

Megfigyelhetjük, hogy (66), ill. (65) a (68)-ból az utolsó, ill. az utolsó két sor elhagyásával nyerhető, míg (75) a (68) utolsó két sorából áll.

3. A Pensov-féle és hasonló objektumokkal ekvivalensnek bizonyuló kétkomponensű egydimenziós harmadosztályú objektumok. Mint az előző pontban jeleztük, a kétkomponensű harmadosztályú objektumok esetén kézenfekvő még

$f(z, \alpha_1, 0, \alpha_3)$-mal is kezdeni a vizsgálatot. (67)-ből $\alpha_2 = \beta_2 = 0$-val:

$$f[f(z, \alpha_1, 0, \alpha_3), \beta_1, 0, \beta_3] = f(z, \beta_1\alpha_1, 0, \beta_1\alpha_3 + \beta_3\alpha_1^3)$$

következik, ami ismét (5) alakú egyenlet, tehát alkalmazható az 5. TÉTEL: ha

$$f\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}, \eta_1, 0, \eta_3\right] = z$$

egyértelműen megoldható $y = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_3\end{pmatrix}$ ($\eta_1 \neq 0$)-ra nézve, akkor

$$f(z, \alpha_1, 0, \alpha_3) = u^{-1}\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\mu_1(z)\\ \alpha_1\mu_3(z) + \alpha_3\mu_1(z)^3\end{pmatrix}\right], \quad u(z) = \begin{pmatrix}\mu_1(z)\\ \mu_3(z)\end{pmatrix},$$

vagy

$$v(z) = \begin{pmatrix}\nu_1(z)\\ \nu_3(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\mu_1(z)}\\ \dfrac{\mu_3(z)}{\mu_1(z)^3}\end{pmatrix}, \quad v^{-1}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\zeta_1}\\ \dfrac{\zeta_3}{\zeta_1^3}\end{pmatrix}\right] = u^{-1}\left[\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_3\end{pmatrix}\right] = u^{-1}(z)$$

jelöléssel

$$f(z, \alpha_1, 0, \alpha_3) = v^{-1}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{\nu_1(z)}{\alpha_1}\\ \dfrac{\nu_3(z)}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right], \quad v(z) = \begin{pmatrix}\nu_1(z)\\ \nu_3(z)\end{pmatrix}. \tag{76}$$

Speciálisan

$$f(z, 1, 0, 0) = z. \tag{77}$$

Hogy $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$-at is meghatározhassuk, (76)-ot ismét (67)-be helyettesítjük és $\alpha_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_1 = 1$ esetén

$$f\left\{v^{-1}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{\nu_1(z)}{\alpha_1}\\ \dfrac{\nu_3(z)}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right], 1, \beta_2, 0\right\} = f(z, \alpha_1, \beta_2\alpha_1^2, \alpha_3)$$

-et, illetve a

$$\beta_2\alpha_1^2 = \tilde{\alpha}_2, \quad g(y, \alpha_2) = v\{f[v^{-1}(y), 1, \alpha_2, 0]\}$$

jelölésekkel

$$f(z, \alpha_1, \tilde{\alpha}_2, \alpha_3) = v^{-1}\left\{g\left[\begin{pmatrix}\dfrac{\nu_1(z)}{\alpha_1}\\ \dfrac{\nu_3(z)}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}, \frac{\tilde{\alpha}_2}{\alpha_1^2}\right]\right\} \tag{78}$$

-et kapunk.

$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ jobb megismerése érdekében (76)-ot és (78)-at újra vissza helyettesítjük (67)-be.

$$\nu_1(z) = \eta_1, \quad \nu_3(z) = \eta_3, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_1 = \eta_1, \quad \beta_3 = -\beta_1\eta_3 = -\eta_1\eta_3$$

-at véve és a (9)-(10) írásmódra áttérve:

$$\begin{pmatrix}\eta_1^{-1}\\ \eta_1^{-2}\end{pmatrix}\cdot g\left[\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_3\end{pmatrix}, \alpha_2\right]+\begin{pmatrix}0\\ -\frac{\eta_3}{\eta_1^2}\end{pmatrix}=g\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \frac{\alpha_2}{\eta_1}\right].$$

A

$$h(\alpha_2)=g\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2\right]=v\left\{f\right\}v^{-1}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right], 1, \alpha_2, 0\Big\}=v\left\{f\right\}u^{-1}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right], 1, \alpha_2, 0\Big\}=$$

$$=v\left\}f\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}, 1, \alpha, 0\right]\right\{=\begin{pmatrix}\chi_1(\alpha_2)\\ \chi_3(\alpha_2)\end{pmatrix}$$

függvényt bevezetve, egyrészt (77) miatt

$$h(0)=\begin{pmatrix}\chi_1(0)\\ \chi_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \tag{79}$$

másrészt

$$g(y, \alpha_2)=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_1^2\end{pmatrix}\cdot h\left(\frac{\alpha_2}{\eta_1}\right)+\begin{pmatrix}0\\ \eta_3\end{pmatrix}.$$

Ezzel (78)-ból

$$f(z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=v^{-1}\left[\begin{pmatrix}\frac{\nu_1(z)}{\alpha_1}\chi_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1\nu_1(z)}\right)\\ \frac{\nu_1(z)^2}{\alpha_1^2}\chi_3\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1\nu_1(z)}\right)+\frac{\nu_3(z)}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right] \tag{80}$$

lesz.

Hogy a még ismeretlen χ_1, χ_3 függvényeket is kiszámíthassuk, ezt is vissza kell helyettesítenünk (67)-be. Így a lehetséges rövidítésekkel és a

$$\sigma=\frac{\alpha_2}{\alpha_1\nu_1(z)}, \quad \tau=\frac{\beta_2\alpha_1}{\beta_1\nu_1(z)}$$

jelölésekkel

$$\chi_1(\sigma)\chi_1\left(\frac{\tau}{\chi_1(\sigma)}\right)=\chi_1(\sigma+\tau), \tag{81}$$

$$\chi_1(\sigma)^2\chi_3\left(\frac{\tau}{\chi_1(\sigma)}\right)+\chi_3(\sigma)=\chi_3(\sigma+\tau)+3\sigma\tau \tag{82}$$

-t kapunk. Ezt a függvényegyenletrendszert kell tehát a (79) kezdeti feltétel mellett megoldanunk. Nyilván előbb (81)-et oldjuk meg és azután (82)-t.

Ha $h(\tau)$-ról semmi továbbit nem tennénk fel, nem jutnánk használható eredményre, hisz egyenletrendszerünket pl.

$$\chi_1(\tau)=1, \qquad \chi_3(\tau)=-\frac{3}{2}\tau^2+\lambda(\tau)$$

is kielégíti, ha $\lambda(\sigma)$ teljesen tetszőleges (tehát esetleg teljesen diszkontinuus) megoldása a

$$\lambda(\sigma+\tau)=\lambda(\sigma)+\lambda(\tau)$$

függvényegyenletnek, ami

$$\bar{\eta}_1=\frac{\eta_1}{\alpha_1},\quad \bar{\eta}_3=\frac{\eta_1^2}{\alpha_1^2}\lambda\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1\eta_1}\right)+\frac{\eta_3}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

-nal ekvivalens, teljesen diszkontinuus transzformációs képletű objektumokra vezetne.

Tegyük fel, hogy $h(\tau)$ $\tau=0$-nál *deriválható és*

$$h'(0)=\begin{pmatrix}\varkappa_1\\ \varkappa_3\end{pmatrix}.$$

Ekkor (81)-ből és (79)-ből

$$\frac{\chi_1(\sigma+\tau)-\chi_1(\sigma)}{\tau}=\frac{\chi_1\left(\dfrac{\tau}{\chi_1(\sigma)}\right)-\chi_1(0)}{\dfrac{\tau}{\chi_1(\sigma)}}.$$

Feltevésünk szerint $\tau\to 0$ esetén a jobboldalnak van határértéke: $\chi_1'(0)=\varkappa_1$, tehát a baloldalra is ugyanez áll:

$$\chi_1'(\sigma)=\varkappa_1$$

és ebből (79) miatt

$$\chi_1(\sigma)=\varkappa_1\sigma+1. \tag{83}$$

Ezt (82)-be visszatéve

$$(\varkappa_1\sigma+1)^2\chi_3\left(\frac{\tau}{\varkappa_1\sigma+1}\right)+\chi_3(\sigma)=\chi_3(\sigma+\tau)+3\sigma\tau \tag{84}$$

-t kapunk, amiből (79) figyelembevételével

$$\frac{\chi_3(\sigma+\tau)-\chi_3(\sigma)}{\tau}=-3\sigma+\frac{\chi_3\left(\dfrac{\tau}{\varkappa_1\sigma+1}\right)-\chi_3(0)}{\dfrac{\tau}{\varkappa_1\sigma+1}}(\varkappa_1\sigma+1).$$

Mivel feltevésünk szerint a jobboldalnak ismét van határértéke $\tau\to 0$ esetén, ezért a baloldalnak is van, és

$$\chi_3'(\sigma)=-3\sigma+\varkappa_3(\varkappa_1\sigma+1),$$

vagy (79) miatt

$$\chi_3(\sigma)=\frac{\varkappa_1\varkappa_3-3}{2}\sigma^2+\varkappa_3\sigma.$$

Végül ezt (83)-mal együtt (80)-ba helyettesítjük:

$$f(z,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=v^{-1}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{\nu_1(z)}{\alpha_1}+\varkappa_1\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{\nu_3(z)}{\alpha_1}+\varkappa_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\nu_1(z)+\dfrac{\varkappa_1\varkappa_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right], \tag{85}$$

ami már kielégíti (67)-et.

MEGJEGYZÉSEK:

1. (81), (82) megoldható más, talán gyengébbnek tűnő feltételek mellett is: tegyük fel például, hogy $\chi_1(\sigma)$-nak *legfeljebb egy nullhelye* van. Akkor

$$\chi_1(\sigma)\chi_1\left(\frac{\tau}{\chi_1(\sigma)}\right)=\chi_1(\sigma+\tau) \tag{81}$$

-ban vagy

$$\chi_1(\sigma)=1, \tag{86}$$

vagy jogos a következő eljárás: helyettesítünk

$$\tau=\frac{\sigma\chi_1(\sigma)}{1-\chi_1(\sigma)}$$

-t, (amit úgy választottunk, hogy (81)-ben

$$\sigma+\tau=\frac{\tau}{\chi_1(\sigma)}=\left(=\frac{\sigma}{1-\chi_1(\sigma)}\right)$$

legyen). Így

$$[\chi_1(\sigma)-1]\chi_1\left(\frac{\sigma}{1-\chi_1(\sigma)}\right)=0,$$

tehát $\chi_1(\sigma)\neq 1$ lévén

$$\chi_1\left(\frac{\sigma}{1-\chi_1(\sigma)}\right)=0$$

és mivel feltevésünk szerint $\chi_1(\tau)$-nak legfeljebb egy nullhelye van, ezért

$$\frac{\sigma}{1-\chi_1(\sigma)}=\text{állandó}=-\frac{1}{\varkappa_1}$$

és így

$$\chi_1(\sigma)=\varkappa_1\sigma+1, \tag{83}$$

ami (86)-ot is tartalmazza ($\varkappa_1=0$).

Ha $\varkappa_1\neq 0$, úgy

$$(\varkappa_1\sigma+1)^2\chi_3\left(\frac{\tau}{\varkappa_1\sigma+1}\right)+\chi_3(\sigma)=\chi_3(\sigma+\tau)+3\sigma\tau \tag{84}$$

-ba

$$\tau=-\sigma-\frac{1}{\varkappa_1}$$

-et helyettesitünk, hogy

$$\sigma+\tau=\frac{\tau}{\varkappa_1\sigma+1}=-\frac{1}{\varkappa_1}$$

legyen:

$$\chi_3(\sigma)=-(\varkappa_1^2\sigma^2+2\varkappa_1\sigma)\chi_3\left(-\frac{1}{\varkappa_1}\right)-3\sigma^2-3\frac{\sigma}{\varkappa_1},$$

vagy a

$$-\frac{3}{\varkappa_1}-2\varkappa_1\chi_3\left(-\frac{1}{\varkappa_1}\right)=\varkappa_3,\qquad \varkappa_1^2\chi_3\left(-\frac{1}{\varkappa_1}\right)+3=\frac{3-\varkappa_1\varkappa_3}{2}$$

jelöléssel ismét

$$\chi_3(\sigma)=\frac{\varkappa_1\varkappa_3-3}{2}\sigma^2+\varkappa_3\sigma.$$

Itt nem tételeztünk fel $\chi_3(\sigma)$-ról *semmit*. Ha azonban $\varkappa_1=0$, úgy (84)

$$\chi_3(\tau)+\chi_3(\sigma)=\chi_3(\sigma+\tau)+3\sigma\tau$$

-ba, vagy

$$\chi_3(\sigma)+\frac{3}{2}\sigma^2=\lambda(\sigma)$$

-val

$$\lambda(\sigma)+\lambda(\tau)=\lambda(\sigma+\tau)$$

-ba megy át, és így

$$\lambda(\sigma)=\varkappa_3\sigma,\qquad \chi_3(\sigma)=-\frac{3}{2}\sigma^2+\varkappa_3\sigma$$

-t csak akkor nyerünk, ha $\chi_3(\sigma)$-t például *egy pontban folytonos*nak (vagy *mérhető*nek, vagy *pozitív mértékű halmazon korlátos*nak) tesszük fel.

Kérdéses, hogy χ_1-re vonatkozó enyhébb, ill. természetesebb feltételekkel is célt érhetünk-e.

2. A (69) művelet alatt *kétparaméteres (fél)csoportot* $\alpha_1\neq 0, \alpha_2, \alpha_3$ közül az egyiknek fixen tartásával, mint említettük és könnyű meggyőződni róla csak az $\{1, \alpha_2, \alpha_3\}$ és az $\{\alpha_1, 0, \alpha_3\}$-at kapjuk (ezt a számítást HOSSZÚ M. és KERTÉSZ A. voltak szívesek elvégezni). Más módon, pl. úgy hogy $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$-ban α_3-t α_1 és α_2 *függvényének tekintjük*, kaphatunk azonban újabb *kétparaméteres (fél)csoportot:*

$$\alpha_3=\gamma(\alpha_1, \alpha_2),$$

tehát (69)-ből

(87) $$\gamma(\alpha_1\beta_1, \alpha_1^2\beta_2+\alpha_2\beta_1)=\beta_1\gamma(\alpha_1, \alpha_2)+3\beta_2\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^3\gamma(\beta_1,\beta_2).$$

Ezt a függvényegyenletet megoldjuk: $\alpha_1=\beta_1=1$-gyel,

$$\gamma(1, \alpha_2+\beta_2)=\gamma(1, \alpha_2)+3\alpha_2\beta_2+\gamma(1, \beta_2),$$

ami a

$$\lambda(\alpha_2)=\gamma(1, \alpha_2)-\frac{3}{2}\alpha_2^2$$

jelöléssel

$$\lambda(\alpha_2+\beta_2)=\lambda(\alpha_2)+\lambda(\beta_2)$$

-be megy át, tehát, ha $\gamma(1,\alpha_2)$ pl. *mérhető*, akkor

$$\lambda(\alpha_2)=\delta\alpha_2,$$

$$\gamma(1,\alpha_2)=\delta\alpha_2+\frac{3}{2}\alpha_2^2. \tag{88}$$

Most még meghatározzuk $\gamma(\alpha_1,0)$-t és ezekből (87) segítségével összerakjuk $\gamma(\alpha_1,\beta_1)$-et. (87)-be $\alpha_2=\beta_2=0$-t téve és a baloldal szimmetriáját kihasználva

$$\gamma(\alpha_1\beta_1,0)=\beta_1\gamma(\alpha_1,0)+\alpha_1^3\gamma(\beta_1,0)=\alpha_1\gamma(\beta_1,0)+\beta_1^3\gamma(\alpha_1,0),$$

$$\frac{\gamma(\alpha_1,0)}{\alpha_1^3-\alpha_1}=\frac{\gamma(\beta_1,0)}{\beta_1^3-\beta_1}=\gamma \qquad (\gamma=\text{konstans}).$$

Ezt és (88)-at (87)-be $\alpha_1=1$, $\beta_2=0$, $\beta_1=\tilde{\alpha}_1$, $\beta_1\alpha_2=\tilde{\alpha}_2$-vel írva

$$\gamma(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2)=\delta\tilde{\alpha}_2+\frac{3}{2}\frac{\tilde{\alpha}_2^2}{\tilde{\alpha}_1}+\gamma(\tilde{\alpha}_1^3-\tilde{\alpha}_1)$$

lesz. Ha ezt (87)-be visszatesszük, $\delta=0$-t kapunk és így (87) megoldása

$$\gamma(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}+\gamma(\alpha_1^3-\alpha_1),$$

ami ki is elégíti, tehát

$$\left\{\alpha_1,\alpha_2,\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}+\gamma(\alpha_1^3-\alpha_1)\right\}$$

s *kétparaméteres (fél)csoport a* (69) *művelet alatt* (ehhez a számításhoz kiindulást KOVÁCS L. egy ötlete adott).

Az 5. TÉTELnek ezen kiindulással való alkalmazása azonban *nem ad új kétkomponensű harmadosztályú egydimenziós objektum*okat. (HOSSZÚ M.)

Ez ad alkalmat a (69) művelet alatt (fél)csoportot alkotó *egyparaméteres* sokaság meghatározására (részben HOSSZÚ M.-al közös). $\alpha_1\neq 0,\alpha_2,\alpha_3$ közül kettő konstansul tartásával

$$\{\alpha_1,0,0\} \quad \text{és} \quad \{1,0,\alpha_3\}$$

-t kapunk.

$$\{1,\alpha_2,\gamma(\alpha_2)\}$$

alakút mérhető $\gamma(\alpha_2)$*-vel* (88) értelmében *csak*

$$\left\{1,\alpha_2,\delta\alpha_2+\frac{3}{2}\alpha_2^2\right\}$$

-et találjuk.

Az

$$\{\alpha_1,\varphi(\alpha_1),\psi(\alpha_1)\}$$

alakúak eleget tesznek a (69)-ből következő függvényegyenleteknek:

$$\varphi(\alpha_1\beta_1) = \beta_1\varphi(\alpha_1) + \alpha_1^2\varphi(\beta_1) = \alpha_1\varphi(\beta_1) + \beta_1^2\varphi(\alpha_1),$$

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\alpha_1-\alpha_1^2} = \frac{\varphi(\beta_1)}{\beta_1-\beta_1^2} = \gamma, \qquad \varphi(\alpha_1) = \gamma(\alpha_1-\alpha_1^2)$$

és

$$\psi(\alpha_1\beta_1) = \beta_1\psi(\alpha_1) + 3\varphi(\beta_1)\alpha_1\varphi(\alpha_1) + \alpha_1^3\psi(\beta_1) =$$
$$= \beta_1\psi(\alpha_1) + 3\alpha_1\gamma^2(\alpha_1-\alpha_1^2)(\beta_1-\beta_1^2) + \alpha_1^3\psi(\beta_1) =$$
$$= \alpha_1\psi(\beta_1) + 3\beta_1\gamma^2(\beta_1-\beta_1^2)(\alpha_1-\alpha_1^2) + \beta_1^3\psi(\alpha_1),$$

$$\psi(\alpha_1) = \frac{\alpha_1-\alpha_1^3}{\beta_1-\beta_1^3}\psi(\beta_1) + \frac{3(\beta_1-\alpha_1)\gamma^2(\alpha_1-\alpha_1^2)(\beta_1-\beta_1^2)}{\beta_1-\beta_1^3} =$$
$$= \varkappa(\alpha_1-\alpha_1^3) + \lambda(\alpha_1-\alpha_1^2) + \varepsilon(\alpha_1^2-\alpha_1^3)$$

(β_1-et konstansnak tartottuk; $\varkappa, \lambda, \varepsilon$ konstans), ami visszahelyettesítés után

$$\psi(\alpha_1) = \delta(\alpha_1-\alpha_1^3) - 3\gamma^2(\alpha_1^2-\alpha_1^3)$$

-t ad, tehát *az ilyen alakúak az*

$$\{\alpha_1, \gamma(\alpha_1-\alpha_1^2), \delta(\alpha_1-\alpha_1^3) - 3\gamma^2(\alpha_1^2-\alpha_1^3)\}$$

egyparaméteres (fél)csoportot adják.

Kérdéses, nincs-e más

$$\{\alpha_1, (\sigma, \tau), \alpha_2(\sigma, \tau), \alpha_3(\sigma, \tau)\}, \quad \{\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \alpha_3(\tau)\}$$

két-, ill. egyparaméteres (fél)csoport is (vö. HOSSZÚ M. [80]).

Az előzőekben azért írtunk mindenüvé „(fél)csoport"-ot, mert a tárgyalt struktúráktól csak azt követeltük, hogy félcsoportok legyenek, de azok csoportoknak bizonyultak.

3. Ha a (85) transzformációs képletben

$$\varkappa_1 = \varkappa_3 = 0,$$

úgy az objektum a

$$\bar{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{\alpha_1}, \quad \bar{\eta}_3 = \frac{\eta_3}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \tag{89}$$

transzformációs képletű, *egykomponensűekre széteső objektummal ekvivalens.*

Ha

$$\varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_3 \neq 0,$$

úgy az

$$\eta_1 = \varkappa_3\nu_1(z) \quad \eta_3 = \nu_3(z)$$

jelöléssel látjuk, hogy ezek az objektumok *ekvivalensek a*

$$\bar{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{\alpha_1}, \quad \bar{\eta}_3 = \frac{\eta_2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\eta_1 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \tag{15}$$

transzformációs képletű *Pensov-féle objektummal.*

Végül ha

$$\varkappa_1 \neq 0,$$

úgy

$$\eta_1 = \frac{\nu_1(z)}{\varkappa_1}, \quad \eta_3 = \nu_3(z) - \frac{\varkappa_3}{2\varkappa_1} \nu_1(z)^2$$

révén látjuk, hogy ezek az objektumok *ekvivalensek* a

$$\bar{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \quad \bar{\eta}_3 = \frac{\eta_3}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \tag{90}$$

transzformációs képletű, egykomponensűekre széteső objektummal.

Ezeket kapta meg G. PENSOV [38] is, analiticitási feltételek mellett. A mi eredményünk a következő

9. TÉTEL: (67) *általános megoldása kétkomponensű* $z \in H$*-kre és egy a* (69) *műveletre nézve félcsoportot alkotó* A *halmaz* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3$*-aira mindig* (85) *alakú, ha léteznek olyan* $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ *konstansok, hogy*

$$f\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}, \eta_1, 0, \eta_3\right] = z \tag{18}$$

-nek egyértelmű

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_3\end{pmatrix} = y = u(z) \in A$$

megoldása legyen és

$$u\left\{f\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}, 1, \alpha_2, 0\right]\right\}$$

$\alpha_2 = 0$*-ban deriválható függvénye* α_2*-nek.*

E feltételek mellett a harmadosztályú kétkomponensű egydimenziós objektumok mind ekvivalensek a (89), (15), (90) *lineáris objektumok egyikével.*

Érdekes megemlíteni, hogy az egykomponensűekre fel nem bonthatónak bizonyult (15) transzformációs képletű Pensov-féle objektumhoz egy egykomponensű, pl. másodosztályú

$$\bar{\eta}_2 = \frac{\eta_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$$

transzformációs képletű objektumot hozzávéve, az így nyert

$$\bar{\eta}_1 = \frac{\eta_1}{\alpha_1}, \quad \bar{\eta}_2 = \frac{\eta_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \quad \bar{\eta}_3 = \frac{\eta_3}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\eta_1 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

objektum már ekvivalens az egykomponensűekre széteső

$$\bar{\zeta}_1 = \frac{\zeta_1}{\alpha_1}, \quad \bar{\zeta}_2 = \frac{\zeta_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \quad \bar{\zeta}_3 = \frac{\zeta_3}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

transzformációs képletű objektummal, amint azt

$$\zeta_1 = \eta_1, \quad \zeta_2 = \eta_2, \quad \zeta_3 = \eta_3 - \eta_1 \eta_2$$

révén azonnal láthatjuk:

$$\bar{\zeta}_3 = \bar{\eta}_3 - \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 = \frac{\eta_3}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\eta_1 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{\eta_1\eta_2}{\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\eta_1 = \frac{\zeta_3}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}.$$

III. KOVARIÁNS DERIVÁLTAK

3.1 §. Egykomponensű egydimenziós első- és másodosztályú objektumok kovariáns deriváltja

1. Elsőosztályú objektumok kovariáns deriváltja. Először a

$$\bar{z} = f(z, \alpha_1) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha}\right) \tag{48}$$

transzformációs képletű (közönséges sűrűségekkel ekvivalens) egykomponensű egydimenziós elsőosztályú objektumok

$$Dz = g(z, z', y) \tag{20}$$

kovariáns deriváltjait vizsgáljuk. Itt (48) deriválásából

$$\bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{d\xi}\frac{d\xi}{d\bar{\xi}} = \frac{\nu'(z)z'\alpha_1^{-1} - \nu(z)\alpha_1^{-2}\alpha_2}{\nu'\{\nu^{-1}[\nu(z)\alpha_1^{-1}]\}}\frac{1}{\alpha_1}.$$

Az itt másodosztályú y segédobjektumra a 3. TÉTEL szerint

$$\bar{y} = \mu^{-1}\left(\frac{\mu(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right) \tag{91}$$

áll, és végül maga Dz a kovariáns derivált értelmezése szerint azonos osztályú z-vel, tehát az **1.3 §.** *1* eredményei szerint vagy a

$$\overline{Dz} = g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{y}) = \omega^{-1}\left(\frac{\omega(Dz)}{\alpha_1}\right), \tag{92}$$

vagy a

$$\overline{Dz} = g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{y}) = \omega^{-1}\left(\frac{\omega(Dz)}{|\alpha_1|}\right) \tag{93}$$

képlet szerint transzformálódik.

Vegyük először (92)-t:

$$\begin{aligned}\omega^{-1}\left(\frac{\omega[g(z, z', y)]}{\alpha_1}\right) = \\ = g\left[\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\right), \frac{\nu'(z)z'\alpha_1^{-2} - \nu(z)\alpha_1^{-3}\alpha_2}{\nu'\{\nu^{-1}[\nu(z)\alpha_1^{-1}]\}}, \mu^{-1}\left(\frac{\mu(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{94}$$

Ezt a függvényegyenletet kell megoldanunk, hogy $Dz = g(z, z', y)$-t megkapjuk. Vegyünk

$$\alpha_1 = \nu(z),\ \alpha_2 = -\alpha_1\mu(y) = -\nu(z)\mu(y),$$

(95)
$$\chi(x) = \omega\left\{g\left[\nu^{-1}(1), \frac{x}{\nu'[\nu^{-1}(1)]}, \mu^{-1}(0)\right]\right\}$$

-t és már meg is kaptuk

(96)
$$Dz = g(z, z', y) = \omega^{-1}\left[\nu(z)\chi\left(\frac{\nu'(z)}{\nu(z)^2}z' + \frac{\mu(y)}{\nu(z)}\right)\right]$$

-t. (93)-nál ugyanígy

(97)
$$\omega^{-1}\left(\frac{\omega[g(z, z', y)]}{|\alpha_1|}\right) =$$
$$= g\left[\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\right), \frac{\nu'(z)z'\alpha_1^{-2} - \nu(z)\alpha_1^{-3}\alpha_2}{\nu'\{\nu^{-1}[\nu(z)\alpha_1^{-1}]\}}, \mu^{-1}\left(\frac{\mu(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)\right]$$

megoldása a (95) helyettesítéssel

(98)
$$Dz = g(z, z', y) = \omega^{-1}\left[|\nu(z)|\chi\left(\frac{\nu'(z)}{\nu(z)^2}z' + \frac{\mu(y)}{\nu(z)}\right)\right].$$

(96), ill. (98) ki is elégíti (94), ill. (97)-et. χ mindkét esetben teljesen tetszőleges függvény.

Eredményünk tehát a következő

10. TÉTEL: *Elsőosztályú egykomponensű egydimenziós* (48) *transzformációs képletű objektumok kovariáns deriváltja mindig vagy* (96) *vagy* (98) *alakú, ahol χ tetszőleges függvény és y egy* (91) *transzformációs képletű másodosztályú segédobjektum.*

A (96) képletet S. GOŁĄB [58] is közli bizonyítás nélkül, g deriválhatóságának feltevésével. Mi g-ről semmi kikötést nem tettünk és a következőkben sem fogunk tenni.

Térjünk át a Weyl-féle sűrűségekkel ekvivalens

(47)
$$\bar{z} = f(z, \alpha_1) = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{|\alpha_1|}\right)$$

transzformációs képletű objektumokra. Itt

$$\bar{z}' = \frac{\nu'(z)z'|\alpha_1|^{-1} - \nu(z)|\alpha_1|^{-2}\alpha_2 \operatorname{sign}\alpha_1}{\nu'\{\nu^{-1}[\nu(z)|\alpha_1|^{-1}]\}}\frac{1}{\alpha_1}$$

és (92) és (93) szintén egyaránt lehetséges. (92)-vel

(99)
$$\omega^{-1}\left(\frac{\omega[g(z, z', y)]}{\alpha_1}\right) =$$
$$= g\left[\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{|\alpha_1|}, \operatorname{sign}\alpha_1\frac{\nu'(z)z'\alpha_1^{-2} - \nu(z)\alpha_1^{-3}\alpha_2}{\nu'\{\nu^{-1}[\nu(z)|\alpha_1|^{-2}]\}}, \mu^{-1}\left(\frac{\mu(y)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)\right].\right.$$

Ezúttal

$$\alpha_1 = \nu(z), \quad \alpha_2 = -\alpha_1 \mu(y) = -\nu(z)\mu(y),$$

$$\chi_{\pm 1}(x) = \omega\left\{g\left[\nu^{-1}(\pm 1), \frac{\pm x}{\nu'[\nu(\pm 1)]}, \mu^{-1}(0)\right]\right\}$$

-t helyettesítünk:

$$g(z, z', y) = \omega^{-1}\left[\nu(z)\chi_{\operatorname{sign}\nu(z)}\left(\frac{\nu'(z)}{\nu(z)^2}z' + \frac{\mu(y)}{\nu(z)}\right)\right].$$

Ha azonban ezt (99)-be visszahelyettesítjük,

$$\omega^{-1}\left[\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\chi_{\operatorname{sign}\nu(z)}\left(\frac{\nu'(z)}{\nu(z)^2}z' + \frac{\mu(y)}{\nu(z)}\right)\right] =$$

$$= \omega^{-1}\left[\frac{\nu(z)}{\alpha_1}\chi_{\operatorname{sign}\nu(z)}\left(\frac{\nu'\{\nu^{-1}[\nu(z)|\alpha_1|^{-1}]\}}{\nu(z)^2|\alpha_1|^{-2}}\operatorname{sign}\alpha_1\frac{\nu'(z)z'\alpha_1^{-2} - \nu(z)\alpha_1^{-3}\alpha_2}{\nu'\{\nu^{-1}[\nu(z)|\alpha_1|^{-1}]\}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\mu(y)\alpha_1^{-1} + \alpha_1^{-2}\alpha_2}{\nu(z)|\alpha_1|^{-1}}\right)\right]$$

-et kapunk, ami $\alpha_1 > 0$-ra mindig, $\alpha_1 < 0$-ra azonban csak akkor teljesül, ha

$$\chi_{\pm 1}(x) = \chi_{\pm 1}(-x) = \chi_{\pm 1}(|x|)$$

páros függvény. Így

$$(100) \qquad Dz = g(z, z', y) = \omega^{-1}\left[\nu(z)\chi_{\operatorname{sign}\nu(z)}\left(\left|\frac{\nu'(z)}{\nu(z)^2}z' + \frac{\mu(y)}{\nu(z)}\right|\right)\right]$$

és ez már kielégíti (99)-et. Teljesen hasonlóan (93)-ból

$$(101) \qquad Dz = g(z, z', y) = \omega^{-1}\left[|\nu(z)|\chi_{\operatorname{sign}\nu(z)}\left(\left|\frac{\nu'(z)}{\nu(z)^2}z' + \frac{\mu(y)}{\nu(z)}\right|\right)\right]$$

-re jutunk és érvényes a következő

11. TÉTEL: *Elsőosztályú egykomponensű egydimenziós* (47) *transzformációs képletű objektumok kovariáns deriváltja mindig vagy* (100) *vagy* (101) *alakú, ahol y egy másodosztályú segédobjektum a* (91) *transzformációs képlettel.*

2. *Másodosztályú objektumok kovariáns deriváltja.* Itt a 3. TÉTEL szerint

$$\bar{z} = \nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)$$

$$\bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{d\bar{\xi}} = \frac{d\bar{z}}{d\xi}\frac{d\xi}{d\bar{\xi}} = \frac{\nu'(z)z'\alpha_1^{-1} - \nu(z)\alpha_1^{-2}\alpha_2 + \alpha_1^{-2}\alpha_3 - 2\alpha_1^{-3}\alpha_2^2}{\nu'\{\nu^{-1}[\nu(z)\alpha_1^{-1} + \alpha_2\alpha_1^{-2}]\}}\,\frac{1}{\alpha_1}$$

és a

(20) $$Dz = g(z, z', y)$$

kovariáns deriváltban y harmadosztályú, tehát transzformációs képlete a 4. TÉTEL értelmében

(102) $$\bar{y} = \mu^{-1}\left(\frac{\mu(y)}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right).$$

Végül

$$\overline{Dz} = g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{y}) = \omega^{-1}\left(\frac{\omega(Dz)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right).$$

Így az

$$\omega^{-1}\left(\frac{\omega[g(z, z', y])}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right) =$$

(103) $$= g\left[\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right), \frac{\nu'(z)z'\alpha_1^{-2} - \nu(z)\alpha_1^{-3}\alpha_2 + \alpha_1^{-3}\alpha_3 - 2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2}{\nu'\{\nu^{-1}[\nu(z)\alpha_1^{-1} + \alpha_2\alpha_1^{-2}]\}}, \right.$$
$$\left. \mu^{-1}\left(\frac{\mu(y)}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right)\right]$$

függvényegyenletet kell megoldanunk. Helyettesítsünk

$$\alpha_2 = -\alpha_1\nu(z), \quad \alpha_3 = \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} - \alpha_1\mu(y) = \alpha_1\left[\frac{3}{2}\nu(z)^2 - \mu(y)\right],$$

$$\chi(x) = \omega\left\{g\left[\nu^{-1}(0), \frac{x}{\nu'[\nu^{-1}(0)]}, \mu^{-1}(0)\right]\right\}$$

-t, akkor

(104) $$Dz = g(z, z', y) = \omega^{-1}\left[\nu(z) + \alpha_1\chi\left(\frac{\nu'(z)z' + \frac{1}{2}\nu(z)^2 - \mu(y)}{\alpha_1^2}\right)\right].$$

Itt azonban mindjárt szembeötlik a jobboldalon szereplő α_1 változó, mely baloldalt nem szerepelt. Vegyük $\alpha_1 = 1$-et és a kapott

(105) $$Dz = g(z, z', y) = \omega^{-1}\left[\nu(z) + \chi\left\{\nu'(z)z' + \frac{1}{2}\nu(z)^2 - \mu(y)\right\}\right]$$

-t hasonlítsuk össze (104)-gyel, látjuk, hogy χ ki kell elégítse a

(106) $$\alpha_1\chi\left(\frac{x}{\alpha_1^2}\right) = \chi(x)$$

függvényegyenletet. *Tetszőleges* $\alpha_1 \neq 0$-ra ennek csak a triviális $\chi(x) = 0$ a megoldása, mert helyettesítsünk (106)-ba $\alpha_1 = -1$-et

$$-\chi(x) = \chi(x), \quad \chi(x) = 0\text{-t}$$

kapunk, ami a triviális (deriváltat nem tartalmazó)

$$Dz = \omega^{-1}[\nu(z)]$$

kovariáns „deriváltat“ adja.

Az $\alpha_1 = 1$ alcsoportra (105) a megoldás. Az $\alpha_1 > 0$ alcsoportra (106) megoldását

$$\frac{1}{\alpha_1^2} = |z|, \quad x = \operatorname{sign} z, \quad \chi(\operatorname{sign} z) = \varkappa_{\operatorname{sign} z}$$

-vel kapjuk:

$$\chi(z) = \varkappa_{\operatorname{sign} z} \sqrt{|z|}$$

és így (105)-ből

$$Dz = g(z, z', y) =$$

(107)
$$= \omega^{-1}\left[\nu(z) + \varkappa_{\operatorname{sign}\left[\nu'(z)z' + \frac{1}{2}\nu(z)^2 - \mu(y)\right]} \sqrt{\left|\nu'(z)z' + \frac{1}{2}\nu(z)^2 - \mu(y)\right|}\right].$$

(105) és (107) kielégíti (103)-at $\alpha_1 = 1$, ill. $\alpha_1 > 0$ esetén. Igaz tehát a következő

12. TÉTEL: *Másodosztályú egykomponensű egydimenziós objektumoknak tetszőleges reguláris koordinátatranszformációk esetén nincs nem-triviális kovariáns deriváltja. Az unimoduláris $\alpha_1 = 1$, ill. a pozitív deriváltú $\alpha_1 > 0$ alcsoporthoz tartozó legáltalánosabb kovariáns deriváltak* (105), *ill.* (107), *ahol y egy* (102) *transzformációs képletű harmadosztályú segédobjektum.*

S. GOLĄB [59] ugyanerre az eredményre g differenciálhatóságának feltételezésével jut.

3. 2 §. Többkomponensű egydimenziós első- és másodosztályú objektumok kovariáns deriváltjai

1. Elsőosztályú akárhány komponensű objektumok kovariáns deriváltjai. A 6. TÉTELnek megfelelően a

(65)
$$\bar{z} = f(z, \alpha_1) = v^{-1}\left[v(z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha_1^{-1} \end{pmatrix}\right] \qquad v(z) = \begin{pmatrix} v_0(z) \\ \nu(z) \end{pmatrix}$$

transzformációs képletű objektumok kovariáns deriváltjait vizsgáljuk. Itt és a következőkben a (9), (10) jelölésekkel élünk. (65)-öt deriválva a (19) formula felhasználásával

$$\bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{d\bar{\xi}} = \frac{d\bar{z}}{d\xi} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} \\ \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} \\ \vdots \\ \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} \\ \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} \end{pmatrix} =$$

$$= v'\left\{v^{-1}\left[v(z)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1 \\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1}\left[v'(z)z'\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \vdots \\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix} + v(z)\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_1^{-3}\alpha_2\end{pmatrix}\right].$$

A

$$(20) \qquad Dz = g(z, z', y)$$

-ban szereplő, itt másodosztályú y objektum a 7. TÉTELnek megfelelően

$$(108) \qquad \bar{y} = u^{-1}\left[u(y)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right], \qquad u(y) = \begin{pmatrix}u_0(y)\\ \mu_1(y)\\ \mu_2(y)\end{pmatrix}$$

szerint, végül Dz maga

$$\overline{Dz} = g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{y}) = w^{-1}\left[w(Dz)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}\right]$$

szerint transzformálódik. (Nem követeljük meg, hogy z, y, Dz egyenlő komponensszámúak legyenek.) Így a

$$w^{-1}\left\{w[g(z,z',y)]\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}\right\} = g\left(v^{-1}\left[v(z)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}\right],\right.$$

$$(109) \qquad , v'\left\{v^{-1}\left[v(z)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1}\left[v'(z)z'\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \vdots \\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix} + v(z)\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\\ -\alpha_1^{-3}\alpha_2\end{pmatrix}\right],$$

$$\left., u^{-1}\left[u(y)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right]\right)$$

függvényegyenletet kell megoldani.

Ehhez

$$\alpha_1 = \nu_1(z), \quad \alpha_2 = -\alpha_1\mu_2(y) = -\nu_1(z)\mu_2(y)$$

-t veszünk és a

$$h(s_0, x, t_0, \tau_1) = w\left[g\left\{v^{-1}\left[\begin{pmatrix} s_0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], v'\left(v^{-1}\left[\begin{pmatrix} s_0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right)^{-1} x,\ u^{-1}\left[\begin{pmatrix} t_0 \\ \tau_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right\}\right]$$

jelöléssel megkaptuk

$$Dz = g(z, z', y) =$$

$$(110) \qquad = w^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \nu_1(z) \end{pmatrix} h\left[v_0(z),\ v'(z)z'\cdot\begin{pmatrix} \nu_1(z)^{-1} \\ \vdots \\ \nu_1(z)^{-1} \\ \nu_1(z)^{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \nu_1(z)^{-1}\mu_2(y) \end{pmatrix},\ u_0(y), \frac{\mu_1(y)}{\nu_1(z)}\right]\right\}$$

-t, ami ki is elégíti (109)-t. Eredményünk a következő

13. TÉTEL: *Elsőosztályú akárhány komponensű egydimenziós, a* (65) *képlet szerint transzformálódó objektumok kovariáns deriváltja mindig* (110) *alakú, ahol y egy másodosztályú segédobjektum a* (108) *transzformációs képlettel.*

Ha y két komponensű, ill. y, ill. z, ill. Dz egykomponensű, úgy (110)*-ben* $u_0(y)$, *ill.* $u_0(y), \mu_1(y)$, *ill.* $v_0(z)$ *és* $\begin{pmatrix} \nu_1(z)^{-1} \\ \vdots \\ \nu_1(z)^{-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, *ill.* $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *hiányzik.* Ha mindhárom egykomponensű, úgy képletünk (96)-ba megy át.

2. Másodosztályú akárhány komponensű objektumok kovariáns deriváltja. Itt a 7. TÉTEL szerint

$$(66) \qquad \bar{z} = v^{-1}\left[v(z)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1^{-2}\alpha_2 \end{pmatrix}\right], \qquad v(z) = \begin{pmatrix} v_0(z) \\ \nu_1(z) \\ \nu_2(z) \end{pmatrix}$$

és

$$\bar{z}' = \frac{d\bar{z}}{d\xi}\cdot\begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \vdots \\ \alpha_1^{-1} \end{pmatrix} = v'\left\{v^{-1}\left[v(z)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-1} \end{pmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1^{-2}\alpha_2 \end{pmatrix}\right]\right\}^{-1}\left[v'(z)z'\cdot\begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \vdots \\ \alpha_1^{-1} \\ \alpha_1^{-2} \\ \alpha_1^{-2} \end{pmatrix} + v(z)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_1^{-3}\alpha_2 \\ -\alpha_1^{-3}\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - 2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2 \end{pmatrix}\right].$$

Az y segédobjektumnál a 8. TÉTEL szerinti (68) alakú

$$(111) \qquad \bar{y} = u^{-1}\left[u(y)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{pmatrix}\right], \qquad u(y) = \begin{pmatrix}u_0(y)\\ \mu_1(y)\\ \mu_2(y)\\ \mu_3(y)\end{pmatrix}$$

transzformációs képletet veszünk, amibe az $u_0(y)$-t ill. az $u_0(y)$-t és $\mu_1(y)$-t tartalmazó sorok elhagyásával keletkező

$$(112) \qquad \bar{y} = u^{-1}\left[u(y)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{pmatrix}\right], \qquad u(y) = \begin{pmatrix}\mu_1(y)\\ \mu_2(y)\\ \mu_3(y)\end{pmatrix}$$

ill. a (75) alakú

$$(113) \qquad \bar{y} = u^{-1}\left[u(y)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{pmatrix}\right], \qquad u(y) = \begin{pmatrix}\mu_2(y)\\ \mu_3(y)\end{pmatrix}$$

transzformációs képlet szerint transzformálódó három-, ill. kétkomponensű segédobjektumokat [és a (102) egykomponensűeket is] beleértjük.

Dz transzformációs képlete

$$(114) \qquad \overline{Dz} = g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{y}) = w^{-1}\left[w(Dz)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right],$$

(66) és (114)-nél is lehetséges, hogy csak az utolsó két, esetleg (114)-nél csak az utolsó sor van meg. (Azt amikor z, y egykomponensű, a 11. TÉTELben már elintéztük.)

Így a

$$w^{-1}\left\{w[g(z, z', y)]\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right\} =$$

$$
(115)\quad \begin{aligned}
&= g\left(v^{-1}\left[v(z)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right],\; v'\left\{v^{-1}\left[v(z)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}+\right.\right.\right.\\
&\left.\left.+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1}\left[v'(z)z'\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \vdots\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}+v(z)\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ -\alpha_1^{-3}\alpha_2\\ -\alpha_1^{-3}\alpha_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3-2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{pmatrix}\right],\\
&\left., u^{-1}\left[u(y)\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3-\frac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{pmatrix}\right]\right)
\end{aligned}
$$

függvényegyenletet kell megoldanunk, amelynek csak az alakja bonyolult, megoldása egyszerű: Az

$$
\alpha_1=\nu_1(z),\qquad \alpha_2=-\alpha_1\nu_2(z)=-\nu_1(z)\nu_2(z),
$$

$$
\alpha_3=\alpha_1\left[\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}-\mu_3(y)\right]=\nu_1(z)\left[\frac{3}{2}\nu_2(z)^2-\mu_3(y)\right]
$$

helyettesítéssel (itt látszik annak fontossága, hogy $\nu_1(z)$ ne hiányozzék) és a

$$
h(s_0,x,t_0,\tau_1,\tau_2)=w\left(g\left\{v^{-1}\left[\begin{pmatrix}s_0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right],\; v'\left\{v^{-1}\left[\begin{pmatrix}s_0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right]\right\}^{-1}x,\; u^{-1}\left[\begin{pmatrix}t_0\\ \tau_1\\ \tau_2\\ 0\end{pmatrix}\right]\right\}\right).
$$

jelöléssel már meg is kaptuk

$$
(116)\quad Dz=g(z,z',y)=w^{-1}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \nu_2(z)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \nu_1(z)\\ \nu_1(z)\end{pmatrix}\cdot h\left[v_0(z),\; v'(z)z'\cdot\begin{pmatrix}\nu_1(z)^{-1}\\ \vdots\\ \nu_1(z)^{-1}\\ \nu_1(z)^{-2}\\ \nu_1(z)^{-2}\end{pmatrix}+\right.\right.
$$

$$+\left.\left[\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \nu_1(z)^{-1}\nu_2(z)\\ \nu_1(z)^{-2}\left[\frac{1}{2}\nu_2(z)^2-\mu_3(y)\right]\end{pmatrix},\ u_0(y),\ \frac{\mu_1(y)}{\nu_1(z)},\ \frac{\mu_2(y)-\nu_2(z)}{\nu_1(z)}\right]\right\}$$

-t. Ez ilyen alakban akkor érvényes, ha z, Dz legalább három-, y legalább négykomponensű objektum.

Ha y legalább négykomponensű, de pl. Dz és z kétkomponensű, akkor

$$Dz=g(z,z',y)=w^{-1}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \nu_2(z)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\nu_1(z)\\ \nu_1(z)\end{pmatrix}\cdot h\left[v'(z)z'\cdot\begin{pmatrix}\nu_1(z)^{-2}\\ \nu_1(z)^{-2}\end{pmatrix}+\right.\right.$$

(117)

$$\left.\left.+\begin{pmatrix}\nu_1(z)^{-1}\nu_2(z)\\ \nu_1(z)^{-2}\left[\frac{1}{2}\nu_2(z)^2-\mu_3(y)\right]\end{pmatrix},\ u_0(y),\ \frac{\mu_1(y)}{\nu_1(z)},\ \frac{\mu_2(y)-\nu_2(z)}{\nu_1(z)}\right]\right\}.$$

Ha y háromkomponensű a (112) transzformációs képlettel, z legalább háromkomponensű és pl. Dz kétkomponensű, akkor

$$Dz=g(z,z',y)=w^{-1}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \nu_2(z)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\nu_1(z)\\ \nu_1(z)\end{pmatrix}\cdot h\left[v_0(z),\ v'(z)z'\cdot\begin{pmatrix}\nu_1(z)^{-1}\\ \vdots\\ \nu_1(z)^{-1}\\ \nu_1(z)^{-2}\\ \nu_1(z)^{-2}\end{pmatrix}+\right.\right.$$

(118)

$$\left.\left.+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \nu_1(z)^{-1}\nu_2(z)\\ \nu_1(z)^{-2}\left[\frac{1}{2}\nu_2(z)^2-\mu_3(y)\right]\end{pmatrix},\ \frac{\mu_1(y)}{\nu_1(z)},\ \frac{\mu_2(y)-\nu_2(z)}{\nu_1(z)}\right]\right\}.$$

Ha y kétkomponensű a (113) transzformációs képlettel és pl. Dz egykomponensű, z kétkomponensű, akkor

$$Dz=g(z,z',y)=\omega^{-1}\left\{\nu_2(z)+\right.$$

(119)

$$\left.+\nu_1(z)\chi\left[v'(z)z'\cdot\begin{pmatrix}\nu_1(z)^{-2}\\ \nu_1(z)^{-2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\nu_1(z)^{-1}\nu_2(z)\\ \nu_1(z)^{-2}\left[\frac{1}{2}\nu_2(z)^2-\mu_3(y)\right]\end{pmatrix},\ \frac{\mu_2(y)-\nu_2(z)}{\nu_1(z)}\right]\right\}.$$

Ha y egykomponensű a (102) transzformációs képlettel, Dz legalább háromkomponensű és pl. z kétkomponensű, akkor

$$Dz = g(z, z', y) = w^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \nu_2(z) \end{pmatrix} + \right. \tag{120}$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \nu_1(z) \\ \nu_1(z) \end{pmatrix} \cdot h\left[v'(z)z' \cdot \begin{pmatrix} \nu_1(z)^{-2} \\ \nu_1(z)^{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1(z)^{-1}\nu_2(z) \\ \nu_1(z)^{-2}\left[\frac{1}{2}\nu_2(z)^2 - \mu(y)\right] \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

A (116), (117), (118), (119), (120) függvények mind kielégítik a (115) függvényegyenletet, ill. megfelelő speciális eseteit, így érvényes a következő

14. TÉTEL: *Másodosztályú n_1-komponensű* ($n_1 > 1$) *egydimenziós, a* (66) *képlet szerint transzformálódó objektumok n_2-komponensű kovariáns deriváltja az n_3-komponensű harmadosztályú y segédobjektummal $n_1 \geqq 3$, $n_2 \geqq 3$, $n_3 \geqq 4$ esetén mindig* (116), *$n_1 = n_2 = 2$, $n_3 \geqq 4$ esetén* (117), *$n_1 \geqq 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$ esetén* (118), *$n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$ esetén* (119), *$n_1 = 2$, $n_2 \geqq 3$, $n_3 = 1$ esetén* (120) *alakú (a többi esetben ezek megfelelő kombinációjaként keletkezik), ahol az y segédobjektum a* (111), *ill.* (112), *ill.* (113), *ill.* (102) *transzformációs képlettel transzformálódik.*

Ha a kovariáns deriváltat úgy értelmezzük ([59]), hogy Dz ne csak ugyanolyan osztályú legyen, mint z, hanem ugyanaz legyen a transzformációs képlete is, akkor a 10—14. TÉTELben

$$\omega(z) \equiv \nu(z), \qquad w(z) \equiv v(z)$$

és a 10—11. TÉTELekben csak (96) és (101), a 14. TÉTELben csak $n_1 = n_2$ vehető.

BEFEJEZÉS

∞ §. További kérdések

Azt hisszük, szembetűnőek a jelen dolgozat olvasásánál a benne meg nem oldott kérdések, habár e dolgozat a geometriai objektumok elméletének tárgyalt kérdésköreiben — úgy véljük — lényegesen túlmegy az irodalomban eddig elért eredményeken.

Kezdjük az itt nem szereplő, de megoldott kérdésekkel. Hiányzik itt az eredményül kapott objektumok interpretálása, ez a hivatkozott irodalomban jól ismert. Kivételt képeznek az (58), (60) és (15) transzformációs képletű objektumok, melyeknek érdekes volna geometriai interpretációt megtalálni. — A többkomponensű egydimenziós *negyedosztályú* (és magasabb osztályú) objektumok meghatározása megy a II. rész módszereivel (vö. [80]), de a kapott képletek kevéssé esztétikusak, és negyed- vagy magasabb osztályú objektumok a differenciálgeometriában gyakorlatilag egyáltalán nem fordulnak elő. Ugyancsak elvégezhető, de bonyolult képletekre vezet annak a vizsgálatnak kiterjesztése többkomponensű első, másod- és harmadosztályú egydimenziós objektumokra, melyet a **1.3** § *1.*-ben végeztünk, tehát azon eset tárgyalása, amikor *z a tér két különböző halmazában foglalhat helyet,*

$$(16)\qquad f\left[\begin{Bmatrix} y_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix}, \eta_1, \eta_2, \eta_3\right] = z$$

megoldása *csak* $\eta_1 > 0$-ra *egyértelmű*, viszont az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ konstansokat is kétféleképpen választhatjuk aszerint, hogy z melyikben van a két halmaz közül. Ezt [78]-ban elvégeztük. — *A megoldhatósági feltételek* egyáltalán erős megszorítást jelentőknek tűnnek. *Egydimenziós* (többkomponensű) objektumoknál ez nincs így: HOSSZÚ M. [80] kimutatta azóta, hogy minden *megoldhatósági feltétel nélkül sem jutunk lényegesen más transzformációs képletű objektumokra.* — Érdekes a **2.2** paragrafus végén a (15) transzformációs képletű Pensov-féle objektum *kiegészítés*ére alkalmazott eljárás általánosítása is, mellyel egy megoldhatósági feltételt ki nem elégítő objektumot kiegészíthetünk megfelelő megoldhatósági feltételt kielégítő objektumra. Ezzel is HOSSZÚ M. foglalkozik. Ő az objektumok normál transzformációs képlete meghatározásának problémáját bizonyos paraméteralcsoportok (vö. **2.2** § *3.* 2. megjegyzés) meghatározására vezeti vissza [80]. Emlékeztetek a **2.2** § *3.* 1. és 2. megjegyzésében említett és részben szintén HOSSZÚ M. által megoldott problémákra is. — A *kovariáns deriváltak*nál a **3.2** § *2*-ben lehetne a segédobjektum (15), (85) transzformációs képletű is. Ez nem okoz nehézséget, csak a számolás unalmas.

Már az előbb említett két z-halmazú, (16)-ban kétféle ε-okhoz tartozó, csak $\eta_1 > 0$-nál egyértelmű megoldású többkomponensű objektumoknál lényegesebb nehézségekbe ütközik a *kovariáns derivált* meghatározása. Még inkább ez a helyzet a *többdimenziós,* pl. (58), (60) transzformációs képletű objektumok kovariáns deriváltjainál. — Pedig ezek még igen speciális többdimenziós objektumok. Az igazi, de igen távolinak látszó cél *megoldhatósági feltételek nélkül meghatározni az összes* (de legalább az első, másod- és a kovariáns derivált érdekében a harmadosztályú) *többdimenziós többkomponensű objektumok transzformációs képleteit, kovariáns deriváltját* stb.

Ez a cél, mint az eddig meglevő irodalom tanulmányozása is mutatja, úgy látszik csak igen lassan, fokozatosan érhető el és ehhez kívánt egy lépcsőfokot adni a jelen dolgozat is.

*

Megjegyzés a korrektúra alkalmával. E munka megírása után vettem észre és az Acta Mathematica Ac. Sci. Hung.-ban közlendő cikkben fejtem ki részletesen, hogy S. GOLAB [18], [27] azon állítása, miszerint elsőnél magasabb osztályú egydimenziós egykomponensű objektumok értékei csak *egy* intervallumot tölthetnek ki, amennyiben $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ $(\alpha_1 \neq 0)$ folytonos, $f(z, 1, 0, \ldots, 0) = 0$ és $f(z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = y$ $(\alpha_1 \neq 0)$ bármely y, z párra megoldható (vö. **0.1** § 2) — téves. E feltételek mellett ugyanis *léteznek* olyan másod- és harmadosztályú objektumok is, melyeknek értékei *két* pozitív hosszúságú intervallumot töltenek ki (de *mások már nem!*). Az ilyen *másodosztályú objektumok* mind *ekvivalensek* az

$$\bar{y} = |y|^{1/\alpha_1} e^{\alpha_2/\alpha_1^2} \operatorname{sign}(y\alpha_1), \qquad y \neq 0$$

transzformációs képletű objektumokkal és a következőképen is szemléltethetők. Az egyik alapintervallum legyen (a, b), a másik (a_0, b_0) (a fenti reprezentánsnál $(0, \infty)$ és $(-\infty\, 0)$, $\nu(z)$ és $\nu_0(z)$ két olyan folytonos és szigorúan monoton függvény, melyek (a, b)-t, ill. (a_0, b_0)-t viszik át $(-\infty, \infty)$-be (a fentinél $\log z$ és $\log |z|$). Mármost $z \in (a, b)$, $\alpha_1 > 0$ esetén z-t először ν-vel átvisszük $(-\infty, \infty)$-be, ott az affin összefüggés objektumának (13) transzformációs képlete szerint transzformáljuk, majd ν^{-1}-gyel visszahozzuk (a, b)-be. $z \in (a, b)$, $\alpha_1 < 0$ esetén ν-vel szintén átvisszük $(-\infty, \infty)$-be, ott ugyancsak (13) szerint transzformáljuk, de az eredményt most ν_0-nak ν_0^{-1} inverzével (a_0, b_0)-ba visszük. Hasonlóan járunk el $z \in (a_0, b_0)$ esetén is. A két intervallumot betöltő egydimenziós egykomponensű *harmadosztályú* differenciálgeometriai *objektumok* hasonlóan *ekvivalensek*

$$\bar{y} = |y|^{1/\alpha_1^2} e^{(\alpha_3/\alpha_1^3) - (3\alpha_2^2)/(2\alpha_1^4)} \operatorname{sign}(y\alpha_1), \quad y \neq 0$$

-val és természetesen a fentihez hasonló interpretáció is elmondható róluk.

Viszont *harmadiknál magasabb osztályú ilyen objektum nincs.*

Ugyancsak időközben derült ki, hogy másodosztályú egydimenziós *egy*komponensű (13)-mal ekvivalens objektumok egykomponensű, ugyancsak (13)-mal ekvivalens kovariáns deriváltja *három*komponensű harmadosztályú

(112) szerint transzformálódó segédobjektummal bizonyos jelentőséggel bír az ún. Lie-deriváltak elméletében. Ezek

$$\omega^{-1}\left(\frac{\omega[g(z,z',y)]}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)=g\left\{\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right),\right.$$

$$,\ \frac{\nu'(z)z'\alpha_1^{-2}-\nu(z)\alpha_1^{-3}\alpha_2+\alpha_1^{-3}\alpha_3-2\alpha_1^{-4}\alpha_2^2}{\nu'\left[\nu^{-1}\left(\frac{\nu(z)}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right)\right]},$$

$$\left.,\ u^{-1}\left[u(y)\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \alpha_1^{-2}\alpha_2\\ \alpha_1^{-3}\alpha_3-\frac{3}{2}\alpha_1^{-4}\alpha_2^2\end{pmatrix}\right]\right\}$$

függvényegyenletét itt nem tárgyaltuk, de az a **3. 1** § *2* és a **3. 2** § *2* módszereivel könnyen megoldható, általános megoldása:

$$Dz=g(z,z',y)=\omega^{-1}\left[\nu(z)+\mu_1(y)\lambda\left(\frac{\nu'(z)z'+\frac{1}{2}\nu(z)^2-\mu_3(y)}{\mu_1(y)^2},\ \frac{\mu_2(y)-\nu(z)}{\mu_1(y)}\right)\right].$$

A Lie-deriváltaknál érdekes $Dz=z+\eta_1\left(z'+z\eta_2-\eta_3-\frac{1}{2}\eta_2^2\right)$ ennek $\nu(z)=z$, $\omega(x)=x$, $\mu_1(y)=\frac{1}{\eta_1}$, $\mu_2(y)=\eta_2$, $\mu_3(y)=\eta_3$, $\lambda(s,t)=s-\frac{1}{2}t^2$ speciális esete.

A NEUTRINÓ VISSZALÖKŐ HATÁSÁNAK ÉS AZ ELEKTRON-NEUTRINÓ SZÖGKORRELÁCIÓJÁNAK VIZSGÁLATA A He^6 BÉTA-BOMLÁSÁNÁL WILSON-KAMRÁVAL

CSIKAI GYULA
(Debrecen)

Bevezetés

Néhány évvel ezelőtt (1953) SZALAY SÁNDOR professzor hívta fel a figyelmemet a He^6 izotóp béta-bomlásának Wilson-kamrával való megvizsgálására, a neutrinó visszalökő hatásának kimutatása szempontjából. A visszalökési kísérletek — a neutrinó létezésének bizonyítására — a béta-bomlásnál is érvényesülő energia és impulzus megmaradási elvhez kapcsolódnak. Ha a béta-bomlásban csak az aktív mag és a kibocsátott elektron szerepelne, akkor az impulzus megmaradás következtében a visszalökött magnak az elektronnal azonos nagyságú, de ellentétes irányú impulzussal kellene rendelkeznie. Amennyiben a neutrinó is részt vesz a folyamatban, akkor az impulzus megmaradásnak a három részecskére együttesen kell teljesülni. A visszalökési kísérletek sikerét megnehezíti az a körülmény, hogy a visszalökött atommag energiája E_R kicsiny.

Az elektrontól származó visszalökési energiát az

$$E_R(\mathrm{eV}) = \frac{536}{A}(E_\beta^2 + 1{,}022\, E_\beta),$$

míg a neutrinótól származó visszalökési energiát (a neutrinó nyugalmi tömegét zérónak véve) az

$$E_R(\mathrm{eV}) = \frac{536}{A} E_\nu^2$$

összefüggésből számíthatjuk ki, ahol E_R a visszalökött mag energiája eV-ban, E_β és E_ν az elektron, illetve a neutrinó energiája MeV-ben, A a visszalökött mag tömegszámát jelöli. A kísérlet elvégzésére gáz alakú, kis tömegszámú és nagy bomlási energiával rendelkező izotóp alkalmazása a legcélszerűbb. A gáz alakú béta-bomló izotópok közül a He^6 rendelkezik a legkedvezőbb tulajdonságokkal magvisszalökési kísérlet elvégzésére, mivel csak elektron és neutrinó emisszió lép fel, gamma-sugárzás nélkül. A spektrum alakja egyszerű, megengedett típusú, a béta-részek maximális energiája 3,5 MeV, a visszalökési energia nagy, maximálisan 1405 eV. Várható volt, hogy a visszalökött mag alacsony nyomású hidrogénnel töltött Wilson-kamrában jelentős elmozdulást szenved, ami lehetővé tenné az egyes atomi folyamatokban a neutrinó visszalökő hatásának megfigyelését.

A He^6 béta-bomlását Wilson-kamrával eddig még nem vizsgálták meg, aminek oka valószínűleg a rövid felezési időben ($T \simeq 0{,}85$ sec) rejlik. A legnagyobb nehézséget itt az okozza, hogy az előállított He^6 gázt rövid idő alatt — míg le nem bomlik — kell bejuttatni a kamrába úgy, hogy az a kamra üzemképes állapotát ne zavarja meg, és egyben gondoskodni arról, hogy az expanzió pillanatában megszünjék minden külső sugárzás, ami a kamrában háttéreffektust okozna. Ezt a problémát SZALAY SÁNDOR professzor elgondolásai alapján sikerült megoldanunk.

A He^6 béta-bomlásának Wilson-kamrával való megvizsgálása igen előnyös, az elektron-neutrinó szögkorrelációjának mérése szempontjából is. A He^6 megengedett átmeneti tulajdonságokkal rendelkezik, ezért a szögkorreláció mérése lehetővé teszi annak az eldöntését, hogy a nukleonok és a leptonok elméletileg lehetséges kölcsönhatási formái közül melyik valósul meg a He^6 esetében, és létezik-e az invariánsok lineáris kombinációja, azaz a Fierz-interferencia tag. Ez a mérés jelenleg elméleti szempontból rendkívül fontos.

Ismeretes, hogy a béta-bomlás esetében az invariancia követelményének eleget tevő kölcsönhatási energiasűrűséget a nukleonok, az elektron és a neutrinó tér operátoraiból öt lehetséges formában állíthatjuk elő, a skalár (S), a vektor (V), a tenzor (T), az axial-vektor (A) és a pszeudó-skalár (P) alakjában. Lehetséges még azonban ezen öt elemi kölcsönhatási forma lineáris kombinációja, így a kölcsönhatási energia operátor:

$$\mathbf{H}_\beta = C_S \mathbf{H}_S + C_V \mathbf{H}_V + C_T \mathbf{H}_T + C_A \mathbf{H}_A + C_P \mathbf{H}_P$$

ahol C_i a keverési koefficiens, melyre fennáll a következő összefüggés: $\sum_{i=0}^{4} C_i^2 = 1$. Annak az eldöntése, hogy a természetben ezek közül melyik valósul meg, csak kísérletileg lehetséges.

FERMI feltételezte, hogy csak azok az átmenetek valósulnak meg, amelyre nézve $\Delta\mathfrak{J}$ (spin változás) zéró, vagyis az elektron és neutrinó antiparalel spinnel állnak be egymáshoz, és a paritás nem változik. Ezen kiválasztási szabálynak megfelelően az S és V invariánsokat kapjuk. A tapasztalat szerint a természetben olyan átmenetek is megvalósulnak, ahol a $\Delta\mathfrak{J} \neq 0$, ezért GAMOW és TELLER módosították FERMI elméletét, egy új kiválasztási szabályt vezettek be, amely szerint megengedettek azok az átmenetek, amelyekre nézve a $\Delta\mathfrak{J} = 0, \pm 1$ — kizárva a $0 \rightarrow 0$ átmenetet — és a paritás nem változik, így a T és A invariánsokhoz jutottak.

BLOCH és MÖLLER [1] mutattak rá először arra, hogy a kibocsátott elektron és neutrinó irányeloszlása nem izotróp. DE GROOT és TOLLHOEK [2] számítása szerint, megengedett átmenetek esetében annak a valószínűségét, hogy a kibocsátott E energiájú elektron irányához képest θ szög alatt, $d\omega$ térszögön belül egy neutrinó emittálódjék, figyelembe véve az invariánsok lineáris kombinációját, a következő formában írhatjuk:

$$P(E, \theta)\, dE\, d\omega = F(Z, E)\, pE\, (E_{\max} - E)^2 \left(1 + \frac{b}{E} + \alpha \frac{p}{E} \cos\theta\right) dE\, d\omega,$$

ahol E az elektron energiája, — ami az $mc^2 \leq E \leq E_{\max}$ intervallumban változhat — p az impulzusa, $F(Z, E)$ a Coulomb tér hatását reprezentálja, Z a visszalökött mag töltése. Az α és b-konstansok értékei

$$\alpha = -\frac{(C_S^2 - C_V^2)\left|\int 1\right|^2 - \frac{1}{3}(C_T^2 - C_A^2)\left|\int \vec{\sigma}\right|^2}{(C_S^2 + C_V^2)\left|\int 1\right|^2 + (C_T^2 + C_A^2)\left|\int \vec{\sigma}\right|^2},$$

$$b = \frac{2 C_S C_V \left|\int 1\right|^2 + 2 C_T C_A \left|\int \vec{\sigma}\right|^2}{(C_S^2 + C_V^2)\left|\int 1\right|^2 + (C_T^2 + C_A^2)\left|\int \vec{\sigma}\right|^2},$$

ahol a $\left|\int 1\right|^2$ és a $\left|\int \vec{\sigma}\right|^2$ a mag matrix-elem négyzete a Fermi-, illetve a Gamow-Teller kölcsönhatás esetében. Tiszta invariánsok számára a $C_S C_V = C_T C_A = 0$, azaz $b = 0$, így a szögkorreláció általános összefüggését az alábbi egyszerű formába írhatjuk:

$$1 + \alpha \frac{v}{c} \cos\theta,$$

ahol α a szögkorrelációs koefficiens, melynek értékei: -1, $+1$, $+1/3$, $-1/3$ és -1 az S, V, T, A és P invariánsok esetében. Ilyen módon a szögkorreláció mérése a béta-bomlás esetében lehetőséget nyújt a kölcsönhatási forma meghatározására.

A béta-bomlás, a μ-mezon-bomlás, a μ-mezon-befogás, és a ritka részek gyenge bomlása esetén a kölcsönhatási állandó közel egyenlő volta egy univerzális Fermi-kölcsönhatás lehetősége mellett szólt, az $np, \Lambda p, \mu\nu, e\nu$ párok között. Az újabb kísérleti eredmények [3] — mint például az emisszió asszimetriája a polarizált béta-aktív magok és μ-mezonok bomlásánál, az elektron longitudinális polarizációja a béta-bomlásnál, a béta-polarizált gamma korreláció (Co^{60}, Ga^{66}, Sc^{46}, Au^{198}) — alapján felmerült az $np, \Lambda p, \mu\nu, e\nu$ párok között fennálló univerzális VA kölcsönhatás hipotézise. Egyetlen közölt kísérlet mond ellent a feltételezett VA kölcsönhatásnak, mégpedig az elektron-neutrinó szögkorrelációja a He^6 béta-bomlásánál. Ezért célszerűnek látszik a He^6 esetében a szögkorreláció pontos megmérése, ami a Wilson-kamra alkalmazásával lehetővé válik, mivel az egyes bomlási folyamatokban, az összetartozó sebesség és szögértékek egyidejűleg mérhetők. Az erre vonatkozó eddigi vizsgálatok [4], [5] az elektron-visszalökött mag koincidencia számának eloszlása alapján történtek, amit a sebesség vagy a szög függvényében vettek fel, az egyik paraméter rögzített értéke mellett. Ezen mérések pontosságát — azonkívül, hogy az egyes bomlási folyamatokhoz tartozó sebesség és szögértékek egyidejűleg nem mérhetők — befolyásolja a forrás-erősség ingadozása, a bomlás helyének pontatlan meghatározása, valamint az elektronnak és a visszalökött atommagnak a berendezésben való szóródása is.

I. A MÉRŐBERENDEZÉS LEÍRÁSA

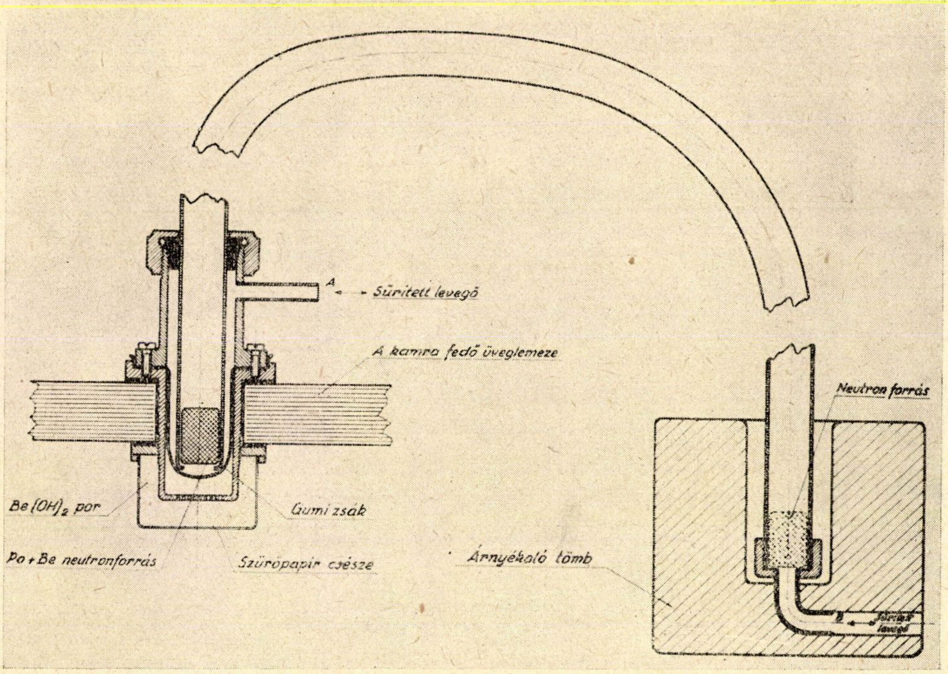
1. A Wilson-kamra

A kísérletet egy automatikus, alacsony nyomáson is jól működő membrándugattyús, térfogat expanziós típusú ködkamrával végeztük el [6]. A kamra érzékeny térfogatát 280 mm átmérőjű, 50 mm magas üveghenger, az elektromos tisztító tér gyűrűelektródjai, valamint az üvegfedőlap és a dugattyú határolják. A sötét hátteret és a kondenzáns folyadék-keveréket a dugattyú felületére öntött, feketére festett zselatin réteg biztosítja. A felvételeket két egymáshoz 24° stereo szögbe állított fényképezőgéppel készítettük. A megvilágítás két xenon-töltésű villanó lámpával történt, az alkalmazott energia lámpánként 100 Joule.

A kamra nyújtotta lehetőséget alacsony nyomás szempontjából több okból nem volt célszerű teljesen kihasználni. Alacsony nyomású, hidrogénnel töltött kamrában az elektronok specifikus ionizációja nagyon kicsi, ezért nagyobb energiáknál a görbület meghatározása pontatlan, ugyanakkor a kamra érzékeny ideje is nagyon lecsökken, ami miatt igen nagyszámú felvételre van szükség. Hátránya még a hidrogén alkalmazásának az, hogy a cseppek gyorsan esnek a gravitációs térben, ezáltal a nyomok egy része már a felvétel előtt kiesik a megvilágított térből, és nem várhatjuk meg, hogy a cseppek maximális méretükre kifejlődhessenek. Éles felvételt csak rövid expozíciós idővel lehet készíteni, amit a villanó lámpák alkalmazásával sikerült elérni, mivel a kisülés időtartama közel 10^{-4} sec. A hidrogén alkalmazása kedvezőtlen amiatt is, hogy a visszalökött mag által összesen létrehozható ionpárok száma kevesebb, mint más gázok esetében. A hidrogén gáz használata a kamrában viszont éppen a specifikus ionizáció csökkentése szempontjából célszerű, mivel így a visszalökött mag jelentős elmozdulást szenved, ami lehetővé teszi a pontosabb iránymeghatározást. Ezért a méréseket hidrogénnel töltött kamrával végeztük el, 200 Hgmm össznyomás mellett, a kondenzáns folyadék etilalkohol + víz 50%-os keveréke volt.

2. A He^6 előállítása és bejuttatása a kamrába

A He^6 izotópot a $Be^9(n, \alpha)He^6$ reakcióban állítottuk elő, 5 gr $Be(OH)_2$ port bombázva 4 Curie erősségű Po+Be neutronforrás által szolgáltatott neutronokkal. A $Be(OH)_2$-t hidegen, nagy felülettel csaptuk le, és gyorsan megszárítottuk, hogy az emanáló képessége nagy legyen. A finom (1—2 μ-nyi szemcsenagyságú) $Be(OH)_2$ port szűrőpapírból készült csészébe helyeztük, amelyik a port nem engedte át, viszont a gáz átáramlásával szembeni ellenállása és gázmegkötése kicsi volt. A $Be(OH)_2$ port tartalmazó csészét az 1. ábrán látható módon elhelyeztük a ködkamrába. Az expanzió előtt 10 másodperccel egy szelep segítségével a B pontba komprimált levegőt engedtünk, ami a neutronforrást az árnyékoló tömb mögül egy meggörbített csövön keresztül a $Be(OH)_2$ közelébe lőtte. Közvetlenül az expanzió előtt az *A* pont kapott komprimált levegőt, ezáltal az 1. ábrán látható gumizsák lenyomódott, ami a $Be(OH)_2$ port tartalmazó csésze fölötti térben lévő gázzal együtt a keletkezett He^6 gázt is beáramoltatta a kamrába, miközben a neutronforrás az árnyékoló tömb belsejébe került. A gumizsák által beáramoltatott kis mennyiségű gáz nem zavarja meg a kamra üzemképes állapotát, ezért a fel-



1. ábra. A He^6 gázt Wilson-kamrába juttató berendezés sematikus rajza aktiválás után közel 0,3 sec késéssel — ennyi idő kell, amíg a neutronforrás az árnyékoló tömbbe jut — következhet az expanzió. A gumizsák egyben a kamra gázterének a külső tértől való elzárását is biztosítja.

Az árnyékoló tömbben levő neutronforrás a kamrától közel két méter távolságban egy 30 cm átmérőjű és 20 cm magas ólomhenger középpontjában foglal helyet. Az ólomhenger 40 cm vastag paraffinréteg és ezt még 40 cm vastag betonréteg veszi körül. A Po+Be neutronforrás által kibocsátott gamma-sugarakat az ólomhenger gyakorlatilag teljesen abszorbeálja. A neutronbefogás következtében keletkező — és általában a szórt — gammasugárzás miatt a kamrát még közvetlenül körülveszi 5 cm vastag ólomköpeny. Ezzel sikerült elérni azt, hogy a neutronforrás jelenléte a kamra természetes effektusát észrevehető módon nem növelte meg.

3. A nyomok adatainak kimérése a felvételekről

A nyomok adatainak meghatározása sztereoszkópikusan a visszavetítés módszerével történik, mivel ezzel minden szisztematikus leképzési hiba automatikusan korrigálódik. A nyomok kimérésére a kamra fedőlemezét és a fényképezőgépeket egy megfelelő állványra helyezzük át. A fényképezőgépek hátlapjai levehetők és helyükre kondenzorral és megvilágító lámpával felszerelt hátlap tehető. Az előhívott filmeket visszahelyezve a gépekbe, az üveglap alatt egy minden helyzetbe állítható visszakereső asztal lapján a két képet összehozzuk, és ekkor az asztal síkja a pályanyomok síkjában fekszik. A nyomok térbeli adatai az asztal lapjának helyzetét változtató korongokon levő fokbeosztás segítségével határozhatók meg. Az asztal lapján levő szögbeosztás lehetővé teszi a nyomok által bezárt szögek közvetlen leolvasását. A béta-részek energiájának meghatározása mágneses térben való pályagörbület mérése alapján történik. A görbületi sugár (ϱ) meghatározásához szükséges ívhossz (h) és a hozzátartozó maximális magasság (m) mérése az asztal lapján levő koordináta-hálózat segítségével elvégezhető. A görbületi sugarat a $\varrho = (h^2 + 4\,m^2)/8m$ összefüggésből határozzuk meg. A $\mathbf{H}\varrho$ értékének megfelelő elektron energiákat pedig táblázatban [7] megtalálhatjuk. Az energia és az impulzus megmaradását feltételezve, a szögkorreláció méréséhez elegendő az elektron energiáját és a visszalökött atommag iránya által bezárt szöget, vagy az elektron energiáját és a visszalökött mag energiáját meghatározni. Ezek ismeretében — figyelembe véve, hogy a folyamatban szereplő három részecske impulzusának vektor összege zéró — a többi szükséges adat számítás útján meghatározható. A visszalökött mag energiájának meghatározása az általa létrehozott ionpárok számából lehetséges. A neutrinó energiáját az $E_{\max} - E_\beta = E_\nu$ egyenlet szerint számítottuk.

II. A TERMÉSZETES EFFEKTUS MEGVIZSGÁLÁSA

A kamra beállítása és helyes működésének ellenőrzése után egy felvételsorozatot készítettünk a természetes effektus megvizsgálására, abban az esetben, ha a neutronforrás az árnyékoló tömbben foglal helyet. Átlagosan tíz felvételre esett egy elektronnyom, ami megfelel minden forrás távollétében a kamra természetes effektusának, az adott körülmények között.

A következő felvételsorozat annak a megvizsgálására készült, hogy a neutronforrás nem aktivál-e valamilyen anyagot a kamrában 10 másodperces ott-tartózkodása alatt, aminek sugárzása zavarná a mérést. Természetesen ezalatt a $Be(OH)_2$ por nem volt a csészében. A felvételek kiértékelése azt mutatta, hogy a természetes effektusnak megfelelő nyomok száma közelítőleg kétszeresére növekedett. A $Be(OH)_2$ behelyezésével egy felvételre átlagosan három nyom esett, amelynek túlnyomó része a csészéből indult ki. Ez azt jelenti, hogy a bomlás a csészében történt, és csak az elektron jutott be a kamrába, áthaladva a csésze vékony falán. Az ilyen nyomok természetesen kiértékelésre alkalmatlanok.

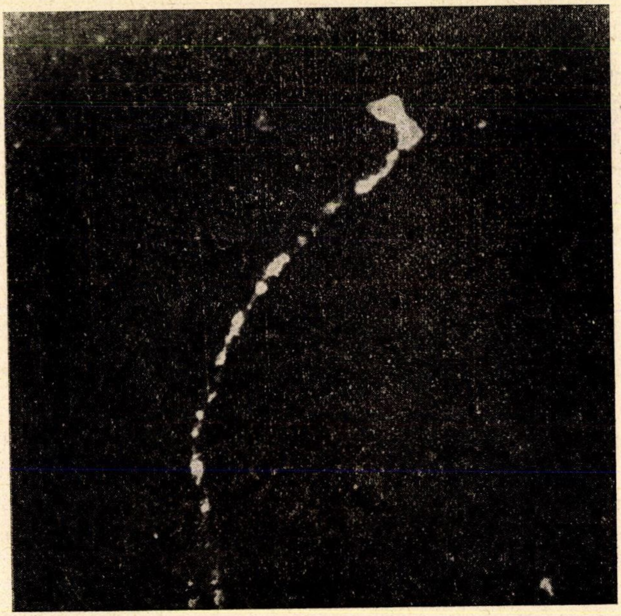
Előfordulhat az, hogy egy kis energiájú elektron pályája végén ütközés következtében irányeltérést, valamint jelentős energiacsökkenést szenved, ami miatt a specifikus ionizációja hirtelen megnövekszik, vagy egy nagy energiájú elektron a kamra fedő-, vagy alap-lapjába ütközve, többszörös szóródás után visszatér a kamrába, és ugyanazt a látszatot keltheti, mintha egy pontból egy nagy energiájú elektron és egy kis energiájú, nagyobb ionizáló képességű részecske lépett volna ki.

Ennek elkerülése végett egyrészt a kamra alap- és fedőlapjával határos 1 cm rétegvastagságban levő nyomokat nem értékeljük ki, másrészt a mágneses tér által létrehozott pályagörbület segítségével ellenőrizhető, hogy az elektron az adott pontban fékeződött-e le, vagy pedig ott keletkezett.

III. KÍSÉRLETI EREDMÉNYEK

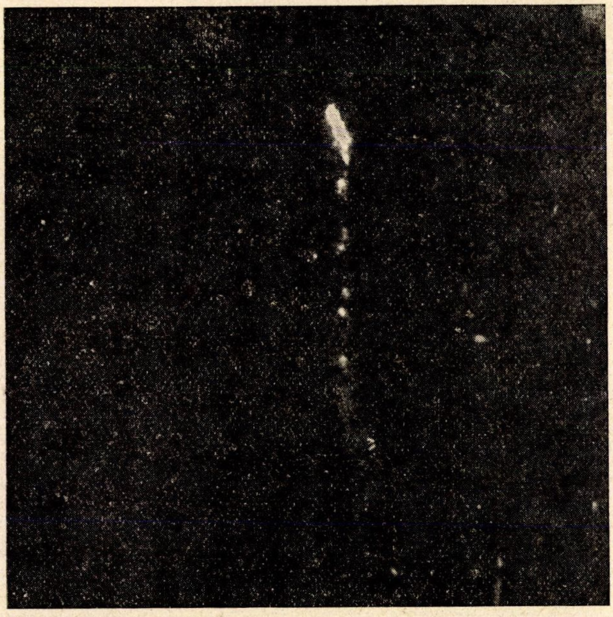
Több mint 2000 felvétel készült, amelyek sztereoszkópikus kiértékelése után 120 olyan esetet kaptunk, ahol az elektron energiája és az elektron-visszalökött mag pályája által bezárt szög, vagy az elektron és a visszalökött mag energiája mérhető volt. Minden egyes eseményt kiértékeltünk, kivéve a dugattyúval és a fedőlappal határos 1 cm rétegvastagságot. A 2. ábrán három különböző felvételt láthatunk a He^6 bomlásáról. Minden nyom sztereoszkópikusan van kiértékelve, de a szemléltetés céljából nem szükséges mindkét felvételt reprodukálni. A felvételeken látható, hogy egy pontból indul ki egy elektron és egy kis energiájú, de sokkal nagyobb ionizáló képességű részecske, amit a visszalökött maggal azonosíthatunk. Látható, hogy a visszalökött mag és az elektron 180°-tól eltérő szöget zárnak be egymással. Ezek a felvételek — feltételezve az impulzus megmaradást — azt igazolják, hogy a folyamatban egy harmadik részecske — a neutrinó — is résztvesz [8].

A felvételek egy részénél a közvetlen iránymeghatározás lehetetlen volt, mivel a visszalökött mag által keltett ionpárok minden irányba szétdiffundáltak. Ilyen esetben a visszalökött mag energiáját lehet meghatározni cseppszámlálás útján, ami 2—4 csepp (1—2 ionpár) pontossággal elvégezhető. A visszalökött mag energiájának ismeretében — ismerve az elektron és neutrinó impulzusának nagyságát — az irány számítás útján meghatározható. A visszalökött mag energiájának meghatározásához az ionpáronkénti energiaveszteséget kell ismerni. Az irodalomban [9] közölt adatok szerint hidrogénre ez az érték — nagyobb sebességek esetén — 35 eV. Találtunk olyan felvételt, ahol közelítőleg a visszalökött mag iránya és a cseppek száma is meghatározható, ebből pedig az egy ionpár létrehozásához szükséges energia, amely az irodalomban közölt értékkel elég jól egyezik, ezért a visszalökött mag energiájának meghatározásánál ionpáronként 35 eV-ot vettünk alapul. A visszalökött mag energiája maximálisan 1405 eV lehet, abban az esetben, ha a bomlásnál felszabaduló összes energiát az elektron viszi el, és ekkor a



2a ábra

2b ábra



2c ábra. — A He^6 bomlása Wilson-kamrában. A felvételeken jól látható, hogy az elektron és a visszalökött atommag nem ellenkező irányba repül ki

3. ábra. A visszalökött atommag energiája kisebb, mint ami az elektron energiája alapján várható lenne

4. ábra. A visszalökött atommag energiája nagyobb, mint ami a hozzátartozó elektron energiája alapján várható lenne visszalökött mag maximálisan 40 ionpárt kelthet. A 3. és 4. ábrán látható felvételek szintén érdekesen demonstrálják a neutrinó létezését. A 3. ábrán olyan felvétel látható, ahol a visszalökött mag által létrehozott ionpárok száma kevesebb, mint az csupán az elektron energiája alapján várható lenne. Ebben az esetben a neutrinó nyilvánvalóan az elektronhoz képest közel ellenkező irányba repült ki. A 4. ábrán látható bomlásnál viszont a visszalökött mag energiája nagyobb, mint ami a kibocsátott elektron visszalökési energiájának megfelelne. Előfordul, hogy azonos elektronenergiánál is jelentős eltérés van a visszalökött mag által keltett ionpárok számában, ami csak úgy értelmezhető, hogy a folyamatban egy harmadik részecske is szerepel, és az az elektronhoz képest különböző irányokba repül ki, így az eredő impulzus is más lesz.

IV. AZ ELEKTRON-NEUTRINÓ SZÖGKORRELÁCIÓJÁNAK MEGVIZSGÁLÁSA

A kapott 120 kísérleti adat alapján megvizsgáltuk az elektron-neutrinó szögkorrelációját. A kísérletileg kapott szögértékeket 15°-os szögintervallumokra osztottuk fel, és meghatároztuk az egyes intervallumokhoz tartozó relatív gyakoriságot. A kapott relatív gyakoriságok $12/\pi$-vel osztott értékét ábrázoltuk az elektron-neutrinó iránya által bezárt szög $\theta_{e,\nu}$ függvényében, ezzel a területet egységre normáltuk. A feladat annak a megvizsgálása, hogy az így kapott szögeloszlás (a szögletes hisztogramm) a lehetséges elméleti eloszlások közül melyikkel mutat jobb egyezést, azaz eldöntendő, hogy a neukleonok és leptonok között milyen kölcsönhatási forma valósul meg. A He^6 páros-páros mag spinje zéró, a Li^6 spinjének kísérletileg meghatározott értéke 1, ezért a $He^6 \rightarrow Li^6$ átmenetnél a magspin változás $\Delta\mathfrak{J} = 1$, így a Gamow-Teller kiválasztási szabálynak megfelelően várható, hogy a tenzor vagy axiálvektor kölcsönhatási forma dominál.

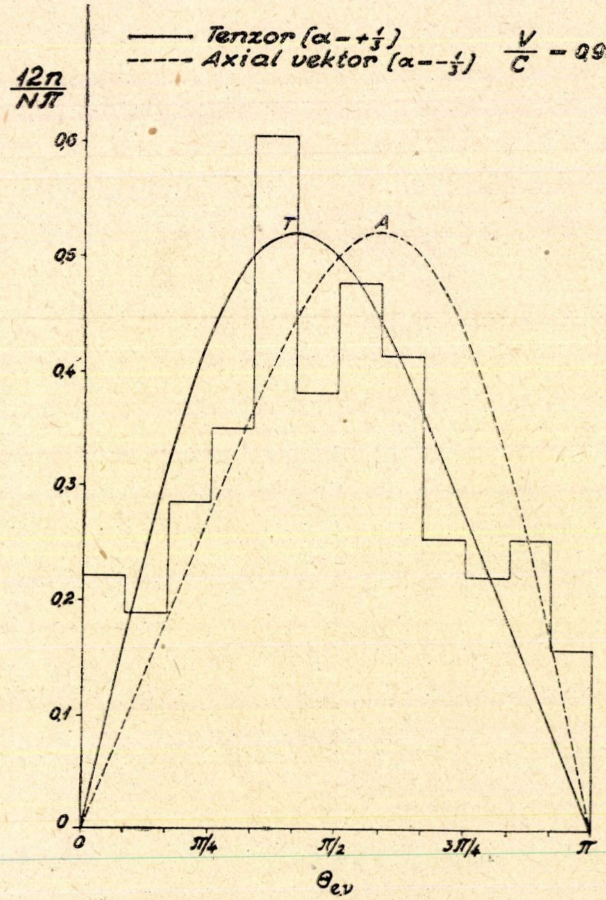
A szögkorreláció általános összefüggését a $He^6 \rightarrow Li^6$ átalakulás esetében, rögzített sebesség értéknél, az alábbi egyszerű formába írhatjuk:

$$P(\theta) = \frac{1}{2} \sin\theta \left(1 \pm \frac{1}{3} \frac{\bar{v}}{c} \cos\theta\right).$$

A $P(\theta)$ kifejezésébe a kísérleti adatok alapján meghatározott, átlagos sebességértéket $\frac{\bar{v}}{c} = 0{,}92$ helyettesítettük, és ezzel végeztük el a számítást. Az 5. ábrán az egyes kölcsönhatási formáknak megfelelő $P(\theta)$ értékek vannak ábrázolva, az elektron-neutrinó iránya által bezárt szög $\theta_{e,\nu}$ függvényében. Az egyes eloszlások területe egységnyi, megegyezik a szögletes hisztogramm által bezárt területtel. A kísérletileg kapott relatív gyakoriságnak az elméleti eloszlásokkal való összehasonlítása a

$$\sum_{i=1}^{12} (n_i - \bar{n}_i)(T_i - A_i) = \Gamma$$

összefüggésből a Γ értékének meghatározása útján történt. A számítás szerint $\Gamma \simeq +0{,}04$, ami azt jelenti, hogy a kísérletileg kapott relatív gyakoriság a tenzor kölcsönhatási formának megfelelő szögeloszlással mutat jobb egyezést, [10] megerősítve RUSTAD és RUBY [5] erre vonatkozó — más úton nyert — eredményét. Ilyen kevés eseményszámnál azonban a statisztikus hiba nagy, ezért a domináns kölcsönhatási formára — és a Fierz-interferencia-tag létezésére — vonatkozólag végleges következtetést még nem vonhatunk le.



5. ábra. Az elektron-neutrinó szögeloszlása a He^6 bomlásánál. A szögletes hisztogramm a kísérleti adatokat, míg a T és A az elméletileg várható eloszlásokat jelöli

A szögkorreláció megvizsgálásához szükséges adatok mérésénél elkövetett hiba, a statisztikus hiba mellett elhanyagolható.

*

Ezúton is hálás köszönetem fejezem ki SZALAY SÁNDOR professzornak, a probléma felvetéséért, munkám iránti érdeklődéséért, és állandó támogatásáért.

Köszönettel tartozom a kísérleti berendezés tervezésében és építésében nyújtott segítségükért és lelkiismeretes munkájukért SCHADEK JÁNOSnak, az ATOMKI műhelyvezető főmérnökének, PUSKÁS EMILnek, a *Kísérleti Fizikai Intézet* műhelyvezető főmérnökének, úgyszintén mindkét intézet műhelye dolgozóinak.

A Magyar Tudományos Akadémia
Atommag Kutató Intézete

IRODALOM

[1] F. BLOCH and C. MÖLLER: Recoil by β-Decay, *Nature,* **136** (1935) 911.
[2] S. R. DE GROOT and H. A. TOLHOEK: *On the theory of beta-radioactivity I.,* Physica **16** (1950) 456.
[3] E. C. G. SUDARSHAN and R. E. MARSHAK: *On the Possibility of a Universal Four-Fermion Interaction,* Padua—Venice Conference 22—28, Sept. 1957.
[4] J. S. ALLEN and JENTSCHKE: Electron-neutrino Angular Correlation in the Beta-Decay of He^6, Phys. Rev., **89** (1953) 902.
[5] B. M. RUSTAD and S. L. RUBY: Gamow-Teller Interaction in the Decay of He^6, *Phys. Rev.,* **97** (1955) 99.
[6] CSIKAI GY., HREHUSS GY. és SZALAY S.: Precíziós automatizált expanziós ködkamra, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.,* VII 1 (1957) 137.
[7] T. R. GERHOLM: *$B\varrho$* vs keV *Tables,* K. SIEGBAHN: *Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy* 926, North-Holland Publishing Co, Amsterdam (1955).
[8] J. CSIKAI: Photographic Evidence for the Existence of the Neutrino. *Nuovo Cimento,* **5** (1957) 1011.
[9] H. A. BETHE and J. ASHKIN: Passage of Radiations through Matter, E. SEGRÉ: *Experimental Nuclear Physics,* Vol. 1. (1953) 232. John Wiley & Sons, Inc., New-York
[10] J. CSIKAI and A. SZALAY: The Recoil Effect of the Neutrino in the Beta-Decay of He^6, Padua-Venice Conference 22—28. Sept. 1957.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

FOURIER-SOROK DIVERGENCIÁJA[1]

P. L. ULJANOV

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

FATOU [4] már 1906-ban felvetette a következő kérdést: van-e olyan trigonometrikus sor, amelynek koefficiensei 0 felé tartanak, és amely Lebesgue-szerint mérhető, pozitív mértékű E halmazon divergál? Erre a kérdésre 1911-ben N. N. LUZIN [17] igenlő választ adott. Szerkesztett olyan

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

(a_k, b_k valós számok) trigonometrikus sort, amely a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergál, és $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=\lim\limits_{k\to\infty} b_k=0$. 1912-ben H. STEINHAUS [34] olyan trigonometrikus sorra adott példát, amelynek koefficiensei 0 felé tartanak, és amely mindenütt divergál. Ezenkívül, természetesen, fontos probléma maradt tetszőleges, a $[0, 2\pi]$ szakaszon Lebesgue-szerint integrálható $f(x)$ függvény Fourier-Lebesgue-sora konvergenciájának, illetve divergenciájának a vizsgálata. Ez utóbbi soroknál

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx\qquad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

[1] Orosz nyelven megjelent: Успехи Математических Наук **12** (1957), 75—132. A fordítás *Králik Dezső* munkája. Az eredeti szövegtől csak az irodalmi jegyzék sorrendjében és néhány nyilvánvaló sajtóhiba, illetőleg apró elírás korrigálásában tértünk el. (Szerk. megjegyzése.)

1922-ben A. N. KOLMOGOROV [13] szerkesztett olyan Lebesgue-integrálható $f(x)$ függvényt ($f(x) \in L(0, 2\pi)$), amelynek Fourier-sora a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergál. Nem sokkal később mindenütt divergens Fourier-sorra adott példát [14]. A Kolmogorov által szerkesztett divergens Fourier-sorok részletösszegei nem-korlátosak (l. **2.**, **3.** **§**).

1936-ban MARCINKIEWICZ [21], Kolmogorov eredményeire támaszkodva olyan Fourier-sort szerkesztett, amely a $[0, 2\pi]$ intervallumban majdnem mindenütt divergál, de részletösszegei majdnem mindenütt korlátosak. Ebből látható, hogy ha egy trigonometrikus sor (Fourier-sor) részletösszegei valamely pozitív mértékű E halmazon korlátosak, akkor a sor általában nem konvergál E-nek valamely pozitív mértékű E_1 részhalmazán.

Ugyancsak 1936-ban MARCINKIEWICZ és ZYGMUND [22] Fourier-sorok részletösszegeinek oszcillációs viselkedését is megvizsgálták.

1935-ben MARCINKIEWICZ [20] Fourier-sorok valamely $E \subset [0, 2\pi]$ halmazon való konvergenciájának egy elegendő kritériumát fedezte fel; ez a kritérium egyúttal szükségesnek is bizonyult, ha az egész $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvényosztályra vonatkoztatjuk [21].

Valamennyi előbbi példánál a konjugált sor nem Fourier-sor. HARDY, ROGOSINSKI [8] és SUNOUCHI [36] konstruáltak olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvényt, amelynek Fourier-sora majdnem mindenütt divergens, és ugyanakkor a konjugált sor is Fourier-sor.

Divergens trigonometrikus (Fourier-) sorok konstruálásával egyidejűleg kezdték vizsgálni azokat a ponthalmazokat is, amelyeken végtelen sorok konvergálnak, illetőleg divergálnak. Trigonometrikus sorok (Fourier-sorok) konvergenciapontjainak halmaza általában $F_{\sigma\delta}$-típusú. 1918-ban RAJCHMAN (l. [40], 282.) szerkesztett olyan trigonometrikus sort, amely előre megadott zárt $E \subset [0, 2\pi]$ halmazon konvergál, a komplementer $[0, 2\pi] - E$ halmazon pedig divergál, és a sor együtthatói 0 felé tartanak.

1949-ben HERZOG és PIRANIAN [10] szerkesztettek olyan Taylor-sort, amely előre megadott F_σ-típusú $E \subset [0, 2\pi]$ halmazon konvergál, a $[0, 2\pi] - E$ halmazon pedig divergál.

1951-ben SZ. B. STEČKIN [35] olyan trigonometrikus sorra adott példát, amely adott F_σ-típusú E halmazon konvergál, E komplementerjén pedig divergál.

Újabb eredményt ért el ezen a területen ZELLER [39]. Neki sikerült a fenti tulajdonságokkal rendelkező *Fourier-sort* szerkeszteni.

Jelen dolgozat célja a Fourier-sorok divergenciájára vonatkozó újabb eredmények ismertetése. Az **1.** **§**-ban bizonyítás nélkül felsorolunk több olyan ismert tételt, amelyekre később szükségünk lesz. Ezenkívül Kuttner, valamint Marcinkiewicz és Zygmund két fontos tételét bizonyítjuk be. A **2.** **§**-ban folytonos függvények sorozatait vizsgáljuk, azonkívül példákat adunk olyan folytonos függvényekre, amelyek Fourier-sorai bizonyos pontokban divergálnak. A **3.** §-ban nagy vonásokban ismertetjük Kolmogorov majdnem mindenütt divergáló Fourier-sorának példáját, s megmutatjuk, hogy a konjugált sor nem Fourier-sor. A **4.** §-ban Marcinkiewicznek divergens, de majdnem mindenütt korlátos részletösszegekkel rendelkező Fourier-sor példáját beszéljük meg. A **6.** §-ban szerkesztünk egy H_1-osztálybeli divergens sort. A **7.** §-ban Zeller tételét bizonyítjuk be, és felsorolunk számos jelenleg még megoldatlan problémát.

1. §. Definíciók és segédtételek

Az $[a, b]$ *szakasz* ((a, b) *intervallum*) kifejezésen mindig az $a \leqq x \leqq b$ ($a < x < b$) pontok halmazát értjük.

Az $S_0, S_1, S_2, \ldots$ sorozat a

$$T = \|a_{mn}\| = \left\| \begin{matrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|$$

mátrix segítségével *szummálható* S-hez, ha a

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i a_{ni} = \tilde{S}_n$$

sorok minden n indexre konvergensek és

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{S}_n = S.$$

A T mátrixot *regulárisnak* mondjuk, ha $S_n \to A$-ból $\tilde{S}_n \to A$ következik, ahol A véges szám.

TOEPLITZ ÉS SCHUR TÉTELE. *A T-mátrix regularitásának szükséges és elegendő feltételei a következők:*

1. $\lim\limits_{i \to \infty} a_{in} = 0$ *minden rögzített* $n = 0, 1, \ldots$*-re,*

2. $\lim\limits_{i \to \infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{in} = 1,$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{in}| \leqq C < \infty$, *ahol a C állandó nem függ i-től.* (l. [17], 43—46).

Ha például $a_{in} = \dfrac{1}{i+1}$, $0 \leqq n \leqq i$-re és $a_{in} = 0$, $n > i$-re, akkor olyan reguláris mátrixot kapunk, amelynél

$$\tilde{S}_i = \frac{S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_i}{i+1},$$

vagyis az aritmetikai közepekkel való szummálást nyerjük.

Ha valamely sorozat (sor) az aritmetikai közepek módszerével szummálható, akkor azt $(C, 1)$-*szummálhatónak* nevezzük.

Most bizonyítás nélkül néhány tételt sorolunk fel, amelyekre a dolgozat későbbi részeiben szükségünk lesz.

ABEL-FÉLE TRANSZFORMÁCIÓ. *Ha* $S_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ $(k \geqq 0)$, *akkor*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) - S_{m-1} b_m + S_n b_n, \tag{1.1}$$

ahol $0 \leqq m \leqq n$ *és* $S_{-1} = 0$ (l. [40], 9.).

A TÉTEL. *Ha valamely sor véges számhoz konvergál (illetve* $+\infty$, *vagy* $-\infty$*-hez divergál), akkor egyszersmind* $(C, 1)$*-szummálható is ugyanehhez a számhoz (illetve* $+\infty$, *vagy* $-\infty$*-hez).* (l. pl. [7], 57.).

B TÉTEL (B. LEVI). *Ha* $u_n(x) \in L(E)$, *és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |u_n(x)| dx < \infty,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *sor E-n majdnem mindenütt egy bizonyos* $u(x) \in L(E)$ *függvényhez konvergál (sőt abszolút konvergál)* (l. [40], 73.).

C TÉTEL. *Ha* $f(x) \in L(E)$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f(x) \sin nx\, dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_E f(x) \cos nx\, dx = 0$$

(l. [40], 18).

Legyen adva az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.2}$$

trigonometrikus sor, ahol a_k, b_k valós számok. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{1.3}$$

sort az (1.2) sor konjugált sorának nevezzük.

Legyen $f(x)$ valamely 2π szerint periodikus, integrálható függvény (az egész dolgozatban mindig csak 2π szerint periodikus függvényekkel foglalkozunk, ezért ezt a későbbiekben nem is fogjuk mindig hangsúlyozni). Az (1. 2) sort $f(x)$ Fourier-sorának nevezzük, ha

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (k=0, 1, \ldots).$$

Az

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt \tag{1.4}$$

függvényt $f(x)$ konjugált függvényének nevezzük. I. I. PRIVALOV megmutatta, hogy az (1. 4) limes majdnem minden $x\in[0, 2\pi]$-re létezik (l. [40], 146.). Megjegyezzük, hogy ha $f(x)\in L(0, 2\pi)$, akkor általában $\bar{f}(x)\notin L(0, 2\pi)$, és az (1. 3) sor nem Fourier-sor (l. [40], 109—110.).

Az $f(x)$ függvény Fourier-sorának k-adik részletösszegét a t helyen $S_k(t,f)$-fel jelöljük; ismeretes, hogy

$$S_k(t,f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,D_k(x-t)\,dx, \tag{1.5}$$

ahol

$$D_k(u) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}} \tag{1.6}$$

a *Dirichlet-féle mag* (l. [40], 21.).

Fourier-sorokra érvényesek a következő fontos tételek:

RIEMANN-FÉLE LOKALIZÁCIÓS TÉTEL. *Ha $f(x)\in L(0, 2\pi)$ és $f(x)=0$ minden $x\in[a, b]\subset[0, 2\pi]$-re, akkor az $S_n(x,f)$ részletösszegek egyenletesen tartanak 0 felé, midőn $n\to\infty$, minden $[a+\delta, b-\delta]$ szakaszon, ahol δ tetszőleges pozitív szám és kisebb, mint $\frac{b-a}{2}$* (l. [40], 22.).

Ebből a tételből következnek:

1°. Ha $f(x)\in L(0, 2\pi)$, és $f(x)=0$ minden $x\in[a, b]\subset[0, 2\pi]$-re, akkor $S_n(x,f)\to 0$ minden $x\in(a, b)$-re.

2°. Ha $f_1(x)\in L(0, 2\pi)$, $f_2(x)\in L(0, 2\pi)$, és $f_1(x)=f_2(x)$ minden $x\in[a, b]\subset[0, 2\pi]$-re, akkor az $f_1(x)$ függvény Fourier-sorának $x_0\in(a, b)$ pontban való konvergenciájából (divergenciájából) következik az $f_2(x)$ függvény Fourier-sorának x_0 pontban való konvergenciája (divergenciája).

D TÉTEL (FEJÉR-LEBESGUE-PLESSNER). *Ha* $f(x) \in L(0, 2\pi)$, *akkor* (1.2) *Fourier-sora* (*úgyszintén* (1.3) *konjugált sora*) *majdnem mindenütt* $(C, 1)$*-szummálható* $[0, 2\pi]$*-ben* $f(x)$*-hez* (*illetve* $\bar{f}(x)$*-hez*) (l. [40], 49—50.).

Következmény. *Ha az* $f(x)$ *függvény Fourier-sora a pozitív mértékű* E *halmazon konvergál, akkor az* E*-n majdnem mindenütt* $f(x)$*-hez konvergál.* Ez közvetlenül következik az A és D tételekből.

Legyen

$$\ln^+|a| = \begin{cases} \ln|a|, & \text{ha } |a| \geqq 1, \\ 0, & \text{ha } 0 \leqq |a| < 1. \end{cases}$$

E TÉTEL (RIESZ MARCEL). *Ha* $f(x) \in L(0, 2\pi)$ *és* $f(x) \geqq 0$ *minden* x*-re, valamint* $\bar{f}(x) \in L(0, 2\pi)$, *akkor* $f(x) \ln^+ f(x) \in L(0, 2\pi)$ (l. [40], 151.).

F TÉTEL (KOLMOGOROV, SZELIVERSZTOV, PLESSNER). *Ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln n < \infty, \tag{1.7}$$

akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sor majdnem mindenütt konvergál $[0, 2\pi]$*-ben* (l. [15], [30], illetve [40], 253.).

G TÉTEL (PLESSNER). *Ha* $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$, *akkor az* (1.7) *feltétel egyenértékű a*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^2}{t} \, dt \, dx < \infty \tag{1.8}$$

feltétellel, ahol a_k *és* b_k *az* $f(x)$ *függvény Fourier-együtthatói* (l. [30], [37]).

Most a következő fontos tételt mondjuk ki és bizonyítjuk be:

H TÉTEL (KUTTNER). *Legyen az*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.9}$$

trigonometrikus sor a pozitív mértékű E *halmazon majdnem mindenütt konvergens. Akkor a konjugált sor:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{1.10}$$

szintén majdnem mindenütt konvergál E*-n, hacsak az aritmetikai közepek módszerével* E*-n majdnem mindenütt szummálható.*

Bizonyítás (l. [8], 82.). Megmutatjuk, hogy az

$$(1.11)\qquad 1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

sor E-n majdnem mindenütt konvergál. Legyen ugyanis $B_0(x)=1$, $B_k(x)=$ $=a_k \sin kx - b_k \cos kx$, jelöljük továbbá $S_n(x)$-szel az (1.9) sor n-edik részletösszegét, $\bar{S}_n(x)$-szel az (1.11) sor n-edik részletösszegét, $\bar{\sigma}_n(x)$-szel pedig az (1.11) sor n-edik aritmetikai közepét; $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\sigma}_n(x)=\bar{\sigma}(x)$ majdnem mindenütt az E halmazon. Most összefüggést kell találnunk az $S_n(x)$, $\bar{S}_n(x)$ és $\bar{\sigma}_n(x)$ mennyiségek között.

Legyen $\{\mu_m\}$ egyelőre tetszőleges számsorozat, amelyre teljesül a

$$(1.12)\qquad 0<|\mu_m|\leqq \frac{2}{m}$$

egyenlőtlenség. Könnyű belátni, hogy

$$(1.13)\qquad \frac{1}{2}[S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)]=\sum_{n=1}^{m} B_n(x)\sin n\mu_m=\sum_{n=0}^{m} B_n(x)\sin n\mu_m,$$

mivel $\sin 0=0$. Bevezetve a

$$\Delta_n^1(m)=\sin n\mu_m-\sin(n+1)\mu_m, \quad \Delta_n^2(m)=\Delta_n^1(m)-\Delta_{n+1}^1(m)$$

jelöléseket és az (1.13) utolsó összegére kétszer alkalmazva az Abel-féle transzformációt, a következő összefüggést nyerjük:

$$(1.14)\qquad \frac{1}{2}[S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)]=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\bar{\sigma}_n(x)\Delta_n^2(m)+$$
$$+m\bar{\sigma}_{m-1}(x)\Delta_{m-1}^1(m)+\bar{S}_m(x)\sin m\mu_m.$$

Ebből következik, hogy

$$\bar{S}_m(x)=\frac{S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)}{2\sin m\mu_m}+\sum_{n=0}^{m-2}\bar{\sigma}_n(x)\left[-\frac{(n+1)\Delta_n^2(m)}{\sin m\mu_m}\right]+$$
$$+\bar{\sigma}_{m-1}(x)\left[-\frac{m\Delta_{m-1}^1(m)}{\sin m\mu_m}\right],$$

vagyis

$$(1.15)\qquad \bar{S}_m(x)=\frac{S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)}{2\sin m\mu_m}+\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\sigma}_n(x)\,b_{m,n},$$

ahol

$$b_{m,n}=-\frac{(n+1)\Delta_n^2(m)}{\sin m\mu_m},\ \text{ha } n\leq m-2,\quad b_{m,m-1}=-\frac{m\Delta_{m-1}^1(m)}{\sin m\mu_m}$$

és $b_{m,n}=0$, ha $n\geqq m$.

Kuttner tételét bebizonyítjuk, ha megmutatjuk, hogy majdnem minden $x \in E$-re a $\{\mu_m\}$ sorozat úgy választható meg, hogy a $\| b_{m,n} \|$ mátrix reguláris (l. a Toeplitz—Schur-féle tételt) és

$$\lim_{m \to \infty} \frac{S_m(x-\mu_m)-S_m(x+\mu_m)}{2 \sin m\mu_m} = 0 \tag{1.16}$$

legyen.

Feltevésünk szerint az (1.9) sor majdnem mindenütt konvergál az E halmazon, az (1.11) sor pedig szummálható. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám, kisebb mint $\operatorname{mes} E$ ($\operatorname{mes} E$ az E halmaz mértéke). Jegorov tétele szerint (l. [28], 90.) található olyan $M \subset E$ halmaz, hogy $\operatorname{mes} M > \operatorname{mes} E - \varepsilon$, az (1.9) sor az M halmazon egyenletesen konvergál, és az (1.11) sor M-en szummálható. Azt is feltehetjük, hogy az M halmaz minden pontja e halmaz maximális sűrűségű pontja. Válasszuk az $x_0 \in M$ pontot tetszőlegesen és megmutatjuk: van olyan $\{\mu_m\}$ sorozat, hogy elég nagy m indexekre

$$\frac{1}{m} \leqq \mu_m \leqq \frac{2}{m}, \qquad x_0 + \mu_m \in M, \qquad x_0 - \mu_m \in M$$

legyen. Minthogy x_0 az M halmaz maximális sűrűségű pontja, elég nagy N-re

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes} \left\{ M \left[x_0 + \frac{1}{m},\ x_0 + \frac{2}{m} \right] \right\} > \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{m}, \\ &\operatorname{mes} \left\{ M \left[x_0 - \frac{2}{m},\ x_0 - \frac{1}{m} \right] \right\} > \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{m}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

ahol $m \geqq N$. (1.17)-ből következik, hogy $m \geqq N$-re az M halmazon található olyan $x_0 - \alpha_m, x_0 + \alpha_m$ pontpár, hogy $\frac{1}{m} \leqq \alpha_m \leqq \frac{2}{m}$. Legyen most $\mu_m = \alpha_m$ $m \geqq N$-re. Az (1.9) sor egyenletes konvergenciája miatt az $S'(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$ függvény folytonos M-en. Ezért

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [S_m(x_0+\mu_m) - S_m(x_0-\mu_m)] = \frac{1}{2} \{ &[S_m(x_0+\mu_m) - S(x_0+\mu_m)] + \\ &+ [S(x_0+\mu_m) - S(x_0-\mu_m)] + [S(x_0-\mu_m) - S_m(x_0-\mu_m)] \} \to 0, \end{aligned}$$

ha $m \to \infty$, vagyis

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{2} [S_m(x_0+\mu_m) - S_m(x_0-\mu_m)] = 0. \tag{1.18}$$

Minthogy $m \geqq N$-re $\frac{2}{m} \geqq \mu_m \geqq \frac{1}{m}$, azért $1 \geqq \sin m\mu_m \geqq \sin 1 > 0$, ha $m \geqq N$, következésképpen

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_m(x_0+\mu_m)-S_m(x_0-\mu_m)}{2\sin m\mu_m}=0 \tag{1.19}$$

(l. (1.18)). Ennélfogva az x_0 pontban teljesül (1.16). Most megmutatjuk, hogy a $\|b_{m,n}\|$ mátrix reguláris. Valóban:

$$\Delta_n^1(m)=-2\sin\frac{\mu_m}{2}\cdot\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\mu_m,$$

$$\Delta_n^2(m)=2\sin\frac{\mu_m}{2}\left[\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\mu_m-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\mu_m\right].$$

Ezért

$$|\Delta_n^1(m)|\leqq\mu_m\leqq\frac{2}{m},\qquad |\Delta_n^2(m)|\leqq\mu_m^2\leqq\frac{4}{m^2}. \tag{1.20}$$

Ennek következtében

$$\lim_{m\to\infty} b_{m,n}=\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{(n+1)\Delta_n^2(m)}{\sin m\mu_m}\right]=0\qquad (n=0,1,\ldots), \tag{1.21}$$

minthogy $\sin m\mu_m\geqq\sin 1$, ha $m\geqq N$. (1.20)-ból pedig következik, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}|b_{m,n}|=\sum_{n=0}^{m-2}\frac{|(n+1)\Delta_n^2(m)|}{\sin m\mu_m}+\frac{m|\Delta_{m-1}^1(m)|}{\sin m\mu_m}\leqq$$

$$\leqq\frac{\mu_m^2}{\sin m\mu_m}m^2+\frac{m\mu_m}{\sin m\mu_m}\leqq\frac{4}{\sin 1}+\frac{2}{\sin 1}=C, \tag{1.22}$$

ahol C nem függ m-től. Megmutatjuk még, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n}=1. \tag{1.23}$$

Valóban, ha $a_n=b_n=0$, ahol $n=1,2,\ldots,$ akkor $\bar{S}_m(x)=\bar{\sigma}_m(x)=1$ minden m-re. Ebben az esetben az (1.15) formula szerint:

$$1=\sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n}$$

minden $m=0,1,\ldots$-re. Minthogy $\lim\limits_{k\to\infty}\bar{\sigma}_k(x_0)=\bar{\sigma}(x_0)$, az (1.21)—(1.23) összefüggésekből következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\sigma}_n(x_0)b_{m,n}=\bar{\sigma}(x_0) \tag{1.24}$$

(l. a Toeplitz—Schur-tételt). Ennek következtében, egyesítve az (1.15), (1.19) és (1.24) összefüggéseket, azt nyerjük, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\bar{S}_m(x_0)=\bar{\sigma}(x_0),\quad \text{ha}\quad x_0\in M\subset E. \tag{1.25}$$

Minthogy $\text{mes}\, M > \text{mes}\, E - \varepsilon$, ahol ε tetszés szerinti pozitív szám, ezért az (1. 25) egyenlőségből következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \bar{S}_m(x) = \bar{\sigma}(x)$$

majdnem minden $x \in E$-re, és ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Következmény. *Ha az $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Fourier-sora majdnem mindenütt konvergál az E halmazon, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

konjugált sor szintén majdnem mindenütt konvergál az E halmazon.

Ez közvetlenül következik Kuttner tételéből, valamint abból, hogy a konjugált, egy Fourier-sor konjugált sora, s mint ilyen, majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható a $[0, 2\pi]$ intervallumon (D tétel).

Megjegyzés. A H tétel általánosabban is érvényes. Ha ti. az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrikus sor a pozitív mértékű E halmazon konvergál, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

konjugált sor E-n majdnem mindenütt konvergál. Ezt először A. PLESSNER állapította meg [31] (l. még [22]).

J TÉTEL (ZYGMUND, MARCINKIEWICZ [22]). *Ha az* (1. 9) *trigonometrikus sor a pozitív mértékű E halmazon a véges $S(x)$ függvényhez $(C, 1)$-szummálható, és $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n(x) < +\infty$, ha $x \in E$, akkor majdnem minden $x_0 \in E$-re*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x_0) > -\infty, \tag{1.26}$$

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x_0) + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x_0) \right\}. \tag{1.27}$$

A bizonyítás lényegében emlékeztet a Kuttner tételénél követett gondolatmenetre. Legyen $S^*(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n(x)$, $S_*(x) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n(x)$ és $\varphi_n(x) = \sup\limits_{k \geqq n} \{S_k(x)\}$. Nyilvánvaló, hogy $\varphi_n(x) \geqq \varphi_{n+1}(x)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = S^*(x)$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny szám. Akkor Luzin és Jegorov tételei szerint található olyan $M \subset E$ halmaz, hogy $\operatorname{mes} M > \operatorname{mes} E - \varepsilon$, a $\varphi_n(x)$ függvények folytonosak M-en, és a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat M-en egyenletesen konvergál. Weierstrass tétele szerint az $S^*(x)$ függvény folytonos M-en. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy az M halmaz csupa maximális sűrűségű pontból áll.

Legyen $x_0 \in M$. Megmutatjuk, hogy van olyan $\{\lambda_n\}$ sorozat, amely eleget tesz az

$$x_0 + \lambda_n \in M, \quad x_0 - \lambda_n \in M \quad \text{és} \quad \lambda_n = \frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.28}$$

feltételeknek. Legyen $\delta_k = \frac{1}{k+1}$. Minthogy x_0 az M halmaz maximális sűrűségű pontja, található olyan n_1 szám, hogy

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\left\{ M\left[x_0 + \frac{\pi(1-\delta_1)}{n}, \quad x_0 + \frac{\pi(1+\delta_1)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\delta_1}{n}, \\ &\operatorname{mes}\left\{ M\left[x_0 - \frac{\pi(1+\delta_1)}{n}, \quad x_0 - \frac{\pi(1-\delta_1)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\delta_1}{n}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

ahol $n \geqq n_1$. Hasonlóképpen

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\left\{ M\left[x_0 + \frac{\pi(1-\delta_k)}{n}, \quad x_0 + \frac{\pi(1+\delta_k)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\delta_k}{n}, \\ &\operatorname{mes}\left\{ M\left[x_0 - \frac{\pi(1+\delta_k)}{n}, \quad x_0 - \frac{\pi(1-\delta_k)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\delta_k}{n}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

ahol $n \geqq n_k$; feltesszük, hogy $n_k > n_{k-1}$. Az $\{\alpha_n\}$ nullsorozat legyen olyan, hogy $\alpha_n = \delta_k$, ha $n_k \leqq n < n_{k+1}$. (1.30)-ból következik, hogy

$$\begin{aligned} &\operatorname{mes}\left\{ M\left[x_0 + \frac{\pi(1-\alpha_n)}{n}, \quad x_0 + \frac{\pi(1+\alpha_n)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\alpha_n}{n}, \\ &\operatorname{mes}\left\{ M\left[x_0 - \frac{\pi(1+\alpha_n)}{n}, \quad x_0 - \frac{\pi(1-\alpha_n)}{n}\right]\right\} > \frac{\pi\alpha_n}{n}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Következésképpen (l. (1.31)) található olyan $\{\beta_n\}$ nullsorozat, hogy

$$x_0 \pm (\pi + \beta_n)\frac{1}{n} = x_0 \pm \lambda_n \in M. \tag{1.32}$$

Legyen $A_0(x) = \frac{a_0}{2}$, $A_n(x) = (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Mint Kuttner tételénél, most is olyan összefüggést keresünk, amely az ottanihoz hasonló módon kapcsolja össze az $S_k(x_0)$ és a $\sigma_k(x_0)$ mennyiségeket, ahol $\sigma_k(x_0)$ az (1.9) sor $(C, 1)$-közepe.

Könnyű belátni ugyanis, hogy

$$\frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\}=\sum_{n=0}^{m}A_n(x_0)\cos n\lambda_m. \tag{1.33}$$

Ha az (1.33) egyenlőség jobboldalát kétszeri Abel-transzformációnak vetjük alá, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\}&=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\sigma_n(x_0)\Delta_n^2(m)+\\ &+m\sigma_{m-1}(x_0)\Delta_{m-1}^1(m)+S_m(x_0)\cos m\lambda_m,\end{aligned} \tag{1.34}$$

ahol $\Delta_n^1(m)=\cos n\lambda_m-\cos(n+1)\lambda_m$, $\Delta_n^2(m)=\Delta_n^1(m)-\Delta_{n+1}^1(m)$. (1.34)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\}&=\sum_{n=0}^{m-2}\sigma_n(x_0)(n+1)\Delta_n^2(m)+\\ +\sigma_{m-1}(x_0)m\Delta_{m-1}^1(m)+\sigma_m(x_0)\cos m\lambda_m&+(S_m(x_0)-\sigma_m(x_0))\cos m\lambda_m=\\ &=[S_m(x_0)-\sigma_m(x_0)]\cos m\lambda_m+\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(x_0)C_{m,n},\end{aligned} \tag{1.35}$$

ahol $C_{m,n}=(n+1)\Delta_n^2(m)$, midőn $n\leqq m-2$, $C_{m,m-1}=m\Delta_{m-1}^1(m)$, $C_{m,m}=$ $=\cos m\lambda_m$, és $C_{m,n}=0$, ha $n>m$. Megmutatjuk, hogy a $\|C_{m,n}\|$ mátrix reguláris. Valóban, minthogy $|\Delta_n^1(m)|<\frac{C_1}{m}$, $|\Delta_n^2(m)|<\frac{C_1}{m^2}$, ($C_1$ állandó), ezért

$$\lim_{m\to\infty}C_{m,n}=\lim_{m\to\infty}(n+1)\Delta_n^2(m)=0 \qquad (n=0,1,\dots) \tag{1.36}$$

(l. (1.20) és (1.21)). Ugyancsak könnyen meggyőződhetünk arról, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}|C_{m,n}|\leqq C, \tag{1.37}$$

ahol C rögzített állandó (l. (1.22)). Legyen most $a_0=2$, $a_k=b_k=0$, midőn $k\geqq 1$, (1.34)-ből kapjuk:

$$1=\sum_{n=0}^{m-2}(n+1)\Delta_n^2(m)+m\Delta_{m-1}^1(m)+\cos m\lambda_m=\sum_{n=0}^{\infty}C_{m,n}. \tag{1.38}$$

Minthogy $\sigma_n(x_0)\to S(x_0)$, ezért a Toeplitz-Schur-féle tételből (1.36)—(1.38) alapján következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(x_0)C_{m,n}=S(x_0),$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(x_0)C_{m,n}=S(x_0)+\varepsilon_m, \tag{1.39}$$

ahol $\varepsilon_m \to 0$, ha $m \to \infty$. Egybevetve az (1.35) és (1.39) összefüggéseket, az

$$\frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\} = [S_m(x_0)-\sigma_m(x_0)]\cos m\lambda_m + \\ + S(x_0)+\varepsilon_m = [S_m(x_0)-S(x_0)]\cos m\lambda_m + S(x_0)+\varepsilon'_m$$

eredményt kapjuk, vagyis

$$\cos m\lambda_m[S_m(x_0)-S(x_0)] = \frac{1}{2}\{S_m(x_0+\lambda_m)+S_m(x_0-\lambda_m)\}-S(x_0)-\varepsilon'_m, \tag{1.40}$$

ahol $\varepsilon'_m \to 0$, ha $m \to \infty$.

A $\{\varphi_n(x)\}$ sorozat az M halmazon egyenletesen konvergál, ezért található olyan $\eta_n \to 0$ számsorozat, hogy

$$S_n(x) \leqq \varphi_n(x) \leqq S^*(x)+\eta_n \qquad (x \in M) \tag{1.41}$$

legyen, következésképp

$$\cos m\lambda_m[S_m(x_0)-S(x_0)] \leqq \frac{1}{2}\{S^*(x_0+\lambda_m)+S^*(x_0-\lambda_m)\} + \\ + \eta_m - S(x_0)-\varepsilon'_m \tag{1.42}$$

(l. (1.40) és (1.41)). Tekintve, hogy $m\lambda_m \to \pi$ és az $S^*(t)$ függvény M-en folytonos, ezért (1.42)-ből

$$-[S_*(x_0)-S(x_0)] \leqq S^*(x_0)-S(x_0)$$

következik, más szóval

$$S_*(x_0) \geqq -S^*(x_0)+2S(x_0). \tag{1.43}$$

De $x_0 \in M$, ahol $\operatorname{mes} M > \operatorname{mes} E-\varepsilon$. Ennek következtében (1.43) érvényes majdnem minden $x_0 \in E$-re. Az (1.26) egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Tekintsük most a

$$\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k \cos kx + d_k \sin kx) \tag{1.44}$$

sort, ahol $c_k = -a_k$, $d_k = -b_k$. Ebben az esetben

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n^{(1)}(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(c_k\cos kx + d_k \sin kx)\right) = \psi^*(x) = -S_*(x).$$

Itt $\psi^*(x)$ az E halmazon majdnem mindenütt véges (l. (1.43)). Megismételve az (1.44) sorra az (1.9) sorra vonatkozó meggondolásokat, majdnem minden $x_0 \in E$-re azt kapjuk, hogy

$$\psi_*(x_0) \geqq -\psi^*(x_0)-2S(x_0), \quad \text{vagyis} \quad -S^*(x_0) \geqq S_*(x_0)-2S(x_0),$$

illetve

$$S_*(x_0) \leqq -S^*(x_0)+2S(x_0). \tag{1.45}$$

Egybevetve az (1.43) és (1.45) egyenlőtlenségeket, (1.27)-et nyerjük. Ezzel a J tételt teljesen bebizonyítottuk.

Következmény. *Legyen* (1.9) *az* $f(x)\in L(0, 2\pi)$ *függvény Fourier-sora. Ekkor majdnem minden* $x_0\in[0, 2\pi]$ *pontban*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x_0)=f(x_0)+\varphi(x_0),\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x_0)=f(x_0)-\varphi(x_0), \tag{1.46}$$

ahol $\varphi(x_0)$ *nem-negatív függvény.*

Ez közvetlenül következik a D és J tételekből. Így látjuk, hogy ha az $f(x)$ függvény Fourier-sora az E halmazon divergál, akkor az $S_n(x)$ részletösszegek felső határa E-n majdnem mindenütt annyival nagyobb $f(x)$-nél, mint amennyivel kisebb $f(x)$-nél az alsó határ. Ha pl. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x)=+\infty$ és $x\in E$, akkor

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x)=-\infty \qquad (x\in E_1\subset E \text{ és mes } E_1=\text{mes } E).$$

Ennélfogva Fourier-Lebesgue-sorok divergenciájánál a sorok részletösszegeinek a felső határa és az alsó határa nulla-mértékű halmaztól eltekintve különbözők. (Ilyenkor beszélünk a részletösszegek oszcillálásáról.)

Fourier-Lebesgue-sorokra igaz a fordított tétel is. Fennáll ugyanis a következő

K TÉTEL (MENSOV [25] és [27]). *Legyen* $\varphi(x)$ *tetszőleges, nem-negatív és mérhető függvény a* $[0, 2\pi]$ *intervallumban. Akkor van olyan* $f(x)\in L(0, 2\pi)$ *függvény, amelyre*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x,f)=f(x)+\varphi(x),\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x,f)=f(x)-\varphi(x),$$

$x\in E\subset[0, 2\pi]$, *ahol* mes $E=2\pi$. *Itt a* $\varphi(x)$ *függvény értéke pozitív mértékű halmazon lehet* $+\infty$ *is.*

Megjegyezzük, hogy mindeddig megoldatlan az a kérdés, vajon van-e olyan

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

trigonometrikus sor, amelynél pozitív mértékű E halmazon

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x)=+\infty,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x)>-\infty, \tag{1.47}$$

ahol $S_n(x)$ e sor n-edik részletösszege.

Ha az $S_n(x)$ részletösszegeknél nem a közönséges értelemben vett konvergenciát, hanem a mértékben való konvergenciát tekintjük, akkor ebben az esetben D. E. MENSOV kimerítő eredményeket ért el [24]. Fennáll pl. a következő tétel: *Legyen $F(x)$ és $G(x)$ két tetszőleges, mérhető függvény, amelyek a $[-\pi, \pi]$ szakaszon majdnem mindenütt értelmezve vannak és $G(x) \leqq F(x)$ majdnem mindenütt a $[-\pi, \pi]$ szakaszon. Ezekhez a függvényekhez lehet találni a következő tulajdonságú*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.48}$$

trigonometrikus sort:

1°. *$F(x)$ és $G(x)$ az (1.48) sor részletösszegeinek a $[-\pi, \pi]$ szakaszon mértékben való felső és alsó határa.*

2°. *Ha $\psi(x)$ tetszőleges mérhető, a $[-\pi, \pi]$ szakaszon majdnem mindenütt értelmezett függvény, amelyre teljesül a $G(x) \leqq \psi(x) \leqq F(x)$ feltétel majdnem mindenütt, akkor az (1.48) sor részletösszegeinek van olyan részsorozata, amely a $[-\pi, \pi]$ szakaszon majdnem mindenütt $\psi(x)$-hez konvergál.*

3°.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

2. §. Konvergenciahalmazok és folytonos függvények Fourier-sorai

Most bevezetünk néhány a halmazokra, valamint az $[a, b]$ szakaszon értelmezett $f_n(x)$ függvények sorozatának viselkedésére vonatkozó definíciót.

1. definíció. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat konvergál az x_0 pontban, ha létezik és véges a $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ határérték.

2. definíció. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat *korlátosan divergál* az x_0 pontban, ha

$$-\infty < \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x_0) < \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x_0) < +\infty.$$

3. definíció. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat *nem-korlátosan divergál* az x_0 pontban, ha

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(x_0)| = +\infty.$$

4. definíció. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat az x_0 pontban divergál, ha $\{f_n(x_0)\}$ korlátosan, vagy nem-korlátosan divergál.

5. definíció. Az $\{f_n(x_0)\}$ sorozatot $+\infty$-hez konvergálónak (illetve $-\infty$-hez konvergálónak) mondjuk, ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = +\infty$, (illetve, ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = -\infty$).

Világos, hogy ha az $\{f_n(x)\}$ sorozat $+\infty$-hez vagy $-\infty$-hez konvergál, akkor egyúttal nem-korlátosan divergál, de nem megfordítva.

6. definíció. Az $f_n(x)$ függvények sorozata konvergál (korlátosan divergál stb.) az E halmazon, ha minden $x_0 \in E$ pontban konvergál (korlátosan divergál stb.).

7. definíció. Az $E \subset [a, b]$ halmazt az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat *konvergenciahalmazának* nevezzük, ha ez a függvénysorozat csak az E halmazon konvergál.

8. definíció. Az E halmazt F_σ-típusú halmaznak nevezzük az $[a, b]$ szakaszon, ha $E \subset [a, b]$ és $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, ahol az E_k-k az $[a, b]$ szakaszon zárt halmazok.

9. definíció. Az E halmazt az $[a, b]$ szakaszon $F_{\sigma\delta}$-típusú halmaznak mondjuk, ha $E \subset [a, b]$ és $E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$, ahol az E_k halmazok F_σ-típusúak $[a, b]$-n.

10. definíció. Az E halmazt G_δ-típusúnak mondjuk (illetve $G_{\delta\sigma}$-típusúnak), ha

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} E_k \qquad \left(\text{ill. } E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k\right),$$

ahol az E_k-k nyílt (illetve G_δ-típusú) halmazok az $[a, b]$ szakaszon.

Most már megfogalmazhatunk (és részben be is bizonyíthatunk) néhány tételt, amelyekre a következőkben szükségünk lesz.

1. TÉTEL. *Ha az $f_n(x)$ függvények $[a, b]$-n folytonosak, akkor az $\{f_n(x)\}$ sorozat konvergenciapontjainak halmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú.*

Bizonyítás. Legyen

$$E_{n,m}^{(k)} = \underset{x}{E}\left\{|f_n(x) - f_m(x)| \leqq \frac{1}{k}\right\} \qquad (k, m, n \text{ természetes számok}).$$

Minthogy az $f_p(x)$ függvények folytonosak, azért $E_{n,m}^{(k)}$ zárt halmaz. Legyenek

$$E_m^{(k)} = \prod_{n=m+1}^{\infty} E_{n,m}^{(k)}, \quad E^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m^{(k)}, \quad E = \prod_{k=1}^{\infty} E^{(k)}.$$

Tekintve, hogy az $E_{n,m}^{(k)}$ halmazok zártak, az $E_m^{(k)}$ halmazok szintén zártak. Ennélfogva az E halmaz $F_{\sigma\delta}$-típusú.

Megmutatjuk, hogy E az $\{f_n(x)\}$ sorozat konvergenciahalmaza. Legyen $x_0 \in E$. Ekkor $x_0 \in E^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Válasszuk $\varepsilon > 0$-t tetszőlegesen, és a k_0 egész számot úgy, hogy $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$ legyen. Minthogy $x_0 \in E^{(k_0)}$, azért $x_0 \in E_{m_0}^{(k_0)}$, vagyis $x_0 \in E_{n,m_0}^{(k_0)}$ minden $n > m_0$-ra. Ennélfogva $|f_n(x_0) - f_{m_0}(x_0)| \leqq \frac{1}{k_0} < \varepsilon$ minden $n > m_0$-ra. Az $\{f_n(x)\}$ sorozat tehát konvergál az x_0 pontban.

Hasonló módon könnyen igazolható, hogy ha az előbbi sorozat konvergál az $x_1 \in [a, b]$ pontban, akkor $x_1 \in E$. Igaz a megfordított

2. TÉTEL. *Ha az $E \subset [a, b]$ halmaz $F_{\sigma\delta}$-típusú, akkor a folytonos, egyenletesen korlátos függvényeknek van olyan sorozata, amely E-n nullához konvergál, E-n kívül pedig korlátosan divergál* (l. [6], [33] és [9], 271—272.). A bizonyítást megtalálhatjuk a felsorolt irodalomban.

3. TÉTEL. *Ha az $f_n(x)$ függvények folytonosak $[a, b]$-n, akkor azoknak a pontoknak az E halmaza, ahol a sorozat nem-korlátosan divergál, G_δ-típusú.*

Bizonyítás: Tekintsük a CE halmazt. Világos, hogy CE azokból és csakis azokból az x_0 pontokból áll, amelyekben $\overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(x)| < \infty$. Legyen $E_n^{(k)} = E_x\{|f_n(x)| \leq k\}$. Minthogy az $f_n(x)$ függvények folytonosak, azért $E_n^{(k)}$ zárt halmaz. Legyen $E^{(k)} = \prod_{n=1}^{\infty} E_n^{(k)}$, $B = \sum_{k=1}^{\infty} E^{(k)}$. Könnyű belátni, hogy a B halmaz F_σ-típusú, és $CE = B$. Minthogy pedig CE F_σ-típusú, azért az E halmaz G_δ-típusú.

4. TÉTEL. *Ha $E \subset [a, b]$ G_δ-típusú halmaz, akkor az $[a, b]$-n folytonos függvényeknek van olyan $\{f_n(x)\}$ sorozata, amely E-n kívül konvergál, az E-n pedig $+\infty$-hez konvergál* (l. [9], 272.).

Világos, hogy a 4. tétel a 3. tétel megfordítása, minthogy az E halmaz azon pontok halmaza, amelyekben az $\{f_n(x)\}$ sorozat nem-korlátosan divergál.

Megjegyzés. Az 1—4. tételekből láthatjuk, hogy folytonos függvények $\{f_n(x)\}$ sorozatának divergenciahalmaza $G_{\delta\sigma}$-típusú, azon pontok halmaza pedig, ahol a sorozat nem-korlátosan divergál, G_δ-típusú.

Ezért pl. *ha folytonos függvények $\{f_n(x)\}$ sorozata a $[0, 1]$ szakaszon csak a racionális pontok R halmazán divergál, akkor sehol sem sűrű azoknak a pontoknak az A halmaza, ahol a sorozat nem-korlátosan divergál, és mindenütt sűrű az a B halmaz, ahol a sorozat korlátosan divergál.*

Legyen ugyanis A mindenütt sűrű valamely $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ szakaszon. A 3. tételből látható, hogy azoknak a pontoknak $C \subset [0, 1]$ halmaza, amelyekben az $\{f_n(x)\}$ sorozat korlátos bármely rögzített x-re, F_σ-típusú $[\alpha, \beta]$-n, azaz $C = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$, ahol F_k zárt $[\alpha, \beta]$-n. Minthogy A mindenütt sűrű $[\alpha, \beta]$-n, ezért az F_k halmazok sehol sem sűrűek $[\alpha, \beta]$-n. C tehát első kategóriájú halmaz $[\alpha, \beta]$-n. Következésképp $A_1 = A \cdot [\alpha, \beta] = [\alpha, \beta] - C$ második kategóriájú $[\alpha, \beta]$-n, és ezért kontinuumszámosságú (l. [18], 80—82.). Az A halmaz tehát szintén kontinuumszámosságú. Ez azonban ellene mond annak, hogy $A \subset R$, ahol R megszámlálható. Az A halmaz tehát sehol sem sűrű $[0, 1]$-en és $B = R - A$ mindenütt sűrű $[0, 1]$-en. Ezzel egyúttal azt is igazoltuk, hogy az R halmaz nem G_δ-típusú.

Hasonló meggondolásokkal bizonyítható a következő állítás is: *ha az $f_n(x)$ függvények folytonosak $[a, b]$-n és az $\{f_n(x)\}$ sorozat nem-korlátosan divergál az $E \subset [a, b]$ halmazon, ahol E mindenütt sűrű $[a, b]$-n, akkor mindazon pontok halmaza, ahol az $\{f_n(x)\}$ sorozat nem-korlátosan divergál, kontinuumszámosságú (habár az eredeti E halmaz megszámlálható is lehetett).* A bizonyítást az olvasóra bízzuk. Megjegyezzük, hogy azoknak a pontoknak az E halmaza, amelyekben folytonos függvények $\{f_n(x)\}$ sorozata korlátosan divergál, $G_{\delta\sigma}$-típusú. Ez következik az alábbi összefüggésekből:

$$F_\sigma - F_{\sigma\delta} = F_\sigma \cap CF_{\sigma\delta} = F_\sigma \cap G_{\delta\sigma} = G_{\delta\sigma}.$$

Egybevetve az 1. és 3. tételeket, ismét megjegyezzük, hogy azon pontok halmaza, amelyekben korlátosan divergál a függvénysorozat, általában bonyolultabb, mint azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekben a sorozat nemkorlátosan divergál.

Most néhány olyan eredményt sorolunk fel, amelyek folytonos függvények Fourier-soraira vonatkoznak. Még a múlt században bebizonyította Du Bois—Reymond, hogy vannak olyan folytonos függvények, amelyeknek Fourier-sorai bizonyos pontokban divergálnak. Az alábbiakban Fejért követve, ennek az állításnak egyszerű bizonyítását adjuk.

5. TÉTEL. *Van olyan 2π-periódusú folytonos függvény, melynek Fourier sora az* $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ *pontokban nem-korlátosan divergál, míg az* $x \not\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ *pontokban a sor konvergál.*

Bizonyítás. Vegyük a következő trigonometrikus polinomot:

$$T(x, n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \cdots + \frac{\cos(n+n-1)x}{1} - \frac{\cos(n+n+1)x}{1} -$$

$$- \cdots - \frac{\cos(n+2n)x}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2n-k)x - \cos(2n+k)x}{k} =$$

$$= 2 \sin 2nx \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}.$$

Könnyen igazolhatjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ sor a $\varphi(x) = \frac{\pi - x}{2}$ függvény Fourier-sora. A $\varphi(x)$ függvény korlátos variációjú a $[0, 2\pi]$ szakaszon, és ezért Fourier-sorának részletösszegei egyenletesen korlátosak minden n-re és x-re (l. [40], 47.). Ennélfogva

(2. 1) $$|T(x, n)| \leq C,$$

ahol C abszolút konstans. Legyen

(2. 2) $$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \cdot T(x, 2^{p^3}).$$

(2. 1)-ből, valamint Weierstrass tételéből következik, hogy $f(x)$ folytonos $[0, 2\pi]$-n. Minthogy $3\cdot 2^{p^3} < 2^{(p+1)^3}$, ha $p = 1, 2, \ldots$, ezért (2. 2)-ben a szumma jel mögötti polinomok tagjai mind különbözők. Ezenkívül, ha $\cos kx$ előfordul a $T(x, 2^{p^3})$ és $\cos mx$ a $T(x, 2^{q^3})$ polinomban, akkor $k < m$, midőn $p < q$. Ennélfogva (2. 1)-ből és (2. 2)-ből következik, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sora (2. 2)-ből nyerhető, ha abban a T polinomokat a cosinusok növekvő sorrendjében írjuk fel. Tehát

$$S_{2\cdot 2^{q^3}}(0, f) = \frac{1}{q^2}\sum_{k=1}^{2^{q^3}} \frac{1}{k} \geqq \frac{1}{q^2} \ln 2^{q^3} = q \ln 2,$$

vagyis $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, S_k(0, f)| = +\infty$, következésképp $f(x)$ Fourier-sora a 0 pontban nem-korlátosan divergál.

Legyen most $2\pi > x_0 > 0$. Megmutatjuk, hogy $f(x)$ Fourier-sora konvergál az x_0 pontban. Valóban, Abel-féle transzformációt alkalmazva könnyen kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(n+k)x_0}{n-k}\right| \leqq A(x_0), \qquad p < n, \tag{2. 3}$$

ahol $A(x_0)$ véges, csupán x_0-tól függő mennyiség. Hasonlóan

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{\cos(2n+k)x_0}{k}\right| \leqq B(x_0) \qquad (p \leqq n). \tag{2. 4}$$

(2. 2), (2. 3), valamint (2. 4)-ből következik, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sora az x_0-pontban konvergál.

Most még közöljük az 5. tétel Lebesgue-től származó bizonyítását is, amely jobban feltárja a dolog geometriai lényegét. Ezenkívül Lebesgue módszerét alkalmazva, néhány, a továbbiakban szükséges következményhez jutunk.

Az 5. TÉTEL LEBESGUE-FÉLE BIZONYÍTÁSA. (L. [29], 126—129.) Legyen $n_k = (k+1)^{4^k}$, $a_k = n_0 . n_1 \ldots n_k$, $c_k = \dfrac{1}{\ln(k+1)}$, $J_k = \left[\dfrac{\pi}{a_k}, \dfrac{\pi}{a_{k-1}}\right]$, és legyen $f(x)$ a következő páros függvény:

$$f(x) = \begin{cases} c_k \sin a_k x, & \text{ha} \quad x \in J_k \subset (0, \pi], \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \ldots$. Minthogy $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} = n_k$ és $c_k \to 0$, ha $k \to \infty$, azért $f(x)$ folytonos $[0, 2\pi]$-n. Tetszőleges $\delta > 0$-ra $f(x)$ korlátos variációjú a $[\delta, 2\pi - \delta]$ szakaszon, és így $f(x)$ Fourier-sora konvergál $[\delta, 2\pi - \delta]$-n. De minthogy $\delta > 0$ tetszőleges, ezért $f(x)$ Fourier-sora a $(0, 2\pi)$ intervallum minden pontjában konvergál.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ Fourier-sora nem-korlátosan divergál az $x=0$ pontban. Evégett elegendő pl. megmutatni, hogy

$$\lim_{k\to\infty} S_{a_k}(0,f)=+\infty. \tag{2.5}$$

Világos, hogy

$$\begin{aligned} S_{a_k}(0,f)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\sin a_k t\,dt+O(1)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt+O(1)=\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/a_k}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt+\\ &\quad+O(1)=\frac{2}{\pi}(J_1+J_2+J_3)+O(1). \end{aligned}\tag{2.6}$$

Most megbecsüljük (2.6) mindhárom integrálját. Az $f(t)$ függveny definíciója miatt

$$|J_1|\leqq a_k\frac{\pi}{a_k}\max_{t\in\left[0,\frac{\pi}{a_k}\right]}|f(t)|\leqq\frac{\pi}{\ln(k+1)}=O(1). \tag{2.7}$$

Világos továbbá, hogy

$$\begin{aligned} |J_3|&=\left|\int_{\pi/a_{k-1}}^{\pi}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt\right|\leqq\sum_{i=1}^{k-1}c_i\left|\int_{\pi/a_i}^{\pi/a_{i-1}}\frac{\sin a_i t\sin a_k t}{t}\,dt\right|\leqq\\ &\leqq\sum_{i=1}^{k-1}c_i\int_{\pi/a_i}^{\pi/a_{i-1}}\frac{1}{t}\,dt=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\ln(i+1)}\ln n_i=\sum_{i=1}^{k-1}4^i\leqq\frac{1}{3}\cdot 4^k. \end{aligned}\tag{2.8}$$

Alkalmazva a második középértéktételt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} J_2&=\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{f(t)}{t}\sin a_k t\,dt=\frac{1}{\ln(k+1)}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{\sin^2 a_k t}{t}\,dt=\\ &=\frac{1}{\ln(k+1)}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{1-\cos 2a_k t}{2t}\,dt=\frac{1}{2}\frac{\ln n_k}{\ln(k+1)}-\frac{1}{2\ln(k+1)}\int_{\pi/a_k}^{\pi/a_{k-1}}\frac{\cos 2a_k t}{t}\,dt=\\ &=\frac{4^k}{2}-\frac{1}{2\ln(k+1)}\left\{\frac{a_k}{\pi}\int_{\pi/a_k}^{\xi}\cos 2a_k t\,dt+\frac{a_{k-1}}{\pi}\int_{\xi}^{\pi/a_{k-1}}\cos 2a_k t\,dt\right\}=\\ &=\frac{1}{2}\cdot 4^k-\frac{1}{\ln(k+1)}\cdot O(1)=\frac{1}{2}\cdot 4^k-O(1). \end{aligned}\tag{2.9}$$

Egybevetve a (2. 6)—(2. 9) összefüggéseket:

$$S_{a_k}(0,f) \geqq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{2}{\pi}4^k - O(1),$$

s ezzel igazoltuk (2. 5)-öt.

Következmény. *Van olyan 2π-periódusú folytonos $\psi(x)$ függvény, amelynek Fourier-sora mindenütt konvergál kivéve az $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ pontokat, ezekben pedig nem-korlátosan divergál. Emellett $\psi(x) = 0$, ha $x \in [\pi, 2\pi]$.*
Valóban, $\psi(x)$-nek vehetjük a következő függvényt

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha} \quad x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{ha} \quad x \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

és könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $S_n(0, \psi) = \frac{1}{2} S_n(0, f)$. Hasonló okoskodással bizonyíthatjuk be a következő állítást: *ha $[\alpha, \beta] \subset (0, 2\pi)$, akkor van olyan folytonos, 2π-periódusú $\tau(x)$ függvény, amelynek Fourier-sora mindenütt konvergál az $x \equiv \alpha \pmod{2\pi}$ pontok kivételével, ez utóbbi pontokban pedig a sor nem-korlátosan divergál. Ezenkívül $\tau(x) = 0$, midőn $x \in [0, \alpha] +$ $+ [\beta, 2\pi]$.* Világos, hogy el tudjuk érni azt is, ha szükséges, hogy a Fourier-sor nem-korlátosan divergáljon az $x \equiv \beta \pmod{2\pi}$ pontokban is.

6. TÉTEL. *Van olyan folytonos $\varphi(x)$ függvény, melynek Fourier-sora csak az $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ pontokban divergál, de*

$$|S_n(x, \varphi)| \leqq B \tag{2. 10}$$

minden x-re és n-re, ahol B állandó.

A bizonyítás hasonló az 5. tétel Fejér-féle bizonyításához, ha

$$\varphi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} T(x, 2^{p^2})$$

és figyelembe vesszük a következő összefüggést:

$$S_{2\cdot 2^{q^2}}(0, \varphi) - S_{2^{q^2}}(0, \varphi) = \frac{1}{q^2} \sum_{k=1}^{2^{q^2}} \frac{1}{k} \to 0, \quad \text{ha} \quad q \to \infty.$$

A (2. 10) egyenlőtlenség következik a (2. 1) egyenlőtlenségből, valamint az alábbi egyenlőtlenségből:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < C_1 \ln n. \tag{2. 11}$$

Valóban:

$$S_m(x, \varphi) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} S_m(x, T(t, 2^{p^2})).$$

A tetszőleges m indexet pedig egyértelműen előállíthatjuk

$$m=2^{q^2}+i$$

alakban, ahol $0\leq i<2^{(q+1)^2}-2^{q^2}$. Ennélfogva

$$S_m(x,T(t,2^{p^2}))=T(x,2^{p^2}),$$

midőn $p<q$ és $S_m(x,T(t,2^{p^2}))=0$, ha $p>q$. Következésképp

$$S_m(x,\varphi)=\sum_{p=1}^{q-1}\frac{1}{p^2}\cdot T(x,2^{p^2})+\frac{1}{q^2}S_m(x,T(t,2^{q^2})),$$

vagyis minden x-re:

$$|S_m(x,\varphi)|\leqq\sum_{p=1}^{q-1}\frac{1}{p^2}|T(x,2^{p^2})|+\frac{1}{q^2}|S_m(x,T(t,2^{q^2}))|\leqq$$

$$\leqq C\sum_{p=1}^{q-1}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\left(2\sum_{k=1}^{2q^2}\frac{1}{k}\right)<C\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}+2C_1\ln 2=C_2,$$

ahol C_2 rögzített állandó (l. (2. 1), továbbá $T(x,n)$ definícióját és a (2. 11) egyenlőtlenséget. Ezzel a (2. 10) egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

7. TÉTEL. *Legyen $\{r_i\}$ a $[0,2\pi)$ intervallumban megszámlálható ponthalmaz. Van olyan folytonos, 2π-periódusú $F(x)$ függvény, amelynek Fourier-sora korlátosan divergál az r_i pontokban, és konvergál a $[0,2\pi)-\{r_i\}$ halmaz pontjaiban.* Ilyen függvény például az

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\varphi(x-r_k).$$

Ennek a tételnek a bizonyítását megtalálhatjuk a [40] monográfiában a 170. oldalon. A 7. tételből következik: *Fourier-sor konvergenciahalmaza általában lehet nem-F_σ-típusú halmaz, még akkor is, ha folytonos függvényről van szó.*

Valóban, vegyük a $[0,2\pi)$ intervallum racionális pontjainak $\{r_i\}$ halmazát. Az $F(x)$ függvény Fourier-sorának konvergenciahalmaza a $[0,2\pi)-\{r_i\}$ halmaz, vagyis az irracionális pontok halmaza. Azonban az irracionális pontok halmaza nem F_σ-típusú halmaz (l. [1], 110.).

Az 1. tétel szerint tetszőleges trigonometrikus sor konvergenciahalmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú. Ennélfogva Fourier-sor konvergenciahalmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú, de nem okvetlenül F_σ-típusú.

Felhasználva a 4. tételre vonatkozó megjegyzést, könnyen beláthatjuk, hogy léteznek folytonos függvények, amelyek Fourier-sorai kontinuumszámosságú halmazon divergálnak (l. [40], 171.).

Megjegyezzük, hogy az a kérdés, vajon divergálhat-e folytonos függvény Fourier-sora pozitív mértékű halmazon, mindeddig eldöntetlen. Nem ismeretes az sem, vajon bármely folytonos függvény Fourier-sora egyetlen pontban konvergál-e.

3. §. Nem-korlátosan divergáló Fourier-sorok

Mielőtt rátérnénk A. N. Kolmogorov tételére [13], bebizonyítjuk a következő állítást.

1. LEMMA. *Minden n egész számhoz lehet konstruálni olyan $\varphi_n(x)$ függvényt és olyan $E_n \subset [0, 2\pi]$ halmazt, valamint M_n, q_n számokat, melyek eleget tesznek az alábbi követelményeknek:*

1. $\varphi_n(x) \geqq 0, \quad \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)dx = 2,$

2. *$\varphi_n(x)$ korlátos variációjú a $[0, 2\pi]$ szakaszon,*

3. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} E_n = 2\pi, \quad \lim_{n\to\infty} M_n = \infty,$

4. *tetszőleges $x_0 \in E_n$ ponthoz található olyan $p_{n,x_0} \leqq q_n$ index, hogy*

$$|S_{p_{n,x_0}}(x_0, \varphi_n)| \geqq M_n$$

legyen.

Bizonyítás. Tekintsük a $[0, 2\pi]$ szakaszon az $A_k = \frac{4\pi}{2n+1} k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ pontokat. Legyen $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a páratlan egész számoknak egy sorozata, amelyre később meghatározandó feltételeket fogunk kiszabni. Az $\{m_k\}$ számsorozatot és a $\{J_k\}$ szakaszokat a következőképpen értelmezzük:

$$2m_k + 1 = \lambda_k(2n+1), \quad J_k = \left[A_k - \frac{1}{m_k^2}, \; A_k + \frac{1}{m_k^2}\right] \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.1}$$

Legyen mármost a $\varphi_n(x)$ függvény a következő:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{m_k^2}{n}, & \text{ha} \quad x \in J_k, \\ 0, & \text{ha} \quad x \in [0, 2\pi] - \sum_{k=1}^{n} J_k. \end{cases} \tag{3.2}$$

Megmutatjuk, hogy $\varphi_n(x)$ a keresett függvény (természetesen, ha m_k-t megfelelően választjuk). (3. 1)-ből, valamint (3. 2)-ből következik, hogy $\varphi_n(x)$ az 1. lemma (1. és 2.) feltételeit teljesíti. Legyenek a Δ_i szakaszok a következők:

$$\Delta_i = \left[A_i + \frac{2}{n^2}, \; A_{i+1} - \frac{2}{n^2}\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, (n-1)).$$

Világos, hogy a $\{\Delta_i\}$ és a $\{J_k\}$ szakaszok egymást kölcsönösen nem metszik. Legyenek az $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ számok már definiáltak. A C tétel értelmében az m_k számot választhatjuk olyan nagyra, hogy minden $x\in\varDelta_{k-1}$-re:

$$(3.3)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sum\limits_{i=1}^{k-1} J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt\right|\leqq 1$$

legyen, hiszen $x\in\varDelta_{k-1}$ és $t\in\sum\limits_{i=1}^{k-1}J_i$ esetén $|t-x|>\varrho>0$, ahol ϱ csupán n-től függő állandó. Az $\{m_i\}$ sorozat indukció útján teljesen meg van határozva.

Minthogy a Dirichlet-féle mag $D_k(t)=\frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos kt$, azért

$$(3.4)\qquad |D_k'(t)|\leqq k^2 \qquad (t\in[0,2\pi]).$$

Világos továbbá, hogy $i\geqq k$-ra és $x\in\varDelta_{k-1}$-re

$$(3.5)\qquad \frac{2m_k+1}{2}(A_i-A_k)=(i-k)2\pi\lambda_k,$$

$$(3.6)\qquad 0<A_i-x\leqq A_i-A_{k-1}=(i-k+1)\frac{4\pi}{2n+1}.$$

(3.4)—(3.6) alapján, valamint Lagrange tételéből $i\geqq k$-ra és $x\in\varDelta_{k-1}$-re azt nyerjük, hogy

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{J_i}\frac{m_i^2}{n}\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_i-x)}{2\sin\frac{A_i-x}{2}}\,dt+\right.$$

$$(3.7)\qquad \left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{J_i}\frac{m_i^2}{n}\left[\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}-\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_i-x)}{2\sin\frac{A_i-x}{2}}\right]dt\right|\geqq$$

$$\geqq\frac{1}{\pi n}\frac{\left|\sin\frac{2m_k+1}{2}(A_i-x)\right|}{\sin\frac{A_i-x}{2}}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{J_i}\frac{m_i^2}{n}\cdot m_k^2\frac{1}{m_i^2}\,dt\geqq$$

$$\geqq\frac{\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|}{\pi n\sin\frac{A_i-x}{2}}-\frac{2}{\pi n}\geqq\frac{1}{\pi^2}\frac{\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|}{i-k+1}-\frac{1}{n}.$$

Megjegyezzük, hogy az

$$\frac{1}{\pi}\int_{J_i}\varphi_n(t)\frac{\sin\frac{2m_k+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt$$

integrál döntő részének állandó az előjele, függetlenül attól, hogy $i \geqq k$.

Egybevetve a (3. 2), (3. 3) és (3. 7) összefüggéseket, $x\in\Delta_{k-1}$ $(k=2,\dots,n)$ esetben az

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|=\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)\frac{\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{\sum_{i=1}^{k-1}J_i}+\int_{\sum_{i=1}^{n}J_i}\right|\geqq \tag{3. 8}$$

$$\geqq\frac{\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|}{\pi^2}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i-k+1}-\frac{1}{n}n-1\geqq\frac{1}{\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\sum_{i=1}^{n-k+1}\frac{1}{i}-2$$

összefüggést nyerjük. (3. 8)-ból pedig azt kapjuk, hogy

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|\geqq\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\ln n-2, \tag{3. 9}$$

ha $x\in\Delta_{k-1}$ és $2\leqq k\leqq n-[\sqrt{n}]$. Legyen most σ_{k-1} azon $x\in\Delta_{k-1}$ pontok halmaza, amelyekre

$$\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\geqq\frac{1}{\sqrt{\ln n}}. \tag{3. 10}$$

Világos, hogy ha $x\in\sigma_{k-1}$, akkor

$$|S_{m_k}(x,\varphi_n)|\geqq\sqrt{\ln n}-2 \qquad (k=2,\dots,n-[\sqrt{n}]). \tag{3. 11}$$

Legyen

$$q_n=m_n,\quad E_n=\sum_{i=1}^{n-[\sqrt{n}]-1}\sigma_i,\qquad M_n=\sqrt{\ln n}-2. \tag{3. 12}$$

(3. 11) alapján látjuk, hogy az 1. lemmát bebizonyítottuk, ha megmutatjuk, hogy $\operatorname{mes} E_n\to 2\pi$, midőn $n\to\infty$.

A Δ_{k-1} szakasz hosszúsága $\frac{4\pi}{2n+1}-\frac{4}{n^2}$. Világos továbbá, hogy a (3. 10) feltétel a Δ_{k-1} szakaszon mindenütt teljesül, kivéve egy $O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)$ mértékű halmazt. Valóban, azoknak az x pontoknak a halmaza, amelyekre

$$\frac{1}{2\pi}\left|\sin\left(m_k+\frac{1}{2}\right)x\right|\leqq\frac{1}{\sqrt{\ln n}},$$

olyan szakaszok összege, amelyek mindegyikének belsejében az $y = \sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x = \sin \lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$ függvénynek van egy zérus helye. Az is nyilvánvaló, hogy ezeknek a szakaszoknak azonos hosszúságuk van. Legyen γ ezen szakaszok egyikének a hosszúsága. Könnyen belátható, hogy

$$\gamma = 2\frac{\arcsin\frac{2\pi}{\sqrt{\ln n}}}{\lambda_k(2n+1)\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{\lambda_k n\sqrt{\ln n}}\right).$$

Az $y = \sin \lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$ függvénynek a $[0, 2\pi]$ szakaszon $\lambda_k(2n+1)+1$ nullahelye van. Két szomszédos nullahely közti távolság $\frac{2\pi}{\lambda_k(2n+1)}$. Minthogy $\lambda_k > n$, ha $k \geqq 2$, és $\varDelta_{k-1}$ hosszúsága $\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{1}{n^2}$, ezért a $\sin \lambda_k(2n+1)\frac{x}{2}$ függvénynek a $\varDelta_{k-1}$ szakaszon nincs több nullahelye, mint $N = O(\lambda_k)$. Ennek következtében azon $x \in \varDelta_{k-1}$ pontok halmazának, amelyekre

$$\frac{1}{2\pi}\left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| < \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \qquad (k \geqq 2),$$

a mértéke $\gamma N = O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)$. Ennélfogva

$$\lim \operatorname{mes} E_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-[\sqrt{n}]-1}\left[\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{4}{n^2} - O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)\right] = 2\pi.$$

Az 1. lemmát bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Legyen α tetszőleges kicsiny, pozitív szám, és τ_{k-1} azoknak az $x \in \varDelta_{k-1}$ pontoknak a halmaza, amelyekre

$$\frac{1}{2\pi^2}\left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| \geqq \alpha. \tag{3.13}$$

(3.9)-ből, valamint (3.13)-ból kapjuk:

$$|S_{m_k}(x, \varphi_n)| \geqq \alpha \ln n - 2 \qquad (x \in \tau_{k-1}), \tag{3.14}$$

ahol $k = 2, 3, \ldots, n-[\sqrt{n}]$. Úgy mint az 1. lemmánál:

$$\operatorname{mes} \tau_{k-1} = \frac{4\pi}{2n+1} - \frac{4}{n^2} - O\left(\frac{\alpha}{n}\right). \tag{3.15}$$

(3.15)-ből következik, hogy

$$\operatorname{mes} N_n = \operatorname{mes} \sum_{k=2}^{n-[\sqrt{n}]} \tau_{k-1} = 2\pi - O(\alpha) - O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.16}$$

(3. 14)-ből és (3. 16)-ból kapjuk, hogy található két olyan pozitív α és β szám, amelyekre

$$(3.17) \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \operatorname{mes} \underset{x}{E}[\max_{m_n \geqq i \geqq m_1} |S_i(x, \varphi_n)| \geqq \alpha \ln n] \geqq \beta,$$

ahol m_1, m_n az n egész számtól függően vannak meghatározva (l. 1. lemmát). Nem nehéz belátni, (l. (3. 13)—(3. 16)), hogy ha az α közel esik $+0$-hoz, akkor β is közel esik $2\pi-0$-hoz. Ebből láthatjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz található olyan $\delta>0$, hogy

$$\varlimsup_{n\to\infty} \operatorname{mes} \underset{x}{E}[\max_{m_n \geqq i \geqq m_1} |S_i(x, \varphi_n)| > \delta \ln n] > 2\pi-\varepsilon.$$

Ennek következtében van olyan $N(\varepsilon)$ szám, amelyre érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(3.18) \qquad \operatorname{mes} \underset{x}{E}[\max_{m_n \geqq i \geqq m_1} |S_i(x, \varphi_n)| > \delta \ln n] > 2\pi-\varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N.$$

8. TÉTEL (KOLMOGOROV [13]). *Van olyan $\Phi(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt nem-korlátosan divergál.*

Bizonyítás. Mivel $M_n \to \infty$ (l. 1. lemmát), induktíve konstruálhatunk olyan növekvő $\{n_k\}$ számsorozatot, hogy fennálljanak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$1^\circ. \qquad q_{n_i} \leqq \frac{1}{2^k}\sqrt{M_{n_k}}, \quad \text{ha} \quad i=1,2,\ldots,(k-1),$$

$$2^\circ. \qquad \sum_{i=1}^{k-1} \max_{m,x} |S_m(x, \varphi_{n_i})| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{M_{n_k}}.$$

(A $\varphi_{n_i}(x)$ függvény korlátos variációjú és ezért

$$\max_{m,x} |S_m(x, \varphi_{n_i})| \leqq B_{n_i} < \infty,$$

ahol B_{n_i} pozitív állandó (l. [40], 47.). Az 1°. feltételből következik, hogy

$$(3.19) \qquad \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \leqq \frac{1}{2^k}.$$

Legyen

$$(3.20) \qquad \Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \varphi_{n_k}(x).$$

(3. 19)-ből, valamint a B tételből következik, hogy a (3. 20) sor majdnem mindenütt konvergál a $\Phi(x)$ integrálható függvényhez.

Most megmutatjuk, hogy $\Phi(x)$ a keresett függvény. Tudjuk, hogy

$$(3.21) \qquad S_i(x, \Phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} S_i(x, \varphi_{n_k}).$$

Legyen $E=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} E_{n_k}$. Világos, hogy $\operatorname{mes} E=2\pi$ (l. az 1. lemma 3. pontját). Vegyünk egy tetszőleges $x_0 \in E$ pontot; megmutatjuk, hogy $\Phi(x)$ Fourier-sora divergál ebben a pontban.

Minthogy $x_0 \in E$, ezért $x_0 \in E_{n_j}$ végtelen sok j-re. (3. 21) alapján ugyanis

$$S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \Phi)= \tag{3. 22}$$

$$=\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_k})+\frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_j})+\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_k}).$$

Ismeretes, hogy

$$|S_k(x, f)| \leqq k \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt \qquad (k \geqq 1). \tag{3. 23}$$

Egybevetve a (3. 22), (3. 23), 1°., 2°. összefüggéseket, valamint az 1. lemma 1. és 4. pontjait, azt kapjuk, hogy végtelen sok j-re

$$|S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \Phi)| \geqq \frac{1}{\sqrt{M_{n_j}}} |S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_j})|-\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} |S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_k})|-$$

$$-\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} |S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \varphi_{n_k})|,$$

vagyis

$$\begin{aligned} |S_{p_{n_j}, x_0}(x_0, \Phi)| &\geqq \sqrt{M_{n_j}}-\frac{1}{2} \sqrt{M_{n_j}}-\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} q_{n_j} 2 \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2} \sqrt{M_{n_j}}-2 \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \cdot \frac{\sqrt{M_{n_k}}}{2^k}=\frac{1}{2} \sqrt{M_{n_j}}-\frac{2}{2^j}. \end{aligned} \tag{3. 24}$$

(3, 24)-ből következik, hogy

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x_0, \Phi)|=+\infty \qquad (x_0 \in E), \tag{3. 25}$$

a $\Phi(x)$ függvény Fourier-sora tehát nem-korlátosan divergál a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt. Ezzel a 8. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Mivel

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x, \Phi)|=+\infty, \quad \text{ha} \quad x \in E,$$

felmerül a kérdés, hogy vajon nem konvergál-e $\{S_i(x, \Phi)\}$ $+\infty$-hez (vagy $-\infty$-hez) egy pozitív mértékű E_1 halmazon? Megmutatjuk, hogy nem.

Valóban, ha $\Phi(x)$ Fourier-sora pozitív mértékű halmazon $+\infty$-hez konvergálna, akkor a sor $(C, 1)$-szummálható is lenne $+\infty$-hez ezen a halmazon (l. A tételt). De ez nem lehetséges, mert $\Phi(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható $\Phi(x)$-hez, amely viszont majdnem mindenütt véges (D tétel). Ezen túlmenően, a J tétel felhasználásával megmutathatjuk, hogy majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re

$$\varliminf_{n\to\infty} S_n(x, \Phi) = -\infty.$$

Megjegyezzük, hogy mindeddig nincs eldöntve a következő kérdés: Van-e olyan trigonometrikus sor, amely pozitív mértékű halmazon $+\infty$-hez konvergál?

9. TÉTEL. *Legyen*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{3.26}$$

a Kolmogorov-féle $\Phi(x)$ függvény Fourier-Lebesgue-sora. Ekkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{3.27}$$

konjugált sor nem Fourier—Lebesgue-sor.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy a (3.27) sor valamilyen integrálható $f(x)$ függvény Fourier-Lebesgue-sora. Ekkor a (3.27) sor $(C, 1)$-szummálható $f(x)$-hez majdnem mindenütt (D tétel). De minthogy (3.27) a (3.26) sor konjugált sora, ezért majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható a $\bar{\Phi}(x)$ függvényhez is (D tétel). Ennek következtében $f(x) = \bar{\Phi}(x)$ majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re, vagyis $\bar{\Phi}(x) \in L(0, 2\pi)$. Azonban $\Phi(x) > 0$ és ezért az E tétel szerint

$$\Phi(x) \ln^+ \Phi(x) \in L(0, 2\pi).$$

Megmutatjuk, hogy ez nem igaz. Valóban

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} \varphi_{n_k} \ln^+ \Phi(x)\, dx, \tag{3.28}$$

ahol $M_n = \sqrt{\ln n} - 2 < \sqrt{\ln n}$. Nagy n-ekre megbecsüljük a

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \ln^+ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{M_n}}\, dx$$

integrált. Világos, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \ln^+ \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{M_n}}\, dx &= \\ = \sum_{k=1}^{n} \int_{J_k} \frac{m_k^2}{n} \ln^+ \frac{m_k^2}{n\sqrt{M_n}}\, dx &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{n}{\sqrt{M_n}} \geq \ln \frac{n}{(\ln n)^{1/4}} \geq \frac{1}{2} \ln n.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Egybevetve (3. 28)-at és (3. 29)-et, azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x)\, dx \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} \varphi_{n_k}(x) \ln^+ \left(\frac{\varphi_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}} \right) dx \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \ln n_k \geqq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln n_k}{(\ln n_k)^{1/4}} = \infty,$$

vagyis

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x) \ln^+ \Phi(x)\, dx = +\infty. \tag{3.30}$$

Ezzel a 9. tételt bebizonyítottuk.

Következmény. *A Kolmogorov-féle $\Phi(x)$ függvényre*

$$\Phi(x) \notin L^{1+\varepsilon}(0, 2\pi) \tag{3.31}$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra. Ez közvetlenül következik (3. 30)-ból.

Megjegyzés. Nem nehéz megmutatni, hogy a *$\bar{\Phi}(x)$ függvény nem integrálható egyetlen szakaszon sem.*

Valóban, könnyen belátható, hogy tetszőleges $[\alpha, \beta]$ szakaszon

$$\int_\alpha^\beta \Phi(x) \ln^+ \Phi(x)\, dx = +\infty. \tag{3.32}$$

Ezért, ha $\bar{\Phi}(x) \in L(\alpha_0, \beta_0)$ lenne, lehetne konstruálni a következő tulajdonságokkal rendelkező $\Phi_1(x) \in L(0, 2\pi)$ függvényt:

1. $\Phi_1(x) = \Phi(x)$, ha $x \in [\delta, \gamma] \subset (\alpha_0, \beta_0)$,
2. $\Phi_1(x) \geqq 0$ minden x-re,
3. $\bar{\Phi}_1(x) \in L(0, 2\pi)$

(l. [38]). Riesz tételéből azt kapnánk, hogy $\Phi_1(x) \ln^+ \Phi_1(x) \in L(0, 2\pi)$. Ez viszont azt jelentené, hogy $\Phi(x) \ln^+ \Phi(x) = \Phi_1(x) \ln^+ \Phi_1(x) \in L(\delta, \gamma)$. Ilymódon ellentmondásba kerülnénk (3. 32)-vel, és éppen ezt akartuk bebizonyítani.

Megjegyezzük, hogy mindeddig eldöntetlen az a kérdés, hogy bármely $f(x) \in L^{1+\varepsilon}(0, 2\pi)$ $(\varepsilon > 0)$ függvény Fourier-sora pozitív mértékű halmazon konvergál, illetve divergál-e. Most kimondjuk bizonyítás nélkül Kolmogorov alábbi tételét [14]:

10. TÉTEL. *Van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelyre*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x, f)| = +\infty$$

minden $x \in [0, 2\pi]$-re, a részletösszegek tehát egyetlen pontban sem korlátosak, és így az $f(x)$ függvény Fourier-sora mindenütt nem-korlátosan divergál. A bizonyítást megtalálhatjuk Zygmund jól ismert könyvében.

4. §. Fourier-sorok korlátos divergenciája

A 8. tételben bebizonyítottuk olyan függvény létezését, amelynek Fourier-soránál a részletösszegek majdnem minden x pontban kielégítik a

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, |S_i(x, \Phi)| = +\infty \tag{4.1}$$

egyenlőséget (l. (3.25)). Felmerül az a kérdés, vajon integrálható függvények majdnem mindenütt divergáló Fourier-sorai mindig kielégítik-e a (4.1) egyenlőséget? Az erre vonatkozó választ adja meg a

11. TÉTEL. (MARCINKIEWICZ). *Van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora $[0, 2\pi]$-ben majdnem mindenütt divergál, ugyanakkor pedig*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |S_n(x, f)| < \infty \tag{4.2}$$

majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re, vagyis $f(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt korlátosan divergál.

Bizonyítás. Tekintsük az $f_n(x) = \dfrac{\varphi_n(x)}{\ln n}$ függvényt, ahol $\varphi_n(x)$ az 1. lemmában definiált függvény. Világos, hogy $f_n(x)$ korlátos variációjú és $f_n(x) \geqq 0$ minden x-re, továbbá

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)dx = \frac{2}{\ln n}, \tag{4.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}_x E\{f_n(x) > 0\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(m_k^{(n)})^2} = 0, \tag{4.4}$$

ahol $\{m_k^{(n)}\}$ az 1. lemmában bevezetett, egész n-ekre konstruált számsorozat. Legyen

$$E_n^{(\delta)} = E_x\{\max_{m_n^{(n)} \geqq i \geqq m_1^{(n)}} |S_i(x, f_n)| > \delta\} \qquad (\delta > 0).$$

Az 1. lemmához fűzött megjegyzés alapján állíthatjuk, hogy tetszőleges $\eta > 0$-ra található olyan $\gamma = \gamma(\eta) > 0$ és $N = N(\eta)$, hogy

$$\operatorname{mes} E_x\{\max_{m_n^{(n)} \geqq i \geqq m_1^{(n)}} |S_i(x, f_n)| > \gamma\} = \operatorname{mes} E_n^{\gamma} > 2\pi - \eta, \quad \text{ha} \quad n \geqq N. \tag{4.5}$$

Legyen $d_k = \left[A_k + \dfrac{1}{n \ln n}, A_{k+1} - \dfrac{1}{n \ln n}\right]$, ahol $A_k = \dfrac{4\pi}{2n+1} k$. Világos, hogy ezek a szakaszok nem metszik a $\{J_k\}$ szakaszokat (l. 1. lemma). Legyen

$$D_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k.$$

Megmutatjuk, hogy minden i, n és $x \in D_n$-re

(4. 6) $$|S_i(x, f_n)| < M,$$

ahol M állandó. Ehhez elég, ha megmutatjuk, hogy $x \in D_n$-re

(4. 7) $$\int_0^{2\pi} f_n(t) \frac{1}{|x-t|} dt \leqq C \qquad (C \text{ állandó}).$$

Legyen $x_0 \in d_{k_0} \subset D_n$. Akkor $n > 3$-ra

$$\int_0^{2\pi} f_n(t) \frac{1}{|x-t|} dt = \int_0^{x_0} + \int_{x_0}^{2\pi} = \frac{1}{\ln n} \left\{ \sum_{s=1}^{k_0-1} \int_{J_s} \frac{\varphi_n(t)}{x_0 - t} dt + \int_{J_{k_0}} \frac{\varphi_n(t)}{x_0 - t} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{J_{k_0+1}} \frac{\varphi_n(t)}{t - x_0} dt + \sum_{s=k_0+2}^{n} \int_{J_s} \frac{\varphi_n(t)}{t - x_0} dt \right\} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\ln n} \left\{ \sum_{s=1}^{k_0-1} \frac{m_s^2}{n} \frac{2n+1}{4\pi(k_0 - s)} \frac{2}{m_s^2} + \frac{m_{k_0}^2}{n} \frac{1}{\dfrac{1}{n \ln n} - \dfrac{1}{m_{k_0}^2}} \frac{2}{m_{k_0}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_{k_0+1}^2}{n} \frac{1}{\dfrac{1}{n \ln n} - \dfrac{1}{m_{k_0+1}^2}} \frac{2}{m_{k_0+1}^2} + \sum_{s=k_0+2}^{n} \frac{m_s^2}{n} \frac{2n+1}{4\pi(s - k_0 - 1)} \frac{2}{m_s^2} \right\} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\ln n} \left\{ \sum_{s=1}^{k_0-1} \frac{1}{k_0 - s} + \frac{4 \ln n}{1 - \dfrac{\ln n}{n}} + \sum_{s=k_0+2}^{n} \frac{1}{s - k_0 - 1} \right\} \leqq C,$$

vagyis fennáll a (4. 7) egyenlőtlenség. Világos, hogy

$$\operatorname{mes} D_n = \left(\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n \ln n} \right) (n-1) \to 2\pi, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

tehát

(4. 8) $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} D_n = 2\pi.$$

A (4. 6) és (4. 8) összefüggések alapján a

(4. 9) $$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} E_x \{ \max_i |S_i(x, f_n)| \leqq M \} = 2\pi$$

összefüggést nyerjük. Legyen

(4. 10) $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x).$$

Megmutatjuk, hogy az $\{n_k\}$ sorozat alkalmas megválasztása esetén $f(x)$ a keresett függvény. Tegyük fel, hogy már definiálva vannak a

(4. 11) $$4 \leqq n_1 < n_2 < \cdots < n_k,$$

(4. 12) $$2 \leqq q_1 < q_2 < \cdots < q_{k-1}$$

sorozatok, ahol n_i és q_i egész számok. Legyen

(4. 13) $$\Phi_k(x) = \sum_{i=1}^{k} f_{n_i}(x).$$

Legyen az $E_{k,q}$ halmaz a következőképpen értelmezve:

(4. 14) $$E_{k,q} = \underset{x}{E}\left\{ |S_p(x, \Phi_k) - \Phi_k(x)| < \frac{1}{k} \text{ minden } p \geqq q\text{-ra} \right\}.$$

Jegorov tétele, valamint $\Phi_k(x)$ Fourier-sorának konvergenciája alapján:

(4. 15) $$\text{mes}\, CE_{k,q} = \text{mes}\,\{[0, 2\pi] - E_{k,q}\} < \frac{1}{2^k}, \quad \text{ha} \quad q \geqq q(k).$$

Legyen

(4. 16) $$q_k = \max\{q(k), m_{n_k}^{(n_k)}\}.$$

Határozzuk meg az n_{k+1} egész számot úgy, hogy teljesüljenek az alábbi egyenlőtlenségek:

(4. 17) $$\int_0^{2\pi} f_{n_k}(t)\,dt > q_k \int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)\,dt,$$

(4. 18) $$\text{mes}\, \underset{x}{E}\{\max_i |S_i(x, f_{n_{k+1}})| > M\} < \frac{1}{2^k},$$

(4. 19) $$n_{k+1} > n_k, \quad m_1^{(n_{k+1})} > q_k.$$

Ilyen n_{k+1} szám meghatározásának a lehetősége következik (4. 3)-ból és (4. 9)-ből. Ily módon az $\{n_k\}$ és $\{q_k\}$ sorozatokat indukcióval teljesen meghatároztuk. Minthogy $q_k \geqq 2$, ezért (4. 17)-ből és (4. 10)-ből következik, hogy $f(x) \in L(0, 2\pi)$ (l. B tétel).

Legyen $\psi_k(x) = f(x) - \Phi_k(x)$, akkor azt kapjuk, hogy

(4.20) $$S_i(x, f) = S_i(x, \Phi_k) + S_i(x, f_{n_{k+1}}) + S_i(x, \psi_{k+1}).$$

Legyen a (4. 20) formulában k olyan, hogy teljesüljön a

(4.21) $$q_k \leqq i < q_{k+1}$$

feltétel. Világos, hogy (4. 17), (4. 21) és (4. 3) alapján:

$$|S_i(x, \psi_{k+1})| \leqq 4i \int_0^{2\pi} \psi_{k+1}(t)\,dt \leqq 4i \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{s=k+2}^{\infty} f_{n_s}(t) \right\} dt \leqq$$

$$\leqq 8i \int_0^{2\pi} f_{n_{k+2}}(t)\,dt \leqq \frac{8i}{q_{k+1}} \int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)\,dt \leqq 8 \int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(t)\,dt = o(1).$$

vagyis

(4.22) $$\lim_{i\to\infty} |S_i(x, \psi_{k+1})| = 0 \quad \text{minden} \quad x\in[0, 2\pi]\text{-re}.$$

(4.21)-ből következik továbbá, hogy $k\to\infty$, midőn $i\to\infty$. Minthogy $\Phi_k(x)\to\to f(x)$ majdnem minden $x\in[0, 2\pi]$-re (l. (4.10) és (4.13)), azért $S_i(x, \Phi_k)\to\to f(x)$, ha $i\to\infty$, majdnem minden $x\in[0, 2\pi]$-re ((4.14)—(4.16)). Ennélfogva:

(4.23) $$\lim_{i\to\infty} S_i(x, \Phi_k) = f(x)$$

minden $x\in A\subset[0, 2\pi]$ pontban, ahol $\text{mes}\, A = 2\pi$. Így (4.18) felhasználásával a

(4.24) $$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x, f_{n_{k+1}})| \leqq M$$

(minden $x\in P\subset[0, 2\pi]$ pontban) becslést nyerjük, ahol $\text{mes}\, P = 2\pi$ és $q_k \leqq \leqq i < q_{k+1}$. (4.20), valamint (4.22)—(4.24) alapján

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} |S_i(x, f)| < \infty$$

majdnem minden $x\in[0, 2\pi]$-re, vagyis az $f(x)$ függvénynek megvan a (4.2) tulajdonsága.

Most megmutatjuk, hogy $f(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt divergál a $[0, 2\pi]$ szakaszon. Válasszuk a rögzített $\varepsilon>0$-t tetszőlegesen; (4.5) alapján található olyan $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ és $N=N(\varepsilon)$, hogy

(4.25) $$\text{mes}\, \underset{x}{E}\{ \max_{m_n^{(n)}\geqq i\geqq m_1^{(n)}} |S_i(x, f_n)| > \delta\} = \text{mes}\, E_n^{(\delta)} > 2\pi - \varepsilon$$

legyen, ha $n\geqq N$. Legyen $E = \overline{\lim_{k\to\infty}}\{E_{n_k}^{(\delta)} \cap A\}$; (4.25)-ből következik, hogy $\text{mes}\, E \geqq 2\pi - \varepsilon$. Ha tehát $x_0\in E$, akkor $x_0\in A$ és $x_0\in E_{n_{k_j}}^{(\delta)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Az i indexeket úgy választjuk, hogy

(4.26) $$q_{k_j-1} \leqq i < q_{k_j}$$

legyen. Akkor

(4.27) $$S_i(x_0, f) = S_i(x_0, \Phi_{k_j-1}) + S_i(x_0, f_{n_{k_j}}) + S_i(x_0, \psi_{k_j}).$$

Minthogy $x_0\in A$, azért

(4.28) $$\lim_{i\to\infty} S_i(x_0, \Phi_{k_j-1}) = f(x_0)$$

((4.23) és (4.26)). Hasonlóképpen ((4.22)):

(4.29) $$\lim_{i\to\infty} S_i(x_0, \psi_{k_j}) = 0.$$

Most (4. 25) alapján és abból, hogy $x_0 \in E^{(\delta)}_{n_{k_j}}$,

(4. 30) $$\max_{m^{(n_{k_j})}_{n_{k_j}} \geqq i \geqq m^{(n_{k_j})}_1} |S_i(x_0, f_{n_{k_j}})| > \delta, \quad \text{ha} \quad n_{k_j} \geqq N.$$

Minthogy azonban

(4. 31) $$q_{k_j-1} < m_1^{(n_{k_j})} < m_{n_{k_j}}^{(n_{k_j})} \leqq q_{k_j}$$

(l. (4. 16) és (4. 19)), ezért (4. 30)-ból következik olyan $i_0 = i(x_0, j)$ index létezése, amely kielégíti (4. 26)-ot és amelyre

(4. 32) $$|S_{i_0}(x_0, f_{n_{k_j}})| > \delta > 0.$$

Következésképpen (4. 27)—(4. 29) és (4. 32) alapján azt nyerjük, hogy található végtelen sok olyan $i_0 = i(x_0, j)$ index, amelyekre igaz az

$$|S_{i_0}(x_0, f) - f(x_0)| > \delta$$

becslés, vagyis

(4. 33) $$S_i(x_0, f) \nrightarrow f(x_0) \qquad x_0 \in E.$$

Eszerint (4. 33)-ból következik, hogy $f(x)$ Fourier-sora az E halmazon mindenütt divergál. Ez közvetlenül adódik a D tétel következményéből.

Az E halmaz mértéke azonban $\geqq 2\pi - \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ezért az $f(x)$ függvény konstrukciójának ε-tól való függetlensége miatt $f(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt divergál a $[0, 2\pi]$ szakaszon, s ezzel a 11. tételt bebizonyítottuk.

1°. m e g j e g y z é s. Nem nehéz meggyőződnünk arról, hogy minden $[\alpha, \beta]$ szakaszon

(4. 34) $$\int_\alpha^\beta f(t) \ln^+ f(t) dt = +\infty$$

(l. a 9. tételhez fűzött megjegyzést). A (4. 34) egyenlőség azt jelenti, hogy $f(x)$ Fourier-sorának konjugált sora nem Fourier-sor. Ezen túlmenően $\bar{f}(x)$ nem L-integrálható egyetlen szakaszon sem (l. 9. tételt és a hozzáfűzött megjegyzést).

2°. m e g j e g y z é s. Vegyünk egy tetszőlegesen kicsiny $\eta > 0$ számot. Könnyen belátható, hogy megválaszthatjuk az $\{n_k\}$ sorozatot úgy is, hogy $f(x)$-re a 11. tétel minden állítása teljesüljön és

(4. 35) $$\text{mes}\, E\{f(x) \neq 0\} < \eta$$

legyen. Valóban:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x),$$

ahol az $\{n_k\}$ sorozatot speciális módon választottuk. Nem nehéz belátni, hogy az $\{n_k\}$ sorozat választható úgy, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \frac{\eta}{2}$$

legyen és hogy teljesüljenek a (4. 11), (4. 17)—(4. 19) feltételek. Ebben az esetben $f(x)$ megint csak teljesíti a 11. tétel valamennyi állítását. És minthogy (l. (4. 4))

$$\operatorname{mes} E\{f_n(x) \neq 0, \quad x \in [0, 2\pi]\} = \sum_{s=1}^{n} \frac{2}{(m_s^{(n)})^2} \leqq \sum_{s=1}^{n} \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n},$$

azért

$$\operatorname{mes} E\{f(x) \neq 0, \quad x \in [0, 2\pi]\} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n_k} < \eta,$$

vagyis érvényes (4. 35). Ugyanakkor azonban az $f(x)$ függvényre érvényes (4. 34) is, és ez azt jelenti, hogy a megkonstruált $f(x)$ függvény tetszőleges szakaszon sem marad korlátos (még ha nullamértékű halmazon megváltoztatjuk is).

A (4. 35) egyenlőtlenség és a 11. tétel azt mutatják, hogy Riemann lokalizációs elve halmazokra vonatkozólag nem érvényes, abból tehát, hogy $f(x) \in L(0, 2\pi)$, és $f(x) = 0$ egy pozitív mértékű halmazon, még nem következik $f(x)$ Fourier-sorának konvergenciája (annál kevésbé egyenletes konvergenciája) semmilyen $E_1 \subset E$ pozitív mértékű halmazon sem.

3°. megjegyzés. Felmerül még az a kérdés, nem lehet-e konstruálni olyan $f(x)$ függvényt, amelynek Fourier-sora majdnem mindenütt divergál, és a (4. 2) feltétel mindenütt teljesül? Erre vonatkozólag jelenleg csak a következő választ tudjuk adni.

12. TÉTEL. *Ha van olyan $F(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergál, és*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |S_n(x, F)| < \infty \tag{4. 36}$$

minden $x \in [0, 2\pi]$-re, akkor van $[0, 2\pi]$-ben olyan korlátos függvény is, amelynek Fourier-sora pozitív mértékű halmazon divergál.

Bizonyítás. Legyen

$$E_{n,m} = \underset{x}{E}\{|S_n(x, F)| \leqq m\}, \quad E_m = \prod_{n=1}^{\infty} E_{n,m}.$$

Világos, hogy E_m zárt halmaz. Minthogy $[0, 2\pi] = \sum_{m=1}^{\infty} E_m$, azért legalább egy E_{k_0} halmaz nem lehet sehol sem sűrű $[0, 2\pi]$-ben, vagyis E_{k_0} sűrű valamelyik $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ szakaszon. De E_{k_0} zárt halmaz, ezért $[a, b] \subset E_{k_0}$, tehát

$$|S_n(x, F)| \leqq k_0$$

minden n-re és $x \in [a, b] = J$-re. Ha azonban a Fourier-sor részletösszegei a J szakaszon korlátosak, akkor ezen a szakaszon korlátosak a $\sigma_n(x, F)$ aritmetikai közepek is, ennélfogva az $F(x)$ függvény J-n ekvivalens egy korlátos függvénnyel (l. D tétel). Felhasználva Riemannak a Fourier-sorokra vonatkozó lokalizációs tételét, könnyen konstruálhatunk $[0, 2\pi]$-n olyan korlátos $\varphi(x)$ függvényt, amelynek Fourier-sora J-n ugyanúgy viselkedik, mint $F(x)$ Fourier-sora. Következésképpen $\varphi(x)$ Fourier-sora J-n majdnem mindenütt divergál, s ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy mindeddig eldöntetlen kérdés, vajon konvergál-e (illetve divergál-e) pozitív mértékű halmazon korlátos függvény Fourier-sora.

Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy a 12. tétel gondolatmenete érvényes marad, ha feltételezzük, hogy *a*) a (4. 36) egyenlőtlenség teljesül valamely $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ szakaszon, *b)* a részletösszegek $[\alpha, \beta]$-án majdnem mindenütt divergálnak.

Következmény. *Legyen $f(x)$ a 11. tételben konstruált függvény. Akkor a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x, f)| < \infty \tag{4. 37}$$

egyenlőtlenség nem teljesül sehol sem a $[0, 2\pi]$-ben sűrű $M \subset [0, 2\pi]$ halmazon.

Valóban, ha ez nem így lenne, akkor találnánk olyan $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ szakaszt, amelyen mindenütt érvényes lenne (4. 37). Ugyanúgy következtetve, mint a 12. tételnél, azt kapnánk, hogy található olyan $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ szakasz, ahol $|f(x)| \leqq C$ (C állandó). Így tehát

$$\int_\gamma^\delta |f(x)| \ln^+ |f(x)| dx < \infty,$$

ez pedig ellene mond a (4. 34) egyenlőségnek.

5. §. Fourier-sorok konvergenciájának egy nem javítható kritériuma

Mielőtt megfogalmaznánk és bebizonyítanánk MARCINKIEWICZ [20] Fourier-sorok konvergenciájára vonatkozó tételét, bebizonyítjuk a következő lemmát:

2. LEMMA. *Legyen $P \subset [0, 2\pi]$ adott perfekt halmaz, a $\Delta_n = (x_n - 3\delta_n, x_n + 3\delta_n)$ intervallumok pedig P komplementer intervallumai. Ha a $h(t) \in L(0, 2\pi)$ olyan nem-negatív függvény, hogy $h(t) = 0$, ha $t \in P$, és*

$$\int_{\Delta_n} h(t)\, dt \leqq \frac{\delta_n}{\ln \frac{\pi}{\delta_n}}, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5. 1}$$

akkor a $h(t)$ függvény Fourier-sora a P halmazon majdnem mindenütt konvergál.

Bizonyítás. A lemma állítása nyilvánvaló, ha $\operatorname{mes} P=0$. Tegyük fel, hogy $\operatorname{mes} P>0$. A 2. lemma bebizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy $h(t)$ majdnem minden $x\in P$ pontban eleget tesz a Dini-féle feltételnek, vagyis

$$\int_0^{2\pi} h(t)\frac{dt}{|t-x|}<\infty. \tag{5.2}$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\Delta_n^*=(x_n-\delta_n,\, x_n+\delta_n),\quad h^*(t)=\begin{cases}3h(x_n+3(t-x_n)), & \text{ha } t\in\Delta_n^*,\\ 0, & \text{ha } t\in[0,2\pi]-\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n^*.\end{cases} \tag{5.3}$$

Legyen $\Phi(x)$ a P halmaz karakterisztikus függvénye. Ekkor (5.3) és (5.1) alapján

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)h^*(t)\frac{dx\,dt}{|x-t|}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n^*}h^*(t)\,dt\int_0^{2\pi}\Phi(x)\frac{dx}{|x-t|}\leqq$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n^*}h^*(t)\,dt\left\{\int_0^{x_n-3\delta_n}\frac{dx}{t-x}+\int_{x_n+3\delta_n}^{2\pi}\frac{dx}{x-t}\right\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n^*}h^*(t)\,dt\left\{\ln\frac{t}{t-(x_n-3\delta_n)}+\ln\frac{2\pi-t}{x_n+3\delta_n-t}\right\}\leqq$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n^*}h^*(t)\,dt\left\{\ln\frac{x_n-\delta_n}{2\delta_n}+\ln\frac{2\pi-x_n-\delta_n}{2\delta_n}\right\}\leqq$$

$$\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(2\pi)^2}{4\delta_n^2}\int_{\Delta_n}h(t)\,dt\leqq\sum_{n=1}^{\infty}2\ln\left(\frac{\pi}{\delta_n}\right)\frac{\delta_n}{\ln\left(\frac{\pi}{\delta_n}\right)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty,$$

más szóval

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)h^*(t)\frac{1}{|x-t|}\,dx\,dt<\infty. \tag{5.4}$$

(5.4)-ből és Fubini tételéből (l. [28], 296—302.) következik, hogy

$$\int_0^{2\pi}h^*(t)\frac{dt}{|x-t|}<\infty,\quad\text{ha}\quad x\in P_1\subset P, \tag{5.5}$$

ahol $\operatorname{mes} P_1 = \operatorname{mes} P$. Legyen most az $x_0 \in P_1$ pont a P_1 halmaz maximális sűrűségű pontja, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\frac{\operatorname{mes}\{P_1(x_0, x_0+h)\}}{|h|} \geqq \frac{1}{2} \qquad (0 < |h| \leqq \delta). \tag{5.6}$$

(5. 3), (5. 5) és (5. 6) alapján könnyen nyerjük, hogy

$$\infty > \int_0^{x_0} h^*(t)\frac{1}{x_0-t}\,dt \geqq \sum_{\substack{n\\ \Delta_n^* \subset [x_0-\delta,\, x_0]}} \int_{\Delta_n^*} \frac{3h(x_n+3(t-x_n))}{x_0-t}\,dt =$$

$$= 3 \sum_{\substack{n\\ \Delta_n^* \subset [x_0-\delta,\, x_0]}} \int_{\Delta_n} h(u)\frac{du}{x_0-u+2(x_0-x_n)} \geqq \frac{3}{5} \sum_{\substack{n\\ \Delta_n^* \subset [x_0-\delta,\, x_0]}} \int_{\Delta_n} h(u)\frac{du}{x_0-u} \geqq$$

$$\geqq \frac{3}{5}\int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{h(u)}{x_0-u}\,du,$$

mert hiszen $x_0 - x_n \leqq \dfrac{\operatorname{mes}\{P_1(x_n, x_0)\}}{\frac{1}{2}} \leqq 2[x_0-(x_n+3\delta_n)] \leqq 2(x_0-u)$. Ennélfogva

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0} \frac{h(u)}{x_0-u}\,du < \infty. \tag{5.7}$$

Hasonló megfontolással:

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{h(u)}{u-x_0}\,du < \infty. \tag{5.7'}$$

(5. 7), valamint (5. 7′) alapján azt nyerjük, hogy

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(u)}{|u-x_0|}\,du < \infty,$$

ha $x_0 \in P_2 \subset P_1$, ahol P_2 a P_1 halmaz maximális sűrűségű pontjainak a halmaza. Tudjuk azonban, hogy $\operatorname{mes} P_2 = \operatorname{mes} P_1 = \operatorname{mes} P$, s ezzel a 2. lemmát bebizonyítottuk.

13. TÉTEL (MARCINKIEWICZ [21]). *Ha $f(x) \in L(0, 2\pi)$, és*

$$\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du = O\left(\frac{t}{\ln\frac{1}{|t|}}\right), \tag{5,8}$$

ha $x \in E$, akkor $f(x)$ Fourier-sora majdnem mindenütt konvergál E-n (mes $E > 0$).

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőt, hogy ti. van olyan $E_1 \subset E$ halmaz, amelyen $f(x)$ Fourier-sora divergál és $\operatorname{mes} E_1 > 0$. Legyen E_n azon $x \in E_1$ pontok halmaza, amelyekre

$$\left|\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du\right| \leqq n \frac{|t|}{\ln \frac{1}{|t|}}, \qquad \left(|t| \leqq \frac{1}{n}\right). \tag{5.9}$$

Világos, hogy $\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} E_n = \operatorname{mes} E_1$. Ezért $\operatorname{mes} E_{n_0} > 0$, ha pl. $n_0 \geqq 3$. Az E_{n_0} halmazból mindig ki lehet választani pozitív mértékű és $\frac{1}{n_0}$-nál nem nagyobb átmérőjű P perfekt részhalmazt. Legyen

$$E(x, t, M) = \underset{v}{E}\left\{|f(v)-f(x)| \geqq \frac{M}{\ln \frac{1}{|v-x|}},\; v \in \left(x+\frac{1}{3}t, x+t\right)\right\}.$$

Ha $x \in P$, akkor $x \in E_{n_0}$. Ennélfogva (5.9) alapján

$$n_0 \frac{|t|}{\ln \frac{1}{|t|}} \geqq \left|\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du\right| \geqq \frac{M}{\ln \frac{3}{|t|}} \operatorname{mes} E(x, t, M),$$

vagyis

$$\operatorname{mes} E(x, t, M) \leqq \frac{\ln \frac{3}{|t|}}{\ln \frac{1}{|t|}} \cdot \frac{n_0}{M} |t| \leqq \frac{2n_0}{M} |t|.$$

Világos, hogy

$$\operatorname{mes} E(x, t, 14n_0) \leqq \frac{|t|}{7}, \tag{5.10}$$

midőn $x \in P$. Legyen tehát $x \in P$ és $x < y \in P$. (5.10)-ből azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{mes} E(x, y-x, 14n_0) \leqq \frac{y-x}{7}, \quad \operatorname{mes} E(y, x-y, 14n_0) \leqq \frac{y-x}{7}. \tag{5.11}$$

Az (5.11) egyenlőtlenségből következik, hogy van olyan $\xi \in \left(x+\frac{1}{3}(y-x), y-\frac{1}{3}(y-x)\right)$ pont, amely nem tartozik sem az $E(x, y-x, 14n_0)$ halmazhoz, sem az $E(y, x-y, 14n_0)$ halmazhoz, tehát

$$|f(\xi)-f(x)| \leqq \frac{14n_0}{\ln \frac{1}{|\xi-x|}}, \qquad |f(\xi)-f(y)| \leqq \frac{14n_0}{\ln \frac{1}{|y-\xi|}},$$

következésképp

$$(5.12)\qquad |f(y)-f(x)| \leqq \frac{28n_0}{\ln \frac{1}{|y-x|}}$$

tetszőleges $(x, y) \in P$-re. Definiáljuk a $g(x)$ folytonos függvényt a $[0, 2\pi]$ szakaszon a következőképpen:

$$g(x) = \begin{cases} 0 \ , \text{ ha } \ x=0, \ \ x=2\pi, \\ f(x), \text{ ha } \ x \in P, \\ \text{lineáris } P \text{ komplementer intervallumain.} \end{cases}$$

Minthogy $t \ln \frac{1}{t}$ növekszik a $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ intervallumban, azért ha x_1 és x_2 beletartoznak P komplementer szakaszainak egyikébe, pl. $[\alpha, \beta]$-ba:

$$|g(x_2)-g(x_1)| \leqq |x_2-x_1| \frac{28\,n_0}{\ln \frac{1}{|\beta-\alpha|}\,|\beta-\alpha|} =$$

$$= \frac{|x_2-x_1| \ln \frac{1}{|x_2-x_1|}}{|\beta-\alpha| \ln \frac{1}{|\beta-\alpha|}} \cdot \frac{28n_0}{\ln \frac{1}{|x_2-x_1|}} \leqq \frac{28n_0}{\ln \frac{1}{|x_2-x_1|}},$$

mert $|\beta-\alpha| < \frac{1}{3}$. Ennek következtében

$$(5.13)\qquad |g(y)-g(x)| \leqq \frac{84n_0}{\ln \frac{1}{|y-x|}}$$

tetszőleges $(x, y) \in [0, 2\pi]$-re. (5.13)-ból következik tehát, hogy

$$(5.14)\qquad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|g(x+t)-g(x-t)|^2}{t}\, dt\, dx < \infty.$$

De az (5.14) egyenlőtlenség equivalens a

$$(5.15)\qquad \sum_{k=2}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \ln k < \infty$$

egyenlőtlenséggel, ahol a_k és b_k a $g(x)$ függvény Fourier-koefficiensei (G tétel). Az F tétel alapján tehát $g(x)$ Fourier-sora $[0, 2\pi]$-n majdnem mindenütt konvergál, s így annál inkább konvergál majdnem mindenütt a P halmazon.

Tekintsük a $h(x)=f(x)-g(x)$ függvényt. Világos, hogy $h(x)=0$, midőn $x\in P$. Ha $[\alpha,\beta]$ a P halmaz egyik komplementer szakasza, akkor

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta |h(t)|\,dt &= \int_\alpha^\beta |f(t)-g(t)|\,dt \leqq \int_\alpha^\beta |f(t)-f(\alpha)|\,dt+\int_\alpha^\beta |g(t)-g(\alpha)|\,dt= \\ &= \int_0^{\beta-\alpha} |f(\alpha+t)-f(\alpha)|\,dt+\int_0^{\beta-\alpha} |g(\alpha+t)-g(\alpha)|\,dt.\end{aligned} \tag{5.16}$$

Minthogy $\alpha\in P$, ezért (5. 16), (5. 9), (5. 13) alapján

$$\int_\alpha^\beta |h(t)|\,dt \leqq n_0\frac{\beta-\alpha}{\ln\frac{1}{\beta-\alpha}}+84n_0\frac{\beta-\alpha}{\ln\frac{1}{\beta-\alpha}}=85n_0\frac{\beta-\alpha}{\ln\frac{1}{\beta-\alpha}},$$

vagyis a $\frac{h(t)}{85n_0}$ függvény eleget tesz a 2. lemma feltételeinek. Ezért $h(t)$ Fourier-sora a P halmazon majdnem mindenütt konvergál. De minthogy $f(x)=g(x)+h(x)$, azért $f(x)$ Fourier-sora ugyancsak majdnem mindenütt konvergál a P halmazon. Ez ellene mond annak, hogy $P\subset E_{n_0}\subset E_1$.

Kimutatható, hogy a 13. tétel általában nem javítható. Érvényes ugyanis a következő

14. TÉTEL (MARCINKIEWICZ [21]). *Legyen a pozitív, nem-csökkenő páros $\omega(t)$ függvény olyan, hogy*

$$\lim_{t\to 0}\omega(t)\ln\frac{1}{|t|}=+\infty, \tag{5.17}$$

akkor van olyan $f(x)\in L(0,2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora a $[0,2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergál és

$$\frac{1}{t}\int_0^t |f(x+u)-f(x)|\,du=O(\omega(t)) \tag{5.18}$$

majdnem minden $x\in[0,2\pi]$ pontra.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lim_{t\to 0}\omega(t)=0$. (5. 17)-ből láthatjuk, hogy ez nem korlátozza a 14. tétel általános érvényét. Legyen

$$\omega(t)=\frac{\varphi(t)}{\ln\frac{1}{|t|}} \qquad \left(|t|\leqq\frac{1}{3}\right). \tag{5.19}$$

(5. 17)-ből következik, hogy $\lim_{t\to 0}\varphi(t)=+\infty$. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $\varphi(t)$-hez konstruálhatunk olyan pozitív, páros $\varphi_1(t)\leqq\varphi(t)$ függvényt,

amely csökken a $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ intervallumban, és amelyre $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_1(t) = +\infty$. Legyen

$$\omega_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\ln \frac{1}{|t|}}.$$

Világos, hogy $\omega(t) \geqq \omega_1(t)$ és $\lim\limits_{t\to 0} \omega_1(t) \ln \frac{1}{|t|} = +\infty$ (l. (5. 19)).

Megmutatjuk, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\alpha\,\omega_1(t) \leqq \omega_1(\alpha t) \qquad \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}\right), \tag{5.20}$$

ahol $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Valóban, a $t \ln \frac{1}{t}$ függvény monoton növekszik a $\left(0, \frac{1}{3}\right|$ intervallumban, és a $\varphi_1(t)$ függvény monoton csökken. Ezért az $\frac{\omega_1(t)}{t} = \frac{\varphi_1(t)}{t \ln \frac{1}{t}}$ függvény monoton csökken $\left(0, \frac{1}{3}\right]$-ban, azaz

$$\frac{\omega_1(t_1)}{t_1} > \frac{\omega_1(t_2)}{t_2}, \qquad \left(0 < t_1 < t_2 \leqq \frac{1}{3}\right). \tag{5.21}$$

Felhasználva (5. 21)-et, azt kapjuk, hogy

$$\alpha\,\omega_1(t) = \alpha t \frac{\omega_1(t)}{t} < \alpha t \frac{\omega_1(\alpha t)}{\alpha t} = \omega_1(\alpha t),$$

érvényes tehát az (5. 20) egyenlőtlenség.

Minthogy $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = +\infty$, tudunk konstruálni olyan csökkenő $\{\varepsilon_n\}$ sorozatot, amelyre

$$1 \geqq \varepsilon_n \geqq \frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n^3 \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = +\infty. \tag{5.22}$$

Legyen most

$$f_n(x) = \varepsilon_n^2 \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \varphi_n(x) \qquad (n > \varepsilon), \tag{5.23}$$

ahol $\varphi_n(x)$ az 1. lemmában definiált Kolmogorov-féle függvény. Világos, hogy $f_n(x)$ a $[0, 2\pi]$ szakaszon korlátos variációjú és minden n-re és x-re

$$f_n(x) \geqq 0, \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 2\varepsilon_n^2 \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) = 0. \tag{5.24}$$

(5. 23) alapján, valamint az 1. lemmához fűzött megjegyzés értelmében (l. (3. 14), (3. 16))

$$(5.25)\qquad \max_{m_n^{(n)}\geqq p\geqq m_1^{(n)}} |S_p(x, f_n)| \geqq \varepsilon_n^3 \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\ln n - 2$$

minden $x\in[0, 2\pi]$-re, kivéve egy $O(\varepsilon_n)$-méretű halmazt ($m_1^{(n)}, m_2^{(n)},\ldots, m_n^{(n)}$, az 1. lemmában bevezetett egész számokból álló sorozat). Felhasználva (5. 22)-t és (5. 25)-öt, azt kapjuk, hogy

$$(5.26)\qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}_x E\{ \max_{m_n^{(n)}\geqq p\geqq m_1^{(n)}} |S_p(x, f_n)| \geqq M_n\} = 2\pi,$$

ahol

$$(5.27)\qquad \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty}\left[\varepsilon_n^3\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\ln n - 2\right] = \infty.$$

Legyen

$$(5.28)\qquad D_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left[A_k + \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}, A_{k+1} - \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}\right],$$

ahol $A_k = \frac{4\pi}{2n+1}k$. (5. 22)-ből, valamint (5. 28)-ból következik, hogy

$$(5.29)\qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} D_n = 2\pi.$$

Legyen $x_0 \in \left[A_{k_0} + \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}, A_{k_0+1} - \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{n}\right]$. Világos, hogy

$$(5.30)\qquad \frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x_0+t) - f_n(x_0)|\,dt = 0,$$

midőn $0 < |u| < \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}$ (l. (5. 22)-t, valamint a $\varphi_n(x)$ függvénynek az 1. lemmában adott definícióját). Ha most $\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n} \leqq |u| \leqq \frac{1}{n}$, akkor (5. 28)-ból és (5. 20)-ból következik

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x_0+t) - f_n(x_0)|\,dt\right| = \left|\frac{1}{u}\int_0^u f_n(x_0+t)\,dt\right| \leqq \frac{1}{|u|}\cdot\frac{2}{n}\varepsilon_n^2\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \leqq$$

$$(5.31)\qquad \leqq 4\varepsilon_n\sqrt{\varepsilon_n}\cdot\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \leqq 8\varepsilon_n\omega_1\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}\right) \leqq 8\varepsilon_n\omega\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{2n}\right) \leqq 8\varepsilon_n\omega(u).$$

Hasonlóképpen, ha $\frac{k}{n} \leqq |u| \leqq \frac{k+1}{n}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x_0+t)-f_n(x_0)|\,dt\right| = \left|\frac{1}{u}\int_0^u f_n(x_0+t)\,dt\right| \leqq \frac{1}{|u|}\cdot\frac{2(k+1)}{n}\cdot\varepsilon_n^2\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \leqq$$

(5.32)
$$\leqq \frac{2(k+1)}{k}\varepsilon_n^2\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \leqq 4\varepsilon_n\omega\left(\frac{1}{n}\right) \leqq 4\varepsilon_n\omega(u).$$

(5.30)—(5.32) alapján nyerjük, hogy minden $x\in D_n$-re érvényes az

(5.33)
$$\left|\frac{1}{u}\int_0^u |f_n(x+t)-f_n(x)|\,dt\right| \leqq 8\varepsilon_n\omega(u), \qquad \left(|u| \leqq \frac{1}{3}\right)$$

egyenlőtlenség. Legyen

(5.34)
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x).$$

Megmutatjuk, hogy ha az $\{n_k\}$ sorozatot alkalmas módon választjuk, akkor $f(x)$ a keresett függvény.

Legyenek a $4=n_1<n_2<\cdots<n_k$ számok már megválasztva. Az n_{k+1} számot oly nagyra választjuk, hogy teljesüljenek a következő feltételek:

(5.35)
$$n_k < n_{k+1}, \quad \varepsilon_{n_{k+1}} < \frac{1}{2^{k+1}},$$

(5.36)
$$\max_{1\leqq i\leqq k}\{\max_{x\in[0,2\pi]}[\max_{0\leqq p<\infty}|S_p(x, f_{n_i})|]\} \leqq \frac{M_{n_{k+1}}}{2k},$$

(5.37)
$$\int_0^{2\pi} f_{n_{k+1}}(x)\,dx \leqq \frac{1}{2^k\cdot m_{n_k}^{(n_k)}},$$

(5.38)
$$m_1^{(n_{k+1})} > m_{n_k}^{(n_k)}$$

(5.39)
$$mD_{n_{k+1}} > 2\pi - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Ez nyilván lehetséges (5.22), (5.24) és (5.29) alapján, valamint a korlátos variációjú $f_n(x)$ függvény Fourier-sora részletösszegeinek egyenletesen korlátos volta miatt (l. [40], 47. old.).

Minthogy $\int_0^{2\pi}\varphi_n(x)\,dx=2$, ezért (5.23), (5.34), (5.35) alapján, valamint a B tételből következik, hogy az $f(x)$ függvénynek a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt van értelme, és hogy $f(x)\in L(0, 2\pi)$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ Fourier-sora $[0, 2\pi]$-ben majdnem mindenütt divergál. Legyen

$$(5.40) \qquad E_n = \underset{x}{E}\{\max_{m_n^{(n)} \geqq p \geqq m_1^{(n)}} |S_p(x, f_n)| \geqq M_n\}.$$

Legyen $E = \overline{\lim_{n_k \to \infty}} E_{n_k}$. Világos, hogy $\operatorname{mes} E = 2\pi$ (l. (5.26)). Ha $x_0 \in E$, akkor $x_0 \in E_{n_k}$ végtelen sok n_{k_j}-re. Tekintsük az

$$(5.41) \qquad S_i(x_0, f) = \sum_{p=1}^{k_j - 1} S_i(x_0, f_{n_p}) + S_i(x_0, f_{n_{k_j}}) + \sum_{p=k_j+1}^{\infty} S_i(x_0, f_{n_p})$$

részletösszegeket, ahol k_j olyan, hogy

$$m_{(n_{k_j-1})}^{(n_{k_j-1})} < i \leqq m_{(n_{k_j})}^{(n_{k_j})}.$$

(5.36) alapján

$$(5.42) \qquad \left|\sum_{p=1}^{k_j-1} S_i(x_0, f_{n_p})\right| \leqq \frac{M_{n_{k_j}}}{2}$$

minden i-re. De minthogy $x_0 \in E_{n_{k_j}}$, azért (5.40) alaján van olyan $i_{k_j} = i(x_0, n_{k_j})$ index, hogy

$$(5.43) \qquad |S_{i_{k_j}}(x_0, f_{n_{k_j}})| \geqq M_{n_{k_j}}$$

legyen. Megjegyezzük, hogy

$$(5.44) \qquad m_1^{(n_{k_j})} \leqq i_{k_j} \leqq m_{n_{k_j}}^{(n_{k+1})}.$$

Ismeretes, hogy

$$|S_p(x, \psi)| \leqq 4p \int_0^{2\pi} |\psi(x)|\, dx.$$

Ennélfogva (5.37), (5.38) és (5.44) miatt

$$(5.45) \qquad \left|\sum_{p=k_j+1}^{\infty} S_{i_{k_j}}(x_0, f_{n_p})\right| \leqq 4 i_{k_j} \sum_{p=k_j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1} \cdot m_{n_{p-1}}^{(n_{p-1})}} \leqq 4 \sum_{p=k_j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} \cdot \frac{m_{(n_{k_j})}^{(n_{k_j})}}{m_{n_{p-1}}^{(n_{p-1})}} \leqq 4.$$

Egybevetve (5.41)—(5.43)-at és (5.45)-öt, a

$$|S_{i_{k_j}}(x_0, f)| \geqq \frac{M_{n_{k_j}}}{2} - 4$$

becslést nyerjük, vagyis (5.27) alapján

$$(5.46) \qquad \overline{\lim_{i \to \infty}} |S_i(x_0, f)| = +\infty \qquad (x_0 \in E).$$

Az (5.46) egyenlőség azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sora E-n, vagyis $[0, 2\pi]$-ben majdnem mindenütt divergál.

Most megmutatjuk, hogy az $f(x)$ függvény eleget tesz az (5. 18) feltételnek is. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszés szerinti pozitív szám. Világos, hogy található olyan p, amely kielégíti az $\frac{1}{2^p} < \varepsilon$ egyenlőtlenséget. Legyen most $D_\varepsilon = \prod_{k=p+1}^{\infty} D_{n_k}$. Könnyen beláthatjuk, hogy $\operatorname{mes} D_\varepsilon \geqq 2\pi - \frac{1}{2^p} > 2\pi - \varepsilon$. (L. (5. 39)). Az $f_{n_1}(x)$, $f_{n_2}(x), \ldots, f_{n_k}(x)$ függvényeknek véges sok szakadási pontjuk van $[0, 2\pi]$-ben (l. az f_n és φ_n függvények definícióját). Ennélfogva a szakadási pontokat befedhetjük véges sok szakasszal, amelyek hosszúságának összege ε-nál kisebb. A megmaradó nyilt B_ε halmaz véges számú intervallumból áll, amelyek mindegyikén az $f_{n_k}(k = 1, \ldots, p)$ függvények állandó értékűek. Legyen $A_\varepsilon = D_\varepsilon \cdot B_\varepsilon$. Világos, hogy $\operatorname{mes} A_\varepsilon > 2\pi - 2\varepsilon$. Legyen $x_0 \in A_\varepsilon$. Megmutatjuk, hogy az x_0 pontban teljesül az (5. 18) feltétel. Mivel

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_{n_k}(x) + \sum_{k=p+1}^{\infty} f_{n_k}(x) = F_1(x) + F_2(x), \tag{5. 47}$$

(5. 33), (5. 35) alapján és $x_0 \in D_\varepsilon$ következtében minden u-ra érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u |F_2(x_0+t) - F_2(x_0)|\, dt \right| \leqq \sum_{k=p+1}^{\infty} \left| \frac{1}{u} \int_0^u |f_{n_k}(x_0+t) - f_{n_k}(x_0)|\, dt \right| \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=p+1}^{\infty} 8\varepsilon_{n_k} \omega(u) \leqq 4\omega(u). \tag{5. 48}$$

De minthogy $x_0 \in B_\varepsilon$, azért elegendő kis $\delta > 0$-ra

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u |F_1(x_0+t) - F_1(x_0)|\, dt \right| \leqq \sum_{k=1}^{p} \left| \frac{1}{u} \int_0^u |f_{n_k}(x_0+t) - f_{n_k}(x_0)|\, dt \right| = 0 <$$
$$< 4\omega(u), \tag{5. 49}$$

hacsak $0 < |u| \leqq \delta$. Így (5. 47)—(5. 49) alapján

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt \right| \leqq 8\omega(u) \qquad (|u| \leqq \delta) \tag{5. 50}$$

minden $x_0 \in A_\varepsilon$-ra. (5. 50)-ből következik, hogy van olyan véges $C(x_0)$ szám, amelynek a következő tulajdonsága van:

$$\left| \frac{1}{u} \int_0^u |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt \right| \leqq C(x_0)\omega(u), \tag{5.51}$$

hacsak $u \in (0, 2\pi]$ és $x_0 \in A_\varepsilon$, vagyis az x_0 pontban érvényes (5. 18). De minthogy ε tetszés szerinti pozitív szám volt, és

$$\text{mes } A_\varepsilon > 2\pi - \varepsilon,$$

ez egyúttal azt jelenti, hogy az (5. 51) egyenlőtlenség majdnem minden $x_0 \in [0, 2\pi]$-re érvényes, és ezzel a 14. tételt bebizonyítottuk.

6. §. H_1-osztálybeli divergens sorok

Elöljáróban bebizonyítjuk a következő lemmát.

3. LEMMA. *Minden egész $n \geqq 2$ számhoz lehet találni olyan $T_n(x)$ trigonometrikus polinomot, olyan $E_n \subset [0, 2\pi]$ halmazt és olyan $M_n > 0$ számot, hogy teljesüljenek a következő feltételek:*

1. $T_n(x) \geqq 0$, *ha* $x \in [0, 2\pi)$,
2. $\int_0^{2\pi} T_n(x)\, dx = \pi$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \text{mes } E_n = 2\pi$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \infty$,
4. *minden* $x_0 \in E_n$*-hez található olyan* p_{n, x_0} *index, hogy*

$$|S_{p_{n}, x_0}(x_0, T_n)| \geqq M_n$$

legyen, ahol $S_k(x, T_n)$ a $T_n(x)$ polinom Fourier-sorának k-adik részletösszege (l. [8], 70—72.).

Bizonyítás: Legyen $A_k = \frac{4\pi}{2n+1} k$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n$. Adott n-hez könnyen szerkeszthetünk olyan $n+1$ számból álló $m_0 < m_1 < \cdots < m_n$ sorozatot, hogy

$$\text{(6. 1)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad m_0 \geqq n^4, \\ &\text{b)} \quad m_{k+1} > 2m_k, \\ &\text{c)} \quad 2m_k + 1 = \lambda_k(2n+1) \end{aligned}$$

legyen, ahol λ_k egész szám. Legyen

$$\text{(6. 2)} \qquad T_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} K_{m_i}(x - A_i),$$

ahol $K_i(t)$ a Fejér-féle mag, más szóval

$$\text{(6. 3)} \qquad K_i(t) = \frac{1}{2(i+1)} \left[\frac{\sin (i+1) \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{i} \frac{i+1-j}{i+1} \cos jt$$

(l. [40], 45.). (6. 2)-ből és (6.3)-ból következik, hogy $T_n(x)$ olyan m_n-edrendű trigonometrikus polinom, amely kielégíti a 3. lemma 1. és 2. feltételeit. Világos, hogy

$$S_{m_k}(x, T_n)=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i)+\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{m_k}\frac{m_i+1-j}{m_i+1}\cos j(x-A_i)\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i)+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{m_k}\frac{(m_k+1-j)+m_i-m_k}{m_i+1}\cos j(x-A_i)\right\}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i)+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\frac{m_k+1}{m_i+1}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{m_k+1-j}{m_k+1}\cos j(x-A_i)\right\}+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}\sum_{j=1}^{m_k}\cos j(x-A_i)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i)+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\frac{m_k+1}{m_i+1}\left[K_{m_k}(x-A_i)-\frac{1}{2}\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}\left[D_{m_k}(x-A_i)-\frac{1}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{k} K_{m_i}(x-A_i)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_k+1}{m_i+1}K_{m_k}(x-A_i)+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}D_{m_k}(x-A_i)=\sum\nolimits_{k,1}+\sum\nolimits_{k,2}+\sum\nolimits_{k,3},$$

mert

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{m_k+1}{m_i+1}=\frac{1}{2}\frac{m_i-m_k}{m_i+1}. \tag{6. 4}$$

Legyen most $\Delta_k=(A_k+n^{-2}, A_{k+1}-n^{-2})$ $(k=0, 1, \ldots (n-1))$ egymást nem metsző intervallumok rendszere. Becsüljük meg $\sum_{k,i}$-t $(i=1, 2, 3)$, ha $x\in\Delta_k$. Minthogy $K_i(t)=O\left(\frac{1}{it^2}\right)$ (l. [40], 48.), azért (6. 1) alapján, ha $x\in\Delta_k$ és $i\leqq k$:

$$K_{m_i}(x-A_i)=O\left(\frac{1}{m_i(x-A_i)^2}\right)=O\left(\frac{n^4}{m_i}\right)=O(1).$$

Ezért

$$\sum\nolimits_{k,1}=O(1). \tag{6. 5}$$

Hasonlóképpen, ha $x \in \Delta_k$:

$$\sum\nolimits_{k,2} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_k+1}{m_i+1} K_{m_k}(x-A_i) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_k+1}{m_i+1} O\left(\frac{1}{m_k(x-A_i)^2}\right) =$$

$$(6.6) \qquad = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} O\left(\frac{n^4}{m_i+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=k+1}^{n} O(1) = O(1).$$

(6.4)—(6.6) alapján kapjuk, hogy

$$(6.7) \qquad |S_{m_k}(x, T_n)| > |\sum\nolimits_{k,3}| - O(1), \qquad (x \in \Delta_k).$$

(6.1)-ből pedig:

$$\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(x-A_i) = \sin\left[\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(x - A_{k+1}) + \left(m_k + \frac{1}{2}\right)\frac{k+1-i}{2n+1} 4\pi\right] =$$

$$= \sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(x - A_{k+1}).$$

Ennélfogva

$$(6.8) \quad \sum\nolimits_{k,3} = \frac{1}{n+1} \sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(A_{k+1} - x) \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i - m_k}{m_i+1} \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(A_i - x)}.$$

Legyen most $k < n - \sqrt{n}$. Akkor, ha $x \in \Delta_k$, (6.1) alapján

$$\sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i - m_k}{m_i+1} \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(A_i-x)} \geqq \sum_{i=k+1}^{n} \frac{m_i - \frac{m_i-1}{2}}{m_i+1} \frac{1}{A_i - x} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{A_i - A_k} = \frac{2n+1}{8\pi} \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{i-k} = \frac{2n+1}{8\pi} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{i} \geqq \frac{2n+1}{8\pi} \ln(n-k) \geqq$$

$$(6.9) \qquad \geqq \frac{2n+1}{8\pi} \ln \sqrt{n} = \frac{2n+1}{16\pi} \ln n$$

következik. Ennélfogva $k < n - \sqrt{n}$-re és $x \in \Delta_k$-ra

$$|S_{m_k}(x, T_n)| \geqq \frac{(2n+1)}{16\pi} \cdot \frac{\ln n}{n+1} \left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)(A_{k+1} - x)\right| - O(1) \geqq$$

$$(6.10) \qquad \geqq \frac{\ln n}{16\pi} \left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| - O(1)$$

(l. (6.1) c) pontját). Most definiáljuk a következő halmazt:

$$(6.11) \qquad E_n = \sum_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \left\{ \Delta_k \cdot \underset{x}{E}\left[\left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| > \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right]\right\}.$$

(6. 10)-ből és (6. 11)-ből következik, hogy

$$|S_{m_k}(x_0, T_n)| \geqq \frac{\sqrt{\ln n}}{16\pi} - O(1) \geqq \frac{\sqrt{\ln n}}{16\pi} - C = M_n,$$

hacsak

$$x_0 \in \Delta_k \cdot \underset{x}{E}\left[\left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| > \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right] \subset E_n,$$

ahol C valamilyen n-től független állandó.

Megmutatjuk, hogy $\operatorname{mes} E_n \to 2\pi$. Valóban,

$$\operatorname{mes}\left\{\sum_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \Delta_k\right\} = \frac{4\pi}{2n+1}[n-\sqrt{n}] - \frac{2}{n^2}[n-\sqrt{n}] \to 2\pi.$$

Az E_n halmazt a $\sum\limits_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \Delta_k$ halmazból úgy kapjuk, hogy mindegyik Δ_k-ból $(k = 0, 1, \ldots, [n-\sqrt{n}])$ kizárjuk azokat az x pontokat, amelyekben

$$\left|\sin\left(m_k + \frac{1}{2}\right)x\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\ln n}}. \tag{6. 12}$$

De $m_k \geqq n^4$ (l. (6. 1)) és a Δ_k szakasz hosszúsága $\frac{4\pi}{2n+1} - \frac{2}{n^2}$. Ennélfogva annak a halmaznak a mértéke, amelyet kizártunk $\sum\limits_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} \Delta_k$-ból,

$$\sum_{k=0}^{[n-\sqrt{n}]} O\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$$

nagyságrendű, tehát nullához tart, midőn $n \to \infty$. Ennélfogva $\operatorname{mes} E_n \to 2\pi$. És minthogy $M_n \to \infty$, ezért a 3. és 4. követelmények is teljesülnek, s így a 3. lemmát teljesen bebizonyítottuk.

15. TÉTEL (HARDY, ROGOSINSKI, SUNOUCHI). *Van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, hogy $\bar{f}(x) \in L(0, 2\pi)$ legyen és az $f(x)$ és $\bar{f}(x)$ függvények Fourier-sorai a $[0, 2\pi]$ szakaszon majdnem mindenütt divergáljanak* (l. [8], 72. és [36]).

Bizonyítás. Minthogy $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \infty$, ahol M_n a 3. lemmából való, azért az $\{M_n\}$ sorozatból ki lehet választani olyan $\{M_{n_k}\}$ részsorozatot, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} < \infty \tag{6. 13}$$

legyen. Tekintsük a $T_{n_k}(x)$ polinomok sorozatát. Írjuk fel a $T_{n_k}(x)$ valós polinomot exponenciális alakban:

$$(6.14)\qquad T_{n_k}(x)=\sum_{l=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} c_l^{(k)} e^{ilx} \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Válasszuk meg a ν_k egész számokat úgy, hogy fennálljanak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\nu_1>m_{n_1},\quad \nu_2>\nu_1+m_{n_1}+m_{n_2},\ldots,\quad \nu_k>\nu_{k-1}+m_{n_{k-1}}+m_{n_k},\ldots$$

A ν_k számok ilyen megválasztása esetén a

$$(6.15)\qquad P_{n_k}(x)=\frac{e^{i\nu_k x}}{\sqrt{M_{n_k}}}T_{n_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\sum_{l=-m_{n_k}}^{m_{n_k}} c_l^{(k)} e^{i(l+\nu_k)x}$$

polinomoknak nincsenek egyforma tagjaik. Írjuk fel formálisan a következő sort:

$$(6.16)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x).$$

Minthogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}|P_{n_k}(x)|\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}}\int_0^{2\pi}|T_{n_k}(x)|\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{M_{n_k}}}<\infty$$

(l. 3. lemma, (6. 13)—(6. 15)), ezért B. Levi tétele szerint (B tétel) a (6. 16) sor majdnem mindenütt konvergál egy komplex $F(x)=f_1(x)+if_2(x)$ függvényhez. Megmutatjuk, hogy a valós $f_1(x)$ függvény a keresett függvény. A (6. 16) sor tagonként integrálható e^{-ikx}-szel való szorzás után is és így az $F(x)$ függvény komplex Fourier-sorát (6. 16)-ból úgy kapjuk, hogy a $P_{n_k}(x)$ polinomokat e^{ikx} növekvő rendjében csoportosítjuk át. Ennélfogva

$$(6.17)\qquad F(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{ikx},\quad c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(x)e^{-ikx}\,dx \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Bebizonyítjuk, hogy a (6. 17) sor majdnem mindenütt divergál. Legyen $E=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,E_{n_k}$. Világos, hogy mes $E=2\pi$ (l. 3. lemma). Legyen $x_0\in E$. Ekkor az x_0 pont végtelen sok E_{n_k}-ban benne van, vagyis $x_0\in E_{n_{k_s}}$ $(s=1,2,\ldots)$. $P_{n_{k_s}}(x)$ tagjai a (6. 17) sorban az e^{ikx} exponenciális tagok növekedő rendjében fognak előfordulni. Ezért a 3. lemma szerint az x_0 ponthoz található végtelen sok $\alpha_s<\beta_s$ számpár, amelyekre

$$(6.18)\qquad \left|\sum_{\nu=\alpha_s}^{\beta_s} c_\nu e^{i\nu x_0}\right|\geqq\sqrt{M_{n_{k_s}}}.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy a Cauchy-féle konvergenciakritérium nem teljesül, vagyis a (6. 17) sor az x_0 pontban divergál. Ezen túlmenően (6. 18)-ból következik, hogy majdnem minden $x_0 \in [0, 2\pi]$ pontban

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx_0} \right| = +\infty. \tag{6. 19}$$

Legyen most $c_k = a_k - i\, b_k\, (k = 1, 2, \ldots)$, ahol a_k és b_k valós számok. A (6. 17) sort írhatjuk a következő alakban is:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + i \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx). \tag{6. 20}$$

Ugyanúgy, mint fent, a (6. 16) sort $\cos kx$-szel megszorozva és integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} F(x) \cos kx\, dx = \int_0^{2\pi} [f_1(x) + i f_2(x)] \cos kx\, dx = (a_k - i\, b_k)\pi.$$

Hasonlóképpen

$$\int_0^{2\pi} F(x) \sin kx\, dx = \int_0^{2\pi} [f_1(x) + i f_2(x)] \sin kx\, dx = (a_k - i\, b_k)\pi i.$$

Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x) \cos kx\, dx = a_k, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x) \sin kx\, dx = b_k,$$

és

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x) \cos kx\, dx = -b_k, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(x) \sin kx\, dx = a_k,$$

vagyis a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ sor az $f_1(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény Fourier-sora, a $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$ sor pedig az $f_2(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény Fourier-sora. A második sor azonban az első konjugált sora, ezért $\bar{f}_1(x) = f_2(x)$ majdnem minden $x \in [0, 2\pi]$-re. Ily módon

$$F(x) = f_1(x) + i\bar{f}_1(x).$$

Kiindulva (6. 19)-ből, a (6. 20) egyenlőségből, valamint Kuttner tételének (H tétel) következményéből, meggyőződhetünk arról, hogy a (6. 20) alatti Fourier-sorok, melyek egymásnak konjugáltjai, majdnem mindenütt divergálnak a $[0, 2\pi]$ szakaszon. Ennélfogva $f(x)$ függvény gyanánt vehetjük az $f_1(x)$ függvényt. Ezzel a 15. tételt teljesen bebizonyítottuk.

Következmény. *A* (6. 17) *sorban helyettesítsük az* e^{ikx} *függvényt az*

$$r^k e^{ikx} = (re^{ix})^k = z^k$$

függvénnyel, ahol $z = re^{ix}$ *és* $0 \leqq r < 1$. *Ily módon kapunk egy*

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \qquad (|z| < 1) \tag{6. 21}$$

analitikus függvényt, amely a H_1*-osztályhoz tartozik és amelynél a* (6. 21) *sor majdnem mindenütt divergál a* $|z| = 1$ *egységkör peremén.*

A 15. tétel alapján csupán azt kell megmutatnunk, hogy $\Phi(z) \in H_1$, vagyis

$$\int_0^{\pi} |\Phi(r \cdot e^{ix})| \, dx \leqq C < \infty \qquad (0 \leqq r < 1),$$

ahol C r-től független állandó. Minthogy $F(x) = f_1(x) + i\bar{f}_1(x) \in L(0, 2\pi)$, azért

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k (c_k e^{ikx}) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \\ &+ i \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \sin kx - b_k \cos kx) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1(t) + i\bar{f}_1(t)] \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - x) + r^2} dt, \end{aligned} \tag{6. 22}$$

ahol $0 \leqq r < 1$ (l. [40], 51.). (6. 22), valamint Fubini tétele alapján (l. [28], 296—302.) azonnal következik

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(re^{ix})| \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \{f_1(t) + i\bar{f}_1(t)\} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - x) + r^2} dt \right| dx \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_1(t) + i\bar{f}_1(t)| \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - x) + r^2} dt \, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} |f_1(t) + i\bar{f}_1(t)| \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - x) + r^2} dx \right\} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} |f_1(t) + i\bar{f}_1(t)| \, dt = C < \infty.$$

Megjegyzés. Megpróbáljuk kideríteni azokat az okokat, amelyek miatt $f(x) \in L(0, 2\pi)$ és $\bar{f}(x) \in L(0, 2\pi)$.

A 3. lemma szerint, úgy mint a 8. tételben konstruálhatnánk egy

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} T_{n_k}(x) \tag{6.23}$$

függvényt, amely Lebesgue szerint integrálható és amelynek Fourier-sora majdnem mindenütt divergál $[0, 2\pi]$-ben. Ebben az esetben a $\bar{\psi}(x)$ függvény nem lenne Lebesgue szerint integrálható, és ennélfogva $\psi(x)$ Fourier-sorának konjugált sora nem lenne Fourier-sor.

Megmutatjuk, hogy $\bar{\psi}(x) \notin L(0, 2\pi)$. Tegyük fel az ellenkezőt, hogy ti. $\bar{\psi}(x) \in L(0, 2\pi)$. Azonban $\psi(x) \geqq 0$, ennélfogva az E tételből következik, hogy

$$\psi(x) \ln^+ \psi(x) \in L(0, 2\pi). \tag{6.24}$$

Világos, hogy $\frac{\pi}{2n} \leqq x \leqq \frac{\pi}{n}$-re

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \right]^2 \geqq C n, \tag{6.25}$$

ahol C pozitív állandó. (6.24) és (6.25)-ből következik

$$\infty > \int_0^{2\pi} \psi(x) \ln^+ \psi(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} T_{n_k}(x) \ln^+ \psi(x)\, dx \geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \int_0^{2\pi} T_{n_k}(x) \ln^+ \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}\, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{1}{n_k+1} \int_0^{2\pi} K_{m_i}(x - A_i) \ln^+ \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}}\, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{1}{n_k+1} \int_{A_i + \frac{\pi}{2m_i}}^{A_i + \frac{\pi}{m_i}} K_{m_i}(x - A_i) \ln^+ \frac{K_{m_i}(x - A_i)}{(n_k+1)\sqrt{M_{n_k}}}\, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_{n_k}}} \sum_{i=0}^{n_k} \frac{1}{n_k+1} \int_{A_i + \frac{\pi}{2m_i}}^{A_i + \frac{\pi}{m_i}} C m_i \ln \frac{C m_i}{(n_k+1)\sqrt{M_{n_k}}}\, dx \geqq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln n_k}{\sqrt{M_{n_k}}} = \infty,$$

mert $m_i \geqq n_k^4$ és $M_{n_k} = \frac{\sqrt{\ln n_k}}{16\pi} - C_2$. Így ellentmondáshoz jutnánk, tehát $\overline{\psi}(x) \notin L(0, 2\pi)$.

Az $f_1(x)$ függvényt a (23) sorból úgy kaptuk (l. a 15. tétel bizonyítását), hogy mindegyik összeadandót szoroztuk $\cos \nu_k x$-szel, ahol a ν_k-kat speciális módon választottuk. Így az új sor tagjai a következő alakúak:

$$\cos \nu_k x \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}} \qquad (\nu_k > m_{n_k}), \tag{6.26}$$

vagyis már nem nem-negatív függvények. Az A_i pont környezetében a (6. 26) kifejezés közelítően úgy viselkedik, mint

$$\cos \nu_k x \frac{1}{(n_k+1)\sqrt{M_{n_k}}} K_{m_i}(x - A_i),$$

ahol m_i néhányszor kisebb, mint m_{n_k}, midőn $i < n_k$. De minthogy $\nu_k > m_{n_k}$, ezért ez azt jelenti, hogy az A_i pont környezetében a (6. 26) függvény mintegy „fésűként" viselkedik, amelynek magas fogai felfelé és lefelé váltakoznak. Szemmelláthatóan a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos \nu_k x \frac{T_{n_k}(x)}{\sqrt{M_{n_k}}} = \overline{f}(x)$$

sor tagjainak ez a viselkedése biztosítja az $\overline{f}(x)$ függvény integrálhatóságát.

7. §. Fourier-Lebesgue-sorok konvergencia- és divergenciahalmazai

A konvergencia- és divergenciahalmazok definícióját a **2.** §-ban adtuk meg. Most bebizonyítjuk a 4. lemmát, amelyre szükségünk lesz Zeller tételének a bizonyításánál (l. [39]).

4. LEMMA. *Legyen* $[a, b] \subset (0, 2\pi)$, $[c, d] \subset (a, b)$, *legyen továbbá* $\varepsilon > 0$ *tetszőlegesen kicsi, N pedig tetszőlegesen nagy szám. Ekkor van olyan*

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{k=p}^{q} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{7.1}$$

trigonometrikus polinom, amelyre

$$q \geqq p \geqq N, \quad \int_0^{2\pi} |T_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon, \tag{7.2}$$

a részletösszegek pedig eleget tesznek a

$$|S_k(x, T_\varepsilon)| < \varepsilon \tag{7.3}$$

feltételnek minden k-ra és $x \in [0, 2\pi] - [a, b]$-re; *ha pedig* $x \in [c, d]$, *akkor található olyan* k_x *index, hogy*

$$|S_{k_x}(x, T_\varepsilon)| > \frac{1}{\varepsilon} \tag{7.4}$$

legyen.

Bizonyítás. A 10. tétel értelmében van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora mindenütt nem-korlátosan divergál. Legyen

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in [c, d], \\ 0, & \text{ha } x \in [0, 2\pi] - [c, d]. \end{cases}$$

Riemann lokalizációs tétele szerint $f_1(x)$ Fourier-sora nem-korlátosan divergál (c, d)-ben és konvergál $[0, 2\pi] - [c, d]$-ben. Ha $f_1(x)$ Fourier-sora nem-korlátosan divergál a c, d pontokban is, akkor legyen $\varphi(x) = f_1(x)$. Ha pedig $f_1(x)$ Fourier-sora a c pontban (és esetleg a d pontban is) nem volna nem-korlátosan divergáló, akkor legyen $\varphi(x) = f_1(x) + \tau(x)$, ahol $\tau(x)$ olyan folytonos függvény, melynek Fourier-sora nem-korlátosan divergál az $x \equiv c \pmod{2\pi}$ pontokban (ha esetleg szükséges, az $x \equiv d \pmod{2\pi}$ pontokban is), a többi pontban pedig konvergál, emellett $\tau(x) = 0$, ha $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$ (l. az 5. tétel következményét).

A $\varphi(x)$ függvény Fourier-sora $[c, d]$-ben mindig nem-korlátosan divergál és $\varphi(x) = 0$, ha $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$. Legyen

$$\delta = \min\{1, a, c-a, b-d\}, \quad M = \frac{1}{\varepsilon} + 3\varepsilon, \quad \|\varphi\| = \int_0^{2\pi} |\varphi(x)|\, dx,$$

$$\psi(x) = \frac{\delta\varepsilon\, \varphi(x)}{2^{10} N \|\varphi\|}.$$

Világos, hogy

$$\int_0^{2\pi} |\psi(x)|\, dx = \frac{\delta\varepsilon}{2^{10} N}. \tag{7.5}$$

Minthogy a $\psi(x)$ függvény Fourier-sora nem-korlátosan divergál a $[c, d]$ szakaszon, azért minden $x \in [c, d]$-re található olyan $n_x \geqq N$ index, hogy

$$|S_{n_x}(x, \psi)| > M \tag{7.6}$$

legyen. Azonban $S_{n_x}(t, \psi)$ trigonometrikus polinom, s ezért (7.6)-ból következik, hogy minden $x \in [c, d]$-re létezik az alábbi tulajdonságú $(x - \eta_x, x + \eta_x)$ környezet:

$$|S_{n_x}(t, \psi)| > M,$$

ha $t \in (x - \eta_x, x + \eta_x)$. Ily módon a $[c, d]$ szakaszt lefedhetjük intervallumok egy végtelen rendszerével, amelyből a Heine—Borel-tétel szerint kiválaszthatunk véges számú intervallumot, amelyek szintén lefedik $[c, d]$-t. Ennélfogva található olyan L szám, hogy

$$(7.7)\qquad |S_{n_x}(x, \psi)| > M,$$

ha $x \in [c, d]$, ahol $N \leqq n_x < L$. Azonban $\psi(x) \in L(0, 2\pi)$ és $\psi(x) = 0$, ha $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$. Ennélfogva található olyan folytonosan differenciálható, 2π-szerint periodikus $\alpha(x)$ függvény, amelyre

$$(7.8)\qquad \alpha(x) = 0, \quad \text{ha} \quad x \in [0, 2\pi] - [c, d], \quad \|\psi - \alpha\| < \frac{\delta\varepsilon}{2^{10}L}.$$

De minthogy $\int_0^{2\pi} \alpha'(x)\,dx = 0$, ezért az $\alpha'(x)$ függvényt tetszőleges pontossággal megközelíthetjük bizonyos $m \geqq L$ fokszámú $\beta(x)$ trigonometrikus polinommal, amelynek állandó tagja zérus. Legyen

$$(7.9)\qquad \max_{x \in [0, 2\pi]} |\alpha'(x) - \beta(x)| < \frac{\delta\varepsilon}{2^{10}L},$$

és legyen továbbá

$$\gamma(x) = \int_0^x \beta(t)\,dt = \sum_{k=0}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (m \geqq L),$$

ahol

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(x) \cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(x) \sin kx\,dx \ (k \geqq 1).$$

(7.9)-ből következik, hogy

$$(7.10)\qquad \max_{x \in [0, 2\pi]} |\alpha(x) - \gamma(x)| < \frac{\delta\varepsilon}{2^7 \cdot L}, \quad \|\alpha - \gamma\| < \frac{\delta\varepsilon}{2^4 \cdot L}.$$

Így tehát (l. (7.8) és (7.10))

$$(7.11)\qquad \|\psi - \gamma\| < \frac{\delta\varepsilon}{2^3 \cdot L},$$

és ezért (l. (7.5))

$$(7.12)\qquad \|\gamma\| < \frac{\delta\varepsilon}{2^2 N}.$$

A (7.9) és (7.10) egyenlőtlenségekből következik

$$(7.13)\qquad |\gamma(x)| < \frac{\delta\varepsilon}{2^7 L}, \quad |\gamma'(x)| = |\beta(x)| < \frac{\delta\varepsilon}{2^{10} L}, \quad \text{ha} \quad x \in [0, 2\pi] - [c, d],$$

mert hiszen $\alpha(x) = \alpha'(x) = 0$, midőn $x \in [0, 2\pi] - [c, d]$.

Legyen most

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{k=N}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Megmutatjuk, hogy ez a trigonometrikus polinom eleget tesz a 4. lemma minden követelményének. Valóban, (7. 12)-ből következik

$$\int_0^{2\pi} |T_\varepsilon(x)|\,dx = \int_0^{2\pi} \left|\gamma(x) - \sum_{k=0}^{N-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| dx \leqq$$

$$\leqq (2N+1)\int_0^{2\pi} |\gamma(x)|\,dx \leqq (2N+1)\frac{\delta\varepsilon}{2^2 N} < \varepsilon,$$

vagyis a 4. lemma (7. 2) feltétele teljesül.

Legyen $x \in [c, d]$. Akkor (7. 7), (7. 12) és (7. 11) alapján következik

$$|S_{n_x}(x, T_\varepsilon)| = \left| S_{n_x}(x, \gamma) - \sum_{k=0}^{N-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \geqq$$

$$\geqq |S_{n_x}(x, \psi)| - |S_{n_x}(x, \psi - \gamma)| - 2N\int_0^{2\pi} |\gamma(x)|\,dx \geqq$$

$$\geqq M - (2n_x + 1)\,\|\psi - \gamma\| - 2N\frac{\delta\varepsilon}{2^2 N} \geqq \frac{1}{\varepsilon} + 3\varepsilon - (2L+1)\frac{\delta\varepsilon}{2^3 L} - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{\varepsilon},$$

vagyis fennáll a (7. 4) egyenlőtlenség.

Minthogy $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| < 2^2\pi$ minden n-re és x-re, azért

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} D_n(t)\,dt\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos nt\right) dt\right| < \pi + 2^3\pi < 2^5 \tag{7. 14}$$
$$(0 \leqq |t_2 - t_1| \leqq 2\pi).$$

Tekintsünk egy $x \in [0, a] + [b, 2\pi]$ pontot és becsüljük meg az $S_n(x, T_\varepsilon)$ részletösszeget tetszőleges n-re. Világos, hogy

$$\begin{aligned} S_n(x, \gamma) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(t)\, D_n(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{2\pi+x-\delta} \gamma(t)\, D_n(t-x)\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{x+\delta}^{2\pi+x-\delta} = J_1(x) + J_2(x). \end{aligned} \tag{7. 15}$$

Parciálisan integrálva, továbbá (7. 13) és (7. 14) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |J_1(x)| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{x-\delta}^{x+\delta} \gamma(t)\, D_n(t-x)\,dt\right| = \left|\frac{1}{\pi}\gamma(t)\int_{x-\delta}^{t} D_n(u-x)\,du - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \gamma'(t)\left\{\int_{x-\delta}^{t} D_n(u-x)\,du\right\} dt\right| \leqq \frac{1}{\pi}\frac{\delta\varepsilon}{2^7 L}\cdot 2^6 + \frac{1}{\pi}\frac{\delta\varepsilon}{2^{10} L}\cdot 2^5 \cdot 2\pi < \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned} \tag{7. 16}$$

ha $x \in [0, a] + [b, 2\pi]$. Tekintsük most a $J_2(x)$ integrált. Azonnal látjuk, hogy

$$|J_2(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{x+\delta}^{2\pi+x-\delta} \gamma(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt\right| \leqq \tag{7. 17}$$

$$\leqq \frac{1}{\pi}\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\|\gamma\| \leqq \frac{1}{2\delta}\frac{\delta\varepsilon}{2^2 N} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

A (7. 15)—(7. 17) összefüggésekből következik, hogy $|S_n(x, \gamma)| < \frac{\varepsilon}{2}$ minden n-re és $x \in [0, a] + [b, 2\pi]$-re. De

$$T_\varepsilon(x) = \gamma(x) - \sum_{k=0}^{N-1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$\sum_{k=0}^{N-1}(|a_k| + |b_k|) \leqq 2N\int\limits_0^{2\pi}|\gamma(x)|\,dx \leqq 2N\frac{\delta\varepsilon}{2^2 N} \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így minden n-re és $x \in [0, a] + [b, 2\pi]$-re:

$$|S_n(x, T_\varepsilon)| \leqq |S_n(x, \gamma)| + \left|S_n\left(x, \sum_{k=0}^{N-1}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)\right)\right| < \varepsilon,$$

vagyis érvényes a (7. 3) egyenlőtlenség. Ezzel a 4. lemmát bebizonyítottuk, és most már rátérhetünk Zeller tételére.

16. TÉTEL (ZELLER [39]). *Legyen $E \subset [0, 2\pi)$ tetszőleges F_σ-típusú halmaz $[0, 2\pi)$-ben. Ekkor van olyan $f(x) \in L(0, 2\pi)$ függvény, amelynek Fourier-sora konvergál az E és nem-korlátosan divergál a $[0, 2\pi) - E = E_1$ halmazon.*

Bizonyítás. Ha $E_1 = [0, 2\pi)$, akkor a 16. tétel ekvivalens a 10. tétellel. Ennélfogva feltehetjük, hogy az E halmaz nem üres. Ezenkívül az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $0 \in E$. Ily módon az E_1 halmaz teljesen $[0, 2\pi]$ belsejében fekszik. Minthogy most E_1 G_δ-típusú a $(0, 2\pi)$ intervallumban, ezért E_1 legfeljebb megszámlálható sok nyilt C_i halmaz közös része, azaz $E_1 = \prod_{i=1}^{\infty} C_i$, ahol $C_i \subset (0, 2\pi)$. Legyen $G_1 = C_1$, $G_2 = C_1 C_2, \ldots,$ $G_n = C_1 C_2 \ldots C_n$, akkor azt kapjuk, hogy

$$E_1 = \prod_{i=1}^{\infty} G_i, \quad G_i \subset (0, 2\pi) \quad \text{és} \quad G_1 \supset G_2 \supset \ldots, \tag{7. 18}$$

ahol a G_i-k nyilt halmazok. De minden nyilt halmaz legfeljebb megszámlálható sok intervallum összege. Minden (α, β) intervallum előállítható megszámlálható sok olyan $[\alpha_i, \beta_i]$ szakasz összegeként úgy, hogy minden $x \in (\alpha, \beta)$ pont legfeljebb két $[\alpha_i, \beta_i]$ szakaszhoz tartozzék. Így tehát a G_i halmaz előállítható a következő két alakban:

$$G_i = \sum_{j=1}^{\infty} [a_j^{(i)}, b_j^{(i)}] = \sum_{j=1}^{\infty} [c_j^{(i)}, d_j^{(i)}], \tag{7.19}$$

ahol $[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}] \subset (a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$, és ha $x \in G_i$, akkor x legfeljebb két $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$ szakaszhoz tartozik (az i index rögzített). A (7.18) és (7.19) formulákból következik, hogy $x \in E_1$ akkor és csak akkor, ha végtelen sok $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$-hez és végtelen sok $[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}]$-hez tartozik. Rendezzük át az $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$ szakaszok sorozatát egyetlen $[a_k, b_k]$ sorozatba és hasonlóan a $\{[c_j^{(i)}, d_j^{(i)}]\}$ sorozatot is egyetlen $\{[c_k, d_k]\}$ sorozatba, úgyhogy $[c_k, d_k] \subset (a_k, b_k)$ legyen. Ekkor:

$$E_1 = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, [a_k, b_k] = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, [c_k, d_k],$$

vagyis

$$E_1 = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} [a_k, b_k] = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} [c_k, d_k]. \tag{7.20}$$

Vegyünk most két szakaszt: $[a_k, b_k]$-t és $[c_k, d_k]$-t és az $\varepsilon_k = 2^{-k}$ számot. Tegyük fel, hogy $i = 1, 2, \ldots (k-1)$-re már megkonstruáltuk a

$$T_i(x) = \sum_{n=p_i}^{q_i} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{7.21}$$

polinomot, amely eleget tesz a

$$p_i > q_{i-1}, \quad \int_0^{2\pi} |T_i(x)|\, dx < 2^{-i}, \tag{7.22}$$

feltételeknek, az $S_n(x, T_i)$ részletösszegekre pedig teljesül

$$|S_n(x, T_i)| < 2^{-i} \qquad (n = 1, 2, \ldots \text{ és } x \in [0, 2\pi] - [a_i, b_i]), \tag{7.23}$$

és ha $x \in [c_i, d_i]$, akkor található olyan $p_x^{(i)} \geqq p_i$ index, hogy

$$|S_{p_x^{(i)}}(x, T_i)| > 2^i \qquad (p_x^{(i)} \leqq q_i) \tag{7.24}$$

legyen. Tekintve, hogy $[c_k, d_k] \subset (a_k, b_k)$, ezért a 4. lemma alapján találhatunk olyan $T_k(x)$ polinomot, amely eleget tesz a (7.21)—(7.24) feltételeknek $i = k$-ra. Így a $T_k(x)$ polinomok sorozatát indukcióval minden k indexre definiáltuk. Legyen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x). \tag{7.25}$$

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ a keresett függvény.

A (7.22) egyenlőtlenségből, valamint B. Levi tételéből (B tétel) következik, hogy az $f(x)$ függvénynek van értelme és hogy $f(x) \in L(0, 2\pi)$. Továbbá

(7. 21), (7. 22) és (7. 25) alapján következik, hogy az $f(x)$ függvény Fourier-sorát a (7. 25) sorból egyszerűen úgy kapjuk, hogy a $T_k(x)$ polinomokat kifejtett alakban írjuk fel.

Legyen $x\in E_1$. (7. 20)-ból következik, hogy $x\in[c_{n_i}, d_{n_i}]$ $(i=1,2,\ldots)$. Ennélfogva (l. (7. 22), (7. 24) és (7. 25))

$$|S_{p_x^{(n_i)}}(x,f)-S_{q_{n_i-1}}(x,f)|=|S_{p_x^{(n_i)}}(x, T_{n_i})|>2^{n_i},$$

vagyis $f(x)$ Fourier-sora nem-korlátosan divergál tetszőleges $x\in E_1$ pontban.

Legyen most $x\in E$, tehát $x\notin E_1$. (7. 20)-ból következik, hogy x hozzátartozik minden $[0,2\pi]-[a_i, b_i]$ halmazhoz bizonyos $i\geqq i_x$-től kezdve. Ez pedig azt jelenti, hogy (l. (7. 23))

$$|S_n(x, T_i)|<\frac{1}{2^i} \tag{7.26}$$

minden n-re és $i\geqq i_x$-re. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges szám. Ekkor található olyan $N\geqq i_x$, hogy

$$\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.27}$$

Tekintsük az

$$S_{n+p}(x,f)-S_n(x,f)$$

különbséget, midőn $n\geqq N$ és $p\geqq 0$. Világos, hogy

$$\begin{aligned} S_{n+p}(x,f)-S_n(x,f)&=\sum_{k=1}^{N-1}[S_{n+p}(x, T_k)-S_n(x, T_k)]+\\ &+\sum_{k=N}^{\infty}S_{n+p}(x, T_k)-\sum_{k=N}^{\infty}S_n(x, T_k). \end{aligned} \tag{7.28}$$

(7. 26) és (7. 27) alapján, valamint $N\geqq i_x$-re való tekintettel

$$\sum_{k=N}^{\infty}|S_{n+p}(x, T_k)|\leqq\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2},\ \sum_{k=N}^{\infty}|S_n(x, T_k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ennélfogva (l. (7. 28)):

$$|S_{n+p}(x,f)-S_n(x,f)|<\varepsilon+\sum_{k=1}^{N-1}|S_{n+p}(x, T_k)-S_n(x, T_k)|. \tag{7.29}$$

Könnyen belátható, hogy találhatunk olyan N_1 számot, hogy

$$S_{n+p}(x, T_k)=S_n(x, T_k)=T_k(x),$$

ahol $0<k\leqq N-1, n\geqq N_1, p\geqq 0$. Így tehát adott $\varepsilon>0$-hoz találhatunk olyan $N_2=\max\{N, N_1\}$ számot, hogy

$$|S_{n+p}(x,f)-S_n(x,f)|<\varepsilon$$

legyen, ha $n\geqq N_2$ és $p\geqq 0$. Ennélfogva a Cauchy-féle kritérium alapján az $\{S_n(x,f)\}$ sorozat konvergál, ha $x\in E$. Ezzel a 16. tételt bebizonyítottuk.

Amint már megjegyeztük (l. 1. tételt és a 7. tétel következményét), trigonometrikus sorok (Fourier-sorok) konvergenciapontjainak halmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú, de nem szükségképpen F_σ-típusú. A 16. tétel végérvényesen megoldja a divergencia kérdését arra az esetre, amikor a Fourier-sor divergenciapontjai nem-korlátos divergenciapontok. Ily módon a 16. tétel a 2. tétel élesítése Fourier-sorok esetére, ha az E halmaz F_σ-típusú, és ha nem szükséges az E-n nulla felé való konvergenciát, E-n kívül pedig nem-korlátos divergenciát feltételezni.

Ami annak a trigonometrikus sornak a megszerkesztését illeti, amely adott F_σ-típusú (illetve $F_{\sigma\delta}$-típusú) $E\subset[0, 2\pi)$ halmazon nullához konvergál, és az $E_1=[0, 2\pi)-E$ halmazon divergál, ahhoz E-re vonatkozó kiegészítő feltételre van szükségünk. Tudniillik nem üres E_1 halmaz nem okvetlenül U-halmaz (az A halmazt U-halmaznak nevezzük, ha abból, hogy a trigonometrikus sor nullához konvergál $[0, 2\pi)-A$-n, valamennyi koefficiens eltűnése következik). Minden olyan halmazt, amely nem U-halmaz, M-halmaznak nevezünk.

Nyilvánvaló, hogy ha E_1 U-halmaz volna, akkor az E-n nullához konvergáló trigonometrikus sornak nullához kellene konvergálnia az E_1 halmazon is. Így tehát a mi $E_1=[0, 2\pi)-E$ halmazunk M-halmaz. Ebből többek között következik, hogy E_1 kontinuum számosságú (l. pl. N. K. BARI [2] munkáját).

Megjegyezzük, hogy az E_1-re bebizonyított szükséges feltétel nem okvetlenül elegendő is, minthogy M-halmaz nem szükségképpen $G_{\delta\sigma}$-típusú. Azonban még abban az esetben is, ha $G_{\delta\sigma}$-típusú halmaz volna, a kitűzött probléma még ekkor is messze lenne a megoldástól.

Még több, trigonometrikus sorok (Fourier-sorok) konvergencia- és divergenciahalmazaira vonatkozó kérdés megoldatlan. Néhányat felsorolunk közülük.

I. Található-e adott $F_{\sigma\delta}$-típusú E halmazhoz olyan trigonometrikus sor (Fourier-sor), amely E-n konvergál és $[0, 2\pi)-E$-n divergál? Ha ilyen sorok léteznek, akkor a 3. tétel értelmében szükségképpen van a $[0, 2\pi)-E$ halmazon olyan pont, amelyben a sor korlátosan divergál.

II. Ismeretes (l. a 4. tételhez fűzött megjegyzést), hogy trigonometrikus sorok (Fourier-sorok) korlátos divergenciájú pontjainak halmaza $G_{\delta\sigma}$-típusú. Kérdés, vajon tetszőleges $G_{\delta\sigma}$-típusú E halmazhoz található-e olyan trigonometrikus sor (Fourier-sor), amely E-n korlátosan divergál, és $[0, 2\pi)-E$-n konvergál?

Hogy ez a feladat milyen nehéz, azt a következő speciális eset is mutatja. Még ha $E=(\alpha, \beta)$, vagyis egy intervallumról van szó, akkor is tudnunk kellene olyan korlátos függvényt szerkeszteni, amelynek Fourier-sora pozitív mértékű halmazon divergál (l. a 12. tételt és a hozzáfűzött megjegyzést). Ez a kérdés azonban mindeddig megoldatlan.

III. Azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekben a trigonometrikus sor (Fourier-sor) $+\infty$-hez konvergál, $F_{\sigma\delta}$-típusú ([8], 271.). Kérdés, vajon tetszőleges $F_{\sigma\delta}$-típusú E halmazhoz szerkeszthető-e olyan trigonometrikus sor (Fourier-sor), amely csak az E-n konvergál $+\infty$ felé? Ennek a sornak a $[0, 2\pi) - E$ halmazon való viselkedésére vonatkozóan különböző követelményeket szabhatunk még ki, így pl. konvergenciát, $-\infty$-hez tartó konvergenciát, korlátos divergenciát, stb.

Világos, hogy ha Fourier-sorokról van szó, akkor szükségképpen mes $E = 0$, mert hiszen Fourier-sor nem konvergálhat $+\infty$-hez pozitív mértékű halmazon (amint ezt már a korábbiakból tudjuk).

Ennek a feladatnak a nehézségét bizonyítja az a tény, hogy mindeddig nem ismeretes az sem, van-e olyan trigonometrikus sor, amely $+\infty$-hez konvergál pozitív mértékű halmazon.

IV. Ismeretes, hogy trigonometrikus soroknál a konvergenciapontok halmaza $F_{\sigma\delta}$-típusú, azon pontok halmaza pedig, ahol a sor korlátosan divergál, $G_{\delta\sigma}$-típusú, továbbá azoknak a pontoknak a halmaza, ahol a sor $+\infty$-hez, vagy $-\infty$-hez konvergál, $F_{\sigma\delta}$-típusú. Legyenek E_1 és E_2 olyan $G_{\delta\sigma}$-típusú, E_3 és E_4 olyan $F_{\sigma\delta}$-típusú halmazok, amelyek egymást kölcsönösen nem metszik. Milyen feltételek mellett szerkeszthető olyan trigonometrikus sor, amely a $[0, 2\pi) - \sum_{i=1}^{4} E_i$ halmazon konvergál, E_1-en korlátosan divergál, E_3-on, ill. E_4-en $+\infty$, ill. $-\infty$-hez tart, és E_2-n nem korlátosan divergál (de nem konvergál $+\infty$-hez, ill. $-\infty$-hez)?

IRODALOM

[1] ALEXANDROV, P. Sz.: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[2] BARI, N.: Sur l'unicité du développement trigonométrique, *Fund. Math.*, 9 (1927) 62—115.

[3] ERDŐS, P., HERZOG, F., PIRANIAN, G.: Sets of divergence of Taylor series and of trigonometric series, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60**, No 6 (1954) 538.

[4] FATOU, P.: Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.*, 30 (1906) 335—400.

[5] FEJÉR, L.: Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues, *Ann. Sci. Ec. Normale Sup.*, 28 (1911) 63—103.

[6] HAHN, H.: Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionfolge, *Archiv der Math. und Physik,* **28** (1919) 34—45.

[7] HARDY, G. H.: *Divergent series,* Oxford, 1949.

[8] HARDY, G. H., ROGOSINSKI, W.: *Fourier series,* Cambridge, 1944.

[9] HAUSDORFF, F.: *Mengenlehre,* 2. Auflage, Berlin und Leipzig, 1927.

[10] HERZOG, F., PIRANIAN, G.: Sets of convergence of Taylor Series, I, *Duke Math. Journ.*, **16**, No 3 (1949) 529—534.

[11] Herzog, F., Piranian, G: Sets of convergence of Taylor Series, II. *Duke Math. Journ.*, **20** No 1 (1953) 41—54.

[12] ———: Sets of radial continuity of analytic functions, *Pacific Journ. of Math.*, **4** (1954) 533—538.

[13] Kolmogoroff, A.: Une série de Fourier—Lebesgue divergente presque partout, *Fund. Math.*, **4** (1923) 324—328.

[14] ———: Une série de Fourier—Lebesgue divergente partout, *Compt. Rend. Acad. Sci.* (Paris) **183** (1926), 1327—1328.

[15] Kolmogoroff, A., Seliverstoff, G.: Sur la convergence des séries de Fourier, *Atti Acad. naz. Lincei*, **3** (1926) 307—310.

[16] Lohwater, A. J., Piranian, G.: Sets of radial discontinuity of bounded analytic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60**, No 6 (1954) 543.

[17] Lusin, N.: Über eine Potenzreihe, *Rend. circ. Matem. Palermo*, **32** (1911) 386—390.

[18] Н. Н. Лузин: Теория функций действительного переменного, М. Учпедгиз, 1940.

[19] ———: Интеграл и тригонометрический ряд, Москва—Ленинград 1951.

[20] Marcinkiewicz, J.: On the convergence of Fourier series, *Journ. London Math. Soc.*, **10**, No 4 (1935) 264—268.

[21] ———: Sur les séries de Fourier, *Fund. Math.*, **27** (1936) 38—69.

[22] Marcinkiewicz, J., Zygmund, A.: On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series, *Fund. Math.*, **26** (1936) 1—43.

[23] Mazurkiewicz, S.: Sur les séries de puissances, *Fund. Math.*, **3** (1922) 52—58.

[24] Меньшов Д. Е.: О сходимости по мере тригонометрических рядов, Труды матем. ин.-та им. Стеклова **32** (1959).

[25] ———: О пределах неопределенности тригонометрических рядов, ДАН **74**, № 2 (1950) 181—184.

[26] Меньшов Д. Е.: Некоторые вопросы из теории тригонометрических рядов, Вестник Моск. ин.-та **8** (1950) 3—10.

[27] ———: О пределах неопределенности рядов фурые, матем. сб. **30** (**72**): 3 (1952) 601—650.

[28] Натансон И. П.: Теория функций вещественной переменной, Москва—Ленинград 1950.

[29] Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А.: Курс математического анализа, т. II. Москва—Ленинград (1944).

[30] Plessner, A.: Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, *Journ. reine und angew. Math.*, **155** (1926) 15—25.

[31] Плеснер А.: О сопряженных тригонометрических рядах, ДАН **4** (1935) 235—238.

[32] Rosenbloom, P. C.: Comments on the precedings paper by Herzog and Piranian, Pacific Journ. of Math. **4** (1954) 539—543.

[33] Sierpinski, W.: Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues, *Fund. Math.*, **2** (1921) 41—49.

[34] Steinhaus, H.: Une série trigonometrique partout divergente, *Compt. Rend. Soc. Sci.* (Varsovie), (1912) 219—229.

[35] Стечкин, С. Б.: О сходимости и расходимости тригонометрических рядов, УМН **VI**, № 2 (1951), 148—149.

[36] Sunouchi, G.: Fourier series which belongs to the class H diverges almost everywhere, *Kōdai Math. seminar reports*, **1** (1953) 27—28.

[37] Ульянов, П. Л.: О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, УМН **VIII**, вып. 6 (1953).

[38] Ульянов, П. Л.: О продолжении функций, ДАН **105** № 5 (1955), 913—915.
[39] Zeller, K.: Über Konvergenzmengen von Fourierreihen, *Archiv der Math.*, **6**, No 4 (1955) 335—340.
[40] Zygmund, A.: *Trigonometrical Series*, Warsawa—Lwow, 1935.
[41] ———: An example in Fourier series, *Studia Math.*, **10** (1948) 113—119.

Technikai szerkesztő: Alpár László

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1958. I. 17. — Terjedelem: 15 (A/5) ív, 5 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 58-177 Felelős vezető: Vincze György

Ára: 33,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VIII. KÖTET 3. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST

1958

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VIII. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

1957. ÉVI NAGYGYŰLÉSE

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK ELŐADÁSAI

December 16-án, hétfőn délelőtt 9 órakor

HAJÓS GYÖRGY akadémikus

Osztálytitkári beszámoló.

ALEXITS GYÖRGY akadémikus

Bolyai Farkas munkássága.

(Megemlékezés Bolyai Farkas halálának 100. évfordulójáról.)

December 17-én, kedden délután 3 órakor

JÁNOSSY LAJOS akadémikus—NÁRAY ZSOLT

Vizsgálatok a fény kettős természetéről.

SZALAY SÁNDOR levelező tag

A Magyar Tudományos Akadémia Atommag Kutató Intézetében elért új eredmények a neutrino-kutatás terén.

OSZTÁLYTITKÁRI BESZÁMOLÓ

HAJÓS GYÖRGY osztálytitkár

Az Osztály munkáját a beszámoló időszakában minden zárt osztályülésen ismertettem. Részletes beszámoló legutoljára 1956. május 28-án a múlt évi Nagygyűlés keretében tartott nyilvános osztályülésen hangzott el. Jelen beszámolómban ezért az 1956. évben és az 1957. évben ez ideig végzett munkáról, az elért tudományos eredményekről és a munkát gátló hiányosságokról igyekszem áttekintést adni. Beszámolóm főként az utóbbi hónapok eredményeit illetően nem tarthat számot teljességre.

Előre is le kívánom szögezni, hogy a beszámoló időszakában az Osztály területein folyó tudományos munka eredményessége tovább növekedett az elmúlt évhez viszonyítva annak ellenére, hogy az elmúlt év őszén az ellenforradalmi események sok tekintetben gátolták a kutatómunkát. Ezt lehetővé tette az, hogy bár az ország a jelentős anyagi károk miatt nehéz gazdasági helyzetbe került, a tudomány fejlesztésére fordított anyagi támogatás nem csökkent, hanem emelkedett.

Az eredmények ismertetésénél az intézetek tudományos beszámolóira támaszkodom.

TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEK

A matematika területén elért kiemelkedő eredmények a következők:

A *Matematikai Kutató Intézet* Valószínűségszámítási Osztályának kutatói jelentős eredményeket értek el a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika gyakorlati alkalmazásai, ezen belül különösen a sztochasztikus folyamatok fizikai, kémiai és ipari alkalmazásai terén. A mátrixelmélet továbbfejlesztése terén újabb lényeges eredmények születtek. A mátrixelmélettel és alkalmazásaival foglalkozó osztály munkatársai jelentős eredményeket értek el a műszaki mechanika matematikai problémáinak megoldásaival kapcsolatban. A valósfüggvénytan, a sorelmélet, különösen az ortogonális sorfejtések és approximációelmélet problémakörében elért eredmények ugyancsak számottevők. A funkcionálanalízisben a Hilbert-tér és Banach-tér lineáris operátorainak spektrálelméletére vonatkozóan értek el újabb eredményeket.

Meg kell említeni a hatványösszegek becslésének módszerével és a módszernek az egészfüggvények elméletében, továbbá a prímszámeloszlás kérdéseiben való továbbfejlesztésével kapcsolatban közölt újabb eredményeket.

Az elmúlt év során számos tudományos, ill. gyakorlati eredmény született az intézetben külső megbízások alapján. Az 1956. év végéig az intézet megalakulása óta különböző üzemektől és tudományos intézetektől összesen 900, a gyakorlatban felmerült elméleti probléma megoldására kapott megbízást és az elintézett megbízások száma a múlt év végéig 814-re emelkedett.

A gyakorlati alkalmazásokat illetően az elmúlt évben újabb témakörökkel foglalkozott az intézet, mint pl. az információ-elmélet, a kibernetika, a hisztológia, a közgazdaság matematikai problémái.

Számos tudományos monográfián dolgoznak az intézet kutatói, amelyek az intézet szerkesztésében megjelenő monográfiasorozatban fognak megjelenni.

A *Szegedi Tudományegyetem Matematikai Intézetében* a funcionálanalízis körében, különösen az elméletnek a matematika klasszikus területeire és a terek kvantumelméletére vonatkozó alkalmazásokban folytattak vizsgálatokat. A matematikai logikai csoport az épülő logikai gép tervezésén kívül részben a közben felmerült, részben a matematikai gépekkel és jelfogó rendszerekkel kapcsolatos egyéb programozási, kombinátorikai, gráfelméleti és hálóelméleti problémákat vizsgált. Arra az eredményre jutottak, hogy a logikai gépekben és talán az automatikus számológépekben is pótolni lehet a jelfogók, illetve egyéb kényes alkatrészek jelentős részét huzalos egységekkel. A szegedi algebristák az elmúlt évben jelentős eredményeket értek el az algebrai struktúrák kutatásaiban. Egyik ilyen eredmény az, hogy SZEKERESnek a polinomgyűrű ideáljára vonatkozó tételéből igen egyszerűen következik HENSELnek hasonló tárgyú, explicitebb jellegű tétele, és ilyen módon az utóbbinak általánosítása is adódik.

Kiemelkedő eredmény született az ortogonális függvényekre és az ortogonális sorokra vonatkozó aszimptótikus becslésekkel kapcsolatban. Kiderült egyrészt, hogy részben ismert becslések tovább nem finomíthatók, másrészt pedig új, tovább nem finomítható becsléseket sikerült megadni a Cesàro-szummációra vonatkozóan.

Jelentősek a *Debreceni Tudományegyetem Matematikai Intézetében* a geometriában, különösen a differenciálgeometriában elért eredmények. Külön megemlítendő az az eredmény, amelyben szükséges és elegendő kritériumok megadása szerepel egy Kawaguchi-tér alapfüggvényére vonatkozólag ahhoz, hogy a tér a metrikus osztályhoz tartozzék. Egy másik eredmény az, hogy az ismert Sylvester—Franke determináns tételre, amelyre eddig csak igen bonyolult és teljes indukciót felhasználó bizonyítások léteztek, egy teljesen elemi és direkt bizonyítást sikerült adni. A modern differenciálgeometriában a sűrűségterek görbületelméletének kiépítésével kapcsolatban értek el új eredményeket. A függvényegyenletek terén kiemelendők a geometriai objektumok elméletére vonatkozó eredmények.

Az *Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetében* tovább folytatódtak a vizsgálatok az Abel-féle csoportok elméletében. Több eredmény került közlésre a hiperbolikus geometria felépítésének egyszerűsítésére vonatkozólag. A halmazelméletben elért eredmény a kontinuum-hipotézisnek a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszerétől való függetlenségével kapcsolatban igen figyelemre méltó. Az eldöntésprobléma redukció elméletében, a rekurzív függvények elméletében sikerrel folytatódtak tovább a régebbi vizsgálatok. Megindultak az intézetben a topológiai kutatások is és már néhány új eredmény publikálására is sor került.

A komplexfüggvénytanban PÓLYÁnak egy régóta kimondott sejtését sikerült bebizonyítani. A valósfüggvénytan terén elért számos eredmény közül hadd említsem meg a mértékelméletnek egy új fejezettel, a sztochasztikus halmazfüggvények elméletével való bővítését és annak sikeres valószínűségszámítási alkalmazásait. Ugyancsak eredményesnek mondható a valószínűségszámítás módszereinek alkalmazása a matematika különféle fejezeteiből vett problémákra.

A fizika területén elért kiemelkedő eredményekről a következőkben számolok be:

A *Központi Fizikai Kutató Intézet* munkatársai jelentős eredményeket értek el a beszámoló időszakában.

A *Spektroszkópiai Osztály* a NO-molekula színképvizsgálatában ért el eredményeket. Továbbfejlesztésre került az elektronikus vezérlésű szikra- és ívgerjesztő. Jelentős eredményt értek el a fémek és ötvözetek szén- és kéntartalmának meghatározása terén. Az izomer vegyületek spektroszkópiájának vizsgálatában először sikerült egy vegyületsorozat színképe és kémiai szerkezete (térszerkezet) közötti összefüggést értelmezni. Az Osztály kifejlesztette a differenciál-spektrográfia módszerét.

A *Kozmikus Sugárzási Osztályon* a kozmikus sugárzási részecskék által létrehozott nagyenergiájú magkölcsönhatások és kiterjedt záporok vizsgálata folyik számlálócsöves koincidencia berendezésekkel, Wilson-kamrával és fotoemulziós technika segítségével. A kiterjedt záporok, az áthatoló záporok vizsgálatában újabb eredményeket értek el.

Előkészületben vannak a Nemzetközi Geofizikai Évvel kapcsolatos mérések, amelyekkel az Osztály 1958. január 1-től kezdődően kapcsolódik be a nemzetközi együttműködésbe.

Az Osztály kutatási munkájának másik része a fény természetének vizsgálatára vonatkozik. Ezekről az eredményekről külön előadás lesz a mostani Nagygyűlés osztályprogramjának keretében.

Az *Atomfizikai Osztály* munkájának súlypontja a készüléképítésről a magfizikai kutatásokra tevődött át. Jelenleg 4 gyorsító berendezés van üzemben. Az Osztály kutatói a fúziós energiatermelés lehetősége területén végeztek vizsgálatokat és erről a Velencei Magfizikai Konferencián előadást is tartottak. Kísérleteket végeztek nagyenergiájú gammasugarak magreakciójával kapcsolatban, továbbá meghatározták egyes speciális magok energianívóinak néhány jellemzőjét.

Eredményes munkát végzett az Osztályon belül megalakult Elméleti Magfizikai Csoport. Az elemi részecskékkel kapcsolatos meggondolásaik vizsgálat tárgyát képezik az Egyesített Magkutató Intézetben.

Befejezés előtt áll egy gyors-neutron-spektrométer. Sajnálatos azonban, hogy a 4 MV-os tankgenerátor befejezése erősen késik, és hogy a C-14-es kormeghatározó készülék befejezése is lassú ütemben halad.

Az *Elektromágneses Hullámok Osztályán* folyó kutatások az elektromágneses sugárzás anyaggal és szabad elektronokkal való kölcsönhatásának vizsgálatára irányulnak.

Az Osztály a rádiófrekvenciás spektroszkópia témakörben magpolarizációs kísérleteket folytat az Averhauser-effektus segítségével. Külön méréseket végeztek a detektálással és szuper-szelektív detektálási módszerekkel kapcsolatban. A mikrohullámú spektroszkópia témakörben az Osztály megtervezett egy komplett nagyfontosságú paramágneses rezonancia mérőberendezést, amellyel méréseket végeztek a permenorm ferromágneses rezonanciára vonatkozólag.

A *Radiológiai Osztályon* az izotóp-vizsgálatokkal kapcsolatban az eső- és levegőaktívitásmérések terén új módszerek születtek. Eredményesen folyik a filmdozimetria alapjainak tisztázása és a metodika kidolgozása. Az Osztály munkatársainak Magyarországon először sikerült előállítani a szcintillációs mérésekhez való plasztikus foszforokat nagyobb tömbökben. Több különféle rendeltetésű mérőkészülék építésével párhuzamosan halad az iparral való kooperáció a hordozható sugárzásmérő készülékek gyártására vonatkozóan.

A *Mágneses Osztály* alapvető kutatási eredmények felhasználásával iparilag is hasznosítható eredményeket produkált.

Az Osztály munkatársainak sikerült négyszöghiszterézis-hurkú mágneses emlékező egységek laboratóriumi előállítására eljárást kidolgozni. Az előállított gyűrűk bizonyos mágneses adatai jobbak, mint a rendelkezésre álló néhány amerikai emlékező gyűrű megfelelő adatai.

Az osztály másik kutatási iránya az első- és másodrendű fázisátalakulások és a mágneses tulajdonságok közötti kapcsolat tanulmányozása. A kobalt $\alpha \rightleftarrows \beta$ átalakulásánál fellépő effektusok vizsgálata, valamint az anizotrópiaenergia előjelváltozásával kapcsolatos elméleti meggondolásokra a kísérleti eredményekkel való egyezése külföldön is visszhangra talált.

1956. I. felében a KFKI területén megindultak a *Kísérleti Atomreaktor* építési munkálatai. Becslések szerint a technológiai szerelés a jövő év II. negyedéig befejeződik és előreláthatóan a reaktor próbaüzemének megindítása a jövő év II. felében megvalósul.

A KFKI Kísérleti Atomreaktora mellett a múlt év közepén 2 tudományos osztály, a Neutronfizikai és a Magkémiai Osztály kezdte meg működését.

A *Neutronfizikai Osztály* munkatársai az elmúlt év közepétől mostanáig a reaktor üzembeindításával kapcsolatos feladatok előkészítésével foglalkoztak. Többek között eljárást dolgoztak ki a neutronfluxus abszolút intenzitásának mérésére. Kísérleti vizsgálatokat indítottak hidrogéntartalmú, anorganikus és organikus lassítóközegek alapvető neutronfizikai állandóinak mérésére. Széleskörű előkészítő munkálatok indultak meg a maghasadás folyamatának vizsgálatával kapcsolatban. Az Osztály elméleti csoportja számításokat végzett a reaktorok ventillációs módszerével kapcsolatban. Eredmények születtek a neutrongáz statisztikus sűrűség-ingadozásaira vonatkozó elméleti vizsgálatok során is.

A *Magkémiai Osztály* munkatársainak egy része a Szovjetunióban járt tanulmányúton, ahol radióaktív izotópokkal való kémiai munkálatok tekintetében kaptak kiképzést. Az Osztályon 1956-ban megindult a hazai eredetű uránércek komplexkémiai vizsgálata, melynek során néhány új uránanalitikai eljárás kidolgozására került sor. Ugyancsak lényeges előrehaladás történt a kémiai technológiai kérdések laboratóriumi vizsgálata terén. Az Osztályon beindítás alatt áll egy új elven alapuló B^{10} izotóp dúsító berendezés.

A *Reaktor Üzem* munkatársai feldolgozták a sokszáz kötetnyi szovjet dokumentációt. Előkészületet tettek egy technikusokat és mérnököket a reaktorok üzemeltetésére kiképző „reaktoriskola" alapjainak kimunkálásában.

A *Debreceni Atommagkutató Intézetben* elért tudományos munkáról SZALAY SÁNDOR, az intézet igazgatója a Nagygyűlés osztályprogramjának keretében beszámolót tart, ezért itt csak röviden említem meg az intézetben elért eredményeket. Befejeződött a hazai szenekben előforduló urániumkészletek felderítése, illetve megbecslése. Az uránoxid formában való kivonásra irányuló kutatások részleges — laboratóriumi méretű — eredménnyel jártak. Eredményesen haladnak előre a laboratóriumi kisüzemi kísérletek a korábban kidolgozott dúsítási eljárás alapján.

Igen fontosak a He^6 izotóppal végzett neutrinó-visszalökési kísérletek. A vizsgálat nemcsak a neutrinó kimutatása szempontjából lényeges, hanem mert lehetőséget nyit a béta-részecske és a visszalökött mag szögkorrelációjának vizsgálatára is. Ezt a mérést eddig csak parciálisan a szög-, vagy sebességparaméter rögzítése mellett tudták elvégezni, míg Wilson-kamrában a két paraméter értéke egyidejűleg mérhető.

Az *Elméleti Fizikai Kutató Csoport* kutatói 1956-ban további értékes eredményeket értek el az atomok és atommagok statisztikus elméletében. Az atomok statisztikus elméletével kapcsolatos kutatások során nyert eredmények meglepő képet adnak, amennyiben a WEIZSÄCKER- és a GOMBÁS-féle energiakorrekciókkal bővített atommodell viselkedése külső nyomás hatására sok tekintetben eltér a régi statisztikus atommodellek viselkedésétől és igen szoros analógiát mutat a hullámmechanikai atommal.

A Kutató Csoportban 1955-ben kidolgozott atommodell segítségével meghatározták a Hg^{++}-ion elektroneloszlását és összehasonlították a HARTREE által nyert self-consistent-field-eloszlással, továbbá ugyanennek a statisztikus modellnek a segítségével meghatározták a Ne, Ar, Kr és X atomok energiáit első közelítésben.

Megvizsgálták továbbá, hogy egy GOMBÁS-féle statisztikus magelméletből adódó atomenergiák és atommag-rádiusok mennyire függnek a nukleonok közötti erők hatástávolságától. Kimutatták, hogy a tapasztalati értékek az erőknek csak olyan hatástávolságával írhatók le jól, melynek nagysága az empírikus érték közvetlen közelében van.

További eredmény az előző években kidolgozott módszerekkel több atomnak, illetve ionnak hullámmechanikai tárgyalása, továbbá azok a számítások, amelyek a MgO kristályokra vonatkoznak, melyek során sikerült megindokolni a kristályokban az aránylag nagy Mg—O távolságot. A Csoport ez évben elsősorban magasnyomású anyag elméletével foglalkozott. A vizsgálat során kiderült, hogy az irodalomban eddig helyesnek vélt sűrűség-nyomás diagramok igen lényeges korrekcióra szorulnak. Ezenkívül f. évben a Csoport munkatársai kidolgoztak egy új perturbáció-elméletet, továbbá részletes vizsgálatok keretében további összefüggéseket állapítottak meg a statisztikus elmélet és a hullámmechanika között. Az atommagok rezgéseinek vizsgálata során sikerült kimutatni, hogy a statisztikus atommodell ezen a téren is jól megegyezik a kísérlettel.

A kvantumkémiai kutatások keretében ez évben elért leglényegesebb eredmény az Au sajátfüggvényének megállapítása a kicserélődési kölcsönhatás figyelembevételével, valamint a H_2 és H_2^+ molekula egy újabb elméletének kidolgozása.

Az *Eötvös Loránd Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének* munkatársai a fizika egyik legmodernebb fejezetét alkotó elemi részek elméleti vizsgálatába kapcsolódtak be. A vizsgálat során jelentős eredményeket értek el. Lényeges lépéssel vitték előre az elemi részek „belsejére" vonatkozó kérdés elméleti vizsgálatát, és tovább fejlesztették az elemi részek általános kvantumelméletének metodikáját. Folyamatban van a béta-bomlás jobb-bal-aszimmetriájának és a nukleáris részek belső struktúrájának elméleti vizsgálata. Az intézet munkatársai számottevő eredményeket értek el a relatívitáselméleti kutatások terén. Itt ki kell emelni a relativisztikus kéttest-probléma megoldását és a magfizikai alkalmazásokat.

A *Szegedi Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetében* számottevő eredményeket értek el az egységes térelmélet, valamint a klasszikus térelmélet, továbbá a terek kvantumelméletének vizsgálatában. Jelentősek azok az eredmények, amelyeket a kvantumkémiai vizsgálatok során értek el.

A *Debreceni Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének* munkatársai tovább folytatták vizsgálataikat a molekulák egyesített atommodeljével kapcsolatban. Meghatározták a H_2O molekula egy kötésének felbontásához szükséges energiát. Tovább folynak a vizsgálatok más molekula állandók meghatározására. Új módszert dolgoztak ki a szilárd testek elektronszerkezetének elméleti tárgyalására.

A *Szegedi Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében* a lumineszcencia-kutatásokkal kapcsolatos vizsgálatok során olyan eljárást dolgoztak ki, amelyek segítségével az oldatok lumineszcenciájának jellemzőit az eddiginél lényegesen pontosabban sikerült meghatározni. Ez az eljárás feloldott több, az irodalomban mindmáig meglevő diszkrepanciát és előreláthatólag több, eddig felismert törvényszerűség lényeges módosítását fogja eredményezni. Számottevő eredményeket értek el a félvezető-kutatások területén is.

Az *Eötvös Loránd Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetében* működő röntgen finomszerkezet vizsgáló csoport többek között meghatározta a nátriumtioszulfát szerkezetét. Ez az első teljesen ismeretlen szerkezet, amelyet a csoport meghatározott. Folyó évben az intézetben újabb kutatási munka indult meg szilárd anyagok vizsgálatára.

Az *Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetének* munkatársai a kristályfizikában, a beszámoló időszakában is újabb eredményeket értek el és számos publikációt jelentettek meg. Az elmúlt évben is eredményes munka folyt az *Orvostudományi Egyetem Orvosi Fizikai Intézetében* a színcentrumok tulajdonságainak vizsgálatában, továbbá tudományos és ipari vizsgálatoknál szükséges monokristályok előállításában és kidolgozásában.

A *Csillagvizsgáló Intézetben* sikerült tovább fokozni a változó csillagok területén a fotoelektromos megfigyelések pontosságát. Befejeződött a gömbhalmazokban levő cefeidák vizsgálata, mely kozmogóniai szempontból igen fontos. A Napfizikai Osztály tovább folytatta a reguláris fotografikus fotoszféramegfigyeléseket és az észlelési adatok kiértékelését.

Az előzőkben vázlatosan ismertetett eredmények bizonyítják, hogy az Osztály tudományterületein a beszámoló időszakában mind az alapkutatásokban, mind pedig az alkalmazásokban eredményes kutatómunka folyt. Mint már bevezetőmben is említettem a tudományos munka eredményessége nagy részben köszönhető annak, hogy az anyagi ráfordítás nemcsak megmaradt a korábbi szinten, hanem emelkedett is.

Nem okozott visszaesést a kutatásokban az sem, hogy néhány kutató az elmúlt év őszén külföldre távozott.

TUDOMÁNYOS ÉLET, KONFERENCIÁK

A kozmikus sugárzási és csillagászati kutatások területén elért eredményekről az elmult év folyamán a KFKI Kozmikus Sugárzási Osztálya és a Csillagvizsgáló Intézet a Budapesten megtartott Kozmikus Sugárzási Konferencián és az ugyancsak Budapesten megrendezett Változócsillag Konferencián számolt be.

A Kozmikus Sugárzási Konferencia (1956. augusztus 28.—szeptember 4.) tudományos, szervezési és rendezési szempontból is igen sikeresnek mondható. A konferencián a magyar kutatókon kívül 6 országból 24 külföldi fizikus vett részt. Az elhangzott előadások száma: 28, ebből 23 külföldi és 5 magyar előadás volt. A konferencia mind tudományos, mind baráti vonalon nagyon jó példája volt az eredményes szakmai tapasztalatcserének a magyar és baráti nemzetek szakemberei között. A konferenciát értékelően kommentálták a baráti országok tudományos lapjai. Annak ellenére, hogy hazánkban a kozmikus sugárzási kutatások alig néhány éve indultak meg, az előadott eredmények nemzetközi viszonylatban is megállják a helyüket. A konferencia résztvevői kívánatosnak és hasznosnak tartották az ilyen jellegű konferenciák megrendezését a következő években is a különböző népi demokratikus államokban és a Szovjetunióban.

A Változócsillag Konferenciát az Osztály 1956. augusztus 23—28-ig rendezte meg. A hazai csillagászati élet képviselőin kívül 7 országból 19 külföldi tudós és kutató vett részt a konferencián és közülük majdnem mindenki tartott előadásokat is. A konferencián a Csillagvizsgáló Intézet Sztellárasztronómiai osztályának minden kutatója előadást tartott a legújabb eredményekről. A konferencia visszhangja azt mutatta, hogy az mind tudományos színvonal tekintetében, mind rendezésben elérte a külföldi konferenciák színvonalát. A vitaszellem igen jó volt és ez sok probléma tisztázásához vezetett. Igen értékesek azok a személyi kapcsolatok, amelyek a magyar és a konferencián jelenlevő külföldi tudósok és kutatók között kialakultak.

A beszámoló időszakában az Osztály rendezésében megtartott 7 felolvasó ülésen, illetve előadó ülésen 32 matematikai, 24 fizikai és 1 csillagászati tárgyú előadás, illetőleg bemutató hangzott el. A felolvasó üléseken tartották meg székfoglaló előadásaikat SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA, RÉDEI LÁSZLÓ és RÉNYI ALFRÉD akadémikusok, DETRE LÁSZLÓ és ERDŐS PÁL lev. tagok. A felolvasó ülések programja mutatja, hogy az elmúlt évekhez viszonyítva nagymértékben megnőtt a matematika és fizika területén dolgozó kutatók tudományos produkciója. Felolvasó üléseink látogatottsága jórészt az előadó személyétől függően eléggé változó volt. Különösen a fiatalabb tudományos dolgozók részvétele hiányolható. Előfordult, hogy több esetben azok sem jöttek el a felolvasó ülésekre, akiknek dolgozatai bemutatásra kerültek. Tudományos véleménycserék és elvi viták kialakulása tekintetében bizonyos fejlődés észlelhető.

1956. június 13-án az Osztály az *Eötvös Loránd Fizikai Társulattal* és a TTIT-vel közösen emlékülést rendezett I. MAXWELL születésének 125. évfordulója alkalmából.

Az Osztály 1957-re tervezte a II. Magyar Matematikai Kongresszus megrendezését, azonban ezt gazdasági okok miatt egy későbbi időpontra kellett elhalasztani.

AZ OSZTÁLYHOZ TARTOZÓ INTÉZETEK MUNKÁJA

Az osztályhoz 4 kutatóintézet és 2 önálló kutatócsoport tartozik:
Matematikai Kutató Intézet,
Központi Fizikai Kutató Intézet,
Atommagkutató Intézet,
Csillagvizsgáló Intézet,
Elméleti Fizikai Kutató Csoport,
Kibernetikai Kutató Csoport és
ezenkívül 16 (6 matematikai, 9 fizikai és 1 csillagászati) céltámogatott egyetemi intézet.

A *Matematikai Kutató Intézetben* a beszámoló időszakában néhány szervezeti változás történt. Megalakult KALMÁR LÁSZLÓ vezetésével a Matematikai logika és matematikai gépek elméletével foglalkozó csoport. Az Elektrotechnikai és automatizálási osztály megszűnt és az ezen az osztályon dolgozó kutatók Elektrotechnikai Csoport néven a Differenciálegyenletek osztályán végzik munkájukat. Ez év áprilisa óta a Mechanikai és szilárdságtani osztály Mátrixelmélet és alkalmazásainak osztálya néven működik.

Az intézet jelenlegi elhelyezése nem biztosítja a zavartalan munkalehetőséget és ez a körülmény nagymértékben gátolta és gátolja az intézet munkáját.

A külső megbízásokkal kapcsolatban megemlítem, hogy az intézet munkájának, eredményeinek gyakorlati hasznosítása nem éri el azt a mértéket, amire lehetőség volna és amit az ipar fejlesztése megkövetel. Ennek oka főként két körülményben jelölhető meg: 1. Az ipar vezetői nem eléggé érdekeltek a korszerűsítés elősegítésében és a gazdaságos gyártási folyamatok kialakításában, 2. a gyárak és üzemek nagy részében jelenlegi szervezeti felépítése mellett nem alakulhatott ki tudományos centrum (laboratórium), amely foglalkozott volna az üzem speciális műszaki és gazdaságossági problémáival. Ennek tudható be, hogy az elhelyezett alkalmazott matematikusokat sok helyen nem tudták szaktudásuknak megfelelően foglalkoztatni. Itt említem meg, hogy hasonló a helyzet a fizikai kutatások eredményeinek gyakorlati felhasználása terén és a fizikusok foglalkoztatását illetően is.

Az intézetnek a termeléssel való kapcsolatait illetően kiemelem az újabban megindult fokozott érdeklődést a közgazdaságtudománnyal kapcsolatos matematikai témák iránt. Az intézet a Tervhivatallal, a Közgazdaságtudományi Intézettel, a Statisztikai Hivatallal, valamint a Kibernetikai Kutató Csoporttal állandó együttműködést létesített a gazdasági élet tudományos alapon való irányítására vonatkozó problémák megoldására. Az ipari problémákat illetően kiemelem az újonnan megalakult csoportnak, a Matematikai logikai csoportnak egy jelentős megbízását a Telefongyár részéről, amely vasútbiztosító berendezések konstrukciójával kapcsolatos.

Az intézet közleményeinek I. kötetéből a beszámoló időszakában az 1—2., 3. és 4. füzet jelent meg 650 oldal terjedelemben, és ezek együttvéve 41 dolgozatot tartalmaznak.

A hazai kísérleti fizikai kutatásokban döntő helyet foglal el a *Központi Fizikai Kutató Intézet,* amely jelentős kutatógárdával rendelkezik. Az intézet munkatársai a tudományos munkák eredményeit több mint 150 dolgozatban közölték, továbbá eredményeikről mintegy 60 előadást tartottak. A beszámoló időszakában az intézet rendszeresen megjelentette Közleményeit.

Az iparral és más tudományágakkal való kapcsolat kiépítése terén az elmúlt évben az intézet részéről lényeges lépések történtek. Az intézet munkatársai kb. 25 féle, főleg nukleáris műszer prototípusát dolgozták ki, amelyek gyártás alatt, illetve a gyártás előkészítésének állapotában vannak. Ez a műszerválaszték — a Szovjetuniótól eltekintve — a baráti országokban jelenleg egyedülálló.

Kiemelkedő munkát végzett az intézet a nukleáris műszerek hazai tervezése terén. Itt említem meg, hogy az intézetben kifejlesztett elektronikus vezérlésű szikra- és ívgerjesztő készülékből az ipar 10 millió forintot meghaladó értéket állított elő, amelynek jelentős része exportra kerül.

A múlt év folyamán változás történt az intézet vezetésében. Az Akadémia Elnöksége KOVÁCS ISTVÁN igazgatót saját kérelmére tiszte alól felmentette és az intézet igazgatójául JÁNOSSY LAJOS akadémikust nevezte ki.

Az intézet lényegében ma már túl van a tudományos feladatok megvalósításához szükséges anyagi, technikai és szakemberekkel való ellátottságot illető előfeltételek biztosításán, illetőleg megteremtésén és mint a tudományos eredmények ismertetéséből megállapítható, az önálló kutatások is szép eredményekkel indultak meg.

Az elmúlt év végén az intézeti dolgozóknak mintegy 10%-a távozott külföldre (az összlétszám a Kísérleti Atomreaktor létszámával együtt 500 fő volt). A külföldre távozott személyek beosztása általában olyan volt, hogy távozásuk az intézet tudományos munkájának eredményességét nem befolyásolta.

A *Debreceni Atommag Kutató Intézetben* folytatott eredményes kutatómunkáról vázlatosan már beszámoltam. A múlt évben történt meg az intézet első épületének átvétele, azonban a műszaki fogyatékosságok miatt csak fokozatosan vált lehetővé a beköltözködés. E körülmény a kutatómunkát fékezte. Az intézet 1956-ban 57 fős létszámmal kezdett, amely jelenleg újabb állások szervezésével 76 és fél főre emelkedett.

Az ellenforradalmi események az intézetben nem okoztak jelentős veszteséget. Az intézet tudományos dolgozói közül senki sem távozott külföldre.

Az elmúlt évben az intézet munkatársai közül tanulmányút céljából hárman jártak külföldön. Örvendetes ez, mert a debreceni kísérleti fizikusoknak az utóbbi években erre nem volt lehetőségük. Megemlítem, hogy az intézet részére ebben az évben a Pénzügyminisztérium külön nyugati kiküldetési devizakeretet biztosított és így az intézet tagjai közül ebben az évben számosan utaztak külföldre.

Az intézet az első évben csekély beruházással indult. A mostanáig felhasznált összes beruházás mintegy 11 millió forint, ezzel szemben az intézet a múlt év végéig hazai szenekben jelentős mennyiségű urániumot derített fel, amelynek értéke uránoxiddá kivont alakban becslések szerint az intézet beruházási összegét többszörösen felülmúlja.

Igen jól működik az *Elméleti Fizikai Kutató Csoport.* Erről tanúskodnak a már korábban ismertetett, a Kutató Csoport által elért tudományos eredmények. Az elmúlt évekhez viszonyítva kielégítően fejlődnek a Csoport nemzetközi kapcsolatai a külföldi kiküldetésekkel és meghívások vonalán is.

A *Csillagvizsgáló Intézet* Sztellárasztronómiai Osztályán eredményes kutatómunka folyt a beszámoló időszakában. Az intézet 1957. évi munkáját nagyban megnehezítette az a körülmény, hogy a legtehetségesebb fiatal kutatók külföldre távoztak. Ennek ellenére a kutatási főtémával kapcsolatos munkák kielégítően haladnak előre. A Szovjet Akadémia felkérésére az intézet résztvesz a mesterséges holdak megfigyelésének programjában. Az intézet egy-egy megfigyelő állomást létesít Budapesten és Szombathelyen. Az állomások szervezése folyamatban van. A szükséges műszereket a Szovjet Akadémia bocsátja az intézet rendelkezésére. A Napfizikai Osztály munkatársai a Geofizikai Évvel kapcsolatos kutatásokban vesznek részt.

A kutatómunkát nagymértékben hátráltatta az a körülmény, hogy az intézetben levő két tudományos osztály egymástól való elkülönülése a beszámoló időszakában tovább fokozódott és a tudományos munkát súlyosan akadályozó intézeti szellem alakult ki.

Előkészületben van az intézet Napfizikai Osztályának kiválásával Debrecenben egy önálló Napfizikai Kutató Csoport létrehozása. Ezt a hazai csillagászati kutatás centralizáltságának megszüntetése és az említett nehézségek elhárítása indokolja.

Az intézetnek idegen nyelven megjelenő kiadványa van, amelynek révén az intézet csereviszonyban áll a világ valamennyi csillagászati intézetével, valamint több külföldi akadémiával.

Az 1956. szeptemberében létesült *Kibernetikai Kutató Csoport* a múlt év októberétől tartozik az osztályhoz. A kutatómunka beindítására lényegében ez év elején került sor. A kutatómunka programja a gyorsműködésű automatikus, elektronikus (digitális) számológépekkel, továbbá az ilyen gépeknek tudományos, műszaki és gazdasági jellegű feladatok megoldására való felhasználásával kapcsolatos kérdésekre összpontosul. A Csoport munkáját nagymértékben elősegítette az a körülmény, hogy a Szovjetunió rendelkezésre bocsátotta a műszaki dokumentációt. A Csoport kidolgozta az M—3 jelű elektronikus számológép hazai megépítéséhez szükséges részletes, a magyar szabványoknak megfelelő dokumentációt. A gép építésének megkezdésére műhely és laboratóriumi felszerelések hiánya miatt eddig még nem kerülhetett sor.

Az *egyetemi fizikai intézeteket* illetően megemlítem, hogy az ott folyó kutatómunka intenzívebbé tétele és a magas színvonalú képzés feltétlenül megkívánja az intézetek fokozottabb fejlesztését. Elsősorban a kísérleti fizikai intézetek megerősítésére van szükség minden téren, hogy minél alaposabban képzett, széleslátókörű, jó kísérleti fizikusok kerüljenek ki.

TUDOMÁNYOS UTÁNPÓTLÁS

Az Osztályhoz tartozó tudományterületeken az idősebb kutatók mellett ma már a fiatal kutatók egész sora nőtt fel és eredményesen műveli az egyes tudományszakokat. A fiatal kutatók közül igen sokan önállóságra tettek szert, komoly tekintélyt vívtak ki maguknak. Különösen megmutatkozott ez a konferenciákon, a társulatok által rendezett vándorgyűléseken és kollokviumokon való aktív részvételben és az egyes előadásokkal kapcsolatos vitákban. Az aspiránsok közül sokan sikeresen megvédték disszertációjukat és ma már élénken résztvesznek a tudományos életben.

Az Osztály tudományterületein jelenleg 7 belföldi és 2 Szovjetunióban tanuló aspiráns képzése folyik.

Az Osztályhoz tartozó szakterületeken a TMB eddig 68 rendes aspiránst és a Szovjetunióban folytatandó képzésre 7 aspiránst vett fel. Eddig 66 aspiráns fejezte be tanulmányait, ezek közül 37 sikeresen megvédte disszertációját, míg 29 még nem nyújtott be értekezést, illetőleg nem védett disszertációt. Az utóbbiak többsége ez évben, illetőleg a múlt évben fejezte csak be aspirantúráját. Ez év augusztus 31-én 5 matematikus és 4 fizikus aspiráns fejezte be tanulmányait. Valamennyien kérésüknek, illetőleg aspiránsvezetőik javaslatának megfelelően nyertek elhelyezést. A III. éves aspiránsok jelentős része a múlt év végén, illetve ez év elején a bizonytalan helyzet miatt aspirantúráját megszakítva elhelyezkedett megfelelő állásba.

1956. májusától f. év szeptember 30-ig 12-en védték meg doktori, 21-en pedig kandidátusi értekezésüket. Ebből matematikus doktor 8, kandidátus 10, fizikus doktor 4, kandidátus 10, csillagász kandidátus 1. Jelenleg az osztálynak 20 doktori és 73 kandidátusi fokozattal rendelkező kutatója van, ebből matematikus doktor. 13, kandidátus 34, fizikus doktor 7, kandidátus 39. A doktori disszertációt védettek közül 3-an mint aspiránsok szerezték meg a kandidátusi fokozatot.

A megvédett értekezések színvonala általában megfelelő volt. Örvendetes, hogy a benyújtott kandidátusi disszertációk egy részének színvonala elérte, vagy megközelítette a doktori disszertációktól megkívánt színvonalat. Előfordult, hogy a TMB kandidátusi disszertációt doktori disszertációul fogadott el a bírálóbizottság javaslatára. A TMB több esetben elengedte a kandidátusi fokozat megszerzése és a doktori disszertáció megvédése közötti 3 éves várakozási időt. Meg kívánom említeni, hogy az értekezések megvédésével kapcsolatos vitákon a vita legtöbbször csak vezető tudósaink hozzászólásaira korlátozódik, fiatal kutatóink általában nem szólalnak fel.

NEMZETKÖZI KAPCSOLATOK

Az Osztály nemzetközi kapcsolatai a legutóbbi Nagygyűlés óta az elmúlt évekhez viszonyítva jelentősen megjavultak, bár a külföldi kiküldetések lehetőségei még távol állnak a kívánatostól. Az ország nehéz devizahelyzete ellenére a külföldi kiutazások száma az előző évekhez viszonyítva nem csökkent, hanem lényegesen emelkedett. Örvendetesen megnövekedett a baráti országokból és nyugati országokból hazánkba érkezett, vagy átutazásuk közben minket meglátogató tudósok és kutatók száma. A nemzetközi kapcsolatok megjavulása nagymértékben elősegítette a már meglevő tudományos kapcsolatok megerősítését és új kapcsolatok kiépítését. Az utazások révén több esetben magyar és külföldi kutatók között közös kutatási munkák indultak meg tudományterületeiken. A nemzetközi kapcsolatok elmélyüléséről tesz tanúságot, hogy az Akadémia több tudományos világszervezetben felújította tagságát és az Osztály tudományterületein megalakultak a Nemzetközi Matematikai Unió, továbbá a Nemzetközi Elméleti és Alkalmazott Fizikai Unió, valamint a Csillagászati Unió országos bizottságai.

Különösen szép fejlődést mutat a kiutazások száma, annak ellenére, hogy az ellenforradalmi események miatt több kiutazás nem valósulhatott meg. A beszámolási időszakban (1956. májustól 1957. szeptember 1-ig) az Osztály tudományterületeiről az Akadémia révén 69 tudós és kutató járt külföldön, összesen 102 alkalommal. A kiutazók szakterületenkénti megoszlása: 33 matematikus, 29 fizikus, 4 csillagász és 3 kibernetikus. A 102 kiutazás közül 62 a kultúregyezmény keretében, illetőleg az Akadémia költségén, vagy az Akadémia jelentős anyagi hozzájárulásával, míg 40 kiutazás saját költségén, illetve a meghívó fél költségén történt.

A kiutazóknak kb. egyharmada fiatal kutató volt. A jövőben is fokozni kívánjuk a fiatal kutatók külföldi kiküldetését, mert az így szerzett tapasztalatok szakmai fejlődésük szempontjából rendkívül nagyjelentőségűek.

Az említett időszakban 62 külföldi tudós és kutató látogatta meg intézményeinket. A külföldi vendégek szakterületenkénti megoszlása: 8 matematikus, 33 fizikus, 21 csillagász.

KÖNYV- ÉS FOLYÓIRATKIADÁS

Az Osztály területén a beszámoló időszakában az Akadémiai Kiadónál 3 matematikai és 2 fizikai tárgyú könyv jelent meg. Ezek közül 2 eredeti mű, ezek: JORDAN KÁROLY: *„Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból“* és PÉTER RÓZSA: *„Rekursive Funktionen“* című könyve. Az utóbbi könyv II. kiadásban jelent meg. Az előbbi könyv hatalmas, több mint 600 oldalas mű, amely a klasszikus valószínűségszámítás irodalmának jelentős gazdagodását eredményezi. Szerzője részben e mű alapján részesült Kossuth-díjban. PÉTER RÓZSA könyvének 1950-ben megjelent I. kiadása nagy tudományos elismerést váltott ki. Orosz nyelvű kiadásra is sor került azóta, ezt már a szerző által adott lényeges kiegészítés alapján készítették. Most ez a kiegészített változat került újabb hazai (német nyelvű) kiadásra. A másik három könyv idegen nyelvű munkák fordítása. Már több ízben hangzott el az az óhaj, hogy az Osztály több önálló tudományos művet adjon ki magyar szerzőktől. Ennek megfelelően az 1957-es és a távlati könyvkiadási tervben már 21 magyar szerző műve szerepel. Örömmel közölhetem, hogy mind a matematikusok, mind a fizikusok egyre többen vállalkoznak önálló könyv írására, azonban ezek kéziratának elkészítése természetesen hosszabb időt vesz igénybe. A közeli és távolabbi időben kiadásra kerülő önálló könyvek jelentős része idegen nyelven fog megjelenni. A Matematikai Kutató Intézet munkatársai egy idegen nyelvű könyvsorozat megírására vállalkoztak a matematika különböző területeiről.

Idegen nyelvű folyóirataink tudományos színvonala minden szempontból megfelelő, külföldi visszhangjuk jó.

A könyv- és folyóiratkiadással kapcsolatban ki kell emelnem az Osztály könyvfelelősének, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikusnak körültekintő és lelkes munkáját.

Az Osztály javasolta, hogy az *Osztályközlemények* és a *Magyar Fizikai Folyóirat* szerkesztősége a jövőben általában ne fogadjon el olyan dolgozatot közlésre, amelynek idegen nyelvű változata az *Acták*ban, vagy valamely más internacionális jellegű folyóiratban is megjelent, vagy megjelenik. Az a cél, hogy ezekben a folyóiratokban elsősorban összefoglaló, ismertető cikkek közlésére kerüljön sor.

Az Osztály és az Akadémiai Kiadó között szorosabb együttműködés volna kívánatos. A könyvek szerzőivel a szerződést a Kiadó csak nagy sokára kötötte meg. Ebben része van annak, hogy a bizottságokban elfogadott könyvírási tervet a szerződéskötés előtt jóvá kell hagynia az Osztályvezetőségnek, a KFB-nek és az Elnökségnek is.

AZ OSZTÁLYVEZETŐSÉG ÉS A BIZOTTSÁGOK MUNKÁJA

Az *Osztályvezetőség* munkáját az elvi irányító és összefogó tevékenység további javulása jellemezte. Az Osztály tudományterületeit érintő problémákat a bizottságok javaslatai alapján vitatta meg. Több alkalommal és részletekbemenően foglalkozott a KFKI és a Csillagvizsgáló Intézet, továbbá a Kibernetikai Kutató Csoport problémáival.

A bizottságok észrevételei és javaslatai alapján megvitatta az intézetek múlt évi tudományos beszámolóit: sok alkalommal foglalkozott a tudományos utánpótlás problémáival, a könyvkiadással. Állandó napirendi pontja az Osztályvezetőség munkájának a bizottságok határozati javaslatainak a megvitatása és az Osztály rendezvényeinek az előkészítése. Javaslatot dolgozott ki a külföldi meghívásokra és kiküldetésekre vonatkozóan.

A *Matematikai Bizottság* az elmúlt időszakban eredményesen működött. A bizottság valamennyi tagja aktív és kezdeményező volt. A bizottság által elvégzett munkák közül a következőket kívánom kiemelni:

Megtárgyalta a bizottság a matematikai intézetek múlt évi beszámolóit és a matematikának a műszaki fejlesztéssel kapcsolatos feladatait. A matematikai kutatások problémáit, a kutatások irányát, a tudományos utánpótlás kérdéseit, a könyv- és folyóiratkiadással kapcsolatos problémákat a Bizottság alaposan és részletesen megvitatta és ugyanakkor a hozott határozatok végrehajtásának ellenőrzéséről is gondoskodott. Megvitatásra került a *Bolyai János Matematikai Társulat* munkája.

A *Fizikai Bizottság* körültekintően, nagy alapossággal végezte munkáját. Különösen ki kell emelnem BUDÓ ÁGOSTONnak, a Bizottság elnökének lelkes munkáját. Az elmúlt időszakban is tervszerűen folytatott intézetlátogatások során a bizottság közvetlenül megismerte az intézetek problémáit és javaslatot terjesztett az illetékesek elé azok megoldására. Behatóan foglalkozott a tudományos tervkészítés és beszámoló helyes módszerének kialakításával. Minden esetben meghallgatta a külföldön járt fizikusok beszámolóit és javaslatokat tett az egyes külföldön szerzett tapasztalatok hasznosítására.

Az osztálynak *Csillagászati Bizottsága* nincs, annak teendőit a Csillagvizsgáló Intézet Tudományos Tanácsa látja el. A tanács a szóban forgó időszakban elkészítette az 1956 augusztusában megtartott Változócsillag Konferencia programját és megvitatta az intézet múlt évi beszámolóját.

KAPCSOLAT AZ AKADÉMIA ELNÖKSÉGÉVEL ÉS A TUDOMÁNYOS OSZTÁLYOKKAL

Az Elnökség az Osztály problémáival rendszeresen foglalkozik. Az Osztály kapcsolata az elnökön és főtitkáron kívül JÁNOSSY LAJOS akadémiai titkárral volt a legközvetlenebb. A társosztályok (VI. és VII. osztály) teljes munkáját csak fővonalaiban ismerjük, de velük egyes kérdések felmerülésekor jó együttműködés alakult ki.

KAPCSOLAT AZ OSZTÁLY TUDOMÁNYTERÜLETEIN MŰKÖDŐ TUDOMÁNYOS EGYESÜLETEKKEL

Az Osztály szakterületéhez két tudományos egyesület tartozik: a *Bolyai János Matematikai Társulat* és az *Eötvös Loránd Fizikai Társulat.* Ezek munkájának irányításában akadémikusaink és számos bizottsági tagunk vesz részt. A társulatok a beszámolási időszakban az Osztály segítségével több tárgykörben kollokviumokat rendeztek. A *Matematikai Társulat* ez év szeptemberében Szegeden rendezte meg fennállásának 10. évfordulója alkalmából jubileumi vándorgyűlését. A vándorgyűlésen majd minden számottevő magyar matematikus részt vett, igen sok érdekes előadás hangzott el a különböző szekciókban, s ezek között a középiskolai oktatás problémáival foglalkozó szekció is volt. A vándorgyűlésen számos külföldi matematikus is részt vett.

A *Fizikai Társulat* ez év nyarán Balatonvilágoson „Elemi részek fizikája" és e hónap elején Mátraházán „Magfizika" tárgykörrel kollokviumot rendezett. Mindkét kollokvium eredményes munkát végzett. A Magfizikai kollokviumon 18 külföldi fizikus vett részt.

A kollokviumok és a vándorgyűlések eredményesek voltak, mivel azokon számos probléma felvetésére és megvitatására kerülhetett sor. Az eddigi tapasztalatok szerint a szűkebb szakterületeken, nyugalmas környezetben és aránylag csekély költséggel rendezett kollokviumok tartása helyes és ezek a jövőben is támogatást érdemelnek.

Befejezésül a *szaktitkárság* munkájáról teszek említést. A létszámcsökkentés során az osztálytitkárság dolgozóinak létszáma 9 főről 4 főre csökkent. Megvált a szaktitkárság éléről BALÁZS JÁNOS, akinek 4 éves eredményes működéséért jegyzőkönyvileg mondott köszönetet az osztályvezetőség. A szaktitkárság munkája — annak ellenére, hogy a munkakövetelmények nem csökkentek lényegesen — kielégítőnek mondható.

Ezzel beszámolómnak a végére értem. Igyekeztem összefoglaló képet adni az Osztály munkájáról és ezzel alapot adni ennek a munkának a megvitatására. Kérem az Osztály tagjait, hogy hozzászólásaikkal, bírálatukkal támogassák az Osztály munkáját.

SZÁMÍTÁSOK A SZABÁLYOZOTT, FÚZIÓS ATOMENERGIA-TERMELÉS NEHÉZSÉGEIRE VONATKOZÓLAG

SZALAY SÁNDOR—BERÉNYI DÉNES
(Debrecen)

Bevezetés

Az utóbbi két év folyamán több hír jelent meg a sajtóban és szakközlések is történtek a szakirodalomban arról, hogy világszerte több kutató laboratóriumban kutatások folynak kis atomsúlyú atommagok fúziója révén felszabadítható energia szabályozott és gazdaságos felhasználásának érdekében [1-14]. Meglepő az, hogy míg egyrészt a beszámolók nagyarányú anyagi áldozattal végzett, jelentős kísérleti munkáról adnak hírt, ugyanakkor más, igen kiváló, neves tudósok pl. H. THIRRING, [15, 16], H. A. BETHE [17], sőt többé-kevésbé E. TELLER [18, 19] is a szabályozott fúziós energia termelést a jelen ismereteink szerint reménytelennek, alig megvalósíthatónak tartják. Vannak azután mások, J. COCKROFT [20], R. F. POST [12], akik bár erősen bíznak a kérdés pozitív megoldásában, jelenleg inkább a nehézségeket látják előtérben. Csak kevesen vannak olyanok, mint H. J. BHABHA [21, 22, 23], akik gyors megoldásban reménykednek.

Tudomásunk szerint a világon a következő csoportok foglalkoznak fúziós kísérletekkel: az USA-ban *Project Sherwood* elnevezésű program keretében a Princetoni Egyetemen, valamint a Los Alamos-i és a Livermore-i laboratóriumokban folyik intenzív kutató munka. Ez utóbbiakat támogató, főleg elméleti jellegű csoportok működnek Oak Ridgeben és a NewYork-i egyetemen is. Az ezen problémákkal kapcsolatos ügyeket egy külön tudományos bizottságra bízták, amelyben E. TELLER, J. L. TUCK, L. SPITZER és W. BROEBECK [2, 3, 13, 14] foglalnak helyet. A *Project Sherwood*-on kívül folyik még ez irányú munka a *Haditengerészeti Kutató Laboratóriumban*, az *NYU Matematikai Intézetében* [1, 2, 24] és másutt is [13, 37]. A legújabb hírek szerint a *General Electric Co.* is nagyarányú erőfeszítéseket tesz ebben az irányban [35]. A Szovjetunióban pedig I. V. KURCSATOV professzor intézetében folyik nagyobb szabású kísérleti munka L. A. ARCIMOVICS és mások közreműködésével és egy elméleti csoport támogatásával, amelyben a vezető szerep M. A. LEONTOVICSÉ és közreműködnek A. D. SAKAROV és I. Y. TAMM is [4—11, 25, 28]. Hírek vannak arról, hogy Angliában is folyik hasonló irányú kutatás [2, 14, 20]. Egyikünk (SZALAY) svédországi tanulmányútja során szerzett értesülései szerint ott is folytatnak kísérleteket ebben az irányban. Számításokat viszont több más országban végeztek már, így hazánkban is [38, 39, 40, 41, 42].

Az *Atommag Kutató Intézet*ben Debrecenben is el kellett döntenünk azt, hogy tervezzünk-e a jövőben ilyen természetű kísérleteket vagy pedig nem? A fúziós energia szabályozott felszabadításától várható óriási előnyök arra indítanának, hogy kevés remény ellenére is kezdjünk el ezen a vonalon kísérletezni, bár az ilyen kísérletezés feltétlenül igen költséges és főleg sok szellemi kapacitást venne igénybe. A fent említett igen prominens szerzők határozott negatív véleménye viszont éppen ellenkező indító okot képez. A már említett néhány újabban megjelent és az e téren végzett kísérletekről beszámoló cikk még legjobb esetben is csak részeredményekről számol be.

Ez a fenti ellentmondásokkal teli helyzet arra indított bennünket, hogy egyrészt alaposan tanulmányozzuk át az ide vonatkozó elég csekély irodalmat, másrészt igyekezzünk magunk, bizonyos kiinduló feltevések alapján végzett számításokkal, e kérdésben önálló véleményt kialakítani, hogy ezen az alapon döntsük el követendő álláspontunkat. Lényegében ezekről a számításokról szeretnénk az alábbiakban beszámolni.

Valószínűnek tartjuk, sőt meg vagyunk győződve arról, hogy ilyen számításokat a fent említett vagy más kutató centrumokban mások is végeztek már* — hiszen a termonukleáris úton való energiatermelés számításának problémája elvileg elég régen meg van oldva [26, 27] — talán részben más, feltételezett experimentális körülményekre vonatkozólag, és egyes részleteket talán tilalmi rendelkezések miatt nem tettek nyilvánosan közzé. E munka energiatermelésre vonatkozó részének elkészülte után és e cikk megjelenése előtt több közlemény jelent meg ezen a területen, amelyek közlik az elvégzett számítások eredményeit és elveit, a számítások részletes menetének közlése nélkül. A már említett POST cikk [12] például a numerikus eredményeket C. LEITH-től magán közlés alapján vette át, míg legújabban W. B. THOMPSON [31] hozzánk eljutott dolgozata a részletes számításokra vonatkozóan egy másik, a *Proceedings of Physical Society*ben, ebben az évben megjelent munkájára hívatkozik, amely azonban szállítási nehézségek miatt mind a mai napig nem érkezett meg intézetünkbe. A számításoknál különös gondot fordítottunk arra, hogy a fúziós valószínűség kiszámításánál figyelembe vegyük a fúziós keresztmetszetre közzétett legújabb adatokat [29], valamint közelítő eredményeket szolgáltató átlagolás helyett az ütközésben résztvevő részecskék tényleges, viszonylagos sebességét. Számítással becsültük a szóbajövő igen

* Cikkünk elkészülte és megjelenése közben meg is jelent egy néhány ilyen jellegű cikk pl. [31, 36].

magas hőmérsékleten a fúzióban résztvevő anyagtól várható kisugárzott energiát a kiinduló feltevésünkben szereplő fúzionálódó anyagra. A nagyenergiájú gázkisüléses kísérletekkel való összehasonlításnál pedig felhasználtuk az R. F. POST [12] által közölt sugárzási meggondolásokat is. Ezek alapján reméljük, hogy számításaink a jelenleg adott ismeretanyag mellett a lehető legjobban megközelítik a valóságot.

A nagy nemzetközi érdeklődést a fúziós energia szabályozott felszabadításának lehetősége iránt nyilvánvalóan azok a roppant előnyök okozzák, amelyek ettől az energiatermeléstől várhatók lennének. A világ eredményesen felszabadított és szabályozható hasadási energia készletei uránhoz és tóriumhoz vannak kötve és ez anyagokból a Földön csak eléggé korlátozott mennyiségek vannak és azok is csak egyes országok területén. Továbbá ezen energia felszabadításával együtt nagy mennyiségű radióaktív hasadási termék keletkezik, amelyek elhelyezése komoly technikai probléma. A fúziós energiatermelés mentes volna ezektől a hátrányoktól. A deutérium a vízben a Földön gyakorlatilag kimeríthetetlen mennyiségben mindenütt rendelkezésre áll. 1 kg deutérium fúziója alkalmával kb. $2 \cdot 10^{10}$ Cal energia, azaz kb. tízezer tonna barnakőszén elégetéséből adódó energia szabadul fel. Radióaktív melléktermékek nem keletkeznek, mert a keletkező tricium nagyrészt elhasználódik a további fúzió folyamán.

Ezekkel a nagy előnyökkel szemben áll az a hátrány, hogy a fúziót szabályozott, folyamatos energiatermelő formában mindeddig még nem sikerült megvalósítani. Kérdés, hogy mit várhatunk a távolabbi jövőben? Az hogy fúziós, szabályozott energiatermelésre elsősorban, sőt majdnem kizárólag a *deutérium* jöhet számításba, véleményünk szerint nem a tricium magas árán múlik, hanem azon, hogy aránylag kevés lithium van a természetben. A tricium előállítási költségei azért magasak, mert az alábbi folyamattal neutron elhasználás révén állítható elő:

$$Li^6 + n \rightarrow H^3 + He^4.$$

A neutront egy hasítható atommag elvesztése árán atommáglyában állítják elő. Ha meggondoljuk azonban azt, hogy fúzió alkalmával a triciumból a neutron újból felszabadul a következő reakció egyenlet szerint

$$H^3 + H^2 \rightarrow He^4 + n,$$

tehát végeredményben visszakapjuk, akkor az előállítás magas ára csak másodrendűen jön számításba. A visszakapott neutron felhasználásával ti. lithiumból ismét triciumot tenyészthetünk, vagy pedig nem hasítható U^{238} izotópból plutóniumot állíthatunk elő. Ilyen értelmű atomtenyésztés tehát fúziós energiatermelésnél is kombinációba jöhetne. A lithium azonban elég ritka elem és elég kis mennyiségben fordul elő a Földön. A hidrogén bombák egyes robbantási kísérleteinél feltehetően alkalmazták a triciumot fúziós robbanáshoz szükséges magas kezdeti hőmérséklet elérésére, és a Li^6-ot is, fúziós körfolyamat előidézésére.

Miben áll a szabályozott, fúziós energiatermelés fő nehézsége? Mindenekelőtt definiálni kell, hogy mit értünk *szabályozott, fúziós energiatermelés* alatt. Nyilvánvaló, hogy *ez egy olyan fúziós energiatermelés, amelyik végső kimenetelében makroszkópikus értelemben fúzióból származó pozitív energia nyereséggel jár*, amit munka végzésére fordíthatunk. Laboratóriumban könnyen létrehozhatunk fúziót, ha pl. egy atomgyorsító berendezésben mintegy 100 keV-os deuteronokkal bombázunk nyugvó deuteronokat. A szerencsés magtalálat esetén létrejövő fúziós folyamatok energia nyereséget fognak eredményezni. Ugyanakkor azonban a bombázó részecskéknek csak rendkívül kis tört része fog találatot elérni és e miatt a hatásfok a mi szempontunkból reménytelenül leromlik. Amint már a Rutherford-féle szórási kísérletek óta tudjuk, elektromosan töltött bombázó részecskéknek csak rendkívül kis tört része (cca 10^{-6}) eredményezhet atommag átalakulást, mert az atommag kis átmérője miatt a találat valószínűsége igen csekély, továbbá a Coulomb-féle erőtér eltaszítólag hat és a bombázó részecske a perifériás elektronokkal való kölcsönhatás folytán fokozatosan elveszíti kinetikai energiáját. Minden olyan elképzelés, amelyik ezen rossz találati tényezőt megjavítani szeretné, reménytelen ábrándnak látszik, amint erre R. F. POST [12] is rámutat e munka készülte közben megjelent cikkében. Csupán töltetlen bombázó részecske, a neutron a jelenlegi egyetlen kivétel, amelyik az elektronokkal igen csekély mértékben lép kölcsönhatásba és lelassulva előbb-utóbb atommagba jut, mivel a Coulomb-féle erőtér nem hat rá. Egy töltött bombázó részecske viszont olyan erős kölcsönhatásba lép tehát az elektron héjjal, hogy energiáját fokozatosan elveszíti és így az gerjesztési energiává, majd végső fokon hő és fény (sugárzási) energiává alakul.

Fúziós atommagfolyamatok makroszkópikus arányú termonukleáris megvalósítása azon alapul, hogy ha az átadott energia annyira felhevíti a fúzióban résztvevő egész anyagot, hogy a magok hőkinetikai energiája is elegendő már másik atommagba való behatolásra, azaz fúzió létrejöttére, akkor előbbutóbb az egész jelenlévő anyag fuzionálódni fog. Ennek megvalósítása valóban sikerült is, amint tudjuk a különböző típusú hidrogén bombákban, amelyekben a kezdeti felhevítést atombombával érték el és azután a fúziós energia gondoskodott a hőmérsékletnek elegendő időn át való fenntartásáról, amíg ti. lényegében az egész anyag fuzionálódott (cca 10^{-6} sec).

Az a tény, hogy robbanásszerű fúziós folyamatot nagy arányokban sikerült előállítani, a legkevésbé sem jelenti azt, hogy ez folyamatos, szabályozott, békés energiatermelés formájában is lehetséges. Termonukleáris fúzió létrehozásához igen magas hőmérsékletre van szükség. Mint a későbbiekben látni fogjuk 10^6—10^8 fok hőmérsékletről van szó. Ilyen magas hőmérséklet tartós biztosításához nem elegendő a fuzionálandó anyag hőkapacitását ilyen magas hőmérsékletre felhevíteni, hanem állandóan pótolni kell a hőmérsékleti sugárzás által a környezetbe kisugárzott energiát, ami ilyen hőmérsékleten roppant méreteket ölt. Egy hidrogén bombánál durva nagyságrendi becslés azt mutatja, hogy 1 mikrosec alatt 10—20 megatonna nagy hatóerejű robbanó anyag robbanásának megfelelő energia termelés szükséges. Ilyen tempójú energia termelést folyamatosan fenntartani lehetetlen. Ha viszont nem folytatjuk tartósan az energia termelést, azaz nincs stacionárius egyensúly a környezetbe szétsugárzott és a fúzió által termelt energia között, akkor a fúziós elegy azonnal lehül és a fúzió megszűnik. Ezekből láthatjuk, hogy a szabályozott termonukleáris energia termelésnek a következő feltételt kell kielégítenie:

Az energia termelő rendszerben az időegység alatt termelt összes fúziós energia nem lehet kevesebb, mint a rendszer által a környezetnek leadott (kisugárzott) energia.

Ez az a feltétel, amelynek a tartós teljesítése jelenleg meglehetősen nehéznek látszik.

Fúziós magfolyamatok hatáskeresztmetszete az energia függvényében

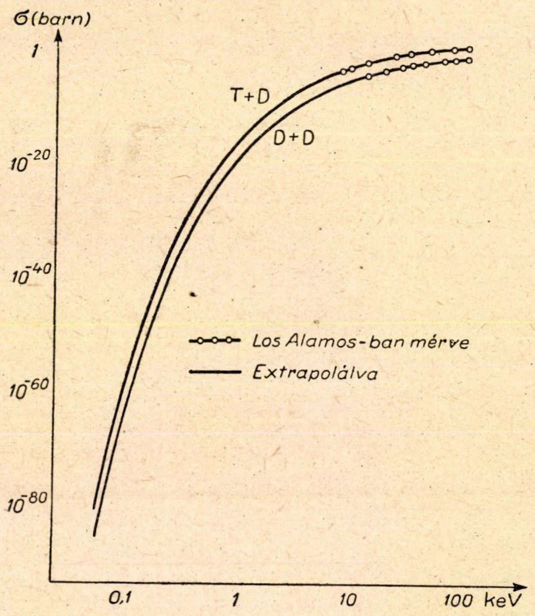
Laboratóriumban évtizedek óta hoznak létre atomi mennyiségeken fúziós folyamatokat a szokásos atomgyorsítási módszerekkel. A további számítások szempontjából igen fontos az, hogy a termonukleáris szabályozott energia termelés szempontjából számításba jövő legfontosabb fúziós folyamatok hatáskeresztmetszete mekkora, különböző bombázó energiák esetén. Mint jól ismeretes, a deutériummal kétféle fúziós folyamat jön létre:

$$D + D \rightarrow He^3 + n + 3{,}25 \text{ MeV},$$
$$D + D \rightarrow T + p + 4 \text{ MeV}.$$

A Los Alamos-i laboratórium munkatársai [29] igen nagy pontossággal megvizsgálták mindkét folyamat hatáskeresztmetszetét és azt az energia függvényében táblázatosan is közölték lefelé egészen 13 keV bombázó energiáig. A kétféle folyamat hatáskeresztmetszete cca egyforma. Ha most a bombázó energiát összehasonlítjuk a termikus mozgás kinetikai energiájával, akkor kiderül, hogy az általuk kimért legkisebb energia (13 keV) is igen magas hőmérsékletnek felel meg. Körülbelül $1{,}5 \cdot 10^8$ K° esetén tesz ki a legnagyobb valószínűségű hőkinetikai energia 13 keV-ot. (Az elektromos gyorsítás és hőmozgás energiájának egzaktabb összehasonlítását lásd később.) A fentebb idézett Los Alamos-i kutató csoport mérési eredményeit nyilván azért nem terjesztette ki alacsonyabb energiákra, mert ott a hatáskeresztmetszet már nagyon kicsi, tehát igen nehezen mérhető. Minthogy a fúziónak az akadályát a Coulomb-féle taszító erő potenciálja képezi és erre az áthatolásra vonatkozólag a Gamow-féle penetrációs elmélet nagyon jó magyarázattal szolgál, a mérési eredményeket számítással extrapolálhatjuk alacsonyabb energia értékekre, tekintettel arra, hogy ez a tartomány kísérleti méréssel nem látszik megközelíthetőnek. A fent idézett Los Alamos-i szerzők saját, különböző energiákon végzett mérési eredményeiket ilyen alapon extrapolálják egy folytonos görbével, amelyik jól simul a mérési pontokhoz [29]. A kísérleti pontok jól extrapolálhatók a következő formulával:

$$\sigma_{D+D}(E) = \frac{288}{E} e^{-\frac{45,8}{\sqrt{E}}}, \tag{1}$$

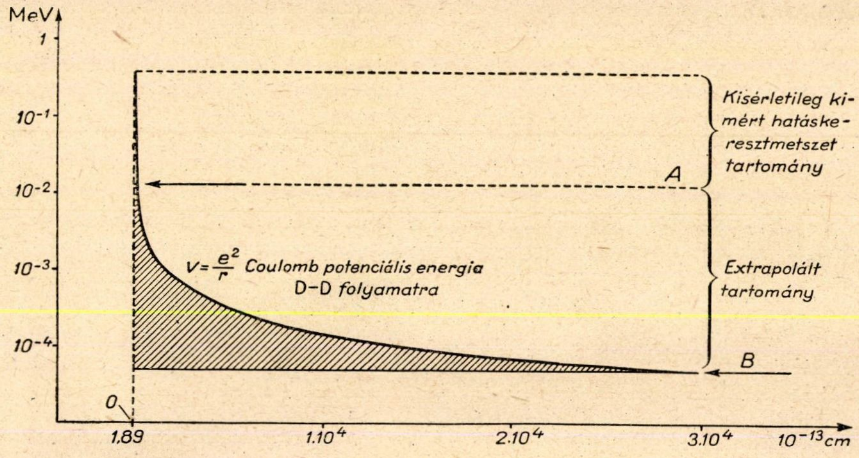
ahol $\sigma_{D+D}(E)$ a kétféle D + D folyamat összegezett hatáskeresztmetszete az E bombázó energia függvényében. Itt az E keV-ban van megadva és σ barnban adódik. (A levezetés menetére lásd az **1. sz. Függeléket.**) Ha e formulával kiszámítjuk a hatáskeresztmetszetet a mért értékeknél jóval alacsonyabb energiákra, akkor rohamosan csökkenő igen kis értékeket kapunk (1. ábra.). Az ábrán látható T + D hatáskeresztmetszet is hasonló formulával extrapolálható [29].



1. ábra. A T + D és D + D fúziós folyamatok össz-hatáskeresztmetszete a bombázó energia függvényében a Los Alamos-i mérések, ill. a Gamow penetrációs formula szerint elvégzett extrapoláció alapján

Az extrapoláció sok nagyságrendre terjed ki és felmerülhet az a kétely, hogy vajon az ilyen nagymértékben megengedhető-e? A mellette szóló legerősebb indok kétségtelenül az, hogy nem tudunk okosabbat tenni. Mint az 1. táblázatban láthatjuk később, a hőmozgással elérhető energia tartomány még igen nagy hőmérséklet esetén is olyan alacsony, hogy az atomgyorsítási kísérlettel és méréssel alig közelíthető meg.

Egy másik indok a következő kvalitatív megfontolás, amelyből úgy látszik, hogy igen kis energiák felé a Gamow-féle penetrációs elmélet alapján készült formula felhasználása indokolt. Magát a Gamow-féle elmélet helyességét nem lehet kétségbe vonni, hiszen sok különféle kísérleti eredményről helyesen adott számot [27]. A kérdés inkább az, hogy a fúzióban résztvevő két atommag közötti erőhatás potenciálját milyen pontosan ismerjük. Nem kétséges, hogy mindaddig, amíg két mag egymástól a magerők hatósugarán kívül van, a potenciált a Coulomb-féle potenciállal pontosan leírhatjuk. Amikor a részecskék atommag átmérő nagyságrendű távolságra ($\sim 10^{-13}$ cm) közelítik



2. ábra. A potenciál küszöb befolyása a fúziós hatáskeresztmetszetre. A számítással extrapolált kis energiájú tartományban a potenciál küszöb túlnyomó nagy része a pontosan ismert Coulomb potenciálból adódik

meg egymást, akkor a rövid hatótávolságú magerők döntő túlsúlyra jutnak és innentől kezdve a potenciált pontosan nem ismerjük. Kétségkívül ismeretes a kölcsönhatás előjele, amelyik a potenciált letöri, majd negatívra változtatja. A kísérleti mérésekkel meghatározott hatáskeresztmetszetek a potenciál függvény magasabb részére jutnak (lásd a 2. ábrán az *A* vonal fölötti besraffozatlan részt). Ha e mérésekből extrapolálunk egyre kisebb energia felé (lásd *B* vonal fölötti besraffozott részt), akkor az áthatolás akadályát képező potenciál küszöbből egyre nagyobb területet foglal el a Coulomb-féle potenciál által határolt, tehát pontosan ismert rész, a mag közelében levő és a magerők által definiált azaz a pontosan nem ismert részhez képest. Így ez a kvalitatív becslés arra mutat, hogy az áthatolás valószínűségét kis energiák felé extrapolálva viszonylag megbizhatóan számolhatjuk.

Az energiatermelés termonukleáris úton

A következőkben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy felhevítés útján a termonukleáris fúzió megvalósításának szempontjából, milyen kinetikai energiákat kaphatunk. Egy felhevített fuzionálandó tömeg általában nem lesz monoenergetikus, hanem valamilyen sebességeloszlást fog mutatni. Stacionárius egyensúly esetén feltételezhetjük, hogy a részecskék között Maxwell-féle sebességeloszlás jön létre. Erre az esetre elvégezhetőek az energiatermelésre vonatkozó számítások. Természetesen más elképzelés is lehetséges a fúziós plazma állapotáról. Egyik szélsőséges elképzelés volna pl. az, ha egy létrejött fúziós atomi folyamat alkalmával visszalökött atommag kinetikai energiáját, vagy az az által rugalmas ütközés folytán mozgásba hozott másik, még nem fuzionált atommag kinetikai energiáját vennénk figyelembe. Ez utóbbi feltevéssel azonban már tulajdonképpen eltérnénk a modell termonukleáris jellegétől (lásd később).

Ha most össze akarjuk hasonlítani egy Maxwell-féle sebességeloszlást mutató rendszer részecskéinek kinetikai energiáját egy atomgyorsítóban gyorsított monoenergetikus ionnyaláb kinetikai energiájával, akkor alapjában véve elvi nehézségekbe ütközünk. Adott T hőmérsékleten levő Maxwell-féle eloszlást követő (monoatomos) maghalmaz egyes atomjainak átlagos kinetikai energiája 3/2 kT, ezt nevezik egy részecske átlagos energiájának, ahol $k = 8{,}62 \cdot 10^{-8}$ keV/grad Boltzman-féle konstans. Tisztán energetikai szempontból ez lehetne az összehasonlítási alap. Minthogy azonban bennünket inkább az adott körülmények között létrejövő fúziók száma érdekel, helyesebb a reakció-kinetikai szempontokat szem előtt tartva a legvalószínűbb sebességhez tartozó energiát figyelembe venni. Ennek értéke 1/2 kT Maxwell-féle eloszlás esetén. Az alanti kis táblázatból látjuk (1. táblázat), hogy aránylag igen nagy hőmérsékleten is a mozgó részek kinetikai energiája keV-ban kifejezve milyen kicsi.

1. TÁBLÁZAT

T	A Maxwell eloszlás szerinti legvalószínűbb kinetikus energia 1/2 kT	A Maxwell eloszlás szerinti átlagos kinetikus energia 3/2 kT
10^5 K°	0,004 keV	0,012 keV
10^6	0,043	0,129
10^7	0,43	1,29
10^8	4,31	12,93
10^9	43,1	129,3

A kT-t gyakran kinetikus hőmérsékletnek is nevezik [12].

Fentiek alapján közelebbről meghatározhatjuk számításaink célját:

a) Számításainkat a D+D kétféle fúziós folyamatnak össz-hatáskeresztmetszetére végezzük el. Ebben a folyamatban olyan fuzionálható anyag szerepel, amelyik a legközönségesebben rendelkezésre áll és az egyik részfolyamata triciumot termel, amely a továbbiakban szintén további reagálásra képes.

b) Termonukleáris úton stacionáriusan létrehozott, makroszkópikus mennyiségre kiterjedő fúziós folyamatra végezzük számításainkat.

A fenti két követelmény azonban még nem képez kielégítő kiindulási alapot, hanem valami közelebbi elképzelést kell elfogadnunk a fúziós energiát termelő anyag állapotára, különösen a *hőmérsékletére és sűrűségére* vonatkozólag.

A fenti táblázatból is láthatjuk, hogy az anyagnak igen nagy hőmérsékleten kell lennie. Ilyen nagy hőmérsékleten az atomok és az elektronok gyakorlatilag túlnyomó részben disszociált állapotban vannak, tehát az anyag szabad atommagokból és szabad elektronokból álló tökéletes plazmának tekinthető.* A plazma sűrűségre vonatkozólag különböző szélsőséges értékek lehetségesek és e téren bizonyos fokig önkényesen kell eljárnunk. A Nap és csillagok belsejében a hidrogén sűrűsége elérheti a 80 gr/cm^3-t és hőmérséklete többször 10 millió fok C. A hidrogén bomba egyes típusainál cseppfolyósított deutériumot vagy triciumot, más típusoknál, feltehetően lithium deuterid alakjában, lényegében szilárd halmazállapotú deutériumot alkalmaztak. Az utóbbi esetekben a sűrűség nagyságrendje 0,1 gr/cm^3.

Egyes kísérleti kutatók [5, 12] ritkított gázplazmában kísérelték meg fúzió létrehozását. $5\cdot10^{-3}$ Hgmm — 760Hgmm-ig, azaz a sűrűségben kb. 10^{-9} — 10^{-4} gr/cm^3 tartományban. Földi körülmények között egyébként energia termelési szempontból a 0,1 gr/cm^3-es sűrűség adná a maximumot. KURCSATOV szerint [5] ilyen sűrűségű közegekben lehetne fúziós vizsgálatokat folytatni, de nem folytonos, hanem explóziós, ill. mikroexplóziós pillanatnyi fúziós folyamatok keltésével. Ilyen sűrűség és hőmérséklet mellett azonban millió atmoszféra nagyságrendű nyomás lépne fel és alig látszik elképzelhetőnek ilyen körülmények tartós fenntartása laboratóriumi viszonyok között akár valami fal, vagy akár a fal szerepét játszó elektromágneses erőtér útján. Földi körülmények között ilyen sűrűségű és ilyen hőmérsékletű közegben H bombák robbantása formájában hoztak létre fúziós folyamatot mikrosecundum időtartamig.

Egy adott, feltételezett fizikai állapotú plazmában létrejövő fúziók számát a kinetikai gázelméletből ismert számítási módból kiindulva számíthatjuk ki.

* A szabad elektronokból és ionokból álló gázt LANGMUIR nyomán plazmának nevezik. Tekintve, hogy a deutérium ionizációs energiája kb. 13 eV, az 1. táblázatból is látható, hogy már aránylag alacsony hőmérsékleten is a gáz igen nagy részben ionizálva van.

Tekintsük először csak közelítésben a problémát. Ismeretes a kinetikai gázelméletből, hogy egy d átmérőjű molekula olyan gázban, ahol cm^3-ként a molekulák száma n_0, másodpercenként átlagosan Z ütközést szenved. Z-t a következő összefüggés adja meg:

$$Z = \frac{v}{\lambda} = v\sqrt{2}\, n_0 \pi d^2, \tag{2}$$

ahol v a részecske sebessége és λ a közepes szabad úthossz. n_0 pl. a 0,1 gr/cm^3 sűrűségnél $3{,}03 \cdot 10^{22}$ deuteron/cm^3. A plazmában a molekula teljesen disszociálva van, az ütközés tehát deuteron és deuteron között következik be. Feltételezzük, hogy ha a fúziós hatáskeresztmetszethez tartozó átmérőt helyettesítjük be a formulába a molekula átmérő helyett, akkor minden ezen hatáskeresztmetszetnek megfelelően bekövetkező ütközés fúzióihoz vezet. A deuteronok és elektronok közötti kölcsönhatást, ütközést elhanyagoljuk.

Meg kell azonban még jegyeznünk a következőket:

A kinetikai gázelméletben az ütközés valószínűségének a számításánál a fenti egyenletben a d valóban *egy* molekula átmérőjét jelenti. Ezzel szemben az atommag-fizikában hatáskeresztmetszet alatt *a két mag* kölcsönhatásához tartozó hatáskeresztmetszetet értjük, tehát olyan keresztmetszetet, mintha a bombázó atommagot hallgatólagosan pontszerűnek tekintenénk. Ha ezt figyelembe vesszük, akkor a következőképpen kell áttérnünk a molekula átmérőről (d) a fenti pl. Los-Alamos-i mérések által kísérletileg is adott hatáskeresztmetszetre ($\sigma(E)$):

$$\sigma = d^2\pi, \quad \text{azaz} \quad Z = v\sqrt{2}\, n_0 \sigma(E). \tag{3}$$

A fúziós ütközés alkalmával feltevésünk szerint az ütközésben résztvevő mindkét deuteron megsemmisül, illetve fúzióval átalakul. Ennek megfelelően egy deuteron τ valószínű élettartama is egyszerű összefüggésben van az előbb tárgyalt mennyiségekkel:

$$\tau = \frac{1}{Z} = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{v\sqrt{2}\, n_0 \sigma(E)} = \frac{1}{4{,}46 \cdot 10^{-17} n_0 E^{1/2} \sigma(E)}. \tag{4}$$

A formula alapján könnyen kiszámíthatjuk egy ismert állapotú deuteron plazmában egy deuteron valószínű élettartamát. A σ azonban az E függvénye, amely függés konkrét alakját a Los Alamos-i mérések alapján adódó (1) extrapolációs formula adja meg. A plazma állapotát sűrűségén kívül hőmérsékletével jellemezzük, akkor abban valamilyen sebességeloszlás fog létrejönni és nagymértékben önkényesen járunk el, ha durva közelítésben valamilyen átlagolt sebességgel közelítjük meg a ténylegesen fennálló mozgási állapotot. Első durva közelítésben kiszámítottuk a deuteronok valószínű élettartamát 0,1 gr/cm^3 sűrűség mellett különböző hőmérsékleteken (2. táblázat). Ebben a

2. TÁBLÁZAT

A Maxwell-féle legvalószínűbb kinetikus energiával rendelkező deuteronok valószínű élettartama, 0,1 gr/cm³ sűrűségű plazmában különböző T K°-nál.

T	τ
10^5 K°	$2{,}54 \cdot 10^{296}$ sec
10^6	$1{,}45 \cdot 10^{86}$
10^7	$6{,}91 \cdot 10^{21}$
10^8	$2{,}37 \cdot 10$
10^9	$1{,}97 \cdot 10^{-5}$

számításban a Maxwell-féle eloszlás szerinti legvalószínűbb kinetikus energiát ($E_{\text{legv.}} = 1/2\, kT$) tételeztük fel valamennyi deuteronra.

Mint már említettük, a táblázat adatai csak durva tájékoztatásul szolgálnak. Minden esetre megállapítható belőle, hogy 10^6K° alatt fúzió gyakorlatilag nem jön létre, 10^8K° fölött pedig már robbanásszerű az adott sűrűségnél. Így a számítást főleg 10^6 és 10^8K° közötti tartományban ésszerű elvégezni. A plazmában jelenlevő deuteronok száma ezen adatoknak megfelelő arányban vesz részt a fúzióban, tehát csökkenni fog formai analógiában a radióaktív bomlás törvényével. Ha $t = 0$ időpillanatban az összesen jelenlevő fuzionálható deuteronok száma $n(0)$ volt és t idő mulva ez a szám n, akkor

$$n(t) = n(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{5}$$

Persze maga az egy deuteron valószínű élettartama is függ az 1 cm³-ben levő deuteronok számától az n_0-tól, azaz a sűrűségtől.

A következőkben számításainkat jobb közelítésben szeretnénk elvégezni. A sebesség durva átlagolása helyett figyelembe vesszük az eloszlást, minthogy a fúziós hatáskeresztmetszet rendkívül rohamosan változik a sebességgel (1. ábra).

Nyilvánvaló, hogy számítást csak akkor végezhetünk, ha feltételezünk valamilyen sebességeloszlást. Stacionárius termonukleáris energiatermelő folyamat esetén reális feltevésnek látszik a Maxwell-féle sebesség eloszlás. Ilyen esetben a számítás jól elvégezhető. A kapott eredmények alapján esetleg következtetni lehet más sebesség eloszlás feltételezése esetén várható eltérésekre.

A Maxwell-féle sebességeloszlásra vonatkozó numerikus számítások azt mutatták, hogy a legvalószínűbb és az ennél kisebb sebességeknek jelentéktelen a szerepe legalább is a számításba jövő hőmérsékleteken (10^6—10^8K°). *A fúzió szempontjából döntő jelentőségű az a sebesség tartomány, amelyik a Maxwell-féle sebességeloszlásban igen kis valószínűséggel előforduló extrém nagy sebességeket tartalmazza.*

Éppen ezért meglehetősen hamis eredményt kapnánk, ha bármiféle átlagérték alapján végeznénk számításainkat. E helyett először egy elemi sebesség intervallumra nézzük meg egy részecske fúziójának valószínűségét és ezt integráljuk 0-tól ∞-ig, hogy megkapjuk egy részecskére a teljes fúziós valószínűséget.

Célszerű természetesen sebesség helyett a részecskék energiáját bevezetnünk, mert a fúziós keresztmetszeteket is energia függvényében mérték és a fúziós hatáskeresztmetszet extrapolációs függvénye is így van megadva.

Az egy részecskére ily módon megkapott fúziós valószínűséget megszorozzuk a jelenlevő részecskék számával, megkapjuk az adott részecske sokaságban összesen létrejövő fúziók számát.

Ha azonban egyszerűen a fenti módon járunk el, akkor nyilvánvaló, hogy csak a kiszemelt bombázó részecske energiáját vesszük figyelembe és az ütközésben résztvevő másik részecskét nyugvónak tekintettük. Ez kétségtelenül helytelen, mert az összes részecskék részt vesznek a Maxwell-féle sebességeloszlásban és két részecske közötti ütközés átlagban lényegesen nagyobb, kb. kétszer akkora viszonylagos sebességgel történik, mint egy részecske sebessége a laboratóriumi koordináta-rendszerben.

Ennek figyelembevételével a fúziós valószínűség nagyságrendekkel (4—5 nagyságrenddel) nagyobbnak adódik, mint azt számszerűen is látni fogjuk.

Bevezetjük az ütközési energia fogalmát. Ha két részecske ütközésénél a két sebességvektor különbségének abszolút értékét vesszük, akkor az ezen sebességhez tartozó energiának megfelelő hatáskeresztmetszetet kell figyelembe vennünk a fúziós valószínűségszámításánál. Ezt az előbbiekben bevezetett energiát nevezzük ütközési energiának. Kérdés, hogy egy Maxwell-sebesség, illetve ennek megfelelő energiaeloszlást követő részecske sokaság ütközési energiái milyen eloszlást mutatnak. Pontosabban, ha az előbbi sokaságból kiválasztunk egy tetszőleges részecskét, annak ütközési energiája, ha ütközést szenved, milyen valószínűséggel fog az E és $E+dE$ közötti ütközési energia intervallumba esni. A probléma a valószínűségszámítás módszereivel viszonylag egyszerűen megoldható (lásd a **2. sz. Függeléket**) és a következő összefüggéshez vezet*:

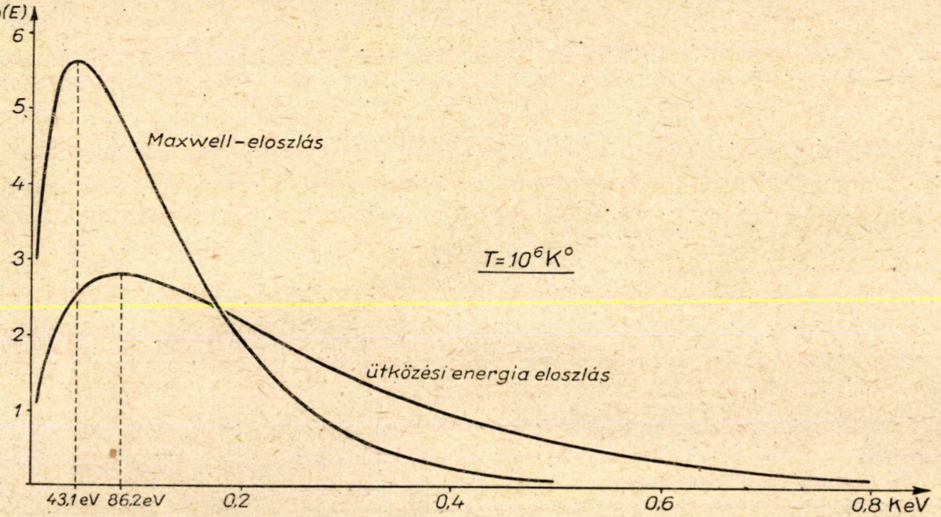
$$p(E)dE = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m_D^{1/2}}{(kT)^{3/2}} E e^{-\frac{E}{2kT}} \frac{dv}{dE} dE = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-\frac{E}{2kT}} dE, \qquad (6)$$

* Amennyiben tömegközépponti rendszerben dolgozunk, ennek az eloszlásnak az alakja megegyezik a Maxwell-eloszlásával (7), de akkor a σ formulájában (1), E helyére $2E$-t kell helyettesítenünk, mivel $2E_{tk} = E_{lab}$ (a „*tk*" index a tömegközépponti, a „*lab*" pedig a laboratóriumi rendszerre utal).

ahol $m_D = 3{,}34 \cdot 10^{-24}$ gr a deutérium tömege, $k = 8{,}62 \cdot 10^{-8}$ keV/grad a Boltzman konstans, T a hőmérséklet Kelvin fokokban és E az ütközési energia. Összehasonlításul a Maxwell-féle eloszlás:

$$p_M(E)dE = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{m_D^{1/2}}{(kT)^{3/2}} E e^{-\frac{E}{kT}} \frac{dv}{dE} dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-\frac{E}{kT}} dE. \quad (7)$$

Mint láthatjuk a lényeges különbség — konstans szorzó faktoroktól eltekintve az, hogy az ütközési energia eloszlásnál az exponens nevezőjében kT helyett $2kT$ van. Az eloszlások menetére lásd a 3. ábrát. Az ábra szerint az ütközési energia eloszlásánál a legvalószínűbb energia érték magasabb energiák felé tolódik el,



3. ábra. A Maxwell- és ütközési energia eloszlás valószínűségi sűrűségfüggvényének menete 10^6 K°-on. Abszcissza az energia keV-ban, ordináta a valószínűségi függvény

$1/2\ kT$ helyett kT-nál van (ez egyébként nemcsak az ábrából látható, matematikailag is egyszerűen adódik (6), ill. (7)-re szélső érték számításból) és ugyanígy maga az ütközési energia eloszlás is. Ez utóbbi igen jelentős lesz, mint látni fogjuk, a fúziók létrejötte szempontjából.

A (6) képlet egy valószínűségi sűrűségfüggvény, tehát azon részecskék átlagos számát (dn), amelyeknek ütközési energiája ütközésük esetén az E és $E + dE$ energia intervallumba esik az n_0 1 cm^3-ben jelenlevő részecske közül, a

$$dn(E) = n_0 p(E) dE \quad (8)$$

összefüggés adja meg. n_0-t, (az 1 gr-ban levő deuteronok számát) konstansnak tekintjük számításaink folyamán, mivel folyamatos egyensúlyban vizsgáljuk az energiatermelést és akkor feltételezhetjük a fuzionált deuteronok folyamatos pótlását.

Ha most a részecske (deuteron) sokaságból kiválasztunk egy részecskét, ahhoz tartozik egy $\sigma(E)$ hatáskeresztmetszet azokra az ütközésekre nézve, amelyekben az ütközési energia E. Ez a részecske az E energiának megfelelő v relatív sebességgel fog elmozdulni, ha a vele E ütközési energiával ütköző többi részecskéket állóknak tekintjük. Így a $\sigma(E)v$ egy hengertérfogatot határoz meg. Ezt meg kell szoroznunk az 1 cm^3-ben levő azon részecskék számával, amelyek ha a kiválasztott részecskével ütköznek, az ütközés relatív ütközési energiája E és $E+dE$ közé esik. Ezek számát viszont éppen az ütközési energiaeloszlás adja meg, (8)-ban dn azon részecskék száma, amelyek ütközésnél E és $E+dE$ közé eső ütközési energiával rendelkeznek.

Ilyen módon

$$\sigma(E)\,dn(E)\,v \tag{9}$$

a kiválasztott részecskére nézve az E és $E+dE$ energia intervallumban való fuzionálódás valószínűsége. A részecske azonban nemcsak olyan ütközést szenvedhet, amelyben az ütközési energia ebbe az elemi energia intervallumba esik, hanem bármilyen más ütközési energiájú ütközést a 0-tól ∞-ig terjedő energia intervallumban. Így a (9) kifejezést 0-tól ∞-ig integrálni kell, hogy megkapjuk egy részecskére nézve egy n_0 sűrűségű plazmában a fúzió valószínűségét. Ezt $n/2$-vel szorozva, ahol n a jelenlévő összes részecskék száma, megkapjuk az adott részecske sokaságban másodpercenként átlagosan létrejövő fúziók számát, n_f-et

$$n_f = \frac{1}{2}\, n \int_0^\infty \sigma(E) v \underbrace{n_0 p(E) dE}_{dn(E)}. \tag{10}$$

Az $\frac{1}{2}$-es faktor azért szükséges, mert nélküle minden részecskét kétszer vennénk figyelembe. Az integrálandó függvény, amelyet $f(E)$-vel jelölünk és fúziós függvénynek nevezhetünk, D + D fúziós folyamatra a következő alakú

$$f(E) = \frac{1}{2}\, n n_0 \sigma(E) p(E) v(E) = 1{,}83 \cdot 10^{-15} \frac{n n_0}{(kT)^{3/2}} e^{-\left(\frac{45{,}8}{E^{1/2}} + \frac{E}{2kT}\right)}. \tag{11}$$

Ha a $p(E)$ helyett $p_M(E)$-t helyettesítjük be, azaz elhanyagoljuk a részecskék relatív mozgását, ez igen durva hibát okoz, mint a 4. ábrán is látható, ahol a lineáris léptékben nem is lehetett egyszerre ábrázolni a két fúziós függvényt, mivel a maximumok között majdnem 5 nagyságrend különbség van.

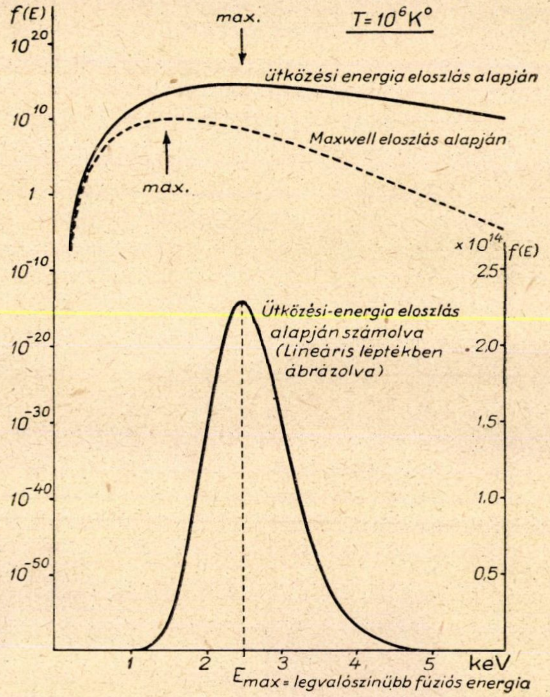
Az ábrából látható az is, hogy az ütközési energiaeloszlásnak megfelelő fúziós görbe maximuma nagyobb keV-okban kifejezett energiáknál van, mint az egyszerű Maxwell eloszlásnál. A számítások szerint a két maximum értékének az eltérése alacsonyabb hőmérsékleteken jóval nagyobb, mint magasabbakon. Így pl. $2 \cdot 10^5$ K°-on Maxwell eloszlás alapján számolva $3{,}00 \cdot 10^{-8}$ fúzió/gr sec a maximum, míg az ütközési energiák figyelembevételével $1{,}37 \cdot 10$, tehát a különbség kb. 9 nagyságrend. Ugyanakkor 10^6 K°-on a megfelelő értékek $2{,}23 \cdot 10^9$ és $1{,}10 \cdot 10^{14}$, tehát a különbség kb. 5 nagyságrend. A maximum elhelyezkedése egyébként igen egyszerűen kiszámítható a fúziós függvényre nézve szélső érték számítással, azaz a derivált függvény eltűnési helyének megállapításával. Így a hőmérséklet és azon keV-ben kifejezett energia érték között, ahol adott hőmérsékleten maximális a fúziók száma (jelöljük ezt E_{max}-szal és nevezzük adott hőmérséklethez tartozó legvalószínűbb fúziós energiának) a következő az összefüggés, ha T K°-ban van megadva, k pedig $8{,}62 \cdot 10^{-8}$ keV/grad,

$$E_{max}^{3/2} = 45{,}8\, k\, T = 3{,}94 \cdot 10^{-6} \cdot T. \tag{12}$$

Arra az érdekes eredményre jutottunk tehát, hogy a fúziók száma ott maximális, ahol az 5. ábrán az ütközési energiáknak megfelelő részecske szám már nem is volt ábrázolható. Ennek okát jól szemlélteti maga az 5. ábra. Bár azon részecskék száma, amelyek ütközés esetén adott energia intervallumba esnek, az energia növekedtével rohamosan csökken, a hatáskeresztmetszet viszont még rohamosabban nő és így adódik, hogy a fúziók egy olyan energiánál mutatnak maximumot, amelynek viszonylag kevés ütközés ütközési energiája felel meg.

A fúziós függvény integrálását explicite nem lehet elvégezni és ezért az integrál értékét különböző hőmérsékletekre a Simpson-formula segítségével határoztuk meg.

Ezt azért lehet viszonylag könnyen megtenni, mivel, mint láttuk, a fúziós függvény igen erős maximumot mutat és az energia csökkenésével vagy emelkedésével



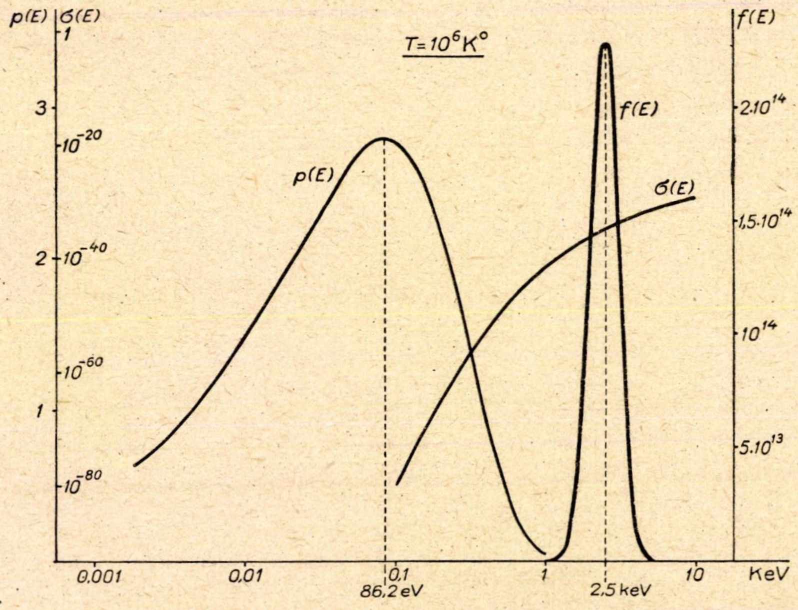
4. ábra. 1 gr deuteron plazmában $s = 0{,}1$ gr/cm³ sűrűség és $T = 10^6$ K° esetén létrejövő fúziók valószínűsége a viszonylagos ütközési energia függvényében. Abszcissza az ütközési energia keV-ban, ordináta baloldalt a fúziós függvény logaritmikus skálában, jobb oldalon pedig az előbbi függvény lineáris léptékben. Összehasonlításul feltüntettük a közönséges Maxwell-eloszlás alapján számított fúziós függvény értékeit is a megfelelő energiáknál, logaritmikus ábrázolásban. Ez utóbbi ebben a diagramban, az előbbihez viszonyítva kicsiny értékei miatt, lineárisan nem is ábrázolható nagyságrendekkel esik és hamarosan elhanyagolhatóvá válik. Így pl. 10^6K°-nál a numerikus integrálást ténylegesen csak 1-től 5,5 keV intervallumban kellett végrehajtani.

A számításokat $2 \cdot 10^5 - 10^9$ K°-ig nyolc hőmérsékleti ponton végeztük el (lásd a 3. táblázatot). A számításokból adodó össz fúziós számot, n_f (1 gr anyagban másodpercenként létrejövő fúziók száma) nagyon egyszerűen át lehet számítani teljesítmény egységekbe, ha megszorozzuk az egy fúziónál felszabaduló energia értékével. Két deutérium fúziójánál közelítőleg 3,6 MeV szabadul fel, azaz a fúziók száma és a másodpercenként felszabaduló energia W közötti összefüggés

$$W[\mathrm{kW/gr}] = 5{,}76 \cdot 10^{-16}\, n_f \ \mathrm{kW/gr}. \qquad (13)$$

Az eredményeket grafikusan a 6. ábra szemlélteti 0,1 gr/cm³ sűrűségű plazmára ($3{,}03 \cdot 10^{22}$ deuteron/cm³).

A (10) formulában az n és n_0, az 1 gr-ban, ill. 1 cm³-ben levő részecskék száma, kiemelhető, az integráljel elé, tehát a kapott eredményeink könnyen átszámíthatók tetszőleges n_0 deuteron/cm³ sűrűségű plazmára, ha felhasználjuk

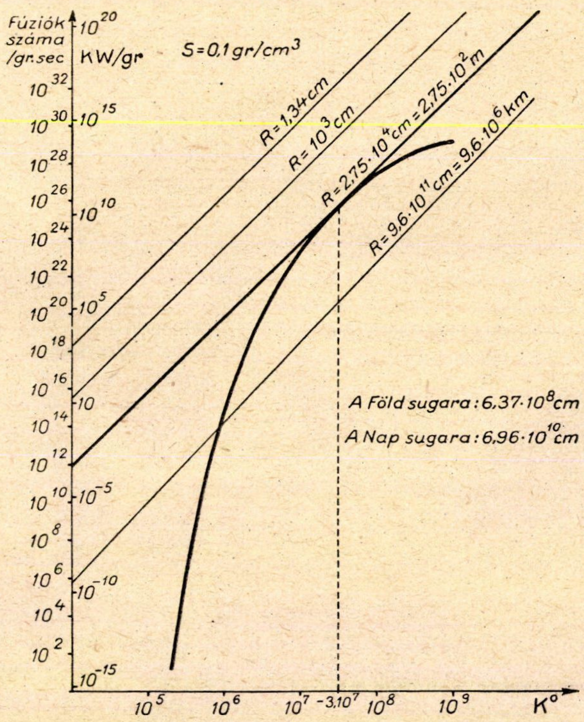


5. ábra. 1 gr deuteron plazmában $s = 0{,}1$ gr/cm³, $T = 10^6$ K° esetén fellépő fúziós folyamat leírásában szereplő mennyiségek változása az ütközési energia függvényében számításaink szerint. $p(E)$ a viszonylagos ütközési energiaeloszlási függvény, $\sigma(E)$ a hatáskeresztmetszet, $f(E)$ pedig az egész plazmában egy kiszemelt dE ütközési energia intervallumban secundumonként létrejövő fúziók valószínű száma (fúziós függvény)

3. TÁBLÁZAT

A fúziók száma és az energiatermelés grammonként és secundomonként 0,1 gr/cm³ sűrűségnél ($3{,}03 \cdot 10^{22}$ deuteron/cm³)

Hőmérséklet K°-ban	Fúziók száma $gr^{-1}\,sec^{-1}$	Energia felszabadulás kW/gr
$2 \cdot 10^5$	$1{,}37 \cdot 10$	$7{,}89 \cdot 10^{-15}$
$6 \cdot 10^5$	$4{,}88 \cdot 10^{10}$	$2{,}80 \cdot 10^{-5}$
10^6	$1{,}10 \cdot 10^{14}$	$6{,}35 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^6$	$2{,}76 \cdot 10^{21}$	$1{,}60 \cdot 10^6$
$8 \cdot 10^6$	$6{,}95 \cdot 10^{22}$	$4{,}40 \cdot 10^7$
10^7	$3{,}16 \cdot 10^{23}$	$1{,}81 \cdot 10^8$
10^8	$3{,}52 \cdot 10^{27}$	$2{,}02 \cdot 10^{12}$
10^9	$1{,}19 \cdot 10^{29}$	$6{,}85 \cdot 10^{13}$

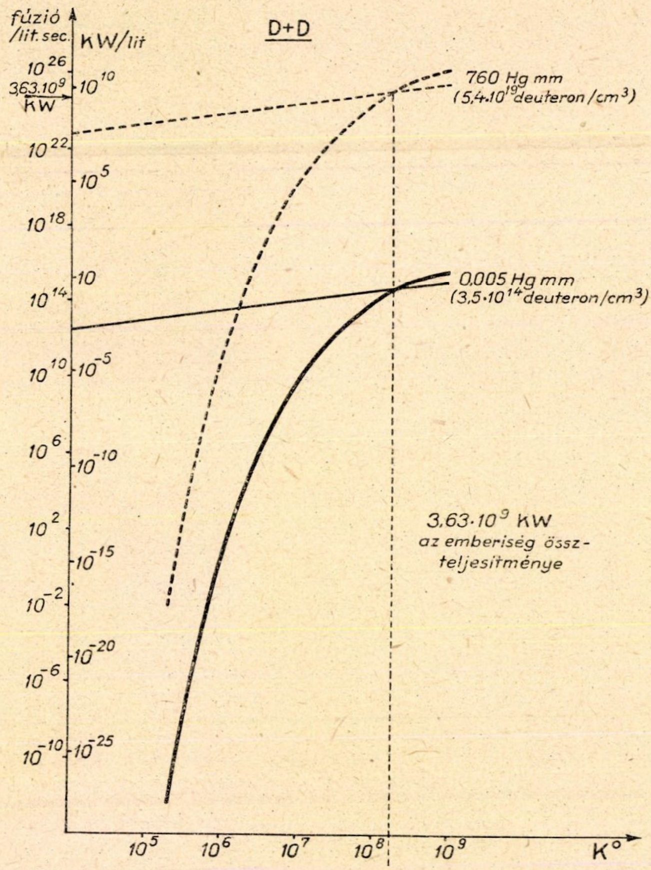


6. ábra. 1 gr deuteron plazma másodpercenkénti fúzióinak száma és energiatermelése a hőmérséklet függvényében $s = 0{,}1$ gr/cm³ sűrűség mellett. Az egyenesek ugyanezen állapotú plazma hőmérsékleti sugárzása Stefan-Boltzmann törvénye szerint számolva. A különböző egyenesek az 1 gr plazmára eső kisugárzást adják meg, különböző sugarú, tehát különböző felületű gömb alakú plazma feltételezése esetén a 6. ábrán adott grafikont. Ha $n_{f_0}(T)$-val jelöljük az n_0 deuteron koncentrációjú plazmában T hőmérsékleten cm^3-enként létrejövő fúziók számát, akkor

$$n_f(T) = \frac{n_{f_1}(T)}{10}\frac{n_0^2}{n_{01}^2} = 1{,}09 \cdot 10^{-44}\, n_{f_1}(T)\, n_0^2, \tag{14}$$

ahol $n_{f_1}(T)$ a 6. ábráról olvasható le (n_{01} és n_{f_1} a 0,1 gr/cm^3 koncentrációjú plazmára vonatkozó érték).

Ha viszont figyelembe vesszük, hogy adott nyomáson 1 cm^3-ben hány deuteron van, akkor a következő formulára jutunk, amelyik megadja secun-



7. *ábra.* Ritkított gázállapotú deuteron plazmákban létrejövő fúziók száma, ill. energiatermelés az abszolut hőmérséklet függvényében. A felső szaggatott görbe $s = 1{,}78 \cdot 10^{-4}$ gr/cm^3 ($5{,}4 \cdot 10^{19}$ deuteron/cm^3) normál sűrűségű (azaz sűrűség kb. szobahőmérsékleten és atmoszférikus nyomáson) deuteron plazmára vonatkozik. Az alsó görbe szobahőmérsékleten 0,005 Hgmm nyomású $s = 1{,}17 \cdot 10^{-9}$ gr/cm^3 sűrűségű ($3{,}55 \cdot 10^{14}$ deuteron/cm^3) plazma energiatermelését adja. Az egyenesek ugyanezen plazmák hőmérsékleti sugárzását adják Heitler számításai nyomán

dumonként és literenként az adott nyomáson és hőmérsékleten létrejövő fúziók számát (N_f)-t

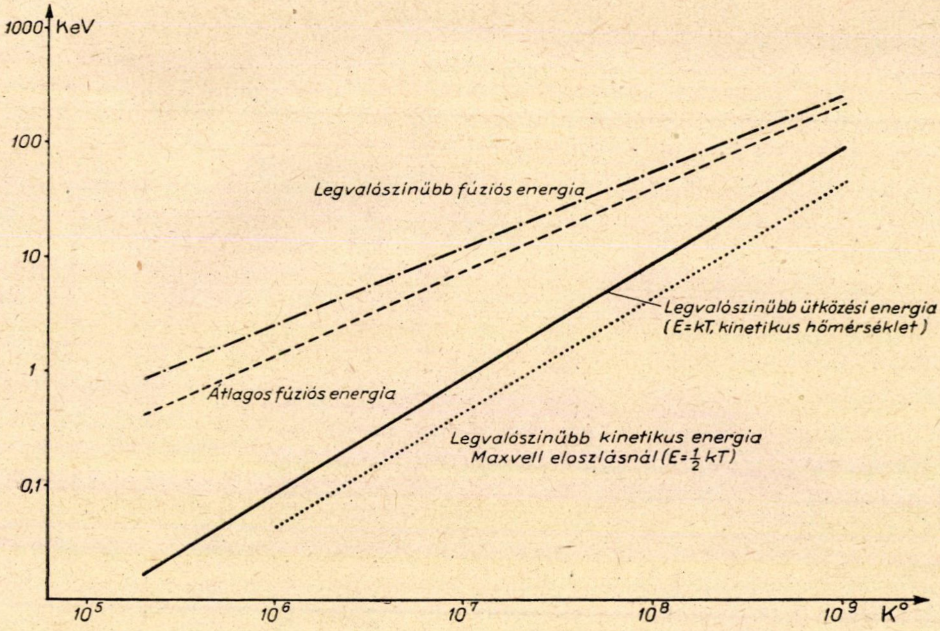
$$N_f(T) = 5{,}52 \cdot 10^{-10}\, n_{f_1}(T) p_x^2, \qquad (15)$$

p_x Hgmm-ben megadott nyomás és $n_{f_1}(T)$ mint előbb a 6. ábrabeli grafikonból olvasható le.

Az előzőekben említett két szélső nyomásértékre: 760 és 0,005 Hgmm-re kapott átszámítási görbék a 7. ábrán láthatók.

A kapott értékek alapján minden egyes hőmérséklethez hozzárendelhetünk egy ún. „fúziós ekvivalenst" vagy „átlagos fúziós energiát". Ez úgy történik, hogy megkeressük azt az energiát, amelyet minden egyes jelenlevő atomhoz hozzárendelve a számítások szerinti fúziós számot, ill. energia felszabadulást kapnánk. Az átlagos fúziós energia fogalma tulajdonképpen a Maxwell-eloszlás átlagos energiájának analógonja, mivel egy adott hőmérsékleten bizonyos számú deuteronból álló plazma a fúzió szempontjából úgy viselkedik, mintha az egyes deuteronok energiája az átlagos fúziós energiának megfelelő értékű volna. A konkrét számértékek kikeresése a részletes számításokban használt szám-táblázatok felhasználásával történt. Ezeket az értékeket a 4. táblázat 5. oszlopában adjuk.

A 8. ábrán egy diagramban foglaltuk össze azokat az energiaértékeket, amelyeket egy adott hőmérsékletnél a részecske halmazhoz hozzárendelhetünk.



8. ábra. Adott hőmérsékletű deuteron plazmához megadható karakterisztikus energia értékek

4. TÁBLÁZAT

Adott hőmérséklethez rendelhető energia értékek

T K°-ban	Legvalószínűbb kin. e. Maxwell-eloszlásnál $1/2\,kT$	Legvalószínűbb ütközési energia kT	Legvalószínűbb fúziós energia	Átlagos fúziós energia
$2\cdot10^5$	0,008 keV	0,017 keV	0,9 keV	0,42 keV
10^6	0,043	0,086	2,5	1,3
10^7	0,43	0,86	11,0	7,0
10^8	4,31	8,62	50,0	40,0
10^9	43,1	86,2	250,0	225,0

Meggondolások a fúziós plazma energiaveszteségeire vonatkozólag

Az előbbiekben részletesen megvizsgáltuk az adott feltételek között végbemenő termonukleáris reakciók esetében az energiatermelést. A fúziós energia szabályozott folyamatos energiatermelésre való felhasználásánál azonban, mint már említettük, az időegységenként és grammonként felszabaduló energia egyensúlyt kell tartson a különböző energia veszteségekkel. Ez a kérdés még talán problematikusabb — az eddigiekben publikált cikkek alapján is — mint az energiatermelés. A szovjet vizsgálatokról szóló beszámolókban általában sugárzási veszteségekről nem is beszélnek, hanem a vezetési veszteségekre vonatkozóan közölnek becsléseket. Így pl. ARCIMOVICS [30] szerint ez utóbbi veszteségek $T^{7/2}$-nel arányosan növekednek. Ugyanakkor E. TELLER [19] a múlt év közepén tartott előadásában részletesebb meggondolásokat közöl a szabályozott termonukleáris reakciókkal kapcsolatban és vezetési veszteségekről nem is tesz említést. A sugárzási veszteségekre vonatkozólag viszont arra a következtetésre jut, hogy azok a Stefan-Boltzmann törvény szerintinél lényegesen kisebbek.

Mi a továbbiakban először az eredeti feltevésünk szerinti 0,1 gramm/cm^3 sűrűségű plazma sugárzási viszonyaira vonatkozóan szeretnénk néhány hozzávetőleges meggondolást végezni, ill. általánosabban a nagyobb sűrűségű plazmákra.

A Wien-féle eltolódási törvény alapján 10^6 K°-on a hőmérsékleti sugárzás maximuma 28,8 kXE-hez esik, ami körülbelül 0,4 keV-os lágy Rtg sugárzásnak felel meg.

A szóban forgó sűrűségű plazmák sugárzási viszonyaira vonatkozó meggondolások menetét a 3. sz. függelékben adjuk. Az egzakt tárgyalás igen fáradságos, ezért számunkra elegendő lesz a következő közelítő meggondolást elvégezni.

Becsüljük meg az 1,34 cm sugarú 0,1 gramm/cm^3 sűrűségű 1 gr-os deutérium gömb felület egységén sec-ként kisugárzott energia mennyiséget. Ismeretes, hogy a Kirchoff törvény szerint bármely felületre megkapjuk az emisszió-képességet ($\mathfrak{E}(T, \lambda)$), ha az abszolut fekete test emisszió-képességét $E(T, \lambda)$-t, adott hőmérsékleten és adott hullámhossznál megszorozzuk az illető felület abszorpció-képességével $a(\lambda)$-val:

$$\mathfrak{E}(T, \lambda) = a(\lambda) E(T, \lambda), \tag{16}$$

azaz a teljes sugárzásra

$$\mathfrak{E}_t = \int_0^\infty \mathfrak{E}(T, \lambda) d\lambda = \int_0^\infty a(\lambda) E(T, \lambda) d\lambda. \tag{17}$$

Hogy itt $\mathfrak{E}_t$-re számszerű értéket kaphassunk az $a(\lambda)$-t kell becsülnünk az 1,34 cm sugarú deutérion gömbre. Érvényes a következő összefüggés az abszorpció-képességre, a transzmisszióra és a reflexióra:

$$a + t + r = 1,$$

azaz egy adott testre az abszorpció képesség a, a transzmisszió t, és a reflexió r, összege 1-gyel egyenlő, vagyis az abszorpció képesség

$$a = 1 - t - r. \tag{18}$$

0,4 keV-os Rtg sugárzásnál a reflexiót elhanyagolhatónak tekinthetjük, mivel az tulajdonképpen csak a fotonok nagy szögben való szórásánál jön létre, ami pedig igen kis valószínűségű. A transzmissziót az ismeretes abszorpciós törvény alapján számolhatjuk

$$I = I_0 e^{-\alpha(\lambda)x}, \quad \text{azaz} \quad \frac{I}{I_0} = e^{-\alpha(\lambda)x}, \tag{19}$$

ahol $\alpha(\lambda)$ a lineáris abszorpciós koefficiens, I_0 a felületre eső sugárzás eredeti intenzitása, I az intenzitás az abszorbens rétegben való áthaladás után. Az abszorbens réteg x vastagsága esetünkben az átmérő kétszeresének vehető, azaz 2,38 cm-nek. Az abszorpciós koefficiens a Landolt-Börnstein [32]-ben adott táblázatból interpolálva a sugárzási eloszlás maximumának megfelelő hullámhosszra

$$\alpha(\lambda_{\max} \sim 0{,}4 \text{ keV}) \sim 33{,}5 \text{ cm}^{-1} \quad (\varrho = 0{,}1 \text{ gr/cm}^3\text{-nél}).$$

Így a transzmisszió

$$t(\lambda_{\max}) = e^{-\alpha(\lambda_{\max})2R} = e^{-67} \sim 0.$$

Ebből az abszorpció-képesség (18) alapján

$$a(\lambda_{\max}) = 1 - e^{-67} \sim 1.$$

Így, ha $a(\lambda)$ helyére $a(\lambda_{\max})$-ot helyettesítjük (17)-be

$$\mathfrak{E}_t \sim \varepsilon_t = a(\lambda_{\max}) \int_0^\infty E(T, \lambda) d\lambda = a(\lambda_{\max}) \sigma T^4 \sim \sigma T^4, \tag{20}$$

azaz az általunk feltételezett körülmények között a deutérium gömb felületének sugárzása nem tér el lényegesen a Stefan-Boltzmann törvénytől. Megjegyezzük, hogy ezek a meggondolások közel érvényesek még száz millió fok hőmérsékletű plazmára is, ahol pedig a hőmérsékleti sugárzás maximuma $\sim$ 43 keV-nél van.

Természetesen ezen meggondolást igen durva egyszerűsítés mellett végeztük el, az abszorpció koefficienst nem tekintve a hullámhossztól függőnek, hanem egyszerűen hőmérsékleti sugárzás maximumához tartozó hullámhossznak megfelelő abszorpciós koefficiens értéket helyettesítettünk be képletünkbe. Ez az eljárás azonban közelítő meggondolásunkban azért fogadható el, mivel a maximumnál nagyobb hullámhosszakra ilyen egyszerűsítés mellett meggondolásunk végeredménye még inkább igaz, rövidebb hullámokra pedig a hőmérsékleti sugárzási görbe meredek letörése miatt elhanyagolást vehetünk.

A 6. ábrán feltüntettük a Stefan-Boltzmann törvénynek megfelelő grammokra számított sugárzási veszteséget különböző nagyságú gömbökre. Láthatjuk, hogy adott sűrűség viszonyok mellett kb. 300 méter sugarú gömbnél, amelyik közelítőleg a nap belsejének hőmérsékletén van ($2-3\cdot10^7$ C°) következnék be egyensúly a hő termelés és a hő kisugárzás között. Szabad, akadályozatlan hőmérsékleti sugárzás esetén (átlátszó, reflexió mentes reaktor edény) nem lehetséges termonukleáris energia termelés földi körülmények között folyamatos egyensúlyban, hacsak igen nagy mértékben le nem szorítjuk a plazma 1 grammjára eső sugárzási veszteséget. Ahhoz, hogy ilyen folyamat 10^6 K°-on, adott deuteron sűrűség mellett, minden további nélkül egyensúlyban létrejöjjön, $9{,}6\cdot10^6$ km sugarú nagy álló csillag méreteire lenne szükség. Ha valamilyen mesterséges, képzeletbeli reflektorral visszatarthatnánk az energia kisugárzást, akkor ahhoz, hogy 1 gr össz-tömegű és 1,34 cm sugarú ($s=0{,}1$ gr/cm^3) deuteron plazma egyensúlyban fúziós energiát termeljen, olyan tökéletes reflektorra lenne szükség, amelyik az energia kisugárzást a rendszerből cca tizenkét nagyságrenddel csökkentené. Nyilvánvaló, hogy ilyen mérvű energia visszatartást elérni nem lehet. Még szobahőmérsékleten se reflektálnak vissza a legjobb visszaverő képességű tükrök többet a látható fényből, mint 97—98 %-ot. De teljesen valószínűtlennek látszik az is, hogy valamilyen mágneses fallal az energia kisugárzást ilyen arányban le lehessen csökkenteni.

Azokra a plazmákra, amelyekkel a legutóbbi időben fúziós kísérleteket végeztek, az előbbi meggondolások nem érvényesek. POST előbbiekben többször említett cikkében [12] közöl egy összefüggést W. HEITLER nyomán, amelyik a sugárzás kvantumelmélete alapján vezethető le, a ritkított plazmák hősugárzási energia sűrűségére a hőmérséklet függvényében. A formula D+D reakció esetére

$$I_{D+D}=0{,}54\cdot10^{-30}\,n_0^2\,T_e^{1/2}\ \text{Watt/cm}^3, \qquad (21)$$

ahol n_0 az 1 cm^3-ben levő deutériumok száma, T_e az elektronok kinetikus hőmérséklete kT-ben kifejezve. Az ezen formula alapján számított kisugárzási görbéket tüntettük fel a 7. ábrán. Az elektron és ion hőmérsékletet — mint maga POST is — egyenlőnek vettük. Megjegyezzük, hogy a formulát magát POST-tal egyidőben más szerzők is levezették [39].

Az ábrából is látható, hogy ebben a sűrűség tartományban (ahol tehát a rendszer méretei jóval kisebbek, mint a sugárzás közepes abszorpciós úthossza), a plazma sűrűségétől függetlenül a termonukleáris fúziós energia termelés egyensúlyi hőmérséklete $\sim 2 \cdot 10^8$ K°-nak adódik. Ilyen hőmérsékleten az energia termelés óriási méretű. Egy liter normál sűrűségű deutérium gázt tartalmazó plazma energia teljesítménye nagyobb lenne, mint az egész emberi civilizáció jelenlegi energia teljesítménye (az ábrán bejelölve). Ilyen körülmények között azonban egy liter ilyen sűrűségű plazma $\sim 10^{-6}$ sec alatt fuzionálna és így a folyamatos energia termeléshez secundumonként $\sim$ 100 gr deutériumot kellene a rendszerbe betáplálni.

A Maxwell-sebességeloszlástól eltérő sebességeloszlás feltételezése

A fentiekben láttuk, hogy Maxwell-eloszlás feltételezése esetén a részecskéknek csak csekély tört része rendelkezik — a számunkra egyáltalán elérhető hőmérsékleten — a fúzióhoz elegendő energiával. Számításaink eredményeképpen kiderült, hogy Maxwell-féle sebességeloszlás esetén a plazma átlagos hőmérséklete igen nagy, kb. 10^8 K° kell hogy legyen, stacionárius egyensúlyban levő fúziós folyamat megvalósitására. Ilyen magas hőmérsékletek tartós fenntartása beláthatatlan nehézségekbe ütközik. Számításaink mindenesetre megbízhatónak látszanak, mivel valószínű, hogy ha stacionárius fúziós egyensúlyi állapot egyáltalán megvalósítható, ebben az állapotban a részecskék sebessége Maxwell-eloszlást kell, hogy mutasson. Mint említettük, több kutató (KURCSATOV és mások) kondenzátor battériák kisütésével keltett rövid elektromos impulzusokkal kísérelték meg egy plazmában kellő magas hőmérsékletet elérni a fúzió megindulásához. Mint később látni fogjuk, Maxwell-sebességeloszlás esetén nem érhető el még észlelhető fúziós effektus jelentkezése sem az elért kb. 1 millió K°-on, stacionárius egyensúlyról nem is beszélve, amiről ők ezekben a kísérletekben eleve lemondtak.

Az a kérdés, hogy milyen becsléseket nyerhetünk a Maxwell-féle eloszlástól eltérő eloszlás feltételezése esetén fúziós folyamatok létrejöttének valószínűségére vonatkozólag? Nyilvánvaló, hogy a fúziós folyamat szempontjából az az előnyös, ha a Maxwell-féle eloszlástól való eltérés olyan, hogy a nagy energiák tartományában a Maxwell eloszlástól eltérően nagyszámú részecskét találunk. Nyilvánvaló továbbá az is, hogy ilyen eloszlás csak átmenetileg állhat fenn, mielőtt még a statisztikai egyensúly beállott volna. Azok a részecskék bírhatnak kiemelkedően nagy energiával, amelyek az előző fúziós generációból származó nagy energiájukat e fúzió utáni első vagy második ütközés után nyerték. Vizsgáljuk meg, hogy a fúzióból közvetlenül származó, pillanatnyilag nagy energiákat hordozó részecske milyen valószínűséggel hozhat létre újabb fúziót.

A fenti számításokat a

$$D+D \begin{cases} \nearrow He^3 + n + 3{,}25 \text{ MeV} \\ \searrow H^3 \ + p + 4{,}00 \text{ MeV} \end{cases}$$

folyamatra végeztük el. Itt az egyik ágban tricium keletkezik és a folyamat létrejötte pillanatában szétrepülő triton és proton viszi magával a folyamatban felszabaduló egész energiát. A klasszikus mechanika törvényei szerint ez az energia úgy oszlik meg a két részecske között, hogy a tricium 1 MeV, a proton pedig 3 MeV energiával bír. Hogy ez a triton egy nagy energiájú gázkisülés konkrét feltételei között létrehozhatja-e a

$$H^3 + D \rightarrow He^4 + n + Q$$

fúziós folyamatot, azt a következő meggondolások alapján döntjük el.

A közepes fúziós szabad úthosszt, azaz a fúzióig a triton által átlagosan megtehető utat a klasszikus

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n_0 d^2}$$

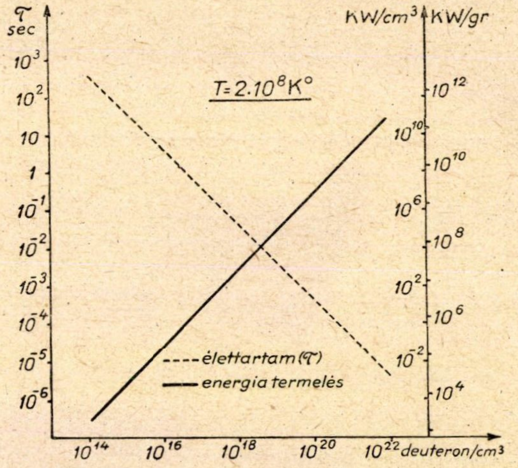
formulából teljesen analóg módon számolhatjuk, mint azt a fúzióra vonatkozó eddigi számításainkban tettük, azaz a πd^2 helyére σ-t helyettesítünk. A mérések szerint a T+D folyamat hatáskeresztmetszete 1 MeV-nál kb. 0,4 barn, így a közepes fúziós szabad úthossz $\sim 4 \cdot 10^6$ cm, 10 Hg mm-es kiindulási nyomást feltételezve (kb. $n_0 = 7 \cdot 10^{17}$ deuteron/cm^3), ami a kísérletileg vizsgáltak közül egyike a legnagyobbaknak. Az 1 MeV-os triton sebessége viszont ugyanakkor cca $8 \cdot 10^8$ cm/sec. Így tehát az 1 MeV-os tritonnak kb. $5 \cdot 10^{-3}$ sec időtartamú kisülésre van szüksége ahhoz, hogy újabb fúziót hozzon létre, ill. ilyen időtartamig kell hogy a triton a plazmában tartózkodjék. Ismeretes azonban, hogy a Kurcsatov-féle kísérletekben a leghosszabb kisülés is csak $3 \cdot 10^{-5}$ sec időtartamig tartott. Így ha mágneses térrel sikerülne is a tritont körpályán a plazma belsejében tartani, akkor is az annyi idő alatt legfeljebb 0,2 km utat tehetne meg a 40 km kívánt szabad úthossz helyett.

A fenti gondolatmenetből nyilvánvaló, hogy egy D+D fúziós folyamatból származó triton számára újabb fúzió létrehozatalának valószínűsége igen kicsi. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy meggondolásunkban nem vettük figyelembe, hogy a triton a fúziós ütközés előtt sok, más ütközést szenved, részben elektronokkal, részben Coulomb szórásban más magokkal (Rutherford-szórás). Eközben akár teljesen is elveszítheti energiáját, úgy, hogy a fúziós folyamat tényleges létrejöttének valószínűsége még az előbbiekben megadott értékeknél is jóval kisebb.

Összefoglalás

Végső következtetések. Termonukleáris reaktor lehetősége és paraméterei

Meggondolásaink alapján nyilvánvaló, hogy folyamatos, szabályozott termonukleáris energia termelés gazdaságos megvalósítása beláthatatlan nehézségekbe ütközik. Ha extrém magas sűrűségeket tételezünk fel (0,1 gramm/cm^3), ahol az energiatermelés nagyobb (ti. mint a kisebb sűrűségeknél), a sugárzási veszteségekre nézve olyan hatalmas értéket kapunk, hogy az egyensúlyhoz szükséges kritikus méretek földi viszonylatban elérhetetlen nagyok gátolatlan, hőszigetelés és reflektáló tükörmentes kisugárzást feltételezve. Azokon a plazmasűrűségeken viszont, amelyeken a vizsgálatokat az utóbbi időben végezték, kisebbek a sugárzási veszteségek, azonban a fúziós energiatermelés még kisebb. Így például a 7. ábrán láthatjuk, hogy az egyensúly körülbelül $2 \cdot 10^8$ K°-nál következik be mind a két ábrázolt sűrűségnél, amelyek az eddigi kísérleti munkában a felső és alsó határt képezték. Más sűrűségekre végezve számításokat és rajzolva meg a diagramot, ugyanezt az egyensúly hőmérsékletet kapjuk, ha olyan sűrűségekről van szó, amelynél a sugárzási szabad úthossza nagyobb, mint a rendszer méretei.



9. ábra. A szaggatott vonal a deuteronok fúzióval szembeni közepes élettartamának változását mutatja a plazma koncentráció függvényében az egyensúlyi hőmérsékleten ($\sim 2 \cdot 10^8$), a folytonos vonal pedig a megfelelő sűrűségeknél ugyanezen hőmérsékleten az energiatermelést

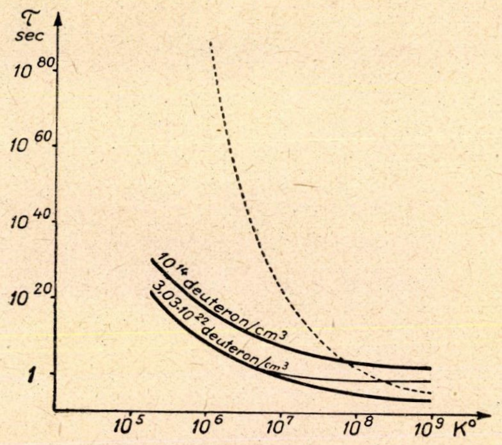
A fúziós egyensúlyi hőmérséklet, amelynél az energiatermelés megegyezik a sugárzási veszteséggel (tulajdonképpen pontos számításnál az össz-energia veszteséget kell figyelembe venni), független tehát a plazma sűrűségétől abban az esetben, amikor a rendszer nincs sugárzási abszorpciós egyensúlyban. Ilyen rendszereknél „kritikus“ méret nem lép fel.

A fenti nehézségek nem változnak lényegesen akkor sem, ha valamely más, jelenleg ismert fúziós reakcióra végezzük el a meggondolásokat például a T + D folyamatra.

A 9. ábrán feltüntettük a különböző sűrűségű deuteron plazmák energia termelését $\sim 2 \cdot 10^8$ K° hőmérsékleten, ahol tehát az energiatermelés éppen egyensúlyt tart a sugárzási veszteségekkel. Ugyanezen az ábrán láthatjuk a deuteronok közepes élettartamának változását is, a koncentráció függvényében. Itt a τ közepes élettartam nem a (4) képletből lett számolva, amely csak durva közelítést jelent, hanem egy pontos eredményt adó meggondolás alapján, amelyet részletesen a **4. sz. Függelék**ben tárgyalunk, és amelynek végeredménye

$$\tau = \frac{1}{4} \frac{n_0}{n_{f_0}}, \tag{22}$$

ahol n_0 az 1 cm^3-ben levő deuteronok száma, n_{f_0} pedig az 1 cm^3-ben sec-ként létrejövő fúziók száma. — A (22) képletet azon feltevés alapján számítottuk, hogy a fuzionált részecskéket folyamatosan pótoljuk. Ha ettől a feltevéstől eltekintünk, ismét más eredményhez jutunk a közepes élettartamra vonatkozólag (lásd az **5. sz. Függeléket**). A különböző élettartamok közötti viszonyt jól szemlélteti a 10. ábra.

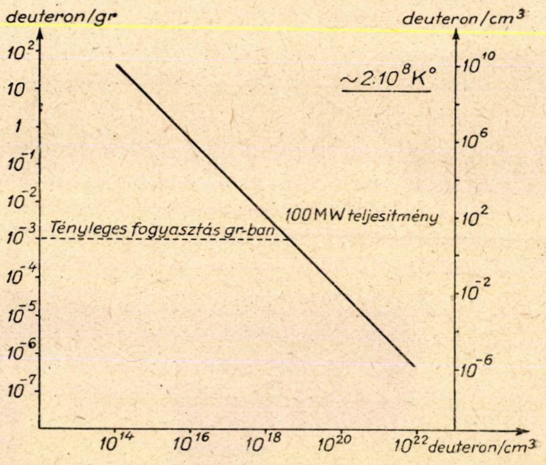


10. ábra. A deuteronok τ valószínű élettartama a hőmérséklet függvényében. Az alsó két vastag folytonos görbe a (22) formula alapján lett számolva, amelynél a fuzionált deuteronok folyamatos betáplálása van feltételezve. A vékony folytonos görbe a τ változását mutatja, ha a deuteronok folytonos betáplálását nem feltételezzük. A szaggatott vonal pedig összehasonlításként a (4) formula alapján számolt τ értékeket mutatja (Maxwell legv. kin. energia alapján számolva)

Ha a rendkívül magas egyensúlyi hőmérséklet elérésének és a folyamatos üzem fenntartásának rendkívüli nehézségeitől pillanatnyilag eltekintve termonukleáris reaktort akarnánk tervezni, a 9. ábra szerint elsősorban a kis plazmasűrűség látszik alkalmasnak a viszonylag magas élettartam, és így nem robbanásszerűen végbemenő fúziósebesség, valamint a Stefan-Boltzmann törvénytől eltérő, több nagyságrenddel kisebb sugárzás miatt. Itt azonban újabb nehézséggel találjuk szembe magunkat. Mint a 11. ábra mutatja, 100 MW teljesítmény esetén kis sűrűségeknél igen nagy térfogatok lépnek fel, például 10^{14} deuteron/cm^3-nél $\sim 10^{10}$ cm^3, azaz $\sim 10^4$ m^3, és ezek magas hőmérsékleten és megfelelő magas nyomáson tartásának nehézségei a térfogat növekedtével igen nagy mértékben megnőnek.

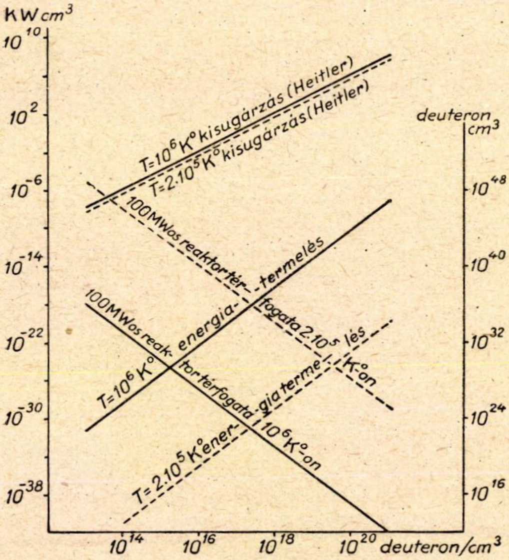
Elvileg további lehetőséget jelentene olyan reaktor tervezése, amelyik viszonylag alacsonyabb hőmérsékleten, mondjuk 10^6 K°-on működik, ha sikerülne a sugárzó energiát valamilyen megfelelő reflektorral visszatartani, hogy ezen az alacsonyabb hőmérsékleten álljon be a dinamikus egyensúly az energia termelés és kisugárzás, illetve általában az energia veszteségek között. Nagy sűrűségű plazmákra a 366. oldalon tett megállapítások érvényesek, kisebb sűrűségekre a 12. ábra mutatja a viszonyokat. Láthatjuk, hogy például 10^6 K°-ra egy 16—18 nagyságrendes energia visszatartására lenne szükség, $2 \cdot 10^5$ K°-on pedig még ennél is vagy 12 nagyságrenddel nagyobb. Vagyis egy olyan energiareflektor (tükör) volna szükséges, amely a ráeső energiának csak 10^{18}-ad, illetve 10^{30}-ad részét engedné át. Már hivatkoztunk arra az adatra, hogy még a látható fény tartományban is a legtökéletesebb tükrök csak 97—98 %-ot vernek vissza, ami azt jelenti, hogy a sugárzásnak 2—3 századrészét átengedik, illetve abszorbeálják.

Látható továbbá, a 12. ábráról, hogy a kisugárzás és energiatermelés közti viszony a plazma koncentrációval némileg javul, azonban ez a reflexiós követelmények szempontjából elhanyagolható. Megállapítható az is, hogy a hőmérséklet emelkedésével sokkal jelentősebb a viszonyok javulása, mert $2 \cdot 10^5$ K°-ról 10^6 K°-ra emelve a hőmérsékletet, a termelés-veszteség viszony mintegy 12 nagyságrendet javul.



11. ábra. A diagram azt mutatja, hogy milyen tömegű, ill. térfogatú reagáló deuteron plazma jelenlétére van szükség a reagáló rendszerben különböző sűrűség mellett 100 MW energiatermeléséhez. A szaggatott egyenes a minden sűrűségre azonos deuteron fogyasztást jelzi grammokban kifejezve

Az ábrán feltüntettük, hogy egy 100 MW-os teljesítményű reaktor esetén milyen méretek lépnének fel. Láttuk az előbbiekben, hogy milyen méretek szükségesek, ha a $\sim 2 \cdot 10^8$ K°-os egyensúlyi hőmérsékleten működtetnénk a reaktort. A 12. ábra szerint viszont 10^6 K°-on, a sűrűségnek megfelelően, kb. 10^{32}-től 10^{16} cm^3-ig terjedő méretek lépnek fel $2 \cdot 10^5$ fokon pedig még ennél is mintegy 12 nagyságrenddel nagyobbak. A 12. ábrát a 6. ábrával összevetve érdekes következtetések vonhatók le a kisebb és nagyobb sűrűségű plazmákra vonatkozólag. Nagy sűrűségűeknek az olyan fúziós közegeket tekintjük, amelyben a sugárzás közepes úthossza kisebb, mint a rendszer méretei. Az látható tehát, hogy a 6. ábra szerint 10^6 K°-on 0,1 gr/cm^3 ($3{,}03 \cdot 10^{22}$ deuteron/cm^3) sűrűségű 1 gr-os kis deuteron gömbnél a dinamikus egyensúly eléréséhez kb. tizenkét nagyságrenddel kell csökkentenünk a kisugárzást, míg a 12. ábrán látható kisebb plazma sűrűségeknél egy 16—20 nagyságrendes reflexióra van szükség. Úgy látszik tehát, hogy nagy sűrűségeknél, alacsonyabb hőmérsékleten aránylag kissé kedvezőbbek a viszonyok. Nagyobb hőmérsékletek felé ez a helyzet természetesen megfordul a kisebb sűrűségek javára, a Stefan-Boltzmann törvény jóval erősebb hőmérséklet függése miatt, mint a HEITLER szerinti sugárzásnál. Ezért van azután metszéspont a kisebb sűrűségeknél az energiatermelésnek, és az energia kisugárzásnak megfelelő görbék között, azaz létezik koncentrációtól független egyensúlyi hőmérséklet, míg az előbb említett sűrűbb fúziós közegnél 1 gr-os deuteron gömb esetében ilyen egyensúlyi hőmérséklet nem létezik.



12. ábra. Az energiatermelés és kisugárzás változása a plazma koncentráció függvényében 10^6 és $2 \cdot 10^5$ K°-on. Ugyanezen hőmérsékleten és koncentrációknál egy 100 MW teljesítményű fúziós reaktor térfogatának változása is fel van tüntetve

A következőkben foglalkozzunk azzal a kérdéssel, hogyha nem is sikerül a folytonos, szabályozott fúziós energiatermelést termonukleáris úton megvalósítani, milyen hőmérsékleten sikerülhet létrehozni kimutatható, detektálható effektust. A detektáló berendezések ismert sajátságainak megfelelően a jól detektálhatóság határát másodpercenként és plazma literenként mintegy 100 fúzióban vehetjük fel (ha például egy gyors neutronszámlálóval ionizációs kamrában észlelünk). Egy 5 Hgμ nyomású ($n_0 = 3{,}5 \cdot 10^{14}$ deuteron/cm^3) deuteron plazmánál például a 7. ábra szerint ez cca 5—$6 \cdot 10^6$ K°-nál következik be, 760 Hgmm-nél ($n_0 = 5{,}4 \cdot 10^{19}$ deuteron/cm^3) pedig 3—$4 \cdot 10^6$ K°-nál. Ilyen hőmérsékletek tartós fenntartása teljesen lehetetlennek látszik. KURCSATOV és munkatársai [5, 6] kondenzátorok segítségével létrehozott erősáramú pulzáló gázkisülésekben becslésük szerint 1 millió K°-ot értek el, de csak cca 10^{-5} sec időtartamig. Tekintettel a pulzus rövid tartamára, az egy impulzusra eső fúziók száma nyilvánvalóan a detektálhatóság határa alatt kellett legyen, és az általuk észlelt neutronok nem lehettek a szó szoros értelmében termonukleáris eredetűek, mint ahogy erről ők maguk is meg voltak győződve.

Mindezek alapján a termonukleáris fúziós energia termelés folyamatos, szabályozott üzemben igen nehéznek látszik, bár semmiképpen sem lehet azt mondani, hogy azok a hatalmas erőfeszítések, amelyeket ebben az irányban folyó kísérletekre világszerte fordítanak, hiábavalók volnának. Többen, így TELLER is, kiemelték, hogy ezek a vizsgálatok igen sok új fizikai ismeretre vezetnek, elsősorban a nagyenergiájú gázkisülések körében, de a fizika mindazon más ágaiban is, amelyek a publikált és az esetlegesen nem publikált kísérletekben megvizsgálásra kerültek vagy kerülni fognak. Mindenesetre nagyon sok kisérletezésre és új fizikai felismerésre van szükség. Mindeddig folytonos, szabályozott fúziós folyamatot gazdaságos energia nyereség céljaira nem tudtak létre hozni. Tudományos szempontból mindenesetre szükséges lenne a fúziós hatáskeresztmetszetek mérésének minél kisebb energia tartományok felé való kiterjesztése a penetrációs formula ellenőrzésére, esetleg nagy ionáram erősségek segítségével. Ilyen kisérletek terveire lehet következtetni pl. E. O. LAWRANCE az 1955-ös genfi nemzetközi atomenergia konferencián tartott beszámolójából [33].

Ma még nehéz lenne megjósolni, hogy milyen új felismerések lesznek azok, amelyek esetleg újabb lehetőségeket adnak a fúziós folyamatokban rejlő hatalmas energiatartalékok megközelítéséhez. Hogy ilyen új, átütő erejű felismerés váratlanul felbukkanhat, azt az elmúlt évek felfedezései után nem lehet kizártnak tartani. Ne felejtsük el, hogy RUTHERFORD még abban a meggyőződésben halt meg 1937-ben, hogy az atommagok energiáját gyakorlati célra sohasem lehet majd felhasználni. Halála után két évvel pedig HAHN és STRASSMAN felfedezték a maghasadásban azt az útat, amelyen az atomenergia energiatermelésre hasznosítható.

Hogy tényleg lehetségesek ebben az irányban egészen új felfedezések, arra mutatnak pl. a legutóbbiakban publikált mezonikus atomra vonatkozó vizsgálatok [34]. E szerint a μ-mezon katalizátorként szerepelhet a fúziós reakciókban, amennyiben a hidrogén atomban az elekron helyét betöltve annyira leárnyékolja a mag Coulomb töltését, hogy az ilyen mezonikus atom egy másik megfelelő maggal —250°-os hőmérsékleten is fúziós reakcióra képes, amely után a μ-mezon újra felszabadul. A baj azonban ennél a folyamatnál is az, hogy a μ-mezon élettartama igen rövid (10^{-6} sec), előállítása pedig ugyancsak igen rossz hatásfokú, így gyakorlatilag nem hasznosítható.

E helyen is köszönetet mondunk DR. GYÍRES BÉLA professzornak általában a matematikai problémákban nyújtott segítségéért és a 2. függelékben közölt ütközési energia eloszlás számításáért, továbbá DR. GÁSPÁR REZSŐ professzornak a kézirat gondos átnézéséért és a diszkussziókért. Intézetünk több más munkatársát is köszönet illeti a számításokban való részvételért és a problémák megvitatásáért.

1. sz. Függelék

A D+D fúziós folyamat hatáskeresztmetszetének extrapolálására felhasznált formula kapcsolata a Gamow-penetrációs faktorral

KONOPINSKI és TELLER szerint [1] a D+D reakció hatáskeresztmetszete kielégíti a következő relációt [2]

$$E\sigma(E)=\sum_l a_l P_l(E), \qquad (*)$$

ahol $\sigma(E)$ a totális hatáskeresztmetszet, E a bombázó energia, P_l a penetrációs valószínűség két $[l(l+1)]^{1/2}\hbar$ relatív pálya impulzus momentummal rendelkező deuteron számára, a_l az energiától független konstans.

A penetrációs valószínűség konkrét

$$P_l=e^{-2C_l} \qquad (**)$$

alakjában szereplő C_l az $l=0$ speciális esetben a Gamow-penetrációs formulában szereplő C-vel egyenlő, és ez az $E \ll B=\frac{e^2}{R}$ (B a potenciál falmagassága, $R=1{,}45\times10^{-13}.\ A^{1/3}$ cm, e az elemi töltés) feltételnek eleget tevő energiáknál [3]

$$C=\frac{e^2\pi(2M)^{1/2}}{2\hbar}E^{1/2}-\frac{2e(2MR)^{1/2}}{\hbar},$$

ahol M a redukált tömeg. Ezt visszahelyettesítve a (*) és (**) formulákba és az $l=0$-tól különböző indexű C_l-eket elhanyagolva, σ-ra egy (1) alakú összefüggésre jutunk, amely a méréseket megközelített tartományban jól megadta a mért értékeket:

$$\sigma(E)=\frac{c_1}{E}e^{-\frac{c_2}{E^{1/2}}}, \qquad c_1=a_l e^{-\frac{4e(2MR)^{1/2}}{\hbar}},$$

$$c_2=\frac{e^2\pi(2M)^{1/2}}{\hbar}.$$

A cikkünkben végzett extrapolációra ez a formula kielégítő, mivel számításaink segítségével csak nagyságrendi viszonyokról akarunk tájékozódni, továbbá mivel a σ-ra a $E = 0{,}1-100$ keV tartományban van szükségünk és a B értéke pedig ~ 600 keV-vel egyenlő.

IRODALOM

[1] E. J. Konopinski and E. Teller: Theoretical Considerations Conserning the D + D Reactions. *Phys. Rev.*, Vol. **73** (1948) 822.
[2] K. G. McNeill and G. M. Keyser: The Relative Probabilities and Absolute Cross Sections of the D—D Reactions. *Phys. Rev.*, Vol. **81** (1951) 602.
[3] H. A. Bethe: Nuclear Physics. B. Nuclear Dynamics, Theoretical. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. **9** (1937) 69.

2. sz. Függelék

Az ütközési energia eloszlásfüggvényének levezetése

Egy edényben levő gáz molekuláinak sebességvektorát adott időpillanatban jelölje

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\xi, \eta, \zeta),$$

ahol a zárójelben levő mennyiségek az x, y és z tengely irányába eső komponensek. Tekintsük e komponenseket valószínűségi változóknak, amikor is egyben $\mathfrak{x}$ is valószínűségi vektorváltozó.

A kinetikus gázelméletben a ξ, η, ζ valószínűségi változókról a következőket tudjuk:

a) független valószínűségi változók,

b) igen jó közelítéssel normális eloszlással bíró valószínűségi változók. Ha — amint azt a következőkben feltételezzük — a gáz nyomása minden irányban ugyanaz, mindhárom változó szórása megegyezik. Legyen ez σ.

c) Ha feltételezzük, hogy a gázban nincs áramlás — és a következőkben ez lesz a helyzet — akkor a szereplő valószínűségi változók várható értéke zérus.

Válasszunk ki most az edényből találomra két egymással ütköző gázmolekulát, amelyeknek sebességvektorát az ütközés pillanatában jelölje

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1),$$

illetve

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2).$$

A zárójelbe tett ξ_1, η_1, ζ_1, illetve ξ_2, η_2, ζ_2 komponensek az *a), b)* és *c)* feltétel szerint

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

sűrűségfüggvénnyel bíró független valószínűségi változók.

A két ütköző gázmolekula ütközési sebességén a

$$|\mathfrak{x}_1-\mathfrak{x}_2|=\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2} \tag{2}$$

valószínűségi változót értjük.

Feladatul tűzzük ki a (2) sűrűségfüggvényének kiszámítását, ha az *a)*, *b)* és *c)* feltételeken kívül teljesül még a

d) az edényben levő bármely két gázmolekula sebességvektorának komponensei függetlenek egymástól.

Amennyiben az (1) sűrűségfüggvénnyel rendelkező ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F(x)$, a $-\xi$ sűrűség-, illetve eloszlásfüggvényét $g(x)$, illetve $G(x)$ jelöli,

$$G(x)=P(-\xi<x)=P(\xi>-x)=1-P(\xi\leqq -x)=1-F(x),$$

ezért $g(x)=f(-x)$, ($f(x)$ itt a ξ változó sűrűségfüggvénye), azaz az *a)*, *b)*, *c)* és *d)* feltételek szerint $-\xi_2$, $-\eta_2$, $-\zeta_2$ is egymástól és a ξ_1, η_1, ζ_1 valószínűségi változóktól független, (1) sűrűségfüggvénnyel bíró valószínűségi változók. De akkor a

$$\xi_1-\xi_2,\ \eta_1-\eta_2,\ \zeta_1-\zeta_2$$

is független [1],

$$\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$$

sűrűségfüggvénnyel bíró [2] valószínűségi változók és így a (2) valószínűségi változó keresett sűrűségfüggvénye [3] a

$$p(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right)^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x^2e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}, & x>0\\ 0\qquad, & x\leqq 0\end{cases} \tag{3}$$

sűrűségfüggvény.

Ha tekintetbe vesszük, hogy

$$\sigma=\sqrt{\frac{kT}{m}},$$

ahol m egy molekula tömege, T az abszolut hőmérséklet és k a Bolzmann-féle állandó, akkor

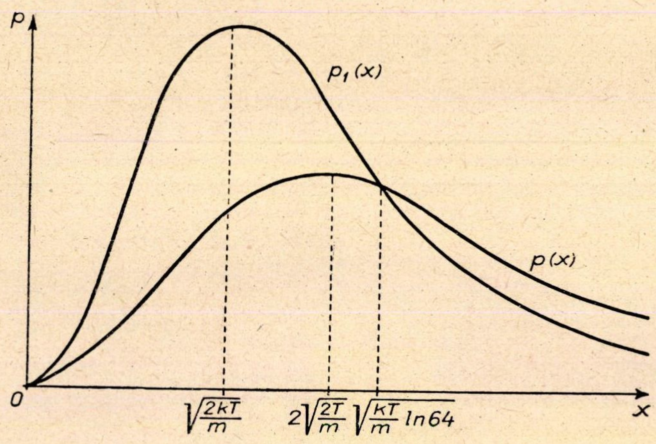
$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}x^2e^{-\frac{mx^2}{4kT}}, & x>0\\ 0\qquad, & x\leqq 0.\end{cases}$$

Hasonlítsuk össze e sűrűségfüggvényt a gáz valamelyik adott molekulájának sebességeloszlását kifejező

$$p_1(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{m}{kT}\right)^{3/2} x^2 e^{-\frac{mx^2}{2kT}}, & x>0\\ 0\quad, & x\leqq 0\end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, azaz az ún. Maxwell-féle eloszlással.

Amíg a $p_1(x)$ maximuma az $x=\sqrt{\dfrac{2kT}{m}}$ helyen van, addig a $p(x)$ függvényé az $x=2\sqrt{\dfrac{kT}{m}}$ helyen, azaz az előbbinek $\sqrt{2}$-szeresénél. Ennek megfelelően a $p_1(x)$ maximuma $2\sqrt{\dfrac{2m}{\pi kT}}e^{-1}$, a $p(x)$-é ennek $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$-szerese. $p(x)=$ $=p_1(x)$, ha $x=\sqrt{\dfrac{kT}{m}\ln 64}$. Ettől balra $p_1(x)$ a $p(x)$ felett, jobbra pedig alatt halad. Mivel $\ln 64=4\cdot 15888$, a $p(x)$ és $p_1(x)$ görbék metszéspontja a $p(x)$ maximumától jobbra esik, tehát a $p(x)$ maximuma is még a $p_1(x)$ görbe alatt van.



2. sz. függelék ábrája

IRODALOM

[1] L. pl. Rényi A.: *Valószínűségszámítás,* Budapest, 1954, p. 197, 7. tétel.
[2] L. pl. H. Cramér: *Mathematical Methods of Statistics,* Princeton, 1946, p. 212.
[3] L. pl. ugyanott p. 236.

3. sz. Függelék.

Magas hőmérsékletű plazma hőmérsékleti sugárzási vesztesége sugárzási egyensúly esetén

Ismeretes a Kirchoff törvénynek az az alakja, amely szerint tetszőleges test esetében adott hőmérsékleten és hullámhossznál, a test térfogategységére vonatkoztatott emisszió-képességének, $\varepsilon(T, \lambda)$-nak, és adott hullámhosszra vonatkozó abszorpciós koefficiensének $a(\lambda)$-nak hányadosa egyenlő az abszolut fekete test ugyan azon hőmérséklethez és hullámhosszhoz tartozó emisszióképességével, $E(T, \lambda)$-val, vagyis

$$\varepsilon(T, \lambda) d\lambda = a(\lambda) E(T, \lambda) d\lambda,$$

ahol a Planck-sugárzási formula szerint

$$E(T, \lambda) d\lambda = 2c_1 \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} d\lambda.$$

c_1 és c_2 konstansok, értékük: $c_1 = 5{,}9 \cdot 10^{-13}$ Watt cm^2

$c_2 = 1{,}43$ cm grad.

Ennek alapján megadható a dv térfogatelem sugárzása egy adott hullámhosszra (ill. λ és $\lambda + d\lambda$ közé eső $d\lambda$ tartományra)

$$\varepsilon dv d\lambda,$$

ill.

$$\varepsilon_t'' = \int_0^\infty \varepsilon dv d\lambda$$

az egész $(0, \infty)$ hullámhossz tartományra.

Ha egy adott gömbfelületen belül csak ez az egyetlen térfogatelem volna, akkor ez megadná a felületen keresztül a 4π térszögbe kisugárzott energiát. Azonban ez a térfogatelem egészen a gömb felületéig a térfogatelem anyagával azonos anyaggal van körülvéve, tehát a gömbfelületre az elem által kisugárzott energiából csak az $e^{-\alpha x}$ abszorpciós törvénynek megfelelő tört rész jut el, ahol α a lineáris abszorpciós koefficiens, x pedig az abszorbens rétegvastagság. Ha ezt integráljuk a gömbfelületre, akkor megkapjuk, hogy egy térfogatelemtől mekkora energia mennyiség sugárzódik ki ténylegesen a 4π térszögbe az adott F gömbfelületen keresztül.

$$\varepsilon_t' = dv \oint_F \int_0^\infty \varepsilon e^{-\alpha(\lambda) \left| \mathfrak{x}(x,y,z) - \mathfrak{x}(x',y',z') \right|} d\lambda df.$$

Nyilvánvaló, hogy ha az előbbi kifejezést integráljuk a gömb egész térfogatára, V-re, akkor megkapjuk, hogy mekkora a teljes sugár veszteség a 4π térszögbe, a gömb felületén keresztül

$$\varepsilon_t = \oint_V \oint_F \int_0^\infty \varepsilon e^{-\alpha|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|} d\lambda df dv.$$

Ezek a meggondolások azonban csak akkor érvényesek, amikor a kinetikus hőmérsékletnek megfelelő energiájú kvantumok közepes abszorpciós úthossza $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ nagy a rendszer méreteihez képest, azaz sugárzási egyensúly esetén. Ugyanis, ha ez a feltétel nem teljesül, α igen kis szám lévén $\alpha|\mathfrak{r}|$ is igen kicsi az egész integrálandó tartományra és így a sugárzásra anomálisan nagy érték adódna. Ezekben az esetekben a valóságot az itt leírtnál komplikáltabb tárgyalás írja le, amelyet W. HEITLER adott *Quantum Theory of Radiation* (Oxford University Press, Oxford, 1954) című munkájában.

4. sz. Függelék

A deuteronok közepes élettartama konstanson tartott koncentrációjú plazmában

Legyen n_0 egy adott plazmában $t=0$ időpillanatban cm^3-enként jelenlevő deuteronok száma.

Ha n_0-at mindig konstansan tartjuk, azáltal, hogy a fuzionált deuteronokat folyamatosan pótoljuk, akkor n_{f_0}, a cm^3-ként és sec-onként létrejött fuziók száma az időben szintén konstans.

Egy tetszőleges $t>0$ időpillanatban az eredetileg $(t=0)$ is jelen volt n_0 részecskéből már csak n van jelen, tehát az azóta betápláltak száma n_0-n.

Kérdés, hogy a t és $t+dt$ elemi időtartam alatt hány deuteron fog fuzionálni azon n részecskéből, amelyek a t időpontig még megmaradtak az eredetileg jelenlevő n_0 részecskéből. Jelöljük ezek számát dn-nel.

A minden időpillanatban jelenlevő összesen n_0 deuteronból dt idő alatt

$$2n_{f_0}dt = dn_{\text{össz}} \tag{1}$$

fuzionál (a kettes faktor azért szerepel, mert minden fúzióban két deuteron vesz részt), azonban ebből a $dn_{\text{össz}}$-ből csak egy hányadrész az, amelyik az n-ből fuzionál (dn). Ezt a hányadrészt viszont az n és n_0-n hányadosa határozza meg

$$dn = -\frac{n}{n_0 - n} 2n_f dt. \tag{2}$$

A változókat szétválasztva és integrálva a

$$\int\left(\frac{n_0}{n}-1\right)dn=-\int 2n_{f_0}dt \tag{3}$$

kifejezést kapjuk, azaz

$$n_0 \ln n-n=-2n_{f_0}t+c. \tag{4}$$

Mivel a $t=0$ időpontban $n=n_0$, tehát

$$n_0 \ln n_0-n_0=c \tag{5}$$

és ezt (14)-be visszahelyettesítve az

$$n_0 \ln n-n=-2n_{f_0}t+n_0(\ln n_0-1)$$

összefüggést kapjuk, amelyet n_0-lal végigosztva és átrendezve a következő végső formulához jutunk, amely bármely t időpillanatban implicite megadja, hogy az eredetileg jelenlevő n_0 részecskéből mennyi van még jelen, vagy pontosabban, hogy a t időpontban hány olyan részecske van még jelen, amely $t=0$ időpillanatban is jelen volt

$$\ln\frac{n}{n_0}-\frac{n}{n_0}=-\frac{2n_f}{n_0}t-1. \tag{6}$$

Mármost a közepes élettartam definíció szerint

$$\tau=\frac{1}{n_0}\int_0^{n_0}t(n)dn. \tag{7}$$

A (6) összefüggésből t-t kifejezve és (7)-be helyettesítve, kapjuk

$$\tau=-\frac{1}{2n_{f_0}}\int_0^{n_0}\left(\ln\frac{n}{n_0}+1-\frac{n}{n_0}\right)dn. \tag{8}$$

Ha itt a $v=\frac{n}{n_0}$ integrál transzformációt alkalmazzuk

$$\tau=-\frac{n_0}{2n_{f_0}}\left[\int_0^1 \ln v\,dv+\int_0^1(1-v)dv\right]. \tag{9}$$

Az első integrál improprius, amelynek értékére l'Hospital szabály segítségével egyszerűen adódik hogy

$$\int_0^1 \ln v\,dv=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \ln v\,dv=-1, \tag{10}$$

a második integrálra pedig

$$\int_0^1 (1-v)dv = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Így (9), (10) és (11)-ből

$$\tau = \frac{1}{4}\frac{n_0}{n_{f_0}}, \tag{12}$$

ahol τ egy részecske közepes élettartama olyan fúziós közegben, ahol a fuzionált részecskék száma folyamatosan pótlásra kerül és így a fuzionáló plazma 1 cm^3-ében levő fuzionáló részecskék (deuteronok) száma változatlan.

5. sz. Függelék

A deuteronok közepes élettartama feltéve, hogy a fúziós plazmában nem történik meg a fuzionált deuteronok pótlása

A cikk eddigi meggondolásai és így az előző függelék is arra az esetre vonatkoznak, amikor a fuzionált részecskéket folyamatosan pótoljuk, ill. azok a reakció termékekből pótlódnak. Ha azonban a folyamatos pótlásról nem gondoskodunk és a reakció termékek nagy részben eltávoznak a fúziós térből, akkor a következő meggondolások érvényesek a közepes élettartamra vonatkozólag.

Az előbbi feltevés értelmében a cikk (10) formuláját úgy kell átalakítanunk, hogy n helyébe

$$n(t) = n(0)e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{1}$$

kerüljön (ahol τ a közepes élettartam, t pedig az idő), és az egész kifejezést még el kell osztani t-vel, hogy megkapjuk, hogy $t=0$-tól egy adott t időpontig sec-ként és cm^3-enként átlagosan hány fúzió jött létre, azaz

$$n_{f_0}(t) = \frac{n_{f_0}}{t}e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{2}$$

Itt

$$n_{f_0} = n_f s \tag{3}$$

a sec- és cm^3-ként létrejövő fúziók száma konstans plazma koncentráció mellett (s a plazma sűrűsége gr/cm^3-ben). $n(t)$ a t időpontban 1 gr, $n_0(t)$ pedig 1 cm^3 plazmában jelenlévő deuteronok száma. A t időpillanatban még egyáltalán jelenlévő fuzionálható részecskék száma akkor

$$n_0(0) - 2n_{f_0}(t) = n_0(0)e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{4}$$

Ha most $t=1$

$$n_0(0)-2n_{f_0}e^{-\frac{1}{\tau}}=n_0(0)\,e^{-\frac{1}{\tau}}. \tag{5}$$

Innen egyszerű átalakítások után

$$\tau=\frac{1}{\ln\dfrac{n_0(0)+n_{f_0}}{n_0(0)}} \tag{6}$$

a közepes élettartam azon feltételezés mellett, hogy a fuzionálható részecskék száma az időben exponenciálisan fogy.

IRODALOM

[1] Roundup of Key Developments in Atomic Energy, *Nucleonics*, Vol. **13** (1955) No. 10. p. 9. and 10.

[2] What's Going on in AEC's Thermonuclear Program? *Nucleonics*, Vol. **13** (1955) No. 11. p. 64.

[3] J. D. Luntz: From Perhapsatron to Columbus, *Nucleonics*, Vol. **13** (1955) No. 12. p. 23.

[4] I. V. Kurchatov: Russian Thermonuclear Experiments, *Nucleonics*, Vol. **14** (1956) No. 6. p. 36.

[5] И. В. Курчатов: О возможности создания термоядерных реакций в газовом разряде. Атомная Энергия, Том 1. (1956). No. 3. стр. 65. Успехи физ. наук. Том. **LIX**. (1956). 603.

[6] Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, О. А. Базилевская, Ю. Г. Прохоров, Н. В. Филиппов: Исследование импульсных разрядов с большой силой тока. Атомная Энергия, Том **1**. (1956). No. 3. стр. 76.

[7] М. А. Леонтович, С. М. Осовец: О механизме сжатия тока при быстром и мощном газовом разраде. Атомная Энергия, Том **1**. (1956). No. 3. стр. 81.

[8] Л. А. Арцимович, А. М. Андрианов, Е. И. Доброхотов, С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный, В. И. Синицын, Н. В. Филиппов: Жесткое излучение импульсных разрядов. Атомная Энергиа, Том 1. (1956). No. 3. стр. 84.

[9] С. Ю. Лукьянов, В. Н. Синицын: Спектроскопические исследования мощного импульсного разряда в водороде. Атомная Энергия, Том **1**. (1956). No. 3. стр. 88.

[10] С. Ю. Лукьянов, И. М. Подгорный: Жесткое рентгеновское излучение, сопровождающее разряд в газе. Атомная Энергия, Том **1**. (1956). No. 3. стр. 97.

[11] А. Л. Безбатченко, И. Н. Головин, Д. П. Иванов, В. Д. Кириллов, Н. А. Яблинский: Исследование газового разряда с большой силой тока в продольном магнитном поле. Атомная Энергия, Том 1. (1956). No. 5. стр. 26.

[12] R. F. Post: Controlled Fusion Research — An Application of the Physics of High Temperature Plasmas, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. **28** (1956) 338.

[13] Thermonuclear Power ... The Search for Ideas, *Nucleonics*, Vol. **14** (1956) No 2. p. 42.

[14] Fusion Reactor — „Many Problems." *Atomic Industry*, 1956. Aug. p. 1.

[15] H. Thirring: Thermonuclear Power Reactors — Are They Feasible? *Nucleonics,* Vol. **13** (1955) N. 11. p. 62.
[16] H. Thirring: *At. Sci. Journ.,* Vol. **5** (1956) 227.
[17] H. A. Bethe: The Hydrogen Bomb II., *Scientific American,* Vol. **182** (1950) No. 4. p. 18.
[18] E. Teller: *Bull. At. Sci.,* Vol. **XII** (1956) 271.
[19] E. Teller: General Problems of the Controlled Thermonuclear Process, *Nuclear Sci. and Eng.,* Vol. **1** (1956) 313.
[20] J. Cockcroft: The Future of Atomic Energy, *Proc. of the Int. Cof. on the Peaceful Uses of the A. E.,* Vol. **16** (1956) 125.
[21] H. J. Bhabha: Record of Proceedings of Session 1, *Proc. of the Int. Conf. on the Peaceful Uses of the A. E.,* Vol. **16** (1956) 35.
[22] H. J. Bhabha: The Role of Atomic Power in India and its Immediate Possibilities, *Proc. of the Int. Conf. on the Peaceful Uses of the A. E.,* Vol. **1** (1956) 108.
[23] Roundup Fusion *Nucleonics,* Vol. **13** (1955) No. 9. p. 10.
[24] U. S. Fusion Experiments, *Atomic Industry,* 1957. jan. p. 5.
[25] I. W. Kurchatov: *Atomic Industry,* 1957. August p. 4.
[26] G. Gamow and E. Teller: The Analysis of Angular Correlation and Angular Distribution Data, *Phys. Rev.,* Vol. **53** (1938) 608.
[27] G. Gamow and C. L. Critchfield: Theory of atomic Nucleus and Nuclear Energy—Sources, *Clarendon Press.* Oxford, 1950.
[28] I. W. Kurchatov: *Bull. At. Sci.,* Vol. **XII** (1956) 269.
[29] W. R. Arnold, J. A. Phillips etc.: Cross Sections for the Reactions $D/d, p/He^3$, $T/d, n/He^4$, and $He^3/d, p/He^4$ below 120 keV. *Phys. Rev.,* Vol. **93** (1954) 483.
[30] L. A. Artsimovich: *Untersuchungen über Impulsentladungen im Zusammenhang mit der Möglichkeit von kontrollierbaren thermonuclearen Reactionen.* Előadás Svédországban 1956. augusztus 23-án. (Kéziratban.)
[31] W. B. Thompson: *Nature,* Vol. **179** (1957) 886.
[32] Landolt—Börnstein: *Zahlenwerte und Funktionen.* 1. Bd. Atom und Molekularphysik. 1. Teil. Atome und Ionen. Springer Verl. Berlin, 1950. S. 316.
[33] E. O. Lawrence: High Current Accelerators, *Proc. of the Int Conf. on the Peaceful Uses of A. E.,* Vol. **16** (1956) 62.
[34] L. W. Alvarez et al., U. C. R. L-Report N. 3620; *Phys. Rev.,* közlés alatt.
[35] Research into controlled energy from fusion reactions, *Atomic Energy Newsletter,* Vol. **17** (1957) No. 11. p. 1.
[36] F. Winterberg: *Atomkern Energie,* 1956. p. 199.
[37] R. E. Volrath and J. A. R. Samson: *Bull. Am. Phys. Soc.,* Vol. **30** (1955) No. 8. p. 9.
[38] K. Simonyi: Über die Möglichkeit der Nutzbarmachung der Atomenergie ohne Kettenreaktion, *Acta Phys.,* **VI** (1956) p. 157.
[39] G. Kalmán–L. Pócs–G. Schmidt–K. Simonyi: *Periodica Polytechnica,* **1** (1957) No. 1.
[40] Klopfer Ervin: Az ekvipartició elv egy szélső esete, *KFKI Közlemények,* **5.** évf. (1957) p. 84.
[41] Temes Gábor: Korreláció egymást követő nehéz töltött részecskék energiaveszteségei között elektrongázban, *KFKI Közlemények,* **5.** évf. (1957) p. 78.
[42] Simonyi Károly: Egy fúziós reaktor vázlata. KFKI Közlemények, 5. évf. (1957). p. 99.

MTA Atommag Kutató Intézete (Debrecen)

(Beérkezett: 1957. IX. 4.)

A MIKUSIŃSKI-FÉLE OPERÁTORFOGALOM ÉS A DISZTRIBÚCIÓ FOGALMA KÖZTI KAPCSOLATRÓL

FENYŐ ISTVÁN

1. Az alábbiakban szereplő valósváltozós, komplexértékű $f(t)$ függvények legyenek a $t \geqq 0$ félegyenes valamely $[0, T)$ számközén definiálva és tegyük fel, hogy a $[0, T)$ bármely zárt részintervallumán legfeljebb véges sok szakadási helyük van, továbbá $\int_0^t f(\tau)d\tau$ létezzék bármely $0 \leqq t < T$-re. E függvények osztályát jelöljük K_T-vel. Ismeretes, hogy MIKUSIŃSKI a $[0, T)$ számközön definiált operátornak nevezi a K_T-be tartozó függvények párját, és ezt a párt $a(t)/b(t)$-vel jelöli (röviden a/b), ahol $b(t)$ a 0 hely elegendő kicsi jobboldali környezetében nem azonosan eltűnő [1]. Két operátor a/b és a_1/b_1 azonosak egymással, ha

$$a*b_1 = a_1*b, \qquad (0 \leqq t < T),$$

ahol

$$f*g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

a két függvény konvolúciója.

Ha $T = \infty$, akkor a „nevezőnek" a 0 hely jobboldali környezetében való nem azonos eltűnésére vonatkozó kikötést el lehet hagyni. Nemrégen bebizonyítottuk [2], hogy minden végesrendű Korevaar-féle disztribúció egy $[0, \infty)$-ben értelmezett Mikusiński-féle operátor, továbbá, hogy ha $b = t^{\mu}\beta(t)$ alakú függvény, ahol $\mu > -1$, $\beta(+0) \neq 0$, akkor az a/b operátor egy végesrendű disztribúció. Könnyű példát konstruálni olyan $[0, \infty)$-ben értelmezett operátorra, mely nem végesrendű disztribúció, sőt ami egyáltalán nem disztribúció.

Tekintsük ezekután a $T_n > 0$ számok olyan sorozatát, melyre $T_n \uparrow \infty$ és $\{w_n\}$ legyen az operátoroknak olyan sorozata, melynek n-ik tagja, w_n a $[0, T_n]$ intervallum felett értelmezett. Az operátorok egy ilyen sorozatát *szuperfüggvénynek* nevezzük, ha a sorozat bármely két tagjára érvényes, hogy $w_n = w_m$ a $[0, T_m]$-ben, ha $m \leqq n$. Két szuperfüggvényt $\{w_n\}$- és $\{\overline{w}_n\}$-t azonosaknak tekintünk, ha minden n és $\overline{n}$ esetében $w_n = \overline{w}_{\overline{n}}$ a $[0, T_n]$ és $[0, T_{\overline{n}}]$ közös részén.

Érvényes ármost a következő

TÉTEL: *Bármely, a* $[0, \infty]$ *félegyenesen definiált disztribúció szuperfüggvény és fordítva, ha a szuperfüggvényt definiáló operátorsorozat mindegyikének „nevezője“* $b_n(t) = t^{\mu_n} \beta_n(t)$ *alakú, ahol* $\mu_n > -1$ *és* $\beta_n(+0) \neq 0$, *akkor a szuperfüggvény disztribúció.*

Az előbbi és a most kimondott tétel értelmében a szuperfüggvény fogalma általánosabb, mint a disztribúcióé.

A szuperfüggvény fogalmát és a tételt nyilván a következő módon is megfogalmazhatjuk:

Szuperfüggvénynek nevezzük az $a_T(t)$ és $b_T(t)$ függvények olyan a_T/b_T-vel jelölt párját, melyek az alábbi feltételeket teljesítik:

1° $\quad a_T(t)$ és $b_T(t) \in K_T$ minden $T \geqq 0$-ra,

2° a 0 pontnak nincs olyan jobboldali környezete, melyben $b_T \equiv 0$ lenne,

3° $\quad a_T/b_T = \bar{a}_T/\bar{b}_T$, ha bármely $T>0$-ra $a_T * \bar{b}_T = \bar{a}_T * b_T$.

A szuperfüggvényekkel való számolási műveletek azonosak a véges intervallumok felett definiált operátorokra vonatkozó műveletekkel.

A kimondott tétel második része így is megfogalmazható: annak elégséges feltétele, hogy az a_T/b_T szuperfüggvény disztribúció legyen, az, hogy minden T-re $b_T(t) = t^{\mu(T)} \beta_T(t)$ alakú legyen, ahol $\mu(T) > -1$ és $\beta_T(+0) \neq 0$.

2. A tétel első része igen egyszerűen bizonyítható: Legyen ugyanis $\{b_n\}$ a K_∞ osztálybeli függvények olyan végtelen sorozata, melyre minden véges $T > 0$ mellett található olyan $b_T(t)$ függvény, hogy a $\{b_T * b_n\}$ függvénysorozat $[0, T]$-n egyenletesen konvergáljon valamilyen $a_T(t) \in K_T$ függvényhez. Tegyük még fel, hogy nincs a 0-nak olyan jobboldali környezete melyben a b_T és a b_n függvények azonosan eltünnek. Ha $\lim\limits_{n \to \infty} b_T * b_n = a_T$, akkor a $\{b_n\}$ sorozat nyilván azonosítható az a_T/b_T szuperfüggvénnyel, mert 1° és 2° nyilván teljesülnek. Ami 3°-at illeti, az szintén teljesül, mert ha valamely $\bar{b}_T(t)$ mellett is igaz az, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{b}_T * b_n = \bar{a}_T(t)$, akkor az egyenletes konvergencia miatt

$$\lim_{n \to \infty} \bar{b}_T * b_T * b_n = \bar{b}_T * a_T \quad \text{és} \quad \lim_{n \to \infty} b_T * \bar{b}_T * b_n = b_T * \bar{a}_T.$$

A konvolució kommutativitása miatt

$$a_T * \bar{b}_T = \bar{a}_T * b_T$$

minden $T > 0$-ra.

Legyen ezekután φ egy tetszőleges disztribúció, melyet a $\{b_n\}$ Korevaar-féle fundamentális sorozat definiál [3]. Ez azt jelenti, hogy minden $T > 0$-ra található olyan p nemnegatív egész szám, hogy $b_n^{(-p)}$ egyenletesen konvergens legyen a $[0, T]$ számközön, ahol

$$b_n^{(-p)} = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_0^{\tau_{p-1}} b_n(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} b_n(\tau) d\tau = U_p * b_n,$$

$U(t)$ a Heaviside-féle ugrásfüggvényt jelenti:

$$U(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0 \\ 0, & \text{ha } t < 0, \end{cases}$$

$U_2(t) = U * U, \ldots, U_p(t) = U_{p-1} * U$. De akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(-p)} = \lim_{n\to\infty} U_p * b_n = a_T,$$

tehát

$$\varphi = \{b_n\} = a_T / U_p$$

és ezzel állításunk első része bizonyítást nyert.

3. Ami állításunk második részét illeti arról be fogjuk bizonyítani, hogy ekvivalens azzal, hogy a

$$(1) \qquad k * \varphi = l$$

elsőfajú Volterra-féle integrálegyenletnek van egyértelmű megoldása valamely $[0, T]$ számközben, ha $k(t) = t^r \varkappa(t)$ $(r > -1,\ \varkappa(+0) \neq 0,\ \varkappa \in K_T)$ és $l(t) = t^s \lambda(t)$ alakú, s az r-nél nagyobb pozitív szám és $\lambda(t) \in K_T$ függvény a 0 helyen véges.

Mert:

a) ha az (1) alatti integrálegyenlet egyértelműen megoldható, akkor a b_T függvényről tett feltevés alapján mindig létezik olyan μ-től és T-től függő nemnegatív egész szám p, hogy a

$$b_T * \varphi = U_p * a_T$$

integrálegyenletnek van megoldása. p-t elegendő nagynak választva[1] ti. $U_p * a_T = t^s \lambda(t)$ alakú, ahol s is kellően nagy és $\lambda(+0)$ véges. De ez azt jelenti, hogy $U_p * a_T / b_T$ szuperfüggvény egy közönséges φ_T függvénnyel azonos, melyről nyilván feltehetjük, hogy folytonos (ellenkező esetben ugyanis p-nek eggyel való növelése révén elértük azt, hogy φ_T folytonos legyen) $[0, T]$-ben. Legyen $\{\varphi_n\}$ a legalább p-szer folytonosan $[0, T]$-ben differenciálható függvények olyan sorozata, mely egyenletesen konvergál φ_T-hez. De akkor $\{\varphi_n^{(p)}\}$ egy fundamentális sorozat, tehát egy disztribúció. Másrészt a $\{\varphi_n^{(p)}\}$ disztribúció azonos a φ_T / U_p szuperfüggvénnyel (mert $U_p * \varphi_n^{(p)} \to \varphi_T$), ez viszont egyenlő az a_T / b_T-vel.

[1] Világos, hogy ha valamely p mellett $b_T * \varphi = U_p * a_T$ egyenletnek van megoldása, akkor p-nél nagyobb egész mellett is létezik megoldás; így lehetőségünk van arra, hogy p-t alkalmasan válasszuk meg.

b) ha $a_T/b_T = \Phi$ disztribúció, akkor $U_p * \Phi = f$ egy folytonos függvény, ha $p = p(T)$ elegendő nagy, vagyis

$$U_p * a_T/b_T = f,$$

de ez éppen azt jelenti, hogy a $b_T * f = U_p * a_T$ integrálegyenletnek van megoldása. Ha $f = t^h \varphi(t)$ alakba írjuk, ahol $\varphi(+0)$ véges, akkor $b_T * f = t^{h+\beta}\psi(t)$, ez pedig csakis úgy lehetséges, ha $h + \beta = s > \beta$, mert $f(t)$ folytonossága miatt $h > 0$.

4. Az előbbiek szerint tehát elég bebizonyítani, hogy az (1) egyenletnek van egyértelmű megoldása, ha $k = t^r \varkappa(t)$ $(r > -1,\ \varkappa(+0) \neq 0)$ és $l(t) = t^s \lambda(t)$, ahol $\lambda(+0)$ véges és $s > r$, $s > 0$.

A megoldás unicitása azonnal következik $T = \infty$ esetben TITSHMARSCH egy tételéből [4], ha pedig T véges, úgy az unicitás MIKUSIŃSKI egy megjegyzése miatt nyilvánvaló [5].

Mielőtt az (1) alatti integrálegyenlet megoldhatóságát bebizonyítanánk, megmutatjuk, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy r nemnegatív egész. Ha ugyanis r nem lenne egész, képezzük a szóbanforgó egyenlet mindkét oldalának konvolúcióját t^{n-r-1}-el, ahol n olyan nemnegatív egész, mely mellett $n - r - 1 > 0$. Ekkor

$$t^{n-r-1} * t^r \varkappa(t) = \int_0^t (t-\tau)^{n-r-1} \tau^r \varkappa(\tau)\, d\tau = t^n \int_0^1 \varrho^r (1-\varrho)^{n-r-1} \varkappa(t\varrho)\, d\varrho = t^n \gamma(t),$$

ahol

$$\gamma(t) = \int_0^1 \varrho^r (1-\varrho)^{n-r-1} \varkappa(t\varrho)\, d\varrho$$

és

$$\gamma(+0) = \varkappa(+0) \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r)}{\Gamma(n+z)} \neq 0.$$

Hasonló módon

$$t^{n-r-1} * t^s \lambda(t) = t^{n-r+s} \mu(t)$$

és ha $s > r$, akkor $n + s - r > n$.

Ezek szerint feltesszük tehát, hogy r nemnegatív egész. $\varkappa(t)$ helyett tekintsük azt a $\bar{\varkappa}(t)$ függvényt, melyre

$$\bar{\varkappa}(t) = \begin{cases} \varkappa(t), & \text{ha } 0 \leqq t \leqq T, \\ \varkappa(T), & \text{ha } \quad t \geqq T. \end{cases}$$

$\{\varkappa_n(t)\}$ legyen a függvények olyan sorozata, mely a következő tulajdonsággal bír:

a) $\varkappa_n(t) = \varkappa(T)$, ha $t > T$ és $\varkappa_n(+0) = \varkappa(+0)$, $(n = 1, 2, \ldots)$,

b) mindegyik $\varkappa_n(t)$ legyen legalább háromszor differenciálható, *c)* $\varkappa_n(t) \to \varkappa(t)$ egyenletesen $[0, T]$-n [2].

Mindegyik $\varkappa_n$ Laplace-transzformáltja nyilván létezik és

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}\{\varkappa_n\} = \mathfrak{L}\{\bar{\varkappa}\}$$

egyenletesen a konvergencia félsíkban. Egy közismert tétel értelmében (l. például [6])

$$\mathfrak{L}\{\varkappa_n\} = \varkappa(+0)z^{-1} + O(z^{-2}), \quad \text{ha} \quad \operatorname{Re} z \to \infty$$

és a $\varkappa_n$ sorozat egyenletes konvergenciája miatt

$$\mathfrak{L}\{\bar{\varkappa}\} = \varkappa(+0)z^{-1} + O(z^{-1}), \quad \text{ha} \quad \operatorname{Re} z \to \infty.$$

Legyen $\bar{k}(t) = t^r \bar{\varkappa}(t)$, akkor

$$\mathfrak{L}\{\bar{k}\} = (-1)^r \frac{d^r}{dz^r} \mathfrak{L}\{\bar{\varkappa}\}.$$

Így tehát

$$\mathfrak{L}\{\bar{k}\} = \varkappa(+0)z^{-r-1} + O(z^{-r-1}),$$

teljesen hasonló gondolatmenettel

$$\mathfrak{L}\{\bar{l}\} = \lambda(+0)z^{-s-1} + O(z^{-s-1}),$$

ahol $\bar{l}(t) = l(t)$ $[0, T]$-ben és $\bar{l}(t) = l(T)$, ha $t > T$. Így tehát, ha α tetsző-leges szám, melyre $s - r > \alpha > 0$

$$z^\alpha \frac{\mathfrak{L}\{\bar{l}\}}{\mathfrak{L}\{\bar{k}\}} \to 0, \quad \text{ha} \quad |z| \to \infty \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Ennélfogva Fock [6] ismert tétele szerint $\dfrac{\mathfrak{L}\{\bar{l}\}}{\mathfrak{L}\{\bar{k}\}}$ inverz Laplace-transzformáltja létezik és a

$$\bar{k} * \varphi = \bar{l}$$

integrálegyenlet megoldását adja. Ha a független változó $[0, T]$-ben van, akkor ez az (1) alatti egyenletbe megy át.

Megjegyezzük, hogy az (1) alatti egyenletre vonatkozó állítás közvetlen következménye V. VOLTERRA egy ismert tételének [7], ha $\varkappa$- és λ-ról legalább $(r+1)$-szeri differenciálhatóságot tételezünk fel.

5. Könnyű megmutatni, hogy nem minden szuperfüggvény disztribúció. Legyen például $a_T(t) = t^s \alpha_T(t)$, ahol $s = s(T) > 0$ és $\alpha_T(t)$ végtelen sokszor differenciálható, továbbá $\alpha_T(+0) \neq 0$ bármely T mellett és $b(t) = \exp(-t^{-2})$.

[2] Ilyen függvénysorozat mindig létezik, ha $\varkappa$ folytonos, ami pedig az általánosság megszorítása nélkül mindig feltételezhető.

Az a_T/b szuperfüggvény nem disztribúció, mert bárhogyan választjuk is a p nemnegatív egészet a

$$b*\varphi = U_\mu * a_T$$

integrálegyenletnek VOLTERRA és PÉRES egy tétele értelmében nincs megoldása [8].

Ezzel szemben a kimondott tétel második része valóban csupán elégséges feltétele annak, hogy egy szuperfüggvény disztribúció legyen. Mert legyen a_T/b_T olyan, disztribúcióval azonos szuperfüggvény, melyre a tétel feltételei teljesülnek. Akkor az

$$\exp(-t^2)*a_T/\exp(-t^2)*b_T$$

szuperfüggvény is disztribúció, noha a tétel feltételei erre nem érvényesek.

Felmerül az a kérdés, mi annak a *szükséges és elégséges* feltétele, hogy egy szuperfüggvény disztribúció legyen. Ennek megválaszolása azon múlik, hogy megadhassuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az (1) alatti integrálegyenlet megoldható legyen, ha k olyan, hogy $k \cdot t^{-r} \to 0$ bármely pozitív r esetén. Tudomásunk szerint erre a kérdésre a válasz nem ismert.

6. A **3.** alatt elmondottakból következik, hogy ha minden T-re $b_T = t^\mu \beta_T(t)$ és $a_T = t^\nu \alpha_T(t)$ alakúak, $\beta_T(+0) \neq 0$, $\alpha_T(+0) \neq 0$ és μ, $\nu > -1$, továbbá $\nu > \mu$, akkor az a_T/b_T szuperfüggvény közönséges függvénnyel azonosítható. Ha $\mu \geqq \nu$ és $\mu - \nu = \Delta$ a T-től független, akkor a_T/b_T egy végesrendű disztribúcióval egyenlő.

Ha a_T/b_T szuperfüggvény disztribúció (nem szükségképpen végesrendű), akkor van olyan $p = p(T) > \Delta(t)$, hogy

$$U_p * a_T/b_T = f_T(t)$$

folytonos függvény legyen. Ha megadjuk ezt a folytonos függvényt és a $p = p(T)$-t, akkor a disztribúció definiálva van. SIKORSKI éppen így definiálja a disztribúciókat. [9].

7. Befejezésül talán érdemes megemlíteni a következőt. Láttuk **2.** alatt, hogy a folytonos függvények olyan $\{b_n\}$ sorozata — nevezzük szupersorozatnak —, melyhez minden T mellett található olyan $b_T(t)$ függvény, hogy $\{b_T * b_n\}$ egyenletesen konvergens legyen $[0, T]$-n, egy szuperfüggvényt definiál. A szupersorozat nyilván a Korevaar-féle fundamentális sorozat általánosítása. Mivel minden $[0, T]$ felett definiált disztribúció reprezentálható fundamentális sorozattal és minden szupersorozat egy szuperfüggvényt definiál, természetesen felvetődik az a kérdés, vajon minden szuperfüggvényhez tartozik-e egy szupersorozat? Bebizonyítjuk, hogy a válasz igenlő. Legyen ugyanis $\{c_n\}$ és $\{\varepsilon_n\}$ a számoknak két tetszőleges olyan sorozata, melyekre $c_n \uparrow \infty$ és $\varepsilon_n \downarrow 0$.

TITCHMARSCH [10] egy tétele szerint mindig kiválasztható a folytonos függvények olyan $\{u_n(t)\}$ sorozata, melyek a következő tulajdonsággal bírnak:

$$u_n(0)=0, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

$$u_n(t)\equiv 0, \quad \text{ha} \quad t\geqq c_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

$$\int_0^{c_n} |a_{c_n}-u_n| < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

Válasszuk ezekután a φ_n függvényt úgy, hogy $|u_n-b_{c_n}*\varphi_n|<\frac{\varepsilon_n}{2c_n}$ egy elegendő kicsiny $0\leqq t\leqq \alpha_n<c_n$ szakaszon, ahol még $b_{c_n}(\alpha_n)\neq 0$. A $b_{c_n}*\varphi_n$ függvényt egészítsük ki az (α_n, c_n) számközön egy v_n folytonos függvénnyé úgy, hogy $|u_n-v_n|<\frac{\varepsilon_n}{2c_n}$ legyen. Az (α_n, c_n) intervallumban határozzuk meg φ_n-et úgy, hogy

$$\int_\alpha^t b_{c_n}(t-\tau)\varphi_n(\tau)d\tau = v_n(t)-\int_0^\alpha b_{c_n}(t-\tau)\varphi_n(\tau)d\tau \qquad (t>\alpha_n)$$

legyen. Hogy ez lehetséges, az következik abból, hogy $b_{c_n}(\alpha)\neq 0$. Az így definiált φ_n-re

$$\int_0^{c_n}|a_{c_n}-b_{c_n}*\varphi_n|\,dt \leqq \int_0^{c_n}|a_{c_n}-u_n|dt+\int_0^{c_n}|u_n-b_{c_n}*\varphi_n|dt\leqq \varepsilon_n.$$

Ha most minden φ_n-et úgy definiálunk, hogy azonosan zéró legyen, ha $t>c_n$, akkor $\{\varphi_n\}$ egy, az a_T/b_T-t definiáló szupersorozat. Mert legyen $b_T^{(2)}=b_T*b_T$, akkor

$$|b_T*a_{c_n}-b_T^{(2)}*\varphi_n| = \left|\int_0^t b_T(t-\tau)[a_{c_n}(\tau)-b_T*\varphi_n]dt\right| \leqq$$

$$\leqq B_T\int_0^t |a_{c_n}-b_T*\varphi_n|dt\leqq B_T\varepsilon_n,$$

ha $t\leqq T\leqq c_n$. De $a_{c_n}\to a_T$ egyenletesen $[0, T]$-n, tehát $b_T^{(2)}*\varphi_n$ is egyenletesen konvergál b_T*a_T-hoz. De akkor

$$\{\varphi_n\}=b_T*a_T/b_T^{(2)}=a_T/b_T.$$

Q. E. D.

IRODALOM

[1] J. Mikusiński: Le calcul operationel d'intervalle fini, *Studia Math.*, **XV.** (1956) 255—251.

[2] St. Fenyő: Über den Zusammenhang zwischen den Mikusińskischen Operatoren und den Distributionen, *Math. Nachr.* 1958. s. a.

[3] J. Korevaar: Distributions defined from the point of view of applied Mathematics, *Ind. Math.* (1955) 375—385. Definition 4.2, Definition 5.1.

[4] E. C. Titchmarsch: The zeros of certain integral functions, *Proc. of the Lond. Math. Soc.*, **25** (1926) 283—302.

[5] M. Parodi: *Applications physiques de la transformation de Laplace,* (1948) p. 5.

[6] V. Fock: Math. Zeitschr, **21** (1924) 161.

[7] V. Volterra: *Leçons sur les fonctions de lignes,* (1913) p. 166. Théorème III.

[8] Volterra—Pérès: *Leçons sur la composition,* (1924), p. 89.

[9] R. Sikorski: A definition of the notion of distribution, *Bull. Acad. Polonaise. Sci.,* Cl. III. Vol. **II.** (1954) 209—211.

[10] E. C. Titchmarsch: *The theory of functions,* (1947) p. 376.

(Beérkezett: 1957. XI. 19)

KATIONOK ADSZORPCIÓJA HUMUSZ PREPARÁTUMON

SZABÓ ILONA (Debrecen)

Régóta ismeretes, hogy a biolitok nyomelemként nagyobb atomsúlyú kationokat tartalmaznak, a Földkéreg átlagos tartalmához képest (Clarke-szám) jelentős mértékben feldúsult koncentrációban. A biolitok általában olyan kőzetek, amelyek elhaló szerves élet fosszilizálódása nyomán keletkeztek, és ma is jelentős százalékban tartalmaznak fosszilizált szerves anyagokat. Ide sorolhatjuk a fontosabbak közül a barna kőszenet, tőzeget, olajpalákat, kolm-palát, antrimpalát, valamint egyes foszfátdús kőzetet, foszfatikus palákat stb.

Már GOLDSCHMIDT és VERNADSZKIJ felismerték, hogy a nyomelemek feldúsulásának oka e kőzeteknél logikus összefüggésben kell, hogy legyen a szerves anyag tartalmukkal, illetve az elhaló szerves élet maradványaival. A geokémiai feldúsulás tényezőit azonban nem sikerült megtalálniok.

Régen ismeretes tény az is, hogy az uránium ilyen biolitokban a Földkéregben levő átlagos koncentrációhoz (Clarke-szám cca 4 gr urán/to Földkéreg) képest 25—50-szeresére is feldúsulva található egyes olajpalákban (pl. Svédország: kolm-pala).

SZALAY SÁNDOR és FÖLDVÁRI ALADÁR magyarországi barna kőszenekben az urániumnak szintén cca 25-szörös feldúsulását találták (1951).

E felfedezésük óta máshol is találtak kőszénben szintén hasonló feldúsulású koncentrációban (cca 100 gr U/to szén) urániumot.

Az elmúlt években SZALAY kiterjedt laboratóriumi vizsgálatokat végzett, amelyben sikerült felderítenie az uránium feldúsulását egyes biolitokban. Vizsgálatainak eredményét a következőkben foglalja össze:

„Biolitok feldúsult U-tartalmának oka az U adszorpciója a tengervízből humusz sav tartalmukon.

Az adszorpció egy kation kicserélő folyamat."

Egy újabb vizsgálatában további bizonyítékokat szolgáltatott. Felvette az uránium adszorpciós izotermáját humusz preparátumon. Az adszorpciós izotermát matematikai formulában a Langmuir-féle adszorpciós elmélettel interpretálva sikerült kiértékelnie úgy, hogy egy adott humusz preparátumon az adszorpciós izoterma egy adott kationnal szemben két állandóval jellemezhető a következő formula szerint:

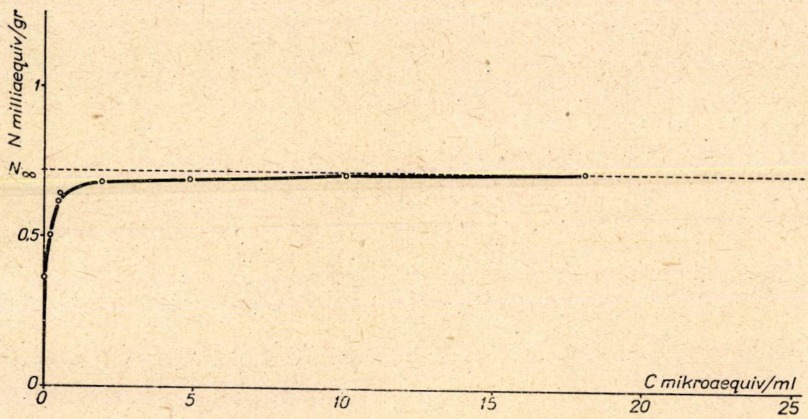
$$\frac{N}{N_\infty}=\frac{ac}{1+ac}, \quad \text{ahol}$$

N_∞ a humusz maximális adszorpciós kapacitása, milliekvivalens/gr-ban kifejezve,

a a redukált egyensúlyi állandó,

$N_\infty a$ az adszorpciós egyensúlyi állandó.

Az adott egyensúlyi koncentrációnál adszorbeálódott mennyiség: N milliekvivalens/ml, $N_\infty a$ azt adja meg, hogy hányszoros feldúsulás tapasztalható a szilárd fázisban a folyékony fázis koncentrációjához képest. Egy humusz



1. ábra. Az UO_2^{++} ion adszorpciós izotermája humusz preparátumon (SZALAY mérései [1])

preparátumon történt mérésnél (1. ábra) az uranyl ion állandói a következő értékeknek adódtak [1]:

$N_\infty = 0{,}72$ milliekvivalens/gr

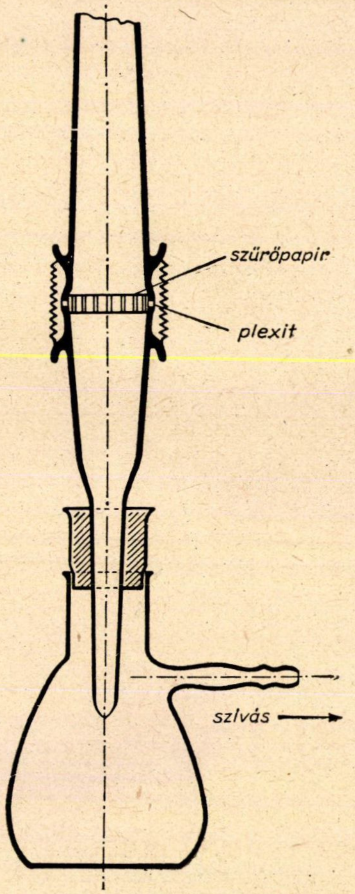
$a = 1{,}19 \cdot 10^4$

$N_\infty a = 0{,}86 \cdot 10^4$

Annak ellenőrzésére, hogy az adszorpciós izoterma valóban interpretálható-e LANGMUIR szerint, a szokásos és SZALAY által is alkalmazott lineáris ábrázolást használtam. Ha $\frac{c}{N/N_\infty}$-t ábrázoljuk, mint c függvényét a mérési eredmények alapján, akkor a Langmuir-féle formula alapján egyenest kell várnunk, mert $\frac{c}{N/N_\infty} = c + \frac{1}{a}$.

Miután SZALAYnak ilyen módon sikerült az uránium adszorpciós geokémiai mechanizmusát a biolitokban tisztáznia, felmerült annak lehetősége, hogy a folyamat más kationok esetén is bekövetkezhet, különösen nagy atomsúlyú, nagyobb vegyértékű kationok esetén, amint arra SZALAY említett munkájában, a 338—339. oldalon rámutat.

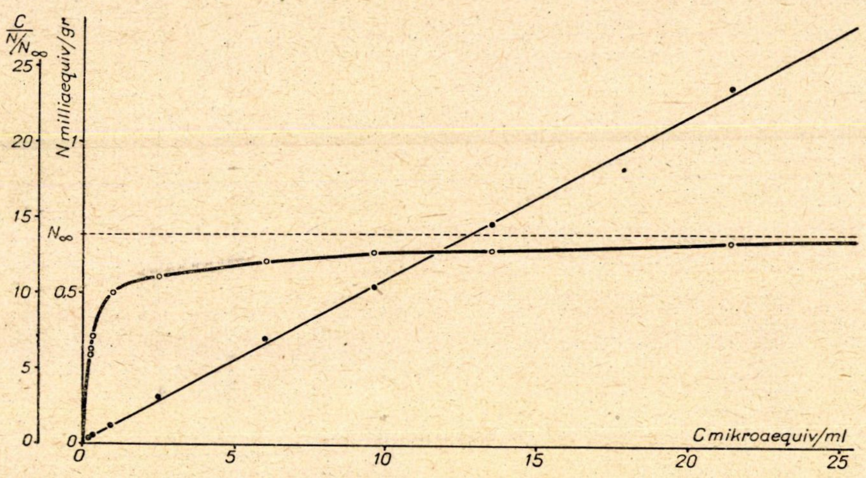
Az irodalom a kationok adszorpciójára humuszon aránylag kevés adatot tartalmaz. Ezek túlnyomóan a növényi életben és a talajtanban fontos kationokra (Ca, K, Na, NH_4) vonatkoznak. Szükségesnek látszott nagyobb atomsúlyú és különböző vegyértékű kationok adszorpciós izotermáját megvizsgálni. Feladatom az volt, hogy azonos humusz preparátumon, melyen SZALAY az urániumot vizsgálta, más kationok adszorpcióját vizsgáljam meg. E munkámban a következő kationokkal végzett adszorpciós kísérletekről szeretnék beszámolni: Ni^{++}, Cu^{++}, Fe^{++}, Cr^{+++}, La^{+++}, Fe^{+++}, Th^{+4}. A kationok kiválasztásánál figyelemmel voltam arra, hogy az urániumnál is alkalmazott p_{H} körülmények mellett ($p_{\mathrm{H}} \sim 5$ érték) ne hidrolizáljanak. Felvettem az egyes kationok adszorpciós izotermáját, és abból megállapítottam az adszorpciós állandókat. Az izotermák felvételénél 50 ml oldat térfogatot és 1 gramm humusz preparátumot alkalmaztam. Az adszorpciós egyensúly néhány másodperc alatt beállott ugyan, de hogy az adszorbens teljesen és egyenletesen átnedvesedjék, csak félóra eltelte után választottam el a szűrletet az adszorbenstől. Időközben rázogatással akadályoztam meg a humusz preparátum leülepedését. Vákuum szűrés alkalmazása után mindkét frakció kation tartalmát meghatároztam. A használt vákuumszűrő szétválasztó berendezést a 2. ábra mutatja. A vizsgálatok során tisztázódott, hogy elég a szűrlet koncentrációját meghatároznom, és abból számítani az adszorbeálódott kation mennyiségét. Több párhuzamos mérést végezve a szűrletek koncentrációi igen jól egyeztek.



2. ábra. Vákuum gyorsszűrő berendezés

A Ni^{++} ion adszorpciós izotermáját a 3. ábra mutatja. A meghatározáshoz az irodalomból jól ismert dimetilglioximos eljárást használtam. A dimetilglioxim 1%-os alkoholos oldatát az előzőleg 5%-os nátriumhidroxid oldattal meglúgosított, s telített bróm vízzel kezelt nikkel oldathoz adtam. A bróm hatására részben a szűrletben található kolloid humusz részecskék eloxidálódtak (ugyanis a lúgos közegben sárgás színnel oldódó humusz a meghatározásnál zavar). A keletkezett vörös színeződés színintenzitását PULFRICH fotométerrel mértem. A mérés eredményét az I. táblázat tartalmazza.

Ismételten felvettem a már egyszer lignitből preparált humuszon felvett Cu^{++} ión adszorpciós izotermáját [1] mélylápi tőzegből preparált humuszon. Mindkét esetben az adszorpciós kapacitás igen közeli érték az uranyl ion adszorpciós kapacitásához. A kétféle humusz preparátumon felvett adszorpciós izoterma éppen úgy, mint az uranyl ioné is némileg eltér egymástól. A Cu kvantitatív meghatározásához — a szűk határok között használható — de már pár γ-t kimutató kálium ferrocianidos eljárást választottam. A reagens egy százalékos oldatából 0,3 ml hozzáadására vörösbarna színeződés keletkezett.



3. ábra. Ni^{++} ion adszorpciós izotermája humusz preparátumon. Az egyenes a Langmuir-féle interpretációt igazolja

o adszorpciós izoterma

• $\frac{c}{N/N_\infty}$ mint a c függvénye

A 6 γ/ml-nél nagyobb koncentráció esetén a képződött kolloid kicsapódott, ilyenkor előzetes hígítást alkalmaztam. Az igen alacsony felezési koncentráció miatt más, kisebb érzékenységű, de tágabb koncentráció-viszonyok között mozgó eljárást nem alkalmazhattam. A keletkezett barna színeződést itt is PULFRICH fotométerrel mértem. Az adszorpciós izotermát a 4. ábra mutatja.

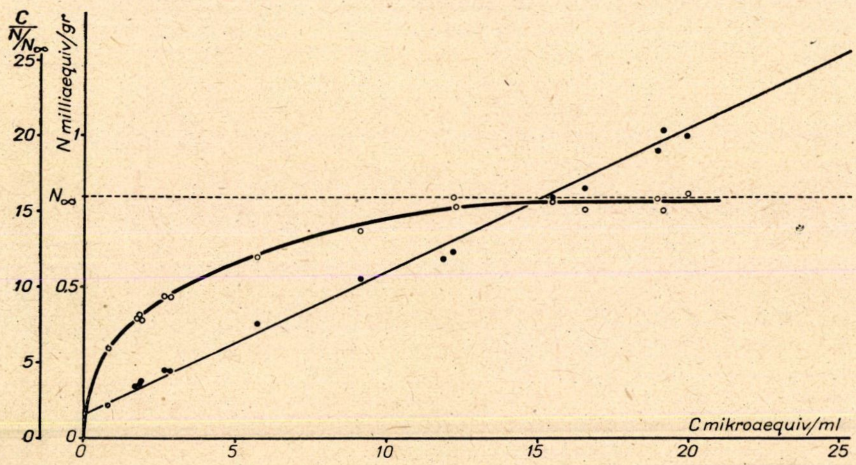
A Fe^{++} ión adszorpciós izotermája szintén jól meghatározható volt. A lehidrolizálást kevés sósav hozzáadásával akadályoztam meg, így az adszorpció azonban $p_H \sim 5$-nél alacsonyabb értéken ment végbe. (A p_H értékét minden esetben univerzál indikátor papírral mértem, 4—4,5 p_H érték között volt.) A ferro ion ferri ionná oxidálódását a szokásos félórás rázogatás alatt úgy akadályoztam meg, hogy az oldat fölötti teret nitrogén gázzal töltöttem meg. A ferro ion levegő hatására történt oxidációja csak a szűrés tartama alatt következhetett be. A kvantitatív méréshez $n/10$ sósavban oldott 1%-os $\alpha-\alpha'$-dipiridillel adott vörös színeződést használtam fel. Így megkaptam a ferro ion mennyiségét, majd az oldathoz nátriumhidroszulfitot adva a jelenlevő ferri is ferro-vá redukálódott, amit ismételt méréssel határoztam meg. A két mérés eredményeként adódó ferri értéke mindig igen alacsony, pár % volt. Az adszorpciós izoterma az 5. ábrán látható.

A La^{+++} adszorpciós izotermája és az abból kiértékelt állandók is mutatják, hogy a La^{+++} jobban abszorbeálódik az uranyl ionnál. A La meghatározásához az alizarinnal alkotott lakkot használtam fel. Ugyanis pontosan beállított p_H érték mellett a La alizarinnal lilás színeződést ad. A p_H beállításához normál ecetsavas és normál nátriumacetátos oldatot használtam pufferként. Az 1%-os alizarinszulfonsavas — Na oldatból 0,4 ml elegendő volt a szín létrehozásához, ugyanakkor a feleslegben maradt reagens színe nem nyomta el a keletkezett La lakk színét. A meghatározáshoz frissen készített színösszehasonlító oldat-sorozat alkalmazása volt célravezető, mindig azonos lombiktérfogat mellett. Az izotermát a 6. ábra mutatja.

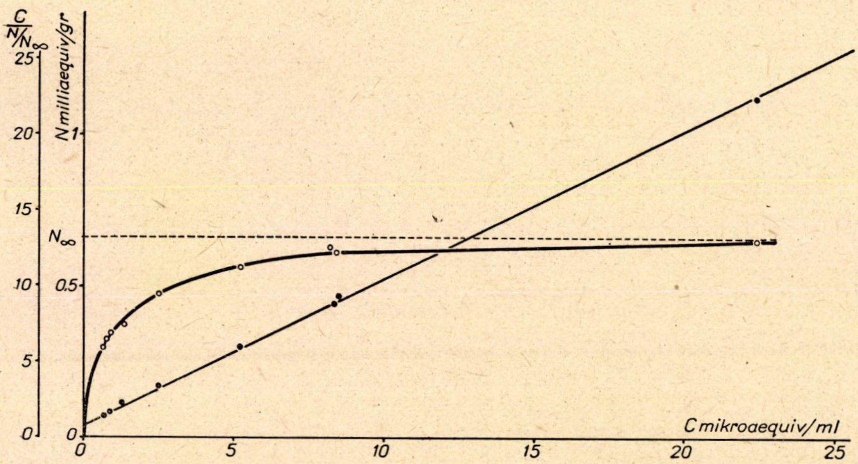
A Th^{4+} ion adszorpciós izotermáját a 7. ábra mutatja. Az adszorpciós egyensúlyi állandója az uranyl ion adszorpciós egyensúlyi állandójánál magasabb értéket adott. A Th meghatározásához a telítési értéknél thoriumoxid formájában gravimetriás meghatározást alkalmaztam. Az alacsonyabb szűrlett koncentráció esetén salétromsavas közegben káliumjodáttal alkotott csapadék formájában leválasztva, kimosva káliumjodiddal a jódot felszabadítva, nátriumthioszulfátos titrálást használtam.

Felvettem még egyszer a Fe^{+++} ion adszorpciós izotermáját, ami a lignitből készített humuszon nem adott izotermát [1], a mérési pontok erősen szórnak. Ebben az esetben azonban feltűnően magas telítési értéket adott. A ferri ion eltérő viselkedése a két esetben a következőképpen magyarázható. Irodalmi adatok szerint [2] a ferri ion humuszsavval vízben kolloidálisan oldódó vegyületet, humátot alkot. Az izoelektromos pontján azonban ez a humát oldhatatlan. Jelen esetben $p_H \sim 4—4{,}5$ értéken dolgoztam, így észlelhető volt adszorpciós izoterma, úgy látszik tehát, hogy az izoelektromos pontnak megfelelő p_H értéken dolgoztam, míg az előző esetben a ferri humát, mint kolloid oldat visszakerült a szűrletbe. A kvantitatív meghatározás savas közegben ammoniumszulfocianiddal adott vörös színeződés felhasználásával történt, s összehasonlítottam ismert ferri tartalmú, hasonló körülmények között készített oldattal. A 8. ábrán látható a ferri ion adszorpciós izotermája.

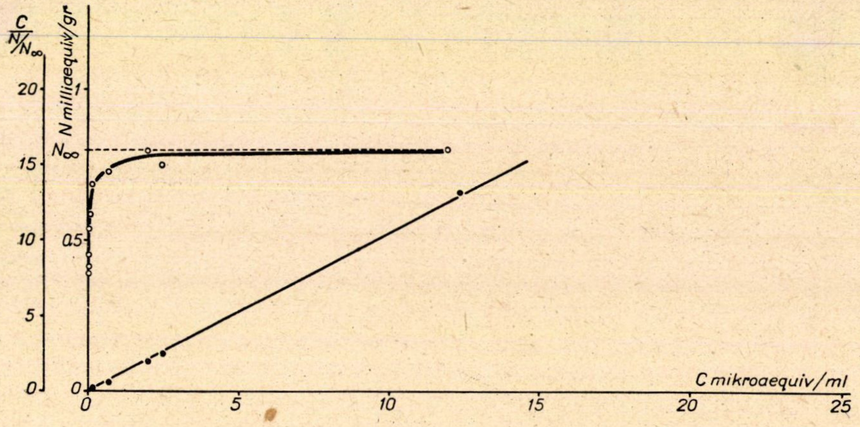
Magas telítési értéket mutatott mélylápi tőzegből preparált humuszon a Cr^{+++} ion is, ami lignit humuszon nem mutatott adszorpciós tulajdonságot [1]. Itt ugyanaz volt a helyzet, mint a ferri ion adszorpciójánál. Az oldható Cr-humát adott p_H érték mellett oldhatatlan, sikerült éppen azt a p_H értéket meg-



4. ábra. Cu^{++} ion adszorpciós izotermája humusz preparátumon.
Az egyenes a Langmuir-féle interpretációt igazolja
o adszorpciós izoterma
• $\frac{c}{N/N_\infty}$ mint a *c* függvénye



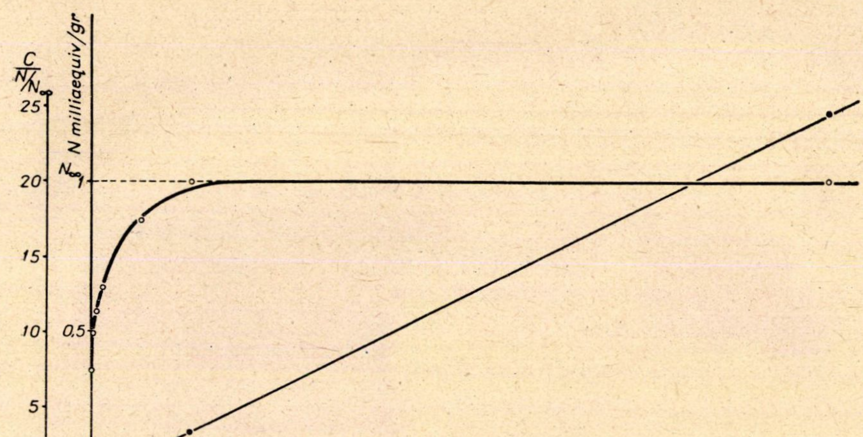
5. ábra. Fe^{++} ion adszorpciós izotermája humusz preparátumon.
Az egyenes a Langmuir-féle interpretációt igazolja
o adszorpciós izoterma
• $\frac{c}{N/N_\infty}$ mint a *c* függvénye



6. ábra. La^{+++} ion adszorpciós izotermája humusz preparátumon.
Az egyenes a Langmuir-féle interpretációt igazolja

○ adszorpciós izoterma

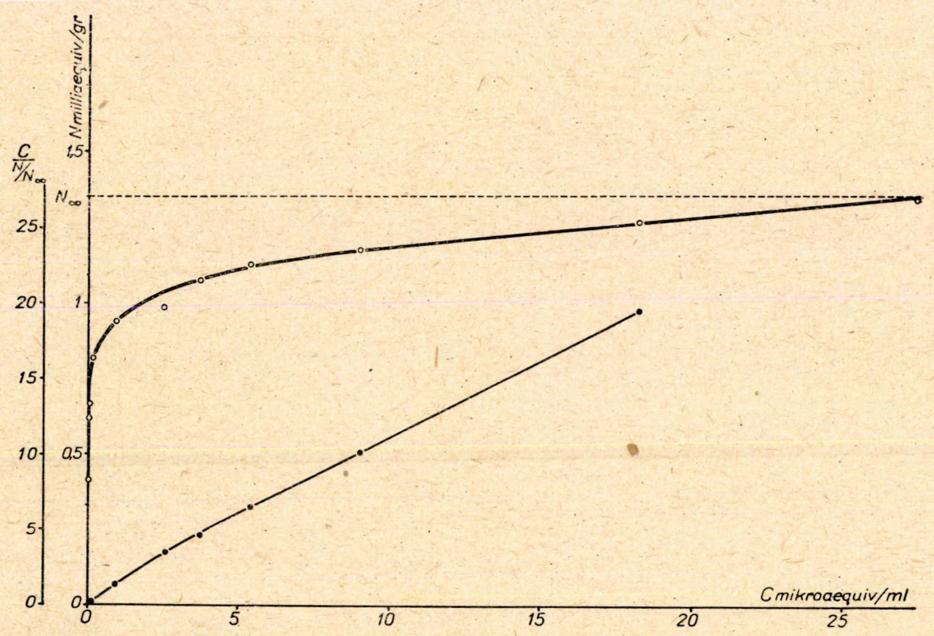
● $\frac{c}{N/N_\infty}$ mint a c függvénye



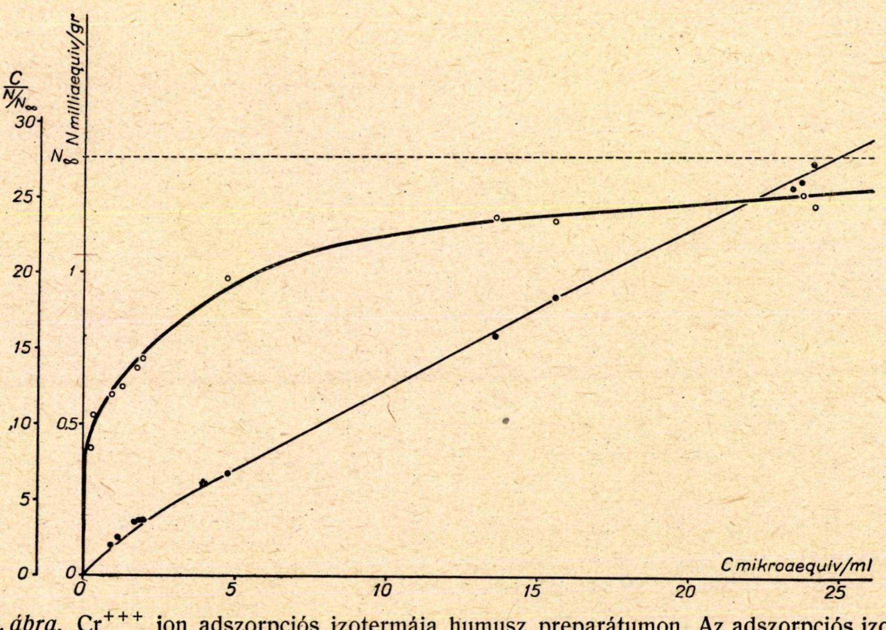
7. ábra. Th^{4+} ion adszorpciós izotermája humusz preparátumon.
Az egyenes a Langmuir-féle interpretációt igazolja

○ adszorpciós izoterma

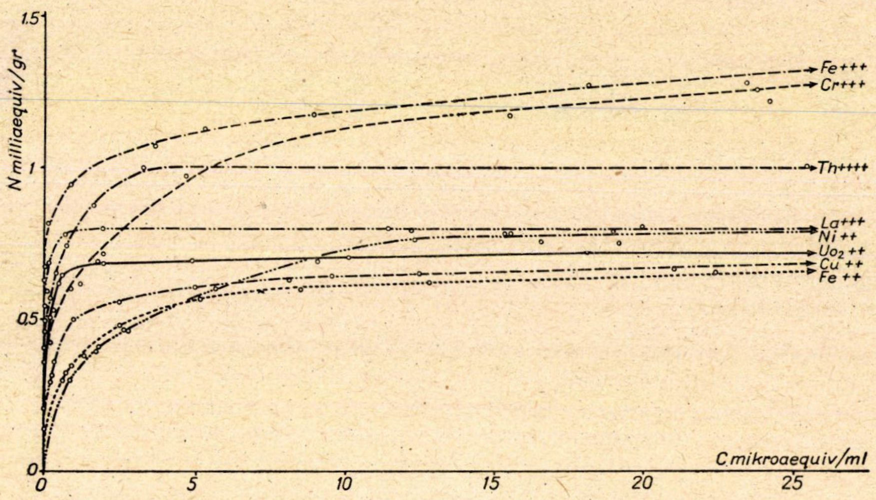
● $\frac{c}{N/N_\infty}$ mint a c függvénye



8. ábra. Fe^{+++} ion adszorpciós izotermája humusz preparátumon. Az adszorpciós izoterma a Langmuir-féle formulával nem interpretálható jól, mert a lineáris ábrázolása nem ad egyenest



9. ábra. Cr^{+++} ion adszorpciós izotermája humusz preparátumon. Az adszorpciós izoterma a Langmuir-féle formulával nem interpretálható jól, mert a lineáris ábrázolása nem ad egyenest



10. ábra. Az eddig vizsgált kationok adszorpciós izotermáinak összegezése

találni ($p_H \sim 5$). Meghatározásához a kromáttá oxidálással keletkezett sárga színt használtam fel. Oxidálószerként hidrogénhyperoxid szerepelt nátriumhidroxid jelenlétében. A keletkezett színintenzitást PULFRICH fotométerrel mértem. Meg kell itt jegyeznem, hogy a Cr^{+++} ion a szokásos 1%-os sósavval való kezelés hatására nem volt felszabadítható teljes mértékben a humuszról. Részleges irreverzibilitást tapasztaltam. (9. ábra.)

Összefoglalva az eddigi méréseket, a vizsgált kationok közül a Fe^{++}, Cu^{++}, Ni^{++} és La^{+++} ionoknál az adszorpciós kapacitás közel egyenlő érték. Az UO_2^{++} ionnál 0,72 milliekvivalens/gr volt, a felsoroltaknál 0,66—0,80 milliekvivalens/gr közé esik. (10. ábra.) A Th^{4+} ion adszorpciós kapacitása magasabb érték, kereken 1 milliekvivalens/gr-nak adódott. A Fe^{+++} és Cr^{+++}

I. TÁBLÁZAT

Sorszám	Kation	N_∞ milliekvivalens/gr	a	$N_\infty a$
1	Ni^{++}	0,80	$5{,}64 \cdot 10^2$	$0{,}0451 \cdot 10^4$
2	Fe^{++}	0,66	$1{,}39 \cdot 10^3$	$0{,}0910 \cdot 10^4$
3	Cu^{++}	0,70	$3{,}41 \cdot 10^3$	$0{,}2380 \cdot 10^4$
4	UO_2^{++}	0,72	$1{,}19 \cdot 10^4$	$0{,}8600 \cdot 10^4$
5	Th^{4+}	1,00	$2{,}10 \cdot 10^4$	$2{,}1000 \cdot 10^4$
6	La^{+++}	0,80	$2{,}88 \cdot 10^4$	$2{,}3000 \cdot 10^4$
7	Cr^{+++}	1,38	$5{,}59 \cdot 10^2$	$0{,}0770 \cdot 10^4$
8	Fe^{+++}	1,35	$1{,}96 \cdot 10^4$	$2{,}6500 \cdot 10^4$

ionok erősen kiválnak az előző csoportból, adszorpciós kapacitásuk 1,35—1,38 milliekvivalens/gr. (10. ábra.) Megvizsgáltam továbbá, hogy az adszorpciós izotermák empirikusan mért pontjai milyen jól interpretálhatók a Langmuir-formulával. E célból ábrázoltam a $\frac{c}{N/N_\infty}$ értéket a koncentráció függvényében [1], s azt tapasztaltam, hogy a Fe^{++}, Cu^{++}, La^{+++} és Th^{4+} ionok mérési pontjai hibahatáron belül igen jól egy egyenesen fekszenek, a Ni^{++} adszorpciós izotermáját Langmuir-féle formulával interpretálva, a mérési pontok szórnak, nem fekszenek pontosan az egyenesen. A szórás oka valószínűleg a Ni kvantitatív meghatározási módszerében rejlik. A Cr^{+++} és Fe^{+++} ionok adszorpciós izotermája nem ábrázolható egyenessel. A Langmuir-féle formulával nem interpretálható pontosan.

Kifejezve az N_∞-t, az egyes kationok ekvivalens/gr, illetve molsuly/gr egységeiben, a kapott értékekből megállapítható, hogy az adszorpcióban az ekvivalens mennyiségek játszanak szerepet. Ugyanis a Langmuir-féle formulával interpretálható kationok telítési értékeit jelentő egyenesek, ekvivalens/gr-ban, aránylag közeleső értékeket adnak. A Th^4 mutat nagyobb eltérést ettől az értéktől.

* * *

Befejezésül köszönetet mondok SZALAY SÁNDOR professzor úrnak munkám iránt tanúsított érdeklődéséért és támogatásáért, mellyel munkámat elősegítette.

Kossuth Lajos Tudományegyetem
Kisérleti Fizikai Intézet, Debrecen

IRODALOM

[1] SZALAY SÁNDOR: Vizsgálatok nagy atomsúlyú kationok adszorpciójára humusz kolloidokon, *MTA Mat. és Fiz. Oszt. Közl.*, IV./3 (1954) 327—340.
[2] K. RANKAMA—TH. G. SAHAMA: *Geochemistry*, Chicago, 1952.
[3] B. M. W. TRAPNELL: *Chemisorption*, London, Butterworth, 1955.
[4] G. O. MÜLLER: *Praticum der quantitativen chemisen Analyse*, Hirzel, Leipzig, 1952.
[5] A. K. BABKO—A. T. PILIPENKO: *Kolometriás analízis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.
[6] W. FRESENIUS—G. JANDER: *Handbuch der Analytischen Chemie*, (Bd. III.) Springer, Beriin, 1944.
[7] W. FRESENIUS—G. JANDER: *Handbuch der Analytischen Chemie*, (Bd. IV.) Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1950.

(Beérkezett: 1957. XI. 1.)

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

Gáspár Rezső: „A félvezető szelén és tellur elektronszerkezete" című doktori értekezésének vitája

GÁSPÁR REZSŐ, aki a debreceni egyetemen az elméleti fizika tanára, 1956. június 13-án védte meg doktori értekezését.

A doktori értekezés tárgya GÁSPÁR régebbi munkáihoz kapcsolódik. GÁSPÁR REZSŐ, mint GOMBÁS PÁL tanítványa, az atomok, molekulák és fémek kvantumelmélete területén már korábban is számos figyelemre méltó eredményt ért el. Foglalkozott az atom statisztikus elméletének továbbfejlesztésével, a statisztikus módszert az atomok egyes sajátságainak meghatározására alkalmazta. Ugyancsak a statisztikus elméletet alkalmazta a HJ-molekula kötésének tanulmányozására, a H_2-molekulát és molekulaiont pedig kvantumkémiai módszerekkel tárgyalta. A kristályos anyag fizikájának köréből korábban az alumínium és az ezüst fémes kötésének elméletét alkotta meg.

A disszertáció egy, a fentieknél bonyolultabb probléma tisztázását tűzte ki célul: a félvezetőként viselkedő szelén és tellur sajátságait kívánta a kvantumelmélet segítségével tisztázni. A félvezetők ma a híradástechnika érdeklődésének előterében állanak. Közülük elsősorban a gyémántrács-típusú félvezetők (szilicium, germánium stb.), valamint a szelén és tellur nyertek széleskörű technikai alkalmazást. Ez az érdeklődés volt GÁSPÁR REZSŐ munkájának is az indítéka.

Bár az utóbbi időben sok kísérlet foglalkozott a szelén és tellur fizikai sajátságainak vizsgálatával, mégsem alakult ki teljesen tiszta kép elektronszerkezetükről. Elméletileg GALLEN tárgyalta a problémát, munkája azonban kritika tárgyává tehető.

A dolgozat a periódusos rendszer VI/b oszlopában álló atomok elektronszerkezetének vizsgálatából indul ki. Az ismertebb atomokból kialakult molekulák és kristályok szerkezeti kérdéseinek elemzése után tér át a szelén- és telluratom, valamint a félvezető szelén és tellur tanulmányozására. A kristályszerkezet leírása után megalkotja a félvezető elektronjainak energiaspektrumát. A felállított elektronrendszer helyességét először az infravörös színkép, majd a röntgenabszorpciós színkép által ellenőrzi. Lehetőség nyílik az elektromos vezetőképesség anizotrópiája okának tisztázására is. Végül, a dolgozat a nagy nyomás alá került szelén és tellur fémes állapotával, a Hall-együttható kétszeres előjelváltásával és az elektromos vezetés jellegével foglalkozik.

A szerző leglényegesebb felismerése az, hogy a szelén- és tellur-kristályrács szerkezetének laza volta döntő jelentőségű a probléma tisztázásához.

Amíg tömött elrendeződésű kristályrácsnál a rácsszerkezet kevés felvilágosítással szolgál az elektronszerkezetre vonatkozólag, addig laza kristályszerkezet sok útmutatást nyújt az elektronszerkezet felismeréséhez. Így vált lehetővé a vizsgált két anyag legfontosabb mechanikus, termikus és elektromos tulajdonságainak kvalitatív értelmezése.

A disszertáció bírálóbizottsága NOVOBÁTZKY KÁROLY akadémikus elnöklete alatt ült össze. (Titkár MARX GYÖRGY doktor, tagok GYULAI ZOLTÁN és JÁNOSSY LAJOS akadémikusok, KOVÁCS ISTVÁN és SZIGETI GYÖRGY levelező tagok, valamint SZAMOSI GÉZA doktor voltak.)

Az első opponensi véleményt GOMBÁS PÁL akadémikus terjesztette elő. Ebben kifejtette, hogy a félvezetők elméleti tárgyalása igen nagy matematikai nehézségekkel jár, ezért kvantitatív eredmények elérése nem várható. A szelén és tellur kísérleti sajátságainak kvalitatív értelmezésénél azonban sikerre vezetett a GÁSPÁR által követett, a kristályrács jellegéből kiinduló módszer.

BUDÓ ÁGOSTON levelező tag, mint opponens kiemelte, hogy GÁSPÁR milyen logikus úton, a rokon atomok sajátságaiból kiindulva jutott el az elektronszerkezet tisztázásához, csak ez tehette lehetővé az aránylag bonyolult kristályszerkezet fizikai következményeinek megértését. Ezután kérdéseket tett fel a más szerzők által elért eredményekkel, valamint az elmélet kvantitatív irányba való továbbfejlesztésével kapcsolatban.

NEUGEBAUER TIBOR doktor opponensi véleményében foglalkozott a periódusos rendszer VI/b oszlopában levő elemek elektronszerkezetével, így azzal a kérdéssel, hogy a szelén és tellur miért nem alkot kétatomos molekulát és miért láncszerű kristályszerkezetet alakít ki. Foglalkozott az elegykristályok várható fizikai sajátságaival. Ezek kísérleti ellenőrzése GÁSPÁR elméletének próbakövéül szolgálhat.

A disszertációt és a felvetett kérdésekre GÁSPÁR REZSŐ által adott választ mindhárom opponens elfogadta.

Ezután a *bírálóbizottság* és a hallgatóság soraiból SZIGETI GYÖRGY levelező tag a szelén- és gyémánt-típusú félvezetők különbségéről, GYULAI ZOLTÁN akadémikus az optikai sajátságokról, HOFFMANN TIBOR doktor az egyes nívók sorrendjéről, NAGY ELEMÉR doktor a tiltott zónákról, GILDE FERENC az állapotfüggvény csoportelméleti viselkedéséről tett fel kérdéseket. GÁSPÁR REZSŐ válasza után még NAGY ELEMÉR doktor a vezetőképesség hőmérsékletfüggésével, HOFFMANN TIBOR doktor és MARX GYÖRGY doktor az átmeneti mátrixelem kiszámításával kapcsolatban szólaltak fel.

A vita lezárása után a *bírálóbizottság* a következő javaslatot fogadta el:

GÁSPÁR REZSŐ *a fizikai tudományok kandidátusa „A félvezető szelén és tellur elektronszerkezete" című doktori értekezésének nyilvános vitájára kiküldött bírálóbizottság megállapította, hogy a jelölt a disszertáció témáját a fizika igen aktuális fejezetéből választotta. A szilárd testek szerkezetének megismerése egyre fokozódó jelentőségű. A félvezetők tárgyalása elméletileg igen bonyolult, ezért részletekbe menő kvantitatív elmélet kidolgozása nem várható. Viszont a disszertáció igen értékes kvalitatív eredményeket tartalmaz a félvezető szelén és tellur szerkezetére vonatkozóan. Az opponensek észrevételeire és a vita során felmerült kérdésekre vonatkozóan a jelölt széleskörű tájékozottságról tanúskodó kielégítő választ adott. Ennek alapján a bizottság egyhangúlag javasolja a*

Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy GÁSPÁR REZSŐ *kandidátust nyilvánítsa a fizikai tudományok doktorává.*

A *Tudományos Minősítő Bizottság* a javaslatot elfogadta és GÁSPÁR REZSŐnek a fizikai tudományok doktora címet adta meg.

Marx György
a fizikai tudományok doktora

Aczél János doktori értekezésének nyilvános vitája

A *Tudományos Minősítő Bizottság* 1957. június 14-ére tűzte ki ACZÉL JÁNOS *„A geometriai objektumok elméletéhez"* című doktori értekezésének nyilvános vitáját. A disszertáció opponensei HAJÓS GYÖRGY és RÉNYI ALFRÉD akadémikusok, valamint VARGA OTTÓ levelező tag voltak.

A bírálóbizottság tagjaiul a *Tudományos Minősítő Bizottság* a következőket kérte fel: elnöknek KALMÁR LÁSZLÓ levelező tagot, tagoknak EGERVÁRY JENŐ és TURÁN PÁL akadémikusokat, CSÁSZÁR ÁKOSt és FEJES-TÓTH LÁSZLÓt a matematikai tudományok doktorait, valamint SOÓS GYULÁt a matematikai tudományok kandidátusát. A bizottság titkári teendőit alulírott látta el.

A bevezető és befejező résztől eltekintve három fejezetre tagozódó megvitatott dolgozat az objektumok elméletével foglalkozik. Tekintsünk egy m-dimenziós sokaságot s ezt paraméterezzük minden lehetséges módon úgy, hogy az egyik paraméterezésről a másikra való áttérés minden esetben reguláris legyen. Rendeljünk a sokaság egy pontjához a paraméterezés minden megválasztása mellett n értéket. Ha a paraméterezett sokaságon definiált mennyiségeknek megvan az a tulajdonságuk, hogy ha egy paraméterezés melletti mennyiség ismeretes, akkor ki lehet számítani minden más paraméterezés melletti értéket is, amennyiben a paramétertranszformáció ismeretes, akkor e mennyiségeket, HAANTJES és SCHOUTEN, valamint WUDHEILER 1937-ben megjelent munkái óta geometriai objektumoknak szokták nevezni. A geometriai objektumokkal kapcsolatban felmerülő egyik legfontosabb kérdés, milyen transzformációs képletű geometriai objektumok léphetnek fel egyáltalában. Ez a kérdés azért érdekes, mert a transzformációra erős megkötést jelent a paramétertranszformáció csoportjellege. A paramétertranszformációk asszociativitása az objektumok transzformációjára függvényegyenleteket ad. ACZÉL JÁNOS disszertációja elsősorban ezekkel a függvényegyenletekkel foglalkozik. Mégpedig ezek vizsgálata alapján az I. fejezetben kimutatja, hogy bizonyos igen természetes és enyhe folytonossági megkötések mellett nem létezhetik harmadiknál magasabb osztályú, egykomponensű, egy dimenziós objektum, továbbá, hogy az összes első-, másod- és harmadosztályú, egykomponensű, egydimenziós objektumok ekvivalensek bizonyos egyszerű szerkezetű transzformációs képletű objektumokkal. Eddig hasonló tétel csak differenciálhatósági feltételek mellett volt ismeretes. A II. fejezetben a szerző hasonló kérdéseket tárgyal többkomponensű objektumokkal kapcsolatban ama megszorítás mellett, hogy a paraméterek száma nem nagyobb mint a komponensek száma. A III. fejezet az objektumok kovariáns derivációjával foglalkozik és megadja differenciálhatósági és más feltételek nélkül az elsőosztályú, egykomponensű, egydimenziós objektumok kovariáns deriváltjának általános alakját. Kimutatja a szerző, hogy a másodosztályú, egykomponensű objektumoknak tetszőleges reguláris koordináta-transzformáció esetén nincs kovariáns deriváltja, továbbá megadja bizonyos első- és másodosztályú akárhány kompenensű, egydimenziós objektumok kovariáns deriváltjának általános alakját is megfelelő függvényegyenletek megoldásával.

HAJÓS GYÖRGY opponens a benyújtott dolgozatot értékelve megállapítja, hogy a disszertáció felöleli a geometriai objektumok klasszifikáció elméletének nagy részét és a kovariáns deriváció szinte teljes elméletét, de nem ismétli mások eredményeit, hanem egyéni feldolgozásban adja a mások által is elért eredményeket, sőt azokat mélységben és terjedelemben is kiépíti. Különösen azt kell hangsúlyozni, hogy mások erős feltevések mellett jutottak el ezekhez az eredményekhez, a szerző pedig ugyanezekhez az eredményekhez jut el, pedig sem az analiticitást, de még a differenciálhatóságot sem tételezi fel. Ennek a szép eredménynek a módszer egyszerűsége a titka. A szerző — mondhatni — mindent ügyes helyettesítésekkel ér el. A módszer egyszerűsége semmiképpen sem szolgálhat a munka rovására, sőt ellenkezőleg, hiszen az egyszerű módszer a nyitja az eredmények mélységének. Nem old meg a dolgozat minden felmerülő problémát. Ezt nem is lehetne várni, hiszen az objektumok sokfélesége a problémák egész tömkelegét rejti magában. Meg kell viszont állapitani, hogy sok olyan problémát is megold, amelyek megoldása még erősebb feltételek mellett sem található meg az eddigi irodalomban. A dolgozat tehát tökéletesíti és tovább fejleszti az eddig elért eredményeket. Külön kiemelendő a disszertáció bevezetése, amely kerek képet ad a probléma állásáról s az irodalomjegyzék, amely talán a matematika eme új fejezetének teljes anyagát adja.

RÉNYI ALFRÉD opponens úgy látja, hogy ha a szerző nem kerülte volna el a többértékű inverz leképezéseket, a tárgyalást sokkal áttekinthetőbbé tehette volna. Hangsúlyozza azonban, hogy megjegyzései semmit sem vonnak le az elért eredmények értékéből. A továbbiakban kiemeli, hogy ACZÉL JÁNOS volt az első, aki a geometriai objektumok elméletét a függvényegyenletek elméletének módszereivel, tehát differenciálhatósági feltételek nélkül tárgyalta. Ezzel a disszertáció új kutatási irányt nyitott meg a geometriai objektumok elméletében. Megjegyzéseiben rámutat arra, hogy a témakörnek a bevezetésben adott vázlatos ismertetése a tárgykörben járatlan számára nehezen érthető, továbbá magától értetődőnek tekinti a szerző, hogy a differenciális objektumok transzformációs képletében szereplő deriváltak független változóként kezelhetők, pedig ez nem triviális. Megemlíti, mint önmagában is érdekes kérdést a következő problémát: Bizonyos számú derivált előírásakor megadható olyan leképezés, amely az egész térben kölcsönösen egyértelmű és adott pontban megadott deriválttal rendelkezik. Kérdés, mi ennek a legegyszerűbb formája? Hogyan lehet e kérdést többdimenziós térben általánosítani? Nem szerencsés az a fogalmazás sem, hogy az 1. segédtétel csak $\varrho \geqq 4$-re vonatkozik, de korolláriumai $\varrho < 4$ esetre is. Nem mutat rá arra, mi a folytonossági feltevések geometriai jelentősége.

VARGA OTTÓ opponens ugyancsak kiemeli, hogy milyen termékenynek mutatkozott a szerzőnek az a gondolata, hogy függvényegyenletek módszereivel közeledjék a geometriai objektumok problémáihoz. Külön kiemeli a dolgozat második részében található azt az eredményt, amely szerint tetszőleges komponens számú, első-, másod- és harmadosztályú objektumok vagy az egykomponensű objektumokra bomló objektummal, vagy a Pensov-féle objektummal ekvivalens. A kovariáns deriváltak elméletét is GOLABhoz képest jóval tovább viszi azzal, hogy tetszőleges komponens számú, egydimenziós első- és másodosztályú objektumok kovariáns deriváltjait határozza meg. Azt, hogy a szerző által tárgyalt többdimenziójú és komponensű objektumok közé a másodosztályúak esetén a Christoffel-féle szimbólum transzformációs törvényének elegettevő objektumok besorolhatók-e, azt a dolgozat úgy látszik, nem dönti el. Pedig ennek ismeretében az összes affinösszefüggő terek bizonyos osztályozása válnék lehetővé.

ACZÉL JÁNOS az opponenseknek adott válaszában mindenekelőtt kijelentette, hogy a bírálatokkal egyetért. VARGA OTTÓ levelező tag kérdésére megemlíti, hogy a Christoffel-féle szimbólum transzformációs törvénye nem teljesíti az idézett tétel egyértelmű megoldhatósági feltételét. Ez azonban nem zárja ki azt, hogy a Christoffel-szimbólum valamilyen transzformált alakját tartalmazza az említett tétel, illetve annak 2. korolláriuma.

RÉNYI akadémikus bevezető megjegyzéseivel kapcsolatban megemlíti, hogy ehhez hasonlókat S. LOJASIEVICZ egy észrevételéhez kapcsolódva az Acta Sci. Hung. 7 (1956) 330. oldalán ő is tett. Egyelőre nem látja, hogy lehetne a mondottakat az eredmények levezetésére alkalmazni. RÉNYI akadémikus második megjegyzésére válaszolva megemlíti, hogy a differenciálgeometriában a koordinátatranszformációkról csak azt szokás feltételezni, hogy egy pont környezetében és nem az egész térben invertálhatók.

A vitában RÉNYI ALFRÉD megismétli az opponensi véleményében megfogalmazott problémáját. SOÓS GYULA felszólalásában rámutat arra, hogy az objektummező legáltalánosabb megfogalmazása ma már globálisan történik. Ez a modern megfogalmazás azért szerencsés, mivel ezzel lehetőség nyílik más tudományágaknak a vizsgálatokba való bevonására. Sok olyan probléma intézhető el, amelyeknél a topológiai sajátságok megkönnyítik a probléma megközelítését. Objektummezők létezésére a kérdést még nem vetették fel. Érdekes volna megvizsgálni, hogy az itt szereplő terek topologikus struktúrája milyen objektumok létezését zárja ki. Az iránt érdeklődik, vannak-e idevonatkozó eredmények? A következőkben KALMÁR LÁSZLÓ, HAJÓS GYÖRGY és VARGA OTTÓ szólnak hozzá a geometriai objektumoknak lokális, illetve globális módon történő tárgyalásához.

ACZÉL JÁNOS részletesen válaszolt a hozzá intézett kérdésekre, a kiküldött bizottság válaszát elfogadta és egyhangú határozatként kiemelte azt, hogy a disszertáció jelentős hozzájárulás a matematika egy viszonylag új, geometriai szempontból nézve is érdekes fejezetéhez. A dolgozat felöleli a geometriai objektumok klasszifikáció elméletének nagy részét és a kovariáns derivációjuknak szinte teljes elméletét. Egyéni feldolgozásban adja a mások által elért eredményeket is, sőt azokat mélységben és terjedelemben is tovább építi. Olyan eredményeket, amelyekhez mások erős feltevések mellett jutottak el, az analiticitás, sőt általában a differenciálhatóság feltevése nélkül ér el. A disszertáció kidolgozása mindvégig gondos. ACZÉL JÁNOS igen széleskörű és értékes tudományos munkát fejtett ki az elmúlt tíz év alatt, különösen a függvényegyenletek elmélete terén. A jelen disszertációban ennek az elméletnek újabb fontos alkalmazását adja.

Ennek alapján a bizottság egyhangúlag javasolta a *Tudományos Minősítő Bizottság*nak, hogy ACZÉL JÁNOSt nyilvánítsa a matematikai tudományok doktorává.

Gyires Béla
a matematikai tudományok kandidátusa

Kertész Andor doktori disszertációjának nyilvános vitája

KERTÉSZ ANDOR kandidátus *„Az operátormodulusok általános elméletéhez"* című doktori disszertációjának nyilvános vitáját a *Tudományos Minősítő Bizottság* 1957. július 15-én rendezte meg.

A TMB a disszertáció opponenseiül RÉDEI LÁSZLÓ akadémikust, FUCHS LÁSZLÓt a matematikai tudományok doktorát és SZENDREI JÁNOSt a matematikai tudományok kandidátusát kérte fel.

A bírálóbizottság tagjai voltak: elnök KALMÁR LÁSZLÓ akadémiai levelező tag, titkár SZÉP JENŐ a matematikai tudományok kandidátusa, HAJÓS GYÖRGY akadémikus, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikus, VARGA OTTÓ akadémiai levelező tag, PÉTER RÓZSA a matematikai tudományok doktora, STEINFELD OTTÓ a matematikai tudományok kandidátusa.

Az elnök megnyitó szavai után a bizottság titkára ismertette a jelölt tudományos munkásságát.

Ezek után KERTÉSZ ANDOR előadta disszertációjának téziseit.

Bár az operátormodulusok fogalmának bevezetése óta három évtized sem telt el, irodalma máris olyan gazdag, hogy ma már beszélhetünk az operátormodulusok elméletéről. Az operátormodulus fogalma közös általánosítása az Abel-féle csoport és a gyűrű fogalmának és így összekapcsolja az Abel-féle csoportok elméletét a gyűrűelmélettel. Az Abel-féle csoportok elmélete az operátormodulusok elmélete felé két irányban terjeszthető ki. Az egyik: a modulusok vizsgálata speciális operátortartomány alapul vétele mellett. Ezekben a vizsgálatokban inkább a csoportelméleti jelleg domborodik ki, s az ide vonatkozó eredményekről szóló dolgozatok teszik ki a moduluselmélet jelenlegi irodalmának jelentősebb részét. A másik irányhoz tartozik az a törekvés, amely az Abel-féle csoportok elméletében bevezetett fogalmakat és bebizonyított tételeket az operátormodulusok minél szélesebb osztályaira igyekszik átvinni. Ezekben a vizsgálatokban sok a gyűrűelméleti momentum s természetesen az eredmények egy része is a gyűrűelméletet gazdagítja. A dolgozat vizsgálatai ehhez az utóbbi irányhoz tartoznak.

Az eddigi vizsgálatokban az operátortartományra, illetve a modulusra nézve általában bizonyos kikötéseket tettek. Így alig található az irodalomban olyan eredmény, amely ne tételezné fel a modulusról legalább azt, hogy unitér legyen. Bár az unitérség eléggé természetes kikötés, mindamellett nagy megszorítást jelent. A disszertáció — elejtve az unitérség követelményét — az operátormodulusokkal teljes általánosságban foglalkozik.

A dolgozat lényegében három főrészre oszlik. Az I. fejezetben az alapfogalmak alkalmas definíciójáról és az ezekre vonatkozó főbb tételek bizonyításáról van szó. A II. fejezet a modulusok feletti egyenletek elméletével foglalkozik. A vizsgálatok a kompatibilis egyenletrendszer „koordinátamentes" definíciójára épülnek. E fejezetben van kifejtve az algebrailag zárt Abel-féle csoportok Szele-féle elméletéhez hasonlóan az algebrailag zárt operátormodulusok elmélete. A III. fejezet tárgyát a teljesen redukálható modulusok alkotják, amelyeknek a szerző teljes leírását adja.

Szerző előadásában kiemelte a dolgozat 1., 15., 19., 21., 22., 23., 25. és 26. tételeit.

Ezután az opponensek olvasták fel bírálatukat.

RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus az értekezés témakörét érdekesnek, eredményeit értékesnek és szépnek tartja. Megállapítja, hogy a dolgozat nagymértékben általánosító s rendszerező jellegű, amellett számos eredménye egészen új. Kiemeli, hogy a szerző kezdettől mindvégig a legáltalánosabb (nem unitér) esetet vizsgálja, ez az általánosítás igen nagymértékű s a tárgyalásban komoly nehézséget okoz. Ezt a szerzőnek igen ügyes gondolattal sikerül leküzdenie, amely abban áll, hogy az operátortartomány alkalmas egységelemes gyűrűbővítésére tér át úgy, hogy a modulus ezután unitérré válik. A szerző újítása igen életképes, mert általa tetszés szerinti modulusok vizsgálata az unitér modulusok elméletében bevált módszerekkel lehetővé válik. Külön figyelmet érdemel a szerző „duális problémája", amelyen annak a gyűrűosztálynak meghatározását érti, amelynek egyedei mint operátortartományok előre megadott modulusosztályt jellemeznek. Végül igen érdekesnek tartja a szerző által itt definiált egészen újszerű radikálfogalmat. A disszertáció doktori értekezés gyanánt való elfogadását melegen javasolja.

FUCHS LÁSZLÓ doktor a dolgozat legértékesebb részének a II. fejezetet tartja. Itt a szerző a kompatibilis egyenletrendszer definícióját valamely G R-modulus felett abban a szerzőtől származó modern felfogásban tekinti, hogy egy szabad R-modulus M részmodulusának G-be való operátor-homomorf leképezése. Az algebrailag zárt operátormodulusok elmélete a dolgozatnak szintén igen értékes eredménye. Sok fontos tétel, mint pl. a homomorfizmusok kiterjeszthetősége, a direkt összeadandó tulajdonság és a kompatibilis egyenletrendszerek megoldhatósága érvényben marad a legáltalánosabb esetben is. FUCHS LÁSZLÓ megállapítja: *„Az igen szépen felépített, világosan, de egyúttal tömören megírt dolgozaton alig látszik az a sok erőfeszítés, az a sok útvesztő, amelyek igen megnehezítették a szerző dolgát.* KERTÉSZ *könnyed stílusa, elegáns tárgyalásmódja, bizonyításainak csiszoltsága szinte elfeledteti ezeket a tényeket."* Véleménye szerint a dolgozat kiválóan alkalmas arra, hogy ennek alapján KERTÉSZ ANDOR a matematikai tudományok doktora fokozatot elnyerje.

SZENDREI JÁNOS kandidátus bírálatában a dolgozat főbb eredményeinek kiemelése után a következőket mondja: *„Véleményem szerint az operátormodulusok elméletét induláskor zsákutca felé terelte az a tény, hogy az egész számok gyűrűjét a közönséges Abel-féle csoportok esetén kizárólag operátortartománynak tekintették. Ez vezetett ahhoz az állapothoz, hogy az egységelemnélküli vagy egységelemes, de nem unitér módon ható gyűrűk majdnem* *számüzöttek lettek.* KERTÉSZ *disszertációjának egyik legnagyobb érdeme éppen az, hogy az operátormodulusok elméletét kivezette ebből a zsákutcából.*" Ezzel kapcsolatban az opponens további, a tárgyalás módszerét érintő igen értékes megjegyzést tett, amely — véleménye szerint — egységesebb tárgyalásmódot tesz lehetővé, segítségével könnyen bizonyítható az 5. és 9. tétel, továbbá az Abel-féle csoportokra vonatkozó számos tétel látszik megfogalmazhatónak és bizonyíthatónak operátormodulusok esetére is. SZENDREI javasolja KERTÉSZ ANDORnak a matematikai tudományok doktorává való nyilvánítását.

Az opponensek után KERTÉSZ ANDOR válaszolt a bírálatokra. Válaszában külön kiemelte SZENDREI JÁNOS opponensnek az operátormodulusok általános elméletére vonatkozó értékes megjegyzéseit.

A választ FUCHS LÁSZLÓ és SZENDREI JÁNOS opponensek azonnal elfogadták, RÉDEI LÁSZLÓ opponens azonban csak néhány kisebb fogalmi és elnevezéssel kapcsolatos kérdés tisztázása után fogadta el.

A hozzászólásokból kiemelendő SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA akadémikus kérdése, mely szerint szeretne olyan példát látni nem triviális operátormodulusra, amelynek operátortartománya egységelemes, de az egységelem nem unitér módon operál. — KERTÉSZ ANDOR mutatott ilyen példát.

SZENDREI JÁNOS megjegyzi, hogy a teljesen redukálható modulusok invariánsokkal való jellemzésének tétele benne van JACOBSON most megjelent könyvében, továbbá, hogy a Dorroh-féle egységelemes gyűrűbővítésnek operátormodulusokra való alkalmazása szerepel R. E. JOHNSON egyik 1957 márciusában megjelent dolgozatában. Megjegyzi még, hogy véleménye szerint ezek a tények a disszertáció értékét nem érintik.

Az opponensi vélemények és az elhangzott vita alapján a bírálóbizottság megállapította, hogy „KERTÉSZ ANDOR *disszertációjában az operátormodulusok ma gyors iramban fejlődő elméletének több fontos, általános kérdésével foglalkozik. Kiemelendők az operátormodulusok algebrai elméletére és a teljesen redukálható operátormodulusokra vonatkozó eredményei. A dolgozat főérdeme, hogy a legáltalánosabb esetben is érdemleges, nemcsak magában, hanem a további kutatások szempontjából is értékes új fogalmakat sikerül alkotnia és számottevő eredményeket elérnie. Dicséretet érdemel a dolgozat felépítése, világos és tömör stílusa. Fentiek alapján a bizottság egyhangúlag javasolja a Tudományos Minősítő Bizottságnak, hogy* KERTÉSZ ANDOR*t nyilvánítsa a matematikai tudományok doktorává.*"

Szép Jenő
a matematikai tudományok kandidátusa

Technikai szerkesztő: Alpár László

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1958. V. 2. — Terjedelem: 7,5 (A/5) ív, 23 ábra

Szegedi Nyomda Vállalat 58-1788 Felelős vezető: Vincze György

Ára: 17,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A TUDOMÁNYOS MINŐSÍTŐ BIZOTTSÁG HÍREI

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

VIII. KÖTET 4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1958

III. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

CSÁSZÁR ÁKOS, DETRE LÁSZLÓ, GYULAI ZOLTÁN, HAJÓS GYÖRGY, NOVOBÁTZKY KÁROLY, RÉNYI ALFRÉD, TURÁN PÁL

FŐSZERKESZTŐ:

ALEXITS GYÖRGY

VIII. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasó ülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V., Széchenyi rakpart 3.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. (Magyar Nemzet Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

VIZSGÁLATOK AZ OPERÁTORMODULUSOK ELMÉLETÉBEN, I.

KERTÉSZ ANDOR

Édesapám 60. születésnapjára hálával és szeretettel

TARTALOMJEGYZÉK*

1. §. Bevezetés

Az operátormodulus[1] mai értelemben vett fogalmát E. NOETHER vezette be 1929-ben (lásd [37][2]). Ennek az azóta igen fontosnak bizonyult struktúrafajtának ma már gazdag irodalma van, s joggal beszélhetünk az operátormodulusok *elméletéről*. Igen figyelemre méltó az a kölcsönhatás, amely egyrészt a moduluselmélet, másrészt más algebrai struktúrák elméletének fejlődése között áll fenn. Így pl. az Abel-féle csoportok elméletében az utóbbi két

* A dolgozat itt közölt I. része csupán az első öt paragrafust tartalmazza.

[1] A használt fogalmak és elnevezések magyarázatát lásd a 2. §-ban.

[2] A szegletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén megadott irodalomjegyzékre utalnak.

évtizedben elért jelentős eredmények nagy lendületet adtak az operátormodulusok vizsgálatának, de úgy tapasztaljuk, hogy az operátormodulusok elméletében elért eredmények is jelentősen járulnak hozzá az Abel-féle csoportok és a gyűrűk elméletéhez.

Az Abel-féle csoportok elmélete az operátormodulusok elmélete felé két irányban terjeszthető ki. Az egyik: modulusok vizsgálata speciális operátortartomány (p-adikus egész számok gyűrűje, Dedekind-féle gyűrű stb.) alapul vétele mellett. Ezekben a vizsgálatokban inkább a csoportelméleti jelleg domborodik ki, s az idevonatkozó eredményekről szóló dolgozatok teszik ki a moduluselmélet irodalmának jelentős részét. A másik irányhoz tartozik az a törekvés, amely az Abel-féle csoportok elméletében bevezetett fogalmakat és bebizonyított tételeket az operátormodulusok minél szélesebb osztályaira igyekszik átvinni. Ezekben a vizsgálatokban sok a gyűrűelméleti momentum, s az eredmények nagy része a gyűrűelméletet is gazdagítja. A jelen dolgozat vizsgálatai ehhez az utóbbi irányhoz tartoznak.

Bár az irodalomban van néhány igen jelentős eredmény,[3] amely az operátormodulusok általános esetére vonatkozik, a vizsgálatok túlnyomó többségében azonban az operátortartományra nézve több-kevesebb kikötést tesznek. Alig szerepel a moduluselméletben olyan eredmény, amely ne tenné fel a modulusról legalább azt, hogy unitér legyen (vagyis hogy az operátortartomány egységelemes gyűrű, s az egységelem identikus operátorként hat). Jóllehet az unitérség kikötése meglehetősen természetes követelmény, mindamellett elég nagy megszorítást jelent, hiszen az egységelemes gyűrűk az összes gyűrűk között egy eléggé speciális osztályt alkotnak, s egységelemes gyűrű mint operátortartomány esetében az egységelem általában nem hat identikus operátorként.

Mi az unitérség követelményét is elejtve az operátormodulusokkal teljes általánosságban foglalkozunk. Mindenek előtt egy hiányosságot kellett pótolnunk. Az unitér modulusok esetében jól bevált fogalmak és módszerek egy része ugyanis az általános esetben többnyire használhatatlannak bizonyul. E hiányosság kiküszöbölésére megfelelőnek látszik a 3. §-ban megadott konstrukció, amelynek lényege az, hogy bármely operátormodulus az operátortartomány alkalmas egységelemes bővítésével unitérré válik, s ez a tény az unitér modulusok elméletében használt fogalmaknak és módszereknek az általános esetre való átvitelére egy természetes utat biztosít.

A dolgozat három fejezetre és egy függelékre tagozódik. Az I. fejezet az alapfogalmak (pl. az elem rendje, lineáris rang, szabad operátormodulus) definícióját, továbbá e fogalmakra vonatkozó alapvető vizsgálatokat tartalmazza.

[3] Pl. JACOBSON nevezetes „sűrűségi tétele" (lásd N. JACOBSON [19]; erre a tételre egy egyszerű bizonyítás SZELE TIBOR [42] munkájában található).

Már itt találkozunk azzal az egész dolgozaton programszerűen végighúzódó törekvéssel, amely a moduluselméleti vizsgálatokat a gyűrűelmélet szempontjából úgy igyekszik hasznosítani, hogy modulusok egy osztályának tanulmányozásánál felveti a kérdést: vannak-e, s ha igen, melyek az összes olyan R gyűrűk, amelyekre bármely R-modulus a tekintett modulusosztályhoz tartozik. Az ilyen jellegű problémát az adott modulusosztályhoz tartozó duális problémának nevezzük.

A dolgozat II. fejezete a modulusok feletti egyenletek elméletével foglalkozik. A vizsgálatok a kompatibilis egyenletrendszer fogalmára épülnek. A kompatibilis egyenletrendszernek az absztrakt algebra nyelvén (részstruktúra, homomorfizmus stb.) történő definiálása lehetővé teszi a klasszikus algebra lineáris egyenletrendszerekre vonatkozó vizsgálatainak és eredményeinek az absztrakt algebrába való természetes beágyazását. E fejezetben van kiépítve az algebrailag zárt Abel-féle csoportok Szele-féle elméletéhez hasonlóan az algebrailag zárt operátormodulusok elmélete. Adott R gyűrű esetén az összes algebrailag zárt R-modulus leírása — igen nehéznek látszó — problémájával kapcsolatban a megoldás felé megtesszük az első szerény lépést: meghatározzuk az összes triviális algebrailag zárt R-modulust. Megoldjuk továbbá az algebrailag zárt modulusokra vonatkozó duális problémát. A probléma megoldása az ún. féligegyszerű gyűrűk osztályához vezet, s azt az eredményt nyerjük, hogy a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete a ferdetestek esetéről kiterjeszthető az olyan unitér operátormodulusok esetére, amelyeknek operátortartománya féligegyszerű gyűrű. Egyúttal a féligegyszerű gyűrűk osztálya az a legtágabb gyűrűkategória, amelyre ez az elmélet átvihető.

A lineáris algebrát általában vektorterek, azaz olyan operátormodulusok felett szokás felépíteni, amelyeknek operátortartománya ferdetest. A vektorterek fogalmának természetes általánosítása az olyan operátormodulus, amely egyszerű modulusok direkt összegére bomlik. Az ilyen modulusokat nevezik teljesen redukálható modulusoknak. A dolgozat III. fejezete a teljesen redukálható modulusok részletes vizsgálatának van szentelve. Adott R gyűrű esetén invariánsokkal jellemezzük az összes teljesen redukálható R-modulust, s az ilyen modulusok számos jellemző tulajdonságát állapítjuk meg. A duális probléma megoldása után gyűrűelméleti alkalmazásként a féligegyszerű gyűrűk több új, tisztán gyűrűelméleti jellemzése is adódik.

A függelékben tetszőleges operátormodulusok esetében bevezetünk egy radikál-fogalmat, amelyről megmutatjuk, hogy hasonló szerepet tölt be a modulusok elméletében, mint a Jacobson-féle radikál fogalma a gyűrűelméletben.

A dolgozat eredményeinek egy része már közölve van a szerző [27], [28], és [29] idegen nyelvű munkáiban.

I. AZ OPERÁTORMODULUSOK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉNEK ALAPJAI

2. §. Alapfogalmak és jelölések

A jelen paragrafus célja a továbbiakban használt alapfogalmak és jelölések előrebocsátása. Az Abel-féle csoport és a gyűrű fogalmát, továbbá az e fogalmakra vonatkozó elemi tényeket ismertnek tesszük fel. (E fogalmak bevezetését lásd pl. [39]-ben.)

Legyen G additíve írt Abel-féle csoport és R tetszőleges gyűrű.[4] Azt mondjuk, hogy G az R gyűrűvel mint operátortartománnyal ellátott *operátormodulus*, ha G bármely g és R bármely r eleméhez egyértelműen hozzá van rendelve G-nek egy eleme — amelyet az r, g elempár szorzatának nevezünk és rg-vel jelölünk — oly módon, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

(i) $$r(g+h)=rg+rh,$$

(ii) $$(r+s)g=rg+sg,$$

(iii) $$(rs)g=r(sg),$$

ahol r, s tetszőleges R-beli, g, h tetszőleges G-beli elemek. — Pontosabban azt kellene mondanunk, hogy G baloldali operátormodulus. Ha ugyanis az r és g elemekhez hozzárendelt G-beli elemet gr-rel jelölnénk és az (i), (ii), (iii) követelményeket ennek megfelelően átírnánk, akkor a jobboldali operátormodulus fogalmához jutnánk. Mi már most megállapodunk abban, hogy a következőkben kizárólag baloldali operátormodulusokat tekintünk, s azt a tényt, hogy G az R gyűrűvel mint baloldali operátortartománnyal ellátott operátormodulus, röviden úgy fejezzük ki, hogy G *R-modulus*. (Természetesen nemcsak az operátormodulus fogalma, hanem e dolgozat összes eredményei is értelemszerűen átfogalmazhatók jobboldali írásmódra.)

Operátormodulusra példa bármely Abel-féle csoport, amelynek operátortartománya az egyelemű gyűrű, (amely természetesen zérus-operátorként hat)[5]

[4] Szükségesnek találjuk hangsúlyozni, hogy itt és a továbbiakban gyűrűn mindig *asszociatív gyűrűt* értünk.

[5] A következőkben minden Abel-féle csoportot ebben a felfogásban tekintünk. Megfordítva, ha egy G operátormodulusról azt mondjuk, hogy operátortartománya 0, vagyis hogy G 0-modulus, akkor éppen a G közönséges Abel-féle csoportot értelmezzük. E dolgozat eredményeinek a közönséges Abel-féle csoportok esetére ily módon történő specializálása mindig lehetséges. (Szokásos a G közönséges Abel-féle csoportot operátormodulusként úgy is felfogni, mint olyant, amelynek operátortartománya az egész számok E gyűrűje, ahol az $a(\in G)$ elemnek az n egész számmal való na szorzata $n>0$ esetén az n tagú $a+a+\cdots+a$ összeggel, $n<0$ esetén ezen összeg negatívjával, végül $n=0$ esetén 0-sal van értelmezve. Ez a felfogás azonban a mi vizsgálataink szempontjából nem előnyös.)

továbbá bármely R gyűrű is R-modulusnak tekinthető, ahol a modulus maga az R gyűrű R^+-szal jelölt additív csoportja, s az operátortartomány elemeivel való szorzás az R gyűrűben értelmezett szorzással van adva. Bármely G Abel-féle csoport tetszőleges R gyűrű esetén R-modulussá tehető, ha bármely $r(\in R)$, $g(\in G)$ elempárra az rg szorzatot $rg=0$-sal definiáljuk.

A G R-modulus elemeinek valamely H halmazát G *részmodulusának* nevezzük, ha bármely $r(\in R)$ és $h_1, h_2(\in H)$ elemekre $h_1-h_2 \in H$ és $rh_1 \in H$ teljesül. E definició értelmében világos, hogy egy G (közönséges) Abel-féle csoport részmodulusai éppen G részcsoportjaival, s egy R gyűrű mint R-modulus részmodulusai R balideáljaival esnek össze. — Bármely (egynél több elemű) R-modulusnak van legalább két különböző részmodulusa: maga az egész modulus és az egyetlen elemből álló 0 részmodulus. Ha az A R-modulusnak csupán ez a két részmodulusa van, akkor azt mondjuk, hogy *A egyszerű R-modulus.*

Egy G R-modulusnak egy H R-modulusba való olyan $g \to g\varphi$ ($g \in G$, $g\varphi \in H$) egyértelmű leképezését, amelyre

$$(g_1+g_2)\varphi = g_1\varphi + g_2\varphi$$

és

$$(rg_1)\varphi = r(g_1\varphi)$$

bármely g_1, g_2 ($\in G$) és $r(\in R)$ elemek esetén teljesül, *homomorf leképezésnek*, vagy *homomorfizmusnak* nevezzük. A $g\varphi$ elemek összességét $G\varphi$-vel jelöljük, s azt mondjuk, hogy $G\varphi$ a G modulus képe a φ homomorfizmusnál; jelben: $G \sim G\varphi$. Ha a φ homomorf leképezés kölcsönösen egyértelmű, akkor izomorfizmusnak nevezzük; jelben: $G \cong G\varphi$.[6] A G modulus egy ε önmagába való homomorf leképezését *endomorfizmusnak* mondjuk. Ha az ε endomorfizmus idempotens (abban az értelemben, hogy $(g\varepsilon)\varepsilon = g\varepsilon$ G bármely g elemére), akkor *projekciónak* nevezzük.

A G R-modulus összes R-endomorfizmusainak halmazát gyűrűvé teszi az összeadás és szorzás következő definíciója: a G modulus χ és η endomorfizmusainak összegén, ill. szorzatán azt a $\chi+\eta$, ill. $\chi\eta$ leképezést értjük, amelyre G bármely g eleme esetén

$$g(\chi+\eta) = g\chi + g\eta, \quad \text{ill.} \quad g(\chi\eta) = (g\chi)\eta.$$

A G modulushoz ily módon egyértelműen hozzárendelt gyűrűt *G teljes endomorfizmusgyűrűjének* nevezzük és $\mathfrak{E}(G)$-vel jelöljük.

Legyen H a G R-modulusnak tetszőleges részmodulusa. Ekkor G-nek, mint közönséges Abel-féle csoportnak, H szerinti faktorcsoportja R-modulus-

[6] Ha adott esetben ki akarjuk hangsúlyozni, hogy az R operátortartományra nézve „megengedett" részmodulusról, illetve operátorhomomorfizmusról van szó, akkor R-részmodulusról, ill. R-homomorfizmusról beszélünk.

nak tekinthető, ha tetszőleges $r(\in R)$ elem és $g+H$ mellékosztály szorzatán az $rg+H$ mellékosztályt értjük. Minthogy H részmodulus G-ben, ez a szorzás független a g reprezentáns elem választásától. Az így nyert R-modulust *a G modulus H szerinti faktormodulusának* nevezzük és G/H-val jelöljük. A továbbiakban adott G modulus valamely G/H faktormodulusának elemeit $\bar{g}$ $(g \in G)$-sal jelöljük, ahol $\bar{g}=g+H$. Operátormodulusokra is érvényes a *homomorfizmus-tétel*: ha a G R-modulusnak a G' R-modulus homomorf képe, akkor az összes olyan G-beli g elem, amelynek képe a tekintett homomorfizmusnál 0, G-nek olyan H részmodulusát alkotja, amelyre $G/H \cong G'$; másrészt, G bármely faktormodulusa G-nek homomorf képe; azaz, G összes homomorf képeinek és faktormodulusainak halmaza lényegében megegyezik.

Azt mondjuk, hogy a G R-modulus a H_ν $(\nu \in \Delta)$ R-modulusok *szubdirekt összege*, ha minden $\nu(\in \Delta)$ indexhez van G-nek olyan φ_ν homomorfizmusa, hogy $G\varphi_\nu = H_\nu$ és ha g 0-tól különböző eleme G-nek, akkor legalább egy ν-re $g\varphi_\nu \neq 0$. — Modulusoknak szubdirekt összegként való előállításainál leginkább a fenti definíció átfogalmazásából adódó következő tényt célszerű használni [4], [34]:

A G R-modulus akkor és csak akkor szubdirekt összege a H_ν $(\nu \in \Delta)$ R-modulusoknak, ha G-ben minden $\nu(\in \Delta)$-re van olyan K_ν részmodulus, hogy $G/K_\nu \cong H_\nu$ és $\cap_{\nu \in \Delta} K_\nu = 0$.

Ha G^* a H_ν modulusok szubdirekt összege és a h_ν $(\in H_\nu)$ reprezentáns elemek bármely választásánál van olyan $g(\in G)$ elem, hogy $g\varphi_\nu = h_\nu$ minden $\nu(\in \Delta)$ indexre, akkor azt mondjuk, hogy G^* a H_ν modulusok *komplett direkt összege*. Ezt így jelöljük: $G^* = \sum_{\nu \in \Delta}^* H_\nu$. A G^* modulus, amelyet a H_ν modulusok lényegében egyértelműen határoznak meg, az összes lehetséges olyan $\langle \ldots, h_\nu, \ldots \rangle$ „vektorok" halmaza által realizálható, amelyek minden H_ν modulusból pontosan egy h_ν komponenset tartalmaznak, s amelyekre az összeadás és az R-beli elemekkel való szorzás a következőképpen van definiálva:

$$\langle \ldots, h_\nu, \ldots \rangle + \langle \ldots, g_\nu, \ldots \rangle = \langle \ldots, h_\nu + g_\nu, \ldots \rangle,$$
$$r\langle \ldots, h_\nu, \ldots \rangle = \langle \ldots, rh_\nu, \ldots \rangle.$$

Nyilvánvaló, hogy G^*-nak bármely ν $(\in \Delta)$-re van H_ν-vel izomorf részmodulusa, továbbá, hogy a H_ν modulusok bármely szubdirekt összege (izomorf módon) beágyazható G^*-ba.

Legyen G_0 a H_ν modulusok szubdirekt összege, és tegyük fel, hogy bármely g $(\in G_0)$ elemre $g\varphi_\nu \neq 0$ legfeljebb véges sok $\nu(\in \Delta)$ indexre teljesül, továbbá, hogy a $h_\nu(\in H_\nu)$ reprezentáns elemek minden olyan választásánál, ahol véges sok $\nu(\in \Delta)$ index kivételével $h_\nu = 0$, van olyan $g(\in G_0)$ elem, hogy $g\varphi_\nu = h_\nu$ minden $\nu(\in \Delta)$ indexre, ekkor azt mondjuk, hogy G_0 a

H_ν modulusok *diszkrét direkt összege*, vagy röviden csak *direkt összege*. Jelben: $G_0 = \sum_{\nu \in \Delta} H_\nu$. A G_0 modulust a H_ν modulusok lényegében egyértelműen meghatározzák, és G_0 izomorf a G^* modulus ama részmodulusával, amely az összes olyan $\langle \ldots, h_\nu, \ldots \rangle$ vektorokból áll, amelyeknek legfeljebb véges sok komponense különbözik zérustól. A G_0 modulusnak azok az elemei, amelyek a fenti izomorfizmusnál $\langle \ldots, 0, \ldots, 0, h_\nu, 0, \ldots, 0, \ldots \rangle$ alakú elemeknek felelnek meg, egy H_ν-vel izomorf H'_ν részmodulust alkotnak G_0-ban, és azt mondjuk, hogy G_0 a $H'_\nu(\nu \in \Delta)$ részmodulusainak direkt összege. Nyilvánvaló, hogy G_0 bármely g eleme

$$g = h'_{\nu_1} + \cdots + h'_{\nu_k} \qquad (h_{\nu_i} \in H'_{\nu_i},\, i = 1, \ldots, k)$$

alakban áll elő és ez az előállítás egyértelmű, azaz $h'_{\nu_1} + \cdots + h'_{\nu_k} = 0$-ból $h'_{\nu_1} = \cdots = h_{\nu_k} = 0$ következik.

Ha a G R-modulus H részmodulusához létezik G-nek olyan K részmodulusa, hogy G bármely eleme egy H-beli és egy K-beli elem összege, továbbá $H \cap K = 0$, akkor $G = H + K$, és azt mondjuk, hogy H a G R-modulus *direkt összeadandója*. Ekkor fennállnak a következő relációk:

$$H \cong G/K, \quad K \cong G/H.$$

Ha H G-nek olyan részmodulusa, hogy G minden olyan M részmodulusára, amely maximális az $M \cap H = 0$ tulajdonságra nézve[7] fennáll a

$$G = H + M$$

direkt felbontás, akkor H-t a G *erős direkt összeadandójának* mondjuk.[8]

Értelemszerű módosítással definiálható gyűrűk szubdirekt összege, és érvényes a következő tétel:

Az R gyűrű akkor és csak akkor szubdirekt összege az $S_\nu(\nu \in \Delta)$ gyűrűknek, ha minden $\nu(\in \Delta)$-re van R-nek olyan I_ν (kétoldali) ideálja, hogy $R/I_\nu \cong S_\nu$ és $\cap_{\nu \in \Delta} I_\nu = 0$.

Egy G R-modulust (BOURBAKI [5] szerint) *unitér R-modulusnak* nevezünk, ha R egységelemes gyűrű ($1 \in R$) és bármely $g(\in G)$ elemre $1 \cdot g = g$.

Legyen a G R-modulusnak H tetszőleges részhalmaza, továbbá az R gyűrűnek L tetszőleges balideálja. LH-val jelöljük az összes lh ($l \in L, h \in H$) alakú elemekből megalkotható véges tagszámú összegek halmazát. LH mindig részmodulus, s ha H is részmodulus volt, akkor $LH \subseteq H$. Ha $RG = 0$, akkor azt mondjuk, hogy G *triviális R-modulus*. Bármely G R-modulusban az összes olyan g elemek, amelyekre $Rg = 0$, egy egyértelműen meghatározott

[7] Ez pontosabban azt jelenti, hogy M nem tartalmaztatik *valódi módon* G egyetlen olyan K részmodulusában sem, amelyre fennáll a $K \cap H = 0$ reláció.

[8] FUCHS LÁSZLÓ [13] adott kritériumot arra nézve, hogy egy Abel-féle csoport valamely direkt összeadandója erős direkt összeadandó legyen.

részmodulust alkotnak, amelyet G *maximális triviális részmodulusának* nevezünk. Ha R egységelemes gyűrű és G tetszőleges R-modulus, akkor G felbomlik maximális triviális részmodulusának és egy unitér R-modulusnak a direkt összegére.[9] Ha a G R-modulusra $RG = G$, akkor a G modulust *perfekt R-modulusnak* nevezzük. Unitér R-modulus mindig perfekt. Ha G valamely H részmodulusára a G/H faktormodulus perfekt, akkor azt mondjuk, hogy *H G-nek homoperfekt részmodulusa.* Világos, hogy egyszerű R-modulus vagy triviális vagy perfekt, továbbá, hogy egy direkt összegként előálló R-modulus akkor és csak akkor triviális, ill. perfekt, ha a tekintett felbontásban minden egyes direkt összeadandó triviális, ill. perfekt.

Ha H a G R-modulusnak olyan részmodulusa, hogy $H \subset G$ és G minden olyan K részmodulusára, amelyre $H \subseteq K \subset G$, a $K = H$ egyenlőség következik, akkor azt mondjuk, hogy *H maximális részmodulus G-ben.* Hasonlóan, *H minimális részmodulus G-ben,* ha a $0 \subset K \subseteq H$ relációból $K = H$ következik. Ha H maximális részmodulus G-ben, akkor G/H egyszerű R-modulus.[10]

A későbbiek során felhasználjuk a következő lemmát:

1. LEMMA: *A tetszőleges G R-modulus akkor és csak akkor bomlik fel véges sok egyszerű R-modulus direkt összegére, ha G-ben van véges sok olyan maximális részmodulus, amelyek metszete* 0.

A lemma bizonyítása megtalálható [24]-ben, a 164—165. oldalakon.

A G R-modulus valamely S *elemrendszere által generált részmodulusán* G-nek azt a részmodulusát értjük, amely legszűkebb az S elemrendszert tartalmazó részmodulusok között. Ezt a részmodulust az S rendszer egyértelműen meghatározza, jelölésére az $\{S\}$ jelet használjuk. Az egyetlen elem által generált részmodulust *ciklikus részmodulusnak* nevezzük. Ha $g \in G$, akkor $\{g\}$ az összes $rg + ng$ $(r \in R, n \in E)$ alakú elemek halmaza. Ha G unitér R-modulus, a $\{g\}$ ciklikus részmodulust már az összes rg $(r \in R)$ alakú elemek kimerítik. A G R-modulust *ciklikusnak* nevezzük, ha van olyan g eleme, amelyre $\{g\} = G$. A továbbiakban rövidség kedvéért a $\{g\}$ ciklikus modulust a *g elem ciklusának* fogjuk mondani. Ha S az R gyűrű valamely elemrendszere, akkor $\{S\}$ mindig az R gyűrű S által generált balideálját jelenti.

[9] Ez könnyen belátható az ún. Peirce-féle felbontás,

$$g = (g - 1 \cdot g) + 1 \cdot g \qquad (g \in G)$$

segítségével. Ebből ugyanis máris világos, hogy G bármely eleme az összes $g - 1 \cdot g$ $(g \in G)$ elemek által alkotott G_0 és az összes $1 \cdot g$ $(g \in G)$ elemek által alkotott G_1 részmodulusok egy-egy elemének összegeként áll elő. Minthogy továbbá G_0-t az 1 elem (s így R is) annullálja, G_1-et pedig (elemenként) reprodukálja, $G_0 \cap G_1 = 0$, s így valóban $G = G_0 + G_1$. Továbbá az is világos, hogy G_0 G-nek *maximális* triviális részmodulusa.

[10] Az egész dolgozatban a „$\subset$" jel mindig szigorú tartalmazást jelöl.

Azt mondjuk, hogy G *φ-tulajdonságú részmodulusaira nézve minimumkövetelménynek tesz eleget,* ha G φ-tulajdonságú részmodulusainak bármely szigorúan csökkenő lánca véges sok lépésben megszakad. Ha G minden részmodulusa rendelkezik a φ tulajdonsággal, akkor egyszerűen csak azt mondjuk, hogy G-ben teljesül a *minimumkövetelmény.* Értelemszerű módosítással definiálható a *maximumkövetelmény* is.

A G R-modulus véges számú $b_1, \ldots, b_k$ elemét *függetlennek* nevezzük, ha bármely

$$r_1 b_1 + n_1 b_1 + \cdots + r_k b_k + n_k b_k = 0 \qquad (r_i \in R;\, n_i \in E;\, i = 1, \ldots, k)$$

alakú relációból

$$r_1 b_1 + n_1 b_1 = \cdots = r_k b_k + n_k b_k = 0$$

következik. A G *tetszőleges számosságú* elemrendszerét *függetlennek* mondjuk, ha minden véges részrendszere független. Az így definiált függetlenség véges jellegű tulajdonság lévén, TUKEY lemmája szerint G bármely U részhalmaza tartalmaz egy S maximális független elemrendszert. Ha $U = G$, akkor azt mondjuk, hogy S a G modulus *maximális független elemrendszere.* G-nek valamely nem független elemrendszerét *függőnek* nevezzük. Ha G valamely g elemére és S elemrendszerére $\{g\} \cap \{S\} \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a g elem függ az S elemrendszertől. Ha két elemrendszer olyan kapcsolatban van egymással, hogy az egyik elemrendszer bármely eleme függ a másik rendszertől és megfordítva, akkor a két elemrendszert *lineárisan ekvivalensnek* mondjuk.

G-nek valamely $S = (\ldots, b_\nu, \ldots)_{\nu \in \Delta}$ elemrendszere nyilvánvalóan akkor és csak akkor független, ha

$$\{\ldots, b_\nu, \ldots\}_{\nu \in \Delta} = \sum_{\nu \in \Delta}{}' \{b_\nu\}.$$

Ha $\sum_{\nu \in \Delta} \{b_\nu\} = G$, akkor azt mondjuk, hogy az S elemrendszer G-nek *bázisa.* A bázis mindig maximális független elemrendszer G-ben, e tény megfordítása azonban általában nem áll fenn.

A dolgozatban többször fel fogjuk használni a következő, tisztán halmazelméleti lemmát:

2. LEMMA: *Legyen A és B két végtelen halmaz, és legyen számosságuk rendre $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{n}$. Jelöljük C-vel B összes véges részhalmazainak halmazát. Ha $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$, akkor A-nak bármely C-be való egyértelmű leképezésénél van C-nek olyan eleme, amely végtelen sok A-beli elem képe.*

A lemma állítása abból következik, hogy mivel $\mathfrak{n}$ végtelen kardinális szám, C számossága ugyancsak $\mathfrak{n}$, s így, ha a tekintett leképezésnél C egy-egy eleme legfeljebb véges sok esetben lépne fel képelemként, feltevésünkkel ellentétben $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n}$ adódnék.

Végül összefoglaljuk a dolgozatban használt fontosabb jelöléseket:

E : a racionális egész számok gyűrűje;

R^+ : az R gyűrű additív csoportja;

$L_{(R)}$: ha R az S gyűrű részgyűrűje, L az R-nek balideálja, $L_{(R)}$-rel jelöljük L^+-t mint R-modulust, ahol az rl ($r \in R, l \in L$) szorzat megegyezik az S-ben definiált rl szorzattal[11];

R^* : az R gyűrűnek a 3. §-ban definiált egységelemes bővítése;

$O(g)$: a g elem rendje (definíció a 3. §-ban);

G/H : G-nek H szerinti faktormodulusa;

$+, \Sigma$: elemekre összeg, modulusokra direkt összeg;

Σ^* : modulusok komplett direkt összege;

$\oplus$: gyűrűk gyűrűelméleti direkt összege;

Σ_0^* : gyűrűk komplett direkt összege;

$\{S\}$: az S elemrendszer által generált részmodulus;

$R(\mathfrak{m})$: az $\mathfrak{m}$ számosságú szabad bázissal generált szabad R-modulus (definíció az 5. §-ban).

3. §. Egy redukciós tétel

A matematikai irodalomban eddig vizsgált operátormodulusok túlnyomó többsége unitér modulus volt. A nem unitér modulusok ugyanis már olyan távol fekvő általánosításai a közönséges Abel-féle csoportoknak, hogy a csoportelmélet jól bevált fogalomalkotásait és módszereit eddig a nem unitér modulusok esetére nem sikerült kielégítő módon általánosítani. Ebben a paragrafusban bebizonyítunk egy olyan tételt, amely lehetővé teszi az unitér modulusok elméletére általánosított fogalmak és módszerek természetes továbbvitelét tetszőleges operátormodulusok esetére.

Legyen R tetszőleges gyűrű. Tekintsük az összes $\langle r, n\rangle$ ($r \in R, n \in E$) rendezett párok R^* halmazát, ahol $\langle r_1, n_1\rangle = \langle r_2, n_2\rangle$ akkor és csak akkor, ha $r_1 = r_2$ és $n_1 = n_2$. Az R^* halmazt az összeadás és szorzás következő definíciója gyűrűvé teszi:

$$\langle r_1, n_1\rangle + \langle r_2, n_2\rangle = \langle r_1 + r_2, n_1 + n_2\rangle,$$
$$\langle r_1, n_1\rangle \langle r_2, n_2\rangle = \langle r_1 r_2 + n_2 r_1 + n_1 r_2, n_1 n_2\rangle.$$

Az R^* gyűrűben $\langle 0, 1\rangle$ egységelem, továbbá az összes $\langle r, 0\rangle$ ($r \in R$) elemek egy R-rel izomorf részgyűrűt alkotnak. R^* tehát R-nek egységelemes bővítése.

[11] Tulajdonképpen olyan jelölést kellene bevezetnünk, amely kifejezné, hogy S részstruktúrájáról van szó. Ez azonban a jelölést nagyon komplikálttá tenné, s a tekintett esetekben a fenti egyszerűbb jelölést is a félreértés veszélye nélkül használhatjuk.

R^* konstrukciója J. L. DORROHtól származik [7]. A továbbiakban R^* mindig az adott R gyűrű fenti módon konstruált egységelemes bővítését jelöli.

Bebizonyítunk egy tételt, amelynek a moduluselméleti alkálmazásokon kívül az is érdekessége, hogy az R^* gyűrűt R összes egységelemes bővítései között jellemzi.

Az R gyűrű két bővítését *ekvivalensnek* nevezzük, ha közöttük olyan izomorfizmus létesíthető, amelyben R elemei fix elemek. Azt mondjuk, hogy az R valamely R_1 bővítése *T_1-tulajdonságú,* ha egységelemes, és bármely G R modulus esetén R_1 úgy rendelhető G-hez operátortartományként, hogy G unitér R_1-modulus legyen, s R elemei változatlanul hassanak.[12] Ha R_1 R-nek olyan T_1-tulajdonságú bővítése, hogy R_1 egyetlen valódi részgyűrűje sem T_1-tulajdonságú bővítése R-nek, akkor azt mondjuk, hogy R_1 minimális T_1-tulajdonságú bővítése R-nek.

1. TÉTEL: *Legyen R tetszőleges gyűrű. R-nek van T_1-tulajdonságú bővítése. R bármely T_1-tulajdonságú bővítése tartalmazza R-nek legalább egy minimális T_1-tulajdonságú bővítését. R bármely minimális T_1-tulajdonságú bővítése és R^* mint R bővítése ekvivalensek.*

BIZONYÍTÁS: Legyen G tetszőleges R-modulus. Ekkor az

$$\langle r, n\rangle g = rg + ng \qquad (\langle r, n\rangle \in R^*, g \in G)$$

definícióval a G modulust R^*-modulussá tettük, ahol bármely $g(\in G)$ és $r(\in R)$ elemre $\langle 0, 1\rangle g = g$ és $\langle r, 0\rangle g = rg$. Az R^* tehát R-nek T_1-tulajdonságú bővítése.[13]

R^* minimális T_1-tulajdonságú bővítése R-nek. Legyen ugyanis S R^*-ban olyan részgyűrű, amely R-nek T_1-tulajdonságú bővítése. Ekkor $R \subset S$. Legyen S egységeleme $\langle r_0, n_0\rangle$. Itt $n_0 \neq 0$, s mivel

$$\langle r_0, n_0\rangle\langle r_0, n_0\rangle = \langle r_0^2 + 2n_0 r_0, n_0^2\rangle = \langle r_0, n_0\rangle,$$

$n_0^2 = n_0$, s így $n_0 = 1$ következik. Minthogy pedig $\langle r_0, 0\rangle \in S$.

$$\langle r_0, 1\rangle - \langle r_0, 0\rangle = \langle 0, 1\rangle \in S,$$

s így $S = R^*$.

Legyen R_1 R-nek T_1-tulajdonságú bővítése és tegyük fel, hogy a $G = \{a\}$ végtelen ciklikus csoport triviális R-modulus. Tekintsük most a G modulust olyan unitér R_1-modulusnak, amelyen R elemei zérus-operátorként hatnak. R_1-ben az 1 egységelem által generált I részgyűrű E-nek homomorf képe, és minthogy bármely 0-tól különböző $n(\in E)$-re

$$(n \cdot 1)a = n(1 \cdot a) = na \neq 0,$$

[12] Nyilvánvaló, hogy R-nek T_1-tulajdonságú bővítése mindig valódi bővítés.

[13] A szerzőtől függetlenül és vele kb. egyidőben egy bizonyos speciális esetben ugyanezt a konstrukciót alkalmazza RÉDEI LÁSZLÓ [40]. Ezzel kapcsolatban lásd még R. E. JOHNSON [22] dolgozatának 542. oldalát.

$n \cdot 1 \neq 0$, s így $I \simeq E$. Továbbá R_1-ben $R \cap I = 0$, minthogy I elemei közül csupán a 0 hat zérus-operátorként a G moduluson. R_1 tehát tartalmazza R és I additív csoportjának R_2 direkt összegét. Két $r + n \cdot 1 (\in R_2)$ alakú elem szorzata

$$(r+n\cdot 1)(s+m\cdot 1) = rs + n\cdot 1\cdot s + r\cdot m\cdot 1 + n\cdot 1\cdot m\cdot 1 =$$
$$= rs + ns + mr + nm\cdot 1 \in R_2,$$

tehát R_2 részgyűrűje R_1-nek. Mármost az

$$\langle r, n\rangle \to r + n\cdot 1 \qquad (r \in R;\ n \in E)$$

leképezés mutatja, hogy R^* és R_2 R-nek ekvivalens bővítései. Ezzel az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

Az 1. tétel lehetővé teszi számunkra azt, hogy a tetszőleges G R-modulust unitér R^*-modulusnak tekinthessük. Ha a következőkben azt mondjuk, hogy G *R^*-modulus*, ez mindig azt fogja jelenteni, hogy *a G modulus az 1. tétel bizonyításában leírt „kanonikus" módon van az R^* operátortartománnyal ellátva.* Pontosabban, a továbbiakban adott G R-modulus esetén az

$$\langle r, n\rangle g \qquad (r \in R;\ n \in E;\ g \in G)$$

szorzat mindig az $rg + ng (\in G)$ elemet fogja jelenteni. Természetesen, ha valamely vizsgálatban az R gyűrű már eleve egységelemes és az összes tekintett R-modulus unitér, akkor az R^* operátortartomány bevezetése teljesen felesleges. Mi a továbbiakban mindig az általános esettel fogunk foglalkozni. Ha azonban valaki vizsgálatainkat az unitér modulusok esetére akarja specializálni, ezt könnyen megteheti, hiszen semmi nehézséget nem jelent az általunk bevezetett fogalmaknak és alkalmazott módszereknek az unitér modulusok esetére való értelemszerű módosítása.[14]

Legyen g a tetszőleges G R-modulus valamely eleme. R összes olyan r elemeinek L halmaza, amelyekre $rg = 0$, R-ben balideált alkot. Az irodalomban (lásd pl. [23], [33]) ezt a balideált nevezik a g elem rendjének. Amennyiben G unitér R-modulus, az elem rendjének fenti definíciója tökéletesen kielégítő. Ekkor ugyanis a g elem által generál ciklikus részmodulus izomorf az $R_{(R)}/L_{(R)}$ faktor modulussal, ahol L a g elem rendje. Ha azonban G nem unitér R-modulus (pl. triviális R-modulus), akkor az elem rendjének

[14] SZENDREI JÁNOS a fenti konstrukciónak a következő érdekes interpretációját adta: Legyen R tetszőleges gyűrű és G egy R-modulus. Legyen továbbá $A = \{a\}$ egy olyan ciklikus R-modulus, hogy $ra + na = 0$ $(r \in R;\ n \in E)$ esetén szükségképpen $r = 0, n = 0$ következzék. Ekkor az A modulus $\mathfrak{E}(A)$ teljes endomorfizmusgyűrűje az R gyűrű R^*-gal ekvivalens bővítése. Ha $\eta \in \mathfrak{E}(A), g \in G$ és $a\eta = ra + na$, akkor legyen: $\eta \cdot g = rg + ng$. E definícióval a G R-modulust olyan unitér $\mathfrak{E}(A)$-modulussá tettük, hogy az $R^* \cong \mathfrak{E}(A)$ ekvivalenciánál az $r (\in R)$ elemnek megfelelő $\varrho (\in \mathfrak{E}(A))$ endomorfizmusra fennáll a $\varrho g = rg$ egyenlőség minden $g (\in G)$ esetén.

fenti definíciója alapján az elem ciklusáról általában semmit sem mondhatunk. Ezért célszerűnek látszik e definíciót módosítanunk.

A tetszőleges G R-modulus valamely g *elemének rendjén* az R^* gyűrű összes olyan $\langle r, n\rangle$ elemeiből álló balideálját értjük, amelyekre $\langle r, n\rangle g = 0$. A g elem rendjét $O(g)$-vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy az elem rendjének most bevezetett fogalma természetes általánosítása az elem rendje fogalmának közönséges Abel-féle csoportok, tehát 0-modulusok esetében. Valóban, ha az a elem rendje a közönséges értelemben n, akkor a-t pontosan a $0^* \cong E$ gyűrű n által generált főideálja annullálja, és megfordítva.

Bármely R modulusnak van egy és csak egy olyan eleme, amelynek rendje az R^* gyűrű: ez a 0 elem. Ha az a elem rendje az R^* gyűrű zérusideálja, akkor az a elemet zérus rendű, vagy röviden 0 rendű elemnek hívjuk. Vannak olyan modulusok, amelyekben bármely 0-tól különböző elem zérus rendű. Az ilyen modulusokat *torziómentes modulusoknak* nevezzük.

Minthogy a G R-modulus valamely g elemének $\{g\}$ ciklusa az összes $rg + ng$ $(r \in R,\ n \in E)$ alakú elemek halmaza, ezt egyszerűen így fejezzük ki $\{g\} = R^* g$. Az

$$\langle r, n\rangle \to \langle r, n\rangle g \qquad (\langle r, n\rangle \in R^*)$$

leképezés alapján könnyű belátni, hogy

$$R^*_{(R)}/O(g)_{(R)} \cong R^* g = \{g\}.$$

Ha speciálisan $O(g) = 0$, akkor $R^*_{(R)} \cong \{g\}$.

Az elem rendjének fogalmával kapcsolatban még megjegyezzük, hogy az R^* gyűrű bármely L balideáljához konstruálható olyan R-modulus, amelynek alkalmas a elemére $O(a) = L$. Valóban, könnyű belátni, hogy az $R^*_{(R)}/L_{(R)}$ aktormodulusban a $\langle 0, 1\rangle$ $(\in R^*)$ elem mellékosztályának rendje L.

4. §. A lineáris rang

Az előző paragrafusban bevezetett R^* operátortartomány segítségével a függetlenség definíciója is egyszerűbben fogalmazható meg. E szerint egy G R-modulus valamely $S = (\ldots, b_\nu, \ldots)$ elemrendszerét függetlennek mondjuk, ha S bármely véges

$$b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_k} \tag{1}$$

részrendszerére bármely

$$\langle r_1, n_1\rangle b_{\nu_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle b_{\nu_k} = 0 \qquad (\langle r_i, n_i\rangle \in R^*;\ i = 1, \ldots, k)$$

alakú relációból

$$\langle r_1, n_1\rangle b_{\nu_1} = \cdots = \langle r_k, n_k\rangle b_{\nu_k} = 0 \tag{2}$$

következik. Ha az (1) alatti elemek valamennyien zérus rendűek, akkor a (2) reláció ekvivalens a következővel:

$$\langle r_1, n_1\rangle = \cdots = \langle r_k, n_k\rangle = \langle 0, 0\rangle.$$

Tekintsük a tetszőleges G R-modulus zérus rendű elemei halmazának összes maximális független részrendszereit. Ezen elemrendszerek számosságainak minimumát a G modulus *lineáris rangjának* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a G R-modulus T_2-*tulajdonságú*, ha bármely 0 rendű elemének ciklusa torziómentes és e ciklusban bármely két 0-tól különböző elem ciklusainak metszete is 0-tól különböző.[15]

Megmutatjuk, hogy T_2-tulajdonságú modulusokra érvényes a „kicserélési tétel":

2. TÉTEL: *Legyen G T_2-tulajdonságú R-modulus és*

(A) $$a_1, \ldots, a_j$$

(B) $$b_1, \ldots, b_k$$

G-nek két olyan csupa 0 rendű elemekből álló véges elemrendszere, hogy (A) *független, de mindegyik eleme függ a* (B) *rendszertől. Ekkor $j \leqq k$ és a $b_1, \ldots, b_k$ elemek sorrendjét alkalmasan megválasztva a* (B) *és az $a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_k$ elemrendszerek lineárisan ekvivalensek.*

BIZONYÍTÁS: Mindenek előtt megmutatjuk, hogy a G modulusban 0 rendű elemekből álló elemrendszerek lineáris ekvivalenciája tranzitív. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy ha a $g_1, \ldots, g_l (\in G)$ és $h_1, \ldots, h_m (\in G)$ csupa 0 rendű elemből álló rendszerek lineárisan ekvivalensek, továbbá a tetszőleges $g(\in G)$ 0 rendű elem függ az egyik rendszertől, akkor függ a másik rendszertől is. Legyen

(3) $$\langle r_0, n_0\rangle g = \langle r_1, n_1\rangle g_1 + \cdots + \langle r_l, n_l\rangle g_l \qquad \langle r_0, n_0\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$$

(4) $$\begin{cases} \langle r_{10}, n_{10}\rangle g_1 = \langle r_{11}, n_{11}\rangle h_1 + \cdots + \langle r_{1m}, n_{1m}\rangle h_m & \langle r_{10}, n_{10}\rangle \neq \langle 0, 0\rangle \\ \vdots & \\ \langle r_{l0}, n_{l0}\rangle g_l = \langle r_{l1}, n_{l1}\rangle h_1 + \cdots + \langle r_{lm}, n_{lm}\rangle h_m & \langle r_{l0}, n_{l0}\rangle \neq \langle 0, 0\rangle. \end{cases}$$

Minthogy a (3) és (4) képletekben szereplő valamennyi elem 0 rendű, a T_2-tulajdonság révén R^* alkalmas $\langle s_\alpha, i_\alpha\rangle (\neq \langle 0, 0\rangle)$ és $\langle s'_\alpha, i'_\alpha\rangle$ elemeivel $(\alpha = 1, \ldots, l)$ fennállnak a következő egyenlőségek:

(5) $$\begin{cases} \langle s_1, i_1\rangle \langle r_1, n_1\rangle g_1 = \langle s'_1, i'_1\rangle \langle r_{10}, n_{10}\rangle g_1 \\ \langle s_2, i_2\rangle \langle s_1, i_1\rangle \langle r_2, n_2\rangle g_2 = \langle s'_2, i'_2\rangle \langle r_{20}, n_{20}\rangle g_2 \\ \vdots \\ \langle s_l, i_l\rangle \cdots \langle s_2, i_2\rangle \langle s_1, i_1\rangle \langle r_l, n_l\rangle g_l = \langle s'_l, i'_l\rangle \langle r_{l0}, n_{l0}\rangle g_l. \end{cases}$$

[15] Közönséges Abel-féle csoport mindig T_2-tulajdonságú, viszont példák mutatják, hogy a T_2-tulajdonság operátormodulusokra általában már nem teljesül.

Mármost (3)-at (balról) $\langle s_1, i_1\rangle$-gyel, (4) első egyenletét (balról) $\langle s_1', i_1'\rangle$-vel beszorozva, a (3) beszorzott alakjában az $\langle s_1, i_1\rangle\langle r_1, n_1\rangle g_1$ elem (5) első egyenlete alapján a h_i elemek egy (R^* feletti) lineáris kombinációjával helyettesíthető. Az így nyert kifejezést $\langle s_2, i_2\rangle$-vel, (4) második egyenletét $\langle s_2', i_2'\rangle$-vel beszorozva ismét (5) alapján helyettesítünk, s ezt az eljárást folytatva azt kapjuk, hogy az

$$\langle s_l, i_l\rangle\cdots\langle s_2, i_2\rangle\langle s_1, i_1\rangle\langle r_0, n_0\rangle g\,(\neq 0)$$

elem benne van a G modulus $\{h_1, \ldots, h_m\}$ részmodulusában, tehát g függ a $h_1, \ldots, h_m$ elemrendszertől.

Tekintsük most a tétel feltételeinek eleget tevő (A) és (B) elemrendszereket. A tétel állítása nyilvánvalóan igaz, ha $j=0$. Tegyük fel, hogy a tételt már bebizonyítottuk $j-1$-re.

Minthogy az $a_1, \ldots, a_{j-1}$ elemrendszer független és minden eleme függ (B)-től, indukciós feltevésünk értelmében $j-1 \leqq k$ és a $b_1, \ldots, b_k$ elemek sorrendjének alkalmas megválasztásával a

$$b_1, \ldots, b_k \tag{6}$$

$$a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j, \ldots, b_k \tag{7}$$

rendszerek lineárisan ekvivalensek. Minthogy a_j függ a (6) rendszertől, így függ a (7) rendszertől is, tehát fennáll egy

$$\begin{aligned}\langle t_0, m_0\rangle a_j = \langle t_1, m_1\rangle a_1 + \cdots + \langle t_{j-1}, m_{j-1}\rangle a_{j-1} + \\ + \langle t_j, m_j\rangle b_j + \cdots + \langle t_k, m_k\rangle b_k \qquad (\langle t_0, m_0\rangle \neq \langle 0, 0\rangle\end{aligned}$$

alakú reláció. Ebből az (A) rendszer függetlensége miatt következik, hogy $j \leqq k$ és hogy a $\langle t_j, m_j\rangle, \ldots, \langle t_k, m_k\rangle$ elemek közül legalább egy, mondjuk $\langle t_j, m_j\rangle$ különbözik $\langle 0, 0\rangle$-tól. Ekkor

$$\begin{aligned}\langle t_j, m_j\rangle b_j = -\langle t_1, m_1\rangle a_1 - \cdots - \langle t_{j-1}, m_{j-1}\rangle a_{j-1} + \\ + \langle t_0, m_0\rangle a_j - \langle t_{j+1}, m_{j+1}\rangle b_{j+1} - \cdots - \langle t_k, m_k\rangle b_k,\end{aligned}$$

tehát a b_j elem függ az

$$a_1, \ldots, a_j, b_{j+1}, \ldots, b_k \tag{8}$$

elemrendszertől. Minthogy pedig így a (7) és (8) elemrendszerek lineárisan ekvivalensek, a tranzitivitás miatt ugyanaz áll a (6) és (8) rendszerekre is, s ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

3. TÉTEL: *Legyen G T_2-tulajdonságú R-modulus. G zérus rendű elemeinek bármely két maximális független rendszere egyenlő számosságú.*

KOROLLÁRIUM: *T_2-tulajdonságú modulus lineáris rangja megegyezik a modulus 0 rendű elemei tetszőleges maximális független rendszerének számosságával.*

BIZONYÍTÁS: Legyen A és B a tétel feltételeinek eleget tevő két elemrendszer. Ha közülük bármelyik véges, a tétel állítása azonnal következik a 2. tételből.

Tegyük fel tehát, hogy A számossága $\mathfrak{m}$, B számossága $\mathfrak{n}$, továbbá, hogy $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ és mindkettő végtelen kardinális szám. Jelöljük C-vel B összes véges részhalmazainak halmazát. Minthogy A minden eleme függ B-től, A minden a_ν eleméhez tekintsünk egy és csak egy

$$\langle r_\nu, n_\nu\rangle a_\nu = \langle r_{\nu_1}, n_{\nu_1}\rangle b_{\nu_1} + \cdots + \langle r_{\nu_k}, n_{\nu_k}\rangle b_{\nu_k} \tag{9}$$
$$(\langle r_\nu, n_\nu\rangle \neq \langle 0, 0\rangle;\ b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_k} \in B)$$

alakú (biztosan létező) relációt. Ekkor az a leképezés, amely A minden a_ν eleméhez az egyértelműen hozzárendelt (9) relációban fellépő $b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_k}$ elemek halmazát mint C elemét rendeli hozzá, A-nak C-be való egyértelmű leképezése, s így a 2. lemma szerint A-nak van olyan végtelen részrendszere, amely B-nek valamely véges részrendszerétől függ. Ez azonban ellentmondásban van a 2. tétel állításával. Az ellentmondás oka nyilván az $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ feltevés, s mivel A és B szerepe teljesen szimmetrikus, következik, hogy $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$; ezzel a tételt bebizonyítottuk.[16]

4. TÉTEL: *Legyen H a G T_2-tulajdonságú R-modulus részmodulusa. Ekkor G lineáris rangja megegyezik a H és G/H modulusok lineáris rangjának összegével.*

BIZONYÍTÁS: Legyen h_ν $(\nu \in \Delta)$ a H, $\bar{g}_\mu$ $(\mu \in \Gamma)$ a G/H modulus zérus rendű elemeinek valamely maximális független rendszere, s tegyük fel, hogy a $\bar{g}_\mu$ $(\mu \in \Gamma)$ elemrendszer számossága éppen G/H lineáris rangja. A tétel bizonyításához elegendő megmutatnunk, hogy az

$$S = (\ldots, h_\nu, \ldots, g_\mu, \ldots)_{\nu \in \Delta, \mu \in \Gamma} \qquad (g_\mu \in \bar{g}_\mu) \tag{10}$$

elemrendszer G zérus rendű elemeinek maximális független rendszere.

Először is világos, hogy S minden eleme 0 rendű. Továbbá, tegyük fel, hogy S elemei között fennáll egy

$$\langle r_1, n_1\rangle h_{\nu_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle h_{\nu_k} + \langle s_1, m_1\rangle g_{\mu_1} + \cdots + \langle s_l, m_l\rangle g_{\mu_l} = 0 \tag{11}$$

alakú reláció. A G/H fraktormodulusra áttérve

$$\langle s_1, m_1\rangle \bar{g}_{\mu_1} + \cdots + \langle s_l, m_l\rangle \bar{g}_{\mu_l} = 0$$

adódik, ahonnan a $\bar{g}_\mu$ elemrendszer függetlensége miatt

$$\langle s_1, m_1\rangle = \cdots = \langle s_l, m_l\rangle = \langle 0, 0\rangle$$

[16] E helyen talán érdemes megjegyezni, hogy a fenti bizonyításhoz hasonlóan a testelméletben a transzcendenciafok invarianciájára is egy elegáns bizonyítás adódik. Lásd [30].

következik. Így a (11) egyenlőségből

$$\langle r_1, n_1\rangle h_{\nu_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle h_{\nu_k} = 0,$$

s most a h_ν elemrendszer függetlenségéből kapjuk, hogy

$$\langle r_1, n_1\rangle = \cdots = \langle r_k, n_k\rangle = \langle 0, 0\rangle.$$

Tehát a (10) elemrendszer független.

Végül a (10) rendszer maximális voltát kell megmutatnunk. Legyen g a G modulus valamely 0 rendű eleme. Ekkor okvetlenül fennáll egy

$$\langle r, n\rangle g = \langle t_1, j_1\rangle g_{\mu'_1} + \cdots + \langle t_p, j_p\rangle g_{\mu'_p} + h \tag{12}$$

alakú reláció, ahol $h \in H$ és $\langle r, n\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$. Ha h nem 0 rendű elem, azaz ha valamely $\langle s, m\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$ elemre $\langle s, m\rangle h = 0$, akkor

$$\langle s, m\rangle \langle r, n\rangle g = \langle s, m\rangle \langle t_1, j_1\rangle g_{\mu'_1} + \cdots + \langle s, m\rangle \langle t_p, j_p\rangle g_{\mu'_p}. \tag{13}$$

Ha h zérus rendű elem, akkor fennáll egy

$$\langle r', n'\rangle h = \langle z_1, i_1\rangle h_{\nu'_1} + \cdots + \langle z_q, i_q\rangle h_{\nu'_q} \qquad (\langle r', n'\rangle \neq \langle 0, 0\rangle) \tag{14}$$

alakú reláció. A (12) egyenletet balról $\langle r', n'\rangle$-vel szorozva, s az így nyert egyenlőségbe (14) alapján helyettesítve az

$$\begin{aligned}\langle r', n'\rangle \langle r, n\rangle g = {} & \langle z_1, i_1\rangle h_{\nu'_1} + \cdots + \langle z_q, i_q\rangle h_{\nu'_q} + \langle r', n'\rangle \langle t_1, j_1\rangle g_{\mu'_1} + \\ & + \cdots + \langle r', n'\rangle \langle t_p, j_p\rangle g_{\mu'_p}\end{aligned} \tag{15}$$

relációt nyerjük. Figyelembe véve, hogy g zérus rendű elem és G T_2-tulajdonságú modulus, $\langle s, m\rangle \langle r, n\rangle g \neq 0$ és $\langle r', n'\rangle \langle r, n\rangle g \neq 0$, tehát (13) és (15) szerint g mindkét esetben függ az S elemrendszertől.

Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

A T_2-tulajdonságú modulusokkal kapcsolatos duális problémát oldja meg a következő

5. TÉTEL: *A tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor olyan, hogy bármely R-modulus T_2-tulajdonságú, ha R^* zérusosztómentes gyűrű és bármely két 0-tól különböző baloldali főideáljának metszete is különbözik 0-tól.*[17]

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy az R gyűrűre bármely R-modulus T_2-tulajdonságú. Ekkor speciálisan $R^*_{(R)}$ is T_2-tulajdonságú. Mivel a $\langle 0, 1\rangle$ elem 0 rendű és R^* bármely $\langle r, n\rangle$ eleme benne van a $\{\langle 0, 1\rangle\}$ ciklusban, így ha $\langle r, n\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$, a T_2-tulajdonság miatt $\langle s, m\rangle\langle r, n\rangle = \langle 0, 0\rangle$-ból $\langle s, m\rangle = \langle 0, 0\rangle$ következik, tehát R^* zérusosztómentes gyűrű. Továbbá tegyük fel, hogy L valamely R-részmodulusa R^*-nak. Ha $\langle t, l\rangle \in L$ és $\langle z, k\rangle$ tetszőleges R^*-beli elem, akkor

$$\begin{aligned}\langle z, k\rangle \langle t, l\rangle &= \langle zt + lz + kt, kl\rangle = \langle zt + zl, 0\rangle + \langle kt, kl\rangle = \\ &= \langle z, 0\rangle \langle t, l\rangle + k\langle t, l\rangle \in L,\end{aligned}$$

[17] A tételben a „baloldali főideáljának" kifejezés helyettesíthető a „balideáljának" szóval.

tehát L az R^* gyűrű balideálja. Ezt figyelembe véve a T_2-tulajdonságból következik, hogy R^* bármely két 0-tól különböző balideáljának metszete is 0-tól különböző.

Megfordítva, legyen G tetszőleges R-modulus és R^* olyan zérusosztómentes gyűrű, amelyben bármely két 0-tól különböző baloldali főideál metszete is 0-tól különböző. Megmutatjuk, hogy G T_2-tulajdonságú R-modulus. Legyen g G-nek 0 rendű eleme, és tekintsük a $\{g\}$ ciklust. Ez az összes $\langle r, n\rangle g$ alakú elemekből áll. Ha $\langle r, n\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$, akkor $\langle r, n\rangle g \neq 0$, s mivel R^* zérusosztómentes, az $\langle s, m\rangle\langle r, n\rangle g = 0$ egyenlőségből $\langle s, m\rangle = \langle 0, 0\rangle$ következik, tehát $\langle r, n\rangle g$ is 0 rendű elem. Legyen továbbá $\langle t, l\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$. Ekkor $\langle t, l\rangle g \neq 0$, s az R^* gyűrűre kirótt feltétel miatt van olyan $\langle z_1, k_1\rangle$ és $\langle z_2, k_2\rangle$ elem, hogy

$$\langle z_1, k_1\rangle\langle r, n\rangle = \langle z_2, k_2\rangle\langle t, l\rangle \neq \langle 0, 0\rangle.$$

Így az $\{\langle r, n\rangle g\}$ és $\{\langle t, l\rangle g\}$ ciklusoknak a

$$\langle z_1, k_1\rangle\langle r, n\rangle g = \langle z_2, k_2\rangle\langle t, l\rangle g$$

elem 0-tól különböző közös elemük. Ezzel bebizonyítottuk, hogy G T_2-tulajdonságú R-modulus.

Végül megmutatjuk, hogy van olyan S gyűrű, amely kielégíti az 5. tételben szereplő feltételeket. Az egyelemű gyűrű mindenesetre ilyen. Lássunk most egy nem triviális példát. Legyen $E[x]$ az E gyűrű feletti egyhatározatlanos polinomok gyűrűje. Jelöljük S-sel $E[x]$-ben az x által generált ideált. Könnyű belátni, hogy ekkor $S^* \cong E[x]$. Az $E[x]$ gyűrű zérusosztómentes és kommutatív. E tulajdonságokból következik, hogy ha $f(x) \neq 0$ és $g(x) \neq 0$, akkor $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, s $f(x) \cdot g(x)$ eleme mind az $f(x)$, mind pedig a $g(x)$ által generált ideálnak. S tehát valóban kielégíti a kívánt feltételeket. Ezzel kapcsolatban érdemes még hangsúlyozni, hogy az $S^* \cong E[x]$ izomorfizmus alapján az S gyűrűvel mint operátortartománnyal ellátott modulusok elmélete összeesik az unitér $E[x]$-modulusok elméletével.

5. §. Szabad R-modulusok

E paragrafus tárgya a szabad R-modulusok legáltalánosabb értelemben vett fogalmának bevezetése, s e fogalomra vonatkozó alapvető tételek bizonyítása.

Egységelemes gyűrűk esetében az unitér szabad R-modulus fogalma már szerepelt az irodalomban.[18] E fogalomnak azonban az volt a hiányossága, hogy egy ilyen szabad R-modulus faktormodulusaként csak unitér

[18] Eszerint ha R egységelemes gyűrű, egy unitér szabad R-modulus $R_{(R)}$-rel izomorf R-modulusok direkt összege.

R-modulusok állíthatók elő. Mi az alábbiakban tetszőleges R gyűrű esetén a szabad R-modulus fogalmát annyira általánosan fogjuk definiálni, hogy e fogalom kielégíti azt a vele szemben támasztott természetes követelményt, hogy bármely R-modulus valamely szabad R-modulus faktormodulusaként álljon elő. A szabad R-modulusok fogalmának meghatározását megkönnyíti a 3. §-ban bevezetett jelölési mód.

Jelöljön R tetszőleges gyűrűt.

(I) Legyen S az x_α szimbólumok rendszere, ahol α befutja az $\mathfrak{m}$ számosságú A halmazt. Tekintsük most az

$$f=\sum_{i=1}^{k}\langle r_i, n_i\rangle x_{\alpha_i} \qquad (\langle r_i, n_i\rangle \in R^*)$$

formális (véges tagszámú) összegek $F^{(\mathrm{I})}$ halmazát, ahol az $\alpha_i(i=1,\dots,k)$ indexek páronként különbözők. Egy ilyen f kifejezést R feletti lineáris formának nevezünk. Ha minden i-re $\langle r_i, n_i\rangle=\langle 0, 0\rangle$, azt írjuk, hogy $f=0$. Két

$$f_1=\sum_{i=1}^{k}\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}} \quad \text{és} \quad f_2=\sum_{j=1}^{l}\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}$$

lineáris formát egyenlőnek tekintünk, ha minden olyan i, j indexpárra, amelyre $\alpha_{1i}=\alpha_{2j}$, az $\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle=\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle$ egyenlőség következik, továbbá, ha valamely i-hez nincs olyan j index, hogy $\alpha_{1i}=\alpha_{2j}$ volna, akkor $\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle=\langle 0, 0\rangle$ és megfordítva. Az $F^{(\mathrm{I})}$ halmazt R-modulussá tehetjük a műveletek következő definíciójával:

a) Legyen s az R gyűrű tetszőleges eleme. Ekkor

$$sf=\sum_{i=1}^{k}(s\langle r_i, n_i\rangle)x_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{k}\langle sr_i+n_is, 0\rangle x_{\alpha_i}.$$

b) Legyen

$$f_1=\sum_{i=1}^{k}\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}}; \quad f_2=\sum_{j=1}^{l}\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}.$$

Ekkor

$$f_1+f_2=\sum_{i=1}^{k}\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}}+\sum_{j=1}^{l}\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}, \tag{16}$$

ha még az így nyert kifejezést lineáris formává tesszük azáltal, hogy a lehetséges „összevonásokat“ elvégezzük, azaz (16)-ban mindazokra az i, j indexpárokra, amelyekre $\alpha_{1i}=\alpha_{2j}$, az $\langle r_{1i}, n_{1i}\rangle x_{\alpha_{1i}}$ és $\langle r_{2j}, n_{2j}\rangle x_{\alpha_{2j}}$ tagokat $\langle r_{1i}+r_{2j}, n_{1i}+n_{2j}\rangle x_{\alpha_{1i}}$-vel helyettesítjük.

(II) Legyen A egy $\mathfrak{m}$ számosságú halmaz és G_α minden α ($\in \mathsf{A}$) indexre egy $R^*_{(R)}$-rel izomorf R-modulus. Jelöljük $F^{(\mathrm{II})}$-vel a G_α modulusok direkt összegét: $F^{(\mathrm{II})}=\sum_{\alpha\in \mathsf{A}} G_\alpha$.

(III) Legyen $F^{(III)}$ olyan R-modulus, amelyben létezik olyan $\mathfrak{m}$ számosságú $X=(\ldots, x_\alpha, \ldots)$ elemrendszer, hogy a modulus bármely f eleme egyértelműen írható az $f=\sum_{i=1}^{k}\langle r_i, n_i\rangle x_{\alpha_i}$ véges tagszámú összeg alakjában.

Könnyen belátható, hogy az (I), (II) és (III)-ban definiált $F^{(I)}$, $F^{(II)}$ és $F^{(III)}$ R-modulusok izomorfok. Ezt, a fentiekben három különböző módon realizált, de izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott F objektumot *szabad R-modulusnak* nevezzük. Minthogy az F szabad R-modulust az R gyűrű és az $\mathfrak{m}$ számosság lényegében egyértelműen meghatározza, jelölésére az $R(\mathfrak{m})$ szimbólumot használjuk. A (III)-ban szereplő X elemrendszert az $F^{(III)}$ modulus *szabad bázisának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy $F^{(I)}$-nek szabad bázisa az összes $\langle 0, 1\rangle x_\alpha (\alpha \in \mathrm{A})$ elemek halmaza, $F^{(II)}$ szabad bázisa pl. azon $g_\alpha (\in G_\alpha, \alpha \in \mathrm{A})$ elemek összessége, amelyek az $R^*_{(R)} \cong G_\alpha$ izomorfizmusokban a $\langle 0, 1\rangle$ elemnek felelnek meg. — Tekintsük $R(\mathfrak{m})$ összes szabad bázisát. E szabad bázisok számosságainak minimumát az $R(\mathfrak{m})$ szabad R-modulus *szabad rangjának* nevezzük. Ha $R(\mathfrak{m})$ szabad rangja $\mathfrak{n}$, lineáris rangja $\mathfrak{r}$, akkor nyilvánvalóan fennállnak az $\mathfrak{r} \leqq \mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$ egyenlőtlenségek. Ha R az előző paragrafus 5. tételében szereplő feltételeket kielégítő gyűrű, akkor $\mathfrak{r}=\mathfrak{n}=\mathfrak{m}$.

6. TÉTEL: *Bármely G R-modulus izomorf valamely szabad R-modulus egy faktormodulusával.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $S=(\ldots, a_\alpha, \ldots)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ a G R-modulus valamely generátorrendszere, s tekintsük azt az F szabad R-modulust, amelynek szabad bázisa az a_α $(\alpha \in \mathrm{A})$ elemeknek kölcsönösen egyértelmű módon megfelelő x_α elemek X halmaza. Az

$$\langle r_1, n_1\rangle x_{\alpha_1} + \cdots + \langle r_k, n_k\rangle x_{\alpha_k} \longrightarrow r_1 a_{\alpha_1} + n_1 a_{\alpha_1} + \cdots + r_k a_{\alpha_k} + n_k a_{\alpha_k}$$

leképezés nyilvánvalóan F-nek G-re való homomorf leképezése, s így a homomorfizmus-tétel szerint G valóban izomorf az F modulus valamely F/H faktormodulusával.

A bizonyításból az is következik, hogy *ha a G modulusnak van $\mathfrak{m}$ számosságú generátorrendszere, akkor G már egy olyan szabad R-modulus valamely faktormodulusával izomorf, amelynek szabad rangja nem nagyobb $\mathfrak{m}$-nél.*

Ha a 6. tétel bizonyításában szereplő F modulus H részmodulusának az

$$f_\beta = \langle r_{\beta 1}, n_{\beta 1}\rangle x_{\beta 1} + \cdots + \langle r_{\beta k_\beta}, n_{\beta k_\beta}\rangle x_{\beta k_\beta} \qquad (\beta \in \mathrm{B})$$

elemek U halmaza generátorrendszere, akkor a G modulusban az U rendszernek megfelel az

$$r_{\beta 1} a_{\beta 1} + n_{\beta 1} a_{\beta 1} + \cdots + r_{\beta k_\beta} a_{\beta k_\beta} + n_{\beta k_\beta} a_{\beta k_\beta} = 0 \qquad (\beta \in \mathrm{B})$$

relációk rendszere, amely nyilvánvalóan rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a G modulus elemei között fenálló bármely reláció e relációrendszerből levezethető. Egy modulus bizonyos elemei között fennálló, relációknak fenti tulajdonságú rendszerét a modulust *definiáló relációk rendszerének* hívjuk.

Bármely G R-modulus megadható egy bizonyos elemhalmazra vonatkozó definiáló relációk rendszerével. Megfordítva, ha adva van egy R gyűrű, egy M elemhalmaz és egy M-re vonatkozó R feletti relációrendszer, akkor létezik egy, és izomorfizmustól eltekintve csakis egy, olyan R-modulus, amelyre nézve a tekintett relációk definiáló relációk rendszerét alkotják.

Most bebizonyítjuk a következő tételt:

7. TÉTEL: *Ha a G R-modulus valamely A részmodulusa szerinti faktormodulusa szabad R-modulus, akkor A G-nek direkt összeadandója.*

BIZONYÍTÁS: Legyen G/A szabad R-modulus és $S=(\ldots,\bar{a}_\varrho,\ldots)_{\varrho\in P}$ e modulus valamely szabad bázisa. Minden $\bar{a}_\varrho(\varrho\in P)$ mellékosztályból egy-egy a_ϱ reprezentáns elemet kiválasztva nyilvánvaló, hogy a G modulus $B=\{\ldots,a_\varrho,\ldots\}_{\varrho\in P}$ részmodulusa szabad R-modulus az $(\ldots,a_\varrho,\ldots)_{\varrho\in P}$ szabad bázissal, s hogy $A\cap B=0$. Minthogy másrészt bármely A szerinti mellékosztály tartalmazza B-nek valamely elemét, fennáll a

$$G=\{A,B\}=A+B$$

egyenlőség, q. e. d.

A tetszőleges H R-modulust *T_3-tulajdonságúnak* mondjuk, ha abból, hogy H a G R-modulusnak homomorf képe, következik, hogy G-nek van H-val izomorf direkt összeadandója. A 7. tételből és bizonyításból nyilvánvaló, hogy bármely szabad R-modulus T_3-tulajdonságú. Felvethető tehát a probléma: a T_3-tulajdonság jellemzi-e a szabad R-modulusokat? E kérdésre a pontos választ megadja a

8. TÉTEL:[19] *Egy H R-modulus akkor és csak akkor T_3-tulajdonságú, ha direkt összeadandója valamely szabad R-modulusnak.*[20]

BIZONYÍTÁS: Ha a H R-modulus T_3-tulajdonságú, akkor minthogy szabad R-modulus faktormodulusa, szabad R-modulus direkt összeadandója is.

Megfordítva, legyen H az F szabad R-modulus direkt összeadandója:

$$F=H+K, \tag{17}$$

és a G R-modulus homomorf képe: $G\sim H$. Megmutatjuk, hogy G-nek van

[19] Az unitér modulusok speciális esetében a tétel állításával tartalmilag megegyező állítás be van bizonyítva CARTAN és EILENBERG könyvében. (Lásd [6], Proposition 24, 7. old.)

[20] Hogy szabad R-modulus direkt összeadandója nem okvetlenül szabad modulus, mutatja a következő egyszerű példa: $B=E^*_{(E)}$ szabad E-modulus, amelynek B_0 maximális triviális részmodulusa 0-tól különböző, minthogy például $\langle n,-n\rangle$ $(n\neq 0)$ B_0-nak 0-tól különböző eleme. Mivel E egységelemes gyűrű, B_0 B-nek direkt összeadandója. Másfelől B_0 nem szabad E-modulus, hiszen egyetlen 0 rendű eleme sincs.

H-val izomorf direkt összeadandója, azaz H T_3-tulajdonságú. Jelöljük F-nek a ((17) direkt felbontás alapján) H-ra való projekcióját ε-nal, G-nek H-ra való homomorf leképezését η-val. Legyen F valamely szabad bázisa az x_α $(\alpha \in \mathrm{A})$ elemek halmaza. Ekkor minden $\alpha (\in \mathrm{A})$ indexhez meghatározunk egy és csak egy olyan $g_\alpha (\in G)$ elemet, amelyre $g_\alpha \eta = x_\alpha \varepsilon$. Az $x_\alpha \to g_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ leképezés F-nek G-be való valamely τ homomorf leképezését indukálja. Megmutatjuk, hogy H bármely h elemére $(h\tau)\eta = h$.[21] Legyen ugyanis $h = \langle r_1, n_1 \rangle x_{\alpha_1} + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle x_{\alpha_k}$. Ekkor egyrészt $h = h\varepsilon = \langle r_1, n_1 \rangle (x_{\alpha_1}\varepsilon) + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle (x_{\alpha_k}\varepsilon)$, másrészt $(h\tau)\eta = \langle r_1, n_1 \rangle (x_{\alpha_1}\tau)\eta + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle (x_{\alpha_k}\tau)\eta = \langle r_1, n_1 \rangle (x_{\alpha_1}\varepsilon) + \cdots + \langle r_k, n_k \rangle (x_{\alpha_k}\varepsilon)$, s így valóban $(h\tau)\eta = h$. Ebből következik, hogy ha $h \neq 0$, akkor $h\tau \neq 0$. Tehát a G modulus $H\tau$ részmodulusa izomorf H-val. Jelöljük M-mel G-ben az η homomorfizmus magját, azaz mindazon $g (\in G)$ elemek halmazát, amelyekre $g\eta = 0$. Megmutatjuk, hogy $G = H\tau + M$. Mindenesetre világos, hogy $H\tau \cap M = 0$, mivel $(h\tau)\eta = 0$-ból $h = 0$ s így $h\tau = 0$ következik. Azt, hogy $\{H\tau, M\} = G$, a következőképpen láthatjuk be. Legyen z tetszőleges G-beli elem, ekkor

$$z = (z\eta)\tau + [z - (z\eta)\tau].$$

Minthogy $z\eta \in H$, ezért $(z\eta)\tau \in H\tau$, továbbá

$$[z - (z\eta)\tau]\eta = z\eta - [(z\eta)\tau]\eta = z\eta - z\eta = 0,$$

tehát $[z - (z\eta)\tau] \in M$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Közönséges Abel-féle csoportok esetén a T_3-tulajdonság a szabad Abel-féle csoportokat jellemzi. Ennek az az oka, hogy szabad Abel-féle csoport bármely részcsoportja, s így méginkább bármely direkt összeadandója is szabad Abel-féle csoport. Ez azonban operátormodulusok esetén általában már nem érvényes. Ismeretes, hogy ha az R egységelemes gyűrű zérusosztómentes és bármely balideálja (baloldali) főideál, akkor bármely unitér szabad R-modulus bármely részmodulusa is szabad. C. J. EVERETT megmutatta, hogy az R gyűrűre vonatkozó fenti kikötések szükségesek is a tétel érvényességéhez [10], [11]. Mi az alábbiakban e tételnek az általános esetre vonatkozó analogonját bizonyítjuk be.

9. TÉTEL: *A tetszőleges R gyűrű akkor és csak akkor olyan, hogy bármely $\mathfrak{m}$ szabad rangú F szabad R-modulus bármely H részmodulusa is szabad és szabad rangja nem nagyobb $\mathfrak{m}$-nél, ha R^* zérusosztómentes baloldali főideálgyűrű.*

BIZONYÍTÁS: Legyen R olyan gyűrű, hogy ha F szabad R-modulus, amelynek szabad rangja $\mathfrak{m}$, akkor F bármely H részmodulusa is szabad és szabad rangja nem nagyobb $\mathfrak{m}$-nél. Ekkor az $R^*_{(R)}$ 1 rangú szabad R-modulus

[21] A leképezéseket jobboldali operátorként írjuk.

bármely 0-tól különböző részmodulusa is 1 rangú szabad R-modulus. Minthogy az 5. tétel bizonyításában megmutattuk, hogy $R^*_{(R)}$ részmodulusai és R^* balideáljai összeesnek, most már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy ha $\langle r, n\rangle \neq \langle 0, 0\rangle$, akkor az

$$\langle s, m\rangle\langle r, n\rangle = \langle 0, 0\rangle \tag{18}$$

egyenlőségből $\langle s, m\rangle = \langle 0, 0\rangle$ következik. Tekintsük az $R^*_{(R)}$ modulus $R^*\langle r, n\rangle$ részmodulusát. Ekkor van olyan $\langle r_0, n_0\rangle (\in R^*_{(R)})$ elem, hogy $O(\langle r_0, n_0\rangle) = 0$ és $R^*\langle r, n\rangle = R^*\langle r_0 n_0\rangle$. Innen, alkalmas $\langle u, k\rangle, \langle v, l\rangle$ elemekre

$$\langle r_0, n_0\rangle = \langle u, k\rangle\langle r, n\rangle \quad \text{és} \quad \langle r, n\rangle = \langle v, l\rangle\langle r_0, n_0\rangle. \tag{19}$$

Ebből

$$\langle r_0, n_0\rangle = \langle u, k\rangle\langle r, n\rangle = \langle u, k\rangle\langle v, l\rangle\langle r_0, n_0\rangle,$$
$$(\langle 0, 1\rangle - \langle u, k\rangle\langle v, l\rangle)\langle r_0, n_0\rangle = \langle 0, 0\rangle,$$
$$\langle 0, 1\rangle - \langle u, k\rangle\langle v, l\rangle = \langle 0, 0\rangle,$$

tehát

$$\langle u, k\rangle\langle v, l\rangle = \langle 0, 1\rangle \tag{20}$$

következik. Továbbá fennáll a következő összefüggés:

$$O(\langle v, l\rangle) \subseteq O(\langle v, l\rangle^2) \subseteq \cdots \subseteq O(\langle v, l\rangle^{2^i}) \subseteq \ldots,$$

s mivel R^* bármely balideálja (baloldali) főideál, tehát R balideáljaira nézve maximumkövetelménynek tesz eleget, van olyan i természetes szám, amelyre

$$O(\langle v, l\rangle^{2^i}) = O(\langle v, l\rangle^{2^{i+1}}).$$

A (18) és (19) egyenlőségekből

$$\langle s, m\rangle\langle v, l\rangle\langle r_0, n_0\rangle = \langle s, m\rangle\langle r, n\rangle = \langle 0, 0\rangle,$$

így

$$\langle s, m\rangle\langle v, l\rangle = \langle 0, 0\rangle. \tag{21}$$

(20) alapján

$$\langle s, m\rangle = \langle s, m\rangle\langle u, k\rangle^{2^i}\langle v, l\rangle^{2^i}, \tag{22}$$

s így (21) miatt

$$\langle s, m\rangle\langle v, l\rangle^{2^i} = \langle s, m\rangle\langle u, k\rangle^{2^i}\langle v, l\rangle^{2^{i+1}} = \langle 0, 0\rangle.$$

Ebből

$$\langle s, m\rangle\langle u, k\rangle^{2^i} \in O(\langle v, l\rangle^{2^{i+1}}) = O(\langle v, l\rangle^{2^i}),$$

tehát (22) alapján $\langle s, m\rangle = \langle 0, 0\rangle$, s ezzel a tétel állításának egyik felét bebizonyítottuk.

Megfordítva, tegyük fel, hogy H az $\mathfrak{m}$ szabad rangú F szabad R-modulus valamely részmodulusa, s hogy R^* zérusosztómentes baloldali főideálgyűrű. Megmutatjuk, hogy H is szabad R-modulus. Legyen az F modulus valamely $\mathfrak{m}$ számosságú szabad bázisa jólrendezett:

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots \qquad (\nu < \lambda).$$

Ekkor F bármely $f(\neq 0)$ eleme egyértelműen felírható

$$f=\langle r_1, n_1\rangle x_{\nu_1}+\cdots+\langle r_k, n_k\rangle x_{\nu_k}$$

alakban, ahol $\nu_1<\cdots<\nu_k$ és $\langle r_i, n_i\rangle\neq\langle 0,0\rangle$ $(i=1,\ldots,k)$. A ν_k-t az f elem *utolsó indexének*, az $\langle r_k, n_k\rangle$-t pedig az f elem *utolsó együtthatójának* nevezzük. Tekintsük H-ban azokat az elemeket, amelyeknek utolsó indexe legkisebb a H-ban fellépő elemek utolsó indexei között. Nyilvánvaló, hogy a legkisebb utolsó indexhez tartozó utolsó együtthatók R^*-nak egy $L(\neq 0)$ balideálját alkotják. Legyen $\langle s_0, m_0\rangle$ az L-nek valamely — feltevésünk szerint létező — generátoreleme, és c egy olyan H-beli legkisebb utolsó indexű elem, amelynek utolsó együtthatója $\langle s_0, m_0\rangle$. Minthogy R^* zérusosztómentes gyűrű, a $\{c\}$ részmodulus szabad R-modulus, s minden olyan $h(\in H)$ elem, amelynek utolsó indexe megegyezik c utolsó indexével, benne van a $\{c\}$-ban. Alkalmas $\langle r, n\rangle$ elemre ugyanis h és $\langle r, n\rangle c$ utolsó együtthatója megegyezik, s így fenn kell állnia a $h=\langle r, n\rangle c$ egyenlőségnek. Ellenkező esetben ugyanis a $h'=h-\langle r, n\rangle c$ H-beli és 0-tól különböző elem utolsó indexe — feltevésünkkel ellentétben — kisebb volna c utolsó indexénél

Legyen most $S=(\ldots,c_\gamma,\ldots)_{\gamma\in\Gamma}$ olyan H-beli elemrendszer, amely maximális a következő tulajdonságokra nézve: a) S szabad bázisa az $\{S\}$ részmodulusnak; b) ha a $h(\in H)$ elem utolsó indexe nem nagyobb a c_γ elemek valamelyikének utolsó indexénél, akkor $h\in\{S\}$. Ilyen S elemrendszer létezését ZORN lemmája biztosítja. Megmutatjuk, hogy $\{S\}=H$, ami állításunk igazolását jelenti. Tegyük fel ugyanis, hogy $\{S\}\subset H$, és H-nak $\{S\}$-en kívül fekvő elemei között tekintsük a legkisebb utolsó indexű elemeket. Ezek közül válasszunk ki egy olyan c_0 elemet, amelynek utolsó együtthatója generátoreleme R^* ama balideáljának, amelyet a tekintett utolsó indexszel bíró H-beli elemek utolsó együtthatói alkotnak. $\{c_0\}$ szabad R-modulus és H-nak pontosan azokból az elemeiből áll, amelyeknek utolsó indexe megegyezik c_0 utolsó indexével. Másrészt, mivel c_0 az S rendszertől független, az (S, c_0) elemrendszerre teljesül az a) és b) követelmény, s így ellentmondásba kerültünk az S elemrendszer maximalitásának kikötésével. Tehát $\{S\}=H$.

Végül, minthogy bármely $\nu(<\lambda)$ rendszámhoz S-nek legfeljebb egy olyan eleme lehet, amelynek utolsó indexe éppen ν, nyilvánvaló, hogy az S elemrendszer számossága legfeljebb $\mathfrak{m}$, tehát H szabad rangja $\leqq\mathfrak{m}$.

Ezzel a 9. tételt teljesen bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] ARTIN, E.: Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, *Abh. Hamburg*, **5** (1927) 251—260.

[2] ARTIN, E. — NESBITT, C. J. — THRALL, R. M.: Rings with minimum condition, *Ann Arbor*, 1954.

[3] BAER, R.: Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940) 800—806.

[4] BIRKHOFF, G.: Subdirect unions in universal algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944) 764—768.

[5] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique, I. Partie, Livre II: Algèbre, *Paris*, 1947.

[6] CARTAN, H. — EILENBERG, S.: Homological algebra, *Princeton*, 1956.

[7] DORROH, J. K.: Concerning adjunctions to algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932) 85—88.

[8] ECKMANN, B. — SCHOPF, A.: Über injektive Moduln, *Arch. Math.*, **4** (1953) 75—78.

[9] EHRENFEUCHT, A.: On a problem of J. C. H. Whitehead concerning abelian groups, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III. **3** (1955) 127—128.

[10] EVERETT, C. J.: Vector spaces over rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942) 312—316.

[11] EVERETT, C. J.: The basis theorem for vector spaces over rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945) 531—532.

[12] FUCHS, L.: A remark on the Jacobson radical, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **14** (1952), 167—168.

[13] FUCHS, L.: On a useful lemma for abelian groups, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **17** (1956) 134—138.

[14] FUCHS, L. — SZELE, T.: Contribution to theory of semi-simple rings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952) 235—239.

[15] FUCHS, L. — SZELE, T.: Abel-csoportok egyetlen maximális alcsoporttal, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **5** (1955) 387—389.

[16] GACSÁLYI, S.: On algebraically closed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952) 292—296.

[17] GACSÁLYI, S.: On pure subgroups and direct summands of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955) 89—92.

[18] GOLDMAN, O.: A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946) 1021—1027.

[19] JACOBSON, N.: Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945) 228—245.

[20] JACOBSON, N.: The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. J. Math.*, **67** (1945) 300—320.

[21] JACOBSON, N.: Structure of rings, *(Coll. Publ.) Providence*, 1956.

[22] JOHNSON, R. E.: Structure theory of faithful rings II. Restricted rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957) 523—544.

[23] KAPLANSKY, I.: Infinite abelian groups, *Ann Arbor*, 1954.

[24] KERTÉSZ, A.: Féligegyszerű gyűrűk mint operátortartományok, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **5** (1955) 149—186.

[25] KERTÉSZ, A.: The general theory of linear equation systems over semi-simple rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955) 79—86.

[26] KERTÉSZ, A.: A féligegyszerű gyűrűk egy új jellemzése, *Acta Univ. Debrecen*, **1** (1954) 151—153.

[27] KERTÉSZ, A.: Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957) 235—257.

[28] KERTÉSZ, A.: Systems of equations over modules, *Acta Sci. Math. Szeged,* **18** (1957) 207—234.

[29] KERTÉSZ, A.: Eine Charakterisierung der halbeinfachen Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), megjelenés alatt.

[30] KERTÉSZ, A.: Simple proof of a fundamental theorem of field theory, *Amer. Math. Monthly,* megjelenés alatt.

[31] KERTÉSZ, A. — SZELE, T.: Az általánosított p-csoportok elméletéhez, *Acta Univ. Debrecen,* **2** (1955) 131—135.

[32] Курош, А. Г.: Комрозиционные системы в бесконечных группах, Мат. Сб. (нов. с.), **16** (1945) 59—72.

[33] KUROS, A. G.: Csoportelmélet, *Budapest,* 1955.

[34] McCOY, N. H. — MONTGOMERY, D.: A representation of generalized Boolean rings, *Duke Math. J.*, **3** (1937) 455—459.

[35] VON NEUMANN, J.: On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **22** (1936) 707—713.

[36] VON NEUMANN, J.: Continuous geometry, *Princeton,* 1937.

[37] NOETHER, E.: Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, *Math. Z.*, **30** (1929) 641—692.

[38] POLLÁK, G.: Lösbarkeit eines Gleichungssystems über einem Ringe, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1955) 87—88.

[39] RÉDEI, L.: Algebra I., *Budapest,* 1954.

[40] RÉDEI, L.: Die einstufig nichtkommutativen endlichen Ringe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957) 401—442.

[41] SZELE, T.: Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen, *J. Reine Angew. Math.*, **188** (1950) 167—192.

[42] SZELE, T.: Két gyűrűelméleti struktúratétel geometriai bizonyítása, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, 4 (1954) 49—85.

[43] VILLAMAYOR, O.: Sur les équations et les systèmes linéaires dans les anneux associatifs, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **240** (1955) 1681—1683, 1750—1751.

[44] VAN DER WAERDEN, B. L.: Moderne Algebra II., *Berlin,* 1931.

[45] WEDDERBURN, J. H. M.: On hyperkomplex numbers, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **26** (1908) 77—118.

(Beérkezett: 1958. VI. 30.)

A Debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem
Matematikai Intézete

S^2 SAJÁTFÜGGVÉNYEINEK SZERKESZTÉSE SPINOPERÁTOROS MÓDSZERREL

BERENCZ FERENC*

Az ún. fel- és lefelé fordító spinoperátorok segítségével megadtunk egy olyan általános operátort, mellyel S^2 sajátfüggvényeit származtathatjuk, ha az operátort S_z sajátfüggvényeire alkalmazzuk. Példaként az operátor alkalmazására egy 6 elektronból álló rendszer különböző multiplicitású spinállapotainak sajátfüggvényeit szerkesztjük meg.

1. §. Bevezetés

Minthogy a hullámegyenlet egzakt megoldása csak néhány, meglehetősen speciális alakban felvett potenciálfüggvény esetében lehetséges, kvantummechanikai problémák megoldásánál általában közelítő eljárások alkalmazására vagyunk utalva. Ezek közül az 50-es évek elején mindjobban előtérbe kerül a konfigurációs kölcsönhatás módszerének alkalmazása. Y. JUCYSZ (1949) és S. F. BOYS (1950) nevével találkozunk először a módszerrel történő atomi számításoknál, míg D. P. CRAIG (1950), C. A. COULSON és J. JACOBS (1951), C. A. COULSON, D. P. CRAIG és J. JACOBS (1951) az LCAO módszert fejlesztették tovább a konfigurációs kölcsönhatás figyelembevételével. A konfigurációs kölcsönhatás módszerénél a nulladrendű sajátfüggvényt a

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} (a\alpha)_1 & (b\alpha)_1 & (c\beta)_1 \cdots (n\alpha)_1 \\ (a\alpha)_2 & (b\alpha)_2 & (c\beta)_2 \cdots (n\alpha)_2 \\ \vdots & & \\ (a\alpha)_n & (b\alpha)_n & (c\beta)_n \cdots (n\alpha)_n \end{vmatrix} \tag{1, 1}$$

alakú Slater-determinánsok lineáris kombinációjaként adjuk meg. Az energiát első közelítésben a szokásos szekuláris egyenlet gyökei adják. n elektron probléma esetén a szekuláris egyenlet 2^n-ed fokú és így praktikusan csak akkor oldható meg, ha alacsonyabb rendű egyenletek szorzatára bontható fel.

Atomi problémáknál a szekuláris egyenlet redukálása az $\mathbf{M}^2$, $\mathbf{M}_z$, $\mathbf{S}^2$ és $\mathbf{S}_z$ operátorok segítségével történhetik meg, melyek mindegyike felcserélhető a Hamilton-operátorral. Molekuláris rendszereknél azonban, mivel a legtöbb esetben nem áll fenn gömbszimmetria, a pályanyomatékok operátorai, az $\mathbf{M}^2$ és $\mathbf{M}_z$, nem cserélhetők fel a Hamilton-operátorral és így a szekuláris egyenlet redukálására nem használhatók fel. Olyan közelítéseknél azonban, amelyek-

* Megjelent a *Proc. Phys. Soc.*, **LXXI.** (1958) 145—160. c. folyóiratban.

ben a spinkölcsönhatástól eltekinthetünk, az előző célra alkalmasak a spinnyomatékok operátorai, az $\mathbf{S}^2$ és $\mathbf{S}_z$, mivel ezek most is felcserélhetők a Hamilton-operátorral.

Az (1, 1) Slater-determináns minden tagja egy n elektronból álló rendszer esetében az $a(1), b(2), \ldots, n(n)$ pályafüggvények és az $\alpha(1), \beta(2), \ldots, \alpha(n)$ spinfüggvények szorzatából áll. Mivel minden sorban egyaránt előfordulhat $\alpha(i)$ és $\beta(i)$, a megfelelő energianívó 2^n-szeresen elfajult. Jelöljük n_α-val az α spinű, n_β-val pedig a β spinű sorok számát, akkor $\mathbf{S}_z$ sajátértékeit a következő összefüggésből lehet meghatározni:

$$\mathbf{S}_z\varphi = (n_\alpha - n_\beta)\frac{\hbar}{2}\varphi. \tag{1, 2}$$

Mivel $\mathbf{S}_z$ különböző sajátértékeihez tartozó sajátfüggvényekkel képzett mátrix elemek zérusok lesznek, a szekuláris egyenlet lényegesen egyszerűbb lesz.

További egyszerűsítés azáltal lehetséges, ha a φ-k olyan lineárkombinációit képezzük, amelyek egyaránt sajátfüggvényei $\mathbf{S}^2$-nek és $\mathbf{S}_z$-nek. Ezért lényeges tehát $\mathbf{S}^2$ sajátfüggvényeinek ismerete.

Ebben a dolgozatban megadunk egy olyan általános operátort, amellyel $\mathbf{S}^2$ sajátfüggvényeit származtathatjuk, ha az operátort $\mathbf{S}_z$ sajátfüggvényeire alkalmazzuk.

2. §. Összefüggések az $\mathbf{S}_z$ operátor sajátfüggvényei között

Legyen adva egy s eredő spinű rendszer, amelynek állapotát a $\psi(s, m_s)$ sajátfüggvény írja le. Ez az állapot elfajult, hiszen a z tengelyű spinvetületek különbözők. $\hbar$ egységekben mérve ezek a következők lehetnek:

$$m_s = s, \ldots, s-i, \ldots, -s+i, \ldots, -s. \tag{2, 1}$$

Az ezeknek megfelelő sajátfüggvények:

$$\psi(s, s), \ldots, \psi(s, s-i), \ldots, \psi(s, -s+i), \ldots, \psi(s, -s), \tag{2, 2}$$

melyeket maximális, i-edik, illetve minimális komponenseknek fogunk nevezni.

Ismeretes az a tény, hogy az

$$\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}_x + i\mathbf{S}_y \tag{2, 3}$$

ún. felfelé fordító spinoperátor, illetve az

$$\mathbf{S}^- = \mathbf{S}_x - i\mathbf{S}_y \tag{2, 4}$$

ún. lefelé fordító spinoperátor hatására bármelyik komponensből VAN DER WAERDEN (1932) szerint az utána következő, illetve az előtte álló komponenssel arányos sajátfüggvényt nyerünk a következő összefüggés alapján:

$$(2,5)\qquad \mathbf{S}^{+}\psi(s,\mu)=[(s-\mu)(s+\mu+1)]^{1/2}\psi(s,\mu+1),$$

$$(2,6)\qquad \mathbf{S}^{-}\psi(s,\mu)=[(s+\mu)(s-\mu+1)]^{1/2}\psi(s,\mu-1).$$

(2, 5) és (2, 6) felhasználásával könnyen belátható, hogy a maximális, illetőleg minimális komponensből a többi komponens meghatározható a következő módon:

$$(2,7)\qquad \psi(s,s-i)=\frac{1}{i!}\binom{2s}{i}^{-1/2}(\mathbf{S}^{-})^{i}\psi(s,s),$$

$$(2,8)\qquad \psi(s,-s+i)=\frac{1}{i!}\binom{2s}{i}^{-1/2}(\mathbf{S}^{+})^{i}\psi(s,-s).$$

Ha páros számú elektronból álló rendszerünk van, akkor a spinvetületek között a zérus is előfordul:

$$(2,9)\qquad m_s=s,\ldots,k,\ldots,0,\ldots,-k,\ldots,-s.$$

Ebben az esetben a nulla komponensből előállítható a többi komponens ugyancsak (2, 5) és (2, 6) felhasználásával a következő módon:

$$(2,10)\qquad \psi(s,k)=\left[\frac{(s-k)!}{(s+k)!}\right]^{1/2}(\mathbf{S}^{+})^{k}\psi(s,0),$$

$$(2,11)\qquad \psi(s,-k)=\left[\frac{(s-k)!}{(s+k)!}\right]^{1/2}(\mathbf{S}^{-})^{k}\psi(s,0).$$

3. §. Spinösszetevés

Jelentse $\psi_A(s, m_s)$ és $\psi_B(s', m_{s'})$ az $\mathbf{S}_z$ operátornak sajátfüggvényeit, azaz:

$$(3,1)\qquad \mathbf{S}_z\psi_A(s,m_s)=m_s\psi_A(s,m_s),$$

$$(3,2)\qquad \mathbf{S}_z\psi_B(s',m_{s'})=m_{s'}\psi_B(s',m_{s'}),$$

akkor VAN DER WAERDEN (1932) szerint

$$(3,3)\qquad \psi(S,M_s)=\binom{2s+2s'-\lambda+1}{\lambda}^{-1/2}\sum_{i=0}^{\lambda}(-1)^{i}\left[\binom{2s-i}{\lambda-i}\binom{2s'+i-\lambda}{i}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\psi_A(s,s-i)\psi_B(s',s'+i-\lambda)$$

megadja azt a sajátfüggvényt, amely az $S=s+s'-\lambda$ eredő spinhez és az $M_s=m_s+m_{s'}=s+s'-\lambda$ eredő spinvetülethez tartozik.

Állítás: $\psi(S, M_s)$ sajátfüggvénye $\mathbf{S}^2$-nek és az $(s+s'-\lambda)(s+s'-\lambda+1)$ sajátértékhez tartozik.

A bizonyításhoz felhasználjuk a következő jól ismert összefüggést (EYRING, WALTER, KIMBALL 1949)

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}^+\mathbf{S}^- - \mathbf{S}_z + \mathbf{S}_z^2. \tag{3, 4}$$

(3, 4) explicit alakja a mi esetünkben a következő:

$$\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_A^+ + \mathbf{S}_B^+)(\mathbf{S}_A^- + \mathbf{S}_B^-) - (\mathbf{S}_{Az} + \mathbf{S}_{Bz}) + (\mathbf{S}_{Az} + \mathbf{S}_{Bz})^2. \tag{3, 5}$$

Állításunk igazolására (2, 5) és (2, 6) figyelembevételével (3, 5) alapján számítsuk ki az $\mathbf{S}^2\psi(S, M_s)$-et:

$$\mathbf{S}^2\psi(S, M_s) = \binom{2s+2s'-\lambda+1}{\lambda}^{-1/2} \sum_{i=0}^{\lambda} \Bigg\{ (-1)^i \left[\binom{2s-i}{\lambda-i}\binom{2s'+i-\lambda}{i}\right]^{1/2} \times$$
$$\times [(2s-i)(i+1) + (2s'+i-\lambda)(\lambda-i+1)] +$$
$$+ (-1)^{i+1} \left[\binom{2s-i-1}{\lambda-i-1}\binom{2s'+i-\lambda+1}{i+1}\right]^{1/2} \times$$
$$\times [(i+1)(2s-i)(2s'+i-\lambda+1)(\lambda-1)]^{1/2} +$$
$$+ (-1)^{i-1} \left[\binom{2s-i+1}{\lambda-i+1}\binom{2s'+i-\lambda-1}{i-1}\right]^{1/2} \times$$
$$\times [(2s-i+1)i(\lambda-i+1)(2s'+i-\lambda)]^{1/2} -$$
$$-(-1)^i \left[\binom{2s-i}{\lambda-i}\binom{2s'+i-\lambda}{i}\right]^{1/2} \times$$
$$\times [(s+s'-\lambda) - (s+s'-\lambda)^2] \Bigg\} \psi_A(s, s-i)\psi_B(s', s'+i-\lambda) =$$
$$= \binom{2s+2s'-\lambda+1}{\lambda}^{-1/2} \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^i \left[\binom{2s-i}{\lambda-i}\binom{2s'+i-\lambda}{i}\right]^{1/2} \times$$
$$\times [(2s-i)(i+1) + (2s'+i-\lambda)(\lambda-i+1) - (\lambda-i)(2s'+i-\lambda+1) -$$
$$- i(2s-i+1) - (s+s'-\lambda) + (s+s'-\lambda)^2]\psi_A(s, s-i)\psi_B(s', s'+i-\lambda).$$

Tehát a következő egyenletet kaptuk:

$$\mathbf{S}^2\psi(S, M_s) = (s+s'-\lambda)(s+s'-\lambda+1)\psi(S, M_s), \tag{3, 6}$$

azaz $\psi(S, M_s)$ tényleg sajátfüggvénye $\mathbf{S}^2$-nek, amely az $(s+s'-\lambda)(s+s'-\lambda+1)$ sajátértékhez tartozik. (3, 3) egyenlet tehát megadja $\mathbf{S}_z$ sajátfüggvényeinek azon lineárkombinációi képzési módját, amellyel $\mathbf{S}^2$ sajátfüggvényeihez jutunk. Másrészről (3, 3) egyenletnek VAN DER WAERDEN (1932) spinösszetevési képlete alapján közvetlen fizikai jelentése van: az s és s' spinű rendszert egyesítettük egy $s+s'-\lambda$ spinű rendszerré, ahol λ 0-tól $2s'$-ig, illetőleg 0-tól $2s$-ig minden egészszámú értéket felvehet attól függően, hogy $s > s'$, vagy $s' > s$.

(3, 3) egyenletnek két fontos speciális esete van, nevezetesen amikor:

$$\lambda = 0, \quad \text{illetve} \quad \lambda = 2s'.$$

$\lambda = 0$-ból következik, hogy $S = s + s'$ és

$$\psi(S = s + s', M_s = s + s') = \psi_A(s, s)\psi_B(s', s'), \tag{3, 7}$$

azaz az s spinű rendszerhez hozzáadtuk az s' spinű rendszert és egy $s + s'$ spinű rendszert nyertünk.

$\lambda = 2s'$-ből pedig az következik, hogy $S = s - s'$ és

$$\psi(S = s - s', M_s = s - s') =$$

$$= \binom{2s+1}{2s'}^{-1/2} \sum_{i=0}^{2s'} (-1)^i \binom{2s-i}{2s'-i}^{1/2} \psi_A(s, s-i)\psi_B(s', -s'+i), \tag{3, 8}$$

azaz az s spinű rendszerből kivontuk az s' spinű rendszert és egy $s - s'$ spinű rendszert nyertünk.

4. §. A spinösszetevés operátora

Az előző fejezetben meggyőződtünk arról, hogy a spinösszetevés egyenletei $\mathbf{S}^2$ sajátfüggvényeit adják. Most ezeket az egyenleteket át fogjuk írni a spinoperátorokkal. Ezt (2, 7) és (2, 8) alapján minden további nélkül megtehetjük, hisz (3, 3)-ban előforduló $\psi_A(s, s-i)$ és $\psi_B(s', s'-(\lambda-i))$ komponensek kifejezhetők a maximális komponensekből a lefelé fordító spinoperátor segítségével. (2, 7) figyelembevételével (3, 3) egyenlet a következő alakú lesz:

$$\psi(S = s + s' - \lambda, M_s = s + s' - \lambda) =$$

$$= \binom{2s + 2s' - \lambda + 1}{\lambda}^{-1/2} \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^i \left[\binom{2s-i}{\lambda-i}\binom{2s'+i-\lambda}{i}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \frac{1}{i!}\binom{2s}{i}^{-1/2} \frac{1}{(\lambda-i)!}\binom{2s'}{\lambda-i} (\mathbf{S}_A^-)^i (\mathbf{S}_B^-)^{\lambda-i} \psi_A(s, s)\,\psi_B(s', s') = \tag{4, 1}$$

$$= \binom{2s + 2s' - \lambda + 1}{\lambda}^{-1/2} \cdot [(2s)!\,(2s')!\,(2s-\lambda)!\,(2s'-\lambda)!]^{-1/2} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{\lambda} (-i)^i \frac{(2s-i)!\,(2s'+i-\lambda)!}{i!\,(\lambda-i)!} (\mathbf{S}_A^-)^i (\mathbf{S}_B^-)^{\lambda-i} \psi_A(s, s)\,\psi_B(s', s').$$

(4, 1) szerint tehát, ha az

$$\mathbf{O}(S = s + s' - \lambda, M_s = s + s' - \lambda) =$$

$$= \binom{2s + 2s' - \lambda + 1}{\lambda}^{-1/2} \cdot [(2s)!\,(2s')!\,(2s')!\,(2s-\lambda)!\,(2s'-\lambda)!]^{-1/2} \times \tag{4, 2}$$

$$\times \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^i \frac{(2s-i)!\,(2s'+i-\lambda)!}{i!\,(\lambda-i)!} (\mathbf{S}_A^-)^i (\mathbf{S}_B^-)^{\lambda-i}$$

operátort alkalmazzuk $\mathbf{S}_z$ maximális sajátértékeihez tartozó $\psi_A(s,s)\psi_B(s',s')$ sajátfüggvény szorzatra, $\mathbf{S}^2$ sajátfüggvényét nyerjük.

Ha speciálisan $\lambda=0$, illetve $\lambda=2s'$, (4, 2) operátor a következő alakra redukálódik:

$$\mathbf{O}(S=s+s', M_s=s+s')=1 \tag{4, 3}$$

$$\mathbf{O}(S=s-s', M_s=s-s')=$$

$$=\left[\frac{2s-2s'+1}{2s+1}\right]^{1/2}\sum_{i=0}^{2s'}(-1)^i\frac{(2s-i)!}{(2s)!\,(2s'-i)!}(\mathbf{S}_A^-)^i(\mathbf{S}_B^-)^{2s'-i}. \tag{4, 4}$$

(2, 7) és (2, 8) alapján (4, 4)-nek megadható egy alternatív alakja is, nevezetesen:

$$\psi(S=s-s', M_s=s-s')=\binom{2s+1}{2s'}^{-1/2}\sum_{i=0}^{2s'}(-1)^i\binom{2s-i}{2s'-i}^{1/2}\times \tag{4, 5}$$

$$\times\frac{1}{i!}\binom{2s}{i}^{-1/2}(\mathbf{S}_A^-)^i\psi(s,s)\frac{1}{i!}\binom{2s'}{i}^{-1/2}(\mathbf{S}_B^+)\psi(s',-s')=$$

$$=\left(\frac{2s-2s'+1}{2s+1}\right)^{1/2}\sum_{i=0}^{2s'}(-1)^i\frac{(2s-i)!}{(2s)!\,i!}(\mathbf{S}_A^-\mathbf{S}_B^+)^i\psi_A(s,s)\,\psi_B(s',-s'),$$

azaz:

$$\mathbf{O}(S=s-s', M_s=s-s')=\left(\frac{2s-2s'+1}{2s+1}\right)^{1/2}\sum_{i=0}^{2s'}(-1)^i\frac{(2s-i)!}{(2s)!\,i!}(\mathbf{S}_A^-\mathbf{S}_B^+)^i. \tag{4, 6}$$

(4, 2)—(4, 6) ismeretével tehát $\mathbf{S}^2$-nek olyan sajátfüggvényei származtathatók, amelyek $\mathbf{S}_z$ maximális sajátértékeihez tartoznak. Ezekből $\mathbf{S}_z$ többi sajátértékéhez tartozó sajátfüggvények pedig (2, 7) alkalmazásával nyerhetők.

Ha $\psi_A(s,m_s)$ és $\psi_B(s',m_{s'})$ olyan rendszerek állapotát írja le, amelyek páros számú elektronból vannak felépítve, akkor operátorunk átírható olyan alakra, amely $\mathbf{S}_z$ nulla sajátértékeihez tartozó sajátfüggvényekből származtatja $\mathbf{S}^2$ sajátfüggvényeit. Ekkor a spinösszeadás, illetve spinkivonás jól ismert következő egyenletéből indulunk ki:

$$\psi(S=s+s', M_s=s+s'-i)=$$

$$=\left[\frac{(2s)!\,(2s')!}{(2s+2s')!}\right]^{1/2}\sum_{m_{s'}=-s'}^{s'}\left[\frac{(S+M_s)!\,(S-M_s)!}{(s+m_s)!\,(s-m_s)!\,(s'+m_{s'})!\,(s'-m_{s'})!}\right]^{1/2}\times \tag{4, 7}$$

$$\times\psi_A(s,m_s=M_s-m_{s'})\,\psi_B(s',m_{s'})$$

$$\psi(S=s-s', M_s=s-s'-i)=\left[\frac{(2s-2s'+1)!\,(2s')!}{(2s+1)!}\right]^{1/2}\times \tag{4, 8}$$

$$\times\sum_{m_{s'}=-s'}^{s'}(-1)^{s'+m_{s'}}\left[\frac{(s+m_s)!\,(s-m_s)!}{(S+M_s)!\,(S-M_s)!\,(s'+m_{s'})!\,(s'-m_{s'})!}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\psi_A(s,m_s=M_s-m_{s'})\,\psi_B(s',m_{s'}).$$

(4, 7) és (4, 8) alapján az A és B rendszerek egyesítésével nyert rendszer $\mathbf{S}_z$ nulla sajátértékéhez tartozó sajátfüggvénye $M_s = m_s + m_{s'} = 0 \rightarrow m_s = -m_{s'}$ figyelembevételével a következő:

$$\Psi(S = s + s', M_s = 0) = \left[\frac{(2s)!\,(2s')!}{(2s+2s')}\right]^{1/2} \times \tag{4, 9}$$

$$\times \sum_{m_{s'}=-s'}^{s'} (s+s')!\,[(s-m_{s'})!\,(s+m_{s'})!\,(s'+m_{s'})!\,(s'-m_{s'})!]^{-1/2}\,\psi_A(s, -m_{s'})\,(\psi_B(s', m_{s'}),$$

$$\psi(S = s - s', M_s = 0) = \left[\frac{(2s-2s'+1)!\,(2s')!}{(2s+1)!}\right]^{1/2} \times \tag{4, 10}$$

$$\times \sum_{m_{s'}=-s'}^{s'} (-1)^{s'+m_{s'}} \frac{1}{(s-s')!} \left[\frac{(s-m_{s'})!\,(s+m_{s'})!}{(s'-m_{s'})!\,(s'+m_{s'})!}\right]^{1/2} \psi_A(s, -m_{s'})\,\psi_B(s', m_{s'}).$$

Végül (4, 9) és (4, 10) egyenleteket (2, 10) és (2, 11) alapján átírjuk a spin-operátorokkal:

$$\psi(S = s + s', M_s = 0) = \left[\frac{(2s)!\,(2s')!}{(2s+2s')!}\right]^{1/2} \times \tag{4, 11}$$

$$\times \sum_{m_{s'}=-s'}^{s'} \frac{(s-s')!}{(s+m_{s'})!\,(s'+m_{s'})!} (S_A^- S_B^+)^{m_{s'}}\,\psi_A(s, o)\,\psi_B(s', o),$$

$$\psi(S = s - s', M_s = 0) = \left[\frac{(2s-2s'+1)!\,(2s')!}{(2s+1)!}\right]^{1/2} \times \tag{4, 12}$$

$$\times \sum_{m_{s'}=-s'}^{s'} (-1)^{s'+m_{s'}} \frac{(s-m_{s'})!}{(s-s')!\,(s'+m_{s'})!} (S_A^- S_B^+)^{m_{s'}}\,\psi_A(s, o)\,\psi_B(s', o),$$

azaz:

$$O(S = s + s', M_s = 0) = \left[\frac{(2s)!\,(2s')!}{(2s+2s')!}\right]^{1/2} \times \tag{4, 13}$$

$$\times \sum_{m_{s'}=-s'}^{s'} \frac{(s-s')!}{(s+m_{s'})!\,(s'+m_{s'})!} (\mathbf{S}_A^- \mathbf{S}_B^+)^{m_{s'}},$$

$$O(S = s - s, M_s = 0) = \left[\frac{(2s-2s'+1)!(2s')!}{(2s+1)!}\right]^{1/2} \times \tag{4, 14}$$

$$\times \sum_{m_{s'}=-s'}^{s'} (-1)^{s'+m_{s'}} \frac{(s-m_{s'})!}{(s-s')!\,(s'+m_{s'})!} (\mathbf{S}_A^- \mathbf{S}_B^+)^{m_{s'}}.$$

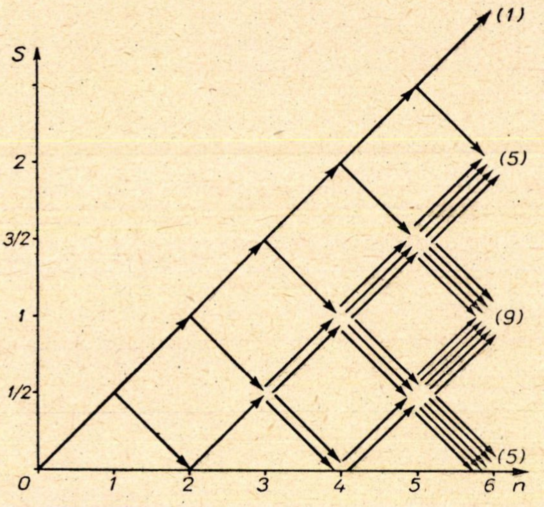
5. §. Az elágazási diagram módszer

Egy n elektronból álló s eredő spinű rendszer esetében a független spinállapotok száma (CORSON 1951)

$$N(s) = \binom{n}{n/2-s} - \binom{n}{n/2-s-1}. \tag{5, 0}$$

Ez a szám leolvasható az elágazási diagramból. (1. ábra.)

Az elágazási diagram azonban nemcsak a független spinállapotok számát mutatja, hanem felvilágosítást ad arról is, hogyan szerkesztettük meg az s eredő spinhez tartozó spinállapotokat. Az elágazási diagram szerint egy n elektronból álló rendszer s eredő spinű állapota oly módon konstruálható meg, hogy x számú párhuzamos α spinű elektronból álló rendszerhez hozzáadunk y számú párhuzamos β spinű elektronból álló rendszert; majd az egyesített rendszerhez hozzáadjuk a z számú párhuzamos α spinű elektronból álló rendszert stb. Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg valamennyi elektront figyelembe vettünk. Ha a részrendszerek állapotait Slater-determinánsokkal írtuk le, következik, hogy (4, 3), illetve (4, 6) alkalmazásával $\mathbf{S}^2$ sajátfüggvényeihez jutunk.



1. ábra

A továbbiakban célunk (4, 3) és (4, 6)-nak speciálisan Slater-determinánsokra vonatkozó alakját megadni, majd azoknak alkalmazásaként egy hat elektronból álló rendszer különböző multiplicitású spinállapotainak sajátfüggvényeit szerkesztjük meg.

A Slater-determinánsokra a továbbiakban a következő rövid jelölésmódot használjuk:

$$\varphi(s, m_s) = |\alpha\alpha\beta \ldots \alpha|. \tag{5, 1}$$

Legyen tehát x elektronunk párhuzamos α spinnel; egyesítsük ezeket $s = x/2$ eredő spinű rendszerré (A); az A rendszer maximális komponense:

$$\varphi_A(s = x/2, m_s = x/2) = |\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha} \ldots \overset{x}{\alpha}|. \tag{5, 2}$$

Legyen y elektronunk párhuzamos β spinnel; egyesítsük ezeket $s' = y/2$ eredő spinű rendszerré (B); a B rendszer minimális komponense:

$$\varphi_B(s'=y/2, m_{s'}=-y/2)=|\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}\ldots\overset{y}{\beta}|. \tag{5,3}$$

Egyesítsük az A és B rendszert $s-s'=x/2-y/2$ eredő spinnel; (4,5) szerint az egyesített rendszer maximális komponense:

$$\varphi_{AB}=\left(\frac{x-y+1}{x+1}\right)^{1/2}\sum_{i=0}^{y}(-1)^i\frac{(x-i)!}{x!\,i!}(S_A^-S_B^+)^i|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\ldots\overset{x}{\alpha}\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}\ldots\overset{y}{\beta}| \tag{5,4}$$

tekintettel arra, hogy n számú párhuzamos α, illetve β spinű elektron egyesítéséből származó rendszerek esetében is érvényesek a következő összefüggések (lásd a függeléket):

$$\varphi(s, s-i)=\frac{1}{i!}\binom{n}{i}^{-1/2}(S^-)^i|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\ldots\overset{n}{\alpha}|, \tag{5,5}$$

$$\varphi(s', -s'+i)=\frac{1}{i!}\binom{n}{i}^{-1/2}(S^+)^i|\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}\ldots\overset{n}{\beta}|. \tag{5,6}$$

Tehát az operátor, amellyel S^2 sajátfüggvényei származtathatók, a következő alakú:

$$O_{AB}=\left(\frac{x-y+1}{x+1}\right)^{1/2}\sum_{i=0}^{y}(-1)^i\frac{(x-i)!}{x!\,i!}(S_A^-S_B^+)^i. \tag{5,7}$$

Adjunk az AB rendszerhez $z/2$ eredő spinnel rendelkező z elektronból álló rendszert (C) oly módon, hogy az eredő spin $(x-y+z)/2$ legyen. Az egyesített rendszer maximális komponense

$$\varphi_{ABC}=O_{AB}|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\ldots\overset{x}{\alpha}\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}\ldots\overset{y}{\beta}\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\ldots\overset{z}{\alpha}|. \tag{5,8}$$

Ha az ABC rendszerhez az előző módon további D, E, F stb. rendszereket adunk, amelyek u számú β spinű, v számú α spinű és w számú β spinű stb. elektronokat tartalmaznak, akkor az eredő spin $(x-y+z-u+v-w)/2$ lesz és az $ABCDEF$ egyesített rendszer maximális komponense:

$$\begin{aligned}\varphi_{ABCDEF}=&\left(\frac{x-y+z-u+v-w+1}{x-y+z-u+v+1}\right)^{1/2}\left(\frac{x-y+z-u+1}{x-y+z+1}\right)^{1/2}\left(\frac{x-y+1}{x+1}\right)^{1/2}\times\\ &\times\sum_{k=0}^{w}(-1)^k\frac{(x-y+z-u+v-k)!}{(x-y+z-u+v)!\,k!}(S_{ABCDE}^-S_F^+)^k\times\\ &\times\sum_{j=0}^{u}(-1)^j\frac{(x-y+z-j)!}{(x-y+z)!\,j!}S_{ABC}^-S_D^+)^j\times\\ &\times\sum_{i=0}^{y}(-1)^i\frac{(x-i)!}{x!\,i!}(S_A^-S_B^+)^i\times\\ &\times|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\ldots\overset{x}{\alpha}\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}\ldots\overset{y}{\beta}\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\ldots\overset{z}{\alpha}\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}\ldots\overset{u}{\beta}\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\ldots\overset{v}{\alpha}\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}\ldots\overset{w}{\beta}|.\end{aligned} \tag{5,9}$$

Tehát maga az operátor a következő alakú:

$$\mathbf{O}_{ABCDEF}=\left(\frac{x-y+z-u+v-w+1}{x-y+z-u+v+1}\right)^{1/2}\left(\frac{x-y+z-u+1}{x-y+z+1}\right)^{1/2}\left(\frac{x-y+1}{x+1}\right)^{1/2}\times$$

$$(5,10)\qquad \times\sum_{k=0}^{w}(-1)^k\frac{(x-y+z-u+v-k)!}{(x-y+z-u+v)!\,k!}(\mathbf{S}_{ABCDE}^{-}\mathbf{S}_F^{+})^k\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{u}(-1)^j\frac{(x-y+z-j)!}{(x-y+z)!\,j!}(\mathbf{S}_{ABC}^{-}\mathbf{S}_D^{+})^j\sum_{i=0}^{y}(-1)^i\frac{(x-i)!}{x!\,i!}(\mathbf{S}_A^{-}\mathbf{S}_B^{+})^i.$$

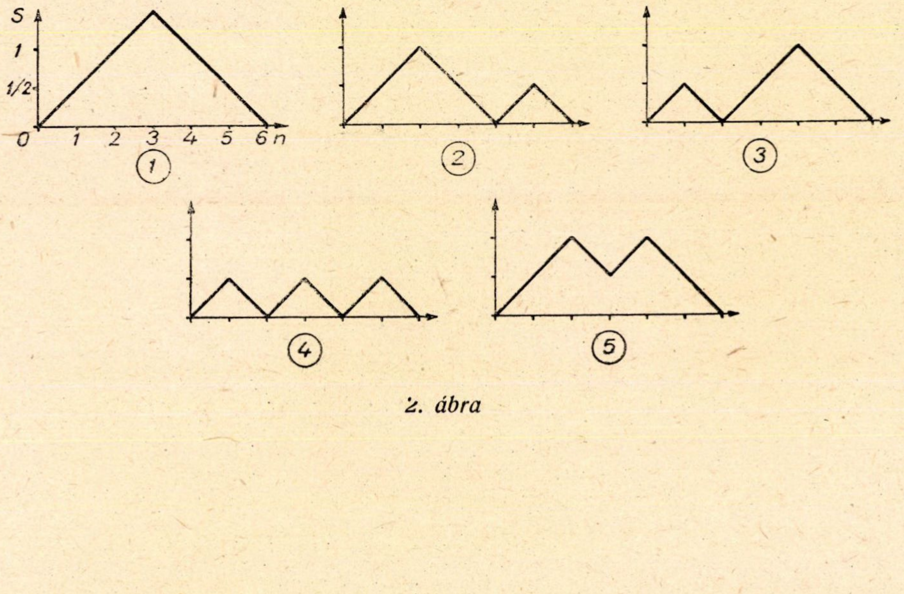
Az előző eljárást addig folytatjuk, míg valamennyi elektront figyelembe vettünk.

6. §. Hat elektronos multiplettek

Hat elektronból álló rendszer esetében az elfajulás foka, azaz a Slater-determinánsok száma $2^6=64$. A Hilbert-tér elméletben ez azt jelenti, hogy azok a lineárisan független sajátfüggvények, amelyek adott energiaállapothoz tartoznak, egy 64 dimenziós Hilbert-teret feszítenek ki. Ez a tér azonban reducibilis, azaz alterek direkt összegeként állítható elő. A rendszer elágazási diagramja szerint világos, hogy ez a direkt szorzat tartalmaz 5×1 dimenziós, 9×3 dimenziós, 5×5 dimenziós és 1×7 dimenziós altereket, amelyek az $\mathbf{S}^2$ operátorral szemben invariánsak és amelyek megfelelnek 5 szinglett, 9 triplett, 5 kvintett és 1 septett spinállapotnak.

Ebben a paragrafusban a különböző multiplicitású spinállapotok sajátfüggvényeit adjuk meg.

a) Hat elektronból álló rendszer esetében szingletteket az elágazási diagram szerint 5 féleképpen szerkeszthetünk (2. ábra). Az elágazási diagram szerint a rendszer azokból a részrendszerekből tevődik össze, amelyeket az



2. ábra

1. TÁBLÁZAT

Szing-lettek	x/α	y/β	z/α	u/β	v/α	w/β
1	3	3	—	—	—	—
2	2	2	1	1	—	—
3	1	1	2	2	—	—
4	1	1	1	1	1	1
5	2	1	1	2	—	—

1. táblázat mutat. A megfelelő sajátfüggvények a következők:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}(\mathbf{S}_A^- \mathbf{S}_B^+) + \frac{1}{12}(\mathbf{S}_A^- \mathbf{S}_B^+)^2 - \frac{1}{36}(\mathbf{S}_A^- \mathbf{S}_B^+)^3\right] |\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta| =$$

$$= \frac{1}{6}[3|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta| - (|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\beta| + |\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta| + |\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta| + |\beta\alpha\alpha\beta\alpha\beta| +$$

$$+ |\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta| + |\alpha\alpha\beta\beta\alpha\beta| + |\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha| + |\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha| + |\alpha\alpha\beta\beta\beta\alpha|) +$$

$$+ |\alpha\beta\beta\beta\alpha\alpha| + |\beta\alpha\beta\beta\alpha\alpha| + |\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha| + |\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha| + |\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha| +$$

$$+ |\beta\beta\alpha\alpha\beta\alpha| + |\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta| + |\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta| + |\beta\beta\alpha\alpha\alpha\beta| - 3|\beta\beta\beta\alpha\alpha\alpha|].$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}[1 - (\mathbf{S}_{ABC}^- \mathbf{S}_D^+)]\left[1 - \frac{1}{2}(\mathbf{S}_A^- \mathbf{S}_B^+) + \frac{1}{4}(\mathbf{S}_A^- \mathbf{S}_B^+)^2\right] |\alpha\alpha\beta\beta\alpha\beta| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}[2(|\alpha\alpha\beta\beta\alpha\beta| + |\beta\beta\alpha\alpha\alpha\beta|) - (|\beta\alpha\alpha\beta\alpha\beta| + |\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta| + |\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta| +$$

$$+ |\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta|) + |\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha| + |\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha| + |\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha| + |\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha| -$$

$$- 2(|\beta\beta\alpha\alpha\beta\alpha| + |\alpha\alpha\beta\beta\beta\alpha|)].$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[1 - \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{ABC}^- \mathbf{S}_D^+) + \frac{1}{4}(\mathbf{S}_{ABC}^- \mathbf{S}_D^+)^2\right][1 - (\mathbf{S}_A^- \mathbf{S}_B^+)] |\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}[2(|\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta| + |\alpha\beta\beta\beta\alpha\alpha|) - (|\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta| + |\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta| + |\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha| +$$

$$+ |\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha|) + |\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha| + |\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha| + |\beta\alpha\alpha\beta\alpha\beta| + |\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta| -$$

$$- 2(|\beta\alpha\beta\beta\alpha\alpha| + |\beta\alpha\alpha\alpha\beta\beta|)].$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{8}}[1-(\mathbf{S}^-_{ABCDE}\mathbf{S}^+_F)][1-\mathbf{S}^-_{ABC}\mathbf{S}^+_D)][1-(\mathbf{S}^-_A\mathbf{S}^+_B)]|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}[|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta| + |\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta| + |\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha| + |\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha| -$$

$$-(|\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha| + |\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha| + |\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta| + |\beta\alpha\alpha\beta\alpha\beta|)].$$

$$\varphi_5 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[1 - \frac{1}{2}(\mathbf{S}^-_{ABC}\mathbf{S}^+_D) + \frac{1}{4}(\mathbf{S}^-_{ABC}\mathbf{S}^+_D)^2\right]\left[1 - \frac{1}{2}(\mathbf{S}^-_A\mathbf{S}^+_B)\right]|\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta| =$$

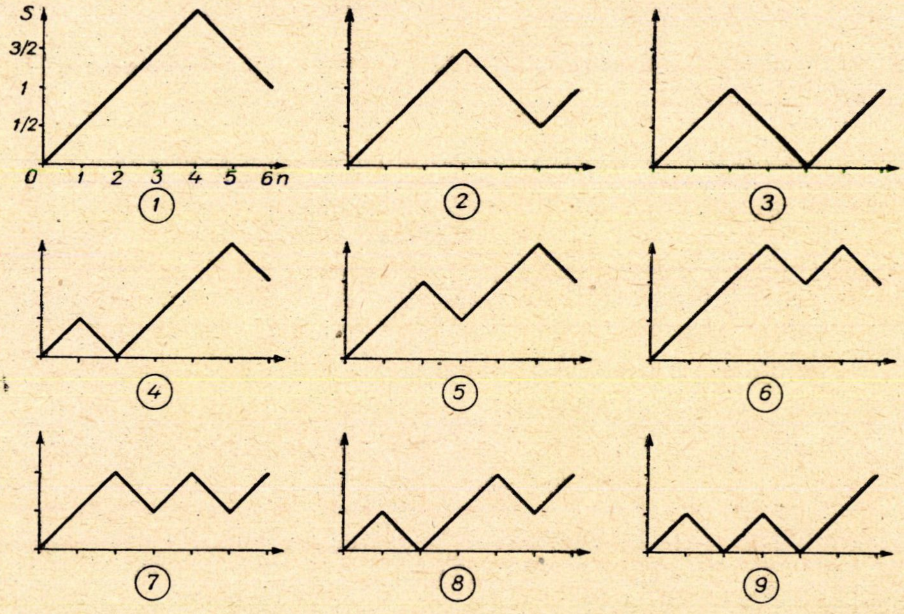
$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}[4|\alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta| - 2(|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\beta| + |\alpha\beta\alpha\alpha\beta\beta| + |\alpha\alpha\beta\beta\alpha\beta| + |\alpha\alpha\beta\beta\beta\alpha|) -$$

$$-(|\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta| + |\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta| + |\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha| + |\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha|) + |\alpha\beta\alpha\beta\beta\alpha| +$$

$$+ |\beta\alpha\alpha\beta\beta\alpha| + |\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta| + |\beta\alpha\alpha\beta\alpha\beta| + 2(|\alpha\beta\beta\beta\alpha\alpha| +$$

$$+ |\beta\alpha\beta\beta\alpha\alpha| + |\beta\beta\alpha\alpha\beta\alpha| + |\beta\beta\alpha\alpha\alpha\beta|) - 4|\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha|].$$

Ezek az eredmények megegyeznek PRATT (1953) eredményeivel.



3. ábra

b) Triplett spinállapotokat az elágazási diagram szerint 9 féleképpen szerkeszthetünk (3. ábra) és a rendszer a 2. táblázatban feltüntetett módon rakható össze részrendszerekből. A megfelelő sajátfüggvények a következők:

2. TÁBLÁZAT

Trip-lettek	x/α	y/β	z/α	u/β	v/α
1	4	2	—	—	—
2	3	2	1	—	—
3	2	2	2	—	—
4	1	1	3	1	—
5	2	1	2	1	—
6	3	1	1	1	—
7	2	1	1	1	1
8	1	1	2	1	1
9	1	1	1	1	2

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}\left[1 - \frac{1}{4}(\mathbf{S}_A^-\mathbf{S}_B^+) + \frac{1}{24}(\mathbf{S}_A^-\mathbf{S}_B^+)^2\right]|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{60}}[12|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta| - 3(|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\beta| + |\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\beta| + |\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\beta| + |\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\beta| +$$
$$+ |\beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha| + |\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha| + |\alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha| + |\alpha\alpha\alpha\beta\beta\alpha|) + 2(|\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha| +$$
$$+ |\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha| + |\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha| + |\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha| + |\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha|)].$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{1}{3}(\mathbf{S}_A^-\mathbf{S}_B^+) + \frac{1}{12}(\mathbf{S}_A^-\mathbf{S}_B^+)^2\right]|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\alpha| =$$

$$= \frac{1}{12\sqrt{2}}[12|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\alpha| - 4(|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha| + |\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha| + |\alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha| + |\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha| +$$
$$+ |\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha| + |\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha|) + 4(|\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha| + |\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha|)].$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{2}(\mathbf{S}_A^-\mathbf{S}_B^+) + \frac{1}{4}(\mathbf{S}_A^-\mathbf{S}_B^+)^2\right]|\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}[2|\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha| - (|\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha| + |\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha| + |\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha| +$$
$$+ |\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha|) + 2|\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha|].$$

$$\varphi_4 = \sqrt{\frac{3}{8}}\left[1-\frac{1}{3}(S_{ABC}^{-}S_D^{+})\right][1-(S_A^{-}S_B^{+})]\,|\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\beta| =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}[3(|\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\beta|-|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\beta|)-(|\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha|+|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha|+$$
$$+|\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha|)+|\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha|+|\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha|+|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha|].$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{1}{3}(S_{ABC}^{-}S_D^{+})\right]\left[1-\frac{1}{2}(S_A^{-}S_B^{+})\right]|\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\beta| =$$
$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}[6|\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\beta|-3(|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\beta|+|\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\beta|)-2(|\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha|+|\alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha|)-$$
$$-(|\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha|+|\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha|)+2|\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha|+|\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha|+|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha|+$$
$$+|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha|+|\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha|].$$

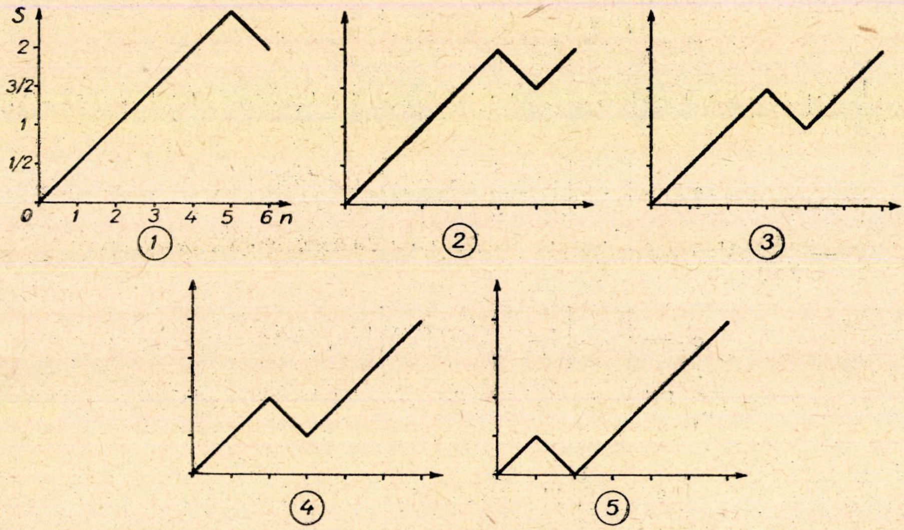
$$\varphi_6 = \frac{3}{4}\left[1-\frac{1}{3}(S_{ABC}^{-}S_D^{+})\right]\left[1-\frac{1}{3}(S_A^{-}S_B^{+})\right]|\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\beta| =$$
$$= \frac{1}{12}[9|\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\beta|-3(|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\beta|+|\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\beta|+|\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\beta|+|\alpha\alpha\alpha\beta\beta\alpha|)-$$
$$-2(|\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha|+|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha|+|\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha|)+2(|\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha|+|\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha|+$$
$$+|\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha|)+|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha|+|\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha|+|\alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha|].$$

$$\varphi_7 = \frac{2}{3}\left[1-\frac{1}{2}(S_{ABC}^{-}S_D^{+})\right]\left[1-\frac{1}{2}(S_A^{-}S_B^{+})\right]|\alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha| =$$
$$= \frac{1}{6}[4|\alpha\alpha\beta\alpha\beta\alpha|-2(|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha|+|\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha|+|\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha|)-(|\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha|+$$
$$+|\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha|)+|\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha|+|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha|+2|\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha|].$$

$$\varphi_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1-\frac{1}{2}(S_{ABC}^{-}S_D^{+})\right][1-(S_A^{-}S_B^{+})]|\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha| =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}[2(|\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha|-|\beta\alpha\alpha\alpha\beta\alpha|)-(|\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha|+|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha|)+$$
$$+|\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha|+|\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha|].$$

$$\varphi_9 = \frac{1}{2}[1-(S_{ABC}^{-}S_D^{+})][1-(S_A^{-}S_B^{+})]|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha| =$$
$$= \frac{1}{2}[|\alpha\beta\alpha\beta\alpha\alpha|+|\beta\alpha\beta\alpha\alpha\alpha|-(|\beta\alpha\alpha\beta\alpha\alpha|+|\alpha\beta\beta\alpha\alpha\alpha|)].$$

c) Kvintett spinállapotokat az elágazási diagram szerint 5 féleképpen szerkeszthetünk (4. ábra) és a rendszer a 3. táblázatban feltüntetett módon



4. ábra

3. TÁBLÁZAT

Kvintettek	x/α	y/β	z/α
1	5	1	—
2	4	1	1
3	3	1	2
4	2	1	3
5	1	1	4

rakható össze részrendszerekből. A megfelelő sajátfüggvények a következők:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{5}{6}}\left[1 - \frac{1}{5}(\mathbf{S}_A^- \mathbf{S}_B^+)\right] |\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\beta| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{30}}[5|\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\beta| - (|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\alpha| +$$

$$+ |\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\alpha| + |\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\alpha|)].$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{4}{5}}\left[1 - \frac{1}{4}(S_A^- S_B^+)\right]|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\alpha| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{20}}[4|\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\alpha| - (|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\alpha| + |\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\alpha|)].$$

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}\left[1 - \frac{1}{3}(S_A^- S_B^+)\right]|\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\alpha| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{12}}[3|\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\alpha| - (|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\alpha|)].$$

$$\varphi_4 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[1 - \frac{1}{2}(S_A^- S_B^+)\right]|\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\alpha| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}[2|\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\alpha| - (|\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\alpha|)].$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 - (S_A^- S_B^+)]|\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\alpha| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\beta\alpha\alpha\alpha\alpha| + |\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha|).$$

d) Septett spinállapotot az 1. ábra szerint csak egyféle módon szerkeszthetünk. A megfelelő sajátfüggvény:

$$\varphi = |\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha|.$$

A különböző multiplicitású állapotokat leíró sajátfüggvényeknél mindenütt a maximális komponenseket adtuk meg. A többi komponens (2, 6) figyelembevételével határozható meg.

Az előzőkben megadott spinoperátoros módszerrel meghatározhatjuk azoknak a sajátfüggvényeknek a számát, amelyek S_z nulla sajátértékéhez tartoznak. Nyilvánvaló, hogy a szinglett állapotok esetében 5 ilyen sajátfüggvény létezik. A triplett állapotban S_z sajátértékei $+1$, 0, -1. S^2-nek mindegyik sajátértékhez tartozó 9 sajátfüggvénye a Hilbert-térben egy 27 dimenziós alteret feszít ki. Ez azt jelenti, hogy ily módon létezik 9 sajátfüggvény, melyek S_z nulla sajátértékéhez tartoznak. A kvintett állapotban S_z sajátértékei $+2$, $+1$, 0, -1, -2. S^2-nek mindegyik sajátértékhez tartozó 5 sajátfüggvénye a Hilbert-térben egy 25 dimenziós alteret feszít ki. Ez azt jelenti, hogy ily módon létezik 5 sajátfüggvény, melyek S_z nulla sajátértékéhez tartoznak. Végül a septett állapotban S_z sajátértékei $+3$, $+2$, $+1$, 0, -1, -2, -3. Most S^2-nek az egyes sajátértékekhez tartozó egyetlen sajátfüggvényei egy hét dimenziós alteret feszítenek ki a Hilbert-térben, tehát S_z nulla sajátértékéhez egyetlen sajátfüggvény tartozik.

20 független sajátfüggvényünk van tehát, melyek S_z és S^2 nulla sajátértékéhez tartoznak. Ez a 20 soros szekuláris determináns tovább redukálódik

egy 9 soros, két 5 soros és egy 1 soros determináns szorzatára. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a szekuláris determináns redukálása ezzel teljes. Nevezetesen pl. a benzol molekula esetében a rendszer geometriai szerkezetében fellépő szimmetria miatt a csoportelmélet alapján is lehetséges redukálás. De a problémának ilyen végleges kiredukálására alkalmilag nincs is szükség. Abban az esetben pl. ha olyan rendszer alapállapotát vizsgáljuk, amelynek sajátfüggvénye $\mathbf{S}^2$ zérus sajátértékéhez tartozik — ez megfelel a rendszer olyan állapotának, amelyben az elektronok spinjei párosítva vannak —, a Slater-determinánsok helyes lineáris kombinációját a spinoperátoros eljárás adja. Ez azt jelenti, hogy 6 elektronból álló rendszer esetében az alapállapot energiáját a maximális számú kötőpároknak megfelelően az 5 soros determináns egyik gyöke szolgáltatja.

Végül (4, 4) alapján operátorunknak megadható egy alternatív alakja, amelyben csak a lefelé fordító spinoperátor szerepel. Pl. 4 rendszer egyesítésénél az operátor a következő alakú

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_{ABCD} &= \left(\frac{x-y+z-u+1}{x-y+z+1}\right)^{1/2}\left(\frac{x-y+1}{x+1}\right)^{1/2}\times \\ &\times \sum_{j=0}^{u}(-1)^j \frac{(x-y+z-j)!}{(x-y+z)!\,(u-j)!}(\mathbf{S}_{ABC}^-)^j(\mathbf{S}_D^-)^{u-j}\sum_{i=0}^{y}(-1)^i\frac{(x-i)!}{x!\,(y-i)!}(\mathbf{S}_A^-)^i(\mathbf{S}_B^-)^{y-i}.\end{aligned} \tag{6, 1}$$

(4, 13) és (4, 14) szerint páros számú elektronból álló részrendszerek esetében operátorunk átírható olyan alakra, amely a nulla komponensre hatva származtatja $\mathbf{S}^2$ sajátfüggvényeit. Az operátor pl. három rendszer egyesítésénél a következő alakú:

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_{ABC}^0 &= \left[\frac{(x-y)!\,z!}{(x-y+z)!}\right]^{1/2}\sum_{i=-z/2}^{z/2}\frac{(x-y+z)!/2}{([x-y]/2+i)!\,(z/2+i)!}(\mathbf{S}_{AB}^-\mathbf{S}_C^+)^i\times \\ &\times\left[\frac{(x-y+1)!\,y!}{(x+1)!}\right]^{1/2}\sum_{j=-y/2}^{y/2}(-1)^{y/2+j}\frac{(x/2-j)!}{(x/2-y/2)!\,(y/2+j)!}(\mathbf{S}_A^-\mathbf{S}_B^+)^j.\end{aligned} \tag{6, 2}$$

Ennek az operátornak az a hátránya a maximális komponensre támaszkodó operátorral szemben, hogy benne kétszer annyi összegezés lép fel, mint (5, 8)-ban.

Függelék

Állítás

$$\psi(s, s-i)=\frac{1}{i!}\binom{2s}{i}^{-1/2}(\mathbf{S}^-)^i\psi(s,s).$$

A bizonyítás teljes indukcióval történik. (2, 6) szerint:

$$\mathbf{S}^-\psi(s,s)=(2s)^{1/2}\psi(s,s-1),$$

$$\psi(s,s-1)=\frac{1}{1!}\binom{2s}{1}^{-1/2}\mathbf{S}^-\psi(s,s).$$

$$\mathbf{S}^-\psi(s,s-1)=[(2s-1)2]^{1/2}\psi(s,s-2),$$

$$\psi(s,s-2)=\frac{1}{2!}\binom{2s}{2}^{-1/2}(\mathbf{S}^-)^2\psi(s,s).$$

Az összefüggés tehát igaz $i=1$-re és $i=2$-re. Tegyük fel, hogy igaz $i-1$-ig:

$$\psi(s,s-(i-1))=\frac{1}{(i-1)!}\binom{2s}{i-1}^{-1/2}(\mathbf{S}^-)^{i-1}\psi(s,s).$$

Alkalmazzuk mindkét oldalra az $\mathbf{S}^-$ operátort:

$$\mathbf{S}^-\psi(s,s-(i-1))=[(2s-i+1)i]^{1/2}\psi(s,s-i)=\frac{1}{(i-1)!}\binom{2s}{i-1}^{-1/2}\psi(s,s),$$

$$\psi(s,s-i)=\frac{1}{i!}\binom{2s}{i}^{-1/2}(\mathbf{S}^-)^i\psi(s,s).$$

Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy:

$$\psi(s,-s+i)=\frac{1}{i!}\binom{2s}{i}^{-1/2}(\mathbf{S}^+)^i\psi(s,-s).$$

Állítás:

$$\psi(s,k)=\left[\frac{(s-k)!}{(s+k)!}\right]^{1/2}(\mathbf{S}^+)^k\psi(s,0).$$

Ennek a bizonyítása is teljes indukcióval történik. (2, 5) szerint:

$$\mathbf{S}^+\psi(s,0)=[s(s+1)]^{1/2}\psi(s,1),$$

$$\psi(s,1)=\left[\frac{(s-1)!}{(s+1)!}\right]^{1/2}\mathbf{S}^+\psi(s,0).$$

$$\mathbf{S}^+\psi(s,1)=[(s-1)(s-2)]^{1/2}\psi(s,2),$$

$$\psi(s,2)=\left[\frac{(s-2)!}{(s+2)!}\right]^{1/2}(\mathbf{S}^+)^2\psi(s,0).$$

Az állítás tehát igaz $k=1$-re és $k=2$-re. Tegyük fel, hogy igaz k-ra:

$$\psi(s,k)=[(s-k+1)\cdots(s+k)]^{-1/2}(\mathbf{S}^+)^k\psi(s,0).$$

Alkalmazzuk mindkét oldalra az S^+ operátort:

$$S^+\psi(s,k)=[(s-k)(s+k+1)]^{1/2}\psi(s,k+1),$$

$$\psi(s,k+1)=\left[\frac{(s-k-1)!}{(s+k+1)!}\right]^{1/2}\psi(s,0).$$

Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy

$$\psi(s,-k)=\left[\frac{(s-k)!}{(s+k)!}\right]^{1/2}(S^-)^k\psi(s,0).$$

Állítás:

$$\varphi(s,s-i)=\frac{1}{i!}\binom{n}{i}^{-1/2}(S^-)^i|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\cdots\overset{n}{\alpha}|.$$

Az állítás igaz $n=1$-re és $n=2$-re. Ugyanis

$n=1$ esetben $S=1/2$ és $M_s=1/2\rightarrow\varphi(1/2,1/2)=|\alpha|$

$M_s=-1/2\rightarrow\varphi(1/2,-1/2=S^-|\alpha|=|\beta|$.

$n=2$ esetben $S=1$ és $M_s=1\rightarrow\varphi(1,1)=|\alpha\alpha|$

$M_s=0\rightarrow\varphi(1,0)=2^{-1/2}(|\alpha\beta|+|\beta\alpha|)$

$M_s=-1\rightarrow\varphi(1,-1)=|\beta\beta|$.

Tételezzük fel, hogy állításunk igaz n-re. Adjunk az n elektronból álló rendszerhez egy újabb elektront. Az $n+1$ elektronból álló $S=(n+1)/2$ spinű rendszer i-edik komponensét a spinösszeadás (4, 7) képletének felhasználásával adjuk meg. Eszerint tehát:

$$\varphi((n+1)/2,(n+1)/2-i)=$$

$$=\left[\frac{n!}{(n+1)!}\right]^{1/2}\left\{\left[\frac{(n-i+1)!\,i!}{(n-i)!\,i!}\right]^{1/2}\varphi_A(n/2,n/2-i)\varphi_B(1/2,1/2)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(n-i+1)!\,i!}{(n-i+1)!\,(i-1)!}\right]^{1/2}\varphi_A(n/2,n/2-(i-1))\varphi_B(1/2,-1/2)\right\}=$$

$$=(n+1)^{-1/2}\left\{(n-i+1)^{1/2}\frac{1}{i!}\binom{n}{i}^{-1/2}(S^-)^i|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\cdots\overset{n}{\alpha}||\alpha|+\right.$$

$$\left.+i^{1/2}\frac{1}{(i-1)!}\binom{n}{i-1}^{-1/2}(S^-)^{i-1}|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\cdots\overset{n}{\alpha}||\beta|\right\}=$$

$$=\frac{1}{i!}\binom{n+1}{i}^{-1/2}\left\{(S^-)^i|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\cdots\overset{n}{\alpha}||\alpha|+i(S^-)^{i-1}|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\cdots\overset{n}{\alpha}||\beta|\right\}=$$

$$=\frac{1}{i!}\binom{n+1}{i}^{-1/2}(S^-)^i|\overset{1}{\alpha}\overset{2}{\alpha}\cdots\overset{n+1}{\alpha}|.$$

Teljesen hasonlóan kimutatható, hogy:

$$\varphi(s,-s+i)=\frac{1}{i!}\binom{n}{i}^{-1/2}(S^+)^i|\overset{1}{\beta}\overset{2}{\beta}\cdots\overset{n}{\beta}|.$$

IRODALOM

BOYS, S. F.: Electronic wave functions. I., A general method of calculation for the stationary states of any molecular system, *Proc. Roy. Soc.*, **A 200** (1950) 542—554.

COULSON, C. A.—CRAIG, D. P.—JACOBS, J.: Electronic levels in simple conjugated systems, III., The significance of configuration interaction, *Proc. Roy. Soc.*, **A 206** (1951) 297—308.

COULSON, C. A.—JACOBS, J.: Electronic levels in simple conjugated systems. II., Butadiene, *Proc. Roy. Soc.*, **A 206** (1951) 287—296.

CORSON, E. M.: *Perturbation methods in the quantum mechanics of n-electron system*, Blackie, London and Glasgow, 1951.

CRAIG, D. P.: Electronic levels in simple conjugated systems. I., Configuration interaction in cyclo butadiene, *Proc. Roy. Soc.*, **A 202** (1950) 498—506.

EYRING, H.—WALTER, J.—KIMBALL, G. E.: *Quantum Chemistry*, Wiley, New-York, 1949.

JUCYSZ, Y.: Vzaimogyejsztvie konfiguracij v atome ugleroda, *J. Exp. Theor. Phys. U. S. S. R.*, **19** (1949) 565—576.

PRATT, G. W.: Eigenfunction of S^2 by a Spin Operator Method, *Phys. Rev.*, **92** (1953) 278—288.

VAN DER WAERDEN, B. L.: *Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.

A Szegedi Tudományegyetem
Elméleti Fizikai Intézete

(Beérkezett: 1957. XI. 29.)

AZ ITERATÍV KÖZELÍTŐ MÓDSZEREKRŐL, II. RÉSZ

ZAJTA AURÉL

Az I. részhez hasonlóan, mely az MTA III. Osztálya Közleményeinek VI. kötetében jelent meg, (3—4. szám, 1956, 467—489.), e második rész is folytatása az Acta Technica-ban megjelent német nyelvű cikk, a *Vizsgálatok a Newton—Raphson-gyökközelítőeljárás általánosításairól* c. dolgozat magyar nyelvű átdolgozásának. Míg az I. részben főleg speciális képletsorozatokkal foglalkoztunk, e II. részben általános kérdésekre igyekszünk válaszolni.

Az irodalomban eddig főleg a ZAMM *(Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik)* hasábjain jelentek meg az iteratív gyökközelítő eljárásokról szóló tanulmányok, kezdve BODEWIG alapvető jelentőségű cikkével [2], amelyben a konvergenciafok ismert definícióját adta. Az ezt követő cikkek elvi szempontból kevés újat hoztak, inkább bőséges felsorolását adták a különféle, másod-, harmad- és negyedfokban konvergáló közelítőképleteknek. A képleteknek e kaotikus felhalmozódásában egyre sürgetőbbnek látszik a szintézis munkájának elvégzése, az elméletnek egységes szempontok szerinti felépítése. Ilyen céloktól vezettetve állítottuk össze e II. rész anyagát, amelynek különösen a 3., 4. és 5. fejezeteire utalunk. Az első két fejezet a későbbiekhez szükséges előkészítéseket tartalmazza.

1. Észrevételek iteratív közelítőképletekre

Az $\{x_n\}$ számsorozatot iteratívnak nevezzük, ha tagjait az alábbi rekurzió szerint képezzük:

$$(1)\quad \begin{cases} x_0 = a, \\ x_{n+1} = \Phi(x_n). \end{cases}$$

Ha $\{x_n\}$ konvergens, azaz, ha létezik a

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

véges határérték, akkor a számsorozat képzését felhasználhatjuk a ξ fokozatos közelítésére.

Az (1) és (2) következtében ξ gyöke az

$$(3)\quad F(x) \equiv x - \Phi(x) = 0$$

egyenletnek, s ezért $\Phi(x)$ természetes módon felbomlik két részre:

(4) $$\Phi(x) = x - F(x).$$

Az iteratív közelítőmódszerek praktikus célja mindig valamely

(5) $$f(x) = 0$$

egyenlet megoldása. Evégből az (5) baloldalán levő $f(x)$ függvényből kiindulva iteratív számolásra alkalmas $\Phi(x)$ függvényt kell szerkesztenünk. Ha $f(x)$ kedvező formai tulajdonságokkal rendelkezik, az (5) egyenlet könnyen az $x = \Phi(x)$ alakra hozható. Pl. ha

$$f(x) \equiv x^2 - ax - b = 0,$$

akkor $$x = a + \frac{b}{x}, \quad \text{tehát} \quad \Phi(x) = a + \frac{b}{x},$$

vagy ha $$f(x) \equiv x^n - ax - b = 0,$$

akkor $$x = \sqrt[n]{ax+b}, \quad \text{tehát} \quad \Phi(x) = \sqrt[n]{ax+b} \quad \text{stb.}$$

Nem konkretizált (általános) $f(x)$ függvények esetén képlettel adhatunk meg oly műveletsorozatot, mely az $f(x)$ felhasználásával valamely $\Phi(x)$ *közelítőfüggvény* konstrukcióját eredményezi. A (4) miatt a $\Phi(x)$-nek képlettel való megadása ekvivalens az $F(x)$-nek képlettel való megadásával. Az irodalomban ismertetett legtöbb közelítőképletnél az $F(x)$ csupán az $f(x)$-en és ennek deriváltjain keresztül függvénye az x-nek:

(6) $$F(x) = \Omega(f(x), f'(x), \dots f^{(n)}(x)),$$

vagy röviden:

$$F(x) = \Omega(f; f^{(i)}), \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

de szórványosan találkozunk olyan képletekkel is, (pl. LUDWIG cikkében [4]) amelyeknél az $F(x)$ az $f(x)$-en és deriváltjain kívül még önkényesen felvett $p_j(x)$ segédfüggvényeken keresztül is függvénye x-nek:

(7) $$F(x) = \Omega(f; f^{(i)}; p_j). \quad (i = 1, 2, \dots n; j = 1, 2, \dots m)$$

A képlettel megadott Φ közelítőfüggvény:

$$\Phi = x - \Omega,$$

jobboldalának első tagját (x) a képlet *fix elemének*, második tagját (Ω) a képlet *főrészének* nevezzük. A főrészt legáltalánosabban (7)-es alakúnak tételezhetjük fel.

A továbbiakban eljárást adunk meg a közelítőképletek konvergenciafokának értelmezésére.

Helyettesítsünk (7)-ben az f és $f^{(i)}$ függvények helyébe az

(8) $$\left.\begin{aligned} f(x) &= (x-\xi)\cdot g(x), \\ f^{(i)}(x) &= (x-\xi)\cdot g^{(i)}(x) + i\cdot g^{(i-1)}(x) \end{aligned}\right\} \text{ és}$$

felbontások szerint, az önkényes p_j függvényeket pedig hagyjuk változatlanul:

$$F(x) = \Omega((x-\xi)\cdot g(x); (x-\xi)\cdot g^{(i)}(x) + i\cdot g^{(i-1)}(x); p_j(x)) \equiv \tag{9}$$
$$\equiv \Psi(x-\xi;\ g;\ g^{(i)};\ p_j).$$

A kapott új függvényt (Ψ) az eredeti függvény (Ω) *származékának* nevezzük el. A Ψ függvényre vonatkozóan megállapitjuk azt a maximális k pozitív valós kitevőt, melyre a

$$\lim_{x\to\xi} \frac{x-\xi-\Psi(x-\xi;\ g;\ g^{(i)};\ p_j)}{(x-\xi)^k} \tag{10}$$

határérték még létezik, oly módon képezve a határértéket, hogy a Ψ-ben előforduló $g, g^{(i)}$ és p_j függvényeket *formálisan* az x-től és egymástól független konstansoknak tekintjük. *Az ily módon meghatározott k számot nevezzük definíciószerűen a közelítőképlet konvergenciafokának egyszeres gyökök közelítésére vonatkozóan.*

Többszörös gyökök közelítésére konstruált képletek konvergenciafokának megállapítását visszavezethetjük egyszeres gyökök közelítésére szolgáló képletek konvergenciafokának vizsgálatára. Amennyiben egy

$$\Phi(x) = x - \Omega(f; f^{(i)}; p_j) \tag{11}$$

képlet p-szeres gyökök közelítésére alkalmas, akkor a belőle

$$\begin{cases} f(x) \to f(x)^p \\ f^{(i)}(x) \to \dfrac{d^i}{dx^i}(f(x)^p) \end{cases} \tag{12}$$

helyettesítésekkel nyert új közelítőképlet:

$$\Phi^*(x) = x - \Omega(f^p; (f^p)^{(i)}; p_j) = x - \Omega^*(f; f^{(i)}; p_j) \tag{13}$$

már egyszeres gyökök közelítésére lesz alkalmas. Amekkora a (13) konvergenciafoka a fentebb vázolt eljárással, akkora lesz az eredeti (11) képlet konvergenciafoka többszörös gyökök közelítésére vonatkozóan. A fogalmazás tekintetében állapodjunk meg abban, hogy amennyiben nem teszünk említést a közelítendő gyök multiplicitásáról, akkor a képlet konvergenciafoka mindig egyszeres gyök közelítésére vonatkozóan értendő.

A közelítőképletek konvergenciafokának fenti eljárással történő értelmezése teljes összhangban van a Bodewig-féle konvergenciafok-definícióval [2], amely — mint ismeretes — számsorozatokra vonatkozik. Könnyen megmutatható ugyanis, hogy amennyiben $\Phi(x)$ egy k konvergenciafokú képletet jelöl, továbbá az (5) egyenlet közelítendő gyöke egyszeres, akkor az (1)-gyel képezett számsorozat konvergenciafoka is k, a Bodewig-féle értelemben, feltéve természetesen, hogy a sorozat konvergál.

A képletek konvergenciafokának a megadott definícióval történő megállapítása elég körülményes számolást igényel. Ennek elkerülésére bizonyos formai kritériumokat fogunk megadni, amelyek lehetővé teszik, hogy a (8) felbontások felhasználását mellőzzük, és csupán a közelítőképlet formai konstrukciója alapján állapíthassuk meg annak konvergenciafokát.

2. A kongruencia-relációk bevezetése

Az ismertetendő kritériumok legegyszerűbb megfogalmazása és a sorra kerülő tételek legegyszerűbb levezetése céljából be kell vezetnünk a kongruencia-írásmód használatát. A kongruenciákat a számelméletben történő alkalmazásuknál tágabb értelemben fogjuk használni, éspedig kétféle modulus-szal kapcsolatban: mod $(x-\xi)^k$ és mod f^k.

I. A MODULUS: $(x-\xi)^k$.

α) Legyen Ψ az $(x-\xi), g(x), g^{(i)}(x)$ és $p_j(x)$ függvényeknek tetszőleges függvénye:

$$\Psi = \Psi(x-\xi; g; g^{(i)}; p_j).$$

Ekkor a

$$\Psi \equiv 0 \bmod (x-\xi)^k \qquad (k>0) \tag{14}$$

kongruencia jelentése definíció szerint a következő:

$$\lim_{x\to\xi} \frac{\Psi(x-\xi; g; g^{(i)}; p_j)}{(x-\xi)^k} \tag{15}$$

határérték létezik, (értéke esetleg zérus is lehet, ebben az esetben a (14)-ben k értéke még növelhető) azon feltevés mellett, hogy a $g, g^{(i)}$ és p_j függvényeket x-től és egymástól független konstansoknak tekintjük.

β) Legyen Ψ_1 és Ψ_2 két, a fenti Ψ-vel megegyező felépítésű függvény. Ekkor a

$$\Psi_1 \equiv \Psi_2 \bmod (x-\xi)^k \qquad (k>0) \tag{16}$$

kongruencia definíció szerint ekvivalens a

$$\Psi_1 - \Psi_2 \equiv 0 \bmod (x-\xi)^k$$

kongruenciával, melyet α) alatt már definiáltunk.

Az α) és β) definíciókkal értelmezett kongruenciafogalomra hasonló műveleti szabályok állapíthatók meg, mint a számelméleti kongruenciákra:

1. A

$$\Psi_1 \equiv \Psi_2 \bmod (x-\xi)^k,$$

és

$$\Psi_2 \equiv \Psi_3 \bmod (x-\xi)^k$$

kongruenciákból következik, hogy

$$\Psi_1 \equiv \Psi_3 \bmod (x-\xi)^k$$

is fennáll, azaz a kongruencia tranzitív kapcsolat.

2. Ha Ψ_3 tetszőleges konstans vagy függvény, és a (16) fennáll, akkor fennáll a

$$\Psi_1 \pm \Psi_3 \equiv \Psi_2 \pm \Psi_3 \bmod (x-\xi)^k$$

kongruencia is.

3. A

$$\Psi_1 \equiv \Psi_2 \bmod (x-\xi)^{k_1},$$

és

$$\Psi_3 \equiv \Psi_4 \bmod (x-\xi)^{k_2}$$

kongruenciákból következik a

$$\Psi_1 \pm \Psi_3 \equiv \Psi_2 \pm \Psi_4 \bmod (x-\xi)^k$$

érvényessége is, ahol

$$k = \min(k_1, k_2), \text{ ha } k_1 \neq k_2, \text{ és } k \geq k_1, \text{ ha } k_1 = k_2.$$

4. Ha a $\lim\limits_{x\to\xi} \Psi_3$ határérték létezik, akkor a (16) fennállásából következik

$$\Psi_1 \cdot \Psi_3 \equiv \Psi_2 \cdot \Psi_3 \bmod (x-\xi)^k.$$

Ugyanígy, ha $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{1}{\Psi_3}$ létezik, akkor a (16)-ból

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_3} \equiv \frac{\Psi_2}{\Psi_3} \bmod (x-\xi)^k$$

következik.

5. Ha

$$\Psi_3 \equiv 0 \bmod (x-\xi)^l,$$

akkor a (16) fennállásából

$$\Psi_1 \cdot \Psi_3 \equiv \Psi_2 \cdot \Psi_3 \bmod (x-\xi)^{k+l}$$

következik, továbbá, ha a $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{\Psi_3}{(x-\xi)^l}$ határérték létezík és nem zérus, továbbá $l < k$, akkor a (16)-ból

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_3} \equiv \frac{\Psi_2}{\Psi_3} \bmod (x-\xi)^{k-l}$$

is következik.

6. Ha $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{1}{\Psi_1}$ és $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{1}{\Psi_2}$ léteznek, akkor a (16)-ból

$$\frac{1}{\Psi_1} \equiv \frac{1}{\Psi_2} \bmod (x-\xi)^k$$

érvényessége is következik (vö. 4.-et).

7. A

$$\Psi_1 \equiv \Psi_2 \bmod (x-\xi)^{k_1},$$

és

$$\Psi_3 \equiv \Psi_4 \bmod (x-\xi)^{k_2}$$

kongruenciákból következik, ha $\lim\limits_{x\to\xi} \Psi_1$ és $\lim\limits_{x\to\xi} \Psi_3$ léteznek (ekkor $\lim\limits_{x\to\xi} \Psi_2$ és $\lim\limits_{x\to\xi} \Psi_4$ ugyancsak léteznek), hogy

$$\Psi_1 \cdot \Psi_3 \equiv \Psi_2 \cdot \Psi_4 \bmod (x-\xi)^k$$

is fennáll, ahol $k = \min(k_1, k_2)$.

A felsorolt 1—7. szabályok igazolását könnyen elvégezhetjük α) és β) definíciók alapján.

II. A MODULUS f^k.

α) Legyen Ω az $f(x), f^{(i)}(x)$ és $p_j(x)$ függvényeknek tetszőleges függvénye:

$$\Omega = \Omega(f; f^{(i)}; p_j).$$

Ekkor az

$$\Omega \equiv 0 \bmod f^k \qquad (k > 0) \tag{17}$$

kongruencia jelentése definíció szerint a következő:

$$\lim_{f \to 0} \frac{\Omega(f; f^{(i)}; p_j)}{f^k} \tag{18}$$

határérték létezik (értéke esetleg még zérus is lehet, ebben az esetben a (17)-ben k értéke még növelhető) azon feltevés mellett, hogy az $f^{(i)}$ és p_j függvényeket f-től és egymástól független konstansoknak tekintjük.

β) Legyen Ω_1 és Ω_2 két, a fenti Ω-val megegyező tulajdonságú függvény. Ekkor az

$$\Omega_1 \equiv \Omega_2 \bmod f^k \qquad (k > 0) \tag{19}$$

kongruencia definíció szerint ekvivalens az

$$\Omega_1 - \Omega_2 \equiv 0 \bmod f^k$$

kongruenciával, amelyet már α) alatt definiáltunk.

A II. α) és β) definíciókkal értelmezett kongruencia-fogalomra rendre ugyanolyan műveleti szabályok érvényesek, mint amilyeneket az I. kongruencia-fogalomra soroltunk fel (1—7.). Sőt, mi több: a közelítőképletek konvergencia-fokának értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy az I. és II. típusú kongruenciák egymással ekvivalensek, azaz egymással helyettesíthetők. Pontosabb megfogalmazásban ez azt jelenti, hogy ha pl. egy fennálló (19) kongruenciában mindenütt végrehajtjuk a (8) szerinti helyettesítéseket, akkor az Ω_1-ből és Ω_2-ből nyert származékfüggvények között is fennáll a (16) kongruencia ugyanazon k kitevővel, és viszont: ha Ψ_1 és Ψ_2 az Ω_1-ből, ill. Ω_2-ből kapott származékfüggvények, akkor a (16) fennállásából is következik a (19) érvényessége. Az I. és II. típusú kongruenciáknak ezt az ekvivalenciáját a továbbiakban bőven fel fogjuk használni.

3. Általános tételek iteratív közelítőképletekre

Közelítőfüggvényekből szubsztitucióval nyert *összetett függvényhez* hasonlóan definiálhatjuk két *közelítőképlet kompozícióját:* A

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1 = x - \Omega_1(f(x); f^{(i)}(x); p_j(x)) \\ \Phi_2 = x - \Omega_2(f(x); f^{(i)}(x); p_j(x)) \end{array}\right\} \text{ és } \tag{20}$$

közelítőképletek adott sorrendben vett kompozíciója ($\Phi_1\,\Phi_2$) az alábbi képlet:

$$\Phi_1\,\Phi_2 = x - \Omega_2 - \Omega_1\,(f(x-\Omega_2); f^{(i)}(x-\Omega_2); p_j(x-\Omega_2)). \tag{21}$$

A $\Phi_1\,\Phi_2$ kompozíció főrésze (Ω_{12}) ennélfogva:

$$\Omega_{12} = \Omega_2 + \Omega_1\,(f(x-\Omega_2); f^{(i)}(x-\Omega_2); p_j(x-\Omega_2)), \tag{22}$$

s ha most az $f(x-\Omega_2)$ és $f^{(i)}(x-\Omega_2)$ függvények helyébe azok Taylor-sorát helyettesítjük:

$$\left\{\begin{aligned} f(x-\Omega_2) &= f(x) - f'(x)\cdot\Omega_2 + \frac{1}{2!}f''(x)\cdot\Omega_2^2 - + \cdots,\\ f^{(i)}(x-\Omega_2) &= f^{(i)}(x) - f^{(i+1)}(x)\cdot\Omega_2 + \frac{1}{2!}f^{(i+2)}(x)\cdot\Omega_2^2 - + \cdots \end{aligned}\right. \tag{23}$$

továbbá bevezetjük a

$$q_j(x) = p_j(x-\Omega_2)$$

jelölést, akkor kitűnik, hogy a főrész ismét az $f(x)$-nek és $f^{(i)}(x)$ deriváltaknak, továbbá az önkényesen felvett $p_j(x)$ és $q_j(x)$ függvényeknek a függvénye, azzal a megjegyzéssel, hogy most az i index nincs korlátozva:

$$\Omega_{12} = \Omega_{12}\,(f(x); f^{(i)}(x); p_j(x); q_j(x)). \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots \\ j = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Ha a (23) jobb oldalán végrehajtjuk a (8) felbontások szerinti helyettesítéseket, a sorok megfelelő átrendezésével az

$$f(x-\Omega_2) = (x-\Omega_2-\xi)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot\frac{g^{(\nu)}(x)}{\nu!}\cdot\Omega_2^\nu$$

és

$$f^{(i)}(x-\Omega_2) = (x-\Omega_2-\xi)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot\frac{g^{(\nu+i)}(x)}{\nu!}\cdot\Omega_2^\nu + i\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot\frac{g^{(\nu+i-1)}(x)}{\nu!}\Omega_2^\nu$$

összefüggéseket nyerjük, de ezek a $g(x-\Omega_2)$ és $g^{(i)}(x-\Omega_2)$ függvényeknek a (23)-mal analóg sorfejtéseit felhasználva egyenértékűek az

$$\left\{\begin{aligned} f(x-\Omega_2) &= (x-\Omega_2-\xi)\cdot g(x-\Omega_2)\\ f^{(i)}(x-\Omega_2) &= (x-\Omega_2-\xi)\cdot g^{(i)}(x-\Omega_2) + i\cdot g^{(i-1)}(x-\Omega_2) \end{aligned}\right. \quad \text{és} \tag{25}$$

felbontásokkal. Ebből már következik, hogy az Ω_{12} főrész származékfüggvénye (Ψ_{12}) előállítható a következő alakban:

$$\Psi_{12} = \Omega_2 + \Psi_1\,(x-\Omega_2-\xi; g(x-\Omega_2); g^{(i)}(x-\Omega_2); p_j(x-\Omega_2)). \tag{26}$$

Ezen előkészítés után könnyen bebizonyítható a közelítőképletekre vonatkozó

I. TÉTEL: *Ha Φ_1 közelítőképlet konvergenciafoka k_1, Φ_2 konvergenciafoka pedig k_2, akkor kompozíciójuk konvergenciafoka $k_1 k_2$.*

BIZONYÍTÁS: A kongruencia-írásmódot felhasználva a feltevések szerint:

(27) $$x-\xi-\Psi_1(x-\xi; g(x); g^{(i)}(x); p_j(x)) \equiv 0 \mod (x-\xi)^{k_1}$$

és

(28) $$x-\xi-\Psi_2(x-\xi; g(x): g^{(i)}(x); p_j(x)) \equiv 0 \mod (x-\xi)^{k_2},$$

ahol Ψ_1 jelenti Ω_1, Ψ_2 pedig Ω_2 származékfüggvényét. A (27)-ben helyettesítsünk mindenütt x helyébe $(x-\Omega_2)$-t és vegyük figyelembe a (26)-ot:

$$x-\xi-\Psi_{12} \equiv 0 \mod (x-\Omega_2-\xi)^{k_1},$$

azonban (28) szerint

$$(x-\Omega_2-\xi)^{k_1} = (x-\xi-\Psi_2)^{k_1} \equiv 0 \mod (x-\xi)^{k_1 k_2},$$

s így

$$x-\xi-\Psi_{12} \equiv 0 \mod (x-\xi)^{k_1 k_2},$$

azaz a $\Phi_1 \Phi_2$ kompozíció konvergenciafoka $k_1 k_2$.

Az I. tétel könnyen általánosítható tetszőleges véges számú közelítőképlet kompozíciójára. Ha Φ_i konvergenciafoka k_i, akkor a $\Phi_1 \Phi_2 \ldots \Phi_n$ kompozíció konvergenciafoka: $\prod_{i=1}^{n} k_i$. Ha valamennyi Φ_i egyenlő, azaz $\Phi_i = \Phi$, akkor $k_i = k$, és a kompozícióval nyert n-ik iterált (${}^n\Phi$) konvergenciafoka ily módon: k^n. Ezt a tételt már LUDWIG is megemlítette cikkében [4], de bizonyítását csak k és n néhány alacsonyabb értékére végezte el.

A konvergenciafok definíciójának közvetlen következménye a közelítőképletek főrészére vonatkozó

II. TÉTEL: *Ha $k \geq 1$, akkor*

(29) $$\Omega \equiv 0 \mod f,$$

és ha $k > 1$, akkor

(29') $$\Omega \not\equiv 0 \mod f^l, \text{ ahol } l > 1.$$

BIZONYÍTÁS: Csak azt kell meggondolnunk, hogy az Ω származékfüggvényére, Ψ-re fennáll:

$$x-\xi-\Psi \equiv 0 \mod (x-\xi)^k,$$

amiből $k \geq 1$ esetben

(30) $$\Psi \equiv 0 \mod (x-\xi),$$

és $k > 1$ esetben

(30') $$\Psi \not\equiv 0 \mod (x-\xi)^l \qquad (l > 1)$$

következik. A (30) és (30') I. típusú kongruenciáknak II. típusú megfelelői a (29) és (29') kongruenciák.

A II. tételhez hasonlóan könnyen bizonyítható a III. tétel és ennek megfordítottja, a IV. tétel.

III. TÉTEL: *Ha Φ_1 konvengenciafoka k_1, Φ_2 konvergenciafoka k_2, akkor*

$$\Phi_1 \equiv \Phi_2 \bmod f^k, \tag{31}$$

ahol

$$k = \min(k_1, k_2).$$

BIZONYÍTÁS: A feltevések szerint:

$$\Phi_1 - \xi = x - \xi - \Psi_1 \equiv 0 \bmod (x-\xi)^{k_1},$$

és

$$\Phi_2 - \xi = x - \xi - \Psi_2 \equiv 0 \bmod (x-\xi)^{k_2}.$$

A I. 3. szabállyal: $\Psi_1 \equiv \Psi_2 \bmod (x-\xi)^k$, $(k = \min(k_1, k_2))$
áttérve a II. típusra: $\Omega_1 \equiv \Omega_2 \bmod f^k$,
ami viszont már ugyanazt fejezi ki, mint a (31).

IV. TÉTEL: *Ha Φ_1 konvergenciafoka k_1, továbbá fennáll a*

$$\Phi_1 \equiv \Phi_2 \bmod f^k$$

kongruencia, akkor Φ_2 konvergenciafoka:

$$\left\{\begin{array}{lll} & k_2 = k_1, & \text{ha } k_1 < k, \\ & k_2 = k, & \text{ha } k_1 > k, \\ \textit{és végül} & k_2 \geq k, & \text{ha } k_1 = k. \end{array}\right. \tag{32}$$

A bizonyításnál visszafelé haladunk a III. tétel bizonyításához vezető úton. A k_2 értékére tett (32) megállapítások egyenértékűek az I. 3. szabálynál elmondott k-ra vonatkozó megállapításokkal.

A $k=1$ konvergenciafokhoz tartozó legegyszerűbb közelítőképlet a II. tételből következően nyilván a

$$\Phi = x - f(x) \tag{33}$$

közelítőképlet. Ha ezt komponáljuk egy k konvergenciafokú közelítőképlettel, a nyert kompozíció konvergenciafoka — az I. tételt alkalmazva — ismét k lesz. Jelöljük a k konvergenciafokú képletet Φ-vel, ennek az $[x-f(x)]$ képlettel való kompozíciója:

$$\Phi - f(\Phi)$$

tehát ismét k-ad fokú, s így a III. tétel szerint:

$$\Phi - f(\Phi) \equiv \Phi \bmod f^k,$$

$$\text{azaz} \quad f(\Phi) \equiv 0 \bmod f^k. \tag{34}$$

Ezzel bebizonyítottuk az

V. TÉTELt: *Ha Φ konvergenciafoka k, akkor az $f(\Phi)$-re fennáll a* (34) *kongruencia.*

E tétel fordítottja is érvényes: ha a (34) fennáll, akkor Φ konvergenciafoka k. A bizonyítás céljából a (8) alatti első felbontásban helyettesítsünk

x helyébe Φ-t:

$$f(x) = (x-\xi)\cdot g(x),$$
$$f(\Phi) = (\Phi-\xi)\cdot g(\Phi),$$

és térjünk át II. típusú kongruenciáról I. típusúra:

$$f(\Phi) = (\Phi-\xi)\cdot g(\Phi) = (x-\Psi-\xi)\cdot g(\Phi) \equiv 0 \bmod (x-\xi)^k.$$

Minthogy az I. típusú kongruenciák értelmezése szerint

$$g(\Phi) \not\equiv 0 \bmod (x-\xi),$$

így
$$x-\Psi-\xi \equiv 0 \bmod (x-\xi)^k,$$

azaz Φ konvergenciafoka k. A (34) ennélfogva szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a Φ közelítőképlet konvergenciafoka k legyen.

4. A tételek felhasználása közelítőképletek konstruálására

A III. tétel szerint valamennyi k konvergenciafokú közelítőképlet kongruens egymással mod f^k, amit úgy fejezünk ki, hogy mod f^k ugyanazon függvényosztály tagjai. E tény figyelembevételével egyetlen k konvergenciafokú képletből tetszőleges sok további k-ad fokú képletet szerkeszthetünk, csupán olyan új Φ^* képleteket kell megadnunk, amelyek az eredetileg meglevő Φ képlettel kongruensek mod f^k:

$$\Phi^* \equiv \Phi \bmod f^k.$$

A megadott k-ad fokúnál magasabb fokú képletek felállításához nagyon jól alkalmazható a kompozíció művelete, de csak akkor, ha a komponálandó képletek konvergencia fokai 1-nél nagyobbak, hisz a komponálással nyert képlet fokszáma $(k_1 k_2)$ csak ekkor lesz nagyobb a $\max(k_1, k_2)$-nél.

A $\Phi_1 \Phi_2$ kompozíció definíciójánál fogva végtelen hatványsorokat tartalmaz. A konvergenciafok megtartásához azonban korántsem szükséges a sorok valamennyi tagját figyelembe vennünk: ha a sorok tagjait az $\Omega_2^{k_1 k_2}$ hatványt tartalmazó tagtól kezdve elhagyjuk, a képlet konvergenciafoka a II. és IV. tételek következtében $k_1 k_2$ marad. Esetenként az is lehetséges, hogy a sorokból történő még több tag elhagyása után sem csökken a konvergencia fok $k_1 k_2$-nél kisebbre, vagy ha csökken, akkor még mindig nagyobb lesz, mint $\max(k_1, k_2)$.

A kompozíciónak ezt a leegyszerűsítését, vagyis azt az eljárást, amikor a (23) soroknak csak bizonyos kezdeti tagjait írjuk be a (22) jobb oldalán az $f(x-\Omega_2)$ és $f^{(i)}(x-\Omega_2)$ függvények helyébe, a kompozíció *redukciójának* nevezzük. A redukció célja az, hogy a konvergenciafok bizonyos szinten tartása mellett a kompozícióból minél egyszerűbb felépítésű képletet nyerhessünk. A komponálás és az ezt követő redukció eredményes alkalmazásához azonban — mint fentebb láttuk — elsőnél magasabb fokban konvergáló képletből kell kiindulnunk. Ilyen képletet a II. és V. tétel felhasználásával találhatunk. Ha Φ konvergenciafoka 2, akkor

$$f(\Phi)=f(x-\Omega_2)\equiv 0 \bmod f^2.$$

Az $f(x-\Omega)$ függvény sorfejtésével:

$$f(x)-f'(x)\cdot\Omega+\Omega^2\cdot\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^\nu\cdot\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\cdot\Omega^{\nu-2}\equiv 0 \bmod f^2.$$

A II. tételt alkalmazva a kongruencia leegyszerűsödik:

$$f(x)-f'(x)\cdot\Omega\equiv 0 \bmod f^2,$$

ahonnan

(35) $$\Omega\equiv\frac{f(x)}{f'(x)} \bmod f^2.$$

$\Omega=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ választással a jólismert NR-formula áll előttünk:

$$\Phi=x-\frac{f}{f'}.$$

A (35) azt fejezi ki, — a III. tétellel összhangban — hogy minden másodfokban konvergáló képlet főrésze kongruens az NR-formula főrészével mod f^2.

A kompozíció-redukciók felhasználását két tétel bizonyításán keresztül mutatjuk be.

VI. TÉTEL: *Ha Φ egy k konvergenciafokú képletet jelöl, akkor a*

(36) $$\Phi^*=\Phi-\frac{f(\Phi)}{f'}$$

képlet konvergenciafoka: $(k+1)$.

BIZONYÍTÁS: Tekintsük a Φ-nek és az NR-formulának (konv. fok $=2$) kompozícióját, melynek konvergenciafoka tehát $2k$:

$$\Phi-\frac{f(\Phi)}{f'(\Phi)}.$$

A nevezőt sorba fejtve

$$f'(\Phi)=f'(x-\Omega)=f'(x)-f''(x)\cdot\Omega+\frac{f'''(x)}{2!}\Omega^2-+\ldots,$$

és a II. tételt felhasználva azt találjuk, hogy

$$f'(\Phi)\equiv f' \bmod f,$$

vagy

$$\frac{1}{f'(\Phi)}\equiv\frac{1}{f'} \bmod f.$$

Az V. tétel szerint

$$f(\Phi) \equiv 0 \bmod f^k,$$

s így, a fentebbivel egybe vetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(\Phi)}{f'(\Phi)} \equiv \frac{f(\Phi)}{f'} \bmod f^{k+1},$$

vagy ami ugyanaz,

$$\Phi - \frac{f(\Phi)}{f'(\Phi)} \equiv \Phi - \frac{f(\Phi)}{f'} \bmod f^{k+1},$$

ahonnan végül a IV. tételt felhasználva következik a tétel állítása.

Ha Φ gyanánt az NR-formulát választjuk, és a (36) képletet iteráljuk:

$$\Phi_2 = \Phi = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - \frac{f(\Phi_k)}{f'},$$

a számítási eljárást egyszerűsített Newton-eljárásnak nevezzük. A VI. tételből következik, hogy az egyszerűsített Newton-eljárás $(k-1)$ lépésben történő alkalmazása egyenértékű egy $(k+1)$ konvergenciafokú képlet egyszeres alkalmazásával.

Az egyszerűsített Newton-eljáráson — feltéve, hogy Φ konvergenciafoka: $k \geq 2$ — javíthatunk, ha a (36) helyett a

$$\Phi^{**} = \Phi - \frac{f(\Phi)}{f' - \frac{ff''}{f'}} \tag{37}$$

képlettel számolunk. Fennáll ugyanis a

VII. TÉTEL: *A* (37) *képlet konvergenciafoka* $(k+2)$, *feltéve, hogy* Φ *konvergenciafoka:* $k \geq 2$.

BIZONYÍTÁS: Az előbbihez hasonlóan járunk el. Minthogy $k \geq 2$, a (35) felhasználásával:

$$\Phi \equiv x - \frac{f}{f'} \bmod f^2,$$

tehát

$$f(\Phi) \equiv f'\left(x - \frac{f}{f'}\right) \equiv f' - f'' \cdot \frac{f}{f'} \bmod f^2,$$

vagy

$$\frac{1}{f'(\Phi)} \equiv \frac{1}{f' - \frac{ff''}{f'}} \bmod f^2,$$

s ebből a (34) felhasználásával végül is:

$$\frac{f(\Phi)}{f'(\Phi)} \equiv \frac{f(\Phi)}{f' - \frac{ff''}{f'}} \mod f^{k+2},$$

amiből állításunk közvetlenül belátható.

Példa a VII. tételre. Válasszuk Φ gyanánt ismét az NR-formulát:

$$\Phi = x - \frac{f}{f'}. \qquad (k = 2).$$

Ekkor

$$\Phi^{**} = x - \frac{f}{f'} - \frac{f\left(x - \frac{f}{f'}\right)}{f' - \frac{ff''}{f'}}$$

A kapott Φ^{**}-ot még tovább redukálhatjuk $\mod f^4$, ha az

$$f\left(x - \frac{f}{f'}\right) = f - f' \cdot \frac{f}{f'} + \frac{f''}{2!} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^2 - \frac{f'''}{3!} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^3 + \frac{f^{(4)}}{4!} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^4 - + \cdots$$

sorban az f^4-et tartalmazó tagtól kezdve valamennyit elhagyjuk:

$$f\left(x - \frac{f}{f'}\right) \equiv \frac{f''}{2!} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^2 - \frac{f'''}{3!}\left(\frac{f}{f'}\right)^3 \mod f^4,$$

azaz

$$\Phi^{**} \equiv x - \frac{f}{f'} - \frac{\frac{1}{2} f'' \left(\frac{f}{f'}\right)^2 - \frac{1}{6} f''' \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^3}{f' - \frac{ff''}{f'}} \mod f^4.$$

Minthogy Φ^{**} konvergenciafoka 4, így a kongruencia jobboldalán levő közelítőképlet:

$$x - \frac{f}{f'} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3f'f'' - ff'''}{f'^2 - ff''} \cdot \left(\frac{f}{f'}\right)^2$$

konvergenciafoka szintén 4.

5. Közelítőképletek sorfejtése f hatványai szerint. Euler-féle közelítőképletek

Megadott Φ közelítőképletnek f pozitív kitevős hatványai szerinti sorfejtésének az alábbi alakban való előállítását nevezzük:

(38) $$\Phi = x - \omega_1 \cdot f - \omega_2 \cdot f^2 - \cdots - \omega_{n-1} \cdot f^{n-1} + R_n,$$

illetőleg

$$\Phi = S_n + R_n,$$

ahol

$$S_n = x - \sum_{\nu=1}^{n-1} \omega_\nu \cdot f^\nu. \tag{39}$$

S_n neve: n-edik részletösszeg, a hozzátartozó maradéktag pedig R_n. A sorfejtés ω_ν együtthatóit az

$$\omega_\nu = \lim_{f\to 0}\left(-\frac{R_\nu}{f^\nu}\right) = \lim_{f\to 0}\frac{S_\nu - \Phi}{f^\nu} \tag{40}$$

határérték határozza meg. Amennyiben $\nu < n$ esetekben minden ω_ν létezik, de

$$\lim_{f\to 0}\left(-\frac{R_n}{f^n}\right) = \lim_{f\to 0}\frac{S_n - \Phi}{f^n}$$

már nem létezik, akkor a sorfejtés itt megakad, s így Φ maximális sorát a (38) szolgáltatja. A II. tétel szerint, ha $k \geq 1$, létezik a

$$\lim_{f\to 0}\frac{\Omega}{f} = \lim_{f\to 0}\left(-\frac{R_1}{b}\right) = \omega_1$$

határérték, tehát a (38) $n=2$ esetre biztosan létezik. A sorfejtés továbbfolytatásának lehetőségéről általános esetben csak akkor tudunk megállapításokat tenni, ha a konvergenciafokot ismerjük és tudjuk, hogy $k \geq 2$. A (35)-ből ugyanis következik, hogy egyrészt

$$\omega_1 = \frac{1}{f'}, \tag{41}$$

másrészt a

$$\lim_{f\to 0}\frac{\Omega - \omega_1 f}{f^2} = \lim_{f\to 0}\left(-\frac{R_2}{f^2}\right)$$

határérték, tehát ω_2 is létezik. Ha $k \geq 3$, akkor a III. és VI. tételt alkalmazva azt találjuk, hogy

$$\Phi \equiv x - \frac{f}{f'} - \frac{f\left(x - \frac{f}{f'}\right)}{f'} \mod f^3, \tag{42}$$

ahonnan ω_2-re az

$$\omega_2 = \lim_{f\to 0}\frac{f\left(x - \frac{f}{f'}\right)}{f^2 \cdot f'} =$$

$$= \lim_{f\to 0}\frac{f - f'\cdot\frac{f}{f'} + \frac{1}{2}f''\cdot\frac{f^2}{f'^2} - \frac{1}{3!}f'''\cdot\frac{f^3}{f'^3} + - \cdots}{f^2 \cdot f'} = \frac{1}{2}\cdot\frac{f''}{f'^3} \tag{43}$$

előállítás, továbbá ω_3 létezése következik, hiszen a (43) miatt (42) helyébe az alábbi kongruencia is írható:

$$\Phi \equiv x - \frac{f}{f'} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''}{f'^3} \cdot f^2 \bmod f^3,$$

amiből viszont látható, hogy a

$$\lim_{f \to 0} \left(-\frac{R_3}{f^3} \right) = \lim_{f \to 0} \frac{x - \frac{f}{f'} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''}{f'^3} \cdot f^2 - \Phi}{f^3}$$

határérték, vagyis ω_3 létezik.

Hasonló módon tovább haladva a III. és VI. tétel ismételt alkalmazásával kiszámíthatjuk tetszőleges adott n értéknél nem kisebb konvergenciafokú Φ közelítőképletek sorfejtésének további tagjait. Módszerünk nem egyéb, mint az

$$\omega_\nu = \lim_{f \to 0} \frac{f(S_\nu)}{f' \cdot f^\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1) \tag{44}$$

és

$$S_{\nu+1} = S_\nu - \omega_\nu \cdot f^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1) \tag{45}$$

képleteknek egyre nagyobb ν értékekre történő ismételt alkalmazása. Az ω_ν $(\nu < n)$ együtthatók ezzel az eljárással valamennyi $k (\geq n)$ konvergenciafokú közelítőképlet esetében egyetemlegesen ugyanazoknak adódnak:

$$\omega_1 = \frac{1}{f'},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''}{f'^3},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3 f''^2 - f' f'''}{f'^5},$$

. . . .

az ω_n-ről viszont csak azt tudjuk, hogy létezik, hiszen a

$$\Phi \equiv x - \omega_1 \cdot f - \omega_2 \cdot f_2 - \cdots - \omega_{\nu-1} \cdot f^{\nu-1} \bmod f^\nu$$

kongruencia még $\nu = n$ esetben is fennáll, tehát a

$$\lim_{f \to 0} \left(-\frac{R_n}{f_n} \right)$$

határérték, vagyis ω_n létezik.

Az n értéknél nem kisebb k konvergenciafokú képletek sorfejtése tehát az első n tagban megegyezik, azaz az S_n részletösszeg valamennyi $k (\geq n)$ konvergenciafokú képletnek közös részét képezi. Ezt a közös részt az irodalomban Euler-közelítésnek nevezik, mert EULER [1] adta meg először e közelítőképleteket néhány alacsonyabb indexre.

Bevezetve az ε_ν jelölést az Euler-közelítésekre, pl.:

$$\varepsilon_2 = x - \frac{f}{f'},$$

$$\varepsilon_3 = x - \frac{f}{f'} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''}{f'^3} \cdot f^2,$$

$$\varepsilon_4 = x - \frac{f}{f'} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''}{f'^3} \cdot f^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{3f''^2 - f'f'''}{f'^5} \cdot f^3,$$

....

megállapíthatjuk, hogy

$$S_\nu = \varepsilon_\nu, \quad \text{ha} \quad \nu \leq n,$$

de általában már

$$S_\nu \neq \varepsilon_\nu, \quad \text{ha} \quad \nu > n.$$

Jelen fejezet megállapításait az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

VIII. TÉTEL: *Valamennyi k konvergenciafokú közelítőképlet a $(k+1)$-edik tagig biztosan sorba fejthető:*

$$\Phi = S_{k+1} + R_{k+1} = x - \sum_{\nu=1}^{k} \omega_\nu \cdot f^\nu + R_{k+1}, \tag{46}$$

ahol az ω_k együttható képletenként változhat, de a többi $\omega_\nu (\nu < k)$ valamennyi k konvergenciafokú képletre egyetemlegesen meghatározott. A közelítőképletek sorának ez a közös része:

$$\varepsilon_k = x - \sum_{\nu=1}^{k-1} \omega_\nu \cdot f^\nu, \tag{47}$$

az Euler-közelítés, ennek konvergenciafoka szintén k.

IRODALOM

[1] L. EULER: *Institutiones Calculi Differentialis* II. Cap. IX. — Opera omnia. Ser. I. vol. X. p. 422—455.

[2] E. BODEWIG: Konvergenztypen und das Verhalten von Approximationen in der Nähe einer mehrfachen Wurzel einer Gleichung. *ZAMM,* **29** (1949) 45.

[3] I. KISS: Die theoretischen Grundlagen der Radizierung mit der Rechenmaschine. *Acta Technica Hung.,* Tom VIII. Fasc. **3—4**, Bp. 1954.

[4] R. LUDWIG: Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungsysteme. *ZAMM,* **34**, (1954) 210 és 404.

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

MATEMATIKUSOK AZ ÁRUPIACON[1]

MINA REES, Hunter College

Ez a cikk az iparban és a közigazgatásban[2] a matematikusok iránt megnyílvánuló szükséglet méreteit és jellegét vizsgálja; kollégiumi és egyetemi életünk néhány olyan körülményével foglalkozom, amely ezen igény kielégítését megnehezíti. Abban a világban, amelyben a technika olyan jelentőségre tett szert, amely maga után vonja az alapos tudományos nevelés és az alapvető kutatások támogatása szükségének általános felismerését, nélkülözhetetlenek az önállóság és a képzettség legkülönbözőbb fokán álló matematikusok: mind az ipari matematikusok, akik a technológiában és az üzleti életben segítik az előrehaladást, mind a kutatók, akik a matematikai kutatások határait tolják előbbre és alkotó bepillantást nyújtanak a matematika épületébe, mind pedig az oktatók, kollégiumaink és iskoláink számára.

Nyilvánvalóan elfogadott álláspont, hogy az elméleti matematikai kutatómunkának megfelelő támogatást és elismerést kell biztosítani. Bármely matematikai nevelési program első követelménye: teljes lehetőséget nyújtani a tehetséges fiataloknak ahhoz, hogy megízleljék a matematikával való foglalkozás örömeit és elcsábítsa őket annak varázsa. De az idők megkövetelik ezen kívül olyan matematikusok csoportos kiképzését is, akik a gazdasági életben fogják boldogulásukat keresni, hogy az üzleti, ipari és közigazgatási életnek megadják azt a matematikai segítséget, amely iránt fokozódó igény jelentkezik. Szerencsére kollégiumaink nagy hallgatói-létszámának további növekedése kedvezővé teszi a jelenlegi időpontot a helyzet felmérésére.

[1] A cikk eredeti címe: Mathematicians in the Market Place. Megjelent a *The American Mathematical Monthly* 1958. májusi (5) számában, 332—343. old.

A cikkben szereplő eredeti lábjegyzeteket néhány szerkesztőségi lábjegyzettel egészítettük ki a magyar olvasó előtt általában ismeretlen fogalmak megvilágítása végett. Ezeket a lábjegyzeteket Szerk. megjelöléssel láttuk el. A szövegben szereplő angol kifejezések magyar fordítását zárójelben közöljük.

[2] Nem törekszem arra, hogy különbséget tegyek ipar és közigazgatás között. Ha a munka természetével foglalkozunk, lehetetlenné teszi ezt a megkülönböztetést egy sor olyan ipari vállalat léte, amelyek minden üzleti tevékenysége közvetve vagy közvetlenül kapcsolatban van a kormányzati szervekkel — ámbár a fizetések és a tulajdonjogi viszonyok tekintetében lényeges eltérések vannak.

Ugyancsak örvendetes, hogy már most is sok matematikus vesz részt ipari kutatómunkában, akik ezt a munkát érdekes és intellektuálisan teljesen kielégítő foglalkozásnak találják.

Több matematikusra van szükség nemcsak az iparban, hanem az egyetemeken és középiskolákban is. Jelenlegi problémáinkat az egyetemek és iskolák oktatószemélyzettel való ellátásában részben az okozza, hogy az ipar a jól képzett matematikusokat a magasabb fizetés és az érdekes munka kettős vonzerejével szívja magához. Világos, hogy több jó matematikust kell képezni és az akadémiai fizetéseket fel kell emelni úgy, hogy azok az ipariakkal versenyképesek legyenek. A második pontot nem szükséges külön kihangsúlyozni; az elsőre szeretnék részletesebben kitérni.

1950 óta az Egyesült Államokban évenként átlagosan valamivel több mint kétszáz matematikus szerzi meg a doktori címet (1950 előtt az átlag még ennél is lényegesen alacsonyabb volt). Ez a szám megdöbbentően kicsi a szükségletek kielégítésére. Parancsoló szükségszerűség, hogy több fiatalt vonzzunk a matematikusi pályára. Azonban sok jóképességű fiatal, akit nem csábít az oktatói hivatás, még mindig azt hiszi, hogy az oktatás az egyetlen foglalkozás, amelyhez a matematikai tanulmányok vezethetnek; és a pedagógusok, akik az egyetlen kapcsolatot képezik a fiatalok és a matematika között, sokszor szintén nincsenek tisztában az ipari matematika természetével. Meg kell ismertetnünk a fiatalokkal azt a sokféle érdekes lehetőséget, amely a matematikus számára nyílik. Elkerülhetetlenül lesznek olyanok, akik matematikai tanulmányaikat az iparban való érvényesülés útjaként választják, de az elméleti matematikai kutatások iránti lelkesedés eltéríti őket erről az útról — ellentétben azokkal, akiket az egyetem a gazdasági élet javára fog elveszíteni. Érdekes megemlíteni, hogy a jelenlegi amerikai matematikai doktorok több mint egyharmada valamely más területről jutott el a matematikához, leggyakrabban a mérnökök, vegyészek és fizikusok közül.

Még egy kiegészítő megjegyzést szeretnék tenni. Feladatunk nem az, hogy más foglalkozási ágaktól hódítsuk el a legtehetségesebb fiatalokat, hanem hogy a matematika pozicióját erősítsük meg. Maguk a matematikusok sem ismerték még fel helyzetük jelentőségét.

Ezen észrevételekre nem az utolsó szputnyik megjelenése adott alkalmat. Ellenkezőleg — a matematikai oktatás, valamint az általános oktatás tekintetében a szputnyikok családja csupán igazolja azt, amit már eddig is tudtunk.

A nemrégiben befejezett *Survey of Research Potential and Training in the Mathematical Sciences*[3] részeként egy nem pedagógusokból álló albizott-

[3] A Survey of Research Potential and Training in the Mathematical Sciences (A kutatások lehetőségeinek és a képzettség színvonalának felmérése a matematikai tudományokban. A következőkben: *Survey.* — Szerk.), University of Chicago, 1957.

ság[4] adatokat gyűjtött és ezeket kiértékelte, ami valamelyes tájékoztatást ad a következő kérdésekről:

A lakosságnak milyen nagy része dolgozik matematikusként az iparban és a közigazgatásban?

Ezek a kutatás terén milyen képességekkel rendelkeznek?

Milyen természetű matematikai tevékenységet fejtenek ki az iparban?

Milyen képzettség és személyi képességek szükségesek a sikeres ipari munkához?

Van-e valami olyan képesség vagy tulajdonság, ami az ipari matematikusokat, mint csoportot, megkülönbözteti az egyetemi matematikusoktól?

Ezen kérdések közül kivánok egyesekről beszámolni és néhány javaslatot tenni, az albizottság jelentésére, valamint ipari matematikai kutatásokban foglalkoztatott személyekkel folytatott megbeszélésekre és az albizottság által rendezett viták anyagára támaszkodva.

Meglepő a nem az egyetemeken foglalkoztatott matematikusok száma. 7—8000 között van azoknak a száma, akiket munkaadójuk matematikusként tart nyilván, ezek közül közel 7000-nek nincs doktorátusa. A doktorátussal rendelkezők közül több mint 900-an dolgoznak matematikusként, a *Survey* azon megállapítása ellenére, hogy legfeljebb 700, de valószínűleg 600 és 700 között van azon amerikai Ph. D.-ok[5] száma, akik eredetileg matematikai képzettséggel rendelkeznek és most nem oktatói tevékenységet folytatnak. A munkaadók által megadott nagyobb szám valószínűleg néhány olyan ellentmondásra hívja fel a figyelmet, amelyek közül a legfontosabbak: (1) az a tény, hogy sok olyan Ph. D., aki eredetileg mérnöki vagy fizikusi képesítést szerzett, most mint matematikus dolgozik, és (2) az a tény, hogy munkaadójuk matematikai statisztikusnak tekinti azokat a személyeket, akik munkájukban nagymértékben használnak fel statisztikát, holott tevékenységük alapját esetleg a pszichológia, a gazdaságtudományok vagy valamely egyéb tudományterület képezi.

Ezzel kapcsolatban megemlítendő az a válasz, amit az egyetemek matematikai intézetei a *Survey* következő kérdésére adtak: „A matematika mely területén vagy területein van leginkább tanszemélyzetre szükség ahhoz, hogy a hiányokat megszüntessék, vagy pedig tevékenységüket kiszélesítsék?" Körülbelül 100 be nem töltött állást jelöltek meg, amelyeknek jóval több mint fele az alkalmazott matematika területeire vonatkozott. Világos, hogy az alkalma-

[4] Tagjai a következők voltak: Hendrik Bode, Bell Telephone Laboratories, Inc.; A. H. Flax, Cornell Aeronautical Laboratory, Inc.; Alston Householder, Oak Ridge National Laboratory; Harlan Mills, General Electric Co.; Mina Rees, Hunter College, elnök.

[5] Ph. D. = Philosophical Doctor. Megegyezik a magyar egyetemi doktori címmel. Itt matematikus doktorokról van szó. — Szerk.

zott matematikában járatos, vagy a matematika alkalmazásai iránt érdeklődő Ph. D.-ok iránt nagyon nagy a kereslet, és egyetemi körülményeink felülvizsgálata kényszerítően szükséges.

A doktori címmel nem rendelkezőknek matematikusként való alkalmazásával kapcsolatos egy olyan jelenség, amelyet az egyetemi munkából mindannyian jól ismerünk. Nagyon is jól ismert jelenség a fiatal A. B. vagy B. S.,[6] aki állást vállal és több fizetést kap, mint professzora; és így nagyon kézenfekvő az a következtetés, hogy a professzori fizetéseket emelni kell. Azonban az is bizonyos, hogy a kollégiumtól és az egyetemektől példa nélkül álló mértékben kér az ipar és a közigazgatás matematika-szakos graduate-eket.[7]

Érdemes egy kis időt fordítani annak leszögezésére, hogy a *Survey* következtetései, amelyek a kereslet méreteire mutatnak rá, nem régi és jólismert tényeket tartalmaznak, habár sokan közülünk hajlamosak lehetnek azt mondani, hogy mi ezt már régen tudtuk. Az 1957-es naptári évben jelent meg Blank és Stigler teljesen autentikus könyve,[8] amely a tudományos dolgozók iránt megnyilvánuló kereslettel, és a rendelkezésre álló tudományos munkaerőkkel foglalkozik, és amely az 1950. évi népszámlálás és a matematikusok alkalmazására vonatkozó rendelkezésre álló legutolsó statisztikai adatok (1951) alapján arról számolt be, hogy a matematikus Ph. D.-ok nem egészen 13 %-ának van a kollégiumokon és egyetemeken kivüli alkalmazása. A szerzők feltételezik, hogy az adatok bizonyos mérvű torzítást tartalmaznak, mivel az adatgyűjtés során a hangsúlyt a szakmai társulati tagságra helyezték. A *Survey* szerint a matematikai doktorok közel 23 %-a nem egyetemi állást tölt be; az újabban végzett doktoroknál ez az arány megközelíti a 30%-ot.

Milyen képességekkel rendelkeznek ezek a Ph. D.-ok mint kutatók? Mindkétoldali elfogultság ellenére (amely nagyon is létezik) nagyon kevés tény látszik amellett szólni, hogy nagy minőségi különbség lenne oktatók és ipari matematikusok között. A Survey-bizottságnak, mint bármely más együttesnek is, nagy nehézségeket okozott elfogadható minőségi mértéket találni. Az eredmények világosan megmutatják, hogy a második világháború óta egyre növekszik azoknak a számaránya, akik nagyon jó under-graduate vizsga-

[6] A. B.—Artium Baccalaureus—Bachelor of Arts.; B. S.—Bachelor of Sciences. Az A. B humanisztikus, a B. S. természettudományos jellegű képzés alapján nyert fokozat. A matematikát hol ide, hol oda számítják. Mindkét fokozat kb. a felszabadulás előtti magyar egyetem tanulmányi rend alapvizsgájának felel meg. — Szerk.

[7] Az angol-szász országokban az egyetemi oktatás két fokozatú: az under-graduate és a graduate school-ban folyik. — Szerk.

[8] Demand and Supply of Scientific Personnel (Tudományos munkaerők kereslete és kínálata), David M. Blank and George J. Stigler, National Bureau of Economic Research (Gazdasági Kutatások Országos Hivatala), 1957.

eredményekkkel nem egyetemi pálya felé fordultak; és hogy a háború utáni doktorátussal rendelkező ipari matematikusok publikációi számának átlaga valamivel magasabb, mint az összes Ph. D.-oké, annak ellenére is, hogy sok eredeti munka az iparban vagy a közigazgatásban a biztonsági vagy konkurrencia okokból történő megszorítások miatt nem kerül nyilvánosságra. A minőségi képességekre vonatkozóan további adat, hogy az utóbbbi két évben két olyan személyt választottak a National Academy of Sciences[9] tagjává, akik az ipari matematika területén szereztek hírnevet.

Ugyanakkor, amikor semmi jel sem utal arra, mintha az ipari munka minősége lényegében különböznék az egyetemen végzett munkáétól, mégis világos, hogy a kutatás indítéka és sokszor jellege is egészen különböző a két területen. Sajnos, az egyetemeken dolgozó matematikusok számára kevés alkalom kínálkozik az ipari matematikusok munkája természetének megértésére és a megértésnek ez a hiánya tükröződik azokban az impressziókban is, amelyeket tőlük diákjaink kapnak.

Nemrégiben sikerült kézhezkapnom annak a konferenciának az anyagát,[10] amelyet 1957. április 8-a és 18-a között tartottak az oxfordi egyetemen, tanárok és ipari matematikusok számára. 18 intézmény, főként ipariak, néhány közigazgatási és egy amerikai (The Office of Naval Research = Haditengerészeti Kutatási Hivatal) támogatta a konferencia munkáját, hogy kapcsolatot teremtsenek az ipar és az előkészítő iskolák tanárai között. A tanárokat meglepte az ipar matematikai feladatainak méretei, bonyolultságuk és változatosságuk. Némely mondanivalómmal kapcsolatosan idézni kívánok John Hammersley (Trinity College, Oxford), a konferencia szervezőjének bevezető megjegyzéseiből:

„Az iskolai tanároknak csupán maroknyi csoportja alkalmazta valaha is a matematikát a gyakorlatban. Matematikai vizsgapéldáknál általában helytelenítik, ha a feladat megoldhatatlan vagy helytelenül megfogalmazott; ezzel szemben a való életben a matematikai problémák majdnem mindig megoldhatatlanok és rosszul megadottak, legalább is az első lépésben. A való életben a matematikus főfeladata, hogy megfogalmazza a problémákat absztrakt matematikai modell felállításával úgy, hogy a modellben szereplő egyenletek elég egyszerűek legyenek a megoldhatóság szempontjából, de ne legyenek annyira durvák sem, hogy a valóságot már ne tükrözzék Az egyenletek megoldása már egyszerűbb technikai kérdés a modellkészítés megragadó, csavaros fogásaihoz képest, amely egyaránt megköveteli a világos, éles józan eszet és a művészi és alkotó képzelet legmagasabbfokú képességeit."

[9] A Magyar Tudományos Akadémia megfelelője, de csak matematikával és természettudományokkal foglalkozik. — Szerk.

[10] Oxford Mathematical Conference (Abbreviated Proceedings) (Oxfordi Matematikai Konferencia (rövidített jegyzőkönyv)).

Tanulságos lehet egy további idézet is, W. E. Scott (English Electric Company) bevezető megjegyzéseiből:

„Néhány mai iparág fokozódó bonyolultsága megnövelte a matematikusok lehetőségeit, hogy beilleszkedjenek a termelésbe és igen értékesekké váljanak az ipar számára. Ennek a tendenciának egyik fő okát a növekvő fejlesztési költségek képezik. Manapság igen költséges egy új, nagyobb terv kivitelezése és fölösleges mértékben az, ha már kezdettől nem helyesen fogtak hozzá. Ezért maximális mennyiségű gondolatot kell egy tervbe befektetni, mielőtt azt kiviteleznék vagy egy kísérletbe, mielőtt végrehajtanák és ez gyakran jelentős elméleti tanulmányokat is foglal magában."

Mit várnak az iparban dolgozó matematikusoktól? Itt elsősorban a matematikai doktorokról beszélek, habár némely észrevételem a fiatal kollégiumi graduate-ekre is vonatkozik.

Először nézzük a személyiség kérdését. Ha egy matematikus nem szereti a másokkal való együttes munkát, ha nem érdekli őt más emberek problémáinak megismerése, ha nem találja érdekesnek megfelelő matematikai modell kialakítását olyan körülmények leírására, amelyek gyakran nincsenek pontosan vagy világosan megadva, és matematikai tudásának felhasználását olyan problémák megoldásához, amelyeket nem ő maga választott ki, akkor valószínűleg nem való az iparba. A *Survey*-nek ez az egyik jelentős eredménye nem volt ugyan meglepetés, azonban a statisztika alátámasztja az erős előzetes impressziót. Az ipari matematikusok kedvezőbben ítélik meg a csoportos kutatást és többet is alkalmazzák, mint az egyetemi emberek.

Az ipari kutatás ilyen kollaboráns jellegének következtében döntő jelentőségű, hogy a matematikus miképpen tud nem matematikusokkal együttműködni. Az iparban a hallgatóság nagyképességű tudósokból és mérnökökből állhat, akik azonban nem rendelkeznek a matematikusok sajátos nyelvével és gondolkodásmódjával. A közigazgatásban a partner könnyen lehet üzletember vagy katonatiszt. Mindkét esetben a matematikus munkájának eredményessége nagymértékben függ attól, hogy mennyire képes a másik fél nyelvét megérteni és annak egyszerű és érthető formában tudománya lehetőségeit, valamint korlátait megmutatni. Így a matematikusnak a nem akadémikus környezetben is rendelkeznie kell bizonyos fokig az „oktatói" érdeklődéssel és képességekkel, amelyre akadémiai kollegájának is szüksége van. Hogy meg tudja érteni a hozzá hozott problémákat, meg kell ismerkednie a különböző tudományágak és a mérnöki hivatás alapelveivel; hogy saját elképzeléseit kellő súllyal tudja képviselni, tapasztalatra van szüksége abban, hogyan kell matematikai gondolatokat nem-matematikusoknak előadni. A *Survey*-ből idézve: „. . . Az alkalmazott matematikusnak jelentős tárgyi tudással kell rendelkeznie más tudományos és technikai területeken. Azonban a részletes tárgyi tudásnál még fontosabb, hogy elég kiterjedten megismerkedjék egy sor terület „puszta” logikai struktúrájával. Nyilvánvalóan ez az a fajta alap, amelyen az absztrakt matematikai modell felépítését és az axiomatizálást általában a legnagyobb készséggel és megbízhatósággal lehet speciális új helyzetekre alkalmazni... Ajánlatos lenne, ha azon graduate matematikus-hallgatók, akik nem akadémikus hivatásra készülnek, az egyetemen gyakorlatot szereznének abban, hogyan kell elképzeléseiket más szakos kollégáiknak előadni. Ennek a gyakorlatnak legalább a mérnöki és természettudományi szakokra kellene kiterjednie, de kívánatos a hallgatóságba bevonni társadalomtudományi szakosokat is.“

Az oxfordi konferencia beszámolója tartalmazza D. G. Owen, British Iron and Steel Federation, következő megállapítását:

„Szükséges, hogy matematikusainknak gyakorlati érzékük és megfelelő egyéniségük legyen. Egy probléma megfogalmazása és megoldása eltarthat három hónapig, de a munka nem tekinthető befejezettnek addig, amíg az eredményeket nem „adták el” a vállalat vezetőségének (vagyis fogadtatták el a vállalat vezetőségével. — Szerk.) és nem alkalmazták azokat a gyakorlatban. Nagyképességű kutatókra van szükség, akiknek képeseknek és hajlandóknak kell lenniök arra, hogy a laikusokkal közérthető nyelven beszéljenek.”

Milyen speciális matematikai képzettség kell az ipari munkához? Meglepő a matematika modern alkalmazásainál, hogy olyan ágai is, amelyeket még egy évtizeddel ezelőtt is nagymértékben absztraktaknak hittek, nagy fokban alkalmazhatóknak bizonyultak a jelenlegi körülmények között. Nyilvánvaló jelentősége van az analízis számos ágának — a differenciálegyenleteket is, különösen a nem-lineárisokat beleértve — egyrészt a nagysebességű repülőgépek hajtóerő- és aerodinamikai új problémáival kapcsolatban, másrészt a nukleáris fegyverekkel kapcsolatos kutatásokból és egyéb robbanási jelenségekből adódó problémák, a radarkészülékkel és más elektronikus jelenségekkel összefüggő problémák megoldásában. Szeretnék még egyszer idézni az oxfordi konferencia beszámolójából. P. L. Taylor, Metropolitan-Vickers Electrical Co. Ltd., mondja “The Mathematics of Linear Electric Circuit Theory” (A lineáris elektromos áramkörök elméletének matematikája) c. dolgozatában: „Mivel egy áramkör tulajdonságai lényegében függetlenek az érintkező drótok geometriai elrendezésétől — melyek tetszés szerint elrendezhetők, feltéve, hogy egy csatlakozást sem szakítunk meg és újakat sem létesítünk — nyilvánvaló ezzel kapcsolatban a lineáris gráfok topológiai tulajdonságainak érdekessége.”

És később:

„Egy áramkört leíró egyenletrendszer kezelésének ideális eszköze a mátrix-algebra”.

A Bool-algebrának a számológépek tervezésében, a csoportelméletnek a távközlésben, a számelméletnek a numerikus analízisben, a nem-kommutatív algebrának és a csoportelméletnek a nukleáris fizikában való alkalmazása azt a teljesen helytálló benyomást kelti, hogy a matematika majdnem minden ága alkalmazható, és hogy sokoldalúan képzett matematikusokra van szükség.

Azért választottam angol beszámolóból származó idézeteket, hogy kihangsúlyozzam a helyzet hasonlóságát Angliában és az Egyesült Államokban. Nálunk is azt láthatjuk, az ipari problémákból mintaképpen néhányat kiragadva, hogy a megoldások keresésében a matematikai diszciplinák széles skálája kerül felhasználásra. Nemrégiben a Bell Telephone Laboratories-ban tett látogatásom alkalmával elmondtak nekem több problémát, amellyel a matematikai kutató csoport néhány tagja foglalkozik. Ezek egyike az American Telephone and Telegraph Company pénzügyi osztályától származott és a magán távírati szolgálat költségeire vonatkozott. A Bell Laboratories-ban nyert matematikai eredmény egy új tételt eredményezett a fák elméletében.[11] Érdekes módon, úgy látszik, hogy körülbelül egyidejűleg, Amszterdamban, a Mathematisch Centrumban, ugyanerre az eredményre jutottak egy számológép tervezése közben, amidőn a régi számológép segítségével meg akarták határozni, hogy milyen elrendezésben lesz minimális a szükséges vezeték hossza. A Telephone Company problémájában a Federal Communications Commission (Szövetségi Közlekedési Bizottság) azt kívánja meg, hogy a díjak alapja a különböző helyek között létesíthető legrövidebb hálózat legyen; a számológép-feladatnál pedig a forrasztó csúcsok egy csoportját összekötő vezetékek hosszát kell minimalizálni. Az irodalomban előzőleg ismert tételek megkövetelik, hogy bármely két pont között a minimális távolság ismert legyen; ez a követelmény a gépi számolásnál nehezen teljesíthető. Az új eredmény olyan szisztematikus eljárást ad, amely könnyen programozható. Ez a példa illusztrálja azt az új követelményt, amellyel a matematika ipari alkalmazásainál gyakran találkozunk — olyan új tételek kidolgozását kívánják, amelyek lehetővé teszik az elektronikus számológépek sebességének kihasználását. Az ipari alkalmazásoknál valamely módszer számolásra való alkalmassága még fontosabb, mint a bizonyítás eleganciája az elméleti matematikában.

A Bell Laboratories egy másik problémája zaj mellett történő távközlésre vonatkozik, és küldött információtöredékek kvantálását tartalmazza. Ezt a problémát a szokásos formában lefordítva, egy egzisztencia-bizonyításról és a Shannon-féle aszimptotikus tételekről van szó. Habár a problémát még nem oldották meg, valamelyes előrehaladás már történt, a csoportelmélet felhasználásával.

[11] Fáknak nevezik az olyan speciális gráfokat, amelyek kört nem tartalmaznak. — Szerk.

Az operáció-kutatások[12] jelenlegi nagy elterjedése az iparban újfajta igényt teremtett a matematikusokkal szemben. Ez olyan fajtája a nem-akadémiai munkának, amelyhez kisebb mértékben szükséges egyéni technika, mint az alkalmazott matematika hagyományos területeihez. Az ilyen jellegű tevékenység nagyméretű kibővítése folyamatban van, ami a matematikusok részére lehetőségeik jelentős megnövekedését jelenti. Amikor a mult évben a *Career* c. folyóirat kiadója arra kért, hogy javasoljak nekik olyan matematikusokat, akik beszámolókat írnának az ipari matematikáról középiskolai diákok számára, akkor egy sor olyan személy nevét adtam meg, akikről úgy gondoltam, hogy széles skálájú tapasztalataikat fogják ismertetni és nem kizárólag a számolást kihangsúlyozni. Mekkora volt a megdöbbenésem, amikor a folyóirat megjelenésekor abban lényegében egyebet sem találtam, mint operáció-kutatást. Még a távközlési és repülőgépipar — a klasszikus alkalmazott matematika régi támogatói — is most az operáció-kutatást hangsúlyozzák.

Nem tettem még említést olyan rokonterületekről, mint a statisztika és a numerikus számolás. A statisztika felhasználása terjed mind az akadémiai kutatásban, mind az ipari munkában, és továbbra is növekszik a szükséglet olyan statisztikusok iránt, akik önnálló munkát tudnak folytatni. Angliában már az iskolákban súlyt helyeznek a bővebb statisztikai gyakorlatokra; ezzel párhuzamosan a mi Commission on Mathematics-ünk néhány javaslatot tett. Egy vállalat, az Imperial Industries Ltd., beszámol arról, hogy ők olymódon remélnek statisztikus-hiányunkon segíteni, hogy „az egyetemekről toboroznak matematikusokat közvetlenül a graduation után, majd visszaküldik őket a legalkalmasabb egyetemi szakokra, a matematikai statisztikában való postgraduate gyakorlat megszerzésére",[13] miután előzőleg rövid időt munkában töltöttek és így betekintést szereztek az ipar problémáinak jellegébe.

A számolás területén a rendelkezésre álló nagy, gyors gépek megváltoztatták az ipari kutatás arculatát és rákényszerülünk majd arra, hogy ezeknek a gépeknek gyakorlott felhasználóit képezzük ki. Mint a telefontársaság vonalproblémája mutatja, sok ipari probléma egyik korlátozó feltétele abból áll, hogy a javasolt fogalmazás vagy megoldás milyen könnyen vezet eredményre automatikus számolás útján. Ezenfelül a nagyméretű, gyors számológépek alkalmazhatósága megsokszorozta azon problémák számát, amelyekre az ipar megoldást keres és hatásos eszközt adott az ipar kezébe némely olyan probléma megközelítésére, amelyre előzőleg analitikus eljárá-

[12] Operations research = operáció-kutatás. Új tudomány, amely arra tesz kísérletet, hogy valamely gazdasági, műszaki, politikai, katonai stb. jellegű döntés megtétele előtt a folyamat sokoldalú elemzése révén, amelyben részt vesznek matematikusok, fizikusok, mérnökök, közgazdászok, pszihológusok stb., a sikert, a kívánt eredményt a legmesszebbmenően és a legkisebb költséggel biztosítsák. — Szerk.

[13] L. mint 10., 80. old.

sokat nem is kerestek. Ennek illusztrálására szolgálhat az egyik olyan probléma, amelyet nemrégiben vezettek vissza numerikus számításra Westinghouse-éknál.[14]

Egy ohiói alkatrészüzemben a probléma nagyon egyszerűen vetődött fel: „Adva van egy termék, amelyet futószalagon gyártanak. Mi a futószalag legjobb elrendezési módja, ha az emberi munkát minimalizálni akarjuk?" Vannak korlátozó feltételek, mint pl. olyan területek, ahol bizonyos műveleteket el kell végezni, vagy némely művelettípus felcserélhetősége, és mások fel nem cserélhetősége. Régebben az ilyen futószalagokat mérnökök állították fel, annak bizonyossága nélkül, hogy a megtervezett megoldás optimális. A matematikus, akit a probléma megoldásába bevontak, a ponthalmazok elméletét használta fel, hogy egy optimális (nem egyetlen) megoldást találjon; a továbbiakban kimutatta, hogy a matematikai megoldás egy már működő futószalagon a szükséges munkások számát 25-ről 22-re szállítaná le — ez olyan eredmény, amely az igazgatóságot alapvetően érdekli. A megoldás digitális számológépre való programozása az eredményt felhasználhatóvá teszi a társaság különböző részlegeiben, amelyek speciális problémáikra a digitális számológép nyújtotta sebességgel kaphatnak választ.

Több ízben hivatkoztam az angliai helyzetre. Bár ez sok tekintetben hasonló a miénkhez, mégsem azonos vele. A britek, ugyanúgy mint az oroszok, kiemelkednek az alkalmazott matematika területén kutatómunkájuk magas színvonalával. Valószínűleg nem véletlen, hogy ez a kimagasló színvonal olyan országban található meg, ahol a matematikusok hagyományos képzéséhez hozzátartozik jelentős formális munka az alkalmazások területén. Littlewood élvezetes tanulmányában „A Mathematical Education"[15] (Matematikai Nevelés) minden kommentár nélkül mondja el, hogy tanulmányaiba, melyeket Cambridge-ben 1903-ban kezdett meg, beletartozott a dinamika, a hidrodinamika, a harmonikus gömbfüggvények elmélete, az elektromosságtan és a mechanika alapjai. Ezt a hagyományt folytatják. Ugyanezeket a tárgyakat a legtöbb egyetem tananyagában meg lehet most is találni. Például a londoni egyetem egyik kollégiumában az első évben 4, a másodikban 6 óra alkalmazott matematikai előadás van. A harmadik évben választhat a hallgató, hogy elméleti matematikában vagy pedig alkalmazott matematikában óhajtja-e magát specializálni, avagy mindkettőt folytatja.

Kérdéses, hogy az amerikai egyetemek is támogatni fogják-e az alkalmazott matematika formai, tantárgyként való oktatását, és vitatható, hogy

[14] M. Ostrofsky igazgató, Westinghouse Electric Corp. Matematikai Osztály által adott eiiás alapján.

[15] J. E. Littlewood, A Mathematician's Miscellany (Egy matematikus vegyes irásai), London, 1953.

helyes lenne-e ezt tenniök. Azonban a diákoknak lehetőséget kellene nyújtani, hogy valamennyire megismerkedjenek az ipari matematika jellegével. Hendrik Bode a Bell Telephone Laboratories-ban szerzett tapasztalatai alapján leírta nekem, hogy milyen gyakorlat szükséges az eredményes ipari matematikusi munkássághoz.[16] Az ő megítélése szerint az alkalmazott matematikusnak el kell tölteni egy — vagy esetleg több — internship-et.[17] Például az automatikus számológépek jelenlegi korszakában nyilvánvaló, hogy különösen fontos a numerikus módszerek, az alapvető approximációs eljárások és egy probléma numerikus megközelítése különböző módjainak alapos megismerése. Az ilyen jellegű készséget legjobban egy számolóközpontban végzett gyakorlat útján lehet elsajátítani. A számolókészségnek nem kell nagynak lennie — valójában határozottan előnyös lehet, ha valakinek saját találékonyságát kell igénybevennie, hogy legyőzze a mechanikus számolásban megnyilatkozó hiányosságokat. Azonban szinte alapvető fontosságú az első kézből való megismerkedés a számokkal, olyan módon, ahogyan azt csak bizonyos mennyiségű laboratóriumi munka által lehet elsajátítani.

Másik jelentős internship-et lehetne eltölteni egy statisztikai központban. Ezáltal az alkalmazott-matematikus-jelölt valószínűleg jobban érzékelné a későbbiekben azon ténymegállapítások megbízhatóságát, amelyekkel dolgoznia kell, valamint egy bizonyos elem egy logikai keretben, adott helyzetben való szignifikáns vagy nem szignifikáns voltának valószínűségét.

Egy további hasznothajtó — még ha rövid — internship-et lehetne eltölteni valamely ténylegesen működő ipari, vagy hasonló jellegű matematikai csoport résztvevőjeként. Ez különösen hasznos lenne, ha még a formális tanulmányi idő bevégzése előtt történnék. Természetesen lehetséges, hogy ezen internship követelmények legtöbbje, vagy esetleg mind, egyetlen helyen megtalálható.

A fiatal alkalmazott matematikusnak, ha lehetséges, módot kellene találni arra is, hogy még egyetemi tanulmányai alatt bizonyos fokig részt vegyen más tudományágak szemináriumain vagy kutatómunkájában.

Habár kevés olyan egyetemi matematikai intézetünk van, amely az ilyen jellegű képzés céljaira ideálisan megfelelne, mégis az intézet egészének rokonszenvező álláspontja sokat jelent a megfelelő tanulmányok lehetővé tételében. Különösen nagy egyetemeken, ahol mindig széleskörű és sokrétű kutatómunka folyik, találhat meg a fiatal alkalmazott-matematikus majdnem mindent, amire szüksége van, ha ésszerű támogatást és buzdítást kap. Alapvetően szükséges a baráti légkör az egyetemen. A kémiai intézetek évtizedek óta alap-

[16] A következő öt bekezdést lényegében Hendrik Bode egy leveléből vettem át.
[17] Internship = gyakornokság. — Szerk.

vető feladatuk részeként fogadták el az ipari kémikusok képzését. Ujabban, a második világháború óta, a fizikusok hasonló szerepet vállaltak. Jelenleg vegyészdoktoraink 3/4 része, fizikusaink három ötöde dolgozik az iparban. A matematika most kerül hasonló helyzetbe, mint a fizika és a kémia. Vannak ugyan olyan egyetemi tanárok, akik úgy tartják, hogy az a jó matematika, ami nem használható matematika, mégis érdekes, hogy a *Survey* statisztikái szerint Harvard, Princeton és Yale Ph. D.-ai is az átlagnak megfelelő arányban választanak nem-akadémiai hívatást. Azonban az is érdekes, hogy bár növekedőben van azoknak a doktoroknak a száma, akik az iparba mennek dolgozni, kevesen voltak ezek közül tisztában az e területen található lehetőségekkel, amikor mint graduate-ek munkájukat megkezdték. Jobb tájékoztatás szükséges az iskolákban, a kollégiumokban és az egyetemeken arról, hogy milyen természetű a matematikusnak az iparban végzett munkája.

Ezen a téren van bizonyos előrehaladás. Középiskolai fokon a Committee on Applications of Mathematics of the National Research Council (Az Országos Kutatási Tanács Alkalmazott Matematikai Bizottsága), a National Council of Teachers of Mathematics-szel (A Matematika Oktatóinak Országos Tanácsa) együttműködve, egy könyvecskét készül kiadni, amely olyan eredményes munkát végző fiatal matematikusok életrajzát közli, akik közül legtöbben az iparban dolgoznak. Ez a munka egy éven belül kerülne befejezésre, és igen széles körben fogják szétosztani az ország középiskoláiban. Kollégiumi és egyetemi szinten is némi előrehaladásra mutatnak a *Survey* egyik kérdésére adott válaszok. Azok közül az egyetemi és kollégiumi professzorok közül, akik válaszoltak, jelentős számú, az ipar vagy a közigazgatás képviselőivel való megbeszéléseket a négy legfontosabb matematikai tevékenysége közé sorolta. Ezen a módon az ipari matematikáról valamelyes tájékoztatás szivárog az egyetemekre. De ennél többet kell tenni. Az egyetemekről az ipar felé menő tájékoztatást jelentős részében számos professzor ipari laboratóriumokban tett nyári látogatása jelenti. Ezeknek a látogatásoknak sokszor irányító jellege van. Az egyetemi látogatók modern vagy bonyolult módszereket adnak át azoknak a fiatal matematikusoknak, akik széleskörű gyakorlat nélkül kerültek az iparba. Sokszor azonban a professzor, idősebb ipari kollégákkal együttműködve, gazdag tapasztalatokra tesz szert. Az akadémiai emberek bővebb szakmai tapasztalatai és az ipar által az egyetemek számára nyújtható nagyobb terjedelmű kölcsönök mindkét fél részére hasznosak lennének. Meg kellene vizsgálni az egyetemi hallgatók iparvállalatoknál tett látogatásainak és az ipari matematikusok kollégiumokban és egyetemi évfolyamokon tett látogatásainak általánosabbá tételét. Egyes iparágakban már létrehoztak kiterjedt ösztöndíj-programokat, amelyek kiválasztott alkalmazottaiknak lehetőséget nyújtanak ahhoz, hogy a vállalat költségén haladott graduate-munkát folytassanak szomszédos egyetemeken; és vannak vállalatok, amelyek előadókat adnak alkalmazott tárgyakban a közeli egyetemeknek. Egyes vállalatoknál vállalaton belüli kiterjedt graduate képző program is van. A Survey-albizottság ajánlotta más utak keresését is, az egyetemek és az ipar közötti jobb együttműködés létrehozása érdekében. Meg kellene vizsgálni nyári intézmények létrehozásának lehetőségét is, akadémiai és nem-akadémiai matematikusok részvételével, érdekes alkalmazási területeken. Remélem, hogy ez a probléma az első pontok egyike lesz az újonnan létesített Conference Organization of the Mathematical Sciences (Matematikai Tudományok Konferencia Szervezete) napirendjén. A Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) (Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság) által kifejthető tevékenységre vonatkozóan két javaslatot teszek. Az egyiket a közgazdászok sugalmazták. A Foundation for Economic Education (Közgazdasági Oktatási Alapítvány), amely már tizennégy éve működik, nyári ösztöndíjakat ad pusztán a kiadások fedezése céljából és ezzel lehetővé teszi professzorok számára, hogy kb. 6 hetes időtartamú látogatást tegyenek az akcióban résztvevő iparvállalatok valamelyikénél és megismerkedjenek a vállalat vezetésének szempontjaival. A mult évben 80 kollégium és egyetem, valamint 56 vállalat vett ebben részt. Jelenleg egy repülőgép-gyár is van, amely hasonló látogatásokat rendez egyetemi matematikusoknál. Ehhez hasonló szervezett erőfeszítés kölcsönösen hasznosnak bizonyulhatna. Los Angeles körzetében hasonló tevékenységet folytattak középiskolai tanárok körében.

Valószínűleg könnyebben lehetne megvalósítani vendégelőadói[18] tanfolyamot, hasonlót ahhoz, amelyet a Mathematical Association (Matematikai Társulat) rendezett. Ha a SIAM gondoskodna kiváló ipari előadókról, akik a kollégiumokat és az egyetemeket meglátogatnák, egy, az Association által használthoz hasonlatos, de attól szükség szerint eltérő tervezet alapján, úgy valószínűleg fontos új tényezőt lehetne bevinni sok egyetem légkörébe. Az ipari matematikusok elégedetlensége a matematikus társadalom publikációs politikájával, egyike annak a néhány, az akadémiai és nem-akadémiai matematikusok között fellelhető nézeteltérésnek, amelyet a *Survey* feltárt. Ez különösen fontos, mivel az American Mathematical Society (Amerikai Matematikai Társaság) tagjainak 25—30%-a az egyetemeken kívül dolgozik. Különböző javaslatokat tettek ezen helyzet orvoslására; örömmel jegyezzük meg, hogy a Society nemrégiben a Journal of SIAM-ot is felvette szubvencionált közleményei közé, abban a reményben, hogy ez a folyóirat további kívánatos publikációs lehetőséget fog nyújtani a nem-akadémiai matematikusok kutatási eredményei egy részének.

[18] Vendégelőadó: más egyetemek, vagy intézmények hosszabb vagy rövidebb időkre meghívott előadói. — Szerk.

Fontos, hogy a matematikus-társadalom minden tagja maximálisan igyekezzék az elméleti és alkalmazott-matematikusok között fennálló surlódásokat megszüntetni. Ahogyan F. J. Weyl az alkalmazott matematika Egyesült Államokbeli helyzetéről szóló kiváló beszámolójában mondja:[19]

„A matematikai oktatás és kutatás most ugyanolyan közvetlen jelentőségűvé vált a közjó szempontjából, mint a kísérleti tudományok oktatása és kutatásai. Nem annyira közvetve, mint a múltban, más tudományágaknak fejlődésük során tett szolgálatok által, hanem fokozódó mértékben közvetlenül járul hozzá a napi ügyekhez, összhangban más tudományágakkal.... Ez nem csupán kiszélesedett tudományos látókört és értékes új lehetőségeket jelent a matematika számára, hanem fokozott társadalmi felelősséget is, fontossá téve, hogy az amerikai reprezentatív matematikai szervezetekben felismerjék a matematika alkalmazási lehetőségeit, megismerjék azokat, akik ezzel foglalkoznak és törődjenek is velük."

A matematika egységes. Minden részének fejlődése lényeges a többi számára is. Az egyetemi fizetések növekednek az ipari matematikusok iránti fokozódó kereslettel; és az elméleti matematikai kutatások anyagi támogatása kísérője az alkalmazott kutatások támogatásának. Bölcsesség és előrelátás követeli, hogy minden matematikus erőit egyesítve, több hallgatót vonzzunk a matematikai tanulmányok körébe, teljes képet adva nekik a matematika szerepéről mai civilizációnkban, a kutatásban, az oktatásban és az ipari alkalmazásokban. Meg kell találnunk annak a módját, hogyan vessünk véget az egyetemi matematikusok között annak a magatartásnak, amely az ipari matematikusokat másodrendű polgároknak tekinti; el kell ismerni őket annak, amik: erőforrás a matematika számára, ok az elméleti matematika tiszteletére sokak szemében, akik azt nem értik meg, és néha élesztő hatás érdekes új matematikai kutatások irányának meghatározásában.

Fordította *Révész Pál* tanársegéd
az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézete

[19] Survey of Training and Research in Applied Mathematics in the United States conducted by the National Research Council (A képzés és a kutatás felmérése az alkalmazott matematikában az Egyesült Államokban, az Országos Kutatási Tanács irányításával készített tanulmány), F. J. Weyl, Principal Investigator (Vizsgálat vezető). November, 1954. Published by the Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1956.

Technikai szerkesztő: Alpár László

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1958. IX. 10. — Terjedelem: 6,5 (A/5) ív

Szegedi Nyomda Vállalat 58-3418 — Felelős vezető: Vincze György

Ára: 15,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL