A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:

RÉNYI ALFRÉD

III. KÖTET 1—4. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1953.

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: Mestyán János.

Műszaki felelős: Tóth Ferenc.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 531377

Felelős vezető: Vincze György

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A III. OSZTÁLY HÍREI

2. SZÁM

A BOLYAI JÁNOS ÜNNEPI ÜLÉSSZAK ANYAGA

KÖNYVISMERTETÉSEK

3. SZÁM

AZ 1953. ÉVI NAGYGYŰLÉS ANYAGA

4. SZÁM

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

III. KÖTET 1. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

BUDAPEST, 1953

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

III. kötet 1. szám

Szerkesztőség: Budapest V, Nádor-utca 12.
Kiadóhivatal: Budapest V, Alkotmány-utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának előadóülésein bemutatott dolgozatokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket, referátumokat stb. tartalmaznak. Négy füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V, Nádor-utca 12.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 20 forint, külföldi címre 30 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V, Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI., Sztálin-út 2. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

A CIKLIKUS CSOPORTOK FAKTORIZÁCIÓJÁNAK PROBLÉMÁJÁHOZ

HAJÓS GYÖRGY lev. tag

Előadta az 1950. február 16-án tartott felolvasó ülésen

1. Legyen C egy Abel-féle csoport, A és B e csoport elemeinek egy-egy részhalmaza (komplexusa). Azt mondjuk, hogy C az A és B részhalmaz szorzata:

$$C = AB,$$

ha bármely $c \in C$ elemhez található $a \in A$ és $b \in B$ úgy, hogy $c = ab$, és e feltételt kielégítő a és b elemek csak egyféleképpen határozhatók meg. A $C = AB$ előállítás a C csoportnak egy *szorzatelőállítása (faktorizációja)*. Nem könnyű egy C csoport valamennyi szorzatelőállítását megadni. Ez e csoport *faktorizációjának problémája*[1].

Ha A alcsoportja C-nek, akkor A mellékosztályainak egy-egy eleméből alakított B részhalmaz AB szorzatelőállítást szolgáltat. Tehát csak azok a szorzatelőállítások érdekesek, amelyeknek egyik tényezője sem alcsoport. Ilyen szorzatelőállítások is vannak, amit a következő példa mutat: Legyen C az $a^8 = 1$ által definiált ciklikus csoport, $A = (1, a^2)$, $B = (1, a, a^4, a^5)$; utóbbiak egyike sem alcsoport és $C = AB$.

Azt mondjuk, hogy a C csoportnak A részhalmaza *periodikus*, ha van C-nek olyan, egységelemétől különböző a eleme, melyre $aA = A$. Ebben az esetben A előállítható az a által generált ciklikus alcsoport s egy részhalmaz szorzataként. Egy részhalmaz tehát akkor és csak akkor periodikus, ha van olyan szorzatelőállítása, melynek egyik tényezője alcsoport. Minden alcsoport periodikus. Fentebbi példánkban B periodikus, mert $a^4 B = B$.

Felmerül a kérdés, hogy vajjon egy Abel-féle csoport szorzatelőállításában mindig periodikus-e a két tényező valamelyike. Ez általában nem következik be, amit *Szele T.* következő példája mutat: Legyen C végtelen ciklikus csoport s generátoreleme a; az $(1, a^2), (1, a^8), (1, a^{32}), \ldots$ részhalmazok szorzatát A-val, az $(1, a^{-1}), (1, a^{-4}), (1, a^{-16}), \ldots$ részhalmazok szorzatát B-vel jelölve, $C = AB$ szorzatelőállításhoz jutunk, melynek egyik tényezője sem periodikus.

Nehezebb véges Abel-féle csoportra találni nem-periodikus tényezőkre való felbontást. Sőt még a véges ciklikus csoportokra sem könnyű eldönteni, hogy vajjon van-e ilyen szorzatelőállításunk[2]. Ha a csoport rendszáma prímszámhatvány, akkor nincs ily előállítás[3]. *Rédei L.* kimutatta[4], hogy akkor sincs, ha a ciklikus csoport rendszáma két vagy három prímszám szorzata. E dolgozat

1 Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei. III. o.

célja annak a kimutatása, hogy vannak véges ciklikus csoportok, amelyek előállíthatók nem-periodikus részhalmazaik szorzataként. Pontosabban a következő tételt bizonyítjuk:

Ha egy véges ciklikus csoport rendszáma felírható három olyan, egymáshoz relatív prím egészszám szorzataként, amelyek között van legalább két összetett-szám, akkor e csoport előállítható két nem-periodikus részhalmazának szorzataként.

Nyílt kérdés, hogy vajjon e tétel állítása más ciklikus csoportokra is teljesül-e. Eldöntetlen a kérdés, ha a rendszám $pq^{\beta}, p^{\alpha}q^{\beta}, pqr^{\gamma}$, $pqrs$ alakú, ahol p, q, r, s prímszámok és α, β, γ pozitív egészszámok.

2. Tételünk bizonyításához geometriai meggondolás vezetett. Ezt az utat ismertetjük. Ha φ geometriai alakzatoknak és F tranzlációknak (esetleg egyetlen tranzlációból álló halmaza, akkor $F\varphi$ azoknak az alakzatoknak egyesített halmazát fogja jelölni, amelyek A tranzlációval keletkeznek az α alakzatból, ahol $\alpha \in \varphi$ és $A \in F$. Ha $A\alpha = \alpha'$, akkor az $A = (\alpha \rightarrow \alpha')$ jelölést is használjuk.

Tekintsük az n-dimenziós euklideszi teret s azt n darab ekvidisztans, párhuzamos hipersíksorral kongruens parallelotopokra bontjuk. Ezeknek a parallelotopoknak egyikét π-vel s e parallelotopok összességét (π)-vel jelöljük. P-vel jelöljük azoknak a T tranzlációknak csoportját, amelyekre $T(\pi) = (\pi)$.

Olyan ϱ parallelotopot választunk, mely tartalmazza π-t és (π) parallelotopjaiból épül fel, azaz (π) egyes parallelotopjait vagy egészben tartalmazza, vagy pedig nincs közös belső pontjuk. A teret egyszeresen befedjük olyan ϱ-val kongruens és párhuzamos helyzetű parallelotopokkal, melyeknek mindegyike (π) parallelotopjaiból épül fel. E parallelotopok összességét (ϱ)-val jelöljük. (π)-nek minden egyes elemét (ϱ)-nak egy és csak egy eleme tartalmazza. Jelölje R azoknak a T tranzlációknak csoportját, amelyekre $R(\varrho) = (\varrho)$.

P és R Abel-féle csoportok. R alcsoportja P-nek. A P/R faktorcsoportot C-vel jelöljük. Ha a (ϱ) parallelotop-halmazt megfelelően választjuk, akkor C lehet véges csoport és lehet ciklikus is. A $C = P/R$ csoport elemeinek, azaz R mellékosztályainak két részhalmazát értelmezzük.

Tekintjük először P azon T elemeit, amelyekre $T\pi \subset \varrho$. Ezeknek a T tranzlációknak mindegyike R-nek egy-egy mellékosztályához tartozik* s ezek összeségét A-val jelöljük. Erre tehát $A\pi \subset R\varrho$.

Tekintjük másodszor azokat a T tranzlációkat, amelyekre $T\varrho \in (\varrho)$. E tranzlációk összessége R-nek mellékosztályaiból áll. Ha ugyanis a T_1 és T_2 tranzláció R-nek ugyanahhoz a mellékosztályához tartozik, akkor $T_1 T_2^{-1} \in R$ s így $T_2\varrho \in (\varrho)$ esetén

$$T_1 \varrho = (T_1 T_2^{-1})(T_2 \varrho) \in R(\varrho) = (\varrho),$$

* Mindannyian más-más mellékosztályhoz tartoznak, amit könnyű igazolni, de ezt a tényt nem használjuk fel.

azaz egy mellékosztálynak egy elemével együtt valamennyi eleme a kiszemelt tranzlációk közé tartozik. R ama mellékosztályainak összességét, amelyekhez így jutottunk, B-vel jelöljük.

Bizonyítjuk, hogy $C = AB$. Legyen T egy a $c \in C$ mellékosztályhoz tartozó tranzláció, legyen továbbá $T\pi = \pi'$ és $\pi' \subset \varrho' \in (\varrho)$. Legyen $\pi^* \in (\pi)$ az a parallelotop, melyre $(\varrho \to \varrho')\pi^* = \pi'$, melyre tehát $\pi^* \subset \varrho$. Ha $U = (\pi \to \pi^*)$ és $V = (\varrho \to \varrho')$, akkor $T = UV$ és $U \in a \in A$, $V \in b \in B$. Tehát $c = ab$.

Ha viszont $a_1 b_1 = a_2 b_2$, ahol $a_i \in A$ és $b_i \in B$ $(i = 1, 2)$, akkor legyenek U_i és V_i olyan tranzlációk, melyekre $T = U_1 V_1 = U_2 V_2$ és

$$\begin{matrix} U_i \in a_i, & U_i \pi = \pi_i \subset \varrho, \\ V_i \in b_i, & V_i \varrho = \varrho_i \subset (\varrho). \end{matrix} \qquad (i = 1, 2)$$

Minthogy $T\pi = V_i(U_i \pi) = V_i \pi_i \subset V_i \varrho = \varrho_i$, azért $\varrho_1 = \varrho_2$. Ebből következik, hogy $V_1 = (\varrho \to \varrho_1) = (\varrho \to \varrho_2) = V_2$ és $U_1 = T V_1^{-1} = T V_2^{-1} = U_2$, tehát $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$. Ezzel befejeztük $C = AB$ bizonyítását.

A B részhalmaz nem periodikus. Legyen ugyanis $aB = B$ és $a \in C$, továbbá a T tranzlációra $T \in a$. Állításunkat $T(\varrho) = (\varrho)$ kimutatásával bizonyítjuk, mert ebből $T \in R$ és így az következik, hogy a a C csoport egységeleme. Legyen $\varrho_1 \in (\varrho)$, $(\varrho \to \varrho_1) \in b_1 \in B$ és $ab_1 = b_2 \in B$, tehát $T(\varrho \to \varrho_1) \in b_2$. Ekkor

$$T\varrho_1 = [T(\varrho \to \varrho_1)]\varrho \in b_2 \varrho \subset (\varrho),$$

s mivel ez minden $\varrho_1 \in (\varrho)$ parallelotopra áll, valóban $T(\varrho) = (\varrho)$.

Ha $aA = A$, ahol $a \in C$, és $T \in a$, akkor $T(R\varrho) = R\varrho$. Legyen ugyanis $\pi_1 \subset \varrho_1 \in R\varrho$, $(\varrho \to \varrho_1)\pi^* = \pi_1$ és így $\pi^* \subset \varrho$. Ekkor

$$\begin{aligned} T\pi_1 = T(\varrho \to \varrho_1)\pi^* &= (\varrho \to \varrho_1)\, T(\pi \to \pi^*)\pi \in \\ &\in (\varrho \to \varrho_1) a A \pi = (\varrho \to \varrho_1) A \pi \subset R \cdot R\varrho = R\varrho. \end{aligned}$$

Minthogy ez minden $\pi_1 \subset R\varrho$ parallelotopra áll, valóban $T(R\varrho) = R\varrho$.

Ha az $R\varrho$ parallelotop-halmaz izolált parallelotopokból áll, akkor $T(R\varrho) = R\varrho$ csak $T \in R$ esetében állhat fenn. Ebben az esetben tehát A nem periodikus, mert $aA = A$, $T \in a$ relációknak $T \in R$ a folyománya s így a a C csoport egységeleme.

Egy módszert dolgoztunk ki olyan C csoportok megalkotására, amelyek nem-periodikus részhalmazaik szorzataként előállíthatók. Ha a (π) parallelotop-halmazból megfelelően építjük fel a (ϱ) parallelotop-halmazt, akkor az előírásainkkal definiált C csoport ciklikus, ennek A, B részhalmazaira $C = AB$, és e tényezőknek egyike sem periodikus, ha $R\varrho$ izolált parallelotopokból áll.

3. Tételünk bizonyítására a mondottaknak megfelelő parallelotop-halmazt szerkesztünk. Legyen a ciklikus C csoport rendszáma $n = m_1 m_2 m_3$, ahol m_1, m_2, m_3 relatív prím egészszámok, s legyen $m_1 = u_1 v_1$, $m_2 = u_2 v_2$, ahol u_1, u_2, v_1, v_2 egynél nagyobb egészszámok.

A bizonyítást háromdimenziós térben végezzük. A tranzlációkat vektoraikkal jellemezzük s azokkal jelöljük. Legyen **i**, **j**, **k** három páronként merőleges egységvektor és π egy ezekkel párhuzamos helyzetű, egységélű kocka. Az ebből megszerkesztett (π) kocka-rendszerhez az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tranzlációkkal generált P csoport tartozik.

A ϱ parallelepipedont (π) ama kockái alkossák, amelyek π-ből

$$\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j} \qquad (\alpha=0,1,2,\ldots,u_1-1;\ \beta=0,1,2,\ldots,u_2-1)$$

tranzlációkkal keletkeznek. Legyen R az $m_1\mathbf{i}, m_2\mathbf{j}, m_3\mathbf{k}$ tranzlációkkal generált csoport. Így P/R az m_1, m_2, m_3 rendű ciklikus csoportok külső szorzata és, mivel ezek a rendszámok relatív prímek, P/R valóban $n=m_1m_2m_3$ rendszámú ciklikus csoport.

Ha most még a (ϱ) halmazt úgy definiáljuk, hogy ehhez valóban a mondott R tranzláció-csoport tartozzék, akkor az adott C csoportnak nem-periodikus tényezőkre való felbontásához jutunk, mert a definiált $R\varrho$ halmaz izolált parallelepipedonokból áll.

Tekintjük evégből először azt a $(\varrho)'$ parallelepipedon-halmazt, amelyik ϱ-ból az $u_1\mathbf{i}, u_2\mathbf{j}, \mathbf{k}$ tranzlációkkal generált csoport elemeinek alkalmazásával áll elő. E $(\varrho)'$ halmaz a teret egyszeresen betölti.

$(\varrho)'$-nek ama parallelepipedonjai, amelyek $R\varrho$ parallelepipedonjaiból

$$\mathbf{k}+\mu u_1\mathbf{i}, \text{ ill. } u_1\mathbf{i}+\nu u_2\mathbf{j} \qquad (\mu, \nu \text{ egész})$$

eltolásokkal állanak elő, $\mathbf{i}$ ill, $\mathbf{j}$ irányú oszlopokat alkotnak. Ez pontosabban azt jelenti, hogy $(\varrho)'$-nek így kiválasztott részhalmazaira $\mathbf{i}$, ill. $\mathbf{j}$ tranzlációt alkalmazva a térnek változatlanul ugyanazt a részét egyszeresen betöltő parallelepipedon-halmazt kapunk. Hagyjuk el $(\varrho)'$-ből a mondott két részhalmazt s pótoljuk ezeket azokkal a parallelepipedon-halmazokkal, amelyek az elhagyottakból $\mathbf{i}$, ill. $\mathbf{j}$ tranzláció alkalmazásával keletkeznek. Az így definiált parallelepipedon-halmaz a teret egyszeresen betölti s ezt választjuk (ϱ) halmaznak.

(ϱ) definíciójából következik, hogy $R\varrho$ parallelepipedonjai (ϱ)-hoz tartoznak és $R(\varrho)=(\varrho)$. Megállapíthatjuk továbbá, hogy ha $R\varrho$ parallelepidonjaira akár $\mathbf{k}$, akár $u_1\mathbf{i}$ tranzlációt alkalmazunk, olyan parallelepipedonhoz jutunk, amelyik nem tartozik (ϱ)-hoz. Minthogy a (ϱ) halmaznak $R\varrho$-hoz nem tartozó parallelepipedonjai a mondott tulajdonságokkal nem rendelkeznek, azért $T(\varrho)=(\varrho)$ esetében a T tranzláció csak olyan lehet, hogy $T(R\varrho)=R\varrho$ is fennáll, azaz $T\in R$. Így a (ϱ) halmazhoz valóban az R tranzláció-csoport tartozik.

4. Ha geometriai meggondolásainkból kiolvassuk egy adott C csoporthoz a talált nem-periodikus tényezőket, eredményünk tiszta csoportelméleti alakban jelentkezik s ezt az eredményt már könnyű lesz tiszta csoportelméleti úton is verifikálni. Ezáltal azt érjük el, hogy e dolgozat **2** és **3** kihagyásával is logikailag hiánytalan marad.

Legyenek az additív Abel-féle C csoport generátorelemei a, b, c, definiáló relációi pedig

$$m_1a=0, \quad m_2b=0, \quad m_3c=0,$$

ahol m_1, m_2, m_3 relatív prím egészszámok s így a C csoport $n = m_1 m_2 m_3$ rendszámú ciklikus csoport. Legyen továbbá $m_1 = u_1 v_1$, $m_2 = u_2 v_2$, ahol u_1, v_1, u_2, v_2 egynél nagyobb egészszámok. A C csoportnak két részhalmazát adjuk meg.

Az A részhalmaz elemei:

$$\alpha a + \beta b \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, u_1 - 1; \beta = 0, 1, 2, \ldots, u_2 - 1).$$

Ez a részhalmaz nem periodikus. Ha ugyanis $x + A = A$, akkor

$$x + 0 \text{ és } x + (u_1 - 1)a + (u_2 - 1)b$$

A-hoz tartozik, x tehát közös eleme az

$$A \text{ és } A - (u_1 - 1)a - (u_2 - 1)b$$

halmazoknak. Ezeknek viszont egyetlen közös elemük 0 és ezért csak $x = 0$ lehetséges.

A B részhalmaz elemei:

$$\begin{aligned} &\alpha u_1 a + \beta u_2 b && (\alpha \neq 1), \\ &u_1 a + (1 + \beta u_2) b, && \\ &\alpha u_1 a + \beta u_2 b + c, && (\beta \neq 0), \\ &(1 + \alpha u_1) a + c, && \\ &\alpha u_1 a + \beta u_2 b + \gamma c, && \end{aligned}$$

ahol α, β, γ olyan egészszámok, amelyekre (a már tett megszorításokon kívül)

$$0 \leqq \alpha < v_1, \quad 0 \leqq \beta < v_2, \quad 2 \leqq \gamma < m_3.$$

Ez a részhalmaz nem periodikus, hiszen 0 az egyetlen olyan eleme, amelyből $u_1 a$ vagy c hozzáadásával B-hez nem tartozó elemet kapunk.

A C csoport az A és B részhalmazok összege. Ezt a következőképpen láthatjuk be. C nyilván előáll A és az $\alpha u_1 a + \beta u_2 b + \gamma c$ elemekből ($0 \leqq \alpha < v_1, 0 \leqq \beta < v_2, 0 \leqq \gamma < m_3$) álló B' halmaz összegeként. B abban különbözik a B' halmaztól, hogy

$$\begin{aligned} &u_1 a + \beta u_2 b \text{ helyett } && u_1 a + (1 + \beta u_2) b, \\ &\alpha u_1 a + c \text{ helyett } && (1 + \alpha u_1) a + c \end{aligned}$$

elemeket tartalmazza. Viszont e halmazpárokhoz a $(0, b, 2b, \ldots, (u_2 - 1)b)$, ill. $(0, a, 2a, \ldots, (u_1 - 1)a)$ halmazok elemeit hozzáadva azonos összeghalmazokhoz jutunk s így mindkét halmazpár azonos összeget eredményez, ha az A halmazt adjuk hozzájuk, hiszen A a mondott két halmaz összege. Ezért $A + B = A + B' = C$.

5. A legkisebb n szám, amelyik tételünk feltételét kielégíti, 180. Álljon itt e rendszámra a talált nem-periodikus szorzatelőállításnak egy példája. E példát az egészszámok mod 180 additív csoportjára fogalmazzuk.

A elemei

$$0, 20, 45, 65, 100, 145.$$

B elemei

$$0,\ 6,\ 10,\ 12,\ 18,\ 24,\ 42,\ 48,\ 54,\ 60,\ 66,\ 70,\ 72,\ 78,\ 81,$$
$$84, 96, 102, 108, 114, 120, 130, 132, 138, 144, 156, 162, 168, 171, 174.$$

E halmazok elemeit páronként mod 180 összeadva teljes maradékrendszert kapunk.

6. A véges Abel-féle csoportokra eddig ismert minden szorzatelőállítás *kváziperiodikus* a szó következő értelmében: Azt mondjuk, hogy a $C = AB$ szorzatelőállítás kváziperiodikus, ha az A és B részhalmazok egyike, pl. B felbontható olymódon $B_1, B_2, \ldots, B_k$ halmazokra, hogy az $AB_1, AB_2, \ldots, AB_k$ részhalmazok egyiküknek egy periodikus részhalmaz elemeivel való szorzataiként állíthatók elő. Azaz található olyan periodikus $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ részhalmaz, hogy az AB_i és $AB_1 b_i$ részhalmazok sorrendjüktől eltekintve, azonosak. Nyílt kérdés, hogy vajjon a véges Abel-féle csoportoknak minden szorzatelőállítása kváziperiodikus-e. Még véges ciklikus csoportok esetére sem sikerült e kérdésre feleletet adni.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *G. Hajós,* Sur la factorisation des groupes abéliens, Časopis *74,* (1950), 157—162.

[2] Lásd i. m.[1]

[3] Lásd i. m.[1] és *L. Rédei* i. m.[4]

[4] *L. Rédei* Ein Beitrag zum Problem der Faktorisation von endlichen Abelschen Gruppen, Acta Math. Hung. *1* (1950), 197.

PERIODICITÁSOK KERESÉSE

JÁNOSSY LAJOS r. tag

Előadta az 1950. május 9-én tartott felolvasó ülésen

Megadott adatanyagban rejlő periodikus komponensek keresésére szolgáló eljárásokat diszkutálunk. *Fuhrich* módszere alkalmatlannak bizonyult, ezzel szemben *Schmidt W.* régi módszere néhány kisebb változtatással kitűnő gyakorlati módszer domináló periodikus komponensek megtalálására.

I. RÉSZ.

1. §. Gyakran felmerül az a kérdés, vajjon tartalmaz-e egy adott észlelési anyag periodikus komponenseket. Tekintsünk N számú észlelt adatot: $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$. Ezen adatokat mindig elő lehet állítani egy Fourier-sorral a következő alakban:

$$\left.\begin{aligned} y_\nu &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=0}^{<\frac{1}{2}N} A_k \cos(\nu k \omega - \varphi_k) \\ 0 &\leqq \varphi_k < 2\pi, \quad A_k \geqq 0 \text{ ha } k>0; \quad \omega = \frac{2\pi}{N}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

vagy pedig így:

$$\left.\begin{aligned} y_\nu &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{<\frac{1}{2}N} a_k \cos \nu k \omega + b_k \sin \nu k \omega, \\ a_k &= A_k \cos \varphi_k \quad b_k = A_k \sin \varphi_k . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

A sor felírásának igen kényelmes módja a komplex írásmód: írhatjuk, hogy

$$\left.\begin{aligned} y_\nu &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}_k \exp(i \nu k \omega), \\ \mathbf{A}_k &= A_k \exp(i\varphi_k), \quad k>0, \quad \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} A_0, \\ \mathbf{A}_{N-k} &= \mathbf{A}_k^* = A_k \exp(-i\varphi_k). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

A Fourier-sorok elméletéből következik

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} y_\nu \exp(i\omega \nu k) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} y_\nu \cos \omega \nu k - \frac{i}{N} \sum_{\nu=1}^{N-1} y_\nu \sin \omega \nu k \tag{4}$$

és

$$A_k + i B_k = \mathbf{A}_k, \quad \frac{1}{2} A_0 = \mathbf{A}_0. \tag{5}$$

A Fourier-komponenseket $\cos \omega \nu k$ és $\sin \omega \nu k$ táblázatainak (mint amilyent pl. *L. W. Pollak*[1] számított ki) segítségével könnyű meghatározni.

2. §. Az (1), (2) és (3) számú egyenletek — mindegyik kissé különböző módon — kifejezik azt a jólismert tényt, hogy minden adatanyag periodikus elemek szuperpoziciójának tekinthető. Amikor tehát periodicitások után kutatunk, a kérdés nem is annyira az, hogy periodikus komponensek szuperpoziciója-e az adott anyag — mert ez mindig így van — hanem az, hogy vannak-e a periodikus elemek, az $\mathbf{A}_k \exp(i\omega k\nu)$-k között olyanok, amelyek különlegesen nagy amplitudójuk miatt döntően hozzájárulnak az észlelt adatok, az y_ν-k kialakulásához.

Ily módon, ha az $|\mathbf{A}_k|^2$ amplitudónégyzeteket k függvényeként ábrázoljuk, lehetséges, hogy pl. $k = k_1, k_2, \ldots$ stb-re különlegesen magas értékeket találunk és arra következtethetnénk, hogy az anyag jelentős periodikus elemeket tartalmaz, melyeknek periodusa közel $\omega_1 = k_1\omega$, $\omega_2 = k_2\omega, \ldots$ De óvatosnak kell lennünk, ha arra akarunk következtetni, hogy az anyag jelentős periodicitásokat tartalmaz, melyeknek frekvenciája $\omega_1, \omega_2, \ldots$ stb., azaz, hogyha arra akarunk következtetni, hogy ezen periodusok az y_ν-értékeket szolgáltató mechanizmus természetében rejlenek. Ahhoz, hogy eldönthessük, jelentős-e egy nagy $\mathbf{A}_k$ amplitudó, vagy sem, az észlelt értékeket szolgáltató folyamat fizikai részleteit kell megvizsgálnunk.

Ezért periodusok keresése közben a vizsgálat tárgya csupán annak megállapítása, hogy megközelíthető e nagy pontossággal az adatanyag kevésszámú harmonikus komponens szuperpoziciója alakjában. Hogyha ilyen megközelítés sikerül, további rendszeres vizsgálat szükséges ahhoz, hogy eldönthessük fizikailag jelentősek-e az ilyen harmonikus komponensek, vagy sem. Ha semmit nem tudunk a folyamatról, akkor a Fourier-komponensekből egyedül semilyen következtetést sem vonhatunk le egy periodus jelentőségére nézve. Hiszen ha pl. egy tiszta sinus hullám extrém esetét tekintjük, nyilván a priori, nem vonhatjuk le azt a következtetést, hogy olyan észleléseket, amelyeket egy intervallumon belül egy sinus függvény állított elő helyesen, az intervallumon kívül is ugyanezen függvény állítja elő, mert a függvény folytatódhatik, de éppen úgy hirtelen más függvénnyé is átalakulhat. Ezért a jelenlegi vizsgálat tisztán formális, mert egy adott anyag harmonikus komponensek általi előállításának csak matematikai problémáját tárgyalja. Egy ilyen előállítás fizikai jelentősége sokkal mélyebb problémát jelent, amellyel itt nem foglalkozhatunk.

3. §. Valamely megadott adatanyag Fourier spektrumát a (4) és (5) egyenletek szerint meghatározhatjuk és kísérletképpen a legnagyobb amplitudókat periodicitásokkal azonosíthatjuk. A Fourier-analízis természetesen csak olyan frekvenciákat szolgáltat, amelyek $\omega = \frac{2\pi}{N}$-nek, az alapfrekvenciának egészszámú többszörösei. Ha egymásmelletti nagy amplitudójú frekvenciák is előfordulnak, akkor ezek nem harmonikus, vagy tört frekvenciákká következőképpen vonhatók össze.

Tegyük fel egyelőre, hogy az y_ν-k előállíthatók, mint

$$y_\nu = \exp\{i(K+\varepsilon)\omega\nu\}, \tag{6}$$

ahol K egészszám, továbbá $-\frac{1}{2} < \varepsilon \leqq +\frac{1}{2}$. A (6) kifejezést (5)-be behelyettesítve kapjuk

$$\mathbf{A}_k = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} \exp\{i(K+\varepsilon-k)\omega\nu\} =$$

$$= \frac{1}{N}\exp\left\{\pi i\left(\varepsilon - \frac{K+\varepsilon-k}{N}\right)\right\}\frac{\sin \pi\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}(K-k+\varepsilon)\omega}$$

és

$$|\mathbf{A}_k|^2 = \left[\frac{\sin \varepsilon\pi}{N\sin\left(\frac{K-k+\varepsilon}{N}\right)\pi}\right]^2.$$

$|\mathbf{A}_k|^2$-nek a maximuma $k=K$-nál van, ahol

$$|\mathbf{A}_k|^2 \approx \left(\frac{\sin\varepsilon\pi}{\varepsilon\pi}\right)^2.$$

(Vegyük tekintetbe, hogy $N \gg 1$ esetén $\sin\frac{\varepsilon\pi}{N} \approx \frac{\varepsilon\pi}{N}$.)

Hogyha $K-k$ helyett ΔK-t írunk, akkor (feltéve, hogy $|\Delta K| \ll N$), azt találjuk, hogy

$$\left|\frac{\mathbf{A}_{K+\Delta K}}{\mathbf{A}_k}\right|^2 \approx \frac{1}{(1+\Delta K\,2)^2}. \tag{7}$$

Ez azt mutatja, hogy amennyiben ε pozitív

$$|\mathbf{A}_{K-1}|^2$$

aránylag nagy. Hasonlóképpen negatív ε esetében

$$|\mathbf{A}_{K+1}|^2$$

lehet nagy. Ennélfogva a nem harmonikus frekvenciákat a Fourier együtthatók olyan csoportja állítja elő, amelyben a legközelebbi harmonikus frekvenciák a legnagyobb értékűek. A (7) egyenletből azt találjuk, hogy

$$\varepsilon = \frac{\pm|\mathbf{A}_{K+1}|}{|\mathbf{A}_k| + |\mathbf{A}_{K\pm 1}|}. \tag{8}$$

A (7) és (8) egyenletek, (illetve az ezeknek megfelelő pontos összefüggések) felhasználásával egy adott Fourier spektrumot előállíthatunk egy, vagy többféle nem-harmonikus frekvenciákból álló alakzat segítségével. Nagyjából úgy áll a dolog, hogy szomszédos ωK és $\omega(K+1)$ frekvenciáknak megfelelő nagy amplitudók páronként egy $\omega(K+\varepsilon)$ nem harmonikus frekvenciának tulajdoníthatók. Hasonlóképpen léteznek olyan tipikus csoportok is, amelyek vagy csillapított rezgéseknek, vagy fázisukat szabálytalanul változtató rezgéseknek a jelenlétére mutatnak.

4. §. Látjuk tehát, hogy egy Fourier-analízis eredményeképpen többé-kevésbbé egyértelműen maghatározható az $\omega_1, \omega_2, \ldots$ (harmonikus vagy nem harmonikus) frekvenciák bizonyos száma, amely az észlelési anyagot a kívánt pontossággal előállítja. Az eljárás azonban tisztán formális és formális alapokon egyedül nem állapítható meg a periodusok jelentős vagy nem jelentős volta. Fenti meggondolások eredményeképpen az a benyomás alakul ki, hogy egy teljes Fourier-analízis, kiegészítve az amplitudók jelentős párjainak, vagy csoportjainak vizsgálatával, kimeríti egy adott észlelési anyag jelentőségét. Minden, az anyagban jelenlévő jelentősebb periodusnak jelentkeznie kellene a Fourier-spektrumban. Ezért más módszerek, mint a rendes Fourier-analízis csak akkor tekinthetők hasznosaknak, hogyha a teljes Fourier-analízishez képest sokkal kisebb munka árán teszik lehetővé periodikus komponensek felfedezését. Teljesen alaptalan azt várni, hogy egy eljárás, akármilyen bonyolult legyen is az, képes legyen olyan rejtett periodicitásokat kimutatni, amelyek a teljes Fourier-spektrumban nen mutatkoznak.

5. §. Nem túlságosan nagy anyag teljes Fourier-spektruma könnyen meghatározható táblázatok segítségével. Azonban az ehhez szükséges munka a rovatok számának négyzetével nő, úgy hogy kívánatos volna olyan módszereket találni, amelyek egy teljes Fourier-analízis nélkül is lehetővé teszik egy nagy anyag legjelentősebb komponenseinek meghatározását.

1. *Fuhrich módszere*[2]. Ez a módszer a jólismert autó-korrelációs módszer továbbfejlesztése. Adott $y_1, y_2, \ldots$ adatok alapján szukcesszív korrelációs együtthatókat képzünk:

$$\eta_k = \frac{\sum_{\nu=0}^{N-1} y_\nu y_{\nu+k}}{\left\{ \sum_{\nu=0}^{N-1} y_\nu^2 \sum_{\nu=0}^{N-1} y_{\nu+k}^2 \right\}^{1/2}}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Ha a η_1, η_2 együtthatókat is alávetjük a (9) eljárásnak, új $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \ldots$ értékek készletét kapjuk. Az eljárás megismételhető és az η_ν-k rendszere az iterációk elegendő nagy száma után állítólag cos $\omega_1 \nu$-hez konvergál, ahol ω_1 az a frekvencia, amelynek az eredeti y_k-k készletében legnagyobb amplitudója volt. Ezen állítás helyességét később megvizsgáljuk. Egyelőre csak a következőt szögezzük le: a (4) és (9) egyenletek összehasonlításából kiderül, hogy Fuhrich módszerével megtett minden lépés több munkát igényel, mint egy teljes Fourier-analízis (feltételezzük, hogy táblázatok rendelkezésre állanak a Fourier-analízis számára). Emiatt a *Fuhrich* által javasolt teljes eljárás sokkal több munkát kíván, mint a teljes Fourier-analízis; ezen nagy munka eredménye pedig legjobb esetben egyetlen lényeges frekvencia meghatározása. Ezért ezen metódus alkalmazásának semmi gyakorlati előnyét nem látjuk (lásd még az utolsó paragrafust).

2. *Kryloff és Schmidt módszere*[3]. Tekintsünk egy

$$f(x) = A_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 x + \varphi_2) + \dots \tag{10}$$

függvényt. Ha a (10) egyenletet x szerint $2n$-szer integráljuk, adódik

$$(-)^n \int \dots \int f(x) dx^{2n} = \frac{A_1}{\omega_1^{2n}} \sin(\omega_1 x + \varphi_1) + \frac{A_2}{\omega_2^{2n}} \sin(\omega_2 x + \varphi_2) + \\ + C_0 + C_1 x + \dots + C_{2n-1} x^{2n-1}. \tag{11}$$

A $C_0, C_1, \dots, C_{2n-1}$ mennyiségek integrációs állandók. Hogyha egyelőre elhanyagoljuk a $C_0 + C_1 x + \dots$ polinomot, azt találjuk, hogy a $2n$-szer integrált függvény ugyanazon $\omega_1, \omega_2, \dots$ periodusokat tartalmazza, mint az eredeti $f(x)$ függvény; de az integrálás megváltoztatta az amplitudókat: minél kisebb az illető frekvencia, annál jobban nő a hozzá tartozó amplitudó relatív jelentősége. Ilymódon, amennyiben a $C_0 + C_1 x + \dots$ polinom felett szabadon rendelkezhetünk, azt remélhetnők, hogy ismételt integrálások eredményeképpen a legalacsonyabb frekvenciájú periodicitás domborodik ki. Ha pedig egy jelentős frekvenciát felismertünk, akkor levonható $f(x)$-ből és a fennmaradó $g(x) = f(x) - A_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1)$ függvény ugyanezen eljárásnak vethető alá. Ilymódon a jelentős periodicitások egyenként kijelölhetők. *Schmidt* eljárása azonban — amint ezt *Rubinstein*[4] kimutatta — nehézségekbe ütközik. Nem lehet ugyanis a $C_0 + C_1 x + \dots$ polinomokat elég nagy pontossággal kiküszöbölni. Az egyik lépésben elkövetett hiba — még ha kicsiny is — nagyobb hibákat okoz a következő lépésekben és ilymódon hamis frekvenciák adódhatnak. *Rubinstein* fenti kritikája jogos; azonban a következőkben megadunk egy olyan eljárást, amely *Schmidt*éhez igen hasonló, de a fenti módszer hibáitól mentes.

II. RÉSZ

6. §. Tekintsük — mint az első paragrafusban is — az észlelt $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ adatokat, amelyeket a

$$y_\nu = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}_k e^{i\omega k\nu}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{N} \\ \mathbf{A}_k = \mathbf{A}^*_{N-k} \tag{12}$$

komplex Fourier-sor állít elő. (* a konjugált komplex számot jelenti.)

Amikor a (12) egyenletet leírjuk, nem tételezzük fel, hogy az $\mathbf{A}_k$ Fourier együtthatókat valóban ismerjük, csak azt hangsúlyozzuk ki, hogy egy ilyen sor létezik.

A következőkben gyakran fogjuk alkalmazni a következő elemi összefüggéseket:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\omega\nu k} \begin{cases} = \dfrac{1 - e^{i\omega\nu n}}{1 - e^{i\omega\nu}} & \nu \neq 0, N \\ = n & \nu = 0, N \end{cases} \tag{13}$$

és

$$\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}=e^{\frac{1}{2}i(\alpha-\beta)}\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta}. \tag{14}$$

A (12) és (13) egyenletek segítségével találjuk, hogy

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}y_\nu=\mathbf{A}_0.$$

Ilymódon, a

$$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}y_\nu \tag{15}$$

jelöléssel az átlagértéktől való eltéréseket képezhetjük:

$$\eta_\nu^{(0)}=y_\nu-\bar{y}\qquad \nu=1,2,\ldots,N-1. \tag{16}$$

A $\eta_\nu^{(0)}$ értékeket olyan sor állítja elő, melynek nincs állandó tagja, nevezetesen

$$\eta_\nu^{(0)}=\sum_{k=1}^{N-1}\mathbf{A}_k e^{i\omega k\nu}. \tag{17}$$

A *Schmidt* által alkalmazott integrálás helyett képezzük a következő részletösszegeket:

$$\begin{aligned} y_{1/2}^{(1)}&=\eta_0^{(0)}\\ y_{3/2}^{(1)}&=\eta_0^{(0)}+\eta_1^{(0)}\\ &\;\;\vdots\\ y_{N-1/2}^{(1)}&=\eta_0^{(0)}+\eta_1^{(0)}+\ldots+\eta_{N-1}^{(0)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Ezen (18) egyenletek következőképp is írhatók:

$$y_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}=\sum_{k=0}^{\nu}\eta_k^{(0)}. \tag{19}$$

Helyettesítsük most be (17)-et a (19)-be

$$y_{\nu+\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\nu}\sum_{\mu=1}^{N-1}\mathbf{A}_\mu e^{i\omega\mu k}.$$

A k szerinti összegezés a (13) egyenlet segítségével hajtható végre és azt találjuk, hogy

$$y_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}=\sum_{\mu=1}^{N-1}\mathbf{A}_\mu\sum_{k=0}^{\nu}e^{i\omega\mu k}=\mathbf{A}_0^{(1)}+\sum_{\mu=1}^{N-1}\mathbf{A}_\mu\frac{e^{i\omega\mu(\nu+1)}}{1-e^{i\omega\mu}},$$

ahol

$$\mathbf{A}_{(0)}^{(1)}=\sum_{\mu=1}^{N-1}\frac{\mathbf{A}_\mu}{1-e^{i\omega\mu}}. \tag{20}$$

Egyszerű átalakítással

$$y_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}=\mathbf{A}_0^{(1)}+\sum_{\mu=1}^{N-1}\frac{\mathbf{A}_\mu e^{i\omega\mu\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}}{2i\sin\frac{1}{2}\omega\mu} \tag{21}$$

adódik, úgy hogy az iterált $y^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}$ értékek megint előállíthatók Fourier-sor alakjában, melynek új $\mathbf{A}^{(1)}_k$ együtthatói egyszerű összefüggésben állanak az eredeti $\mathbf{A}_k$ együtthatókkal.

6. §. Megjegyezzük továbbá, hogy az iterálás következtében egy eredeti lépés fél értékének megfelelő fáziseltolás állt be. Ezen fáziseltolást azzal jeleztük, hogy az $y^{(1)}$-eket feles indexekkel láttuk el. Az iterálást Schmidt módszerével analóg módon megismételjük. Itt célszerű, hogyha a (15)—(19) sz. egyenletekkel kifejezett eljárást nem ismételjük meg pontosan, mert ez tovább növelné a fáziseltolást. Ehelyett a következő — szintén nagy mértékben hasonló — eljárást javasoljuk a második iterálásra:

(1) Képezzünk átlagokat

$$\left.\begin{aligned} \eta^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}} &= y^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}} - \bar{y}^{(1)}, \\ \bar{y}^{(1)} &= \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} y^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(2) Képezzünk részletösszegeket

$$\left.\begin{aligned} y^{(2)}_0 &= 0 \\ y^{(2)}_1 &= \eta^{(1)}_{\frac{1}{2}} \\ y^{(2)}_2 &= \eta^{(1)}_{\frac{1}{2}} + \eta^{(1)}_{\frac{3}{2}} \\ &\;\;\vdots \\ y^{(2)}_{N-1} &= \eta^{(1)}_{\frac{1}{2}} + \cdots + \eta^{(1)}_{N-\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(23) helyett szintén írható

$$y^{(2)}_0 = 0, \qquad y^{(2)}_\nu = \sum_{k=0}^{\nu-1} y_{k+\frac{1}{2}}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{24}$$

A (21) és (22) egyenletek segítségével kimutatható, hogy a (24) által definiált $y^{(2)}_\nu$ értékeket a következő Fourier-sorok állítják elő:

$$y^{(2)}_\nu = \mathbf{A}^{(2)}_0 - \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{\mathbf{A}_\mu e^{i\omega\mu\nu}}{(2\sin\frac{1}{2}\mu\omega)^2}. \tag{25}$$

$A^{(2)}_0$ értékét hasonló kifejezés adja, mint $A^{(1)}_0$-ét, (20) egyenlet ezen kifejezés azonban nem érdekes, minthogy $A^{(2)}_0$ numerikus értékét úgy kapjuk, hogy az $y^{(2)}_\nu$-k középértékét képezzük.

7. §. Az utóbbi két paragrafusban az iterációk olyan szkémáját adtuk meg, amely a Schmidt módszeréhez nagyon hasonló. Az áttekinthetőség kedvéért a következő táblázatban feltüntetjük az egész szkémát.

I. Táblázat

az iterálások szkémája

ν	$y_\nu^{(0)}$	$\eta_\nu^{(0)}$	$y^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}$	$\eta^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}$	$y_\nu^{(2)}$	$\eta_\nu^{(2)}$
0	$y_0^{(0)}$	$\eta_0^{(0)}=y_0^{(0)}-\bar{y}$	$y^{(1)}_{\frac{1}{2}}=\eta_0$	$\eta^{(1)}_{\frac{1}{2}}=y^{(1)}_{\frac{1}{2}}-\bar{y}^{(1)}$	$y_0^{(2)}=0$	$\eta_0^{(2)}=y_0^{(2)}-\bar{y}^{(2)}$
1	$y_1^{(0)}$	$\eta_1^{(0)}=y_1^{(0)}-\bar{y}$	$y^{(1)}_{\frac{3}{2}}=\eta_0+\eta_1$	$\eta^{(1)}_{\frac{3}{2}}=y^{(1)}_{\frac{3}{2}}-\bar{y}^{(1)}$	$y_1^{(2)}=\eta^{(1)}_{\frac{1}{2}}$	$\eta_1^{(2)}=y_1^{(2)}-\bar{y}^{(2)}$
2	$y_2^{(0)}$	$\eta_2^{(0)}=y_2^{(0)}-\bar{y}$	$y^{(1)}_{\frac{5}{2}}=\eta_0+\eta_1+\eta_2$	$\eta^{(1)}_{\frac{5}{2}}=y^{(1)}_{\frac{5}{2}}-\bar{y}^{(1)}$	$y_2^{(2)}=\eta^{(1)}_{\frac{1}{2}}+\eta^{(1)}_{\frac{3}{2}}$	$\eta_2^{(2)}=y_2^{(2)}-\bar{y}^{(2)}$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
$N-1$	$y_{N-1}^{(0)}$	$\eta_{N-1}^{(0)}=y_{N-1}^{(0)}-\bar{y}$	$y^{(1)}_{N-\frac{1}{2}}=\eta_0+\eta_1+\dots$ $\dots+\eta_{N-1}$	$\eta^{(1)}_{N-\frac{1}{2}}=y^{(1)}_{N-\frac{1}{2}}-\bar{y}^{(1)}$	$y_{N-1}^{(2)}=\eta^{(1)}_{\frac{1}{2}}+\eta^{(1)}_{\frac{3}{2}}+\dots$ $\dots+\eta^{(1)}_{N-\frac{3}{2}}$	$\eta_{N-1}^{(2)}=y_{N-1}^{(2)}-\bar{y}^{(2)}$
Megjegyzések és definíciók	$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} y_\nu^{(0)}$	$\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_\nu^{(0)}=0$	$\bar{y}^{(1)}=\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} y^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}$ $y^{(1)}_{N-\frac{1}{2}}=0$	$\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_{\nu+\frac{1}{2}}=0$	$\bar{y}^{(2)}=\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} y_\nu^{(2)}$	$\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_\nu^{(2)}=0$

Az eredeti y_ν $\nu=0,\ldots,N-1$ értékek készletéből kiindulva tehát iterált sorozatokat képezhetünk:

$$\begin{array}{ll} \eta_0^{(2)},\ \eta_1^{(2)},\ldots,\eta_{N-1}^{(2)} & \text{második iterálás} \\ \eta_0^{(4)},\ \eta_1^{(4)},\ldots,\eta_{N-1}^{(4)} & \text{negyedik iterálás} \\ \vdots & \\ \eta_0^{(2m)},\ \eta_1^{(2m)},\ldots,\eta_{N-1}^{(2m)} & 2m\text{-edik iterálás} \end{array}$$

úgy, hogy a következő Fourier előállítás szigorúan érvényes:

$$\eta_\nu^{(2m)}=(-)^m\sum_{\mu=1}^{N-1}\frac{\mathbf{A}_\mu}{(2\sin\frac{1}{2}\omega\mu)^{2m}}e^{i\omega\mu\nu}. \tag{26}$$

Feltűnő a régi (11) egyenlet és új (26) egyenletünk közötti analógia. A két szkéma közötti különbségek a következők:

1. Megszabadultunk pontosan a $C_0, C_1,\ldots,$ integrációs állandóktól. Amikor a középtől való eltéréseket képeztük, $\mathbf{A}_0^{(2m)}$ éppen kiesett.

2. A (11) egyenletben szereplő ω_μ^{2m} nevezők helyett most $(2\sin\frac{1}{2}\omega\mu)^{2m}$ szerepelnek; $\mu\ll N$ esetére közelítőleg érvényes, $2\sin\frac{1}{2}\omega\mu\approx\omega\mu$.

3. A módszer nem erősít fel önkényes frekvenciákat, csak harmonikus frekvenciákat.

Az első tulajdonság az új módszer nagy előnye, mivel az integrációs állandók határozatlansága a régi módszer fő fogyatékossága volt. Hangsúlyoznunk kell azonban azt, hogy módszerünk, noha exakt, lekerekítésből származó hibákra érzékeny. A gyakorlatban ezért szükségessé válik, hogy az eredeti anyag adataihoz két-három nullát tegyünk hozzá és a számítást pontosabban hajtsuk végre, mint amilyen az eredeti anyag pontossága. A második táblázatunkban az eredeti y_ν-értékekhez három nullát tettünk hozzá.

A második tulajdonság annak következménye, hogy az integrálást összegezéssel helyettesítettük. *Schmidt* eljárásának azon hibája, amelyet a numerikus integrálás közelítő jellege okozott, ezáltal elesik.

A harmadikat, tehát azt a hátrányt, hogy csak harmonikus frekvenciák adódnak, ellensúlyozza az, hogy az eljárás egyértelmű. Közelebbi vizsgálat alapján úgy tűnik nekünk, hogy *Schmidt* eljárása alig szolgáltathat többet a legközelebbi harmonikusoknál. *Schmidt* nem veszi pontosan figyelembe az intervallum végénél és a numerikus integrálás alkalmával fellépő effektusokat. Ezen pontatlanságokból származó hibák következtében a végeredmény annyira elmosódik, hogy harmonikus és nem-harmonikus frekvenciák között már nem lehet különbséget tenni. A mi eljárásunknál, melynél ezen pontatlanságok elesnek; az iteráció kizárólag harmonikus frekvenciákhoz vezet.

III. RÉSZ

Egy numerikus példa

8. §. Hogyha ωk egy bizonyos adatanyag Fourier-spektrumában előforduló legkisebb frekvencia, akkor elegendő számú iteráció eredményeképpen ezen frekvencia domináló lesz és a (26) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\eta_\nu^{(2m)} \approx (-)^m \frac{\mathbf{A}_k e^{i\omega k\nu} + \mathbf{A}_{N-k} e^{-i\omega k\nu}}{(2\sin\frac{1}{2}\omega k)^{2m}} = (-)^m \frac{2|\mathbf{A}_k|\cos(\omega k\nu + \varphi_k)}{(2\sin\frac{1}{2}\omega k)^{2m}}. \tag{27}$$

(Céljaink szempontjából természetesen az ωk és $\omega(N-k)$ frekvenciák azonosak).

A (27) egyenletből a φ_k fázisra és A_k amplitudóra következőképpen kaphatunk közelítő értékeket: (13) segítségével adódik hogy

$$\frac{1}{N}\left(2\sin\frac{1}{2}\omega k\right)^{4m}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_\nu^{(2m)^2} \approx 2\mathbf{A}_k\mathbf{A}_{N-k} = 2A_k^2 \tag{28}$$

és hasonlóképpen

$$\frac{1}{N}\left(2\sin\frac{1}{2}\omega k\right)\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_\nu^{(2m)}\eta_{N-\nu}^{(2m)} = \mathbf{A}_k^2 + \mathbf{A}_{N-k}^2 = A_k^2\cos 2\varphi_k. \tag{29}$$

Ilymódon

$$\cos 2\varphi_k \approx \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_\nu^{(2m)^2} \Big/ \sum_{\nu=0}^{N-1}\eta_\nu^{(2m)}\eta_{N-\nu}^{(2m)}. \tag{30}$$

Amint később látni fogjuk, a (28) és (30) egyenletek elég jó közelítést szolgáltatnak A_k-ra és φ_k-ra, néha már $m=1$ esetében is. A (30) egyenlet csak $\cos 2\varphi_k$ meghatározására ad módot; minden olyan φ_k értékhez, amely a (30) egyenletet kielégíti, három további lehetséges érték létezik, mégpedig

$$2\pi - \varphi_k, \qquad \pi \pm \varphi_k. \tag{31}$$

Az $y_\nu^{(2m)}$ értékek megvizsgálásakor a helyes érték kiválasztása nem szokott nehézségeket jelenteni. Ha már egyszer megállapítottuk az ωk értéket, kivonással pontosan eliminálható. Valóban, a

$$\bar{\eta}_\nu^{(0)} = \eta_\nu^{(0)} - (-)^m(2\sin\tfrac{1}{2}\omega k)^{2m}\eta_\nu^{(2m)} \tag{32}$$

értékek már nem tartalmaznak ωk frekvenciájú tagot. A (32) egyenlet helyes, akár domináns az ωk, akár nem. Ilymódon, $\bar{\eta}_\nu^{(0)}$-ból kiindulva, az eljárás megismételhető. Az eljárás megismétlésével egyik frekvencia a másik után egyszerűen eliminálható. Nagyszámú lépés után végül a Fourier spektrumot kapnók meg. Ez azonban igen körülményes módja volna a spektrum meghatározásának.

9. §. Félreértések elkerülése végett hangsúlyozzuk, hogy a (28), (29) és (30) egyenletek, amelyek A_k és φ_k értékeit szolgáltatják, egyszerűségük ellenére ugyanannyi számolási munkát igényelnek, mint A_k és φ_k pontos meghatározása az (5) egyenlet alapján, feltéve, hogy az ωk frekvenciákra harmonikus

táblázatok állnak rendelkezésre. Ennekfolytán a (28), (29) és (30) egyenletek tényleges használata csak akkor ajánlható, hogyha a $2\pi k\ N$ frekvenciákra nem állnak rendelkezésre táblázatok. A módszer valóságos előnyei azonban a következőek:

A leírt iterációk alkalmasak arra, hogy a legalacsonyabb jelenlévő frekvenciát szolgáltassák, feltéve, hogy az iterációt kellőképpen sokszor ismételjük. De tegyük fel, hogy sok alacsony frekvencia van jelen kis amplitudókkal; tegyük fel pl., hogy a legalacsonyabb, nagy amplitudójú frekvencia ωk. Ebben az esetben nem túl sokszor ismételt iteráció kihozza az ωk frekvenciát. Ilymódon a gyakorlatban addig helyes iterálni, amíg az iterált értékek határozottan hasonlítanak egy harmonikusra. Ebben a stádiumban az iterált y_ν-k által jelzett harmonikus eliminálható, vagy szigorú Fourier-analízissel (ha táblázatok rendelkezésünkre állanak) vagy pedig a (28) és (30) egyenletek segítségével. Ezen cél elérésére általában nem kell sokszor iterálni. Az a tény, hogy megítélésünkre van bízva az, milyen harmonikust képvisel egy iteráció, nem teszi többértelművé az eljárást. Ha ugyanis egy bizonyos iterációnak hamis periodust tulajdonítunk, akkor a feltételezetten domináló frekvenciát elimináljuk, nem pedig a valóságban dominálót, és a további iterálásoknál az igazán domináló frekvencia annál világosabban fog feltűnni.

10. §. Avégett, hogy numerikus példát adhassunk, vizsgálat alá vettünk egy esetet, amelyet *Pollak* 1929-ben analizált. Esetünkben $N = 41$,

$$y_\nu = 8 \sin(36{,}09^0 \nu) - 5 \sin(9{,}74^0 \nu) + \text{véletlen számok}. \tag{33}$$

Az alábbi táblázatban $y_\nu^{(0)}$-t továbbá második és negyedik iterációit adjuk meg. (Lásd az 1, 2, 3 ábrákat is.)

Az 1, 2, 3 ábrában $y_\nu^{(0)}$, $\eta_\nu^{(2)}$, $y_\nu^{(4)}$-t tüntettük fel. Már $\eta_\nu^{(2)}$ is világosan egy erős első harmonikust mutat; voltaképpen nem is lett volna szükség arra, hogy $y_\nu^{(4)}$-et kiszámítsuk; csak azért tettük, hogy megmutassuk, milyen gyorsan konvergál az eljárás. Az iterálást megismételtük $\zeta_\nu^{(0)}$-vel, azaz az első harmonikus eliminálása után fennmaradó résszel; $\zeta_\nu^{(0)}$ második iterálásra, nevezetesen $\zeta_\nu^{(2)}$ erős negyedik harmonikust mutat. Ha a maradékkal még egyszer iterálunk, viszonylagos gyenge hatodik és második harmonikusok mutatkoznak. (Lásd a 4, 5, 6 és 7 ábrákat.) Esetünkben tehát nem nehéz felismerni a domináló frekvenciákat. Érdemes megjegyezni, hogy az első harmonikus után azonnal feltűnik a negyedik, noha az anyag gyenge második harmonikust is tartalmaz. Így a — nem túlságosan sokszor megismételt — iterálás automatikusan kiválasztja az erős harmonikusokat.

IV. RÉSZ

Fuhrich módszere.

11. §. Fuhrich módszere az autó-korreláció módszerének szukcesszív alkalmazásából áll. Kiszámítja a korrelációs együtthatókat az $y_0, y_1, y_2, \ldots,$ értékek és a $0, 1, 2, \ldots,$ lépéssel eltolt értékek között. A korrelációs együtthatók képezik az első iterációt. Többször egymásután iterálva, a korrelációs együtthatók harmonikus sor felé tartanak, amely az anyagban lévő legnagyobb amplitudójú periodust képviseli.

Már rámutattunk arra, hogy a korrelációs együtthatók egy készletének képzéséhez szükséges munka nagyobb annál, ami táblázatok segítségével egy teljes Fourier analízishez szükséges; ezért a Fuhrich-féle módszer egyetlen jogosultsága az volna, hogyha a Fourier analízisnél pontosabban szolgáltatna frekvenciákat. Valószínűtlennek tartjuk, hogy egy adatanyagnak létezne olyan periodikus tulajdonsága, amelyet egy teljes Fourier analízis nem fedne fel, hogyha ezen tulajdonság egyáltalában megállapítható egyedül az adatok alapján. A Fuhrich-féle módszer állítása tehát már általános megfontolások alapján is gyanus. Valóban, ki tudjuk mutatni, hogy véges intervallumra alkalmazott Fuhrich-féle eljárás a legjobb esetben annyi felvilágosítást ad, mint egy Fourier analízis, mégpedig sokkal nagyobb munka árán, mint amennyit a tényleges Fourier analízis jelentene.

13. §. Avégett, hogy Fuhrich módszerét gyakorlatilag alkalmazhassuk, az eredeti, végtelen intervallumra vonatkozó képletet úgy kell módosítani, hogy végesszámú észlelésre alkalmazható legyen. A következőkben több lehetőséget tárgyalunk meg.

1. Folytathatjuk az y_ν értékeket az adott intervallumon kívül egyszerű ismétléssel, azaz posztulálhatjuk, hogy

$$y_\nu = y_{\nu+N} = y_{\nu+2N} = \cdots, \tag{34}$$

ilymódon minden egészszámú ν-re

$$y_\nu = \sum_{\mu=0}^{N-1} \mathbf{A}_\mu e^{i\omega\mu\nu}. \tag{35}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\mathbf{A}_0 = 0$. Ekkor

$$\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} y_{\nu+k}^2 = \sum_{\mu=0}^{N-1} |\mathbf{A}_\mu|^2 = \text{független } k\text{-tól.}$$

A (9) egyenletben szereplő nevezők tehát állandók, ezért az első iterációra felírhatjuk

$$y_k^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} y_\nu y_{\nu+k} \tag{36}$$

és a (35) és (13) egyenletek segítségével

$$y_k^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{\mu=1}^{N-1}\sum_{\mu'=1}^{N-1} \mathbf{A}_{\mu'} \mathbf{A}_{\mu+k} e^{i\omega[\nu\mu+(\nu+k)\mu']}.$$

Azok a tagok, amelyekre $\mu+\mu' \neq N$, lerontják egymást, ha ν-re összegezünk; ennélfogva nyerjük, hogy

$$y_k^{(1)} = \sum_{\mu=1}^{N-1} \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_{N-\mu} e^{i\omega\mu k} = 2\sum_{\mu=1}^{N/2} |\mathbf{A}_\mu|^2 \cos\omega\mu k. \tag{37}$$

Az iterálás ismétlésével továbbá

$$y_k^{(m)} = 2^m \sum_{\mu=1}^{N/2} |\mathbf{A}_\mu|^{2m} \cos\omega\mu k.$$

adódik. m elegendő nagy értékére a legnagyobb A_k együttható fog dominálni. Eddig azonban csak tiszta Fourier frekvenciákat kaptunk.

2. Hogy a periodicitás feltételét eleve ki ne kössük, megkísérelhetnők a (34) feltétel elejtését és olyan korrelációs együtthatók bevezetését, amelyeket csak az eredeti intervallum belsejéből vettünk. Az iteráció tehát nem (36) által, hanem a

$$y_k^{(1)} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-k-1} y_\nu y_{\nu+k}. \tag{38}$$

egyenlet által definiálható. Azonban (38) ekvivalens (36)-tal, feltéve, hogy definícószerűen posztuláljuk, hogy

$$y_N = y_{N+1} = \dots = y_{2N-1} = 0.$$

Ezért a (38) iterálás egy kiterjesztett $2N$ rovatú intervallum harmonikusai adja, a periodusoknak tehát nemcsak az ω hanem $\frac{1}{2}\omega$ többszöröseit is kapjuk. Az a tény, hogy frekvenciaspektrumunk megnövekedett nem jelent valóságos előnyt; az új frekvenciák egyszerűen egy önkényesen extrapolált adatkészlet harmonikusait jelentik.

3. Lehetne azzal is érvelni, hogy (38) voltaképpen nem igazi korrelációs együtthatókat állít elő, mivel a nevezők csak $N-k$ számú négyzetet tartalmaznak, ha nem használjuk fel az intervallumon kívüli extrapolálás adatait. (38) helyett jobb megközelítésnek tekinthetnők az

$$y_k^{(1)} = \frac{1}{N-k}\sum_{\nu=0}^{N-k-1} y_\nu y_{\nu+k} \tag{39}$$

egyenletet. A (39) iterálás matematikailag nagyon bonyolult. Könnyű kimutatni, hogy az iterált értékek nem tiszta harmonikusok többé, még hogyha az $y_\nu - k$ tiszta harmonikusok által vannak is megadva. Van azonban a frekvenciáknak olyan készlete, amelyeket (39) pontosan visszaad. Legyen ugyanis

$$y_\nu = e^{i\Omega\nu} + e^{-i\Omega\nu}, \tag{40}$$

ahol Ω tetszőleges frekvencia.

II. Táblázat

	$y_\nu^{(0)}$	$y_\nu^{(2)}$	$y_\nu^{(4)}$	$z_\nu^{(0)}$	$z_\nu^{(2)}$	$\alpha_\nu^{(0)}$	$\alpha_\nu^{(2)}$	$\beta_\nu^{(0)}$
0	—11,47000	43,77176	—1234,37648	0,09589	—29,98911	—10,32600	40,19157	—6,75480
1	10,61000	63,16167	—2424,98120	12,77001	—37,72889	— 0,34163	42,45898	3,43104
2	2,82000	93,16515	—3552,42425	5,54260	—32,69866	— 5,82092	44,38476	—1,87714
3	2,18000	125,99220	—4586,70215	5,41871	—22,12583	— 2,27051	40,48962	1,32717
4	— 4,16000	161,00282	—5494,98785	—0,46806	— 6,13429	— 2,59986	34,32397	0,44997
5	—10,37000	191,85701	—6242,27073	—6,30516	9,38919	— 3,04221	25,55846	—0,77123
6	—11,62000	212,34477	—6797,69660	—7,27800	18,60751	— 0,81147	13,75074	0,41034
7	— 9,80000	221,21610	—7140,77770	—5,28680	20,54783	1,85403	1,13155	1,95457
8	—12,94000	220,29100	—7262,64270	—8,36599	17,20135	— 2,38813	— 9,63361	—3,24412
9	— 3,16000	206,42947	—7164,21670	1,36489	5,48888	3,27240	—22,78691	1,24768
10	2,70000	189,41151	—6859,36123	7,07277	— 4,85870	5,38426	—32,66780	2,48158
11	2,86000	175,09712	—6365,09425	6,98613	— 8,13351	4,15955	—37,16443	0,85733
12	0,20000	163,64630	—5695,73015	3,99212	— 4,42219	2,45531	—37,50151	—0,87686
13	— 4,24000	152,39905	—4862,71975	—0,86356	3,28125	0,27675	—35,38328	—2,86721
14	— 3,33000	136,91537	—3877,31030	—0,44528	10,12113	3,07204	—32,98830	0,14089
15	— 3,26000	118,10526	—2754,98548	—0,93532	16,51573	4,80427	—27,52128	2,35888
16	— 8,36000	96,03372	—1514,55540	—6,65430	21,97501	0,98251	—17,24999	—0,55023
17	—10,28000	65,61575	— 178,08660	—9,24120	20,77999	— 2,01969	— 5,99619	—0,25548
18	— 3,39000	24,91635	1223,99795	—3,05084	10,34377	0,54385	3,23792	0,83155
19	— 0,79000	— 19,16948	2650,99885	—1,16291	— 3,14329	— 2,25527	13,01588	—1,09875
20	5,67000	— 64,04174	4058,83027	4,59458	—17,79326	— 1,58898	20,53857	0,23596
21	8,17000	—103,24043	5402,61995	6,42402	—27,84865	— 3,25401	26,47228	—0,90183
22	14,64000	—134,26555	6643,16920	12,27499	—31,48002	1,33498	29,15198	3,92526
23	9,13000	—150,64710	7749,45290	6,21295	—22,83640	— 1,72321	33,16666	1,22379
24	2,80000	—157,89508	8705,08950	—0,59391	— 7,97983	— 3,36708	35,45813	—0,21647

25	−3,53000	−162,33949	9502,83102	− 7,32199	6,28283	−5,13857	34,38252	−2,08353
26	−2,09000	−170,31033	10138,23305	− 6,19906	13,22350	−1,60360	28,16834	0,89928
27	−2,83000	−180,36760	10603,32475	− 7,17114	13,96511	−2,31795	20,35056	−0,50971
28	1,16000	−193,25130	10888,04885	− 3,32321	7,53558	−0,70443	10,21483	0,20320
29	1,69000	−204,97143	10979,52165	− 2,83886	− 2,21716	−3,60937	− 0,62533	−3,66493
30	12,94000	−214,99799	10866,02302	8,46778	−14,80876	3,32140	−15,07486	1,98193
31	14,12000	−212,08098	10537,52640	9,81170	−18,93258	3,23220	−26,20299	0,90395
32	12,24000	−195,04040	9996,94880	8,20145	−13,24470	3,59862	−34,09892	0,56878
33	5,40000	−165,75625	9261,33080	1,72852	0,64463	1,95254	−38,39623	−1,45913
34	2,83000	−131,06853	8359,95655	− 0,39139	16,26248	5,26019	−40,74100	1,64017
35	−9,61000	− 93,54724	7327,51377	−12,31650	31,48894	−1,37339	−37,82558	−4,73436
36	−3,12000	− 65,63238	6201,52375	− 5,26463	34,39890	6,68976	−36,28355	3,46581
37	−7,66000	− 40,83395	5009,90135	− 9,21001	32,04423	1,92608	−28,05176	−0,56644
38	−1,31000	− 23,69195	3777,44500	− 2,24501	20,47955	4,87209	−17,89389	3,28214
39	−1,27000	− 7,85638	2521,29670	− 1,57819	6,66986	0,73974	− 2,86393	0,48527
40	1,63000	6,71276	1257,29202	1,95255	− 8,71802	−1,07716	12,90577	0,06957
41	4,65000	22,91547	10	5,59994	−22,15335	−2,09885	27,59831	0,35338
	Eredeti $y_\nu^{(0)}$ értékek, első és második iterációk $z_\nu^{(2)}$, $y_\nu^{(4)}$; első harmonikust mutatnak. Lásd az 1, 2, 3 ábrát			Első maradék és iterációja; negyedik harmonikust mutat. Lásd a 4, 5. ábrát		Második maradék és iterációja $\alpha_\nu^{(0)}$, $\alpha_\nu^{(2)}$; második harmonikust mutat. Lásd a 6, 7 ábrát		Harmadik maradék $\beta_\nu^{(0)}$

A (39) és (40) egyenletekből

$$y_k^{(1)} = \frac{1}{N-k} \sum_{\nu=0}^{N-k-1} \{e^{ik\Omega} + e^{-ik\Omega} + e^{i(2\nu+k)\Omega} + e^{-i(2\nu+k)\Omega}\} =$$

$$2 \cos k\Omega + \frac{1}{N-k} \sum_{\nu=0}^{N-k-1} \{e^{i(2\nu+k)\Omega} + e^{-i(2\nu+k)\Omega}\}.$$

Fenti kifejezés akkor és csak akkor tiszta harmonikus, hogyha a második tag minden k-értékre eltűnik. (13) és (14) egyenletek igénybevételével kimutatható, hogy az összeg zérussá válik, hogyha

$$e^{i\Omega(N-3/2)} = -1,$$

azaz

$$\Omega = \Omega_{\mathbf{K}} = \frac{(2\mathbf{K}+1)\pi}{N-3/2}, \qquad \mathbf{K} = 0, 1, 2 \ldots \qquad (41)$$

esetén. Ezért (39) körülbelül megfelel egy Ω_k ($k = 1, 2, \ldots$) frekvenciák szerinti analízisnek. Mivel azonban az eljárás nem lineáris, két (41) szerinti frekvencia kombinálása a konbinációs frekvenciák egész spektrumát eredményezi. Mivel pedig véletlen körülmények ezen frekvenciák akármelyiket erősíthetik, úgy véljük, (amíg az ellenkezőjét nem sikerül bebizonyítani), hogy a (39) eljárás megismétlése hamis frekvenciákra vezethet. Úgy érezzük, hogy (39) nemcsak bonyolult, hanem nincs különös jelentése sem és nem igen ajánlható.

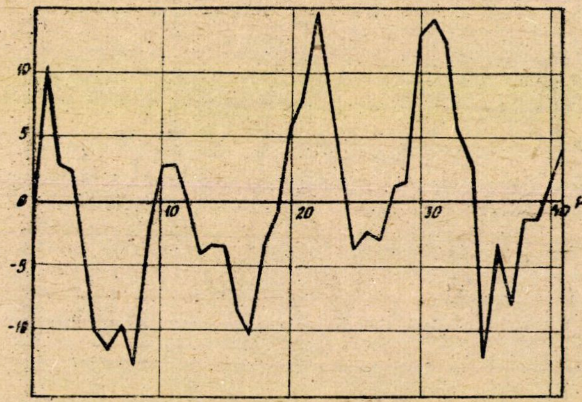
4. A *Fuhrich* és *Pollak* által javasolt

$$y_k^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{N-k-1} y_\nu y_{\nu+k} \Bigg/ \left(\sum_{\nu=0}^{N-k-1} y_\nu^2 \sum_{\nu=k-1}^{N-1} y_\nu^2 \right)^{1/2} \qquad (42)$$

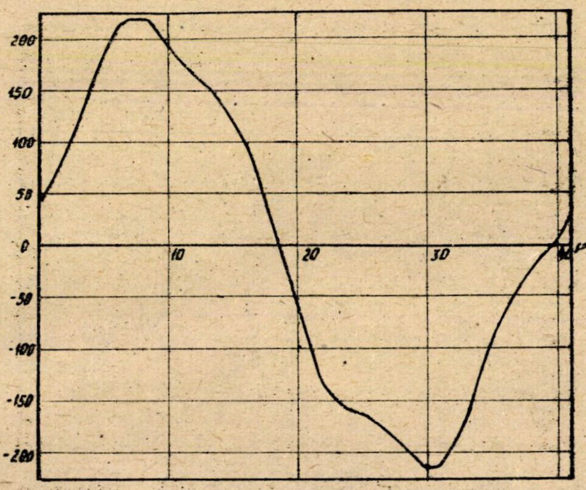
iterálás ugyanolyan típusú, mint (39), de még bonyolultabb. A részletes vizsgálat azt mutatja, hogy (40) a frekvenciák semilyen készletét sem reprodukálja pontosan. Fenti meggondolás alapján arra kell következtetnünk, hogy a (42) iterálás gyakorlati alkalmazásokra nem ajánlható.

Hálával tartozom Leonie feleségemnek azért, hogy a numerikus számolásokat végig elvégezte.

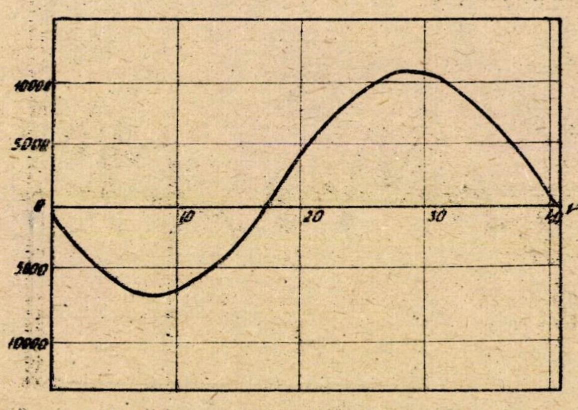
Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézet
Kozmikus Sugárzási Osztálya.



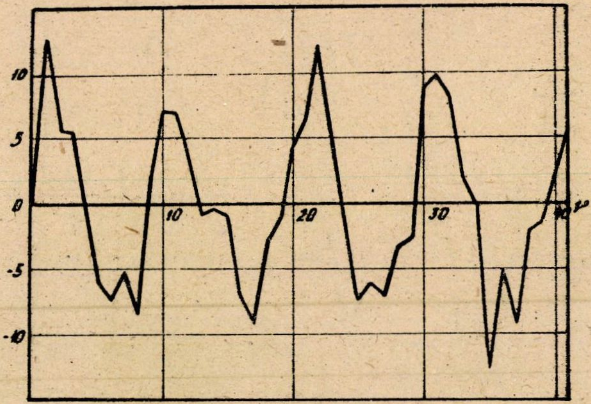
1. ábra $y_\nu^{(0)}$, eredeti értékek



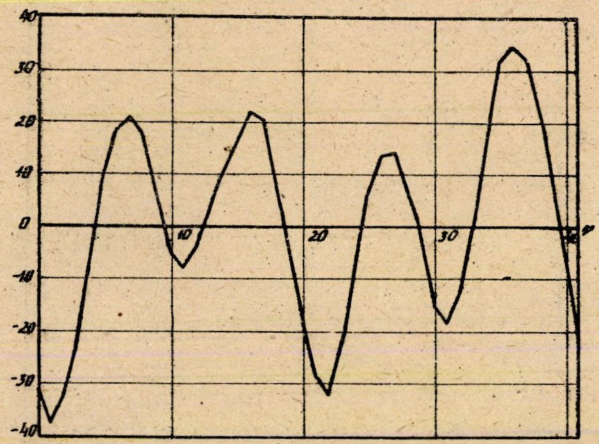
2. ábra $\eta_\nu^{(2)}$, eredeti értékek első iterációja



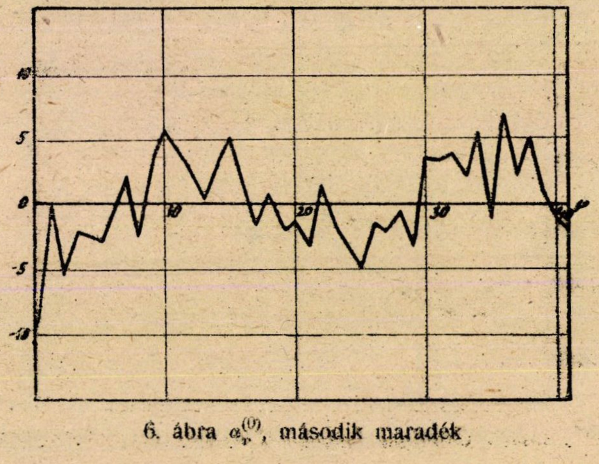
3. ábra $y_\nu^{(4)}$, eredeti értékek második iterációja; első harmonikust mutat



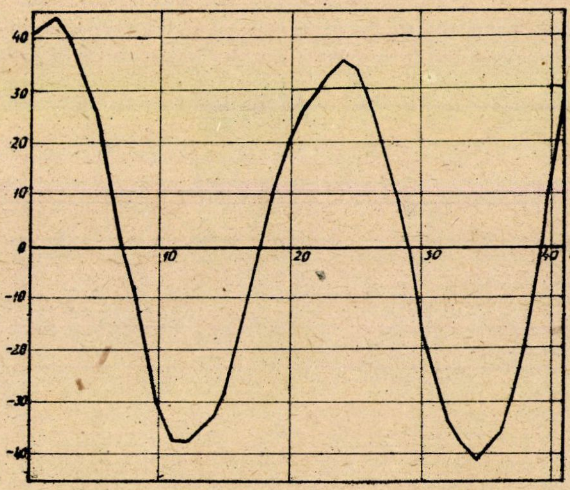
4. ábra $\zeta_{\nu}^{(0)}$, első maradék



5. ábra $\zeta_{\nu}^{(2)}$, első maradék iterációja; negyedik harmonikust mutat



6. ábra $\alpha_{\nu}^{(0)}$, második maradék



7. ábra $\alpha_{\nu}^{(2)}$, második maradék iterációja; második harmonikust mutat

IRODALOM

[1] *L. W. Pollak:* Harmonic Analysis Schedules; Stationery Office Dublin 1947.

[2] *J. Fuhrich:* Statisticky Obzor, Prague, 471. 1933. — *L. W. Pollak* und *Kaiser:* Statisticky Obzor, Prague *16*, 13, 1935.

[3] *Galitzin:* Compt. Rend. Just. Sism. 1, 1904. — *W. Schmidt:* Meteorologische Zeitschrift 401, 1911., 392, 1913.

[4] *Rubinstein:* Meteorologische Zeitschrift 222, 1922.

ALGEBRAI RENDSZEREK, AMELYEKBEN KÖZÉP-OPERÁCIÓ VAN ÉRTELMEZVE

FUCHS LÁSZLÓ

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1950. december 12-én tartott felolvasó ülésen

1. Bevezetés. Különféle középértékek, mint például a számtani, mértani, négyzetes, harmonikus stb. közepek jól ismeretesek nemcsak a matematikusok, hanem azok előtt is, akik a matematika alkalmazásainak területén dolgoznak. Tudjuk, hogy ezeknek milyen fontos szerepük van a különféle átlagértékek számításánál. Ezért meglepő tény, hogy a középértékeknek egységes matematikai tárgyalása egészen 1930-ig nem történt meg. Ekkor vezették valószínűségszámítási kutatásai *A. Kolmogorov*ot a közepekhez és ekkor adta a középértékek elméletének megalapozását;[1] ugyanazokhoz az eredményekhez jutott tőle függetlenül *M. Nagumo* is.[2] Definíciójuk értelmében az $x_1, \ldots, x_n$ számok középértékén az ú. n. *kvázi-aritmetikus* közepeket értjük, vagyis azon $M_n(x_1, \ldots, x_n)$ n-változós függvényeket, amelyek ilyen alakban írhatók:

$$f(M_n) = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

ahol $f(x)$ egy folytonos és szigorúan monoton függvény. A kvázi-aritmetikus közepek a közönséges aritmetikai (számtani) közép általánosítása, hiszen $f(x) = x$ esetén éppen a számtani közepet kapjuk. A többi nevezetes közép is kvázi-aritmetikus: a mértaninál $f(x) = \log x$, a harmonikusnál $f(x) = \frac{1}{x}$, a hatványközepeknél pedig $f(x) = x^k$. *Kolmogorov* és *Nagumo* a kvázi-aritmetikus közepeket bizonyos axiómákkal jellemzik. Ezek azonban nem alkalmasak arra, hogy egy adott $M_n(x_1, \ldots, x_n)$ n-változós függvényről eldöntsék, hogy kvázi-aritmetikus közép-e, mert az axiómák a középértékeket nem egy fix változószámra (pl. $n = 2$-re) definiálják, hanem csak $n = 2, 3, 4, \ldots$ változóra *egyszerre*[3]. *Fenyő István*nak sikerült[4] olyan axiómarendszert megadni, amely (analiticitási feltételek nélkül is) alkalmas adott változószámú közepek jellemzésére. *Fenyő* eredményeit lényegesen egyszerűsítette *Aczél János*[5] egy új axióma felállításával (ez az ú. n. biszimmetricitás, l. alább). Ezzel nemcsak a közönséges középértékek elmélete nyert igen áttekinthető s egyszerű formát, hanem ennek segítségével *Aczél*nak sikerült a súlyozott közepek karakterizálása is.[6] A súlyozott kvázi-aritmetikus közepek azok az $M_n(x_1, \ldots, x_n)$ függvények, amelyekre

$$f(M_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n);$$

itt $f(x)$ egy folytonos és monoton növekedő függvény és a λ_i pozitív súlyok összege 1. *Aczél* kimutatta, hogy a nem-szimmetrikus közepek éppen a súlyozott kvázi-aritmetikus közepek.[6]

A jelen dolgozat a középértékekre vonatkozó ismert eredményeket általánosítja olyképpen, hogy valós számok helyett bizonyos tulajdonságokkal felruházott rendszereket tekint, amelyekben egy a kvázi-aritmetikus közepekhez hasonló közép-operáció van értelmezve. Miként meglévő eredmények minden algebrizálásának, úgy ennek is az a célja, hogy az egyes fogalmak közt fennálló kapcsolatok közül a lényegeseket kidomborítsa, a lényegteleneket elvesse és ezáltal a dolog leglényegére mutasson rá. Eredményeink a valós esetre vonatkozó tételekkel teljesen megegyeznek, tárgyalásunk is lényegileg *Aczél János* módszerét követi, csupán a nem-szimmetrikus közepeknél alkalmaztunk bizonyos, tárgyalásmódunk szolgáltatta egyszerűsítéseket.

A legegyszerűbb esetet: a kétváltozós közepek esetét tárgyaljuk. Néhol csak utalunk az angol nyelven megjelent részletes kidolgozásra, amely az Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae első kötetének 2—4. füzetében jelent meg "On mean systems" címmel (303—320 old.).

2. Definíció és következményei. Legyen M olyan algebrai rendszer, amely a következő axiómáknak tesz eleget:

(1) M *teljesen rendezett halmaz,* azaz M elemeire definiálva van egy $\geqq$ rendezési reláció olyképpen, hogy (i) M-nek bármely két a, b elemére vagy $a \geqq b$ vagy $b \geqq a$ fennáll, (ii) $a \geqq b$ és $b \geqq a$ együttes fennállásából $a = b$ következik, (iii) $a \geqq b$ és $b \geqq c$-ből $a \geqq c$ következik, végül (iv) M *teljes* abban az értelemben, hogy M-nek minden Dedekind-szelete M-nek egy elemét értelmezi.*

(2) M-*nek bármely két elemére értelmezve van egy közép-operáció,* amelyet (az algebrában használatos módon) egyszerűség kedvéért szorzatként írunk: $ab = c$ az M-nek egyértelműen definiált eleme. ab az a-nak és b-nek a közepe (sorrend!).

(3) *A közép-operáció idempotens,* azaz $aa = a$ az M halmaz minden a elemére. Tehát minden elemnek önmagával vett közepe az elemet sajátmagát szolgáltatja.

(4) *A közép-operáció szigorúan monoton:* ha $a > b$, akkor az M minden c elemére $ac > bc$ és $ca > cb$. Vagyis nagyobb elemmel képzett közép is nagyobb.

(5) *A közép-operáció biszimmetrikus:* $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ az M halmaz bármely négy elemére.**

* A teljességgel ekvivalens követelmény pl. az, hogy M minden korlátos, nem-üres részhalmazának legyen egy legkisebb felső korlátja és egy legnagyobb alsó korlátja. Az ekvivalencia ugyanúgy bizonyítható, mint a valós esetben.

** Ez *Aczél* axiómája. Hogy ez a súlyozott kvázi-aritmetikus közepekre fennáll, az azonnal belátható: ha λ és μ pozitív súlyok összege 1, akkor $f(xy) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ miatt

$$f[(ab)(cd)] = \lambda f(ab) + \mu f(cd) = \lambda^2 f(a) + \lambda\mu f(b) + \mu\lambda f(c) + \mu^2 f(d) =$$
$$= \lambda f(ac) + \mu f(bd) = f[(ac)(bd)],$$

innen pedig f szigorúan monoton volta miatt $(ab)(cd) = (ac)(bd)$, azaz éppen a biszimmetricitás következik.

(6) *A közép-operáció archimedeszi:** ha $a < c < b$, akkor elég sokszor alkalmazva a közép-operációt, elérhető, hogy $bb \dots ba > c$ és hogy $abb \dots b > c$ legyen.**

Ezen axiómákból könnyen következnek az M halmaz következő tulajdonságai.

(α) A közép-operáció *intern* abban az értelemben, hogy a és b közepe a és b közé esik: ha $a > b$, akkor $a > ab > b$ (és $a > ba > b$). Ugyanis szorozzuk az $a > b$ egyenlőtlenséget jobbról a-val, majd balról b-vel; ekkor (3) és (4) miatt $a = aa > ab$ ill. $ab > bb = b$, tehát $a > ab > b$. Hasonlóan bizonyítható a másik állítás is. Az operáció intern volta teszi jogosulttá a „közép"-operáció terminológia használatát.

(β) Érvényes az *egyszerűsítési szabály:* ha $ax = ay$ (vagy $xa = ya$), akkor $x = y$. Ez azonnal következik abból, hogy ha $x \neq y$, akkor vagy $x > y$, vagy pedig $y > x$, ezekből viszont a szigorú monotonitás miatt $ax > ay$, ill. $ay > ax$ következik, ami ellentmondásban van az $ax = ay$ egyenlettel.

(γ) A biszimmetricitás és az idempotencia alapján bizonyítható a *disztributivitás:* $a(bc) = (ab)(ac)$, hiszen $a(bc) = (aa)(bc) = (ab)(ac)$. Hasonlóan: $(bc)a = (ba)(ca)$.

(δ) Az M halmazban definiálható a *határérték* a következő, meglehetősen kézenfekvő módon. M elemeinek egy $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozatáról akkor mondjuk, hogy egy a határértékhez konvergál (jelben $a_\nu \rightarrow a$), ha M-nek az a elemet tartalmazó minden (b, c) nyilt intervallumához*** található olyan N természetes szám, hogy $b < a_\nu < c$, ha $\nu > N$. M teljességének felhasználásával a valós számok esetére jól ismert gondolatmenettel könnyen igazolható, hogy minden monoton növekedő s felülről korlátos sorozatnak van határértéke, amely egyszersmind a sorozat legkisebb felső korlátja.

(ε) A következő lemma mutatja, hogy a közép-operáció folytonossága már következik a fenti axiómákból.

Folytonossági lemma. *A közép-operáció folytonos abban az értelemben, hogy* $a_\nu \rightarrow a$ *esetén* $a_\nu b \rightarrow ab$ *és* $ba_\nu \rightarrow ba$, *ill. általánosabban: ha* $a_\nu \rightarrow a$ *és* $b_\nu \rightarrow b$, *akkor* $a_\nu b_\nu \rightarrow ab$.

Ennek bizonyítása archimedeszi axiómánkon alapszik. A részletes bizonyításra itt nem térünk ki, hanem utalunk a bevezetésben említett cikkre. Meg-

* A geometriából jól ismert archimedeszi axióma így szól: minden adott AB távolságot az A pontból (a nulla-pontból) kiindulva felmérhetünk olyan sokszor, hogy bármely adott C ponton túlhaladunk. Ezzel egyenértékű követelmény az, hogyha p és q pozitív számok, akkor alkalmas n természetes számra $np > q$. Bizonyítandó tételünkből látni fogjuk, hogy (6) axiómánk lényegileg éppen ezt követeli.

** Rövidség kedvéért elhagyjuk a zárójeleket: $bb \dots ba = b\{b[\dots(ba)]\}$.

*** A (b, c) intervallumon M mindazon elemeiből álló részhalmazt értjük, amelyek b és c közé esnek. Nyilvánvaló, hogy mit értünk nyilt és zárt intervallumon.

jegyezzük, hogy megfordítva is: az archimedeszi axióma egyenes következménye a folytonosságnak.

(ζ) Jelentse x az M halmaznak egy változó elemét. x polinomjának nevezzük M véges sok elemét tartalmazó olyan szorzatokat, amelyekben x-en kívül csak konstansok szerepelnek, pl. $g(x)=a\{x[(bx)c]\}$. A monotonitás alapján azonnal látható, hogy egy nem-konstans polinom feltétlenül monoton növekedő a szűkebb értelemben: ha $x<y$, akkor $g(x)<g(y)$. A folytonossági lemma miatt minden polinom folytonos és így érvényes a valós analízisből jól ismert Bolzano-tétel analogonja:

Bolzano-féle lemma. *Legyen $g(x)$ M-nek egy polinomja és legyenek v, w az M elemei, melyekre $g(v)<a$, ill. $g(w)>a$. Ekkor a $g(x)=a$ egyenletnek M-ben egy s csakis egy x gyöke van.*

(A gyök egyértelműsége a monotonitás folyománya.)

3. Kommutatív közép-operációk. Először a kommutatív esetet tárgyaljuk, tehát az (1)—(6) axiómákon kívül feltesszük, hogy

(7) *A közép-operáció kommutatív: $ab=ba$* minden a, b-re.

Most definiálni fogjuk a valós számok $(0, 1)$ intervallumának M egy tetszőleges (a, b) intervallumára való φ egy-egyértelmű leképezését. Ez a φ leképezés olyan tulajdonságú lesz, hogy az M rendszerben a közép-operációnak a valós számoknál a közönséges számtani közép képzése fog megfelelni. A $(0, 1)$ intervallumot (a, b)-re leképező φ függvény konstrukciójánál *Aczél János* módszerét fogjuk követni.

Tegyük $\varphi(0)=a$ és $\varphi(1)=b$. A φ függvényt először a $(0, 1)$ intervallumba eső diadikus törtekre definiáljuk. Ezek a $\delta/2^n$ alakú számok, ahol δ pozitív egészszám $\leqq 2^n$. Legyen

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi(0)\cdot\varphi(1)=ab,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{4}\right)=\varphi(0)\cdot\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=a(ab),\qquad \varphi\left(\frac{3}{4}\right)=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\varphi(1)=(ab)b,$$

s. í. t. Általában írjuk δ-t ilyen alakban: $\delta=2\delta'+\varepsilon$, ahol $\varepsilon=0$ vagy 1 aszerint, hogy δ páros vagy páratlan, és definiáljuk:

$$\varphi\left(\frac{\delta}{2^n}\right)=\varphi\left(\frac{\delta'}{2^{n-1}}\right)\cdot\varphi\left(\frac{\delta'+\varepsilon}{2^{n-1}}\right)\qquad (n\geqq 1).$$

(Ha $\varepsilon=0$, akkor ez nem mond semmi újat, de az idempotencia miatt helyes.) Evidens, hogy φ monoton növekedő függvény és könnyen belátható, hogy eleget tesz a következő függvény-egyenletnek:

$$(*)\qquad \varphi(\xi)\varphi(\eta)=\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right).$$

Valóban, tegyük $\xi=\dfrac{2\delta+\varepsilon}{2^n}$ és $\eta=\dfrac{2\vartheta+\varepsilon'}{2^n}$ és alkalmazzunk n-re vonatkozó teljes indukciót. Ekkor a definíció szerint és a kommutativitás miatt

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\left[\varphi\left(\frac{\delta}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2^{n-1}}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\theta+\varepsilon'}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\right],$$

ez pedig a biszimmetricitás miatt így is írható:

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\left[\varphi\left(\frac{\delta}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\theta+\varepsilon'}{2^{n-1}}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2^{n-1}}\right)\varphi\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\right].$$

Most felhasználjuk az indukciós feltevést az $n-1$ kitevőre:

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\varphi\left(\frac{\delta+\theta+\varepsilon'}{2^{n}}\right)\varphi\left(\frac{\delta+\theta+\varepsilon}{2^{n}}\right),$$

amire ismét alkalmazva a definíciót (ez amiatt lehetséges, hogy a számlálók legfeljebb egy egységgel térnek el egymástól), kapjuk

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\varphi\left(\frac{2\delta+2\theta+\varepsilon'+\varepsilon}{2^{n+1}}\right)=\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right).$$

A φ függvény értelmezési tartományát most kiterjesztjük a $(0, 1)$ valós intervallum minden számára, tehát a nem-diadikus törtekre is. Ez annak alapján lehetséges, hogy minden nem-diadikus valós szám tetszőleges pontossággal megközelíthető diadikus törtekkel. Legyen A_ξ és B_ξ a ξ valós számnál kisebb η, ill. a ξ-nél nagyobb ζ diadikus törtek halmaza. Jelentse A az M halmaz $y=\varphi(\eta)$ alakú elemeinek halmazát, hol η befutja A_ξ elemeit. Az A halmaz nem-üres, felülről korlátos, és így van az A-nak egy legkisebb felső korlátja: y'. Hasonlóan legyen z' a legnagyobb alsó korlátja azon B halmaznak, mely a $z=\varphi(\zeta)$, $\zeta\in B_\xi$ alakú elemekből áll. A φ monotonitásából evidens, hogy $a<y'\leqq z'<b$. Bizonyítjuk, hogy $y'=z'$. Ugyanis $y'<z'$ esetén alkalmazzuk az $a<y'<z'$ elem-hármasra az archimedeszi axiómát, amely szerint elegendő sokszor (n-szer) szorozva, elérhető, hogy $y'<az'z'\ldots z'$. Ennek következménye, hogy A-nak minden $y=\varphi(\eta)$ és B-nek minden $z=\varphi(\zeta)$ elemére $y<azz\ldots z$ érvényes, hiszen feltétlenül $y\leqq y'$ és $z'\leqq z$ az y' és z' definíciója miatt. Ámde $az=\varphi\left(\frac{\zeta}{2}\right)$, $azz=\varphi\left(\frac{3\zeta}{4}\right)$, $\ldots$, $azz\ldots z=\varphi\left(\frac{(2^n-1)\zeta}{2^n}\right)$ lévén, $y<azz\ldots z$ azt jelenti, hogy $\eta<\zeta-\frac{\zeta}{2^n}$ igaz egy rögzített n-re és minden olyan diadikus valós η, ζ számokra, melyek eleget tesznek az $\eta<\xi<\zeta$ követelménynek. Ez nyilvánvaló ellentmondás. Tehát csakugyan $y'=z'$, és így definiálhatjuk $\varphi(\xi)=y'=z'$. Ennélfogva φ már értelmezve van minden 1-nél kisebb pozitív valós számra. Az előbbi okoskodás azt is mutatja, hogy φ értékkészlete nem hagyhatja ki az (a, b) intervallum egyetlen elemét sem.

Mindezek alapján világos, hogy φ a $(0, 1)$ valós intervallum és M-nek (a, b) intervalluma közt egy kölcsönösen egyértelmű s monoton megfeleltetést létesít, melyre (*) érvényes.

A φ függvényt még ki kell terjeszteni olyképpen, hogy értékkészlete ne csak az (a, b) intervallumra korlátozódjék, hanem M minden elemét felölelje. Ha c jelenti M-nek egy tetszésszerinti elemét az (a, b) intervallumon kívül, pl. $a < b < c$, akkor az archimedeszi axióma miatt n-szeri közép-operáció alkalmazása után elérhető, hogy $a < aa \ldots ac < b$ legyen. Ha $\varphi(\delta) = aa \ldots ac$, $\varphi(0) = a$ és $\varphi(\gamma) = c$, akkor nyilván $\delta = \frac{\gamma}{2^n}$ kell legyen és ennek alapján δ ismeretében γ meghatározható. Ez a kiterjesztett φ függvény már M minden elemét felveszi és eleget tesz a (*) függvény-egyenletnek. Így φ-nek inverz függvénye: $f(x)$, amely az egész M halmazt képezi le kölcsönösen egyértelmű s monoton módon a valós számok egy I intervallumára, eleget tesz az

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

függvény-egyenletnek. Ezáltal teljesen bebizonyítottuk a következő tételt.

1. tétel. *(Kolmogorov, Nagumo, Fenyő, Aczél.) Ha egy* M *halmaz eleget tesz az* (1)—(7) *axiómáknak, akkor létezik olyan szigorúan monoton* $f(x)$ *függvény (a* $\varphi(\xi)$ *inverz függvénnyel), mely* M*-et a valós számok egy* I *intervallumára képezi le úgy, hogy*

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

ill.

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varphi\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right)$$

*érvényes.**

Megjegyezzük, hogy $f(x)$ és $\varphi(\xi)$ nincsenek egyértelműen meghatározva, hiszen a kiindulásul szolgáló (a, b) intervallumot tetszőleges módon választhattuk. Azonban kimutatható, hogy ha $f(x)$ egy a tétel állítását kielégítő függvény, akkor az összes ilyen függvény a $g(x) = \sigma f(x) + \tau$ alakban állítható elő, hol σ, τ valós számok és $\sigma > 0$. [$g(x)$-hez természetesen más I intervallum tartozhatik.] Ezek szerint az $f(x)$ függvény csak egy pozitív lineáris transzformáció erejéig van meghatározva.

4. A nem-kommutatív eset. Most az előbbi részben tett kommutativitási feltételt elejtjük és az általános, nem-kommutatív esettel foglalkozunk. Az M halmazra be fogjuk bizonyítani *Aczél János*nak azon tételét, hogy a középoperáció lényegileg súlyozott aritmetikai közép képzése. A most adandó bizonyítás *Aczél* eredeti bizonyításának némileg egyszerűsített és algebrizált alakja.

* E tételből kiderül, hogy M-re vonatkozó archimedesi axiómánk a valós számokra azt jelenti, hogy ha $\alpha < \gamma < \beta$, akkor van olyan n természetes szám, hogy $\gamma < \frac{\alpha + (2^n - 1)\beta}{2^n}$, azaz $2^n(\beta - \gamma) > \beta - \alpha$, ami valóban semmi egyéb, mint a valós számokra vonatkozó archimedeszi axióma.

Jelölje t az M-nek egy tetszőleges, de a továbbiakban rögzített elemét. Adott x, y elemek mellett oldjuk meg z-re a

$$g(z)=(tz)(zt)=(tx)(yt)$$

egyenletet. Mivel pl. $x<y$ esetén $g(x)=(tx)(xt)<(tx)(yt)$, viszont $g(y)=$ $=(ty)(yt)>(tx)(yt)$, ezért a Bolzano-lemma értelmében van pontosan egy olyan z, mely a kívánt feltételnek eleget tesz. z az x-től és az y-tól függ, jelöljük: $z=x\wedge y$. A definícióból nyilvánvaló, hogy $x\wedge x=x$ és ha $x<x'$, akkor $x\wedge y<x'\wedge y$, továbbá a biszimmetricitás folytán $x\wedge y=y\wedge x$. Vegyük még figyelembe, hogy a disztributivitás, a biszimmetricitás és az idempotencia miatt

$$[t(xy)][(yx)t]=[(tx)(ty)][(yt)(xt)]=[(tx)(yt)][(ty)(xt)]=$$
$$=[(tx)(yt)][(tx)(yt)]=(tx)(yt)=(tz)(zt),$$

ebből pedig

$$z=x\wedge y\geqq \min(xy, yx)$$

következik. Hasonló meggondolás arra vezet, hogy

$$(x\wedge y)\wedge y\geqq \min(xyy, y(xy), yyx),$$

s. í. t. (6) alapján az $\wedge$ operáció archimedeszi tulajdonsága következik. Ha még sikerül azt is belátni, hogy $\wedge$ biszimmetrikus, azaz $(x\wedge y)\wedge(u\wedge v)=$ $=(x\wedge u)\wedge(y\wedge v)$, akkor ezzel kimutattuk, hogy $\wedge$ egy kommutatív középoperáció. A biszimmetrícitás igazolásához egy lemmára van szükségünk.

Aczél-féle lemma. *M-nek bármely négy elemére:*

$$(x\wedge y)(u\wedge v)=xu\wedge yv.$$

Ennek bizonyítása céljából képezzük

$$h=\{t[(x\wedge y)(u\wedge v)]\}\{[(x\wedge y)(u\wedge v)]t\}=$$
$$=\{[t(x\wedge y)][t(u\wedge v)]\}\{[(x\wedge y)t][(u\wedge v)t]\}=$$
$$=\{[t(x\wedge y)][(x\wedge y)t]\}\{[t(u\wedge v)][(u\wedge v)t]\},$$

amiből $\wedge$ definíciója szerint

$$h=[(tx)(yt)]\cdot[(tu)(vt)]=[(t(xu)][(yv)t]=[t(xu\wedge yv)][(xu\wedge yv)t].$$

Innen $g(z)=(tz)(zt)$ monotonitása következtében a lemma állítását nyerjük. A lemmából egy újabb fajta disztributivitás adódik a már említett $u=u\wedge u$ idempotencia alapján:

$$u(x\wedge y)=(u\wedge u)(x\wedge y)=ux\wedge uy$$

és

$$(x\wedge y)u=xu\wedge yu.$$

Mármost a disztributivitás szerint a $w=(x\wedge y)\wedge(u\wedge v)$ jelöléssel

$$(tw)(wt)=[t(x\wedge y)][(u\wedge v)t]=(tx\wedge ty)(ut\wedge vt)=(ty\wedge tx)(ut\wedge vt),$$

ez pedig a lemma értelmében egyenlő a $(ty)(ut)\wedge(tx)(vt)$ elemmel. Az eredeti operáció biszimmetrikus voltából nyerjük, hogy itt y és u felcserélhető, tehát az $\wedge$ operáció biszimmetrikus és így valóban: $\wedge$ egy kommutatív középoperáció.

Alkalmazzuk az $\wedge$ kommutatív közép-operációra az 1. tételt. Eszerint van oly φ függvény (az f inverzzel), mely egy valós I intervallumot M-re olyan módon képez le, hogy

$$\varphi(\xi)\wedge\varphi(\eta)=\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right).$$

Ezt helyettesítsük be az *Aczél*-féle lemmába. Az $x=\varphi(\xi), y=\varphi(\eta), u=\varphi(\varrho)$, $v=\varphi(\sigma)$ jelölésekkel

$$\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{\varrho+\sigma}{2}\right)=\varphi\left(\frac{f(\varphi(\xi)\varphi(\varrho))+f(\varphi(\eta)\varphi(\sigma))}{2}\right),$$

vagyis

$$f\left(\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\cdot\varphi\left(\frac{\varrho+\sigma}{2}\right)\right)=\frac{f(\varphi(\xi)\varphi(\varrho))+f(\varphi(\eta)\varphi(\sigma))}{2}.$$

Ez azt mutatja, hogy a kétváltozós $F(\xi,\eta)=f(\varphi(\xi)\varphi(\eta))$ valós függvény kielégíti a *Jensen*-féle

$$F\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\varrho+\sigma}{2}\right)=\frac{F(\xi,\varrho)+F(\eta,\sigma)}{2}$$

kétváltozós függvényegyenletet. Ismert tétel szerint[7] ennek egyetlen monoton megoldása $F(\xi,\eta)=\lambda\xi+\mu\eta+\nu$ rögzített λ,μ,ν valós számokra. Ennélfogva

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\varphi(\lambda\xi+\mu\eta+\nu).$$

Tegyük $\xi=\eta=0$, majd $\xi=\eta=1$, ekkor az idempotencia miatt $\varphi(0)\varphi(0)=$ $=\varphi(0)=\varphi(\nu)$, tehát $\nu=0$, ill. $\varphi(1)\varphi(1)=\varphi(1)=\varphi(\lambda+\mu)$, tehát $\lambda+\mu=1$ következik. Az operáció intern volta következtében

$$\min(\xi,\eta)\leqq\lambda\xi+\mu\eta\leqq\max(\xi,\eta),$$

ahonnan $0<\lambda<1, 0<\mu<1$ adódik. Ezzel bebizonyítottuk:

2. tétel. *(Aczél.) Ha* M *eleget tesz az* (1)—(6) *axiómáknak, akkor létezik olyan φ monoton és egy-egyértelmű leképezés, mely egy I valós intervallumot* M*-re képez le, és olyan* $0<\lambda<1$ *valós szám, hogy*

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta)=\varphi(\lambda\xi+\mu\eta) \qquad (\lambda+\mu=1),$$

vagyis

$$f(xy)=\lambda f(x)+\mu f(y) \qquad (\lambda+\mu=1),$$

ha t. i. f jelöli φ inverzét.

Főtételünk azt a tényt fejezi ki, hogy egy az (1)—(6) axiómáknak eleget tevő rendszer algebrailag nem különbözik a valós számoknak a számtani közép képzésével ellátott egy intervallumától.

A tétel néhány alkalmazására vonatkozólag utalunk az angolnyelvű részletes kidolgozásra.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *A. Kolmogorov:* Sur la notion de la moyenne, Rendiconti Accad. d. Lincei, Roma, *12* (1930), 388—391.

[2] *M. Nagumo:* Über eine Klasse der Mittelwerte, Japanese Journ. Math., *7* (1930), 71—79.

[3] A régi eredmények tárgyalását lásd pl. *Veress Pál:* A középérték fogalmáról, Mat. és Fiz. Lapok, *43* (1936), 46—60.

[4] *Fenyő István :* A középértékek elméletéről, doktori dolgozat (Budapest, 1945).

[5] *J. Aczél:* The notion of mean values, Norske Vid. Selsk. Forh., *19* (1946), 83—86.

[6] *J. Aczél:* On mean values, Bull. Amer. Math. Soc., *54* (1948), 392—400.

[7] *G. H. Hardy, J. E. Littlewood* and *G. Pólya:* Inequalities (Cambridge, 1934).

H. STEINHAUS EGY SEJTÉSÉRŐL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1951. május 8-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Egy 1937-ben tartott előadásában[1] *H. Steinhaus* a következő sejtést mondotta ki: ha valamely

$$\{f_n(x)\} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{1}$$

véges vagy megszámlálhatóan végtelen számú mérhető egy véges (a, b) intervallumban értelmezett sztochasztikusan független[2] függvényből álló függvényrendszer *függetlenség tekintetében telített,* vagyis ha nem létezik olyan $g(x)$ mérhető függvény, amely nem majdnem mindenütt állandó és amely az (1) rendszerhez hozzá volna csatolható a rendszer függetlenségének csorbítása nélkül, úgy az

$$\{f_1^{m_1}(x) f_2^{m_2}(x) \ldots f_n^{m_n}(x)\} \tag{2}$$

függvényrendszer, ahol $m_1, m_2, \ldots,$ függetlenül futják be az összes nem-negatív egész számokat és $n=1,2,3,\ldots,$ az (a, b) intervallumban *teljes. Steinhaus* megemlített néhány gondolkodásra késztető példát, amelyekben a fenti állítás érvényes: pl. ha (1) az

$$R_n(x) = \operatorname{sg} \sin (2^{n-1} \pi x) \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{3}$$

Rademacher-féle függvények rendszere, úgy (2) a jól ismert *Walsh*-féle rendszer, amelyről tudjuk, hogy teljes. Egy másik példa a következő: egy olyan függvényt, amely függetlenség tekintetében már önmagában telített rendszert alkot, *univerzális* függvénynek fogunk nevezni; világos, hogy $f_1(x)=x$ univerzális függvény; ebben az esetben (2) az $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots,$ rendszer, melyről tudjuk, hogy az teljes.

E megkapó példák ellenére a sejtés általában nem igaz. Vizsgáljuk pl. a

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{ha} \quad \frac{1}{2} < x \leqq 1 \end{cases}$$

függvényt. Minthogy $h(x)$ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$-ben monoton és ezen az intervallumon kívül nem veszi fel újból azokat az értékeket, amelyeket a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ intervallumban felvesz, ennélfogva *G. Ottaviani*[4] tétele értelmében $h(x)$ univerzális függvény. Másrészt könnyű belátni, hogy a $\{h^n(x)\}$ rendszer nem teljes, mivel $h^n(x)$ x minden értékére ortogonális a $g(x)$ függvényre, mely a következőképpen van definiálva:

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ ha } & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ ha } & \frac{1}{2} < x \leqq \frac{3}{4} \\ -1 \text{ ha } & \frac{3}{4} < x \leqq 1. \end{cases}$$

Mindazonáltal *Steinhaus* sejtése a független függvények telített rendszereinek egy igen általános osztályára érvényes.

A jelen értekezés célja az, hogy *Steinhaus* fentemlített sejtését igen általános feltételek mellett bebizonyítsuk. 1950-ben az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásomban[5] ugyanezt a sejtést erősebb korlátozó feltételek mellett bizonyítottam be; időközben sikerült a feltételek közül némelyeket kiküszöbölni. Az 1. §. egy általános tétel bizonyítását tartalmazza, amely tétel lehetővé teszi a (2) rendszer teljességének megállapítását oly feltétel mellett, amelyben a függetlenség fogalma egyáltalán nem szerepel. Ez a tétel valós függvénytani tétel, mindazonáltal magában foglalja mindazokat az ismert eseteket, amelyekben *Steinhaus* sejtése érvényes. Bevezetjük a *maximális* rendszerek fogalmát; az (a, b) intervallumban értelmezett valós, mérhető függvények (1) rendszerét maximálisnak nevezzük, ha x különböző értékeire az $\{f_n(x)\}$ sorozatok különbözőek (kivéve x értékeinek egy 0 mértékű halmazát). Ily módon az (1) rendszert maximálisnak nevezzük, ha létezik egy olyan 0 mértékű Z halmaz, hogy ha x_1 és x_2 közül egyik sem tartozik Z-hez és $f_n(x_1) = f_n(x_2)$ minden $n = 1, 2, 3, \ldots$ értékre, úgy $x_1 = x_2$. A tétel állítása az, hogy ha az (1) rendszer maximális, úgy a (2) rendszer teljes. A független függvények (1) rendszereinek valamennyi oly ismert példája, melyekre nézve a (2) rendszer teljes, maximális rendszer.*

Érdekes megjegyezni azt is, hogy független függvények valamely maximális rendszere függetlenség tekintetében mindenkor telített (3. lemma). Maximális rendszer érdekes példája a $\sin x$ és $\cos x$ függvényekből álló rendszer a $(0, 2\pi)$ intervallumban: ebben az esetben a (2) rendszer — a többiektől lineárisan függő függvények elhagyása után — a $\{\cos^n x, \sin x \cdot \cos^n x;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ rendszer amely ekvivalens a $\{\cos nx, \sin(n+1)x;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ rendszerrel, tehát a jól ismert trigonometrikus rendszerrel, melyről tudjuk, hogy az teljes.

* Két függvényrendszert egymással ekvivalensnek nevezünk, ha a két rendszer lineáris kombinációinak összeségei azonosak. Világos, hogy ha valamely rendszer teljes, minden vele ekvivalens rendszer szintén teljes.

Továbbá $\cos x$ önmagában véve maximális rendszert alkot $(0, \pi)$-ben és így a $\{\cos^n x\}$ rendszer, vagy ami ugyanaz, a $\{\cos nx\}$ rendszer a $(0, \pi)$-ben teljes. (V. ö. [6])

A $\{\sin x, \cos x\}$ rendszer példája a következőképpen általánosítható: ha $u = f(x)$ és $v = g(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ valamely az (u, v)-síkban fekvő görbe paraméteres egyenletei, amely görbe nem metszi önmagát (vagy amely görbe többszörös pontjainak halmaza x 0 mértékű halmazának felel meg), úgy az $\{f^n(x) g^m(x); n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$ rendszer teljes (feltesszük, hogy $f(x)$ és $g(x)$ korlátosak és mérhetők). Az az eset, amelyben az (1) rendszer csak egyetlen függvényből áll szintén nem teljesen triviális: ebben az esetben a tétel azt állítja, hogy ha $y = f(x)$ az (a, b) intervallumot egy az y tengelyen lévő halmazra egyértelműen és kölcsönösen képezi le, úgy az $\{f^n(x)\}$ rendszer teljes: ez a jelen dolgozat 2. lemmája; lemma alakjában közöljük ezt az állítást, bár az tételünknek speciális esete, minthogy az általános eset bizonyítása erre a speciális esetre van alapítva. Oly függvényt, amely önmagában maximális rendszert alkot, maximális függvénynek fogunk nevezni.

A legfontosabb lépés, amely a második lemmától tételünkhöz vezet, *A. N. Kolmogorov* egy gondolatának alkalmazása; *Kolmogorov* ezt a gondolatot egy a feltételes változó értékekre vonatkozó tétel bizonyítására használta fel egy dolgozatában [7] amelyben egy korábbi, a valószínűségszámítás központi határeloszlástételének az alapulvett valószínűségi mérték abszolut folytonos transzformációjára nézve invariáns jellegére vonatkozó tételemet [8] általánosítja. Köszönettel tartozom *Császár Ákos*nak egy értékes megjegyzéséért, amely segítségével a bizonyítást bizonyos mértékben sikerült egyszerűsíteni.

1. §. A teljes rendszerekre vonatkozó tétel bizonyítása

Először bebizonyítjuk a következő

1. lemmát. Jelöljön $f(x)$ egy a $(0, 1)$ *intervallumban értelmezett, mérhető, korlátos függvényt *, melynek értékei ugyanehhez az intervallumhoz tartoznak. Ha $g(x)$ tetszőleges korlátos Baire-féle függvény a* $(0, 1)$ *intervallumban úgy minden pozitív ε-hoz és pozitív A-hoz megadható egy olyan $P(x)$ polinom, amelyre*

$$\int_0^1 |g(f(x)) - P(f(x))|^A \, dx < \varepsilon. \tag{1. 1}$$

Bizonyítás: először bebizonyítjuk (1)-et arra az esetre, amikor $g(x) = 1$, ha $0 \leqq x \leqq u < 1$ és $g(x) = 0$, ha $u < x < 1$.

Tetszőleges pozitív ε-hoz található egy oly $P(x)$ polinom, mely a következő sajátságokkal rendelkezik:

$$1. \ 0 \leqq P(x) \leqq 1. \qquad 2. \ |g(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha } 0 \leqq x \leqq u$$

* Az egész dolgozatban a (0, 1) intervallumon értelmezett függvényekről beszélünk, de nyilván valamennyi tételünk bármely véges intervallumra érvényes.

és ha $u+\varepsilon \leqq x \leqq 1$. Így pl. a

$$P(x)=\frac{\int\limits_{u-n^{-\frac{1}{3}}}^{u+n^{-\frac{1}{3}}}(1-(x-t)^2)^n\,dt}{\int\limits_{-1}^{+1}(1-t^2)^n\,dt} \tag{1.2}$$

polinom, ha n-et elegendően nagynak választjuk, rendelkezik valamennyi megkívánt sajátsággal. Ebből következik, hogy

$$\int\limits_0^1 |g(f(x))-P(f(x))|^A\,dx \leqq \varepsilon^A+|E(\varepsilon)| \tag{1.3}$$

ahol $E(\varepsilon)$ jelöli x azon értékeinek halmazát, melyekre $u<f(x)<u+\varepsilon$ és $|E(\varepsilon)|$ ennek a halmaznak Lebesgue féle mértéke. Minthogy nyilvánvalóan $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|E(\varepsilon)|=0$ az említett függvényre (1.1) be van bizonyítva. Alkalmazva *H. Minkowski* ismert

$$\left\{\int\limits_0^1 |a(x)+b(x)|^A dx\right\}^{\frac{1}{A}} \leqq \left\{\int\limits_0^1 |a(x)|^A dx\right\}^{\frac{1}{A}}+\left\{\int\limits_0^1 |b(x)|^A dx\right\}^{\frac{1}{A}} \tag{1.4}$$

egyenlőtlenségét, következik, hogy ha az 1. lemma a $g_k(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ függvényekre igaz, úgy a $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k g_k(x)$ függvényekre is igaz. Ilymódon az 1. lemma bármilyen lépcsős függvényre igaz. Ugyanezt az egyenlőtlenséget felhasználva, következik, hogy ha az 1. lemma a $g_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ függvényekre igaz és ha

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 |g_n(f(x))-g^*(f(x))|^A\,dx=0 \tag{1.5}$$

úgy a lemma $g^*(x)$-re is igaz. De minthogy minden folytonos függvényre és ennek folytán minden korlátos $g^*(x)$ Baire-féle függvényre nézve megadható a $g_n(x)$ lépcsős függvények oly sorozata, hogy (1.5) igaz, következik, hogy az 1. lemma minden korlátos Baire-féle függvényre igaz.

Most bebizonyítjuk, a

2. lemmát. Ha $f(x)$ mérhető, korlátos és maximális függvény a (0, 1) *intervallumban úgy az*

$$\{f^n(x)\} \tag{1.6}$$

függvénysorozat az L^2 térben zárt.

Bizonyítás: tegyük fel először, hogy $f(x)$ Baire-féle függvény. Jelöljön $G(x)$ bármely, a (0, 1) intervallumban korlátos Baire-féle függvényt. Tekintetbe véve, hogy $f(x)$ *maximális,* következik, hogy $f^{-1}(y)$* és így $G(f^{-1}(y))=g(y)$

* y azon értékeire, amelyek nem tartoznak $f(x)$ értékkészletéhez, legyen definíciószerűen $f^{-1}(y)=0$.

szintén korlátos Baire-féle függvények és alkalmazva az 1. lemmát $A=2$-vel $g(x)$-re és tekintetbe véve, hogy $g(f(x))=G(x)$, azt kapjuk, hogy minden pozitív ε-hoz található egy olyan $P(x)$ polinom, hogy fennáljon, hogy

$$\int_0^1 |G(x)-P(f(x))|^2 dx < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Minden az L^2 osztályba tartozó mérhető $F(x)$ függvényre nézve található egy oly korlátos $G(x)$ Baire-féle függvény, hogy $\int_0^1 (F(x)-G(x))^2 dx < \varepsilon$, tehát (1.7) miatt a *2. lemma* igaz, ha $f(x)$ Baire-féle függvény. De minthogy az (1.7) integrál nem változik, ha $f(x)$ értékét egy 0 mértékű halmazon megváltoztatjuk, a 2. lemma be van bizonyítva.

Most bebizonyítjuk a következő·

1. tételt. Legyen $\{f_n(x)\}$, *korlátos, mérhető függvényeknek véges vagy megszámlálhatóan végtelen maximális rendszere a* (0, 1) *intervallumban, ebben az esetben az*

$$\{f_1^{m_1}(x) f_2^{m_2}(x) \cdots f_n^{m_n}(x)\} \qquad (0 \leqq m_k;\ k=1,2,\ldots n;\ n=1,2,\ldots) \tag{1.8}$$

függvényrendszer az L^2 *térben teljes.*

Bizonyítás: nyilván feltételezhetjük, hogy $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$, továbbá, hogy valamennyi $f_n(x)$ függvény Baire-féle függvény. Tegyük fel most, hogy

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^{2n-1}} \qquad \text{ahol } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n} \tag{1.9}$$

x-nek diadikus kifejtése, tehát

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \frac{1}{2} \leqq (2^{n-1}x) < 1 \\ 0 & \text{ha } 0 \leqq (2^{n-1}x) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

ahol (z) jelöli z tört részét. Továbbá legyen $\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(\varphi_1(x))$ $(k=2,3,\ldots)$ és

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}}. \tag{1.10}$$

Minthogy $\varphi_1(x)$ Baire-féle függvény, $\varphi_k(f_k(x))$ és ennélfogva $f(x)$ szintén Baire-féle függvény. Könnyű belátni tovább, hogy $f(x)$ maximális függvény*.

Tényleg, ha $N=2^{r-1}(2s-1)$, azt kapjuk hogy $\varepsilon_N(f(x)) = \varepsilon_s(f_r(x))$. Így tehát, ha $x_1 \neq x_2$ úgy létezik, (kivéve, ha x_1 vagy x_2 egy bizonyos 0 mértékű Z halmazhoz tartozik) r-nek legalább egy oly értéke, melyre $f_r(x_1) \neq f_r(x_2)$ és

* Egyetlen olyan valós változójú függvény bevezetése, mely akkor és csak akkor maximális, ha az (1) rendszer maximális, *A. N. Kolmogorov*nak a dolgozat bevezetésében említett gondolata.

így s-nek legalább egy olyan értéke, melyre

$$\varepsilon_N(f(x_1)) = \varepsilon_s(f_r(x_1) \neq \varepsilon_s(f_r(x_2)) = \varepsilon_N(f(x_1))$$

ahol $N = 2^{r-1}(2s-1)$; és íly módon azt kapjuk, hogy $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ebből következik a 2. lemma alapján, hogy tetszőleges $F(x) \in L^2$ függvényre bármely $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $P(x)$ polinom, hogy

$$\int_0^1 (F(x) - P(f(x)))^2 dx < \varepsilon. \qquad (1.11)$$

Legyen $s_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}}$. Minthogy $0 \leqq f(x) \leqq 1$, $0 \leqq s_N(x) \leqq 1$ és

$$|f(x) - s_N(x)| \leqq \frac{1}{2^{2^N-2}} \qquad (1.12)$$

x minden értékére, következik, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $P(x)$ polinom, és oly N egész szám, hogy

$$\int_0^1 |F(x) - P(s_N(x))|^2 dx < 4\varepsilon. \qquad (1.13)$$

Újból felhasználva az 1. lemmát, találhatók bármely $\delta > 0$-hoz olyan $P_k(x)$ $(k = 1, 2, \dots n)$ polinomok, hogy

$$\int_0^1 |\varphi_k(f_k(x)) - P_k(f_k(x))|^4 dx < \delta^4 \qquad (k = 1, 2, \dots n). \qquad (1.14)$$

Bevezetve a

$$\sigma_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{P_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}-1}} \qquad (1.16)$$

jelölést, némi számolással adódik, hogy

$$\int_0^1 |P(s_N(x)) - P(\sigma_N(x))|^2 dx < C\delta \qquad (1.17)$$

ahol C oly állandó, mely csak $P(x)$-től függ. Ha $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ úgy azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 |F(x) - P(\sigma_N(x))|^2 dx < 9\varepsilon. \qquad (1.19)$$

Minthogy $P(\sigma_N(x))$

$$\sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} \cdots \sum_{m_N=0}^{M_N} C_{m_1 m_2 \dots m_N} f_1^{m_1}(x) f_2^{m_2} \cdots f_N^{m_N}(x) \qquad (1.19)$$

alakú, tehát az (1.8) függvények véges lineáris kombinációja, következik, hogy az (1.8) rendszer zárt és ennek folytán az L^2 térben teljes.

2. *Néhány megjegyzés a független függvényekről*

Először bebizonyítjuk a következő

3. lemmát. Ha a független függvények $\{f_n(x)\}$ rendszere maximális, úgy függetlenség tekintetében telített.

Bizonyítás: itt is feltehetjük, hogy az $f(x)$ függvények Baire-féle függvények. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan az L^2 osztályba tartozó $g(x)$ függvény, hogy a $\{g(x), f_n(x)\}$ függvények összeségükben függetlenek. Akkor a $g(x)$ függvény független $\varphi_k(f_k(x))$-től, $(k=1, 2, \ldots)$ tekintve, hogy $\varphi_k(x)$ monoton függvény; így $g(x)$ az

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(f_k(x))}{2^{2^{k-1}}-1} \tag{2. 1}$$

függvénytől is független. Így tehát az $f^n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ függvények valamennyien függetlenek $g(x)$-től és így (l. [3]), bevezetve a $\gamma=\int_0^1 g(x)\,dx$ jelölést, azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 f^n(x)(g(x)-\gamma)\,dx=\left(\int_0^1 f^n(x)\,dx\right)\left(\int_0^1(g(x)-\gamma)\,dx\right)=0 \tag{2. 2}$$

$(n=0, 1, 2, \ldots)$; mivel $f(x)$ maximális függvény és így az $\{f^n(x)\}$ rendszer zárt és ennélfogva teljes, tehát $g(x)-\gamma$ majdnem mindenütt 0-val egyenlő és így majdnem mindenütt $g(x)=\gamma$; ezzel a 3. lemma be van bizonyítva.

Így tehát levezettük a (2) rendszer teljes voltát egy az (1) rendszerre nézve tett feltételből (a maximalitás feltételéből), ami független függvények esetében valamivel erősebb, mint az a feltevés, hogy (1) függetlenség tekintetében telített.

Továbbra is megoldatlan marad a következő probléma: mi annak *szükséges és elégséges* feltétele (az (1) rendszerre nézve), hogy a (2) rendszer teljes legyen.

A Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *H. Steinhaus:* La théorie et les applications des fonctions indépendantes au sens stochastique, Colloque consacré a la Théorie des Probabilités, Part V; Actualités Sci. et Ind. No. 738, Hermann, Paris 1938. 57—73.

[2] A következőkben függetlenségről beszélve ezalatt mindenkor sztochasztikus függetlenséget értünk. A mérhető *függvények* függetlenségét először *H. Steinhaus* definiálta, (l. [3]) definíciójának *A. N. Kolmogorov* definíciójával (Über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse d. Math. 1933) való egyenértékűségét, (válaszul *E. Marczewski* kérdésére) a Lebesgue mérték esetére, nemrég *S. Hartmann* (Colloquium Math. I. 1948, 19—22) bizonyította be; az általános esetben a két definíció nem egyezik meg (lásd *J. L. Doob*

ugyanott 210—217 old.). Az alatt az állítás alatt, hogy (1) független függvények rendszere, azt értjük, hogy e függvények összeségükben függetlenek, azaz nem csak páronkint függetlenek, hanem a rendszernek bármely 3, 4,... függvénye is független egymástól.

[3] *M. Kac:* Sur les fonctions indépendantes, Studia Math. *6* (1936) 46—58.

[4] *G. Ottaviani:* Sulle funzioni indipendenti, Giorn. Ist. Ital Attuari, *11* (1940) 270—282.

[5] *Rényi A.:* Sztochasztikus függetlenség és teljes függvényrendszerek. Az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Akadémiai Kiadó 1952, 299—308.

[6] *A. Zygmund:* Trigonometrical series, Warszawa, 1935. 13. Example 4.

[7] *A. N. Kolmogorov:* Egy tétel a feltételes várható értékek konvergenciájáról és annak néhány alkalmazása. Az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Akadémiai Kiadó 1952. 377—386. o.

[8] *Rényi A.: A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról.* MTA. III. Osztályának Közleményei. I. (1951) 151—355. o.

EGY TAUBER TÍPUSÚ TÉTELRŐL

FREUD GÉZA

Bemutatta Turán Pál lev. tag az 1951. október 1-én tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

A Tauber-típusú tételek *A. Tauber* azon sorelméleti tételéről kapták a nevüket, mely szerint, ha

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_0^\infty a_n x^n = s \text{ és } a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

akkor ebből következik, hogy Σa_n konvergál és

$$\sum_0^\infty a_n = s.$$

*Tauber*nek ezt a tételét *J. A. Littlewood,* majd később *E. Landau,* ill. *G. H. Hardy* és *J. A. Littlewood* általánosították arra az esetre, ha $a_n > -\frac{K}{n}$, és bebizonyították, hogy az egyenértékű az alábbi tétellel:

Legyen

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_0^\infty a_n x^n = s \quad \text{és} \quad s_n = \sum_{\nu=0}^n a_\nu > -K,$$

akkor ebből következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n s_\nu = s.$$

Fenti tételt *E. Landau* általánosította arra az esetre, ha a $\Sigma a_n x^n$ hatványsor helyett az

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, d\tau(t).$$

Laplace—Stieltjes integrált tekintjük az $s=0$ hely környezetében. Ez utóbbi átmegy a hatványsorba, ha $\tau(t)=[t]$, $f(n)=a_n$ és $e^{-s}=x$, másrészt speciális esetként tartalmazza a Laplace-transzformációt, ha $\tau(t)=t$-t helyettesítünk. [1]

Az idézett tételeknek a korábbiaknál sokkal egyszerűbb és szemléletesebb bizonyítását adta *J. Karamata,* akinek sikerült fenti tételeket lényegében a Weierstrass-féle approximáció-tételre visszavezetnie.

E dolgozat szerzője még 1945-ben felvetette a kérdést, nem lehet-e fenti tételeket maradéktagos tételekké élesíteni és egy *Turán Pál*-hoz írt levelében bebizonyította, hogy ha

$$\sum a_n x^n = (1-x) \sum s_n x^n = S + o\{(1-x)^\varepsilon\},\ \varepsilon > 0$$

és

$$s_n > -K,$$

akkor ebből következik, hogy

$$\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu = nS + O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Tőlem függetlenül ugyanezzel a problémával foglalkozott *A. G. Posztnyikov*[2]; dolgozatában $f(\sigma) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n \sigma}$ alakú Dirichlet-sorokkal foglalkozik és kimutatja, hogy ha $\sigma \geqq 0$-ra

$$f(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + O(1) \text{ és } a_n \geqq 0,$$

akkor ebből következik, hogy

$$\sum_{\lambda_n \leqq n} a_n = n + O\left(\frac{n}{\sqrt{\log n}}\right).$$

A. G. Posztnyikov eredményei után *J. Korevaar*[3] hatványsor esetére a pontosabb $O\left(\frac{n \log \log n}{\log n}\right)$ maradéktagot bizonyította be és a tételt ugyancsak hatványsor esetére általánosabb alakra hozta. Másrészt *J. Korevaar* bebizonyította, hogy $O\left(\frac{n}{\log n}\right)$-nél jobb maradéktag nem érhető el. Saját korábbi eredményemben tehát a maradéktag nem javítható. Egy nemrég megjelent dolgozatomban[4] sikerült korábbi eredményemet Laplace—Stieltjes integrálokra általánosítanom. Legyen

$$f(t) \geqq 0 \tag{1}$$

és

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} \, d\tau(t), \tag{2}$$

ahol $\tau(t)$ egy a $0 \leqq t \leqq \infty$ intervallumban definiált, monoton nem csökkenő függvény és a (2) Lebesgue—Stieltjes integrál minden $s > 0$-ra konvergál. Ha most feltételezzük, hogy

$$F(s) = A \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha} [1 + r(s)], \tag{3}$$

ahol

$$|r(s)| < c_0 s^\varepsilon \tag{4}$$

minden valós és pozitív s értékre,* akkor érvényes az alábbi becslés:

$$\int_{t=0}^{x} f(t) \, d\tau(t) = A x^\alpha [1 + \varrho(x)], \tag{5}$$

ahol

$$|\varrho(x)| < \frac{c_1}{\log x} \quad \text{ha} \quad x > 2. \tag{6}$$

J. Korevaar[3] eredményéből következik, hogy a (6) becslés tovább nem javítható.

* A $c_0, c_1, \ldots$ állandók a továbbiakban csak ε-tól függnek.

Idézett dolgozatomban a tétel bizonyitását egy approximációtételre alapoztam, melynek bizonyításához felhasználtam a mechanikus kvadratúra *Csebisev, Markov* és *Stieltjes* által kidolgozott elméletét, továbbá *Erdős* és *Turán* egy, a mechanikus kvadratúra elméletében alapvető lemmáját,* valamint *Karamata* módszerét. Az alábbiakban ugyanezen tétel egy attól eltérő bizonyítását ismertetem, az $\alpha=1$ esetre, melyben az ott használt approximációtételt elemi becslésekkel megkerülöm.**

Segédtételek

Bizonyításunk során fel fogjuk használni két speciális polinomsorozat létezését, és pedig:

I. segédtétel. Tetszőleges $\alpha>0$ számhoz található olyan $Q_\nu(\xi)$ polinomsorozat, ahol $Q_\nu(\xi)$ fokszáma legfeljebb ν, melyre

$$0\leqq Q_\nu(\xi)\leqq 1 \quad \text{ha} \quad 0\leqq\xi\leqq 1, \tag{7}$$

$$\int_0^1 Q_\nu(\xi)\,d\xi<\frac{1}{\nu} \tag{8}$$

és

$$Q_\nu(\xi)>\frac{1}{4} \quad \text{ha} \quad e^{-\alpha}\geqq\xi\geqq e^{-\alpha-\frac{1}{4\nu}}. \tag{9}$$

Bizonyítás: A Fourier-sorok elméletéből ismeretes, hogy pozitív egészszámú ν-re

$$\beta_\nu(\vartheta)=\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{\sin\frac{\nu}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}\right)^2=\frac{2}{\nu}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\nu-1}\left(1-\frac{k}{\nu}\right)\cos k\vartheta\right]. \tag{10}$$

Ebből közvetlenül leolvasható, hogy

$$0\leqq\beta_\nu(\vartheta)\leqq 1 \tag{11}$$

és így *Markov* tétele szerint $|\beta_\nu'(\vartheta)|\leqq\nu$, tehát mivel $\beta_\nu(0)=1$,

$$\beta_\nu(\vartheta)\geqq\frac{1}{2} \quad \text{ha} \quad |\vartheta|<\frac{1}{2\nu}. \tag{12}$$

Legyen

$$q_\nu(\cos\vartheta)=\frac{1}{2}\left[\beta_\nu\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)+\beta_\nu\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)\right], \tag{13}$$

akkor $q_\nu(x)$ $\nu-1$-ed fokú polinom és (11) alapján

$$0\leqq q_\nu(x)\leqq 1 \quad \text{ha} \quad -1\leqq x\leqq+1. \tag{14}$$

Elemi úton belátható, hogyha ϑ a $(\pi/3,\ 2\pi/3)$ intervallumban fekszik, akkor

* Ennek irodalma a [4] dolgozat irodalomjegyzékében van felsorolva.

** A közölt bizonyítás módszerében azonos azzal, ahogyan a tételt 1945-ben először bebizonyítottam.

$\left|\frac{\pi}{2}-\vartheta\right|<2\cos\vartheta$, így (12) és (13)-ból

$$q_\nu(\xi)>\frac{1}{4} \quad \text{ha} \quad |\xi|<\frac{1}{4\nu} \tag{15}$$

és ebből következik, hogy $Q_\nu(\xi)=q_\nu(\xi-e^{-\alpha})$ teljesíti a (7) és (9) feltételt, végül

$$\int_0^1 Q_\nu(\xi)\,d\xi<\int_{-1}^{+1} q_\nu(\xi)\,d\xi=\int_0^\pi q_\nu(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta<\int_0^\pi q_\nu(\cos\vartheta)\,d\vartheta=\frac{1}{\nu}$$

és így (8) is teljesül, Q. e. d.

II. segédtétel. Legyen

$$g(\xi)=\begin{cases}\xi^{-1} & \text{ha} \quad e^{-1}\leqq\xi\leqq 1\\ 0 & \text{ha} \quad 0\leqq\xi<e^{-1},\end{cases} \tag{16}$$

akkor található olyan $\{P_\nu(\xi)\}$ polinomsorozat, amelyre $P_\nu(\xi)$ legfeljebb ν-ed fokú és

$$|g(\xi)-P_\nu(\xi)|<c_2\left\{\frac{1}{\nu}+\mathrm{Min}\left(1,\ \frac{1}{\nu^3|\xi-e^{-1}|^3}\right)\right\}. \tag{17}$$

Bizonyítás:

$$g(\xi)=g_1(\xi)+e(1-g_2(\xi)), \tag{18}$$

ahol $g_2(\xi)$ az $(e^{-1}. 1)$ intervallum karakterisztikus függvénye és

$$g_1(\xi)=\begin{cases}\xi^{-1} & \text{ha} \quad e^{-1}\leqq\xi\leqq 1\\ e & \text{ha} \quad 0\leqq\xi\leqq 1.\end{cases} \tag{19}$$

$g_1(\xi)$ a $(0, 1)$ intervallumban egyenletesen 1 exponensű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, tehát D. Jackson tétele szerint[6] található olyan legfeljebb ν-ed fokú polinom, melyre

$$|g_1(\xi)-h_{1,\nu}(\xi)|<\frac{c_2}{\nu}. \tag{20}$$

A $g_2(\xi)$-et $g_2(\cos\vartheta)$ alakban $h_{2\nu}(\cos\vartheta)$ cosinus-polinommal közelítjük:

$$h_{2\nu}(\cos\vartheta)=A_n\int_{-\alpha}^{+\alpha}\left(\frac{\sin\frac{\mu}{2}(\theta-\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\vartheta)}\right)^4 d\theta=A_n\int_{\vartheta-\alpha}^{\vartheta+\alpha}\left(\frac{\sin\frac{\mu}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)^4 d\theta, \tag{21}$$

ahol

$$\mu=\left[\frac{\nu}{2}\right], \text{ és}$$

$$A_n^{-1}=\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{\sin\frac{\mu}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)^4 d\theta\doteq 2\pi\mu^2\left[1+\sum_{k=1}^{\mu}\left(1-\frac{k}{\mu}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{2\pi}{3}\mu(2\mu^2+1) \tag{22}$$

(22)-höz felhasználtuk a (10) egyenlőséget. (L. Natanszon[6], 87. o.)

Legyen először $\alpha < \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$, akkor található olyán c_3 pozitív állandó, hogy

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\theta} < \frac{c_3}{\theta} \quad \text{ha} \quad \vartheta-\alpha<\theta<\vartheta+\alpha,$$

tehát

$$\int_{\vartheta-\alpha}^{\vartheta+\alpha}\left(\frac{\sin\frac{\mu}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)^4 d\theta < c_8\int_{\vartheta-\alpha}^{\infty}\frac{du}{u^4} < \frac{c_4}{(\theta-\alpha)^3} \tag{23}$$

és így (21), (22) és (23) alapján $\mu=\left[\frac{\nu}{2}\right]$ miatt

$$0 < h_{2,\nu}(\cos\vartheta) < \frac{c_5}{\nu^3(\vartheta-\alpha)^3} \tag{24}$$

és hasonlóan igazolható, hogy $0\leqq\vartheta\leqq\alpha$ esetén

$$0 < 1-h_{2,\nu}(\cos\vartheta) < \frac{c_6}{\nu^3(\alpha-\vartheta)^3} \tag{25}$$

(18), (20), (24) és (25)-ből következik (17) éspedig

$$P_\nu(\cos\vartheta)=h_{1,\nu}(\cos\vartheta)+e[1-h_{2,\nu}(\cos\vartheta)].$$

Becslés egy polinom együtthatóinak összegére

Egy ismert, Bernstejntől származó tétel szerint[7] ha

$$\pi_\nu(\xi)=\sum_{k=0}^{\nu}\alpha_k\xi^k \tag{26}$$

és

$$|\pi_\nu(\xi)|\leqq M \quad \text{ha} \quad 0\leqq\xi\leqq 1, \tag{27}$$

akkor

$$|\alpha_k|\leqq\gamma_k M, \tag{28}$$

ahol

$$T_{2\nu}(\xi)=\sum_{k=0}^{\nu}\gamma_k\xi^{2k}=\frac{1}{2}[(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^{2\nu}+(\xi-\sqrt{\xi^2-1})^{2\nu}] \tag{29}$$

a 2ν-ed fokú Csebisev polinom. Tekintettel a Descartes-féle jelszabályra, a $\{\gamma_k\}$ együtthatósorozat előjele alternáló, tehát

$$\sum_{k=0}^{\nu}|\gamma_k|=(-1)^\nu T_{2\nu}(\sqrt{-1})=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^{2\nu}+\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^{2\nu}, \tag{30}$$

tehát (28) és (30) következtében

$$\sum_{k=0}^{\nu}|\alpha_k|<M(\sqrt{2}+1)^{2\nu},$$

vagyis

III. segédtétel. Legyen

$$\pi_\nu(\xi)=\sum_{k=0}^{\nu}\alpha_k\xi^k,\quad |\pi_\nu(\xi)|\leqq M \quad \text{ha} \quad 0\leq\xi\leq 1,$$

akkor

$$\sum_{k=0}^{\nu}|\alpha_k|<Me^{c_8\nu}, \tag{31}$$

ahol $c_8=2\log(\sqrt{2}+1)$.

$\int f(t)\,d\tau(t)$ *becslése egy rövid szakaszon*

A (3) összefüggésben legyen $\alpha=1$, azaz

$$\int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,d\tau(t)=\frac{A}{s}[1+r(s)]. \tag{32}$$

$r(s)$-re legyen érvényes a (4) becslés, és nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy $\varepsilon<1$. (32)-ben helyettesítsünk s helyére $(k+1)s$-t:

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{\infty} f(t)(e^{-st})^k e^{-st}\,d\tau(t)&=\frac{A}{(k+1)s}+\frac{A}{s}\frac{r\{(k+1)s\}}{k+1}=\\ &=\frac{A}{s}\int_0^1\xi^k\,d\xi+\frac{A}{s}\frac{r\{(k+1)s\}}{k+1}\end{aligned} \tag{33}$$

és így, ha

$$p_\nu(\xi)=\sum_{k=0}^{\nu}\alpha_k\xi^k, \tag{34}$$

akkor (33)-ból

$$\int_0^{\infty} f(t)p_\nu(e^{-st})\,d\tau(t)=\frac{A}{s}\int_0^1 p_\nu(\xi)\,d\xi+\frac{A}{s}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{\alpha_k r\{(k+1)s\}}{k+1}. \tag{35}$$

Legyen most speciálisan

$$p_\nu(\xi)=Q_\nu(\xi)=\sum_{k=0}^{\nu}a_k\xi^k, \tag{36}$$

ahol $Q_\nu(\xi)$ az I. segédtételben definiált polinom, tehát (7) és a III. segédtétel alapján

$$\sum_{k=0}^{\nu}|a_k|<e^{c_8\nu}$$

és ebből (4) felhasználásával következik, hogy

$$\left|\sum_{k=0}^{\nu}\frac{a_k r\{(k+1)s\}}{k+1}\right|\leqq s^\varepsilon\sum_{k=0}^{\nu}|a_k|<s^\varepsilon e^{c_8\nu}. \tag{37}$$

Tehát tekintettel (7), (8), (9)-re, felhasználva (35), (36) és (37)-et

$$\frac{1}{4}\int_{\frac{\alpha}{s}}^{\frac{\alpha+(4\nu)^{-1}}{s}} f(t)\,d\tau(t)<\int_0^{\infty} f(t)Q_\nu(e^{-st})\,d\tau(t)\leqq\frac{A}{s}\left(\frac{1}{\nu}+s^\varepsilon e^{c_8\nu}\right). \tag{38}$$

Végezzük el az alábbi helyettesítést:

$$s = 1/x,\quad \nu = \frac{\varepsilon}{2c_8}[\log x] + 1,$$

akkor (38)-ból lesz:

$$\int_{\alpha x}^{\left(\alpha+\frac{1}{4\nu}\right)x} f(t)\,d\tau(t) < Ax\left(\frac{c_9}{\log x} + e^{c_8\nu}x^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right) < Ac_{10}\frac{x}{\log x}, \tag{39}$$

ahol c_{10} csak ε-tól függ.

A főtétel bizonyítása

A (35) összefüggésben legyen $p_\nu(\xi) \equiv P_\nu(\xi)$ a II. segédtételben definiált polinom. Akkor (17) miatt a $\{P_\nu(\xi)\}$ sorozat $0 \leqq \xi \leqq 1$-re ν-től független korlát alatt marad, tehát a III. segédtétel szerint, ha $P_\nu(\xi) \equiv \sum_{k=0}^{\nu} b_k\xi^k$, (37)-hez hasonlóan igazolható, hogy

$$\left|\sum_{k=0}^{\nu} \frac{b_k r\{(k+1)s\}}{k+1}\right| \leqq c_{11}s^{\varepsilon}e^{c_9\nu},$$

ahol c_{11} csak ε-tól függ, amiből következik, hogy

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-st}P_\nu(e^{-st})\,d\tau(t) - \frac{A}{s}\int_0^1 P_\nu(\xi)\,d\xi\right| < Ac_{11}s^{\varepsilon}e^{c_9\nu} \tag{40}$$

(17)-ből leolvasható, hogy

$$\int_0^1 |g(\xi) - P_\nu(\xi)|\,d\xi < \frac{c_2}{\nu} + c_2\int_0^1 \mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{\nu^3|\xi - e^{-1}|^3}\right)d\xi < \frac{c_{12}}{\nu}. \tag{41}$$

Becsülni akarjuk $\int_0^\infty f(t)e^{-st}[g(e^{-st}) - P_\nu(e^{-st})]\,d\tau(t)$-t. Legyen ismét

$$s = 1/x,\quad \nu = \frac{\varepsilon}{2c_8}[\log x] + 1 \tag{42}$$

(39) és (17) alapján

$$\int_0^\infty f(t)e^{-t/x}[g(e^{-t/x}) - P_\nu(e^{-t/x})]\,d\tau(t) \leqq$$

$$\leqq \frac{c_2}{\nu}\int_0^\infty f(t)e^{-t/x}\,d\tau(t) + c_2\int_0^\infty f(t)e^{-t/x}\,\mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{\nu^3|e^{-1} - e^{-t/x}|^3}\right)d\tau(t) \leqq \tag{43}$$

$$\leqq \frac{2c_2}{\nu}\int_0^\infty f(t)e^{-t/x}\,d\tau(t) + c_2\int_{x\left(1-\frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right)}^{x\left(1+\frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right)} f(t)e^{-t/x}\,\mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{\nu^3\,|e^{-1} - e^{-t/x}|}\right)d\tau(t).$$

Az utolsó egyenlőtlenséghez felhasználtuk, hogy található olyan c_{14} állandó, melyre

$$|e^{-1}-e^{-t/x}| < \frac{1}{\nu^{2/3}}\text{-ból következik, hogy}\quad x\left(1-\frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right) \leqq t \leqq x\left(1+\frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right).$$

(32) és (42)-ből

$$\frac{2c_2}{\nu}\int_0^x f(t)e^{-t/x}\,d\tau(t) < c_{16}\frac{x}{\log x} \tag{44}$$

(43)-ban az utolsó integrált $\frac{x}{4\nu}$ hosszúságú szakaszokra osztjuk és felhasználjuk (39)-et:

$$\int_x^{x\left(1+\frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right)} f(t)e^{-t/x}\,\mathrm{Min}\left(1,\frac{1}{\nu^3|e^{-1}-e^{-t/x}|^3}\right)d\tau(t) \leqq$$

$$\leqq \int_x^{x\left(1+\frac{1}{4\nu}\right)} f(t)e^{-t/x}\,d\tau(t) + \sum_{k=1}^{4c_{14}\nu^{1/3}}\frac{c_{15}}{\nu^3}\frac{\nu^3}{k^3}\int_{x\left(1+\frac{k}{4\nu}\right)}^{x\left(1+\frac{k+1}{4\nu}\right)} f(t)\,d\tau(t) \leqq \tag{45}$$

$$\leqq A\,c_{16}\frac{x}{\log x}\left(1+c_{15}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\right) < c_{16}\,A\,\frac{x}{\log x}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $|e^{-t/x}-e^{-1}| > c_{17}^{-1}|t/x-1|$, ha $1/3 < t/x < 2/3$, ami elég nagy ν-re teljesül. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int_{x\left(1-\frac{c_{14}}{\nu^{2/3}}\right)}^{x} f(t)e^{-t/x}\,\mathrm{Min}\left(1,\frac{1}{\nu^3|e^{-1}-e^{-t/x}|^3}\right)d\tau(t) < c_{16}\,A\,\frac{x}{\log x} \tag{46}$$

(16), (40), (41), (42), (43) és (44)-ből leolvasható, hogy

$$\int_0^x f(t)\,d\tau(t) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-t/x}g(e^{-t/x})\,d\tau(t) = Ax+\varrho(x), \tag{47}$$

ahol

$$|\varrho(x)| < \frac{c_{17}}{\log x}. \tag{48}$$

Q. e. d.

IRODALOM

[1] A Tauber-típusú tételek rendkívül kiterjedt irodalmának ismertetésére nem akarunk kitérni; a legfontosabb munkák jegyzékét az érdeklődő olvasó megtalálhatja *G. H. Hardy:* Divergent Series c. könyvében [Oxford, Clarendon Press, 1949] 175. o.

[2] А. Г. Постников: Остаточный член в тауберовой теореме Харду и Литтльвуда. Доклады А. Н. С. С. С. Р. *77* (1951).

[3] *J. Korevaar:* An estimate of the error in Tauberian theorems for power series. Duke Math. Journal *18* (1951).

[4] *G. Freud:* Restglied eines Tauberschen Satzes, I. Acta Math. Ac. Sci. Hung. II, 299—308.

[5] *Erdős Pál* és *Turán Pál:* On a problem in the theory of uniform distribution, II. c. dolgozatukban (Indagationes Mathematicae, *10* (1948)) hasonló becsléseket használnak egy más probléma megoldására.

[6] Lásd pl. *I. P. Natanszon:* Konstruktív Függvénytan. Akadémiai Kiadó, Budapest 1952.

[7] *S. N. Bernstejn:* Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés dans un segment finit. Acta Math. *37* (1919).

AZ EGYSÉGGYÖKÖK MULTIPLIKATÍV CSOPORTJÁRÓL

SZELE TIBOR

Bemutatta Hajós György lev. tag az 1952. április 7-én tartott felolvasó ülésen

Multiplikatív csoportnak nevezünk bármely olyan halmazt, amelyben értelmezve van egy szorzásnak nevezett, korlátlanul és egyértelműen végrehajtható asszociatív művelet úgy, hogy két tetszőleges elem szorzata mindig a halmaz eleme, és bármely két a, b elemhez van a halmazban olyan x, illetve x' elem, amelyre $ax = b, x'a = b$. A definicióból könnyen következtethető, hogy bármely csoportban van pontosan egy olyan (az alábbiakban egységelemnek nevezett és félreérthetőség veszélye nélkül 1-gyel jelölt) elem, amelyet az a tulajdonsága jellemez, hogy $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ a csoport bármely a eleme esetén, továbbá, hogy egy csoport mindegyik a eleméhez tartalmaz egy a-val egyértelműen meghatározott olyan a^{-1} elemet, amelyre $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$. Ezt az elemet az a elem inverzének szokás nevezni. A csoportban értelmezett szorzás bizonyos esetekben kommutatív. Ekkor a csoportot Abel-féle csoportnak hívják. Két csoportot izomorfnak mondunk, ha kölcsönösen egyértelmű leképezés adható meg közöttük oly módon, hogy az egyik csoport két elemének szorzatához mindig az elemek képeinek szorzata van a másik csoportból képelemként hozzárendelve. A csoport elemeinek számosságát a csoport rendjének nevezzük. Ha a tetszőleges eleme egy csoportnak, akkor az a összes a^k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; a^0 = 1; a^{-m} = (a^{-1})^m)$ hatványaiból álló alcsoportot az a elem által generált *ciklikus csoport*nak nevezzük és $\{a\}$-val jelöljük. Az a elem rendjén az $\{a\}$ csoport rendjét értjük. Ha a G csoport valamennyi eleme véges rendű, akkor G-t *torziócsoport*nak nevezzük. Torziócsoport lehet végtelen rendű is. Nevezetes példa ilyen csoportra az összes (komplex) egységgyökök E csoportja (a komplex számok között értelmezett közönséges szorzásra, mint csoportműveletre nézve). Az alábbiakban ennek az E csoportnak egy nevezetes jellemző tulajdonságával foglalkozunk.

Könnyű belátni, hogy ha E' tetszőleges alcsoportja E-nek, akkor E' rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy E' bármely véges alcsoportja ciklikus. Ez a tulajdonság bizonyos fokig jellemző E alcsoportjaira, mert könnyű megmutatni, hogy az Abel-féle torziócsoportok közül csupán E alcsoportjai ilyen tulajdonságúak. Mi most egy olyan tulajdonságát emeljük ki E alcsoportjainak, amely e csoportokat az összes lehetséges csoport közül kitünteti. Ezt a tulajdonságot fejezi ki a következő

Tétel: *A tetszőleges G csoport akkor és csak akkor olyan tulajdonságú, hogy nincsenek különböző izomorf alcsoportjai, ha G izomorf az összes egységgyökök E multiplikatív csoportjának valamely alcsoportjával.*

Ezt a tételt egészen egyszerű eszközökkel bizonyítjuk be. A bizonyítás során nagybetűvel mindig csoportot, az $a, b, \ldots, h$ kisbetűkkel pedig csoportok elemeit jelöljük. A többi kisbetűt racionális egész számok jelölésére tartjuk fenn. Az u és v természetes számok legnagyobb közös osztóját a számelméletben szokásos módon (u, v)-vel jelöljük, $\varphi(n)$ pedig az Euler-féle függvényt fogja jelenteni.

Előrebocsátjuk a következő két segédtételt.

1. segédtétel: *A G csoportnak akkor és csak akkor nincsenek különböző izomorf alcsoportjai, ha G torziócsoport és bármely r természetes számhoz vagy pontosan $\varphi(r)$ számú r rendű elemet tartalmaz, vagy egyet sem.*

Tegyük fel ugyanis, hogy a G csoportnak nincsenek különböző izomorf alcsoportjai. Ekkor G-ben nincsen végtelen rendű elem, hiszen ha a végtelen rendű elem volna, akkor $\{a\}$ és $\{a^2\}$ különböző izomorf alcsoportok volnának. Legyen továbbá b olyan elem G-ben, amelynek rendje r. Ekkor az összes olyan b^k hatványok is r rendű elemei G-nek, amelyekre $(k, r) = 1$. Az ilyen elemek száma pontosan $\varphi(r)$. Több r rendű eleme ezeken kívül nincsen G-nek, mert ellenkező esetben tartalmaznia kellene G-nek egy $\{b\}$-től különböző r rendű ciklikus alcsoportot, ami feltevésünk szerint lehetetlen.

Legyen másfelől G olyan torziócsoport, amely bármely r természetes számhoz vagy pontosan $\varphi(r)$ számú r rendű elemet tartalmaz, vagy egyet sem. Tekintsük G két tetszőleges H_1 és H_2 izomorf alcsoportját, megadva köztük egy izomorf leképezést. Legyen h_1 tetszőleges eleme H_1-nek. Ennek az elemnek az izomorfizmus szerint feleljen meg a h_2 elem H_2-ből. Ekkor h_1 és h_2 rendje ugyanaz, s mivel G összes h_2 rendjével egyező rendű elemei feltevésünk szerint ki vannak merítve h_2 bizonyos hatványaival, $h_1 = h_2^x$. Megmutattuk ezzel, hogy H_1 tetszőleges eleme, eleme H_2-nek is; ugyanilyen okokból igaz ennek a megfordítottja is, úgyhogy $H_1 = H_2$. Így az 1. segédtétel bizonyítása befejezést nyert.

2. segédtétel: *Ha C_1 és C_2 ugyanolyan rendű véges ciklikus csoportok, s adva van C_1 valamely C_1' alcsoportjának izomorf leképezése C_2 egy C_2' alcsoportjára, akkor ez a leképezés kiterjeszthető C_1 és C_2 izomorfizmusává.*

Legyen ugyanis $C_1 = \{c_1\}$ és $C_2 = \{c_2\}$, mindkettő n rendű ciklikus csoport. C_1 valamely C_1' alcsoportja $C_1' = \{c_1^{k_1}\}$ alakban adható meg, s amennyiben elő van írva C_1' egy izomorf leképezése C_2 valamely C_2' alcsoportjára, akkor utóbbi $C_2' = \{c_2^{k_2}\}$ alakban vehető fel, ahol $c_2^{k_2}$ a $c_1^{k_1}$ elem képe az említett izomorfizmusnál. Mivel $c_1^{k_1}$ és $c_2^{k_2}$ szükségképpen egyező rendű elemek, nyilván

$$(k_1, n) = (k_2, n). \tag{1}$$

A tekintett izomorfizmus kiterjesztése C_1 és C_2 izomorfizmusává olyan k természetes szám megadásában áll, amely mellett a $c_1 \leftrightarrow c_2^k$ hozzárendelésből eredő izomorfizmus C_1 és C_2 között „folytatása“ az előírtnak. Ennek az a feltétele, hogy $c_1^{k_1} \leftrightarrow c_2^{k_1 k} = c_2^{k_2}$ legyen, azaz hogy

$$k_1 k \equiv k_2 \pmod{n}$$

teljesüljön. Ilyen k szám azonban található, hiszen (1) érvényessége biztosítja az utóbbi kongruencia megoldhatóságát k-ra nézve.

A tétel bizonyítása. Mivel az összes egységgyökök E multiplikatív csoportja torziócsoport és nyilvánvalóan igaz az, hogy bármely r természetes számhoz pontosan $\varphi(r)$ számú r rendű elemet tartalmaz, az 1. segédtétel szerint E-nek nincsenek különböző izomorf alcsoportjai. Ekkor azonban ugyanez áll E bármely alcsoportjára is.

A tétel még hátralevő állításának igazolása céljából tekintsünk egy tetszőleges olyan G csoportot, amelynek nincsenek különböző izomorf alcsoportjai, tehát amely torziócsoport és bármely r természetes számhoz vagy pontosan $\varphi(r)$ számú r rendű elemet tartalmaz, vagy egyet sem. (Lásd az 1. segédtételt.) Megmutatjuk, hogy ekkor G izomorf az E csoport egyik alcsoportjával.

Mindenekelőtt bebizonyítjuk, hogy G véges számú eleme mindig benne van G egy ciklikus alcsoportjában. Ezt az állítást a szóbanforgó $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elemek k száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. $k=1$ esetén nincs mit bizonyítanunk. Tegyük fel tehát, hogy állításunk k helyett $(k-1)$-re már igaz, azaz hogy $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ benne vannak a $\{b\}$ ciklikus alcsoportban. Nyilván elegendő azt megmutatnunk, hogy a_k és b benne vannak G egy ciklikus alcsoportjában. Tekintsük ebből a célból az összes $a_k^u b^v$ alakú elemeket, amelyek száma legfeljebb annyi, mint a_k rendje szorozva b rendjével, azaz véges. Mivel $b a_k b^{-1}$ rendje megegyezik a_k rendjével, a G csoport feltételezett tulajdonsága szerint a $b a_k b^{-1}$ elem egyenlő a_k egyik hatványával: $b a_k b^{-1} = a_k^t$, azaz

$$b a_k = a_k^t b.$$

Ennek az egyenletnek ismételt alkalmazásával bármely két $a_k^u b^v$ alakú elem szorzata megint ilyen alakra hozható, ami azt jelenti, hogy az összes $a_k^u b^v$ alakú elemek G egy véges V alcsoportját alkotják. Ha V rendje n, akkor V-nek csak olyan elemei lehetnek, amelyek rendje n osztója. Legyenek $s_1 = 1, s_2, \ldots, s_m = n$ az n szám összes pozitív osztói, s jelöljük a V-beli s_i rendű elemek számát $\psi(s_i)$-vel. Ekkor

$$\psi(s_i) = \varphi(s_i), \text{ vagy } 0; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \psi(s_i) = n. \tag{3}$$

Másfelől azonban az elemi számelméletből jól ismert összefüggés szerint

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(s_i) = n,$$

úgyhogy (2) és (3) alapján $\psi(s_i) = \varphi(s_i)$ mindegyik i indexre. Az $i = m$ speciális esetben azt kapjuk, hogy $\psi(n) = \varphi(n) > 0$. Ezzel megmutattuk, hogy V-nek van n rendű eleme, azaz hogy V ciklikus csoport, s éppen ez volt a célunk. [A bizonyítás alapgondolatában nyomban felismerjük annak az ötletnek általánosítását, amellyel a számelméletben törzsszám-modulushoz tartozó primitív kongruencia-gyökök egzisztenciáját szokás igazolni.]

Tekintsük ezek után az összes törzsszámok $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$ növő sorozatát, s alkossuk meg az

$$m_1 = p_1,\ m_2 = (p_1 p_2)^2,\ m_3 = (p_1 p_2 p_3)^3,\ \ldots$$

számsorozatot. G összes olyan elemei, amelyek rendje osztója m_k-nak, véges számmal vannak, s így az előbbiek szerint benne vannak G egy ciklikus alcsoportjában. Ennélfogva maguk az említett elemek is egy csoportot, mégpedig egy G_k ciklikus csoportot alkotnak, amelynek rendje (minthogy egyúttal G_k egyik elemének rendje is) osztója az m_k számnak. Adjuk meg a G_k ciklikus csoportnak egy izomorf leképezését E azonos rendű E_k alcsoportjára. Minthogy G_k alcsoportja az ugyancsak ciklikus G_{k+1} csoportnak, ez az izomorfizmus a 2. segédtétel szerint kiterjeszthető G_{k+1} és E_{k+1} izomorfizmusává, ahol E_{k+1} az E csoport G_{k+1} rendjével azonos rendű alcsoportja. Hasonlóan definiálva a G_{k+2} és E_{k+2}, a G_{k+3} és $E_{k+3}, \ldots$ alcsoportok izomorf leképezését, mindig az előző izomorfizmus kiterjesztése útján, az összes így értelmezett izomorfizmusok a $G_1, G_2, G_3, \ldots$ alcsoportok egyesítési halmazának egy jól meghatározott izomorf leképezését adják meg E-be. Az említett egyesítési halmaz azonban nyilván maga a teljes G csoport, úgyhogy megadtuk G izomorf leképezését E egyik alcsoportjára, s ezzel egyszersmind be is fejeztük a tétel bizonyítását.

Debreceni Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSOK VETÜLETEIRŐL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1952. április 28-án tartott felolvasó ülésen

J. Radon, egy 1917-ben közölt[1] értekezésében megoldotta a következő problémát: meghatározandó egy az (x, y) sík K korlátos tartományában értelmezett $f(x, y)$ folytonos függvény, ha adva van e függvény integráljának értéke a K tartomány minden húrja mentén. Eredményeiből egyebek között következik a következő

R. Tétel. Ha K az (x, y) sík korlátos tartománya és a folytonos $f(x, y)$ függvény integrálja a K tartomány minden húrja mentén eltűnik, úgy $f(x, y)$ azonosan egyenlő nullával.

Ezt a tételt azóta sok szerző függetlenül újra felfedezte. Így például az R-tételt *H. Steinhaus* 1941-ben egy a lwowi egyetem konferenciáján tartott előadásában[2] bebizonyította; ebben az időben *H. Steinhaus* professzornak nem volt tudomása *J. Radon* eredményeiről; csak nemrég ismerte meg a szóbanforgó értekezést és szíves volt figyelmemet arra felhívni. Figyelmemet erre a problémára *Hajós György* is felhívta már, aki ugyanezt a problémát *S. Tarski*[3] egy sejtésével kapcsolatosan vetette fel, mely sejtést időközben *Th. Bang*[4, 5] bebizonyított. *Bang* tétele a következőképpen hangzik: ha egy *K konvex* tartományt n számú, párhuzamos egyenesek által határolt $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sáv fed be, mely sávok szélességei $d_1, d_2, \ldots, d_n$, úgy $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k$ nagyobb vagy egyenlő, mint a K tartomány d szélessége. Mielőtt rámutatnánk az R-tétel és a *Bang*-féle tétel közötti összefüggésre, tegyük meg a következő megjegyzést: ha valamely K tartományra nézve létezik olyan nem-negatív, integrálható $f(x, y)$ függvény, melynek integrálja K minden húrja mentén 1-gyel egyenlő, úgy *Bang* tételének állítása könnyen következik erre a tartományra nézve, mivel, ha az $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sávok lefedik K-t, úgy fennáll, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \iint_{S_k} f(x, y)\, dx\, dy \geqq \iint_{K} f(x, y)\, dx\, dy = d. \qquad (1)$$

Ily függvény azonban csak a körre nézve ismeretes: ha K az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlettel biró kör által határolt körlap úgy az

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \qquad (2)$$

függvény rendelkezik a kívánt sajátságokkal. Ennek bebizonyítására szimmetria-okok alapján elegendő csupán oly húrokat vizsgálni, amelyek az y tengellyel párhuzamosak; így pl. az $x = a$ ($|a| < 1$) húrra nézve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-a^2}}^{+\sqrt{1-a^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-a^2-y^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 1. \tag{3}$$

Ez számítások nélkül is bebizonyítható annak a jólismert geometriai ténynek alapján, hogy az 1 sugarú gömb bármely szeletének felszíne csak a szelet magasságától függ.

Könnyű belátni, hogy egy ily függvény csak állandó szélességű K tartományokra nézve létezhetik; ugyanis a koordinátarendszer minden helyzetére nézve fennáll, hogy

$$\iint_K f(x, y)\, dx\, dy = \int_K dy = \int_K dz, \tag{4}$$

azaz a tartomány szélessége az y és z koordináta-tengelyek irányában egyenlő az $\iint_K f(x, y)\, dx\, dy$ állandóval, amely független a koordinátarendszer megválasztásától. Nem tudjuk, vajjon a körtől különböző egyéb állandó szélességű tartományokra nézve ily függvény tényleg létezik-e.

Áttérünk most az R-tételnek *Tarski* sejtésével való összefüggésére. Ez abban áll, hogy ha valamilyen K tartományra nézve egyáltalában létezik egy oly $f(x, y)$ függvény, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy integrálja K minden húrja mentén 1-gyel egyenlő, úgy azt kérdezhetjük, vajjon ez a függvény egyértelműen meg van-e határozva, vagy sem. Az R-tétel azt mutatja, hogy [ha $f(x, y)$ folytonosságát is kikötjük] $f(x, y)$ egyértelműen meg van határozva.* Az R-tételt függetlenül újra felfedezték és általánosították *I. Szarszki* és *T. Wazewski*[6] értekezésükben, amelyben e tétel igen egyszerű bizonyítása található meg. Az R-tétel további általánosításait találhatjuk meg *I. Mikusinski* és *C. Ryll-Nardzewski* a Studia Mathematicában közzé teendő értekezésében, valamint *W. Wolibner* sajtó alatt lévő értekezésében.** A jelen cikk tárgya szintén az, hogy az R-tételnek egy új bizonyítását, valamint egy (az említettektől különböző) általánosítását adja.

Ki fogjuk mutatni, hogy az egész probléma lényegében a valószínűségszámítás körébe tartozik és a valószínűségszámítás analitikus módszereivel tárgyalható, nevezetesen a karakterisztikus függvényekre vonatkozó unicitási tétel alkalmazásával. Ki fogjuk mutatni, hogy az R-tétel *H. Cramér* és *H. Wold*[7] egy tételének következménye, amely tétel a következőképpen fogalmazható meg:

CW tétel: Minden síkbeli valószínűség-eloszlás egyértelműen meg van határozva lineáris vetületeinek összessége által. Nyilván ez a tétel — valószínűség-eloszlások helyett — tömegeloszlásokra is megfogalmazható.

* Ha a folytonosságot nem tételezzük fel, úgy $f(x, y)$ módosítható egy tetszőleges halmazon, melynek közös része minden egyes egyenes vonallal 0 (lineáris) mértékkel bír.

** Az említett szerzők személyes közlése szerint.

Az I. fejezet tartalmazza az imént említett CW tétel bizonyítását, amely lényegében azonos *H. Cramér* és *H. Wold* bizonyításával és amelyet ebben a dolgozatban csak azért közlünk, hogy az önmagában teljes legyen. Az I. fejezet továbbá tartalmazza a tétel három-, vagy többdimenziós terekre való általánosításának bizonyítását (CW′ tétel), továbbá tartalmazza annak a tételnek (1. tétel) bizonyítását, amely szerint az eloszlások egy széles osztályára nézve megszámlálhatóan végtelen sok különböző vetület ismeretében is már egyértelműen meghatározható az eloszlás. Következik ebből a tételből, hogy annak biztosítására, hogy a K korlátos tartományban értelmezett $f(x, y)$ folytonos függvény azonosan eltűnjék, elegendő feltenni, hogy annak integrálja minden olyan húr mentén eltűnik, amely párhuzamos egy az egyenes vonalak valamely adott tetszőleges, megszámlálhatóan végtelen rendszeréhez tartozó egyenessel (2. tétel). A dolgozat nyitva hagyja azt a kérdést, vajjon ez minden eloszlásra igaz-e vagy sem.

A II. fejezet bizonyos diszkrét eloszlások, mégpedig — a tömegeloszlás terminológiájának felhasználásával — oly eloszlások tanulmányozásával foglalkozik, amelyek véges számú tömegpontból állnak, azaz véges számú olyan pontból, amelyekben pozitív tömegek vannak koncentrálva. A szerző felvetette azt a sejtést, hogy egy n számú tömegpontból álló eloszlás a síkban egyértelműen meg van-e határozva $n+1$ tetszőleges különböző vetülete által. E tételt (3. tétel) *Hajós György* bizonyította be; bizonyítását szíves engedelmével a jelen dolgozatban közlöm. Bebizonyítjuk, hogy ugyanez igaz *n egyenlő* tömegpontra nézve a térben (4. tétel) és ez az eredmény nem javítható. A szerző őszinte köszönetét fejezi ki *H. Steinhaus*nak, *T. Wazewski*nek, *M. Fisz*nek és *Hajós György*nek értékes megjegyzéseikért.

I. FEJEZET

J. Radon említett tétele a következő ekvivalens alakban is megfogalmazható:

R′-tétel: Egy a K konvex tartományban értelmezett $f(x, y)$ folytonos és nem-negatív függvény egyértelműen meg van határozva, ha integráljának értéke K minden húrja mentén adva van.

Mutassuk ki, hogy az R'-tétel következik az R-tételből és megfordítva. Ha az $f(x, y)$ nem-negatív és folytonos függvény integráljának értéke minden húr mentén ugyanaz, mint valamely folytonos és nem-negatív $g(x, y)$ függvény integráljának értéke, úgy $f(x, y)-g(x, y)$ integrálja minden húr mentén eltűnik és így az R-tétel értelmében fennáll, hogy

$$f(x, y) \equiv g(x, y).$$

Így tehát az R'-tétel az R-tételből következik. Másrészt, ha a folytonos $f(x, y)$ függvény integrálja K minden húrja mentén eltűnik, akkor legyen

$$f_1(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{ha } f(x, y) \geqq 0 \\ 0 & \text{ha } f(x, y) < 0 \end{cases}$$

és

$$f_2(x, y) = f_1(x, y) - f(x, y).$$

Ez esetben $f_1(x, y)$ és $f_2(x, y)$ folytonosak és nem-negatívak és integráljaik ugyanazon értékkel bírnak K minden húrjára. Így tehát az R'-tételből következik, hogy $f_1(x, y) \equiv f_2(x, y)$ és így hogy $f(x, y) \equiv 0$; vagyis az R-tétel következik az R'tételből.

Mármost, ahelyett, hogy feltennénk, hogy $f(x, y)$ integrálja minden egyenes vonal mentén ismeretes, feltehetjük, hogy a

$$J(H) = \iint_{HK} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.2}$$

integrál értéke ismeretes minden H félsíkra, ahol HK jelöli a K tartomány és a H félsík közös részét. Nevezetesen, ha $J(H)$ minden H félsíkra ismeretes, úgy a

$$J(S) = \iint_{SK} f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.3}$$

integrál értéke ismeretes minden S párhuzamos egyenesek által határolt sávra és így $f(x, y)$ integráljának értéke minden egyes l húr mentén az

$$i(l) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \iint_{S_\Delta K} f(x, y)\, dx\, dy = \int_l f(x, y)\, ds \tag{1.4}$$

határátmenettel kiszámitható, ahol S_Δ egy oly párhuzamos egyenesek által határolt sáv, amelynek középvonala l és szélessége Δ, ds viszont az ívelemet jelöli az l egyenesen. Megfordítva, ha $i(l)$ minden l húrra ismeretes, $J(H)$ kiszámitható minden félsíkra, minthogy $J(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(l_x)\, dx$, ahol l_x egy oly húrt jelöl, amely párhuzamos H határvonalával és amely az erre a vonalra a koordinátarendszer kezdőpontján át húzott merőlegest egy ezen az egyenesen x abszciszszájú pontban metszi. Így tehát ahelyett, hogy azt tennénk fel, hogy $i(l)$ minden l húrra ismeretes, feltehetjük, hogy $J(H)$ minden H félsíkra ismeretes.

Mármost az általánositás első lépése abból áll, hogy elhagyjuk azt a korlátozást, mely szerint $f(x, y)$ korlátos tartományban van értelmezve és oly $f(x, y)$ függvényeket vizsgálunk, amelyek az egész síkon értelmezve vannak, de feltesszük, hogy az $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$ integrál véges. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1. \tag{1.5}$$

Az általánositás második lépése abból áll, hogy elhagyjuk azt a korlátozást, amely szerint az $f(x, y)$ nem-negatív függvény folytonos legyen és csak azt tesszük fel, hogy *Lebesgue* szerint integrálható. Így, úgy tekinthetjük az $f(x, y)$ függvényt, mint valamely síkbeli valószínűség-eloszlás sűrűségfüggvényét és azt kérdezhetjük, vajjon e sűrűségfüggvény félsíkokra vonatkozó integráljának értékei egyértelműen meghatározzák-e a sűrűségfüggvényt, vagy ami ugyanaz, — egyértelműen meghatározzák-e a megfelelő

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \tag{1.6}$$

eloszlásfüggvényt. Jelöljünk l-lel egy a koordinátarendszer kezdőpontján át húzott tetszőleges egyenest és jelöljük H_p-vel azt a félsíkot, amelynek határvonala merőleges l-re és amely az l egyenest egy oly pontban metszi, melynek koordinátája l-en p-vel egyenlő. Világos, hogy

$$F_l(p)=J(H_p)=\iint_{H_p} f(x,y)\,dx\,dy \tag{1.7}$$

mint p függvénye nem egyéb, mint a sík valamely találomra választott pontjának l-re való vetületének eloszlásfüggvénye, ha a pont síkbeli eloszlásfüggvényét (1.6) határozza meg. A következőkben *az l-en való lineáris eloszlást, melynek eloszlásfüggvénye $F_l(p)$ az $F(x,y)$ eloszlásfüggvénnyel biró síkbeli eloszlás l-re való vetületének fogjuk nevezni.* Az általánosítás utolsó lépése abból áll, hogy olyan eloszlásokat is tekintetbe veszünk, amelyeknek nincs sűrűségfüggvényük és bebizonyítjuk a következő

CW tételt. Jelölje $F(x,y)$ valamely tetszőleges síkbeli valószínűség-eloszlás eloszlásfüggvényét és tegyük fel, hogy ennek az eloszlásnak minden a koordinátarendszer kezdőpontján át húzott l egyenesen ismerjük a vetületét, azaz hogy

$$F_{l_\varphi}(p)=\iint_{x\cos\varphi+y\sin\varphi\leqq p} dF(x,y) \tag{1.8}$$

*ismeretes, mint p függvénye, φ minden értékére, $(0\leqq\varphi<\pi)$ ahol φ jelöli az l_φ egyenes és az x tengely által bezárt szöget. Ekkor $F(x,y)$ egyértelműen meg van határozva x és y minden értékére.**

Amint azt már a bevezetésben megjegyeztük, ez a tétel *H. Cramér*-tól és *H. Wold*-tól ered. E tétel egyszerű bizonyítását alábbiakban közöljük:

Bizonyítás: A következőkben $M(\zeta)$-val fogjuk jelölni egy ζ valószínűségi változó várható értékét, $P(A)$-val pedig az A esemény bekövetkezésének valószínűségét.

Jelöljék ξ és η egy az $F(x,y)$ eloszlásfüggvénnyel biró síkbeli, találomra választott pont koordinátáit. Jelöljük $\psi(u,v)$-vel a (ξ,η) változó pont karakterisztikus függvényét (vagy másszóval az $F(x,y)$ eloszlásfüggvénnyel

* $F(x,y)$ értékének bizonytalansága annak diszkontinuitási helyein nem lép fel, mivel feltesszük (amint ez szokásos), hogy $F(x,y)$ x valamint y függvényeként balról folytonos.

bíró valószínűség-eloszlás karakterisztikus függvényét), azaz legyen

$$\psi(u, v) = M(e^{i(u\xi+v\eta)}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(ux+vy)}\, dF(x, y). \tag{1.9}$$

A (ξ, η) pont vetülete az l_φ egyenesen a $\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi = \zeta_\varphi$ koordinátával bír és így $F_{l_\varphi}(p)$ ζ_φ eloszlásfüggvénye. Ha $F_{l_\varphi}(p)$ ismeretes mint p függvénye, úgy annak

$$\psi_\varphi(t) = M(e^{it\zeta_\varphi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itp}\, dF_{l_\varphi}(p) \tag{1.10}$$

karakterisztikus függvénye szintén ismeretes. De (1.9) és (1.10) alapján azt kapjuk, hogy

$$\psi_\varphi(t) = M(e^{it(\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi)}) = \psi(t\cos\varphi, t\sin\varphi) \tag{1.11}$$

és így következik, hogy u és v minden valós értékére fennáll, hogy

$$\psi(u, v) = \psi_{\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}}(\sqrt{u^2+v^2}) \tag{1.12}$$

és ilymódon $\psi(u, v)$ u és v minden valós értékére ismeretes. Minthogy jól tudjuk, hogy egy eloszlásfüggvény egyértelműen meg van határozva annak karakterisztikus függvénye által[7], a CW tétel teljes mértékben be van bizonyítva.

Ugyanezen módszer felhasználásával a következő tétel is bebizonyítható:

CW' tétel: Egy az n-dimenziós térben megadott valószínűség-eloszlást egyértelműen meghatározzák annak az $1, 2, \ldots (n-1)$ *dimenziós alterek oly rendszerére való vetületei, mely alterek együttesen befedik az egész teret.*

Így pl. a három-dimenziós tér egy valószínűség-eloszlását egyértelműen meghatározzák annak valamennyi, a koordinátarendszer kezdőpontján áthaladó egyenesre való vetületei, vagy annak valamely adott egyenesen áthaladó valamennyi síkra való vetületei, vagy annak egyenesek és síkok oly összességére való vetületei, melyek együttesen befedik az egész teret.

A CW tétel bizonyítása egyúttal kritériumot szolgáltat arra nézve is, hogy vajjon az $F_{l_\varphi}(p)$ eloszlásfüggvények valamely rendszere valamely síkbeli eloszlás vetületeit alkotja-e. Világos, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele az, hogy $\psi_{\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}}(\sqrt{u^2+v^2})$ egy kétváltozós eloszlás karakterisztikus függvénye legyen, ahol

$$\psi_\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itp}\, dF_{l_\varphi}(p). \tag{1.13}$$

Ugyanezzel a módszerrel bizonyítható be a következő

1. *tétel: Ha a* (ξ, η) *pont* 1 *valószínűséggel bennefoglaltatik egy* $\xi^2+\eta^2 \leqq R^2$ *körben és meg van adva a* (ξ, η) *pont vetületeloszlása a koordinátarendszer kezdőpontján átmenő egyenesek tetszőleges végtelen rendszerére, azaz, ha a* $\zeta_\varphi = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi$ *valószínűségi változó* $F_{l_\varphi}(p)$ *eloszlásfügg-*

vénye adva van φ végtelen sok mod π *különböző értékére, úgy a* (ξ, η) *pont eloszlásfüggvénye egyértelmüen meg van határozva.*

Mielőtt az 1. tételt bebizonyítanók, megfogalmazzuk tétel alakjában e tételnek egy korolláriumát, amely az R-tétel egyenes általánosítása.

*2. tétel. Legyen $f(x,y)$ egy olyan folytonos függvény, melyre megadható olyan $R>0$, hogy $f(x,y)=0$, ha $x^2+y^2 \geqq R^2$. Ha $f(x,y)$ integrálja eltűnik minden olyan egyenes mentén, amely párhuzamos egy egyenessel, amely a koordinátarendszer kezdőpontján átmenő egyenesek valamely tetszőleges végtelen rendszeréhez tartozik, úgy $f(x,y) \equiv 0$.**

Az 1. tétel bizonyítása. Jelöljék $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ φ azon értékeit, melyekre $F_{l_\varphi}(p)$ ismeretes. Jelölje φ_0 a φ_n sorozat egy torlódási pontját. (1. 11) értelmében $\psi(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ ismeretes t minden értékére és minden $\varphi=\varphi_n$-re. Minthogy $\psi(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ φ-nek analitikus függvénye t minden rögzített értékére, és $\psi(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ t bármely rögzített értékére ismeretes a $\varphi=\varphi_{n_k}$ értékekre, ahol $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{n_k}=\varphi_0$, így tehát arra következtethetünk, hogy $\varphi(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ t és φ minden értékére ismeretes és így az 1. tétel ugyanolyan módon következik, mint ahogy a CW tételt bizonyítottuk. $g_t(\varphi)$ analítikus volta következik abból, hogy φ minden (komplex) értékére a

$$\frac{\partial g_t(\varphi)}{\partial\varphi}=it\iint(-x\sin\varphi+y\cos\varphi)e^{it(x\cos\varphi+y\sin\varphi)}dF(x,y) \qquad (1.14)$$

derivált létezik.

II. FEJEZET

Ebben a fejezetben diszkrét eloszlásokat fogunk vizsgálni. Az egyszerűség kedvéért a tömegeloszlások terminológiáját fogjuk használni. Vizsgáljunk a síkon egy n tömegpontból álló diszkrét tömegeloszlást, azaz egy oly eloszlást, mely az m_k tömegekből áll, amelyek az (x_k, y_k) $(k=1,2,\ldots,n)$ pontokban vannak elhelyezve. Mindenekelőtt be fogjuk bizonyítani a következő

3. tételt. Egy az $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ pontokban elhelyezett, az $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tömegekkel biró n különböző tömegpontból álló diszkrét eloszlás

* Az 1. tétel bizonyításából látható, hogy a 2. tétel akkor is igaz, ha ahelyett, hogy azt tennénk fel, hogy $f(x,y)=0$, ha $x^2+y^2 \geqq R^2$ csupán azt tesszük fel, hogy $f(x,y)$ elegendően kicsiny x^2+y^2 nagy értékeire, pl. ha minden $\lambda>0$-ra

$$|f(x,y)| \leqq e^{-\lambda\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (*)$$

feltéve, hogy $\sqrt{x^2+y^2} \geqq R(\lambda)$, ahol $R(\lambda)$ λ-nak valamilyen tetszőleges pozitív függvénye. Ez világossá válik, ha tekintetbe vesszük, hogy az 1. tétel bizonyításában azt a feltételt, hogy $\xi^2+\eta^2 \leqq R^2$ 1 valószínűséggel teljesül, csak annak bizonyítására használjuk fel, hogy a $\psi(p\cos\varphi, p\sin\varphi)$ karakterisztikus függvény p minden értékére φ-nek analítikus függvénye, ezt pedig már a (*) feltevés is biztosítja.

*teljesen meg van határozva, ha ismeretes annak $n+1$ számú, a koordinátarendszer kezdőpontján átmenő tetszőleges különböző egyenesre való vetülete.**

A 3. tételt csak egyenlő tömegek esetére bizonyítottam be, mely esetben, a 3. tétel a 4. tétel speciális esete és a nem-egyenlő tömegek esetére az állítást, mint sejtést, közöltem *Hajós György*gyel, aki azt bebizonyította és szíves volt hozzájárulni, hogy elegáns bizonyítását itt közöljem.

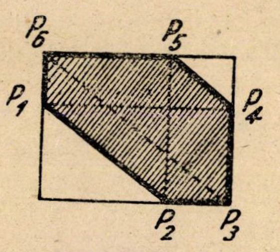
A 3. tétel bizonyítása: $n=1$ esetben a tétel triviális. Tegyük fel most, hogy $n \geqq 2$. Tekintsük minden egyes vetület két szélső pontját és vizsgáljuk az e pontokon át húzott vetítő egyeneseket (azaz, az arra az egyenesre, amelyre a vetítést eszközöljük, merőleges egyeneseket); a rövidség kedvéért ezeket az egyeneseket *szélső vetítő egyeneseknek* fogjuk nevezni.

Így tehát, ha a tömegeloszlás $n+1$ vetülete ismeretes, legalább $2n+1$ szélső vetítő egyenesünk lesz, mivel legalább n vetületnek van két különböző szélső pontja és csupán egyetlen vetület zsugorodhatik esetleg egy ponttá, (ha valamennyi pont egy egyenesen fekszik). Minden szélső vetítő egyenes legalább egy tömegponton áthalad. Minthogy n tömegpontunk van, kell, hogy legyen legalább egy olyan tömegpont, amelyen három, vagy ennél több szélső vetítő egyenes halad keresztül. Minthogy valamennyi tömegpont minden egyes szélső vetítőegyenes által meghatározott két zárt félsík egyikében fekszik, látjuk, hogy ha $r \geqq 3$ szélső vetítőegyenes halad át a síknak egy P pontján, ezek az egyenesek a síkot $2r$ szögtartományra osztják és kell, hogy valamennyi tömegpont e tartományok egyikének belsejében vagy határán feküdjék. Ezt a tartományt két szélső vetítőegyenes határolja, ennek folytán valamennyi többi szélső vetítőegyenesnek és így legalább egy vetítőegyenesnek nem lehet más közös pontja tömegpontrendszerünkkel, mint maga a P pont. De minthogy minden szélső vetítőegyenes legalább egy tömegponton keresztülhalad, következik, hogy P-nek magának tömegpontnak kell lennie. Így tehát bebizonyítottuk, hogy van legalább egy olyan tömegpont, melyen három, vagy ennél több vetítőegyenes halad keresztül és megfordítva: a síknak minden oly pontja, melyen három vagy ennél több szélső vetítőegyenes halad át, tömegpont. Így tehát, a szélső vetítőegyenesek vizsgálata útján legalább egy tömegpontot megtalálhatunk. Minthogy a többi $n-1$ pont vetületei $n+1$ egyenesre ismeretesek, (azáltal, hogy elhagyjuk a már megtalált pont vetületét), újból alkalmazhatjuk ugyanazt az eljárást és így egymásután megkereshetjük az összes tömegpontokat. Ilyenmódon a 3. tétel be van bizonyítva. Világos,

* Azon, hogy ismeretes a tömegeloszlás vetülete egy egyenesen, az értendő, hogy meg vannak adva az egyenesen azok a pontok, amelyek a tömegpontrendszer pontjainak (merőleges) vetületei, és meg van adva minden vetületi pontban, hogy mekkora tömegű tömegpont — illetve ha több pont vetülete egybeesik, úgy az van megadva, hogy mekkora össztömegű tömegpontok — vetülete.

hogy a fenti bizonyítás használható módszert szolgáltat arra, hogy egymásután megkeressük valamennyi tömegpontot és meghatározzuk a megfelelő tömegeket.

Könnyű belátni, hogy a 3. tétel nem javítható: n vetület nem mindig határoz meg egy n pontból álló diszkrét tömegeloszlást. Ugyanis, vizsgáljunk egy $2n$ oldalú Π szabályos sokszöget és nevezzük azt az n számú egyenlő, egyenként egységnyi tömegű, tömegpontból álló rendszert, amelynek tömegpontjai a Π sokszög minden második csúcsában vannak elhelyezve, az *A-rendszernek* és nevezzük azt az n számú egyenlő, egyenként egységnyi tömegű, tömegpontból álló rendszert, mely tömegpontok a Π sokszög azon n csúcsában vannak elhelyezve, amelyekben az A-rendszerbe tartozó tömegpont nincsen, *B-rendszernek*. Könnyű belátni, hogy ha $l_1, l_2, \ldots, l_n$ jelölik a Π sokszög szembenfekvő oldalpárjaira bocsátott merőlegeseket, az A-rendszer vetülete minden l_k egyenesen ugyanaz, mint a B-rendszeré. A fenti bizonyítást elemezve, könnyű belátni, hogy valamennyi olyan tömegeloszlás, melyet nem határoz meg teljesen n vetület, lényegében ekvivalens az imént említett tömegeloszlással és megkapható azáltal, ha a $2n$ oldalú, szabályos sokszöget egy oly $2n$ oldalú konvex sokszöggel helyettesítjük, melynek csúcsai $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ és amely a következő tulajdonsággal bir: a P_iP_j és P_kP_l egyenesek párhuzamosak, feltéve, hogy $i+j \equiv 1 \pmod 2$ és $i+j \equiv k+l \pmod{2n}$. Világos, hogy valamennyi $2n$ oldalú sokszögből affin transzformáció útján kapott sokszög kielégíti ezt a feltételt: de nemcsak ezek elégítik azt ki, pl. az 1. ábrán feltüntetett $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ hatszög bir a kívánt tulajdonsággal annak ellenére, hogy nem kapható meg affin transzformáció útján egy szabályos hatszögből:



1. ábra

Ahelyett, hogy valamilyen l egyenesre való vetítésről beszélnénk, beszélhetünk az l-re merőleges irányból való vetítésről, valamilyen rögzített L egyenesre.

Valamely irányból való vetítést, a projektív sík valamely a végtelenben fekvő pontjából történő vetítésnek tekinthetünk. Könnyű belátni, hogy a 3. tétel bizonyítása és ennek folytán állítása is érvényes arra az általánosabb esetre is, amikor végesben fekvő pontokból L-re való vetítést is megengedünk.

Vizsgáljuk most a három-dimenziós tér diszkrét tömegpontrendszereinek vetületeit. Bebizonyítjuk a következő

4. tételt. Vizsgáljunk a térben egy M diszkrét tömegeloszlást, amely n számú egyenlő tömegpontból áll, amelyek az (x_k, y_k, z_k) $(k, = 1, 2, \ldots, n)$ *derékszögű koordinátákkal biró pontokban vannak elhelyezve. Ha az M tömegeloszlás (ortogonális) vetülete* $n+1$ *tetszőleges síkra meg van adva, mely síkok közül nincsen két olyan, amely egymással párhuzamos volna, M teljes mértékben meg van határozva.*

Mielőtt a 4. tételt bizonyítanánk, említsük meg, hogy a tétel nem javítható. Ugyanis, ha a tömegpontok valamely α síkban, valamely $2n$ oldalú szabályos sokszög minden második csúcsában vannak elhelyezve, és azok a síkok, amelyekre ezeket a tömegeket vetítjük, valamennyien merőlegesek α-ra, úgy azt az ellenpéldát nyerjük, amelyet a 3. tétellel kapcsolatosan már megvizsgáltunk.

A 4. tétel bizonyítása. Jelöljék $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ azokat a síkokat, amelyekre a tömegeloszlást vetítjük, feltehetjük, hogy valamennyi A_k sík keresztülhalad az (x, y, z) derékszögű koordinátarendszer kezdőpontján és hogy e síkok nem haladnak át a z tengelyen, valamint, hogy egyetlen síkpár metszésvonala sem fekszik az (y, z) síkban. Válasszunk minden egyes A_k síkban egy oly (u_k, v_k) derékszögű koordinátarendszert, hogy annak kezdőpontja egybeessék az (x, y, z) koordinátarendszer kezdőpontjával és jelöljék $\alpha_{2k}, \beta_{2k}, \gamma_{2k}$ a $v_k = 0$ egyenes iránycosinusait és $\alpha_{1k}, \beta_{1k}, \gamma_{1k}$ az $u_k = 0$ egyenes iránycosinusait. Következik, hogy (x_j, y_j, z_j) vetülete az A_k síkra az (u_k, v_k) koordinátarendszerben az

$$\left.\begin{aligned} u_{jk} &= \alpha_{1k} x_j + \beta_{1k} y_j + \gamma_{1k} z_j \\ v_{jk} &= \alpha_{2k} x_j + \beta_{2k} y_j + \gamma_{2k} z_j \end{aligned}\right\} (j = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

koordinátákkal bir. Ilymódon, ha ezek a vetületek meg vannak adva, úgy ismeretesek az

$$\frac{\alpha_{2k} u_{jk} - \alpha_{1k} v_{jk}}{\beta_{1k}\alpha_{2k} - \beta_{2k}\alpha_{1k}} = y_j + \lambda_k z_j$$

számok, ahol

$$\lambda_k = \frac{\gamma_{1k}\alpha_{2k} - \gamma_{2k}\alpha_{1k}}{\beta_{1k}\alpha_{2k} - \beta_{2k}\alpha_{1k}}.$$

Minthogy $\gamma_{1k}\alpha_{2k} - \gamma_{2k}\alpha_{1k}$ és $\beta_{1k}\alpha_{2k} - \beta_{2k}\alpha_{1k}$ az A_k síkra húzott merőleges két iránycosinusa, mely sík nem megy át a z tengelyen, ezek közül a második 0-tól különböző és minthogy az A_k és $A_{k'}$ $(k' \neq k)$ síkok metszésvonala nem fekszik az (y, z) síkban, a λ_k hányados k különböző értékeire különböző. Így tehát az $y_j + \lambda z_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ számok összességükben ismeretesek λ-nak $n+1$ különböző értékére. Ilyen módon e számoknak valamennyi elemi szimmetrikus függvénye, vagyis az

$$S_1(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}(y_j+\lambda z_j)$$

$$S_2(\lambda)=\sum_{1\leq i<j<n}(y_i+\lambda z_i)(y_j+\lambda z_j)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}(y_j+\lambda z_j)$$

függvények λ-nak $n+1$ különböző értékére ismeretesek. Minthogy $S_1(\lambda)$, $S_2(\lambda),\ldots,S_n(\lambda)$ λ-ban n-nél nem nagyobb fokú polinomok, következik, hogy ezek a polinomok teljes mértékben meg vannak határozva és ennélfogva értékeik $\lambda=i$ esetére kiszámíthatók (pl. a Lagrange-féle interpolációs formula segítségével). Ebből megkaphatjuk $S_1(i), S_2(i),\ldots, S_n$ (i)értékeit, tehát az y_j+iz_j komplex számok elemi szimmetrikus függvényeinek értékeit. Következik, hogy az y_j+iz_j komplex számok meghatározhatók, mint a

$$w^n-S_1(i)\,w^{n-1}+S_2(i)\,w^{n-2}-\cdots+(-1)^n S_n(i)=0$$

egyenlet gyökei és ilymódon az (y_j, z_j) számpárok megkaphatók. Ilymódon a szóbanforgó tömegeloszlásnak az $A_1, A_2,\ldots, A_{n+1}$ síkokra való vetületeiből kiindulva meghatározhatjuk ugyanannak a tömegeloszlásnak az (y, z) síkra való vetületeit. Minthogy az (x, y, z) koordinátarendszer helyzete tetszőleges, (csak arra kell ügyelnünk, hogy egyetlen A_k sík se haladjon át a z-tengelyen és két ilyen sík metszésvonala ne feküdjék az (y, z) síkban) következik, hogy a vizsgált eloszlás vetülete *minden* ilyen síkra megkapható. A kivételes síkokon a vetületet határátmenettel határozhatjuk meg; ennek következtében az eloszlás vetületét minden síkra ismerjük és így az a CW' tétel értelmében teljesen meg van határozva; ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM:

[1] *J. Radon*, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Ber. Math.—Phys. Kl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, *59* (1917), 262—277.

[2] Lásd a Colloquium Mathematicum 1951. 161. oldalát, ahol *H. Steinhaus* "Sur un problem de G. Hajós" c. előadásának rövid összefoglalása található.

[3] *A. Tarski*, Uwagi o stopniu rownowaznosci wielekatov, Parametr, *2* (1932).

[4] *Th. Bang*, On covering by parallel strips, Math. Tidskrift, 1951.

[5] *Th. Bang*, A solution of the "plank problem". Proc. Amer. Math. Soc. *2* (1951) 990—992.

[6] *I. Szarszki* és *T. Wazewski*, Sur un probleme roentgenographique de M. S. Majerek, Ann. Sol. Polonaise de Math. *20* (1947), 389—390.

[7] *H. Cramér* és *H. Wold*, Some theorems on distribution functions. Journal London Math. Soc. *11* (1936), 290—294.

[8] Lásd pl. *H. Cramér*, Mathematical methods of statistics 101.

BANACH TEREKBEN ÉRTELMEZETT NEMLINEÁRIS EGYENLETEKRŐL

FENYŐ ISTVÁN

Bemutatta Rényi Alfréd lev. tag az 1952. június 16-án tartott felolvasó ülésen

A matematikai fizika számos problémája tudvalevően nemlineáris algebrai egyenletekre vagy egyenletrendszerekre, nemlineáris differenciál- és integrálegyenletekre, integrodifferenciálegyenletekre stb. vezet. Ezek gyakran mint valamilyen Banach-térben értelmezett nemlineáris egyenletek értelmezhetők, így tehát a Banach-terek nemlineáris egyenleteinek megoldása a matematikai fizika szempontjából fontos feladat.

Nemlineáris közönséges egyenletekkel vagy egyenletrendszerekkel és különböző speciális nemlineáris függvényegyenletekkel igen sok szerző foglalkozott, ezzel szemben az általános Banach-terek nemlineáris egyenleteiről aránylag keveset írtak. Pedig a Banach-terek egyenleteinek vizsgálata rendkívül sokféle nemlineáris egyenlet megoldhatóságára ad felvilágosítást, sőt a numerikus megoldásra egységes eljárást szolgáltat. Ezzel a kérdéssel újabban *L. V. Kantorovics* és tanítványai foglalkoztak[1]. Lényegében a Newton-féle iterációs eljárást és annak közönséges egyenletek körében jólismert módosítását vitték át a Banach-terekben értelmezett egyenletekre.

Jelen dolgozat szintén a Banach-terek nemlineáris egyenleteivel foglalkozik. Egy ilyen egyenlet egyértelmű megoldhatóságának problémája úgy is megfogalmazható, hogy megvizsgálandó valamely Banach-térben értelmezett függvény inverz függvényének exisztenciája a tér valamely helyének környezetében. Ezzel kapcsolatban kimutatjuk, hogy ha *Fréchet* értelemben[2] differenciálható függvényről van szó, akkor a valós, differenciálható függvények inverz függvényeinek exisztenciájáról szóló közismert tétel majdnem szószerint érvényes az általános Banach-terekben is. Természetes, hogy ez magában foglalja az implicit függvények exisztenciájáról szóló tételt is.

Rényi Alfréd felhívta figyelmemet arra, hogy a kimondott tétel nem egyéb, mint a módosított Newton-féle gyökközelítő eljárás analogonja a Banach térben és a tétel ennek konvergenciájára nézve ad elégséges feltételt. Ugyanerre vonatkozik *L. V. Kantorovics* egyik tétele[3], de míg *Kantorovics* tételének kimondásában és a bizonyításában felhasználja a függvény második differenciálhányadosát és feltételezi, hogy az korlátos, addig itt pusztán az első differenciálhányados létét és folytonosságát kívánjuk meg. Ezzel a módosított Newton-féle eljárás konvergenciájára vonatkozó tétel egyszerűbb alakot nyer. Igaz viszont, hogy *L. V. Kantorovics* erősebb feltevései mellett az eljárás konvergenciája gyorsabb.

I. A Banach-térben értelmezett nemlineáris egyenletek megoldhatóságáról

Bebizonyitjuk a következőket:

1. tétel. *Legyen $f(x)$ az X Banach-térben értelmezett nemlineáris operátor, mely az X teret az Y Banach-térre (vagy annak egy részére) képezi le. Ha*

$$f(x_0) = y_0$$

és $f(x)$ az x_0 helyen Fréchet értelemben differenciálható és differenciálhányadosa az x_0 helyen folytonos, továbbá az $f'(x_0)$ lineáris operátornak van véges normájú egyértelmű inverze, akkor az

$$f(x) = y \tag{1}$$

egyenletnek van egy és csakis egy megoldása, ha y elég közel van y_0-hoz.

Pontosabban: ha $f'(x_0)$ inverzét U_0-lal jelöljük és R annak a „gömbnek" a sugara, melyre az

$$\| U_0[f'(x) - f'(x_0)] \| \leqq q \tag{2}$$

egyenlőtlenség teljesül, ahol $0 < q < 1$, akkor minden olyan y elemre, melyre az*

$$\| U_0(y - y_0) \| \leqq R(1 - q) \tag{2'}$$

egyenlőtlenség érvényes, létezik az (1) egyenletnek egy és csakis egy megoldása.

Bizonyítás. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$. Ellenkező esetben $\xi = x - x_0$ és $\eta = y - y_0$ lineáris szubsztitucióval ez az eset mindig elérhető.

Definiáljuk az X tér $\varepsilon(x)$ operátorát a következő módon:

$$\varepsilon(x) = f(x) - f'(0)\, x. \tag{3}$$

Ez az operátor nyilván differenciálható és differenciálhányadosa

$$\varepsilon'(x) = f'(x) - f'(0).$$

Miután feltettük, hogy $f(x)$ differenciálhányadosa a 0 elem helyén folytonos, ezért

$$\|\varepsilon'(x)\| \to 0 \quad \text{ha} \quad \|x\| \to 0.$$

Legyen x a szóbanforgó térnek az az eleme, mely az (1) egyenletet kielégíti, ekkor a (3) egyenlet így írható

$$\varepsilon(x) = y - f'(0)\, x.$$

Az $f'(0)$ operátorra tett feltevésünket figyelembevéve az

$$x = U_0[y - \varepsilon(x)] \tag{4}$$

egyenletre jutunk. Ezt megoldjuk a szukcesszív approximáció módszerével:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = U_0[y - \varepsilon(0)] = U_0 y \\ x_2 = U_0[y - \varepsilon(x_1)] \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = U_0[y - \varepsilon(x_{n-1})] \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}. \tag{5}$$

* Ez azt jelenti, hogy $\|x - x_0\| \leqq R$ minden olyan x elemre, melyre (2) érvényes.

Az így nyert $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ végtelen elemsorozat konvergens és az (1) alatti egyenlet x megoldásához konvergál, feltéve, hogy y kielégíti a (2') feltételt. Az (5) alatti egyenletekből ugyanis

$$x_2 - x_1 = -U_0\varepsilon(x_1) = -U_0[\varepsilon(x_1) - \varepsilon(0)].$$

Erre az egyenletre alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel Banach térbeli analogonja[4], ennekfolytán

$$x_2 - x_1 = -U_0\varepsilon'(\overline{x}_1)\cdot x_1,$$

ahol $\overline{x}_1 = \theta_1 x_1$ $(0 < \theta_1 < 1)$. Ezért tehát $\|\overline{x}_1\| < \|x_1\|$. De

$$\|x_1\| = \|U_0 y\| < \frac{\|U_0 y\|}{1-q} \leqq R,$$

így az x_1 elem és még inkább az $\overline{x}_1$ elem az R sugarú gömbbe esik. De akkor

$$\|U_0\varepsilon'(\overline{x}_1)\| = \|U_0[f'(\overline{x}_1) - f'(0)]\| \leqq q$$

és

$$\|x_2 - x_1\| \leqq q\|x_1\| = q\|U_0 y\|. \tag{6}$$

Az előbbihez teljesen hasonló módon

$$x_3 - x_2 = -U_0[\varepsilon(x_2) - \varepsilon(x_1)] = -U_0\varepsilon'(\overline{x}_2)(x_2 - x_1),$$

ahol

$$\overline{x}_2 = x_1 + \theta_2(x_2 - x_1) \qquad (0 < \theta_2 < 1).$$

Vegyük figyelembe, hogy (6) alapján

$$\begin{aligned}\|\overline{x}_2\| \leqq \|x_1\| + \|x_2 - x_1\| \leqq \|x_1\| + q\|x_1\| = (1+q)\|x_1\| = (1+q)\|U_0 y\| \leqq \\ \leqq \frac{\|U_0 y\|}{1-q} \leqq R.\end{aligned} \tag{7}$$

Ez tehát azt jelenti, hogy $\overline{x}_2$ is az R sugarú gömbbe esik, vagyis

$$\|U_0\varepsilon'(\overline{x}_2)\| \leqq q.$$

Ennekfolytán (6) figyelembevételével

$$\|x_3 - x_2\| \leqq q^2\|U_0 y\|.$$

Ezt az eljárást így folytathatnók és teljes indukcióval ki lehet mutatni, az

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqq q^{n-1}\|U_0 y\| \tag{8}$$

egyenlőtlenség érvényességét minden pozitív egész n-re. Ebből viszont következik az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ elemsorozat konvergenciája:

$$\begin{aligned}\|x_{n+k} - x_n\| \leqq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqq \\ \leqq (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \cdots + q^n)\|U_0 y\| = q^n \frac{1-q^k}{1-q}\|U_0 y\|.\end{aligned}$$

Mivel $0 < q < 1$ azért ennek az egyenlőtlenségnek a jobboldala elegendő nagy n mellett tetszőleges kicsiny. Hátra van még meggyőződni arról, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

elem az (1) egyenletnek valóban a megoldása. Az $f(x)$ folytonosságából következik, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$$

elem létezik. De x_n definíciója folytán

$$f(x_n)=y-f'(0)[x_{n+1}-x_n],$$

így

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x_n)-y\|=\lim_{n\to\infty} \|f'(0)\|\cdot\|x_{n+1}-x_n\| \leqq \|f'(0)\|\,\|U_0 y\| \lim_{n\to\infty} q^n=0,$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)=y.$$

A megoldás unicitása is könnyen igazolható. Tegyük fel ugyanis, hogy a (2) tartományban lenne két megoldás: x és ξ, vagyis

$$f(x)=y \quad \text{és} \quad f(\xi)=y,$$

akkor

$$f(x)-f(\xi)=f'(\bar{x})\cdot(x-\xi)=0$$

lenne, ahol $\bar{x}$ is nyilván a (2) tartományba esik*. Figyelembevéve ε definícióját, az előbbi egyenlet a következő alakba írható:

$$f'(0)\cdot(x-\xi)+\varepsilon'(\bar{x})(x-\xi)=0.$$

Ebből

$$x-\xi=U_0\varepsilon'(\bar{x})(x-\xi)$$

következik. Mivel $\bar{x}$ az R sugarú gömbbe esik, azért $\|U_0\varepsilon'(\bar{x})\| \leqq q$, tehát

$$\|x-\xi\| \leqq q\|x-\xi\|,$$

ami csak úgy lehet, ha

$$x=\xi.$$

Az alkalmazások szempontjából nem érdektelen megemlíteni a bebizonyított tétel egy másik alakját, mely a közönséges függvények körében az implicit függvények exisztenciatételének analogonja.

1a. tétel. *Legyen $F(x,y)$ az X és Y Banach-terekben értelmezett kétváltozós függvény* (melynek értékkészlete is egy Banach-térbe esik), *x_0 és y_0 olyan elempár, melyre az*

$$F(x_0,y_0)=0$$

egyenlet teljesül. Az F függvény legyen mindkét változójában folytonos és rögzített y_0 mellett az x_0 helyen Fréchet értelemben differenciálható. Erről a differenciálhányadosról tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) helyen folytonos és véges normájú inverze van. Akkor az

$$F(x,y)=0 \tag{9}$$

egyenletnek egy és csakis egy x megoldása van, ha y elég közel van y_0-hoz.

* Ez a háromszögegyenlőtlenségből közvetlenül következik: $\bar{x}=\xi+\theta(x-\xi)=(1-\theta)\xi+\theta x$ $(0<\theta<1)$, ezért $\|\bar{x}\| \leqq (1-\theta)\|\xi\|+\theta\|x\|$. Ez azt jelenti, hogy $\|\bar{x}\|$ kisebb, mint $\|\xi\|$ és $\|x\|$ súlyozott számtani közepe, tehát kisebb mint $\max(\|x\|,\|\xi\|)$.

Pontosabban: legyen V_0 az $F'_x(x_0, y_0)$ lineáris operátor inverze és ϱ annak a gömbnek a sugara, melyre rögzített y mellett

$$\| V_0[F'_x(x, y) - F'_x(x_0, y_0)] \| \leqq q < 1, \tag{10}$$

akkor a

$$\| V_0 F(x_0, y) \| \leqq \varrho(1-q) \tag{10'}$$

egyenlőtlenséget kielégítő y mellett van (9)-nek egy és csakis egy megoldása.

Ezt az állításunkat nem bizonyítjuk be, ez szószerint ugyan úgy történhetik, mint az 1. tétel bizonyítása.

Megemlítjük még az 1. tétel és bizonyításának egy másik, az alkalmazások szempontjából talán nem érdektelen alakját*. Ez a módosított Newton-féle iterációs eljárás Banach-térbeli analogonjára vonatkozik.

2. tétel. *Legyen az*

$$f(x) = 0 \tag{11}$$

Banach-térben értelmezett egyenlet egyik „közelítő" megoldása x_0 ismert. Az $f(x)$ operátorról ugyanazokat a tulajdonságokat tételezzük fel, melyek az 1. tételben szerepeltek az x_0 helyre vonatkoztatva. Akkor az

$$x_n = x_{n-1} - U_0 f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

iterációs eljárás konvergens és a (11) egyenlet egyik gyökéhez konvergál, ha

$$\| U_0 f(x_0) \| \leqq r(1-q), \tag{13}$$

ahol r annak a gömbnek a sugara, melybe tartozó x elemek az

$$\| U_0[f'(x) - f'(x_0)] \| \leqq q < 1 \tag{14}$$

egyenlőtlenségnek tesznek eleget. Az eljárás az r sugarú gömbbe eső egyetlen megoldáshoz konvergál.

A (11) egyenlet az

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) = 0 \tag{15}$$

alakba is írható. Ebből

$$x = x_0 - U_0[f(x_0) + \varepsilon(x)].$$

Mivel

$$\varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

azért a (11), ill. (15) alatti egyenlet a következő egyenlettel ekvivalens:

$$x = x - U_0 f(x).$$

Szemmel láthatóan ez viszont a (4) alatti egyenlettel azonos. Ha tehát ezt megoldjuk a szukcesszív approximáció módszerével, akkor a (12) alatti egyenletrendszerre jutunk. Miután pedig a szóbanforgó egyenletre nézve az 1. tétel kikötései teljesülnek, állításunk igazolást nyert.

* A tétel ezen alakjára *Rényi Alfréd* hivta fel figyelmemet.

II. Néhány alkalmazás

1. Az 1. és 1a. tételek az implicit és az inverz függvény exisztenciájáról szóló közismert klasszikus tételeket szolgáltatják, ha a tételekben szereplő Banach-terek a valós vagy komplex számok terét jelentik. A 2. tétel pedig a valós egyenletekre vonatkozólag a módosított Newton-féle gyökközelítő eljárásra nézve ad újnak látszó konvergenciakritériumot.

2. Tekintsük az

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

nemlineáris transzformációt. Az f_i függvények változóiban folytonos első parciális differenciálhányadosokkal biró függvények. Ha X és Y tér gyanánt a szám n-esek terét értjük, melyben a normát így definiáljuk

$$\|x\| = \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|$$

és tekintetbevesszük, hogy az $y = F(x)$ operátor differenciálhányadosa a (16) alatti egyenletrendszer Jacobi-féle determinánsa[5], akkor az 1a. tétel alkalmazásával a következő, ugyancsak klasszikus tételt nyerjük:

Ha az $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *és* $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ *értékrendszerek kielégítik a* (16) *alatti egyenletrendszert és a*

$$D = \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)_{x_0} \right|_{i,k=1}^{n}$$

determináns 0*-tól különböző, akkor létezik n folytonos és n változós* g_i *függvény, melyre*

$$y_i = f_i[g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_n)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

teljesül, ha az $y = (y_1, \ldots, y_n)$*, elég közel van az* $y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ *értékrendszerhez.*

Ha a 2. tételt alkalmazzuk az

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenletrendszerre, akkor ennek numerikus megoldására nyerünk konkrét eljárást. Az általános eset ismertetése helyett egy *Osztrovszkij*tól származó példát mutatunk be[6], melyet *Kantorovics* is idéz saját tételének illusztrálására[7]. A szóbanforgó egyenletrendszer

$$f_1(x, y) \equiv 2x^3 - y^2 - 1 = 0$$
$$f_2(x, y) \equiv xy^3 - y - 4 = 0.$$

Kezdőelemként válasszuk az

$$x_0 = 1{,}2\,; \quad y_0 = 1{,}7$$

értékrendszert. Az előbbiek alapján a második közelítést úgy kapjuk, ha megoldjuk a következő lineáris egyenletrendszert:

$$8{,}64\,\Delta x_0 - 3{,}4\,\Delta y_0 = -f_1(x_0, y_0) = 0{,}434$$
$$4{,}913\,\Delta x_0 + 9{,}404\,\Delta y_0 = -f_2(x_0, y_0) = -0{,}1956.$$

Ebből $x_1 = x_0 + \Delta x_0$, $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. A következő közelítést az előbbihez hasonló

$$8{,}64\,\Delta x_1 - 3{,}4\,\Delta y_1 = -f_1(x_1, y_1)$$
$$4{,}913\,\Delta x_1 + 9{,}404\,\Delta y_1 = -f_2(x_1, y_1)$$

egyenletrendszer segélyével határozzuk meg. Ennek megoldása után a harmadik közelítés: $x_2 = x_1 + \Delta x_1$, $y_2 = y_1 + \Delta y_1$ stb.

Hátra van ennek az eljárásnak a konvergenciáját megvizsgálni. Ehhez alkalmazni fogjuk a 2. tételt. Könnyebb érthetőség kedvéért jelöljük a szóbanforgó operátort F-el, a tekintetbevett tér elemeit $a, b, \ldots$ stb.-vel. Ekkor mint láttuk

$$F'(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

és $\|F'(a)\|$ egyik felső korlátja az $F'(a)$-t meghatározó matrix elemeinek abszolút értékben legnagyobbika. Az operátor differenciálhányadosa az $a_0 = (x_0, y_0)$ helyen az előbbi egyenletrendszer determinánsa, melynek számértéke $D = 97{,}95$.

$$F'(a) - F'(a_0) = \begin{pmatrix} 6x^2 - 8{,}64 & -2y + 3{,}4 \\ y^3 - 4{,}913 & 3xy^2 - 10{,}404 \end{pmatrix}.$$

Mivel a másodrendű determináns aldeterminánsai maguk a determináns elemei, azért $F'(a_0)^{-1}$ olyan mátrix, melynek elemei (előjeltől eltekintve) az $F'(a_0)$ elemei osztva ezen mátrix determinánsával. Ennek normája így becsülhető tehát meg:

$$\|U_0\| = \|F'(a_0)^{-1}\| \leqq \frac{9{,}404}{97{,}95} = 0{,}096.$$

Ha $q = 0{,}9$, akkor

$$\|U_0[F'(a) - F'(a_0)]\| \leqq \|U_0\|\,\|F'(a) - F'(a_0)\| = 0{,}096\|F'(a) - F'(a_0)\| \leqq 0{,}9.$$

Annak a „gömbnek" a sugara, melyre az

$$\|F'(a) - F'(a_0)\| \leqq \frac{0{,}9}{0{,}096}$$

egyenlőtlenség érvényes: $r = 0{,}725$. De akkor valóban

$$\|U_0 F(a_0)\| \leqq \|U_0\|\,\|F(a_0)\| \leqq 0{,}096 \cdot 0{,}434 \leqq 0{,}0417 < 0{,}725 \cdot 0{,}1 = 0{,}0725.$$

Ebből az következik, hogy az előbbi iterációs eljárás konvergens és az egyenletrendszer egyik megoldását szolgáltatja.

3. Tekintsük a következő nemlineáris Volterra-típusú integrálegyenletet:

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x, y, \varphi(y))\,dy = f(x). \qquad (0 \leqq x \leqq a) \qquad (17)$$

Tegyük fel, hogy $K(x, y, 0) \equiv 0$ és $\dfrac{\partial K(x, y, \varphi)}{\partial \varphi}$ a φ-ben folytonos. X és Y

tér gyanánt válasszuk a C teret és figyelembevéve azt a közismert tényt, hogy a másodfajú inhomogén Volterra-típusú lineáris integrálegyenletnek mindig van egy és csakis egy megoldása a C térben, az 1. tétel alapján kimondhatjuk, hogy *elegendő kicsiny* $\max\limits_{0\leqq x\leqq a}|f(x)|$ *mellett a* (17) *egyenletnek egy és csakis egy megoldása van.*

Csupán azt tegyük most fel, hogy $\dfrac{\partial K(x,y,\varphi)}{\partial\varphi}$ a φ-ben folytonos. Oldjuk meg a szóbanforgó egyenletet a következő iterációs eljárással: induljunk ki egy alkalmas $\varphi_0(x)$ függvényből és ezzel képezzük az

$$f_0(x)=\varphi_0(x)+\int_0^x K(x,y,\varphi_0(y))\,dy-f(x)$$

függvényt. Legyen

$$\varphi_1=\varphi_0(x)-f_0(x)+\int_0^x \varrho_0(x,y)f_0(y)\,dy,$$

ahol $\varrho_0(x,y)$ jelenti a $K(x,y,\varphi_0(y))$ kétváltozós mag rezolvensét. Ha

$$f_1(x)=\varphi_1(x)+\int_0^x K(x,y,\varphi_1(y))\,dy-f(x),$$

akkor

$$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)-f_1(x)+\int_0^x \varrho_0(x,y)f_1(y)\,dy$$

stb. Tegyük fel, hogy a $0\leqq x\leqq a$; $0\leqq y\leqq a$ tartományban $|\varrho_0(x,y)|\leqq\varrho$, továbbá legyen $0<q<1$ tetszőleges szám. Ha

$$\left|\frac{\partial K(x,y,\varphi)}{\partial\varphi}-\frac{\partial K(x,y,\varphi_0)}{\partial\varphi}\right|\leqq\frac{q(1-\varrho)}{a}\qquad \begin{array}{l}0\leqq x\leqq a\\ 0\leqq y\leqq a\\ 0\leqq|\varphi|\leqq r,\end{array}$$

akkor az előbbi módon képezett $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$ függvénysorozat konvergens és a (17) egyenlet egyik megoldásához konvergál, ha a kiindulási $\varphi_0(x)$ függvény olyan, hogy

$$\left|f_0(x)-\int_0^x \varrho_0(x,y)f_0(y)\,dy\right|\leqq r(1-q).$$

Ehhez teljesen hasonló tétel és eljárás állapítható meg a

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,y,\varphi(y))\,dy=f(x)\tag{18}$$

alakú inhomogén Fredholm-típusú integrálegyenlet megoldhatóságáról. Így például az 1. tétel alapján állíthatjuk, hogy *ha* $K(x,y,0)\equiv 0$ és λ a $\left(\dfrac{\partial K(x,y,\varphi)}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0}$ *magnak nem sajátértéke, akkor elegendő kicsiny* $\max\limits_{0\leqq x\leqq 1}|f(x)|$ *esetén a* (18) *egyenletnek egy és csakis egy megoldása van.*

4. *P. Lévy*[8] rámutatott a következő alakú integrálegyenletek fontosságára:

$$\varphi(x) - \int_0^1 F(x, y; \varphi(y); \lambda)\, dy = 0. \tag{19}$$

Az adott F függvényről tegyük fel, hogy x és y-ban folytonos, φ és λ szerint parciálisan differenciálható és a parciális differenciálhányadosok folytonosak, továbbá, hogy $F(x, y; \varphi; 0) \equiv 0$. Az X tér legyen a komplex számok tere, Y pedig a C tér. A (19) egyenlet (9) alatti egyenlet-típusba tartozik, és rá alkalmazható az 1a. tétel állítása. Ennek alapján érvényes a következő:

Ha a $\left(\dfrac{\partial F(x, y; \varphi; \lambda)}{\partial \varphi}\right)_{\substack{\varphi=0\\ \lambda=0}}$ *kétváltozós magnak* 1 *nem sajátértéke, akkor elegendő kicsiny* $|\lambda|$ *mellett a* (19) *egyenletnek egy és csakis egy folytonos megoldása van.*

P. Lévy hasonló tételének bizonyításánál F analitikus voltát is megkövetelte.

5. *A. Liapunov, E. Schmidt, L. Lichtenstein*[9] rámutattak a következőkben tárgyalt nemlineáris integrálegyenletek nagy szerepére úgy a tiszta, mint az alkalmazott matematika szempontjából.

Legyenek

$$K_{mnj}(t; t_1, t_2, \ldots, t_\varrho) \qquad (0 \leqq t \leqq 1;\ 0 \leqq t_i \leqq 1)$$

valós vagy komplex értékű többváltozós függvények (m, n, j, ϱ nemnegatív egész számok, $\varrho \geqq 1$, $m+n=\varrho$), melyek legfeljebb annyira nem folytonosak, hogy reájuk a klasszikus Fredholm-féle elmélet alkalmazható legyen. Egyszerűség kedvéért használjuk a következő jelöléseket

$$U_{mn}(x, y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{mnj}(t; t_1, \ldots, t_\varrho)\, y(t)^{\alpha} y(t_1)^{\alpha_1} \ldots y(t_\varrho)^{\alpha_\varrho} x(t)^{\beta} x(t_1)^{\beta_1} \ldots x(t_\varrho)^{\beta_\varrho} dt_1 \ldots dt_\varrho,$$

ahol $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho;\ \beta, \beta_1, \ldots, \beta_\varrho$ nemnegatív egészszámok és

$$\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\varrho = m;\ \beta + \beta_1 + \ldots + \beta_\varrho = n. \tag{20}$$

k jelenti a (20) alatti diofantikus egyenletek megoldásainak számát. Mármost tűzzük ki az

$$U(x, y) = \sum_{m+n \geqq 1}^{\infty} \sum U_{mn}(x, y) =$$

$$= \sum_{m+n \geqq 1}^{\infty} \sum \sum_{j=1}^{k} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{mnj}(t; t_1, \ldots, t_\varrho)\, y(t)^{\alpha} y(t_1)^{\alpha_1} \ldots y(t_\varrho)^{\alpha_\varrho} x(t)^{\beta} x(t_1)^{\beta_1} \ldots$$
$$\ldots x(t_\varrho)^{\beta_\varrho} dt_1 \ldots dt_\varrho = 0 \tag{21}$$

nemlineáris integrálegyenlet megoldását, ahol a baloldal ú. n. reguláris integrálhatványsor[10]. $y(t)$ ismert, $x(t)$ pedig az ismeretlen függvény.

Nyilván $U(0,0)=0$. A Fréchet-féle differenciálhányados definíciója alapján

$$U'_x(0,0)\cdot\Delta x=\int_0^1\cdots\int_0^1 K_{010}(t;t_1,\ldots,t_\varrho)\,dt_1\ldots dt_\sigma\cdot\Delta x(t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\varrho}\int_0^1\cdots\int_0^1 K_{10j}(t;t_1\ldots t_\varrho)\,\Delta x(t_j)\,dt_1\ldots dt_\varrho=$$

$$=A(t)\,\Delta x(t)+\int_0^1 B(t;\tau)\,\Delta x(\tau)\,d\tau,$$

ahol

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 K_{010}(t,t_1\ldots t_\varrho)\,dt_1\ldots dt_\varrho=A(t);$$

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 K_{011}(t;\tau,t_2,\ldots,t_\varrho)\,dt_2\ldots dt_\varrho+\int_0^1\cdots\int_0^1 K_{012}(t;t_1,\tau,t_3,\ldots,t_\varrho)\,dt_1 dt_3\ldots dt_\varrho+$$

$$+\ldots+\int_0^1\cdots\int_0^1 K_{01\varrho}(t;t_1,\ldots,t_{\varrho-1},\tau)\,dt_1\ldots dt_{\varrho-1}=B(t,\tau).$$

Az 1a. tételt a szóbanforgó integrálegyenletre alkalmazva azt kapjuk, hogy *ha* $A(t)\neq 0$ $(0\leqq t\leqq 1)$ *és* $B(t,\tau)/A(t)$ *kétváltozós magnak* -1 *nem sajátértéke, akkor minden* $y(t)$ *függvény mellett, melyre* $\max\limits_{0\leqq t\leqq 1}|y(t)|$ *elegendő kicsiny a* (21) *alatti egyenlet* $x(t)$*-re egyértelműen megoldható.* Ez *E. Schmidt* híres tétele. Ennek *L. Lichtenstein* által adott általánosításai is közvetlenül nyerhetők az 1a. tételből[11].

6. A bebizonyított tételek nemlineáris integrálegyenletrendszerek megoldhatóságának feltételeit és megoldási módszereit is szolgáltatják. Vegyünk például egy, az alkalmazások szempontjából is fontos esetet[12]. Legyen

$$U^{(i)}_{mnp}(x;y,\eta)=\sum_{j=1}^{k}\int_0^1\cdots\int_0^1 K^{(i)}_{mnpj}(t;t_1,t_2,\ldots,t_\varrho)\,x(t)^{\alpha}x(t_1)^{\alpha_1}\ldots x(t_\varrho)^{\alpha_\varrho}\times$$

$$\times y(t)^{\beta}y(t_1)^{\beta_1}\ldots y(t_\varrho)^{\beta_\varrho}\,\eta(t)^{\gamma}\eta(t_1)^{\gamma_1}\ldots\eta(t_\varrho)^{\gamma_\varrho}\,dt_1\,dt_2\ldots dt_\varrho\qquad(i=1,2)$$

$$\alpha+\alpha_1+\ldots+\alpha_\varrho=m;\ \beta+\beta_1+\ldots+\beta_\varrho=n;\ \gamma+\gamma_1+\ldots+\gamma_\varrho=p;$$

$$\varrho=m+n+p.$$

A probléma: adott $x(t)$ függvény mellett keresendő az $y(t),\eta(t)$ függvénypár, mely eleget tesz a

$$\sum\sum_{m+n+p\geqq 1}^{\infty}\sum U^{(1)}_{mnp}(x;y,\eta)=0,\quad\sum\sum_{m+n+p\geqq 1}^{\infty}\sum U^{(2)}_{mnp}(x;y,\eta)=0\qquad(22)$$

integrálegyenletrendszernek. Ezekben az egyenletekben szereplő integrálhatványsorok az *E. Schmidt* által adott definíció szerint regulárisok. Legyen az X tér a C tér, az Y tér pedig a folytonos függvénypároknak a tere. Ebben a térben a norma definíciója:

$$\left\|\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}\right\| = \max\left[\max_{0\leq t\leq 1}|y(t)|,\ \max_{0\leq t\leq 1}|\eta(t)|\right].$$

$\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} = 0$, akkor és csak akkor, ha $y\equiv 0$ és $\eta\equiv 0$. A tér linearitásához szükséges műveletek definíciója:

$$\lambda\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda\eta \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ \eta_1+\eta_2 \end{pmatrix}.$$

A (22) egyenletrendszer egyik megoldása: $x\equiv 0$; $y\equiv 0$; $\eta\equiv 0$. Az

$$F\left(x, \begin{matrix} y \\ \eta \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} \sum'\sum'\sum' U^{(1)}_{mnp}(x; y, \eta) \\ \sum'\sum'\sum' U^{(2)}_{mnp}(x; y, \eta) \end{pmatrix}$$

operátor $\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix}$ változó szerint képezett Fréchet-féle differenciálhányadosa a $\left(0, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$ helyen és ezt alkalmazva a $\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta\eta \end{pmatrix}$ elemre, nyilván a következő:

$$\begin{pmatrix} A^{(1)}(t)\,\Delta y(t) + \int_0^1 K^{(1)}_{0102}(t, t_1)\Delta y(t_1)\,dt_1 + B^{(1)}(t)\,\Delta\eta(t) + \int_0^1 K^{(1)}_{0012}(t, t_1)\,\Delta\eta(t_1)\,dt_1 \\ A^{(2)}(t)\,\Delta y(t) + \int_0^1 K^{(2)}_{0102}(t, t_1)\,\Delta y(t_1)\,dt_1 + B^{(2)}(t)\,\Delta\eta(t) + \int_0^1 K^{(2)}_{0012}(t, t_1)\,\Delta\eta(t_1)\,dt_1 \end{pmatrix},$$

ahol

$$A^{(1)}(t) = \int_0^1 K^{(1)}_{0101}(t, t_1)\,dt_1;\ B^{(1)}(t) = \int_0^1 K^{(1)}_{0011}(t, t_1)\,dt_1$$

$$A^{(2)}(t) = \int_0^1 K^{(2)}_{0101}(t, t_1)\,dt_1;\ B^{(2)}(t) = \int_0^1 K^{(2)}_{0011}(t, t_1)\,dt_1.$$

Tegyük fel, hogy

$$D(t) = \begin{vmatrix} A^{(1)}(t) & B^{(1)}(t) \\ A^{(2)}(t) & B^{(2)}(t) \end{vmatrix} \neq 0,\qquad (0\leq t\leq 1)$$

akkor az

$$A^{(1)}\Delta y + B^{(1)}\Delta\eta = \Delta z - \int_0^1 K^{(1)}_{0102}(t, t_1)\,\Delta y(t_1)\,dt_1 - \int_0^1 K^{(1)}_{0012}(t, t_1)\,\Delta\eta(t_1)\,dt_1$$

$$A^{(2)}\Delta y + B^{(2)}\Delta\eta = \Delta\zeta - \int_0^1 K^{(2)}_{0102}(t, t_1)\,\Delta y(t_1)\,dt_1 - \int_0^1 K^{(2)}_{0012}(t, t_1)\,\Delta\eta(t_1)\,dt_1$$

egyenletrendszerből

$$\Delta y+\frac{1}{D}\int_0^1\begin{vmatrix}K^{(1)}_{0102}(t,t_1) & K^{(2)}_{0102}(t,t_1)\\ B^{(1)}(t) & B^{(2)}(t)\end{vmatrix}\Delta y(t_1)\,dt_1+\frac{1}{D}\int_0^1\begin{vmatrix}K^{(1)}_{0012}(t,t_1) & K^{(2)}_{0012}(t,t_1)\\ B^{(1)}(t) & B^{(2)}(t)\end{vmatrix}\times$$

$$\times\Delta\eta(t_1)\,dt_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\Delta z & \Delta\zeta\\ B^{(1)} & B^{(2)}\end{vmatrix}$$

$$\Delta\eta-\frac{1}{D}\int_0^1\begin{vmatrix}K^{(1)}_{0102}(t,t_1) & K^{(2)}_{0102}(t,t_1)\\ A^{(1)}(t) & A^{(2)}(t)\end{vmatrix}\Delta y(t_1)\,dt_1-\frac{1}{D}\int_0^1\begin{vmatrix}K^{(1)}_{0012}(t,t_1) & K^{(2)}_{0012}(t,t_1)\\ A^{(1)}(t) & A^{(2)}(t)\end{vmatrix}\times$$

$$\times\Delta\eta(t_1)\,dt_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\Delta\zeta & \Delta z\\ A^{(2)} & A^{(1)}\end{vmatrix}$$

következik. Ez Δy és $\Delta\eta$-ra nézve lineáris integrálegyenletrendszer, melynek a közismert Fredholm-féle elmélet alapján bármilyen $\Delta z(t), \Delta\zeta(t)$ függvénypár mellett van megoldása, ha a következő módon definiált magnak -1 nem sajátértéke:

$$\varkappa(t,t_1)=\begin{cases}\dfrac{1}{D(t)}\left[B^{(2)}(t)\,K^{(1)}_{0102}(t,t_1)-B^{(1)}(t)\,K^{(2)}_{0102}(t,t_1)\right] & \text{ha } 0\leq t\leq 1;\ 0\leq t_1\leq 1\\[2ex] -\dfrac{1}{D(t)}\left[A^{(2)}(t)\,K^{(1)}_{0102}(t,t_1)-A^{(1)}(t)\,K^{(2)}_{0102}(t,t_1)\right] & \text{ha } 0\leq t\leq 1;\ 1<t_1\leq 2\\[2ex] \dfrac{1}{D(t-1)}\left[B^{(2)}(t-1)\,K^{(1)}_{0102}(t-1,t_1)-B^{(1)}(t-1)\,K^{(2)}_{0102}(t-1,t_1)\right] & \text{ha } 1<t\leq 2;\ 0\leq t_1\leq 1\\[2ex] -\dfrac{1}{D(t-1)}\left[A^{(2)}(t-1)K^{(1)}_{0102}(t-1,t_1-1)-A^{(1)}(t-1)\,K^{(2)}_{0102}(t-1,t_1-1)\right] & \text{ha } 1<t\leq 2;\ 1<t_1\leq 2\end{cases}\qquad(23)$$

Az 1a. tétel alapján kimondhatjuk tehát, hogy *a (22) alatti nemlineáris integrálegyenletrendszernek egy és csakis egy $y(t)$, $\eta(t)$ megoldása van, ha $D(t)\neq 0$ és a (23) alatt definiált $\varkappa(t,t_1)$ magnak -1 nem sajátértéke, feltéve, hogy az adott $x(t)$ függvény abszolút értékének maximuma elegendő kicsiny.*

Az eddigi példákhoz hasonlóan vizsgálhatók meg azok az integródifferenciálegyenletek is, melyekben az ismeretlen függvény és annak differenciálhányadosai integrálhatványsorban szerepelnek.

7. A bebizonyított tételek differenciálegyenletekre és differenciálegyenletrendszerekre is alkalmazhatók. Ennek illusztrálására tekintsük a következő nemlineáris közönséges differenciálegyenletrendszert:

$$\frac{dx_k}{dt}-\varphi_k(t;x_1,\ldots,x_n)=y_k(t),\qquad(k=1,2,\ldots,n)\qquad(24)$$

a határfeltételek legyenek a következő homogén lineáris feltételek:

$$\Phi_k[x_1(0),\ldots,x_1(0);\ x_1(1),\ldots,x_n(1)]=0\qquad(k=1,2,\ldots,n)\quad(25)$$

ahol Φ_k változóiban homogén lineáris függvény. Az X tér legyen a (25) határfeltételeknek elegettevő, differenciálható függvényekből álló függvény n-esek tere. Egyszerűség kedvéért tegyük fel például, hogy

$$\varphi_k(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Ha

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right)_{x_1 = 0, \ldots, x_n = 0} = \psi_{ik}(t),$$

akkor az

$$f(x) = \left\{\frac{dx_k}{dt} - \varphi_k(t, x_1, \ldots, x_n)\right\}$$

operátor Fréchet-féle differenciálhányadosa az $x = 0$ helyen és alkalmazva a Δx elemre igen könnyű számítások alapján

$$\frac{d}{dt}\Delta x_i - \sum_{k=1}^{n} \psi_{ik}(t)\,\Delta x_k(t). \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

A lineáris differenciálegyenletek elméletéből közismert, hogy ez az operátor egyértelműen megfordítható, ezért tehát kimondhatjuk az 1. tétel alapján, hogy *a* (24) *alatti differenciálegyenletrendszernek a* (25) *homogén lineáris határfeltételek mellett mindig van egy és csakis egy megoldása, feltéve, hogy*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \max_{0 \leq t \leq 1} |x_i(t)|$$

elegendő kicsiny.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] L. V. Kantorovics (Л. В. Канторович): О методе Ньютона. Труды матем. им.-та Стеклова. XVIII. 1949. 104.

[2] *M. Fréchet:* Ann. de l'École Norm. Sup. 1925. 213.

[3] *L. V. Kantorovics*[1] 127 old. 3. tétel.

[4] L. A. Ljuszternyik (Л. А. Люстерник): Основные идеи функциального анализа Успехи матем. наук. 1.

[5] L. pl. *Kantorovics*[1] alatt id. mű 115.

[6] *Osztrovszkij:* Comment. Math. Helv. 9. 1937.

[7] *Kantorovics:* [1] alatt id. mű 133.

[8] *P. Lévy:* C. R. Paris 150. 899. 1910.

[9] *A. Liapunov* munkái, melyek az örvénylő folyadékok stabilitására vonatkoznak (pl.: Sur un problème de *Tshebisheff.* Mém. de l'Ac. de St. Petersbourg 17. 1905; Sur les figures d'équilibre ... I, II, III, IV. Mém. de l'Ac. de Petersbourg 5. 1908.)

L. Lichtenstein: Vorl. über einige Klassen nichtlin. Integralgleichungen u. Integrodifferentialgleichungen. Berlin 1931.

E. Schmidt: Zur Theorie der lin. und nichtlin. Integralgleichungen. III. Math. Ann. 65. 1908. p. 370.

[10] *E. Schmidt:* id. mű 377.

[11] *L. Lichtenstein:* id. mű 10 és 16.

[12] Az alkalmazásokat illetően l. L. Lichtenstein id. művét.

MAGYAR MATEMATIKUSOK HOZZÁJÁRULÁSA A SPEKTRÁLELMÉLETHEZ

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

Előadta az 1952. június 16-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés. Irodalom

Spektrálelméletnek szokás nevezni a modern funkcionálanalízisnek azt az ágát, amely a lineáris operációkkal és lineáris transzformációkkal (operátorokkal) foglalkozik, pontosabban azzal, hogy ezek hogyan bonthatók fel „színképszerűen" bizonyos egyszerűbb típusúakra. Ennek a matematikán belüli és fizikai alkalmazásaiban is nagyjelentőségű elméletnek a kiépítéséhez magyar matematikusok igen sokoldalú módon járultak hozzá. Betűrendi sorban *Haar Alfréd, Lengyel Béla, Neumann János, Riesz Frigyes, Szőkefalvi-Nagy Béla* és *Wintner Aurél* neveit kell itt megemlítenünk, akik közül különösen *Riesz Frigyes* és *Neumann János* teljesítménye alapvető. Minthogy azonban *Lengyel, Neumann* és *Wintner* hosszabb idő óta külföldön működnek, az ő dolgozataikról az alábbiakban nem fogunk beszámolni, *Lengyel*nek azt az egyetlen dolgozatát kivéve, amely Magyarországon jelent meg. Aktualitást e beszámolónak az ad, hogy most jelentek meg a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában francia nyelven *Riesz Frigyes*nek és *Sz.-Nagy Bélá*nak a funkcionálanalízisről szóló előadásai [2]. A magyar hozzájárulásoknak magyar nyelven való jelen rövid összefoglalása egyrészt bevezetés e mű tanulmányozásához, másrészt annak kiegészítése.

Áttekintésünk a következő irodalomra terjed ki:

Haar Alfréd: [1] Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeitschrift, 41* (1930], 769—798.

Lengyel Béla: [1] On the spectral theorem of self-adjoint operators, *Acta. Sci. Math. Szeged, 9* (1939), 174—186.

Riesz Frigyes: [1] Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *Comptes Rendus Paris, 144* (1907), 615—619; [2] Über orthogonale Funktionensysteme, *Göttinger Nachrichten, 1907,* 116—122; [3] Sur les opérations fonctionnelles linéaires, *C. R. Paris, 149* (1909), 974—977; [4] Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues, *C. R. Paris, 150* (1910), 674—677; [5] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Annalen, 69* (1910), 449—497; [6] Über quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Göttinger Nachrichten, 1910,* 190—195; [7] Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations, *Annales École Normale Sup.*, (3) *31* (1914), 9—14; [8] *Les systèmes d'équations* *linéaires à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913); [9] Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, *41* (1917), 71—98; [10] Sur la décomposition des opérations fonctionnelles, *Atti Congresso Bologna, 3* (1928), 143—148; [11] Über die linearen Transformationen des komplexen Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged, 5* (1930), 23—54; [12] Über Sätze von Stone und *Bochner, ugyanott, 6* (1933), 184—198; [13] Zur Theorie des Hilbertschen Raumes, *ugyanott, 7* (1934), 34—38; [14] Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, *ugyanott, 7* (1935), 147—159; [15] A lineáris operációk általános elméletének néhány alapvető fogalomalkotásáról, *Matematikai és Természettudományi Értesítő, 56* (1937), 1—46; [16] Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, *Annals of Math.*, *41* (1940), 174—206; [17] Az ergodikus elmélet néhány kérdéséről, *Mat. és Fiz. Lapok, 49* (1942), 34—60; [18] Sur la théorie ergodique, *Commentarii Math. Helvetici, 17* (1945), 221—239; [19] Sur la représentation des opérations fonctionnelles linéaires par des intégrales de Stieltjes, *Kung. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, 21* (1952), Nr. 16.

Riesz F.—Lorch E. R.: [1] The integral representation of bounded selfadjoint transformations in Hilbert space, *Transactions Amer. Math. Soc., 39* (1936), 331—340.

Riesz F.—Sz.-Nagy B.: Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged, 10* (1943), 202—205; [2] *Leçons d'Analyse fonctionnelle* (Bpest, 1952).

Sz.-Nagy Béla: [1] Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen, *Math. Annalen, 112* (1936), 286—296; [2] Önmagában zárt ortogonális függvényrendszer szorzótáblázatáról, *Math. és Term.-tud. Értesítő, 55* (1937), 574—591; [3] Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems, *Annali Pisa, 6* (1937), 211—224; [4] On semi-groups of selfadjoint transformations in Hilbert space, *Proc. Nat. Acad. USA, 24* (1938), 559—560; [5] *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete, Bd. V, Heft 5 (Berlin, 1942; Ann Arbor, 1947); [6] Perturbációk a Hilbert-féle térben. I., *Math. és Term.-tud. Értesítő, 61* (1942), 755—775; [7] Perturbációk a Hilbert-féle térben. II., *ugyanott, 62* (1943), 63—79; [8] Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Commentarii Math. Helvetici, 19* (1947), 347—366; [9] Vibrations d'une corde non homogène, *Bulletin Soc. Math. France, 75* (1947), 193—208; [10] Uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged, 11* (1947), 152—157; [11] Sajátérték-feladatok perturbációszámítása, *Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei, 1* (1951), 288—293; [12] Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sci. Math. Szeged, 14* (1951), 125—137.

1. *Lineáris terek általános elmélete. Önadjungált transzformációk spektrálfelbontása*

*Riesz Frigyes*nek a lineáris függvényterek s az ezekben értelmezett lineáris operációk és transzformációk elméletét megalapozó dolgozatai ma már klasszikusok. Emlékezzünk csak a Riesz—Fischer-tételre [1], [2], *Riesz*nek az L^p függvényterekre és azok lineáris operációira vonatkozó alapvető eredményeire [5], továbbá híres tételére [3], [4], [7], [19], amely szerint az $a \leq x \leq b$ intervallumon folytonos függvények $C(a, b)$ terében értelmezett minden $L(f)$ lineáris operáció előállítható a következő alakban:

$$L(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

ahol $\alpha(x)$ korlátos változású függvény. Ez a tétel mutatta meg először a Stieltjes-féle integrál használhatóságát „spektrálfelbontás" céljára. Ebben a tételben már valóban egy egyszerű esetével találkozunk a spektrálfelbontásnak: az $L(f)$ lineáris operáció az $L_{x_0}(f) = f(x_0)$ egyszerű típusú lineáris operációkból van a Stieltjes-integrál segítségével felépítve.

Emlékezzünk ezzel kapcsolatban a momentum-problémára vonatkozó tételére is [4]. E tétel azt mondja ki, hogy az

$$\int_a^b f_i(x)\, d\alpha(x) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

egyenletrendszernek, ahol az $f_i(x)$ függvények és a c_i számok adva vannak, akkor és csak akkor létezik egy olyan $\alpha(x)$ függvény megoldása, amelynek teljes variációja $\leq G$, ha a

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \nu_i c_i \right| \leq G \cdot \max_x \left| \sum_{i=1}^{n} \nu_i f_i(x) \right|$$

egyenlőtlenség érvényes minden $n \geq 1$ egészszám és minden $\{\nu_i\}$ valós együtthatórendszer esetében.

Erre a tételére alapozta *Riesz* azt a bizonyítását [6], amelyet a végtelen sokváltozós (valós) korlátos*

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

másodfokú alakok Hilbert-féle spektráltétele számára adott. Újabb bizonyítást adott erre a tételre könyvében [8]. Itt a másodfokú alakok, vagy ezek komplex analogonjai, a

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i \overline{x_k} \qquad (a_{ik} = \overline{a_{ki}})$$

* T. i. a $\sum_i x_i^2 \leq 1$ „egységgömbön" korlátos.

Hermite-féle alakok helyett inkább az ezekkel kapcsolatos

$$y_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

lineáris helyettesítéseket, vagy másképp lineáris transzformációkat tekinti; egy ilyen transzformáció szimbolikusan az

$$y = Ax$$

alakban írható, ahol x és y jelöli a (valós, ill. komplex) Hilbert-tér $(x_1, x_2, \ldots)$ és $(y_1, y_2, \ldots)$ vektorait, A pedig jelöli magát a transzformációt, azaz az x-nek az y-ba való átvitele „geometriai tény“-ét. Az $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$ ú. n. Hermite-féle szimmetria az

$$(Ax, x') = (x, Ax')$$

invariáns alakban fejezhető ki a Hilbert-térben értelmezett belsőszorzat-fogalom segítségével. Az ennek a feltételnek eleget tevő lineáris transzformációkat „önadjungált“-aknak nevezzük. Ha az A transzformáció 0-adik hatványán az I azonossági transzformációt értjük, akkor a μ valós határozatlan minden

$$f(\mu) = c_0 + c_1\mu + \cdots + c_n\mu^n$$

polinomjához hozzárendelhetjük az A transzformáció

$$f(A) = c_0 I + c_1 A + \cdots + c_n A^n$$

polinomját és ez a hozzárendelés nyilván additív és multiplikatív. *Riesz* bebizonyította, hogy e hozzárendelés „nagyságrend-tartó“ is abban az értelemben, hogy ha $f(\mu) \geq g(\mu)$ azon a (véges) $m \leq \mu \leq M$ intervallumon, amely az (Ax, x) formának az $(x, x) \leq 1$ egységgömbön felvett értékeit tartalmazza, akkor egyben $f(A) \geq g(A)$, azaz $(f(A)x, x) \geq (g(A)x, x)$, bármely elemét jelentse is x a Hilbert-térnek.

E felismerés alapján sikerült a függvények és transzformációk közti megfelelkezést kiterjesztenie az $[m, M]$ intervallumon értelmezett általánosabb függvényekre, t. i. polinomok monoton és korlátos sorozatainak a határfüggvényeire és ezek különbségfüggvényeire. E tágabb függvényosztály tartalmazza például az $e_\lambda(\mu)$ függvényt, amely 1, ha $\mu \leq \lambda$, és 0, ha $\mu > \lambda$. E függvények tulajdonságaiból közvetlenül folyik, hogy a nekik megfelelő E_λ transzformációk „spektrálsereg“-et alkotnak, azaz E_λ a valós λ paraméter minden rögzített értéke mellett a Hilbert-térnek egy alterére való merőleges vetítése; $E_\lambda \leq E_\mu$, ha $\lambda < \mu$; $E_\lambda = 0$, ha $\lambda < m$; $E_\lambda = I$, ha $\lambda \geq M$. Könnyen következik továbbá az

$$A = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE_\lambda$$

„spektrálfelbontás“ abban az értelemben, hogy a Riemann—Stieltjes-összegek „normában“ konvergálnak A-hoz:

$$\left\| A - \sum_1^n \nu_k (E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}) \right\| \to 0,$$

ha $\quad \lambda_0 < m < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = M, \quad \lambda_{k-1} \leq \nu_k \leq \lambda_k, \quad \max_k (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \to 0.$

A korlátos önadjungált transzformációk spektráltétele ezen bizonyításának, úgy ahogy az *Riesz* könyvében [8] állt, még volt egy bizonyos szépséghibája, t. i. a kiindulópontul szolgáló tényt, az $f(\mu)$ és $f(A)$ polinomok közti megfelelkezés „nagyságrend-tartó" tulajdonságát a véges dimenziós esetből, a véges dimenziós térbeli spektráltételből vezette le határátmenettel. Egy későbbi dolgozatában [11] *Riesz* e tényre két közvetlen bizonyítást is közölt, a dolog azon mulott, hogy egy olyan $f(\mu)$ polinomra, amely az $[m, M]$ szakaszon pozitív, olyan előállítás találtassék, amelyből a pozitívitás valamiképpen kitűnik. Egy ilyen előállítás a következő, amelyet *S. Berstein*, majd később tőle függetlenül *F. Hausdorff* talált és amelyet utóbbi szerző a momentumproblémára vonatkozó vizsgálataiban analog célokra használt fel:

$$f(\mu) = \sum_{j=0}^{s} a_j(\mu - m)^j (M - \mu)^{s-j},$$

ahol, hacsak az s egészszám elegendő nagy, az összes a_j együtthatók pozitívak. Másik mód az $f(\mu)$ felbontása valós elsőfokú és pozitív másodfokú tényezők szorzatára, akkor azonban még azt a tényt is fel kell használni — amit Riesz igen szellemesen bizonyított be —, hogy két egymással felcserélhető pozitív önadjungált transzformáció szorzata is pozitív.

*Riesz*nek a korlátos önadjungált transzformációk spektráltételére adott bizonyítása nem terjeszthető ki nyilvánvaló módon a *nemkorlátos* esetre. Mindazonáltal, amint *Stone* „Linear transformations in Hilbert space and their applications to Analysis" c. könyve (New York, 1932) előszavában hangsúlyozza, *Riesz* munkássága fontos szerepet játszott a nemkorlátos transzformációk sikeres vizsgálatának előkészítésében. „Azok a fogalmak, amelyeket *Riesz* könyvében kifejtett, új szempontnak és új módszereknek a bevezetését jelölték ki, amelyek nélkül a haladás minden bizonnyal késett volna."

Azonban röviddel azután, hogy *Neumann János* és *M. H. Stone* a *nemkorlátos* önadjungált transzformációk spektráltételére vonatkozó első bizonyításaikat közölték, *Riesz* is adott e tételre egy újabb bizonyítást [11]. Bizonyítása a következő *felbontási tétel*en alapszik: Minden önadjungált A lineáris transzformációhoz találhatók olyan E_-, $E_+ = I - E$ merőleges vetítések, amelyek az A-val felcserélhető minden transzformációval felcserélhetők, és amelyekre

$$AE_- \leq 0, \quad AE_+ \geq 0.$$

Korlátos A-ra ez az $f(\mu)$ függvények és $f(A)$ transzformációk közti megfelelkezésből következik, E_- t. i. az a transzformáció, amely az $e_0(\mu)$ függvénynek felel meg. Riesz a nemkorlátos A esetét a korlátos esetre vezeti vissza azáltal, hogy a korlátos önadjungált

$$D = B + B^*$$

transzformációt tekinti, ahol $B = (A - iI)^{-1}$, $B^* = (A + iI)^{-1}$; a D-hez tartozó E_-, E_+ vetítések ugyanis azonosak az A-hoz tartozókkal. A felbontási tételt azután A helyett az $(A-\lambda I)$-re alkalmazza; a megfelelő $E\_$-t E_λ-val jelölve a

$$\lambda(E_\mu-E_\lambda)\leqq A(E_\mu-E_\lambda)\leqq \mu(E_\mu-E_\lambda)\qquad(\lambda<\mu)$$

egyenlőtlenségekre jut, amelyekből azután az

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE_\lambda$$

spektrálelőállítás már következik.

Később, *E. R. Lorch*-csal együttműködve, még két bizonyítást közölt *Riesz* a nemkorlátos önadjungált transzformációk spekráltételére (*Riesz—Lorch* [1]). Mindkét bizonyítás a nemkorlátos esetet a korlátosra vezeti vissza. Mindkettő a korlátos

$$B=(A^2+I)^{-1},\quad C=A(A^2+I)^{-1}$$

transzformációkkal dolgozik, amelyek létezése és tulajdonságai könnyen következnek az A „gráf"-jának *Neumann János* által bevezetett fogalma felhasználásával.

Már idézett [11] dolgozatában *Riesz, Neumann János*t követve, absztrakt szeparábilis Hilbert-teret vett alapul. A szeparábilitást, azaz egy megszámlálhatóan végtelen teljes ortonormális rendszer létezését azonban csupán a következő két alaptétel bizonyításában használta fel:

A. Ha $\mathfrak{L}$ a $\mathfrak{H}$ Hilbert-térben nem mindenütt sűrű lineáris sokaság, akkor van $\mathfrak{H}$-ban egy olyan $g\neq 0$ elem, amely ortogonális $\mathfrak{L}$-re.

B. A $\mathfrak{H}$ térben értelmezett minden folytonos $L(f)$ lineáris operáció előállítható az $L(f)=(f,g)$ alakban egy egyértelműen meghatározott g „generátor-elem" segítségével.

Pontosabban szólva, *Riesz* megjegyezte, hogy az **A** tétel a H-tér szeparábilitásának feltételezése nélkül is bebizonyítható. E megjegyzés fontossága akkor vált világossá, amikor a nem-szeparábilis tereket is vizsgálni kezdték, különösen *H. Löwig* és *F. Rellich* (konkrét példát szolgáltatnak ilyen térre a majdnem-periodikus függvények). Egy későbbi dolgozatában [13] Riesz igen egyszerű bizonyítást közölt mind **A**-ra, mind **B**-re a szeparábilitás feltételezése nélkül, csupán az

$$\|f-g\|^2+\|f+g\|^2=2\|f\|^2+2\|g\|^2$$

elemi azonosságra támaszkodva; utóbbi azt az egyszerű tényt fejezi ki, hogy egy parallelogrammában az oldalak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével. Ez az azonosság nagyon hasznosnak bizonyult azóta is különböző problémákban; mint *P. Jordan* és *Neumann János* kimutatták, ez az azonosság jellemzi a Hilbert-teret az általánosabb Banach-terek közül. *Riesz* ebből az azonosságból vezeti le egy közvetlen bizonyítását annak (a már *B. Levi* által 1906-ban a Dirichlet-probléma vizsgálatában felhasznált) ténynek, hogy ha C a Hilbert-tér egy konvex részhalmaza és $\{f_n\}$ a C elemeinek egy olyan sorozata, amelyre

$$\|f_n\| \to \inf \{\|f\|\},$$

akkor az $\{f_n\}$ sorozat konvergens.

Mielőtt tovább folytatnánk *Riesz* munkájának áttekintését, említsük meg *Lengyel* egy dolgozatát [1], amelyben egy újabb bizonyítást ad a korlátos, vagy nemkorlátos önadjungált transzformációk spektráltételére. Módszere a *Hellinger* által 1909-ben a korlátos esetre adott bizonyítás módszerének nemtriviális kiterjesztése. *Hellinger* meggondolásait az $R_z = (zI - A)^{-1}$ „rezolvens"

$$(R_z f, f) = \frac{(f,f)}{z} + \frac{(Af,f)}{z^2} + \frac{(A^2f,f)}{z^3} + \cdots$$

kifejtésére alapozta, amely minden olyan komplex z-re érvényes, amelyre $|z| > \|A\|$. Ez a sorfejtés a nemkorlátos esetben nem lehetséges, de nincs is szükség rá. *Lengyel* ugyanis megmutatja, hogy a spektráltétel levezetéséhez elég csak annyit tudni, hogy

$$(R_z f, f) = \frac{(f,f)}{z} + \psi_f(z),$$

ahol $\psi_f(z)$ a felső és az alsó komplex félsíkban reguláris analitikus függvény és

$$|z\psi_f(z)| \leqq C_f |y|^{-1} \qquad (z = x + iy),$$

ez pedig nemkorlátos A esetében is bizonyítható.

Riesz [14] érdekes bizonyítást talált *Neumann János*nak arra a tételére, amely szerint minden olyan (normális) T transzformáció, amely felcserélhető az $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$ önadjungált transzformációval felcserélhető korlátos lineáris transzformációk mindegyikével, az A-nak „függvénye", $T = F(A)$, azaz

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \, dE_\lambda$$

alkalmas $F(\lambda)$ numerikus függvénnyel. (Lényeges e tételben kikötni a Hilbert-tér szeparábilitását.)

Riesz bizonyításának lényege az, hogy tekinti az

$$E_\lambda = TE_\lambda = E_\lambda T$$

transzformációt (amely, ha a tétel igaz, $\int_{-\infty}^{\lambda} F(\mu) \, dE_\mu$-vel egyenlő) és a $\mathfrak{H}$ tér elempárjai által alkotott $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ teret felhasználó finom okoskodással kimutatja, hogy a $\mathfrak{H}$ bármely két, f és g elemére a

$$\frac{d(T_\lambda f, f)}{d(E_\lambda f, f)}, \quad \frac{d(T_\lambda g, g)}{d(E_\lambda g, g)}$$

differenciálhányadosok léteznek és egyenlők egymással minden valós λ-ra, kivéve esetleg egy olyan halmazt, amely összetehető egy $(E_\lambda f, f)$-ra vonatkozólag 0-mértékű, és egy az $(E_\lambda g, g)$-re vonatkozólag 0-mértékű halmazból. A $\mathfrak{H}$ tér szeparábilitásának lényeges felhasználásával megszerkeszt azután egy olyan f^* elemet, hogy az $(E_\lambda f^*, f^*)$ függvényre vonatkozólag minden $(E_\lambda f, f)$ függvény totálisan folytonos. Ebből következik azután, hogy

$$(T_\lambda f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(T_\lambda f^*, f^*)}{d(E_\lambda f^*, f^*)}\, d(E_\lambda f, f),$$

tehát

$$F(\lambda) = \frac{d(T_\lambda f^*, f^*)}{d(E_\lambda f^*, f^*)}$$

az a függvény, amelynek a létezését a tétel állítja.

E tétel bizonyítását később *Y. Mimura* (*Japanese Journal of Math.*, *13* (1936), 119—128) némileg egyszerűsítette. Még egyszerűbb bizonyítást adott rá *Sz.-Nagy Béla* [5]. Eltérően *Riesz*étől és *Mimurá*étól, ez a bizonyítás nem hivatkozik a korlátos változású függvények majdnem mindenütt való differenciálhatóságát állító Lebesgue-féle tételre, és egyáltalában nem is szerepelnek benne differenciálhányadosok, és ehelyett a Riesz—Fischer tételt használja fel.

Sz.-Nagy Béla Ergebnisse-füzete [5] tömör áttekintést ad a Hilbert-tér elméletéről és különösképpen a Hilbert-tér önadjungált és normális transzformációinak spektrálelméletéről. Pozitív korlátos önadjungált transzformáció *pozitív* önadjungált négyzetgyökét, az $A^{\frac{1}{2}}$ transzformációt a *C. Visser*től származó iterációs eljárással nyeri:

$$B_0 = 0, \quad B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2), \quad B_n \to A^{\frac{1}{2}}.$$

Tetszésszerinti korlátos önadjungált *A pozitív* és *negatív részét* azután $A^+ = \frac{1}{2}[A + (A^2)^{\frac{1}{2}}] \geqq 0$ és $A^- = \frac{1}{2}[-A + (A^2)^{\frac{1}{2}}] \geqq 0$ szolgáltatja. Az $A^+f = 0$ egyenletnek eleget tevő f elemek lineáris alteret alkotnak; az erre való merőleges vetítést E_--szal, a reá merőleges altérre való $I - E_-$ vetítést pedig E_+-szal jelölve, könnyen adódik, hogy $A^+ = AE_+$, $A^- = AE_-$. Ezzel eljutunk ugyanahhoz a felbontáshoz, amelyhez *Riesz* más úton eljutott s amelyről fentebb volt már szó. Ezt a felbontást A helyett $(A - \lambda I)$-ra alkalmazva és a megfelelő E_--t E_λ-val jelölve, újra könnyen eljutunk az $A = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda$ spektrálképlethez.

— A nemkorlátos esetre két bizonyítás is áll: az egyik ezek közül a Riesz—Lorch-féle bizonyítás, kiterjesztve a „normális" transzformációknak (az önadjungáltakénál tágabb) osztályára, a másik bizonyítás *Neumann*tól származik. Fejezetek foglalkoznak a spektrummal, transzformációcsoportokkal és félcsoportokkal, stb. Két rövid bizonyítást ad a füzet önadjungált (vagy normális) transzformációk kommutatív rendszerei „szimultán" spektrálfelbontására.

Az utóbbi, *Neumann János*tól származó tételre előzőleg egy igen részletesen kidolgozott bizonyítást közölt *Haar Alfréd* [1] is, s a tételt a következő probléma megoldására használta fel: Jellemzendők mindazok a (c_{pqr}) végtelen köbös matrixok, amelyek valamely ortonormált függvényrendszer „szorzótáblázata"-ként állíthatók elő, azaz amelyekhez létezik valamely Ω mérték-térben olyan ortonormált $\{\varphi_p\}$ rendszer, hogy

$$c_{pqr}=\int_{\Omega}\varphi_p(x)\varphi_q(x)\overline{\varphi_r(x)}\,dx.$$

E „szorzótáblázatok" problémájával foglalkozik *Sz.-Nagy Béla* [2] és [3] dolgozata is.

Bár nincs közvetlen kapcsolatban a spektrálelmélettel, mégis meg kell említenünk ebben a beszámolóban *Haar*nak a topológikus csoportok invariáns mértékfogalmára vonatkozó alapvető fontosságú dolgozatát [2], [3]; e dolgozat ugyanis nagy lehetőségeket nyitott meg többek között a csoportelőállítások spektrálelméletének kialakulásához is.

2. *Csoportok és félcsoportok*

Lineáris transzformációknak a t valós paramétertől függő olyan $\{T_t\}$ összességét, amely eleget tesz a

$$T_{t_1+t_2}=T_{t_1}T_{t_2}$$

feltételnek, egyparaméteres *csoport*nak, ill. *félcsoport*nak nevezzük aszerint hogy a t paraméter értékkészlete a teljes $-\infty<t<\infty$ valós számegyenes, vagyis csak a $0<t<\infty$ félegyenes.

A Hilbert-tér unitér transzformációnak egyparaméteres $\{U_t\}$ csoportjaira vonatkozik a nevezetes Stone-féle tétel, amely szerint ezek a következő alakban állíthatók elő:

$$U_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,dE_\lambda,$$

feltéve, hogy az (U_tf,g) belsőszorzat minden f,g elempárra a t folytonos, vagy (ha a Hilbert-tér szeparábilis) mérhető függvénye. *Bochner* 1933-ban e tételt a folytonos esetben abból a saját tételéből vezette le, amely szerint minden *folytonos* és *pozitív definit*, azaz

$$\sum_{\nu,\mu}p(t_\nu-t_\mu)\varrho_\nu\overline{\varrho_\mu}\geqq 0$$

feltételnek eleget tevő $p(t)$ függvény előállítható a

$$p(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,dV(\lambda) \tag{1}$$

alakban valamely korlátos monoton nem-fogyó $V(\lambda)$ függvény segítségével. *Riesz* [12] általánosította Bochner tételét nem-folytonos, de mérhető pozitív definit $p(t)$ függvényekre: ezekre is érvényes az (1) előállítás, de csak majdnem mindenütt. Ebből azután adódik a Stone-tétel a mérhető esetben (itt a csoporttulajdonságból kifolyólag zérómértékű kivételes halmaz sem lép fel).

Sz.-Nagy Béla [1], [5] újabb bizonyítást adott Stone tételére. Míg *Stone*, *Neumann* és *Riesz* bizonyításai az egész $(-\infty, \infty)$ egyenesen való függvénytranszformációkkal (*Stone*é és *Riesz*é Fourier-transzformációkkal) dolgoznak, *Sz.-Nagy* bizonyítása a problémát a periódikus esetre vezeti vissza és a Fourier sorok elméletére hivatkozik. Az unitér transzformációk *Wintner—Neumann*-féle spektráltételéből következőleg létezik egy olyan F_μ spektrálsereg, amelyre $F_0 = 0$, $F_1 = I$ és

$$U_1^n = \int_0^1 e^{2\pi i n\mu}\, dF_\mu \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Minden valós t-re megállapodva az

$$U_1^t = \int_0^1 e^{2\pi i t\mu}\, dF_\mu$$

jelölésben, a

$$V_t = U_t U_1^{-t}$$

transzformációk szintén unitérek, egyparaméteres csoportot alkotnak s amellett $V_{t+1} = V_t$. A V_t periodikus lévén, Fourier-sorba fejthető:

$$V_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n, \quad P_n = \int_0^1 V_t e^{-2\pi i n t}\, dt;$$

a P_n együtthatókról könnyen kimutatható, hogy páronként egymásra merőleges alterekre való (merőleges) vetítések és összegük I. Ebből következik, hogy

$$U_t = U_1^t V_t = \int_0^1 e^{2\pi i t\mu} dF_\mu \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE_\lambda,$$

ahol

$$E_\lambda = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\frac{\lambda}{2\pi}-n} P_n \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$$

a keresett spektrálsereg. Ez a bizonyítási módszer egyformán alkalmazható a folytonos és a mérhető esetre.

Sz.-Nagy [1] korlátos önadjungált transzformációk $\{A_t\}$ $(-\infty < t < \infty)$ egyparaméteres csoportjait is vizsgálta és megmutatta, hogy ha az $(A_t f, f)$ függvények mérhetők, vagy korlátosak a t változó értékeinek valamely véges szakaszában, akkor a következő alakú spektrálfelbontás érvényes:

$$A_t = \int_0^\infty \lambda^t\, dE_\lambda.$$

E. Hille [*Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 19* (1938)] és *Sz.-Nagy* [4] kiterjesztették ezt az eredményt $\{A_t\}$ $(0 < t < \infty)$ félcsoportokra is.

Az unitér és az önadjungált transzformációk csoportjai, ill. félcsoportjai esetére visszavezethető a normális transzformációk félcsoportjainak esete, ezekre *Sz.-Nagy* [1], [5] az

$$N_t = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+iy)t}\, d E_{x,y}$$

spektrálelőállítást találta abban az esetben, amikor egyik N_t-nek sem sajátértéke a 0; az $E_{x,y}$ „kétparaméteres" spektrálsereg.

A Hilbert-tér unitér transzformációira vonatkozó Wintner—Neumann-féle spektráltételt *E. R. Lorch* kiterjesztette tetszésszerinti reflexív Banach-tér „egyenletesen korlátos" T lineáris transzformációira, azaz amelyekre

$$\|T^n\| < C \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

[*Transactions American Math. Society, 42* (1939), 217—234]. Látszólag ez a tétel a Hilbert-féle tér esetében is lényeges új eredményt jelentett. *Sz.-Nagy Béla* [10] azonban kimutatta, hogy a Hilbert-tér esetében nincs szó lényeges új transzformáció-típusról, ugyanis minden „egyenletesen korlátos" lineáris T transzformáció „hasonló" egy unitér transzformációhoz, azaz található egy korlátos inverzzel biró Q lineáris transzformáció úgy, hogy a

$$QTQ^{-1}$$

transzformáció unitér. Továbbmenőleg kimutatta, hogy ha $\{T_t\}$ tetszésszerinti olyan egyparaméteres csoportja a Hilbert-tér lineáris transzformációinak, amelyre a $\|T_t\|$ norma a t-től független korlát alatt marad, akkor van olyan (t-től független) Q, hogy az

$$U_t = Q T_t Q^{-1}$$

transzformációk *unitérek* (ezek nyilván szintén egyparaméteres csoportot alkotnak). A bizonyításban a Mazur—Banach-féle általánosított határértékfogalom játszik lényeges szerepet, s így a bizonyítás végeredményben felhasználja a Zermelo-féle kiválasztási axiomát. Ha azonban a szóbanforgó Hilbert-tér szeparábilis, akkor az erre való hivatkozás elkerülhető.

3. *Általános lineáris transzformációk*

Riesz alapvetően járult hozzá az általános típusú (nem önadjungált és nem is „normális") lineáris transzformációk fogalmának és elméletének a kialakulásához is. Módszerei nemcsak a Hilbert-tér, hanem általános normált lineáris terek, ú. n. Banach-terek esetében is alkalmazhatók.

Könyvében [8, n° 71—82] bármely általános típusú korlátos lineáris A transzformációkra vonatkozólag a μ komplex számokat két kategóriába sorolja aszerint, amint az $I-\mu A$ transzformációnak van korlátos inverze, vagy nincs. Ez ekvivalens az újabban használatos terminológiában a komplex sík felbontásával az A rezolvens-halmazára és spektrumára: előbbibe tartoznak azok a λ komplex számok, amelyekre a $\lambda I-A$ transzformációnak korlátos, mindenütt értelmezett inverze van; az utóbbiba a többi számok. Ezeket az ekvivalens jelöléseket használva *Riesz* eredményei a következőképpen vázolhatók: Az A rezolvens-halmaza nyitott halmaz; az $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ „rezolvens" ezen a halmazon a λ reguláris analitikus függvénye, azaz minden λ pontja közül elég kis körben a $\lambda - \lambda_0$ hatványai szerint sorba fejthető. Ezután alkalmazza Riesz a közönséges analitikus függvényekre vonatkozó klasszikus módszereket, különösen a kontúrintegrációt, ill. a reziduumszámítást. Ha C az A rezolvens-halmazában haladó Jordan-görbe, akkor az

$$E = \frac{1}{2\pi i}\int_C R_\lambda \, d\lambda$$

transzformációra az adódik, hogy $E^2 = E$, amiből következik, hogy az E (általában ferde) parallel vetítés. A teljes $\mathfrak{H}$ tér ennek megfelelően felbomlik az

$$\mathfrak{M} = E\mathfrak{H} \text{ és } \mathfrak{N} = (I - E)\mathfrak{H}$$

alterek vektoriális összegére; e két altérnek csak a 0 a közös pontja és mindkettőjüket az A önmagába transzformálja. Az A-nak az $\mathfrak{M}$-ben levő „részét" $A_{\mathfrak{M}}$-mel, az $\mathfrak{N}$-ben levő részét $A_{\mathfrak{N}}$-nel jelölve, az $A_{\mathfrak{M}}$ spektruma megegyezik az A spektrumának a C görbén belüli, az $A_{\mathfrak{N}}$ spektruma pedig megegyezik az A spektrumának a C görbén kivüli részével.

Ez a felbontás és a kontúrintegráción alapuló, *Riesz* által kezdeményezett kalkulus alapvető a normált vektorgyűrűk spektrálelméletére vonatkozó újabb nagyjelentőségű vizsgálatok szempontjából is (*Gelfand, Lorch, Dunford*, stb.).

Felbontási tételét *Riesz* elsősorban a „teljesen folytonos" (t. f., németül „vollstetig") transzformációk vizsgálatában használta fel. A teljes folytonosság fogalma *Hilbert*től és *Riesz*től [8], [9] származik. *Riesz* egy lineáris transzformációt akkor nevez t. f.-nak, ha az minden korlátos halmazt kompakt halmazba visz át: ez a definíció tetszőleges normált vektortér esetében alkalmazható. Az integrálegyenletekkel kapcsolatos függvénytranszformációk a magfüggvényre vonatkozó igen általános feltevések mellett t. f.-ak. A t. f.-ság fogalmának elvi jelentősége abban áll, hogy ha T t. f., akkor spektruma diszkrét és egyetlen lehetséges torlódási helye a 0, továbbá a

$$\lambda f - Tf = g$$

lineáris egyenletre, ahol g a tér adott, f a tér keresett eleme, λ pedig komplex paraméter ($\lambda \neq 0$), a Fredholm-féle integrálelmélet „determináns nélküli" tételei érvényesek.

Ennek egy bizonyítását *Riesz* könyvében [8] vázolta; egy másik részletesen kidolgozott bizonyítást később közölt [9]. Az utóbbi bizonyítás nem függvénytani, hanem inkább geometriai jellegű. Ha λ a spektrum egy pontja, tekinti az $\mathfrak{M}_n$ és $\mathfrak{N}_n$ lineáris sokaságokat, ahol $\mathfrak{M}_n$ a $(\lambda I - T)^n f = 0$ egyenlet megoldásainak összessége és $\mathfrak{N}_n$ a $g = (\lambda I - T)^n f$ alakú elemek összessége. A

T t. f.-sága biztosítja, hogy mindkét lineáris sokaság zárt (tehát *altér*), továbbá $\mathfrak{N}_n$ véges dimenziójú és van olyan $\nu \geqq 1$ index, hogy

$$\mathfrak{M}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{M}_{\nu+1} = \ldots, \quad \mathfrak{N}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{N}_\nu = \mathfrak{N}_{\nu+1} = \ldots;$$

$\mathfrak{M}_\nu$ és $\mathfrak{N}_\nu$ diszjunktak (közös elemük csupán a 0), vektorális összegük pedig a teljes tér. A T transzformáció mind $\mathfrak{M}_\nu$-t, mind $\mathfrak{N}_\nu$-t önmagába transzformálja, s így a T-nek a λ ponthoz tartozó felbontása áll elő.

*Riesz*nek az *ergodelméletbe* vágó több vizsgálata közül ([17], [18]) csak azt az igen egyszerű bizonyítást említjük, amelyet a Neumann-féle ergodtételre adott. E tétel szerint, ha U a Hilbert-tér unitér transzformációja, akkor az

$$\frac{1}{n-m}(U^{m+1} + U^{m+2} + \ldots + U^n)$$

számtani közepek $n-m \to \infty$ esetén egy (merőleges) vetítéshez tartoznak. *Riesz* bizonyítása, mely nyomtatásban először *E. Hopf „Ergodentheorie"* c. Ergebnisse-füzetében jelent meg, ismét két altérrel, $\mathfrak{M}_1$-gyel és $\mathfrak{N}_1$-gyel okoskodik, ahol $\mathfrak{M}_1$ az $(I-U)f=0$ egyenlet megoldásainak, $\mathfrak{N}_1$ pedig a $g=(I-U)f$ alakú elemeknek és ezek határértékeinek az összessége. Ezekben az (U-ra nézve invariáns) alterekben az ergodtétel azonnal adódik; az U unitaritásából pedig könnyen következik, hogy e két altér vektorális összege a teljes tér.

E módszert később *Riesz* és *Sz.-Nagy* közös dolgozatukban [1] kiterjesztették a Hilbert-tér tetszőleges *kontrakcióira*, azaz olyan T lineáris transzformációira, amelyekre $\|Tf\| \leqq \|f\|$. Probléma csak annak a bizonyítása, hogy $\mathfrak{M}_1$ és $\mathfrak{N}_1$ ekkor is kifeszítik az egész Hilbert-teret. Ez azonban a következő lemmából folyik: *Ha T a Hilbert-tér kontrakciója, akkor T és adjungáltja, T^*, a tér ugyanazon elemeit hagyják invariánsan.*

4. *Perturbáció-elmélet.*

Az önadjungált transzformációk sajátértékeire vonatkozó perturbációszámítás, úgy ahogy azt *Lord Rayleigh* és *Schrödinger* óta a fizikában (hangtanban, kvantummechanikában stb.) alkalmazzák, arra a feltevésre van alapozva, hogy ha a transzformáció „reguláris analitikus" módon változik, akkor a sajátértékei és sajátelemei is hasonlóképpen változnak. Az A_0 transzformáció reguláris analitikus módon való megváltoztatásán (perturbálásán) azt értjük, hogy helyettesítjük az ε valós paramétertől függő $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots$ transzformációval.

E feltevés helyességének első bizonyítása *F. Rellich*-től származik, 1936-ból, legalábbis az A_0 véges multiplicitású elszigetelt sajátértékei esetében; sikerült továbbá neki a perturbált sajátérték és sajátelem hatványsora konvergenciájának gyorsaságára numerikus becsléseket is nyernie.

Sz.-Nagy Béla [6], [8] dolgozatában az A_0 spektruma tetszésszerinti elszigetelt darabjának a perturbációját vizsgálja. Módszerének kiindulópontja a rezolvens kontúrintegrációja; eredményei általánosabbak, pontosabbak és könnyebben nyerhetők, mint a *Rellichéi*. E dolgozatok gondolatmenetét részletesen ismerteti *Sz.-Nagy Bélá*nak ezekben az *Osztályközlemények*ben megjelent cikke [11].

Egy másik dolgozatában [7] *Sz.-Nagy Béla* más típusú perturbációproblémát tárgyal, t. i. az

$$Af = \lambda J(\varepsilon) f$$

sajátértékegyenletet, ahol az A önadjungált transzformáció nem perturbálódik, a $J(\varepsilon)$ szintén önadjungált transzformáció azonban az ε reguláris analitikus függvénye, $J(0) = I$. Ez a probléma másképpen úgy fogalmazható, hogy a változatlan (Af, f) másodfokú alakot a változó

$$(f, f)_\varepsilon = (J(\varepsilon) f, f)$$

metrikus alapforma értelmében kell „főtengelyekre transzformálni".

A perturbációelméletet egyik dolgozatában [9] *Sz.-Nagy Béla* a rezgő húr klasszikus problémájára alkalmazza, mégpedig a legáltalánosabb keretben, a húr tömegeloszlásáról semmit sem tételezve fel, még azt sem, hogy e tömegeloszlás valamely sűrűségfüggvényből származtatható.

Újabb dolgozatában [12] *Sz.-Nagy Bélá*nak sikerült az önadjungált transzformációk perturbációjára vonatkozó eredményeknek jórészét kiterjesztenie általános *zárt* T transzformációk esetére is, mégpedig nemcsak a Hilbert-tér, hanem akármilyen Banach-tér transzformációiról legyen is szó. Kimutatja, hogy a zártság tulajdonsága kis perturbáció esetén megmarad. Ha a T_0 transzformáció spektrumának a λ_0 egy elszigetelt pontja s e pontnak az m „principális multiplicitása" véges, akkor a

$$T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \cdots$$

perturbált transzformációnak a spektruma a λ_0 környezetében véges sok pontból áll s e pontok principális multiplicitásainak összege m-mel egyenlő. Ha $m = 1$, akkor $T(\varepsilon)$-nak is csak egy $\lambda(\varepsilon)$ spektrumpontja van a λ_0 környezetében s ez, valamint a hozzátartozó sajátelem, az ε hatványsoraival állíthatók elő. Valamely T lineáris transzformáció spektruma λ pontjának principális multiplicitásán annak az altérnek a dimenzióját értjük, amelyet azok az f elemek határoznak meg, amelyekre $\|(T - \lambda I)^n f\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$.

5. *Lineáris operációk általános spektrálelmélete.*

Az $a \leqq x \leqq b$ intervallumon értelmezett folytonos $f(x)$ függvények C terében legyen Lf (számértékű) additív, homogén és pozitív operáció, azaz legyen $L(f_1 + f_2) = Lf_1 + Lf_2$; $L(cf) = c\, Lf$; $Lf \geqq 0$, ha $f(x) \geqq 0$. Ekkor az operáció korlátos is és így Riesz tétele szerint [3], [4], [7], [19] előállítható az

$$Lf = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$$

alakban, ahol $\alpha(x)$ monoton nemfogyó függvény. E tétel alapján a monoton nemfogyó függvények vizsgálata egyszersmind a C tér pozitív lineáris operációinak a vizsgálatát is jelenti. Így például az $\alpha(x)$ kanonikus felbontásának totálisan folytonos, szinguláris és tiszta ugrófüggvény összegére megfelel az operáció egy olyan kanonikus felbontása, amelyet ezen az úton haladva *M. Fréchet* tanulmányozott (1913).

Riesz a bolognai matematikai kongresszuson (1928) tartott előadásában [10] megmutatta, hogy a lineáris operációknak ez, valamint ezzel analog felbontásai közvetlen módon, azaz a Stieltjes-féle integrálelőállítás felhasználása nélkül is nyerhetők. Alapvető Riesz elméletében, hogy a lineáris operációk között „parciális rendezést" vezet be: $A \geqq B$, ha $Af \geqq Bf$ minden $f(x) \geqq 0$ függvényre, és megmutatja, hogy a lineáris operációk minden majorálható $\{A\}$ halmazának van egy legkisebb közös majoránsa, $\sup\{A\}$, és minden minorálható $\{A\}$ halmazának van egy legnagyobb közös minoránsa, $\inf\{A\}$. Ennek bizonyításában lényeges szerepet játszik az a könnyen nyerhető eredmény, hogy ha

$$f(x)+g(x)=\sum_1^m h_i(x) \qquad (f, g, h_i \in C;\ f(x) \geqq 0, g(x) \geqq 0,\ h_i(x) \geqq 0),$$

akkor találhatók f_i, g_i nem-negatív folytonos függvények, úgy hogy

$$f(x)=\sum_1^m f_i(x);\ g(x)=\sum_1^m g_i(x);\ f_i(x)+g_i(x)=h_i(x) \qquad (i=1,2,\ldots,m).$$

(Ezt elég közvetlenül csak $m=2$ esetére belátni, általános m-re azután teljes indukcióval következik.)

Riesz módszere nemcsak a folytonos függvények C terének lineáris operációira, sőt nem is csak függvényoperációkra alkalmazható. Mint *Riesz* kifejtette [15], [16], a folytonos függvények, helyesebben a *nem-negatív* folytonos függvények szerepe átadható absztrakt f elemek bármely olyan Ω halmazának, amelyben kommutatív és asszociatív módon összeadás van értelmezve és amely eleget tesz a következő feltételeknek:

a) az $f_1+f_2=f_1+f_3$ egyenlőségből következik, hogy $f_2=f_3$;

b) van egy 0 elem a következő tulajdonságokkal: $f+0=f$ minden f esetében; $f_1+f_2=0$ maga után vonja, hogy $f_1=f_2=0$;

c) ha $f+g=h_1+h_2$ $(f, g, h_i \in \Omega)$, akkor van $f_i, g_i \in \Omega$ $(i=1, 2)$ úgy, hogy $f=f_1+f_2$, $g=g_1+g_2$, $h_i=f_i+g_i$ $(i=1, 2)$.

Ezeket a feltételeket kielégíti minden vektor-„lattice"-ben az $f \geqq 0$ elemek halmaza, de kielégítik olyan halmazok is, amelyeknek nincs meg a „lattice"-tulajdonságuk (pl. a $p(x)/q(x)$ racionális törtfüggvények halmaza, ahol $p(x) \geqq 0$, $q(x) > 0$ az $a \leqq x \leqq b$ intervallumon).

Az Ω halmaz f elemeire értelmezett, valós értékű, additív Af operációk „parciálisan" rendezhetők: $A_1 \geqq A_2$, ha $A_1 f \geqq A_2 f$ az Ω minden f elemére. A *c)* feltétel biztosítja, hogy a $\sup\{A\}$ és $\inf\{A\}$ additív operációk léteznek additív operációknak minden majorálható, ill. minorálható $\{A\}$ halmaza esetében.

Legyen E egy pozitív additív (p. a.) operáció Ω-n, amely az egység szerepét fogja játszani. Legyen $[E]$ az E „teljes családja", azaz pozitív additív operációk azon legszűkebb összessége, amely tartalmazza 1. E-t, 2. minden p. a. operációval együtt annak összes p. a. minoránsait is, 3. véges sok p. a. operációval együtt azok összegét is, 4. p. a. operációk bármely majorálható halmazával együtt azok legkisebb majoránsát is.

Ha A egy olyan operáció, amely vagy $[E]$-be tartozik, vagy két $[E]$-be tartozó operáció különbsége, akkor *Riesz* megmutatja, hogy A-nak E-re vonatkozóan létezik egy „spektrálfelbontása", azaz létezik p. a. operációknak egy olyan $\{E_\lambda\}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ serege, amelyre

1. $0 \leqq E_\lambda \leqq E, \quad \inf\{E_\lambda, E - E_\lambda\} = 0,$

2. $E_\lambda \leqq E_\mu$, ha $\lambda < \mu$,

és az Ω minden f elemére

3. $E_\lambda f \to 0$, ha $\lambda \to -\infty$, $E_\lambda f \to Ef$, ha $\lambda \to \infty$,

4. $Af = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda f.$

E tételt *Riesz* a $P_\lambda = \sup\{\lambda E - A, 0\}$ operációk felhasználásával nyeri. Megmutatja, hogy $P_\lambda f$ az Ω minden f elemére a λ-nak monoton nem-fogyó, *konvex* függvénye; $E_\lambda f$-et a P_λ-nak a λ szerint jobbról való differenciálhányadosaként definiálva, E_λ fenti tulajdonságai nagyobb nehézség nélkül következnek.

Az A ezen „spektrálfelbontása" lehetővé teszi az A-nak (E-re vonatkozó) $\Phi_E(A)$ „függvényei" értelmezését a

$$\Phi_E(A)f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda)\, dE_\lambda f$$

Stieltjes-integrálok által. Sőt több változó esetére is át lehet térni. Ha pl. A' egy másik ugyanolyan típusú operáció, mint A, és E' az A'-nek E-re vonatkozó „spektrálserege", akkor a kétváltozós $\Phi(\lambda, \mu)$ függvényhez a

$$\Phi_E(A, A')f = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda, \mu)\, dE_{\lambda,\mu} f \qquad (E_{\lambda,\mu} = \inf\{E_\lambda, E'_\mu\})$$

által értelmezett operáció remélhető, hacsak ez az integrál minden $f \in \Omega$ esetében létezik; speciálisan így értelmezhető az A és A' operációk E-re vonatkozó *szorzata*:

$$(AA')_E f = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\mu \, dE_{\lambda,\mu} f.$$

Riesz e gondolatainak máris nagy hatása mutatkozik meg az irodalomban, kiindulópontul szolgáltak az ú. n. parciálisan rendezett lineáris terekre vonatkozó széleskörű vizsgálatoknak.

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete.

RIESZ FRIGYES ÉS SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA „LEÇONS D'ANALYSE FONCTIONNELLE" CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

Az alig félszázados multra visszatekintő funkcionálanalízis már ezen rövid idő alatt is olyan tudományágnak bizonyult, amely nemcsak a matematika legkülönbözőbb fejezeteiben rendelkezik figyelemreméltó alkalmazásokkal, hanem a fizika különböző területeivel is mélyreható kapcsolatban áll. Elég e tekintetben az integrálegyenleteknek a matematikai fizikában játszott nagy szerepére, valamint a kvantummechanika matematikai apparátusában fellépő operátorfogalomra utalnunk. Ez az oka annak, hogy a matematika ezen ágára vonatkozó munkák megjelenése nemcsak az ezen témakörrel foglalkozó matematikusoknak, hanem valamennyi matematikusnak és elméleti fizikusnak érdeklődésére is joggal számíthat.

Fokozottan indokolt ez az érdeklődés akkor, ha ilyen munka olyan szerzők tollából kerül ki, akiknek egyike az egész tudományág megteremtésében és kiépítésében döntő szerepet vitt, másika pedig e tudományág állandó termékeny továbbfejlesztése mellett nagyvonalú áttekintésének is tanújelét adta azáltal, hogy az idevágó eredmények egy csoportjáról kitűnően megirt tömör összefoglalóban egy évtizeddel ezelőtt beszámolt. Őszinte köszönet illeti tehát a Magyar Tudományos Akadémiát, hogy lehetővé tette *Riesz Frigyes* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* régóta várt munkájának megjelenését.

A nem-szakember számára a funkcionálanalízis modern eredményeinek tanulmányozását meg szokta nehezíteni az a körülmény, hogy megértésükhöz elég jelentős valós függvénytani ismeretek szükségesek. Nagy értéket ad jelen munkának az a körülmény, hogy a bevezető fejezetekben felépíti a továbbiakban nélkülözhetetlen valós függvénytani apparátust s ezáltal a tulajdonképpeni funkcionálanalízist tárgyaló fejezetek megértését elősegíti. Ugyancsak megkönnyíti a könyv olvasását a különböző fejezetekbe beleszőtt számos alkalmazás, amelyek rámutatnak a funkcionálanalízis eredményeinek a matematika és a matematikai fizika egyes ágaival való kapcsolataira. Természetes, hogy e tekintetben teljességre a szerzők nem törekedhettek.

A valós függvénytani segédeszközöket tárgyaló bevezető fejezeteknek különös értéket ad az a körülmény, hogy itt közli a szerzők egyike a Lebesgue-féle integrál elméletének felépítésére kidolgozott azon módszerét, amelyet egyetemi előadásaiban már évek óta használ. Ez a módszer, amellett, hogy igen kevés előismeretet megkívánva rendkívül gyorsan elvezet a Lebesgue-integrál fogalmához és tulajdonságaihoz, kitűnően bele is illik a könyv keretébe, mert igen jó előkészítésül szolgál a funkcionálanalízis bizonyos gondolatmeneteihez. Egyébként is végigvonul a könyv egyes fejezetein az az utólérhetetlen elegancia, amellyel *Riesz Frigyes* a bonyolult bizonyításokat leegyszerűsíteni és szinte teljesen elemivé tenni képes. Nem kevésbbé figyelemreméltó a könyv anyagának az a fokozatos felépítése, amely a könnyen kezelhető speciális esetekből kiindulva halad az általánosítások, az átfogóbb eredmények felé. A felsorolt körülmények következtében *Riesz Frigyes* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* munkája — amellett, hogy az olvasót a legújabb eredményekig elvezeti — kiválóan alkalmas a funkcionálanalízisbe való bevezetésre is.

Amint már említettük, a könyv első három fejezete a továbbiakhoz szükséges valós függvénytani segédeszközöket építi fel, mégpedig az első fejezet a deriválás műveletével, a második a Lebesgue-integrállal, a harmadik a Stieltjes-integrállal és általánosításaival foglalkozik.

Mindenekelőtt *van der Waerden* példáján látjuk, hogy folytonos függvény lehet seholsem differenciálható is, majd a nullamértékű halmaz fogalmának és e halmazok főbb tulajdonságainak ismertetése után *Lebesgue* azon alapvető tételének *Riesz*-féle bizonyítása következik, amely szerint monoton függvény egy nullamértékű halmaz kivételével mindenütt, azaz majdnem mindenütt differenciálható. Ez az állítás azután rögtön átvihető a korlátos változású függvényekre, amelyek monoton függvények összegeként írhatók fel. Könnyen következik *Lebesgue* tételéből *Fubini* azon tétele is, amely szerint az olyan konvergens sort, melynek tagjai monoton függvények, majdnem mindenütt szabad tagonként differenciálni, alkalmazásképp pedig *Lebesguenek* a lineáris halmazok külső sűrűségi pontjaira vonatkozó tétele adódik. A korlátos változású függvények további vizsgálata után *Denjoy, Young* és *Saks* tételét találjuk az alsó és felső deriváltak lehetséges értékeiről. A fejezet hátralévő része az intervallumfüggvények Burkill-féle integráljával s annak néhány érdekes alkalmazásával foglalkozik.

A második fejezetben a Lebesgue-integrál elméletével ismerkedünk meg. Az ennek felépítésére *Riesz Frigyes* által kidolgozott módszer a következőképpen vázolható: jelölje C_0 az (a, b) intervallum lépcsősfüggvényeinek halmazát (amely függvények tehát az (a, b) véges számú részintervallumaiban állandó értékeket vesznek fel.) E C_0 halmaz függvényeinek integrálja elemien értelmezhető. Jelölje most C_1 a C_0-hoz tartozó függvényekből álló monoton növekvő és majdnem mindenütt konvergens, korlátos integrálokkal rendelkező függvénysorozatok határfüggvényeinek halmazát. A C_1-beli függvényekre az integrál mint a hozzájuk konvergáló fent említett tulajdonságú sorozat függvényeinek integráljaiból álló számsorozat határértéke terjeszthető ki. Jelölje végül C_2 azon függvények osztályát, melyek két C_1-beli függvény különbségeként írhatók, ezekre az integrál kézenfekvő módon értelmezhető. Két egyszerű lemma felhasználásával meg lehet mutatni, hogy mindezen értelmezések egyértelműek (tehát a függvénysorozat, ill. a két C_1-beli függvény választásától függetlenek); a C_2 osztály függvényeit nevezzük integrálhatóknak. Könnyen következik ezután az integrál valamennyi formális tulajdonsága, valamint a sorozatok integrálására vonatkozó *Beppo Levi-*, *Lebesgue-* és *Fatou*-féle tételek. Nem nehéz a továbbiakban nagy szerepet játszó *Schwarz-*, *Hölder-* és *Minkowski*-féle egyenlőtlenségek bebizonyítása sem. Ezután kerül sor a mérhető halmaz fogalmára (olyan halmaz, melynek karakterisztikus függvénye integrálható), továbbá a mérhető függvény fogalmára (integrálható függvények majdnem mindenütt konvergens sorozatának határfüggvénye). A határozatlan integrál majdnem mindenütt való differenciálására vonatkozó tétel és majdnem mindenütt zérus deriváltú szigorúan növekvő folytonos függvényre adott igen egyszerű példa után az abszolút folytonos függvény fogalma és tulajdonságai, valamint a parciális és helyettesítéssel való integrálás szabálya következik.

A fejezet következő része már a legszorosabb kapcsolatban van a funkcionálanalízissel. Megismerkedünk a négyzetesen integrálható függvények L^2 terével, az általános konvergencia fogalmával és az ezzel kapcsolatos *Riesz—Fischer*-féle tétellel, továbbá a gyenge konvergencia fogalmával. Az L^2 tér lineáris függvényoperációiról szóló tétel után a lineáris operációk sorozataira vonatkozó eredmények következnek, majd pedig az ortonormális függvényrendszerek főbb tulajdonságai s az L^2 tér felbontása egymásra ortogonális alterekre. Megismerkedünk azután az L^p terekkel és lineáris operációikkal is.

A többváltozós függvények Lebesgue-integráljának elméletét egy szellemes átviteli elv segítségével az egyváltozós Lebesgue-integrálra lehet nagyrészt visszavezetni, úgyhogy ezekkel kapcsolatban csak a szukcesszív integrálásokra vonatkozó *Fubini*-féle tétel és a határozatlan integrál deriválásának kérdése szorul bővebb ismertetésre. Befejezésül vázlatos áttekintést nyerünk a Lebesgue-integrál elméletének egyéb felépítéseiről.

A harmadik fejezet a Stieltjes—Riemann-féle integrál ismertetésével s ezzel kapcsolatban a folytonos függvények C terének lineáris operációiról szóló *Riesz*-féle tétellel kezdődik, majd néhány alkalmazás után a Stieltjes-integrál általánosításaira tér át. Ezek között első helyen a Stieltjes—Lebesgue-féle integrál értelmezése és főbb tulajdonságai állnak, majd röviden értesülünk a többváltozós függvények Stieltjes—Lebesgue-integráljának különböző értelmezési lehetőségeiről, végül pedig az absztrakt terekre vonatkozó Daniell-féle integrálfogalommal ismerkedünk meg. Mindezen általánosításokban jelentős szerepet játszik a Lebesgue-integrál bevezetésénél követett módszer, amely több-kevesebb változtatással mindezen integráltípusok tárgyalására is felhasználható.

A negyedik fejezet a funkcionálanalízisnek történetileg is legrégebben jelentkezett és sok szempontból legegyszerűbbnek tekinthető problémakörével, az integrálegyenletek elméletével foglalkozik. Az itt tekintetbe jövő integrálegyenletek

$$f(x) - \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy = g(x) \qquad (1)$$

alakúak, ahol $f(x)$ a keresett függvény, $K(x,y)$ és $g(x)$ pedig adott függvények. Legjobban kezelhető eredmények akkor adódnak, ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényről azt tesszük fel, hogy az (a, b) intervallumra vonatkozólag az L^2 térbe tartoznak, a $K(x,y)$ magról pedig azt, hogy mint kétváltozós függvény az $a \leqq x \leqq b, a \leqq y \leqq b$ négyzeten az L^2 térbe tartozik. Könnyű látni, hogy ekkor $f(x)$-szel együtt

$$Kf = \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy$$

is az L^2 osztályba tartozik, vagyis hogy ezáltal az L^2 térnek egy korlátos lineáris transzformációjára jutottunk. Ezzel kapcsolatban megismerkedünk a korlátos lineáris transzformációk alapvető tulajdonságaival, s megtudjuk, hogy az előbbinél általánosabb

$$(I - \lambda K) f = g$$

egyenletben szereplő $I - \lambda K$ transzformációnak megszámlálhatóan sok szinguláris λ érték kivételével, amelyek a végesben sehol sem torlódhatnak, korlátos inverz transzformációja van. Az ilyen reguláris λ értékekre

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda K_\lambda,$$

ahol a K_λ transzformáció a λ-nak analitikus függvénye abban az értelemben, hogy reguláris λ_0 érték környezetében $\lambda - \lambda_0$ hatványai szerint haladó sorba fejthető. A K_λ transzformáció is egy alkalmas $K_\lambda(x,y)$ mag által létrehozott integráltípusú transzformáció.

Az (1) egyenlet eszerint akkor, ha $\lambda = 1$ reguláris hely, tetszőleges $g(x)$ függvény esetén egy és csakis egy megoldással rendelkezik. Annak az esetnek, amikor $\lambda = 1$ szinguláris, vizsgálata többféle módon is elvégezhető. Valamennyinek közös kiindulása az az eset, amikor a $K(x,y)$ mag véges rangú, vagyis ilyen alakú:

$$K(x,y) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\, \overline{\psi_\nu(y)};$$

ilyenkor az (1) egyenlet megoldása közönséges algebrai egyenletrendszer megoldására vezet s a megoldásokat illetően két lehetőség adódhatik (Fredholm-féle alternatíva). Az általános esetet erre a speciálisra a *Schmidt*-féle eljárás oly módon vezeti vissza, hogy az egyenlet adott magját véges rangú magokkal közelíti meg. Rövid vázlat formájában megismerkedünk a *Fredholm*-féle módszerrel is, amely a determináns fogalmának egy analogonján alapszik. Végül a *Riesz*-féle módszer alapja azon észrevétel, hogy a $K(x,y)$ mag által létesített K lineáris transzformáció teljesen folytonos, azaz az L^2 tér függvényeinek korlátos halmazát kompakt halmazba viszi át (vagyis olyanba, amelyből kiválasztható átlagosan konvergens részsorozat). Mindhárom módszer arra az eredményre vezet, hogy a Fredholm-féle alternatíva nemcsak a véges rangú magok esetében, hanem az általános esetben is fennáll. A potenciálelmélet körébe vágó alkalmazások zárják le a fejezetet.

Az ötödik fejezet főtárgya az előző fejezet eredményeinek általánosítása. Először is az L^2 tér lényeges tulajdonságainak axiómaképpen való posztulálása révén eljutunk az absztrakt Hilbert-tér fogalmához. A Hilbert-tér lineáris transzformációi ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az L^2 tér transzformációi, s a teljesen folytonos K transzformációnak megfelelő

$$(I-K)f=g$$

egyenletre az integrálegyenletek elméletében követett módszerek és a talált eredmények rögtön átvihetők. Alkalmazásképp *Paley* és *Wiener* egy tételének *Szőkefalvi-Nagy Bélától* származó bizonyítását találjuk. Ezután ismét általánosabb térfogalomnak, a Banach-térnek ismertetése következik, amely a Hilbert-tereken kívül az L^p tereket és a folytonos függvények C terét is magában foglalja. Az előző fejezet módszerei és eredményei nagyrészt erre az általánosabb esetre is átvihetők. A C tér esetével való behatóbb foglalkozás után ismét potenciálelméleti alkalmazások következnek.

A következő fejezetek főproblémája röviden a következőképpen fogalmazható meg: miképpen lehet egy lineáris transzformáció vizsgálatát egyszerűbb transzformációk tulajdonságainak vizsgálatára visszavezetni a térnek megfelelő alterekre való bontása által, amelyekben a transzformáció egyszerűbb természetű, mint az egész térben? A hatodik fejezet ezt a kérdést a Hilbert-tér teljesen folytonos szimmetrikus transzformációinak esetére tárgyalja. Szimmetrikusnak nevezzük a Hilbert-tér A lineáris transzformációját, ha bármely f és g elempárra $(Af, g) = (f, Ag)$, itt (h, k) a h és k elemek skaláris szorzatát jelenti. Az ilyen transzformációk esetében az említett felbontás rendkívül egyszerű, amennyiben megadható az elemeknek egy ortonormális $\{\varphi_k\}$ sorozata oly módon, hogy a φ_k elem által létesített egydimenziós altérben az A transzformáció egy λ_k valós számmal való szorzásnak felel meg, az összes φ_k elemekre ortogonális elemekből álló altér elemeit pedig A a 0-elembe viszi át. A φ_k elemeket az A transzformáció sajátelemeinek, a megfelelő λ_k számokat pedig sajátértékeknek nevezzük. Ezek — ha végtelen sokan vannak — 0-hoz tartó sorozatot alkotnak. Véges rangú transzformáció esetén csak véges számú sajátelem van. Ezek az eredmények fontos következményekkel járnak a szimmetrikus magú integrálegyenletek elméletében. Érdekes alkalmazásként a rezgő húr problémájának és a majdnem periódikus függvények elméletének egyes kérdései szolgálnak.

A hetedik fejezet mindenekelőtt a szimmetrikus, de már nem szükségképpen teljesen folytonos, csupán korlátos lineáris transzformációkkal foglalkozik. Míg teljesen folytonos szimmetrikus transzformáció esetén az előzőkben említett eredmények

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$$

alakú felbontást tesznek lehetségessé, ahol $P_k f = (f, \varphi_k) \varphi_k$, addig tetszőleges korlátos szimmetrikus transzformáció esetén ilyen végtelen sor-alakú felbontás nem lehetséges, hanem helyébe integrálalakú előállítás lép. Hogy ehhez az integrálelőállításhoz eljussunk, megismerkedünk először is a szimmetrikus transzformációk főbb tulajdonságaival, melyek között a legfontosabb egy parciális rendezési reláció felállítása, amely szerint $A \leqq B$, ha bármely f elemre $(Af, f) \leqq (Bf, f)$. Ezután a projekciókkal kell foglalkoznunk, vagyis az olyan lineáris transzformációkkal, amelyek a Hilbert-tér egy alterének valamennyi elemét változatlanul hagyják, az ezen altérre ortogonális elemeket pedig 0-ba viszik át. Majd értelmezzük egy szimmetrikus A transzformáció $u(A)$ függvényeit, mégpedig először — kézenfekvő módon — abban az esetben, mikor az $u(\lambda)$ függvény polinom, majd határátmenettel akkor is, ha $u(\lambda)$ félig folytonos függvény.

A keresett integrálelőállítás mármost a következő módon nyerhető: legyen $e_\mu(\lambda)$ az a függvény, mely 1-gyel egyenlő, ha $\lambda \leqq \mu$, és 0-val, ha $\lambda > \mu$. Az $e_\mu(A)$ transzformáció egy projekció, ezt E_μ-vel jelölve fennáll az

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$$

reláció, ahol is az integrál a Riemann-típusú közelítőösszegek limeszét jelenti. Sőt ha m és M oly számok, hogy bármely f-re

$$m(f, f) \leqq (Af, f) \leqq M(f, f),$$

akkor elég az integrált tetszőleges $\delta > 0$ mellett az $(m - \delta, M)$ intervallumra kiterjeszteni, úgyhogy tehát egyúttal

$$A = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE_\lambda .$$

Továbbá az $[m, M]$ intervallumban folytonos $u(\lambda)$ függvényekre

$$u(A) = \int_{m-0}^{M} u(\lambda) \, dE_\lambda .$$

Ezen ú. n. spektrálelőállítás itt vázolt bizonyítása *Riesz Frigyestől* származik; egy másik, *Szőkefalvi-Nagy Bélától* származó, bizonyítást is megismerünk, amely az $u(A)$ műveletet csak azon esetben használja, amikor $u(\lambda)$ polinom, vagy $u(\lambda) = \sqrt{\lambda}$.

A fejezet hátralévő részében hasonló spektrálelőállítást ismerünk meg az ú. n. uniter, valamint az ú. n. normális transzformációk számára. Az uniter transzformációk esete azért is különösen fontos, mert *Bochner* egy tételén keresztül kapcsolatba hozható a *Fourier—Plancherel* és *Watson*-féle ismert tételekkel.

Az eddigiekben csak olyan lineáris transzformációkkal foglalkoztunk, amelyek az egész térben értelmezve vannak és korlátosak, csakhogy a különféle alkalmazásokban szereplő igen sok lineáris transzformáció e két tulajdonsággal nem rendelkezik. Így pl. az L^2 tér azon transzformációja, amely egy $f(x)$ függvényhez az $f'(x)$ deriváltját rendeli hozzá, nincs minden négyzetesen integrálható $f(x)$ függvényre értelmezve és nem is korlátos. Alapvető jelentőségű tehát, hogy az előző eredmények mennyiben terjeszthetők ki nemkorlátos lineáris transzformációkra. Ezzel a kérdéssel foglalkozik a következő két fejezet.

A nyolcadik fejezetben mindenekelőtt megismerkedünk a nemkorlátos lineáris transzformációk értelmezésével és főbb tulajdonságaival. A szimmetrikus transzformáció fogalmát könnyű nem korlátos transzformációkra is átvinni: így nevezzük az S transzformációt, ha értelmezési tartománya mindenütt sűrű és az értelmezési tartományához tartozó f és g elemekre mindig fennáll $(Sf, g) = (f, Sg)$. Sajnos azonban a spektrálelőállításra vonatkozó tétel nem vihető át tetszőleges szimmetrikus transzformációkra, hanem ezeknek csak egy szűkebb osztályára, az ú. n. önadjungált transzformációkra. Ezekre azonban a korlátos esethez egészen hasonló

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$$

előállítás érvényes, azzal a különbséggel, hogy itt már nem lehet az integrálást véges intervallumra szorítani. Ezen fontos tétel *Riesz—Lorch*-féle bizonyítása mellett megismerjük eredeti *Neumann*-féle bizonyítását is; mindkettő a korlátos esetre vezeti vissza a feladatot. Tetszőleges szimmetrikus transzformációkra ez az eredmény annyiban mond ki valamit, hogy bizonyos szimmetrikus transzformációkat ki lehet terjeszteni úgy, hogy önadjungáltakká váljanak. A fejezet további része *Neumann, Friedrichs* és *Krejn* idevágó vizsgálatait tárgyalja, amelyekből egyebek között kiderül, hogy az alkalmazásokban nagy szerepet játszó félig korlátos szimmetrikus transzformációknál (amelyekre $(Sf, f) \geqq m(f, f)$ alkalmas m mellett) ilyen kiterjesztés mindig elvégezhető.

A kilencedik fejezet értelmezi a nemkorlátos önadjungált A transzformáció $u(A)$ függvényeit arra az esetre, amikor $u(\lambda)$ tetszőleges Baire-féle függvény. Erre a célra a spektrálelőállítást használja fel, s megvizsgálja az így kapott transzformációk tulajdonságait; foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy mely transzformációk állíthatók elő egy adott A transzformáció függvényeiként, valamint hogy a transzformációk egy osztálya mikor állítható elő ugyanazon A transzformáció segítségével.

A fejezet második része az A transzformáció spektrumát vizsgálja; így nevezik azon λ számok halmazát, melyekre az $A-\lambda I$ transzformációnak nincs korlátos inverze. Rendkívül nagy a gyakorlati jelentősége azon vizsgálatoknak, melyek a spektrum perturbációival foglalkoznak, vagyis azzal a kérdéssel, hogy hogyan változik meg egy A transzformáció spektruma, ha a transzformációt kevéssel megváltoztatjuk. Főként *Rellich* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* idevágó eredményeivel ismerkedünk meg.

A tizedik fejezet főproblémája abban áll, hogy hogyan lehet lineáris transzformációkból álló csoportok és félcsoportok számára bizonyos kanonikus spektrálelőállítást adni. *Stone* uniter transzformációk csoportjaira vonatkozó eredményének kétféle bizonyítása, valamint *Szőkefalvi-Nagy Béla* önadjungált transzformációk félcsoportjaira vonatkozó tételének bizonyítása és ezek különféle általánosításai mellett nagy számban találunk itt az ergodikus elméletbe vágó rendkívül érdekes alkalmazásokat.

Az utolsó fejezet végül bepillantást nyujt abba a még csak aránylag kevéssé kidolgozott kérdéskörbe, amely a tetszőleges lineáris transzformációk spektrálelőállításával foglalkozik. *Riesz Frigyes* roppant termékeny, komplex függvénytani módszereket alkalmazó módszere lehetővé teszi a szimmetrikus (és normális) transzformációkra talált eredmények egy kis részének átvitelét az általános esetre, de a viszonyok itt sok tekintetben lényegesen bonyolultabbak. Az eddig elért eredmények is lehetővé teszik azonban már számos figyelemreméltó alkalmazás bemutatását, így pl. az abszolút konvergens trigonometrikus sorok elméletéből egy, *Wiener* ismert tételét magában foglaló, tétel bebizonyítását. A főnehézségek abban vannak mindenesetre, hogy az általános lineáris transzformációkat spektrumuk (vagyis azon z értékek halmaza, melyekre $(T—zI)$-nek nincs korlátos inverze) sokkal kisebb mértékben jellemzi, mint a normális transzformációkat. A fejezet vége *Neumann János* legutóbbi vizsgálatait ismerteti, melyekben az említett nehézséget oly módon próbálja áthidalni, hogy a spektrum mellett annak egy analogonját, a spektrális halmaz fogalmát vezeti be.

Igyekeztünk az előzőkben a minden tekintetben kiváló munkáról nem annyira részletekbe menő, mint inkább a középponti problémakörökre rávilágító ismertetést adni. Remélhetőleg sikerült ezt oly mértékben megtennünk, hogy a funkcionálanalízisnek a könyvben tárgyalt kérdéseiről a nem-szakember is hozzávetőleges képet nyerhet.

A könyv tárgyalásmódja mindvégig világos, tömörsége mellett is jól olvasható. Mindössze néhány olyan rész található benne, ahol a tömörség az olvasót túlságosan nehéz feladat elé állítja. Sajnos, ezen részek között olyan, a továbbiakban rendkívül fontos témák is vannak, mint pl. a III. fejezetnek a Stieltjes—Lebesgue-integrállal foglalkozó része. Ilyen helyeken talán helyes lett volna a tömör stílus feláldozása árán nagyobb részletességre törekedni.

A könyv hazai viszonylatban mintaszerűnek mondható kiállítása (az ilyen nagy munkáknál szinte elkerülhetetlen sajtóhibák mellett is) például szolgálhat kevésbbé fejlett nyomdáink számára.

Reméljük, hogy sikerült ismertetésünkkel az olvasóban kialakítanunk azt a meggyőződést, hogy *Riesz Frigyes* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* munkája a matematikai irodalomnak nemzetközi viszonylatban is elsőrangú nyeresége, amely a szocializmust építő tudományunk megbecsülését nagyban emeli.

Császár Ákos

I. P. NATANSZON „KONSTRUKTÍV FÜGGVÉNYTAN“ CÍMŰ KÖNYVÉRŐL

Natanszon könyve, amely *Szőkefalvi-Nagy Béla* szerkesztésében és előszavával jelent meg magyar fordításban, igen értékes művel gazdagítja a hazai matematikai szakirodalmat. A konstruktív függvénytan egyik legfiatalabb ága a matematikai tudománynak, amely (*Natanszon* meghatározása szerint) „a matematikai analízisnek az az ága, amely tetszőleges függvényeknek a legegyszerűbb analitikus eszközök segítségével való megközelítő előállításával foglalkozik“. Bizonyos értelemben közbülső helyet foglal el a valós függvénytan és az analitikus függvények elmélete között és éppen ez szabja meg igen nagy gyakorlati jelentőségét. A matematika alkalmazásai során gyakori feladat, hogy két vagy több fizikai mennyiség közti kapcsolatot egyszerű képlettel kell kifejeznünk. A valós függvénytan tételei, miután túl általánosak, nem adnak ehhez konkrét útmutatást. Másrészt a komplex változós függvénytan vizsgálatait egy viszonylag szűk függvényosztályra, az analítikus függvények osztályára korlátozza; márpedig a valóságos jelenségek csak ritkán illeszthetők hasznosan olyan matematikai modellbe, melyben csak analítikus függvénykapcsolatok lépnek fel. Tudományos ismereteink és a mindennapos műszaki gyakorlat már régóta megcáfolta a „natura non facit salta“ metafizikus elvét. Ugyancsak közvetlenül a műszaki és tudományos gyakorlat szükségletei hozták létre a konstruktív függvénytan két másik feladatkörének: az interpoláció és a mechanikus kvadratura elméletének kialakulását is.

A konstruktív függvénytan alapjait orosz tudósok, döntő részben *P. L. Csebisev* és *A. A. Markov* rakták le és *Sz. N. Bernstejn* szovjet akadémikus munkássága nyomán vált önálló diszciplinává. Továbbfejlesztésében a szovjet kutatók jelentős eredményeket értek el. Talán elég lesz *N. I. Ahijezer* és *M. G. Krejn* munkáira utalni, akiknek eredményei *Ahijezer* nemrég megjelent könyvében magyar nyelven is hozzáférhetők.

Natanson műve az első részletes és összefoglaló munka erről a tudományterületről. Könyvében a tájékozott kutató is számos új részleteredményt ismerhet meg, ugyanakkor felépítése olyan, hogy már másodéves egyetemi hallgató is haszonnal tanulmányozhatja. Szerzője egy hatféléves speciális egyetemi előadás segédkönyvének szánta. Előszavában megjegyzi, hogy mindenekelőtt azt a célt tűzte ki, hogy világossá tegye a kérdésnek gondolati lényegét (amit véleményünk szerint teljes mértékben el is ért) és nem törekedett teljességre. Ennek megfelelően a könyv nem tér ki a komplex síkon való approximáció kérdésére. A könyv három részre tagolódik, amelyeknek címei: Egyenletes megközelítések; Négyzetes megközelítések; Interpoláció és mechanikus kvadratura. A könyv első részében *Weierstrass* ismert tételeiből indul ki, melyek szerint egy véges szakaszon folytonos függvény ott polinomokkal, ill. trigonometrikus polinomokkal approximálható. Az előbbi esetre *Bernstejn* igen egyszerű és valószínűségszámítási értelmezése miatt nagyfontosságú bizonyítását ismerteti, az utóbbira *de la Vallée Poussin* bizonyítását mutatja be. Ezután ismerteti *Csebisev*, ill. *Borel* tételeit, előírt folytonos függvénytől legkevésbbé eltérő legfeljebb n-edfokú polinom létezéséről és unicitásáról, továbbá *Csebisev* tételeit ezen polinom tulajdonságairól. Ennek alkalmazásaként *Csebisev* tételét bizonyítja, mely szerint az összes olyan n-edfokú polinomok közül, amelyeknél x^n együtthatója 1-gyel egyenlő, a $[-1, +1]$ szakaszon $2^{-n+1}T_n(x)$ tér el legkevésbbé zérustól és ezzel kapcsolatban tárgyalja a $T_n(x)$ Csebisev-polinomok tulajdonságait és néhány további extrémális sajátságát. Ezen előkészítés után bebizonyítja *Jackson* tételét folytonos, ill. folytonosan differenciálható és Lipschitz-feltételnek eleget tevő függvények approximációjáról, majd azoknak *Bernstejn*-féle megfordítását. *Bernstejn* tételének kiegészítéseként ismerteti *Zygmund* egy figyelemreméltó újabb eredményét. Ezután *Bernstejn* egy elvi fontosságú eredménye következik, melynek értelmében minden $\{A_n\}$ monoton zérus-sorozathoz található tetszőleges (a, b) szakaszon olyan folytonos $f(x)$ függvény, amelynek n-edfokú polinomokkal pontosan elérhető legjobb approximációja pontosan A_n. Egy hosszú fejezetet szentel a Fourier-sornak, mint a függvényközelítés eszközének. Ennek során a Lebesgue-állandó és a legjobb trigonometrikus approximáció segítségével becsüli a Fourier-sor részletösszegeinek eltérését a kifejtett függvénytől. Ismerteti *Fejér* példáját olyan folytonos függvényre, amelynek Fourier-sora divergál és *Fejér* tételét folytonos függvény Fourier-sorának $(C, 1)$-szummálhatóságáról. Bebizonyítja *Bernstejn* becslését a Fejér-féle összegek eltérésére és annak *Nyikolszkij*tól eredő élesítését, majd *de la Vallée Poussin* tételét, mely szerint a

$$\tau_n(x) = \frac{S_n(x) + S_{n+1}(x) + \cdots + S_{2n-1}(x)}{n}$$

összegek eltérése $f(x)$-től kisebb, mint $4E_n(f)$ ahol $E_n(f)$ jelenti $f(x)$ legjobb approximációját n-edfokú trigonometrikus polinomok segítségével. Egy rövid fejezetet szentel az analitikus függvény közelítése kérdésének. A szerző itt meg akarja kerülni a függvény regularitási tartományának vizsgálatát a komplex számsíkon. Az a nehézkesség, amivel a valós analízis eszközeire szorítkozva *Bernstejn* tételeinek néhány speciális esetét kimutatja, bizonyítja, hogy ezzel a kérdés lényegét kerülte meg.

A második (a négyzetes megközelítésekről szóló) rész egy rövid bevezetést tartalmaz ortogonális rendszerekről általában, majd áttér az ortogonális polinomok elméletére és kimerítően ismerteti ennek alapjait. Rövid, szép bizonyításokkal ismerteti *Hausdorff* tételeit a véges intervallumra vonatkozó momentumproblémáról és ezt felhasználja a C-térben értelmezett lineáris operátorok *Riesz*-féle előállításának igazolására. Utána foglalkozik a végtelen intervallumra vonatkozó momentumproblémával. Ez a rész *Favard* alábbi figyelemreméltó tételével zárul: legyen $\{\omega_n(x)\}$ olyan polinomsorozat, amelyben $\omega_n(x)$ n-edfokú és főegyütthatója 1. Ha fennáll az

$$\omega_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2})\,\omega_{n+1}(x) - \lambda_{n+1}\,\omega_n(x)\,; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

rekurziós összefüggés és $\lambda_{n+1} > 0$, akkor található olyan korlátos, növekedő $g(x)$ függvény, hogy $i \neq k$ esetén

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_i(x)\,\omega_k(x)\,dg(x) = 0.$$

Az interpolációról és mechanikus kvadraturáról szóló részben az alapfogalmak ismertetése után bebizonyítja *Bernstejn* és *Faber* tételét, mely szerint nem található olyan alappontrendszer, melyhez tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomok tetszőleges folytonos függvényt egyenletesen megközelítenek. Részletesen taglalja *Grünwald* és *Turán* tételét olyan Lagrange-féle interpolációs eljárások konvergenciájáról, melynek alappontjai bizonyos ortogonális polinomsorozatok gyökei és egy fontos speciális esetét közli *Erdős* és *Turán* egy eredményének, amely ilyen interpolácios sorozatok négyzetes középértékben való konvergenciájára vonatkozik. Ezután *Fejér* eredményei következnek a normális alappontrendszerekre vett interpolációs eljárásokról, majd ismertet néhány *Bernstejn*től származó eljárást, amely minden folytonos függvényre konvergál. Az igen tanulságos, hatalmas anyagot felölelő könyv a mechanikus kvadratura eljárásokra vonatkozó klasszikus és néhány újabb eredmény ismertetésével zárul.

Freud Géza

A III. OSZTÁLY HÍREI

PRÉMIUMOK

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztálya (III. oszt.) a Matematikai, ill. Fizikai Bizottság javaslatára a következőket részesítette jutalomban.

Matematikusok:

Arató Mátyás egy elméleti fizikai problémával összefüggő integrál kiszámításával kapcsolatban önálló munkát végzett (melynek eredményeiről *Freud Gézá*val közösen egy sajtó alatt lévő dolgozatban számolnak be). 500 Ft jutalomban részesült.

Czipszer János egy diffúzióprobléma differenciálegyenletének közelítő megoldásával kapcsolatban önálló kutató munkát végzett (melynek eredményeit *Pál Sándor*ral közösen egy sajtó alatt lévő dolgozatban közlik). 500 Ft jutalomban részesült.

Fodor Géza halmazelméleti vizsgálatait folytatta, sikerült bebizonyítania egy *Erdős Pál* által két éve felvetett problémát, melynek megoldásával *Erdős Pál* maga sikertelenül foglalkozott. E sejtés a halmaz elemei közötti relációk kérdéskörével kapcsolatos. 1000 Ft jutalomban részesült.

*Freud Gézá*nak már több dolgozata jelent meg nyomtatásban, ezek részben Tauber-típusú tételekről, részben ortogonális polinomsorok konvergenciájáról szólnak. Különösen érdeklődésre számíthat az a tétele, amely szerint nullától elhatárolt súlyfüggvényhez tartozó ortogonális és normált polinom-sorok szerinti kifejtések majdnem mindenütt szummálhatók, hacsak a koefficiensek négyzetei konvergens sort alkotnak. 2000 Ft jutalomban részesült.

Gacsályi Sándor értékes eredményre jutott az algebrailag zárt Abel-féle csoportokkal kapcsolatban. Kimutatta, hogy tetszőleges többismeretlenű egyenletrendszer megoldható, hacsak a nyilvánvalóan szükséges kompatibilitási feltételek teljesülnek. 1000 Ft jutalomban részesült.

Hosszú Miklós a függvényegyenletek elmélete terén ért el eredményeket, melyek közül különösen az autodisztributivitással és disztributivitással kapcsolatos eredményei figyelemre méltók. 600 Ft jutalomban részesült.

Lovas Nagy Viktor, *Egerváry Jenő* akadémikus munkatársaként, egy gyakorlatban felmerült újtípusú hővezetési probléma megoldásában működött közre, továbbá rugalmasságtani és plaszticitáselméleti eredményeket ért el. Jelenleg négy, eredményeit tartalmazó dolgozata van sajtó alatt. 1100 Ft jutalomban részesült.

Molnár József kongruens körök és gömbsüvegek elhelyezési problémáira vonatkozólag újabb s egyszerűbb bizonyítást adott. Igen szép eredményt ért el a különböző sugaru körök elhelyezési problémájával kapcsolatban. Egy másik dolgozata most van sajtó alatt a Publicationes Mathematicae-ban. 1300 Ft jutalomban részesült.

Moór Artur konvex görbék négy csúcspont tételének térbeli általánosítására adott bizonyítást. Algebraikus alapfüggvényekkel rendelkező Finsler-terek közötti duális kapcsolatok kérdésében ért el eredményeket. 1000 Ft jutalomban részesült.

Pál Sándor egy, a turbogenerátorok konstrukciójával kapcsolatos problémából kiindulva rugalmasságtani vizsgálatokat végzett, eredményeit egy sajtó alatt lévő dolgozatban foglalta össze. A dolgozat elméletileg újszerű, ugyanakkor gyakorlatilag jól felhasználható eredményeket tartalmaz. Eredményeket ért el a nomográfia és a diffúzióelmélet terén is. 1600 Ft jutalomban részesült.

Prékopa András összetett Poisson eloszlásokkal kapcsolatban értékes új eredményeket ért el, továbbfejlesztve az ezirányú kutatásokat. Dolgozata az Acta Mathematica-ban van sajtó alatt. 1200 Ft jutalomban részesült.

Szász Gábor a hálók elmélete terén végez eredményes kutatásokat, melyek egyrészt a háló-axiómák vizsgálatára, másrészt a hálók szerkezeti vizsgálataira vonatkoznak, s e kérdéskörnek igen értékes továbbfejlesztései. Eredményeit több dolgozatban közölte. 1000 Ft jutalomban részesült.

Szendrei János érdekes eredményt nyert nullosztómentes gyűrűknek nullosztómentes Schreier-féle bővítésére vonatkozóan. Egy másik, *Szele Tibor*ral együtt írt közös dolgozatának főeredménye azon torziócsoportok teljes jellemzése, amelyek endomorfizmus gyűrűje kommutatív. 1200 Ft jutalomban részesült.

Szüsz Péter az egyenletes eloszlás elméletének egyik nevezetes tételére elemi bizonyítást talált, melynek bizonyos részletei az Osztályközleményekben lesznek publikálva. Ezirányba más érdekes publikációra érdemes eredményei is vannak. 1100 Ft jutalomban részesült.

Takács Lajos Poisson-féle sztochasztikus folyamatok által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatok vizsgálata terén új eredményeket ért el, melyek nemrégiben kerültek bemutatásra az Akadémián. Dolgozata az Acta Mathematica-ban fog megjelenni. Két további dolgozatot is írt, melyek a közel jövőben kerülnek bemutatásra. Eredményeinek számos fontos fizikai és technikai alkalmazása van. 1600 Ft jutalomban részesült.

*Tandori Károly*nak két dolgozata jelent meg nyomtatásban, egy harmadik pedig sajtó alatt van. Különösen értékes az ortogonális polinom-sorok erős szummálhatóságára vonatkozó tétele, amelyben e soroknak teljesen váratlan tulajdonságát bizonyítja be. 1300 Ft jutalomban részesült.

Fizikusok:

Berenc Ferenc munkássága 1952-ben eredményes volt. Három dolgozata *Pauncz Rezső*vel közösen van megjelenőben, egy az Acta Physica és kettő az

Acta Chimicaban. Eredményei igen jó egyezést mutatnak a kísérleti értékekkel. 1500 Ft jutalomban részesült.

*Fényes Imré*nek különösen két dolgozata érdemel figyelmet, melyek a Zeitschrift für Physik és a Naturwissenschaft-ban jelennek meg. Az első dolgozat megmutatja, hogy mindazok az axiómák, melyeket *Caratheodory* és *Ehrenfest—Afanassjewa* a hőmérsékletre és hőmennyiségre felállítottak, jóval nagyobb területen is változatlanul megtartják érvényességüket. A második dolgozata megmutatja, hogy a határozatlansági reláció, annak általános Schrödinger-féle fogalmazásában formálisan megegyezik a Markoff-féle folyamatokra vonatkozóval. Ilyenformán a kérdéses relációt általános statisztikai keretbe állítja be. 3000 Ft jutalomban részesült.

*Gáspár Rezső*nek négy dolgozata van megjelenőben. A „self-consistent field" módszert tovább fejlesztve alkalmassá tette magasabb energiájú elektronállapotok tárgyalására; más dolgozatában az atomfaktorok meghatározására közöl módszert. 4000 Ft jutalomban részesült.

Horváth János az elmult évben igen elismerésre méltó és eredményes tudományos munkásságot fejtett ki. Négy dolgozata van megjelenőben. A tudományos munkásságon kívül tevékeny részt vett szovjet könyvek fordításának átdolgozásában, jegyzetekkel való ellátásával. 3000 Ft jutalomban részesült.

Jeges Károly tranzisztorokkal kapcsolatos kutatásokat végzett (különböző ásványok tranzisztorhatás szempontjából történt átvizsgálása, a tranzisztorhatás temperatura függésének vizsgálata). 1000 Ft jutalomban részesült.

Kunvári Olga az atommag statisztikus elméletének második közelítésével és az atommagban a neutron- és protonsűrűség eloszlás közti különbség meghatározásával kapcsolatos igen nagyarányú numerikus számításokat végzett. 1000 Ft jutalomban részesült.

Mágori Edit és *Szabó Éva* az atommagok statisztikus elméletével kapcsolatos számításokat végeztek. 1000—1000 Ft jutalomban részesültek.

Marx Györgynek három dolgozata jelent meg és kettő van megjelenőben. Az 1952. évben kiváló tudományos munkásságot végzett. Vizsgálja, hogy az eddig figyelmen kívül hagyott dilatációs rezgések nehéz atommagban milyen gerjesztési energiáknál lépnek föl. Foglalkozik az elektromágneses térben levő mágnesek fizikai mennyiségeivel és a rájuk ható ponderomotoros erő kifejezésével. *Marx* az egyedüli, ki ad hoc feltevéssel és analogiák nélkül elvi rendszerességgel tárgyalja a kérdést. 3000 Ft jutalomban részesült.

Molnár Béla az atommagok statisztikus elméletével kapcsolatos számításokat végezte. A *Gombás Pál* által kidolgozott módszert a Yukawa potenciál helyett az ae^{-br^2} potenciállal alkalmazta az atommagok statisztikus elméletére. Az állandó sűrűségű nulladik közelítést végigszámolta. 1000 Ft jutalomban részesült.

Pauncz Rezső munkássága az elmult évben igen eredményes, elismerésre méltó volt. *Berenc Ferenc*cel együtt három dolgozata jelent meg. Azonkívül megjelent egy dolgozata az Acta Physicaban és kettő az Acta Chimicában. 1000 Ft jutalomban részesült.

Meteorológusok:

Béll Béla módszert dolgozott ki a termikus szélösszetevő kiszámítására és egy fontos új munkasegédeszközt készített, a termikus szélvonalzót, mely a napi időjelző és repülésbiztonsági szolgálatban is jól felhasználható. Továbbá a magassági éghajlati adatok feldolgozását végezte el, magassági szélmérések alapján. 2000 Ft jutalomban részesült.

Berkes Zoltán vizsgálatai közül jelentősek a légtömegkicserélődés áramlási körülményeinek tisztázására vonatkozó kutatásai. Távprognosztikai vizsgálatai során elvégezte a Magyarország felett megfigyelhető szélútmennyiségek analízisét. Tovább folytatta a napfolt-tevékenység és a távprognózis közötti kapcsolatra vonatkozó vizsgálatait. 1500 Ft jutalomban részesült.

Dobosi Zoltán K. Brooksnak a távolabbi talajközeli tér függőleges hőmérsékleti eloszlására vonatkozó tapasztalati formuláját veszi vizsgálat alá. A tapasztalati formula helyességét elméleti úton igazolta. 1000 Ft jutalomban részesült.

Kozma Béla kutatásaiban elméleti összefüggést állapított meg a szélút és a szél nyomása között. Vizsgálatait a szinoptikai gyakorlatban is folytatta és jó egyezést talált elméleti eredményeivel. 1500 Ft jutalomban részesült.

Kulin István és *Szilágyi Tibor* együttesen feldolgozták az 1950—51. gazdasági év időjárási megfigyeléseit. A megfigyelési adatokat 32 növénynemesítő és fajtaösszehasonlító kísérleti állomásról gyüjtötték össze. Az 1950—51. gazdasági év időjárását több évtizedes éghajlati megfigyelés tükrében értékelték ki. Munkájuk eredményét agrometeorológiai területen lehet értékesíteni. 500—500 Ft jutalomban részesültek.

Ozorai Zoltán kutatási témája a frontok áthaladása hegyláncok felett. E feladat első lépését sikeresen elvégezte. Megvizsgálta sík terület felett haladó hideg légtömeg energetikai átalakulását összezsugorodás közben, levezeti a hideg légtömeg gyorsulását. 1000 Ft jutalomban részesült.

Takács Lajos kutatásának tárgya Magyarország időjárásában mutatkozó szingularitások fellépése. Kutatása során igazolta, hogy az időjárási adatok halmazára a halmazelmélet matematikai törvényeinek alkalmazása lehetséges. Eredményei a távidőjelzés céljaira is felhasználhatók. Vizsgálatait talajhőmérsékletre is kiterjeszti. 1500 Ft jutalomban részesült.

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS TUDOMÁNYOS ÖSZTÖNDÍJAKRA

A Magyar Tudományos Akadémia pályázatot hirdet tudományos ösztöndíjakra, melyekkel főleg kezdő kutatók eredményeit kívánja jutalmazni. Az ösztöndíjak vagy prémiumok, vagy havonta folyósított összegek alakjában kerülnek kiosztásra.

1. *Ösztöndíj-prémium*ra a kutatómunkában elért eredmények, ill. részleteredmények (nagyobb tudományos feladatok előmunkálatai, korszerű kutatási módszerek bevezetése stb.) alapján lehet pályázni. A pályázatot az elért eredmények részletes leírásával és feldolgozásával az év folyamán bármikor be lehet adni az Akadémia illetékes osztályához.

Amennyiben a pályázó munkája kidolgozásához segítséget kívánt igénybe venni, (tanácsadó, laboratórium, könyvtár stb.) pályázatát 1952. december 31-ig be kellett adni önéletrajzzal együtt az Akadémia illetékes osztályához.

Az ösztöndíj-prémium összege 5000 Ft-ig terjed.

2. *Havi ösztöndíj*ra azok pályázhattak, kiknek állásuk révén nem hivatásuk a tudományos kutatás (üzemi mérnökök, kórházi orvosok, középiskolai tanárok). Az egyetemi tanszemélyzet tagjai havi ösztöndíjra nem pályázhatnak, hanem csak ösztöndíj-prémiumra. A pályázathoz életrajzon kívül mellékelni kellett a választott téma kidolgozásának vázlatos tervét, a javasolt tanácsadónak, továbbá azon intézet vezetőjének beleegyező nyilatkozatát, amely intézetben a pályázó dolgozni kíván. A havi ösztöndíjakra vonatkozó pályázatokat is 1952. december 31-ig kellett az Akadémia illetékes osztályához benyujtani.

A havi ösztöndíj 150—400 Ft. Folyósítása csak akkor kezdődik meg, ha a pályázó már elért részleteredményeket és ezekről az Akadémia illetékes osztályának beszámolt. Ilyen esetekben a kifizetés jan. 1-től visszamenőleg történik meg.

A havi ösztöndíj megvonható, ha az Akadémia az ösztöndíjas munkáját nem tartja megfelelőnek.

A III. osztály kitűzött témái:

Matematikai témák:

1. A matematikai didaktika valamely aktuális, konkrét kérdésének tudományos feldolgozása.

Javasolt témák:

a) A térgeometria tanítása az általános- és középiskolában.
b) A számfogalom kialakítása az iskolában, különös tekintettel az egyetemi oktatás igényeire.

2. *König Gyula* matematikai munkássága.
3. Tanulmány a XIX. századbeli magyar matematika történetéből, különös tekintettel a Magyar Tudományos Akadémia szerepére.

4. Vizsgálatok algoritmussal meg nem oldható, elsősorban algebrai és számelméleti problémák köréből.
5. Vizsgálatok a rekurzív és elemi függvények elmélete köréből.
6. Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása a számelméletben.
7. *I. M. Vinogradov* módszereinek alkalmazása a factorisatio numerorum problémájának maradéktag-becslésére.
8. *Ju. V. Linnik* dolgozataiból kidolgozandó a legegyszerűbb bizonyítása azon tételnek, mely szerint, ha $(k, l) = 1$, akkor van olyan p prímszám, mely $\equiv l \bmod k$ és $< k^c$, ahol c numerikus állandó. (Kívánatos egy ilyen c effektív megadása.)
9. Tanulmány a topologikus-algebra köréből (pl. a normált gyűrűk elméletéből).
10. Ideálelméleti vizsgálatok, különös tekintettel a valós számok elméletével való kapcsolataira.
11. Önálló vizsgálatok a végtelen csoportok struktúraelméletéből.
12. Csoportelméleti eszközök alkalmazása a gyűrűelméletben.
13. Endomorfizmus gyűrűk vizsgálata.
14. Vizsgálatok az ortogonális-sorok konvergenciájára és szummabilitására vonatkozólag, különös tekintettel az ortogonális polinomokra.
15. Ortogonális-sorok divergencia jelenségei *Mensov* vizsgálataiban.
16. Vizsgálatok a szummációs módszerek axiómatikus elméletéből.
17. Tanulmány a potenciálelmélet újabb kérdéseiről.
18. Vizsgálatok egy egész függvény modul maximumának aszimptotikus viselkedésére.
19. Kifejtendők a lehető legegyszerűbb formában a matrixelmélet lineáris feladatok (elsősorban differenciálegyenletrendszerek) gyakorlati megoldására vonatkozó tételei, továbbá bemutatandó minél különbözőbb területekről (elsősorban a mechanikából és az elektrotechnikából) vett példákon azoknak gyakorlati alkalmazása.
20. Kifejtendő a rugalmasságtani differenciálegyenletek paraméterfüggvényekkel való megoldási módszere elsősorban a harmónikus és biharmónikus paraméterfüggvények esetében, továbbá a módszer alkalmazása bemutatandó konkrét fizikai és technikai feladatok megoldására.
21. Kifejtendők azok a módszerek, melyek a hővezetési differenciálegyenlet megoldásánál *inhomogén* kerületi feltételek esetén is alkalmazhatók. Elsősorban figyelembe veendők azok az esetek, midőn az inhomogén kerületi feltételben szereplő függvények az időnek lineáris, vagy periódikus függvényei. A módszerek alkalmazása bemutatandó a hővezetés, valamint a diffúzió köréből vett példákon.
22. Vizsgálatok mozgó alkatrészes nomogrammokra vonatkozólag.
23. Önálló vizsgálatok a differenciálgeometriai terek transzformációs csoportjaira vonatkozólag.

24. Önálló vizsgálatok a Cartan és Finsler terek kapcsolataira vonatkozólag.
25. A vonalelemterek differenciálgeometriájának megalapozása a bővített ponttranszformációs csoport segítségével.
26. A nemeuklideszi geometria függvénytani szerepe.
27. Vizsgálatok a matematikai statisztika nem-paraméteres módszerei köréből.
28. Vizsgálatok sztochasztikus folyamatok elmélete és annak fizikai, valamint műszaki alkalmazásai köréből.
29. A minőség-ellenőrzés újabb matematikai statisztikai módszerei.
30. Elektronikus működésű matematikai gépek konstrukciójának elvi kérdései.

Fizikai témák:

1. Elméleti és kísérleti vizsgálatok a mikrohullámokkal kapcsolatban.
2. Elméleti és kísérleti vizsgálatok a ferritekre vonatkozóan.
3. Különböző vasipari ötvözetek ferromágneses vizsgálata.
4. A ferroelektromos jelenségek különböző fajai és jelentőségük a technika szempontjából.
5. A két nucleon probléma és ezzel kapcsolatban a magokat összetartó erő kérdése.
6. A kvantumelektrodinamika eredményeinek a tapasztalattal való összehasonlítása.
7. Vizsgálatok a mikrohullámspektroszkópia köréből.
8. Vizsgálat az infravörös spektroszkópia köréből.
9. Félvezetőkkel kapcsolatos kutatások olyan irányokban, hogy az irodalomban ismertetett anyagokon kívül még milyen más anyagoknál mutatható ki tranzisztorhatás.
10. A gumirugalmasság elmélete.
11. Szilárd testek elmélete és annak alkalmazása technikai problémákra.
12. Vizsgálatok a folyadékok örvénylő mozgásának elméletére vonatkozólag.
13. Elektrolitek elmélete.
14. Klasszikus rugalmasságtani vizsgálatok.
15. Ballisztikai vizsgálatok.
16. Elméleti és kísérleti vizsgálatok a kolorimetria köréből.
17. Az üveg fizikai tulajdonságainak vizsgálata.
18. Lángok sugárzásának és hőátadásának vizsgálata.
19. A magkutatás kísérleti eredményeinek összefoglaló kritikai ismertetése (irodalmi adatokkal).
20. Piezokristályokkal kapcsolatos vizsgálatok.
21. Tanulmányok a magyar fizika haladó hagyományai köréből.

Csillagászati témák:

1. Az interstelláris anyagok és a csillagok kölcsönhatása.
2. A hold okozta légköri ár-apály vizsgálata a hazai adatok alapján.

Ára: 22·— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KÖNYVISMERTETÉSEK

A III. OSZTÁLY HÍREI

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: Mestyán János. Műszaki felelős: Tóth Ferenc.
A kézirat beérkezett: 1952. XII. 11. — Példányszám: 650. — Terjedelem: 10·5 A/5 ív, 8 ábra.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 525305 Felelős vezető: Vincze György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

III. KÖTET 2. SZÁM

ÜNNEPI SZÁM BOLYAI JÁNOS SZÜLETÉSÉNEK 150. ÉVFORDULÓJA ALKALMÁBÓL
A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL RENDEZETT
ÜNNEPI ÜLÉSSZAK ANYAGA

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1953

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
ALEXITS GYÖRGY, BUDÓ ÁGOSTON, GYULAI ZOLTÁN,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, TURÁN PÁL

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

III. kötet 2. szám

Szerkesztőség: Budapest V, Nádor-utca 12.
Kiadóhivatal: Budapest V, Alkotmány-utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának előadóülésein bemutatott dolgozatokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket, referátumokat stb. tartalmaznak. Négy füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V, Nádor-utca 12.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 40 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V, Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest VI., Sztálin-út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

Bolyai János születésének 150. évfordulója alkalmából a Bolyai János Matematikai Társulat közreműködésével rendezett ünnepi ülésszak előadásai

AZ ÜLÉSSZAK TUDOMÁNYOS PROGRAMMJA:

Megnyitó ülés

1952. DECEMBER 14-ÉN, D. E. 11 ÓRAKOR

Rusznyák István a Magyar Tudományos Akadémia elnökének elnöki megnyitója
Alexits György akadémikus: Bolyai János élete és munkássága

DECEMBER 15-ÉN, D. E. 10 ÓRAKOR

Varga Ottó lev. tag: A Bolyai—Lobacsevszkij geometria hatása a geometria fejlődésére
P. Sz. Alekszandrov lev. tag: A tér fogalmáról a topológiában

DECEMBER 16-ÁN, D. U. 18 ÓRAKOR

Kárteszi Ferenc: N. I. Lobacsevszkij élete és munkássága
Hajós György lev. tag bemutatja *J. Hadamard* akadémikus „A nem-euklideszi geometria és az axiómatikus definíciók" című dolgozatát

DECEMBER 17-ÉN, D. E. 10 ÓRAKOR

Szász Pál: A hiperbolikus trigonometria különböző elemi előállításai
E. Čech akadémikus: Megjegyzések a projektív differenciálgeometriához
W. Rinow: Felületek belső geometriájának egy axiómatikus megalapozásáról

DECEMBER 18-ÁN, D. E. 10 ÓRAKOR

Kalmár László lev. tag: A Bolyai—Lobacsevszkij geometria hatása az axiómatikus módszer fejlődésére
Sz. M. Nyikolszkij: Differenciálható sokaságokon értelmezett többváltozós függvények bizonyos osztályainak sajátságai és alkalmazásuk a variációs feladatokra

Záróülés

DECEMBER 18-ÁN, D. U. 18 ÓRAKOR

Rényi Alfréd lev. tag: A Bolyai—Lobacsevszkij geometria világnézeti jelentősége
Erdey-Grúz Tibor, a Magyar Tudományos Akadémia főtitkárának zárszava.

MEGNYITÓ ÜLÉS

RUSZNYÁK ISTVÁN, A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ELNÖKÉNEK ELNÖKI MEGNYITÓJA

Mai ünnepi ülésünket azért hívtuk össze, hogy megemlékezzünk *Bolyai János*, a magyar tudomány egyik legnagyobb büszkesége születésének 150. évfordulójáról. A magyar matematikusok méltán büszkék *Bolyai János*ra, a zseniális matematikusra, aki korszakalkotó felfedezésével új fejezetet nyitott e tudomány történetében. De *Bolyai János* születésének évfordulója nemcsak a magyar matematikusok ünnepe, hanem az egész magyar tudományé. Ezt fejezi ki az is, hogy Akadémiánk ünnepi ülésszakkal emlékezik meg erről a nevezetes évfordulóról. Akadémiánk egyik legfontosabb, legszebb és legfelemelőbb kötelessége a magyar tudomány haladó hagyományainak ápolása. Mire tanít minket a *Bolyaiak, Eötvös* és a többi nagy magyar tudós emléke? Arra, hogy forrón szeressük hazánkat, amely ilyen nagy embereket adott a világ tudományának; arra, hogy minden erőnkkel igyekezzünk méltónak bizonyulni nagy elődeinkhez; arra, hogy a multban, amikor hazánk nem volt szabad, népünk elnyomott volt, amikor a tudomány munkásai magukrahagyva, támogatás, segítség és megértés nélkül, sőt, sokszor üldözéssel, vagy legalábbis mellőzéssel küzködve voltak kénytelenek dolgozni, akadtak hazánkban olyan erőslelkű, bátor férfiak, nagyszerű tudósok, akik ilyen körülmények között is nemcsak, hogy tudtak alkotni, hanem olyan nagyot is tudtak alkotni, hogy műveikre és emlékükre tisztelettel tekint ma az egész világ. Ma, amikor hazánk évszázados külső és belső elnyomás után végre szabad és független, amikor hazánk dolgozó népe kezébe vette saját sorsának irányítását és amikor nagy Pártunk vezetésével építi boldog jövőjét, a szocializmust, amikor a tudomány egész dolgozó népünk ügyévé vált és hatalmasméretű támogatásban részesül, ma, az ezerszer kedvezőbb körülmények között dolgozó magyar tudósoknak nagy elődeik példája hatalmas ösztönzést, erőt és lendületet kell, hogy adjon munkájukban. A magyar tudósok, akik megértették, hogy legszebb és legmegtisztelőbb feladatuk a dolgozó népért való tudomány művelése, ma egynek érzik magukat a magyar néppel és további munkájukban ez a tudat óriási erőt ad nekik feladataik megoldásában. Ezek a tudósok ma büszkén vallják azt, hogy a múlt nagy tudósai munkájának folytatói, azoknak a nagy tudósoknak az örökösei, akik a magyar népből az elnyomás, a kedvezőtlen körülmények ellenére is megszülettek.

Azt mondottam, hogy *Bolyai János* születésének 150. évfordulója nemcsak a magyar matematikusoknak, hanem az egész magyar tudománynak az ünnepe. De továbbmegyek: ez az évforduló ünnepe egész dolgozó népünknek. *Bolyai János* életében még nem találta meg az utat a néphez, pedig kereste azt: bizonyítékai ennek azok a töredékek, amelyek tervezett munkájából, az „Üdvtan"-ból fennmaradtak. *Bolyai János* látta az elnyomatást, amelyben akkor a dolgozó nép senyvedett és felismerte azt, hogy a tudós nem zárkózhatik el embertársai szenvedései elől, hanem legszebb, legszentebb feladata, hogy az emberiség sorsát előbbre vigye. „A társadalom nyomorusággal, szerencsétlenséggel teljes" — mondotta *Bolyai János* — „de nem szükségképpeni, hogy ilyen legyen. A teljes üdv megtalálható már itt a földön." Nem egy ilyen bátor, harcos, a jövőbe mutató kijelentést találhatunk *Bolyai János* írásaiban. „Semmiféle egyéni üdv nem állhat fenn a közüdv nélkül" — írta például. *Bolyai* az ő matematikai kutatásait, a parallellák 2000 éves problémájával való bírkózását is úgy fogta fel, hogy „e tárgy tisztázásával a tudomány igazi gyarapításának, az ész művelésének és így az emberi sors lendítésének egyik legfontosabb és leglényegesebb lépését" teszi meg. *Bolyai János* példája arra tanít minket, magyar tudósokat, hogy összeforrjunk népünkkel és a haladás élvonalában harcoló népünkön keresztül az egész haladó emberiséggel s munkánkkal az emberiség szebb jövőjét igyekezzünk minden erőnkkel előbbre vinni.

Bolyai János korában nemcsak a tudós volt magárahagyva, nemcsak ő küzdött egyedül, segítőtársak nélkül, hanem az egész magyar nép. Ma nem vagyunk egyedül, mert mellettünk áll a hatalmas szovjet nép, a 400 milliós nagy felszabadult kínai nép, a baráti népi demokráciák népei és az imperialisták elnyomása alatt élő országok öntudatos dolgozói.

Annak a forró barátságnak, amely a békéért, az imperialisták becstelen mesterkedései és bűnös szándékai ellen küzdő béketábort áthatja, újabb fényes bizonyítéka, hogy a magyar tudomány mai nagy ünnepére a baráti országok népei legkiválóbb képviselőiket vagy üdvözletüket küldték el. Nem véletlen, hogy *Sztálin* népe, a hatalmas Szovjetunió élenjáró tudományának ilyen kiváló képviselőit küldte hozzánk. Hiszen az a gondolat, amely *Bolyai* agyában megszületett és mint ahogy ő mondta „... a semmiből egy új világot teremtett", ugyanakkor megfogamzott az orosz nép nagy fiában *Lobacsevszkijben* is. *Bolyai János* és kortársa *N. I. Lobacsevszkij* egymástól elszigetelve, egymásról nem tudva, egyidejűleg jutottak ugyanazokra az új, merész forradalmi gondolatokra, és egyidejűleg fedezték fel a nem-euklideszi geometriát. Ami az ő korukban lehetetlen volt, amikor a zsarnoki elnyomás elválasztotta egymástól az orosz és a magyar népet, az orosz és a magyar tudományt, ma megvalósult: a szovjet és a magyar nép egymásra talált, kéz a kézben halad és a szovjet és a magyar tudomány is egyre szorosabb baráti kapcsolatba kerül. Ez a kapcsolat mindennél drágább és megbecsültebb számunkra, magyar tudósok számára. Felbecsülhetetlen az a nagy segítség és baráti támogatás, amelyet az élenjáró szovjet tudománytól, a világ legelső, leghaladottabb tudományától kaptunk és kapunk és amelynek újabb bizonyítéka és megnyilvánulása a két kiváló szovjet tudós részvétele ünnepi ülésszakunkon. *Bolyai*

János életéről, munkásságáról, felfedezésének tudományos és világnézeti jelentőségéről és arról a fejlődésről, amelyet *Bolyai* és *Lobacsevszkij* felfedezése megindított, az ünnepi ülésszak előadásai fognak beszámolni. Itt előljáróban csak arra kívánok rámutatni, hogy *Bolyai János* nemcsak a matematikának volt forradalmára, hanem a haladó emberi gondolkodásnak általában. *Bolyai János* felfedezése a materialista világszemlélet nagy győzelme volt, mellyel megcáfolta többek között *Kant*-nak a térre vonatkozó idealista nézeteit. *Bolyai János* példája arra is tanít minket, hogy a tudomány minden döntő eredménye a materialista világnézet egy-egy újabb győzelme. Ma, amikor a magyar tudósok kezdik megismerni és munkájukban alkalmazni a dialektikus materializmust és egyre jobban átérzik azt a mély igazságot, amelyet *Rákosi* elvtárs a Pártfőiskola megnyitásán, 1949. október 22-én a következő szavakkal fejezett ki: „... a szocializmus építésének bizonyos fokán túl minden értelmiségi munka minősége úgy nő és úgy hatványozódik meg, ahogy benne a marxizmus-leninizmus elmélete érvényre jut és megvalósul", különös figyelmet érdemel az, hogy *Bolyai János* nagy felfedezéséhez csak úgy juthatott el, hogy bátran szembeszállt a korában uralkodó reakciós ideológiával és alapjában materialista módon nyúlt hozzá a tér problémájához.

Sztálin elvtárs a sztahanovisták első értekezletén, 1935. november 17-én tartott beszédében azt mondotta: „A tudományt éppen azért nevezik tudománynak, mert nem ismer el fétist, nem fél kezet emelni arra, ami lejárta magát, ami elavult és éberen figyel a tapasztalat, a gyakorlat szavára." Amikor *Bolyai János* emlékét ünnepeljük, olyan tudóst ünneplünk, aki „nem félt kezet emelni arra, ami elavult", aki bátran szembeszállt 2000 év előítéletével és így tudott újat, nagyszerűt alkotni. A magyar matematikusok azóta is számos nagyjelentőségű eredményt értek el és világszerte megbecsülést szereztek hazánknak, — gondolok itt például *Riesz Frigyes* munkáira, amelyek a térfogalom újabb fejlődése tekintetében döntő jelentőségűek voltak, gondolok *Fejér Lipót* munkáira, de gondolok *Kőnig Gyulára, Kürschák József*re, *Bauer Mihály*ra, *Haar Alfréd*re, a kommunista meggyőződéséért mártirhalált halt *Grünwald Gézá*ra és azokra az idősebb és fiatalabb matematikusokra, akik ma dolgoznak. Meg vagyok győződve, hogy ez az ünnepi ülésszak, *Bolyai* emlékének felidézése, újabb ösztönzést és lökést ad a matematikai életnek hazánkban és elő fogja segíteni, hogy a magyar matematikusok újabb eredményekkel gazdagítsák a tudományt és eredményeik gyakorlati alkalmazásain keresztül még fokozattabban bekapcsolódjanak abba a harcba, amelyet a magyar nép ötéves tervünk teljesítéséért, a szocializmus építéséért és a béke megvédéséért folytat és amely harccal népünk azokat az eszméket valósítja meg, amelyek *Bolyai János*ban már csirájában megvoltak és amelyek megvalósulásáról ő erős hittel állította, „eljövend annak is az órája". Ezzel megnyitom az Akadémia tudományos ülésszakát és sok sikert kívánok munkájához.

* * *

Az elnöki megnyitó után a Sztálin-díjas *P. Sz. Alekszandrov* a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának levelező tagja a Szovjetunió küldöttségének vezetője a következő szavakkal üdvözölte a Magyar Tudományos Akadémia ünnepi ülésszakát:

A Szovjetunió Tudományos Akadémiája, a Moszkvai Állami Egyetem és a Moszkvai Matematikai Társaság nevében üdvözlöm a mai ülést, amely a tudomány története kimagasló eseményének, *Bolyai János*, a nagy magyar matematikus születése 150. évfordulójának megünneplésére gyült össze.

Lobacsevszkij és *Bolyai* — két név, amely fordulópontot jelent a geometria és az egész matematika legújabbkori fejlődésében.

A két lángeszű tudós — a magyar és az orosz — által megteremtett nem-euklideszi geometria nemcsak a párhuzamossági axióma kétezeréves problémáját oldotta meg, hanem teljesen új alapokra helyezte a geometriai gondolkodást. *Lobacsevszkij* és *Bolyai* megcáfolhatatlanul bebizonyították, hogy a szokásos „használatos" euklideszi geometria nem az egyetlen elképzelhető geometria, hogy ezenkívül létezhetnek más, matematikailag épp oly megbizható geometriai rendszerek; az a kérdés pedig, hogy e rendszerek közül melyik tükrözi legpontosabban a valóságos világ térbeli viszonyait, alapjában véve a fizika kérdése, mégpedig oly kérdés, amelynek maga a föltevése sem történhet mechanikusan, leegyszerűsítve, egyszersmindenkorra, hanem különböző értelme van, aszerint, hogy a térnek közönséges, nem túlságosan nagy és nem túlságosan kicsiny részeit vizsgáljuk-e, vagy pedig egyfelől kozmikus, másfelől atomiméretekre gondolunk.

A nem-euklideszi geometria megteremtése óriási hatással volt a matematika legkülönbözőbb fejezetei — mindenekelőtt a geometria, a topológia, az algebra, a függvénytan — fejlődésére. Amint ma már tudjuk, alapjává vált az elméleti fizika s elsősorban a relativitás-elmélet modern fejlődésének. Megsemmisítő csapást mért a filozófiai idealizmusra, kimutatta a tér értelmezésével kapcsolatos kanti apriorizmus egész tarthatatlanságát. Tehát a nemeuklideszi geometria megteremtése egyike volt a tudománytörténet ama nagy eseményeinek, amelyeknek hatása nem áll meg valamely tudományág határainál, hanem nagy lendületet ad a fejlődésnek az exakt tudományos gondolkodás egész frontján.

Ma azért gyültünk itt egybe, hogy megünnepeljük ezt a nagy eseményt. Mi, a szovjet küldöttség tagjai különös büszkeséggel és örömmel hangsúlyozzuk, hogy ez az ünnep egyformán ünnepe a magyar és az orosz népnek, e két népnek, amely *Lobacsevszkijt* és *Bolyait*, a geometriai gondolkodás két nagy forradalmárát adta az emberiségnek. Legyen ez a két név újabb jelképe népeink örök barátságának, amelyek egymással szoros egységben küzdenek a békéért, az egész emberiség boldogságáért.

Ezután *W. Sierpinski* a Lengyel Tudományos Akadémia alelnöke üdvözölte az ünnepi ülésszak résztvevőit:

Örömmel üdvözlöm a Lengyel Tudományos Akadémia nevében a nagy magyar matematikus emlékére összegyült Kongresszust, amely a tudomány haladásáért és az igazság győzelméért küzdött. Egyúttal tolmácsolom a lengyel matematikusok szívből jövő és testvéri üdvözletét. Mi lengyelek csodáljuk a magyar népet, mely korunkban is annyi világszerte ismert elsőrendű matematikust adott a világnak, akiknek munkássága nagymértékben elősegítette tudományunk fejlődését.

A lengyel és a magyar matematikusok közötti szoros és szivélyes kapcsolatok már régen fennállanak és mind szorosabbá válnak. Őszintén köszönjük ezt a lehetőséget, hogy ismét találkozhatunk magyar barátainkkal és sikereket kívánunk a magyar matematika további fejlődéséhez.

Tiberiu Popovici a Román Tudományos Akadémia levelező tagja köszöntötte ezután a megjelenteket:

Abban az örömteljes megtiszteltetésben van részem, hogy *Bolyai János*, a zseniális matematikus és haladószellemű gondolkodó születésének 150. évfordulója alkalmából rendezett ünnepségen átadhatom a Magyar Tudományos Akadémiának, a magyar matematikusoknak és tudósoknak a Román Népköztársaság Tudományos Akadémiája elnökségének, akadémikusainak és levelező tagjainak, valamint matematikusainak és minden tudósának meleg üdvözletét.

A fiatal *Bolyai János* — ugyanúgy, mint a zseniális orosz tudós *Lobacsevszkij* — merészen, és meghátrálást nem ismerően harcolt a meglévő előítéletek ellen, amelyek a tudomány fejlődését megállították. Felfogása az volt, hogy a tudomány célja a látszat hátterében megbúvó mélyebb gondolatok vizsgálata. Zseniális felfedezése teljes mértékben igazolta, hogy a geometriában, akárcsak a többi tudományban, az igazság egyetlen forrása és kritériuma: a valóság és a kísérlet. Az akkori mostoha korszak tragikus sorsot juttatott *Bolyai János*nak: ez minden nagy tudós sorsa olyan társadalomban, amelynek alapja az embernek ember által való kizsákmányolása.

Romániában *Bolyai János* emlékét nagy tiszteletben tartják és megbecsülik. A Román Munkáspárt, valamint demokratikus államunk gondoskodik a nagy geométer hagyományainak őrzéséről. Marosvásárhelyen, ahol *Bolyai János* életének javát töltötte, őrzik kézirataít. Ugyanott *Bolyai János*-muzeum létesült és kiállítás keretében nyilvánosság elé kerültek a nagy tudóstól visszamaradt tárgyak. A dicsőséges Szovjet Hadsereg által való felszabadításunkat követő első hónapokban a Román Kommunista Párt Kolozsvárott egy magyarnyelvű egyetemet létesített. Ez a magyar tudományos intézmény, amelyen évente többszáz hallgató végez, büszkén hordja *Bolyai János* nevét. *Bolyai János* születésének 150. évfordulója alkalmából a Román Népköztársaság román nyelven kiadja az „Appendix"-et. Ugyancsak ebből az alkalomból tanulmányok és gyüjtemények jelennek meg, amelyeknek célja: népszerűsíteni *Bolyai János* gondolatait. A Román Népköztársaság Tudományos Akadémiája úgy határozott, hogy külön ülést szentel *Bolyai* emlékének. Ugyancsak a Román Népköztársaság Tudományos Akadémiájának kolozsvári fiókja karöltve a kolozsvári Bolyai és Babes egyetemmel megünnepli *Bolyai János* születésének 150. évfordulóját. Ugyancsak ünnepi ülések vannak ma a Román Tudományos Akadémia jassi-i és temesvári fiókjaiban.

Ezután *Eduard Čech* akadémikus a Csehszlovák Tudományos Akadémia Matematikai Intézetének igazgatója üdvözölte a Kongresszust: Nagy megtiszteltetés s öröm részemre, — mondotta — hogy a zseniális *Bolyai* emlékének szentelt ünnepi ülésszakot én üdvözölhetem a Csehszlovák Tudományos Akadémia s valamennyi csehszlovák matematikus nevében.

A magyar matematika igen sok elsőrendű tudós nevével dicsekedhetik, akiknek műveit mi régóta csodáljuk és tanulmányozzuk. 1949-ben boldogok voltunk, hogy Csehszlovákiában a prágai cseh—lengyel Kongresszuson magyar matematikus vendégeket üdvözölhettünk körünkben. Sajnos a további együttműködést megakadályozta nálunk az az összeesküvő csoport, melyet csak nemrégiben lepleztek le. Annak a reményemnek szeretnék kifejezést adni, hogy mi mindannyian a világbéke és a szocializmus építése érdekében egyre jobban és jobban együtt dolgozhatunk.

Éljen a haladó tudományok új, szocialista korszaka, amely előtt felmérhetetlen lehetőségek állanak, mert a zseniális *Sztálin* programmjának szolgálatában áll s a haladó, győzedelmes munkásosztályt szolgálja.

* * *

Rusznyák István elnök ezután bejelentette, hogy távirat érkezett Kinából:

„A nagy magyar matematikus, Bolyai születésének 150. évfordulója alkalmából a Kinai Akadémia tudományos dolgozói nevében legmelegebb üdvözletemet küldöm és a Bolyai hétre sok sikert kívánok. Kuo-Mo-Zso a Kinai Akadémia elnöke".

A Bolgár Népköztársaságból a következő távirat érkezett:

A Magyar Tudományos Akadémia Elnökének
Budapest

A nagy magyar geométer Bolyai János születése 150. évfordulója alkalmából kérjük, fogadja szíves, baráti üdvözletünket.

A Bolgár Tudományos Akadémia
Matematikai Intézete
N. Obreskov akadémikus.

Rusznyák István elnök javaslatára az ünnepi ülésszak a következő szövegű táviratban üdvözölte a Népek Békekongresszusát:

A Magyar Tudományos Akadémia most ünnepli *Bolyai János,* a nagy magyar matematikus születésének 150. évfordulóját. *Bolyai* forradalmi lépést tett a tudományok haladásában. Haladó gondolkodása veszélyeztette az uralkodó osztály érdekeit. Hánytatott élete példa arra, milyen tragikus sors vár a tudomány forradalmáraira a reakciós társadalomban. *Bolyai*ban azt a tudóst ünnepeljük, aki felfedezésével az emberiség jólétét kívánta szolgálni. A béketábor tudósai is tudományukat népük jólétének, valamint kulturájának emelése céljából művelik, tehát a béke szolgálatába állítják. Magyarország matematikusai és a baráti államok kiküldöttei az ünnepi ülésszakról üdvözletüket küldik a Népek Békekongresszusának. Mély megdöbbenéssel látjuk azt, hogy egyes tudósok az imperializmus, új háború előkészítése és a népek szabadságának letörése szolgálatába állítják tudományukat. Felháborodással értesültünk az agresszorok gaztetteiről Koreában és a békét veszélyeztető törekvésekről más országokban. Mélységesen elítéljük az imperialisták újabb gaztetteit, követeljük az agresszió azonnali beszüntetését, a béke biztosítását. Felhívjuk a világ tudósait: csatlakozzanak a béke megvédéséért folytatott harchoz és akadályozzák meg a tudománynak a rombolás és pusztítás szolgálatába való állítását.

BOLYAI JÁNOS ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

ALEXITS GYÖRGY r. tag

Előadta az ünnepi ülésszak 1952. december 14-én tartott ülésén

Bolyai János, minden idők egyik legnagyobb matematikusa tragikus sorsú lángész volt. Sorsa nem csupán egyéni tragédia. Visszatükröződik benne a magyar nép minden olyan haladó szellemű gondolkodójának a harca is, aki síkra mert szállni az igazságért s ezért összeütközésbe került az uralkodóosztály felfogásával. *Bolyai* egy tudományos eszme érvényesüléséért küzdött, s ez az eszme forradalmi volt. Egy-egy tudományág mozgása pedig nem elszigetelt jelenség. Robbanásszerű haladását nemcsak az illető tudományág belső fejlődése készíti elő, hanem a társadalom szerkezetében beállott sokezer kisebb-nagyobb változás is, amelyek az élet bonyolult hajszálcsőrendszerén felszívódnak a tudományos szemléletbe, hogy végül egy lángeszű alkotó művén keresztül forradalmasítsák a tudományt. A forradalom pedig, még ha az elvont tudomány területén játszódik is le, a haldokló uralkodóosztály gyűlöletét váltja ki.

Bolyai János 1802 december 15-én született Kolozsvárt, anyai nagyapja, *Benkő József* kirurgus házában. Két éves koráig Domáldon nevelkedett, apja, *Bolyai Farkas* nemesi birtokán. A család 1804-ben Marosvásárhelyre költözött, ahová *Bolyai Farkast* meghívták a református kollégium matematika, fizika és kémia tanárának.

János már zsenge gyermekkorában rendkívüli matematikai tehetséget árult el. Négy éves korában ismerte a kör, a sugár és a középpont fogalmát, az ellipszist, sőt a „sinus" fogalma sem volt idegen számára. Kilenc éves korában apja rendszeres tanulásra fogta. Ekkor már *Euklidesz* könyveiből és *Euler* algebrájából tanult. Matematikára szinte nem is kellett tanítani, mert az újonnan hallott tételt azonnal felfogta és a bizonyítást is előrelátta. „Mint az ördög elömbe ugrott — beszéli el apja[1] — és sürgette, hogy menjek tovább." Tizenhárom éves korában már az infinitezimális számításban is jártas volt. A rigorozumot 1817-ben tette le a marosvásárhelyi kollégiumban; ezzel elnyerte a jogot a főiskolai tanulmányokra.

Bolyai Farkas azt szerette volna, hogy fia Göttingenben matematikát tanuljon *Gauss*, a „princeps mathematicorum" vezetése mellett. Tekintve, hogy *Farkas*t *Gauss*hoz ifjúkori barátság fűzte, levelet írt neki, amelyben kérte, fogadja házába *János* fiát.

Az idők távlatában azonban némileg elhidegült barátságuk nem bírta el Farkas túlságosan közvetlen stílusban megfogalmazott kérésének a próbáját, s így levelére nem kapott választ. Ezzel megszűnt minden lehetősége annak, hogy *János* gondos és magasfokú matematikai képzésben részesüljön.

Magyarországon abban az időben nem lehetett magas fokon matematikát tanulni. *Bolyai János* tizenöt éves korában bizonyára tudott már annyi matematikát, amennyit bárhol az országban tanulhatott volna. Komoly képzést akkoriban csak Göttingenben, vagy Párisban kaphatott volna. Ehhez pedig *Farkas*nak nem volt pénze, hiszen évi 400 forint fizetéséből és a hozzájáruló természetbeni járandóságokból még Marosvásárhelyt is csak szerényen tudott családjával megélni. Fia külföldi taníttatását tehát csupán a nagybirtokos arisztokrácia mecénáskodása tehette volna lehetővé, amire a közkedvelt *Farkas* az akkori szokások szerint számíthatott is. De ha valaki mecénás, akkor azt is megszabja, milyen célt kíván pénzével támogatni. Már pedig a konzervatív erdélyi arisztokráciát alig érdekelte a matematika, annál inkább a Habsburg-ház politikája. *Farkas*nak tehát nem lehetett reménye arra, hogy fia párisi vagy göttingeni tanulmányait pénzeljék a nagybirtokos arisztokraták, de azt esetleg remélhette, hogy a bécsi hadmérnöki akadémia tanulmányi költségeit elvállalják, mert ez politikai szempontból is érdekelhette őket. A Habsburgokhoz hű nagybirtokos arisztokrácia ugyanis szinte kötelességének érezte, hogy a magyar köznemesség fiait hozzásegítse az osztrák katonatiszti pályához: így akarták a „rebellis" köznemesség sorait gyengíteni azzal, hogy fiaikból és rokonaikból Bécsben császárhű janicsárokat neveltetnek. *Farkas*nak egy évi munkával sikerült is elérnie, hogy *János* bécsi neveltetési költségeinek terhét — ami négy év alatt mintegy 8000 forintot tett ki — néhány arisztokrata magára vállalja. *Bolyai János* tehát 1818-ban, a felvételi vizsga sikeres letétele után belépett a bécsi hadmérnöki akadémiára.

Az akadémia tanterve szerint *János*nak még három évig kellett matematikát tanulnia, a negyedik évben ennek helyébe katonai tárgyak léptek. Az akadémia szelleme nyilván megfelelt az akkori osztrák katonai felfogásnak: kincstári ízű világnézetre nevelték növendékeiket. De ettől eltekintve is, az akadémián nem matematikus kutatókat, hanem katonai mérnököket akartak képezni. A matematika terén tehát csak azt a tudományos technikát kívánták meg, amire abban az időben egy hadmérnöknek szüksége lehetett. *Bolyai János* tehát Bécsben egyáltalában nem részesült olyan matematikai képzésben, amilyenre a későbbi kutató nyugodtan építhetett volna. A tudomány képviselőivel való érintkezés módját sem ismerhette meg az akadémián, hiszen a katonai intézmény zárt nevelési rendszere nem is tette lehetővé a szabad mozgást. Tudjuk, hogy vasárnaponként egy tanulótársával *Meiseler*hez, az akkoriban jónevű bécsi hegedűművészhez járt, akinél vonósnégyesben játszott. Az a tény, hogy *Meiseler*, a virtuóz hegedűs a fiatal *Bolyai*t vonósnégyesébe bevette, mindenesetre arra mutat, hogy *János* már akadémista korában is kiválóan kezelhette a hegedűt, amint ezt életrajzírói kivétel nélkül meg is említik. Matematikus ismeretsége csak egy volt: *Szász Károly*, aki akkoriban Bécsben nevelősködött. De *Szász* maga sem volt alkotó matematikus. A vele való beszélgetések szintén nem sokat használhattak *János* tudományos fejlődésének.

Bolyai János élete folyását megpecsételte az a körülmény, hogy katonai pályára kényszerült, mert ezzel a tudományos foglalkozáshoz vezető összes kapuk bezárultak előtte. Katonai pályája sablónosan indult: Az akadémia kiváló eredménnyel való elvégzése után, 1823-ban alhadnagyként a temesvári erődítéshez osztották be, 1826-ban Aradra helyezték át, 1827-ben főhadnagy lett. Az akkoriban erősen mocsaras alföldi terepen való tevékenysége során maláriát kapott és — későbbi panaszai alapján feltehetően — ízületi gyulladást. E két megbetegedés elharapózása később gyakori zavarokat váltott ki szervezetében. Éppen betegségére való tekintettel 1830-ban Lembergbe helyezték át, állomáshelyét azonban csak 1831-ben foglalta el. Utazás közben még kolerát is kapott, mint azt egy öccsének írt levelében említi: „1831-ben Lembergbe menve Besztercén a cholerát legelőbb kiállottam... gyenge lábon éreztem magamat".[2]

Apjával 1825-ben, Marosvásárhelyt tett látogatásakor találkozott *János*, majd másodszor Lembergbe való utazása alkalmával, ismeretlen helyen. Mindkét alkalommal heves vitáik voltak a nem-euklideszi geometria kérdését illetően. *János* rendkívül merész, több, mint két évezred megkövesedett tudományos előítéletét szétzúzó forradalmi elméletét *Farkas* nem volt képes maradéktalanul követni. Második találkozásukkor azzal váltak el, hogy *János* megírja elméletét a Tentamen függelékeként s a különlenyomatot *Farkas* megküldi *Gauss*-nak: ítéljen ő, helyes vagy helytelen-e *János* elmélete.

Az ok, ami miatt még olyan kitűnő matematikus is, mint *Farkas* nem tudta *János* gondolatait végig követni, tulajdonképpen egy több évezredes előítéletben rejlett. Ez az előítélet abban a metafizikus felfogásban áll, hogy a világ örök és változatlan törvényeknek van alávetve s ezek matematikai visszatükröződése *szükségszerűen* csak az euklideszi geometria lehet. Igaz, hogy már az ókorban kritika tárgyává tették az euklideszi geometria alapját jelentő, úgynevezett V. posztulátumot, mert az nem fejez ki olyan nyilvánvalóságot, mint a többi axióma. De ebből a kritikából csak azt a hibás következtetést vonták le, hogy az V. posztulátum tartalma nem axióma, hanem olyan tétel, amely bizonyára *bebizonyítható* a geometria többi axiómája alapján. Az euklideszi geometria szükségszerűen igaz voltát valló merev, metafizikus világképet tehát az V. posztulátum kritikája sem változtatta meg, csupán az történt, hogy exakt bizonyítást kerestek az a priori igaznak tartott meggyőződés igazolására.

Az V. posztulátum geometriai tartalma a legegyszerűbben a következő: *Proklos*tól származó fogalmazásban fejezhető ki: egy *s* síkban adott *P* ponton át bármely *e* egyeneshez egyetlen párhuzamos húzható. Ez az axióma valóban nem olyan nyilvánvaló, mint a többi, mert nem finit jellegű, vagyis a tér véges átmérőjű részén nyert tapasztalatok alapján közvetlenül lehetetlen meggyőződni az axióma állításának a fizikai térben való megvalósulásáról. Ez a körülmény volt az oka, hogy több, mint kétezer esztendeig keresték az V.

posztulátum bizonyítását, amely nélkül az euklideszi geometria s ezzel az egész akkori világkép logikailag megalapozatlan maradt.

Az V. posztulátum problémájának ókori kritikáját az arab kultúra matematikusai folytatták. Európában e téren 1663-ban *Wallis* tett jelentős lépést előre, amikor kimutatta, hogy az V. posztulátum ekvivalens a következő állítással: vannak tetszőleges nagyságú hasonló háromszögek. A következő lépést 1733-ban *Saccheri* tette meg, majd *Lambert, D'Alembert, Fourier, Monge, Carnot, Laplace, Lagrange, Bolyai Farkas, Schweikart, Taurinus* és *Gauss* gondolatai érlelték a kétezeresztendős probléma megoldását. Igen jellemző az előítéletek erejére, hogy *Lambert* az V. posztulátum hamis voltának feltevéséből nem tudott ellentmondásra bukkani, ezért nem publikálta művét, s az csak halála után, 1786-ban jelent meg. *Taurinus* pedig már 1826-ban csak filozófiai jellegű előítéletekre alapíthatta meggyőződését, hogy t. i. az euklideszi geometria mégiscsak az egyetlen igaz térelmélet. A legjellemzőbb azonban *Gauss* viselkedése, aki nagy vonalakban látta ugyan, hogy az V. posztulátumot más axiómával helyettesítő nem-euklideszi geometria logikailag egyenlően jogosult az euklideszi geometriával, de ennek az elvnek a közfelfogással való szöges ellentéte miatt nem merte publikálni e téren elért eredményeit.

Bolyai János alkotásának nagyszerűsége éppen annak a forradalmi merészségű gondolatnak a *konzekvens kidolgozásában* rejlik, amely szerint az V. posztulátum helyettesíthető a következő axiómával: az *s* síkban adott *P* ponton át bármely *P*-t nem tartalmazó *e* egyeneshez végtelen sok nem metsző (párhuzamos) egyenes húzható. *Bolyai János* az *Appendix* néven ismert lángeszű művében levonta ennek az axiómának a következményeit és kimutatta, hogy az ilyen módon nyert nem-euklideszi geometriánál logikailag semmivel sem szükségszerűbb az V. posztulátum igaz voltán alapuló euklideszi geometria. *Bolyai János* tehát exakt módszerrel megdöntötte azt a kétezer esztendős előítéletet, amely az euklideszi felfogást *a priori* egyedül lehetségesnek minősítette s ezzel új geometriai világképet alkotott, mint már 1823 november 3-án írta apjának: „semmiből ujj, más világot teremtettem." Felfedezésének merészségére valóban ráillik az igazi tudomány sztálini jellemzése,[3] amely szerint a haladó tudománynak „... megvan a bátorsága, elszántsága arra, hogy a régi hagyományokat, normákat, szabályokat összetörje, ha elavulnak, ha a haladás fékezőivé válnak, s új hagyományokat, új normákat, új szabályokat tud teremteni."

Bolyai Farkas — ugyanúgy, mint a kor többi matematikusának túlnyomó többsége — fia elméletének ezt a rendkívüli merészségét nem tudta teljesen követni. A felfedezéssel szemben tanúsított ellenállása érthető, mert az *Appendix* eszméi nemcsak a matematikai érvelés követelését kívánták meg az egykorú olvasótól, hanem azt is, hogy beleélje magát egy olyan gondolatvilágba, amely homlokegyenest ellenkezik az évezredek óta szentnek és sérthetetlennek képzelt gondolkodási formákkal. Aki *Bolyai János* nem-euklideszi geometriáját követni akarta, annak tudomásul kellett vennie, hogy abban a háromszög szögeinek összege nem 180°, hanem kevesebb ennél, hogy csupán az egybevágó háromszögek lehetnek hasonlók, hogy nincs tetszőlegesen nagy területű háromszög, hogy a kör négyszögesítésének feladata könnyen megoldható, — és még számos más, meglepő állítás is igaz. Épp ezért *Bolyai* gondolatainak megértése nem csak matematikai tudást követelt, hanem morális erőt is, amely képes szembeszállni a korabeli társadalom *ideológiai jellegű* előítéleteivel.

Az Appendix különlenyomatai már 1831 júniusában elkészültek. Tudjuk, hogy *Farkas* 1831 június 20-án küldött egy példányt *Gauss*nak, ez azonban elveszett. Az újabb példányt 1832 januárjában kapta meg *Gauss*, akinek válaszlevele 1832 március 6-án kelt. *Gauss* válasza, mint ismeretes, igen furcsa hangú. Az idevonatkozó rész a következő:[4]

„Most valamit fiad munkájáról. Ha azzal kezdem, *„hogy nekem ilyent nem szabad dicsérnem“*, bizonyára egy pillanatra meghökkensz: de mást nem tehetek, ha dicsérném, ez azt jelentené, hogy magamat dicsérném, mert a mű egész tartalma, az út, melyet követett és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30—35 év óta folytatott elmélkedéseimmel. Valóban ez rendkívül meglepett. Szándékomban állt, hogy saját munkámból, melyből egyébként mostanáig csak keveset tettem papirosra, életemben semmit sem hozok nyilvánosságra. A legtöbb embernek nincs is meg a helyes érzéke aziránt, amin ez a dolog múlik, és én csak kevés emberre akadtam, aki különösebb érdeklődéssel fogadta azt, amit vele közöltem. Erre csak az képesít, hogy ha nagyon élénken érezzük, mi az, ami tulajdonképpen hiányzik, és ezzel a legtöbb ember nincs tisztában. Ellenben szándékomban állt, hogy idővel mindent úgy írjak meg, hogy legalább ne pusztuljon el velem együtt. Nagyon meglepett tehát, hogy most már e fáradságtól megkímélhetem magam, és nagyon örvendek, hogy éppen régi barátom fia az, aki engem ilyen csodálatos módon megelőzött.“

Megdöbbentő ez a levél, amelyben *Gauss* mintegy jogot formál *Bolyai János* alkotására! Igaz, hogy levelei, naplójegyzetei és felületelméleti kutatásai alapján tudjuk, hogy *Gauss* sokat megpillantott a nem-euklideszi geometriából. Eredményeit azonban nem dolgozta ki egységes elméletté, nem lehetett tehát erkölcsi alapja egy olyan levél megírására, amelynek óvatos fogalmazásából kicsendül ugyan az elismerés hangja, de egyszersmind egy bizonyos prioritási igény is. Erre annál kevésbbé volt erkölcsi alapja, mert nem lehet tudni, meddig jutott el ilyen irányú vizsgálataiban, azt azonban pontosan tudjuk, hogy a nem-euklideszi geometriára vonatkozó eredményeit miért nem publikálta: *Gauss* — saját szavai szerint — félt „a beóciaiak kiáltozásától“, félt a közvéleménynek az elmélet merészsége miatti esetleges felháborodásától. Tudta, hogy egy olyan elmélet, amely szerint *lehetséges,* hogy a világról alkotott matematikai képünk hamis, legalábbis a tudomány terén forradalmi gondolat. A Szent Szövetség terrorisztikus elnyomástól terhes uralma idején pedig még a tudomány terén lejátszódó forradalmaktól is rettegett az uralkodóosztály. *Gauss* tehát *társadalmi okokból* nem mert a nyilvánosság elé lépni eredményeivel. Mondjuk meg őszintén: az *udvari tanácsos Gauss* nem volt elég bátor ahhoz, hogy a *matematikus Gauss* gondolatainak szárnyalását követni merte volna.

Bolyai János — igen helyesen — elsősorban a közérdek szempontjából ítélte meg a *Gauss*-okozta sérelmet. Jogosan írta,[5] hogy a *Gauss* által felhozott okok, amelyek miatt tartózkodott eredményei publikálásától, „erőtlenek és semmisek: mert hisz a tudományban... mindig arról van szó, hogy szükséges és közhasznú, de még homályos dolgokat tisztázzunk..." Abban is teljesen igaza van, hogy az átlagos képességű embereknek éppen a legjelentősebb eszmékkel szembeni értetlensége „értelmes embernek nem szolgálhat okul arra, hogy csak felületest és középszerűt alkosson és a tudományt lethargikusan csak az örökölt állapotban hagyja... Bizony nem ebben áll az élet, a munkálkodás és az érdem."

Bolyai János Gauss levelét azonban nemcsak a tudományos közérdek szempontjából ítélte meg, *Gauss* visszavonulása a lángeszű alkotás nyilvános elismerése elől súlyos válságba kergette az évek óta beteg, katonai pályájától szabadulni vágyó, pattanásig feszült idegzetű embert. Tévedés volna azt hinni, hogy *Bolyai*t egyszerűen sértett hiúsága keserítette el. Sokkal többről volt szó! A katonai pályát már évek óta meggyűlölte, szolgálatát még egészséges állapotban sem szívesen látta el. De a katonaságtól csak akkor szabadulhatott volna meg, ha helyette matematika-tanárként működhetett volna. Ezt pedig csak *Gauss* elismerésének ajánlata tudta volna biztosítani számára. *Gauss* levele tehát annyit jelentett, hogy *Bolyai* előtt még lángeszű felfedezésének nyilvánosságra hozatala után is zárva maradt a tudományos pálya kapuja. Elkeseredésének kibontakozására igen jellemzőek a reá vonatkozó katonai iratok adatai.

*Bolyai*nak előző állomáshelyén nézeteltérései lehettek a tisztikar egyes tagjaival, akik őt ezért veszekedő egyénnek minősítették. *Zimmer* alezredest, *Bolyai* lembergi parancsnokát bízták meg a vizsgálattal, aki 1831-ben, vagyis mielőtt még *Gauss* válasza megjött volna, így jellemzi Jánost:[6] „Semmi sem észlelhető ebből a veszekedő hajlamból vagy elviselhetetlenségből, ellenkezőleg, inkább félénk és nagyon jóindulatú embernek ismert." *Bolyai János* tehát 1831-ben, amikor még remélhette, hogy művének sikere révén megszabadul a katonai szolgálat nyűgétől és esetleg matematika-tanárként tudományos kutatással foglalkozhat, „félénk és nagyon jóindulatú" emberként viselkedett. Amikor azonban *Gauss* leveléből világossá vált előtte, hogy nyomasztó helyzetéből még lángeszű alkotása sem menti ki, elkeseredett. Magatartásának megváltozását világosan mutatják az 1831. évre és 1832. évre vonatkozó minősítési lapjai:[7]

	1831-ben	1832-ben
Kedélyalkata:	*csendes és jóindulatú*	*nagyon ingerlékeny és indulatos*
Magatartása a polgársággal:	*jó*	*ismeretlen*
a csapattestnél:	*jó és tisztelettel viseltetik elöljárói iránt*	*kerül minden érintkezést a tisztekkel*
alantasaival:	*jó*	*szófukar*
Játékos-e:	*Nem*	*szenvedélyes sakkjátékos és sok időt fordít erre a hajlamára.*

Bolyai János elkeseredése nemcsak emberi szempontból érthető, hanem még inkább azért, mert tisztán látta, hogy a nem-euklideszi geometria jelentősége túlnő a matematika „belső ügyén". Ez a felfedezés nemcsak a geometriáról, hanem az anyagi világról általában vallott tudományos felfogást is megváltoztatta. Az abszolut geometria ugyanis implicite azt a döntő jelentőségű felismerést tartalmazza, hogy a geometriának bármely axiómarendszere nem *közvetlenül* írja le az anyagi valóság térviszonyait, hanem a térszemlélet olyan absztrakt továbbfejlesztése, amely speciális esetként magában foglalja ugyan a valóságos fizikai tér leírását is, de matematikai és fizikai megismerésünk fejlődésével együtt *maga is további fejlődésre képes.* Az euklideszi geometria egyedüli helyességét valló hitben tükröződő merev *metafizikus* világképnek az abszolút geometria többféle lehetőséget egyetlen egységbe foglaló *dialektikus* világképével való helyettesítése új tudományos korszakot nyitott meg, amelyben még a geometria véglegesnek látszó axiómatikája is állandóan fejlődő ismeret.

Bolyai János, mint említettük, teljesen tudatában volt felfedezése korszakalkotó voltának és azt is látta, hogy miben áll felfedezésének világnézeti jelentősége. A *Tér tudománya* 1834 körül írt bevezetésében ugyanis megállapítja, hogy a geometriai megismerés nem jelenti az anyagi világ egyszersmindenkori, végleges visszatükrözését, hanem a kornak a természetről való ismeretéhez mérten „meg kell elégednünk a lehető legjobb tárgyalással."[8] Bolyai eszerint világosan látta, hogy a geometriában visszatükröződő világkép fejlődő, nem metafizikus, hanem dialektikus.

Lehetetlen egy pillanatra ki nem térnünk a térfogalomnak arra a dialektikus fejlődésére, amely *Bolyai* és *Lobacsevszkij* alapvető felfedezésének hatására megindult.

Riemann, Helmholtz és *Lie* vizsgálatai kiteljesítették a *Bolyai és Lobacsevszkij* által elindított folyamatot. Eredményeik nem születhettek volna meg a nem-euklideszi geometria első felfedezése nélkül. A mai differenciálgeometria tehát szoros, szinte közvetlen kapcsolatban áll *Bolyai*nak és *Lobacsevszkij*nek a nem-euklideszi geometria megalapozására vonatkozó eszméivel. A matematikai térfogalom azonban csak akkor emelkedhetett a mai általánosság fokára, amikor e század elejére megérett az a felismerés, hogy a klasszikus geometria és a ponthalmazelmélet látszólag különböző gondolatvilága az absztrakt matematikai tér fogalmában egyesül szoros egységgé. Az absztrakt tér ötlete általános alakban először *Fréchet* munkáiban szerepel,[9] aki egyrészt a pontsorozatok konvergenciájának, másrészt a távolság fogalmának axiómatikus tárgyalására alapította a matematikai tér elméletét. A legáltalánosabb absztrakt térfogalmat azonban csak az a felismerés alakíthatta ki, amely szerint a topologikus tér egyetlen ismertetőjele, hogy benne a torlódási pontok és az izolált pontok megkülönböztethetők. Ezt a döntő lépést *Riesz Frigyes*[10] tette meg. Az őt követő fejlődés igen szétágazó; jelentős eredménye azonban, hogy megteremtette a különböző absztrakt tér-típusok közötti kapcsolatot, amit legvilágosabban *Urysohn*[11] nevezetes tétele illusztrál. Ennek *Tyihonov*[12] által adott bővítése szerint ugyanis minden megszámlálható bázisú reguláris topologikus tér homeomorf a Hilbert-tér alaptéglájának egy részhalmazával. *Urysohn* tétele tehát eltüntette az absztrakt topologikus tér és a szemléletesebb koordinátatér közötti éles határt.

Bolyai Jánosnak a tér szerkezetére vonatkozó gondolatai a tér tudományának rendkívüli fejlődését indították meg. Ez a fejlődés egyrészt lehetővé tette, hogy szinte amorfnak látszó halmazok is beleilleszkedjenek a matematikai térfogalom rendjébe, másrészt azt is sikerült elérni, hogy a metrikus terek kiterjedt osztályában jellemezzük a náluk szemléletesebb geometriai tulajdonságú euklideszi és nem-euklideszi tereket. Ahhoz, hogy az ilyen jellegű eredményekből is megemlítsünk egyet, szükségünk van a következő fogalomra: nevezzük egy p, q pontpár középpontjának az r pontot, ha távolságaik eleget tesznek a $\overline{pr} = \overline{qr} = \frac{\overline{pq}}{2}$ feltételnek. Egy metrikus teret regulárisan konvexnek mondunk, ha bármely pontpárjának egy és csakis egy középpontja van, ezenkívül minden p, q pontpárhoz található egy r pont oly módon, hogy q a p, r pontpár középpontja legyen. Mármost például *Busemann*[13] kimutatta, hogy a *Minkowski*-metrikájú háromdimenziós nem-euklideszi terek azonosak az olyan háromdimenziós regulárisan konvex, teljes terekkel, amelyek ezenkívül még egy, *Busemann* által határkör-axiómának nevezett feltételnek tesznek eleget.

Bolyai eszmevilága az alapja a térfogalom e hatalmas fejlődésének. A matematikai fogalomalkotásnak ez a gazdag tárháza adta kezünkbe a mai fizikai világkép kialakításához szükséges eszközöket is. Ennek köszönhető az általános relativitáselmélet és a kvantum-mechanika számos fejezetének matematikai kifejtése.

Bolyai Jánost 1832-ben kinevezték másodosztályú kapitánynak, és Olmützbe helyezték át. Utazás közben szekere felborult, s az egyébként is betegeskedő *Bolyai* agyrázkódást szenvedett. A hadseregfőparancsnokság elrendelte felülvizsgálatát és 1833 május 28-án kelt rendeletével *Bolyai János* másodosztályú mérnökkari kapitányt félrokkantként nyugállományba helyezte évi 280 forint nyugdíjjal, melyet a nagyszebeni hadipénztárnak kell havi részletekben folyósitania. Ezzel *Bolyai János* katonai pályafutása végetért, 1833 június 16-án elindulhatott haza, Marosvásárhelyre.

Marosvásárhelyt körülbelül egy évig apjánál lakott. Ezalatt az idő alatt elkeseredett *vitáik* voltak egymással. E viták természetéről szinte semmit sem tudunk, több apró jelből azonban arra következtethetünk, hogy részben tudományos, részben világnézeti ellentétek merülhettek fel közöttük. *Farkas* alapjában véve haladó, az enciklopédisták racionalista szellemének hatása alatt álló ember volt, de életkörülményei arra kényszerítették, hogy felfogását ne merje nyiltan képviselni. Ezzel szemben *János* minden tekintetben radikális elveit korlátlan nyiltsággal hirdette, sőt igen fontosnak tartotta, hogy az ember vélt igazát bárkivel szemben harcosan képviselje. Érthető, hogy *Farkas,* akit a marosvásárhelyi korlátolt kispolgárság is uszított „hálátlan és rideg" fia ellen, nem tűrte *János* magatartását, amely az idők folyamán még *Farkas* társadalmi helyzetét is veszélyeztethette volna. Egy súlyos vita után *Farkas* kiutasította házából *Jánost*. Később testvére, *Bolyai Antal* közbenjárására mégis megengedte, hogy Domáldra költözzék és ott Farkas birtokán gazdálkodjék. Erre *János*nak igen nagy szüksége volt, mert az évi 280 forintos nyugdíj még a nyers megélhetést is alig biztosította.

Bolyai János 1834-ben költözött Domáldra, egy kisküküllőmegyei nyomorúságos faluba,* ahol 1846-ig, tehát 12 évig élte a kultúrvilágtól elszakadt falusi remete életét. Ennek ellenére Domáldon is dolgozott, bár a tudományos tevékenységhez semmiféle segédeszköze sem volt. Ebből az időből származik a lipcsei Jablonowsky-társaságnak a komplex számok elmélete fejlesztésére kitűzött pályázatára küldött *Responsio.* A *Responsio* megírását *Farkas*sal való levélbeli tudományos vita előzte meg, amelyben *János* rámutatott *Farkas*nak a komplex számok megalapozását tárgyaló elméletének egy hibájára. Erre vonatkozó levelét így végzi:[14] „Most már nints mód, hogy meg ne legyen győződve, hogy theoriája össze van omolva; bármily hosszas homályom vagy tévelyem eloszlatása nekem éldelet, gyönyör 's reménylem Kegyednek is az lesz." *Farkas*nak azonban „homálya eloszlatása" nem volt „éldelet s gyönyör", ezért apa és fiú között különös, szinte sportszerű versengés indult meg a pályázattal kapcsolatban. Mindketten elküldték pályamunkájukat Lipcsébe, de egyikük sem részesült jutalomban. Helyettük *Kerekes Ferenc,* debreceni kollégiumi tanár sablónos dolgozata nyerte el a pályadíj felét.

Az 1837-ben írt *Responsio* nyolc oldalas, vázlatos, mégis sok és mély gondolatot tartalmazó munka. *Bolyai János* a komplex számokat négy egység bevezetésével értelmezte, és célzott arra, hogy négynél több egység bevezetésével hasonló elmélet nem építhető fel, mert akkor például nem volna igaz, hogy a négyzetgyökvonás kétértékű művelet. *Bolyai János* tehát ugyanabban az évben talált rá elméletére, amikor *Hamilton* a kvaterniók elméletét meg-

* Mint jellemző adatot megemlítjük, hogy Domáldnak még 100 évvel később, 1930-ban is csak 871 lakosa volt.

alkotta. *Bolyai* mély matematikai éleslátására mutat, hogy a *Responsio*ban a hatványt komplex kitevőre is e^x Mac-Laurin-sorával értelmezte, ami ugyan már *Euler*nél is szerepel, *Bolyai* azonban arra is felhasználja, hogy a logaritmust komplex argumentum esetén is értelmezze, mint e^x inverz függvényét. Kétségtelen, hogy a *Responsio* minden elnagyoltsága mellett, önmagában is elég lenne ahhoz, hogy *Bolyai János*nak helyet biztosítson a matematika történetében..

János domaldi gazdálkodásával *Farkas* nem volt megelégedve: 1846-ban *János*t kitette Domáldról, a birtokot pedig bérbe adta. *János* családjával együtt beköltözött Marosvásárhelyre, ahol a domáldi tartózkodás alatt megtakarított pénzén egy kis házat építtetett.

Bolyai János Marosvásárhelyt teljes visszavonultságban, szinte robinzoni magányban élt. Társadalmi elszigeteltségére jellemző, hogy ifjúkori barátja *Szász Károly,* négy évi marosvásárhelyi tartózkodása alatt „őt nem kereste fel, vagy inkább nem merte felkeresni, nehogy magát is rossz hírbe keverje“.[15] A marosvásárhelyi konzervatív polgárok a merészen haladó gondolkodású *Bolyai János*tól annyira írtóztak, hogy *Stäckel,* a század elején ottjárt ismert német Bolyai-kutató ezt írta[16]: „Még negyven évvel halála után lehetett észlelni, hogy Marosvásárhelyt mennyire gyűlölt és megvetett volt *Bolyai János* neve“.

Az 1848-as év igen jelentős *Bolyai János* életében. A szabadságharc riadója kimozdította őt teljes visszavonultságából. Mint volt tiszt, legszívesebben katonai szolgálatot teljesített volna, de ebben megakadályozta állandó betegeskedése. Egy 1848 elején írt levélben[17] a következőket olvashatjuk: „... nagyon gyenge egészségem miatt ... a hadnak útjára* teljességgel alkalmatlan vagyok és legalább magánszolgálat által ügyöközhetek, hogy a Köz-Jót előmozdítsam,... bizonyos lévén az, hogy amíg csak egy megelégületlen van: addig senki tökélyes boldog állapottal nem dicsekedhetik“. Amikor azonban a székely csapatok októberben Radnótnál győzelmet arattak, s utána október 30-án, *Sánta* huszárőrnagy szállásán többen bizalmas tanácskozást tartottak a további hadműveletekről, *Bolyai János* is felkelt betegágyából. *Deák Farkas,* az erdélyi történetíró egy naplótöredékben[18] elbeszéli, hogy ezen a tanácskozáson „Bolyai egy tiszta, szabatos tervvel állott elő, mely ... Szeben, Fehérvár és egész Erdély megtisztítását magába foglalá ... új évre az Egész Erdélyt a Magyar Kormány kezébe adni ígérte.“ „E tervet nem fogadták el, — folytatja *Deák,* — ... mert a vezérek és parancsnokokban nem volt elég önmérséklet magokat megtagadva az ő parancsnoksága alá adni s nem különösen azért, mert *Droschner* reactionarius, *Zsombori*** pedig ingadozó volt s így a két szak-ember a lehető legjobb tervet leginkább igyekeztek megbuk-

* E két szó olvasása bizonytalan.

** *Droschner* és *Zsombori* törzstisztek a honvédség katonai szakértőiként vettek részt a tanácskozáson.

tatni." — Szinte elképesztő, hogy *Deák* a forradalmak történetének mennyire jellegzetes vonását írja le naplójában: az ellenség becsempészi a forradalom vezérkarába a maga embereit, akik a „szakember" álarca mögé bújva kimutatják a jóról, hogy rossz, a rosszról pedig hogy jó, — és katasztrófát idéznek elő. Marosvásárhelyt is ez történt: a fegyelmezetlen székely csapatokat a császári sorkatonaság szétverte, *Gedeon* osztrák altábornagy bevonult Marosvásárhelyre és szabad rablást engedélyezett, *Bolyai János* pedig, mint *Deák* írja „... visszatért a magány életbe, melyet csak e pillanatban hagyott volt el ...".

Bolyai János különösen *Bem* sikerein fellelkesülve, később is többször forgatta elméjében, hogy elmegy a harctérre, de ebben betegeskedése mindannyiszor megakadályozta. A szabadságharc utáni elnyomatás idején valósággal begubózott. De még a szabadságharc alatt kezébe került egy tudományos mű, amely rendkívüli módon felkeltette figyelmét. Ez volt *Lobacsevszkij: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* című, 1840-ben megjelent értekezése.

Bolyai János Lobacsevszkij munkáját *Farkas*tól kapta meg, aki egy véletlen folytán értesült róla. Amikor a művet elolvasta, megdöbbenve vette tudomásul, hogy annak tartalma teljesen megegyezik az *Appendix*ével. Először arra gyanakodott, hogy *Lobacsevszkij* talán nincs is, hanem *Gauss* rejtőzik az álnév mögött, maga a mű pedig az *Appendix*ből szerkesztett plágium. Erre a feltevésre *Gauss*nak az az állítólagos magatartása szolgáltatott okot, hogy egy beszélgetés során megdícsérte volna *Lobacsevszkij* munkáját, az Appendixre azonban egyáltalában nem akart emlékezni. Akár igaz volt ez az eset, akár — ami valószínűbb — nem, *János*sal elhitették, hogy megtörtént. Ilyen körülmények között természetesen jogos volt az a gyanúja, hogy a *Geometrische Untersuchungen* az ő gondolatainak *Gauss* közbejöttével való eltulajdonításából keletkezett. Különösen érthető ez a gyanakvás, ha meggondoljuk, hogy *Bolyai János* a tudományos világtól évtizedek óta elzárva élt, tájékozatlan volt a problémának az *Appendix* megjelenése előtti fejlődéséről, s most arról értesült, hogy több mint kétezer év sikertelensége után a nem-euklideszi geometriának már a harmadik felfedezője jelentkezik. A számára érthetetlen tény előtt állva, valamint *Gauss* régebbi valóságos és újabb vélt magatartásától felháborodva, teljesen érthető, hogy először plágiumra gondolt. Épp ezért *Lobacsevszkij* munkájához gondos jegyzetet készített, hogy felfedezze, nincs-e benne olyan hiba, amelyből egy esetleges plágium kiviláglanék. *Bolyai*, noha jegyzeteiben *Lobacsevszkij* munkájának kisebb-nagyobb hibáit keményen megkritizálta, maga is felismerte, hogy *Lobacsevszkij* vele egyívású lángész. Észrevételei egyik helyén például a következő, cikornyás táblabíró-stílusú mondattal fejezte ki *Lobacsevszkij* iránti elismerését[19]: „ Ily éleken járva 's högyökön állva, suppantja ki nagyon gyönyörüön és Nemesen, jelesen, derekason főeszméjében Lobatsewskij, a kötélen 's dróton táncoló legnagyobb, ügyösb 's finomabb művészek módjára a gömbháromszög-tan ön-állóságát."

Ami a két zseniális szerző prioritását illeti, csak az lehet az álláspontunk, hogy *a prioritás kérdését még felvetni sem helyénvaló.* Kétségtelen ugyan, hogy *Lobacsevszkij* műve előbb, még pedig legfeljebb két évvel előbb[20] jelent meg nyomtatásban, mint *Bolyaié.* Ugyanakkor azonban azt is tudjuk, hogy *Bolyai* a leglényegesebb alapgondolatot már 1823-ban felfedezte, amikor apjának azt írta, hogy „semmiből egy ujj más világot teremtettem", míg *Lobacsevszkij* abban az időben még nem talált rá a megoldás útjára, mint az 1823 évi kéziratos geometriájából kiviláglik. De mindaketten már 1825-ben megírták eredményeiket: *Bolyai* kéziratát 1826 elején átadta volt matematika tanárának, *Wolter* századosnak, *Lobacsevszkij* pedig ugyancsak 1826 elején bemutatta munkáját a kazáni egyetem fizika-matematika karának. Mindkét kézírat elveszett. Ezek a tények megcáfolhatatlanul bizonyítják, hogy a két lángeszű alkotó lényegileg ugyanabban az időben, egymástól függetlenül fedezte fel a nem-euklideszi geometriát.

Nagyszerű alkotásuk tárgyalási módja természetesen különböző. *Bolyai* több szerkesztési feladatot tárgyal, így például bebizonyítja, hogy a nem-euklideszi geometriában a kör négyszögesítése megoldható, míg *Lobacsevszkij* elsősorban arra törekszik, hogy a nem-euklideszi geometriában is megtalálja a szokásos geometriai számítások elvégzésére szolgáló képleteket. Ezek a módszerbeli különbségek minden valószínűség szerint a két tudós társadalmi körülményeiből fakadnak. *Bolyai*nak, a világtól elzárkózott remetének csak papír és tinta állt rendelkezésre, ezért elsősorban azokra az elméleti jellegű következtetésekre szegezte tekintetét, amelyeket elzárkózottságában is módjában állt ellenőrizni. *Lobacsevszkij* viszont egyetemi tanár és képzett csillagász volt, aki első perctől fogva remélte, hogy tapasztalati úton sikerül meghatározni a fizikai tér euklideszi vagy nem-euklideszi természetét, ezért elsősorban azokat az eszközöket kereste, amelyeket a csillagászati gyakorlat e kérdésnél felhasználhat.

Bolyai geometriai érdeklődését felrázta *Lobacsevszkij* művének a megismerése: 1850 körül kezdett foglalkozni a *Raumlehre* kéziratával, amelyre 1855-ig minduntalan visszatért. A reánk maradt töredékből és az erre vonatkozó, cédulákra írt feljegyzésekből kiviláglik, hogy *Bolyai János* ebben a munkájában is jelentős, új gondolatokkal foglalkozott. A töredék legértékesebb része talán az, amely a görbék és felületek általános elméletével foglalkozik. Ez azt mutatja, hogy *Bolyai,* megelőzve számos más kutatót, felismerte a görbék és felületek topológiájának a fontosságát. A görbéket egyszerűekre és csomósokra osztotta fel. A felületek közül az általa egyszerű felületnek nevezett alakzatok fajainak a felsorolását tűzte ki célul. Egyszerű felületen — úgy látszik — a kétdimenziós sokaságot kell érteni. *Bolyai* megkülönböztetett teljes és átlyukasztott felületeket; ez kétségkívül arra a törekvésre mutat, hogy a felületek fajait az összefüggésszámmal igyekezett jellemezni. Igen mély geometriai szemléletet rejt magában a következő meglátása[21]: „Lehet valamely tetszés szerinti egyszerű felületből tetszés szerinti számmal lyukakat kiemelni, e helyekre csöveket illeszteni és ezeket páronként egyesíteni. A legáltalánosabb esetben az egyszerű felület ilyen természetű." Ehhez hozzáfűzi: „Bebizonyítását meg kell vizsgálni!".

Teljesen jogos *Bolyai*nak *Euler* poliédertétele bizonyítására vonatkozó megjegyzése[22] is, amely szerint a „felséges Euler-féle tétel ... nem kellő általánossággal van bizonyítva, mert nem minden polyeder-relatio nyerhető gúlák lenyesése útján". Sajnos, nem ismerjük *Bolyai* saját bizonyítását, ezért azt sem tudjuk, milyen többszörösen összefüggő poliéderekre találta meg az Euler-tétel valamilyen általánosítását, amikor azt jegyezte fel[23], hogy „az Euler-féle relatió bebizonyítását a gyűrűalakú polyederek és üreges sík-terek eseteire is" sikerült elvégeznie.

Bolyai 1856 körül ismét foglalkozni kezdett azzal a kérdéssel, hogy vajjon a nem-euklideszi rendszer a háromdimenziós térben is ellentmondásmentes-e. Igen világosan látta, hogy ha a sík geometriájában az euklideszi és a nem-euklideszi rendszer egyaránt ellentmondásnélküli is, ebből a tényből még nem lehet következtetni a háromdimenziós tér euklideszi vagy nem-euklideszi viszonyaira. E tekintetben *Bolyai* némileg messzebb jutott el, mint *Lobacsevszkij,* aki megelégedett azzal, hogy a nem-euklideszi síkgeometria ellentmondásmentes. *Bolyai* úgy akarta a kérdést eldönteni, hogy ha az A, B, C, D csúcspontú tetraéderen kívül felvesz egy E pontot, akkor ez az öt pontból álló konfiguráció meghatároz 10 élet, 10 háromszöget és 30 lapszöget. Ezek trigonometrikus összefüggéseire alkalmazva az abszolut trigonometria képleteit, azt remélte, hogy ezen az úton az ellentmondásmentesség kérdése eldönthető. Egy ideig tévedésbe esett, mert egy számítási hiba következtében azt hitte, sikerült bebizonyítania a háromdimenziós tér szerkezete alapján, hogy az V. posztulátum, vagy más néven XI. axióma mégis szükségszerűen igaz. Meg is kezdte egy dolgozat megfogalmazását, amelynek címe[24]: „Bebizonyítása a Földön mindmáig kétséges volt világhírű, és, mint az egész tér és mozgás tudományának alapjául szolgáló mindenekfelett fontos XI. Euklidesz-féle axiómának. Bolyai Bolyai János nyugalmazott mérnökkari kapitánytól." De a bevezetésen túl nem jutott, mert közben rájött a számítási hibára. Élete végéig nem sikerült bebizonyítania a nem-euklideszi térgeometria ellentmondásmentességgét. Ezt, mint ismeretes, csak jóval *Bolyai János* halála után végezték el.

Bolyai Farkas 1856-ban bekövetkezett halála után *János* 1857-ben a város végére, a katolikus temető melletti Kálvária-utcába költözött, ahol egy egészen kicsi házacskát bérelt. Itt élt egyedül, állandóan betegeskedve, teljesen munkaképtelenül. Csak *Gergely* öccsének írt néha egy-egy levelet családi ügyeiről és betegségéről. A tudományos munkásság örömeire visszapillantva ezt írta 1857-ben[25]: „... részesültem a menyország megismerésében is, — melyet minden szigorú életmódom mellett is semmi anyagi kincsért nem adnék — részesülhet minden épen teremtett egyén, ha szorgalmasan és lelkesen ügyökszik magát kiművölni." Később már szinte mindig ágyban feküdt és lázas volt. Állandóan fázott, még nyáron is báránybőr sapkában aludt. Mi volt a baja, nem tudjuk. Egyik panasza, hogy mindkét lába bokától felfelé dagadt és fáj, talán előrehaladt izületi gyulladás tünete lehetett. Végül 1860 január 18-án tüdőgyulladással ágynak dőlt és nemsokára haldokolni kezdett. Január 27-én a háztartását vezető Szőts Julianna a következő drámai levelet írta *Bolyai Gergely*nek[26]: „Akartam tudatni, de míg egészségesebb volt nem engedte, most akaratja ellen is Kapitány úr jan. 18. rosszul lett, de mind beszélt sokszor kértem, hogy írjon az ötse után, de ő a költségtől félt, most már 26-dik Január éljelén 10 órakkor a szava elálott az ólta nem tud semit magáról minden minutumban várom a halálát mit tudok csinálni vele. Ara kérem a Tek Urat, hogy siessen a bátyához tudja ki tőle ha még életbe kapja hogy a pénzét is kinél tartotta, mert itthon nekünk sohasem mondotta tsak kérem minél elébb siessen jöjön ki alázatosan esedezik Szőts Júla szolgáló.

Míg a levelet megírtam adig meghólt így már nints mit tagadni a kapitány Ur nints többé".

Temetésén a kötelező katonai kíséreten kívül csak három ember vett részt. Sírja jeltelen maradt, s amikor *Schmidt Ferenc*, a *Bolyaiak* első magyar kutatója 1893-ban kereste a felismerhetetlenné vált sírt, csupán egy ember tudta megmutatni, hol nyugszik az örök emlékezetű *Bolyai János:* a munkában megöregedett *Szőts Júla* szolgáló...

Bolyai János életét bízvást tragédiának nevezhetjük. mert nagyszerű felfedezése hosszú ideig meg nem értetten kallódott, ő maga pedig kénytelen volt különc magányában álmodozni arról a világról, amelyben az ész és a tudás győz az ostoba erőszak fölött. Sikertelenségének döntő oka, hogy a 19. század első felében az exakt tudományos kutatásnak Magyarországon, sőt az egész Habsburg-monarchiában nem volt megfelelő társadalmi talaja. Az exakt természettudományok, de különösen az absztrakt jellegű matematika művelése ugyanis csupán olyan társadalom számára fontos, amelynek termelési módja szükségessé teszi a matematika eredményeinek a termelésben való közvetlen vagy közvetett felhasználását. Nem véletlen, hogy az ókorban az iparos és hajózó görögök fejlesztették legmagasabb fokra a matematikát. Az sem véletlen, hogy a 17. században éppen Angliában és Franciaországban indult meg hatalmas lendülettel az újkori matematika fejlődése, vagyis ott, ahol az ipari fejlődés és a földrajzi felfedezések kiaknázása fontos társadalmi szükségletként jelentkezett. A matematika iránt tehát mindig azok a társadalmak érdeklődtek, melyeknek ideológiáját a korhoz képest fejlett termelőerők és fejlett termelési viszonyok határozták meg.

Bolyai korában a hazai termelőerők fejletlenségére jellemző, hogy 1841-ben Magyarországon 6 gőzgép működött 74 lóerőnyi teljesítménnyel, az osztrák iparban 231 gőzgépet használtak, míg például Franciaország ugyanakkor mintegy 4000 gőzgéppel rendelkezett. Nálunk gépek helyett a jobbágyok és zsellérek középkori módszerekkel való kizsákmányolása szolgáltatta a termeléshez szükséges energiát. Az ipar feudális viszonyok között haldokló céhmesterséget vagy legfeljebb néhány manufaktúrát jelentett és teljesen alárendelt szerepet játszott.

Az akkori magyar társadalom termelőerőinek és a velük kapcsolatos termelési viszonyoknak elmaradt volta olyan ideológiát határozott meg, amelyben alig jutott szerepe az exakt tudományos kutatásnak. A feudális kizsákmányolást körömszakadtáig védelmező uralkodó osztály sem az exakt kutatást nem támogatta, sem azokat, akik az exakt természettudományok eredményeire alapítják világnézetüket. *Bolyai János* pedig ezt tette. Nemcsak, hogy matematikai kutatással akart foglalkozni, hanem a világ minden kérdését, a társadalom problémáit is tudományos módszerekkel szerette volna megoldani. Ennek a magatartásnak szükségszerű következményeként előbb vagy utóbb ellentétbe kellett kerülnie mindenkivel, aki az akkori szokványos világnézetet vallotta. *Bolyai János életének tragikus folyása tehát nem véletlen személyi kapcsolatok és egyéni tulajdonságok eredménye, hanem a nagyot alkotó lángész és gyökeres reformok után kutató ember vergődése az akkori elmaradt magyar társadalmi rendszer karmaiban.*

Bolyai János filozófiai érdeklődésű gondolkodó volt. A matematika mellett természetfilozófiai és társadalmi problémák is foglalkoztatták. Merész gondolatai következetes racionalistát állítanak elénk, aki — különösen a matematika filozófiája terén — lényegében materialista eszméket hirdetett.

Igen figyelemreméltó például, hogy *Bolyai János* a komplex számok elméletéről szólva a *Responsio* 11. §-ában a következőket írja[27]: ... csak is olyan dolgok, és így csak olyan mennyiségek lehetnek a *józan** kutatás tárgyai, amelyek valóban megvannak (pl. anyagiak, a testi vagy külső világ részei, vagy legalább elgondolhatók és lehetségesek)". *Bolyai* tehát elutasított minden önkényes matematikai fogalomalkotást, s így a matematikai idealizmus vagy materializmus kérdésében *határozottan a materializmus oldalára állt.* Még a komplex számokat is a valóság egyik sajátos visszatükrözésének tekintette, holott az ő korában általános volt az a meggyőződés, hogy a komplex számok képzeletbeli dolgok, amelyek nem az anyagi valóságot írják le.

*Bolyai János*nak azonban nemcsak egyes megjegyzései, hanem az *Appendix* egész tartalma, a matematikai térről vallott felfogása is arról tanuskodik, hogy tudományos módszere lényegében materialista. Már geometriája keletkezéséről is azt írja[28], hogy az euklideszi szemlélet elvetésére kellett elhatároznia magát „ ... minthogy azt tartottam, hogy a természetet nem szabad kényszeríteni, a természetet nem szabad ábrándok szülte agyrémek szerint formálni, hanem akarnunk kell észszerűen és természetes módon az igazságot, vagy magát a természetet látni, és hogy meg kell elégednünk a *lehető legjobb*** tárgyalás-

* *Bolyai* eredeti aláhúzása.
** *Bolyai* eredeti aláhúzása.

sal". — *Bolyai* tehát a világot objektív valóságnak tartotta, amelynek a leírása a matematika feladata. E leírás nem lehet önkényes „ábrándok szülte agyrémek szerint" formált, hanem tőlünk független, objektív igazságokat kell kifejeznie. Ez az álláspont megfelel annak a nézetnek, amelyet *Engels* a materializmus ismertetőjelének minősített[29]: „a materialista természetszemlélet egyszerűen azt jelenti, hogy a természetet olyannak vesszük, amilyen, anélkül, hogy valamit is hozzáadnának, ami a természettől idegen". Említésre méltó, hogy *Bolyai* azt is felismerte, hogy a természet visszatükrözését szolgáló fogalmaink maguk is fejlődnek, tehát minden konkrét történeti helyzetben „meg kell elégednünk a *lehető legjobb* tárgyalással".

A nem-euklideszi tér ellentmondásmentessége nagy csapást mért *Kant* idealista elméletére, amely a teret *a priori* szemléletnek tartja, a róla alkotott matematikai kép tehát szükségszerűen végleges, fejlődésképtelen. *Bolyai*nak a matematikai térfogalom bővítését eredményező felfedezése azonban éppen azt igazolta, hogy a fizikai térnek akár euklideszi, akár nem-euklideszi volta *a priori* egyenlően jogosult, ezért a kanti idealizmus, vagy a fizikai térnek bármely más metafizikus felfogása hamis. Az Appendixnek tehát a matematikai tartalma *önmagában* is jelentős lépés a világ dialektikus materialista szemlélete felé.

Bolyai tudatosan is szembeszállt a metafizikai szólamok ürességével: „A skolasztikus metafizika — írta a *Raumlehre*-ben[30] — legnagyobbrészt túlfeszített, beteges, az emberi tudás területén nem kellően tájékozott erők nyomorúságos szüleménye, mert ami tudományában biztos, az a matematikához, az egyetlen, igazi alaptudományhoz tartozik, a többi pedig csupa szőrszálhasogatás, amely eltérít bennünket a leghasznosabb és leggyümölcsözőbb tudományok felséges mezejétől". Ez a megjegyzés minden esetre kritikája, ha nem is materialista kritikája a metafizikának: *Bolyai* következetes racionalista volt, ezért várt mindent a matematikától.

Bolyai János világnézetére igen jellemző, hogy a világot — *Laplacehoz* hasonlóan — összefüggő egésznek tartotta, amelyben minden egyes részecske törvényszerű összefüggésben áll a világ bármely más részével, így ezek mozgásai kölcsönösen meghatározzák egymást. „Az egész világ részei között — írta *Bolyai*[31] — szükséges és szoros törvényszerűség van, vagyis az egész világ egy, mégpedig tökélyesen organizált élő egész. Bármely csekély része, például egy porszem nélkül az egész fönn nem állhatna... másfelől pedig bármely nagy rész is, például az egész világ maga egy porszem híjával, elégtelen az egész világ folyását igazgatni..." Érdemes összehasonlítani *Bolyai*nak ezt a gondolatát a dialektikus materializmus álláspontjával, amely a természetet „nem egymástól elszakított ... tárgyak, jelenségek véletlen halmazának tekinti, hanem összefüggő egységes egésznek, amelyben az egyes tárgyak, jelenségek szerves kapcsolatban állnak egymással. függenek egymástól és feltételezik egymást".[32]

Bolyai János eszméinek racionalista alapja természetesen gyengíti *Bolyai* materializmusának a következetességét. Meglátszik ez egy feljegyzéséből[33], amely a tér és idő objektív létezésének kérdésére vonatkozik. „Vajjon az idő és a tér valóban meg vannak-e, — írja — vagy csak látszólagosak, annak az értelmes és eszes gondolkodóra (filozófusra) nézve éppen olyan közönyösnek kell lennie, és minden további vizsgálatán kívül kell maradnia, amint ez a dolog a legszigorúbb értelemben eldönthetetlen és különben ezek az eszmék olyanoknak látszanak, amelyeknek valóságos dolgokra kell vonatkozniok. Úgy látszik ugyanis, mintha az idő és tér létezésének látszata (eszméje) helyes volna és túlmennénk a kellő határon, ha ez iránt még további kételyeket támasztanánk...“ — Ime a következetes racionalizmus *Bolyai János*t a tér és idő objektív létezésének kérdésében egy kissé ingadozóvá teszi, hiszen ezt a problémát is racionalista módon akarja eldönteni, holott ez a „legszigorúbb értelemben“, vagyis matematikai módszerrel eldönthetetlen. Valóban, a matematikai módszer *formálisan* ugyanarra az eredményre vezet, akár látszatnak, akár valóságnak tartjuk a teret. De *Bolyai* mégsem rekedt meg a tiszta racionalista kételkedés holtpontján, hanem a materialista nézet felé hajlott, mert szerinte „túlmennénk a kellő határon“, vagyis észszerűtlenné válnék világnézetünk, ha a tér és idő objektív létezése tekintetében „további kételyeket támasztanánk“.

Bolyai János társadalmi kérdések iránt is érdeklődött, kortársai szemében szélsőségesnek, sőt esztelennek tűnő reformterveket szőtt. Különösen élete végén, 1850 és 1855 között foglalkozott sokat egy „*Üdvtan*“ gondolatával, amely egyrészt a társadalom utópista szocialista reformját, másrészt a tudományoknak egy *Comte* eszméire emlékeztető enciklopédiáját tartalmazta volna. Az *Üdvtan* még vázlatosan sem készült el, csupán töredékes feljegyzésekből és kortársai róla alkotott véleményéből rekonstruálhatjuk tartalmát.

Bolyai társadalmi reformterveinek haladó jellege elsősorban abban áll, hogy felismerte az osztályelnyomás következtében keletkezett nyomorúságot, de nem volt hajlandó — a korabeli szokáshoz hasonlóan — kenetes frázisokkal, túlvilágra szóló ígéretekkel elintézni a kérdést, hanem módszert keresett a társadalmi bajok mielőbbi leküzdésére. Az volt a véleménye[34], hogy a „társadalom nyomorúsággal, szerencsétlenséggel teljes, de nem szükségképpeni, hogy ilyen legyen. A teljes üdv megtalálható már itt a földön.“ Szerinte a társadalmi bajok fő oka az egyes emberek önző individualizmusa, ennek helyébe a közérdek tiszteletbentartásának kell lépnie. Egyik feljegyzése[35] szerint „... szomorú és kétes, sőt önmagára nézve ... is legveszélyesebb ... a mások elnyomásán s romjaira építeni akarni önboldogságot!“ Más helyen ezt írta[36]: „Egyáltalában semmiféle egyéni üdv nem létesíthető vagy nem állhat fenn a közüdv nélkül“.

Bolyai János úgy gondolta, hogy a termelést közösen, munkamegosztásos alapon kell végezni, a termékek elosztását pedig az általános egyenlőség elvei szerint kell végrehajtani. Az ilyen szocialista jellegű társadalmat *Bolyai* szerint pusztán erkölcsi tanítás, belátás fogja létrehozni. „... Csak szellemi erőszak vagy-is meg-győzés, győzelem és ön-kényttes át-idomulás, ujjá születés vezethetnek üdvre, s erős remény szerént, leg-alább a 2000-ik év betelése előtt — persze minden ábrány nélkül szolva — eljövend annak is az órája" — írta egyik levelében[37]. Az „ön-kényttes át-idomulást" az fogja létrehozni, hogy az emberek megismerik és megtanulják az *Üdvtant*, s ezzel erkölcseik megjavulnak. „Az üdv egyik jelentékeny és lényeges részét alkotja az Üdvtannak megtanulása, a másikat, nem kevésbbé nemeset és jeleset az Üdvtannak megfelelő életmód."[38]

Bolyai János ezek szerint utópista szocialista volt az utópisták minden erényével és hibájával. A társadalmi rendszer megváltoztatására vonatkozó gondolatainak erénye, hogy az osztályelnyomó kizsákmányoló hatalmat meg akarja szüntetni. Ez teszi *Bolyai* reformeszméit haladóvá. Hibája, hogy naiv, utópista, mert egyáltalában nem ismeri a társadalom mozgását meghatározó anyagi erőket. E naivitás oka természetesen nem *Bolyai* személyében keresendő. A valódi ok ugyanaz, mint az összes utópista álmodozás esetében, hogy tudniillik: „A jövendő társadalmának fantasztikus rajza oly időben támad, amikor a proletariátus még felette fejletlen, tehát maga is fantasztikusan fogja fel saját helyzetét, a társadalom átalakítására irányuló első sejtelmes törekvéseit."[39]

Százötven esztendő telt el *Bolyai János* születése óta. Ezalatt Magyarországon és a szűkebb hazáját magában foglaló Romániában is a munkásosztály vezetésével, „ábrány nélkül szólva", megvalósult az a világ, amelyben lehetetlenné vált „a mások elnyomásán építeni akarni önboldogságot". Ebben az új világban a tudománynak és a tudósnak is más szerepe van, mint akkor volt, amikor még — *Bolyai János*sal szólva — az „arany-bálványt s krajcár-Istent imádók s egyedül a pengő vagy kész pénzbe hívők s bízók s annak hangjában gyönyörködők"[40] uralkodtak a dolgozó nép fölött. Ahol a hatalmat a dolgozók vették a kezükbe, ott a tudomány az egész nép közügyévé vált, s a tudós nemcsak néhány szakember, hanem az egész nép számára alkot. *Bolyai* közönsége ma már az egész haladó emberiség. A Szovjetunióban kiadták az Appendixet, nálunk most jelent meg magyarul. A Román Népköztársaság *Bolyai*ról nevezte el a magyar egyetemet és megünnepli születésének százötven éves évfordulóját. Mi is *Bolyai János*ról neveztük el szegedi matematikai intézetünket és társulatunkat. Halhatatlan alkotása eljut üzemeinkbe, ahol előadások százai ismertetik meg nagyságát a magyar munkásosztállyal. A tudományt szomjazó dolgozók milliói adják meg ma *Bolyai*nak az elmaradt megbecsülést, s a dolgozók egészséges világában *Bolyai János* emberi alakja is megújhodva és megtisztulva áll előttünk. Óriás volt ő a tudomány alkotó munkásai között. Világraszóló felfedező, aki képes volt minden erejével kutatni az igazságot, az igazság pedig végső fokon mindíg a dolgozó nép haladását szolgálja. S a felszabadult nép százötven év után forró szeretettel öleli magához az igazságért oly sokat szenvedett lángeszű fiát.

IRODALOM

[1] *Szily Kálmán:* Adatok *Bolyai Farkas* életrajzához. Értekezések a matematikai tudományok köréből, XII. kötet 1. füzet (Budapest 1884.) 33.

[2] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattára. A levél 1857-ből való.

[3] *Sztálin:* Beszéd a főiskolák tudományos munkásai fogadásán. *Lenin,* Válogatott művek, I. kötet, Szikra, 1949. 4.

[4] *Bolyai Farkas* és *Gauss Frigyes Károly* levelezése (Budapest, 1899), 108—113.

[5] *Stäckel:* Id. mű I. 92—93.

[6] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattára.

[7] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattára.

[8] *Stäckel:* Id. mű I. 223.

[9] *M. Fréchet:* Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo *22* (1906), 174.

[10] *Riesz F.:* A térfogalom genezise, Math. és Phys. Lapok *15* (1906), 97—122 és *16* (1906), 145—161. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, Atti IV. Congr. Internazionale dei Matematici, Roma, II. k. (1908), 18.

[11] *P. Urysohn:* Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume, Mathem. Annalen *92* (1924), 302—304.

[12] *A. Tychonoff:* Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn, Mathem. Annalen *95* (1926), 189—142.

[13] *H. Busemann:* Über die Geometrien, in denen die „Kreise mit unendlichem Radius die kürzesten Linien sind." Mathem, Annalen *106* (1932) 140—160.

[14] *Stäckel:* Id. mű I. 122.

[15] *Stäckel:* Id. mű I. 171.

[16] *Stäckel:* Id. mű I. 171.

[17] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattára.

[18] *Batta István:* Adalék *Bolyai János* életéhez. Akadémiai Értesítő XXIX. (1918), 445

[19] *Stäckel:* Id. mű I. 148.

[20] *Lobacsevszkij* első ilyen tárgyú nyomtatott műve a Kazanszkij Vesztnyik 1829—1830 évfolyamában jelent meg, az Appendix 1831-ben.

[21] [22] [23] *Stäckel:* Id. mű I. 178—179.

[24] *Stäckel:* Id. mű I. 182.

[25] [26] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattára.

[27] *Stäckel:* Id. mű II. 247.

[28] *Stäckel:* Id. mű I. 223.

[29] *Engels:* Feuerbach és a német filozófia alkonya. Szikra 1949. 57.

[30] *Stäckel:* Id. mű I. 186.

[31] *Bedőházi János:* A két Bolyai (Marosvásárhely 1897), 379.

[32] *Sztálin:* A leninizmus kérdései. Szikra. 1951. 670.

[33] *Stäckel:* Id. mű I. 259.

[34] *Bedőházi:* Id. mű 384.
[35] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattára.
[36] *Stäckel:* Id. mű I. 188.
[37] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattára.
[38] *Stäckel:* Id. mű I. 187.
[39] *Marx-Engels:* Válogatott művek. Szikra. 1949. I. 39.
[40] Magyar Tudományos Akadémia Könyvtárának kézirattára.

A BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ GEOMETRIA HATÁSA A GEOMETRIA FEJLŐDÉSÉRE

VARGA OTTÓ lev. tag

Előadta az ünnepi ülésszak 1952. december 15-én tartott ülésén

Bolyai János felfedezésének hatását a geometria fejlődésére a következő szempontokból kívánom tárgyalni:

Elsőször is azokat a vizsgálatokat ismertetjük, amelyek módszerileg *Bolyai János* szintetikus tárgyalását követik. E vizsgálatok eredménye a geometria modern axiómatikus megalapozásához vezet. Másodszor vázoljuk azokat a vizsgálatokat, amelyek más szempontból vezettek *Bolyai János* eredményeihez. Ezekből a szempontokból kiindulva azonban már *Bolyai János* felfedezésénél lényegesen általánosabb geometriákhoz jutottak. Az új szempontok közül az egyik a Cayley—Klein-féle projektív felfogáson át a geometriák csoportelméleti megalapozásához, míg a másik szempont *Riemann* híres habilitációs előadásából indul ki és végeredményben különböző geometriai diszciplinák differenciálgeometriai megalapozásához vezet. Ismeretes, hogy a nem-euklideszi geometria előhirnökei *G. Saccheri* (1667—1733), *H. Lambert* (1728—1777), *A. M. Legendre* (1752—1833) vizsgálatai *Euklidesz*nek szintetikus-axiómatikus módszerét követik. E vizsgálatok azonban csak a párhuzamossági axióma körül mozogtak, és céljuk annak kimutatása volt, hogy ez az euklideszi axióma a többi axiómából következik. *Bolyai* és *Lobacsevszkij* már céltudatosan az euklideszi axiómával ellenkező, nem-euklideszi hiperbolikus párhuzamossági axiómából indultak ki és olyan rendszert igyekeztek kiépíteni, amely egy, az euklideszi geometriával egyenlően lehetséges geometriát ad. E célból, mint tudjuk, főleg fontos planimetriai, sztereometriai, trigonometriai és analitikus geometriai tételeket vezettek le. Nagymértékben tisztázatlan marad azonban az euklideszi geometria felépítésében szereplő többi posztulátum és definíció. Ismeretes, hogy *Euklidesz*nél több olyan definíció szerepel, amely nem tartalmaz matematikai állítást. Azt a követelményt sem sikerült azonban szigorúan keresztülvinni, hogy a definíciók és axiómák felsorolása után minden további tétel ezekből logikus úton levezethető legyen. Az itt felmerülő hézagoknak legfőbb oka az volt, hogy egy sereg, a szemléletből átvett definiálatlan fogalom csúszott be. Fejlett geometriai axiómatika nélkül még *Bolyai* és *Lobacsevkij* sem tudták a mai követelményeket kielégítő módon bizonyítani azt, hogy az euklideszi párhuzamossági axióma nem következménye a többi axiómának. *Bolyai* és *Lobacsevszkij* abban látták ennek bizonyítását, hogy az abszolút trigonometria ellentmondásmentes. De egy trigonometriarendszer még nem teljes geometriai rendszer, hanem ennek csak egy része. *Bolyai* maga ezzel az érveléssel nem elégedett meg, mert jóval az Appendix megjelenése után ebben az irányban még vizsgálatokat folytatott, amint ezt *Stäckel*[1] kiderítette. *Euklidesz* tárgyalásának kritikai vizsgálata a geometriai alapjainak axiómatikus megalapozásához vezetett. E vizsgálatok csak a mult század végén és e század elején nyertek bizonyos értelemben befejezést. Az euklideszi és nemeuklideszi geometriának a mai követelményeknek legjobban megfelelő axiómatikus megalapozását *D. Hilbert*[2] adta. *Hilbert* az euklideszi térgeometria megalapozásánál a pontot, az egyenest és a síkot definiálatlan alapelemekként tekinti. Ezek között relációkat ír elő. A relációk leírásához az „illeszkedni", „összetartozni", „között", „egybevágóság", „folytonosság" kifejezéseket használja. E relációk a geometriának az axiómáit képezik. *Hilbert*nél az euklideszi geometria axiómatikája öt csoportra tagozódik. Ezekből az első és második csoport helyzetgeometriai jellegű, t. i. az első csoport az alapelemek illeszkedésére vonatkozik, míg a második csoport pontoknak az egyenesen való elrendezéséről, valamint a síknak egy egyenessel történő két részre osztásáról szól. A harmadik csoport a tér mozgását az egybevágósági axiómákkal írja le. Negyedik helyen következik az euklideszi párhuzamossági axióma, míg az ötödik csoport a folytonosság két axiómájából áll. *Hilbert*nél a folytonossági axiómák az archimedeszi és egy ú. n. teljességi axiómából tevődnek össze. E tárgykörre vonatkozó legtöbb más tárgyalásnál a teljességi axióma helyett a Cantor-féle axióma szerepel. A Hilbert-féle axióma ettől alapvetően eltér, mert lényegében azt fejezi ki, hogy az adott rendszer más elemekkel nem bővíthető ki úgy, hogy az első három axiómacsoport érvényben maradjon. Az egyes axiómacsoportokra vonatkozólag megjegyezzük, hogy az első két helyzetgeometriai csoportot először *M. Pasch*[3] vezette be és tárgyalta teljes szigorúsággal. A harmadik axiómacsoportnál két álláspont lehetséges: az egyik az, hogy a mozgást definiálatlan alapfogalomként vezetjük be és megfelelő axiómákkal a többi alapfogalmakkal vonatkozásba hozzuk. A másik az, hogy ezt a fogalmat a kongruencia fogalmával helyettesítjük. *Hilbert* ebből az utóbbi álláspontból indult ki. Az első szempontra, amely az euklideszi és nemeuklideszi geometria megalapozásán túl, más geometriai rendszerek jellemzésére is alkalmas, később még visszatérek. *Hilbert* kimutatta, hogy axiómarendszere eleget tesz azoknak a követelményeknek, amelyeket egy szigorúan felépített axiómarendszertől meg kell követelni. T. i. hogy az axiómarendszer ellentmondásmentes, az egyes axiómacsoportok egymástól függetlenek és az axiómarendszer teljes legyen. Az ellentmondásmentességet úgy bizonyítja, hogy a geometriai rendszert aritmetizálja. Az így nyert aritmetikai modell nem egyéb, mint a közönséges Descartes-féle analitikus geometria. Így az axiómarendszer ellentmondásmentes, amennyiben az aritmetika is az. Az egyes csoportok függetlenségének bizonyítására szintén megfelelő aritmetikai modellekből indul ki. Itt elsősorban a párhuzamossági axióma függetlenségét kell említeni, mert ez jelenti a nem-euklideszi geometria létezését. *Hilbert* művében a *Klein*-től[4] származó modellt tárgyalja. E célból az előbb említett Descartes-féle analitikus geometriában egy gömböt kell tekinteni, és a szerkesztendő geometriának pontjai a gömb belsejében fekvő pontok. Egyeneseken és síkokon a közönséges egyeneseknek és síkoknak a gömb belsejébe eső részét értjük. E pontokra, egyenesekre és síkokra az illeszkedési és rendezési axiómákat úgy értelmezhetjük, mint a teljes Descartes-féle analitikus geometriában. Az egybevágósági axiómák azzal teljesíthetők, hogy olyan transzformációkat tekintünk, amelyeknél a gömb önmagába és egyenesek egyenesekbe mennek át. Szakaszok, szögek és háromszögek akkor egybevágóak, ha ezeknél a kollineációknál egymásba mennek át. A szakaszok ilyen egybevágósága mellett az archimedeszi posztulátum is könnyen bevezethető. Végül a Cantor-féle folytonossági axióma, — mivel csupán rendezési axiómákon alapul — feltételeink alapján tehát teljesül. Ezzel olyan modellt nyerünk, amelyben az összes felsorolt axióma teljesül, a párhuzamossági axióma kivételével. Utóbbi nyilvánvalóan nem igaz. Ilyen módon egyúttal a nem-euklideszi geometria lehetősége is ki van mutatva. Különösen figyelemreméltóak a folytonossági axiómákra vonatkozó Hilbert-féle vizsgálatok. Az erre vonatkozó eredmények egyik alapvető következménye az, hogy a projektív geometria folytonossági axiómák nélkül nem alapozható meg. Hogy a folytonossági axiómák közül a teljességi, vagy ha úgy tetszik a Cantor-féle axióma, a többi axiómától független, csupán a Descartes-féle analitikus geometriában pontok és egyenesek koordinátáinak azokat a számokat kell vennünk, amelyeket a racionális számtestből kiindulva, a pozitív elemekre nézve kvadratikus lezárással nyerünk. De az archimedeszi axióma is független a többi axiómától. Ehhez *Hilbert* egy nem-archimedeszi számtestet szerkesztett a következő módon. A t határozatlant a racionális műveleteknek és az $|\sqrt{1+\omega^2}|$ műveletnek vetette alá, ahol ω bármilyen már e műveletek alapján nyert függvényt jelent. A testműveletek a formális számolási műveletek alkalmazásával értelmezhetők. A rendezést a következőképpen állapítja meg: Ha a és b a testnek két eleme, akkor $a > b$, amennyiben $a - b$ elegendő nagy t-re pozitív értékű. A testnek az 1 és t eleme már nem tesz eleget az archimedeszi axiómának. Ha e nem-archimedeszi számtestből kiindulva az analitikus geometriát felépítjük, akkor az első négy axiómacsoport teljesül, a folytonossági axiómacsoport azonban nem. *Hilbert* folytonossági axiómacsoporttal kapcsolatos vizsgálatainak még egy másik vonatkozásban is nagy jelentősége van. Ez arra az előbbi megjegyzésünkre vonatkozik, melyet a projektív geometria megalapozásáról tettünk. E vizsgálatnak lényege a Pappus-féle, vagy másnéven speciális Pascal-féle tétel szerepe a geometria megalapozásában. Megszerkesztett egy nem-kommutatív számrendszert, amelyet a Desargues-féle tétellel való kapcsolata miatt Desargues-féle számrendszernek nevezett. E számrendszer azonkívül, hogy nem-kommutatív, nem folytonos, mert ugyancsak *Hilbert* mutatta ki, hogy egy archimedeszileg elrendezett számrendszer szükségképpen kommutatív. Ezzel a számrendszerrel szerkesztett analitikus geometriában érvényes az első két helyzetgeometriai jellegű axiómacsoport, valamint a párhuzamossági axióma. Érvényes továbbá a Desargues-féle háromszögtétel. E tétel alapján egy szakaszkalkulus vezethető be és ez olyan számrendszert eredményez, amely a kiinduló nem-kommutatív számrendszerrel izomorf. A Desargues-féle tételen alapuló szakaszkalkulusban azonban a szorzás akkor és csak akkor kommutatív, ha a Pappus-tétel érvényes. Az előbb említett izomorfizmus miatt következik tehát, hogy egy geometriában csupán helyzetgeometriai axiómákra — a párhuzamossági axiómát is ideszámítva — folytonossági feltételek nélkül a Pappus-tétel nem érvényes. Ez az eredmény a projektív geometriára alkalmazva azt jelenti, hogy ez csupán helyzetgeometriai axiómákkal nem alapozható meg.

A nem-archimedeszi geometriával kapcsolatosan rá kell mutatni *M. Dehn*[5]-nek azon vizsgálataira, amelyek a párhuzamossági és folytonossági axiómákra vonatkoznak. Kimutatta, hogy van olyan nem-archimedeszi geometria, amelyben az euklideszi geometria összes tételei érvényesek, de egy ponton át egy egyeneshez végtelen sok párhuzamos létezik. Azt is kimutatta, hogy a hiperbolikus geometria párhuzamossági axiómája sem teljesül.

Végül *Hilbert*[6] a kétdimenziós Bolyai—Lobacsevszkij geometriának olyan megalapozását adta, amelyben csak az első három síkra vonatkozó axiómacsoport, valamint a hiperbolikus párhuzamossági axióma szerepel.

Rátérünk most a nem-euklideszi geometriának a projektív geometrián át történő megalapozására. Már előbb említettük a párhuzamossági axióma függetlensége bizonyításául szolgáló Klein-féle modellt. *Hilbert* tárgyalásában ezt a modellt a már teljesen kiépített euklideszi geometriába vezette be. A modell ilyen bevezetése alkalmas volt a párhuzamossági axióma függetlenségének bizonyítására, viszont nem ad módot a nem-euklideszi geometriának az euklideszi geometriától független felépítésére. *Felix Klein* nem az euklideszi, hanem a projektív geometrián át vezeti be e modellt és ilyen formában a Bolyai—Lobacsevszkij geometriának lényegesen új megalapozását adja. *F. Klein* megalapozásában két szempontból indul ki. Az első a Cayley-féle[7] projektív metrikának fogalma, a második a projektív geometriának metrikus fogalmaktól mentes felépítése. Ismeretes, hogy a Cayley-féle projektív metrikához úgy jutunk, hogy a projektív térben egy másodrendű, ú. n. abszolút alakzatot tüntetünk ki. Ha megadunk két A és B pontot, akkor ezek összekötő egyenesének az abszolút alakzattal két P és Q metszéspontja lesz. Hasonlóan húzhatunk az ab szög síkjában a szög csúcspontjából az abszolút alakzathoz p és q érintőket. A tér azon kollineációinál, amelyeknél az abszolút alakzat invariáns, az $(ABPQ)$ és $(abpq)$ kettősviszonyok olyan invariánsok, amelyek csupán a pontpártól, illetve az egyenes pártól függnek. Ha a kettősviszony függvényei közül azokat keressük ki, amelyek a távolságtól kívánt additív tulajdonsággal rendelkeznek, ezeket egy konstans tényezőtől eltekintve a kettősviszony logaritmusa határozza meg. A szögnél e konstans értékeként $\frac{i}{2}$-t vesszük, mert ilyen formában a teljes szögre a 2π értéket kapjuk. *F. Klein*[4] innen a következő úton az euklideszi, a Bolyai—Lobacsevszkij-féle és egy másik, ú. n. elliptikus nem-euklideszi geometriához jutott. Először is a projektív geometriának az euklideszi geometriától független axiómatikus megalapozását vázolta. E tekintetben már *v. Staudt*[8] csupán helyzetgeometriai axiómák alapján a projektív geometriát messzemenően kifejlesztette. A *Staudt*-nál hiányzó folytonossági feltételek *Klein*[9], *J. Lüroth, H. G. Zeuten* és *Darboux*[10] vizsgálataiban zárultak le véglegesen. *Klein* még egy másik alapvető szempontot is vázol, t. i. a projektív geometriának olyan axiómákkal való jellemzését, amelyek csak egy korlátos térrészre vonatkoznak. *Klein* e vázlatos vizsgálatait azonban csak *M. Pasch*[3] oldotta meg kielégítően. Az axiómákban alapelemekként a ponton kívül nem az egyenes és a sík, hanem csak a szakasz és a síkrész szerepelnek és ilyen értelemben az axiómák csak egy korlátos térrészre vonatkoznak. A sugársorok, illetve sugárnyalábok középpontjaival a tér ideális pontokkal bővíthető ki. Ha most a *Hilbert*nél szereplő első, második és ötödik axiómacsoportot a megfelelő Pasch-féle axiómákkal helyettesítjük és ezekhez a megfelelő egybevágósági axiómákat hozzácsatoljuk, akkor az a kollineációs csoport, amelynél két egybevágó alakzat egymásba megy át, azzal van jellemezve, hogy egy bizonyos polárrendszerrel felcserélhető. E polárrendszer koincidencia felülete éppen Cayley-nek abszolút alakzatához vezet. Ezen abszolút alakzatra három típust nyerünk.

Az első eset az, amikor az abszolút alakzat elliptikus felület. Pontokat, egyeneseket és síkokat a Klein modellnél már előbb említett módon a felület belsejére kell korlátozni. Szakaszok távolságánál a Cayley-féle képletben a k konstanst valósnak kell választani. A szögmetrikánál e konstans $\frac{i}{2}$. Ez a geometria azonos a Bolyai—Lobacsevszkij geometriával. Egy egyeneshez egy erre nem illeszkedő pontból a két párhuzamost úgy kapjuk, ha e pontot az egyenesnek az abszolút alakzattal való két metszéspontjával összekötjük.

A második esetben az abszolút alakzat teljesen képzetes. Ennek a geometriának szintere az egész projektív tér. Ebben azonban egy síkban fekvő egyenespárnak mindig van metszéspontja. E geometriában tehát párhuzamosak egyáltalán nem léteznek. Ez az ú. n. elliptikus nem-euklideszi geometria. Ha a Hilbert-féle rendszerben a párhuzamossági axiómától eltekintünk, tehát az ú. n. abszolút geometriát vizsgáljuk, akkor bizonyítható, hogy egy nem az egyenesen fekvő ponton át az egyeneshez legalább egy párhuzamos létezik. Az abszolút geometria tehát csak az euklideszi és a Bolyai—Lobacsevszkij geometriában folytatható. A látszólagos ellentmondás, amelyet az elliptikus geometria jelent, rögtön megszűnik, ha tekintetbe vesszük, hogy az elliptikus sík egyenesei zárt vonalak, mint a projektív síkéi, de az abszolút geometria Hilbert-féle axiómarendszere ezt a lehetőséget éppen kizárja. A Pasch-féle helyzetgeometriai axiómák éppen azért, mert korlátos térrészre vonatkoznak, az egyenesnek nyílt vagy zárt voltára nem jelentenek feltételt, s így alapul szolgálhatnak mind a két fajta geometria megalapozásához. A Cayley-féle távolság képletben a konstanst tiszta képzetesnek kell választanunk, míg a szögképletben a konstans változatlanul $\frac{i}{2}$.

A harmadik esetben az abszolút alakzat egy teljesen képzetes másodrendű görbévé fajul el. A tér pontjaiból, síkjaiból és egyeneseiből az abszolút alakzat síkjához tartozó pontokat ki kell zárni. E térben minden egyeneshez egy rá nem illeszkedő ponton keresztül pontosan egy párhuzamos létezik, mivel az egyenes az alakzat síkját éppen egy pontban metszi. E pontnak az adott ponttal való összekötő egyenese a szóbanforgó párhuzamost adja. A térnek mozgásai azok a kollineációk, amelyeknél az abszolút alakzat és vele együtt az abszolút alakzatnak síkja invariáns marad. Ez a geometria az ú. n. ekviform, vagy parabolikus geometria. A szögmetrika megfelelően értelmezhető, a Cayley-féle képlettel, mint a Bolyai—Lobacsevszkij és az elliptikus geometriában. A szögképletnek ezt a projektív formáját ebben az esetben már *E. Laguerre*[11] is ismerte.

A parabolikus geometriából kiindulva az euklideszi geometriát a következő két feltétellel jellemezhetjük. 1. Két közös ponttal rendelkező szakasz egybevágó, ha egy olyan parallelogramma szomszédos oldalait alkotják, amelyek átlói egymásra merőlegesek. — 2. Két párhuzamos szakasz egybevágó, ha egy parallelogramma szembenfekvő oldalait képezik. 1. és 2. alapján megállapítható két tetszőlegesen fekvő szakasz egybevágósága. A Cayley—Klein-féle projektív felfogásban tehát a két nem-euklideszi geometria és az euklideszi geometria a projektív geometriának alárendelhető s így e felfogással már túljutottunk *Bolyai* koncepcióján.

Továbbmenve látni fogjuk, hogy e projektív felfogásból a geometriának ugyancsak *Klein*től származó csoportelméleti megalapozása következik. Előbb azonban még néhány megjegyzést kell fűznünk az elmondottakhoz.

A *Klein*-féle felfogásban magának a projektív geometriának megalapozása lényeges szerepet játszik. E diszciplinának axiómatikus megalapozásánál a többi axióma közül különösen a folytonossági axiómák ugranak ki. Míg t. i. a helyzetgeometriai axiómák részben szemléletes tényeket fejeznek ki, vagy olyan tételekből állanak, amelyeket akkor is vizsgálat tárgyává kellene tenni, ha nem axiómatikáról lenne szó, — gondoljunk pl. a projektív sík axiómatikus felépítésénél szereplő Desargues-féle háromszögtételre — addig a folytonossági axiómák mesterkéltek és csupán azt a célt szolgálják, hogy a projektív geometriát a szokott analitikus modellel előállíthassuk. A modern fejlődés a következő irányban haladt: Csupán illeszkedési axiómák segítségével, ha pedig a síkra szorítkozunk, a Desargues-tétel axiómaként történő hozzácsatolásával egy pontszámítás vezethető be, amely először valamilyen egyenesnek pontjaira vonatkozik, és ott egy testet indukál. Mivel ilyen módon a különböző egyenesekhez hozzárendelhető testek izomorfok, ezért a projektív geometriához egy test rendelhető hozzá. Kimutatható, hogy a projektív geometria teste tetszőlegesen választható. Ennek alapján a következő testaxióma vezethető be:

A projektív geometriának teste tetszőleges test.

E testaxióma még nem szabályozza a geometria folytonosságát; ezt úgy érjük el, hogyha a következő *folytonossági axiómát* vezetjük be:

A projektív geometriai testnek elemei egy topológikus teret képezzenek, amely összefüggő és lokálisan bikompakt.

Már előbb említettük, hogy a test bevezetése valamilyen egyenesből indul ki s így a folytonossági axióma, mely e testre vonatkozólag feltételt jelent, lényegében csak az egyenes folytonosságának fogalmát fejezi ki topológikusan. Ha feltételezzük, hogy a test kommutatív, vagy ami ugyanaz, hogy a Desargues-féle axióma helyett a Pappus-tételt választjuk axiómaként, akkor a folytonossági axióma alapján *L. S. Pontrjagin*[12] tétele következik:

A projektív geometria teste vagy a valós, vagy a komplex számok teste.

A szovjet geometriai iskolának ezzel az eredményével a projektív geometria kielégítő megalapozást nyert.

A Cayley—Klein-féle projektív felfogáshoz csatlakozik a geometriának két általánosítása, amelyek *Minkowski*tól[13] és *Hilbert*től[14] származnak. A Minkowski-féle geometriához szintén egy abszolút alakzat kitüntetésével jutunk. Vonatkoztassuk az affin-teret egy x^i $(i=1,\ldots,n)$ Descartes-féle koordinátarendszerre. E térben tekintsünk a koordinátarendszer kezdőpontját magábanfoglaló konvex testet. E test határfelülete képezze az abszolút alakzatot. Ha a tér tetszőleges x^i pontját a koordinátarendszer θ kezdőpontjával összekötjük, és meghatározzuk az így nyert sugárnak a felülettel alkotott ξ^i metszéspontját, akkor az 0, x^i és ξ^i pontok osztóviszonyának abszolút értéke konvex testünk $F(x)$ távolságfüggvényét adja. Az abszolút alakzat felületét akkor az $F(x)=1$ egyenlet határozza meg. A távolságfüggvény a következő

1. $F(x) > 0, \quad \text{ha} \quad x^i \neq 0$
2. $F(\mu x) = \mu F(x), \quad \text{ha} \quad \mu > 0$
3. $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$

centroaffinitásokkal szemben invariáns tulajdonságokkal jellemezhető. *Minkowski* két x^i, y^i pont d távolságát a $d(x,y)=F(y-x)$ relációval értelmezi. A távolságfüggvény 1.—3. tulajdonságai alapján következik, hogy az így bevezetett távolság e fogalmaktól kívánt 1. $d(x,y)>0$, ha $x^i \neq y^i$ és 2. $d(x,y)+ + d(y,z) = d(x,z)$ sajátságokkal rendelkezik. *Minkowski* e geometriát számelméleti célokra vezette be és a most felsorolt tulajdonságokat *Golab*[15] és *Hürlen*[16] mutatták ki. Ezekből a tulajdonságokból már következik, hogy ebben a geometriában az egyenesek a legrövidebb vonalak. Ez azonban még a következő módon is bizonyítható: Egy differenciálható $x^i = x^i(t)$ görbének ívére a távolság definíciójából következik az $s=\int_{t_0}^{t_1} F(\dot{x})dt$ paraméterinvariáns kifejezés. Ehhez az integrálhoz tartozó variációs problémának extremálisai azonban az affin térnek közönséges egyenesei. Ilyen értelemben e geometria a projektív geometriával összeférhető. Megjegyezzük, hogy a távolság csak transzlációkkal szemben invariáns s így ezek képezik a Minkowski-féle geometriának mozgásait.

Hilbert geometriájához a legegyszerűbben úgy jutunk, hogyha az előző problémák megfordítását vetjük fel, t. i. a projektív térnek azon összes metrikus geometriáit keressük, amelyekben az egyenesek a legrövidebb vonalak s azonkívül minden egyenes végtelen hosszal rendelkezik. *Hilbert* e problémát a következőképpen oldja meg: Az összes ilyen geometriát úgy kapjuk, ha kitüntetünk egy zárt konvex felületet és a geometria pontjait a konvex test belsejére korlátozzuk, továbbá két A, B pont távolságát a Cayley—Klein-féle $d=c \log (ABXY)$ képlettel határozzuk meg, ahol X, Y ismét az A, B pontokat összekötő egyenesnek a konvex felülettel alkotott metszéspontjai. E távolságfogalom ismét teljesíti a tőle követelt és előbb 1. és 2.-vel jelzett tulajdonságokat, amelyekből következik, hogy az egyenesek a legrövidebb vonalak. *Hilbert* bizonyítása a háromszögegyenlőtlenségre vonatkozóan a következőn alapul: ha az A és B pontokat rögzítve hagyjuk, és a konvex testet úgy módosítjuk, hogy az AB egyenesen az X' közelebb essék A-hoz, mint X, továbbá az Y' közelebb essék B-hez, mint Y, akkor az új abszolút alakzatra vonatkozólag a rögzített AB pontpárnak $\bar{d}$ távolsága nagyobb a d távolságnál. Tekintsünk most egy olyan síkot, amelyben az A, B pontok, valamint egy C pont fekszenek. Az AC és BC oldalak metszik a sík konvex görbéjét az U, V, illetve a Z, T pontokban. Az U, Z és a T, V pontok összekötő egyenesei egy W metszéspontot határoznak meg. Az ABC sík pontjában az eredeti konvex görbe helyett az UTW háromszöget tekintjük új konvex görbének. Az AB egyenes a háromszöget két X', Y' pontban metszi, amelyeknek helyzete AB-re vonatkozólag olyan, ahogyan azt előbb említettük. Az ABC háromszög oldalainak távolságára most már könnyen levezethető az $\overline{\overline{AB}}=\overline{AC}+\overline{CB}$ reláció, amelyben $\overline{\overline{AB}}$ a pontok távolsága az UTV háromszögre vonatkozóan, míg $\overline{AC}$ és $\overline{CB}$ az eredeti görbére vonatkoztatott távolság. Az előbbi megjegyzésből következik a háromszögegyenlőtlenség.

Miként az ekviform geometriát és ennek alapján az euklideszi geometriát egy síkban elfajuló másodrendű görbe határozza meg, hasonlóképpen ebben az esetben is a Minkowski geometria úgy áll elő, ha a konvex felület egy síkban fekvő konvex görbévé fajul el.

Most rátérek a geometriának csoportelméleti megalapozására. Az axiómatikára vonatkozó megjegyzéseimben már rámutattam arra, hogy az egybevágósági axiómák helyett alapfogalomként közvetlenül a mozgást is bevezethetnénk. Az előbb említett Klein-féle felfogásban az euklideszi és nem-euklideszi geometriából ez a szempont világosan kidomborodik. Ugyanis a geometriákat úgy is lehetne jellemezni, hogy a projektív tér kollineációs csoportjának azokat az alcsoportjait tekintjük, amelyeknél a három említett abszolút alakzat invariáns marad. A metrikus alapfogalmak most már e csoportoknak invariánsaiként adódnak és ezzel ezek a geometriák egyértelműen meg vannak határozva. *F. Klein*[17] az ú. n. Erlangeni Programmban a csoportelmélet és a geometria közötti összefüggést világosan kifejtette. Az ő felfogása szerint valamilyen geometriát a legáltalánosabban úgy jellemezhetünk, ha valamilyen sokaságból indulunk ki és egy azon értelmezett transzformációs csoportot tekintünk. A geometria akkor e csoport invariáns elmélete. Lényeges az, hogy *F. Klein* ennek az elvnek fontos következményeire mutatott rá, amelyek lehetővé teszik bizonyos geometriák ekvivalenciájának kimutatását. E következményeket *Klein* átviteli elvnek (Übertragungsprinzip) nevezte. Ennek lényege két észrevételből adódik.

Az adott A sokaságot leképezhetjük egy A' sokaságra. A-val együtt az adott B transzformációs csoport átmegy egy vele hasonló B' csoportba. A két csoport izomorfizmusa miatt ezeknek invariánselmélete azonos s így a két geometria is ekvivalens. Ennek az első szempontnak illusztrálására *F. Klein*-nak egy példáját említjük. Projiciáljunk egy másodrendű felületet sztereográfikusan egy síkra. A felületponton átmegy két alkotó, amely a síkot két pontban metszi. A síknak azok a projektív transzformációi, amelyek e két pontot változatlanul hagyják, megadják a másodrendű felületnek azokat az önmagára való projektív leképezéseit, amelyek a projekciós centrumot változatlanul hagyják. Ha a felület ellipszoid, akkor a síknak most említett két pontja egy képzetes pontpár és ebből következik, hogy a síknak az előbb értelmezett csoportja éppen az elemi geometriát adja. E geometria tehát ekvivalens egy másodrendű felület ama projektív geometriájával, amelynek egy fixpontja van.

A második észrevétel a következő: Az A sokaság pontjaiból egy M alakzatot ragadhatunk ki, pl. a projektív térben egy egyenest. Ez az alakzat függjön N számú paramétertől. Az M alakzatot akkor egy N dimenziójú A' sokaság pontjaként foghatjuk fel. Az alakzatra ható B csoport most az A' sokaságnak transzformációs csoportja lesz s az így keletkezett geometria az M alakzatnak A'-beli geometriájával ekvivalens. E második észrevétel megvilágítására megemlítjük, hogy *Klein* miként tárgyalta a háromméretű projektív tér egyeneseinek geometriáját. A tér egyeneseit hat vonalkoordinátával jellemezhetjük, amelyek egy kvadratikus relációnak tesznek eleget. E hat koordinátát egy hatdimenziós projektív tér pontjaiként foghatjuk fel, amelyek éppen azon a másodrendű hiperfelületen feküsznek, amelyet a kvadratikus reláció jellemez. Igy a háromméretű tér egyeneseinek geometriája ekvivalens a hatméretű projektív tér ama geometriájával, amelynek abszolút alakzata az említett másodrendű hiperfelület.

Az átviteli elvnek fontos következményei voltak a körök és gömbök geometriájára. Kimutatható, hogy a Möbiusz-féle körgeometria ekvivalens a háromdimenziós ponttérnek azzal a metrikus geometriájával, amelynek abszolút alakzata a gömbfelület. A Laguerre-féle körgeometria viszont ekvivalens a háromdimenziós projektív térnek azzal a geometriájával, amelynek az abszolút alakzata a végtelen távoli síkban fekvő ellipszis. A Lie-féle körgeometria egy négydimenziós projektív tér metrikus geometriájával ekvivalens. Az abszolút alakzat nem elfajuló és szignatúrája 1-gyel egyenlő.

A Klein-féle csoportelméleti felfogás az euklideszi és nem-euklideszi geometriák megalapozásához már feltételezi a projektív geometria teljes megalapozását. Azokat a vizsgálatokat, hogy e geometriák az alapulvett sokaságnak egy topológikus jellemzése után csupán csoportelméleti eszközökkel megalapozhatók-e, *H. Helmholtz*[18] kutatásai indították meg. *S. Lie*[19] e vizsgálatokat az általa megalapított csoportelmélettel összefüggésbe hozta és a *Helmholtz* által még nem határozottan körvonalazott fogalmakat szabatosan fejezte ki s így az előbb említett kérdést teljesen meg tudta oldani. E vizsgálatokban szereplő transzformációs csoportok differenciálhatók s ezek a vizsgálatok összefüggésben vannak *Riemann*nak a geometriák differenciálgeometriai eszközökkel történő megalapozásával. Mi tehát a Helmholtz—Lie-féle kutatásokat csak az említett Riemann-féle vizsgálatok tárgyalása után részletezzük.

A problémának differenciálhatósági feltételektől mentes megoldását *D. Hilbert*[20] adta meg. *Hilbert* vizsgálatait csupán a síkgeometriára vonatkozólag végezte. A síkot topológikusan úgy értelmezi, hogy az leképezhető az aritmetikai sík pontjaira. Mozgásokon a síknak olyan önmagára való kölcsönös és egyértelmű leképezését érti, amelyeknél egy Jordan-görbe irányítása változatlanul marad. Valamilyen mozgáshoz tartozó transzformációhoz létezzék az inverze is. Azt a mozgást, amelynél egy M pont rögzítve marad, M pont körüli forgásnak nevezi. E definíciók után a következő három axiómát vezeti be.

I. Két mozgás egymásutáni elvégzése ismét mozgás.

Ezzel azonos:

I. A mozgások csoportot alkotnak.

II. Ha A és M a sík két különböző pontja, akkor az A pont egy M körüli forgásnál végtelen sok pontba megy át.

Hilbert az ilyen forgással nyert ponthalmazt valódi körnek nevezi, mert dolgozatában kimutatja, hogy a valódi kör az aritmetikai síknak egy körével homeomorf. Ennek alapján a II. axióma a következő, vele azonos formában fejezhető ki:

II. Minden valódi kör végtelen sok pontból áll.

III. Ha egy olyan mozgás létezik, amely valamilyen A, B, C ponthármast egy A', B', C' ponthármas tetszőleges szomszédságába visz át, akkor létezik olyan mozgás, amely az A, B, C ponthármast az A', B', C' ponthármasba viszi át.

E három axióma alapján *Hilbert* kimutatta, hogy a szóbanforgó geometria az euklideszi, vagy a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria. Már megjegyeztük, hogy *Hilbert* a valódi kör és az aritmetikai kör homeomorfizmusát mutatta ki, ami lényegében abban áll, hogy egy M pont körüli forgási csoport és a közönséges euklideszi forgási csoportok izomorfok. A valódi egyenes bevezetése a következő lépésekkel történik: Nevezzük az AB pontpárt szakasznak, akkor két szakasz egybevágó, ha egy mozgással egymásba vihetők át. Egy M pont körüli forgást félforgásnak nevezünk, hogyha az kétszer egymásután végezve az azonos mozgáshoz vezet. Ha most már A, B, C három olyan pont, hogy A a B körüli félforgással C-be megy át és ugyanakkor a C az A-ba megy át, akkor B az AC szakasz felezőpontja. Ha az A és B pontokból kiindulva a felezésnek ezt a folyamatát korlátlanul folytatjuk és a keletkező ponthalmaznak sűrűsödési helyeit is hozzácsatoljuk, akkor az A és B pontokat összekötő valódi egyeneshez jutunk. Az AB pontokat összekötő valódi egyenes félforgásokkal és további felezésekkel teljes valódi egyenessé bővíthető ki. *Hilbert* kimutatja, hogy a valódi egyenest két pontja egyértelműen meghatározza. Kimutatja továbbá, hogy a pontra és valódi egyenesre vonatkozó síkbeli illeszkedési, rendezési axiómák igazak. Ha még háromszögeket is tekintünk, akkor a kongruencia axiómák is érvényesek. Mivel a sík topologikusan volt értelmezve, ezért a folytonossági axiómák is teljesülnek. Ami az egyenesek kölcsönös helyzetét illeti, ezekre vonatkozólag vagy az euklideszi, vagy a Bolyai—Lobacsevszkij posztulátum lehetséges. Ezzel ki van mutatva, hogy az adott axiómarendszerrel az euklideszi vagy a Bolyai—Lobacsevszkij geometria jellemezhető.

A most elmondottakban a geometria projektív és csoportelméleti szempontból történő megalapozásának néhány fontosnak látszó mozzanatát ismertettük, amelyekből egyrészt az látható, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria más szempontból hogyan fogható fel, másrészt kitűnik, hogy ezen az alapon hogyan lehet újabb geometriai rendszerekhez eljutni.

A geometriai kutatásoknak egy harmadik új irányzatát *B. Riemann* híres habilitációs előadása: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ [21] jelenti. Ez a tereknek differenciálgeometriai jellemzése.

Klein Erlangeni Programmjának tárgyalásánál már szó volt arról, hogy a geometriai tér bizonyos N-méretű sokaság, amelyen egy transzformációs csoport van értelmezve. Nem emeltük ki ezzel kapcsolatban még azt, hogy a sokaság fogalma szabatos értelmezést kíván. Ennek szükségességét először *Riemann* látta, aki az említett előadásában, amely az Erlangeni Programmot 18 évvel előzte meg, az első lépéseket tette meg a sokaság fogalmának értelmezéséhez. Egy rekurrens eljárással jut el arra, hogy az n-méretű térnek egy pontja rendezett szám n-esekkel jellemezhető, tehát a sokaság az aritmetikai tér bizonyos tartományának homeomorf képe. Megjegyezzük, hogy a dimenziónak a Riemann-féle értelmezéséhez analog értelmezését *H. Poincaré* [22] adta. A *Riemann* által értelmezett geometria két fogalmon alapul.

1. Az n-méretű sokaságon, amelyben a pontnak nevezett elem egy rendezett x^i $(i = 1, \ldots, n)$ szám n-es.

2. A mérés fogalmán, amely szerint megkívánjuk, hogy egy pont környezetében a mérést Pythagoras tétele határozza meg.

A második követelmény részletesebben annyit jelent, hogy az ívelem négyzete a dx^i koordinátadifferenciálokban egy oly pozitív definit kvadratikus forma, amelynek együtthatói a pontkoordináták függvényei. *Riemann* az ívelemből kiindulva egy olyan kifejezést vezetett be, amely a felületelemnek függvénye. E függvényt a tér görbületi mértékének nevezi. Ha a felületelemet a Plücker-féle $(\Delta x)^{ik}$ koordináták határozzák meg, akkor e görbületi mérték olyan hányados, amelynek mind a számlálója, mind a nevezője a $(\Delta x)^{ik}$ koordinátákban kvadratikus forma. A nevezőben álló forma a felületelem négyzetének a mértéke. A számlálóban szereplő kvadratikus formulát úgy kapja, hogy az ívelem négyzetének előállításában a másodrendű tagokon kívül negyedrendűeket is tekintetbe vesz. *Riemann* megállapítja, hogy a térben egy alakzat szabadon mozgatható legyen, és e mozgásnál az alakzat mérési viszonyai ne változzanak, annak szükséges és elegendő feltétele az, hogy a görbületi mérték állandó legyen. Amennyiben ez az állandó negatív, vagy pozitív, éppen a Bolyai—Lobacsevszkij, illetve az elliptikus nem-euklideszi geometriát kapjuk. Ha az állandó zéró, akkor a tér az euklideszi térrel azonos.

Riemann második hipotézisét, mely szerint a tér lokálisan euklideszi, a következőképpen indokolja meg:

Először feltételezi, hogy az n-méretű térben minden vonal minden vonallal mérhető. Ha tehát egy görbét mérni akarunk, azt felbonthatjuk mérhető elemi részekre. Ha egy ilyen elemi részt az x^i és $x^i + dx^i$ pontok határoznak meg, akkor ennek a résznek a hosszát a dx^i vonalelemhez tartozó ds ívelemnek nevezi. A mérték additivitása miatt feltételezi, hogy az ívelem a dx^i-kben elsőfokú homogén függvény, amely nem függ a dx^i vonalelem irányításától. Az ívelemnek további meghatározásához *Riemann* nem-szomszédos pontok távolságát is felhasználja. Ha $\underset{0}{x}^i$ egy rögzített pont és x^i egy változó, de $\underset{0}{x}^i$-től állandó távolságú pont, akkor e pontok távolságát az $F(x, \underset{0}{x})$ függvény határozza meg. E függvény az $\underset{0}{x}^i$ pont környezetében minden x^i-re növekszik, tehát $\underset{0}{x}^i$-ben minimuma van. Feltételezi, hogy e függvény legalább kétszer folytonosan differenciálható. A minimum feltétel miatt a függvény differenciáljában a lineáris tagok eltünnek és a dF a

$$dF = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F(x, \underset{0}{x})}{\partial x^i \partial x^k} dx^i dx^k .$$

alakot veszi fel. De az $\underset{0}{x}^i$ pontból kiinduló dx^i vonalemhez tartozó ívelem négyzete e kifejezéstől csak egy, az $\underset{0}{x^i}$ ponttól függő állandóban különbözhetik. Az ívelem négyzete tehát tényleg a differenciáloknak egy kvadratikus formája. *Riemann*nak ez a megindokolása azonban hézagos, mert hallgatólag fel kell tételeznie, hogy két nem-szomszédos pontnak is van távolsága, ami az általános Riemann-terekben általában nem teljesül. Amikor az általános Riemann-terek között az euklideszi és a két nem-euklideszi geometriát azzal jellemzi, hogy az idomok torzítás nélkül, szabadon mozgathatók, implicite olyan folytonos és tranzitív transzformációs csoport létezését feltételezi, amelynél az ívelemet jellemző kvadratikus differenciálforma invariáns.

Riemann második hipotézisének megindokolása és az euklideszi és a nem-euklideszi geometriák megalapozása teljesen kielégítő módon a már említett *Helmholtz*[18] és Lie-féle[19] vizsgálatoknak köszönhető. E vizsgálatokban mérésről nincsen szó, hanem csak arról, hogy az n-méretű térben, — amely *Riemann* első hipotézise szerint az aritmetikai térnek homeomorf képe — a szabad mozgathatóságot egy G folytonos transzformációs csoporttal értelmezik a következő módon:

Ha P a térnek egy tetszőleges pontja és $M_1, \ldots, M_k, \ldots, M_{n-1}$ e ponton átmenő felületelemek az első dimenziótól az $n-1$ dimenzióig, akkor rögzített P mellett a G-nek transzformációi az M_1-et egy tetszőleges M_1'-be az M_1-en átmenő M_2-t az M_2'-be egy M_k-t, amely az előző $M_1, M_2, \ldots, M_{k-1}$ elemeken megy át egy tetszőleges $M_1, \ldots, M_{k-1}$-en átmenő M_k'-be viszi át. Amennyiben $k=n-1$, az egymásra illeszkedő $M_1, \ldots, M_{n-1}$ felületelemek rendszere csak az azonos transzformációnál marad változatlanul.

Ilyen feltételek mellett *Lie* bizonyította be szigorúan, hogy a tér csupán az euklideszi, vagy a két nem-euklideszi térrel lesz azonos. Ilyen térben azonban az ívelem négyzetét kvadratikus differenciálforma határozza meg, és ehhez az ívelemhez tartozó görbületi mérték állandó.

Tekintsünk most el attól, hogy a térnek szabad mozgathatósága egy G tranzitív csoporttal van biztosítva és tételezzük fel a következőket. Az a vektortér, amely egy pontból kiinduló dx^i vonalelemekből áll, bármilyen P pontban a következő értelemben rendelkezzék szabad mozgathatósággal:

A dx^i-kre hasson egy P_n projektív csoport, amely a P-ből kiinduló $M_1, \ldots, M_{n-1}$ felületelemeket az előbb említett módon transzformálja, nevezetesen az azonos transzformáció az egyetlen, amely egy egymásra illeszkedő $M_1, \ldots, M_{n-1}$ elemrendszert változatlanul hagy.

Ilyen feltétel mellett létezik a dx^i-kben a P_n csoporttal szemben invariáns kvadratikus forma. Ha két vonalelemet akkor tekintünk egybevágónak, amennyiben van a P_n-nek olyan transzformációja, amely a két vonalelemet egymásba viszi át és ha az egybevágó vonalelemek hosszát egyenlőknek tekintjük, akkor az ívelem négyzete éppen *Riemann* második hipotézisét elégíti ki. Ezzel a szintén *S. Lie*től származó megállapítással *Riemann* második hipotézisének mély értelme feltárul.

Ha a térnek a szabad mozgathatóságában kifejezésre jutott homogenitását mint főtulajdonságot tekintjük, akkor úgy látszik, hogy *Riemann* munkája hiábavaló volt, mert végül is csak az euklideszi és nem-euklideszi térnek van jelentősége. *Riemann* azonban másképpen gondolkozott erről. Azt mondja, hogy a térnek a metrikáját olyan belső okok determinálják, amelyek különösen a fizika segítségével magyarázhatók meg. *H. Weyl*[23] *Riemann* e gondolatait úgy interpretálja: „Állítja, hogy a tér egy formátlan háromméretű sokaság és csak a teret kitöltő matéria formálja ezt és határozza meg a metrikáját". *Einstein* relativitás elmélete ezt az állítást fényesen igazolta.

Mostanáig a *Riemann* geometriát egy bizonyos koordinátarendszerben tekintettük. *Riemann* második hipotézisének Lie—Helmholtz-féle elemzése független a koordinátarendszertől. A kvadratikus formának tehát koordinátainvariánsnak kell lennie. Nyilvánvaló azonban, hogy a Riemann geometriában bármilyen geometriai tényt kifejező relációnak függetlennek kell lennie a koordinátarendszertől. Egy ilyen koordinátainvariáns kalkulust *G. C. Ricci*[24] vezetett be. A kalkulus algebrai alapját a tenzoralgebra képezi. A tenzort lényegében bizonyos rendszámú felületelemek határozzák meg és ezeknek rendszáma meghatározza a tenzor rendszámát is. Az analitikus része pedig szintén koordinátainvariáns differenciáloperátorok bevezetéséből áll. Ilyen módon a közönséges és parciális deriváció helyébe egy invariáns, illetve kovariáns deriváció lép. Az első a mennyiségek tenzoriális jellegét nem változtatja meg, míg a második a tenzorok rendszámát egy egységgel növeli. Egy Descartes-féle koordinátarendszerre vonatkoztatott euklideszi térben e derivációk a közönséges deriválási műveletekre redukálódnak. E fogalmak lényegesen áttekinthetőbbé váltak, amikor *Levi—Civita*[25] a Riemann-térben vektoroknak egy görbe mentén való párhuzamos eltolását értelmezte. E párhuzamos eltolás a vektorok hosszát és a vektorok által bezárt szöget változatlanul hagyja. A párhuzamos eltolás segítségével az invariáns differenciált lényegében úgy értelmezhetjük, mint a közönséges derivációt. Amennyiben valamilyen vektort önmagával párhuzamosan egy másodrendű felületelemen fekvő infinitezimális zárt görbén vezetünk körül, a kezdő- és véghelyzet különbségvektora éppen azt a negyedrendű tenzort adja, amely a Riemann-féle görbületi mértéket határozza meg. Ez az ú. n. Riemann—Christoffel-féle görbületi tenzor. Innen adódik a görbületi mérték koordinátainvariáns jellege. Ide kapcsolódik a Riemann geometriának a következő alapvető problémája. Meghatározandó a differenciálinvariánsoknak olyan rendszere, amely szükséges és elegendő a tér jellemzésére. Ilyen rendszer megadása után tehát eldönthető, hogy két Riemann-tér ekvivalens-e, azaz hogy ívelemük koordinátatranszformációval egymásba átvihető-e. Ezt az alapvető problémát *E. B. Christoffel*[26] oldotta meg. Eredménye modern terminológiával kifejezve a következő:

A differenciálinvariánsoknak rendszere az ívelemet meghatározó kvadratikus differenciálformán kívül azokból a formákból áll, amelyeknek együtthatói a görbületi tenzor, illetve a tenzorból kovariáns derivációval nyerhető tenzorok.

Ebből az következik, hogy a görbületi tenzor és a kovariáns deriváció művelete elegendő a tér koordinátainvariáns jellemzéséhez.

Megállapítható, hogy a differenciálgeometria segítségével megalapozható terek, a mi tárgyalásunkban tehát az általános Riemann-terek, nem tartoznak azok közé a geometriák közé, amelyek a Klein-féle csoportelméleti szempont alapján értelmezhetők. Mert ha ez így volna, akkor ez a tér szabad mozgathatóságát vonná maga után és az az előző megállapítások szerint nem az általános Riemann-terekre, hanem csupán az euklideszi és a két nem-euklideszi geometriára vezetne. *J. A. Schouten*tól[27], majd *E. Cartan*tól[28] olyan vizsgálatok indultak ki, amelyeknek célja a Klein-féle csoportelméleti felfogásnak olyan kibővítése, amelybe az újonnan felfedezett geometriák is besorolhatók. E célból *Schouten* a következőképpen járt el:

J. A. Schouten eljárása a következő: Tekintsünk a tér valamely pontjában értelmezett vektor n-élt, és egy tetszőleges, a P pontba visszatérő görbét. Ha az n-élt párhuzamosan eltoljuk e görbe mentén, amig ismét P-be visszatér, akkor a párhuzamos eltolás tulajdonságaiból következik, hogy ezt az n-élt az eredeti n-élbe a forgáscsoportnak egy transzformációjával átvihetjük. Ha most a P ponton áthaladó összes zárt görbét tekintjük, akkor kimutatható, hogy a hozzátartozó forgások a forgási csoportnak egy G alcsoportját képezik. E G csoport izomorfizmusoktól eltekintve független a választott n-éltől. Kimutatható továbbá, hogy ezzel az eljárással a tér minden pontjához hozzárendelhető összes csoport egymással izomorf, tehát ugyanazt az absztrakt csoportot jelenti.

A térnek valamely pontjában értelmezett vektor n-élt a tér lokális euklideszi volta miatt mindig lokális euklideszinek tekinthetjük. *E. Cartan* az előbb említett zárt görbét a pontjaiban értelmezett lokális euklideszi terekkel együtt izometrikusan képezi le az n-méretű euklideszi térre. E leképezésnél a zárt görbéből nyílt görbét kapunk, és P-nek mint kezdő- és végpontnak két képpontja lesz. A P pontban nyert két n-él képei egy transzlációval és egy forgással fedésbe hozhatók. Ha ezt az eljárást a P-hez tartozó összes zárt görbékre elvégezzük, akkor a most említett transzformációk a mozgási csoportnak olyan M alcsoportját határozzák meg, amely független a P ponttól, és homogén része azonos a G csoporttal. Ez az M csoport a Riemann-féle tér ú. n. holonómia-csoportja. Egyes szerzők már a G csoportot is így nevezik.

E csoport még a következő alapvető tulajdonsággal is rendelkezik. Tekintsünk két P és Q pontot, és az ezekhez tartozó lokálisan euklideszi tereket, és e két pontot összekötő valamilyen görbét. Ha ξ^i egy vektor P-ben, akkor ezt a P-nek lokális terében pontként foghatjuk fel. Hogyha a Q-hoz tartozó lokális térben ehhez a ponthoz azt a pontot rendeljük hozzá, amely a ξ^i vektornak Q-ba való párhuzamos eltolásával áll elő, akkor e két lokális tér között egy kongruens leképezést nyerünk, Az összes bármilyen lokális terek között előálló kongruens leképezések éppen az M csoportot határozzák meg.

Az *M* holonómia-csoport a Riemann-teret a következő értelemben határozza meg:

Ha az euklideszi térnek egy *M* alcsoportjából indulunk ki, akkor kimutatható, hogy az mindig egy Riemann-térnek holonómia-csoportjaként tekinthető és a Riemann-teret ez jellemzi is. Az erre vonatkozó vizsgálatokat, amelyek egyúttal a Riemann-tér megszerkesztésére vezetnek, *G. Laptyev*[29] kielégítő módon fejezte be. *Laptyev* adott Lie-féle csoportból kiindulva a Riemann-térnél általánosabb típusú tereket is szerkesztett. E terek szerkesztésénél lényeges szempont a csoportnak a Lie-féle operátorok segítségével történő előállítása. Ezeknek lineáris kombinációval a csoportnak bármilyen infinitezimális transzformációja meghatározható. A Riemann-féle tér esetén a szerkesztésnél egy *n*-méretű sokaságból indulunk ki és ennek elemeit lokális euklideszi tereknek tekintjük. Két tetszőleges szomszédos lokális térnek kongruens leképezését az adott csoport infinitezimális transzformációja határozza meg. Ez azonban a párhuzamos eltolást is meghatározza. A metrikának, amely a lokális terek euklideszi volta miatt amúgy is lokálisan euklideszi, olyannak kell lennie, hogy e metrikából levezethető párhuzamos eltolás az előbb nyert párhuzamos eltolással megegyezzék. E lépéseknek tényleges kivitele csupán parciális differenciálegyenletek megoldását kívánja.

A Riemann-geometriának két főproblémáját vizsgáltuk meg. Az ekvivalencia-problémát, valamint a geometria alárendelését csoportelméleti szempontoknak a holonómia-csoport segítségével. A térnek kizárólagos alapeleme a pont volt. A Riemann-geometriában azonban az egyeneseknek is van közvetlen analogonja, t. i. a metrika által meghatározott geodetikus vonalak. E vonalak fontos szerepét még a Riemann-geometria most vázolt kifejlesztése előtt *Beltrami* vette észre. *Beltrami* ezeknek a vonalaknak segítségével a két nemeuklideszi geometriának és az állandó görbületű tereknek azonosságát mutatta ki. *Beltrami*[30] olyan Riemann-terek egymásra való leképezését tanulmányozta, amelyeknél geodetikus vonalak geodetikus vonalakba mennek át. Nevezetesen azt az esetet vizsgálta meg, amikor az adott tér olyan térre képezhető le, amelynek geodetikus vonalai lineáris egyenletekkel állíthatók elő. Ez azt jelenti, hogy az adott tér leképezhető az euklideszi térre. *Beltrami* arra az eredményre jutott, hogy ilyen leképezés akkor és csak akkor lehetséges, ha az adott tér állandó görbületű. A nem-euklideszi geometriával való összefüggést két dolgozatban tárgyalta; az egyik a kétdimenziós esetre vonatkozik[31], — a másik tetszőleges dimenzióra[32]. E dolgozatokban kimutatja, hogy amennyiben a görbület egy negatív állandó, akkor a fentemlített leképezésnél a térnek pontjai egy hipergömb belsejébe esnek. A geodetikus vonalak tehát a hipergömb húrjai lesznek. A kép különböző dimenziójú síkjainak az eredeti térben totálgeodetikus sokaságok felelnek meg. Ha most a hipergömböt abszolút alakzatnak tekintjük, akkor az ennek segítségével képezett Cayley-féle metrikában az ívelem pontosan megegyezik az eredeti tér ívelemével. Ebből következik, hogy e tér geometriája a Bolyai—Lobacsevszkij-geometriával azonos. Pozitív görbület esetén a tér az egész euklideszi térre képezhető le. Ha abszolút alakzatnak egy nem-elfajuló teljesen képzetes másodrendű felületet veszünk, akkor a hozzátartozó Cayley-féle metrikának íveleme megegyezik az eredeti tér ívelemével. A geometria tehát az elliptikus geometriával azonos.

Az előzőkből következik, hogy az állandó görbületű terekben totálgeodetikus felületek a második dimenziótól egészen az $(n-1)$-edik dimenzióig léteznek és ezeknek képei az euklideszi képtérben megfelelő dimenziójú közönséges síkok. Állandó görbületű terekben tehát minden pontban, minden irányban léteznek totálgeodetikus sokaságok. *F. Schur*[33] kimutatta, hogy ha a Riemann-tér két pontján át bármilyen irányban fektethetők totálgeodetikus felületek, akkor ez a tér bármilyen pontjára nézve is lehetséges és a tér állandó görbületű. *Beltrami* gondolatára visszatérve ki kell emelnünk, hogy ő lényegében csak a geodetikus vonalakat és ezeknek leképezéseit használta fel. Ez a gondolat olyan geometriáknak a kialakulásához vezetett, amelyeknek elemei a ponton kívül másodrendű differenciálegyenletekkel meghatározott pályagörbék. E pályagörbe-geometriának alapjait *H. Weyl*[34], *L. P. Eisenhart*[35], *O. Veblen*[36] és *T. Y. Thomas*[37] fektették le. Ahogy a Riemann-geometria az euklideszi geometriának általánosításaként tekinthető, úgy a pályagörbék geometriája a projektív geometriának általánosítása. Ez ugyanis egy tiszta helyzetgeometria, amelynek tárgya olyan tulajdonságok kivizsgálása, amelyek a pályatartó leképezéseknél változatlanok maradnak. Ebben az összefüggésben *B. Kagan*nak[38] szubprojektív terekre vonatkozó vizsgálatait kell említenünk. *Kagan* olyan pályageometriát vizsgált meg, amelyben a pályagörbe egy megfelelő koordinátarendszerben egy közönséges kétdimenziós síkban fekszik. Feltételezi továbbá, hogy az összes pályagörbéhez tartozó ilyen sík a tér egy rögzített pontján megy át. Azok a koordinátarendszerek, amelyekben ez a tulajdonság változatlan marad, éppen a szubprojektív térnek csoportját alkotják.

A nem-metrikus pályageometria és a Riemann-geometria közé még olyan geometria sorolható be, amely a Riemann-geometriának *H. Weyl*-től[39] származó affin általánosítása. Ezt a geometriát az jellemzi, hogy az n-méretű tér lokális vektorterei között egy, a lokális tereket összekötő görbéktől is függő affin leképezés van értelmezve. Az affinösszefüggést bizonyos Γ^i_k paraméterek határozzák meg. Ezeket az tünteti ki, hogy koordinátatranszformációkkal szemben bizonyos transzformációs törvénynek tesznek eleget.

Amennyiben egy n-méretű sokaság valamilyen pontjához tartozó vektortértől nem követeljük a szabad mozgathatóságot, akkor az ívelem négyzetét már nem a koordinátadifferenciálokban kvadratikus forma határozza meg. Erre az esetre már *Riemann* is rámutatott habilitációs előadásában, de az így keletkező metrikus geometriát csak *P. Finsler*[40] építette ki disszertációjában. A ds ívelemet most egy $F(x, dx)$ függvény adja meg, amely a dx^i-kben elsőfokú pozitív homogén. E geometria egyeneseit most az $\int F(x, \dot{x})\,dt$ variációs problémához tartozó extremálisok képezik, ezek tehát a térnek pályagörbéi. A tér most csupán egy rögzített irány környezetében mozgatható szabadon. Ez annyit jelent, hogy most nem egy ponthoz, hanem egy vonalelemhez tartozik egy lokális euklideszi tér. Célszerű tehát a teret nem pont-, hanem vonalelemsokaságként felfogni.

E geometriának koordinátainvariáns kalkulusát *L. Berwald*[41] dolgozta ki először. *Berwald* azonban még nem tekintette a teret vonalelemsokaságként s így az általa bevezetett invariáns derivációhoz tartozó párhuzamos eltolásnál a vektorok hossza nem marad változatlanul. Pedig e tulajdonság a Riemann-térben a Levi—Civita-féle párhuzamos eltolásnak éppen egyik főtulajdonsága.

E. Cartan[42] a sokaságot már vonalelemsokaságként tekinti s így sikerült neki 1934-ben a megfelelő invariánskalkulust bevezetnie. Ha most nem zárt görbét, hanem egy vonalelemsokaságot tekintünk, amelynél a kezdő és végső vonalelem megegyezik, akkor a vektorok párhuzamos körülvezetésével három görbületi tenzorhoz jutunk. Ezek közül az egyik speciálisan a Riemann-geometria esetével a Riemann—Christoffel-féle görbületi tenzorra redukálódik, míg a másik két tenzor eltűnik. E tenzor segítségével *Berwald*[41] a Riemann-féle görbületi mértéket a Finsler-térre általánosította. E tenzor egyébként egy egyszerűbb tenzorral, az ú. n. főgörbületi tenzorral helyettesíthető, amelyet *Varga Ottó*[43] vezetett be. Ismeretes, hogy a Riemann-tér esetében valamilyen felületelemhez tartozó görbületi mérték megegyezik annak a felületnek Gauss-féle görbületével, amelyet azok a geodetikus vonalak határoznak meg, amelyek a felületelem kezdőpontján mennek át és ezt érintik. Ilyen felületet a felületelem kezdőpontjában geodetikusnak nevezünk. *Varga Ottó*[44] kimutatta, hogy a Finsler-féle tér egy felületeleméhez és annak egy bizonyos irányához tartozó Berwald-féle görbület megegyezik az ugyancsak a felületelem kezdőpontjában meghatározható geodetikus felületnek az adott irányhoz tartozó, *Finsler*től származó belső görbületével. E Finsler-féle belső görbület olyan felületeknél, amelyeknek metrikáját egy kvadratikus forma határozza meg, a Gauss-féle görbületre redukálódik. A Finsler-geometriának differenciálinvariánsok egy rendszerével történő jellemzését, — ami ismét a tér ekvivalenciaproblémájával azonos —, *Varga Ottó*[43] oldotta meg. Arra az eredményre jutott, hogy a metrikát meghatározó $F(x, dx)$ függvényhez tartozó alaptenzor a főgörbületű tenzor, valamint két más, a Riemann-tértől való eltérést jellemző tenzor és ezeknek kovariáns derivációi egy teljes invariáns rendszert adnak.

Ebben az esetben is a *Beltrami* vizsgálatoknak megfelelően felvethetjük azt a kérdést, milyen Finsler-terek képezhetők le egymásra úgy, hogy pályagörbéik egymásba menjenek át. E leképezéseket *L. Berwald*[45] tanulmányozta először. Szempontunkból itt is az az eset érdekes, amikor az adott tér olyan térre képezhető le, amelynek pályagörbéi lineáris egyenletekkel határozhatók meg. Az ilyen tereket röviden síkprojektívnak nevezzük. Ebben az esetben azonban nem következik, hogy a térnek Berwald-féle görbületi mértéke állandó. Amennyiben még azt is megköveteljük, hogy a tér görbülete egy negatív állandó legyen, és egy görbének a hossza független legyen az irányitásától, azaz $F(x, \dot{x}) = F(x, -\dot{x})$ akkor az így nyert terek pontosan megegyeznek — az előadásom elején említett — Hilbert terekkel, amelyeknek abszolút alakzata egy konvex felület. Amennyiben az állandó zéró, a Minkowszki-geometriát kapjuk. Míg azonban a Finsler-terek között a Hilbert-terek az előbb említett három tulajdonsággal jellemezhetők: t. i. 1. a tér síkprojektív, 2. állandó görbületű, 3. teljesül az $F(x, \dot{x}) = F(x, -\dot{x})$ reláció, addig a Minkowszki-geometriára ez nem érvényes, ugyanis léteznek olyan Minkowszki-geometriák amelyekre az $F(x, \dot{x}) = F(x, -\dot{x})$ nem teljesül. A Hilbert- és Minkowszki-féle tereknek, mint speciális Finsler-tereknek e jellemzése *P. Funk*tól[46] és *L. Berwald*tól[47] származik. *E. Cartan*[42] és *Varga Ottó*[48] kimutatták, hogy a Minkowszki-féle geometria mint speciális Finsler geometria, az utóbbi két tenzorának eltűnésével jellemezhető.

Végigtekintettünk a geometria, s különösképpen a differenciálgeometria újabbkori hatalmas fejlődésén. Hangsúlyoznunk kell, hogy e hatalmas fejlődést *Bolyai* és *Lobacsevszkij* zseniális alkotása inditotta el.

IRODALOM

1 *P. Stäckel:* „Untersuchungen aus der absoluten Geometrie aus Johann Bolyai's Nachlass." Természettudományi Értesítő *13* (1902).

2 *D. Hilbert:* „Grundlagen der Geometrie" 7. kiadás. Berlin, 1930.

3 *M. Pasch:* „Vorlesungen über neuere Geometrie" 2. kiadás. *Dehn*nel közösen. Berlin 1934.

4 *F. Klein:* „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie." Előzetes jelentés. Nachrichten der kgl. Ges. der Wiss. Göttingen *17,* 1871. E dolgozat részletezése és továbbfejlesztése ugyanazon cím alatt két cikkben a Math. Ann. *4,* 1871., Math. Ann. *6,* 1873., vagy Gesammelte Mathematische Abh. 1.

5 *M. Dehn:* „Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck". Math. Ann. *53,* 1900.

6 *D. Hilbert* „ Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie" Math. Ann. *57,* 1903. és Grundlagen der Geometrie Anh. III.

7 *A. Cayley:* „Six Memoir upon Quantics." Lond. Trans. *149,* 1859., vagy Coll. Math. papers 2. — „A memoir on abstract geometry. Lond. Trans. *160,* 1870., vagy Coll. math. papers 6.

8 *Chr. von Staudt:* „Beiträge zur Geometrie der Lage". Nürnberg, 1849.

9 *F. Klein:* „Nachtrag zu dem zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie". Math. Ann. 7, 1874., vagy Gesammelte Abh. *1.* E dolgozatban *Zeuten* és *Lüroth* észrevételei is le vannak közölve.

10 *E. Darboux:* „Sur les théorèm fondamental de la géometrie projective" Math. Ann. *17,* 1880.

11 *E. Laguerre:* „Notes sur la théorie des foyers." Nouv. Ann. *12,* 1853. p 64, vagy Oeuvres 2.

12 *L. S. Pontrjagin:* „Über stetige algebraische Körper". Annals of Math. *33,* 1932.

13 *H. Minkowski:* „Geometrie der Zahlen" Leipzig, 1896.

[14] *D. Hilbert:* „Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.“ Math. Ann. *46,* 1895. vagy Grundlagen der Geometrie, Anh. 1.

[15] *St. Golab:* „Quelques problèmes métriques de la géométrie de Minkowski“ Trav. Acad. Mines Cracovie *6,* 1932.

[16] *St. Golab* und *H. Härlen:* „Minkowskische Geometrie I—II.“ Mh. Math. und Phys. *38,* 1931.

[17] *F. Klein:* „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“. Erlangen 1872. és Math. Ann. *43,* 1893.

[18] *H. Helmholtz:* „Über die Tatsachen die der Geometrie zu Grunde liegen.“ Medizinischer Verein zu Heidelberg *4,* 1866., vagy Wissenschaftl. Abt. *2,* és Göttinger Nachrichten 1868.

[19] *S. Lie—F. Engel:* „Theorie der Transformationsgruppen III.“ 5. fejezet, Leipzig, 1893.

[20] *D. Hilbert:* „Über die Grundlagen der Geometrie.“ Math. Ann. *56,* 1902. vagy Grudlagen der Geometrie, Anh. IV.

[21] *B. Riemann:* „Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.“ Habilitációs értekezés 1854. Göttinger Abh. *13,* 1863.

[22] *H. Poincaré:* „Revue de métaphysique et de morale“, 1918. 486.

[23] *H. Weyl:* „Raum-Zeit-Materie“. 5. kiadás Berlin 1923.

[24] *G. C. Ricci:* „Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale.“ Rend. Acad. Lincei 1887.

[25] *Levi—Civita:* „Nozione di parallelismo in una varietá qualunque.“ Rend. Circ. Mat Palermo *42,* 1917.

[26] *E. B. Christoffel:* „Über die Transformatíon der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.“ Crelle's Journal *70,* 1869., vagy Gesammelte Math. Abh. 1.

[27] *J. A. Schouten:* „On the number of degrees of freedom of the geodetically moving systems“. Proc. Kon. Acad. Wet. Amsterdam *21,* 1918.

[28] *E. Cartan:* „Les groupes des espaces généralisées.“ Acta Math. *18,* 1926.

[29] *G. Laptyev:* Dokladü Akad. Nauk. *71,* no. 4, 597—600, 1950.

[30] *E. Beltrami:* „Sulla Flessione delle Superficia Rigate.“ Annali di Matematica *7,* 1866

[31] *E. Beltrami:* „Saggio di interpretazione della geometria non-euklidea“ Giornale di Matematiche, 1868.

[32] *E. Beltrami:* „Theoria fondamentale deglo spazie di curvature costante“ Annali di Matematica, Ser. II. 2, 1868/69.

[33] *F. Schur:* „Über den Zusammenhang der Räume constanten Riemannschen Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen“. Math. Ann. 27, 1886.

[34] *H. Weyl:* „Einordnung der projektiven und konformen Auffassung.“ Göttinger Nachr. 1921.

[35] *L. P. Eisenhart:* „Spaces with corresponding paths.“ Proc. N. A. S. *8,* 1922.

[36] *O. Veblen:* „Projective and affine geometry of paths.“ Proc. N. A. S. *8,* 1922.

[37] *O. Veblen* and *T. Y. Thomas:* „The geometry of paths.“ Trans. Amer. Math. Soc. *25,* 1923.

[38] *B. Kagan:* „Sur les espaces soubprojectifs“ C. R. Acad. Sci. Paris *191,* 1930; „Über eine Erweiterung von projektiven Raum und dem zugehörigen Absolut.“ Trudi szeminara po vektorn. i tenzorn. analizu. Moszkva 1, 1933.

[39] *H. Weyl:* „Reine Infinitesimalgeometrie.“ Math. Z. *2,* 1918.

[40] *P. Finsler:* „Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen.“ Disszertáció, Göttingen 1918. és Basel 1951.

[41] *L. Berwald:* „Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung.“ Jahresb. der Deutschen Math. Ver *34,* 1925; „Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus.“ Math. Z. *25,* 1926.

[42] *E. Cartan:* „Les espaces de *Finsler.*" Actualités scientifiques et industrielles *79*, Paris 1934.

[43] *O. Varga:* „Über affinzusammenhängende Räume von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz." Publ. Math. *1*, Debrecen, 1949.

[44] *O. Varga:* „Über das Krümmungsmass in Finslerschen Räumen." Publ. Math. *1*, Debrecen, 1949.

[45] *L. Berwald:* „Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV." Annals. of Math. *48*, 1947.

[46] *P. Funk:* „Über Geometrien bei denen die Geraden die Kürzesten sind." Math. Ann. *101*, 1929.

[47] *L. Berwald:* „Über die *n*-dimensionalen Geometrie konstanter Krümmung, in denen die Geraden die kürzesten sind." Math. Z. *30*, 1929.

[48] *O. Varga:* „Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie." Acta Sci. Szeged *10*, 1943.

A TÉR FOGALMÁRÓL A TOPOLÓGIÁBAN

P. SZ. ALEKSZANDROV

Előadta az ünnepi ülésszak 1952 december 15-én tartott ülésén

A nem-euklideszi geometria megalkotásának egyik alapvető következménye annak a ténynek a felismerése volt, hogy az euklideszi geometria rendszere nem az egyetlen elgondolható geometriai rendszer. Ilymódon felmerült a geometriai idomok különböző, ezeket vagy amazokat az axiómákat kielégítő, rendszerei tanulmányozásának problémája. A geometriai idomok különböző ilyen rendszerei („sokaságok"* vagy „absztrakt terek") alkotják a különféle geometriai ismeretágak (a különféle „geometriák") tanulmányainak tárgyát.

Bennünket a jelen referátumban azok az axiómatikusan bevezetett geometriai relációk érdekelnek, amelyeket topológiaiaknak neveznek és amelyek tanulmányozásával a topológia foglalkozik.

A határérték és a folytonosság alapvető topológiai fogalmai axiómatikus tanulmányozásának utjára elsőkként *Maurice Frèchet*, francia matematikus és *Riesz Frigyes*, a kiváló magyar matematikus léptek, kb. ugyanabban az időben, 1906 körül. *Frèchet* értekezésében olyan, manapság a matematikában már biztos helyet elfoglaló fogalmakat vezetett be, mint amilyenek a metrikus tér, a kompaktság és a teljesség fogalmai; ezenkívül *Frèchet* értekezése számos kísérletet tartalmaz arra nézve, hogy eljussunk a topológiai tér fogalmához, azaz, hogy axiómatikus útat találjunk az alapvető topológiai relációkhoz (a halmaz határpontja, a leképezés folytonossága) *közvetlen úton,* elkerülve a távolság fogalmát. Azonban ebben a tekintetben *Frèchet* nem aratott sikert: a topológiai tér fogalma számos, általa javaslatba hozott változata közül egyik sem tekinthető sikerültnek. Másrészt kb. ugyanebben az időben *Riesz F.* megformulázza a topológiai tér axiómáit, közvetlenül axiómatizálva a határpont fogalmát és ilymódon eljut a topológiai terek azon osztályához, amely a T_1-*terek* osztálya elnevezés alatt a mai topológiában teljesen végleges helyet foglalt el.

Így tehát a *topológiai* tér fogalma első sikeres bevezetéséért a tudomány *Riesz F.*-nek tartozik hálával. Emellett igen nevezetes dolog, hogy *Riesz F.* ugyanekkor a topológiai tér direkt axiómatikáját is javaslatba hozta, azaz egy oly axiómatikát, amely közvetlenül érinti a topológiailag invariáns relációkat (az adott esetben a halmaz és a halmaz határpontjai halmaza közötti relációkat) és amely nem használ fel semilyen segédapparátust (mint amilyen pl. a környezetek rendszerének fogalma). Erre az utóbbi fogalomra építette fel a topológiai terek axiómatikáját 1914-ben *Hausdorff* az ő híres, a halmaz-

* Oroszul: Многообразия, németül: Manningfaltigkeiten. (Lektor megjegyzése.)

elméletről szóló könyvében. *Hausdorff* axiómatikája definiálja a Hausdorff-féle vagy T_2-terek elnevezése alatt ismert tereket. Ez az osztály szűkebb, mint a *Riesz* által bevezetett T_1-terek osztálya és közöttük megkülönböztetést tehetünk az erősebb, ú. n. Hausdorff-féle szeparációs axióma segítségével.

Jelenleg a topológiai tereknek a szeparációs axiómák szerinti osztályozása már teljesen meg van határozva és alakja a következő: a szó széles értelmében vett topológiai tér fogalma nem tételez fel semilyen szeparációs axiómát: topológiai tér alatt a tetszőleges természetű (a tér pontjainak nevezett) oly elemek halmazát értjük, melyben bizonyos, az illető tér nyílt halmazainak nevezett részhalmazok ki vannak emelve; emellett teljesültnek tételezzük fel a topológiai tér következő axiómáit:

A nyílt halmazok bármely számának összege és véges számú nyílt halmaz metszete, nyílt halmaz; az egész tér és az üres halmaz nyíltak.

A zárt halmazokat úgy határozzuk meg, mint a nyílt halmazok kiegészítéseit. Nyilvánvaló, hogy a zárt halmazok kielégítik a következő feltételeket: a zárt halmazok bármely számának metszete és véges számú zárt halmaz összege, zártak; az egész tér és az üres halmaz, zárt halmazok. Ebből folyik, hogy az R tér valamennyi, az M halmazt tartalmazó, zárt halmazának metszete $[M]$, a legkisebb zárt halmaz, amely az M halmazt magában foglalja; az $[M]$ halmazt az M halmaz *zárt burkának* nevezzük, annak pontjait pedig *érintési pontoknak.*

A lezárás művelete, amely kölcsönös megfelelőségbe hozza minden M halmazzal az M zárt burkát, kielégíti a következő feltételeket:

1. $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$
2. $M \subseteq [M]$
3. $[[M]] = [M]$
4. Az üres halmaz zárt burka üres: $[\Lambda] = \Lambda$.

Lehetséges volna a topológiai teret úgy definiálni, hogy azt követeljük, hogy valamely adott R halmaz minden M részhalmaza részére meg legyen határozva egy $[M]$ zárt burok olyképpen, hogy emellett teljesülnek az 1—4-feltételek; ezután a zárt halmazok úgy volnának meghatározva, mint oly halmazok, amelyek saját zárt burkukkal egybeesnek, a nyílt halmazok pedig mint olyan halmazok, amelyek a zárt halmazokat kiegészítik. Az ilyen módon definiált topológiai terek pontosan ugyanazok, mint amelyeket kezdetben a nyílt halmazok útján definiáltunk. A topológiai tér fogalma bevezetésének ez a módja *Kuratowsky*tól ered (1922), aki ilymódon a topológikus tér mai *legszélesebb* fogalmának szerzője.

A topológiai terek osztályának fokozatos csökkentését a szeparabilitás folytonosan erősödő axiómáinak bevezetése útján valósítjuk meg. Nevezzük valamely adott halmaz (valamely adott pont) környezetének az oly tetszőleges nyílt halmazt, amely ezt a halmazt (ezt a pontot) magában foglalja. A szeparabilitás egymásután következő axiómái a következő módon formulázhatók meg:

T_0 *axióma (Kolmogorov).* A térnek bármely két különböző pontja közül legalább az egyiknek van egy oly környezete, amely a másik pontot nem foglalja magában.

T_1 *axióma (Riesz).* A tér bármely tetszőleges két különböző pontja közül mindegyiknek van egy oly környezete, amely nem foglalja magában a másik pontot.

T_2 *axióma (Hausdorff).* A tér bármely két különböző pontjának vannak egymást nem metsző környezetei.

T_3 *axióma.* Bármilyen legyen is az x pont és az e pontot nem tartalmazó Φ zárt halmaz, az x pontnak és a Φ halmaznak vannak egymást nem metsző környezetei.

T_4 *axióma.* Bármely két egymást nem metsző zárt halmaznak vannak egymást nem metsző környezetei.

Riesz T_1 axiómája ekvivalens azzal a követeléssel, hogy bármely egy pontból álló halmaz zárt legyen. Ennek folytán a zárt halmazok (környezetek útján történő) szeparabilitásából nem következik a pontok szeparabilitása. Hogy az egész rendszert ne tegyük túlságosan bonyolulttá, T_1-tereknek, vagy Riesz-féle tereknek azokat a topológiai tereket fogjuk nevezni, amelyek a T_1 axiómát kielégítik, míg azokat a T_1-tereket, amelyek a T_3, ill. T_4 axiómákat elégítik ki, T_3-, ill. T_4-tereknek fogjuk nevezni.

A T_3-tereket, másszóval *reguláris*, a T_4-tereket pedig *normális* tereknek nevezik.

A környezetek útján való szeparabilitás mellett, amely a topológiai terek imént elvégzett osztályozásának alapjául szolgált, van még egy másik a szeparabilitáshoz vezető út is, nevezetesen az ú. n. *funkcionális szeparabilitás.* Azt fogjuk mondani, hogy valamely adott R T_1-térnek két Φ_0 és Φ_1 zárt halmaza funkcionálisan szeparálható, ha létezik egy oly, az egész R térben értelmezett és abban folytonos f* valós függvény, amely a Φ_0 halmaz valamennyi pontjában a 0 értéket, a Φ_1 halmaz valamennyi pontjában az 1 értéket veszi fel és valamennyi $x \in R$ pontban kielégíti az $0 \leqq f(x) \leqq 1$ egyenlőtlenséget.

P. Sz. Urysohn bebizonyította azt, az Urysohn-féle lemma néven ismeretes, nevezetes tételt, mely abból áll, hogy normális térben bármely két egymást nem metsző zárt halmaz funkcionálisan szeparálható. Minthogy másrészt nyilvánvaló, hogy bármely két funkcionálisan szeparálható halmaz környezetek útján is szeparálható, ennélfogva Urysohn lemmája értelmében a funkcionális szeparáció követelése a szóbanforgó tér valamennyi egymást nem metsző zárt halmazpárjára alkalmazva, ekvivalens a környezetek útján való szokásos szeparáció követelésével. Azonban ha csak azt követeljük, hogy a T_1-tér min-

* Az X topológiai tér f leképezését az Y topológiai térre folytonosnak nevezzük, ha minden az Y-ban nyilt halmaz teljes inverz képe az X-ben nyílt halmaz; az X-térben értelmezett valós folytonos függvény e térnek folytonos leképezése a számegyenesre.

den pontja, minden ezt a pontot nem tartalmazó zárt halmaztól legyen funkcionálisan szeparálható, úgy a terek új, rendkívül fontos osztályát kapjuk, amely szűkebb, mint a reguláris terek osztálya és szélesebb mint a normális terek osztálya. A tereknek ezt az osztályát *A. N. Tyihonov* vezette be 1925-ben, a teljesen reguláris terek osztálya elnevezés alatt. Ezeket a tereket T_ϱ-tereknek, vagy Tyihonov-féle tereknek is nevezik. A Tyihonov-féle terek jelentősége különösen a bikompakt terek elméletével kapcsolatosan válik világossá, amelyre még rátérünk; ez a jelentőség azzal kapcsolatos, hogy a tér teljes regularitásának sajátsága (eltérően a normalitás sajátságától), úgy szólván örökölhető sajátság, azaz, ha valamely tér ezzel a sajátsággal bír, úgy minden az illető térben fekvő halmaz is bír ezzel a sajátsággal.*

A topológikus tér fogalmának egy további specializálása két egymástól teljesen különböző irányban megy végbe: ezek közül az első abból a követelésből áll, hogy a térben megszámlálható bázis álljon fenn.**

Ez a követelés *P. Sz. Urysohn* alapvető tétele értelmében kifejezi azt a feltételt, amely szükséges és elegendő ahhoz, hogy a normális tér a Hilbert-féle térben fekvő valamely halmazzal homeomorf legyen.

Ha ehhez a követeléshez hozzátesszük még a véges dimenzió követelését,*** úgy megkapjuk azt a feltételt, amely szükséges és elegendő ahhoz, hogy a tér egy ilyen vagy olyan dimenziószámú euklideszi térben fekvő halmazzal homeomorf legyen.

Ilyen módon megkapjuk a topológikus terek általános elmélete előtt álló első alapvető feladat megoldását, — nevezetesen a legáltalánosabb idomok: a szó legszélesebb értelmében vett topológikus terek „logikai leengedését" a Hilbert vagy euklideszi tér ponthalmazaihoz: *a normalitás* (sőt már a regularitás is****) *a megszámlálható bázis fennállásával együtt* teljesen karakterizálja topológiai szempontból a *Hilbert-féle térben fekvő halmazokat, a*

* Minden az R topológiai térben fekvő M halmaz topológiai tér: M-ben nyiltaknak tekintjük az oly halmazokat, amelyek az M halmaznak az R tér nyílt halmazaival való metszetei.

** A topológikus tér bázisának e tér nyílt halmazai bármely oly rendszerét nevezzük, amely azzal a sajátsággal rendelkezik, hogy a térnek *bármely* nyílt halmaza bizonyos a rendszer elemeit alkotó halmazok összege.

*** A dimenzióelmélet nem tartozik bele a jelen referátum tárgykörébe, ennélfogva arra szorítkozom, hogy csak induktív módon említem meg a dimenzió definícióját. Üres halmaznak a -1 dimenziót tulajdonítjuk; feltételezzük, hogy már definiálva vannak az $n-1$ dimenziójú terek. Azt mondjuk, hogy az R topológikus térnek n dimenziója van, ha a térnek van olyan bázisa, mely bázis elemeinek határai oly dimenzióval birnak, amely $\leqq n-1$ és ha ugyanakkor a szóbanforgó térben nincsenek olyan bázisok, melyek elemeinek határai az $n-2$ dimenzióval birnának. Valamilyen az R topológikus térben fekvő Γ nyílt halmaz határa alatt a Γ halmaz azon érintési pontjainak halmazát értjük, melyek nem tartoznak bele ebbe a halmazba, tehát a $[\Gamma]-\Gamma$ halmazt.

**** Amint azt *A. N. Tyihonov* kimutatta, minden megszámlálható bázisú reguláris tér normális.

regularitás, a megszámlálható bázis fennállása és a véges dimenzió követelménye együtt, a maguk összességében, *szolgáltatják az euklideszi terekben fekvő halmazokat.*

Az „elementáris" ponthalmazok (azaz a Hilbert-féle és euklideszi terekben fekvő halmazok) topológiai jellemzésének problémájával szorosan össze van kötve a topologikus terek második nagy problémája, a *metrizáció problémája,* azaz a szükséges és elegendő feltételek megkeresése ahhoz, hogy a topologikus tér homeomorf legyen egy metrikus térrel. Minthogy minden metrikus tér normális és a Hilbert-féle tér is metrikus, ennélfogva az imént közölt Urysohn-féle tétel, amely arról szól, hogy minden megszámlálható bázissal biró normális tér homeomorf valamilyen a Hilbert-féle térben fekvő halmazzal, a következő módon formulázható meg: *Ahhoz, hogy a megszámlálható bázissal biró tér metrizálható legyen* (azaz egy metrikus térrel homeomorf legyen) *szükséges és elegendő, hogy a nevezett tér normális legyen.*

A metrizáció általános problémája — megszámlálható bázis térben való létezésének a feltételezése nélkül — három évtizeden át nem volt megoldható, annak ellenére, hogy különböző szerzők erre számos kísérletet tettek. Igaz ugyan, formálisan adódtak bizonyos megoldásai ennek a problémának, nem is egyszer, de e megoldások egyike sem (az elsőt közülük *P. Sz. Alekszandrov* és *P. Sz. Urysohn* 1923-ban adták meg) volt sikeresnek és véglegesnek tekinthető, tekintettel a kikötött feltételek nehézkes voltára. Végül egy minden tekintetben kimerítő megoldást adott meg 1950-ben *Ju. Szmirnov,* fiatal szovjet tudós. Nevezzük valamely adott topologikus térben fekvő halmazok bármely rendszerét lokálisan végesnek, ha a tér bármely pontjának van oly környezete, amely a szóbanforgó rendszernek csupán végesszámú elemeit metszi. Szmirnov tétele a következő módon formulázható meg: ahhoz, hogy *valamilyen topologikus tér metrizálható legyen, szükséges és elegendő, hogy ez a tér reguláris legyen és legyen olyan bázisa, amely előállítható mint legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok, nyilt halmazok lokálisan véges rendszerének összege.* Ez a nevezetes eredmény speciális esetként magában foglalja *Urysohn* metrizációs tételét: minthogy bármely tér megszámlálható bázisa természetesen előállítható mint megszámlálhatóan végtelen sok olyan rendszer összege, melyek mindegyike csak egy elemből áll, ennélfogva valamely megszámlálható bázisú tér metrizálhatóságához szükséges és elegendő annak reguláris volta.

Ju. Szmirnov metrizációs feltételének szükségessége közvetlenül következik minden metrikus tér *Stone* által már korábban bebizonyított parakompaktsága sajátságából — abból a tulajdonságból, mely abból áll, hogy a metrikus tér minden fedésébe* beírható egy lokálisan véges fedés. A feltétel

* Fedés alatt itt és a továbbiakban nyilt halmazok oly rendszerét értjük, melyek összege az egész adott tér. Azt mondjuk, hogy a β fedés be van írva az α fedésbe, ha a β fedés minden eleme, az α fedésnek legalább egy elemében benne foglaltatik.

elégséges voltát egy oly módszer útján bízonyíthatjuk be, amely bizonyos mértékig magában véve is érdekes. Nevezetesen *Ju. Szmirnov* kimutatja, hogy minden az ő feltételeit kielégítő adott τ súlyú* R topológikus tér homeomorf valamely oly halmazzal, amely a τ súlyú H^{τ} általánosított Hilbert-féle térben fekszik.**

Az R térnek a H^{τ}-ba való keresett topológikus leképezését a következő módon szerkesztjük meg. Mindenekelőtt *Ju. Szmirnov* metrizációs feltételéből levezethetjük, hogy az R tér nem csak reguláris, hanem normális is és hogy abban bármely zárt halmaz nyílt halmazok megszámlálható számának metszete és következésképpen bármely zárt halmaz valamely folytonos függvény nullhelyeinek halmaza.

Most vegyük az R tér γ bázisát, amely a nyílt $\Gamma_{n\alpha}$ halmazok lokálisan véges $\gamma_n = \{\Gamma_{n\alpha}\}$ rendszerei megszámlálható számának összege. Θ-val jelöljük valamennyi $\theta = (n\alpha)$ pár halmazát, amelyek a γ bázis $\Gamma_{n\alpha}$ elemeinek jelölésére szolgálnak. Minthogy R normális és minden R-ben zárt halmaz, valamely az R-ben folytonos függvény nullhelyeinek halmaza, ennélfogva minden $\Gamma_{n\alpha}$-ra megszerkeszthetjük a $p_{n\alpha}$ folytonos függvényt, amely minden $x \in R$-re nézve kielégíti a $0 \leqq p_{n\alpha}(x) \leqq 1$ egyenlőtlenséget és az $R - \Gamma_{n\alpha}$ halmaz valamennyi pontjában és csak ezekben a pontokban nullává válik. Minthogy a γ_n rendszer lokálisan véges, ennélfogva minden adott n mellett $x \in R$ pontban csak véges számú $p_{n\alpha}$ függvény különbözik nullától. Ennélfogva az $1 + \sum p_{n\alpha}^2(x)$ összegnek bármely $x \in R$ pontra értelme van és ez az összeg az egész R térben folytonos pozitív függvény. Ennek folytán pedig a

$$q_{n\alpha}(x) = \frac{p_{n\alpha}(x)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{\alpha} p_{n\alpha}^2(x)}}$$

függvények is az egész R térben meghatározottak és folytonosak, és e mellett

$$\sum_{\alpha} q_{n\alpha}^2(x) < 1, \quad \sum_{\alpha} (q_{n\alpha}(x) - q_{n\alpha}(y))^2 < 2.$$

* Valamely topológikus tér súlyának a legkisebb olyan τ kardinális számot nevezzük, hogy a térben τ számosságú bázis legyen. Ilymódon a megszámlálható bázissal biró terek $\aleph_0$ súlyú terek.

** A τ súlyú H^{τ} általánosított Hilbert-féle tér a következő módon épül fel. Ennek a térnek pontjai $\xi(\theta)$ függvények, amelyek valamilyen τ számosságú tetszőleges Θ halmazon vannak definiálva, és kielégítik a következő feltételeket:

a) a $\xi(\theta)$ függvény értékei valós számok, amelyek legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok θ argumentum értékére különbözhetnek nullától.

b) A $\sum\limits_{\theta \in \Theta} (\xi(\theta))^2$ sor konvergens. Ugyanúgy mint a közönséges Hilbert-féle térben a ξ és η pontokra a $\sum\limits_{\theta \in \Theta} (\xi(\theta) - \eta(\theta))^2$ sor konvergens és a $\sqrt{\sum (\xi(\theta) - \eta(\theta))^2}$ nem negatív számot a ξ és η pontok közötti távolságnak nevezzük. Könnyű meggyőződni arról, hogy ez a definíció a metrikus tér valamennyi távolság-axiómáját kielégíti.

Ha most azt vesszük fel, hogy $\xi_{n\alpha}(x) = \frac{1}{2^n} q_{n\alpha}(x)$, úgy azt látjuk, hogy a $\xi_{n\alpha}(x)$ rendszer, ahol x az R tér tetszőleges pontja, $\theta = (n\alpha)$ pedig befutja az egész Θ halmazt, a H^{τ} tér pontja, amelyet egyuttal $f(x)$-szel jelölünk. Az R térnek a H^{τ}-ba való ilymódon meghatározott f leképezése topológikus, ami által teljessé is válik *Ju. Szmirnov* tételének bizonyítása. Megjegyezzük, hogy könnyű megszerkeszteni egy Hausdorff-féle nem reguláris tér példáját, melynek oly bázisa van, amely előállítható mint megszámlálhatóan végtelen sok lokálisan véges rendszer összege.

Ama számos munka közül, amelyeket az utóbbi években az absztrakt topológia (amint néha nevezik a topológikus terek elméletének) kérdéseiről írtak, azok többsége egy vagy más módon összefügg a *bikompakt tér* fogalmával. Mint ismeretes bikompaktnak az oly topológikus teret nevezzük, amelyben teljesül az ú. n. Borel—Lebesgue-féle tétel, azaz amelyben a nyílt halmazok minden rendszere, amelyek összege az egész tér, véges alrendszert tartalmaz, amely ugyancsak befedi az egész teret („minden fedés magában foglal egy véges fedést"). A bikompakt topológikus terek úgy is definiálhatók, mint olyan topológikus terek, amelyekben a nem üres zárt halmazok *minden* (nem csak megszámlálható) teljesen rendezett csökkenő rendszerének nem üres metszete van, valamint úgy is, mint olyan terek, amelyekben minden végtelen halmaznak legalább egy teljes felhalmozódási pontja van. Emellett az M végtelen halmaz teljes felhalmozódási pontján oly pontot értünk, melynek minden környezete az M halmazt oly részhalmazában metszi, amelynek ugyanaz a számossága van, mint az egész M halmaznak.

A bikompakt topológikus terek között a legérdekesebbek és a legfontosabbak a *bikompakt Hausdorff-féle terek, amelyeket egyszerűen bikompaktumoknak neveznek.*

Valamennyi bikompaktum normális tér is úgy jellemezhető, mint oly normális tér, amely minden őt tartalmazó normális térben zárt; mi több, ezek minden őket tartalmazó Hausdorff-féle térben zártak és az a reguláris tér, amely minden őt tartalmazó Hausdorff-féle térben (vagy esetleg csak minden őt tartalmazó reguláris térben) zárt, bikompaktum.

Az a Hausdorff-féle tér, amely minden őt tartalmazó Hausdorff-féle térben zárt, lehet nem bikompakt is. Azonban ha ezt a minden Hausdorff-féle térben való zártság sajátságát nem csak magától az adott Hausdorff-féle R tértől követeljük, hanem annak minden zárt részhalmazától is, úgy R ismét bikompaktum lesz.*

A bikompakt terek elméletének alapjait *P. Sz. Alekszandrov* és *P. Sz. Urysohn* rakták le „A kompakt topológikus terekről" c. emlékiratukban, már

* Ezt a nehéz tételt hipotézis alakjában *P. Sz. Alekszandrov* és *P. Sz Urysohn* mondották ki és az első ízben *M. Stone* bizonyította be; egyszerű, de továbbra is igen nehéz bizonyítást később *Sz. V. Fomin* adott.

30 évvel ezelőtt. Ennek az elméletnek kifejlesztése mindenekelőtt *A. N. Tyihonov* munkáiban található, aki levezette az ő híres meghatározását, bármely számú topológikus térnek topológikus szorzatáról és bebizonyította azt a fontos tételt, amely szerint tetszőleges számú bikompaktum szorzata bikompaktum. *Tyihonov* speciálisan vizsgálat alá vonta az ő „kockáit", azaz az olyan bikompaktumokat, amelyek tetszőleges adott kardinális számú szakasz topológikus szorzatai. *Tyihonov* bebizonyította, hogy ezek a kockák az univerzalitás következő sajátságával rendelkeznek: bármely, adott tetszőleges τ súlyú teljesen reguláris tér homeomorf valamilyen oly halmazzal, amely ugyanolyan súlyú Tyihonov-féle kockában, azaz a $[0;1]$ szakasz τ példányának topológikus szorzatában fekszik.

Visszaemlékezve arra, hogy valamennyi bikompaktum normális tér és hogy a teljes regularitás sajátsága átörökölhető, az imént megformulázott a „beágyazásról szóló" Tyihonov-féle tételből a következő további fontos eredményt vezetjük le: *minden teljesen reguláris tér és csak a teljesen reguláris tér homeomorf, egy bikompaktumban fekvő halmazzal.*

*Tyihonov*nak a beágyazásról szóló tétele *Urysohn* arról szóló tételének általánosítása, mely szerint lehetséges bármely (teljesen) reguláris teret, melynek megszámlálható bázisa van, a Hilbert-féle alapparallelepipedonba topológikusan beágyazni, minthogy a Hilbert-féle alapparallelepipedon $\aleph_0$ súlyú Tyihonov-féle kocka. *Urysohn tétele, annak Tyihonov által adott általánosítása és Szmirnov metrizációs tétele azt mutatják, hogy milyen kényszerítő erővel törnek be a végtelen dimenziós koordinátaterek és ezekkel együtt — a valós szám — az absztrakt topológia oly területére, mely a valós számoktól teljesen függetlennek látszik.* Ennek általános alapja abban az Urysohntól eredő nevezetes tételben rejlik, amelyet fentebb Urysohn lemmájának neveztünk.

A *Tyihonov* értelemben vett topológikus szorzás fogalma más nevezetes topológikus szorzatok gyanánt definiálható terek vizsgálatára vezetett. Ezek között rámutatunk a D^τ térre — a τ súlyú diszkontinuumra —, amely a két izolált pontból álló tér, (egyszerű pontkettős) τ példányának szorzata, és az F^τ térre, amely az összefüggő pontkettősnek nevezett tér τ példányának szorzata. Összefüggő pontkettősön az egyetlen összefüggő T_0-teret értjük. Ez két pontból áll: e térbe a két pont egyike az egyetlen valódi nyílt részhalmaz (a másik pont következésképpen az egyetlen valódi zárt részhalmaz). A D^τ és F^τ terek a következő univerzalitási sajátságokkal rendelkeznek: bármely τ súlyú T_0-tér homeomorf az F^τ tér valamilyen részhalmazával és következésképpen* kölcsönösen egyértelmű és folytonos képe valamilyen a D^τ térben fekvő halmaznak: minden τ súlyú bikompaktum valamilyen a D^τ térben fekvő zárt halmaznak folytonos képe.

Amint tudjuk minden kompaktum, azaz megszámlálható súlyú bikompaktum, a $D^{\aleph_0}$ Cantor-féle diszkontinuum folytonos képe; ha $\tau > \aleph_0$, úgy nem minden

* Nyilvánvalóan minden F^τ tér a D^τ térnek kölcsönösen egyértelmű és folytonos képe.

τ súlyú bikompaktum az egész D^{τ} tér folytonos képe; azokat a bikompaktumokat, amelyek a D^{τ} diszkontinuumok folytonos képei, *diadikusok*nak nevezzük, ezek nyilvánvalóan a terek oly legkisebb osztályát alkotják, amely tartalmazza az izolált pontpárt, és amely osztály zárt a folytonos leképezés és a topológikus szorzás operációival szemben. Ez az osztály különleges tanulmányozást érdemel: a diadikus bikompaktumok sok nevezetes sajátsággal birnak, melyek közül néhányat *N. A. Sanin* állapított meg. Így pl. minden folytonosan rendezett halmaz, amely a maga természetes topológikus rendjében diadikus bikompaktumot alkot, hasonló a számegyenes valamely szakaszához; a diadikus bikompaktum nem állítható elő teljesen rendezett (bármilyen hatványú) rendszer összege alakjában, mely rendszer növekvő, sehol sem sűrű részhalmazokból áll stb.

Az összefüggő pontkettős fentemlített példája azt mutatja, hogy ha a topológikus tér fogalmát elegendő általánossággal fogjuk fel (nevezetesen ha a T_0-tereket vizsgáljuk), úgy véges halmaznak is lehet nem triviális topológiája. A véges T_0-terek és általában az oly T_0-terek, amelyekben (bármely véges vagy végtelen számban vett) nyilt halmazoknak nem csak az összege, hanem a metszete is nyilt, *diszkrét terek* néven ismeretesek. A diszkrét terek speciális esetét alkotják a szimpliciális komplexusok.

* * *

A bikompaktumok arról nevezetesek, hogy azok valamennyien és csak azok kaphatók meg egy sajátságos határátmenet útján, a véges diszkrét terekből, sőt a véges szimpliciális komplexusokból kiindulva. Ez a körülmény nagy elvi jelentőséggel bir, minthogy éppen ez volt az alapja annak, hogy a kombinatórikus topológia komplexusainak alapvető fogalmait és módszereit átvitték bikompaktumokra, és mindenek előtt kompaktumokra.

Azt a határátmenetet, amelyre itt gondolunk, én szerkesztettem meg az 1925—29 években, kezdetben a kompaktumokra. A határátmenetet azután *A. G. Kuros* a tetszőleges bikompaktumok esetére általánosította. Az ú. n. „projekciós spektrum", amely ennek a közelítő eljárásnak lényegét alkotja, további fejlődést nyert *Freudenthal, Sztinrod, Čech, Lefsetz* és sok más kutató munkáiban és ebben a kiszélesített alakjában hatékony eszközévé vált állandóan nemcsak a topológiának, hanem a topológikus csoportok elméletének és az utóbbi alkalmazásainak is.

Képzeljük el az X_{α} topológikus terek egy olyan ú. n. irányított* halmazát, melynél ha ezen halmazban X_{β} következik X_{α} után (amit egyszerűen a következőképpen írunk le: $\beta > \alpha$), akkor adott egyuttal az X_{β} tér egy $\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}$ folytonos leképezése a X_{α} térbe, melyet projekciónak nevezünk és amely a tranzitivitás feltételeit kielégíti: ha $\gamma > \beta > \alpha$, úgy $\tilde{\omega}_{\alpha}^{\gamma} = \tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}\,\tilde{\omega}_{\beta}^{\gamma}$.

* Irányított halmaznak nevezünk egy részben rendezett halmazt, ha bármely két elemhez tartozik egy oly harmadik elem, mely mindkét elem után következik.

Projekciós spektrumnak nevezzük az X_α terek irányított halmazát, az ezen tereket összekötő $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ projekciókkal együtt és $\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$-vel jelöljük.

Nevezzük a spektrum *szálának* az $x_\alpha \in X_\alpha$ pontok minden halmazát, melyben minden X_α-ból egy-egy elem van,* amelyek kielégítik a következő feltételt: $\beta > \alpha$ esetében mindenkor fennáll, hogy $\tilde{\omega}_\alpha^\beta x_\beta = x_\alpha$. *A szálak topológikus teret alkotnak:* bármely X_α-ban vegyünk egy tetszőleges Γ_α nyílt halmazt és jelöljük O_{Γ_α}-val valamennyi szál halmazát, „amely keresztül halad Γ_α-n", azaz ama $\xi = \{x_\alpha\}$ szálak halmazát, melyekre nézve $x_\alpha \in \Gamma_\alpha$.

Az O_{Γ_α} halmazok és azok valamennyi lehetséges összege alkotják az adott spektrum összes szálaiból álló térnek a nyílt halmazait. Ez a szálak tere, amit az adott projekciós spektrum limesének is neveznek és lim $\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$-vel jelölnek.

E fogalomnak különböző speciális esete és változata létezik. A legfontosabb speciális esetek közül egyeseket megkapunk, ha feltételezzük, hogy valamennyi X_α bikompaktum. Ekkor, mint ahogy azt nem nehéz belátni, az $X = \lim \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ limesztér zárt halmaz valamennyi X_α tér topológikus szorzatában és következésképpen bikompaktum.

Különösen fontos eset az, amikor valamennyi X_α bikompakt topológikus csoport, az $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$ projekciók pedig folytonos homomorfizmusok. Ekkor a limesztér is csoport a következő koordinátánkénti szorzással: ha $\zeta = \{x_\alpha\}$, $\eta = \{y_\alpha\}$ két szál, úgy $\xi\eta = \{x_\alpha y_\alpha\}$. Ezt a módszert arra, hogy adott X_α csoportokból kiindulva új csoportokat szerkesszünk, széles körben alkalmazzák, speciálisan a Betty-féle csoportok különböző analógiáinak meghatározásánál. A módszert más célokra is alkalmazzák. Fussa be pl. α az összes $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ természetes számértékeket és legyen minden X_α oly tér, amely 2^n izolált pontból áll. A pontok mindegyike valamilyen

$$(i_1 \ldots i_n)$$

kombináció, melyben valamennyi i_k 0-val vagy 1-gyel egyenlő. A projekciókat a következőképpen definiáljuk:

$$\tilde{\omega}_n^{n+1}(i, \ldots i_{n+1}) = (i, \ldots i_n).$$

A limesztér a teljes Cantor-féle halmaz.

A második példában vegyük fel ujból, hogy $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ Az X_α tér a $|z| = 1$ kör a komplex változó síkján. Rögzítettnek tekintve az $m_\alpha \geqq 2$ egész számok

$$m_1, m_2, \ldots m_\alpha, \ldots$$

sorozatát, definiáljuk minden α-ra a projekciót mint $X_{\alpha+1}$ leképezését X_α-ra, amelyet a

$$z_\alpha = z_{\alpha+1}^{m_\alpha}$$

formula szolgáltat.

* Az általánosság korlátozása nélkül feltételezhetjük, hogy az X_α tereknek nincsenek páronként közös pontjaik.

A limesztér a legáltalánosabb szolenoid — egydimenziós kontinuum a háromdimenziós térben, amely a sorban egymásba skatulyázott C_α gyűrűalakú testek (ezek homeomorfak egy közönséges torusz belsejének zárt burkával) metszete, melyek közül $C_{\alpha+1}$ C_α belsejében található és benne m_α-szor csavarodik körül.

A projekciós spektrumok másik határesetét megkapjuk, ha feltételezzük, hogy valamennyi X_α véges diszkrét T_0-tér. Ekkor az $X = \lim \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$ limesztér, melyet ebben az esetben a spektrum *teljes* limeszének fogunk nevezni, — szintén T_0-tér. Azonban itt emellett a teljes limesz mellett érdekes megvizsgálni még más határalakzatokat is, nevezetesen az ú. n. alsó és felső határokat. Szoritkozzunk ezek közül az elsőnek a definíciójára. Azt fogjuk mondani, hogy a $\zeta = \{x_\alpha\}$ szál magában foglalja a $\zeta' = \{x'_\alpha\}$ szálat, ha minden α-ra nézve fennáll,* hogy $x'_\alpha \in [x_\alpha]$. A szálat minimálisnak nevezzük, ha az semilyen tőle különböző szálat nem foglal magába. A szóbanforgó spektrum teljes limeszének részhalmazát, mely valamennyi minimális szálból áll, a spektrum alsó határának nevezzük. A projekciós spektrum alsó határa szintén bikompakt tér. Ez a bikompakt tér Hausdorff-féle tér, ha a spektrum kielégíti a következő szeparabilitási feltételt:

(H). *Bármilyen legyen is a két $\xi' = \{x'_\alpha\}$ és $\zeta'' = \{x''_\alpha\}$ minimális szál, találhatunk egy olyan α-t, hogy az X_α-ban ne létezzék semmi olyan x_α pont, amelynek zárt burka tartalmazza mind az x'_α mind az x''_α pontokat.***

Így tehát a spektrumnak a (H) feltételt kielégítő alsó határa egy bikompaktum.

Bebizonyítható a megfordított állítás is, nevezetesen, hogy minden bikompaktum valamilyen oly spektrumnak alsó határa, mely spektrum kielégíti az imént megfogalmazott (H) szeparabilitási feltételt.

Ez a spektrum a következő módon épül fel. Vizsgáljuk az R tér egymást páronként nem metsző $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i$ nyílt halmazainak bármilyen véges rendszerét, mely halmazoknak összege, az R-ben mindenütt sűrű. Az X_α diszkrét tér pontjait alkotja a definíció értelmében valamennyi $(\alpha; i_1, \ldots, i_r)$ alakú lehetséges kifejezés, ahol $[\Gamma_{\alpha i_1}] \cap \ldots [\Gamma_{\alpha i_r}] \neq \Lambda$ (mint mindenkor Λ az üres halmaz). Azon célból, hogy X_α-ban topológiát vezessünk be (vagy ami ugyanaz, hogy az X_α halmazt részben rendezetté tegyük), vegyük fel, hogy

$$(\alpha; j_0, \ldots, j_q) \leqq (\alpha; i_0, \ldots, i_p),$$

ha $i_0, \ldots, i_p$ néhány index a $j_0, \ldots, j_q$-k közül.

* A véges diszkrét terek vizsgálata pontosan ekvivalens a véges részben rendezett halmazok vizsgálatával: vegyük fel, hogy $x'_\alpha \leqq x_\alpha$, ha az adott X_α diszkrét tér x'_α pontja beletartozik az ugyanezen α tér x_α pontjából álló halmaz zárt burkába.

** Azaz nem létezik olyan x_α, melyre nézve egyidejűleg fennállana, hogy $x_\alpha \geqq x'_\alpha$ és $x_\alpha \geqq x''_\alpha$ (ha X_α-át úgy tekintjük, mint részben rendezett halmazt).

Tegyük fel, továbbá, hogy $\beta > \alpha$, ha a $\beta = \{\Gamma_{\beta_1}, \ldots, \Gamma_{\beta_t}\}$ rendszer az $\alpha = \{\Gamma_{\alpha_1}, \ldots, \Gamma_{\alpha_s}\}$ rendszernek finomítása (továbbosztása), azaz, ha minden $\Gamma_{\beta j}$ bennefoglaltatik valamelyik (és ekkor nyilvánvalóan egyetlen)* Γ_{α_i}-ben.

A projekciókat a következőkképen értelmezzük: minden $\Gamma_{\beta j}$-nek egy egyetlen azt magában foglaló Γ_{α_i} felel meg. Ez a következő definíciót szolgáltatja:

$$\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}(\beta, j) = (\alpha, i).$$

Ezek után vegyük fel, hogy

$$\tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}(\beta; j_0, \ldots, j_q) = (\alpha, \tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}(\beta, j_0), \ldots, \tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}(\beta, j_q)).$$

(A kifejezés egybeeső elemeit csak egyszer vesszük számításba.)

Ez a definíció teljessé teszi az $\{X_\alpha, \tilde{\omega}_{\alpha}^{\beta}\}$ spektrum felépítését; ezt a spektrumot az adott R tér spektrumának nevezzük; e spektrum definíciójánál az R tér bikompakt voltát nem használtuk fel; ha R bikompaktum, úgy spektrumának van egy alsó határa, amely homeomorf az R térrel.

A bikompakt terek elméletének különböző kérdései közül a legutóbbi 10—15 év alatt a legnagyobb fejlődésen azok a kérdések mentek át, amelyek a bikompakt topologikus bővítésekre, nevezetesen, a teljesen reguláris terek ilyen bővítésére vonatkoznak.

Tyihonov ama alapvető eredményéből, mely szerint lehetséges minden teljesen reguláris R teret beágyazni egy bikompaktumba, tudniillik az ugyanolyan súlyú Tyihonov-féle kockába, mint amilyen súlyú az adott R tér, következik, hogy *minden teljesen reguláris R térnek van bikompakt bR bővítése*, vagyis oly bikompaktum, amelynek az adott tér mindenütt sűrű részhalmaza: ahhoz, hogy megkapjuk a bR bikompakt bővítést, melynek ugyanaz a τ súlya van, mint magának R-nek, elegendő R-t beágyazni a τ súlyú Tyihonov-féle kockába és ott a zárt burkot venni.

Ezzel kapcsolatosan felmerült valamely adott teljesen reguláris R tér valamennyi bikompakt bővítése tanulmányozásának kérdése általában és ez a kérdés egy nagy érdekes elmélet tárgyául szolgált. Mindenekelőtt valamely adott teljesen reguláris R tér bikompakt bővítései természetes módon részben rendezett halmazt alkotnak: a b_2R bővítés a b_1R bővítés után következik, ha létezik a b_2R térnek b_1R-re való olyan folytonos leképezése, amely mozdulatlanul hagyja R valamennyi pontját. Megállapítható, hogy az R tér valamennyi bikompakt bővítéseinek ilyen módon részben rendezett halmazában van egy legnagyobb elem — azon αR bikompakt bővítés, amely azzal a sajátsággal rendelkezik, hogy az R pontjainak fixen tartása mellett folytonosan leképezhető az R tér bármilyen bikompakt bővítésére. Ez az αR maximális (vagy Čech-féle) bikompakt bővítés egyértelműen meg van határozva maximalitási sajátságai által. Ez a bővítés a következő módon szerkeszthető

* Ekkor, amint azt könnyű belátni, valamennyi adott Γ_{α_i}-ben bennefoglaltatott $\Gamma_{\beta j}$ összege, oly halmaz, amely ebben a $\Gamma_{\alpha i}$-ben mindenütt sűrű.

meg. Az R tér nyílt halmazai γ rendszerét szabályosnak nevezzük, ha e rendszer minden Γ eleméhez a γ rendszerben találhatunk egy oly Γ' elemet, amely a Γ elemnek *alá van rendelve*, azaz, amely teljesen regulárisan van belefoglalva a Γ-ba (abban az értelemben, hogy Γ' és $R-\Gamma$ R-ben funkcionálisan szeparálhatók). Az R tér nyílt halmazai centrált* és szabályos rendszerét, amelyet nem tartalmaz semilyen tőle különböző centrált szabályos rendszer, az R tér *végének* nevezzük.

Könnyű belátni, hogy az R tér tetszőleges x pontja valamennyi környezetének rendszere egy vég. Azonosítva a tér minden pontját azon véggel, amely a pont környezeteiből áll, az R teret úgy tekinthetjük, mint a tér valamennyi vége halmazának részhalmazát. Ebbe a halmazba topológiát a következő módon vezetünk be: legyen Γ valamilyen tetszőleges nyílt halmaz az R-ben; jelöljük O_Γ-val valamennyi oly vég halmazát, melyeknek egyik eleme a Γ halmaz. Az O_Γ halmaz és az ilyen halmazok valamennyi lehetséges összegei definíció értelmében nyílt halmazok az R tér valamennyi vége αR terében. Már láttuk, hogy magát az R teret tekinthetjük úgy, mint az αR térben fekvő halmazt. Az R térnek ez a belefoglalása az αR-be, topológikus belefoglalás és emellett R mindenütt sűrű halmaza az αR térnek. Ilymódon αR az R tér bikompakt bővítése és ugyanez az αR bővítés egyúttal maximális is.**

Ha az alárendelés fogalmát szigorítjuk, azaz nem valamennyi Γ-ba regulárisan belefoglalt nyílt Γ' halmazt tekintjük Γ-hoz alárendelt halmaznak, hanem csak egyeseket ezek közül, úgy hogy emellett betartassanak bizonyos természetes követelések, úgy — minden alkalommal megfelelő *alárendelési szabályt* választva — megkaphatjuk az R térnek nem csak maximális, hanem bármely előre megadott bikompakt bővítését.

Megjegyezzük végül, hogy bármilyen normális R tér spektrumának alsó határa az R térnek maximális bikompakt αR bővítése.

Jelenleg valamely adott teljesen reguláris tér bikompakt bővítései egészen új szempontból vonják magukra a figyelmet. Nevezetesen az ú. n. egyenletes topológia szempontjából. Ismeretes az egyenletes terek („Egyenletes struktúrák") *A. Weil* által javaslatba hozott definíciója. Ezt a definíciót nem tartom kimerítőnek és teljesen kielégítőnek, már azért sem, mert az valami olyan speciális konstrukción alapul, amely a topológikus tér környezetei rendszerével (bázisával) analóg. Ettől a hiánytól mentes a *V. A. Jefremovics* által javaslatba hozott szomszédsági tér fogalma, mely a két halmaz közötti szomszédság fogalmán alapul (teljesen ugyanúgy mint ahogy a közönséges topológia alapját valamely pontnak a halmazhoz való szomszédsága alkotja: „valamely pont szomszédos egy halmazzal, ha beletartozik annak zárt bur-

* Halmazok valamilyen rendszerét akkor nevezzük centráltnak, ha bármely véges alrendszerének nem üres a metszete.

** Az αR tér első felépítését *E. Čech* adta meg 1937-ben, az itt közölt felépítés *E. Čech*étől teljesen különbözik és ezt 1939-ben én hoztam javaslatba.

kába"). *Igy tehát bármily pontoknak nevezett elemek P halmaza definicó értelmében szomszédsági tér, ha részhalmazai között be van vezetve egy szomszédsági reláció, azaz, ha bármely két* $A \subseteq P$, $B \subseteq P$ *mennyiségre nézve meg van állapítva, vajjon azok egymással szomszédosak-e vagy sem.* (Ha két halmaz nem szomszédos, úgy azokat egymástól távolesőknek nevezzük.) Emellett feltételezzük, hogy teljesítve vannak a következő feltételek: „a szomszédsági tér axiómái" (ezeket *V. A. Jefremovics* hozta javaslatba):

1. *Ha az A halmaz a B halmazzal szomszédos, úgy a B halmaz is szomszédos az A halmazzal;*

2. *Két* A_1 *és* A_2 *halmaz összege akkor és csak akkor szomszédos a B halmazzal. ha az* A_1 *és* A_2 *halmazok közül legalább az egyik szomszédos a B halmazzal;*

3. *Két a és b pont akkor és csak akkor szomszédosak, ha azok egybeesnek;*

4. *Minden P halmaz távolesik az üres halmaztól;*

5. *Bármely két távoleső A és B halmaz belefoglalható két egymást nem metsző U és V halmazba, amelyek olyanok, hogy A távolesik P—U-tól és B távolesik P—V-től. Megjegyzés:* az $U \supseteq A$ halmazt, amely kielégíti azt a feltételt, hogy az A a $P—U$-tól távolesik, az A halmaz „szomszédsági környezetének" nevezzük.

Maga az elmélet megalapítója, *V. A. Jefremovics* kimutatta, hogy minden szomszédsági térbe természetszerűen bevihető topológia (az A halmazhoz szomszédos p pontot az A halmaz érintési pontjának nevezzük), és hogy ebben a topológiában minden szomszédsági tér teljesen reguláris topológikus tér. Megfordítva minden teljesen reguláris térbe bevezethető és pedig általában véve különböző módokon, a halmazok közötti szomszédság* úgy, hogy teljesülnek az 1—5 feltételek. Ilymódon a természetes út a szomszédsági terekhez a következőkből áll: adott a teljesen reguláris R tér; megkeresendők az „általa generált" szomszédsági terek; (azaz mindazok a P szomszédsági terek, amelyek az R tér pontjaiból állnak, és amelyekben a természetes topológia éppen az R teret adja meg nekünk).

Természetesen az X szomszédsági tér Y szomszédsági térre való egyenletesen folytonos leképezésének nevezünk minden olyan leképezést, mely mellett két az X-ben szomszédos halmaz átmegy az Y-ban szomszédos két halmazba. Világos, hogy az ilyen leképezések az X és Y szomszédsági terek természetes topológiája értelmében is folytonosak lesznek. A szomszédsági terek speciális esetét alkotják a metrikus terek (amelyekben szomszédosak az oly halmazok, amelyek egymástól nulla távolságban fekszenek) és a topoló-

* A szomszédság teljesen reguláris R térbe való bevezetésének egyik módja abból áll, hogy két halmazt távolesőknek nyilvánítunk, ha azok R-ben funkcionálisan szeparálhatók.

gikus csoportok. Emellett, mint ahogy azt *V. A. Jefremovics* megjegyezte, a metrikus terek leképezéseinek szokásos egyenletes folytonossága egybeesik a szomszédság értelmében vett egyenletes folytonossággal.

Minden *A. Weil* értelemben vett egyenletes struktúra szintén egyértelműen határozza meg a szomszédságot, de egy és ugyanazon szomszédsági tér általában sok egyenletes teret generál. Ilymódon a fogalmak kölcsönös kapcsolata: teljesen reguláris tér, szomszédsági tér, egyenletes tér, ha így fejezhetjük ki magunkat, az első fogalomnak a másodikra és a másodiknak a harmadikra való fokozatos széthasadásából áll.

Igen érdekesnek, és messzire előtérbe hozottnak látszik a topológiai (teljesen reguláris) terek és a szomszédsági terek közötti kölcsönös viszonylatok kérdése. Itt a dolgok állása teljesen világos, hála *Ju. Szmirnov* következő tételének: *a valamely adott teljesen reguláris R tér által generált szomszédsági terek kölcsönösen egyértelműen megfelelnek az R tér bikompakt bővítéseinek: az R tér minden bR bikompakt bővítésének megfelel egy teljesen meghatározott P_b szomszédsági tér, amelyet R generál, nevezetesen, két halmazt P_b-ben szomszédosnak tekintünk, ha azok zárt burkai bR-ben metszik egymást; emellett ilyen úton megkaphatjuk valamennyi R által generált szomszédsági teret, mindegyiket csak egyszer.* Természetes gondolat, hogy a $P_{b''}$ szomszédsági tér a $P_{b'}$ szomszédsági tér után következik (mind a két tér egy és ugyanazon topológikus teret generálja), ha a $P_{b''}$ térnek a $P_{b'}$-re való azonos leképezése egyenletesen folytonos. Ez a sorrend pontosan megfelel a bikompakt bővítések sorrendjének: a $P_{b''}$ szomszédsági tér akkor és csak akkor következik a $P_{b'}$ után, ha a $P_{b''}$-t generáló $b''R$ bikompakt bővítés (a már korábban megállapított értelemben) a $P_{b'}$ által generált $b'R$ bikompakt bővítés után következik.

Egyben *Ju. Szmirnov* a következő kérdésre is válaszol: mikor van az adott teljesen reguláris R térnek csak egyetlen bikompakt bővítése, vagy (ami a mondottak értelmében ugyanaz) csak egyetlen szomszédsági definíciója. Kiderül, hogy R bikompaktságának feltétele, amely triviális módon elegendő,* egyáltalán nem szükséges. Viszont a szükséges és elegendő feltétel arra, hogy az adott R térnek egyetlen bikompakt bővítése legyen, abból áll, hogy R-ben ne létezzék semilyen funkcionálisan szeparálható nem-bikompakt zárt halmazpár: pl. valamennyi ω_1-nél kisebb rendszám tere (melyben természetes rendszám topológia áll fenn) nem bikompakt, ennek ellenére egyetlen bikompakt bővítéssel bír és következésképpen a szomszédság egyetlen meghatározását engedi csak meg.

A valamely adott teljesen reguláris R tér bikompakt bővítései és az R által generált szomszédsági terek közötti *Ju. Szmirnov* által megállapított kölcsönösen egyértelmű vonatkozás nagy elvi jelentősége abból áll, hogy ilyen

* A szomszédságnak a bikompaktumon való meghatározása egyetlen voltát vizsgálatainak legelején megállapította *V. A. Jefremovics.*

módon a szomszédsági tér fogalmának teljes redukcióját valósítjuk meg, a bikompakt bővítés régebbi fogalmára. Ez a redukció természetesen nem akadályozza a szomszédsági terekkel kapcsolatos speciális problematika létezését (megjegyezzük pl., hogy amint azt *V. A. Jefremovics* kimutatta, az euklideszi és a hiperbolikus sík két különböző szomszédsági teret alkot amelyeket egy és ugyanazon „topológiai sík" generál).

Szmirnov alapvető tételéből az is kijön, hogy minden őt magában foglaló szomszédsági térben zárt szomszédsági tér szükségszerűen bikompakt. Ez azt mutatja, hogy a teljes terek szomszédsági definícióira vonatkozó kérdés nem dönthető el a metrikus terekkel való analógia alapján és külön megközelítést igényel. A teljes metrikus terek osztályozásának feladatát *Szmirnov* szintén megoldotta, de itt nem mehetünk bele most ennek a kérdésnek tárgyalásába. Csak a következő érdekes eredményt említjük meg, amely a szó szokásos értelmében teljes, metrikus terekre vonatkozik: ahhoz, hogy valamilyen R metrikus tér teljes legyen, szükséges és elegendő, hogy a bikompakt bővítésben, amely a szóbanforgó metrikus teret mint szomszédsági teret generálja, csak magának az R-nek pontjai elégítsék ki a megszámlálhatóság első axiómáját.

Itt nincs most időm arra, hogy érintsem a *Szmirnov* által bebizonyított tételeket a szomszédsági terek és az *A. Weil* értelmében vett egyenletes terek közötti kölcsönös vonatkozásokra nézve, és csak az eredeti publikációkra utalhatom azokat, akiket ez a kérdés érdekel.

Befejezve ezt a szükségszerűen rövid áttekintést, azt remélem, hogy ez mindazonáltal képet fog adni, jelenleg a topológikus terek elméletében fennálló érdekes kutatási irányokról, és úgy tűnik nekem, hogy ezek között azok a kutatások, amelyek a szomszédsági terekkel kapcsolatosak, leginkább megérdemlik továbbfejlesztésüket.

IRODALOM

[1] П. С. Александров: „О понятии пространства в топологии" Успехи матем. наук, 2., *1* (1947), 5—57.

[2] В. А. Ефремович: Инфинитезимальные пространства, ДАН СССР, 76., *3* (1951), 341—343.

[3] В. А. Ефремович: Геометрия близости I, Математический сборник, 31., *1* (1952), 189—200.

[4] Ю. М. Смирнов: О метризации топологических пространств, Успехи матем. наук, *6*, (1951), 100—111.

[5] Ю. М. Смирнов: Отображение систем открытых множеств. Матем. Сборник 31., *1* (1952), 152—166.

[6] Ю. М. Смивнов: О пространствах близости в смысле В. А. Ефромовича, дан СССР, 84., *5* (1952), 895—898.

[7] N. Bourbaki: Actualités scientifiques et industrielles, 858, 1942.

LOBACSEVSZKIJ ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA

KÁRTESZI FERENC

Előadta az ünnepi ülésszak 1952 december 16-án tartott ülésén

Midőn *Bolyai János* születésének 150. évfordulóját ünnepeljük, nagy kortársáról, *Lobacsevszkij Ivanovics Nyikolaj*ról ugyanúgy megemlékezünk, s ünnepeljük. Hiszen a matematikában — felfedezésük egymástól független és egyidejű mivolta következtében — nevük egybeforrt, sorsuk is sokban rokon, a két nép pedig, amelyik e két nagy alkotó tudóst adta a világnak, egymásra talált a haladás, a munka, a szocializmus eszméjének fölfelé ívelő útján. A maguk korában egymásról nem tudva, azonos kérdéseken elmélkedtek, hasonló felfedezésekre jutottak és rokon felfogásra emelkedtek korszakalkotó tudományos törekvéseikben. Mindketten vágytak a rokonszellem megértő, lendületet adó érdeklődésére és éppen egymásról nem tudva, élték végig életüket. E megemlékezésünkkel elsősorban a két nagy alkotó sorsának és munkásságának párhuzamát domborítjuk ki.

Lobacsevszkij volt időrendben az első olyan orosz matematikus, aki Oroszországban született, hazai iskola és egyetem nevelte, s mint minden idők egyik legnagyobb matematikusa szerzett évszázadokra szóló dicsőséget hazájának. A szovjet tudomány éppen olyan büszkén tekint ma a nagy geométerre, miként a magyar tudomány *Bolyai János*ra. *Clifford* a „geometria Kopernikuszának" nevezte Lobacsevszkijt. Párhuzamot von közöttük: „Mindketten forradalmasították a tudományos gondolkodást. Mindkét forradalom hatalmas jelentőségű, mert mindkettő a világegyetemről való felfogásunkat alakította át . . ."

Lobacsevszkij 1792 nov. 20-án született. Két testvérével együtt a kazáni gimnáziumban tanult, s az akkori viszonyokat tekintve, gondos alapvető kiképzésben részesült. A kazáni egyetem a gimnáziumból fejlődött ki, s csak 1814-ben vált önálló intézménnyé. Azonban a kazáni egyetem már 1808-ban matematikai képzés tekintetében magas színvonalat ért el. *Lobacsevszkij* matematikai érdeklődését valószínűleg tanárai: *Kartasevszkij* és a *Gauss* köréből jött *Bartels* ébresztették fel. *Bartels* professzor abban az időben európai hírű matematikus volt, s kitünő tanár. Hamarosan felismerte *Lobacsevszkij* rendkivüli tehetségét, s örömmel irányította a tehetséges ifjút. *Lobacsevszkij* ugyancsak neves tanára, *Littrov* szintén felfigyelt a kitünő diákra, s nemcsak csillagászatra tanította, hanem filozófiai és szépirodalmi művekkel is ellátta. Filozófiai műveltségének megalapozásában *Lubkin* professzor előadásainak hallgatása is nagy szerepet játszott. *Lubkin* élesen bírálta a kanti tér- és időfogalmat. Az ifjú *Lobacsevszkij*t nagyon becsülte és kedvelte. *Lobacsevszkij* sokoldalú és széleskörű műveltsége ebben az időben nyert szilárd alapot, s az egyetemi légkör hatását művelt barátai csak tovább mélyítették.

Lobacsevszkij 1814-ben megkapta a matematikai tudományok magisztere címet, 1816-ban a kazáni egyetem rendkívüli, majd 1818-ban rendes tanára lett. 1827—1846-ig a kazáni egyetem rektora volt. Ez a 19 esztendő a kazáni egyetem fejlődésében nagyon jelentős periódus volt. 1846-ban az akkori szabályzatok szerint nyugdíjazni kellett, s bár az egyetem tanácsa kérte a minisztert, hogy a még csak 53 esztendős nagy tudós folytathassa egyetemi működését, mégis távoznia kellett. Ekkor nevezték ki a tankerületi főigazgató helyettesévé. Ez rangban emelkedést jelentett, azonban *Lobacsevszkij* számára súlyos csapás volt. Hiszen a kazáni egyetem és hallgatói a szívéhez nőttek, s ezt a szívéhez nőtt munkaterületet kellett örökre elhagynia.

*Lobacsevszkij*t családi életében is több súlyos csapás érte, s tetézte mindezt látásának romlása, majd a megvakulás szörnyűsége. *Lobacsevszkij* roppant aktivitását tekintve, ez a borzalmas fizikai összeroppanás csak fokozza e kép megrendítő szomorúságát. 1856 február 26-án halt meg, 64 esztendős korában.

Lobacsevszkij korának mértéke szerint kitünő matematikai képzésben részesült, kiváló professzorok tanítványa volt, professzorai becsülték és rendkívüli tehetségét felismerték. Műveltsége széleskörű volt, a XVIII. század felvilágosodásának eszméit az irodalom, a korabeli nagy orosz gondolkodók és művelt barátai révén alaposan megismerte és a maga eredeti módján átgondolta és magáévá tette.

Természettudományos képzettsége vetekedett matematikai képzettségének alaposságával. A geometria alapjaira vonatkozó, mélyenszántó egyetemi előadásai a leghivatottabb elmék számára is súlyos anyagot dolgoztak fel, fizikai és csillagászati előadásai — előadói kiválóságát itt a problémák súlyossága nem takarta el — a hallgatóság széles körét vonzották és lebilincselték. Matematikai tárgyú írásai a bennük feldolgozott problémák és gondolatok súlyossága következtében nem ragadták meg kora olvasóközönségét.

Sokrétű és kiemelkedő tehetsége, széles skálájú műveltsége, tanári kiválósága, szervező készsége, hatalmas aktivitása és erkölcsi nagysága volt tekintélyének forrása. A matematikát tekintve, környezete hozzáképest középszerű szakemberekből állt, akik képtelenek voltak megérteni korszakalkotó felfedezését, eredeti és mélyenszántó gondolkodásmódját. Nagyon elkeserítette az a tudat, hogy éppen abban nem képesek kortársai megérteni és követni, amiben oly nagyot alkotott, s elszomorították azok a korlátoltságból fakadó, kicsinyes, sőt nem egyszer rosszindulatú támadások, amikben éppen geometriai felfedezése miatt volt része.

Lobacsevszkij egyetemi pályafutását tekintve, hamar kibontakozott, gyorsan és fiatalon érte el az őt megillető poziciót, mégis sokat kellett tűrnie a brutális arakcsejevi önkénytől, s az őt körülvevő fojtó légkör zárkózottságra kényszerítette. Bizonyos fokig előadásaiban érezte a szabadságot, s az ifjúság általában fogékony, haladó szelleme vigasztalta kortársainak elfogult s elvakult szembefordulásáért. Ezért is volt számára oly fájdalmas, midőn 1846-ban meg kellett válnia a katedrától.

Bizonyos, hogy műve megjelenésekor azt csak egyetlen ember értette meg: *Gauss*. *Gauss* javaslatára a göttingai *Korolevi Tudós Társaság* levelező tagjává is választotta. 1843-ban írt levelében megköszönte *Gauss*nak s a Társaságnak a megbecsülés e szerény jelét. *Gauss* bizalmas beszélgetései során, s leveleiben nagy elismeréssel méltatta *Lobacsevszkij* zseniális alkotását. Nem érezte azonban erkölcsi kötelességének, hogy többet is tegyen a hazája határán túl ismeretlen nagy tudós érdekében. E tekintetben viselkedése *Bolyai János*sal szembeni passzív magatartására emlékeztet. *Bolyai Farkas*nak mégcsak megemlítette *Lobacsevszkij* művét, azonban *Lobacsevszkij*nak nem tett említést sem az *Appendix*ről. S ha érdemét tekintjük, leszögezhetjük, hogy *Lobacsevszkij* a maga korában bizony nem sokat kapott azzal, hogy *Gauss* is kifejezte elismerését.

Szeretném előadásomban kidomborítani azt a tragikus tényt, hogy bár *Bolyai* és *Lobacsevszkij* a kutatásban egy úton jártak, problémalátásuk, gondolatviláguk a legszorosabb rokonságot mutatja, mégis egymásról nem tudva, külön-külön harcoltak tudományos eszméik elfogadtatásáért. *Gauss*nak lett volna feladata, hogy e két matematikust bemutassa egymásnak. Ezt azonban — a tudomány nagy kárára — elmulasztotta megtenni.

Előadásomban párhuzamba állítom *Bolyai* és *Lobacsevszkij* munkásságát, rámutatva arra, hogy miben egyezik, s miben tér el egymástól.

Azon kell kezdenem, hogy mindketten felismerték, hogy az V. euklideszi posztulátumot az euklideszi axiómarendszer többi axiómájából és posztulátumából nem lehet levezetni, mert azokkal az V. posztulátum tagadása is megfér, mert az V. posztulátum tagadására egy nem kevésbbé ellentmondásnélküli geometria építhető fel, mint az euklideszi. Ezt az eredményt közel egyidőben és egymástól függetlenül érték el. A prioritás kérdését felvetni nem helyes, nem is célom. Következő mondanivalómnak nem is ez a célja.

Mindketten olyan felfogásban tekintették a teret, amely a dialektikus materializmus felfogásához áll közel. Hamis útra tévednénk, ha azt igyekeznénk bizonyítani, szavaikat idézgetve, hogy a dialektikus materializmus tudatos hirdetői voltak, azonban a dialektikus materializmus felfogását bizonyos tekintetben megközelítették. Kétségtelen, hogy e tisztult felfogásuknak köszönhető az a bátor és következetes kutató tevékenységük, mely a nem-euklideszi geometria felfedezésére vezette őket. Ilyen alapon jutottak el arra a felismerésre, hogy a valóságos tér matematikai leírásának az euklideszi geometria rendszere nem az egyetlen, logikus módja. Így jutottak el arra a felfogásra, hogy a valóságos térbeli összefüggéseket és azoknak geometriai értelmezését nem szabad azonosítani. Az euklideszi geometria alapját alkotó axiómarendszer párhuzamossági axiómája független a többitől. A többi axiomából csak annyi következik, hogy a háromszög szögösszege nem nagyobb $2R$-nál; továbbá az, hogy egyetlen konkrét háromszög esetében, aszerint, hogy

$$\text{szögösszeg} = 2R, \text{ avagy szögösszeg} < 2R$$

ugyanez az összefüggés már logikailag következik minden háromszögre. Ezek ugyan már *Saccheri*, *Lambert* kutatásaiban tisztázott tételek, s explicit fogalmazásuk, szabatos bizonyításuk *Legendre*nál megtalálható, de *Lobacsevszkij* és *Bolyai* előtt a kutatók ezen a ponton megálltak. Bár *Lambert* és különösen *Taurinus* már sejtették, hogy a többi euklideszi axiómából és abból az axiómából, hogy a „*szögösszeg* $< 2R$“, logikai ellentmondás nem következik, az így nyert nem-euklideszi rendszert elvetették. Mégpedig azért, mert „a valóságos tér tapasztalati összefüggéseinek ellentmondó tételekre vezet“. *Bolyai* és *Lobacsevszkij* vették csak észre, hogy nem a valóságos tér tapasztalatainak, hanem a tapasztalatok euklideszi értelmezésének mondanak ellent a nem-euklideszi geometria bizonyos tételei. Kidolgoztak tehát az euklideszivel logikailag egyenrangú, nem-euklideszi geometriát. Azt pedig, hogy vajjon a valóságos térbeli viszonyokat melyik írja le helyesen: az euklideszi, vagy a nem-eulideszi, csakis a tudományos tapasztalat döntheti el.

Lobacsevszkij és *Bolyai* önkényesnek minősítették az euklideszi párhuzamossági axiómát, felépítették a nem-euklideszi geometriát, mint az euklideszivel egyenrangú s az objektív valóság térbeli összefüggéseinek visszatükrözésére az euklideszivel egyaránt alkalmas rendszert, és ezzel a geometriát forradalmi, s tartalmilag materialista módon alakították át.

Megállapítható, hogy erre az új, forradalmi felfogásra közel egyidőben emelkedtek. *Lobacsevszkij* 1823-ban még csak annyit látott tisztán, hogy az V. axiómának a többitől való levezetése nyilt kérdés, de a probléma tisztázásának útját-módját még nem látta. *Bolyai* már 1823 november 3-i levelében írja, hogy a nem-euklideszi geometriában döntő fontosságú eredményre jutott.

Lobacsevszkij 1826 február 24-én mutatta be egy dolgozatát a kazáni egyetem fizika-matematika karának. Ez a dolgozat elveszett, de más dolgozataiból rekonstruálható, hogy ebben a nem-euklideszi geometria alapjait dolgozta ki.

Bolyai szintén 1826 elején adta át volt tanárának, *Wolter* századosnak a nem-euklideszi geometriára vonatkozó műve kéziratát. Ez a kézirat ugyancsak elveszett.

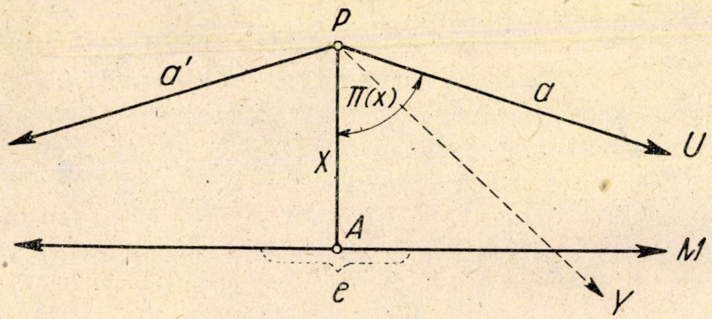
Az első nyomtatott mű, mely *Lobacsevszkij* felfedezéséről ad számot, *1829-ben jelent meg:* a *Kazanszkij Vesztnyik* 1829—30. évfolyama a „*A geometria alapjairól*“ című értekezést közölte. Ebben *Lobacsevszkij* már a hiperbolikus sík derékszögű háromszöge oldalai és szögei közötti összefüggéseket levezeti; továbbá a hiperbolikus tér analítikus és differenciál geometriáját is kidolgozza és az alkalmazások körében bizonyos határozott integrálok kiszámítására felhasználja.

Bolyai első és egyetlen nyomtatásban megjelent műve, mely kutatásai eredményeiről számot ad, az *Appendix*. Különlenyomatai már 1831 júniusában megjelentek.

Lobacsevszkij és *Bolyai* tárgyalása egyaránt az euklideszi axiómarendszer V. axiómájának törlésével nyert *maradék axiómarendszerből* indul ki s a párhuzamosság új értelmezésével kezdődik. Legyen $PA \perp e$. Ha az e egyenes és a kivüle lévő P pont síkjában a P pontból kiinduló $\overrightarrow{PY}$ félegyeneseket tekintjük, akkor a maradék axiómarendszer következményeképpen van olyan — a PA egyenesnek $\overrightarrow{AM}$-mel megegyező oldalára eső — az AM-et *nem metsző* $\overrightarrow{PU}$ félegyenes, hogy a P-ből kiinduló, de az $APU\sphericalangle$ tartományában levő *minden* félegyenes metszi az $\overrightarrow{AM}$ félegyenest. Ezt a $\overrightarrow{PU}$-t tartalmazó a egyenest, valamint ennek a PA egyenesre vonatkozó tükörképét, az a' egyenest nevezzük az e egyenessel párhuzamos egyenesnek. $PA = x$ távolságot és az $APU\sphericalangle$ szöget egymáshoz tartozó *párhuzamossági távolságnak* és *párhuzamossági szögnek* nevezzük.

$$APU\sphericalangle = x.$$

Két eset lehetséges, vagy minden ilyen konfigurációra nézve $\Pi(x) = R$,* vagy minden ilyen konfigurációra nézve $\Pi(x) < R$. Ha a $\Pi(x) = R$ állítást axiómaként elfogadjuk s a maradék axiómarendszerhez csatoljuk, akkor a nyert axiómarendszerből az euklideszi geometria vezethető le. Ha a $\Pi(x) < R$ feltevést fogadjuk el, akkor a vele kiegészített maradék axiómarendszer olyan axiómarendszert alkot, melyből a nem-euklideszi geometria vezethető le.



1. ábra

A további tárgyalásban két út kínálkozik. 1. Kidolgozni a $\Pi(x) < R$ feltevés következményeit. Ezt az útat követte *Lobacsevszkij*. 2. Mellőzni a párhuzamossági szögre tett bárminemű feltevést — csak annyit fogadva el, hogy a $\Pi(x) > R$ állítás föltétlenül hamis — s csupán a maradék axióma-

* Az R a derékszög jele.

rendszer következményeit levezetni. Az így nyert geometriai rendszer a geometria mindkét típusát egyaránt magában foglalja. Ezt az útat követte *Bolyai*.

Tehát *Lobacsevszkij* a $\Pi(x) < R$ feltevésre épített geometriát — amit *hiperbolikus geometriának* is szokás nevezni — az euklideszi geometriával párhuzamosan, de különválasztva tárgyalta. *Bolyai* pedig (a kétféle geometria közös magvát kiemelve) egy magasabb fokú szintézisben együtt tartva tárgyalta a geometria két típusát, s csak olyankor választotta ketté, ha az egyik, vagy másik rendszerben valami sajátosan jellemző összefüggést kívánt kiemelni. *Lobacsevszkij,* mint képzett fizikus és csillagász, a megfelelő mérőeszközök birtokában volt, s bízott benne, hogy a tudományos tapasztalat alapján tisztázható, vajjon a fizikai tér euklideszi, avagy nem-euklideszi természetű. Ezért dolgozta ki nagy részletességgel a hiperbolikus geometria metrikus összefüggéseit, alkalmazásait. Sőt igen érdekes, a valószínűségszámítás körébe vágó problémákra is ezen a réven jutott, és értékes eredményeket ért el. *Bolyai* viszont — a világtól elzárva — hasonló problémák megoldására nem is gondolhatott. További vizsgálataiban is inkább az elméleti következmények továbbfűzését tartotta szem előtt.

Így azután *Lobacsevszkij* a hiperbolikus geometria megalapozásának részletesebb kidolgozásában, a nem-euklideszi analitikus és differenciál geometriának alapos kifejtésében, az alkalmazásokra kész tételek és képletek gazdagságában, továbbá mindezeknek publikálásában sokkal többet adott, mint *Bolyai*.* Viszont *Bolyai* is tovább folytatta kutatásait, s az önmaga számára készült feljegyzéseiből megállapítható, hogy az abszolút geometria terében — a maradék axiómarendszert kielégítő teret nevezzük így — az állandó görbületű felületeken érvényes geometriák megállapításában jutott el olyan messzire, ahova csak a XIX. század végén érkeztek el más és szerencsésebb körülmények között dolgozó kiváló matematikusok.

Lobacsevszkij nem csupán a geometriai vizsgálatok terén találkozott *Bolyai*val, hanem a matematika más területén is. Így mindketten élesen bírálták az aritmetikában akkor még általánosan szokásos önkényes fogalomalkotást, formalizmust. A számfogalom fejlődését az általuk élesen kifogásolt felfogás valóban erősen gátolta. *Lobacsevszkij* az *Algebra, vagy véges mennyiségek kalkulusa* c. könyvében, *Bolyai* a *Responsio* c. kéziratában olyan felfogásban tárgyaltak bizonyos kérdéseket, amely felfogás csak a későbbi fejlődés során vált általánossá.

* Lobacsevszkij későbbi, a nem-euklideszi geometriával foglalkozó művei a következők:

Elképzelt geometria (1835).
Az elképzelt geometria alkalmazása néhány integrálra (1836).
A geometria új alapjai a párhuzamosak teljes elméletével (1835—1838).
Geometriai vizsgálatok a párhuzamosak elméletének köréből (1840).
Pángeometria (1855).

Abban is találkoztak, hogy a komplex számok elmélete és a nem-euklideszi geometria között szoros tartalmi kapcsolatot fedeztek fel. A komplex számok használata mellett szoros formai összefüggés mutatható ki a hiperbolikus és a szferikus trigonometria között. *Bolyai* különösen messzire hatol e kérdésben, a *Responsio* 9. és 11. §-ában. *Lobacsevszkij* az *Elképzelt geometria* c. művében írt részletesen erről a kérdésről.

Lobacsevszkij problémalátása és a matematikai fogalomalkotás tekintetében megmutatkozó igényessége az analízis körébe vágó vizsgálatai során is eredeti felfogásra, figyelemreméltó eredményekre vezettek. Észrevette, hogy a függvény differenciálhatósága nem következik még a folytonosságból, s a folytonosság differenciálhatóság nélkül is fennállhat. *Bolyai* hasonlóképpen élesen kifogásolta az analízis fogalom alkotásainak bizonyos lazaságait, s néha weierstrassi szigorúságra emlékeztetnek törekvései. Így például kifogásolta még a végtelen sugarú kör elnevezését is, mondván, hogy a kör fogalma a távolság és a pont közönséges fogalmát feltételezi. Bevezette az uniformis görbe fogalmát — melynek definiáló tulajdonsága az, hogy húrjainak felező merőlegesei sugársort alkotnak — s ebben a fogalomban megfér a kör, a paraciklus és a hiperciklus is.

Figyelemreméltó eredményeket értek el mindketten az analizben is. A trigonometrikus függvények hatványsora, valamint az Euler-féle

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

összefüggés már *Lobacsevszkij* előtti időkben ismeretes volt, mindezeknek mélyreható konzekvenciáit először *Lobacsevszkij* vonta le. *Lobacsevszkij* a hatványsorok segítségével definiálja a trigonometrikus függvényeket, analítikus úton felépíti a trigonometriát és megmutatja, hogy ez a trigonometria a régi értelemben vett trigonometriát magában foglalja. *Bolyai* hasonló módszertani úton halad a *Responsio*ban, annak 8. §-ában a logaritmusnak új elméletét adja. A logaritmust sorral értelmezett függvény inverz függvénye gyanánt tekinti, majd erre támaszkodva a hatványnak tetszőleges kitevőre való fogalmát értelmezi.

Érdekes találkozás állapítható meg a két kutató topológia körébe vágó meggondolásai és fogalomalkotása tekintetében is. *Lobacsevszkij* sűrűn használ topológiai jellegű meggondolásokat, s tárgyalása során — különös érzékkel — előbbre helyezi azokat a mozzanatokat, amelyekhez nem kell metrikus meggondolásokat alkalmaznia. Erre már az 1823-ban megjelent *Geometria* c. könyvében is találhatunk példát. *Bolyai* idősebb korából származó feljegyzéseiben figyelemreméltó megjegyzéseket találunk, amelyekből megállapítható, hogy bizonyos, a kombinatorikus topológia körébe vágó összefüggéseket fedezett fel, ill. sejtett meg. Különösen a *Raumlehre* c. kézírata tartalmaz ilyen gondolatokat.

Térjünk vissza *Lobacsevszkij* nem-euklideszi geometriával foglalkozó műveire. Kortársai — általában — meg sem értették, de bírálták és éles hangon támadták. *Gauss* ezeket a bírálatokat *„ostobaságnak“* bélyegezte. *Lobacsevszkij Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből* című könyve *Bolyai Farkas* és *János* kezébe is eljutott 1848-ban. Figyelmet érdemel az a körülmény, hogy a múlt század közepén, midőn a matematikusok még — általában — nem értették *Lobacsevszkij*t, hazánkban már hívatott bírálói voltak. *Bolyai János* olvasta e művet, s terjedelmes kéziratot tesz ki bírálata, amelyet az irodalom röviden csak *„Észrevételek“* címen idéz. Éles hangú, de teljesen tárgyilagos bírálat, rámutat bizonyos tárgyalásbeli hiányosságokra, egyes tételek mélyebb következményeire; zseniális megjegyzésben olyan kísérleti eljárás alapötletét adja, amely kísérlet — a Newton-féle általános tömegvonzási törvény abszolút térben való képletére támaszkodva — esetleg alkalmas volna annak eldöntésére, hogy a fizikai tér euklideszi, vagy nem-euklideszi természetű-e. Nem olvasók, csak önmaga számára írta meg e bírálatot. Lenyűgözi a nagy orosz matematikus tárgyalásának matematikai fínomsága, eleganciája, s elragadtatását is kifejezi matematikai mondanivalói között. *Bolyai Farkas Kurzer Grundriss* (1851) című 65 lap terjedelmű könyvecskéjében 9 lapot tesz ki *Lobacsevszkij* szóbanforgó művének méltatása.

Lobacsevszkij nagy műveltségű, filozófiában képzett (a maga korában haladó nézeteket valló) kiváló professzor, széles tudományos képzettségű, zseniális tudós volt. Művelt barátok között, a kazáni egyetem légkörében élt, s forradalmi felfedezését mégsem értették meg sem környezete, sem kortársai. *Lobacsevszkij* nem csak a matematikában, hanem a fizikában is eredeti gondolatokat vetett fel, természettudományos képzettsége termékenyítő hatással volt matematikai gondolkodására. Mély meggyőződése volt, hogy a *matematika nem az elvont, formális konstrukciókban tükrözi lényegét, hanem a matematikának materiális, fizikai alapjai vannak, s lényegét ezeknek az egyre mélyebb és egyre lényegbe vágóbb visszatükrözése jelenti. Bolyai*, ha más úton is, ha más körülmények között is, lényegében ugyanerre a felfogásra emelkedett. *Bolyai* képzettsége, matematikai tájékozottsága *Lobacsevszkij*éhoz képest hiányos. Környezetében kevés művelt fő akadt. Korszakalkotó felfedezésének lényegét, tudományos eszméit, még apja is csak nehezen bírta követni. Alkotó éveiben, nyugdíjazása után végtelenül primitív környezetben élt, siralmas anyagi körülmények között tengődött. Szívesen lett volna tanár, de még ez a vágya is elérhetetlen volt. A közömbösség fullasztó légkörében matematikai felfedezése még rosszindulatú bírálatot sem kapott, nem törődtek vele. *Lobacsevszkij*t, ha nem is nagyszerű felfedezéséért, legalább becsülték, szerették. *Bolyai*nak még ebben is alig volt része.

A szocialista társadalomban élve csak elgondolni, de nem átérezni tudjuk azt a hatalmas vergődést, küzdelmet, amelyet *Lobacsevszkij* és *Bolyai* vívtak tudományos eszméik, korszakalkotó felfedezésük ismertetéséért és elismertetéséért.

Százötven esztendő pergett le *Bolyai János* születése óta. Azóta megismerte a világ *Lobacsevszkij* és *Bolyai* alkotását. Tudományos felfogásuk, gondolataik termékeny hatása egy évszázad matematikai fejlődésében ragyogva tükröződik. S a szovjet és a magyar tudomány jogos büszkeséggel tekint vissza két nagy példaképére *Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij*ra és *Bolyai János*ra.

A NEM-EUKLIDESZI GEOMETRIA ÉS AZ AXIÓMATIKUS DEFINÍCIÓK

J. HADAMARD

Bemutatta Hajós György lev. tag az ünnepi ülésszak 1952 december 16-án tartott ülésén

Azokból a híres megfontolásokból indulunk ki, amelyeket *Pascal* Gondolatok c. munkájának első részében a geometriának szentel. Vele együtt megjegyezzük, hogy az lenne az ideális, ha minden lépést bebizonyítanánk és minden kifejezést definiálnánk, amelyet alkalmazunk. *Nominális definíciókról* van szó — és *Pascal*, akinek efelől a legkisebb kétsége nincs, ezt határozottan ki is mondja — vagyis „olyan dolgoknak névvel való ellátásáról, amelyeket tökéletesen ismert kifejezésekkel világosan megjelöltünk".

Úgy látszik azonban, hogy ennek a kettős ideálnak a megvalósítása elé áthághatatlan akadály tornyosul. Semmit sem lehet bebizonyítani deduktíve, csak úgy, hogy előző principiumokból indulunk ki. Ha megkívánjuk, hogy ezeket is hasonló módon bebizonyítsuk, és így tovább, végül is elérkezünk ahhoz a pillanathoz, amikor meg kell állnunk ezen az úton. Ez a megjegyzés, amelyet már az ókorban is megfogalmaztak, a híres „diallele", amely mindenkor foglalkoztatta a filozófiát, s amelyet egyébként most mellőzünk, mert nem függ össze jelen kérdésünkkel.

De úgyanígy állunk a definíciók tekintetében is: „világos, hogy az első fogalmak, amelyeket definiálni akarunk, megmagyarázásukhoz még előbbieket tételeznek fel... Azután kutatásainkat mind tovább és tovább vezetve szükségképpen oly primitív szavakhoz érkezünk, amelyeket többé már nem lehet definiálni, valamint olyan világos fogalmakhoz, hogy nem találunk olyanokat, amelyek náluk világosabbak lennének."

Végeredményben tehát vannak olyan első fogalmak, amelyeknek a definíciója lehetetlen. Szerencsére, legalábbis úgy tűnik fel az első pillanatban — és a tudomány mindig ilyen módon okoskodott — az ilyen definíció szükségtelennek látszik azon oknál fogva, hogy az ilyen körülmények között alkalmazott fogalmaknak az értelme tökéletesen világos és mindenki számára érthető.

Csakhogy ez a helyzet, amelyet utolsó mentsvárként kénytelenek vagyunk elfogadni és amely az egyedüli lehetségesnek látszik, tarthatatlannak fog bizonyulni; sőt már *Pascal* előtt is tarthatatlannak kellett volna feltűnnie: hiszen már a tárgy első kifejtésekor* alkalmilag elejt egy megjegyzést, amely a logika által valaha is megvalósított legalapvetőbb hódítások egyike. Azon

* Pensées, első rész, art. II.

tévedésekre célozva, amelyeket a definíciók alkalmazásában elkövethetünk, a következőkben látja a csalhatatlan gyógyszert:

„Gondolatban a meghatározott dolog helyére a definíciót kell tenni, amelynek mindenkor annyira az előtérben kell állnia, hogy ahányszor csak például a páros számról beszélünk, pontosan azt értsük, hogy ez olyan szám, amely két egyenlő részre bontható, s ez a két dolog gondolatunkban annyira összekapcsolt és elválaszthatatlan legyen, hogy mihelyt a beszéd utal az egyikre, szellemünk azonnal hozzákapcsolja a másikat is."

Ezt a megjegyzést, amely mintegy menetközben és esetlegesen hangzott el, *Pascal** kifejezettebb hangsúllyal látja el, amikor a következő fejezetben, a Meggyőzés művészetében előző megfontolásait nyolc szabályban foglalja össze, amelyek közül itt elegendő lesz az elsőre és az utolsóra utalni:

I. Ne vállalkozzunk semmiféle magában annyira jólismert dolognak a definíciójára, amelynek megmagyarázására nem állnak rendelkezésünkre tisztább fogalmak.

. . . .

VIII. Gondolatban a meghatározott dolog helyére mindig a definíciót tegyük, hogy tévedést ne kövessünk el a definíciók által körülhatárolt kifejezések kétértelműsége következtében.

Ime nyolc szabály, amelyek alapvetők minden logikában, minden okoskodásban, minden gondolati aktusban; különösen így áll ez az utolsóval. De hogy lehet az, hogy a *Gondolatok* zseniális szerzője nem látta felbukkanni a különös ellentmondást e két principium között, amelyek néhány sornyi távolságban követik egymást? Mert nem gondolhatunk arra, hogy a meghatározott dolog helyére annak definícióját tegyük ott, ahol egyáltalán nincs definíció.

Amit itt *Pascal*nál különösen hiányolhatunk, anélkül, hogy teljesen sikerülne ezáltal megmagyarázni a pszichikai vakságot, amelyre utaltunk,** az az, hogy nem volt teljes tudatában az általa kimondott principium fontosságának. Mindenkor elengedhetetlen, hogy a meghatározott dolog helyére annak definícióját tegyük: mindennapi gondolkozásunkban azért elengedhetetlen, mint mondja, hogy elkerüljük a tévedéseket; de a matematikus számára még egy más szerepe is van, nem negatív, hanem pozitív szerepe. Ez nemcsak kritikai principum, de konstruktív principium is, s mint konstruktív principium nélkülözhetetlen. Nélküle nemcsak az eltévedés veszélyének lennénk kitéve, de

* U. o. art. III.

** Ez a jelenség, amelyet rendkívüli érthetetlenségénél fogva egyedülállónak gondolhatnánk, a tudományok történetében nem egy alkalommal jelentkezett. Lásd tanulmányunkat: Essay of the Psychology of Invention in the mathematical Field, II. kiadás. Princeton, N. J. USA. 1949. Newton, halálának háromszázados évfordulóján elhangzott közleményünket, amelyet a londoni királyi társaság közölt 1946-ban és az Association Française pour l'avancement des Sciences Kongresszusát Genfben, 1949-ben.

egyetlen lépést sem tudnánk tenni. Ez nyilvánvalóvá válik bármely bizonyításban. Legyen szó például annak bebizonyításáról, hogy ha A és B egy R sugarú O középpontú körvonalon fekvő két pont, akkor AB legfeljebb $2R$-rel lehet egyenlő. A geométernek első gondja OA és OB összekötése. Tehet-e másként? Nyilvánvalóan nem, mert hiszen a körvonal definícióját kell kifejeznie, amely pontosabban abban áll, hogy az OA és OB távolságok mindegyike R-rel egyenlő; s ez véges-végig így van a geometriában.

Tehát semmiféle fogalom nem fordulhat elő okoskodásunkban másként, mint definíciója közvetítésével. De hogyan történhetnék meg ez ott, ahol nincs definíció?

* * *

Vajjon *Pascal* nem tért-e volna vissza erre a pontra, s nem világította-e volna meg, ha foglalkozott volna *Euklidesz* axiómájával? Ez, *Pascal* előtt és után, számos geométer kutatásának tárgya volt, akik gyakran, de mindig tévesen, azt hitték, hogy bebizonyították a titokzatos axiómát, anélkül, hogy eszükbe jutott volna ennek a kérdésnek s az oly érthetetlenül feledésbe hullott Meggyőzés művészete utolsó szabályának összefüggése.

A Meggyőzés művészete megjelenése után egy évszázaddal igen érdekes olvasmány a Geometria elemeinek első kiadása, amely a II. (1794) évben jelent meg*, ahol *Legendre* az előszóban bejelenti munkájának célját, amelyet úgy lehet tekinteni, mint a tudomány állapotának összefoglalását a XIX. század előestéjén. Elődeinek szemére hányja ki nem elégítő szigorúságukat.

„A geometria elemeivel kapcsolatban kifogásolhatjuk a ki nem elégítő szigorúságot. E munkák közül többnek lehetnek különleges előnyei, s elég jól megvalósíthatják a célt, amelynek kedvéért íródtak, de nincs köztük egyetlen egy olyan sem, ahol sikerülne tökéletesen kielégítő módon bebizonyítani az összes tételeket. A szerzők egyszer olyan dolgokat tételeznek fel, amelyeket a definíciók nem tartalmaznak, máskor maguk a definíciók hiányosak; olykor megelégszenek azzal, hogy a szemek tanúságtételére utalnak, máshol önmagukban igaz principiumokat alkalmaznak, melyek azonban bizonyos hanyagsággal látszanak együttjárni, amelyek a szellemet nem elégítik ki. Általában igen nehéz szigorúan tárgyalni az elemeket, nemcsak a geometriában de minden más tudományban is: a legegyszerűbb tételek a legzavarbaejtőbbek, ezeket bizonyítják be a legkevesebb sikerrel. A nehézség azonban nem ok arra, hogy megakadályozza az ennyire hasznos munkákkal való foglalkozást." **

Azt kell-e gondolnunk, hogy *Legendre* nem olvasta a Meggyőzés művészetét? A feladat, amelynek nekigyűrközik, több, mint „zavarbaejtő", több

* Clairaut Elemei, melyeknek célja nem a szigorúság, hanem az egyszerűség és minden alkalommal a mindennapi megfigyelésre támaszkodnak, itt nem jöhetnek szóba.

** Az alapfogalmak szerepének meg nem értése annál inkább különös, mert *Legendre* gondosan utal *D'Alembert* Filozófiai értekezéseire, aki tökéletesen tudatában lévén azon dolgok szerepének, amelyeket ő „alapfogalmaknak" nevez, maga is világosan elismeri definíciójuk lehetetlenségét.

mint nehéz: szükségképpen lehetetlen. A zavar, amelytől joggal fél, a későbbiek során megmutatja ezt, nála éppúgy, mint minden elődjénél.

Euklidesz axiómájának megtámadása előtt (tudjuk, hogy *Legendre* maga legalább is két alkalommal kísérelte meg bebizonyításukat, természetesen éppen olyan hamisan, mint bárki más) foglalkozni kell, vagy legalább is foglalkozni kellene két alapvető definícióval, az egyenes vonal és az egyenlő vagy inkább kongruens idomok definíciójával.*

Ez utóbbi az előbbi előtt jár, amely neki alá van rendelve, s pontosan azért, mert alapvető, mindig többé-kevésbbé el volt álcázva, míg az egyenes definíciójára sok tintát pazaroltak.

Bárki számára nincs egyszerűbb és világosabb fogalom, mint az egyenes vonal fogalma, „amelyről képet ad egy kifeszített fonál", de tudjuk, hogy éppen az okozza a nehézséget, hogy ez a fogalom a mindennapi megfigyelés számára annyira világos és egyszerű, hogy a geometria nem szorítkozhatik csak ennek a vizsgálatára.

Egy évszázaddal *Legendre* Elemei előtt, csaknem ugyanakkor, amikor *Pascal* a Gondolatokat írta, a geometria alapvető fogalmai igen alapos vizsgálat tárgyai voltak, amely azért igényel különös figyelmet, mert azt *Leibniz* végezte. A nagy filozófus a kérdés minden oldalát szemügyre veszi, különösképpen pedig a különböző definíciókat, amelyekre az egyenessel kapcsolatban gondolhatunk.

Magának *Euklidesznek* a definíciója: *Recta linea est, quae ex aequo suis interjicitur punctis,* egy nagy hibában szenved, abban,... hogy kevéssé érthető. Ezt *Leibniz* és *Legendre* egyaránt megállapítja, megegyezve abban a megjegyzésben** — s ez különös dolog két szerzőnél, akik egymásról nem tudtak — hogy ezt a definíciót „el lehetne vetni, mert semmiféle bizonyításhoz nem szükséges" (*Legendre* i. m., II. kiadás, az előszó 6. oldala).

Ez láthatólag Pascal szabályához való csatlakozás, mert vele együtt azt kell mondanunk, hogy egy definíciót nemlétezőnek kell tekinteni, ha nem fordul elő okoskodásainkban.

Kénytelen lévén egy másik definíciót elfogadni, *Legendre* ezt *Archimedesztől* kölcsönözi (aki valójában mint posztulátumot tételezi fel): „Az egyenes két pont között a legrövidebb út".

Ha *Legendre* (egyébként eléggé vitatható okokból) *Archimedesz* definícióját választja is kiinduló pontul, ez nem azért van, mintha azt a valóságban elöny-

* Ezt az elnevezést fogjuk használni. Nemcsak mert előnyben részesítendő az „egyenlő idomok" kifejezéssel szemben, amelyeknek elfogadása az oktatásban sajnálatosnak látszik előttem, hanem mert a terminológiának ez a megváltoztatása különösképpen szükségesnek mutatkozik, hogy a szóbanforgó fejtegetéseket követhessük, amelyekben az „egyenlő idomok" kifejezés inkább arra lenne alkalmazható, amit ma „ekvivalens idomok"-nak nevezünk.

** Úgy látszik, hogy *Leibniz* munkája az ő idejében nem került kiadásra, mi Leibnizens Mathematische Schriften V. kötete alapján ismerjük, amelyet *C. I. Gerhardt* adott ki Halleben 1858-ban.

ben részesítendőnek tekintené. Előszavában más nyelven beszél: arra emlékeztet, hogy az imént kimondott tulajdonság levezethető és *Euklidesz* le is vezette azt X. axiómájából: az egyenes olyan vonal, amelynek két pont között csak egyetlen helyzete lehet, ami — mondja ezen a helyen — „a legegyszerűbb és legáltalánosabb definíció, amelyet az egyenesről egyáltalában adhatunk."

De levezethető-e egyáltalában *Archimedesz* definíciója a X. axiómából? Igen is és nem is: a levezetés keresztülvihető a szóbanforgó axióma segítségével... ahhoz a tényhez kapcsolódva, *amit azonban nem szoktak kimondani (Legendre* éppoly kevéssé, mint *Euklidesz),* hogy az összes egyenesek kongruens idomok és megfordítva, minden valamely egyenessel kongruens idom maga is egyenes. Ez a X. axióma, azzal a hallgatólagos kiegészítéssel, amelyre utaltunk, *Legendre*-nál* különösen meglepő formát ölt, amely egybeesik a *Leibniz* által adott definícióval, azzal, amely felé a tudomány további haladása irányul majd: *az egyenes olyan vonal, amely mozdulatlanná válik abban a pillanatban, mihelyt két pontját rögzítjük.*

Egy utolsó definíció**, amelyre *Leibniz* gondol, alapjában véve az előbbire vezethető vissza.

E definíciók egyike sem — amint ez kitűnik a *Leibniz* nyomán adott felsorolásból — ment fel annak szükségessége alól, hogy először is megoldjunk egy fentebb már említett kérdést: a *kongruens* idomok definíciójának kérdését. Amennyiben a maga *Euklidesz* által megadott igen kevéssé világos értelmezésnek valami értelmet adhatunk, tulajdonképpen azt akarná mondani, hogy az egyenes az a vonal, amelynek minden szakasza (egészben vagy részben) kongruens minden más szakaszával; s akkor, mint azt már az ókorban *Apollonius* megjegyezte, éppen úgy alkalmazható a körvonalra, vagy a csavarvonalra is.

Ez az ellenvetés nem kerüli el *Leibniz* figyelmét. Hogy erre választ adhasson, az egyenest azzal a feltétellel jellemzi, hogy annak minden szakasza *hasonló* minden más szakaszához, vagyis a kongruens idom fogalmát helyettesíti egy másik sokkal kevésbbé primitív fogalommal, amelynek bevezetése egyébként semmissé tenné a kérdést, amely most foglalkoztat bennünket, mert, amint tudjuk, hasonló de nem kongruens idomok elfogadása (az egyenes szakaszokat kivéve) egyet jelent *Euklidesz* posztulátumának elfogadásával.

Archimedesz definíciójának nyilvánvalóan csak akkor van értelme, ha megmondjuk, hogy mi a hosszúság, és pontosabban, melyek az egyenlő hosszúságok?

Fentebb láttuk, hogyan kellene kiegészíteni *Euklidesz* X. axiómáját, hogy a Geometria első könyvét megalapozhassuk.

* II. Kiadás, Előszó VII.

** Id. h. (7), 174. o., (11) és (13), ahol (2) (172. o.) bevonásával kifejezett utalás történik a kongruens idomok fogalmára.

Végül az a definíció, amelyre vonatkozólag *Leibniz* és *Legendre* egyetértenek, mást nem igényel, csak annak közelebbi meghatározását,... hogy milyen mozgás viszi magával, vagy pontosabban milyen elmozdulások viszik magukkal azt a vonalat, amelyről csak annyit mondunk ki, hogy két pontja rögzített marad.

Így minden esetben, bár hallgatólagosan és valódi gondolkodási megszorítással, a kongruens idomok, sőt az „invariáns idom" definíciójából indulunk ki. De akkor — s erről biztosak lehettünk már eleve *Pascal* olvasása után — a geometria teljesen ellepleződik. *Legendre* kimondja, hogy *két nagyság*, vonal, felület, vagy szilárd test egyenlő, ha egymásra helyezve őket, teljes terjedelmükben egybeesnek.

Tekintsünk el a „nagyság" szó alkalmazásától ott, ahol mi inkább „idomot" mondanánk, valamint az „egyenlő" nagyságok szótól (ezt a jelzőt abban az értelemben vesszük, ahogyan ma használjuk; *Leibniz* a „congrua" szót használja), amely talán szokásos volt régente, mert *Leibniz*nél is megtaláljuk; de hogyan bocsássuk meg a kétértelműséget, az általunk előrelátott zavar jelét, amely a mondat következő részében nyilvánul meg, amely úgy látszik olyan idomokra utal, amelyeket már egymásra helyeztünk? Szigorúan véve a definíciónak lenne értelme — bár semmi haszna — egy rajz és annak másolata esetében, amikor éppen elkészítjük ezt a másolatot; de nem lenne semmi értelme, mihelyt a másolatot eltávolítjuk. S ha már *egymásra vihető* alakokról beszélünk, milyen feltételek mellett van ez az átvitel megengedve? Az Analysis Situs esetében bármely két tetszőleges háromszögre vonatkozólag koincidenciát érhetnénk el. Bár nem mondjuk ki, az invariáns idom kérdése merül fel: ez van elleplezve.

Legendre éppen úgy mint *Euklidesz* nem jutott el oda, hogy a geometriából, legalább is annak első elemeit tekintve, azt a szigorú és pontos tudományt alkossa meg, amelyet bejelentett.

* * *

Ezt az alapjain egyébként olyan rosszul álló épületet döntötte össze egy csapással *Bolyai* és *Lobacsevszkij* felfedezése. Nem mintha ennek az új geometriának a megalapozásakor teljes szigorúsággal és minden lehetséges ellenvetéssel szemben megmutatták volna, hogy az semmiféle ellentmondáshoz nem vezet. Az igaz, hogy ilyet nem találtak azon tulajdonságok között, amelyeket az euklideszi posztulátum tagadásából vezettek le, s melyek úgy következtek egymásból, mint a rendes geometriából levezetett tulajdonságok. De bármilyen messze mentek is el következtetéseik során anélkül, hogy ellentmondásra bukkantak volna, nem volt-e lehetséges, hogy mégis rábukkannak valami ellentmondásra, ha még tovább haladnak ugyanazon az úton? Csak úgy sikerült erre határozott nemmel válaszolni, hogy olyan idomokat szerkesztettek, amelyek ezeket a tulajdonságokat ténylegesen realizálták. Ezek a tulajdonságok azonosak a rendes geometria azon tulajdonságaival, amelyek megelőzik a posztulátumot, de különböznek tőlük attól a pillanattól kezdve, amikor a posztulátum szóbakerül.

Bátorító analógiát nyújtott a gömbfelület geometriája, amelyen a háromszögek tulajdonságai ugyanolyan módon térnek el a szokásos egyenesvonalú háromszögek tulajdonságaitól, mint ahogy ez a nem-euklideszi geometriában történik*, de ellenkező irányban, minthogy egy *gömbháromszög* szögeinek összege *nagyobb* két derékszögnél. Ez az a geometria, amelyet *Riemann* az egész térre ki tudott terjeszteni, egyenesekül választva azon köröket, amelyeknek síkjai egy adott *O* ponton haladnak át s amelyek változatlanok maradnak egy *O* pólusú inverziónál.

Beltrami is azt gondolta, hogy valóban sikerült realizálnia egy nem-euklideszi geometriát, legalább is egy kétdimenziós nem-euklideszi geometriát, mikor egy felületet, a *pszeudoszférát*, definiált, amelyen érvényes ez a geometria. Ez tengelyével párhuzamosan mindkét irányban a végtelenbe nyúló forgási felület. Két palástból áll, melyeket egy szinguláris parallelkör választ el egymástól. Mindkét paláston lehet geodétikus vonalakat és geodétikus háromszögeket rajzolni, melyek (hacsak nem túlságos nagyok) az egybevágóság (de nem a hasonlóság) három klasszikus esetének megfelelően viselkednek és eleget tesznek a közönséges geometria bevezető tételei egész sorozatának, másrészt viszont szögeik összege kisebb két derékszögnél, vagyis tulajdonságaik a Bolyai—Lobacsevszkij-féle elméletnek felelnek meg. Csakhogy ezeknek a háromszögeknek nem szabad túl nagyoknak lenniök: nem terjedhetnek egészen a szinguláris parallelkörig s nem szabad, hogy a felület körüljárásával keletkezzenek, hanem a felületen folytonos deformációval egyetlen pont környezetére redukálhatóknak kell lenniök. *Beltrami* példája csak akkor volna meggyőző, ha rendelkezésünkre állna egyszeresen összefüggő szingularitásoktól mentes konstans negatív görbületű felület. *Hilbert* azonban bebizonyította, hogy ilyen felülete nincs.

Itt tehát olyan lehetetlenséggel állunk szemben, amely, amint majd végül meglátjuk, mélyen összefügg a dolgok természetével. Másként kellett tehát eljárni. Olyan eljárással érünk célhoz, amelyet *Poincaré* különösen meglepő formában a *Revue Générale des Sciences*** hasábjain fejtett ki. Egy *S* gömb belsejébe zárt közeget tételez fel, amelyben bizonyos hőeloszlás folytán minden

* Több szerzővel ellentétben úgy vélem, hogy nem helyénvaló a nem-euklideszi geometria nevet adni annak a geometriának, amelyet *Riemann* alapozott meg (s amely — ezt talán felesleges is mondani — különbözik attól a másik alapvető geometriától, amely doktori értekezésének tárgya). Szerintem ezt a nevet fenn kell tartanunk azon geometriák részére, amelyekben a pusztulátum hamis, de minden előtte álló tétel igaz. Nos, ez az utóbbi feltétel nem teljesül a Riemann-féle geometriában, amelyben minden pontnak van egy „szemközti" pontja (amely belőle inverzióval áll elő), amely vele Riemann-féle „egyenesekkel" köthető össze.

** III. kötet, 1892., 75. o.

tárgy megfelelő összehúzódást szenved el abban a mértékben, ahogyan a középponttól távolodunk. Ez oda vezet, hogy a méretek végtelen kicsinnyé válnak, amint egyre jobban és jobban közeledünk a gömb felületéhez. A gömb belsejében ilyen feltételek mellett létező idomok viselkedése a Bolyai—Lobacsevszkij geometria törvényeit követné.

Az egyenes tulajdonságai, a fentebb említett definíciók bármelyikét veszszük is alapul, nem az általunk ismert egyeneseket jellemzik, hanem az S gömböt merőlegesen metsző köröket. A „síkok" most az S-et merőlegesen metsző gömbfelületek lennének s ezek mindegyikén egy adott ponton át több „párhuzamos" egyenest húzhatnánk egy adott „egyenes"-hez, vagyis egy adott körhöz.

Így az eredményhez olyan irányt követve jutunk el, amely teljesen különbözik a *Beltrami* által követett, zsákutcába vezető úttól. Ő a pszeudoszférán húzott vonalak hosszúságát a szokásos módon definiálta; teljesen másként áll a dolog *Poincaré* fiktív közegében, valamint *Riemann* hatalmas általánosításában.

Az a nagy felfordulás tehát, amelyet *Bolyai* elmélete jelent, sokkal mélyebb, semmint azt *Beltrami* gondolta: telibe találja azt a hibát, amelyet az előbb állapítottunk meg az euklideszi páncélzaton. *Euklidesz*től *Leibniz*ig és *Legendre*-ig a geométerek képtelenek voltak definiálni, hogy mit kell érteni *egyenlő* vagy *kongruens* idomokon *egyenlő hosszúságokon* és *egyeneseken*. És most már látjuk, hogy ez nem lehetett másként, mert most *Poincaré*t követve ugyanezeket a szavakat más értelemben használhatjuk, mint amelyet nekik a klasszikus elméletben adtak.

És most ime visszajutottunk ahhoz a kérdéshez, amely *Pascal* előtt is felmerülhetett volna, s amelyet az ő olvasásakor mi magunknak felvetettünk; hogy mivel helyettesíthetnők ezeket a definíciókat, amelyeknek a nemlétezését megállapítottuk, sőt lehetetlenségét felismertük, mivel ugyanazok a szavak különböző értelemmel bírnának az euklideszi és a nem-euklideszi esetben, amelyektől azonban, mint ezt a Meggyőzés művészete VIII. szabálya mutatja, lehetetlen eltekintenünk, ha bármiféle okoskodásnak akarjuk is alávetni a szóbanforgó fogalmakat.

A jelenkori tudomány megoldotta ezt a kérdést, amelyre, ha a nehézség tudatára ébredt volna, *Pascal* kétségtelenül válaszolt volna, ezzel több mint két évszázaddal előbbrevíve a matematikai logika haladását. Kétségtelen, hogy lehetetlen a szóbanforgó alapfogalmakra azon „névdefiníciók" egyikét ráhúzni, amelyeket *Pascal* egyedül ismert, de jellemezhetjük őket egy axiómarendszerrel, amely azon tulajdonságokat fejezi ki, amelyekkel őket ellátjuk, s amelyek okoskodásunk alapjául szolgálhatnak.

Így például azoknak az „elmozdulások"-nak a csoportja, amelyeknek alávethetünk egy idomot, amelynek „változatlannak" kell maradnia, a következő axiómarendszerrel jellemezhető:

ez a ponttranszformáció-csoport tranzitív, amikor egyetlen pontra alkalmazzuk, ellenben nem kétszeresen tranzitív. Két pontra alkalmazva egy invariánssal rendelkezik (amely jól ismert járulékos tulajdonságok segítségével, melyek ugyancsak az axiómarendszer egy részét alkotják, a távolságot fogja megadni);

a csoport azon transzformációi, amelyek két tetszőlegesen megadott egymástól különböző pontot változatlanul hagynak, ugyancsak változatlanul hagyják egy bizonyos mindkét irányban a végtelenbe terjedő vonal összes pontjait is. (Ez, per definitionem, az egyenes.)

Léteznek olyan felületek (per definitionem a síkok), hogy közülük bármelyiknek két pontját összekötő egyenes vonal teljes egészében benne fekszik a kérdéses felületben; stb.... és, a párhuzamosok szokásos (nominális) definícióját alkalmazva, az euklideszi axióma:

A. Az egyenesen kívül fekvő ponton át ehhez az egyeneshez csak egyetlen egy párhuzamos húzható, vagy, ha úgy tetszik:

A'. Egy egyenesvonalú háromszög szögeinek összege két derékszög.

Mindazonáltal egy axiómarendszer definícióként csak akkor fogadható el, ha kompatibilis, ha nem tartalmaz ellentmondásokat. *

Ami a változatlan idom fogalmát definiáló axiómákat illeti, ez az ellentmondásmentesség az analitikus geometria eredményeinek segítségével az aritmetika axiómáinak ellentmondásmentességére vezethető vissza.

Másrészt azt is meg kell vizsgálni, hogy ezek az axiómák egymástól függetlenek-e, vagyis, hogy valamelyik nem következménye-e a többi axiómáknak. Az is szükséges, hogy lehetővé tegyék a definiált tárgynak a tőle lényegesen különböző tárgyaktól való megkülönböztetését.**

Ami a változatlan idom fogalmát illeti, e két kérdésre *Bolyai*ig és *Lobacsevszkij*ig a geométerek úgy vélték, hogy igenlőleg felelhetnek — még a másodikra is, ha kihagyják az axiómák sorából az euklideszi axiómát. Tudjuk,

* Bármilyen különösnek látszhatik is, az eszmék hosszú ideig zavarosak maradtak (lásd *Enriques* fontos kritikai *Euklides* kiadását: Gli Elementi d'Euclide e la critica moderna, Stook, Roma, 1925) a definícióra vonatkozó e szükséges feltételt illetően s úgy látszik, azt hitték *Aristoteles* formális figyelmeztetése ellenére, aki ezen a ponton nem tévedett, hogy egy definíció már önmagában is biztosítja a definiált dolog létét. *Enriques* (id. h.) megjegyzi, hogy ez a tény érthetővé teszi azt a kedveltséget, amelyben egy olyan abszurd okoskodás részesült, mint az „ontológiai argumentum", amelyet *Descartes*ig bezárólag mindenki elfogadott, sőt amelyhez *Spinoza* is visszatért kissé eltérő formában.

** A „lényeges" szó hozzáadását szükségessé teszi az a tény, hogy semmi sem változnék, ha az egész teret alávetnők egy tetszőleges kölcsönösen egyértelmű és folytonos ponttranszformációnak. Az összes tulajdonságok az elmozdulások tulajdonságaitól kezdve ugyanazok lennének a transzformált idomokra, mint az eredetiekre, olyannyira, hogy elméletük ugyanaz lenne minden tekintetben. Így elméletileg a gömbgeometria idomait Mercator-féle vetületben is fel lehetne rajzolni, bár ez a pólus szomszédságában oly erősen eltorzítja őket, hogy a végtelenbe vetíti, mégis minden tétel e feltételek mellett érvényben marad.

hogy itt kettős tévedés forog fenn: az *A* axióma független a többiektől és nélküle az elmozdulások csoportja *nem teljesen* meghatározott; birtokunkban van egy másik ellentmondásmentes axiómarendszer is (az, amely szerint a Poincaré-féle fiktív közeg változik), amelyben az *A* axiómát a vele ellentétes axiómával helyettesítjük:

B. Egy egyenesen kívül fekvő ponton át ehhez az egyeneshez több párhuzamos húzható; vagy ha úgy tetszik:

B'. Vannak egyenesvonalú háromszögek, amelyekben a szögek összege kisebb két derékszögnél.

Az így nyert axiómatikus definíciók, az egyik az euklideszi, a másik a nem-euklideszi geometria számára, a változatlan idom fogalmára vonatkozólag helyettesítik a nemlétező nominális definíciót. *Legendre* és *Leibniz* hibája nem az, hogy ezt nem adták meg — hiszen lehetetlen megadni — hanem az, hogy azt képzelték, hogy kitérhetnek a kérdés elől egy másik definícióra szorítkozva, amelynek nélküle nincs értelme és mert így félreismerték *Pascal* alapvető szabályát. *Bolyai* és *Lobacsevszkij* fényénél mutatkozott meg a kérdés elől való kitérés lehetetlensége és következésképpen annak szükségessége, hogy a változatlan idom definícióját axiómatikus formában adjuk meg.

Ezt a szükségességet nem vette észre *Beltrami*. Kisérlete meghiúsult, végzetesen meg kellett hiúsulnia, mert nem vitte a kérdés igazi talajára, nem ment el a geometria valódi alapjának vizsgálatáig, a mérték fogalmáig, amelyet az előzőkben megkíséreltünk megvilágítani, s amely egyébként egy még sokkal mélyebb revizió tárgya volt abban a munkában, amely által *Riemann* zsenije előkészítette *Einstein* művét.

A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIA KÜLÖNBÖZŐ ELEMI ELŐÁLLÍTÁSAI

SZÁSZ PÁL

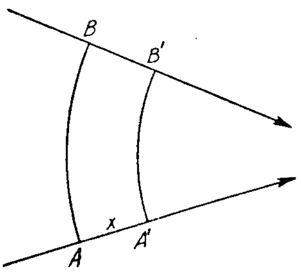
Előadta az ünnepi ülésszak 1952 december 17-én tartott ülésén

Ebben az előadásban a hiperbolikus trigonometriának három, módszertanilag lényegesen különböző elemi előállítását kívánom ismertetni. Az első egy a *Bolyai János* és *Lobacsevszkij* által teremtett klasszikus úton haladó térbeli előállítás, a második síkbeli, de egyébként a klasszikus segédeszközökkel dolgozik, mint a *H. Liebmann*-féle, a harmadik pedig közvetlen előállítás, amelyben a klasszikus segédeszközök használatát elkerüljük, amint először *L. Gérard* tette.

I. Előállítás a klasszikus úton

Bolyai János és *Lobacsevszkij* mind a ketten azon felismerés alapján állították elő a hiperbolikus trigonometriát, hogy a *paraszférán* az euklideszi síkgeometria érvényes, ha egyenes alatt *paraciklust* értünk. Útjaik a részletekben lényegesen különböznek egymástól. Közös kiindulópontjuk azonban az a tétel, hogy egymástól x távolságban haladó koncentrikus paraciklusokon (1. ábra) a külső valamely $\widehat{AB}$ ívének a belső megfelelő $\widehat{A'B'}$ ívéhez való viszonya

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = e^{\frac{x}{k}}, \qquad (1)$$



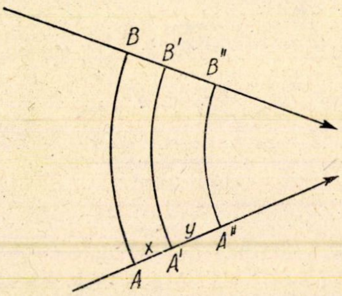
1. ábra

ahol k bizonyos meghatározott távolság, az ú. n. *természetes hosszegység* vagy a hiperbolikus geometria *paramétere*. E tétel annak a könnyen belátható ténynek folyománya, hogy az $\widehat{AB}:\widehat{A'B'}$ viszony csak az x távolságtól függ s ennek növesztésénél folyvást növekedik és minden 1-nél nagyobb értéket felvesz. Ennélfogva u. i. ez $\widehat{AB}:\widehat{A'B'} = f(x)$ függvény folytonos, s mivel nyilván eleget tesz az

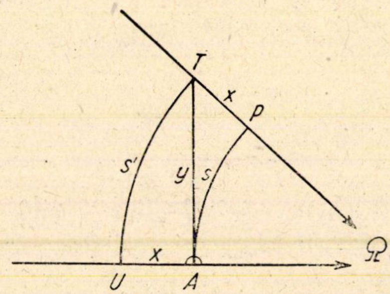
$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

függvényegyenletnek (2. ábra), *Cauchy* szerint következik, hogy $f(x) = f(1)^x$, tehát k-val jelölve azt a távolságot, amely mellett $f(k) = e$, adódik $f(x) = e^{\frac{x}{k}}$.

Azt hiszem, hogy a paraszféra euklideszi geometriáján keresztül ma is az (1) alatti tételből kiindulva állíthatjuk elő legegyszerűbben a hiperbolikus trigonometriát. Csak elő kell állítanunk *H. Liebmann* nyomán a paraciklus egyenletét, s *Bolyai János* és *Lobacsevszkij* bizonyos térbeli konfigurációit egyesítenünk kell *V. F. Kagan* egy konfigurációjával. Ez az előállítási mód részletesen a következő.

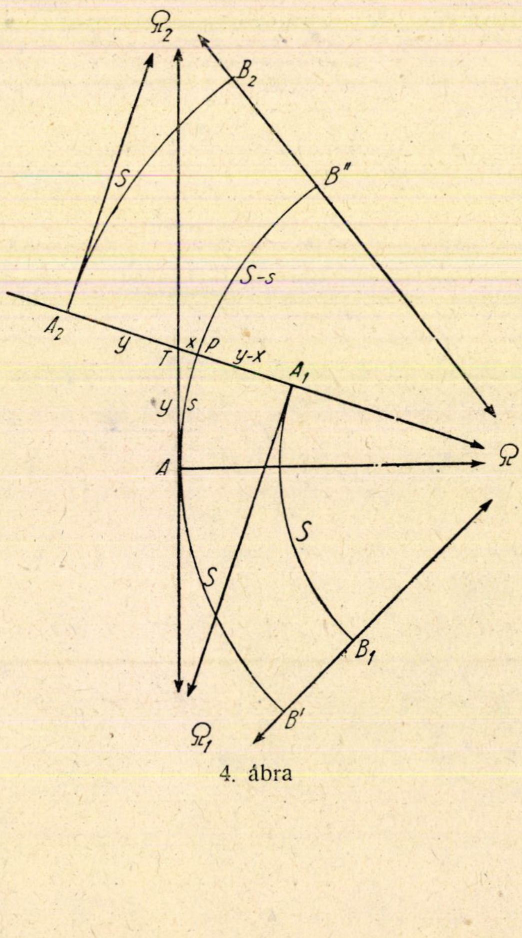


2. ábra



3. ábra

Tekintsük az U ponton átmenő Ω középpontú paraciklusnak valamely T pontját, amelynek vetülete az $U\Omega$ egyenesen A (3. ábra). Legyen $\overline{UA}=x$, $\overline{AT}=y$. Kérdés, micsoda egyenlet áll fenn x és y között? Ha az A ponton átmenő Ω középpontú paraciklus a $T\Omega$ egyenest P-ben metszi, akkor egyszersmind $\overline{TP}=x$. A kérdés tehát másszóval az, hogy micsoda egyenlet áll



4. ábra

fenn az A ponton átmenő Ω középpontú paraciklus $\overline{AT}=y$ *érintődarabja* s a T pontnak e paraciklustól való $\overline{TP}=x$ távolsága között? Ezt kiolvashatjuk *H. Liebmann*[1] következő szellemes konfigurációjából (4. ábra).

Legyen az AT egyenesnek T-től A felé eső végtelen távoli pontja Ω_1, a másik pedig Ω_2. Rakjuk fel a $T\Omega$ egyenesre T-ből Ω felé, a $\overline{TA_1}=y$, az ellenkező irányban a $\overline{TA_2}=y$ távolságot. Minthogy $\Omega_1 TA_1\sphericalangle=\Omega_2 TA_2\sphericalangle$ s $\overline{AT}=y$ az e szöghöz tartozó *elpattanási távolság*, azért $TA_1\Omega_1\sphericalangle=TA_2\Omega_2\sphericalangle=90^0$. Ha tehát az A_1 ponton átmenő Ω középpontú paraciklus az $\Omega\Omega_1$ egyenest B_1-ben, az A_2-n átmenő az $\Omega\Omega_2$-t B_2-ben, az A ponton átmenő pedig ez egyeneseket rendre B', ill. B''-ben metszi, akkor

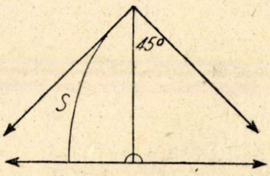
$$\widehat{A_1B_1}=\widehat{A_2B_2}=\widehat{AB'}=\widehat{AB''}=S,$$

ahol S az a meghatározott paraciklus-ív, amelynek magassága a 45^0-os szögnek megfelelő elpattanási távolság (5. ábra). Minthogy a szerkesztésből folyólag az $\widehat{AP}=s$ jelölés mellett $\widehat{B'P}=S+s$, $\widehat{B''P}=S-s$ és $\overline{A_1P}=y-x$ míg $\overline{A_2P}=y+x$, azért az (1) tétel értelmében egyrészt

$$\frac{S+s}{S}=e^{\frac{y-x}{k}}, \tag{2}$$

másrészt

$$\frac{S-s}{S}=e^{-\frac{y+x}{k}}. \tag{3}$$



5. ábra

E két egyenletből összeadással

$$2=e^{-\frac{x}{k}}(e^{\frac{y}{k}}+e^{-\frac{y}{k}})$$

vagyis

$$e^{\frac{x}{k}}=\mathrm{ch}\frac{y}{k}. \tag{4}$$

Ez a paraciklus keresett egyenlete.

(2) és (3)-ból kivonással

$$2\frac{s}{S}=e^{-\frac{x}{k}}(e^{\frac{y}{k}}-e^{-\frac{y}{k}}),$$

honnan (4) alapján

$$s=S\,\mathrm{th}\frac{y}{k}. \tag{5}$$

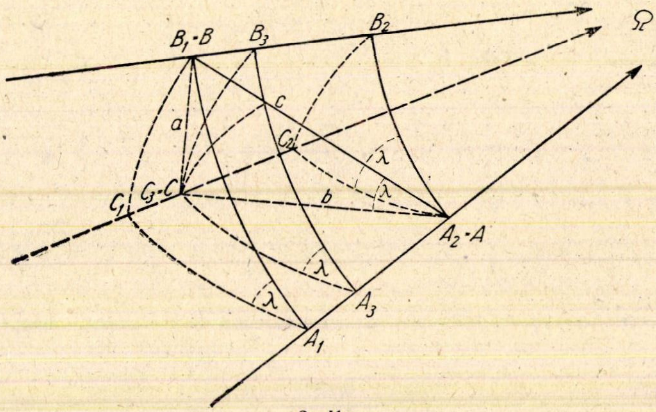
Mivel pedig (3. ábra) az $\widehat{UT}=s'$ jelöléssel ismét az (1) tétel szerint $s'=se^{\frac{x}{k}}$, (5)-ből (4)-re tekintettel folyik

$$s'=S\,\mathrm{sh}\frac{y}{k}. \tag{6}$$

Látjuk, a paraciklus-ív arányos az érintődarab tangens hiperbolikusával, ill. a magasság sinus hiperbolikusával, ha a távolságokat a k természetes hosszegységgel mérjük.

E képletek birtokában a hiperbolikus trigonometria alapképleteit most már leolvashatjuk a következő térbeli konfigurációból. Legyen ABC derékszögű háromszög ($C_{\sphericalangle} = 90^0$), amelynek alkotórészei

$$\overline{AB} = c,\ \overline{BC} = a,\ \overline{CA} = b,\ A_{\sphericalangle} = \lambda,\ B_{\sphericalangle} = \mu. \tag{7}$$



6. ábra

Állítsunk a háromszög síkjára A-ban merőlegest, amelynek egyik végtelen távoli pontja Ω (6. ábra). Vezessünk Ω középpontú paraszférát a B, továbbá az A, végül a C ponton át. Az elsőt használta *Bolyai János*[2], a másodikat *Lobacsevszkij*[3], a harmadikat *V. F. Kagan*[4]. E paraszférákból az $(A\Omega, B\Omega, C\Omega)$ *triéder* rendre az A_1BC_1, AB_2C_2, A_3B_3C paraszféra-háromszögeket vágja ki. Ezekben a szerkesztésből folyólag

$$BA_1C_{1\sphericalangle} = B_2AC_{2\sphericalangle} = B_3A_3C_{\sphericalangle} = \lambda,$$

míg

$$A_1C_1B_{\sphericalangle} = AC_2B_{2\sphericalangle} = A_3CB_{3\sphericalangle} = 90^0.$$

Tehát a paraszféra euklideszi geometriája szerint e háromszögekből rendre adódik

$$\sin\lambda = \frac{\widehat{BC_1}}{\widehat{A_1B}},\quad \cos\lambda = \frac{\widehat{AC_2}}{\widehat{AB_2}},\quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\widehat{B_3C}}{\widehat{A_3C}},$$

vagyis (5) és (6)-ra tekintettel

$$\sin\lambda = \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}, \tag{I}$$

$$\cos\lambda = \frac{\operatorname{th}\frac{b}{k}}{\operatorname{th}\frac{c}{k}}, \tag{II}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{th}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}. \tag{III}$$

(I) és (II) alapján (III)-ból

$$\frac{\operatorname{th}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{b}{k}} = \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}} \frac{\operatorname{th}\frac{c}{k}}{\operatorname{th}\frac{b}{k}}$$

azaz

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}. \qquad \text{(IV)}$$

(II) és a μ szögre vonatkozó (I)-hez hasonló képletből

$$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \frac{\operatorname{th}\frac{b}{k}}{\operatorname{th}\frac{c}{k}} \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\operatorname{sh}\frac{b}{k}},$$

tehát (IV) felhasználásával

$$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}. \qquad \text{(V)}$$

Végül ebből és a b oldalra vonatkozó hasonló képletből (IV)-re tekintettel

$$\operatorname{ctg}\lambda \operatorname{ctg}\mu = \operatorname{ch}\frac{c}{k}. \qquad \text{(VI)}$$

(I)—(VI) a hiperbolikus trigonometria alapképletei, a derékszögű háromszög három oldala és két hegyesszöge közül három-három között fennálló egyenletek.

Ennél az előállítási módnál közvetlenebb *V. F. Kagan*[5] módszere, amenynyiben az (1) tételt nem használja fel, de viszont több számítást igényel. Ismét más módszerrel élek egy még meg nem jelent dolgozatomban[6], amely az (1) alatti tételt ugyancsak elkerüli. Mind a két módszer kiinduló pontja annak a tételnek bebizonyítása a paraszféra euklideszi geometriája alapján, hogy valamely a magasságú $p(a)$ paraciklus-ívnek az a távolsághoz tartozó $\Pi(a)$ elpattanási szög tangensével való szorzata

$$p(a) \operatorname{tg} \Pi(a) = S,$$

a fentebb már szerepelt meghatározott paraciklus-ív (5. ábra). E tételt különben sokkal bonyodalmasabban (és végelemzésben hézagosan) már *Bolyai János*[7] bebizonyította. E tételből következik a derékszögű háromszög szögtrigonometriája (a szögek és az olddalaknak megfelelő elpattanási szögek között fennálló egyenletek) s az elpattanási szög és a távolság közötti

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(a)}{2} = e^{-\frac{a}{k}} \qquad (8)$$

klasszikus egyenlet[8] előállításával megkapjuk az (I)—(VI) képleteket. Ez egyenletnek a szögtrigonometriából való egyszerű előállítását már egy régebbi dolgozatomban[9] is közöltem.

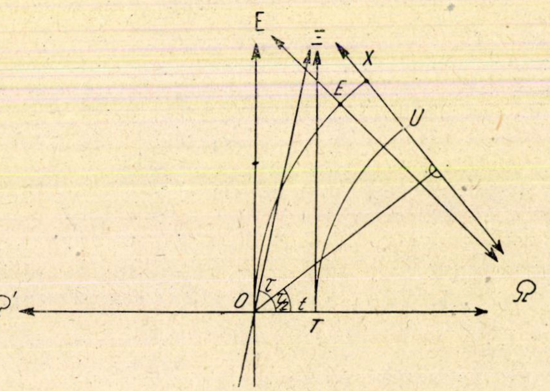
II. Síkbeli előállítás a klasszikus segédeszközökkel

Már *Bolyai János* felvetette azt a kérdést hátrahagyott irataiban[10], hogy nem volna-e lehetséges a hiperbolikus trigonometriát a tér felhasználása nélkül, tisztán síkbelileg állítani elő? Ezt a klasszikus segédeszközökkel, vagyis az *elpattanó* egyenesek és a paraciklus használata mellett, először *H. Liebmann*[11] valósította meg. Módszerét egyszerűsítettem[12] *Bolyai Jánosnak* az elpattanási szög meghatározására szolgáló klasszikus konfigurációja[13] felhasználásával. Ennél sokkal egyszerűbb módszert mutatok be azonban egy még meg nem jelent dolgozatomban[14], amelynek gondolatmenete a következő.

Az irányított síkban[15] felvett O pont és Ω végtelen távoli pont által meghatározott *koordinátarendszerben* egy az Ω-tól különböző Ξ végtelen távoli pont ξ *koordinátáját* következőkép definiálom. Legyen (7. ábra) az O-ból Ω felé irányított $O\Omega$ egyenes O-beli normálisának a pozitív irányba eső végtelen távoli pontja E s messe az O ponton átmenő Ω középpontú paraciklus az ΩE egyenest E-ben, az $\Omega\Xi$ egyenest pedig X-ben. A Ξ végtelen távoli pont koordinátájának nevezem a

$$\xi = \frac{\overset{\frown}{OX}}{\overset{\frown}{OE}}$$

viszonyt pozitív vagy negatív előjellel aszerint, amint $\overset{\frown}{OX}$ az $\overset{\frown}{OE}$-vel megegyező, vagy azzal ellenkező értelmű. E ξ koordináta minden valós értéket felvesz egyszer és csak egyszer. Az E koordinátája 1, az $O\Omega$ egyenes Ω'-vel jelölt másik végtelen távoli pontjáé 0.



7. ábra

Tekintsük mármost a Ξ végtelen távoli pont ξ koordinátáját, mint a $\tau = \Omega O \Xi_{\sphericalangle}$ függvényét. A szöget *analitikus mérőszámban* adva meg, vagyis a szögegységet úgy választva, hogy a derékszög mérőszámául $\frac{\pi}{2}$ adódjék, legyen e függvény $\xi = f(\tau)$. Ez a $0 < \tau < \pi$ intervallumban pozitív, s mivel τ növesztésénél szigorúan fogyólag minden pozitív értéket felvesz (lévén $\widehat{OX}$ magassága a $\frac{\tau}{2}$-nek megfelelő elpattanási távolság), azért folytonos. E függvényre ez intervallumban függvényegyenletet állítok elő azáltal, hogy az $f(\tau+\varphi)$ függvényértéket kifejezem az $f(\tau)$ és $f(\varphi)$ értékekkel. Egyszerű meggondolással adódik, miszerint

$$f(\tau+\varphi)=\frac{f(\tau)f(\varphi)-1}{f(\tau)+f(\varphi)}.$$

Minthogy a szóbanforgó $0<\tau<\pi$ intervallumban $f(\tau)>0$, bevezethetjük az

$$f(\tau)=\operatorname{ctg} F(\tau), \qquad 0<F(\tau)<\frac{\pi}{2}$$

jelölést, mikor is e függvényegyenlet a

$$F(\tau+\varphi)=F(\tau)+F(\varphi)$$

alakot ölti. De $f(\tau)$ folytonos lévén, $F(\tau)$ is az, tehát e függvényegyenletből *Cauchy* szerint

$$F(\tau)=c\tau$$

ahol c állandó. S mivel nyilván

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg} F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

vagyis $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, ez állandó értéke

$$c=\frac{1}{2}.$$

Eszerint

$$f(\tau)=\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}.$$

Ha azonban a Ξ végtelen távoli pont vetülete az $O\Omega$ egyenesen T és az ezen átmenő Ω középpontú paraciklus az $\Omega\Xi$ egyenest U-ban metszi (7. ábra), akkor $\widehat{TU}=\widehat{OE}$, tehát az (1) tétel értelmében a τ szöghöz tartozó $t=\overline{OT}$ elpattanási távolsággal kifejezve

$$f(\tau)=\frac{\widehat{OX}}{\widehat{OE}}=\frac{\widehat{OX}}{\widehat{TU}}=e^{\frac{t}{k}}.$$

Az $f(\tau)$ e két kifejezéséből adódik a t távolság és a megfelelő τ elpattanási szög között fennálló

$$e^{\frac{t}{k}}=\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}$$

klasszikus egyenlet (amelyet (8) alatt más jelölésben írtunk fel). Ebből *J. Hjelmslev*[16] elegáns gondolatmenetét követve, már egyszerűen következnek a fenti (I)—(VI) képletek.

III. Közvetlen előállítás

Mint bevezetőben említettem, a hiperbolikus trigonometriát a klasszikus segédeszközök elkerülésével közvetlenül először *L. Gérard*[17] állította elő, mégpedig egészen síkbelileg. Ugyanezt más módszerrel később *W. H. Young*[18] valósította meg. Magam is közöltem[19] ismét más közvetlen síkbeli előállítást, amely *Réthy Mór*[20] és *Ch. J. de la Vallée Poussin*[21] vizsgálataira támaszkodik.

Egy még meg nem jelent dolgozatban[22] hasonló közvetlen előállítást mutatok be, amely azonban térbeli meggondolást is alkalmaz (mint a *Réthy Mór*[23] által vázolt módszer is) s ezáltal némileg egyszerűbb. Tárgyalásom legsajátszerűbb mozzanata itt is a

$$K(r) = \lim \frac{s}{\sigma} \qquad (\sigma \to 0) \tag{9}$$

függvény bevezetése, ahol σ, ill. s valamely középponti szögnek, ill. a megfelelő húrnak mérőszáma az r sugarú körben, a szöget ismét analitikus mérőszámban adva meg. E függvény létezése annak folyománya, hogy σ csökkentésénél $\frac{s}{\sigma}$ szigorúan növekedik, de bizonyos korlát alatt marad (amely tétel különben független a párhuzamosság axiómájától). Egyszerű térbeli meggondolással belátható, hogy a (9) alatti jelöléssel *a derékszögű háromszögben*

$$\frac{K(a)}{K(c)} = S(\lambda), \tag{10}$$

csak a λ szög függvénye.

Kimutatható továbbá, miszerint $r \to 0$ *esetén* $\frac{K(r)}{r}$ *pozitív határértékhez tart.*

Bebizonyítván még, hogy *a derékszögű háromszögben rögzített λ mellett*

$$\sin \lambda = \lim \frac{a}{c} \qquad (c \to 0),$$

az

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{K(a)} \frac{K(a)}{K(c)} \frac{K(c)}{c}$$

átalakításból (10) alapján következik, miszerint

$$\sin \lambda = \frac{K(a)}{K(c)}. \tag{11}$$

Mivel pedig innen

$$\frac{\sin \lambda}{\lambda} = \frac{K(a)}{a} \frac{a}{\lambda} \frac{1}{K(c)}$$

és rögzített c mellett $a \to 0$ esetén $\lambda \to 0$ tehát a (9) alatti definíció szerint $\frac{a}{\lambda} = \frac{2a}{2\lambda} \to K(c)$, nyerjük, hogy

$$\frac{K(a)}{a} \to 1, \text{ ha } a \to 0. \tag{12}$$

S az általános háromszöget két derékszögű háromszög összegére vagy különbségére bontva fel, (11)-ből következik továbbá *Bolyai János* sinus-tételének[24] burkolt alakja: *ha a háromszög oldalai a, b, c s ezekkel szemben fekvő szögei rendre λ, μ, ν, akkor*

$$\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu = K(a) : K(b) : K(c). \tag{13}$$

Mármost *Réthy Mór*[25] mesterfogását alkalmazva, t. i. az ABC derékszögű háromszöget ($C_{\sphericalangle} = 90^0$) az AC-re vonatkozó tükörképével kiegészítve, a (13) tétel alapján nyerjük, hogy a (9) alatti jelölés mellett a derékszögű háromszögben

$$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \frac{K(2a)}{2K(a)} = \varphi(a), \tag{14}$$

csak az a függvénye (amely tétel egyébként *Bolyai Jánosnál*[26] is alapvető szerepet játszik). Minthogy $\lambda + \mu < \frac{\pi}{2}$ (ez folyománya a párhuzamossági axióma tagadásának), mindenesetre $\varphi(a) > 1$. *Réthy Mór*[27] nyomán megmutathatjuk még, miszerint

$$\frac{K(a)^2}{\varphi(a)^2 - 1} = h^2 \tag{15}$$

állandó. (14) és (15) értelmében a $\frac{K(x)}{h}$ és $\varphi(x)$ függvények eleget tesznek a

$$\frac{K(2x)}{h} = 2\frac{K(x)}{h}\varphi(x)$$

és

$$\varphi(x)^2 = \left(\frac{K(x)}{h}\right)^2 + 1$$

függvényegyenleteknek. Ezekből (12) alapján következik, hogy

$$\varphi(x) = \operatorname{ch}\frac{x}{h}, \qquad \frac{K(x)}{h} = \operatorname{sh}\frac{x}{h}.$$

Ennélfogva (11) és (14) szerint a derékszögű háromszögben a (9) alatti jelöléssel

$$\sin\lambda = \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{h}}{\operatorname{sh}\frac{c}{h}}, \qquad \frac{\cos\lambda}{\sin\mu} = \operatorname{ch}\frac{a}{h}.$$

E kettőből a másik négy alapképlet már egyszerűen nyerhető.

A hiperbolikus trigonometria ilyszerű közvetlen előállításának az a jelentősége, hogy lehetővé teszi a hiperbolikus geometria kezdettől fogva való analitikus tárgyalását és euklideszi interpretációját. Ennek bővebb kifejtése azonban ez előadás keretén kívül esik.

IRODALOM

[1] *H. Liebmann,* Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und neue Begründung der trigonometrischen Formeln der hyperbolischen Geometrie, Mathematische Annalen *61* (1905), 185—199., speciálisan 194.

[2] *J. Bolyai,* Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens, etc., Marosvásárhely 1832, § 25. Magyarul lásd *Stäckel Pál,* Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai, ford. *Rados Ignác,* Budapest 1914, II. köt. 208., vagy Matematikai és Fizikai Lapok *6* (1897), 164—165, továbbá *Bolyai János,* Appendix, *Kárteszi Ferenc* bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel, Budapest 1952, 93—94.

[3] *N. I. Lobačevskij,* Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Berlin 1840, § 35. Magyarul lásd *N. I. Lobacsevszkij,* Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből, *V. F. Kagan* bevezetésével, magyarázataival, függelékével, Budapest 1951, ford. *Bizám György,* sajtó alá rendezte *Kárteszi Ferenc,* 67.

[4] *V. F. Kagan*[3], i. m. 132.

[5] *V. F. Kagan*[3], i. m. 130—145.

[6] *Szász Pál,* A hiperbolikus trigonometria új előállítása a paraszféra felhasználásával. A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei (sajtó alatt).

[7] *J. Bolyai*[2], loc. cit. § 30.

[8] V. ö. *J. Bolyai*[2] loc. cit. § 29, továbbá *F. Engel,* Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, Leipzig 1898, 20. (12) form.

[9] *Szász Pál,* A hiperbolikus trigonometriáról, Matematikai és Fizikai Lapok *48* (1941), 401—409.

[10] V. ö. *Stäckel Pál*[2], i. m. II. köt. 293.

[11] *H. Liebmann,* Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.—phys. Klasse, *59* (1907), 187—210.

[12] *P. Szász,* Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, Acta Scientiarum Mathematicarum *14* (1952), 174—178.

[13] *J. Bolyai*[2], loc cit. § 29.

[14] *Szász Pál,* A hiperbolikus trigonometria új síkbeli előállítása a klasszikus segédeszközökkel. A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei (sajtó alatt).

[15] V. ö. *Kerékjártó Béla,* A geometria alapjairól, I. köt., Szeged 1937, 20. §.

[16] *J. Hjelmslev,* Grundlag for den projektive Geometri, Kobenhavn 1943, § 7., 53.

[17] *L. Gérard,* Sur la géométrie non euclidienne, Thèse, Paris 1892, Chapitre I.

[18] *W. H. Young,* On the analytical Basis of Non-Euclidean Geometry, American Journal of Mathematics *33* (1911), 249—286.

[19] *P. Szász,* Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, Acta Scientiarum Mathematicarum *12* (1950), Pars A., 44—52.

[20] *Réthy Mór,* Bolyai János „ujj más világának" ismertetése, Első közlemény, Matematikai és Fizikai Lapok *12* (1903), 1—29.

[21] *Ch. J. de la Vallée Poussin,* Sur la géométrie non euclidienne, Mathesis (Gand), (2) *5* (1895), Suppl. V., 6—15.

[22] *Szász Pál,* A hiperbolikus trigonometria közvetlen előállítása a tér felhasználásával. A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának Közleményei (sajtó alatt).

[23] *Réthy Mór*[20], i. h., speciálisan 14—15.

[24] *J. Bolyai*[2], loc. cit.

[25] *Réthy Mór*[20], i. h., speciálisan 15—16.

[26] *J. Bolyai*[2], loc. cit. § 27.

[27] *Réthy Mór*[20], i. h., speciálisan 16—17.

MEGJEGYZÉSEK A PROJEKTÍV DIFFERENCIÁLGEOMETRIÁHOZ

E. ČECH

Előadta az ünnepi ülésszak 1952 december 17-én tartott ülésén

Bolyai és *Lobacsevszkij* forradalmi gondolatai utat nyitottak a geometria valóban gigantikus fejlődésének, és nem kétséges, hogy ez a fejlődés még hosszú időn át ugyanezzel a sebességgel folytatódni fog. A differenciálgeometriában derült ki először, hála *Riemann* lángeszének, hogy *Bolyai* és *Lobacsevszkij* nem-euklideszi terei csak első példái a terek mindjobban növekvő családjának, melynek tanulmányozása az utóbbi évtizedek során a modern matematikában kiterjedt helyet foglalt el, ami főleg annak a ténynek köszönhető, hogy a relativitás-elmélet ráterelte a fizikusok figyelmét a differenciálgeometria módszereire és eredményeire.

Néha úgy látszik azonban előttem, hogy a modern differenciálgeometria, bármily hatalmas is annak kiterjedése, kezdi elhanyagolni a geometriai intuíciót; bármint álljon is ez a dolog, annyi bizonyos, hogy a differenciálgeometria területén az irodalom aránytalanul sok olyan értekezést tartalmaz, amelyekben csak könnyű általánosítások és formális számítások találhatók, és én néha azt kérdezem magamtól, hogy még *geometria*-e az, amit ezekben az értekezésekben az olvasók elé tárnak. Vannak továbbá a modern differenciálgeometriában kiterjedt vizsgálati témák, amelyeknél az a feladat, hogy rövid és egyúttal precíz módon kifejtsük az illető vizsgálat lényeges tartalmát olyan tudósok előtt, akik a matematika más területein dolgoznak, talán sokkal nehezebb volna, mint a specialistáknak szánt részletes kifejtés. Ez pedig véleményem szerint sajnálatos.

Ilyen természetű meggondolások indítottak engem arra, hogy szemlét merészeljek tartani e kiváló hallgatóság előtt a projektív differenciálgeometria néhány eredménye felett, melyeknek talán nincs nagy, lényegükben rejlő fontosságuk, melyeknél azonban másrészt a definíciók és eredmények kimondása sokkal kevésbbé bonyolult, mint a bizonyítások.

Természetesen a jelen alkalom nem teszi lehetővé, hogy teljes áttekintést nyújtsak, úgyhogy egy speciális kérdésre fogok szorítkozni. 1916-ban vezette be mélyen gyászolt *Fubini*[1] barátom a projektív deformáció fogalmát, és 1920-ban történt, hogy *É. Cartan*[2] az involucióban álló Pfaff-féle rendszerek elméletének segítségével majdnem mindazt megoldotta, ami akkor az e fogalomhoz fűződő problémák magvát alkotta. Néhány évvel később speciális módszerek felhasználásával sikerült[3,4] megadnom oly kiegészítéseket, melyeket talán nehéz volna *É. Cartan* módszerei utján megkapni, bármennyire hatásosak is ezek a módszerek általában. A legutóbbi 20 év folyamán ezzel szemben úgy látszott, hogy a projektív deformáció elmélete már nem tud felmutatni semmi olyasmit, ami lényegesen új volna.

Mármost rövid idővel ezelőtt[5] megalkottam a transzformációk projektív sajátságainak általános elméletét, ami azután oda vezetett, hogy felfedezzem a projektív deformációk bizonyos új geometriai sajátságait, melyeket az alábbiakban közölni fogok.

Elhagyva ezeket az általánosságokat, a kérdés tárgyalását az *analitikus kontaktus Fubini*tól eredő definíciójával kezdem. Klasszikus azt mondani, hogy két sokaság, V és V' közös A pontjukban s-edrendben érintkezik, ha V és V' között lehet olyan, az A fixponttal biró megfelelkezést létesíteni, hogy két, A-hoz közeleső, egymásnak megfelelő pont egymástól való távolsága $(s+1)$-edrendű végtelen kicsiny legyen. Ez az, amit *Fubini* s-edrendű *geometriai kontaktus*nak nevez, míg az analitikus kontaktus kifejezés csak valamely V és V' közötti *adott* megfelelkezésre alkalmazható, és természetesen azt jelenti, hogy a fentebb kimondott sajátság magára erre a megfelelkezésre nézve áll fenn.

Így állván a dolgok, tegyük fel, hogy adva van a V és V' sokaságok között valamely C megfelelkezés; válasszuk ki V-nek valamely A pontját és jelöljük B-vel A-nak képét V'-ben. Legyen ekkor H egy a V sokaság és egy V^* segédsokaság között fennálló, A helyzetétől függő segédmegfelelkezés, amely az A pontot ugyancsak a B pontba viszi át. Ez megfelelkezést hoz létre a V' és V^* sokaságok között, melynek B fixpontja. Ha mármost V'-nek és V^*-nak B-ben s-edrendű analitikus kontaktusuk van, akkor azt mondjuk, hogy a H segédmegfelelkezés az A pontban s-edrendű analitikus kontaktust hoz létre V és V' között. Bennünket itt az az eset érdekel, amikor *H homográfia*; ekkor, ha a kontaktus rendje $s=1$, azt mondjuk, hogy H a V és V' közötti megfelelkezést az A pontban *érintő homográfia;* ha $s=2$, akkor azt mondjuk, hogy H a V és V' közötti megfelelkezéshez az A pontban *oszkuláló homográfia.* Nyilvánvaló, hogy *érintő* homográfia mindig létezik, bármilyen is a V és V' között fennálló C kezdeti megfelelkezés; természetesen felteszem, hogy C elegendő mértékben reguláris, sőt még azt is felteszem, hogy C holomorf függvények által fejezhető ki. Egyébként az érintő homográfia nincsen egyértelműen meghatározva.

Fubini vizsgálat tárgyává teszi a közönséges tér két V és V' *felülete* közötti C megfelelkezés esetét, és *projektív deformáció*nak nevezi C-t, ha a V felület minden A pontjához tartozik egy H oszkuláló homográfia, amely újból nincs egyértelműen meghatározva. *Fubini* kizárja a lefejthető felületek esetét és bebizonyítja, hogy a projektív deformáció szükséges és elegendő feltétele egy $(\beta du^3+\gamma dv^3)$: $2dudv$ tört differenciálalak invarianciája, ahol u és v a V felület *aszimptotikus* paraméterei. Ebből az következik, hogy az aszimptotikus görbe fogalma a projektív deformációkra nézve invariáns, ami egyébként közvetlenül folyik a projektív deformáció geometriai definíciójából. Ami a

$\beta du^3 + \gamma dv^3$ számlálót illeti, az a kvadrikokra nézve azonosan eltűnik, és βdu^3-ra redukálódik abban az esetben, ha V oly vonalfelület, melynek az $u =$ konst. vonalak az alkotói. Végül, ha V nem vonalfelület, akkor $\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$ a V-hez az A pontban húzott ú. n. Darboux-féle érintőhármast definiálja. A Darboux-féle érintőknek a projektív deformációkra vonatkozó invarianciája geometriailag folyik például az aszimptotikus görbék invarianciájából és a Darboux-féle érintők következő, legelső tudományos munkáim egyikében[6] megadott konstrukciójából: a V felület A pontbeli érintősíkja két parabolát tartalmaz, melyek mindegyike az A pontban másodrendben érintkezik egy aszimptotikus görbével, és melynek tengelye az A pontbeli másik aszimptotikus érintővel párhuzamos; a két parabola A-n kívül még három, A_1, A_2, A_3 pontban metszi egymást és az AA_1, AA_2, AA_3 egyenesek a Darboux-féle érintők.

Fubini nem oldja meg az exisztencia-kérdéseket, amit, amint már mondottam, *É. Cartan* tett meg. *Cartan* tételei a következők:

1. A síkok projektíve deformálhatatlanok; pontosabban: valamely sík projektív deformációja egyszerű homográfiára redukálódik.

2. Minden lefejthető felület (amely nem sík) projektíve deformálható és deformációi 3 tetszőleges egyváltozós függvénytől függnek.

3. Minden nem-lefejthető vonalfelület projektíve deformálható és deformációi egy tetszőleges egyváltozós függvénytől függnek.

4. Ami a projektíve deformálható nem-vonalfelületeket illeti, ezek *kivételesek* és 6 tetszőleges egyváltozós függvénytől függnek. Ha a V felület, amely nem vonalfelület, projektíve deformálható, akkor a deformáció csak tetszőleges állandóktól függ, melyeknek h száma csak 1-gyel, 2-vel vagy 3-mal lehet egyenlő. A $h = 1$ eset az általános eset; a $h = 3$ eset következik be oly felületek esetén, melyeknek aszimptotikus vonalai lineáris komplexusokhoz tartoznak, ezek 2 tetszőleges függvénytől függnek, de a $h = 3$ eset áll fenn a felületek oly más osztályaira nézve is, melyeknek geometriai sajátságai kevésbbé világosak és amelyek csak néhány tetszőleges állandótól függnek. Ami a $h = 2$ esetet illeti, Cartan csak azt bizonyította be, hogy az ilyen felületek, *amennyiben léteznek,* csak tetszőleges állandóktól függhetnek. Az így feltett exisztencia-kérdést *É. Cartan*nak nemrég a Bull. Amer. Math. Soc.-ban megjelent nekrológja[7] meg nem oldottként említi, bár én már 1924-ben[3] effektív példákat szolgáltattam az ilyen felületekre és további példákat közöltem hét évvel később.[4]

Úgy látszik azonban, hogy *valamennyi* $h = 2$ esetnek megfelelő felület meghatározása mindeddig nem történt meg.

Ha eltekintünk a lefejthető felületek esetétől, valamely felület minden projektív deformációjához hozzárendelhetünk egy konjugált hálózatot, melyet *Cartan* a *projektív deformáció konjugált hálózatá*nak nevez; *M. Finikov*[8] nyomán én azt rövidebben *alaphálózat*nak (a deformáció alaphálózatának), ezeket az érintőket *alapérintők*nek és az ezen érintők által létrehozott kongruenciákat *alapkongruenciák*nak nevezem. 1920. évi értekezésében *Cartan* az alapérintőknek csak bonyolult geometriai leírását adja. Néhány évvel később *Cartan* és én egymástól függetlenül[9] találtunk egy másik, jóval egyszerűbb leírást, nevezetesen azt, hogy a V felület valamely A pontjában oszkuláló H homográfia akkor és csak akkor létesít harmadrendű geometriai kontaktust egy V-re rajzolt és az A ponton áthaladó görbe részére, ha annak az A pontban húzott érintője alapérintő. Úgy vélem, hogy *Fubini*tól ered az a megjegyzés, mely szerint az alaphálózatok azonosak a *Demoulin*[10] és *Tzitzéica*[11] által egymástól függetlenül teljesen más úton bevezetett és R hálózatoknak nevezett hálózatokkal. Az R hálózatok és R kongruenciák ú. n. aszimptotikus transzformációinak kiterjedt elmélete van, melyet éppen csak megemlítek[12]. Egyébként a rövidség kedvéért az előbbiekben nem voltam teljesen precíz: valójában lehetséges, hogy az alaphálózat az aszimptotikus görbék egy kétszer számított seregére redukálódik; ebben a tömör előadásban azonban továbbra sem leszek szubtilisan precíz.

Ezeket a rövid történelmi megjegyzéseket azzal fejezem be, hogy megjegyzem, hogy *Cartan*[13] már 1920-ban rendkívül tömör módon kifejtette azokat az eredményeket, amelyeket ő a *sugárkongruáciák projektív deformációi*nak elméletében nyert; ezeknek geometriai definíciója majdnem azonos a fentebb a felületek projektív deformációjára adott definícióval. Kiderül, hogy egy sugárkongruencia általában projektíve deformálhatatlan, a projektíve deformálható kongruenciák egy tetszőleges kétváltozós függvénytől függnek. A projektív deformációk között van egy kitüntetett osztály, a *szinguláris projektív deformációk* osztálya, amelyet az oszkuláló homográfia ama tulajdonsága definiál, hogy az első kongruencia gyújtópontjait a második gyújtópontjaiba viszi át. Mármost a sugárkongruenciáknak szinguláris projektív deformációi a felületek projektív deformációihoz kapcsolódnak, amennyiben a szóbanforgó kongruenciák azonosak azokkal, melyeket fentebb a felületek projektív deformációja alapkongruenciáinak neveztem. Azonban a *Cartan* által felfedezett összefüggés a felületek projektív deformációinak problémája és a sugárkongruenciák szinguláris projektív deformációinak problémája között nála csak számítás útján mutatkozik és csak legutolsó munkáim derítették fel e nevezetes kapcsolat valódi geometriai természetét, amint azt az alantiakban meg fogom magyarázni.

Cartan idézett közleményének címe: Sur le problème général de déformation (A deformáció általános problémájáról). Az ebben a közleményben kifejtett programmot egyébként a közzétételének időpontjától máig letelt 30 év alatt nem vitték sokkal tovább. Újabb munkáimban és a majd ezután következendőkben, kiindulópontom eltérő *Cartan*étól és a kérdés valamennyi előző tárgyalójának szempontjától. Ahelyett, hogy a transzformációk bizonyos osztályait a priori definiálnám, s azután tanulmányoznám a reájuk vonatkozó exisztenciaproblémákat, azt a célt tűzöm magam elé, hogy már nem a sokaságoknak, hanem maguknak a transzformációknak általános differenciális elméletét alkossam meg. Az involúcióban álló differenciál-rendszerek rendkívül hatályos módszere, melyet 1901-ben *É. Cartan*[14] alkotott meg, és amelyet azután *Kähler*[15] általánosított, lehetővé teszi, hogy nagyon gyorsan megoldjuk az exisztencia-kérdések egész seregét, ami lehetővé teszi annak előrelátását, hogy melyek a transzformációknak részletesebb tanulmányozást érdemlő osztályai.

Kutatásaim eredményei egy a Csehszlovák Matematikai Közlönyben megjelenő értekezés-sorozatnak alkotják tárgyát[5]. Eddig a sorozatból 5 értekezés jelent már meg, 2 sajtó alatt van és a nyolcadik kéziratát most fejezem be. Mindeddig csak a *lineáris* terek transzformációinak projektív differenciális elméletét fejtettem ki.

Az S_n és S_n' lineáris terek közötti megfelelkezések között különösen egyszerű osztályt alkotnak azok a megfelelkezések, amelyek *hipersíkok* ∞^1 *homografikus transzformációjára* bonthatók fel. Egy közzé nem tett, de már néhány évvel ezelőtt megírt értekezésemben elvégeztem az ilyen megfelelkezések osztályozását $n=3$ esetére. Ezzel szemben csak a *lefejthető megfelelkezések* meghatározását közöltem. Ez a következőket jelenti. Tekintsük az S_n és S_n' közötti homografikus megfelelkezéseknek egy t paramétertől függő $H(t)$ seregét. Az $S_n \times S_n'$ kétszeresen projektív térben minden $H(t)$ homográfiának képe egy n-dimenziós sokaság, amely a t paramétertől függ. Ha véletlenül van ennek a ∞^1 sokaságnak burkolója, akkor ez a burkoló egy S_n és S_n' közötti megfelelkezésnek képe, és éppen az ilyen természetű megfelelkezéseket nevezem lefejthetőknek. A lefejthető megfelelkezések analitikus kifejezése rendkívül egyszerű. Elhanyagolva a határeseteket, tekintsünk egy tetszőleges megfelelkezést valamely az S_n-ben fekvő $A(t)$ görbe és egy az S_n'-ben fekvő $B(t)$ görbe között és az

$$X = A(t) + \tau_1 A'(t) + \cdots + \tau_{n-1} A^{(n-1)}(t)$$

ponthoz rendeljük hozzá az

$$Y = B(t) + \tau_1 B'(t) + \cdots + \tau_{n-1} B^{(n-1)}(t)$$

pontot.

Vannak S_n és S_n' között oly egyszerű jellegű megfelelkezések, melyeknek tanulmányozása igen hasznos eszköz a komplikáltabb megfelelkezések tanulmányozására. Meg fogom itt említeni azokat, amelyeket *kettős projekciók*nak nevezhetünk. Helyezzük bele az $S_n = S_n'$ teret egy S_{n+1} térbe és vegyünk szemügyre az S_{n+1} térben egy n-dimenziós V sokaságot, valamint két, S_n-en kívül fekvő, P és Q rögzített pontot. A megfelelő kettős projekció az S_n tér X pontjához hozzárendeli az S_n' tér Y pontját, ha a PX és QY egyeneseknek van egy V-n fekvő közös pontjuk.

Speciálisan legyen az $n=2$ esetben V egy két egyenessereget tartalmazó kvadrik és az $n \geqq 3$ esetben egy ily kvadrikot vetítő kúp, ahol a vetítési középpont $n-3$ dimenziós. A megfelelő kettős projekció oly transzformáció, amely *két különböző módon* bontható fel hipersíkok ∞^1 számú homografikus transzformációjára és nincs más transzformáció, amely két ilyen felbontást tesz lehetővé. *Három* ily természetű felbontás csak $n = 2$ esetében lehetséges, és ezt a sajátságot csupán a *sík biracionális kvadratikus transzformációi* mutatják.

Nem akarom felsorolni a nevezetes egyéb transzformációknak azt a nagy tömegét, amelyet kutatásaim folyamán felfedeztem és áttérek arra, hogy megmagyarázzam a projektív deformációra vonatkozó fentebb említett eredményeket. Tegyük fel, hogy egy projektív deformáció valamilyen nemlefejthető V felületet átvisz egy szükségképpen szintén nemlefejthető V' felületbe. V-nek minden A pontjához tartozik ∞^1 számú H oszkuláló homográfia, de V-nek A-beli érintősíkján ezek mind ugyanazt a transzformációt adják. Fektessük tehát át V minden A pontján a V felületnek egy-egy meghatározott τ érintőjét. A környező S_3 tér egy C transzformációját nyerjük, ha τ minden pontjának azt a pontot feleltetjük meg, amely neki az A érintési ponthoz tartozó H homográfiában megfelel. Azt kérdezhetjük magunktól, lehetséges-e ezt a konstrukciót úgy elrendezni, hogy H a C-nek érintő homográfiája legyen minden τ egyenes egész hossza mentén. Kiderül, hogy ez akkor és csak akkor következik be, ha τ alapérintő. Ilyen módon kapcsolom hozzá geometriailag a V felület valamely projektív deformációjához a τ egyenesek által létrehozott L kongruencia C szinguláris projektív deformációját.

Ámde ennél még több igaz. Az L kongruencia C transzformációjának van egy jellemző geometriai sajátsága, amely rendkívül egyszerű és szemléletes. Valóban, C az L kongruenciának aszimptotikus transzformációja. Ez a következőt jelenti: *valamely az L-ben foglalt teljesen tetszőleges S vonalfelületet C oly módon visz át egy S' vonalfelületbe, hogy S minden aszimptotikus görbéjének S' egy-egy aszimptotikus görbéje felel meg.* Ezenfelül fennáll még egy másik igen nevezetes körülmény is. Ha az S vonalfelületet úgy választjuk meg, hogy az az eredeti V felületet V egyik aszimptotikus görbéje mentén érinti, akkor kiderül, hogy ebben a speciális esetben az S és S' vonalfelületek közötti megfelelkezés projektív deformáció. Ebből kiindulva, bebizonyíthatjuk, hogy egy V felületnek, mely nem vonalfelület, projektív deformációja úgy tekinthető, mint egy vonal felületek projektív deformációiból álló egyszeresen végtelen seregnek burkolója. Úgy vélem, hogy ez a tény megérdemli, hogy elmélyítsük. A projektív deformáció fogalmának megalkotása óta letelt 36 év után ez a fogalom ily módon véglegesen új életet nyert, éspedig ez egyszer valóban geometriai és intuitív életet. Mily kár, hogy ezeket az eredményeket már nem közölhetem megboldogult *Fubini* barátommal, aki első lépéseimet irányította a tudományos életben.

IRODALOM

[1] *G. Fubini:* Applicabilità proiettiva di due superficie, Rend. Circ. Mat. di Palermo, *41,* (1916), 135—162.

[2] *É. Cartan:* Sur la déformation projective des surfaces, Ann. Éc. Norm. Sup., (3) *37,* (1920), 259—356.

[3] *E. Čech:* Sur les surfaces qui admettent ∞^1 déformations projectives en elles-mêmes, Publ. Fac. Sc. de l'Univ. Masaryk, n⁰ *40,* (1924), 47.

[4] *E. Čech:* Réseaux *R* invariants égaux, Publ. Fac. Sc. de l'Univ. Masaryk, n⁰ *143,* (1931), 29.

[5] *E. Čech:* Проективная дифференциальная геометрия соотвествий между двумя пространствами, Csehszlovák Matematikai Közlöny (I. *2* (77), (1952), 92—107; II. *2* (77), (1952), 109—153; III. *2* (77), (1952), 125—148; IV. *2* (77), (1952), 149—166.; V. *2* (77), (1952), 167—188. E sorozat VI. és VII. értekezésének ugyanebben a közlönyben való közzététele folyamatban van; a VIII. értekezés előkészítés alatt áll. Az I., II., III. értekezések francia nyelven is megjelentek ugyanebben a közlönyben: I. *74,* (1949), 32—48.; II. *75,* (1950), 123—136.; III. *75,* (1950), 137—157.

[6] *E. Čech:* L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo, Annali di Matem., (3) *31,* (1922), 191—206.

[7] *S. S. Chern* és *C. Chevalley,* Élie Cartan and his Mathematical Work, Bull. Am. Math. Soc., *58,* (1952), 217—250.

[8] *Sz. P. Finikov:* Теория конгруенций (1950), 434.

[9] *V. G. Fubini* és *E. Čech:* Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, (1931), 89.

[10] *A. Demoulin:* Sur les surfaces *R* et les surfaces Ω, Comptes Rendus Acad., Paris, *153,* (1911), 590—593.

[11] *G. Tzitzéica:* Sur certains réseaux conjugués, Comptes Rendus Acad. Paris, *153,* (1911), 1077—1079.

[12] *V. G. Fubini* és *E. Čech:* Geometria proiettiva differenziale, I. köt., (1926), V. fejezet.

[13] *É. Cartan:* Sur le problème général de la déformation, C. R. du Congrès Int. des Math. de Strasbourg en 1920, 397—400.

[14] *É. Cartan:* Sur l'intégration des systèmes d'équations aux differentielles totales, Ann. Ec. Norm. Sup., (3) *18,* (1901), 241—311.

[15] *E. Kähler:* Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, (1934).

A FELÜLETEK BELSŐ GEOMETRIÁJÁNAK EGY AXIÓMATIKUS MEGALAPOZÁSÁRÓL

W. RINOW

Előadta az ünnepi ülésszak 1952. december 17-én tartott ülésén

Az általánosan elfogadott felfogás szerint a geometriai axiómatika lényeges céljának az Euklidesz-féle geometria megalapozását tekintik. A párhuzamosság axiómájának függetlenségére vonatkozó vizsgálatok ezen túlmenőleg a *Bolyai—Lobacsevszkij*-féle geometria axiómatikájához vezettek és az *Euklidesz*-féle geometriától független projektív geometria megalapozására irányuló kívánság létrehozta a projektív axiómarendszert. A differenciálgeometria szempontjából nézve, ez a felfogás az állandó görbületű terek osztályára való korlátozást jelent. Kívánatosnak látszik az, hogy erről a korlátozásról lemondjunk és megkíséreljük a fennálló axiómarendszerek oly megváltoztatását, hogy azok a terek lehető általános osztályát öleljék fel. A differenciálgeometriai terek speciális metrikus terekként való jellemzésével már mások is foglalkoztak. Itt azonban a belső differenciálgeometria axiómatikus megalapozásának egy másik lehetőségéről szeretnék beszélni, amely metrikus fogalmaktól független, tehát csatlakozik a projektív axiómatikához és csak 2 dimenzióra vonatkozik.

Mielőtt rátérnék a tulajdonképpeni axiómatikus feladatokra, emlékeztetni szeretnék néhány, a felületek elméletéből eredő ismert tényre. Valamely felületet egy $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ paraméteres előállítás jellemez. Tegyük fel, hogy a felület legalább háromszor folytonosan differenciálható és kielégíti a regularitás $\mathfrak{x}_{u^1} \times \mathfrak{x}_{u^2} \neq 0$ feltételét. A pozitíve definit $g_{ik}\, du^i du^k$ kvadratikus differenciálforma, ahol $g_{ik} = \mathfrak{x}_{u^i} \mathfrak{x}_{u^k}$ meghatározza a felületi hossz- és szögmérést. Felületeknek olyan egymásra való leképezéseit, amelyek a hossz- és szög-tartók, izometrikusoknak nevezzük. Belső geometrián valamely felület azon sajátságainak összességét értjük, amelyek izometrikus leképezéseknél változatlanok maradnak. A belső geometria fontos alkotórészének tekintjük a geodetikus vonalak elméletét. Ezeket a vonalakat a $\delta \int \sqrt{g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k} = 0$ variációs probléma extremálisaival definiálják és azok kielégítik az $\ddot{u}^i + \Gamma^i_{ke} \dot{u}^k \dot{u}^l = 0$ alakú differenciál-egyenletrendszert, amelyben szereplő Γ^i_{ke} értékek a *Christoffel*-féle háromindexes szimbolumok a g_{ik} értékekből és azok első deriváltjaiból kiszámíthatók, és a görbe paramétere az ívhossz.

A belső geometria általánosabb felfogásához jutunk el, ha a síkbeli projektív geometriában követett eljáráshoz hasonló módon a geodetikus vonal fogalmát tekintjük közvetlenül adottnak, a többi metrikus sajátságtól azonban eltekintünk. Tegyük fel tehát, hogy valamely felületen adva van a görbék egy rendszere, mely görbék az

$$\ddot{u}^i + F^i(u^1, u^2; \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0 \tag{1}$$

differenciál-egyenletrendszer megoldásai. Tegyük fel továbbá, hogy az $F^i(u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2)$ függvényeknek léteznek folytonos elsőrendű parciális deriváltjai és hogy azok az $\dot{u}^1, \dot{u}^2$ változókban másodfokú homogének. Ez a feltétel $F^i = \Gamma^i_{kl}\dot{u}^k\dot{u}^l$-re teljesül, általánosabban pl. egy $\delta\int F(u^1, u^2; \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0$ reguláris variációs probléma extremálisaira. Az (1) rendszer megoldásait nevezzük ismét geodetikus vonalaknak. Az olyan felületet, amelyen ebben az értelemben geodetikus vonalak vannak megadva, projektív felületnek nevezzük. Projektív leképezésen két projektív felület egymásra való olyan megfordítható egyértelmű leképezését értik, amely a két felület geodetikus vonalait egymásba viszi át. A belső projektív geometria tárgya ezek után valamely felület azon sajátságainak összessége, amelyek projektív leképezéseknél változatlanok maradnak. A projektív leképezést „geodetikus leképezésnek" is szokták nevezni, és a belső projektív geometriát az irodalomban többnyire „geometry of paths"-nek szokták nevezni. Megjegyzem még, hogy mind a belső metrikus, mind a belső projektív geometriára nézve lényegtelen az, hogy a felületeket Euklidesz-féle térbe beágyazottaknak képzeljük el.

Valamely projektív felület geodetikus vonalainak legfontosabb sajátságait *J. H. C. Whitehand* következő tétele fejezi ki:

Kicsinyben való összeköthetőségre vonatkozó tétel: valamely projektív felület minden pontja körül egyszerűen konvex környezet látszik. Ez esetben valamely környezetet egyszerűen konvexnek akkor nevezünk, ha annak két pontja pontosan egy olyan geodetikus vonallal köthető össze, amely teljes egészében a környezetben halad. Ez a sajátság megfelel a síkbeli geometria összeköthetőségi axiómájának.

Az axiómatika előkészítésére most még rá kell mutatnom a felületelmélet egy további ismert tényére. Ha a felület egy pontjába a $\overset{i}{v_1}, \overset{i}{v_2}, \overset{i}{v_3}, \overset{i}{v_4}$ érintő vektorral négy irányt adunk meg, akkor a felület paraméteres előállításától függetlenül e négy irány kettősviszonyát a

$$D(v_1, v_2; v_3, v_4) = \frac{(v_3, v_1)(v_4, v_2)}{(v_4, v_1)(v_3, v_2)}$$

értelmezi, ahol a (v_μ, v_ν) a $\overset{i}{v_\mu}, \overset{i}{v_\nu}$ vektorkoordinátákból képezett determinánst jelenti. Mivel minden ponton át minden irányban pontosan egy geodetikus vonal halad, azért az irányok és geodetikus vonalak kölcsönösen és egyértelműen felelnek meg egymásnak. Ezzel az egy ponton átmenő négy g_1, g_2, g_3, g_4 geodetikus vonal kettős viszonyát a $D(g_1, g_2; g_3, g_4) = D(v_1, v_2; v_3, v_4)$ határozza meg, ahol v_i a g_i vonalnak megfelelő irányt jelöli. Az egy ponton átmenő geodetikus vonalak sora ilymódon egy egydimenziós projektív struktúrát határoz meg, és a sugársor projektív geometriájának valamennyi fogalma és tétele átvihető geodetikus vonalak sorára. Ennek megfelelően a sorok egymásra való projektív leképezései ezen sorok vonalainak olyan kölcsönös és egyértelmű hozzárendelései, amelyeknél az egyik sor bármely négy vonalának kettős-viszonya egyenlő a másik sor megfelelő négy vonalának a kettősviszonyával. A sor olyan önmagára való projektív leképezését, amely inverzével azonos, involúciónak nevezik. Hogy a projektív geometria beletartozik a felületek belső projektív geometriájába, az a következő ismert tételből adódik: két felületnek minden $\frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)} \neq 0$ mellett történő $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2)$ reguláris leképezésénél a négy irány kettős viszonya invariáns. Ez speciális esetként magában foglalja a következő állítást: Az egy ponton átmenő négy geodetikus vonal kettős viszonya invariáns a felületek projektív leképezése esetén.

Rátérek most a felületelmélet projektív axiómatikájára. E célból meg kell kísérelnünk, hogy a síkbeli projektív geometria axiómatikus megalapozásánál követett eljárás szerint járjunk el. Az eddig kifejtettek alapján kézenfekvőnek látszik, hogy valamely projektív felület geodetikus vonalrendszerének megalapozására az illeszkedés, a rendezés és a folytonosság axiómáit válasszuk. Hogy a tárgyalás ne legyen feleslegesen komplikált, kifejezetten az egyszerűen konvex felületek axiómatikájának tanulmányozására szorítkozom. Az általános projektív felületekre való átvitel a kicsiben való összeköthetőségre vonatkozó tétel alapján nem jár semilyen elvi nehézséggel. A rövidség és a könnyen megjegyezhetőség kedvéért ezentúl a „geodetikus vonal“ kifejezés helyett egyszerűen az „egyenes“ kifejezést fogjuk alkalmazni.

Képzeljük el a pontoknak nevezett elemek oly sokaságát, amelyben bizonyos részsokaságok egyenesekként vannak kitüntetve. Tegyük fel, hogy teljesülnek a következő axiómák:

V I: Két különböző pont egy és csak egy egyeneshez tartozik.

V II: minden egyenesnek legalább két különböző pontja van.

V III: van három olyan pont, amely nem fekszik egy egyenesen.

A pontok között adva van továbbá egy háromelemű (A, B, C) reláció, amely a következőképpen olvasandó: B az A és C pontok között fekszik. Tegyük fel, hogy ez a reláció kielégíti a következő axiómákat:

A I: ha (A, B, C) fennáll, úgy A, B, C valamely egyenes három különböző pontja.

A II: (A, B, C)-ből következik (C, B, A).

A III: ha A, B különböző pontok, akkor létezik olyan C pont, amelyre nézve fennáll (A, B, C).

A IV: (A, B, C)-ből következik, hogy sem (B, A, C), sem (A, C, B) nem állhat fenn.

A V: Tegyük fel, hogy A, B, C, három olyan pont, amely nem fekszik egy egyenesen és azt, hogy a g egyenes nem halad át sem az A, sem a B, sem a C ponton. Tegyük fel továbbá, hogy g tartalmaz egy olyan D pontot, amelyre nézve (B, D, C) áll fenn. Ebben az esetben g tartalmazzon egy olyan E pontot, amelyre nézve vagy (A, E, B), vagy (A, E, C) álljon fenn.

A VI: Az ú. n. Pasch-féle axióma, melynek oly fogalmazást adtam, hogy abból a sík kétdimenziós volta adódjék.

A folytonossági axiómákra nézve különböző fogalmazások lehetségesek, ügyelni kell azonban arra, hogy a metrikus fogalmakat elkerüljük. A közölt vonatkozás alapján ismeretes módon minden egyenesen definiálhatjuk az egyenes pontjainak valamely irányítását. Az alanti megfogalmazásban a „sűrű" és Dedekind-féle szelet" fogalmak ezen irányítás értelmében veendők.

S I: Minden egyenesen létezik egy megszámlálható, mindenütt sűrű ponthalmaz.

S II: Bármilyen egyenesen minden Dedekind-féle szelet ennek az egyenesnek egy pontját határozza meg.

Az, hogy mindezek az axiómák valamely egyszerűen konvex felületen teljesülnek, lényegesebb nehézség nélkül következik a kicsiben való összeköthetőség tételéből, valamint a felület és a geodetikus vonalak topológikus struktúrájából.

Ismeretes, hogy milyen szerepet játszik a Desargues-féle és a Pascal-féle tétel a síkgeometria további felépítésénél. E tételek szükségesek specifikusan projektív struktúrák bevezetésére az egyenesen és a sugársoron. Nevezetesen e tételek teszik lehetővé projektív koordináták és a kettős viszony bevezetését. Ahhoz, hogy lehetőleg valamennyi projektív felületet felöleljük, e tételek nem használhatóak, mivel érvényességük a sík projektív geometriához vezet. Ennélfogva a Desargues-féle tételt más tétellel kell helyettesítenünk.

Amint azt kimutattuk, a geodetikus vonalak sorai egy egydimenziós projektív struktúra hordozói. Az axiómatikának az a feladata, hogy ilyen projektív struktúrákat tényleg előállítson. Kézen fekvő az a gondolat, hogy a sík projektív geometria módszereit átvigyük a végtelen kicsire, és ennek megfelelően a szükséges konstrukciókat határátmenetek útján végezzük el. Az axiómatikus megalapozáshoz ebben az esetben követelni kellene a Desargues-féle tételnek a végtelen kicsinyben való fennállását. Azt, hogy egy ilyen eljárás lehetséges, az alanti meggondolásokkal óhajtjuk plauzibilissé tenni.

A síkbeli projektív geometria bármelyik tételét legáltalánosabban a következőképpen foghatjuk fel: legyen adva olyan véges számú P_i pont és g_j egyenes, amelyek között adott projektív relációk állnak fenn, akkor a P_i pontokból és g_j egyenesekből meghatározott metszési és összekötési műveletekkel előállítható Q_k pontok és h_l egyenesek között újabb illeszkedési és kettősviszony relációk állanak fenn. Egy ily tétel infinitezimális analogonján a következőt értem: ha a P_i pontok és g_j egyeneseket úgy tartatjuk egy határhelyzethez, hogy közben az ezek közötti projektív relációk, valamint Q_k pontokra és h_l egyenesekre vonatkozó konstrukciós előírások változatlanul maradjanak, akkor megkívánjuk, hogy a Q_k pontok és a h_l egyeneseknek legyen határhelyzetük és ezek között ugyanazok az illeszkedési és kettősviszony relációk álljanak fenn, mint a határátmenet előtt. Természetesen itt csak heurisztikus elvről van szó. Azonkívül meggondolandó, hogy valamely adott elemi tételhez a határátmenetek minéműsége szerint különböző infinitezimális analogonok létezhetnek.

Ezt az imént leírt eljárást a teljes négyszög harmonikus tulajdonságairól szóló tétel példáján szeretném illusztrálni. A tételnek a következő fogalmazást adom: legyenek A, B, C, D valamely teljes négyszög csúcspontjai, E, F, G legyenek AC és BD, AB és DC, AD és BC metszéspontjai. Ebben az esetben az AC, BD egyenespárt az EF, EG egyenespár harmonikusan választja szét. Az infinitezimális megfelelőhöz pl. a következő módon jutunk el: tegyük fel, hogy A, B, C, D egy és ugyanazon 0 pont felé konvergál, és pedig olyképpen, hogy az AB, CD egyenesek mindketten valamely g_1 egyenes felé, az AD, BC egyenesek mindketten egy g_2 egyenes felé és az AC egyenes g_3 egyeneshez konvergálnak. Ha g_1, g_2, g_3 egymástól különbözőek, úgy BD egy g_4 egyeneshez konvergál; g_1, g_2, g_3, g_4 áthaladnak 0-án és g_1, g_2-t g_3, g_4 harmonikusan szétválasztja. Az E, F pontokat, mint a tétel érvényességére nézve lényegteleneket, az egyszerűség kedvéért figyelmen kívül hagytam. Egy ilyen tételt valóban be lehet bizonyítani valamilyen tetszőleges projektív felületen fennálló geodetikus négyszögekre nézve. A bizonyításra itt nem térhetek ki.

A sík projektív geometria legtöbb tételéhez, pl. a Desargues-féle és a Pascal-féle tételhez is infinitezimális analogonok formulázhatók meg, amelyek projektív felületeken érvényesek. A Desargues-féle infinitezimális tétel a határátmenet szempontjából lényegtelen és felesleges elemek elhagyásával lényegesen egyszerűsíthető és a következő tételre redukálható, mely a fentebb fogalmazott tételt speciális esetként foglalja magában:

Az infinitezimális négyszögről szóló tétel: tegyük fel, hogy valamely projektív felületen az A, B, C, D-vel jelölt négy pont négy pontsorozaton fut át, amelyek egy és ugyanazon 0 ponthoz konvergálnak. Emellett tartsanak az AB, BC, CD, DA, AC egyenesek az a, b, c, d, e egyenesekhez. Tegyük fel továbbá, hogy ezen öt egyenes közül bármely három egyenes nem esik egy egyenesbe és hogy nem áll fenn egyszerre, hogy $a = b$ és $c = d$, vagy hogy egyszerre lenne $a = d$ és $c = b$. Ebben az esetben BD egy f egyeneshez konvergál, (a, c), (b, d), (e, f) pedig egy a 0-án áthaladó geodetikus vonalak sorában fennálló involúció három párját alkotja.

Térjünk vissza most a felületelmélet axiómatikájának további kiépítéséhez. Azért, hogy határátmeneteket tegyünk lehetővé, az absztrakt felületen egy topológiát kell bevezetnünk. Ez azonban könnyen valósítható meg. A VI—III és A I—V axiómák alapján értelmezhetjük valamely sokszög belsejének fogalmát. Lássuk pl. a *D. Hilbert* „Grundlagen der Geometrie“ 7. kiadás 1930. 10. oldalán található tárgyalást. A környezet definíciója ennek alapján a következő: egy poligon belsejéhez tartozó bármely pontnak környezetén e poligon belsejét értjük. Ez a környezetfogalom olyan topológiát hoz létre, amelyről kimutatható, hogy az egyenértékű az euklideszi sík topológiájával. Ezzel rendelkezésre áll a konvergencia fogalma is. További axiómaként követeljük meg:

J I: az infinitezimális négyszögről szóló tétel érvényességét: konvergáljon BD valamely f határhelyzethez.

A hat határegyenes involutorikus sajátságára vonatkozó állításnak természetesen el kell maradnia, mivel az involúció fogalma még nem áll rendelkezésre, hanem azt még axiómatikusan be kell majd vezetni. Kimutatható már most, hogy az f egyenest a, b, c, d, e egyértelműen és a határátmenettől függetlenül meghatározzák. Ha az a, b, c, d egyeneseket rögzítjük, úgy minden e egyeneshez egyértelműen egy f egyenest rendelünk hozzá. Ezt a hozzárendelést nevezzük involúciónak. Ekkor az involúció alapsajátságai — mint ahogy ez az axiómákból levezethető — teljesülnek. Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy a sugársorokban involúciókat egy határátmenet útján konstruktív módon állítsunk elő. Már pedig az involúciók konstrukcióján alapul a kettős viszonyok bevezetése. Olyan eljárással, amely a sík projektív axiómatikában alkalmazott eljárással teljesen analóg, kettősviszonyokat definiálhatunk a sugársorokra. Lényegében *J* I valamint a folytonossági axiómák alapján adódik, hogy a kettősviszonyok egy testet alkotnak, mely a valós számok testével izomorf. Kettősviszony koordinátákat a síkon a következő módon definiálhatunk: legyenek az A, B, C általános helyzetű pontok az alappontok, az E egységpont legyen az ABC háromszögnek valamely belső pontja. Ha ekkor P a síknak tetszőleges pontja, képezzük az $u = D(AP, AE; AB, AC)$ és $v = D(BP, BE; BC, BA)$ kettősviszonyokat. u, v a P kettősviszony-koordinátái. A *J* I axióma felállításával lényeges lépést tettünk a felületelmélet megalapozásához, nevezetesen sugársoron lévő projektív struktúrának konstrukciójához. Közelebbi részletekre és bizonyításokra ebben az előadásban nem térhetek rá. Utalok egyik munkámra, amely közeljövőben fog megjelenni. Ugyanígy le kell mondanom arról, hogy az axiómatika kiépítéséhez szükséges további lépéseket részletesen leírjam. Csupán néhány utalásra szorítkozom.

A legközelebbi cél annak kimutatása, hogy a sík egyenesei kielégítenek egy $\ddot{u}^i + F^i(u^1, u^2; \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0$ alakú differenciálegyenletekből álló rendszert. Láttuk, hogy a síkon koordinátákat vezethetünk be. Mindenekelőtt tehát ki kell mutatni, hogy az egyeneseknek ezekben a koordinátákban egy legalább kétszer folytonosan differenciálható $u^1(t), u^2(t)$ paraméteres előállításuk van. Ezzel szorosan összefügg az a kérdés, vajjon két különböző kettősviszony-koordinátarendszer egymással valamilyen reguláris kétszer folytonosan differenciálható koordináta transzformációval van-e összekapcsolva. Ha egyelőre csak elsőrendű differenciálhatósági feltételre szorítkozunk, az egyenesek és a koordinátarendszerek e sajátságainak kimutatására nem elegendő az *J* I axióma. Ennek az az oka, hogy az *J* I-ben csak oly határátmeneteket vettünk tekintetbe, amelyeknél a kiindulópontok (a négyszög kiindulópontjai) egy közös ponthoz konvergálnak, a négyszög tehát végül egyetlen ponttá fajul. Ezenkívül azonban még duális határátmenetekre is szükség van, amelyeknél tehát adott egyenesek egy közös egyeneshez konvergálnak. A másodrendű differenciálhatósági feltételre vonatkozó megfelelő vizsgálatok még nincsenek lezárva.

Egy további fontos kérdés, amelyet az előzőektől függetlenül tárgyalhatunk, a következő: milyen geometriai sajátságok jellemzik azokat a felületeket, melyekre nézve az egyenesek egy a speciálisabb $\ddot{u}^i + \Gamma^i_{kl}(u^1, u^2)\, \dot{u}^k\, \dot{u}^l = 0$ alakú differenciálegyenletrendszert elégítenek ki? Erre vonatkozólag vizsgálatok még nem állnak rendelkezésre.

Az általam kifejtettek befejezéseképpen még szeretném felhívni a figyelmet egy a projektív sík axiómatikájával fennálló analógiára. Folytonossági axiómák nélkül a Desargues-féle tétel nem elegendő, szükség van a Pascal-féle tételre is. A Pascal-féle tétel azonban a Desargues-féle tételből a folytonossági axiómák segítségével következik. Ennek megfelelően J I-et a Pascal-féle tétel infinitezimális analogonjával kell pótolni, ha le akarunk mondani a folytonossági axiómákról és az infinitezimális Pascal-féle tétel következménye J I, ha a folytonossági axiómákat megengedjük.

A BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-FÉLE GEOMETRIA HATÁSA AZ AXIÓMATIKUS MÓDSZER FEJLŐDÉSÉRE

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag

Előadta az ünnepi ülésszak 1952 december 18-án délelőtt tartott ülésén

A Bolyai héten tartott több előadás megemlékezett a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria hatásáról a matematika különböző területeinek fejlődésére. Ebben az előadásban arról a hatásról lesz szó, amit a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria a matematika sajátos módszerének, az axiómatikus módszernek fejlődésére gyakorolt. Igaz, hogy *Bolyai János* és *Lobacsevszkij* korszakalkotó kutatásaikat nem azért végezték, hogy a matematikát módszerei szempontjából is gazdagítsák, hanem azért, hogy a matematikát megtisztítsák az önkényes feltevésektől és alkalmasabbá tegyék az objektív valóság leírására; az is igaz, hogy felfedezésük nem elsősorban módszertani szempontból jelentős; mégis csonka volna a Magyar Tudományos Akadémia megemlékezése *Bolyai János* születésének 150 éves évfordulójáról, ha nem beszélnénk *Bolyai* és zseniális kortársa, *Lobacsevszkij* kutatásainak hatásáról az axiómatikus módszer fejlődésére is.

A Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria létrejötte fordulópont az axiómatikus módszer történetében. A *Bolyai János* és *Lobacsevszkij* geometriai vizsgálataival lezárultak azok az évezredes axiómatikus kutatások, amelyek a a „paralellák problémájának" megoldására irányultak, vagyis a párhuzamosság euklideszi axiómájának bizonyítására az euklideszi geometria többi axiómája alapján. Ezek a vizsgálatok ugyanakkor egész sorát nyitották meg az axiómatikus módszerrel kapcsolatos modern kutatásoknak.

Bolyai János már az Appendix címében kifejezte azt a meggyőződését, hogy az a kérdés, érvényes-e a párhuzamosság euklideszi axiómája a valóságos térben, vagyis abban a térben, amely az anyag mozgásának szinhelye, vagy nem, „a priori soha el nem dönthető", tehát csak tapasztalati úton eldönthető kérdés. Lobacsevszkij is meg volt arról győződve, hogy ez a kérdés a tudomány fejlődése során kísérleti úton dől majd el.

Az, hogy a párhuzamosság axiómájának érvényessége a valóságos térben logikai úton nem dönthető el, azt jelenti, hogy logikailag az euklideszi geometria és a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria egyaránt lehetségesek. Pontosabban kifejezve: ha az euklideszi geometria axiómarendszere ellentmondástalan, akkor a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriáé is az és viszont, ha a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszere ellentmondástalan, akkor az euklideszi geometria axiómarendszere is az. Ezt az állítást *Bolyai* is, *Lobacsevszkij* is empirikus úton támasztották alá a hiperbolikus geometria részletes kifejtésével. Ennek folyamán sorra tárgyalták mindazokat a kérdéseket, amelyeket az euklideszi geometriában tárgyalni szokták, mégsem jutottak ellentmondásra.

Akármilyen nyomós is ez az empirikus érv, mégsem teljesen kielégítő. Hiszen el lehetne képzelni, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria további kifejtése során, vagyis a geometria axiómáiból való további következtetések folyamán jutunk ellentmondásra. Ilyen ellentmondás a párhuzamosság euklideszi axiómájának indirekt bizonyítását adná. Természetesen a fordítottját is el lehetne képzelni, t. i. azt, hogy az euklideszi geometria további kifejtése során jutunk majd egyszer ellentmondásra. Ilyen ellentmondás a párhuzamosság euklideszi axiómájának cáfolatát adná.

Bolyai János geometriai vizsgálataiból következik, hogy az utóbbi eset nem fordulhat elő, feltéve, hogy az abszolút geometria axiómái, vagyis az euklideszi geometria axiómái a párhuzamosság axiómájának elhagyásával, ellentmondástalan rendszert alkotnak. *Bolyai* ugyanis megmutatta, hogy ha az euklideszi geometria axiómáiban a sík fogalma helyébe mindenütt F-felület (vagyis paraszférát), az egyenes fogalma helyébe pedig mindenütt L-vonalat (vagyis paraciklust) teszünk, akkor ezekből az axiómákból, beleértve a párhuzamosság axiómáját is, csupa olyan tétel lesz, amelyek a hiperbolikus geometriában bebizonyíthatók. Ebből következik. hogy ezzel a transzformációval nemcsak az euklideszi geometria axiómáiból, hanem az azok alapján bebizonyított tételekből is olyan tételeket kapunk, amelyeket a hiperbolikus geometria axiómái alapján be lehet bizonyítani.

Ezt a gondolatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg általánosan: Legyen A és B két axiómarendszer. Legyen hozzárendelve az A axiómarendszer minden alapfogalmához egy-egy, a B axiómarendszerben definiálható fogalom (esetleg alapfogalom). Rendeljük hozzá minden olyan T' állításhoz, amelyben a logikai fogalmakon kívül más fogalom nem szerepel, mint az A axiómarendszer alapfogalmai, azt a T állítást, amely úgy keletkezik belőle, hogy T-ben az A axiómarendszer minden alapfogalmát a hozzárendelt, a B axiómarendszerben definiálható fogalommal pótoljuk. Tegyük fel, hogy ez a $T \rightarrow T'$ transzformáció az axiómarendszer minden axiómáját a B axiómarendszerben bebizonyítható tételbe (esetleg a B axiómarendszer axiómájába) viszi át. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az említett hozzárendelés, amely az A axiómarendszer minden alapfogalmához egy-egy, a B axiómarendszerben definiálható fogalmat rendel, az A axiómarendszer *modellje* a B axiómarendszerben; a $T \rightarrow T'$ transzformációit e modell *alkalmazásának* nevezzük. Már most *a modell alkalmazása nemcsak az A axiómarendszer axiómáit, hanem az A axiómarendszerben bebizonyítható tételeket is a B axiómarendszerben bebizonyítható tételekbe viszi át.* Valóban, legyen T egy tetszőleges az A axiómarendszerben bebizonyítható tétel és legyen D a T tétel egy tetszőleges bizonyítása az A axiómarendszerben. D tehát olyan $T_1, T_2, \ldots, T_n$ állításoknak sorozata, amelyek mindegyike vagy az A axiómarendszer valamelyik axiómája, vagy pedig e sorozatban őt megelőző állítások logikai következménye, T_n pedig maga a T tétel. Jelöljük $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén T_k'-vel azt az állítást, amelyet T_k-ból a modell alkalmazásával kapunk. Megmutatjuk, hogy a T_k' a B axiómarendszerben bebizonyítható tétel. Ez a feltevés szerint érvényes azokra a k értékekre, amelyekre T_k az A axiómarendszer axiómája, úgy többek között $k = 1$-re is (mert T_1 nem lehet a D-ben őt megelőző állítások logikai következménye, mert nem előzi meg egy állítás sem, tehát T_1 csak az A axiómarendszer axiómája lehet). Tegyük fel már most, hogy állításunk minden, k-nál kisebb indexre érvényes; megmutatjuk, hogy akkor k-ra is igaz. Ezt megint csak abban az esetben kell megmutatnunk, ha T_k nem axiómája az A axiómarendszernek, tehát a $T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$ állítások közül egyeseknek logikai következménye. Akkor T_k' is logikai következménye a $T_1', T_2', \ldots, T_{k-1}'$ állítások közül a megfelelőknek, mert hiszen a modell alkalmazásával nem szűnik meg az állítások közötti logikai kapcsolat. A $T_1', T_2', \ldots, T_{k-1}'$ állítások azonban a feltevés szerint a B axiómarendszerben bebizonyítható tételek, ennélfogva T_k' is az, hiszen a B axiómarendszerben bebizonyítható tételek minden logikai következménye szintén bebizonyítható a B axiómarendszerben. Így többek között T_n', vagyis a T állításból a modell alkalmazásával keletkező állítás is a B axiómarendszerben bebizonyítható tétel.

Ebből következik, hogy ha az A axiómarendszernek van modellje a B axiómarendszerben és a B axiómarendszer ellentmondástalan, akkor az A axiómarendszer is az. Valóban, ha az A axiómarendszer ellentmondásos volna, vagyis volna két olyan állítás, T és $\overline{T}$, amelyek mindketten az A axiómarendszerben bebizonyítható tételek és amelyek közül $\overline{T}$ a T állítás tagadása (vagyis azt állítja, hogy T nem igaz), akkor belőlük a modell alkalmazásával olyan T' és $\overline{T'}$ állításokat kapnánk, amelyek mindketten a B axiómarendszerben bebizonyítható tételek volnának és amelyek közül $\overline{T'}$ a T' állítás tagadása volna (mert a modell alkalmazásával nem szűnik meg az állítások közötti az a kapcsolat sem, hogy az egyik a másiknak tagadása). Ebben az esetben azonban a B axiómarendszer is ellentmondásos volna. Más szóval, ha sikerül az A axiómarendszernek megadni egy modelljét a B axiómarendszerben, akkor ezzel visszavezettük az A axiómarendszer ellentmondástalanságának kérdését a B axiómarendszer ellentmondástalanságának kérdésére. Ezt még úgy is ki szokás fejezni, hogy ebben az esetben bebizonyítottuk az A axiómarendszer *relatív* ellentmondástalanságát a B axiómarendszerre nézve.

Így abból a tényből, hogy *Bolyai János* modellt konstruált az euklideszi geometria axiómarendszerére a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerében, következik, hogy ha a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszere ellentmondástalan, akkor az euklideszi geometria axiómarendszere is az. *Bolyai* nem ebből a célból konstruált modellt az euklideszi geometria axiómarendszerére a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerében, hiszen abban az időben még fel sem merült az a gondolat, hogy az euklideszi geometria ellentmondásos lehet; hanem azért, hogy ezzel meggyorsítsa a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria felépítését. Ugyanis ezzel a módszerrel egy csapásra egy sereg tételét kapta a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriának, t. i. mindazokat a tételeket, amelyek az euklideszi geometria valamelyik tételéből azáltal adódnak, hogy benne a sík és az egyenes fogalmát az *F*-felület, ill. az *L*-vonal fogalmával pótoljuk. Kétségtelen elvitathatatlan érdeme *Bolyai*nak azonban, hogy ő adta a *modell-módszer* első alkalmazását.

Ez a módszer vezetett a *Bolyai* (és *Lobacsevszkij*) által nyitva hagyott, említett problémának: a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszere ellentmondástalanságának az euklideszi geometria axiómarendszere ellentmondástalanságára való visszavezetése problémájának megoldásához. Evégett nem kellett mást tenni, mint modellt konstruálni a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerére az euklideszi geometria axiómarendszerében. Ilyen modellt *Cayley* és *Felix Klein,* valamint *Kőnig Gyula* konstruáltak először. Különösen érdekes *Kőnig Gyula* kevéssé ismeretes modellje. Ez a modell azon alapszik, hogy a négydimenziós euklideszi tér axiómarendszerében könnyű modellt konstruálni a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerére; evégett nem kell mást tenni, mint a négydimenziós térben egy állandó negatív görbületi háromdimenziós alakzatot tekinteni, ennek pontjait helyettesíteni a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria pontjai helyébe, geodetikus vonalait a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria egyenesei helyébe és kétdimenziós geodetikus alakzatait a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria síkjai helyébe; az illeszkedés, rendezés és egybevágóság fogalmai önmagukba mennek át. Másrészt annak felhasználásával, hogy a tér egyenesei négydimenziós alakzatot alkotnak, könnyű modellt konstruálni a négydimenziós euklideszi geometria axiómarendszerére a háromdimenziós euklideszi geometria axiómarendszerében (e modellben a négydimenziós geometria pontjainak a háromdimenziós geometria egyenesei felelnek meg). A kettő egybevetésével kap *Kőnig Gyula* olyan modellt a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerére az euklideszi geometria axiómarendszerében, amelyben a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria pontjainak az euklideszi geometria bizonyos egyenesei felelnek meg, t. i. azok, amelyek egy egyenlőoldalú hiperbola pontjait egy másik egyenlőoldalú hiperbola forgatásával keletkezett egypalástú hiperboloid pontjaival kötik össze. Akár a Cayley—Klein-féle modell, akár a Kőnig Gyula-féle modell mutatja, hogy ha az euklideszi geometria axiómarendszere ellentmondástalan, akkor a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszere is az.

Az a tény, hogy ily módon sikerült a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerének ellentmondástalanságát visszavezetni az euklideszi geometria axiómarendszerének ellentmondástalanságára, felvetette az euklideszi geometria ellentmondástalanságának kérdését. Ezt a kérdést *Hilbert*nek sikerült visszavezetnie a valós számok aritmetikája axiómarendszerének ellentmondástalanságára, mégpedig ugyancsak a modell-módszerrel. Evégett modellt kellett konstruálnia az euklideszi geometria axiómarendszerére a valós számok aritmetikájának axiómarendszerében. Ez az analitikus geometria Descartes-féle alapgondolatának felhasználásával könnyen lehetséges volt. Az euklideszi geometria pontjainak valós számokból álló számhármasokat feleltetett meg, az euklideszi geometria síkjainak háromismeretlenes lineáris egyenleteket (pontosabban valamely háromismeretlenes lineáris egyenletből konstanssal való szorzással keletkező egyenletek összességét), az euklideszi geometria egyeneseinek két háromismeretlenes lineáris egyenletből álló egyenletrendszereket (pontosabban azon egyenletek összességét, amelyek két egymásnak ellent nem mondó háromismeretlenes lineáris egyenletből konstansokkal való szorzással és összeadással keletkeznek); az illeszkedésnek azt a relációt, hogy egy számhármas kielégít egy háromismeretlenes lineáris egyenletet, ill., hogy egy háromismeretlenes lineáris egyenlet két háromismeretlenes lineáris egyenletből konstansokkal való szorzással és összeadással keletkezik; a rendezés fogalmának és szakaszok egybevágóságának azokat az aritmetikai relációkat, amelyek az analitikus geometriában ezeket a geometriai fogalmakat kifejezik.

A geometria axiómarendszere ellentmondástalanságának visszavezetése a valós számok aritmetikája axiómarendszerének ellentmondástalanságára felvetette a valós számok aritmetikája axiómarendszerének ellentmondástalansága kérdését. Ennek a kérdésnek megoldására már nem alkalmas a modell-módszer, mert az csak relatív ellentmondástalanság-bizonyítást szolgáltathat, itt pedig már nem ilyenről van szó. Hogy egy axiómarendszer ellentmondástalanságának „abszolút értelemben“ való bizonyítása elvben lehetséges, azt *Hilbert* mutatta meg. Ehhez mindenesetre szükséges, hogy pontosan megfogalmazzuk, mit értünk állításán, továbbá, hogy mit értünk bizonyításon és ellentmondáson, amihez viszont az szükséges, hogy szabatosan definiáljuk, mikor mondjuk egy állításról, hogy más állításoknak logikai következménye, ill. hogy egy másik állítás tagadása. E fogalmak szabatos definíciója a matematikai logika segédeszközeinek felhasználásával sikerült. Szükség volt továbbá ehhez arra is, hogy figyelembe vegyünk azon transzformáción kívül, amelyet egy modell alkalmazásának nevezünk, más olyan transzformációkat is, amelyek valamely bizonyítást ismét bizonyításba visznek át (esetleg ugyanazon axiómarendszerbeli bizonyításba). *Hilbert* egy egész elméletet dolgozott ki axiómarendszerek ellentmondástalanságának abszolút bizonyítására; ezt az elméletet Hilbert-féle bizonyításelméletnek nevezzük. Ennek felhasználásával egymástól függetlenül *Novikov*nak és *Gentzen*nek sikerült bebizonyítaniok a természetes számok axiómarendszerének ellentmondástalanságát; a racionális, vagy az algebrai számok axiómarendszerének ellentmondástalanságát, továbbá az euklideszi, vagy a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerének ellentmondástalanságát is vissza lehet vezetni a természetes számok axiómarendszerének ellentmondástalanságára, ha a geometria axiómarendszeréből elhagyjuk a folytonosság Dedekind-féle axiómáját és azt egyenesek és körök metszéspontjának létezésére vonatkozó, az euklideszi értelemben vett szerkesztéseket lehetővé tevő axiómákkal pótoljuk. A valós számok aritmetikája ellentmondástalanságának bizonyításától azonban még messze vagyunk.

A modell-módszernek egyébként axiómarendszerek ellentmondástalanságára való alkalmazásain kívül még számos más alkalmazása ismeretes. Sok esetben a modell-konstrukció *definíció* formáját öltötte. Tipikus példa erre a valós számok Dedekind-féle (vagy Weierstrass-féle, vagy Cantor-féle) definíciója. Itt tulajdonképpen a következőről van szó. Az analízis felépítéséhez a valós számoknak azokra a tulajdonságaira van szükség, amelyek a valós számok összességét, mint a Dedekind-féle értelemben folytonos, archimedesien elrendezett testet jellemzik. Ezek a tulajdonságok egy axiómarendszert alkotnak. A valós számok definíciója Dedekind-féle szeletalkotással nem más, mint modell szerkesztése erre az axiómarendszerre a racionális számok aritmetikájának és halmazelméletének axiómarendszerében (ahol tehát más halmazok létezését nem kívánjuk meg, mint olyanokét, amelyeknek elemei racionális számok).

A modell-módszer újabb alkalmazásai közül megemlítem még *Gödel* bizonyítását arra, hogy ha a halmazelmélet axiómarendszere ellentmondástalan, akkor nem lehet benne megcáfolni a kontinuum-problémára vonatkozó Cantor-féle sejtést. Ezt *Gödel* úgy bizonyítja be, hogy a halmazelmélet axiómarendszerében modellt konstruál arra az axiómarendszerre, amely úgy keletkezik, hogy a Cantor-féle sejtést hozzávesszük. Ez a modell abban áll, hogy a *halmaz* fogalma helyében a (bizonyos pontosan definiált értelemben, matematikai logikai és halmazelméleti módszerekkel) *konstruálható halmaz fogalmát* teszi; a tartalmazás relációja önmagába megy át.

A Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria azonban más tekintetben is hatott az axiómatikus módszer fejlődésére, nemcsak a modell-módszeren keresztül. Az, hogy az euklideszi geometria és a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria egyidejűleg ellentmondástalan, úgy is megfogalmazható, hogy a párhuzamosság euklideszi axiómája sem be nem bizonyítható e két geometria közös axiómái alapján, sem meg nem cáfolható. Ezt úgy szokás kifejezni, hogy a párhuzamosság euklideszi axiómája *független* az euklideszi geometria többi axiómáitól. Általában, valamely *P* axiómát függetlennek nevezzük valamely *A* axiómarendszer axiómáitól, ha sem *P*, sem tagadása *P*, nem bizonyítható be az *A* axiómarendszerben. A párhuzamosság euklideszi axiómájának függetlensége az euklideszi geometria többi axiómáitól volt az első nem triviális példa valamely axiómarendszer egyik axiómájának a többitől való függetlenségére. A függetlenség bizonyításának itt szereplő módszere pedig a következőképpen fogalmazható meg általános alakban: *egy ellentmondástalan A axiómarendszer valamely P axiómája akkor és csakis akkor független az A axiómarendszer* *többi axiómáitól, ha az az axiómarendszer is ellentmondástalan, amely úgy keletkezik A-ból, hogy a P axiómát $\bar{P}$-sal pótoljuk benne.* Ezt a kérdést pedig a modell-módszerrel vizsgálhatjuk meg, mert a függetlenségi vizsgálatokban rendszerint feltételezzük a szóbanforgó axiómarendszer ellentmondástalanságát. A párhuzamosság euklideszi axiómájának a geometria többi axiómájától való függetlenségére vonatkozó felfedezés a függetlenségi vizsgálatok egész sorát indította meg. Ezek a vizsgálatok olyan fontos fogalmakhoz vezettek, mint pl. az algebrában a nem-archimedeszi test, vagy a *p* karakterisztikájú test fogalma.

Végül azt is mutatja a párhuzamosság axiómájának függetlensége a geometria többi axiómájától, hogy ha az euklideszi geometria axiómarendszeréből elhagyjuk a párhuzamosság axiómáját, akkor olyan axiómarendszert kapunk, amely *nem teljes.* Még pedig kétféle értelemben nem teljes. Egyrészt van olyan, a geometria axiómarendszerének alapfogalmai segítségével megfogalmazható állítás, t. i. maga a párhuzamosság axiómája, amely sem maga, sem tagadása nem bizonyítható be a kérdéses axiómarendszerben. Másrészt van az euklideszi geometria axiómarendszeréből a párhuzamosság axiómájának elhagyásával keletkező axiómarendszernek két olyan modellje (pl. a valós számok aritmetikájának axiómarendszerében), amelyek egy bizonyos pontosan definiálható értelemben nem izomorfok (az egyiket az euklideszi, a másikat a hiperbolikus analitikus geometria módján lehet konstruálni). Azt a követelményt, hogy valamely *A* axiómarendszerben bármely, az axiómarendszer alapfogalmain és a logikai fogalmakon kívül más fogalmat nem tartalmazó *T* állítás vagy maga, vagy tagadása, $\bar{T}$, bebizonyítható legyen az *A* axiómarendszerben, más szóval, hogy az *A* axiómarendszerben ne legyen „eldönthetetlen" állítás, az *A* axiómarendszer *kategoricitásának* nevezzük. Az a követelmény pedig, hogy valamely *A* axiómarendszer bármely két (pl. aritmetikai) modellje izomorf legyen egymással, az *A* axiómarendszer *monomorfizmusának* követelménye.

Az a felfedezés, hogy az euklideszi geometria axiómarendszere a párhuzamosság axiómája nélkül nem teljes (holott, amíg azt remélték, hogy be lehet benne bizonyítani a párhuzamosság euklideszi axiómáját, teljesnek vélték), pontosabban, hogy se nem monomorf, se nem kategórikus, megindította különféle axiómerendszerek teljességére (monomorfizmusára és kategoricitására) vonatkozó vizsgálatokat. Eleinte ezekben a vizsgálatokban is relatív teljességet bizonyítottak be, vagyis feltételezték más axiómarendszerek teljességét. Az ilyen vizsgálatok látszólag pozitív eredménnyel jártak; pl. *Hilbert* bebizonyította, hogy a geometria axiómarendszere monomorf, ha a valós számok aritmetikájának axiómarendszere az. Amint azonban elkezdték vizsgálni az abszolút teljesség kérdését, negatív eredményre vezettek a vizsgálatok. Így *Skolem* bebizonyította, hogy azok az axiómarendszerek, amelyek nem-megszámlálható összességek jellemzésére hivatottak (pl. a valós számok aritmetikájának, a geometriának, a halmazelméletnek axiómarendszere), amennyiben ellentmondástalanok, nem monomorfok, mert akkor van olyan modelljük is, amelyben az általuk jellemzett összességek elemeinek szerepét természetes számok veszik át, tehát „megszámlálható“ modelljük is. Ez a Skolem-féle eredmény, amely *Löwenheim* egy matematikai logikai tételének alkalmazása, még nem zárja ki azt, hogy olyan axiómarendszerek, amelyek megszámlálható összességek jellemzésére hivatottak, monomorfok legyenek. Azonban azt is megmutatta *Skolem*, hogy a természetes számok aritmetikájának sincs (véges számú, vagy megszámlálhatóan végtelen sok axiómából álló) monomorf axiómarendszere, amennyiben minden ilyen axiómarendszerhez lehet olyan modellt konstruálni, amelyben a természetes számok szerepét bizonyos számelméleti függvények veszik át, amelyek nem ω típus szerint vannak rendezve.

Hasonlóan negatív eredményre vezettek az axiómarendszerek kategoricitására vonatkozó vizsgálatok is. *Gödel* megmutatta, hogy ha egy axiómarendszer elég kifejező ahhoz, hogy bizonyos aritmetikai fogalmakat definiálni lehessen benne, s emellett elég szabályos is ahhoz, hogy bizonyos értelemben aritmetikailag lehessen benne jellemezni, hogy egy állítás mikor logikai következménye más állításoknak, továbbá ellentmondástalan, akkor nem lehet kategórikus.

Ezek a vizsgálatok arra a felismerésre vezettek, hogy az axiómatikus módszer nem alkalmas az alapfogalmaknak izomorfizmustól eltekintve egyértelmű jellemzésére, sem pedig arra, hogy egyszer s mindenkorra megadott axiómák segítségével valamely nem triviális tárgykör minden problémáját el tudjuk dönteni. Más szóval a valóságot helyesen tükröző fogalmak teljes jellemzéséhez módszereink, axiómarendszerünk szakadatlan fejlesztésére van szükség és az a követelmény is megkívánja ezt a szakadatlan fejlesztést, hogy minden, a valóságra vonatkozó problémát meg akarunk oldani, mert a valóságot fokról-fokra teljesen meg akarjuk ismerni. A dialektikus materializmus szemszögéből ez természetesnek látszik, mégis nagy jelentőségű, hogy ehhez a felismeréshez minden filozófiai feltevés nélkül, matematikai úton is el lehetett jutni. (Végeredményben ez is természetes, mert a dialektikus materializmus nem külön feltevésekre alapozza megállapításait, hanem a szaktudományok eredményére épít.) *Bolyai János* és *Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij* hervadhatatlan érdeme, hogy a geometria axiómarendszerével, tehát tulajdonképpen egy speciális axiómarendszerrel kapcsolatos vizsgálataik végül is erre, az axiómatikus módszerre vonatkozó általános felismerésre vezettek.

DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOKON ÉRTELMEZETT TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK BIZONYOS OSZTÁLYAINAK SAJÁTSÁGAI ÉS ALKALMAZÁSUK VARIÁCIÓS FELADATOKRA

SZ. M. NYIKOLJSZKIJ

Előadta az ünnepi ülésszak 1952. december 18-iki ülésén

I. Azzal kezdjük, hogy megvizsgáljuk a legegyszerűbb Dirichlet-féle feladatot.

Megkeresendő az $u(x, y)$ függvény, amely valamely adott G tartományon belül kielégíti a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

egyenletet és amely a tartomány Γ kerületén egy adott $f(s)$ függvénnyel egyenlő kerületi értékeket vesz fel, ahol s a Γ kerület ívhossza.

Annak idején még *Riemann* hozta javaslatba e feladat variációs megoldását, amely abból áll, hogy a keresett harmonikus függvényt, mint azt a függvényt keressük meg, amely minimummá teszi a

$$D[F] = \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy \qquad (2)$$

Dirichlet-féle integrált, valamennyi lehetséges (megengedhető), a G tartományon értelmezett $F(x, y)$ függvény között, amelyeknek a G-n négyzeteikkel együtt integrálható parciális deriváltjai vannak és amelyek kielégítik az adott

$$F|_s = f(s) \qquad (3)$$

határfeltételeket.

Később, mint ismeretes, ezt a módszert *Weierstrass* kritizálta. *Weierstrass* példaként idézett egy a kerületen folytonos $f(s)$ függvényt, amelyhez tartozó u harmonikus függvény, $D[u]$ Dirichlet-féle integrálja végtelen és amelyre nézve következésképpen a feladatnak variációs módszerrel való megoldása lehetetlen.

Ezzel kapcsolatosan egy bizonyos időn át nem volt világos, mely esetekben alkalmazható a variációs elv a kerületi feladatok megoldásánál és mely esetekben nem. A helyzetből kiutat már csak a mi századunkban találtak, nevezetesen megállapították, hogy ha csak az adott határfeltételek megengedik a G tartományon legalább egy oly $F(x, y)$ függvény létezését, amely kielégíti ezeket a határfeltételeket és amelynek véges $D[F]$ integrálja van, (egy ilyen függvényt nevezzünk *számbavehető* függvénynek) úgy a feladat variációs módszerrel megoldható és ebben az esetben mindenkor létezik egy oly u függvény, amelyre $D[F]$ minimális; ez a függvény emellett harmonikus. Másrészt, ha számbavehető függvény nem létezik, úgy nyilvánvalóan a variációs módszernek a kerületi feladat megoldására való alkalmazásáról sem lehet szó annak ellenére, hogy maga a megoldás kedvező esetben létezhetik.

Mindezt, amit mondottunk, napjainkban nem csak az itt vizsgált legegyszerűbb feladat esetében, hanem más kerületi feladatok egy tág osztályának esetében is igen általános határfeltételek mellett igazolták.[5, 13]

Azonban a problémának ilyen megoldása kikerüli és megoldatlanul hagyja azt a lényeges kérdést, hogy milyen feltételeket kell kielégítenie magának a kerületi függvénynek ahhoz, hogy azt a Γ-ra a G tartományban úgy lehessen folytatni, hogy számbavehető F függvényt kapjunk?

Általánosítva ezt a kérdést, a kerületi feladatok egy általánosabb osztályát véve szemügyre, a következő problémához jutunk.

Az $(x_1, \ldots, x_n)$ pontok n dimenziós terében adva van a G tartomány és azon az $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény, amely meghatározott rendig bezárólag parciális deriváltjaival együtt a p-edik hatványra emelve $(1 \leqq p \leqq \infty)$ integrálható. Mit mondhatunk e függvény és parciális deriváltjainak kerületi értékeiről a G tartomány S határán?

Ezt a problémát először a 30-as években vetették fel és tették tanulmány tárgyává munkájukban *Sz. L. Szoboljev*[12, 13], később pedig tanítványa *V. N. Kondrasev*[4]. Végeredményben ezek a szerzők igen messzemenő szükséges feltételeket kaptak meg.

Sikerült a legutóbbi időben ezeket a szükséges feltételeket annyira javítanom, hogy lehetségesnek mutatkozott a megfelelő tételeket, amelyek a szuperpozíció tételének nevét viselik, megfordítani. Erről fogok beszámolni az alábbiakban.

II. Mielőtt áttérnék az eredmények leírására, röviden foglalkozni óhajtok azokkal a módszerekkel, amelyek segítségével ezek az eredmények megkaphatók voltak.

Itt egyrészt azokról a módszerekről van szó, amelyekkel valamely függvény folytatható értelmezési tartományán túl, és pedig úgy, hogy megmaradjanak a függvény differenciális sajátságai. Másrészt széles körben alkalmaztuk a függvény-approximáció elméletének módszereit.

Ha a tér valamely G tartományán megadatott egy oly függvény, amely meghatározott differenciális sajátságokkal rendelkezik, úgy ahhoz, hogy megállapítsuk a függvény bizonyos más differenciális sajátságait, folytatni szoktuk ezt a függvényt a G-n túl az egész téren, differenciális sajátságainak érvényben tartása mellett. Ezután a függvényt véges fokú egész függvények szerint sorbafejtjük.

A $G_{\nu_1 \ldots \nu_n}(z_1, \ldots, z_n)$ függvényt $\nu_1, \ldots, \nu_n$ fokú egész függvénynek nevezzük a $z_1, \ldots, z_n$ változók szerint, ha a függvény e változók mindegyikére egész függvény és bármely $\varepsilon > 0$-ra megadhatunk egy oly A számot, hogy valamennyi komplex z_k-ra fennálljon, hogy

$$|G_{\nu_1\ldots\nu_n}| < Ae^{\sum\limits_1^n (\nu_k+\varepsilon)|z_k|}.$$

A sor tagjaira nézve becsléseket kaptunk az általánosított Jackson-féle egyenlőtlenségek segítségével. Továbbá *Sz. N. Bernstejn* megfordítási tételeinek típusába tartozó tételeket[3] alkalmaztunk. Itt is lényeges szerepet játszottak nemcsak *Sz. N. Bernstejn*[6] általánosított egyenlőtlenségei

$$\left\|\frac{\partial G_{\nu_1\ldots\nu_n}}{\partial x_i}\right\|_p^{(n)} \leqq \nu_i \|G_{\nu_1\ldots\nu_n}\|_p^{(n)}, \tag{4}$$

melyek segítségével megbecsülhető a $G_{\nu_1\ldots\nu_n}$ függvény parciális deriváltjának normája, hanem az alábbi más típusú egyenlőtlenségek is:

$$\|G_{\nu_1\ldots\nu_n}\|_p^{(m)} \leqq 2^n\left(\prod_{m+1}^{n}\nu_k\right)^{1/p}\|G_{\nu_1\ldots\nu_n}\|_p^{(n)}, \tag{5}$$

amelyek a [6] dolgozatban vannak bebizonyítva, s melyek segítségével megbecsülhetjük a $G_{\nu_1\ldots\nu_n}$ függvény normáját, ha azt csak az $x_1,\ldots,x_m$ változók szerint tekintjük, rögzített $x_{m+1},\ldots,x_n$ mellett, az ugyanezen függvénynek az $x_1, x_2,\ldots,x_n$ változók R_n terében számított normája segítségével. Éspedig

$$\|f\|_p^{(m)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)|^p\,dx_1\ldots dx_m\right)^{1/p} \tag{6}$$

ahol az x_i-k valósak.

A (4)-gyel és (5)-tel analóg egyenlőtlenségek állnak fenn a többváltozós, trigonometrikus polinomokra nézve is, feltéve, hogy a normák (6) alakú integrálokkal vannak értelmezve, amelyek 2π élhosszúságú kockára vannak kiterjesztve.

III. Állapodjunk meg abban, hogy ha G a valós $x_1,\ldots,x_n$ értékek R_n terének tartománya, úgy G_η oly tartományt jelöl, amely G oly pontjaiból áll, amelyek G kerületétől η-nál nagyobb távolságra fekszenek. Ha $G = R_n$, úgy $G_\eta = R_n$.

Azt fogjuk mondani, hogy az $f(x_1,\ldots,x_n)$ függvénynek az x_1 változó szerint a G-n $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ parciális deriváltja van, ha ez a függvény megváltoztatható egy nullméretű n-dimenziós halmazon, úgy, hogy ezután az majdnem valamennyi rögzített $x_2,\ldots, x_n$-re x_1 függvényeként abszolút folytonos lesz, bármely zárt a G-be tartozó szakaszon és következésképpen minden ilyen szakaszon majdnem mindenütt létezik x_1 szerinti deriváltja, amelyet a $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ jellel fogunk jelölni. Hasonló módon határozzuk meg indukció alapján f-nek magasabbrendű parciális deriváltjait. Ha ezek valamennyien valamilyen meghatározott ϱ rendig a p-edig hatványra emelve integrálhatók G-n [$L_p(G)$-integrálhatók], úgy azok egy nullméretű halmaztól eltekintve nem függnek a differenciálás sorrendjétől.

Adjuk meg az $r>0$ számot és legyen $r=\bar{r}+\alpha$, ahol $0<\alpha\leqq 1$ és $\bar{r}$ egész szám. Azt fogjuk mondani, hogy az f függvény beletartozik a $H_{px_1}^{(r)}(G; M)$ osztályba, ha ez a függvény a G-n értelmezve van és az $\bar{r}$ rendig bezárólag x_1 szerint parciális deriváltjaival együtt p-edik hatványa $(1\leqq p\leqq\infty)$ integrálható és ha ezenkívül $\alpha<1$ mellett teljesül a

$$\Big(\int\limits_{G_\eta}\cdots\int|f_{x_1}^{(\bar{r})}(x_1+h, x_2,\ldots,x_n)-f_{x_1}^{(\bar{r})}(x_1,\ldots,x_n)|^p\,dx_1\ldots dx_n\Big)^{1/p}\leqq M|h|^\alpha$$

egyenlőtlenség és $\alpha=1$ mellett az

$$\Big(\int\limits_{G_\eta}\cdots\int|f_{x_1}^{(\bar{r})}(x_1+h, x_2,\ldots,x_n)-2f_{x_1}^{(\bar{r})}(x_1,\ldots,x_n)+$$
$$+f_{x_1}^{(\bar{r})}(x_1-h, x_2,\ldots,x_n)|^p\,dx_1\ldots dx_n\Big)^{1/p}\leqq M|h|$$

egyenlőtlenség, ha $|h|<\eta$. Ha az f függvény egyidejűleg beletartozik az $H_{px_i}^{(r)}(G; M)\ (i=1,\ldots,n)$ osztályokba, ezt úgy fogjuk jelölni, hogy $f\in H_p^{(r)}(G; M)$.

Tegyük meg a következő megjegyzést. Az f függvény, amely beletartozik a $H_p^{(r)}(G; M)$ osztályba, általában a G-n csak majdnem mindenütt van értelmezve. Ennélfogva formálisan ez a függvény mint $x_1,\ldots,x_n$ függvénye rögzített $x_{m+1},\ldots,x_n$ mellett határozatlan. Azonban, ha teljesül az $r-\dfrac{n-m}{p}>0$ kiegészítő feltétel, úgy f mindenkor megváltoztatható egy nullméretű halmazon úgy, hogy ezután teljesüljön

$$\lim_{\sum_{m+1}^{n}|x_i-x_i^{(0)}|\to 0}\int\limits_{\sigma}\cdots\int|f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1}^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})|^p\,dx_1\ldots dx_m=0$$

az $x_1,\ldots,x_m$ pontok minden zárt σ halmazára, amely beletartozik G megfelelő metszetébe. Ebben az esetben teljesen határozottan beszélhetünk az $x_1,\ldots,x_m$ változók $f(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)$ függvényéről, ha $x_{m+1},\ldots,x_n$ rögzítve vannak.

IV. Igazak a következő tételek:

1. tétel. Legyen adva valamely $f(x_1,\ldots,x_n)\in H_n^{(r)}(R_n; M)$ függvény és a $\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_n$ nem-negatív egész számok (λ) rendszere, amelyekre nézve

$$\lambda=\sum_{m+1}^{n}\lambda_k<r.$$

Ezenkívül legyen

$$\varrho^{(\lambda)}=r-\lambda-\frac{n-m}{p}>0.$$

Ekkor bármely tetszőleges rögzített $x_{m+1},\ldots,x_n$ mellett

$$\psi(x_1,\ldots,x_m)=\frac{\partial^\lambda f(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}}\ldots\partial x_n^{\lambda_n}}\in H_p^{(\varrho^\lambda)}(R_m; K),$$

ahol

$$\|\psi\|_p^{(n)}\Big\}^{K} < C(\|f\|_p^{(n)} + M)$$

és C oly állandó, amely nem függ $\|f\|_p^{(n)}$-től és M-től.

2. *tétel.* (Az első tétel megfordítása.) Adva van valamely pozitív r szám és az m és n természetes számok, melyekre nézve $1 \leq m < n$. Ezenkívül adva vannak a

$$\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$$

nem-negatív egész számok összes lehetséges (λ) rendszerei, melyekre nézve

$$\lambda = \sum_{m+1}^{n} \lambda_j < r$$

és a

$$\varrho^{(\lambda)} = r - \lambda - \frac{n-m}{p} > 0$$

számok.

Rendeljünk hozzá továbbá minden (λ) rendszerhez egy megfelelő m változós $\varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m)$ függvényt, amely megfelelően a $H_p^{(\varrho)(\lambda)}(R_m; M^{(\lambda)})$ osztályba tartozik, ahol $M^{(\lambda)}$ bizonyos pozitív számok.

Ekkor szerkeszthetünk egy oly n változós $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvényt, amely a következő sajátságokkal bír:

1) $f \in H_p^{(r)}(R_n; K)$,

ahol

2) $$\|f\|_p^{(n)}\Big\}^{K} < c \sum_{(\lambda)} (\|\varphi_{(\lambda)}\|_p^{(n)} + M^{(\lambda)}),$$

$$\frac{\partial^{(\lambda)} f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)}{\partial x_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}} = \varphi_{(\lambda)}(x_1, \ldots, x_m).$$

$\lambda = 0$ esetében a parciális derivált egybeesik magával a függvénnyel.

Az 1. és 2. tételek arra az esetre is általánosíthatók, amikor oly f függvényről van szó, amely az általánosabb $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$ osztályba tartozik bele, amely a $H_{px_i}^{(r_i)}(M_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ osztályok metszete, de ezzel nem fogunk foglalkozni.

V. Érdekelni fog bennünket az, hogy analóg tételeket kapjunk abban az esetben, amikor az m-dimenziós lineáris tér helyett tetszőleges elegendően sima m-dimenziós sokaság szerepel.

Egy m-dimenziós S sokaságot úgy értelmezünk egy az R_n-be tartozó oly zárt korlátos halmazt, amelynek minden P_0 pontja körülvehető egy oly gömbbel, melynek középpontja S-ben van és melynek sugara elég kicsi ahhoz, hogy az S-ből olyan σ darabot messen ki, amelyet a koordinátatengelyek megfelelő számozása mellett az

$$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = m+1, \ldots, n) \tag{7}$$

egyenletek határoznak meg, ha az $(x_1, \ldots, x_m)$ pont befut valamilyen m dimenziós G tartományt. Emellett feltételezzük, hogy minden $P \in \sigma$ ponthoz $n-m$ páronként ortogonális egységvektort rendelhetünk hozzá úgy, hogy közülük mindegyik ortogonális a lineáris érintő alakzatra az S sokaság P pontjában.

Ami e vektorok

$$\bar{N}_j = (\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)}) \qquad (j = m+1, \ldots, n)$$

vetületeit illeti, úgy ezek legyenek $x_1, \ldots, x_m$ függvényei, melyeknek $\bar{r}+1$-ig bezárólag terjedő rendű parciális deriváltjai léteznek.

Ha most adva van valamilyen n változós $f \in H_p^{(r)}(R_n; M)$ függvény, úgy meghatározhatjuk az $f|_s$ függvényt, amelyet f az S-en indukál. Emellett az S sokaság σ darabján ez a függvény kifejezhető mint $x_1, \ldots, x_m$-nek G-n értelmezett függvénye; természetesen ez a függvény a következő módon írható fel:

$$f|_\sigma = f(x_1, \ldots, x_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n).$$

Ismert feltételek mellett, amelyekről az alantiakban lesz szó, meghatározható a

$$\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_\sigma \tag{8}$$

derivált is, de ezen meghatározással kapcsolatos részletekkel most nem fogunk foglalkozni. Csupán azt jegyezzük meg, hogy oly feltételek mellett, amelyek alant megformulázott tételekben fennállnak, a (8) parciális deriváltakra vonatkozó kifejezések ugyanúgy alakulnak, hogy ha az m koordináták közül egyeseket másokkal cserélünk fel és egyeseket az S-re normális $n-m$ vektor közül másokkal cserélünk fel, mint ahogy ez abban a klasszikus esetben történik, amikor a függvény valamennyi vizsgálat alá vont parciális deriváltja folytonos.

VI. 3. *tétel.* Tartozzék az $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény a $H_p^{(r)}(R_n; M)$ osztályba és legyen adva a $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ nem-negatív számok (λ) rendszere, melyekre nézve

$$\lambda = \sum_{m+1}^{n} \lambda_K$$

és

$$\varrho^{(\lambda)} = r - \lambda - \frac{n-m}{p} > 0.$$

Ekkor létezik a

$$\left.\frac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_\sigma$$

függvény, amely a $H_p^{(\varrho^{(\lambda)})}(G_1; M_{a_1})$ osztályba tartozik, ahol G_1 bármely oly tartomány, melynek zárt burka beletartozik a G-be. Emellett

$$\left.\begin{array}{c} M_{a_1} \\ \left\| \dfrac{\partial^\lambda f}{\partial N_{m+1}^{\lambda_{m+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}} \right\|_\sigma \end{array}\right\} < c(M + \|f\|_p^{(r)}).$$

VII. 4. *tétel.* (A 3. tétel megfordítása.) Legyen az R_n térben adva az egymást páronként nem fedő

$$S_1, \ldots, S_\mu$$

sokaságok véges rendszere, melyeknek dimenziói

$$m_1, \ldots, m_\mu \qquad \left(r - \frac{n - m_K}{p} > 0\right).$$

Minden sokaságot a rajta fekvő egymást átfedő σ darabok véges száma fed. Ezek a darabok nyilván kifejezhetők bizonyos m_K koordináták útján a (7) egyenlőségek segítségével, és pontjaikhoz a σ-ra normális $\overline{N}_{m_K+1}, \ldots, \overline{N}_n$ meghatározott rendszerek tartoznak.

Adva vannak továbbá az r pozitív szám és valamennyi lehetséges (megengedett), a minden egyes S_K sokasághoz rendelt $\lambda_{m_K+1}, \ldots, \lambda_n$ nem-negatív számok (λ) rendszerei, mely számokra nézve

$$\lambda = \sum_{m_K+1}^{n} \lambda_j$$

és

$$\varrho^{(\lambda)_K} = r - \lambda - \frac{n - m_K}{p} > 0.$$

Minden egyes, az S_K sokaságon fekvő σ darabhoz és minden megengedett $(\lambda)_K$ rendszerhez legyen hozzárendelve az $F_{(\lambda)_K\sigma}$ függvény, amely a σ darabon van értelmezve és amelyet még $F_{(\lambda)_\sigma\sigma}$-vel is jelölhetünk. Ha σ darab nyilván kifejezhető az $x_1, \ldots, x_{m_K}$ koordináták útján (vagy más m_K koordináták útján), úgy a $F_{(\lambda)_\sigma\sigma}$ függvény e koordináták útján kifejezve tartozzék bele a $H_p^{\varrho^{(\lambda)_K}}(G_\sigma; M)$ osztályba, ahol G_σ a σ darabnak az $x_1, \ldots, x_{m_K}$ változók lineáris terére való projekciója.

Az egy és ugyanazon S sokaság közös, egymást fedő darabjain feltételezzük, hogy a $F_{(\lambda)_K\sigma}$ függvények egymással össze vannak egyeztetve abban az értelemben, hogy azok megfelelő transzformációs formuláknak vannak alávetve normális vektorok egy rendszeréről a másikra és bizonyos m_K változókról másokra, mely transzformációkra szükség van ahhoz, hogy lehetségesek legyenek a

$$\left.\frac{\partial^\lambda F}{\partial N_{m_K+1}^{\lambda_{m_K+1}} \ldots \partial N_n^{\lambda_n}}\right|_\sigma = F_{(\lambda)_K\sigma} \tag{9}$$

egyenlőségek valamennyi megengedett $(\lambda)_K$ rendszerre és valamennyi egy és ugyanazt a sokaságot és ugyanazon $F(x_1, \ldots, x_n)$ függvény mellett befödő darabokra.

Ebben az esetben az R_n térben megszerkeszthető az $F(x_1, \ldots, x_n)$ függvény, amely a következő feltételeknek van alávetve:

a) $F \in H_p^{(r)}(M^*)$

$$\left.\begin{array}{l} M^* \\ \|F\|_p^{(n)} \end{array}\right\} < c\left(\sum_{\sigma}\sum_{(\lambda)_\sigma} \|F_{(\lambda)_\sigma \sigma}\|_{L_p(G_\sigma)} + M\right).$$

Itt a második összeget valamennyi lehetséges a σ darabnak megfelelő megengedett $\lambda_{m_K+1}, \ldots, \lambda_n$ rendszerekre kell kiterjeszteni, (σ dimenzióinak számától függően), az első összeget pedig ki kell terjeszteni valamennyi tételünk szerint a sokaságot lefedő σ darabra. A c állandó nem függ

$$\sum_{\sigma}\sum_{(\lambda)_\sigma} \|F_{(\lambda)_\sigma \sigma}\|_{Lp(G_\sigma)} \text{ és } M\text{-től.}$$

b) (9) egyenlőség érvényes valamennyi megengedett $(\lambda)_K$-ra és valamennyi σ_s darabra.

VIII. A 3. és 4. tételek segítségével lehetőség nyílik arra, hogy az R_n-ben adott az $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény sajátságai alapján meghatározzuk e függvény sajátságait, az R_n-hez tartozó S sokaságon. Az alkalmazásoknál azonban gyakran van dolgunk egy ettől valamivel eltérő helyzettel. Nevezetesen az $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény rendszerint nem az egész R_n térben van megadva, amelyben az S sokaság foglaltatik, hanem a G tartományban, melyet az adott ($n-1$ dimenziós) sokaság határol az egyik oldalról. Ezzel kapcsolatosan felmerül az a kérdés, hogy miként lehet az f függvénynek a G-n fennálló sajátságai alapján megismerni a függvény sajátságait, pontosabban, a függvény kerületi értékeinek sajátságait G határán. Ennek a kérdésnek a megoldása visszavezethető az általunk bebizonyított tételekre, a következő módon:

Tegyük fel, hogy adva van valamilyen $G \subset R_n$ tartományban, melynek határa differenciálható $n-1$-dimenziós sokaság, az $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény és tegyük fel, hogy sikerül ezt a függvényt R_n-ben S határain túl folytatnunk úgy, hogy a folytatott függvény a $H_p^{(r)}(R_n; M)$ osztályba tartozik, bizonyos M állandóval. Ekkor már S annak az R_n térnek belsejében van, amelyben a függvény értelmezve van és ahol, hogy megítélhessük e függvény vagy parciális deriváltjainak viselkedését az S-en, alkalmazhatjuk a fent megfogalmazott tételeket.

Ime egy fontos eset, amikor ez a folytatás megvalósítható.

Lemma. Tegyük fel, hogy a $G \subset R_n$ tartománynak határát r-szer folytonosan differenciálható ($n-1$ dimenziós) S sokaság alkotja. Tegyük fel továbbá, hogy a G-n adva van az f függvény, amely r-ig bezárólag terjedő parciális deriváltjaival együtt a p-edig hatványán integrálható ($1 \leq p \leq \infty$).

Ekkor ez a függvény folytatható G határain túl az R_n-en úgy, hogy a kapott ψ függvény a mondott sajátosságokkal rendelkezzék az R_n-en. Emellett

$$\left\| \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{p}^{(n)} \underset{0 \leq \alpha \leq r}{} \leq c \sup_{0 \leq \sum_1^n \alpha_K \leq r} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_p(G)},$$

ahol c állandó.

Könnyű megállapítani, hogy a folytatás eredményeképpen kapott ψ függvény bele fog tartozni a $H_p^{(r)}(R_n; M)$ osztályba, ahol

$$M = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial^r \psi}{\partial x_i^r} \right\|_{L_p(G)}$$

IX. Alkalmazás gyanánt vizsgáljunk meg egy poliharmonikus feladatot. Adva van a G tartomány, melynek kerülete az (n—1-dimenziós) S differenciálható sokaság. Keressük azt az $u(x_1, \ldots, x_n)$ függvényt, amely G belsejében kielégíti a

$$\Delta^r u = 0$$

egyenletet és az S kerületen alá van vetve a

$$\left. \frac{\partial^\lambda u}{\partial N^\lambda} \right|_S = f_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1)$$

feltételeknek, ahol f_λ az S-en megadott függvény.

A megfelelő variációs feladat alakja az adott esetben a következő. Valamennyi lehetséges $F(x_1, \ldots, x_n)$ függvény közül, melyek bezárólag az r-edik fokig terjedő parciális deriváltjaikkal együtt négyzetesen integrálhatók és amelyek kielégítik a

$$\left. \frac{\partial^\lambda F}{\partial N^\lambda} \right|_\varrho = f_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1) \tag{10}$$

határfeltételeket, megkeresendő az a függvény, melyre vonatkozólag a

$$D_r[F] = \int_G \cdots \int \sum_{\Sigma \alpha_i = r} \frac{r!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^r F}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 dx_1 \ldots dx_n$$

integrál-minimummá válik.

Ha létezik legalább egy olyan számbavehető F függvény, amely kielégíti a megadott határfeltételeket és ugyanakkor véges $D_K[u]$ integrálja van, úgy mint ahogy ez *Sz. L. Szoboljev* műveiben[13] bizonyítást nyer, a $D_r[F]$ integrál felveszi minimumát és pedig poliharmonikus függvényre.

Felvetjük azt a kérdést, milyeneknek kell azoknak a feltételeknek lenniök, amelyeknek az f_λ függvényt alá kell vetni, ahhoz, hogy biztosítsuk valamely számbavehető függvény létezését.

Ha F számbavehető függvény, úgy azt a fenti lemma értelmében R_n-re úgy folytatjuk, hogy a folytatott $\bar{F}$ függvény beletartozzék a $H_2^{(r)}(R_n; M)$ osztályba.

Most a 3. tétel értelmében az S sokaság σ darabján, amely explicite kifejezhető az $x_1, \ldots, x_n$ koordináták (vagy más koordináták) útján, a

$$x_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_m) \quad (j = m+1, \ldots, n) \quad (x_1, \ldots, x_m) \in G_\sigma$$

egyenletekkel, az

$$\left. \frac{\partial^\lambda F}{\partial N^\lambda} \right|_\sigma = f_\lambda \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1)$$

függvény kell hogy beletartozzék a $H_2^{\left(r-\lambda-\frac{1}{2}\right)}(G_\sigma; M)$ osztályba egy bizonyos M konstanssal, minthogy

$$\varrho^{(\lambda)} = r-\lambda-\frac{n-m}{p} \doteq r-\lambda-\frac{1}{2} > 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1)$$

Ha most megadjuk az f_λ függvényeket, amelyek a σ darabokon a $H_2^{\left(r-\lambda-\frac{1}{2}\right)}(G_\sigma; M)$ osztályokhoz tartoznak, úgy a megfelelő példák azt mutatják[2, 7], hogy ezek egyes esetekben meg fogják engedni a számbavehető függvények létezését, más esetekben pedig nem. Ha azonban az f_λ függvények a σ darabokon bele fognak tartozni a $H_2^{\left(r-\varepsilon-\lambda-\frac{1}{2}\right)}(G_\sigma; M)$ osztályokba, ahol $\varepsilon > 0$, úgy e körülmények mellett már nyilvánvalóan létezik számbavehető függvény, minthogy a 4. tétel értelmében az R_n-en megszerkeszthettünk egy oly $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvényt, amely beletartozik a $H_2^{r+\varepsilon}(R_n; M^*)$ osztályba, melyre nézve fennáll a (10) egyenlet. Ekkor azonban ennek a függvénynek négyzeteivel együtt, r-ig bezárólag terjedő rendű integrálható deriváltjai vannak, ami maga után vonja $D_r[u]$ véges voltát.

IRODALOM

1 Т. И. Аманов — К теореме вложения дифференцируемых функций многих переменных. ДАН СССР (sajtó alatt).

2 Т. И. Аманов — К решению бигармонической задачи, ДАН СССР, (sajtó alatt).

3 С. Н. Бернштейн — Собрание сочинений, т. 1 (1952), АН СССР.

4 В. И. Кондрашов — О некоторых свойствах функций из пространства L_p. ДАН СССР, 48 (1945), 563 566.

5 Р. Курант и Д. Гильберт — Методы математической функции, т. II.

6 С. М. Никольский — Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Труды Математического института АН СССР, (1951), XXXVIII, 244—278.

7 С. М. Никольский — К задаче Дирихле (1952), LXXXIII, 23—26.

8 С. М. Никольский — О продолжении дифференцируемых функций многих переменных. ДАН СССР, (1952), LXXXII, 521—524.

9 С. М. Никольский — Вторая заметка о продолжении дифференцируемых функций, ДАН СССР.

10 С. М. Никольский — Свойства дифференцируемых функций многих переменных на замкнутых гладких многообразиях. ДАН СССР, (sajtó alatt).

11 С. М. Никольский — К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом. ДАН СССР, (sajtó alatt).

12 С. М. Соболев — Об одной теореме функционального анализа. Математический сборник (1938), 4 (46): 3, 471—497.

13 С. М. Соболев — Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинградский Гос. Университет (1950).

* * *

Fejér Lipót hozzászólásában a konform leképezésnek a tárggyal való kapcsolatára tett érdekes megjegyzést, amelyet ő H. A. Schwarz szóbeli közlésének köszönhet.

A BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ GEOMETRIA VILÁGNÉZETI JELENTŐSÉGE

RÉNYI ALFRÉD, lev. tag

Előadta az ünnepi ülésszak 1952 december 18-án tartott záróülésén

„...a természetet nem szabad ábrándok szülte agyrémek szerint formálni, hanem akarnunk kell észszerűen és természetes módon az igazságot, vagy magát a természetet látni.“ (Bolyai János)

„A materialista természetszemlélet egyszerűen azt jelenti, hogy a természetet olyannak vesszük, amilyen, anélkül, hogy valamit is hozzáadnánk, ami a természettől idegen.“ (Engels)

Bevezetés

A Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezése a matematika történetének egyik legkiemelkedőbb eseménye. Nemcsak arról van szó, hogy *Bolyai János* és *N. I. Lobacsevszkij* egymástól függetlenül megoldották a matematikának egyik, több mint kétezer éves, alapvető problémáját, amikor abból a szilárd meggyőződésből kiindulva, hogy a sokat vitatott párhuzamossági axióma (*Euklidesz* V. posztulátuma) nem következménye *Euklidesz* többi axiómájának, felépítettek egy olyan geometriai rendszert, melyben az említett axióma nem érvényes. Nemcsak arról van szó, hogy kísérletük sikere rendkívül meglepő volt, hiszen a matematikusok fáradozásai több, mint kétezer éven keresztül, *Pappus*tól és *Proklos*tól *Omar Khayam*ig, *Naszireddin*től és *Saccheri*től *Lambert*ig és *Legendre*ig arra irányultak, hogy *Euklidesz* V. posztulátumát bebizonyítsák, *Bolyai* és *Lobacsevszkij* pedig eljutottak annak felismeréséhez, hogy ezek a próbálkozások azért nem sikerültek, mert nem is sikerülhettek. Még azzal sem jellemezzük kellőképpen *Bolyai* és *Lobacsevszkij* eredményének jelentőségét, ha rámutatunk, hogy felfedezésük új korszakot nyitott meg a geometria, sőt, az egész matematika történetében. *Bolyai* és *Lobacsevszkij* felfedezése nemcsak a matematika fejlődése szempontjából volt jelentős. Ennek az előadásnak a célja, hogy *Bolyai* és *Lobacsevszkij* felfedezésének világnézeti jelentőségét igyekezzék megvilágítani, megmutatni azt, mivel vitte előre ez a felfedezés a matematikán túlmenőleg az anyagi világ megismerését általában. Meg fogjuk mutatni, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezése a tudományos materialista világnézet fejlődése szempontjából is nagyjelentőségű esemény volt. A Bolyai—Lobacsevszkij geometria egészen új megvilágításba helyezte a matematika és valóság sokrétű, dialektikus viszonyát, halomra döntött egy sereg évszázados előítéletet, számos elterjedt, helytelen, idealista, vagy metafizikus nézetet. A matematika és valóság viszonyának kérdése viszont az ismeretelmélet egyik jelentős problémája, amelynek helyes megértése nélkül a fizika és általában a matematikai módszerrel dolgozó exakt természettudományok eredményeinek jellegét és horderejét illetőleg a helyes tájékozódás nem lehetséges. Ez az oka annak, hogy miért van a nem-euklideszi geometria felfedezésének oly nagy világnézeti jelentősége; hogy ez miben áll, azt a következőkben fogjuk részletesen kifejteni.

Abból, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij geometriának rendkívül nagy világnézeti jelentősége van, már nyilvánvalóan következik, hogy ez a felfedezés a társadalom fejlődése szempontjából sem közömbös. Ezt tisztán látta maga *Bolyai* is. Az Appendix német átdolgozásában, amelyet *Bolyai János* 1832-ben maga készített, az utolsó, az eredeti latin szövegtől lényegesen eltérő 33. §-ban találjuk a következő mondatot: „a szerzőben él az a meggyőződés, hogy e tárgy tisztázásával a tudomány igazi gyarapításának, az ész művelésének és így az emberi sors lendítésének egyik legfontosabb és legfényesebb lépése megtörtént." Kétségtelenül ma szokatlanul hat, hogy egy tudós ilyen leplezetlen és naív formában értékelje saját eredményeinek horderejét. Nem vitás, hogy *Bolyai* élete és munkássága is egész másképp alakult volna, ha ezeket a szavakat nem ő, hanem kortársai írták volna le. Meg kell azonban állapítanunk, hogy *Bolyai János* fent idézett szavaiban saját eredményei értékelése egyáltalában nem túlzott. Figyelemreméltó az idézett mondat abból a szempontból is, hogy kifejezi *Bolyai János* világnézetének egyik jellemző vonását: azt, hogy ő a XVIII. század felvilágosodásának híve, meggyőződéses racionalista volt. Az idézett mondatban az a kifejezés, hogy „az ész művelésének *és így* az emberi sors lendítésének" volt egyik legfontosabb és legfényesebb lépése a nem-euklideszi geometria felfedezése, a felvilágosodás világnézetének alapvető tételét tükrözi, mely szerint a gondolkodás fejlődése döntő feltétele és rugója az emberi haladásnak. Ugyanazzal a felfogással találkozunk itt, amelyet *Rousseau*-nál megtalálunk már, majd később kivétel nélkül az összes utópista szocialistánál. E felfogás szerint elegendő felvilágosítani az embereket arról, hogy a fennálló társadalom észszerűtlen, továbbá arról, hogy milyen az észszerű társadalom és ettől az utóbbi máris meg fog valósulni. *Bolyai János* még nem látta tisztán, hogy hogyan kapcsolódik össze az emberi gondolkodás haladása a társadalmi haladással. Nem látta tisztán, hogy a haladó és reakciós világnézet küzdelme csak egyik frontja a haladó és reakciós társadalmi erők harcának, az osztályharcnak. Azt azonban világosan látta, hogy a tudományos igazságért való harcában egyben az emberiség haladásáért is küzd és hogy a tudomány terén elért győzelem közvetve, vagy közvetlenül valóban előbbre viszi az emberiség sorsát. *Bolyai János*ban ezért nemcsak a lángeszű tudóst tiszteljük és ünnepeljük születésének 150. évfordulóján, hanem az emberiség haladásáért öntudatosan és bátran küzdő embert, aki teljes mértékben tudatában volt annak, hogy amikor a tudományos igazságért harcol, ezt nem saját hírnevéért, vagy más egyéni érdekből, hanem az emberiség haladásáért teszi. Ennek felismerése egész más megvilágításba helyezi *Bolyai* idézett szavait, melyeket azért idéztünk, hogy megmutassuk, mennyire tudatában volt maga *Bolyai János* is felfedezése világnézeti jelentőségének. Lényegében ugyanez vonatkozik *Lobacsevszkij*re is, aki világosan látta, hogy új „elképzelt" geometriájával megsemmisítő csapást mért *Kant*nak az abszolút térfogalom velünk született voltára vonatkozó helytelen idealista felfogására. Ezt bizonyítják *Lobacsevszkij* következő szavai: „Bármely tudománynak világos és lehetőleg kevés számú alapfogalomra kell épülnie. Csak igy szolgálhatnak az elmélet biztos és elegendő alapjául. Az ilyen fogalmakat érzékeinkkel szerezzük meg, *velünk született fogalmakban ne higyjünk.*" *Gauss* is tisztában volt azzal, milyen döntő bizonyítékot szolgáltat *Bolyai János* felfedezése *Kant* idealista filozófiájával szemben. Ezt bizonyítják következő szavai, melyeket *Bolyai Farkas*nak az „Appendix" elolvasása után írt: „Éppen annak lehetetlensége, hogy a priori Σ (az euklideszi geometria) és *S* (a hiperbolikus geometria) között dönthessünk, legvilágosabb bizonyítéka annak, hogy *Kant*nak nem volt igaza, midőn azt állította, hogy a tér csak formája a mi szemléletünknek. Más, éppoly erős okra egyik kis dolgozatomban mutattam rá... benne találod néhány oldalon kifejtve a képzetes mennyiségekre vonatkozó nézeteimnek lényegét is." *Gauss*nak abban a dolgozatában, melyre itt utal[1], miután a komplex számok ma szokásos geometriai ábrázolásával foglalkozik és arra törekszik, hogy a komplex számokkal kapcsolatos „titokzatos homályt" eloszlassa, lábjegyzetben a következő megjegyzést teszi: „mindkét megjegyzést már *Kant* megtette s az ember nem érti, hogyan lehetséges, hogy ez az éleseszű filozófus az elsőben azon nézetének igazolását véli látni, hogy a tér *csak* formája a mi külső szemléletünknek, mikor pedig a második oly világosan bizonyítja ennek ellentétét, azt t. i., hogy *a térnek a mi szemléleti módunktól független, reális jelentősége kell, hogy legyen.*" [A szóbanforgó két megjegyzés arra vonatkozik, hogy a síkon egy koordinátarendszert önkényesen választhatunk, a koordinátarendszer rögzítése azonban csak az anyagi valósághoz kötve történhet.]

Érdekes megjegyezni, hogy *Gauss*nak erre a megjegyzésére a nem-euklideszi geometria legnagyobb továbbfejlesztője, *B. Riemann* is hivatkozik habilitációs előadásában[2]. Úgy látszik, hogy a nem-euklideszi geometria világnézeti jelentőségének, forradalmi materialista tartalmának világos felismerése volt éppen az a fő ok, amely az óvatos *Gauss*t a reakció uralmának éveiben arra késztette, hogy erre vonatkozó gondolatait ne tegye közzé. Amögött, hogy *Bolyai* érdemeinek nyilvános elismerésével *Gauss* oly meglepő mértékben

[1] Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda, C. F. Gauss Werke Bd. 2. Göttingen, 1863, 177.

[2] B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Ges. Math. Werke, Leipzig, 1876, 255.

fukarkodott, szintén az rejlik, hogy nem volt benne elég bátorság, hogy az uralkodó, idealista felfogással szemben *Bolyai* mellett harcosan kiálljon, annak ellenére, hogy meg volt győződve *Kant* idealista álláspontjának helytelenségéről. Persze *Kant*ot lehet bírálni jobbról is és balról is; bírálták például *Kant*ot a pozitivisták is. Ezzel kapcsolatban igen fontos hangsúlyozni, hogy mind *Bolyai János*, mind *Lobacsevszkij* és *Gauss*, *Kant*ot a materializmus oldaláról bírálták. *Gauss* „óvatos" álláspontja, *Bolyai* felfedezése melletti kiállás elöli kitérése joggal képezheti bírálat tárgyát. Ugyanakkor azonban igen nagy jelentőségű az a tény, hogy a XIX. század egyik vitathatatlanul legnagyobb matematikusa (ahogy korában nevezték, a matematikusok fejedelme) más helyütt ilyen határozottan és egyértelműen állást foglalt a térre vonatkozó Kant-féle idealista állásponttal szemben és a materialista felfogás mellett. Úgy látszik, biztosabb talajon érezte magát és könnyebben védhetőnek tartotta álláspontját a komplex számok kérdésében, mint a nem-euklideszi geometriában, ahol nemcsak a térre vonatkozó idealista filozófiai nézetekkel, hanem a matematikusok kétezer éves begyökerezett előítéletével is szembe kellett volna szállnia. *Gauss* óvatos álláspontjával összehasonlítva még fokozottabban kell becsülnünk *Bolyai János* és *Lobacsevszkij* bátor, harcos állásfoglalását.

Ahhoz, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij geometria világnézeti jelentőségét megérthessük, a kérdést történeti távlatban kell megvizsgálnunk. A geometria ugyanúgy, mint más tudományok, amióta létezik a haladó és reakciós világnézet, a materializmus és az idealizmus harctere. Ezért először a materialista és idealista világnézet harcával foglalkozunk a geometriában, *Euklidesz*től a XIX. század elejéig, ezután térünk rá a Bolyai—Lobacsevszkij geometria világnézeti jelentőségére.

1. A materialista és idealista felfogás harca a geometriában

A geometria, ugyanúgy, mint a matematika és a természettudományok egyéb ágai, úgy született meg, hogy a társadalom fejlődésének bizonyos fokán a termelés szükségletei által támasztott igényeket igyekezett kielégíteni. Ilyen igények a földméréssel, az építkezéssel, edények űrtartalmának mérésével kapcsolatban már i. e. 2000 évvel az ókori Babilonban és Egyiptomban felmerültek. Eleinte megelégedtek bizonyos pontatlan, gyakorlati szabályokkal, „receptekkel", például a kör területét a sugár négyzete háromszorosának vették. Babilonból és Egyiptomból csak gyakorlati feladatgyüjtemények maradtak ránk. Ezekből kitűnik, hogy sok helyes eredményt ismertek már, mint például a hasáb és a gúla térfogatának képleteit, ezeket azonban nem bizonyították, hanem elszigetelt tapasztalati tényként kezelték. A társadalom fejlődése, elsősorban a kézműipar és a kereskedelem, ezzel kapcsolatban a hajózás fejlődése, ami megkívánta a tengeren való tájékozódást, ezért a csillagászat fejlesztését, az első térképek készítését, stb., oda vezettek, hogy ezek a tapasztalati szabályok már nem voltak elegendők, megbízhatóbb, rendszeresebb, logikailag összefüggő geometriai ismeretekre volt szükség. Így született meg a geometria, mint tudomány, mégpedig Görögországban, i. e. a VI—V. században. A geometria első művelőinél ezek a közvetlen hatások még világosan lemérhetők és ennek következtében felfogásuk — mint például *Thales*-é — alapjában materialista volt. A görög matematika jellemző vonása, hogy nem áll meg a tapasztalatnál, hanem keresi az összefüggéseket, bonyolultabb tételeket igyekszik közismert egyszerűbb tényekre visszavezetni: megszületik a matematikai bizonyítás. A geometria első rendszeres tankönyvét a khioszi *Hippokrates* írta meg az i. e. V. század végén. A görög matematika fejlődése szorosan összefügg a görög gondolkodás, a görög filozófia fejlődésével: szinte egyetlen korszakban nem alkották a matematikai ismeretek a gondolkodás, a műveltség, olyan szerves részét, mint éppen az ókori görög kultúrában. A görög filozófia elmélyedő, a jelenségek mélyebb okait kereső tendenciája, a görög társadalmi élet, a jogi és politikai élet befolyására kialakuló vitázó módszer, a szofisták érvelő művészete — a dialektika a szó eredeti szűk értelmében — kétségtelenül döntő forrása a görög matematika szabatos bizonyításokat kereső tudományos módszerének és ezzel fő erejének. Ugyanakkor a görög filozófiában a kezdeti materialista irányokkal szemben egyre jobban uralkodóvá váló idealista irány, amely *Platon* személyében érte el a csúcspontját, határozottan káros, a fejlődést gátló hatást gyakorolt a geometriára is. *Platon* és tanítványai éles határvonalat húztak a geometria, mint a bizonyítások tudománya, és az aritmetika, (akkori terminológiával „logisztika") mint a filozófushoz méltatlan, kereskedőkhöz és rabszolgákhoz illő alacsonyrendű számolás között és ezzel elsőnek húztak mesterséges falat a matematika és annak gyakorlati alkalmazásai közé. Egyben kizártak a geometriából egy sereg problémát, amelynek megoldása pedig további lökéseket adhatott volna a fejlődésnek, mint például a kocka megkettőzésének problémáját (deloszi feladat), a szögharmadolás problémáját, stb. Kialakult a szám-misztika (*Pythagoras*) és kialakult az a hamis nézet, melyet leghatározottabban *Platon* képviselt, hogy a matematikai ismereteket az emberiség nem a tapasztalatból szerzi, hanem azok vele születtek, az ember csak „visszaemlékezik" az ideák világában látottakra. Ha közelebbről megnézzük ezt a minden tárgyi alapot nélkülöző helytelen felfogást, úgy nyilvánvaló annak tendenciája: a filozófus, a geométer ne tanulmányozza a valóságot, hanem álmodozzék, emlékezzék az ideák világára. Ezáltal válik a platonizmus a geometriában a fejlődés akadályozójává. *Platon* — és tegyük hozzá *Kant* — idealista nézetei ellen irányul *Bolyai János*nak az a mélyen materialista mondása, amit ezen előadás jelmondatául választottunk.

A görög geometria legteljesebb ránkmaradt rendszeres összefoglalása, amely a görög matematika több évszázados fejlődésének eredményeit összegezi, *Euklidesz*től származik, az i. e. III. századból. Az i. e. három évszázad és az i. u. két évszázad volt a görög matematika vitathatatlan fénykora; ebben az időben a matematikai élet középpontja Alexandria volt. *Euklidesz* munkája kétezer éven keresztül volt a geometria „bibliája“, amelyet tartalmilag csak kommentáltak, kiegészítettek, de nemigen haladtak túl, módszertanilag pedig példaképül tekintettek. *Euklidesz* munkájában hűen tükröződnek a görög matematikának mind az ereje, mind pedig fogyatékosságai és korlátai, de tükröződik benne a geometria terén az idealista és materialista felfogás között folyó harc is. Tárgyi tekintetben a görög matematika Achilles-sarka az irracionális szám fogalmának hiánya volt, amire *A. N. Kolmogorov* világosan rámutatott a Nagy Szovjet Enciklopédiában írt cikkében. A görög geométerek felfedezték, hogy vannak összemérhetetlen távolságok, azonban mivel csak az egész- és törtszámokat ismerték, ebből azt a következtetést vonták le, hogy a geometriában számokkal nem lehet dolgozni, ezért válaszfalat húztak a geometria és az aritmetika között (analízisről, akkor még nem igen beszélhetünk annak ellenére, hogy — amint arra rá fogunk térni — Archimedesz már ismerte az infinitézimális számítás bizonyos elemeit) és ezzel a geometria és annak alkalmazásai között. Ezt a falat csak *Descartes* döntötte le teljesen és éppen ebben állt az analitikus geometria megteremtésének óriási jelentősége. Sok polgári matematika-történész, így *Cantor, Zeuthen* és mások — a neoplatonista *Proklos* egy kijelentésére támaszkodva és több-kevesebb tendenciával — azt az álláspontot képviselik, hogy *Euklidesz* platonista volt. Ezt a felfogást a Szovjetunióban is csak legújabban vonták kétségbe és tették bírálat tárgyává[3]. *Molodsii* és *Maisztrov* kimutatták, hogy *Euklidesz* alapjában *Arisztotelesz* híve volt, aki — mint arra *Lenin* rámutatott — ebben a kérdésben materialista álláspontot foglalt el, bár nem tartott ki amellett határozottan, lásd Lenin következő megjegyzését Arisztotelesz Metafizikájáról[4]. „A 13. kötet 3. fejezete kitűnően, világosan, helyesen, materialista módra oldja meg ezt a kérdést, (a matematika és más tudományok a test, a jelenségek, az élet egy-egy oldalát absztrahálják) azonban a szerző nem tart ki következetesen ezen felfogás mellett“. Úgy hiszem, nem felesleges, ha röviden ismertetem ennek a vitának a főbb tanulságait. *Vügodszkij* azzal érvelt, hogy *Euklidesz* „Elemeiben“ óvakodik a számok használatától és ennek következtében nem foglalkozik a geometria alkalmazásaival, ezt *Platon* hatásának tulajdonította. *Molodsii* és *Maisztrov* ezt a görög matematika említett főfogyatékossága, az irracionális számfogalom hiánya következményének tekintik és rámutatnak, hogy *Arisztotelesz*nek — aki állást foglalt amellett, hogy a geometria fogalmait az anyagi világból vonatkoztatja el — idevágó szavai a következők: „...erre példát szolgáltat az a vizsgálat, amelynek a matematikus aláveti azokat a tárgyakat, amelyeket absztrakcióval nyert. Ezt a vizsgálatot úgy végzi, hogy eltekint

[3] Ez a vita a moszkvai egyetem matematikatörténeti szemináriumának „Историко-Математические исследования“, c. kiadásának I. és II. kötetében lett közzétéve, l. M. Я. Выгодский dolgozatát (I. köt. 217—295) továbbá B. H. Молодший és A. E. Майстров dolgozatait (II. köt. 499—507).

[4] Аристотель, „Метафизика“, 1934, 15.

minden érzéki tulajdonságtól, mint a súly és a könnyűség, a szilárd és annak ellentéte, továbbá a melegség és hidegség és a többi érzéki ellentét, és csak a mennyiségi meghatározottságot és folytonosságot tartja meg"[5]. Itt tehát a kor által szabott korlátokról van szó, nem pedig az idealista filozófia és közelebbről *Platon* befolyásáról. *Molodsii* és *Maisztrov* rámutatnak arra, hogy *Euklidesz* kizárólag megszerkeszthető geometriai alakzatokkal foglalkozik és a szerkesztések elvégezhetőségének bizonyítására igen nagy gondot fordít. Ezt felfogásának alapvetően materialista volta egyik bizonyítékának tekintik.

Nincs itt hely, hogy a vita további részleteit ismertessem, csak két lényeges tanulságot akarok itt levonni. Az első az, hogy még a polgári matematika-történészek sem vonják kétségbe, hogy *Euklidesz* művének célkitűzéseit és módszereit nem érthetjük meg világosan, ha nem elemezzük azt a filozófiai felfogást, amelyre *Euklidesz* támaszkodott. Az nem is képezi és nem is képezheti vita tárgyát, hogy a materialista és idealista felfogás közötti harc a geometria terén is folyt, legfeljebb az, hogy *Euklidesz* maga milyen álláspontot foglalt el. Másodszor, már az elmondottak is világosan bizonyítják, hogy bár *Euklidesz* munkáján érezhető mind a materialista, mind az idealista filozófia hatása, de a haladó materialista felfogás hatása elválaszthatatlan *Euklidesz* nagy művének értékeitől, míg az idealizmus befolyása, amennyiben — korlátozott mértékben — érvényesült *Euklidesz*nél, korlátot szabott munkájának, ugyanúgy, ahogy az idealista filozófia a görög matematikában egészében a haladás akadályát képezte.

Érdekes ebből a szempontból a legnagyobb görög matematikus, *Archimedesz* munkásságát megvizsgálni. Mint ismeretes, *Archimedesz* bámulatos eredményeket ért el a geometriában, amelyeket másfél évezred után szárnyaltak csak túl. A π szám alsó és felső becslése $\left(\frac{273}{71} < \pi < \frac{22}{7}\right)$, a parabola-szegmentum területének, a gömb- és paraboloid-szegmentum térfogatának, a gömb felületének, különböző testek súlypontjának meghatározásával, a róla elnevezett csavarvonal felfedezésével, stb., *Archimedesz* olyan feladatokat oldott meg, amelyek azt bizonyítják, hogy nála már megvoltak az infinitézimális számítás, közelebbről az integrálszámítás csírái. *Archimedesz* az infinitézimális számításra vonatkozó gondolatait nem szabatos módszernek, hanem heurisztikus elvnek tekintette, és tudatában volt annak, hogy ezek szöges ellentétben állnak a geometriára vonatkozólag akkoriban uralkodó nézetekkel. Eredményeit utólag a „kimerítés" módszerével is igazolta. Valójában *Archimedesz* infinitézimális módszere részben mechanikai meggondolásokon alapult, részben pedig a görög materialisták atom-elméletének hatását tükrözi, amennyiben testeket infinitézimális „lemezekre", síkidomokat infinitézimális „pálcákra" bontott fel, ez azonban ellentétben állt a görög matematikában éppen az idealizmus befo-

[5] Metafizika, idézett kiadás 185—186.

lyása következtében uralkodó irányzattal. *Archimedesz* nagyszerű eredményeit az idealizmus befolyásával küzködve és a materialista világnézetre támaszkodva érte el. *Archimedesz* nemcsak a matematikában volt forradalmár, hanem a matematika alkalmazásai terén is: az archimedeszi csavar, híres hajítógépei, amelyekkel Syracusa védelmét segítette, az úszó testek stabilitására vonatkozó felfedezései, stb., stb., mind arról tanúskodnak, hogy *Archimedesz* nem tekintette a tudós számára lealázó, rabszolgának való munkának, hogy matematikai tudását a gyakorlat szolgálatába állítsa. Nagyon érdekes ebből a szempontból *Archimedesz*nek *Eratoszthenesz*hez, a „hivatalos" matematikai irányzat legfőbb képviselőjéhez írott levele, melyet csak 1906-ban fedeztek fel[6]. Ebben a levélben *Archimedesz* a következőket írja: „Mivel én, mint már mondottam, téged komoly tudósnak és kiváló filozófusnak tartalak,... helyénvalónak látom, hogy ebben a könyvben kifejtsem és megvilágitsam neked azt a különleges módszert, amelynek segítségével kiváló segédeszközt nyerünk bizonyos matematikai problémáknak a mechanika segítségével való vizsgálatára. Mélyen meg vagyok győződve arról, hogy ez a módszer nem kevésbbé hasznos tételek bizonyítására is: sok tény éppen a mechanikai módszer révén vált előttem világossá, de azután szükségesnek tartottam geometriailag is bebizonyítani őket, tekintve, hogy az említett módszer szigorú bizonyításokat nem ad. Világos azonban, hogy könnyebb szigorú bizonyítást találni akkor, ha már az említett (mechanikai) módszer segítségével bizonyos tájékozódást nyertünk a szóbanforgó kérdésben, mint ilyen bizonyítást találni előzetes tájékozódás nélkül. Éppen ezért azon tételeket illetőleg, melyeket szigorúan elsőnek *Eudoxusz* bizonyított be, hogy tudniillik a kúp harmadrésze a vele egyenlő alappal és magassággal bíró hengernek és ugyanígy a gúla a megfelelő hasábnak, (Archimedesz itt köbtartalomról beszél) nem kis szerepe volt *Demokritosz*nak, aki elsőnek állította fel ezeket a tételeket, szigorú bizonyítások nélkül." *Demokritosz,* a görög materializmus legkiemelkedőbb alakja volt és ő atomelméletét tudatosan alkalmazta a geometriában, és mint *Archimedesz* szavaiból látjuk, igen nagy sikerrel. *Demokritosz* tanításait a görög idealizmus „bojkottálta" és így ezek *Archimedesz* idejében kevéssé voltak közismertek és az atomisztikus felfogást a hivatalos görög filozófia ebben az időben tudománytalannak minősítette. Mind *Platon,* mind pedig *Arisztotelesz* igen kategórikusan leszögezték, hogy atomok bevezetése ellentmond a geometria legalapvetőbb tanításainak, mely szerint minden test minden határon túl osztható. Látjuk, hogy ez a dialektikus ellentmondás — amelyet a XX. század fizikájának eredményei világítottak meg, de szintén nem küszöbölték ki, — az osztható és oszthatatlan, az anyag folytonos és korpuszkuláris felfogásának ellentmondása — már a görög matematikában is a fejlődés egyik legfőbb rúgója volt. *Archimedesz* forradalmár volt a görög matematikában, aki nagyszerű eredményeire támaszkodva bátran szembeszállt az uralkodó idealista felfogással és állást foglalt a materializmus mellett.

[6] Lásd pl. С. Я. Лурье, Архимед, 1945, 137—138.

Archimedesz fent idézett szavai azért is rendkívül tanulságosak, mert azt bizonyítják, ami a mai matematikai kutatásra még fokozottabb mértékben áll, hogy a matematikusok, amikor új utakat keresnek, nem formális, az elfogadott felfogás szerint exakt módszerekkel, hanem szemléletes, heurisztikus meggondolásokkal szerzik meg az első tájékozódást a tárgyalt kérdésben, ezen keresztül visszanyúlnak a matematika materiális alapjaihoz és csak azután következik általában a szabatos bizonyítás. Félreértés ne essék: ez a megállapítás a legcsekélyebb mértékben sem érinti a szabatos bizonyítások szükségességének kérdését, ezt *Archimedesz* sem vonta kétségbe, sőt, ő maga a geometriai bizonyításoknak is utólérhetetlen mestere volt, és azokra igen nagy súlyt helyezett, ő csak a matematikai, mechanikai analógiákon alapuló, vagy az atomisztikus elképzeléseket felhasználó heurisztikus meggondolások létjogosultságát igyekezett a kor uralkodó felfogásával szemben kiharcolni. Szavai ma is fegyverül szolgálnak a matematikai formalizmus elleni harcban. Ugyanakkor azonban rendkívül figyelemreméltó az is, hogy *Archimedesz,* amellett, hogy igen nagy súlyt helyezett a fizikai szemléletre, világosan látta a szabatos matematikai bizonyítás szükségességét is. A fizikai szemléletre való támaszkodásának jelentőségét sok matematikus, a matematikai szabatosság jelentőségét pedig sok fizikus, különösen nyugaton — ma sem látja tisztán, és mindkét hiba a matematika formális alkalmazásához vezet. Amikor *Archimedesz* idézett szavaira a matematikusoknak és fizikusoknak egyaránt felhívom a figyelmét, rá kell, hogy mutassak arra is, hogy *Archimedesz* nemcsak az ókor legkiválóbb matematikusa, alkalmazott matematikusa, hanem egyben vitathatatlanul legnagyobb fizikusa is volt.

A középkorban a geometria fejlődése és ezzel kapcsolatban a geometrián belül folyó ideológiai harc csak kevéssel jutott előbbre. Az arab és perzsa matematikusok érdeme, hogy gondosan ápolták és részleteiben tovább is fejlesztették a görög geometria eredményeit. A geometria és különösen a „párhuzamossági axióma" terén értékes vizsgálatai vannak *Omar Khayam*nak és *Naszireddin*nek és az első érdemleges európai kutatások, így pl. *Saccheri* vizsgálatai közvetlenül *Naszireddin*nek a párhuzamossági axiómára vonatkozó bizonyítási kísérletéhez kapcsolódnak. Az úgynevezett Saccheri-féle négyszöget is megtaláljuk már *Naszireddin,* sőt már *Omar Khayam* munkáiban. Erre azért tartom szükségesnek felhívni a figyelmet, mert az arab és perzsa kulturának ezeket az eredményeit nálunk és a nyugaton nem ismerik és nem értékelik eléggé. Döntő lépés volt a geometria történetében az analitikus geometria megalkotása, amely *Descartes* nevéhez fűződik. Ez tette lehetővé, hogy a geometria problémáit lefordítsák az algebra, majd később az analízis nyelvére és viszont. Ezzel a geometria kilépett abból az elszigeteltségből, melybe a görög matematikában az irracionális szám fogalmának hiánya folytán került. Az analitikus geometriában az algebra és geometria dialektikus egysége valósult meg és ez tette lehetővé a differenciál- és integrálszámítás megszületését, azt, hogy a matematika a mozgás, a változás leírására alkalmas, nagy horderejű apparátust dolgozhatott ki. Ennek a fejlődésnek hatalmas pozitívumai mellett az analitikus módszerek térhódítása a geometriában és ugyanakkor a mechanikában, valamint a kettő szoros összefüggése, azt a téves elképzelést eredményezte, amely *Newton*tól egészen *Bolyai* és *Lobacsevszkij* koráig uralkodott, hogy a geometria nem egyenrangú ága a matematikának, hanem a matematikán belül alárendelt jelentősége van, hogy a geometria nem más, mint a matematikai analízis egyik — kétségtelenül fontos — alkalmazási területe. A geometriát ebben a korban nem is számították tulajdonképpeni matematikának, hanem az alkalmazott matematika egy fejezetének tekintették, amely a matematikának a newtoni világképnek megfelelő fizikai tér vizsgálatára való alkalmazásával foglalkozik. Egyesek odáig mentek, hogy a geometriát a mechanika részének tekintették. Ez a felfogás a metafizikus materializmus álláspontja. Éppen ezért volt *Kant*nak a térre vonatkozó idealista felfogása olyan nagy hatással korára, mert *Kant* álláspontját az uralkodó metafizikus materialista felfogás nem volt képes megfelelően megcáfolni és a két álláspont sok tekintetben találkozott. Így állott a kérdés a XIX. század elején és a további fejlődés *Bolyai* és *Lobacsevszkij* forradalmi jelentőségű felfedezésével kezdődött meg. Ezzel a következőkben fogunk foglalkozni.

Nincs itt helyünk, hogy a geometria történetét tovább elemezzük, de, úgy hisszük, az elmondottak is világosan bizonyítják, hogy a geometria történetében milyen központi jelentősége volt az idealista és materialista felfogás harcának és hogy a materialista felfogás előbbrevitte a geometriát, míg az idealista nézetek előbb, vagy utóbb a fejlődés gátjává váltak a geometriában is.

2. A Bolyai—Lobacsevszkij geometria jelentősége a materialista és idealista világnézet harca szempontjából

A matematika az anyagi világ bizonyos törvényszerűségeivel foglalkozik, sajátos, elvont fomában. Tárgyát illetően tehát a matematika rokon a természettudományokkal, módszerét illetőleg azonban azoktól lényegesen különbözik. A matematika tárgyára vonatkozólag lényegében ma is megállja a helyét *Engels* definíciója: „a tiszta matematika tárgyát a reális világ térbeli formái és mennyiségi viszonylatai, vagyis nagyonis reális anyag alkotja. Hogy ez az anyag igen elvont alakban jelenik meg, az csak felületesen fedheti el a külső világból való eredetét. De hogy ezeket a formákat és viszonylatokat a maguk tisztaságában tanulmányozhassuk, teljesen el kell őket vonatkoztatnunk tartalmuktól, mint olyantól, amely a tárgy szempontjából lényegtelen“[7]. *Engels*nek ebből a meghatározásából indul ki *A. N. Kolmogorov* is a Nagy Szovjet Enciklopédiában megjelent „Matematika“ című tanulmányában. A XIX. század második felében és a XX. században a matematikában végbement fejlődést úgy

[7] Anti—Dühring Idegennyelvű Kiadó, Moszkva 1947, 27.

látja jellemezhetőnek, hogy a legújabb matematikát mint „a reális világ teljes általánosságukban vett mennyiségi és térbeli formáival foglalkozó tudományt“ jellemzi. Filozófiai szempontból ez nem jelenti a legcsekélyebb mértékben sem az Engels-féle meghatározás módosítását, hanem csak olyan átfogalmazását, amely többek között éppen a Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezése következtében vált szükségessé, pontosabban annak a fejlődésnek következtében, melyet ez a felfedezés megindított. Módszertani szempontból a matematika jellemző vonása az absztrakció, amint arra már *Engels* idézett szavai is rámutatnak. Az anyagi világ mennyiségi és térbeli formáit úgy ismerhetjük meg a maguk tisztaságában, hogy az absztrakció útján elválasztjuk ezeket az általános formákat azok konkrét megvalósulásaitól és így teljes általánosságban vizsgáljuk azokat. A matematikai absztrakció lényegét világítják meg *Sztálin* elvtárs „A marxizmus és nyelvtudomány“ című munkájának következő szavai: „A nyelvtan a geometriára emlékeztet, amely törvényeit a konkrét tárgyaktól elvonatkoztatva adja meg, a tárgyakat, mint minden konkrétség nélküli testeket vizsgálja s a köztük lévő viszonyokat nem mint bizonyos konkrét tárgyak konkrét viszonyait határozza meg, hanem mint minden konkrétség nélküli testek viszonyait általában“. Az absztrakt tárgyalásmód a matematikában nem jelent eltávolodást a valóságtól, hanem éppen ellenkezőleg, ez vezet az anyagi világ mélyen rejlő, általános törvényszerűségeinek megismeréséhez. Erre legvilágosabban *Lenin* mutatott rá a tudománnyal kapcsolatban általában. Absztrakt fogalmakkal ugyanis nemcsak a matematika dolgozik, hanem több-kevesebb mértékben minden tudomány, mert a tapasztalat, a gyakorlat alapján kialakított, elvont tudományos fogalmak sűrített formában és mélyebben tükrözik vissza az objektív valóságot, mint a közvetlen, érzéki tapasztalat. „A gondolkodás“ — írta *Lenin* Filozófiai füzeteiben (146. o.) — „amikor a konkréttól az absztrakt felé halad, amennyiben helyes, úgy nem távolodik az igazságtól, hanem éppen, hogy közeledik hozzá. Az anyag, a természet-törvények, az érték absztrakciója, stb. egyszóval minden tudományos (helyes, komoly, nem felületes) absztrakció a természetet mélyebben, igazabban, teljesebben tükrözi vissza.“ Ugyanebben a munkájában más helyütt (153. o.) *Lenin* a következőket írja: „Az (elvont) fogalmak megalkotása és a velük való műveletek már magukban foglalják a világ törvényszerűségeinek, objektív kapcsolatainak elképzelését, az ezek létére vonatkozó meggyőződést és ezek felismerését.“ *Lenin*nek utóbbi szavai egyben arra is rámutatnak, hogy az absztrakció fogalmát csak a dialektikus materializmus alapján lehet világosan megérteni, amint hogy általában a matematika tárgyáról, feladatáról, módszerének sajátosságairól a dialektikus materializmus alapján alkothatunk csak világos képet. A matematikában az absztrakció messzebb megy, mint más tudományokban; a matematikai absztrakció sajátos vonásaira, amelyekben a más tudományokban használatos absztrakciótól különbözik, itt nem térhetünk ki.

A multban a matematikával kapcsolatban mind a matematikusok közt, mind a természettudósok és filozófusok között igen sok helytelen, téves elképzelés volt elterjedve. Ezek a téves felfogások még ma is élnek, méghozzá nemcsak nyugaton, hanem — kisebb mértékben úgy matematikusok mint nem matematikusok között, — itt nálunk is. Ezekkel már csak azért is foglalkoznunk kell, mert enélkül nem érthetjük meg, mi újat adott a tudománynak a nem-euklideszi geometria felfedezése. A matematikára vonatkozó helytelen nézeteknek se szeri, se száma. Ezek közül csak néhány iránnyal fogunk részletesen foglalkozni.

Nézzük először az idealizmus álláspontját. Ez tagadja a matematika törvényeinek objektív jellegét, a matematikát az emberi agy önkényes alkotásának tekinti. Ez az idealista felfogás nem képes megmagyarázni, miért alkalmazhatók a matematika módszerei olyan fényes sikerrel a természettudományokban és a technikában, az emberiségnek a természet és a társadalom megismerésére és megváltoztatására irányuló gyakorlati tevékenységében. Az idealizmus felfogása a matematikáról alaptalan, tudománytalan és káros. Az idealizmus álláspontját a geometriában, mint már arra rámutattunk, elsőnek *Platon* képviselte következetesen. Ez a felfogás ma is él a burzsoa tudományban, többek között a legélesebben a *Poincaré* által is képviselt konvencionalizmus formájában. Az idealizmus felfogása értelmében a geometria tárgyát a velünk született „a priori" térfogalom vizsgálata képezi. Ezt a felfogást *Bolyai* korában *Kant* képviselte leghatározottabban, amennyiben azt állította, hogy a térre vonatkozó elképzeléseink velünk született, a priori eszmék, szemléletünk formái, amelyek teljesen függetlenek a valóságtól, a tapasztalattól. *Kant* szerint az euklideszi geometria tételei az emberi gondolkodás egyedül lehetséges megváltoztathatatlan törvényei. Ezt a téves felfogást éppen a Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezése cáfolta meg a legvilágosabban.

Bolyai és *Lobacsevszkij* felfedezése azonban nemcsak az idealizmusra mért csapást, hanem arra a matematikára vonatkozólag akkoriban uralkodó helytelen metafizikus álláspontra is, amely azonosítja a matematikát a valósággal, a matematika törvényeit a természet törvényeivel. Nyilvánvaló ennek az álláspontnak a téves volta: a matematika törvényei az anyagi világ törvényszerűségeit tükrözik vissza, de a tükörkép — még ha hű is — nem *azonos* azzal, amit visszatükröz. Mint minden emberi megismerés, a matematika is csak viszonylagos, közelítően hű képet ad a valóságról, azt több-kevesebb mértékben leegyszerűsíti. Természetesen nincs elvi, áthághatatlan korlátja ennek a megközelítésnek, a megközelítés pontossága, a matematika által az anyagi világ bizonyos jelenségeiről adott kép megbízhatósága és hűsége állandóan növekszik: ebben áll éppen a fejlődés. Azonban az anyagi világot a maga teljességében, sokrétűségében, gazdagságában a matematika mindig csak többé-kevésbbé leegyszerűsítve, sematizálva tükrözi vissza. Aki a matematikának bármilyen területen való alkalmazásával valamit is foglalkozott, jól tudja, hogy a matematika alkalmazásainak központi problémája éppen abban áll, hogy eldöntsük, hogy milyen összefüggéseket, milyen tényezőket vegyünk figyelembe valamilyen reális jelenség vagy folyamat matematikai leírásánál és melyeket hanyagolhatunk el (hiszen a valóságban minden mindennel összefügg), továbbá, hogy a figyelembevett összefüggések jellegét, a tényezők befolyását milyen leegyszerűsített formában vegyük tekintetbe — egyszóval, hogyan válasszuk meg azt a matematikai *modellt*, amely a gyakorlat által megkívánt pontossággal (amely egyes esetekben rendkívül nagymértékű lehet) hűen tükrözi vissza a vizsgált jelenséget vagy folyamatot. Megjegyzendő itt, hogy a matematikai modell *helyességének* és *pontosságának* kérdését nem szabad összetéveszteni. Egy olyan matematikai modellt, amely bizonyos pontossággal nagy vonalakban hűen tükrözi vissza a jelenségek tényleges összefüggését, akkor is alapjában helyesnek kell neveznünk, ha a pontossága esetleg a modell további finomítása esetén még növelhető. Ilyen esetekben ugyanis a modell további finomítása, amely a leírás, a visszatükrözés pontosságát fokozza, az első közelítő kép nagy vonalakban való helyességét nem cáfolja meg, hanem azt csak kiegészíti. Ez a helyzet például a klasszikus és relativisztikus mechanika esetében. Persze a relativisztikus mechanika (a speciális relativitáselmélet) sokkal több, mint a klasszikus mechanika pontosabbá tétele, elvileg új tételeket is tartalmaz (pl. a tömeg függése a sebességtől), de e mellett a klasszikus mechanikának a pontosabbá tétele *is*. Erre a fontos kérdésre *Riemann* mutatott rá, aki a következőket írta: „A kép és az eredetije elemei közötti összefüggéseknek meg kell egyezni ahhoz, hogy a kép igaz legyen. A kép helyessége független a kép pontosságának fokától." Ha a kép egy elemét finomabb elemek egy csoportjával helyettesítjük, úgy ezáltal a betekintésünk a dolgok összefüggéseibe növekszik, anélkül azonban, hogy az eredeti felfogást tévesnek kellene minősítenünk"[8]. Míg az idealista felfogás a matematikai módszerek alkalmazhatóságának lebecsüléséhez vezet, az említett metafizikus felfogás, amely azonosítja az anyagi világ törvényeit azok matematikai formában való visszatükröződésével, a matematikai módszerek alkalmazhatóságának bizonyos tekintetben a túlbecsülését eredményezi (más tekintetben a metafizikus felfogás is a matematika lebecsüléséhez vezet): mind a két helytelen álláspont a gyakorlatban súlyos tévedések forrása. Abból, hogy a matematika mindig csak modelleket szolgáltat a valóság leírására, következik, hogy valamely természeti jelenség vagy folyamat leírására szolgáló matematikai tárgyalásmód nincsen egyértelműen meghatározva, hanem azt különbözőképpen választhatjuk meg és a tapasztalat mutatja meg esetenként, hogy ezek közül melyek alkalmasak. Így például a rezgő húr leírásánál tekinthetjük a húrt folytonosnak, de tekinthetjük izolált és egymáshoz rugalmasan kötött tömegpontokból álló láncnak. A két modellon alapuló tárgyalás sok szempontból lényegében ugyanolyan, eredményre vezet, a gerjesztett rezgések

[8] Ges. Werke 491.

esetében azonban bizonyos feltevések mellett alapvető eltérés mutatkozik[9]. Az anyagi világ objektív törvényeit és az azokat visszatükröző matematikai modellt azonosító említett metafizikus felfogás úgy a matematika, mint a fizika terén a későbbiekben összefonódott a machizmussal és ezen keresztül a „fizikai" idealizmus egyik forrásává vált. A machista felfogás tudvalevőleg tévesen azonosítja a fizikai valóságot megfigyeléseinkkel, tapasztalatainkkal. Ezen a ponton csatlakozik a machizmus a matematikára vonatkozó említett helytelen, metafizikus felfogáshoz, amely viszont azonosítja tapasztalatainkat azokkal a matematikai összefüggésekkel, amelyeket ezen tapasztalatok leírására a tudomány felállít. Így jönnek létre a fizikai idealizmusnak a nagyhangú üres kijelentései, hogy „az anyag eltűnt", csak egyenletek maradtak.

Már itt rá kell mutatni egy további helytelen idealista irányzatra, az agnoszticizmusra. Az emberi megismerés bonyolult dialektikáját nem ismerő metafizikus filozófusok abból a tényből, hogy a matematikai modell nem azonos a valósággal, hanem azt többé-kevésbbé leegyszerűsített formában és így közelítőleg tükrözi vissza, azt a helytelen következtetést vonják le, hogy az anyagi világ törvényszerűségei nem ismerhetők meg. Ez a következtetés minden alapot nélkülöz, hiszen a matematikai módszerek alkalmazásánál nyert eredmények bámulatos pontossága pl. a csillagászatban, a fizikában és az emberiségnek a természet átalakítására irányuló törekvéseivel elért óriási sikerek világosan bizonyítják, hogy az anyagi világ megismerhető és a megismerésnek felbecsülhetetlen értékű eszköze a matematikai módszerek alkalmazása. Azok az elhanyagolások, amelyeket a matematikai modell megválasztásánál teszünk, azért is szükségesek, mert csak úgy ragadhatjuk meg a jelenségek lényegét, ha mindazt, ami kevésbbé lényeges, figyelmen kívül hagyjuk. Hogy egy hasonlattal éljünk: a tudomány úgy tesz, mint a műértő, aki hol közelebbről, hol távolabbról néz meg egy hatalmas festményt, közelebbről, hogy a részleteket jól megnézze, távolabbról pedig, hogy megfelelő áttekintése legyen az egész felett. Ebben a matematika módszere elvben megegyezik bármely más tudomány módszerével, bár természetesen ez a kérdés minden tudományban és így a matematikában is sajátos jelleget ölt. A mechanikus materializmus álláspontja szerint a világ összes jelenségei matematikai egyenletekkel írhatók le, teljes pontossággal: ezt az álláspontot képviselte például *Laplace,* aki a következőket írta[10]: „Ha egy szellem, aki egy adott pillanatban ismerné az összes erőket, amelyek a természetet áthatják, és azon dolgok viszonylagos helyzetét, amelyek a természetet alkotják, és ha elég átfogó volna, hogy ezen adatokat analizálja, egy képletbe foglalhatná össze a világegyetem legnagyobb égitestének és a legkisebb atomnak a mozgását, semmi sem volna

[9] L. *Rózsa Pál,* Elasztikusan kapcsolt korpuszkuláris rendszerek tárgyalása a mátrixszámítás alkalmazásával c. dolgozatát. (Sajtó alatt az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményeiben.)

[10] Essai Philosophique sur les Probabilités, 1814.

bizonytalan számára és a jövő, valamint a mult egyformán kibontakozna szemei előtt.“

Ma már jól tudjuk, hogy egy ilyen univerzális képlet elképzelése naiv dolog, és hogy a matematika ennél sokkal szerényebb célokat tűz maga elé; de azokat viszont egyre nagyobb mértékben meg is valósítja. *Laplace* idézett szavai a szükségszerűség és véletlen kérdésének szimplifikálását is tartalmazzák; ennek a kérdésnek a megvilágítására máshelyütt volt alkalmam kitérni[11]. Így itt ezzel a kérdéssel nem foglalkozom. Érdekes megjegyezni, hogy a metafizikus materialista felfogás, mig az egyik oldalon túlbecsüli a matematika szerepét és lehetőségeit, más vonatkozásban korlátozni igyekszik a matematika kutatási területét. Ugyanis azáltal, hogy a metafizikus materialista felfogás nem képes felfogni a matematikai absztrakció szerepét, gátolja a matematikát általános absztrakt elméletek kialakításában. Ez volt a helyzet például a komplex számok esetében, erről a következőkben még sok szó fog esni, de már itt megjegyezzük, hogy például a Jablonowski Társaság kérdése, hogy a képzetes mennyiségek szerkeszthetők-e, amely kérdésre *Bolyai János* egy mély gondolatokat tartalmazó választ küldött, már megfogalmazásában is világosan mutatja, hogy ebben az időben (1837) még rendkívül el volt terjedve a matematikára vonatkozó korlátolt mechanikus, metafizikus álláspont. Ami a komplex számokat illeti, *Engels* is rámutatott arra, hogy azokat metafizikus gondolkodással nem lehet megérteni és ugyanakkor megállapította, hogy „hol volna a matematika, . . . ha a $\sqrt{-1}$-gyel való operálást eltiltanánk neki?“[12]

A geometriát illetőleg a XVII. és XVIII. században az említett metafizikus felfogás uralkodott. Ez azt jelentette, hogy a fizikai teret azonosnak tekintették az euklideszi geometria terével. Az euklideszi geometria törvényeit fizikai törvényeknek tekintették és el sem tudták képzelni, hogy más szerkezetű térrel is foglalkozhat a matematika. Ez a mechanikus materialista felfogás találkozott *Kant* idealista filozófiájával; ez újabb példa arra, hogy a metafizikus gondolkodás hogyan vezethet el az idealizmushoz.

Mint már utaltunk rá, ugyanez a felfogás nemcsak a geometriában uralkodott, hanem a matematika egyéb ágaiban is; a számfogalom fejlődését is nagymértékben gátolta a metafizikus felfogás, amely azonosította a számokat a fizikai mennyiségekkel. Ez a felfogás akadályozta a komplex szám fogalmának kialakulását. Ennek a felfogásnak az uralkodása magyarázza meg, hogy miért fogadták olyan bizalmatlanul és miért vették körül — ahogy *Gauss* mondotta — „misztikus homállyal“ a komplex szám fogalmát. Az évszázados előítéletek áttörése a geometria és az algebra területén egyidejűleg történt meg, a XIX. század első felében és a két forradalmi jelentőségű átalakulás szorosan összefügg egymással. Már említettük, hogy *Bolyai János* maga is foglalkozott

[11] *Rényi A.* A valószínűségszámítás elvi kérdései a dialektikus materializmus megvilágításában, Filozófiai évkönyv, Akadémiai Kiadó 1952. 63—980.

[12] Anti-Dühring, 177.

a komplex számok kérdésével, a lipcsei Jablonowski-Társaság 1837-ben kitűzött pályázatára adott válaszában[13]. Ebbe a munkájába később 1850-ben *Bolyai* egy megjegyzést iktatott be, mely szerint a komplex számokra vonatkozó elméletének megalkotásával geometriai vizsgálataival kapcsolatban még 1826 körül foglalkozott. Láttuk, hogy *Gauss* is egymással összefüggésben foglalkozott a geometria alapjainak problémájával és a komplex számok elméletével. Nem kivétel e tekintetben *Lobacsevszkij* sem, őt is foglalkoztatta a komplex számok elméletének kérdése „Algebra ili vücsiszlenija konecsnüh" című munkájának 25. oldalán a következőket írja: „A $\sqrt{-1}$ használata a matematikában annyira szükséges, hogy célszerűnek találtam, hogy többet beszéljek a képzetes hatványokról, mint ahogy ezt általában teszik és arra törekedjem, hogy világos fogalmakat adjak és szilárd alapokra helyezzem azokat a számításokat, amelyeknél a $\sqrt{-1}$-et felhasználják". Rendkívül érdekes, hogy *Lobacsevszkij* ebben az 1834-ben megjelent munkájában elsőnek *definiálja* a trigonometrikus függvényeket tisztán analitikus úton, hatványsoruk segítségével és építi fel a trigonometriát tisztán analitikus módon, az Euler-féle összefüggés segítségével. Bár a trigonometrikus függvények hatványsorai és az említett Euler-összefüggés már régen ismeretesek voltak, ilyen módszertani álláspontra *Lobacsevszkij* előtt más nem helyezkedett, mint azt *A. P. Juskevics* és *I. G. Basmakova* nemrégiben megjelent tanulmányukban[14] megállapítják. Ezen a ponton *Lobacsevszkij* gondolkodása ismét találkozott *Bolyai János*éval, akinek említett „Értekezés a képzetes mennyiségekről" c. munkájában ugyancsak megtaláljuk a trigonometrikus függvényeknek hatványsorok segítségével való definícióját, mégpedig rögtön a változó tetszőleges komplex értékére. Erre a gondolatra *Bolyai János* és *Lobacsevszkij* ugyanúgy egymástól függetlenül és körülbelül egyidőben jöttek rá, mint a nem-euklideszi geometria gondolatára. *Bolyai János* Responsiójából kiemeljük a következő mondatot: „Csakis olyan *dolgok, és így* csak olyan mennyiségek lehetnek a (*józan*) kutatás tárgyai, amelyek valóban *megvannak* (pl, ha anyagiak, a testi vagy külső világ részei, vagy legalább elgondolhatók és *lehetségesek)*". Ezzel *Bolyai János* világosan állást foglalt a matematikai fogalomalkotás önkényességének idealista tévtanával szemben, amelyet mint ismeretes, a XX. században *Poincaré* képviselt a leghatározottabban. *Bolyai János* helyes álláspontját mutatja e kérdésben a Responsióban *Gauss* idézett munkájára vonatkozó bírálatának következő mondata is: „alig helyeselhető . . . az a mondat, hogy a mennyiségek más nemeit a mennyiségek tudományába *nem szabad* befogadni. Fent ugyanis elég világosan ki van mutatva, hogy (tetszés szerint) a mennyiségeknek *akárhány nemét* vezethetjük be; csakhogy ez *nem szükséges.*"

[13] Értekezés a képzetes mennyiségekről, *P. Stäckel:* Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai, Bp. 1914. II. kötet. 239—249.

[14] Историко-математические исследования, II. 72—128.

A nem-euklideszi geometria és a komplex számok korszerű elmélete közötti kapcsolat azonban nemcsak ideológiai és történeti jellegű, hanem szoros tárgyi kapcsolat is fennáll a két problémakör között. Ez a kapcsolat többek között már az Appendix *Bolyai Farkas* által megírt, de *János*tól származó Toldalékában is meg van világítva. A későbbi fejlődés során ez a kapcsolat még világosabbá vált és ma már annyira közismert, hogy ennek részletezésére itt nem szükséges kitérni.[15] Minket itt elsősorban a kérdés világnézeti oldala érdekel: az, hogy a matematikára vonatkozó helytelen metafizikus elképzeléseket, amelyek gátolták a fejlődést, a XIX. század első felében két fő vonalon törték át: a geometriai térfogalom kérdésében és a komplex számok elmélete kérdésében. Mindkét esemény nemcsak a matematika történetében birt forradalmi jelentőséggel, hanem egyben a materialista világnézet egy-egy győzelme is volt.

Ezen kitérés után vizsgáljuk meg, miben áll a Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezésének jelentősége a materialista világnézet szempontjából. Ezt három pontban igyekszünk összefoglalni:

1. Azzal, hogy megmutatták, hogy több egyenértékű geometriai rendszer lehetséges és csak a tapasztalat döntheti el, hogy melyik írja le hűebben a fizikai tér tényleges szerkezetét, *Bolyai* és *Lobacsevszkij* megdöntötték *Kant*nak az abszolút térfogalom velünk született, a tapasztalatoktól független jellegére vonatkozó idealista nézeteit.

2. Azzal, hogy felfedezésükkel vitathatatlanul bebizonyították, hogy különbséget kell tenni a fizikai tér között, melyben élünk és az ezen tér sajátságainak leírására szolgáló különböző matematikai térfogalmak között, tarthatatlanná vált a fizikai valóságot és az azt visszatükröző modellt azonosító vulgáris metafizikus álláspont. Ezzel megnyílt az út a matematikai térfogalom további fejlődése és ugyanakkor a tér fizikai strukturája mélyreható vizsgálata előtt is.

3. Felfedezésükkel és egész tudományos munkájukkal jelentősen hozzájárultak ahhoz, hogy a matematika és valóság viszonyáról helyes materialista felfogás alakulhasson ki, többek között azzal, hogy tudatosan harcoltak a matematika alapfeltevéseinek önkényes voltára vonatkozó idealista nézetek és ugyanakkor a matematika szerepét és jelentőségét lekicsinylő és korlátok közé szorítani akaró metafizikus felfogás ellen.

Ehhez a három ponthoz néhány kiegészítő megjegyzést kell tennünk.

Ad 1. A Kant-féle felfogás megcáfolása kétségtelenül a materializmus jelentős győzelme volt. „A materializmus" — írta *Lenin* a Materializmus és empiriokriticizmus c. munkájában (172. o.) — „elismeri az objektív valóság, azaz a mozgásban levő anyag tudatunktól független létezését, s ezért elkerül-

[15] L. pl. Б. А. Фукс, Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений, Москва, 1951.

hetetlenül el kell ismernie az idő és tér objektív valóságát is, eltérően mindenekelőtt a kantizmustól, mely ebben a kérdésben az idealizmus oldalán áll, az időt és a teret nem objektív valóságnak, hanem az emberi szemlélet formáinak tekinti." Néhány oldallal később (184. o.) *Lenin* így folytatja: „Külön kérdés, hogy miképp észleli az ember a teret különböző érzékszervei útján és miképp alakulnak ki hosszú történelmi fejlődés útján ezekből az észleletekből az absztrakt térfogalmak — és egészen más kérdés, hogy az emberiség az észleleteinek és fogalmainak megfelel-e az emberiségtől független objektív valóság?" Majd így fejezi be ezt a §-t: „megismerésünk mindjobban alkalmazkodik az objektív térhez és időhöz, egyre helyesebben és mélyebben tükrözve őket vissza."

Ezzel a kérdéssel kapcsolatban felmerül a probléma, vajjon a tapasztalatok melyik geometria mellett szólnak. Ismeretes, hogy ennek eldöntésével már *Lobacsevszkij* foglalkozott. Érdekes megemlíteni, hogy *Lobacsevszkij* csillagászati mérések alapján a háromszög szögösszegét igyekezett megállapítani, és a mérési hibák befolyását a valószínűségszámítás alkalmazásával igyekezett számbavenni: ebből a célból igen értékes valószínűségszámítási vizsgálatokat végzett, nevezetesen egyenletes eloszlású független valószínűségi változók összegének eloszlásait vizsgálta meg. *Lobacsevszkij* abból indult ki, hogy ha kiderülne, hogy van olyan háromszög, melynek szögösszege két derékszögnél kisebb, ezzel ki volna mutatva, hogy a fizikai térben a nemeuklideszi geometria érvényes; ez nem volna ellentétben azzal az évezredes tapasztalattal, hogy földi méretekben az euklideszi geometria törvényei a mérési pontosság határain belül érvényesek, hiszen ha a hiperbolikus geometria abszolút távolságegysége igen nagy, úgy az eltérés az euklideszi geometriától csak úgy volna észlelhető, ha ezen egységgel megegyező nagyságrendű geometriai idomokat vizsgálnánk (speciálisan a szögösszegre vonatkozólag az a helyzet, hogy a szögösszegnek a deficitje a hiperbolikus geometriában a háromszög területével arányos). Ilyenmódon tulajdonképpen azt méréssel bizonyítani, hogy az egész világegyetemben az euklideszi geometria törvényei érvényesek, nem is lehet, hiszen mindig nyitva marad az a lehetőség, hogy valójában a hiperbolikus geometria érvényes, csak ennek távolságegysége még a legnagyobb mért távolsághoz képest is igen nagy. Úgy *Bolyai,* mint *Lobacsevszkij* még bizonyos mértékben koruk metafizikus gondolkodásának hatása alatt álltak, amikor úgy tették fel a kérdést; a valóságban *vagy* az euklideszi, *vagy* a hiperbolikus geometria érvényes. Ma már tudjuk, hogy ebben a formában a kérdés nincsen helyesen feltéve.

Bolyai és *Lobacsevszkij* vizsgálatai óta mind a geometria, mind pedig a fizika jelentősen továbbfejlődött. *Bolyai* és *Lobacsevszkij* zseniális eredményeit *Riemann* továbbfejlesztette és általánosította és egy harmadik típusú geometriát fedezett fel: az elliptikus geometriát. *Riemann* eredményeit *Einstein* felhasználta az általános relativitás-elmélet megalkotásánál, *Einstein* óta tudjuk, hogy a fizikai tér szerkezete függ az anyag eloszlásától, mégpedig az anyag sűrűségének megfelelő elliptikus geometriával írható le. Ilyenmódon *Bolyai* és *Lobacsevszkij* vizsgálatai valóban előbbrevitték a fizikai tér kutatását is, hiszen a Riemann-geometria megalkotása annak az útnak volt a folytatása, amelyet elsőnek *Bolyai* és *Lobacsevszkij* nyitottak meg. Kevésbbé közismert, hogy a hiperbolikus geometriának is nagy jelentősége van a relativitás-elméletében, a Lorenz-transzformációval kapcsolatban. E tekintetben csak utalok *B. N. Gyelone* „*N. I. Lobacsevszkij* geometriája" c. kiváló tanulmányának[16] 11. §-ára (119. o.), amelyben rámutat, hogy a Lorenz-transzformációk úgy tekinthetők, mint a hiperbolikus tér mozgásai.

Ad 2. Azáltal, hogy a fizikai tér és a geometriai térfogalom viszonya tisztázódott, megnyilt az út a geometria további fejlődése előtt. A geometria megszünt másodrendű tudományág lenni és a matematika teljesjogú fejezetévé vált, egyben feladatköre is jelentősen kibővült. A mai geometria már nemcsak a közönséges fizikai tér leírásával foglalkozik, a tér fogalmát a geometria már jóval általánosabban értelmezi, foglalkozik például az n-dimenziós terekkel, sőt végtelen dimenziós terekkel, stb. Ezekkel az általános terekkel kapcsolatban a „tér" szót ma a matematikában átvitt értelemben használják. A geometria, az algebra és az analízis magasabb egységbe olvadnak össze a modern funkcionális analízisben, a függvényterek elméletében. Ezekben a vizsgálatokban jelentős szerepet vittek és visznek magyar matematikusok is: a topológikus tér általános fogalmának megalkotása *Riesz Frigyes* érdeme, ugyancsak ő fejlesztette tovább jelentős mértékben a Hilbert-féle terek elméletét. Az általános terek fontos alkalmazásokat nyertek a fizikában is: így a 4-dimenziós tér a relativitás-elméletben, az n-dimenziós terek az ú. n. fázistér fogalmával kapcsolatban, pl. a statisztikus mechanikában, a Hilbert-tér elmélete a kvantummechanikában, stb. A geometria kifejezés ma sokkal többet foglal magába, mint a valóságos fizikai tér matematikai leírását. A Nagy Szovjet Enciklopédia erről a következőket írja: „Ezen absztrakt matematikai terek tanulmányozásának egyáltalán nem egyetlen célja az, hogy a reális tér tulajdonságait visszatükröző hipotétikus rendszerek készleteit összegyűjtse. A modern geometria gyakorlati alkalmazási köre rendkívül tág. Így pl. valamely n anyagi pontból álló mechanikai rendszer állapotát egy oly ú. n. fázistér egy pontja ábrázolja, mely tér általános esetben $6n$ dimenziós (a fázistér pontját n anyagi pont $3n$ számú koordinátája és sebességének $3n$ számú komponense határozza meg) stb." Éppen ezért nem érthetünk egyet egyes fizikusoknak azon álláspontjával, hogy a geometria a fizika egyik fejezetévé vált. Ez a felfogás visszatérést jelentene a mechanikus materializmus túlhaladott álláspontjához. Ezt a felfogást csak az védheti, aki a tudomány mai szóhasználatától eltérően geometrián a fizikai tér fizikai vizsgálatát érti; ez esetben azonban az állítás semmitmondóvá válik. Az a felfogás, amely szerint a geometria a fizika részévé vált, lényegé-

[16] A tudományok története a Szovjetunióban, Akadémiai Kiadó, 1950, 93—119.

ben a matematikának, mint önálló tudománynak a tagadását jelenti, az ilyen felfogás ellentétben áll a dialektikus materializmussal. A geometriának, mint a fizika fejezetének a feltüntetése szöges ellentétben áll *Sztálin* elvtársnak a geometriára vonatkozó idézett szavaival, hiszen nyilvánvaló, hogy a fizika a tárgyakat nem mint „minden konkrétség nélküli testeket" vizsgálja. A dialektikus materializmus azt tanítja, hogy a matematika tárgyát az anyagi világ térbeli formái és mennyiségi viszonylatai alkotják. A fizika tárgya viszont magának az anyagnak és annak mozgástörvényeinek a vizsgálata. A kettő nyilvánvalóan nem azonos. Az elmondottakból viszont az következik, hogy a fizikai és matematikai kutatásoknak szoros kapcsolatban kell állniuk, a matematikusoknak és fizikusoknak szorosan együtt kell működniök. Ezt egyrészt azért kell hangsúlyoznunk, hogy elhatároljuk magunkat az idealizmusnak a matematika öncélúságát hirdető helytelen álláspontjától, másrészt mivel e téren nálunk az együttműködés még nem elég szoros.

A Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezése forradalmi jelentőségű a matematika fejlődése szempontjából és rendkívül nagy a hatás, amelyet az egész matematika fejlődésére gyakorolt. *Bolyai*nak és *Lobacsevszkij*nek a geometria axiómatikus felépítésére vonatkozó vizsgálatai indították meg a modern axiómatikus módszer kifejlődését a matematikában; a nem-euklideszi geometriával kapcsolatban merült fel először az axiómarendszer ellentmondásmentességének, teljességének kérdése, a modellalkotás problémája stb. Ezzel a kérdéssel kapcsolatban *Kalmár László* előadására utalok. Csak megemlítem, hogy az axiómatikus módszer nemcsak a matematikában, hanem a fizikában is nagy jelentőségre tett szert. A Nagy Szovjet Enciklopédiában erre vonatkozólag a következőket olvashatjuk[17]: „Határozott jelentőségre tett szert az axiómatikus tárgyalási módszer a mechanikában és az elméleti fizikában. A statika axiómatikus felépítése *Archimedes*ig megy vissza, az egész klasszikus mechanikáé *Newton*ig. A fizika egy ágának axiómatikus felépítésére klasszikus példa a termodinamika."

Igen érdekes probléma megvizsgálni, hogy mennyiben látták maguk *Bolyai* és *Lobacsevszkij* tudatosan, hogy milyen világnézeti konzekvenciái vannak felfedezésüknek. Ez az előadás elsősorban a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria világnézeti jelentőségével foglalkozik, nem pedig *Bolyai* és *Lobacsevszkij* világnézetével: erre vonatkozólag *Alexits György* és *Kárteszi Ferenc* előadásaira utalok. De az elmondottak is világosan bizonyítják, hogy mind *Bolyai János* mind *Lobacsevszkij* alapjában harcos materialisták voltak; persze, figyelembe kell venni, hogy a dialektikus materializmust egyikük sem ismerhette. *Bolyai János* gondolkodásmódjában voltak még metafizikus elemek, azonban a dialektikus gondolkodásmód sem volt idegen tőle. Csak egy kiragadott idézetet hozok fel példaként. A komplex számokra vonatkozó munká-

[17] I. kötet 616.

jában *Bolyai* a következőket írja: „Vegyünk fel azonkívül valamely teljesen substantiális dolgot, pl. 0-t, mert a semmi pusztán negatív fogalom és ha a dolgot közelebbről tekintjük, könnyen beláthatjuk, hogy képtelen dolog, ha a semmit megjelöljük és műveleteknek vetjük alá. Nem állítható az sem, hogy pl. $a + 0$ *azért* egyenlő a-val, mert ebben az esetben magához az a-hoz semmit sem kell hozzáadnunk; ugyanebből az okból ugyanis szükségképpen éppúgy kellene állítanunk, hogy $\frac{a}{0} = a$. Az ilyen pontosabb vizsgálat legott mutatja, hogy a zérus (0) tárgyalásának metafizikája is eddig teljesen hamis alapra támaszkodott."[18] Hasonlítsuk össze *Bolyai János*nak ezen szavait azzal, amit *Engels* „A természet dialektikája" c. művéhez fűzött jegyzeteiben (92. o.) a nulláról ír: „A nullának nagyon határozott tartalma van." Ehhez az összehasonlításhoz, úgy hisszük, nem kell hozzáfűzni semmit, ugyanúgy, mint ahogy az előadásunk mottójaként választott *Bolyai*- és *Engels*-idézetek is egymás mellett minden hosszadalmas fejtegetésnél világosabban bizonyítják *Bolyai János* materialista felfogását.

Az elmondottakkal azt kívántam megmutatni, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezése milyen korszakalkotó eseménye volt a matematika történetének és milyen nagy jelentőségű a materializmus és idealizmus harca szempontjából. Láttuk, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezése a materialista világnézet újabb győzelme volt, amely halomra döntötte az idealizmus hamis „ábrándok szülte agyrémeit", megcáfolta *Kant*nak a térre vonatkozó helytelen felfogását, ugyanakkor világossá tette a metafizikus álláspont tarthatatlanságát is és így helyes megvilágításba helyezte a matematika és a valóság viszonyát általában. Ilymódon mi magyar matematikusok, amikor *Bolyai János*nak, a magyar tudomány egyik legnagyobb büszkeségének tudományos örökségét ápoljuk, a haladó tudomány zászlóját emeljük magasra. „A tudomány fejlődése során" — mondotta Sztálin elvtárs — „nem kevés olyan bátor embert ismert, aki semilyen akadállyal nem törődve, mindennel dacolva össze tudta törni a régit és tudott újat alkotni." Az ilyen emberek sorában is az elsők közé tartozik a mi *Bolyai János*unk. Munkánkhoz erőt meríthetünk *Bolyai János*nak, a tudományos igazságért harcoló, évezredes előítéletekkel bátran szembeszálló lángeszű matematikusnak, a haladó gondolkodás nagy forradalmárának emlékéből.

18 Idézett hely, 240—241.

A ZÁRÓÜLÉS

ERDEY-GRÚZ TIBOR, A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA FŐTITKÁRÁNAK ZÁRSZAVA

Kedves elvtársak és kartársak!

Hazánk matematikusai és a baráti államok küldöttei ünnepi ülésszakra jöttek össze, hogy megemlékezzenek *Bolyai János*ról, a nagy matematikusról. A mi országainkban gyorsütemű munka folyik, minden dolgos kézre és gondolkozó főre égető szükség van, hogy az emberek százmillióinak minél hamarabb emberhez valóban méltó életet biztosíthassunk, minél gyorsabban építhessük a szocializmust illetve a kommunizmust. Mégis — ez ünnepi ülésszak kedvéért megálltunk egy rövid időre, abbahagytuk napi munkánkat, s összejöttünk egy nagy tudós emlékének áldozni. Vajjon megengedhető-e ekkora fényűzés? Vajjon fényűzés-e ünnepi összejövetelünk?

E kérdésre egyértelműen válaszolhatunk: Multunk haladó eseményeinek számbavétele, eredményeinek és hatásuk feltárása közvetlen összefüggésben van mai munkánkkal és a holnap építésével. A szocializmus és a kommunizmus építése csak a mult összes értékes eredményeinek felhasználásával és továbbfejlesztésével lehetséges. Erre célzott *Rákosi* elvtárs, amikor megállapította, hogy „mi jogos örökösei, egyenes folytatói vagyunk mindannak, ami ezeréves történelmünkben haladó, életképes és jövőbe mutató". De örökségünket tovább kell fejleszteni, ki kell terebélyesíteni. Ennek a jövő útját csak úgy jelölhetjük ki helyesen, ha megállapítjuk a mult fejlődését, a forradalmi változásokat és a fokozatos továbbépítést egyaránt. Ilyen visszatekintő munka volt ünnepi ülésszakunk, s a visszatekintő munka, ha oly jól végzik, mint ülésszakunkon, egyúttal előremutató is, megkönnyíti és meggyorsítja a jövő fejlődését. Az ünneplés okozta megszakítás ilyenkép bőven visszatérül a további munka során.

Ülésszakunkon *Alexits György* akadémikus előadásában világos képet kaptunk *Bolyai* egyéniségéről s tragikus életéről. Megtisztítva láttuk *Bolyai* alakját a reakciós történeti hamisításoktól, és meggyőződhettünk arról, hogy *Bolyai* nem csak a tudományban volt forradalmár, hanem filozófiai és társadalmi kérdésekben is korának haladó eszméi vezették őt.

Megrázó kép tárul elénk a mult századi Magyarország nagy tudósának kétségbeesett és meddő harcáról, hogy művelhesse magát, művelhesse tudományát és taníthasson. A feudális úri Magyarországnak azonban nem volt szüksége lángeszű tudósra, ki forradalmian új gondolatot vitt a tudományba, s rájött arra is, hogy amint *Euklidesz* évezredes geometriája nem az egyedül lehetséges, úgy a feudális társadalmi rend sem az egyedüli lehetséges. Kizsákmányoló rendszere, igazságtalanságai, nyomora nem istentől rendelt szükségszerűség, hanem emberi akarattal megváltoztatható és jobbal pótolható. Ha összehasonlítjuk *Bolyai*nak, a nagy tudósnak magárahagyott, szinte kiközösített életét, a mai tudósok sorsával, kiket a dolgozó nép magáénak tart, nagyrabecsül és mindennel ellát, ami tudományos fejlődésükhöz és eredményes munkálkodásukhoz szükséges, akkor látjuk azt a gyökeres fordulatot, amelyet a szocializmus építése ebben a tekintetben is jelent.

Jól kidomborodott ülésszakunkon, különösen *Rényi Alfréd* és *Kalmár László* levelező tagok előadásában, hogy a dialektikus materializmus már matematikai tudományunknak is nélkülözhetetlen alkotórészévé kezd válni, ami nagyban hozzá fog járulni e tudomány további fellendüléséhez.

Az elhangzott előadásokból is kitűnik, milyen ösztönzően hatnak még ma is *Bolyai* eszméi a matematika fejlődésére, amint arra különösen *Varga Ottó* levelező tag és *Szász Pál* előadásai mutattak rá egy-egy területen.

Bolyai nagy felfedezése egyidejű *Lobacsevszkij*ével, közvetlen kapcsolatba azonban a két tudós, a tudomány nagy kárára, nem kerülhetett egymással. *Kárteszi Ferenc, Lobacsevszkij* életművét méltatva rámutatott arra, hogy menynyivel kedvezőbbek e tekintetben is mai tudósaink körülményei, és kiemelte a szovjet és magyar matematikusok együttműködésének jelentőségét.

Igen érdekesek voltak külföldi vendégeink előadásai, melyek nem csak tudományunk fejlődését mozdították elő, hanem messzehangzó tanúbizonyságát adták annak, hogy a békeszerető népek nemcsak megbecsülik egymás tudományos eredményeit, hanem a népek közös értékeinek tekintve azokat, alkotóan tovább is fejlesztik. Különösen kiemelkedő volt *P. Sz. Alekszandrov*nak, a Szovjetunió Tudományos Akadémiája Sztálin-díjas levelező tagjának előadása, mely megmutatta, hogy *Bolyai* és *Lobacsevszkij* gondolataiból kiindulva milyen messzire fejlődött a térelmélet, az a tudomány, mely legtöbbet a szovjet matematikusok kutatásainak köszönhet. Hangsúlyozta *Alekszandrov*, hogy a modern topológikus térfogalmának megalapítója a magyar *Riesz Frigyes* akadémikus volt.

Jelentősnek tartjuk, hogy a világhírű matematikus *J. Hadamard,* a francia Akadémia tagja, aki magas kora miatt nem tudott eljönni hozzánk, elküldte ide szánt előadásának szövegét, melyben a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómatikus megalapozásával foglalkozik.

Kiváló előadást tartott az ülésszakon *E. Čech* csehszlovák akadémikus, *Nyikolszkij* Sztálin-díjas moszkvai professzor és *W. Rinow* greifswaldi professzor.

Áttekintve az ünnepi ülésszak eredményeit, megállapíthatjuk, hogy nagy eseménye volt tudományos életünknek. Nemcsak élvonalbeli tudósainknak a termékeny eszmecseréjét mozdította elő tudóstársaikkal, hanem igen ösztönzően hatott a fiatal magyar matematikusokra is, akik egyrészt megismerték haladó hagyományainkat, ezeknek a tudomány fejlődésére gyakorolt hatását, másrészt kiváló bel- és külföldi tudósokkal való személyes érintkezésben tágíthatták tudományos látókörüket. Az ülésszak széles területen feldolgozta *Bolyai* és *Lobacsevszkij* zseniális felfedezésének jelentőségét és hatását a geometria fejlődésére. Igen nagy jelentőségű, hogy ebben a munkában a Szovjetunió és a többi baráti államok tudósai is résztvettek. Fényesen bizonyítja ez, hogy nálunk ma már nemcsak a tudósnak saját népétől való elszigeteltsége a multé, hanem a világ haladó gondolkodású népeinek egymástól való elszigeteltsége is megszűnt.

A béketábor népei lerázták magukról a kizsákmányolás igáját és felismerték, hogy az egymásközti ellenségeskedés szítása csak az elnyomó osztályoknak volt célja, mellyel elterelni igyekeztek a figyelmet a belső társadalmi ellentétekről és tompítani törekedtek az osztályharcot. A béketábor népei immár tudósaikkal együtt egymásra találtak. Egyesült erővel, egymást támogatva, tapasztalataikat kicserélve, egymás eredményeit továbbfejlesztve, határozottan és egyenesen haladnak azon az úton, melyet korunk lángeszű tudós vezérei, *Lenin* és *Sztálin* mutattak meg a szocializmust és kommunizmust építő népeknek. Számunkra és a többi népi demokratikus ország számára lényegesen megkönnyíti az előhaladást ezen az úton az, hogy előttünk áll a Szovjetunió nagy és lelkesítő példája, mely kézzelfogható gyakorlati eredmények alakjában mutatja ennek az útnak a mérföldköveit.

A szédületes fejlődés, mely a Szovjetunió és a népi demokratikus államokban a marxizmus-leninizmus tudománya alapján a kommunista pártok vezetésével végbemegy, rémülettel és gyűlölettel tölti el az imperialista államok vezetőit. A rothadó kapitalista társadalom megmentésére nem találnak értelmes útat — nem is találhatnak, mert nincsen! Uralmuknak ideig-óráig való meghosszabbítására elvetemültségükben egyetlen kiutat látnak, egy újabb pusztító háború előkészítését. A háborúból azonban elég volt a népeknek! A békéért ma már nemcsak a Szovjetunió és a demokratikus államok népei harcolnak, hanem az imperialista államokban élő népek is. Ezekben a napokban ülésezik Bécsben a Béke-Világkongresszus, mely fényesen bizonyítja, hogy a békevágy a Föld minden kultúrnépében kiolthatatlanul él. Ez a vágy azonban ma már nem passzív érzelem, nem romantikus ábránd, hanem tettekre sarkaló elhatározás. A bécsi Béke-Világkongresszus résztvevői fennen hirdetik, hogy népeik meg vannak győződve *Sztálin* elvtárs ama tanításának helyességéről, hogy különböző társadalmi rendszerek békésen élhetnek egymás mellett, s a béke megvédhető, ha a népek állhatatosan akarják. Mi, magyar tudósok, tapasztalatból tudjuk, hogy a béketáborban a kis népek egyenjogú társakként élnek együtt a nagy népekkel, hogy ez az együttélés elősegíti a nemzeti sajátságok érvényesülését, hogy nemzeti formánk szocialista tartalommal való megtöltése a korábbi soviniszta gyűlölködés helyett a szabad nemzetek baráti együttműködéséhez vezet. E szilárd meggyőződésünk alapján hívtuk fel a bécsi Béke-Világkongresszushoz intézett sürgönyünkben a világ tudósait, hogy teljes erejükkel vegyenek részt a béke megvédéséért folytatott harcban.

Ennek a békeharcnak egy fázisa volt ünnepi ülésszakunk is, amelyen a magyar tudósok a baráti népek küldötteivel testvéri együttműködésben alkotó módon áldoztak két nagy tudós, *Bolyai* és *Lobacsevszkij* emlékének.

A Magyar Tudományos Akadémia nevében megköszönve a Szovjetunió, valamint a többi baráti államok Akadémiái küldötteinek értékes közreműködését, valamint a magyar matematikusok fáradságot nem ismerő lelkes munkáját, az ünnepi ülésszakot bezárom.

A záróülésen *P. Sz. Alekszandrov* Sztálin-díjas, a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának levelező tagja mondott köszönetet a Magyar Tudományos Akadémiának e jelentős ülésszak megszervezéséért és megállapította, hogy az üléseken elhangzott előadások részletesen megvilágították *Bolyai* és *Lobacsevszkij* munkásságát.

A lengyel küldöttség nevében *Waclaw Sierpinsky,* a Lengyel Tudományos Akadémia elnöke, a román küldöttség nevében *Tiberiu Popovici,* a Román Tudományos Akadémia levelező tagja fejtette ki, hogy ez az ülés is közelebb hozta egymáshoz a távoli országok matematikusait.

E. Čech akadémikus a Csehszlovák Tudományos Akadémia Matematikai Intézetének igazgatója a következőket mondotta: Kedves magyar kartársaim, engedjék meg, hogy az ülésszak mai záróülésén kifejezzem őszinte köszönetemet azért az örömért, hogy azon résztvehettem. Önök teljes joggal büszkék *Bolyai* lángelméjére és tudományos munkásságuk a multban és a jelenben azt mutatja, hogy méltók arra, hogy az ő követői legyenek. Az Önök Alkalmazott Matematikai Intézete megmutatja nekünk az utat, hogy hogyan lehet összekapcsolni az elmélyült matematikai kutatómunkát a munkásosztály gyakorlati szolgálatával a szocializmus építésére irányuló erőfeszítéseiben. Végül az Önök vendégszeretete felülmulhatatlan volt. Az összes csehszlovák matematikusok nevében még nagyobb sikereket kívánok Önöknek tudományos munkájukban.

W. Rinow egyetemi tanár, a Német Demokratikus Köztársaság tudósai nevében mondott köszönetet a hazánkban tapasztalt kedves fogadtatásért.

A záróülés a következő sürgönyt küldte *Rákosi Mátyás* elvtársnak, a Magyar Dolgozók Pártja főtitkárának:

Rákosi Mátyás elvtársnak,
a Magyar Dolgozók Pártja főtitkárának
Budapest

A *Bolyai János* születésének 150. évfordulója alkalmából rendezett ünnepi ülésszak résztvevői forró szeretetünket és hálás köszönetünket fejezzük ki azért a hatalmas segítségért, amelyben a tudományos kutatómunka hazánkban részesül.

Mi, magyar matematikusok, *Bolyai János* példáját követve, a haladó tudomány szolgálatában állunk. Még fokozottabb tudományos munkával, a termelés matematikai vonatkozású problémáinak szélesebb körben való felkutatásával és megoldásával, a szovjet tudomány eredményeinek még alaposabb tanulmányozásával, a matematika elvi kérdéseinek és történetének a dialektikus materializmus alapján való feldolgozásával fogjuk szolgálni ötéves tervünk mielőbbi sikeres megvalósítását, a békéért folyó harcot és a szocializmus felépítését.

Budapest, 1952 december 18.

a *Bolyai János* születésének 150. évfordulója alkalmából
rendezett ünnepi ülésszak résztvevői.

Könyvismertetések

AZ „APPENDIX“ ÚJ KIADÁSÁNAK ISMERTETÉSE

A Magyar Tudományos Akadémia *Bolyai János* születésének 150 éves évfordulója alkalmából korszakalkotó művét, az Appendixet emlékkönyvként adta ki. Az új kiadás szerkesztésére *Kárteszi Ferenc* kapott megbízatást.

Kárteszi a könyvet a következő szempontok szerint építette fel. Egy bevezető részben *Bolyai János* felfedezésének előzményeit tárgyalja. Utána következik az Appendix eredeti latin szövegének facsimileje és ennek magyar fordítása. Ehhez magyarázatok és kiegészítések csatlakoznak. Azok a kiegészítések, amelyek a Bolyai—Lobacsevszkij geometria mai szempontból való szigorú felépítéséhez nélkülözhetetlenek, valamint a geometriának *Bolyai* és *Lobacsevszkij* felfedezésének hatása alatt végbement további fejlődése külön részben kerül tárgyalásra. Az így négy részre tagozódó könyv befejezését egy függelék képezi, amely *D. Hilbert:* „Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie“ c. munkájának magyar fordítását tartalmazza.

Az első rész két fejezetből áll. Az első fejezetben először az axiómatikus módszer jelentőségéről számol be a szerkesztő és ismerteti *Euklidesz* axiómarendszerét. Rámutatott arra, hogy *Bolyai* és *Lobacsevszkij* felfedezésének a matematikán túl milyen nagy horderejű filozófiai következményei vannak. E felfedezés ugyanis megmutatta, hogy a matematikai térfogalom formája nem kizárólag az euklideszi geometria. Ebből már következik, hogy a fizikai tér struktúráját csupán a tapasztalat döntheti el. Ezzel *Kant* felfogása a tér a priori euklideszi voltáról megdől. Ezek után a nem-euklideszi geometria előhirnökei, *J. Wallis, G. Saccheri, H. Lambert* és *A. N. Legendre* vizsgálatairól számol be, kiemelve azokat az eredményeket, amelyek mai szempontból is pozitívumként könyvelhetők el. E fejezet utolsó részében *Gauss* szerepét ismerteti a nem-euklideszi geometria felfedezésében. A szerkesztő felfogása szerint *Gauss* *Bolyai* és *Lobacsevszkij* művében főleg matematikai virtuózitást látott, de nem látta be, mennyire alapvető ez a felfedezés a matematika további fejlődésére.

A második fejezet *Bolyai János* matematikai tanulmányairól, valamint az abszolút geometria felfedezéséről számol be. Itt közli *Gauss*nak János apjához küldött levelét, amelyet az Appendix vétele után válaszként írt. E levél, amelyből írójának prioritási igénye erősen kihangzik, okvetlenül nagy befolyással volt *Bolyai János* életének tragikus alakulására.

Az olvasó számára nagy könnyítést jelent, hogy a szerkesztő gondoskodott arról, hogy a második részben az Appendix eredeti latin szövegére következő magyar fordítás a matematikai szabatosság mai igényeinek mennél jobban eleget tegyen. Így nem valamilyen meglévő magyar fordítást használ fel, hanem új, és az ismert fordításoknál jobb fordítást adott. Ebben a munkában *Hajós György* hathatós segítségére támaszkodott. Ki kell emelnünk továbbá, hogy a mű áttekinthetőségét lényegesen elősegítette azáltal, hogy a fordítást igen célszerűen öt fejezetre tagolta. Az I. fejezet a párhuzamosságra vonatkozik és az Appendix 1—10. §-ait, a II. fejezet a paraciklus és a paraszférára vonatkozik és a 11—24. paragrafusokat, a III. fejezet a trigonometriára vonatkozik és a 25—31. paragrafusokat, a IV. fejezet az analitikus geometria alkalmazására és annak a kérdésnek tárgyalására vonatkozik, vajjon eldönthető-e, hogy a valóságban az euklideszi, vagy a Bolyai—Lobacsevszkij geometria érvényes, és a 32—33. paragrafusokat, az V. fejezet a szerkesztésekre vonatkozik és a 33—43. paragrafusokat tartalmazza.

A harmadik rész élén, amely a kommentárokat tartalmazza, az euklideszi geometria Hilbert-féle axiómarendszerét találjuk. Ezt valóban nagyon helyesnek tartjuk, mert nyilvánvaló, hogy egy szigorú axiómarendszer nélkül lehetetlen annak pontos megállapítása, vajjon *Bolyai János* művének milyen részei szorulnak kiegészítésre. Sajnálatos, hogy a szerkesztő a mű kiadásához rendelkezésre álló rövid idő alatt nem tudta a Hilbert-féle axiómarendszert a kommentárok megírásában teljes mértékben kihasználni. A legideálisabb és talán a legmesszebbmenő követelmény ebben a vonatkozásban az lett volna, hogy ha a szerkesztő *Bolyai János* bizonyításainál arra mutatott volna rá, hol használta fel *Bolyai* implicite a Hilbert-féle axiómarendszer egyik vagy másik axiómáját. Ilyen kiegészítésekkel az Appendix a matematikai szigorúság mai igényeinek minden szempontból eleget tett volna. Eltekintve attól, hogy ilyen munka nagyon sok időt vett volna igénybe, ez jóval fölülmúlta volna mindazt, amit a legjobb szerkesztői munkától kívánhatnánk és inkább olyan munkát jelentene, amelynek teljesítése még a kutatók feladata. Ilyen irányban legutóbb hazánkban *Szász Pál* fejt ki értékes tevékenységet. Hogy a szerkesztő azonban ilyen irányban is igyekezett az olvasónak segítségére lenni, mutatja például az Appendix 21. §-ához fűzött megjegyzése, amelyben *Bolyai János*nak azt az állítását, mely szerint a paraszférán az euklideszi geometria érvényes, azzal egészíti ki, hogy rámutat, a Hilbert-féle axiómarendszer milyen axiómáinak teljesülésével ekvivalens ez az állítás.

A negyedik rész három fejezetből áll. Az I. fejezetben először *Bolyai János*nak az abszolút geometriával összefüggő további nagyobb vizsgálatait [„a tetraéder köbösítése", „reszponzió", „észrevételek" (*Lobacsevszkij* vizsgálataihoz), „Raumlehre"] ismerteti röviden. Ezután annak a vázlatos ismertetése következik, hogy az euklideszi, hiperbolikus és elliptikus geometria, kiindulva egy nem-teljes, u. n. abszolút axiómarendszerből, egy-egy axióma hozzácsatolásával miként jellemezhető. Lényeges az a megjegyzés, hogy egy ilyen abszolút axiómarendszer nem azonos a Hilbert-féle, a párhuzamossági axióma elhagyásával nyerhető abszolút axiómarendszerrel. Ennek a fejezetnek utolsó részében a szerkesztő az Appendix kommentár-irodalmának egyes fontosabb műveit sorolja föl. A II. fejezetben a nem-euklideszi geometriák ellentmondásmentessége kerül tárgyalásra. A bizonyítások megfelelő modellképzéssel történnek. Először a kétdimenziós geometria esetén a *Beltrami*tól származó eljárást mutatja be. A három geometria modelljeit az euklideszi tér állandó görbületű felületei szolgáltatják. Ha ugyanis a sík pontjaihoz és egyeneseihez a felület pontjait és geodetikus vonalait rendeljük hozzá, két pont távolságát a megfelelő felületi pontok geodetikus ívével, és két egyenes szögét a megfelelő geodetikus vonalak alkotta szöggel mérjük, akkor az így értelmezett síkbeli geometria euklideszi, hiperbolikus vagy elliptikus lesz aszerint, hogy a megfelelő állandó görbületű felület görbületi mértéke 0, negatív, vagy pozitív. Így az ellentmondásmentesség az euklideszi tér ellentmondásmentességére redukálódik. A szerkesztő talán rámutathatott volna arra, hogy a dimenziók megfelelő választásával a térbeli geometriák is tárgyalhatók. A hiperbolikus tér ellentmondástalanságának bizonyítására még a Cayley—Klein-féle modellt ismerteti. A tér pontjai most egy, az euklideszi tér *G* gömbjének belsejében fekvő pontok, egyenesek a *G* belsejéhez tartozó egyenesdarabok. A rendezés és az illeszkedés a korlátos térrészre vonatkozó Hilbert-féle axiómákkal értelmezhető. Az egybevágóság értelmezése a *G* holomorf kollineációival történik. Végül a hiperbolikus síkgeometriának Poincaré-féle körmodelljét ismerteti és utána rámutat, hogyan általánosítható ez magasabb dimenziókra.

A III. fejezet a matematikai térfogalom kialakulásának van szentelve. E fogalom a matematika mostani szakaszának legáltalánosabb értelmezése, az u. n. topologikus tér fogalma. Értelmezésében a legalapvetőbb szerepet a torlódási pont fogalma képezi. *Riesz Frigyes* volt az első, aki e fogalmat axiomatizálta és így a topologikus tér értelmezését lehetővé tette. E fejezetben a szerkesztő ismerteti azokat a funkcionálanalizisre is alapvető összefüggéseket, amelyek *Urysohn* egy tétele szerint az absztrakt topologikus tér és a Hilbert-féle függvénytér között fennállnak. A fejezet utolsó paragrafusa arra utal, hogy a geometriai axiómatika hogyan vezetett a matematika bizonyításelméletéhez. Itt említi meg a Gödel-tételt, amely azt bizonyítja, hogy a matematikában nincsen minden kérdés eldöntésére alkalmas axiómarendszer.

Miután a könyv tartalmát ismertettük, ki kell emelnünk, hogy annak különösen a felépítése szerencsés. Az olvasó nemcsak *Bolyai* művét ismerheti meg, hanem a Bolyai—Lobacsevszkij geometria modern felépítésébe és a geometria egyes fejezeteinek legújabb állásába nyerhet betekintést.

Bár a könyv kiadásához rendelkezésre álló rövid idő bizonyos hátrányokat jelentett, amelyek különösen az Appendix kommentálásában mutatkoznak, e hátrányokat azonban a könyv gazdag tartalma és jól átgondolt felépítése ellensúlyozza. Mintaszerű a könyv nyomdatechnikai kiállítása is.

*Kárteszi Ferenc*et nagy és fáradságos munkájáért komoly elismerés illeti, úgyszintén az őt támogató *Alexits György*öt és *Hajós György*öt.

Varga Ottó lev. tag

SZ. A. JANOVSZKAJA „LOBACSEVSZKIJ HALADÓ ESZMÉI — AZ IDEALIZMUS ELLENI HARC ESZKÖZEI A MATEMATIKÁBAN" CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

A könyv a szerző két különböző, tartalmilag azonban egymáshoz szorosan kapcsolódó tanulmányából áll. Az első tanulmányban a szerző *Lobacsevszkij* harcát ismerteti a tudományba bevitt önkényes feltevések, megállapodások és esetlegességek ellen, a másik a matematikai szigorúság Lobacsevszkij-féle értelmezését teszi vizsgálat tárgyává.

A bevezető fejezetben a szerző utal a jelenkori filozófiai idealizmusnak arra a törekvésére, hogy álláspontja igazolására a modern természettudományok s többek között a matematika fejlődéséből hozzon fel érveket. A filozófiai idealizmusnak a matematikán belüli képviselői, a matematikai formalizmus hívei odáig mennek el, hogy az általuk képviselt idealista irányzat előfutárjainak a nem-euklideszi geometria felfedezőit, *Bolyai*t és *Lobacsevszkij*t tekintik. A matematikai formalizmus, mint ismeretes, a matematikát úgy kívánja exakt alapokra helyezni, hogy a matematikai fogalmakat és tételeket szimbólumokkal és képletekkel, a matematikai következtetéseket pedig szigorúan meghatározott formális szabályokon nyugvó kalkulussal helyettesíti oly módon, hogy a matematikai képletek és következtetési szabályok tényleges tartalmától teljesen elvonatkoztat. A matematika tehát ezek szerint nem más, mint a tetszés szerint alapul vett szimbólumok és megválasztott következtetési szabályok segítségével kifejezhető állítások összesége. Ilyen alapon tekintik a nem-euklideszi geometriát is formális, önkényes konstrukciónak és megalkotóit e felfogás első képviselőinek.

A tudományban a haladó materialista világnézet és a különböző idealista irányzatok között folyó harc napjainkban különösen éles, és természetesen nem hagyja érintetlenül a matematika területét sem. Ebben a harcban tesz fontos szolgálatot *Janovszkaja* könyve, mert kimutatja, hogy a *Lobacsevszkij*t érintő idealista vádra *Lobacsevszkij*nek magának a tudományba bevitt önkényes feltevések kiküszöbölése érdekében folytatott tevékenysége szolgáltatja a legteljesebb cáfolatot.

Az első tanulmány tartalmilag az alábbi anyagot öleli fel. A bevezető rész a könyv célját tűzi ki, a következő fejezet a geometria *Lobacsevszkij* előtti helyzetét és a nem-euklideszi geometria előfutárainak *(Saccheri, Lambert* és *Legendre)* a párhuzamosok elméletébe vágó vizsgálatait ismerteti. A 3. fejezet közli *Lobacsevszkij* állásfoglalását, kritikai megjegyzéseit az akkori tudományokról, különös tekintettel a mechanikára, melyet *Lobacsevszkij* akkoriban a többi tudomány mintaképének tekintett. A 4. fejezet azt vizsgálja, melyek azok a geometriai fogalmak és tételek, amelyeket *Lobacsevszkij* önkényeseknek tartott. Az 5. fejezet röviden ismerteti a Bolyai—Lobacsevszkij geometria fontosabb fogalmait, míg a 6—10. fejezetek az V. posztulátumnak *Legendre*től származó, az ú. n. „egyneműség elvén" nyugvó bizonyítása kritikáját tárgyalja igen részletesen. Külön fejezetet szentel a szerző *Bolyai János* munkássága ismertetésének, amelyben rátér a nem-euklideszi geometria kétféle felépítési módjának egyes jellegzetességeire. A 11. s az azt követő fejezetekben *Lobacsevszkij*nek a matematika egyéb területein (algebra, analízis) folytatott vizsgálatait tekinti át a szerző az önkényesség ellen vívott harc szempontjából. A 15. fejezet *Lobacsevszkij*nek a geometriai axiómatika körébe vágó gondolatairól ad számot.

Összes elődeitől eltérően — amint erre a tanulmány rámutat — *Lobacsevszkij* észreveszi, hogy a párhuzamosok problémájának megoldására a logika eszköze, amelyhez elődei folyamodtak, nem elegendő. Szerinte a kérdés véglegesen csak tapasztalati úton dönthető el. Ebből azonban nem következik az, hogy *Lobacsevszkij* lebecsülte volna a logikát. *Lobacsevszkij*t azoktól a hibáktól, amelyeket elődei rendre elkövettek, éppen az óvta meg, hogy az ő logikája nem szakadt el az anyagi világtól s a logikai szigorúságot nem öncélnak, hanem csak fontos segédeszköznek tekintette.

Tág teret szentel a tanulmány az euklideszi V. posztulátum bizonyítási kísérleteire vonatkozó Lobacsevszkij-féle kritika részletes ismertetésének. Ez az a terület ugyanis, amelyen *Lobacsevszkij*nek a tudományba bevitt önkényesség elleni harca főként lejátszódik. Maga *Lobacsevszkij* az euklideszi V. posztulátum összes ekvivalensei közül a legnagyobb figyelmet az egyneműség elvének szenteli, nyilvánvalóan azért, mert ez finit jellegű megfogalmazásánál fogva véges térrészben tapasztalatilag is ellenőrizhető állítást foglal magában. *Lobacsevszkij* fő ellenvetése az egyneműség elvével szemben az, hogy a reáépített bizonyítás egyéb fogyatékosságaitól eltekintve, ez az elv ugyanolyan önkényes, mint az euklideszi posztulátumot helyettesítő többi feltevés. Az V. posztulátumot magát pedig *Lobacsevszkij* azért tekinti önkényesnek, mert a két egyenlően lehetséges eset közül (a háromszög belső szögeinek összege kisebb, vagy egyenlő két derékszöggel) dogmatikus módon kizárja az általánosabb, tehát ennélfogva szükségszerűbb eset létezését.

Arra, hogy az önkényes feltevések ellen folytatott harc fontos, mondhatnánk elengedhetetlen előfeltétele volt a nem-euklideszi geometria felfedezésének, bizonyítékot szolgáltat *Bolyai János* Appendix-ének vizsgálata is. A szerző részletesen tárgyalja a kétféle felépítés egyes jellegzetes vonásait, ismerteti azt az utat, amelyen a geometria további fejlődése megindult. Amint *Alexits György* szerkesztői megjegyzése is aláhúzza, mind *Lobacsevszkij*, mind *Bolyai* újítók voltak a tudományban, a tudományos igazságért, az önkényes feltevések ellen harcoltak. Mindketten látták felfedezésük hatalmas világnézeti jelentőségét, s műveiket ösztönösen a dialektikus materializmus szellemében alkották meg.

Érdekességre tarthatnak számot ma is azok a megjegyzések és vizsgálatok, melyeket *Lobacsevszkij* a trigonometrikus függvények s a komplex számok elméletében végzett.

A 15. fejezetben a szerző ismét visszatér *Lobacsevszkij* geometriai kutatásaira. Ismeretes, hogy *Lobacsevszkij* idejében a geometriának még nem volt a mai értelemben vett axiómatikája. A könyv azonban rámutat arra, hogy ennek ellenére az az eszmekör, amely a mai axiómatikus módszer racionális, materialista magvát alkotja, nem volt ismeretlen *Lobacsevszkij* számára. Ez annál figyelemreméltóbb, mert a modern matematikában éppen az axiómatikához kapcsolódik a legtöbb idealista spekuláció. *Lobacsevszkij*nél az axiómatika mindig csak másodlagos dologként, a tudományos kutatás kisegítő módszereként szerepel s éppen azért folyamodott ehhez a módszerhez, hogy a matematikából, közelebbről a geometriából az önkényes feltevéseket kiküszöbölje. Geometriája ellentmondás-mentességére irányuló bizonyításának alapeszméje az, hogy geometriája tételrendszerének ellentmondástalanságát a nekik alapul szolgáló trigonometrikus egyenletek összeegyeztethetőségére vezesse vissza. Fellelhetők *Lobacsevszkij*nél bizonyos interpretációs gondolatok is. *Lobacsevszkij* észreveszi, hogy az egyenesvonalú háromszög oldalai és szögei közötti összefüggéseket kifejező képletek a gömbi trigonometria megfelelő képleteibe mennek át, ha az oldalakat rendre a képzetes egységgel szorozzuk.

A tárgyalt anyagból kiviláglik az, hogy az önkényes feltevések elleni harc nem véletlen velejárója volt a Bolyai—Lobacsevszkij geometria felfedezésének. A geometria további története is azt igazolja, hogy éppen az az út, amelyet *Lobacsevszkij* megkezdett, és amelyen materialista következetességgel haladt, nyitotta a legszélesebb távlatokat a fejlődés számára. *Lobacsevszkij* életműve tehát világos cáfolata annak, hogy abban annak a bizonyítékát lássák, miszerint a geometria csupán az önkényes megállapodások dolga. Ennek kimutatása a szerző főcélja volt.

Nem utolsó sorban említendő, hogy míg *Janovszkaja* tanulmányában bebizonyítja a *Lobacsevszkij*re vonatkozó idealista ferdítés tarthatatlanságát, egyúttal nekünk is szolgálatot tesz azáltal, hogy olyan vádat utasít vissza, amely a nagy orosz tudóson kívül ugyanolyan súllyal *Bolyai János*ra is vonatkozik.

A második tanulmányban, melynek felépítése hasonló az elsőéhez, a szerző a matematikai szigorúság kérdésével foglalkozik *Lobacsevszkij* munkássága tükrében. A matematikai szigorúságra vonatkozó idealista spekulációk alapja a matematikai szigorúság abszolútizálása. Ennek a következménye, hogy elszakítják a matematikát a valóságtól, a gyakorlattól.

Lobacsevszkij fáradhatatlanul harcolt a tudományos szigorúságért, melyet ő materialista módon értelmezett. Erre a szerző példát hoz fel, amely tükrözi *Lobacsevszkij*nek arra irányuló törekvését, hogy a tudomány „szilárd alapon álljon, hogy a szabatosság és világosság már alapjaiban is bennefoglaltassanak".

Lobacsevszkij életének és munkásságának tanulmányozása egyúttal azt is bizonyítja, hogy a matematika története csakis a materialista dialektika alapelveinek, többek között az ellentétek harcáról szóló törvénynek, a kritika és az alkotás viszonyáról szóló marxista-leninista tanítás alapján érthető meg. *Lobacsevszkij* munkássága cáfolata annak a reakciós felfogásnak, amely szembeállítja a matematikában a kritikát és az alkotást, a matematikai szigorúságot s a tudomány termékeny fejlődését.

Lobacsevszkij munkájának alapjául lényegében materialista világnézete szolgált. A szerző *Lobacsevszkij* munkáiból vett idézetekkel ismerteti a nagy orosz tudós felfogását a megismerésről, a megismerés módszereiről, a tudomány s a gyakorlat viszonyáról. Mindezek azt bizonyítják, hogy annak az útnak materialista körvonalait, amely az objektív valóság megismeréséhez vezet el, *Lobacsevszkij* tisztán látta.

Soós Gyula

ALEXITS GYÖRGY „BOLYAI JÁNOS ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA" CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

Alexits György akadémikus népszerű tanulmányában az olvasók széles köre számára is megközelíthető ismertetést és gondos elemzésen átszűrt méltatást igyekezett adni *Bolyai János* életéről és munkásságáról. Művének megjelenését *Bolyai János* születésének 150. évfordulója tette időszerűvé, valamint az a körülmény is, hogy a polgári történetírás torzképet festett *Bolyai* személyiségéről, s durva történethamisítás segítségével kísérelte meg a torzkép valószerűségét bizonyítani.

Alexits műve három összefüggő témakört dolgoz fel úgy, hogy a dialektikus és történelmi materializmus alapján közelít e témakörökhöz, s megmutatja a három témakör szoros egységét. Ismerteti *Bolyai János* életét, felfedezésének és tudományos felfogásának lényegét és társadalmi reformgondolatait. Amint az elemzések során lépésről-lépésre halad, harcos lendülettel tépi szét a polgári történetírás hazug, felületes ráfogásait és egyre valószerűbb, élesebb képet fest a nagy tudós egyéniségéről.

Nehéz feladat *Bolyai János*t széles és mély matematikai képzettség nélkül — sőt a matematika történetében való tájékozottság nélkül — megérteni. *Bolyai* elsősorban matematikus, ebből a tényből kiindulva lehet őt más vonatkozásokban is helyesen megítélni. *Alexits* művének egyik súlyos feladata éppen az, hogy elvont matematikai fejtegetések nélkül bevezesse a kívülálló olvasót *Bolyai* matematikai problémáiba és sajátos gondolatvilágába. Ezt a feladatot — amenynyire lehetséges — jól oldotta meg.

A geometria feladata, a térfogalom fejlődéstörténete, a matematikai és fizikai térfogalom viszonya, az axiómatikus módszer mibenléte és jelentősége a szükséges mértékben és világos fejtegetés során bontakozik ki az elmélyedésre kész, de matematikai szakismerettel nem rendelkező olvasó előtt is.* Az is kellően kidomborodik, hogy *Bolyai János* felfedezése az egész matematika fejlődésére döntő befolyást gyakorolt.

Bolyai és *Lobacsevszkij* egymástól független felfedezését is olyan helyes párhuzamba állítva tárgyalja a mű, mely a szovjet szaktudósok e tárgyban kifejezett véleményével rokon megállapításokra vezet. A szovjet kutatók közül *V. F. Kagan*, a moszkvai egyetem tanára, igen behatóan foglalkozott *Bolyai*

* A 44. oldalon a második képletben sajtóhiba van, mert a

$$d(A'B') = |\log(A'B'UV)|$$

képletből a jobboldali |...|, „abszolút érték"-jel kimaradt.

felfedezésével, s élesen bírálta a polgári történetírás *Bolyai*ra vonatkozó torzításait, különösen *Bolyai János* Appendixének orosz kiadásához írott előszavában. *Kagan* és *Alexits* hasonló megállapításokat tesznek *Bolyai* és *Lobacsevszkij* összehasonlító méltatása során is. *Alexits* több olyan forrást ismer, amelyet *Kagan*nak nem volt módjában megismerni (pl. eredeti kéziratok), ill. csak idézetekből ismer. Annál meggyőzőbb, egymástól független következtetéseik eredményének egyezése.

Bolyai János a matematikán kívül is haladó szellemű gondolkodó volt, s *Alexits* értékes anyagot közöl *Bolyai* társadalmi reformgondolatairól. Különösen az *„Üdvtan"* c. — még ma sem teljes egészében ismert, kiadatlan — kézirat alapján merészen következtet *Bolyai* felfogására. Felismeri és megmutatja, hogy *Bolyai János* a matematikában, reform-gondolataiban, magatartásában következetesen egyöntetű, csak helyesen kell összeilleszteni a szétszórt, összekevert és agyonhallgatott dokumentumokat. Pl. a *Deák Farkas* kiadatlan naplótöredéket is jól felhasználja e rekonstruáló munka során. *Fogarasi Béla* akadémikus a könyvről írott bírálatában* merésznek, vitathatónak minősíti *Alexits* ama megállapítását, hogy *Bolyai János az utópista szocializmus képviselőjének tekinthető.* „Ehhez az értékeléshez *Bolyai* fennmaradt töredékes feljegyzései, úgy látjuk, nem nyujtanak elegendő alapot" — írja. Bizonyos, hogy *Alexits* merészen következtet, s ha a felhasznált dokumentumokat tekintjük, *Fogarasi* figyelmeztetését meg kell szívlelnünk.

Ez a figyelmeztetés ébresztett bennem újult érdeklődést abban az irányban, hogy vannak-e olyan még újabb dokumentumok, amelyek alapján ez a vitás kérdés tisztázható. A következők jutottak tudomásomra, — nem bizonyító erővel rendelkező adatok gyanánt közlöm — s felhívom rájuk a figyelmet.

Kolozsvári matematikusok és történészek, de különösen *Tóth Imre,* a bukaresti *C. I. Parhon egyetem* előadó tanára, érdekes új dokumentumokat ismernek. *Tóth Imre* a marosvásárhelyi Bolyai-kéziratok olvasása során több olyan érdekes részletre bukkant, amelyeket *Stäckel Pál* és *Kürschák József* — nyilván, mint figyelemre méltót — kék ceruzával megjelölt. E kéziratrészleteket azonban soha, seholsem közölték. Egyéb érdekes dokumentumok — *Bolyai*hoz írt újságcikk, töredékes feljegyzések — is vannak. Ezekből kiolvasható, hogy *Bolyai János* tudatos materialista gondolkodó volt. Önmagáról írva beszámol arról, hogy miként bontakozott ki benne ez a tudatos materialista világszemlélet, s mennyire vitte ez előre a kutatásai során. Ír a magyar-román nemzeti kérdésről, s a mesterségesen szított ellentét leplezett okairól. Izzó szenvedéllyel ostorozza a nép elnyomásán és kizsákmányolásán felépülő rendszert: *„Csupán a mások verejtéke után és zsírján, csak az ősök netaláni érdemeikre, szerzeményeikre támaszkodva ... szóval here-módra ingyen élni ... szégyen, gyalázat, vétek".*

* *Társadalmi Szemle,* VII. évf. 12. sz. 1307.

Mindezek arra figyelmeztetnek — bár túlzott reményeket táplálni nem helyes —, hogy a Marosvásárhelyen őrzött Bolyai-hagyaték alapos átvizsgálásra, a kéziratok ismert része is újabb átolvasásra érdemes. Azt sejtem, hogy *Alexits* merész következtetéseit az újabb dokumentumok igazolni fogják.

*Bolyai*ról a polgári történetírás fájdalmasan torz képet festett. Az igaz érdekekért harciasan támadó fellépését gyűlölködő, kötekedő hajlamnak bélyegezték. Ráfogták, hogy alkotó ereje fiatalon megtört, gyűlölködő indulatai, sértődöttsége őrületbe kergették, stb. *Alexits György* gondosan tanulmányozta a dokumentumokat, s igyekezett az adatokat ellentmondásnélküli, józan, logikus rendszerbe fűzni. Közben sorravette a hamisításokat, ráfogásokat és feltárta a durva történeti torzítások és alaptalan ráfogások osztályhátterét.

A nagy tárgyismeretre, történeti tájékozottságra és széleskörű matematikai tudásra támaszkodó finom elemzések segítették *Bolyai János* igaz képének megfestéséhez. *A mű legnagyobb érdemét éppen ennek a képnek a megalkotásában látom.*

Alexits György műve az írásművészet szempontjából is jeles munka. S ha művelődéspolitikánk célkitűzéseit tekintjük, ez sem másodrendű érdem.

Kárteszi Ferenc

A Bolyai ülésszak alkalmával *Dr. Haranghy László* egyetemi tanár a birtokában lévő két Bolyai emléket — az egyik Bolyai János kézírása, a másik Bolyai Farkas még életében megírt saját gyászjelentése — a Magyar Tudományos Akadémiának felajánlotta. Ezért e helyen mondunk neki köszönetet.

Ára. 33·— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

KÖNYVISMERTETÉSEK

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: Mestyán János. Műszaki felelős: Tóth Ferenc.

A kézirat beérkezett: 1953. II. 20. — Példányszám: 650. — Terjedelem: $14^3/_4$ (A/5) ív, 8 ábra.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 53188 Felelős vezető: Vincze György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

III. KÖTET 3. SZÁM

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
1953. ÉVI NAGYGYŰLÉSÉNEK ANYAGA

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1953.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
ALEXITS GYÖRGY, BUDÓ ÁGOSTON, GYULAI ZOLTÁN,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, TURÁN PÁL

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

III. kötet 3. szám

Szerkesztőség: Budapest, V. Nádor-utca 12.
Kiadóhivatal: Budapest, V. Alkotmány-utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott dolgozatokat valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V. Nádor-utca 12.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V. Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI. Sztálin-út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának az 1953. évi Nagygyűlés alkalmából rendezett előadásai

AZ OSZTÁLY ELŐADÁSAINAK PROGRAMMJA:

Nyilvános Osztályülés

MÁJUS 27-én, SZERDÁN DÉLUTÁN 5 ÓRAKOR

Rényi Alfréd lev. tag és *Tarján Imre* a fizikai tudományok kandidátusa
beszámolói az osztály és a bizottságok munkájáról

Jánossy Lajos akadémikus:
Beszámoló a Berlini Fizikus Kongresszus egyes problémáiról

MÁJUS 28-ÁN, CSÜTÖRTÖKÖN DÉLELŐTT 11 ÓRAKOR

Gombás Pál akadémikus:
Elméleti fizikai kutatásokban alkalmazott matematikai módszerek, különös tekintettel a kvantummechanikai közelítő módszerekre

MÁJUS 28-ÁN, CSÜTÖRTÖKÖN DÉLUTÁN 3 ÓRAKOR

Egerváry Jenő akadémikus:
Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája a matematikai fizika és annak ipari alkalmazása terén

Rényi Alfréd lev. tag:
Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája a valószínűségszámítás és annak ipari alkalmazása terén

MÁJUS 29-ÉN, PÉNTEKEN DÉLELŐTT 11 ÓRAKOR

Vitaülés az algebra fejlődéséről, különös tekintettel a hazai algebrai kutatásokra
Rédei László lev. tag elnökletével
Fuchs László a matematikai tudományok kandidátusának referátuma

MÁJUS 29-ÉN, PÉNTEKEN DÉLUTÁN 3 ÓRAKOR

Vitaülés a hazai alkalmazott matematikai kutatások helyzetéről
Rázsó Imre akadémikus elnökletével
Hajós György akadémikus referátuma.

BESZÁMOLÓ A III. OSZTÁLY MUNKÁJÁRÓL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag, osztálytitkár

Előadta az 1953. május 27-én tartott nyilvános osztályülésen

Tisztelt III. Osztály, kedves vendégeink!

Az Osztály munkájáról nyilvános beszámoló legutoljára 1951. december 11-én, az 1951. évi nagygyülés keretében tartott nyilvános osztályülésen hangzott el. Mai beszámolómban ezért az 1952-es évben és az 1953. évben ez ideig végzett munkáról igyekszem rövid áttekintést nyujtani. Beszámolóm a matematika, a fizika és a csillagászat terén végzett munkára fog vonatkozni, a meteorológia kérdéseivel az Akadémia Elnökségének a III. és VIII. osztály közös javaslatára hozott határozata értelmében ujabban a VIII. osztály foglalkozik; ezért beszámolómban a meteorológiára nem fogok kitérni. A fizikai tudományok fejlesztése terén az Akadémiának igen nagy és fontos feladatai vannak. Ezeknek a feladatoknak a felmérése az elmult év folyamán történt meg, ennek alapján a Fizikus Bizottságot az Osztály újjászervezte és az újjáalakult Bizottság nagy lendülettel látott hozzá a munkának. Erről a munkáról annak jelentőségére való tekintettel külön beszámoló fog szólni, melyet Tarján Imre, a Fizikai Állandó Bizottság titkára fog megtartani. A fizika kérdéseiről éppen ezért beszámolómban csak röviden fogok beszélni. Hasonlóképpen csak röviden fogok beszélni az Osztály egyik legfontosabb feladatáról, az alkalmazott matematika fejlesztéséről, tekintettel arra, hogy a nagygyűlés keretében a következő napokban több beszámoló fog az alkalmazott matematika terén elért eredményeinkkel foglalkozni és az alkalmazott matematika helyzetét hazánkban külön ankét fogja megvitatni.

Beszámolóm célja tehát az, hogy az Osztály munkáját globálisan ismertessem és ezzel kapcsolatban néhány elvi kérdésre is rámutassak.

Azok a feladatok, amelyek az Osztály előtt állnak, igen nagyok és jelentősek és mindnyájunkat fokozott munkára kell, hogy lelkesítsenek. Néhány nappal ezelőtt, az országgyűlési választások során a magyar dolgozó nép hatalmas lelkesedéssel foglalt állást hazánk további felemelkedését és felvirágozását célzó második ötéves tervünk nagyszerű célkitűzései, a szocializmus építésének, a béke megvédésének programmja mellett. Ennek a programmnak megvalósítása megköveteli, hogy a magyar tudomány dolgozói a következő években a magyar tudományt olyan magas szinvonalra fejlesszék, amely nagy terveink végrehajtásához szükséges. Ezek a nagy feladatok mindnyájunkban fokozott felelősségtudatot kell, hogy ébresszenek. Ugyanakkor az a tudat, hogy a mi munkánknak ilyen nagy jelentősége van hazánk fejlesztése szempontjából, lelkes büszkeséggel kell, hogy mindnyájunkat eltöltsön. Joggal állapította meg *Révai József* elvtárs a május 4.-i szegedi nagygyűlésen tartott beszédében, hogy „nem utolsó sorban értelmiségünket kell, hogy lelkesítsék ezek a nagy célok. Ha valamikor, akkor most öröm és gyönyörűség pedagógusnak, mérnöknek, agronómusnak, orvosnak, tudósnak, művésznek lenni." Ahhoz, hogy sikerrel hajtsuk végre nagy feladatainkat, az szükséges, hogy a magyar tudomány minden dolgozója meggyőződéssel, lelkesen végezze munkáját és igyekezzen hozzájárulni a haladó tudomány fejlesztéséhez. Haladó tudomány azonban elképzelhetetlen haladó tudományos világnézet nélkül. Ezért mondotta *Révai* elvtárs említett beszédében a következőket: „Mi nemcsak a régi értelmiség munkájára tartunk igényt, hanem szívére és lelkére is. Nemcsak azt kérjük tőle, hogy munkáját és tudását bocsássa államunk és népünk rendelkezésére, hanem azt is kérjük, hogy az új szocialista világ tanulságai szerint alakítsa át meggyőződését, világnézetét, hogy sajátítsa el és tegye munkájának hajtóerejévé a munkásosztály világot átalakító világnézetét, a marxizmus-leninizmus tudományát." Valóban a magyar tudomány minden becsületes dolgozójának szívvel és lélekkel kell támogatnia azt a fejlődést, amely — amint azt *Sztálin* a szocialista társadalom alaptörvényében kifejtette — az egész társadalom állandóan növekvő anyagi és kulturális szükségletei maximális kielégítésének irányába halad. A magyar tudomány dolgozóinak a tudomány objektív törvényeinek feltárására irányuló munkájukban *Sztálin* halhatatlan tanításai mutatják meg a helyes utat.

Mielőtt eredményeink ismertetésére rátérnék, ki szeretném emelni, hogy az elmult másfél év a végzett munkánk legjellemzőbb vonása, hogy jelentős lépéssel előbbre jutottunk a tudomány és gyakorlat egységének megteremtése útján az Osztály tudományterületén. *Rákosi Mátyás* elvtárs az Országgyűlés 1952. december 15.-i ülésén az Akadémia munkáját jellemezve kiemelte, hogy „Az Akadémia fokozatosan rátért, hogy kutatási munkáját népgazdaságunk fejlesztését közvetlenül szolgáló célokra, elsősorban az ipar és mezőgazdaság támogatására összpontosítsa." Ez a törekvés hatotta át a III. Osztály egész tevékenységét is. Igyekeztünk megtalálni annak az útját, hogy az Osztályhoz tartozó elvont tudományok fejlesztését úgy irányítsuk, hogy maximális segítséget nyújtsunk népgazdaságunknak, anélkül azonban, hogy a szűk prakticizmus hibájába esnénk. Nem állíthatjuk, hogy e téren elért eredményeink kielégítőek volnának, azonban kétségtelen, hogy az elmult másfél év alatt nagy lépéssel jutottunk előbbre ebben az irányban. Amikor eredményeinket áttekintjük, élesen rá kell mutatnunk a még meglévő hibákra és hiányosságokra. Nekünk is szólott *Rákosi* elvtárs, amikor a Magyar Függetlenségi Népfront május 10-i budapesti nagygyűlésén arra intett minket, hogy kíméletlen harcot folytassunk saját hibáink ellen. Nekünk is szólott *Rákosi* elvtárs, amikor rámutatott, hogy teljes mértékben megvannak terveink előfeltételei, s rajtunk áll, hogy ezeket a terveket meg is valósítsuk. Nekünk is szólott *Rákosi* elvtárs, amikor rámutatott, hogy „terveink egyik biztosítéka, hogy mögöttünk áll — mint a multban, úgy a jövőben is — a hatalmas Szovjetunió, mely támogat bennünket és rendelkezésünkre bocsátja tapasztalatainak gazdag tárházát.“ Az elmult másfél év alatt számtalanszor tapasztalhattuk azt, hogy minden munkánkban milyen hatalmas és felmérhetetlen segítséget jelent az, hogy támaszkodhatunk az élenjáró szovjet tudomány nagyszerű eredményeire és a szovjet tudósok baráti segítségére. Ugyancsak nagy segítséget jelentenek a népi demokráciák tudósaival való kapcsolataink, melyek az elmult másfél év alatt jelentősen elmélyültek. Nekünk is szólott *Rákosi* elvtárs, amikor rámutatott, mint hatalmas terveink végrehajtásának biztosítására, hogy „vezet bennünket e merész célkitűzések végrehajtásában egész fejlődésünk mótorja, annyi sikerünk és győzelmünk szervezője, egységes nagy pártunk, a Magyar Dolgozók Pártja.“ Ehhez hozzá kell még tennünk, hogy nagy terveink végrehajtásának egyik legfőbb biztosítéka az az állandó segítség, útmutatás és támogatás, amelyet a magyar tudomány legnagyobb pártfogója, szeretett *Rákosi* elvtársunk nyújt számunkra.

Rátérek most az Osztály munkájának jellemzésére az elmult másfél év alatt. Mindenek előtt az Osztály rendezvényeiről számolok be: Az Osztály 1952. január 1. és 1953. május 31. között 17 felolvasó-, vitaülést, illetve ankétot rendezett (beleértve az e héten sorrakerülő üléseket). Ezeken az üléseken 38 előadás hangzott el. Ezenkívül 88 dolgozat került bemutatásra. Az előadások, illetve bemutatott dolgozatok közül 83 matematikai, 40 pedig fizikai tárgyú volt. Összehasonlítva az előző évvel azt látjuk, hogy igen nagy mértékben megnőtt az Osztály kutatóinak tudományos produkciója. Ugyanakkor nem lehetünk megelégedve felolvasó üléseink látogatottságával, amely általában meglehetősen alacsony volt, eltekintve ankétjainktól és nagyobb rendezvényeinktől, mint amilyenek a *Bolyai János* születésének 150. évfordulója alkalmából rendezett ünnepi ülésszak ülései voltak, amelyeken a hallgatóság létszáma több száz főt tett ki. Éppen ezeknek a rendezvényeknek a nagy látogatottsága mutatja, hogy ha az Osztály megfelelő propagandával és szervező munkával késziti elő rendezvényeit, úgy az érdeklődők nagy tömegeit tudja megmozgatni. Az, hogy rendes felolvasó üléseink látogatottsága nem kielégítő, nem azt mutatja, mintha ezek iránt nem volna érdeklődés, hanem azt, hogy a szervezési és propagandamunka nem megfelelő. A III. Osztály Vezetősége egyik legutóbbi ülésén foglalkozott ezzel a kérdéssel és több határozatot is hozott ezzel kapcsolatban. Elhatároztuk, hogy a jövőben minden felolvasó ülésen lesz néhány hosszabb, részletesebb előadás, mig a rövid bemutatások időtartamát csökkentjük. Ugyanakkor megállapitotta az Osztályvezetőség, hogy sokan, akik számára az Osztály felolvasó üléseinek rendszeres látogatása tudományos fejlődésük szempontjából feltétlenül kívánatos volna, nem vesznek részt azokon rendszeresen, részben más irányú elfoglaltságuk miatt, részben, mert ennek jelentőségét nem ismerték még fel. Az Osztályvezetőség elhatározta, hogy a jövő évben felhívja az egyetemek, főiskolák és tudományos intézetek vezetőinek figyelmét arra, hogy minden hónap első hétfő délutánján tartja az Osztály felolvasó üléseit és kéri, gondoskodjanak arról, hogy ezeken az üléseken részt venni szándékozókat ebben más elfoglaltságok ne akadályozzák. Ugyanakkor az Osztályvezetőség felszólítja összes tagjait, hogy tudatosítsák összes tudományos munkatársaikban, különösen pedig aspiránsaikban a felolvasó ülések jelentőségét. A felolvasó üléseken néhány alkalommal termékeny viták indultak meg. Olyan kérdésekről, ahol a vita lefolytatása a felolvasó ülésen idő hiánya miatt nem volt lehetséges, (mint például a legutóbbi felolvasó ülésen felmerült vitás kérdésről), az Osztály külön zártkörű vagy nyilt ankétot fog rendezni. Külön ki szeretnék térni ankétjainkra és vitaüléseinkre. Kétségtelenül örvendetes jelenségnek kell tekintenünk, hogy mult év tavaszán rendezett két könyvankétunkon az eddiginél sokkal élénkebb viták hangzottak el. Ezek az ankétek komoly lépést jelentettek, hiányosságaik ellenére is, az építő kritika szellemének kiépítése irányában. Nem volt sikeres a mult évi nagygyűlés keretében a matematika alapjairól rendezett vitaülés a nem megfelelő előkészítés hiányában. Ezzel szemben igen hasznos és eredményes volt az ez év januárjában a *Smidt* elméletről rendezett ankét, amelyen *O. Ju. Smidt* nagyjelentőségű új kozmogóniai elméletét csillagászok, fizikusok, geológusok, geofizikusok, matematikusok és biológusok együttesen vitatták meg. Az elmult másfél év alatt az Osztály rendezvényei közül mind méreteit és jelentőségét, mind pedig sikerét illetően messze kiemelkedik a *Bolyai János* születésének 150. évfordulója alkalmával rendezett ünnepi ülésszak. Az ülésszak sikeréhez döntő mértékben hozzájárult az, hogy képviseltették magukat az ülésszakon a Szovjetunió és a népi demokráciák Akadémiái. Vendégeink részvétele következtében ez az ülésszak nemcsak a magyar tudomány nagy ünnepe, hanem a béketábor haladó tudósai együttműködésének újabb nagyszerű megnyilvánulása is. Ezt fejezték ki az ünnepi ülésszak résztvevői abban a táviratban, amelyet az ugyanakkor ülésező békekongresszusnak küldöttek. E táviratnak csak a következő mondatait idézem: „*Bolyai*ban azt a tudóst ünnepeljük, aki felfedezésével az emberiség jólétét kívánta szolgálni. A béketábor tudósai is tudományukat népük jólétének, valamint kultúrájának emelése céljából művelik, tehát a béke szolgálatába állítják. ... Felhívjuk a világ tudósait: csatlakozzanak a béke megvédéséért folytatott harchoz és akadályozzák meg a tudománynak a rombolás és pusztítás szolgálatába való állítását." Az ülésszak jelentőségére mutatott rá a Szovjetunió küldöttségének vezetője, *P. Sz. Alekszandrov* Sztálin-díjas matematikus az ünnepi ülésszak megnyitóján tartott felszólalásában, melyben többek között a következőket mondotta: „A nem euklideszi geometria megteremtése egyike volt a tudománytörténet ama nagy eseményeinek, amelyeknek hatása nem áll meg valamely tudományág határainál, hanem nagy lendületet ad a fejlődésnek, az exakt tudományos gondolkodás egész frontján. Ma azért gyűltünk itt egybe, hogy megünnepeljük ezt a nagy eseményt. Mi, a Szovjetunió küldöttségének tagjai különös büszkeséggel és örömmel hangsúlyozzuk, hogy ez az ünnep egyformán ünnepe a magyar és orosz népnek, e két népnek, amely *Lobacsevszkij*t és *Bolyait*, a geometriai gondolkodás két nagy forradalmárát adta az emberiségnek. Legyen ez a két név újabb jelképe népeink örök barátságának, melyek egymással szoros egységben küzdenek a békéért, az egész emberiség boldogságáért." A *Bolyai* ülésszak méltó formában emlékezett meg a magyar tudomány nagy forradalmárának, *Bolyai János*nak az emlékéről. Az ülésszak értékes tudományos anyaga a III. Osztály Közleményei egy teljes számában fog megjelenni magyar nyelven, míg idegen nyelven az ülésszakon elhangzott előadások az Acta Mathematicában kerülnek közlésre. Az ülésszakon elhangzott előadások *Bolyai János* életét és munkásságát a dialektikus és történelmi materializmus szellemében világították meg. Különösen ki kell emelnem *Alexits György* akadémikus előadását, aki *Bolyai János* alakját félreértésektől, ferdítésektől és rágalmaktól megtisztítva, mint a haladó tudomány nagy forradalmárát egész emberi és tudományos nagyságában állította elénk.

Áttérek most az Osztályvezetőség és az állandó bizottságok munkájának ismertetésére. A III. Osztály Osztályvezetősége 1952. január 1-től mostanáig 16 ülést tartott. Ez a szám önmagában is mutatja, hogy az említett időszakban az Osztályvezetőség munkája aktívabbá és rendszeresebbé vált. Az Osztályvezetőség felmérte igazi feladatát és komoly igyekezetet tett annak érdekében, hogy tudományterületének tényleges elvi irányító szervévé váljék. Nem állíthatjuk, hogy ezt már maradéktalanul megvalósítottuk volna, de ez irányban kétségtelenül haladás történt. Az Osztályvezetőség tagjai kivétel nélkül aktívan részt vesznek a munkában. Komoly segítséget jelentett, hogy az elmult év végén az Akadémia Elnöksége alaposan foglalkozott a III. Osztály munkájával és határozatokat hozott annak megjavítására vonatkozólag. Ezen határozatok alapján az Osztályvezetőség konkrét programmot dolgozott ki munkájának megjavítására; ezeket a javaslatokat az Elnökség szintén megvitatta. Az Osztályvezetőség mult évi ülései közül kiemelem azt az ülést, melyet a mult évben a KFKI-ben tartottunk meg és amely ülés egyetlen napirendi pontja a KFKI munkájának megvitatása volt. A mult évi munkából kiemelem az akadémiai témák kijelölését, amely kérdéssel az Osztályvezetőség több ízben foglalkozott. Az akadémiai témák kijelölésének azért volt nagy jelentősége, mert ennek alapján megvitatásra került, hogy az egyes tudományok területén, melyek a legfontosabb súlyponti feladataink. Foglalkozott az Osztályvezetőség az Alkalmazott Matematikai Intézet és a Csillagvizsgáló Intézet fejlesztésével, mind három intézet tematikai terveinek megvitatásával, ösztöndíjak, prémiumok odaítélésével, pályatételek kitűzésével, az aspirantúra kérdéseivel, egyetemi kinevezési ügyekkel; a káderfejlesztés kérdéseivel, valamint könyvkiadási kérdésekkel. Állandó napirendi pontja az Osztályvezetőség munkájának az állandó bizottságok határozati javaslatainak megvitatása és az Osztály rendezvényeinek előkészítése. A tavalyi évben hozott határozatok közül kiemelem itt a pályatételek kérdését. Az Osztály 53 témát tűzött ki, ezek közül 30 matematikai, 21 fizikai és 2 csillagászati téma. Ezeket a témákat a III. Osztály Közleményei III. kötetének 1. számában tettük közzé. Megállapítottuk azonban, hogy ezek a pályatételek nem váltak elég széles körben ismeretessé. Ez úton is kérem az Osztály tagjait, valamint összes vezető tudósainkat, hogy hívják fel fiatalabb munkatársaik figyelmét az Osztály által kidolgozott témákra és ösztönözzék őket arra, hogy foglalkozzanak ezekkel a témákkal. A kitűzött témákkal kapcsolatban elért tudományos eredmények jutalmazására az Osztálynak megfelelő összeg áll rendelkezésére. Az ösztöndíj-prémium összege 5000 Ft-ig terjedhet és az elért eredmények benyujtása után a prémium az év folyamán bármikor kiadható.

Az Osztályvezetőség ez évi határozatai közül is csak néhányat kívánok megemlíteni. Az Osztályvezetőség januári ülése határozatot hozott a Fizikus Bizottság újjászervezésére. Az újjáalakult Fizikus Bizottság összes tagjai átérezve feladatuk jelentőségét, lendülettel láttak neki a munkához. Különösen ki kell emelnem a Bizottság titkárának, *Tarján Imré*nek lelkes munkáját. A Fizikus Bizottság világosan látja azt, hogy a fizikai kutatásnak a népgazdasággal, különösen az iparral való szoros együttműködését meg kell teremteni. E téren súlyos lemaradás van, amelynek teljes felszámolása természetesen nem megy egyik napról a másikra. Az Osztályvezetőség márciusi ülésén határozatokat hozott a szovjet tudománnyal való kapcsolataink elmélyítéséről a fizika terén. Az áprilisi ülés határozatot hozott az I. Magyar Fizikus Kongresszus megtartásáról. A Fizikus Kongresszus ez év augusztusának utolsó hetében kerül megrendezésre és a magyar fizikai tudomány fejlődését lesz hivatott előbbre vinni. Fizikusaink előtt most az a feladat áll, hogy teljes erővel lássanak neki a kongresszus előkészítésének és ezzel biztosítsák annak sikerét. Azt reméljük, hogy a Fizikus Kongresszuson a Szovjetunió és a többi baráti ország fizikusai is képviseltetni fogják magukat. Az Osztályvezetőség a Műszaki Osztály Vezetőségével f. hó 18-án közös osztályvezetőségi ülést tartott. A közös ülés legfőbb napirendi pontja a III. és VI. Osztály együttműködésének erőteljesebb kiépítése volt. Az együttes osztályvezetőségi ülés megállapította, hogy melyek a legsürgősebb feladataink a fizika és a műszaki tudományok, valamint a matematika és a műszaki tudományok együttműködése terén és ezeken a területeken való együttműködés érdekében két intézőbizottság létrehozását határozta el. A Műszaki Osztállyal való szorosabb együttműködés megindításával az Osztály munkája egy komoly fogyatékosságának a felszámolásához kezdtünk hozzá. A Műszaki Osztállyal való együttműködés állandóvá tétele döntő jelentőségű egész munkánk megjavítása szempontjából a tudomány és gyakorlat egységének létrehozására irányuló törekvéseink tekintetében. Kívánatos, hogy a jövőben a Kémiai Osztállyal is szorosabb kapcsolatot építsünk ki.

Az Osztály a szóbanforgó időszakban 3 zárt ülést tartott. A zárt ülések tárgya az osztálytitkár beszámolója, az új doktori oklevelek kiosztása, az osztály könyvkiadási munkájának megvitatása és a tudománytörténeti bizottság megalakítása volt. A tudománytörténeti bizottságunk csak az utóbbi időben fejtett ki aktív munkát és dolgozta ki munkatervét. A Bizottság 17 szakembert vont be munkájába, akik többségükben már konkrét feladatokon dolgoznak. Remélhető, hogy a bizottság munkájának eredményeképpen ezen az elhanyagolt területen nagyobb lendülettel fog megindulni a munka, a magyar tudomány haladó hagyományainak rendszeres feltárása.

A Matematikai Állandó Bizottság munkája is határozott fejlődést mutat, ami jórészt a Bizottság titkárának, *Hajós György* lev. tagnak az érdeme. A Bizottság a szóbanforgó időszakban 14 ülést tartott. A Bizottság 1952. évi munkájából kiemelem a következőket: a Bizottság több ízben és alaposan foglalkozott a Bolyai ülésszak előkészítésével és megvitatta a Bolyai ülésszak tapasztalatait. A Bizottság több ízben foglalkozott az Alkalmazott Matematikai Intézet munkájával. Az Alkalmazott Matematikai Intézet Tudományos Tanácsával együtt ez év márciusában tartott kibővített ülésén igen részletesen foglalkozott az alkalmazott matematikai kutatások helyzetével. Ez a vita a nagygyűlésünkön sorra kerülő vita előkészítéséül szolgált. 1952. októberi ülését a Bizottság Debrecenben, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai Intézetében tartotta meg, összekapcsolva az ülést az Intézet látogatásával és munkájának felülvizsgálatával. A Bizottság minden esetben meghallgatta a külföldön járt magyar matematikusok beszámolóit tapasztalataikról és határozatokat hozott ezek hasznosításáról. A Bizottság kidolgozta a kandidátusi minimumok követelményeit a matematika minden számításba jövő területén, behatóan foglalkozott az aspiránsok munkájával, az ösztöndíjak, prémiumok odaítélésével, pályatételek kérdéseivel, könyvkiadási kérdésekkel, egyetemi kinevezési ügyekkel és mindezen kérdésekben határozati javaslatokat terjesztett az Osztályvezetőség elé. A Bizottság meghallgatta az Acta Mathematica, az Osztályközlemények és egyéb hazai matematikai folyóiratok szerkesztőbizottságainak beszámolóit, valamint megvitatta a Bolyai János Matematikai Társulat munkáját. Külön ki szeretném emelni a Matematikai Bizottság munkájából az 1952. novemberben, az algebrai kutatások hazai helyzetéről tartott vitát. Ez a vita megmutatta, hogy a tudomány egy ága hazai fejlődésének megvitatása milyen hasznos és eredményes lehet a tudományos kutatás irányítása szempontjából. Ez a vita fordulópontot jelentett a Matematikai Bizottság munkájában, abban az irányban, hogy a Bizottság munkájának súlypontját a tudományszervezési feladatok megvitatásáról, a matematika fejlesztésének elvi, tudományos kérdéseire helyezze át. Ez a vita szélesebb keretek között szintén a nagygyűlésen fog folytatódni. A Matematikai Bizottság februári ülésén foglalkozott az ez évi matematikai vándorgyűlés kérdésével és azt a határozatot hozta, hogy a matematikai vándorgyűlés három szekcióban végezze a munkáját, amely szekciók egy-egy kollokviumot tartsanak, nem feltétlenül ugyanabban az időben. A szekciók kollokviumainak programmpontjai a következők legyenek: 1. geometria, 2. konstruktív függvénytan, 3. valószínűségszámítás.

Az Osztálynak állandó csillagászati bizottsága nincs, az állandó csillagászati bizottság teendőit a Csillagvizsgáló Intézet Tudományos Tanácsa látja el. A Tanács a szóbanforgó időszakban 3 ülést tartott, melyeken a csillagász káderképzés kérdéseivel, a Csillagvizsgáló Intézet fejlesztésével, csillagászati könyvek kiadásával, a csillagász aspiránsképzés kérdéseivel és a kandidátusi minimumok kidolgozásával foglalkozott. Ki kell emelnem a Tanács elnökének, *Egerváry Jenő* akadémikusnak a munkáját, aki — bár a csillagászat nem fő szakterülete — igen aktívan irányítja a Tanács munkáját. Az Alkalmazott Matematikai Intézet Tudományos Tanácsa 3 ülést tartott a szóbanforgó időszakban. Az üléseken az Intézet fejlesztésének kérdéseivel, különösen pedig az Intézetnek a következő ötéves tervben Központi Matematikai Intézetté való kifejlesztésének kérdésével foglalkozott. A Központi Fizikai Kutató Intézet Tudományos Tanácsa utolsó ülését egy évvel ezelőtt tartotta, azóta a Tanács működése szünetel.

Az Osztályvezetőség és a bizottságok munkájában általában fejlődés tapasztalható az ülések előkészítése és megszervezése tekintetében is. Az Osztályvezetőség minden ülésén első napirendi pontként foglalkozik az előző ülések határozatai végrehajtásának ellenőrzésével. Megvalósítottuk azt az elvet, hogy minden napirendi pontot az Osztályvezetőség egy tagja referál és referátumát előre írásban benyújtja és azt az Osztályvezetőség minden tagja megkapja. Hasonlóképpen javult az állandó bizottságok üléseinek előkészítése is. Mindez csak úgy vált lehetségessé, hogy az Osztály szaktitkárságának munkája is lényegesen megjavult. Különösen ki kell emelnem *Balázs János* szaktitkár lelkes és áldozatkész munkáját. Azonban a szaktitkárság a reá háruló feladatokat csak úgy fogja tudni eredményesen ellátni, ha létszámban is lényegesen megerősödik. A jelenlegi létszám távolról sem felel meg a szükségleteknek és a feladatoknak.

Az Osztály munkájának egyik legfontosabb része a könyv- és folyóiratkiadás. E téren is határozott fejlődésről számolhatunk be. Az Osztály könyvkiadási terve keretében a szóbanforgó időszakban 16 könyv jelent meg, összesen 380 ív terjedelemben; az összpéldányszám meghaladja a 20 000-et. A kiadott könyvek közül 11 matematikai könyv, mégpedig 4 hazai szerző munkája, 7 szovjet matematikai munka fordítása, 4 fizikai könyv, ezek közül 3 szovjet munka fordítása, egy pedig *Broda* haladó osztrák fizikus munkájának fordítása. Ezenkívül egy csillagászati tárgyú könyv szerepel a megjelent könyveink között. A megjelent könyvek közül ki kell emelnem *Riesz Frigyes* és *Szőkefalvi-Nagy Béla:* Leçons d'Analyse Fonctionelle c. munkáját. A könyv megjelenése a nemzetközi matematikai irodalomnak igen nagy jelentőségű eseménye volt. Ezt bizonyítja az a hatalmas érdeklődés, amellyel a könyvet a matematikusok az egész világon fogadták és szinte szétkapkodták. Ki kell emelnem továbbá az I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményeinek megjelenését, amely, sajnos, igen nagy késedelemmel, viszont a kongresszus jelentőségéhez méltó kiállításban jelent meg. Ugyancsak ki kell emelnem *Bolyai János* Appendixének új kiadását, amely az évforduló alkalmából jelent meg. A tudományos könyvek iránti óriási érdeklődésre hazánkban jellemző, hogy az Appendix megjelenése után két héttel már teljesen kifogyott. Ki kell emelnem továbbá az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményeinek első kötetét, amely ez év márciusának első felében jelent meg. Ez a kötet képet ad az Intézet munkájáról és ennek időben való megjelenése tette lehetővé, hogy az e héten alkalmazott matematikai kutatások helyzetéről szóló vita az Intézet eredményeinek ismeretében legyen megtartható. A szovjet munkák, melyeket magyar fordításban adtunk ki, így *Alekszandrov, Ahijezer, Natanszon, Petrovszkij, Mihlin* stb. munkái mind hazai matematikai életünk egy-egy komoly nyeresége. Hasonlóképpen komoly segítséget jelentettek fizikusainknak a lefordított szovjet fizikai munkák, melyek közül például *Boncs-Brujevics*: Az elektroncsövek fizikai alkalmazásai c. könyve nemcsak fizikusok, hanem mérnökök körében is nagy érdeklődésre talált és már teljesen ki is fogyott. Jelenleg nyomdában van további 6 könyv, összesen 130 ív terjedelemben. Ezek közül 4 matematikai tárgyú, 2 pedig fizikai tárgyú. A matematikai könyvek között van *Turán Pál* lev. tag munkája: „Az analízis egy új módszeréről és annak alkalmazásairól“, melyben szerző nagyjelentőségű új módszerét és annak alkalmazásainak széles skáláját mutatja be. Ez a könyv magyar és német nyelven párhuzamosan fog megjelenni. A fizikai könyvek közül az egyik *Eötvös Loránd* összegyüjtött tudományos munkáit tartalmazza.

A következő években a könyvkiadás terén arra kell törekednünk, hogy a fizikai könyvek kiadása terén való lemaradásunkat behozzuk és ugyanakkor tervszerűbben tovább folytassuk a matematikai könyvkiadás nagyarányú fejlesztését. A matematikai könyvkiadás terveinek megvalósulása után a második ötéves terv folyamán elérjük, hogy a matematika összes modern fejezeteivel magyar nyelven ismerkedhet meg a hazai olvasó. Ugyanerre kell törekednünk a fizika terén is. Jelenleg 33 könyv kiadása van előkészületben, szerzők, lektorok, illetve fordítók dolgoznak rajtuk. Ezek közül 18 matematikai, 15 pedig fizikai tárgyú, összesen kb. 800 ív terjedelemben. A Matematikai Bizottság elkészítette az 1954. évi könyvkiadási tervét és egy hosszabb időre szóló perspektívikus tervet is. A Fizikai Bizottság is elkészítette az 1954. évi tervét, távlati könyvkiadási tervén most dolgozik a Bizottság albizottsága. Úgy a matematikai, mint a fizikai könyvkiadási tervben 1954-ben és a további években nagyobb számban szerepelnek hazai szerzők eredeti munkái. A könyvkiadással kapcsolatban ki kell emelnem az Osztály könyvfelelőse, *Szőkefalvi-Nagy Béla* lev. tag jó munkáját.

A folyóiratkiadás terén az elmult másfél év alatt ugrásszerű fejlődésről beszélhetünk. Míg az 1951. évi nagygyűlésen arról számolhattam csak be, hogy megjelent az Osztályközlemények első száma, az azóta eltelt másfél év alatt az Osztályközleményeknek 8 száma jelent meg, 48 ív terjedelemben és további 3 szám van jelenleg nyomdában. Az Osztályközlemények megjelenésének meggyorsulását nagymértékben megkönnyítette az, hogy az Osztályközlemények anyagát folyamatosan tudjuk nyomdába adni. Az I. kötet 2—4. száma a szerkesztőbizottság egy tájékoztató cikkét tartalmazza az Osztályközlemények feladatairól. A szerkesztőbizottság ebben a tájékoztatóban kifejtette azt az irányelvet, hogy az egyes számok anyagát tárgy szerint igyekszik csoportosítani; ennek megfelelően ez az említett szám jórészt valószínűségszámítási dolgozatot tartalmaz, mégpedig matematikusok és fizikusok ilyen tárgyú dolgozatait egyaránt. A II. kötet 1. száma az 1951. évi nagygyűlés anyagát tartalmazza, a 2. és 3—4. szám fizikai dolgozatokat tartalmaz, mégpedig a 2. szám főként kísérleti fizikai, a 3—4. szám főként elméleti fizikai dolgozatokat. A III. kötet 1. száma viszont csupa matematikai dolgozatot tartalmaz. A legutóbbi osztályvezetőségi ülés határozata értelmében a közeljövőben önálló fizikai folyóiratot indit az Osztály, ennek megfelelően az Osztályközlemények feladatai is megváltoznak, az Osztályközlemény matematikai dolgozatokat tartalmazó füzeteket és az osztály munkáját ismertető füzeteket fog váltakozva közreadni. Új feladatokat ró az Osztályközleményekre az Akademia Elnökségének a magyarnyelvű publikációra vonatkozó ez évben közzé tett nagyjelentőségű határozata is, melynek értelmében a magyar szerzőknek idegen nyelven megjelenő dolgozatait magyar nyelven is közölni kell (nem feltétlenül ugyanabban a terjedelemben). Ennek a határozatnak végrehajtásával kapcsolatban az Osztályközleményben a felolvasó ülésekről ezentúl részletes beszámolókat fogunk közölni.

Hasonlóképpen nagy fejlődés látszik az Acták kiadásában is. Míg az 1951. évi nagygyűlésen mindkét Actának csak 2—2 számának megjelenéséről számolhattam be, a szóbanforgó másfél év alatt az Acta Mathematicának 7, az Acta Physicának pedig 6 magas színvonalú száma jelent meg, ami az Acták szerkesztőinek, *Gombás Pál* akadémikusnak és *Hajós György* rendes tagnak a jó munkáját bizonyítja. Sok probléma volt az Acták terjesztése körül, azonban ezen a téren is lényeges javulásról számolhatok be. Az Acták külföldi terjesztésének további megjavítása feltétlenül szükséges, párhuzamosan azzal a törekvéssel, hogy a magyar tudósok dolgozataikat elsősorban hazai idegennyelvű folyóiratokban közöljék az Elnökség határozatának értelmében. Feltétlenül biztosítani kell, hogy az Actákban megjelenő dolgozatoknak legszélesebb nemzetközi publicitása legyen.

Az Osztály egyik legfontosabb feladata, hogy a tudományos utánpótlásról gondoskodjék és minden segítséget megadjon fiatal kutatóinak. A tudományos káderutánpótlás tervszerű formája az aspirantúra, a mi osztályunk területén is jelentősen fejlődött az elmult másfél év alatt. Jelenleg 23 fizikus és 24 matematikus aspiráns végzi tanulmányait; ezek közül négyen a Szovjetunióban. Az aspiránsképzés ellenőrzése és irányitása terén még vannak hiányok, ezzel a kérdéssel az Osztálynak sokkal többet kell foglalkoznia. Komoly haladást jelent a kandidátusi minimumok kidolgozása. Ezek kidolgozásának elvei a munka megkezdésekor nem voltak tisztázva és most, hogy a szempontok teljesen kialakultak, a kandidátusi minimumok újabb felülvizsgálata és átnézése szükséges, különösen a fizika területén. A fiatal káderek fejlődésének elősegítését szolgálják a tudományos ösztöndíjak és prémiumok. Az ösztöndíjak rendszere az elmult két év alatt gyökeresen átalakult. Míg 1951-ben az ösztöndíj félig-meddig fizetéskiegészítés jellegű volt és így nem érte el valódi célját, az elmult évben már megvalósítottuk, hogy ösztöndíjat csak konkrét munkaterv teljesítéséért adott az Akadémia és folyósítását csak akkor kezdte meg, ha az ösztöndíjas bizonyos részleteredményeket mutatott fel. Az elmult évben 67 fiatal kutatónak, köztük 34 fizikusnak és 23 matematikusnak juttatott az Osztály ösztöndíjat. A tavalyi év végén kerültek először ösztöndíjprémiumok kiosztásra. Az Osztály 43 fiatal kutatót, köztük 19 fizikust, 16 matematikust részesített, összesen 74 700 Ft prémiumban. Ez évben az ösztöndíj-rendszer újból átalakult és lényegében prémium rendszerré változott át, havi ösztöndíjban csak kevesen részesülnek. A prémiumok az elért eredmények benyujtása után, év közben is bármikor folyósíthatók.

A tudományos munka ösztönzését és a kutatók támogatását szolgálják az új tudományos fokozatok is. Az elmult évben az Osztály szakbizottságai igen nagy munkát végeztek, megvizsgálták mindazok tudományos munkásságát, akik az új fokozat rövid úton való elintézésére adhattak be kérést. Az Osztály bizottságainak javaslatára a Tudományos Minősítő Bizottság 5 matematikusnak és 2 fizikusnak adta meg rövid úton a tudományok doktora címet az Osztály rendes és lev. tagjain kívül, továbbá 17 matematikusnak és 22 fizikusnak a kandidátusi címet. A kandidátusok közül egyeseknek, akiknek tudományos munkássága megközelíti a doktori fokozat elnyeréséhez megkívánt színvonalat, a TMB módot ad, hogy a doktori disszertáció benyujtása és megvédése útján, a törvény által előírt 3 évi várakozási idő elengedésével bármikor elnyerhessék a doktori címet. Hasonlóképpen többeknek, akiknek munkássága megközelíti a kandidátusi fokozat elnyeréséhez szükséges színvonalat, a TMB módot ad, hogy kandidátusi disszertációjukat rövid úton benyujthassák és megvédhessék. Aspiránsaink közül is már többen elkészültek disszertációjukkal. Ilyen módon a legközelebbi hónapokban sorozatosan fog sor kerülni kandidátusi, illetve doktori disszertációk nyilvános megvitatására. Ezektől a vitáktól azt várjuk, hogy a tudományos építő kritika szellemét és az egy területen dolgozó kutatók szorosabb együttműködését fogják szolgálni. Ezért a disszertációk megvitatásai tudományos életünk jelentős eseményeivé kell, hogy váljanak.

A kiemelkedő tudományos munkát Népköztársaságunk igen nagy megbecsülésben részesíti. Ezt bizonyítják az elmult másfél év eseményei is. 1952-ben Népköztársaságunk Kormánya a fizikusok közül *Selényi Pál* lev. tagot, *Simonyi Károly* és *Szalay Sándor* professzorokat tüntette ki a Kossuth-díj ezüst koszorújával, a matematikusok közül *Turán Pál* lev. tagot (már másodízben) a Kossuth-díj arany koszorújával, *Varga Ottó* és *Szele Tibor* professzorokat a Kossuth-díj ezüst fokozatával tüntette ki. 1953-ban Népköztársaságunk Kormánya *Riesz Frigyes* akadémikust, a III. Osztály elnökét, a matematika egész legújabb fejlődését befolyásoló alapvető eredményeiért, amelyek *Szőkefalvi-Nagy Béla* akadémiai lev. taggal együtt írt "Leçons d'Analyse Fonctionelle" című műben nyertek összefoglalást, a Kossuth-díj legmagasabb fokozatával, 50 ezer Ft-os díjjal tüntette ki. Ő a második hazánkban, aki ebben a nagy kitüntetésben részesült. Ugyancsak ez évben másodszor kapott Kossuth-díjat *Egerváry Jenő* akadémikus és *Szőkefalvi-Nagy Béla* lev. tag, valamint Kossuth-díjban részesült *Fuchs László* docens is. Fizikusaink közül ez évben *Novobátzky Károly* akadémikus és *Gyulai Zoltán* lev. tag részesültek ebben a nagy kitüntetésben, közülük az első szintén már másodízben. A tudomány terén kiemelkedő jó munkát végzők megbecsülését bizonyítják a népköztársasági érdemrenddel való kitüntetések is. Ez évben, felszabadulásunk évfordulóján *Fejér Lipót* akadémikus a legmagasabb munkaérdemrenddel, a Munka Vörös Zászló rendjével lett kitüntetve, és *Budó Ágoston* lev. tag szintén munkaérdemrendet kapott. Az elmult évben *Vincze István*, *Szamosi Géza* és *Láng László* részesültek népköztársasági kitüntetésben az Osztályhoz tartozó kutatók közül. Mindnyájan büszkék vagyunk azokra a tagtársainkra, kartársainkra, akik ezeket a magas kitüntetéseket a magyar tudomány érdekében végzett értékes tudományos munkásságukkal kiérdemelték.

A kitüntetések nagy száma fokmérője annak, hogy az Osztály tudományterületén a tudományos kutatómunka a beszámoló tárgyát képező időszakban eredményes volt. Az idő rövidsége nem engedi meg még azt sem, hogy az Osztály tudósainak legkiemelkedőbb eredményeit felsoroljam. Ezek az eredmények egyébként részben a nagygyűlési előadásokban ismertetésekre kerülnek, részletesen viszont az Osztályközleményekben és az Actákban megjelent dolgozatokból ismerhetők meg. Itt csak az Osztály feladataival kívánok röviden foglalkozni a tudományos kutatómunka irányítását illetőleg. Az 1951. évi nagygyűlésen ismertettük az Osztályhoz tartozó ötéves kutatási tervet. Ezen tervek alapján folyik azóta is a munka, annak tervszerűségére azonban rányomta bélyegét, hogy a tervek nem voltak elég konkrétak. Különösen a fizika területén az 1951-ben kidolgozott terv nem volt más, mint az egyes kutatók nem konkrétan körvonalazott kutatási elképzeléseinek laza összegezése. Éppen ezért vált szükségessé a fizika tervének újból való átdolgozása, ami az újjáalakult Fizikus Bizottság első feladata volt. Terveink egy hiányossága volt az összes tudományágak területén, hogy nem emelte ki eléggé a legfontosabb kérdéseket.

Döntő jelentőségű központi feladatok, melyek kidolgozásában egész kutatócsoportok vesznek részt és egyes kutatók egy-egy gondolatának kidolgozása megkülönböztetés nélkül szerepeltek egymás mellett a tervben. Ennek a hibának a kiküszöbölését szolgálta az akadémiai témák kidolgozása. Az Akadémia összes osztályai felismerték, hogy az Akadémia feladatát a tudományos kutatás fejlesztése és irányítása terén csak úgy tudja eredményesen végrehajtani, ha munkáját a legfontosabb tudományos kérdésekre összpontosítja. Egyik hiányossága volt eddigi munkánknak, hogy nem volt elég szoros együttműködés a rokon tudományágakban folyó kutatások, különösen a fizikai és matematikai kutatások között. Ezen a hiányosságon is igyekeznünk kell változtatni a jövőben. Remélem, hogy az e héten a nagygyűlés keretében elhangzó előadások és viták komoly haladást fognak jelenteni a matematikusok és fizikusok tudományos együttműködése irányában. Fontos feladatunk az építő bírálat szellemének további fejlesztése is. Fel kell számolnunk azt a közömbösséget és tartózkodást, amely egyes kutatóinkban ma még meg van a rokon tudományterületekkel szemben és arra kell törekednünk, hogy a tudományos viták az egyes tudományágak döntő szakmai és ideológiai kérdéseit tárják fel és a különböző területeken dolgozó kutatók munkáját segítsék elő. Az Osztályvezetőség és a bizottságok munkájában is arra kell törekednünk, hogy egyre többet foglalkozzanak elvi kérdésekkel, napi feladataik mellett.

A beszámolóm tárgyát képező időszakban az Osztály számos fizikus és matematikus számára nyujtott lehetőséget, hogy Népköztársaságunk és a baráti országok közötti kulturális egyezmények keretében látogatásokat tegyenek ezekben az országokban.

1952. január 1. és 1953. május hó között 10 matematikus és fizikus volt külföldön, a népi demokratikus országokban hosszabb-rövidebb tanulmányúton, illetve kongresszusokon.

Bulgáriában voltak tanulmányúton: *Tomka Pál, Ádám András* és *Fenyves Ervin.* Lengyelországban: *Turán Pál, Hajós György* és *Rényi Alfréd,* a Német Demokratikus Köztársaságban: *Szőkefalvi-Nagy Béla, Jánossy Lajos* (2 ízben), *Rényi Alfréd, Rédei László, Kónya Albert* jártak az Akadémia kiküldésében és ott értékes tapasztalatcserét folytattak.

Ugyanezen időszak alatt 7 külföldi matematikus és fizikus látogatott el hazánkba (a Német Demokratikus Köztársaságból *Schröder, Möglich* és *Eder,* Lengyelországból *Infeld,* Csehszlovákiából *Čzerni,* Belgiumból *Cosyns*).

Ezenkívül a Bolyai héten 9 külföldi matematikus vett részt, így: a Szovjetunióból: *P. Sz. Alekszandrov* és *Sz. M. Nyikolszkij,* Lengyelországból: *W. Sierpinski* és *S. Turski,* Csehszlovákiából: *Eduard Čech,* Romániából: *T. Popovici és G. Pick,* a Német Demokratikus Köztársaságból *W. Rinow* és *K. Maruhn.*

Az Osztály felügyelete alá tartozó három akadémiai intézet munkájával nem fogok részletesen foglalkozni. A Központi Fizikai Kutató Intézet fejlődésével *Tarján Imre* beszámolója fog foglalkozni. Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkájáról bőségesen be fognak számolni a Nagygyűlésen tartandó előadások és az Intézet munkája a hazai alkalmazott matematikai kutatások helyzetéről tartandó vitaülés keretében szintén megvitatásra fog kerülni. Az Intézet munkájával kapcsolatban csak annyit említek meg, hogy az Intézet közleményeinek első kötete képet ad az Intézetnek az elmult évben végzett munkájáról. Intézetünk közleményeit többszáz példányban megküldtük csere-példányként mindazoknak az intézményeknek, amelyekkel már eddig együtt-működtünk, illetve, amelyekkel az együttműködés kívánatosnak látszik és azt várjuk, hogy Közleményeink megismerése újabb lökést fog adni az Intézet munkájának és annak, hogy az Intézet még szorosabbra fűzze kapcsolatát az iparral és népgazdaságunk más területeivel, valamint a természettudományi és műszaki tudományos intézetekkel. Ez a várakozásunk már is kezd bebizonyosodni: azoktól az intézményektől, melyeknek az Intézet közleményeit megküldte, számos válasz érkezett, amelyek a további együttműködés tekintetében konkrét javaslatokat vetnek fel. A Csillagászati Intézet munkájáról sem kívánok itt beszélni. *Földes István* beszámolómhoz való hozzászólásában fogja az Intézet munkáját röviden ismertetni. Az Osztály az elmult évben is jelentős támogatást nyujtott az egyetemi intézetekben folyó matematikai, fizikai és csillagászati kutatásokhoz. Céltámogatás formájában az Osztály az egyetemi intézeteknek 700 000 Ft-ot bocsátott rendelkezésére.

Még egy kérdést szeretnék röviden érinteni: a tudományos ismeretek terjesztésének kérdését, a dolgozók széles tömegei között. Ez a kérdés nem lehet közömbös Akadémiánk számára, hiszen a dolgozók százezreiben ébredt komoly érdeklődés a tudomány eredményei iránt és fejlődő tudományos életünknek legfőbb jellemző vonása abban áll, hogy a tudomány ma nálunk a dolgozó nép érdekeit szolgálja és ennek fejlesztésébe a dolgozók egyre nagyobb tömegei kapcsolódnak be. A magyar tudomány egészséges fejlődése szempontjából döntő jelentőségű, hogy a tudósok és a dolgozó nép kapcsolata még szorosabbá váljék. A magyar dolgozók egyre nagyobb számban ismerik fel, hogy a szocializmus építéséhez több tudásra van szükségük és egyre nagyobb tudásszomjjal fordulnak a tudomány, s ezen belül az Osztályunk szakterületéhez tartozó tudományok felé is. Nekünk arra kell törekednünk, hogy mindazok a tudományos eredmények, melyeket elértünk, a dolgozó tömegek közkincsévé váljanak, a tudományos kutatókhoz viszont eljussanak mindazok a tapasztalatok és problémák, melyek a dolgozók mindennapi munkája során felmerülnek. Ennek óriási jelentősége van, mind a tudomány fejlesztése, mind pedig a népet szolgáló tudományos dolgozóknak az egész néppel való kapcsolatának még szorosabbá tétele szempontjából is. Ebből a szempontból igen nagy jelentősége van az Osztály tudományos irányítása alatt álló, a MTESZ keretében tartozó két tudományos egyesület, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat munkájának. Ezeket a társulatokat az Osztály állandó támogatásban részesíti. Így az Osztály segítséget nyujtott a Fizikus Társulatnak a mult évben Debrecenben megtartott II. vándorgyűlése megrendezéséhez. A tudományos ismeretek terjesztése és népszerűsítése tekintetében nagyjelentőségű a Tudományos és Társadalmi Ismereteket Terjesztő Társulat megalakítása, melynek munkáját az Akadémiának és ezen belül a mi Osztályunknak is messzemenően támogatnia kell. Az új társulat és a fentemlített két tudományos egyesület között is ki kell építeni az együttműködést. Az Akadémia könyvkiadásával is részt kell, hogy vegyen a tudományos ismeretek terjesztésében és a tudományos eredmények népszerűsítésében. Ezzel a kérdéssel a jövőben sokkal többet kell foglalkoznunk. A multban is kidolgoztunk terveket népszerűsítő jellegű, szélesebb olvasókörnek szóló könyvek kiadására, ezek közül azonban még egy sem valósult meg. Rajta kell lennünk, hogy ez a munka meginduljon. E téren is a szovjet tudósok példáját kell követnünk. Ezzel kapcsolatban újból hangsúlyozni szeretném, hogy még igen sok teendőnk van a szovjet tudomány eredményeinek megismerése s mindazoknak a felbecsülhetetlen értékű tapasztalatoknak a felhasználása terén, melyeket a szovjet tudomány nagyszerű kincsestárából meríthetünk. Még jobban meg kell ismernünk a szovjet tudomány kiemelkedő teljesítményeit és sokkal nagyobb mértékben kell igyekeznünk, hogy elsajátítsuk és kövessük a szovjet tudomány haladó szellemét, megismerjük és érvényesítsük munkánkban a dialektikus materializmus szellemét. Még többet kell tanulmányoznunk *Marx, Engels, Lenin* és *Sztálin* halhatatlan műveit és tanításaikat alkotó módon kell alkalmaznunk saját munkánkban.

Ezzel beszámolómnak végére értem. A rendelkezésre álló idő rövidsége miatt beszámolóm teljességre semilyen tekintetben nem tart igényt. Beszámolómban arra igyekeztem, hogy összefoglaló képet adjak az Osztály munkájáról és ezzel alapot adjak ennek a munkának a megvitatására. Kérem az Osztály tagjait és vendégeinket, szóljanak hozzá beszámolómhoz és hozzászólásaikkal, bírálatukkal támogassák az Osztály munkáját. Az Osztályvezetőség megbízatása az Akadémia alapszabályai értelmében 3 évre szól, az 1949 decemberében megválasztott Osztályvezetőség megbízatása tehát lejárt és a mai nap az Osztály zárt ülésén új Osztályvezetőséget választott. Beszámolómat azzal a reménnyel fejezem be, hogy a hozzászólásokban számos olyan szempont fog felmerülni, melyeket az új Osztályvezetőség munkájában eredményesen fel fog tudni használni és teljesen átérezve felelősségét, nagy és jelentős feladatainak eredményes elvégzéséért, a még meglévő hibákat és hiányosságokat felszámolva, munkájának lendületét fokozva a jövőben az eddiginél még sokkal eredményesebb munkát fog végezni.

BESZÁMOLÓ A FIZIKAI ÁLLANDÓ BIZOTTSÁG MUNKÁJÁRÓL

TARJÁN IMRE

Előadta az 1953. május 27-én tartott nyilvános osztályülésen

A múltban kísérleti és technikai fizikánk fejlődésben messze elmaradt más tudományágak, közöttük az elméleti fizika fejlődéséhez képest. Gyáriparunk általában külföldi licensek alapján dolgozott. A hazai és külföldi burzsoáziának nem fűződött tehát különösebb érdeke ahhoz, hogy a nagymértékű anyagi támogatást igénylő kísérleti és technikai fizikánkat fejlessze. A felszabadulás után Pártunk felismerte kísérleti és technikai fizikánk területén mutatkozó nagymértékű elmaradásunkat és az első ötéves tervben kb. 70 millió forint összeggel Központi Fizikai Kutató Intézet (KFKI) létrehozását határozta el. Részben ez a támogatás, részben pedig a kormányzatunk által az egyetemi intézeteknek nyujtott anyagi segítség lehetővé tette, hogy kísérleti és technikai fizikánk is az elméleti fizikával együtt megindulhatott a fejlődés útján. Az elért eredményekről tanúskodnak a magyar fizikusok részéről egyre nagyobb számban megjelenő dolgozatok és az utóbbi években rendezett fizikus vándorgyűlések fokozódó sikerei.

A feladatok azonban növekednek és hazai fizikánknak lépést kell tartania más tudományágak, iparunk, népgazdaságunk egyéb területeinek fejlődésével. Pártunk felhívta figyelmünket a legsürgősebb tennivalókra és szempontokat adott további munkánkhoz. Felhívta figyelmünket arra, hogy a magyar fizika kutatási tervének elsősorban tartalmaznia kell olyan döntő feladatokat, amelyeket a műszaki fejlesztés soron következő feladatai megkövetelnek. A magyar fizika kutatási tervének a magyar népgazdaság szükségleteihez szorosan illeszkednie kell. Érvényt kell szerezni annak az elvnek, hogy a fizikai kutatásnak szilárd tudományos bázist kell nyujtani technikánk minőségi továbbfejlesztéséhez. Fizikánknak az iparral való szoros együttműködésben kell továbbfejlődnie. Kutatásunk egész területén előtérbe kell állítani a kísérleti fizikát. Gyors ütemben kell fejlesztenünk az előtérben álló elméleti atomfizika mellett a kísérleti atomfizikát és a vele szorosabb kapcsolatban álló tudományokat, mint a kozmikus sugárzás, mikrohullámok, elektronika, stb. Ugyanakkor az atomfizika mellett fejlesztenünk kell az eddig elhanyagolt klasszikus fizika művelését, mert ennek területei egyes alapvető ipari feladatainkkal a legszorosabb kapcsolatban állanak és nem képzelhető el fejlett fizikai kultúra a klasszikus alapok intenzív művelése nélkül.

Tisztán kell látnunk azt is, hogy fizikai intézeteink, különösképpen az egyetemi intézetek általában munkájukat eddig egymástól meglehetősen függetlenül végezték, az egyes kutatók érdeklődési körének megfelelően. A Fizikus

Bizottság munkája a különböző intézetekben folyó munkák regisztrálására szorítkozott, anélkül, hogy a Bizottság e munkákat, a fizikus életet irányította volna, súlyt képezett volna az egyes témakörökkel kapcsolatban és a munkákat ellenőrizte volna. Ösztönösen haladtunk.

A hibák kiküszöbölésére és az új feladatok ellátására szerveződött újjá 1953. januárjában a Fizikus Bizottság. Az újjászervezett Fizikus Bizottság leglényegesebb feladata a fizika 1953—54. évi részletes és a második ötéves tervre vonatkozó perspektivikus kutatási tervének összeállítása volt a fent említett szempontok szemelőtt tartásával.

E munkához szükség volt arra, hogy revideáljuk intézeteink munkaterveit, fizikai intézeteinket a Fizikus Bizottság közvetlenül megismerje, helyszínen lássa munkájukat, munkalehetőségeiket, felszerelésüket, ismerje meg problémáikat, tárja fel a rejtett tartalékokat személyi és anyagi vonalon egyaránt. Közvetlen tapasztalatokat kellett szereznünk, hogy összefüggéseiben lássuk intézeteink helyzetét. Az intézetek látogatása több hónapot vett igénybe és két egyetemi intézet meglátogatásától eltekintve, befejezettnek tekinthető. Az intézetlátogatásokkal egyidőben megtettük az első lépéseket az iparral való szorosabb és tervszerűbb kapcsolat kiépítése felé is. Az iparral való eddigi szórványos és ösztönös együttműködést részben közös ankétok rendezésével, részben pedig vezető ipari káderekkel folytatott személyes beszélgetésekkel kívántuk elmélyíteni. Az ankéteknek az volt a célja, hogy a műszaki tudományok és iparunk vezető káderei megismerjék hazai fizikánk kutatási területeit és tudomást szerezzenek azokról a lehetőségekről, amelyeket hazai fizikánk jelenleg az iparnak nyujthat. A személyes megbeszéléseknek pedig az volt a célja, hogy a fizikusok szerezzenek tudomást az ipar súlyponti fizikai problémáiról, hogy azután ezek szemelőtt tartásával állíthassuk össze fizikánk fejlesztési tervét.

Feszített munkát jelentett e terv lebonyolítása, de fizikusaink nagyrésze, látva a feladat nagyságát és súlyát, teljes aktivitással vett részt ezekben a munkákban.

A fizika kutatási terve az alábbi témák köré csoportosul:

1. Atomfizika
   a) atommagfizika,
   b) atomhéj — és molekula fizika,
   c) az atomfizikához szorosan kapcsolódó munkaterületek.
2. Szilárd testek fizikája.
3. Klasszikus fizika.
4. A fizika alapvető problémáira vonatkozó egyéb vizsgálatok.

ad 1/*a*. A közvetlen feladat a külföldön alkalmazott gyorsító berendezések felépítése, alapvető magfizikai vizsgálati eljárások kidolgozása, megfelelő számban és minőségben káderek kinevelése. A Magyarországon eddig erősen elmaradt atomkutatást nemzetközi színvonalra kell emelni.

Távolabbi feladatok: Lehetőséget nyujtani az ipar számára roncsolásmentes anyagvizsgálati eljárások alkalmazására. Radioaktív izotópok előállítása ipari, orvosi, biológiai, stb. célokra. Atommagok tulajdonságainak kísérleti vizsgálata, magtermek kimérése.

ad 1 *b*. Közvetlen feladat: bizonyos kétatomos molekulák szerkezetének tisztázása, elemzési módszerek tökéletesítése és újak kidolgozása kémiai és egyéb ipari anyagelemzések számára.

Távolabbi feladatok: Kétatomos molekulák szerkezetének további tisztázása és esetleg a vizsgálatok kiterjesztése többatomos molekulák sávrendszerére. Az iparral való együttműködés további elmélyítése.

ad 1 *c*. Közvetlen feladatok: A kozmikus sugárzás területén a mezonok és kiterjedt légizáporok vizsgálata. — Vizsgálati módszerek kidolgozása az ultrarövid hullámhosszúságú elektromágneses hullámtartományban és az ultrarövidhullámú technika bizonyos kérdéseinek megoldása.

Távolabbi feladatok: A fenti kutatási területek fokozott fejlesztésén kívül tömegspektroszkópiai és elektrondiffrakciós vizsgálatok elindítása és eljárások kidolgozása ipari feladatok megoldására.

ad 2. Közvetlen feladatok: Az ipari laboratóriumokban is folyó hazai félvezetőkutatással kapcsolatos néhány elvi probléma tisztázása. — A kristályosodás mechanizmusának néhány elvi kérdése és az ipari, valamint fizikai kutatás szempontjából fontos egykristályok előállítása. A szilárd testek és fémek fizikájára vonatkozó elméleti kutatások továbbfejlesztése.

Távolabbi feladatok: A fenti kutatási területek továbbművelése közvetlen gyakorlati szempontok tekintetbevételével és egyéb, iparral kapcsolatos problémák vizsgálata.

ad 3. Közvetlen feladatok: Különböző magasfeszültségi és vákuumtechnikai problémák megoldása. — Akusztikai és ultrahang vizsgálatok.

Távolabbi feladatok: Újabb munkaterületek elindítása:

mágneses,
geometriai és fizikai optikai,
hidro- és aerodinamikai,
rugalmasságtani és plaszticitási vizsgálatok.

A felsorolt munkaterületek közül elsősorban a mágneses kutatás kifejlesztésére kívánunk súlyt helyezni.

A felsorolt témakörök között az atomfizika foglal el legnagyobb helyet és a kutatókapacitásnak kb. háromnegyed részét köti le. Szerény helyet foglal el a kutatási tervben a klasszikus fizika, amely csak a perspektívikus tervben fog nagyobb területet betölteni. A klasszikus fizikában megjelölt új területek az iparral való együttműködés fokozásával elmélyülnek és esetleg újakkal bővülnek ki.

Döntő helyet foglal el a tervben a KFKI, amely a témák csaknem háromnegyed részével foglalkozik. A KFKI az alapozás stádiumában van. 1952-ig az építkezés és szervezési kérdések voltak előtérben, 1952—53-ban a súlypont a fejlesztés fokozása mellett a kísérleti berendezések építésére és káderek nevelésére helyeződött át, 1954-ben a kutató munkának kell fokozatosan az előtérbe lépni. — A KFKI-ben jelenleg már 6 osztályon (kozmikus sugárzási osztály, spektroszkópiai osztály, atomfizikai osztály, radiológiai osztály, elektromágneses hullámok osztálya, elméleti fizikai osztály) folyik a munka, amely a menetközben felmerült szervezési, technikai, kádernehézségek, stb. ellenére, általában terv szerint halad. A spektroszkópiai osztály ipari csoportja munkatervét módosította, amennyiben gerjesztőberendezések építése helyett a súlypontot elemzési módszerek kidolgozására helyezte át. A Fizikus Bizottság a módosítást helyesli. Az intézet tudományos irányítása jól fejlődik, de ilyen vonatkozásokban föltétlenül erősítésre van még szükség. Föltétlenül gondoskodni kell tudományos igazgató-helyettesről, aki az intézet sokrétű tudományos munkájának irányításában segítséget nyujt az igazgatónak. Állandó figyelemmel kíséri és ellenőrzi az egyes osztályok tudományos munkáját, tervteljesítését, ellenőrzi az osztályvezetői értekezleteket, résztvesz az osztályokon belül működő kutató csoportok tudományos megbeszélésein stb.

Be kell tölteni a jelenleg üresedésben lévő adminisztratív műszaki igazgató-helyettesi állást is. Az adminisztratív műszaki igazgató-helyettes biztosítja a kutatómunka zavartalanságához szükséges műszaki, adminisztratív feltételeket.

Az iparral és más tudományágakkal való kapcsolat kiépítése terén a spektroszkópiai és kozmikus osztály részéről lényeges lépések történtek, de a kapcsolatot a jövőben tervszerűbbé és szervezettebbé kell tenni és más osztályok munkájára is ki kell terjeszteni. — Még ebben az évben elkezdi működését a KFKI műszaki osztálya. A műszaki osztály keretében dolgozó központi műhely feladata a különböző kutatásokhoz szükséges speciális műszerek előállítása lesz, azonfelül a kutatók által kikísérletezett és az ipari vagy más kutatóintézetek részére sorozatban gyártandó műszerek és eszközök nullszériájának legyártása. A műszaki osztálynak fontos szerepet kell betöltenie a jövőben egész hazai fizikánk fejlődését illetőleg. Előreláthatólag a KFKI keretében indul el a jövő év elején a mágneses kutatócsoport munkája, amelyre ipari vonatkozásban is hatalmas feladatok várnak.

Tudatában vagyunk annak, hogy ilyen méretű fizikai intézet fölépítése, fölszerelése, megszervezése, munkájának elindítása nem megy máról-holnapra, de ugyanakkor valamennyiünknek éreznünk kell azt a felelősséget, amellyel népünknek, kormányzatunknak tartozunk azért a hatalmas áldozatért és támogatásért, amellyel e nagy intézmény megalapítását lehetővé tette. Eredményes kutatómunkával akarunk a belénk helyezett bizalomnak megfelelni.

Milyen változást jelent a jelenlegi terv a régiekhez képest?

Az elindítandó új munkaterületekről már szóltam, szeretnék azonban néhány gondolatot kiemelni a folyamatban lévő témáinkkal kapcsolatban is. A régi témakörök természetesen most is szerepelnek, de jelentőségükben kibővültek. Tudatossá váltak a fizikusokban témáik közvetlen és távolabbi gyakorlati ipari vonatkozásai és előtérbe került annak szükségessége, hogy hazai iparunk a fizika eredményeit valóban fel is használhassa. Sürgősen megvalósítandó feladatok közé tartozik számos területen, amelyeken ezideig szervezetlen formában folyt az iparral való együttműködés, tervszerű kapcsolatot kiépíteni mindazokkal az ipari és üzemi laboratóriumokkal, amelyekben hasonló kutatás folyik. A mostani terv céltudatosságot, az erőforrások helyes csoportosítását mutatja abban az irányban, hogy fizikai kutatásunk a hazai tudományos élet és egész népgazdaságunk szerves részét képezze.

Ugyanakkor szeretnék rámutatni a terv lényegesebb hiányosságaira is. Hiányossága a tervnek, hogy csak a KFKI és az egyetemi fizikai intézetek munkatervét tartalmazza, és hiányzik belőle az ipari intézetekben folyó fizikai kutatás terve. Hiányzik tehát az összehangolás az ipari intézetekben folyó fizikai kutatásokkal, aminek megvalósítása a közeljövő feladata. — Hiányossága továbbá a kutatási tervnek az is, hogy számos téma nem eléggé konkrét ahhoz, hogy ellenőrizhető lenne. Ez azzal függ össze, hogy még gyakorlatlanok vagyunk a tervkészítés munkálataiban. Fontos feladata a közeljövőben a Fizikus Bizottságnak, hogy a tervkészítés és tervellenőrzés helyes módját kidolgozza. A perspektívikus terv általánosságokat tartalmaz olyannyira, hogy költségvetési és beruházási része nem tekinthető jól megalapozottnak. Fontos feladata a Fizikus Bizottságnak, hogy ezeket a hiányosságokat a jövőben teljesen kiküszöbölje.

A terv elkészítésével kapcsolatos munkák számos problémára felhívták figyelmünket. E problémákkal a Fizikus Bizottság külön-külön foglalkozott és megoldásukra vonatkozólag felsőbb szerveink felé javaslattal élt.

1. *Az iparral való együttműködés kiépítése.* Az ankétok és a személyes megbeszélések folyamán elindított kooperációt a jövőben szervezettebbé kívánjuk tenni. Ezzel kapcsolatban a fizika jelenlegi kutatási tervét és későbbi terveit is ismertetni kívánjuk a VI. Osztállyal, megjelölvén a terv ipari vonatkozásait.

A III. és VI. Osztály közös intézőbizottság felállítását határozta el, amely kijelöli az iparral való kooperáció közvetlen feladatait és módjait.

A III. és VI. Osztály szükségesnek tartja a fizika iránt érdeklődő fiatal mérnökök és mérnökhallgatók, valamint a technika iránt érdeklődő fiatal fizikusok felkutatását és technikai fizikussá való kiképzését. Ez nagymértékben megkönnyítené az ipar és fizika együttműködését és az üzemi mérnök és fizikus közötti egészséges kapcsolat kiépítésének alapja lenne.

2. *Káderproblémák.* Hazai fizikakutatásunk súlyos káderproblémákkal küzd. Hazánkban jelenleg fizikai kutatóintézeteinkben kb. 150 fizikus dolgozik. Közülük a KFKI-ben kb. 50, kb. 100 pedig az egyetemi intézetekben. Utóbbiak munkaidejének nagyobbik részét a többezer egyetemi hallgató oktatása, adminisztráció, beszerzési, szervezési, stb. munkák kötik le és a kutatás számára kevéssé értékes, szétszórt idő marad csupán. Még kevesebb azonban

a tudományos tapasztalatokkal rendelkezők száma, kutatóink zömének 1-2 éves intézeti multja van csupán. A káderhiányon lényeges enyhülést az sem fog jelenteni, ha kikerülnek egyetemeinkről az 1953-ban és 1954-ben végzett fiatal fizikusok. A fizikai intézetek szükséglete sem fedeződik, nem beszélve az ipar fizikus-szükségletéről. Erre a problémára, valamint az egyetemi intézetekben folyó kutatómunkát gátló körülményekre felhívtuk felsőbb hatóságaink figyelmét.

3. *Egyetemi intézeteink helyzete.* Az egyetemi intézetekkel kapcsolatbani problémákról fentebb már szóltam, most azt szeretném csupán megemlíteni, hogy a jövőben egyetemi intézeteink fokozottabb fejlesztését kérjük. Nemcsak az egyetemi intézetekben folyó kutatómunka intenzívebbé tétele kívánja ezt, hanem a káderutánpótlás kérdése is. Elsősorban kísérleti fizikai intézeteink megerősítésére van szükség, hogy minél alaposabban képzett, széles látókörű, jó kísérleti fizikusok kerüljenek ki.

A Fizikus Bizottság által végzett munkák közül csak néhányat szeretnék még kiemelni. Elkészült a könyvkiadás 1954. évi és távlati terve. A könyvkiadási tervezet szorosan simul a fizika kutatási tervéhez, szemelőtt tartva a Pártunk által megadott szempontokat hazai fizikánk fejlesztésével kapcsolatban.

A Fizikus Bizottság elérkezettnek látja az időt arra, hogy egy új magyarnyelvű fizikai folyóiratot indítson el. Ez a folyóirat a hazai fizikai kutatás egyre gyarapodó eredményeiről tájékoztatná nemcsak a fizikusokat, hanem iparunkat is. A folyóirat az új eredményeken kívül összefoglaló beszámolókat és külföldön megjelent nagyfontosságú cikkek fordítását is tartalmazná.

Behatóan foglalkozott a Fizikus Bizottság az aspiránsképzés és a szovjet ösztöndíjasok kérdésével. A munkaterületek kijelölésénél a Bizottság tekintetbe vette a tervkészítéssel kapcsolatban felmerült szűk keresztmetszeteket, különös tekintettel a kísérleti fizika és ezen belül a klasszikus fizika művelésére.

Szeretnék röviden beszélni a fizikai pályatételekről is, amelyeket a Magyar Tudományos Akadémia ösztöndíj prémiumra, illetőleg havi ösztöndíjra kitűzött. A témák kapcsolódnak a fizika kutatási tervéhez, amennyiben azt olyan irányokban egészítik ki, ahol szűk keresztmetszetek mutatkoznak. A kitűzött témák legnagyobb része gyakorlati jelentőségű és az iparral, technikával van kapcsolatban. Kívánatos, hogy vezető fizikusaink hívják fel újólag munkatársaik figyelmét e pályatételekre. A pályamunkák évközben bármikor benyújthatók és jutalmazhatók. A siker érdekében szükséges, hogy intézeteink a kitűzött pályatételek számára biztosítsanak megfelelő nyilvánosságot.

Utoljára beszélek, de nem utolsósorban a folyó évben rendezésre kerülő I. Magyar Fizikus Kongresszusról. A kongresszust a Magyar Tudományos Akadémia és az Eötvös Loránd Fizikus Társulat közösen rendezi aug. 23—30-ig Budapesten. A kongresszus megszervezésére *Jánossy Lajos* akadémikus elnökletével egy előkészítő bizottság alakult. A kongresszus sikere érdekében azonban szükség van valamennyi fizikusunk aktív közreműködésére. A kongreszszuson kb. 15 külföldi fizikus jelenlétével számolhatunk. A kongresszus alkalom lesz arra, hogy személyesen megismerkedjünk a Szovjetunió és a baráti országok kiváló fizikusaival és ezáltal a baráti együttműködés alapjait rakhassuk le.

A kongresszus előzetes programmja:

1. *Kvantummechanika és a relativitáselmélet elvi kérdései.*

a) Jánossy Lajos: Elgondolások a részecske-hullám problémáiról.

b) Novobátzky Károly: A kvantumelmélet statisztikus sokasága.

2. *Kvantummechanikai közelítő módszerek.*

Gombás Pál: Egy új statisztikus atommodellről.

3. *Magfizika.*

a) Szalay Sándor: Kísérleti vizsgálatok könnyű atommagok energia állapotaira vonatkozólag.

b) Szamosi Géza: Az atommag elméletéről.

4. *Szilárd testek fizikája.*

a) Gyulai Zoltán: Vizsgálatok a kristálynövekedés mechanizmusára vonatkozólag.

b) Tarján Imre: Színcentrumok és fotovezetés.

c) Szigeti György: Összefüggések a lumineszkáló anyagok optikai és elektromos tulajdonságai között.

5. *Spektroszkópia.*

Kovács István: Hazai spektroszkópiai kutatások újabb eredményei.

6. *Fontosabb magyar eredmények a fizika egyéb területén.*

a) Selényi Pál: A villamostöltésekkel való feljegyzés módszerei, eredményei és kilátásai.

b) Selényi Pál: Fotocella, fényelem és egyenirányító.

Befejezésül hangsúlyozni szeretném, hogy mindaz, amit a Fizikus Bizottság munkájáról mondtam, elindulást jelent csupán, egy új, mozgalmasabb és eredményekben gazdagabb élet elindulását. Folytatni kívánjuk intézeteink meglátogatását és munkájuk ellenőrzését, kiegészítve ezt a fizikával foglalkozó ipari kutatóintézetek meglátogatásával. Mély együttműködést kívánunk kiépíteni az Akadémia VI. Osztályával, valamint az iparral, hogy kölcsönös támogatásban fejlődhessünk. A Fizikus Kongresszust pedig felhasználjuk arra, hogy látókörünk bővüljön és a szovjet kapcsolatok kiépítésével megismerjük és számunkra értékesíthessük az általunk nagyrabecsült szovjet fizika eredményeit. Tudom, hogy beszámolóm hiányos volt, de úgy vélem, hogy célomat elértem, ha az eddig végzett munka ismertetése mellett sikerült rámutatnom az előttünk álló feladatok hatalmasságára. Feladataink végrehajtása csak úgy lehetséges, ha valamennyien megsokszorozzuk erőfeszítéseinket és megjavítjuk munkamódszereinket. Pártunk, kormányzatunk a tudományos munkát hatalmas támogatásban részesíti és dolgozó népünk áldozatkészségét hazafias kötelességünk azzal viszonozni, hogy minden erőnket megfeszítve dolgozunk tudományos tervünk eredményes teljesítésén.

BESZÁMOLÓ A CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZETRŐL

A Csillagvizsgáló Intézet igazgatójával, *Detre László*val való előzetes megbeszélés alapján az Intézet munkájára vonatkozólag a következőket szeretném előadni:

A Szabadsághegyi Csillagvizsgáló két éve lett akadémiai intézet. Az akadémiai átvétel olyan időben történt, amikor már halaszthatatlan probléma volt az Intézet műszerállományának teljes felújítása, sőt részben megfelelőbb helyre való áthelyezése. A műszerállományra vonatkozólag elég megemlíteni, hogy az Intézet számára 1913 óta nem rendeltek új távcsövet. De a jelenlegi, modernnek egyáltalán nem mondható felszerelés teljesítőképességét is egyre jobban korlátozza az éjjeli ég fényének állandó növekedése, amit fővárosunknak a felszabadulás utáni hatalmas fejlődése okoz.

Az Akadémia mindjárt az átvétel után nagyvonalúan felkarolta az Intézet fejlesztésére vonatkozó terveinket, sőt a múlt év folyamán már a tervek megvalósítása is nagy lépésekkel haladt előre. A jénai Zeiss optikai műveknél októberben megrendelhettünk egy 90 cm nyílású Sonnefeld-típusú aplanatikus tükörteleszkópot, egy ugyanakkora átmérőjű prizmával. Ezzel a hazai csillagászat most először jut olyan felszereléshez, amellyel igen sok aktuális kérdésnek vizsgálatában félveheti a versenyt bármely külföldi csillagdával.

A mult évben kutatóink részletes vizsgálatokat végeztek azon célból, hogy kijelöljék hazánkban a csillagászati megfigyelések szempontjából legalkalmasabb helyet. Ezekben a vizsgálatokban támogatott minket az Országos Meteorológiai Intézet és az Eötvös Loránd Tudományegyetem Meteorológiai Tanszéke. Végül is a Mátra hegységben lévő Piszkés-tetőt jelöltük ki a fiókintézet helyéül. Ennek tengerszintfeletti magassága 920 méter. Az új intézet kiépülése a jövő évben megkezdődik. De a szabadsághegyi Intézet fejlesztése is tovább haladt előre olyan kutatási területeken, ahol nem zavar a város fénye. Az 1947-ben alakult II. Osztály, a napfizikai osztály számára az Optikai és Finommechanikai Központi Kutató Laboratórium elkészítette egy spektrohelioszkóp optikai részeit és felépült a műszert befogadó különálló épület is. A műszert remélhetőleg még ez évben üzembe lehet helyezni. Ez a műszer lesz az osztály legkorszerűbb kutató eszköze.

1952-ben megalakult az Intézet III. osztálya, a pozicióasztronomiai és stellárstatisztikai osztály. Ennek az Osztálynak egyelőre fő célja a megrendelt tükörteleszkóppal megindítandó vizsgálatok előkészítése.

Az Intézet már a II. világháború előtt is azon kevés magyar kutatóintézetek közé tartozott, amelyek munkaprogrammjukban felhasználták a szovjet tudományos kutatómunka eredményeit és tapasztalatait. Ennek folytán már akkor is élénk tudományos kapcsolatban voltunk szovjet kollégáinkkal. Leghőbb vágyunk volt a felszabadulás óta, hogy ezeket a kapcsolatokat nem csupán újra helyreállítsuk, hanem még el is mélyítsük. Ebben a törekvésünkben szovjet kollégáink jöttek segítségünkre. Még 1950-ben *Kukarkin* professzor tett kezdeményező lépéseket felénk kooperációs munkákat ajánlva fel a változó csillagok kutatásában. A mult évben leleveleztük, hogy az így kialakuló nagyarányú munkaközösségben milyen feladatot kap, illetve tud vállalni a mi Intézetünk. A kooperációs programm végleges megállapítása ez év nyarán várható.

Mult év tavaszán felszólított bennünket a leningrádi Elméleti Csillagászati Intézet is, hogy működjünk velük együtt a kisbolygók vizsgálatánál. Ezt a munkát III. osztályunk már a múlt év nyarán be is indította, de az Intézet jelenlegi felszerelésével ezt a kooperációt aránylag csak szűk keretek között vállalhattuk. Műhelyünkben ugyan elkészítettünk direkt erre a célra egy nagy látómezejű, 15 cm nyílású fotokamarát, de ezt is csak majd a mátrai fiókintézetben fogjuk tudni megfelelően kihasználni.

Az asztrofizikai osztály, az I. osztály főmunkája az elmúlt évben is a változócsillagok tanulmányozása volt, éspedig túlnyomórészt a rövidperiódusú cepheidák komplikált periódusváltozását vizsgáltuk. Ez a témakör egyaránt fontos a csillagok szerkezetének, valamint kozmogóniájának szempontjából. Vizsgálataink kiterjednek mind a Tejútrendszer izolált cepheidáira, mind a gömbhalmazokban lévő ilyen csillagokra. A megfigyeléseket részben fotografikusan, részben az 5 éves terv keretében elkészült fotoelektromos berendezéssel végeztük.

A megfigyelések száma a múlt évben volt maximális az Intézet fennállása óta, de jól haladt előre a megfigyelések feldolgozása is. Eredményeinkről 1952-ben az Intézet kiadványainak öt száma jelent meg.

Az osztály még a födési kettőscsillagok fotometriájával és pályameghatározásával, valamint csillagfödések megfigyelésével, elméleti téren pedig a turbulencia-elmélet csillagászati alkalmazásával foglalkozott.

A napfizikai osztály főmunkája a protuberanciákról rendelkezésre álló egész megfigyelési anyag feldolgozása új szempontok szerint. Emellett külföldi koronográf-felvételek alapján tanulmányozzuk a protuberanciák mozgási törvényeit.

A fotohéliográfon készült felvételek alapján megindult a napfoltcsoportok fejlődésének tanulmányozása. Az osztály országos hálózatot szervezett a napfoltok és fáklyák szinoptikus térképének minél tökéletesebb elkészítésére és a tavalyi térképeket az Időjárás folyóiratban rendszeresen közöltük. Mindezeknek a vizsgálatoknak különösen geofizikai vonatkozásuk ad jelentőséget, de fontosak a napfelületi jelenségek elmélete szempontjából is.

A III. osztály a leningrádi Elméleti Csillagászati Intézettel való kooperációs munkán kívül még az Ambarcumján-féle asszociációkkal foglalkozott.

Ennek keretében részletesen feldolgoztuk a Cepheus II csillagtársulást és bebizonyítottuk annak valódiságát.

Az Intézet tudományos személyzete látta el a budapesti, szegedi és debreceni egyetemeken a csillagászati oktatást. Az Intézetben a nyári hónapokban több egyetemi hallgató kapott kiképzést a megfigyelő munkákban. Az Intézet kutatói tevékenyen résztvettek az idealista természettudományos nézetek elleni harcban, számos előadással és számos felvilágosító cikkel, különösen a Természettudományi Társulattal együttműködve.

Munkánk megbecsülését láttuk kormányzatunk részéről, hogy az Intézet kutatói közül egy a tudományok doktora, kettő pedig a tudományok kandidátusa címet nyerte el.

Az Intézet munkáját hátráltatja a kutatószemélyzet és a segédszemélyzet rendkívül kis létszáma. Jelenleg a három osztályra hét egész állású és egy fél állású kutató jut, akik közül kettőnek még az egyetemi csillagászati oktatást is el kell látnia. Ezen, ha azt akarjuk, hogy a szovjet csillagászokkal vállalt kooperatív munkákban megálljuk a helyünket, sürgősen segíteni kell. Szerencsére az eddig fennállott káderhiány szűnőben van.

Az Intézet fejlesztése tervében nem szabad megfeledkeznünk azokról a lehetőségekről, amelyeket a rokon hazai intézményekkel való együttműködés nyujthat. Különösen értékes számunkra Jánossy professzor érdeklődése a rádiócsillagászat iránt. Az ő kezdeményezésére remény van arra, hogy a Központi Fizikai Kutató Intézet technikai segítségével a csillagászatnak ezt a legújabb ágát is felvehetjük majd programmunkba.

Földes István

BESZÁMOLÓ A BERLINI FIZIKUS KONGRESSZUS EGYES PROBLÉMÁIRÓL

JÁNOSSY LAJOS r. tag

Előadta az 1953. május 27-én tartott nyilvános osztályülésen

Tisztelt Osztálygyűlés!

Szándékom a berlini fizikus-konferencia egyes problémáiról beszámolni. Előzményként említem a kongresszus létrejöttének körülményeit. A kongresszus megtartásának ötlete *Möglich* professzorral való beszélgetés alkalmával merült fel. Annak idején *Möglich* professzor, mint a Magyar Tudományos Akadémia vendége Budapesten tartózkodott és úgy láttuk, hogy egyes, a fizika alapkérdéseire vonatkozó problémák annyira megértek, hogy érdemes lenne ezeket a problémákat — legalább mint kérdésfeltevéseket — szélesebb körben megvitatni. Ezt az ötletet a Német Fizikus Társulat magáévá tette és Berlinben összehívott egy, a fizika alapkérdéseivel foglalkozó kongresszust. A kongresszuson résztvettek a Német Demokratikus Köztársaságban dolgozó fizikusok, ezenkívül *Bagge* professzor Hamburgból, *Infeld* professzor és *Ingarden* professzor Lengyelországból; Magyarországból pedig *Kónya* elvtárs és saját magam. Visszatérve a kongresszusról, alkalmam volt a kongressuson felvetődött problémákat prágai fizikusokkal is megbeszélni.

A konferenciát *Seeliger* professzor nyitotta meg és *Möglich* professzor tartott bevezetésként beszámolót. *Möglich* professzor többek között felvetette azt a kérdést, hogy vajjon nem merész kezdeményezés-e az összegyült fizikusok részéről újra megkisérelni a fizika alapkérdéseinek tisztázását, minthogy ezekkel a kérdésekkel korunk legnagyobb fizikusai már sok éven át foglalkoztak, anélkül, hogy továbbjutottak volna. *Möglich* professzor hangsúlyozta, hogy véleménye szerint a konferencia eredményes lehet két szempontból. Először is ő úgy látja, fontos megállapitani, hogy vannak súlyos, meg nem oldott problémák éppen a modern fizika megalapozása körül. Ez nem magától értetődő megállapítás, hiszen jónéhány vezető fizikus arra az álláspontra helyezkedik, hogy a modern fizika alapjai lényegében tisztázva vannak. Másodszor: *Möglich* professzor úgy látja, hogy a kongresszus eredményesen felvetheti a kérdést: mennyire vannak a fizika alapelvei kisérletileg bizonyítva és egyáltalában lehet-e a kisérletek kérdéseit eredményesen felvetni.

Ilyen szempontok megtárgyalása nagy mértékben kifejlődött a kongresszus lefolyása alatt és utolsó napon *Infeld* professzor azt javasolta, hogy a jelen kongresszushoz hasonló kongresszusokat évente kellene lefolytatni és hogy érdemes lenne jövőre újra összeülni és akkor a közben lefolyt kísérleti eredmények ismeretében a problémákat újra tárgyalni. *Infeld* professzor javaslatát a kongresszus tetszéssel elfogadta.

A konferencián sokféle kérdés merült fel, filozófiai kérdésektől kezdve elméleti fizikai és kísérleti fizikai problémákig. Vita alakult ki a dialektikus materializmus szerepéről a természettudományok vonalán. Én a vitában felszólaltam és a vulgármaterialista álláspont ellen érveltem egy olyan felszólaló ellen, aki úgy tette fel a kérdést, mintha pusztán a dialektikus materializmus segítségével lehetne eldönteni a fennálló problémákat.

A kongresszuson elhangzott előadások között érdekes volt *Infeld* professzor előadása az elektrodinamika megalapozásáról. Elméletének részleteit *Infeld* professzor szakfolyóiratokban közölte és annak idején Magyarországon is tartott előadást ezekről a problémákról. Ez alkalommal *Infeld* professzor kifejtette, hogy elmélete szerint az elektrodinamika terén új effektus várható, éspedig várható, hogy egy elektromos töltés, ha homogén mágneses térben mozog, Larmor-frekvenciának megfelelő rezgésszámmal rezgésbe jön.

A második napon a kongresszus az én elgondolásaimmal foglalkozott. A délelőtti szesszión kifejtettem elgondolásaimat a relativitáselmélettel kapcsolatban; előadásomat vita követte. Délután pedig a kvantumelméletről és különösen a fotonokról való elképzeléseimet adtam elő. *Urich* dr. rövid korreferátumot tartott és ezután *Bohm* munkásságáról folyt le rövid előadás. Itt csak futólag ismertetem a *Bohm* által felvetett problémákra vonatkozó álláspontomat, remélvén, hogy ezeket a kérdéseket az első Magyar Fizikus Kongresszuson alkalmam lesz részletesen kifejteni. A felfogás nem új, nálunk például *Novobátzky Károly* kartársunk nagyon hasonló módon veti fel a problémát és most olvastam *de Broglie*-nak egy cikkét, ahol kifejti, hogy ő már 1925-ben lényegében a most *Bohm* által kifejtett álláspontot képviselte. Ez az álláspont a statisztikus interpretáció. Világos, hogy a kvantumelmélet statisztikus felfogása helyes eredményekre vezet és ezért értékes. De ezek a munkák véleményem szerint a tényleges problémát kerülik és részben elkenik. A Boltzmann-féle statisztikus gázelmélet a gázok viselkedését jól magyarázza és ezért nagyon hasznos, de Boltzmannak esze ágában sem volt azt állítani, hogy nem szükséges az egyes atomok viselkedését vizsgálni. A modern kvantum-statisztikus elméletek pedig sokszor élesen arra az álláspontra helyezkednek, hogy a statisztikus elmélet mellett nincs szükség, vagy lehetetlen az egyes részecskék törvényszerűségeit megállapítani. Ez utóbbi felfogást én élesen elutasítom. Véleményem szerint szükséges és lehetséges is az egyes részecskék törvényszerűségeivel foglalkozni.

Az én előadásaimban összefoglaltam lényegében azokat a gondolatokat, amelyek az Acta Physicában két cikk formájában nemrég megjelentek. Az ottani elgondolásokban szerepel két lehetséges kísérlet szembeállítása.

1. A fotón-koincidencia kísérlet. E kísérlet a következő: egy kisintenzitású fénysugár 45° alatt egy félig áteresztő tükörre esik. A sugár szétválik két koherens komponensre. Mindkét komponens egy-egy elektronmultiplierre esik és egyes fotonok az elektronmultipliereket megszólaltatják. Minthogy az

elfogadott elmélet szerint minden egyes foton vagy átmegy a tükrön, vagy reflektálódik, az elmélet szerint nem várható, hogy a multiplierek egyidejű beütéseket mutatnak. A kísérlet célja megállapítani, hogy vajjon e kísérleti berendezésnél az elektronmultiplierek között fellépnek-e koincidenciák.

2. Az 1. kísérlet esetében ki lehet cserélni az elektronmultipliereket megfelelő tükrökkel; ebben az esetben a berendezés egy Michelson-féle interferométert képez. A 2. kísérlet célja megvizsgálni, hogy nagyon kis fényintenzitásnál, ahol a fotonok egymás után „csöpögnek“, kialakul-e a szokásos interferencia-kép.

E két kísérlet egyike sincs még az itt leírt formában végrehajtva. Egyes *Vavilov* által leírt kísérletek bizonyos mértékben alátámasztják azt, hogy e kísérletek igazolni fogják a jelen elmélet által várt eredményt. Feltételezve ezeket az eredményeket, a két kísérleti eredmény között — úgy látszik — ellentmondás áll fenn. Az 1. kísérlet azt bizonyítja, hogy minden egyes foton a két koherens sugár közül az egyiken halad, viszont a 2. kísérlet azt mutatja, hogy minden egyes foton mozgására mindkét tükör befolyással van és ezt csak azzal a feltevéssel lehet megmagyarázni, hogy a fotonok a tükrön szétszakadnak.

A két kísérlet közötti ellentmondást fel lehet oldani többek között egy olyan hipotézis segítségével, amelyet az Acta Physicában megjelent cikkben tárgyaltam. Az ott ismertetett hipotézis viszont egy kísérletileg bebizonyítható, vagy cáfolható következménnyel jár. (Erre a kísérletre *Marx György* kartársam hívta fel figyelmemet egy beszélgetés során.) Az effektus lényege az, hogy egy abszorbens gyenge fényforrás közelében árnyékot kell, hogy vessen a fényforrástól nézve minden irányban. Ilyen effektus vizsgálatát mint harmadik kísérletet proponáltam.

Mindhárom effektus kísérleti vizsgálata intézetemben folyamatban van.

Amennyiben mindhárom kísérlet a ma elfogadott elméletnek megfelelő eredményt mutatna, akkor az általam javasolt modell a fotonokra nem volna alkalmazható. Viszont ebben az esetben az ellentét az 1. és 2. kísérlet között más magyarázatot kívánna. Minthogy itt egyelőre három hipotetikus eredményről van szó, nem érdemes spekulációkat megindítani, amíg a kísérletek eredményei nincsenek megállapítva. De mindenesetre fontos a fotonok tulajdonságait az eddigieknél részletesebb vizsgálatoknak alávetni. A berlini kongresszuson erre vonatkozó javaslatok hangzottak el. Ezek közül véleményem szerint legfontosabbak a következők: meg kellene vizsgálni, hogy centiméteres elektromágneses hullámok, amelyeket egy nem csillapított rezgőkör hoz létre, mutatnak-e foton-tulajdonságokat, vagy sem. Ezenkívül a fotoelektromos effektusnak az eddiginél még részletesebb vizsgálata is érdekes lenne. Remélem, hogy ilyenfajta kísérletek kivitelezést fognak nyerni és hogy a nem túlságosan távoli jövőben ezeket a problémákat jobban megalapozva ismét fel lehet majd vetni.

HOZZÁSZÓLÁSOK

RÉNYI ALFRÉD lev. tag:

Az előadó megállapította, hogy a modern fizika alapvető kérdéseivel kapcsolatban a kísérleti fizika előtt számos feladat áll. Meggyőződésem, hogy az elméletnek is van még bőven teendője ezen a téren, beleértve a matematikát is. *Jánossy* akadémikus kifejtette véleményét, hogy a statisztikus felfogás mellett van létjogosultsága nem statisztikus felfogásmódnak is, amely egyes elemi részecskék viselkedésével foglalkozik. Ezzel kapcsolatban arra szeretném felhívni a figyelmet, hogy azért a statisztikus felfogás tekintetében is van még teendő. Ugyanakkor azonban hangsúlyozni szeretném, hogy nem világos előttem: miért mondta az előadó, hogy az általa felsorolt statisztikus irányzatokkal nem ért egyet. Ha ezen azt érti, hogy ezek mellett még más felfogásokkal való próbálkozást is szükségesnek tart, akkor egyetértek vele. Valóban helytelen az a felfogás, amely tabuval illeti a nem statisztikus felfogást, de épp oly helytelen a statisztikus felfogás lebecsülése is.

A statisztikus elméletek közül *Fényes Imre* próbálkozásairól, melyeket *Jánossy* akadémikus is említett előadásában, már az 1951. évi Nagygyűlésen elmondottam, hogy azokat figyelemreméltónak találom. Nagyon örülök, hogy külföldön is nagy érdeklődés fogadta munkáját. Ugyanakkor teljesen indokoltnak tartom, hogy a külföldi tudósok hibáira is rámutattak.

Azóta ugyanis alkalmam volt magamnak is közelebbről megismerkednem *Fényes Imre* felfogásával, amikor az Alkalmazott Matematikai Intézet valószínűségszámítási szemináriumába meghívtuk, hogy elméletét adja elő és előadását megvitattuk. A vitában kialakult az a vélemény, hogy *Fényes Imre* elméletének nemcsak fizikai, hanem alapvető matematikai hiányosságai is vannak és elmélete — jelenlegi formájában — már pusztán ezek következtében sem tekinthető helytállónak.

Röviden összefoglalom, hogy milyen hiányosságról van itt szó.

Fényes arra törekszik, hogy a kvantummechanika törvényeit a sztochasztikus folyamatok Kolmogorov-féle egyenletére vezesse vissza. Ugyanakkor figyelmen kívül hagyja, hogy itt nem Markov-típusú folyamatokról van szó, márpedig a Kolmogorov-féle egyenlet csak Markov-folyamatokra vonatkozik.

A Schrödinger-egyenletből következik, hogy ha a ψ függvényt ismerjük bizonyos t_0 időpontban, akkor ezáltal a ψ függvény egy későbbi t időpontban teljesen meg van határozva. De ez nem áll a $\varrho = |\psi|^2$ valószínűség-sűrűségfüggvényre; pusztán abból, hogy a ϱ függvényt egy t_0 időpontban ismerjük, annak értékét egy későbbi időpontban nem tudjuk meghatározni. Ebből következik, hogy az az egyenlet, amelyet *Fényes* a $|\psi|^2 = \varrho$ függvényre felállított, nem lehet azonos a Kolmogorov-féle egyenlettel. Közelebbi vizsgálatnál kitűnt, hogy ez valóban így is van, a ϱ függvényre nyert $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = a \frac{\partial \varrho}{\partial x} + b \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}$ Kolmogorov-féle parabolikus egyenlet csak látszólag ilyen, mert az a és b együtthatók még magától ϱ-tól is függnek. Ilyenmódon *Fényes* elmélete átdolgozásra szorul. A kvantummechanika statisztikus felfogásával kapcsolatban számos érdekes nyitott matematikai probléma van, amelyekkel nagyon is érdemes foglalkozni. Az Alkalmazott Matematikai Intézet egyik kutatója foglalkozik ezekkel a problémákkal. Remélem, hogy ezek a kutatások eredményre fognak vezetni és az eredményekről az Akadémiának mielőbb beszámolhatunk.

Összefoglalva: ha hangsúlyozzuk azt, hogy nem helyes megállni a statisztikus felfogásnál, ne feledkezzünk el arról sem, hogy a statisztikus elméletben is van még bőven teendő. Amikor a kvantummechanika létrejött, akkor a valószínűségszámítás modern elmélete még nem volt kialakulva és ennek következtében a kvantummechanikával foglalkozó első fizikai munkák viszonylag keveset foglalkoznak a kvantummechanika statisztikus interpretációjával. Ezt a hiányt máig sem pótolták, bár ma már erre meg van a lehetőség. Ennek a hiánynak a pótlását elsőrendű feladatnak tartom.

FÉNYES IMRE, Rényi Alfréd felszólalására válaszolva, a következőket mondotta:

Elgondolásaimban (l. pl. Z. Phys. 132, 81 (1952)) nem az a lényeg, hogy a folyamat Markov-féle-e vagy sem. Nem felel meg a tényeknek, hogy én pusztán valószínűségszámítási problémának tekintem a kvantummechanikát, valamint az sem, hogy említett dolgozatom lényeges részét az itt vitatott problémák képezik. Idézett dolgozatom fő részét a Heisenberg-reláció és a rejtett paraméterek problémája valószínűségszámítási jelentésének analízise képezi. Bár ezeket a kérdéseket sem tekinthetem lezártnak, de a kiindulási alap és az eddig elért eredmények olyanok, hogy a velük való foglalkozás nem látszik hiábavalónak. A $\Delta x \cdot \Delta p_x \geqq \frac{h}{4\pi}$ Heisenberg-relációban a szokásos értelmezés szerint Δx és Δp_x az x és p_x mérésének elvi pontatlanságát jelentik. Mivel azonban a szokásos levezetésekben Δx és Δp_x statisztikai szórásként van értelmezve, ezek az adatok nem tekinthetők egyetlen részecske mérésére vonatkozó mérési hibáknak. Elgondolásaim lényeges alapját ez képezi és ez a probléma lényegében valószínűségszámítási és nem fizikai probléma.

Hozzászóltak még *Gyulai Zoltán* lev. tag és *Valkó Iván Péter*. *Jánossy Lajos* akadémikus röviden válaszolt a hozzászólásokra.

ELMÉLETI FIZIKAI KUTATÁSOKBAN ALKALMAZOTT MATEMATIKAI MÓDSZEREK KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A KVANTUMMECHANIKAI KÖZELÍTŐ MÓDSZEREKRE

GOMBÁS PÁL r. tag

Előadta az 1953 május 28-án tartott nyilvános osztályülésen

Az elméleti fizikai kutatásokban alkalmazott matematikai módszerek igen sokoldalúak, mindezek ismertetése egy előadásban nem volna lehetséges. Ezért az elméleti fizikának csak egy területére, a kvantummechanikára kívánok szorítkozni. A kvantummechanikának centrális problémái a sajátértékproblémák, amelyek a fizika más területén már régen, a kvantummechanika előtt is felmerültek és amelyek a matematikában régóta ismertek.

Éppen úgy, ahogy a klasszikus mechanikában egy rendszer jövendő állapotait a mozgásegyenletek írják le, a hullámmechanikában egy rendszer történéséről egy differenciálegyenlet, az ú. n. Schrödinger egyenlet ad felvilágosítást, mely a következő

$$H\Psi = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{1}$$

ahol Ψ a hullámfüggvény, h a Planck-féle állandó, i az imaginárius egység, t az idő, H a Hamilton operátor. H egy részecske esetében a következő alakú

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta + U, \tag{2}$$

ahol Δ a Laplace operátor, m a részecske tömege és U a részecske potenciális energiája.

Ha Ψ-t a következő alakban tételezzük fel

$$\Psi = \psi e^{\frac{2\pi i}{h}Et}, \tag{3}$$

ahol a ψ egy csak a helytől függő függvény, E pedig az energiaparaméter, akkor e kifejezést behelyettesítve a fenti differenciálegyenletbe, a következő sajátértékproblémához jutunk

$$H\psi = E\psi, \tag{4}$$

amely az időtől független, a fenti (1) egyenlet pedig az időtől függő Schrödinger egyenlet.

A probléma abban áll, hogy a (4) egyenletből ψ-t, mint a hely egyértékű és szingularitásoktól mentes függvényét határozzuk meg, mely kielégíti a következő mellékfeltételt

$$\int \psi^* \psi \, dv = 1, \tag{5}$$

ahol az integráció az egész térre terjesztendő ki. Ebből a mellékfeltételből következik, hogy ψ-nek a végtelenben el kell tűnnie. Mint ismeretes, ennek a problémának csak bizonyos E paraméterértékek

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \tag{6a}$$

mellett van megoldása. Ezek az E-paraméter értékek az egyenlet sajátértékei, az ezekhez tartozó függvények

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{6b}$$

pedig az egyenlet sajátfüggvényei. Megemlítem, hogy az E_i paraméterek betölthetnek egy tartományt folytonosan is, de mi az alábbiakban az egyszerűség kedvéért csak a diszkrét sajátértékek esetére fogunk szorítkozni. Röviden utalok arra, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények egymásra ortogonálisak, vagyis eleget tesznek a következő összefüggésnek

$$\int \psi_i^* \psi_k \, dv = 0. \tag{7}$$

Ez a hullámmechanikai energia-sajátértékprobléma egy részecske esetében. Több részecske esetében a rendszer Hamilton-operátora komplikáltabb, általában az egyes részecskék Hamilton-operátorainak összegéből és a részecskék kölcsönhatását reprezentáló tagokból tevődik össze. A következőkben ezzel az energia sajátértékproblémával kívánunk foglalkozni, mely a hullámmechanikának egyik centrális problémája, bár tudatában vagyunk annak, hogy ezzel távolról sem merítettük ki a hullámmechanika összes sajátértékproblémáit, de ez a körülhatárolás egyrészt az anyag bőségére, másrészt az energia-sajátértékprobléma fontosságára való tekintettel, mindenképpen célszerűnek mutatkozik.

Ez az energia-sajátértékprobléma exakte sajnos csak néhány igen egyszerű esetben oldható meg, ezek a szabad tömegpont esete, a hidrogénatom esete, ahol egyetlen egy elektron mozog a mag Coulomb-terében, a síkbeli, ill. a térbeli rotátor esete, a harmonikus oszcillátor esete és még néhány idealizált eset, melyek a természetben mindig csak bizonyos mértékben vannak megvalósítva. Amint látjuk, az atomok közül a sajátértékprobléma exakt megoldást csak a hidrogén atom, tehát csak a legegyszerűbb atom esetében nyert. Az összes többi atomra, tehát már a hélium atomra is, mely a hidrogén után következő legegyszerűbb atom, a Schrödinger egyenlet exakte zárt alakban nem oldható meg. A megoldást itt közelítő eljárásokkal, mégpedig a legtöbb esetben igen jól átgondolt és igen sok intuiciót követelő eljárásokkal kellett előállítani. A közelítő eljárások fontosságát mutatja pl. az a tény, hogy ezek nélkül az atomokra vonatkozóan csak a legegyszerűbb atom, a hidrogén atom esetében ismernénk a megoldást, tehát egyáltalán nem lehetnénk biztosak afelől, hogy a hullámmechanika a többi atom, pl. a hélium atom esetében vajjon a helyes energia-sajátértékeket szolgáltatja-e. E problémakör ugyan nem sorolható be a hullámmechanikának ugynevezett elvi jelentőségű problémakörébe, de e problémakör megoldása nélkül a hullámmechanika csonka maradna.

Olyan esetekben, amidőn a probléma azoktól a problémáktól, melyeknél a megoldást exakte ismerjük, csak kissé különbözik, a megoldást a perturbáció elmélet segítségével tudjuk előállítani. Ebben az esetben a Hamilton-operátor a következő alakú

$$H = H_0 + u,$$

ahol u a H_0-hoz, a nem perturbált probléma Hamilton-operátorához képest egy kis perturbáló tag. Ebben az esetben a sajátfüggvényeket és sajátértékeket a nem perturbált probléma ismert sajátfüggvényeivel és sajátértékeivel tudjuk előállítani egy sorfejtés segítségével. Ez az eljárás eléggé közismert módszer, melyet éppen ezért itt részletesen nem akarok ismertetni és csak az eredményeket írom fel, melyek szerint a k-ik állapotban az elsőrendű és másodrendű perturbációs energia ε_k, ill. η_k és a sajátfüggvény elsőrendű perturbációja χ_k a nem degenerált esetben a következő kifejezésekkel állítható elő

$$\varepsilon_k = \int \psi_k^* u \psi_k \, dv, \quad \eta_k = \sum_i{}' \frac{\left|\int \psi_i^* u \psi_k \, dv\right|^2}{E_k - E_i}, \tag{9}$$

$$\chi_k = \sum_i{}' \frac{\psi_i \int \psi_i^* u \psi_k \, dv}{E_k - E_i}, \tag{10}$$

ahol a $\sum'$ jelek mellett a vessző azt jelenti, hogy a szummázás $i = k$-ra nem terjesztendő ki. Amint látható, az elsőrendű perturbációs energia egyszerűen számítható ki, de a másodrendű perturbációs energia és a sajátfüggvény elsőrendű perturbációja eléggé komplikált alakú, és a praxisban csak ritkán talál alkalmazásra. Egyrészt ugyanis ennek az eljárásnak a konvergenciája nem kielégítő, másrészt pedig a formulák alkalmazásához szükséges, hogy a nem perturbált probléma sajátfüggvényei és sajátértékei ismertek legyenek, ami csak a fentebb említett kevésszámú esetben áll fenn, miáltal a perturbációszámítás alkalmazása igen szűk területre korlátozódik.

A következőkben a közelítő módszerekkel kívánok foglalkozni. Hogy ezek lényegét lássuk, szükséges néhány szót szólnunk a hullámmechanikai többtestproblémáról általában. Abban az esetben, ha a rendszer részecskéit egymástól függetlennek lehet tekinteni, vagyis ha a részecskék között kölcsönhatás nem áll fenn, akkor könnyen ki lehet mutatni, hogy az összetett rendszer sajátfüggvénye az egyes részecskék sajátfüggvényének a szorzata, az összetett rendszer energiasajátértéke pedig az egyes részecskék sajátértékeinek összege. Ha az összetett rendszer egyenlő részecskékből áll, akkor a probléma általában degenerált, ami azt jelenti, hogy egy bizonyos sajátértékhez általában több, egymástól különböző sajátfüggvény tartozik, melyeket jelen esetben úgy kapunk, hogy az egymással egyenlő részecskéket egymással felcseréljük, vagyis a különböző sajátfüggvények argumentumában a részecske-koordinátákat ill. a spin-koordinátákat felcseréljük. Az így nyert új sajátfüggvények mind ugyanazon energiasajátértékhez tartoznak. Ezen sajátfüggvényekből előállított lineárkombinációk tehát újra sajátfüggvények. A tapasztalat azt mutatja, hogy feles spinű részecskékből, tehát pl. elektronokból álló rendszerek csak olyan állapotokban létezhetnek, amelyek sajátfüggvényei két részecske helykoordinátái ill. spinjei felcserélésével szemben antiszimmetrikusak. Egy ilyen sajátfüggvényt a következő alakban lehet előállítani

$$\psi = A \begin{vmatrix} \psi_1(q_1) & \psi_1(q_2) \cdots & \psi_1(q_N) \\ \psi_2(q_1) & \psi_2(q_2) \cdots & \psi_2(q_N) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_N(q_1) & \psi_N(q_2) \cdots & \psi_N(q_N) \end{vmatrix}, \tag{11}$$

ahol $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ az egyes részecskék sajátfüggvényei, a $q_1, q_2, \ldots, q_N$ argumentumok pedig a részecskék helykoordinátáit és spinkoordinátáit reprezentálják. A sajátfüggvénynek ez az alakja megfelel a Pauli-elvnek és abban az esetben, ha a részecskék közötti kölcsönhatástól eltekintünk, exakte érvényes. Közelítésképpen használhatunk a sajátfüggvény számára egy egyszerű szorzatalakot is, amely a fenti szimmetriatulajdonságokkal nem rendelkezik, de ebben az esetben gondoskodnunk kell arról, hogy az egyes kvantumállapotokat csak egy részecskével töltsük be és azonkívül, hogy a különböző állapotoknak megfelelő sajátfüggvények egymásra ortogonálisak legyenek.

Ezek után rátérhetünk a sajátértékproblémák megoldására szolgáló közelítő módszerekre. Egy igen hatásos közelítő módszer a fentebbi sajátértékprobléma megoldására az úgynevezett variációs módszer. Ehhez a következőképpen juthatunk el. A fenti időtől független Schrödinger egyenlet levezethető a következő variációs problémából. Meghatározandó az a ψ hullámfüggvény, amely a következő integrált minimummá teszi

$$J = \int L\, dv, \tag{12}$$

ahol L egy N részecskéből álló rendszer esetében, melynek potenciális energiája U, a következő

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{h^2}{8\pi^2 m_i}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi^*}{\partial y_i}\frac{\partial\psi}{\partial y_i} + \frac{\partial\psi^*}{\partial z_i}\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\right) + U\psi^*\psi, \tag{13}$$

m_i az i-ik részecske tömege.

Itt figyelembe kell venni azt, hogy a ψ hullámfüggvénynek teljesítenie kell a következő mellékfeltételt

$$\int \psi^*\psi\, dv = 1. \tag{14}$$

A variációs elv tehát egy E Lagrange-féle multiplikátor bevezetésével a következőképpen alakul

$$\delta \int (L - E\psi^*\psi)\, dv = 0. \tag{15}$$

Ha ψ szerint variálunk, akkor ebből a variációs elvből következik a Schrödinger egyenlet

$$H\psi = E\psi. \tag{16}$$

A variációs problémának a következő alakot is adhatjuk. Meghatározandó az a ψ függvény, amely az energiaintegrált

$$E = \frac{\int \psi^* H \psi \, dv}{\int \psi^* \psi \, dv} \tag{17}$$

minimummá teszi.

A Schrödinger egyenlet megoldásához tehát oly módon is eljuthatunk, hogy a variációs problémát direkte oldjuk meg, pl. a Ritz-féle módszerrel. Ez a módszer abban áll*, hogy a ψ függvényt sorbafejtjük a $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ függvények teljes rendszerében, amely függvényekről csak azt tesszük fel, hogy kielégítik a határfeltételeket. A ψ függvényt tehát a következő sorral állítjuk elő

$$\psi = \sum_i c_i \psi_i, \tag{18}$$

ahol a c_i koefficienseket a minimum-elvből határozzuk meg. A módszer konvergenciájára nézve döntő befolyással bír, hogy hogyan választhatjuk meg a $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ függvényrendszert. A hullámmechanikában ezt a módszert úgy alkalmazzuk, hogy egy gyakran nem teljes függvényrendszerből indulunk ki, amelyről fizikai okoknál fogva előre tudjuk, hogy a belőle alkotott lineárkombináció a sajátfüggvény számára egy jó közelítést jelenthet és egy ilyen függvényekből alkotott lineárkombináció segítségével végezzük el a számítást. Hogy így járunk el, vagyis, hogy a Ritz-féle módszert nem alkalmazzuk az eredeti szigorú formájában, az egy a fizikai problémák bonyolultsága következtében előálló szükségesség. Ha mi a Ritz módszer eredeti formájával, egy határátmenettel tényleg elő akarnók állítani a valódi megoldást, akkor ez komplikált fizikai problémáknál végeláthatatlan számításokhoz vezetne. A lényeges a fizikus számára főképpen az, hogy a $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ függvényeket hogyan választja meg és éppen ez az a pont, amelyre nézve általános irányvonalakat ugyan lehet leszögezni, de egészen precíz választ nem lehet adni. Ez az a pont, ahol a fizikus intuiciójára és rátermettségére van szükség, hogy a problémát megoldja, ellenkező esetben ugyanis a rossz konvergencia és ennek következményeképpen fellépő bonyodalmak miatt a számítások praktice keresztülvihetetlenek.

A variációszámításnak egyik legszebb példája a hélium-atom. A problémával többen foglalkoztak a variációszámítás alapján, anélkül azonban, hogy teljesen kielégítő eredményekre jutottak volna, míg *Hylleraas* megmutatta, hogy a probléma igen egyszerű és spektroszkópiai pontosságú, tehát hat jegynyi pontosságú megoldásához hogyan lehet eljutni a variációszámítás

* A módszer részletesebb és precízebb megfogalmazása megtalálható pl. P. Gombás Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik. Birkhäuser Basel, 1950.

segítségével. E végből az volt szükséges, hogy a kiinduló függvényrendszert az előbbi értelemben alkalmas módon vegye fel, másrészt pedig a probléma természetének megfelelő koordinátákat válasszon, melyek a következők

$$s = r_1 + r_2 \quad t = r_2 - r_1 \quad u = r_{12}, \tag{19}$$

ahol r_1 és r_2 a két elektronnak a magtól való távolsága, r_{12} pedig a két elektronnak egymástól való távolsága. A sajátfüggvényt *Hylleraas* a következő alakban vette fel

$$\psi = e^{-ks} F(ks, kt, ku), \tag{20}$$

ahol $F(s, t, u)$ az s, t, u koordinátáknak egy polinomja. *Hylleraas* ezt a kilencedik közelítésben a következő alakban vette fel

$$F(s, t, u) = 1 + c_1 u + c_2 t^2 + c_3 s + c_4 s^2 + c_5 u^2 + c_6 su + c_7 t^2 u + c_8 u^3, \tag{21}$$

ahol a c_i-k és k variációs paraméterek, melyeket az energia minimum-elvéből kell meghatározni. *Hylleraas*nak ezzel a módszerrel a He alaptermjét spektroszkópiai pontossággal sikerült meghatároznia és ezzel megmutatta, hogy a hullámmechanika kételektronprobléma esetében is a tapasztalattal egyező eredményre vezet. Ez a Hylleraas-féle módszer ma már klasszikusnak nevezhető. A módszer természetesen más atomokra is alkalmazható. Így pl. *Fock* és *Petrashen* a Na atomot tárgyalták a variációs módszer alapján. Mindezekben az esetekben az energiaértékek a mért energiaértékekkel igen jó egyezést mutattak, de nem érték el a Hylleraas-féle hélium-atom-számítás pontosságát, ami érthető is, mert pl. egy 10 elektron-probléma esetében az elektronok kölcsönhatásának oly pontossággal való figyelembevétele mint *Hylleraas* esetében egészen lényegesen bonyolultabb, mint a két elektront tartalmazó hélium esetében. A variációszámítást sajnos e formájában 10-nél lényegesen több elektront tartalmazó atomokra alkalmazni nem lehetett, mégpedig azért, mert ezekben az esetekben rendkívül nagy bonyodalmat jelentett az a körülmény, hogy a különböző elektronállapotokhoz tartozó sajátfüggvényeknek, amint azt már említettem, egymásra ortogonálisaknak kell lenniök. Ezt a nehézséget át lehetett hidalni, mégpedig oly módon, hogy az atom statisztikus elméletének továbbfejlesztésével lehetségessé vált ezeknek az ortogonalitási feltételeknek a kiküszöbölése. Ily módon lehetőség kinálkozott a variációszámításnak magas rendszámú atomokra való alkalmazására is.

A variációs módszer nem csak atomokra nyert alkalmazást, hanem molekulákra is. Így pl. a legegyszerűbb molekula a H_2 molekula esetében az az alaptermet spektroszkópiai pontossággal határozta meg *James* és *Coolidge*. A molekulák esetében, minthogy a probléma itt nem egy egycentrum, hanem két- vagy többcentrum probléma, a számítások keresztülvitele természetszerűen egészen lényegesen bonyolultabb, úgyhogy a komplikáltabb molekulák esetében a pontosság egészen lényegesen kisebb, mint azt az atomoknál láttuk.

A variációszámítás keretében véleményem szerint igen lényeges perturbációs eljárást dolgozott ki *Hellmann*. Módszerének lényege abban áll, hogy a perturbált sajátfüggvényt a következő alakban veszi fel

$$\psi = \psi_0(1 + \lambda u), \tag{22}$$

ahol ψ_0 a nem perturbált sajátfüggvény, u a perturbációs potenciál, a λ pedig egy variációs paraméter, melyet az energia minimum-elvéből határozott meg. Ennek a módszernek hátránya, hogy bonyodalmak merülnek fel akkor, ha u szingularitásokkal rendelkezik. Ebben az esetben ugyanis a perturbált sajátfüggvény szingulárissá válik. Sajnos, ilyen szinguláris perturbációs potenciálok az atomfizikában gyakran fellépnek. Pl. mindannyiszor, amidőn a perturbációt egy ion Coulomb-szerű potenciálja idézi elő, amely Coulomb-szerű potenciál a centrum helyén szinguláris. Hogy ezekben az esetekben hogyan lehet ezt az eljárást alkalmazni, arra vonatkozóan utalok *Hellmann* könyvére.*

A következőkben rá szeretnék térni a *Hartree* és a *Hartree-Fock* módszerre. E két módszer a „self-consistent field" módszer elnevezés alatt is ismeretes. Ez a módszer a variációs és a statisztikus módszer mellett a hullámmechanikának egyik leghatásosabb módszere. A módszert *Hartree* dolgozta ki atomok esetére és később *Fock* lényegesen továbbfejlesztette. A módszer több elektronnal biró atomok energia-sajátértékeinek és sajátfüggvényeinek meghatározására szolgál. *Hartree* a következőképpen járt el. A több elektront tartalmazó atom egyes elektronjait, bizonyos $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ sajátfüggvényekkel írt le és durva közelítés gyanánt feltételezte, hogy az atom egyes sajátfüggvényei ezen egy-elektron-sajátfüggvényeknek egyszerű szorzata, és ennek megfelelően mindegyik elektronállapotot csak a Pauli-elv által megengedett számú elektronnal töltötte be és gondoskodott arról, hogy a sajátfüggvények egymásra ortogonálisak legyenek. Mindegyik elektron a mag potenciálterében és az összes többi elektron potenciálterében mozog. A p-, d-, f-,... elektronok esetében a sajátfüggvénynek vannak iránytól függő részei, minek következményeképpen ezen elektronok potenciálja szintén mutat iránytól való függést. *Hartree* úgy járt el, hogy az ilyen iránytól függő potenciálok helyett egy gömbszimmetrikus átlagértéket vett, amit megfelelő középértékképzéssel állított elő. Mindegyik elektronra ily módon egy gömbszimmetrikus potenciál hat és a feladat az elektronok sajátfüggvényeinek és sajátértékeinek meghatározása ezen gömbszimmetrikus potenciáltérben. A probléma megoldását az úgynevezett Hartree egyenletek megoldása révén nyerhetjük, amelyek nem mások, mint az egyes elektronok Schrödinger egyenletei, vagyis a következők

$$H\psi_i - \left(E_i + e\sum_{k=1}^{N}{}' V_k\right)\psi_i = 0,$$

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta - \frac{Ze^2}{r},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N),$$

* *H. Hellmann*, Einführung in die Quantenchemie, Vlg. Deuticke, Leipzig und Wien, 1937.

ahol E_i az energiaparaméter, e a pozitív elemi töltés, r a magtól való távolság és a V_k potenciálok a következő kifejezésekkel állíthatók elő

$$V_k = -e \int \frac{|\psi_k(\mathfrak{r}')|^2}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\, d\tau'.$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N).$$

A potenciálok tehát az integranduszban még tartalmazzák a keresett sajátfüggvényeket.

A feladat ezen differenciálegyenletrendszernek a megoldása. Ezt *Hartree* a következőképpen végezte el. Az egyes elektronok sajátfüggvényeit $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$-et egy bizonyos közelítő alakban vette fel, pl. úgy, hogy ezeket hidrogén-sajátfüggvényekkel approximálta, megfelelően redukált magtöltéssel. Ezen kezdeti sajátfüggvényekből meg tudta határozni pl. a k-ik elektronra ható potenciált. E közelítő potenciált behelyettesítve a k-ik elektron Schrödinger egyenletébe, azt megoldotta ψ_k-ra és így a k-ik elektronra egy új sajátfüggvényhez jutott. Ezt mindegyik elektron esetében véghezvitte, miáltal a sajátfüggvényeknek egy új rendszerét kapta. Ezek a sajátfüggvények általában nem egyeztek a kiinduló sajátfüggvényekkel. Ezen eredménysajátfüggvényeket kiinduló sajátfüggvényeknek tekintve, az egész eljárást meg lehetett ismételni, miáltal újabb eredménysajátfüggvényeket lehetett előállítani, ezek általában már jobban egyeztek a második lépés kiinduló sajátfüggvényeivel, mint az előző lépés esetében. Az eljárást mindaddig kell folytatni, amíg az eredménysajátfüggvények az illető lépés kiinduló sajátfüggvényeivel nem egyeznek meg, vagyis míg a sajátfüggvények nem reprodukálják önmagukat. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az elektronok elektromos tere önmagát tartja fenn, az elektroneloszlás a potenciálból következik és viszont, tehát nincs a megoldásban ellentmondás, idegen szóval a tér self-consistent field. Ez a reprodukció általában 6—7, vagy ennél több lépés után következik be. Így pl. higany esetében a Hartree egyenletrendszert alkotó egyenleteknek száma 14 és a sajátfüggvények 9 lépésben reprodukálódtak elegendő pontossággal. Ez tehát azt jelenti, hogy kilencszer kell megoldani egy 14 differenciálegyenletből álló differenciálegyenletrendszert. A számításokat belátható időn belül csak gépek segítségével lehetett lebonyolítani, úgy, hogy sajnos, ez a módszer gépi berendezésekhez van kötve.

Ki lehet mutatni, hogy a Hartree egyenleteket le lehet vezetni egy variációs elvből, mely a következő alakú

$$\delta E = 0$$

$$E = \frac{\int \psi^* H_A \psi\, d\tau}{\int \psi^* \psi\, d\tau},$$

ahol H_A az összes elektronokra vonatkozó Hamilton-operátor. Ez a Hamilton-operátor a következőképpen állítható elő

$$H_A = \sum_{i=1}^{N} H_i + \frac{1}{2} \sum_{j,k}' \frac{e^2}{r_{jk}},$$

ahol H_i az egyes elektronokra vonatkozó és fentebb már említett Hamilton-operátor,

$$H_i = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta_i - \frac{Ze^2}{r_i},$$

a második tag pedig az elektronok kölcsönhatását jelenti, lévén r_{jk} a j-ik és k-ik elektronok egymástól való távolsága. Ha a hullámfüggvényt ψ-t az egyes elektronállapotok hullámfüggvényeinek egyszerű szorzata gyanánt állítjuk elő, vagyis ψ-t a következő alakban tételezzük fel

$$\psi = \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_N,$$

ahol fennállnak a következő mellékfeltételek

$$\int \psi_j^* \psi_k = \delta_{jk}$$

és ezen mellékfeltételek figyelembevételével a ψ_i-k szerint variálunk, akkor ezen variációs elvből, amint azt *Fock* megmutatta, következnek a Hartree egyenletek. Ennek alapján *Fock*nak sikerült a Hartree módszert továbbfejleszteni. Ha a ψ sajátfüggvény számára nem tételezünk fel egy egyszerű szorzatot, hanem pontosabban a sajátfüggvényt a $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ sajátfüggvényekből, a fentebb említett antiszimmetrikus determináns [(11) kifejezés] alakban állítjuk elő, akkor az eljárás nyilván konzekvensebb és pontosabb lesz. *Fock* kimutatta, hogy ily módon egy újabb egyenletrendszerhez, az úgynevezett Fock vagy Hartree-Fock-féle egyenletrendszerhez jut el az ember, mely a *Hartree*-énál lényegesen komplikáltabb és a következő alakú

$$\left(H + e^2 \sum_{k=1}^{N} \int \frac{|\psi_k(\mathrm{r}')|^2}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|} dv'\right) \psi_i(\mathrm{r}) - \sum_{l=1}^{p} \left(e^2 \int \frac{\psi_l^*(\mathrm{r}')\psi_i(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|} dv' + E_{il}\right) \psi_l(\mathrm{r}) = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\left(H + e^2 \sum_{k=1}^{N} \int \frac{|\psi_k(\mathrm{r}')|^2}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|} dv'\right) \psi_i(\mathrm{r}) - \sum_{l=p+1}^{N} \left(e^2 \int \frac{\psi_l^*(\mathrm{r}')\psi_i(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|} dv' + E_{il}\right) \psi_l(\mathrm{r}) = 0,$$

$$(i = p+1, p+2, \ldots, N),$$

ahol $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ azon állapotok sajátfüggvényei, melyek spinje egyirányú és $\psi_{p+1}, \psi_{p+2}, \ldots, \psi_N$ azon állapotok sajátfüggvényei, melyek spinje a $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ állapotok spinjével ellentétes irányú, E_{il} az energiaparaméter. Ezen egyenletek megoldása természetszerűen még lényegesen komplikáltabb mint a Hartree egyenleteké és éppen ezért a megoldást aránylag kevés számú esetben vitték véghez és e kevés számú esetből csak közép-nehéz atomokig, mégpedig *Cu*-ig léteznek Hartree-Fock-féle megoldások. A Hartree-Fock-féle energiaparaméterek és sajátfüggvények a tapasztalattal jobban egyeznek mint a Hartree félék. A módszernek *Fock* által való továbbfejlesztése az elektronsűrűség szempontjából, különösen az atom külső részeinél fontos, tehát az atomnak oly tulajdonságait befolyásolja, melyeknél az elektronsűrűség az atom külső részeiben mérvadó.

Az atom potenciáleloszlását és elektronsűrűségét igen jó közelítésben lehetett meghatározni az úgynevezett statisztikus módszerrel, amelynél a magot körülvevő elektronokat egy elektrongáz gyanánt kezeljük. Itt a potenciál-, ill. sűrűségeloszlás egyetlen differenciálegyenlet megoldásából adódik. Mivel ennek a megoldása teljesen kielégítő pontossággal rendelkezésre áll, a probléma matematikai szempontból megoldottnak tekinthető. Ezért itt a statisztikus módszerrel részletesebben foglalkozni nem kívánok és csak a teljesség kedvéért említettem meg.

A statisztikus módszer felhasználásával *Gáspár Rezső* a self-consistent field módszerében egy fontos eredményt ért el. A statisztikus módszerből ugyanis következik az, hogy az atom összes effektív magtöltése osztva Z-vel, röviden a redukált effektív magtöltés, minden atom esetében ugyanúgy függ az

$$x = r/\mu, \quad \mu = 0{,}4685.10^{-8}\,\mathrm{cm}/Z^{1/3}$$

változótól, vagyis a redukált effektív magtöltés x-nek univerzális függvénye. Ennek alapján *Gáspár* megvizsgálta, hogy vajjon az atomoknak self-consistent field potenciáljai esetében nem adható-e meg egy hasonló univerzális függvény. Végigvizsgálva a különböző atomok self-consistent field potenciáljait a 4-es rendszámú Be-től a 80-as rendszámú Hg-ig, arra a meglepő eredményre jutott, hogy a redukált effektív magtöltés a self-consistent field módszerben x-nek tényleg univerzális függvénye, amely a következő alakú

$$\frac{Z_p}{Z} = \frac{e^{-\lambda x}}{1+Ax},$$

ahol λ és A x-től független univerzális állandók. Ezen függvénytől való eltérések Be-től egészen Hg-ig igen kicsinyek. *Gáspár*nak ez a felismerése egy lényeges egyszerűsítést jelent a self-consistent field módszernek alkalmazása terén, mert ezek után bármely atomra ezen *Gáspár* által talált univerzális függvény segítségével rögtön megadható az atom összpotenciálja, mely már csaknem self-consistent teret létesít és így a további számításokat nagy mértékben lerövidíti. Az univerzális potenciál az atom belsejében annyira jól írja le a tényleges potenciált, hogy a belőle számított 1s-, 2p-, 3d- Röntgentermek a tapasztalattal szinte teljesen megegyeznek.

Sajátértékproblémák megoldására még egy módszert, a Wentzel-Kramers-Brillouin módszert kell megemlítenünk, mely egy atomhoz kötött elektron esetében a következőképpen alakul. A sajátfüggvény radiális részének Schrödinger egyenlete a következő alakban írható

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2 f}{dr^2} + \left[E - U - \frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right] f = 0,$$

ahol m a részecske tömege, l pedig a mellékkvantumszám, mely 0-tól kezdve vehet fel egészszámú értékeket, f a sajátfüggvény radiális részének r-szerese,

E pedig az energiaparaméter. U a részecske potenciális energiája. Ha a hullámmechanika és a klasszikus elmélet közti kompromisszumnak megfelelően $l(l+1)$-et $\left(l+\frac{1}{2}\right)^2$-el helyettesítjük és a következő jelölést vezetjük be

$$p=\left[2m(E-U)-\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]^{1/2},$$

ahol p az elektron radiális impulzusának felel meg, akkor a fenti egyenlet a következő alakban is írható

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{4\pi^2}{h^2}p^2f=0.$$

Tételezzük fel a sajátfüggvényt a következő alakban

$$f=Ae^{\frac{2\pi i}{h}\int y\,dr},$$

ahol A egy normálási tényező. Ekkor y számára a következő Riccati-féle differenciálegyenletet nyerjük

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{dy}{dr}=p^2-y^2,$$

melyet *Wentzel, Kramers* és *Brillouin* a következő sorfejtéssel oldanak meg

$$y=y_0+\frac{h}{2\pi i}y_1+\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2y_2+\cdots,$$

ami azzal az előnnyel jár, hogy a sor általában egyrészt gyorsan konvergál, másrészt pedig az $y_0, y_1, y_2, \ldots$ függvények számára egyszerűen kezelhető rekurziós formulákat lehet levezetni, melyek segítségével ezek a függvények egyszerűen állíthatók elő. A megoldásánál bizonyos fokú komplikációkat okoz az, hogy a megoldást azon tartományokban, melyekben p reális, másképp kell előállítani, mint azon tartományban, ahol p imaginér. Az előző tartomány a kvantumpályának úgynevezett klasszikus része, az utóbbi a klasszikusan nem értelmezhető pályatartomány, mert ott az impulzus imaginér. A két pályatartomány határain a sajátfüggvényeknek és deriváltjaiknak folytonosan kell átmenniök. Ki lehet mutatni azt, amire én itt részletesebben nem kívánok rátérni, hogy a sajátértékeket ennél a módszernél a Bohr-Sommerfeld féle kvantumfeltételeknek megfelelő következő összefüggéssel lehet meghatározni

$$\oint p\,dr=\left(n_r+\frac{1}{2}\right)h,$$

ahol n_r a radiális kvantumszám. Az integrációt az elektronnak a klasszikus pályán való teljes körülfutására kell kiterjeszteni. A Bohr-Sommerfeld-féle kvantumfeltételekkel ellentétben ennek az összefüggésnek jobb oldalán n_r helyett $n_r+\frac{1}{2}$ áll, ami sajátos módon mindannyiszor előáll, ha hullámmechanikai és klasszikus elképzeléseket próbálunk egy módszerbe összeolvasztani.

Ezzel az energiasajátértékek meghatározására szolgáló módszereket alapvonásaikban letárgyaltuk. Természetszerűen egyes speciális esetekben még nagyon sok a problémák természetéhez szabott variáns nyerhet alkalmazást, ezek száma igen nagy.

Amint ebből az áttekintésből látható, jóllehet még külön nem emeltük ki, e módszereknél, eltekintve egyes speciális esetektől, mint pl. a hélium atom esetétől, nem tudjuk megbecsülni matematikailag azt a hibát, amelyet a közelítés felhasználásánál elkövetünk. Első pillanatra úgy tűnhetne, hogy e módszerek alkalmazhatóságát kizárólag az dönti el, hogy e módszerekkel számított fizikai adatok, fizikai állandók a tapasztalattal milyen mértékben egyeznek. Ez persze valójában nincs így. Ezen eljárásokat elsősorban nem az indokolja, hogy a tapasztalattal egyező eredményekre vezetnek, hanem indokolja elsősorban a fizikai tartalom és ennek alapján az a körülmény, hogy — bár a hibát matematikailag exakte nem is tudjuk megbecsülni — a fizikai alapokból kiindulva, a hiba nagyságrendjét illetően semmi kétségünk nincs. Természetszerűen rendkívül fontos volna, hogy ezen felül rendelkezésünkre álljanak exakt matematikai hibabecslések, de a problémák bonyolultsága miatt nem valószínű, hogy ezeket belátható időn belül meg lehet adni. Mindenesetre nagyon örülnénk, ha ebben a hazai matematikusok szívesek volnának segítségünkre lenni és ha ezen a téren termékeny kooperáció alakulna ki.

Budapesti Műszaki Egyetem Fizikai Intézete.

HOZZÁSZÓLÁSOK

GÁSPÁR REZSŐ:

A kvantummechanikai közelítő módszerekkel kapcsolatos nehézségek két csoportba sorolhatók. Az egyik csoportban említsük meg azokat a nehézségeket, melyek az egyelektron Schrödinger-egyenlet megoldásával kapcsolatosak és amelyek a kölcsönhatást képviselő potenciálfüggvény — általánosságban véve — bonyolult alakjára vezethetők vissza. Ilyen természetű problémákkal különösen akkor találjuk szembe magunkat, amikor már az atomfizikai többtest problémát egyelektron problémára sikerült redukálni. Ezek a nehézségek azok tulajdonképpen, amelyek megakadályozzák azt, hogy analitikus eljárásokat dolgozzunk ki a problémák megoldására, de ha fáradtságot nem kímélünk, az ilyen természetű problémák legnagyobb része numerikus úton megoldható. A kvantummechanikai közelítő módszerekkel kapcsolatos második legfőbb nehézség akkor lép fel, amikor többelektronos rendszereket akarunk tárgyalni és amikor a többelektronos rendszerek tárgyalásában nem óhajtunk azokkal az egyszerűsítő feltevésekkel élni, amelyek végeredményben az előző pontban említett egyelektron Schrödinger-egyenletre vezetnek, tehát pl. több elektron mozgásának vizsgálatánál nem akarjuk az egyes elektronok mozgását a többi elektron átlagterében vizsgálni, hanem az átlagtér helyett a konkrét valóságos térnek jobb közelítésével akarjuk a probléma vizsgálatát elvégezni. Ez utóbbi természetű vizsgálatok elvégzésére különösen mód nyílik a variációs módszer alkalmazásával kapcsolatban, amikor a teljes energia minimizálása segítségével határozzuk meg a részelektronok sajátfüggvényeit meghatározó paramétereket és ezzel kapcsolatban a teljes atom sajátfüggvényét is. Lényeges segítséget jelent tehát, ha a fenti nehézségeket alkalmas közelítő lépések bevezetése segítségével csökkenteni lehet.

A fent két csoportba felsorolt problémákat most szeretnénk részletesen megbeszélni s rámutatni arra, hogy melyek azok a lehetőségek, melyeknek segítségével a hullámmechanikai közelítő módszerekkel kapcsolatos nehézségeket csökkenteni lehet. Legyen a hullámmechanikai probléma egyrészecske Schrödinger-egyenlete

$$\triangle\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - V]\psi = 0, \qquad (1)$$

ahol ψ a részecske sajátfüggvénye, V az az átlag potenciális energia, melynek terében a részecske mozog és E az energiaparaméter, $\triangle$ pedig a Laplace-operátor. Az (1) Schrödinger-egyenletnek legyenek a megoldásai $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ és a sajátértékei $E_1, E_2, E_3, \ldots$ Mint az közismert, különböző energiájú állapotokat jellemző saját függvények egymásra ortogonálisak s az azonos energiájú állapotokhoz tartozó sajátfüggvényeket is hullámmechanikai közelítő számítások elvégzése céljából úgy szokás felvenni, hogy azok egymásra ortogonálisak legyenek. A sajátfüggvények alakja az ortogonalitás következményeképpen, minél nagyobb energiájú állapotokra térünk át, annál bonyolultabb lesz. Tekintve, hogy az egyes részecskék, ha ezek a Pauli-elvet követik, az egyes állapotokat csak véges számban töltik be, több részecskével rendelkező komplexumoknál — atomok, molekulák, stb. — feltétlenül sor kerül a magasabb energiájú állapotok betöltésére is, tehát ezeknek a meghatározására is szükség van. *Gombás* mutatott rá először[1], hogy elő lehet állítani egy olyan potenciálteret, amely potenciáltér ugyan elektronról elektronra változik, de amely potenciáltérnek a felállítása nem követel feltétlenül „self consistent-field" számításokat egyrészt, másrészt ebben a potenciáltérben a magasabb energiájú állapotok sajátfüggvényei ugyanazzal az egyszerű alakkal írhatók le, mint amely alak a klasszikus potenciáltérben mozgó elektronnál csupán a legkisebb energiájú elektron esetében lép fel. Ez a potenciáltér

$$\Phi = V - \gamma_0(\varrho^{2/3} - \varrho_i^{2/3}), \tag{2}$$

ahol a második tag a nem klasszikus potenciálteret képviseli, melyben ϱ a vizsgált elektronnál kisebb energiájú teljesen betöltött állapotokban lévő elektronok teljes sűrűsége, ϱ_i pedig azon elektronok sűrűsége, melyek a vizsgálat alá vett elektrontípushoz tartozó legkisebb energiájú állapotnál is kisebb energiájú állapotokban vannak. *Gombás* statisztikus elméleti megfontolásokból kiindulva vezette le ezt a kiegészítő potenciált és ezekben természetesen a statisztikusan megfogalmazott Pauli-elv is jelentős szerepet játszik. Az utóbbi időben[2] a fenti potenciáltól egy lényegesen eltérő alakú potenciált adott meg

$$\Gamma = V - \frac{\pi^2 e a_0}{8(2l+1)^2} D_l^2 - \frac{1}{4} e a_0 \frac{1}{r^2}, \tag{3}$$

ahol D_l a vizsgálat alá vett elektronnal azonos l mellékkvantumszámú, de nálánál kisebb energiájú elektronoknak a radiális sűrűségét jelenti és amely alak nem tartalmazza az előző potenciálban előforduló törtkitevőket és éppen ezért alkalmazási lehetősége is sokkal tágabb és egyszerűbb, ezzel szemben viszont lényegesen mélyebb bepillantást enged fizikai szempontból is. Meglepő tény az, hogy a kétfajta potenciáltér, dacára annak, hogy teljesen különböző alakúak, lényegében véve, ahol eredményeik összehasonlíthatók, mindenütt azonos eredményt produkálnak. Ez természetes is azonban, hiszen ezek tulajdonképpen mind ugyanannak a fizikai ténynek a megfogalmazásai, t. i. azt a tényt fejezik ki, hogy ha egy részecskét (elektront) olyan térrészben akarunk elhelyezni, amelyben már más részecskék jelen vannak, akkor ezen részecskék elhelyezéséhez a Pauli-elv következményeképpen energia szükséges (részecskék csak egy magasabb energiájú állapotba kerülhetnek) és ezek a statisztikus alapon megfogalmazott potenciálok éppen ezen energiafelvételről gondoskodnak. Igen érdekes matematikai probléma volna kideríteni, hogy mi a matematikai oka ennek az egyezésnek, és szorosan véve milyen matematikai feltételek esetén állhat fenn jó megegyezés!

Ki szeretném emelni a következőkben ezen statisztikus kiegészítő potenciálok egy fontos sajátosságát. Atomokban az egyelektron közelítésben úgy szokás eljárni, hogy a magnak és a többi elektronoknak az átlagterét vesszük kiindulási pontul s ezt a teret még a szögek szerint is átlagoljuk. A szögek szerinti átlagolás eredményeképpen így egy gömbszimmetrikus potenciálteret kapunk, melyben az elektron sajátfüggvényei két kvantumszám, a mellék és a mágneses kvantumszám szerint könnyen csoportosíthatók, annak megfelelően, hogy a sajátfüggvény szögtől függő részei az ezen kvantumszámoktól függő gömbfelületi függvények lesznek.

Amidőn egy magasabb energiájú elektron kiegészítő potenciálját meg akarjuk határozni, természetesen legcélszerűbben úgy járhatunk el, hogy ezen kvantumszámok szerinti csoportosítást már eleve tekintetbe vesszük, hiszen a Pauli-elvnek azon része, mely szerint a különböző mellék, illetőleg mágneses kvantumszámú állapotok egymásra ortogonálisak és ennek következményeképpen az elektronok egy meghatározott mellék és mágneses kvantumszám szerint az összes többi más mellék, illetőleg mágneses kvantumszámmal rendelkező állapotba már eleve nem kerülhetnek, így figyelembe vettük. Így tehát a kiegészítő potenciálnak csupán arról kell gondoskodnia, hogy az azonos mellékkvantumszámú alacsonyabb állapotokba ne juthasson a kiválasztott elektron. Hogy a valóságban a kiegészítő potenciálok tényleg ezt a funkciót töltik be, az a (3) potenciálnál jut a legvilágosabban kifejezésre, amennyiben itt csak az azonos mellékkvantumszámú, kisebb energiájú állapotok sajátfüggvényei, ill. sűrűségeloszlásai szerepelnek a potenciálban, a (2) potenciálban ez kevésbbé látható és csupán bizonyos közelítésben is igaz.

Egy igen érdekes probléma akkor vetődik fel, amidőn a kiegészítő potenciált olyan elektron számára akarjuk megfogalmazni, amely elektronhoz meghatározott mellékkvantumszám nem rendelhető, tehát nem gömbszimmetrikus potenciáltérben mozog. Ilyen probléma gyakran előfordul az összefüggő anyag szerkezetével kapcsolatos problémáknál, mint amilyenek pl. a szilárd testek, a molekulák, stb. Ilyen esetben az elektronok két csoportba oszthatók: az elektronoknak az egyik csoportja, mint közismert, a megfelelő komplexumban, tehát molekulában, vagy, szilárd testben az atomhoz képest teljesen változatlan sűrűségeloszlással kerül be, ezek az u. n. törzselektronok, amelyeknek tehát a valószínűségi sűrűségei az atommagnak aránylag kis környezetére vannak lokalizálva. Az elektronoknak egy másik csoportja, mint pl. a fémelektronok, vagy a molekulában a valenciaelektronok, ellenben a molekulákban, illetőleg fémben teljesen egyes atomokhoz nem lokalizálható sűrűségeloszlással rendelkeznek, ennek megfelelően ezen elektronok számára mellékkvantumszám sem definiálható, [a közismert hozzárendelési elvek alapján az egyes molekulapályákon mozgó elektronok számára megadott mellékkvantumszámok csupán szélső határesetekben bírnak fizikai jelentéssel (tehát a sűrűségeloszlással kapcsolatos értelemmel); a közbeeső esetekben, melyek távol állanak szélső határesetek atomi állapotaitól a valenciaelektronok eloszlása a mellékkvantumszám segítségével, semmiképpen sem jellemezhető] míg a törzselektronok esetében a mellékkvantumszámok megtartják érvényességüket. Arra való tekintettel, hogy ezek a törzselektronok a kiegészítő potenciálban jelentős szerepet játszanak, nyilvánvaló, hogy a valenciaelektronokra ható kiegészítő potenciál megfogalmazásánál úgy kell eljárnunk, hogy a most definiálandó kiegészítő potenciál az atomi határesetben a (2), illetőleg (3) potenciálokba menjen át, míg a molekula, szilárd test stb. esetben könnyen alkalmazható célszerű általánosítása legyen ennek. Az ehhez vezető legcélszerűbb utat úgy találhatjuk meg, hogy definiálunk egy hermitikus operátort Φ-t, amely operátornak sajátfüggvényei a gömbfelületi függvények, sajátértékei pedig a (2), illetőleg (3) potenciálok második tagjai, melyek az r változót paraméterenként még tartalmazzák. Ennek az operátornak az alkalmazása tetszésszerinti függvényre most már célszerűen úgy történhet meg, hogy a függvényt gömbfelületi függvények szerint sorba fejtjük és a sorfejtés egyes tagjaira már könnyen alkalmazhatjuk a Φ operátort.[3]

A (2) és (3) potenciálokban szereplő kiegészítő potenciálok néhány alkalmazására szeretnék rámutatni még. Optikai termek meghatározására különösen nehezebb atomok esetén a direkt hullámmechanikai közelítő módszerek nem alkalmasak (a „self consistent field“ módszer már alapfeltevései miatt sem, a variációs módszer pedig matematikai nehézségek miatt). A *Gombás* által bevezetett kiegészítő potenciállal rövid idő alatt aránylag igen jó (1—3%) pontossággal határozhatók meg ezek a termek.[1] Ion kristályok és fémek elméletében is igen nagy fontosságra tett szert a kiegészítő potenciál két alakja.[1] Az alkáli és földalkáli fémek kötésének tisztázása után a több valenciás fémek kötésének vizsgálata és szerkezetének tisztázása van soron. Ebben az irányban a baráti népi demokratikus Csehszlovákiában egy egész kutató gárda dolgozik *Z. Mátyás* irányítása mellett (*E. Antoncik, L. Valenta, M. Trlifaj*)[4]. Igen jelentős alkalmazása volt ezeknek a kiegészítő potenciáloknak egy nagyobb rendszámú elemekre is alkalmazható variációs módszer kidolgozásánál, valamint egy, az atomokra vonatkozó Hartree-féle „self consistent field" módszerből kiinduló analitikus közelítő módszer felépítésénél is[5]. További alkalmazási lehetőségek egész sokasága áll fenn és remélhetőleg kerül kidolgozásra a közel jövőben.

Általában a statisztikus atomfizika egy viszonylagos lezártság elérése után az utóbbi fél évtizedben új fejlődésnek indult és mint a tiszta hullámmechanikai módszerek kiegészítője és segítő társa tör újabb sikerek felé. *J. C. Slater* a Hartree—Fock-egyenleteket egyszerűsíti egy a statisztikus atomfizikában már jól ismert kicserélődési potenciállal. *S. R. de Groot* és *C. A. Ten Seldam* az összenyomott argon atom belső kinetikus energiáját és polarizálhatóságát számítják a Gombás-féle statisztikus modell alapján. A Szovjetunióban *D. Ivanenko* és *Sz. Larin, V. M. Klecskovszkij* és még mások alkalmazzák a statisztikus elméletet atomfizikai problémák megoldására[6]. Új lépéseket tettek a többatomos molekulák statisztikus elmélete felé is. Általában mind többen jönnek rá arra a közismert, de sohasem eléggé figyelembe vett mondás igazságára, hogy egy fizikai probléma megoldásánál egy fizikailag jól megalapozott gondolat sokszor többet ér a legmodernebb számolóberendezésnél is, s ilyen gondolatok felkeltésére a statisztikus módszer igen alkalmas.

IRODALOM

[1] Irodalomra vontkozóan lásd pl. *P. Gombás*: Die Statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Springer Vlag, Wien, 1949.
[2] *P. Gombás*, Acta Phys. Hung. I. 285, 1952.
[3] Részletesebben lásd *R. Gáspár*, Acta Phys. Hung. II., 31, 1952.
[4] Lásd pl. *E. Antoncik*, Cs. Cas. Fys., **2**, 49, 1952.
[5] *P. Gombás* és *R. Gáspár*, Acta Phys. Hung. I. 317, 1952; *R. Gáspár*, Acta Phys. Hung. II. 151, 1952; *R. Gáspár* és *P. Gombás*, Acta Phys. Hung. II. 335, 1953.
[6] *J. C. Slater*, Phys. Rev. **81**, 385, 1951; *A. Ten Seldam* és *S. R. de Groot*, Physica, 18, 910, 1952; *D. Ivanenko* és *Sz. Larin*, Dokladi, Akad. Nauk SSSR. Tom. 88, **6**, 45, (1953); *V. M. Klecskovszkij*, Dokladi, Akad. Nauk SSSR. Tom. 86, 4, 691 (1952).

RÉNYI ALFRÉD lev. tag:

Tisztelt III. Osztály! A III. Osztály nagygyűlési programmjának egyik legfőbb célkitűzése, hogy elősegítse a fizikusok és matematikusok szorosabb együttműködését. Ebből a szempontból örömmel üdvözlöm *Gombás* akadémikus mai előadását, amely komoly lépést jelent ebbe az irányba. Nemcsak azért, mert számos olyan konkrét problémát vetett fel, amelyekkel kapcsolatban az együttműködés kialakulhat, hanem azért is, mert az elvi szempontokat helyesen világította meg. Az eredményes együttműködésnek ugyanis vannak bizonyos elvi előfeltételei is. A matematikusok részéről az együttműködés előfeltétele, hogy meg legyen bennük a készség és szándék, hogy igyekezzenek a fizikusok problémáival megismerkedni és azokban elmélyedni. E készség egyre több hazai matematikusban van meg és egyre erősödik. Van egy elő-feltétel a fizikusok részéről is, mégpedig, hogy azt az álláspontot képviseljék, amelyet *Gombás* akadémikus kifejtett, hogy nincs egy külön — alacsonyabb — matematikai precizitási színvonal a fizikusok részére. Ezt ilyen határozott formában kifejezve vezető fizikus részéről nálunk eddig nem hallottam és ezért igen nagy örömmel üdvözlöm ezt az állásfoglalást *Gombás* akadémikus részéről. Tapasztalatom szerint a matematikusok és fizikusok együttműködésének egyik akadálya, hogy egyes fizikusok a matematikai szabatosság követelményét lebecsülik és hajlanak a matematika formális alkalmazására. Teljesen egyetértek azzal a megállapítással, hogy az, hogy egy módszer bizonyos szűk határok között egyezik a tapasztalattal, önmagában még keveset mond. Itt merül fel az extrapoláció problémája, amelyre *Fogarasi* akadémikus előadásához való hozzászólásomban is utaltam. Ha egy képlet bizonyos határok között egyezik a tapasztalatokkal, de elméletileg nincs megalapozva, akkor az extrapoláció nem indokolt.

Mint mondottam, egy matematikai képlet fizikai alkalmazásánál is ügyelni kell arra, hogy abból, hogy az bizonyos határok között jól egyezik a tapasztalatokkal, ne vonjunk le elhamarkodott következtetéseket. Még fokozottabban vonatkozik ez egy tisztán matematikai kérdésre, például egy közelítő képletre. Annak illusztrálására, hogy mennyire óvatosnak kell lenni, egy példát szeretnék felhozni, éppen *Gombás* akadémikus egy munkájából.

Gombás akadémikus „Die statistische Theorie des Atomkerns" c. igen érdekes dolgozatában (Acta Physica, I. 329—390.) foglalkozik

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx$$

alakú integrálok kiszámításával, ahol $g(x) = \ln(1+q^2e^{-2x^2})$ és $f(x) = x^r e^{-\lambda x^2}$; szüksége van ennek az integrálnak az értékére az $r = 2, \lambda = 0, 2, 4$ értékekre, továbbá q-nak több 1 és 12 közé eső értékére. Az integrál kiszámítására vonatkozólag a következőket mondja (id. munka 386—387. o.):

„Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung kann man im Integral $\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx$ die eine Funktion, z. B. die flach verlaufende Funktion $g(x)$ durch einen entsprechend gewählten konstanten Wert ersetzen. Wegen des schon beschriebenen Verlaufes von $f(x)$ erhält man für das Integral einen guten Näherungswert, wenn man für den konstanten Wert von $g(x)$ denjenigen Wert von $g(x)$ wählt, den $g(x)$ an der Stelle x_m des steilen Maximums von $f(x)$ annimmt. Es ergibt sich so

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx = g(x_m)\int_0^\infty f(x)\,dx = g(x_m)\,\frac{\pi^{1/2}}{4n^{3/2}} \tag{216}$$

mit

$$x_m = \frac{1}{n^{1/2}} \tag{217}$$

Die Genauigkeit dieser Näherung reicht für unsere Zwecke noch nicht aus. Man gelangt jedoch sofort zu einer Näherungsformel mit ausreichender Genauigkeit, wenn man in der Formel (216) $g(x_m)$ durch $\frac{1}{2}\,[g(x_1)+g(x_2)]$

ersetzt, wo x_1 und x_2 diejenigen Abszissenwerte sind, bei denen $f(x)$ den halben Wert des Maximums, d. h. den Wert $\frac{1}{2} f(x_m)$ annimmt."

Gombás akadémikus felkérésére az Alkalmazott Matematikai Intézet foglalkozott a szóbanforgó integrál kiszámításával és a következő eredményre jutottunk. Ha q értéke kicsiny, úgy az integrál értéke sorbafejtéssel igen nagy pontossággal meghatározható. Ugyanis

$$\ln(1+q^2 e^{-2x^2}) = \ln\left(1+\frac{q^2}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^2}{2+q^2}\right)^n \frac{(1-2e^{-2x^2})^n}{n} \tag{1}$$

és így

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^r e^{-\lambda x^2} \ln(1+q^2 e^{-2x^2})dx &= \ln\left(1+\frac{q^2}{2}\right)\int_0^\infty x^r e^{-\lambda x^2} dx - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{q^2}{2+q^2}\right)^n \int_0^\infty x^r e^{-\lambda x^2}(1-2e^{-2x^2})^n dx\end{aligned} \tag{2}$$

és a (2) jobboldalán szereplő integrálok mind zárt alakban kiszámíthatók. Ez az eljárás azonban csak akkor célravezető, ha $\frac{q^2}{2+q^2}$ kicsiny, tehát pl. ha $q \leq 2$. (Vegyük figyelembe, hogy $-1 \leq 1-2e^{-2x^2} \leq +1$ miatt a jobboldalon álló integrálok maguk is kicsinyek.) Ugyanis a sor ugyan q minden értékére konvergál, de nagy q értékekre tulságosan lassan konvergál ahhoz, hogy gyakorlatilag jól felhasználható legyen. Ez esetben numerikus integrálási módszerhez kell folyamodni (pl. a Simpson-szabály alkalmazásához). Megvizsgáltuk a *Gombás* akadémikus dolgozatában említett két közelítés pontosságát is, mégpedig olymódon, hogy az

$$\int_0^\infty x^r e^{-\lambda x^2} \ln(1+q^2 e^{-2x^2})dx \tag{3}$$

integrálban r értékét $r = 2$-től elindulva változtattuk. Az eredményt az alábbi 1. ábra mutatja, amelyből kitűnik, hogy míg r közel van 2-höz, addig a *Gombás*-féle 2. közelítés, vagyis

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx \approx \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\int_0^\infty f(x)dx,$$

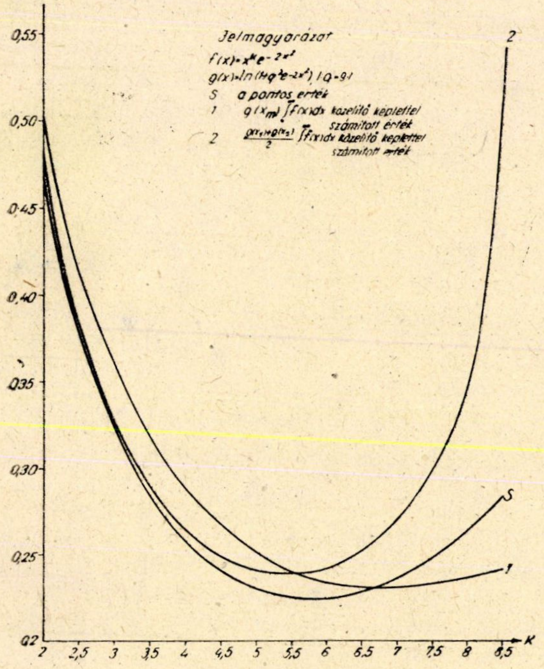
igen jó közelítést ad, azonban r növelésével a közelítés pontossága állandóan romlik: $r = 8$ fölött már többszáz százalék az eltérés, és ott már ez a közelítés sokkal rosszabb, mint a triviális 1. közelítés

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx \approx g(x_m)\int_0^\infty f(x)dx\,.$$

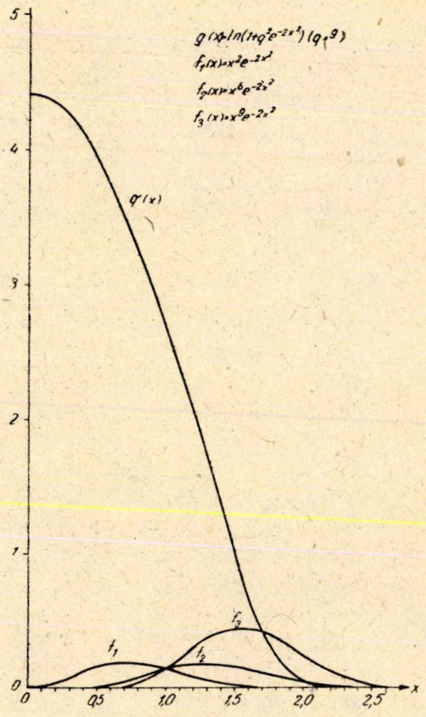
Túl messze vezetne, ha belemennénk annak megvizsgálásába, hogy min múlik az, hogy a 2. közelítés bizonyos esetekben jó, más esetekben nem, csak annyit említek meg, hogy itt szerepet játszik az a körülmény, hogy a $g(x)$ függvény inflexiós pontja, vagyis a

$$(4x^2-1)e^{2x^2} = q^2$$

egyenlet pozitív gyöke és $f(x)$ maximumhelye $\left(x_m = \sqrt{\frac{r}{2\lambda}}\right)$ egymáshoz képest hogyan helyezkednek el. Az $f(x)$ függvény menetét az $r=2$, $r=6$ és $r=9$ esetekben, és $g(x)$ menetét $q=9$-re a 2. ábra mutatja; lálhatjuk erről az ábráról, hogy $g(x)$ meglehetősen meredeken esik le és $f(x)$ maximuma nem túlságosan éles.



1. ábra



2. ábra

A kérdést itt azért említettem meg, mert igen jól mutatja, hogy egy közelítő eljárást pontos hibabecslés nélkül nem tanácsos alkalmazni és hogy az, hogy egy eljárás bizonyos speciális esetekben jó közelítést szolgáltat, még nem bizonyítja az eljárás helyességét. Természetesen még fokozottabban vonatkozik ez olyan esetekre, amikor a fizikában empirikus összefüggéseket igyekeznek képlettel leírni. Remélem, hogy az elvi kérdések tisztázása hozzá fog járulni a fizikusok és matematikusok együttműködéséhez; felszólalásommal is ezt a célt kívántam szolgálni.

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag:

Engedjék meg, hogy egy matematikai logikus is hozzászóljon *Gombás* akadémikus előadásához. Mindenekelőtt a megközelítés kérdésével foglalkozom. Nagyon helyesen hangsúlyozta *Gombás* akadémikus, hogy a kvantummechanika használhatósága jelentős mértékben csökkenne, ha mindig exakt megoldásokra törekednénk, ill. ha csak ilyenekre szorítkoznánk és a közelítő módszereket kizárnók a kvantummechanikából. A közelítő módszerek a matematikában már régen polgárjogot kaptak. A „polgárjog" kifejezés annyiban is találó, hogy a közelítő módszerek kiterjedt használata a polgári forradalom, a haladó kapitalizmus korában indult meg az iparosodással kapcsolatban felvetődő matematikai problémák megoldására. Ma már a matematikai analízisben egy lépést sem tehetünk közelítő módszerek használata nélkül; de még a matematika régebbi ágai számára is nélkülözhetetlenek az ilyen módszerek; gondoljunk például magasabbfokú egyenletek megoldására, vagy adott szög három egyenlő részre osztására.

Ha még mindig nem ment át a köztudatba, hogy a matematika is lépten-nyomon közelítő módszereket használ, akkor ez a matematikusok hibája. Úgy látszik sikerült a közelítő módszereket olyan matematikai szakkifejezések mögé bújtatnunk, amelyek megakadályozzák azt, hogy a más tudományok szakemberei is rájuk ismerjenek. Ehhez hozzájárul még az is, hogy a matematikus kissé más módon bánik a megközelítés fogalmával, mint a matematika alkalmazója. Ez a körülmény a matematika sajátos jellegéből folyik. Gondoljunk például arra az esetre, amikor egy atomnak kell meghatározni az alapenergia állapotát. A fizikus számára ilyenkor egy dolog kívánatos, és szükséges is, t. i., hogy az objektív valóságban meglévő energiaérték helyett olyan közelítőértéket találjon, amely mondjuk csak az ötödik tizedesben tér el tőle. Általában, ha valamely E értéket keresünk a gyakorlati életben, akkor mindig meg van adva az is, hogy milyen pontosságú megközelítő értékkel elégedünk meg helyette, más szóval adva van egy ε hibahatár és megelégszünk E helyett olyan E' közelítő értékkel, amelyre $|E-E'|\leq\varepsilon$ teljesül. A matematikus e helyett az $E_1, E_2, \ldots$ közelítőértékek olyan végtelen sorozatát keresi, hogy minden (pozitív) ε hibahatárhoz legyen olyan ν „küszöbszám", hogy mihelyt $n>\nu$, teljesüljön az $|E-E_n|\leq\varepsilon$ egyenlőtlenség. A matematikus ilyenkor azt mondja, hogy a közelítőértékek E_n sorozata a megközelítendő E számhoz konvergál. Magában véve az, hogy a matematikus az éppen adott ε hibahatár helyett tetszőleges pozitív ε-nal dolgozik, nem volna baj; olyanféle absztrakció ez, mint amikor egy feladatot a konkrét adatok helyett tetszőleges értékekre oldunk meg. Ily módon előre dolgozik a matematikus a fizikusnak, hogy a jövő században, amikor majd a mérőeszközök a mainál tökéletesebbek lesznek és ezzel együtt nő a fizikus pontossági igénye is, ne kelljen elölről kezdenie mindent. A kérdés csak az, vajjon a matematikus a gyakorlati alkalmazások szempontjából helyesen absztrahált-e, amikor a megközelítés fogalmából a konvergencia fogalmát megalkotta. Az a körülmény, hogy a fizikus sokszor nem törődik az általa alkalmazott matematikai eljárás konvergenciájával, annak a jele, hogy az absztrakció nem minden szempontból szerencsésen történt. A fizikusnak ez az eljárása teljesen érthető, hiszen mit sem ért el azzal, hogy minden ε-hoz *van olyan* ν, hogy $n>\nu$ esetén $|E-E_n|\leq\varepsilon$, ha az ő konkrét problémájában szereplő ε esetében ez a ν mondjuk 1 000 000-nak adódik, hiszen akkor n még nagyobb és a szóbanforgó eljárás rendszerint olyan, hogy minél nagyobb az n, annál több számítást kell végezni az E_n közelítőérték meghatározására. A bökkenő tehát az ominózus „van olyan"-ban van, amely megengedi, hogy ν akármilyen nagy legyen, sőt még azt is, hogy meg se lehessen határozni, hanem esetleg csak onnét tudjuk, hogy van, mert az a feltevés, hogy nincs, ellentmondásra vezetett.

Azt a véleményemet, hogy az analízis logikailag szabatos felépítése alkalmából elsikkadt a gyakorlat szempontja, amikor a matematikus megelégedett a konvergencia definíciójában evvel a „van olyan"-nal, az 1951 decemberi nagygyűlésen tartott előadásomban fejtettem ki. Akkor ez nagy vitát eredményezett, amely még az 1952-es nagygyűlésen is folytatódott. A vitában felvetett ellenérvek közül teljesen jogos volt az, hogy nem mondtam meg, milyen más lehetőségei volnának a megközelítés fogalma absztrakciójának a konvergencia fogalma helyett. Erre a kérdésre valóban adós vagyok a válasszal. Mindenekelőtt megjegyzem, hogy nem a konvergencia fogalmának „intuicionista" élesítésére gondolok, amely abban áll, hogy a „van olyan" helyett azt kívánja, hogy legyen olyan véges algoritmus, amellyel, mihelyt meg van adva az ε, ki lehet számítani a ν-t. Hiszen ez nem zárja ki, hogy az alkalmazásban adott ε-hoz olyan ν tartozzék, amely csillagászati szám. Ugyanilyen okból nem segít a „rekurzív konvergencia" fogalma sem, amely azt kívánja, hogy pl. $\varepsilon = 10^{-k}$ esetén a ν küszöbszám rekurzív függvénye legyen k-nak. Hiszen például $(\ldots((k!)!)!\ldots)!$, ahol a !-ek száma k, szintén rekurzív függvénye k-nak, már pedig ennek értéke még a nagyon mérsékelt $k = 3$, tehát $\varepsilon = 0{,}001$ pontossági követelmény esetén is 720!, ami már minden csillagászati, sőt atomfizikai számnál is nagyobb. Hanem például a következő fogalomra gondolok, amely véleményem szerint a gyakorlat szempontjából is használható absztrakciója a megközelítés fogalmának: az $E(\varepsilon)$ függvény „közelítő függvénye" E-nek, ha minden pozitív ε-ra $|E-E(\varepsilon)|\leq\varepsilon$. Ha egy ilyen közelítő függvénye adva van valamely keresett E mennyiségnek, akkor csak a gyakorlati problémában éppen adott hibahatárt kell ε helyébe helyettesíteni, hogy megkapjuk belőle E kielégítő közelítőértékét.

Természetesen nem gondolok arra, hogy a közelítő függvény fogalma, vagy valamely más hasonló fogalom, kiszorítsa a konvergencia fogalmát az analízisből, amely említett fogyatékossága mellett is nagy szolgálatokat tett az analízisben és alkalmazásaiban. Csak arra gondolok, hogy — azon kívül, hogy a matematikus minden egyes konkrét esetben legyen segítségére a fizikusnak a hibabecslés elvégzésében, hogy a fizikus ne legyen kénytelen matematikai rátermettségét is igénybe venni, — fésüljük át az analízis tételeit a határérték elméletétől elkezdve egészen mondjuk a variációszámítás direkt módszereiig, vagy a *Hilbert*-tér lineáris operátorainak sajátérték-problémájáig és minden egyes esetben próbáljunk találni a fenti értelemben vett közelítő függvényt. Ezzel olyan rendszeres munkát végeznénk, amely biztosan nagyon sok termékeny és egy-egy konkrét gyakorlati problémában felhasználható eredményt adna.

Néhány apró megjegyzésem van még. Egyetértek *Gombás* akadémikus azon megállapításával, hogy egy módszer jogosságát a tapasztalattal való megegyezés még nem bizonyítja. Szeretnék erre még más szempontból is rávilágítani. Az elmélet feladata mindig a tapasztalat általánosítása. Ha a matematikai módszer nem ad többet, mint a kísérletek és mérések, akkor mire való? A matematikai módszertől azt várjuk, hogy annak alapján előre meg tudjuk azt is jósolni, hogy más körülmények között mit tapasztalnánk vagy mit mérnénk; ehhez valóban nem elegendő az, hogy csak az eddig tapasztalt esetekben egyezzék a módszer szolgáltatta eredmény a tapasztalattal.

Végül még azzal kapcsolatban, amit *Gombás* akadémikus a spin matematikai tárgyalásáról mondott, a matematikai logikának egy újabb alkalmazási lehetőségét látom. Ha jól értettem, a fizikusokat esetleg érdekelhetik olyan függvények, amelyek független változói is spin-állapotokon futnak át és értékeik is spin-állapotokat fejeznek ki. Az ilyen függvények lényegében logikai műveletek. Ezt azért jegyzem meg, mert alig várom, hogy a matematikai logikának más alkalmazása is legyen, mint a számológépekre és a jelfogó relé-rendszerekre való ismert alkalmazások.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag:

Gombás akadémikus említette, hogy e közelítő számítások matematikai szempontból nem teljesen kielégítők, mert az eljárások konvergenciájának bizonyítása és az egyes közelítések hibájának megbecslése hiányzik. Ez jórészt valójában úgy van, de nem teljesen. Igenis vannak már matematikailag teljes szigorúsággal kivizsgált esetek. Az Akadémia három évvel ezelőtti nagygyűlésén alkalmam volt beszámolni az utóbbi évtizedben a perturbációszámítás terén elért eredmények egy egész soráról, amelyek a perturbációszámításnak matematikailag exakt megalapozását és az egyes közelítések hibáinak becslését is szolgáltatják. Ami a Rayleigh—Ritz-féle eljárást illeti, ennek konvergenciája szintén be van bizonyítva, és vannak a hibabecslésre vonatkozó eredmények is. Utalok itt *Courant* és *Hilbert* ismert műve második kötetének utolsó fejezetén kívül elsősorban *Mihlin*-nek kiváló összefoglaló cikkére, amely 1950-ben az „Uszpehi matematicseszkih nauk" folyóiratban jelent meg a következő címmel: „A matematikai fizika feladatainak megoldásai variációs módszerekkel".

GOMBÁS PÁL r. tag:

Válaszolva *Rényi Alfréd* lev. tag az integrálhoz kapcsolódó megjegyzésére, azzal teljesen egyetértek. Annyira óvatos voltam, hogy ráadásul nem is használtam ezt a közelítő formulát, mindig numerikusan számoltam. *Szőkefalvi-Nagy Béla* lev. tag megjegyzésére válaszolva megjegyzem, hogy ismerem azt az előadást és a perturbációs eljárásokat is, de nem hiszem, hogy ezeket a hibabecslési eljárásokat a fizikusok alkalmazni tudnák. Úgy vélem, hogy itt nagy komplikációk állnának elő.

HOFFMANN TIBOR:

A felvetett problémáknál kialakult, hogy kétféle közelítést lehetne megkülönböztetni, ha nem is egészen élesen. Van egy fizikai és egy matematikai közelítés. Ha először fel tudjuk írni *exaktul* a problémát, meg tudjuk mondani, hogy milyen fizikai jelentéssel bíró tagokat tudunk, mint kicsinyeket elhanyagolni. Ennek a felírás matematikai alakjában is nyoma van. Sajnos, nem áll rendelkezésünkre megfelelő matematikai módszer az exakt megoldásra, ezért hanyagoljuk el a fizikai jelenségek egy részét. Ellenben mégis van valamilyen fizikai támpont arra, hogy ha ezt az elhanyagolást tesszük, fizikai indokolása van az elhanyagolásnak. Ha az ilyen módon egyszerűsített problémát sem tudjuk megoldani, akkor jön a tisztán matematikai közelítés, melyre fizikai megokolást nem tudunk adni. Nem a fizikai elhanyagolás, hanem a matematikai elhanyagolás okozta hibának a megállapítása a matematikusok feladata. Ezzel kapcsolatban felemlítek egy problémát, melynek exakt kidolgozását még nem láttam. A degenerált perturbáció számításnál sok esetben az alább következő példához hasonló eset áll elő. A Heitler—London-féle eljárásban pl. a H_2 probléma esetében

$$H = H_1 + U_1,$$

ahol a H teljes exakt Hamilton operátort két részre bonthatjuk, a H_1 exakt megoldással biró Hamilton operátorra és az annak perturbációját képező U_1 részre. Azonban itt a felbontás még a

$$H = H_2 + U_2$$

alakban is lehetséges, ahol a H_2-nek megfelelő probléma ugyancsak exaktul megoldható. Degenerált esetben az volt a helyzet, hogy a $H = H_0 + U$ felírásban, ahol H_0 az exakt megoldással biró rész H_0-hoz több sajátfüggvény tartozott.

A Heitler—London eljárásnál azonban nem az a helyzet, hanem kétféle felbontás lehetséges. H_1 és H_2 is exaktul megoldható problémához tartozik. A H_1 probléma sajátértéke ugyanaz, mint a H_2 sajátértéke, de maga a differenciálegyenlet nem ugyanaz. Ennek ellenére az eljárást úgy tekintik, mint *egyetlen egy problémának degenerált perturbáció számítását.* A valóságban ez attól lényegesen különbözik. A matematikusokra hárul a feladat, hogy annak utána nézzenek, milyen hibát jelent ez a módszer alkalmazásában.

AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET MUNKÁJA A MATEMATIKAI FIZIKA ÉS ANNAK IPARI ALKALMAZÁSA TERÉN

EGERVÁRY JENŐ r. tag

Előadta az 1953 május 28-án tartott nyilvános osztályülésen

Jelen beszámolómban elsősorban azokról a kutatásokról kívánok számot adni, melyek a vezetésem alatt álló „Mechanikai és Szilárdságtani Osztály" munkájával, vagy aspiránsvezetői tevékenységemmel kapcsolatosak, ezek mellett azonban meg kívánok emlékezni azon vizsgálatokról is, melyeket az Alkalmazott Matematikai Intézet többi munkatársai folytattak, továbbá azon eredményekről, amelyeket a „Mechanikai és Szilárdságtani Osztály" munkatársai az Osztály elnevezésében foglalt témakörön kívüleső területeken értek el.

I. A mechanika területén végzett kutatások

Rózsa Pál aspiráns irányításom mellett kidolgozta a kétféle tömegű anyagi pontokból alternálva felépített húrmodell (atomlánc) elméletét a matrixszámítás felhasználásával, kiegészítve ilymódon *Kármán* és *Born* e területen elért eredményeit. Vizsgálta továbbá az alternálva felépített húrmodellnél a Routh-féle jelenséget; az e téren elért eredmények kapcsolatba hozhatók *Brillouin* korábbi vizsgálataival. *Rózsa Pál* eredményeit a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának egyik ülésén is bemutattam, az eredményekről publikáció készítése van folyamatban.

II. A rugalmasságtan területén végzett kutatások

Lovass-Nagy Viktor vizsgálta kisgörbületű köralakú vékony lemezeknek egyoldalú hidrosztatikus nyomás alatt bekövetkező deformációját és feszültségállapotát. E vizsgálatok a rugalmasságtan ismert módszereinek felhasználásával, de a lemez középfelületének nyúlását is figyelembevéve történtek. Hasonló feladattal foglalkozott *G. B. Biezeno* a Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik-ban közölt egyik munkájában, ahol kisgörbületű köralakú lemeznek a középpontban ható állandó koncentrált erő következtében létrejövő deformációját teszi vizsgálat tárgyává, ugyancsak a középfelület nyúlásának figyelembevétele mellett. A *Lovass-Nagy* által készített megoldás a számítások alapját képező differenciálegyenletek megkonstruálása során, mindjárt a feladat független változóinak megválasztásakor alkalmazott eredeti elgondolásával a számításokat a *Biezeno* által alkalmazott eljárásnál lényegesen egyszerűbbé teszi, és a probléma olyan megoldását szolgáltatja, amely a rugalmasságtan korábbi eredményeivel összhangban álló, új önálló eredményként tekinthető. (E vizsgálatokat, melyek a domború lemezek „kibillenés"-ével kapcsolatban még tovább is folytatódnak, az „IPARTERV"-től kapott megbízás tette aktuálissá. Az elért eredményekről *Lovass-Nagy*-nak egy dolgozata jelent meg a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei-ben.)

Pál Sándor foglalkozott hengeres héjaknál bizonyos meghatározott igénybevétel mellett fellépő alakváltozás és feszültségek vizsgálatával, turbógenerátorok forgórészének a tengelyvégekre való felerősítésére szolgáló konstrukció méretezésével kapcsolatban a GANZ-gyártól érkezett megbízás alapján. A cikk ismertet egy vékony hengeres héjakra vonatkozó általános számítási módszert, majd megoldja a tömör hengerre túlfedéssel felsajtolt vékonyfalú cső biztos felfekvésének problémáját. (Az egyéni elgondolásokon alapuló számítások elért eredményeiről *Pál Sándor* cikket közölt az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei-ben, „Statikai terhelés átvitele vékonyfalú csővel" címmel.)

Ugyancsak a GANZ Villamossági Gyár felkérése alapján foglalkozik a Mechanikai és Szilárdságtani Osztály egyik munkatársa (*Körmendi István*) kúpos héjak szilárdságtani vizsgálatával, az e problémával kapcsolatos számítások még folyamatban vannak.

A felsoroltakon kívül a Mechanikai és Szilárdságtani Osztály több, a legutóbbi időben érkezett műszaki szilárdságtani probléma vizsgálatát végzi, így többek között a Közlekedésügyi Minisztérium megbízásából az előregyártott vasbeton-szerkezetek méretezésével kapcsolatos matematikai kérdések vizsgálata, továbbá a DIMÁVAG Gépgyár által felvetett, konstrukciós kérdésekkel kapcsolatos számítások vannak folyamatban.

III. Hővezetési problémák matematikai vizsgálata

A Mechanikai és Szilárdságtani Osztály az Intézet megalakulása óta rendszeresen foglalkozik hővezetési feladatok matematikai vizsgálatával. E vizsgálatait a Vaskutató Intézet-tel és a Fémkutató Intézet-tel szorosan együttműködve végzi. A Vaskutató Intézet-től kapott megbízás alapján az Osztály foglalkozott egyenletesen hülő közegbe helyezett testek hőmérsékleteloszlásának vizsgálatával. Előadó kidolgozott egy módszert, mely a hővezetési differenciálegyenlet megoldását az időtől lineárisan és a helytől tetszőlegesen függő kerületi feltételek mellett visszavezeti a Laplace—Poisson- és a hullámegyenlet klasszikus megoldásaira, amennyiben a *homogén* hővezetési differenciálegyenletet az *inhomogén* kerületi feltétel és tetszésszerinti kezdeti feltétel mellett kielégítő függvényt mint a homogén differenciálegyenletet és az inhomogén kerületi feltételt kielégítő „relatív-stacionárius" megoldás és a homogén differenciálegyenletet homogén kerületi feltétellel kielégítő és az adott kezdeti feltétel kielégülését is biztosító partikuláris megoldás *összegeként* állítja elő.

E módszer lehetővé teszi a hülési, illetőleg melegedési folyamat és a matematikai fizika egyéb problémái (membránrezgés, torzió, stb.) között mutatkozó formális analógiák kihasználását. A módszert prizmatikus, valamint hengeres testekkel kapcsolatos hőkezelési problémákra alkalmazta és részleteiben kidolgozta *Lovass-Nagy Viktor;* az eredmények gyakorlati használatára az Intézetben — *Rózsa Pál* közreműködésével — számos táblázat és grafikon készült. Az eredmények egy része *Egerváry Jenő* és *Lovass-Nagy Viktor* által közösen írt cikkben jelent meg, az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei-ben.

Újabban *Lovass-Nagy Viktor* foglalkozik (a Vaskutató Intézet munkatársával, *Pásztor János*-sal együttműködésben) a gépalkatrészek nagyfrekvenciás edzésével kapcsolatos különféle hővezetési problémákkal. E vizsgálatokkal kapcsolatos egyik probléma kidolgozásába *Pál Sándor* is bekapcsolódott, az elért eredményekről *Lovass-Nagy Viktor, Pásztor János* és *Pál Sándor* közös publikációt készítenek az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei-nek legközelebbi kötete számára.

IV. Az elméleti elektrotechnika területén végzett matematikai vizsgálatok

Az elektrotechnika nem tartozik ugyan az Osztály munkaköréhez, annál is inkább, mert az Alkalmazott Matematikai Intézeten belül önálló elektrotechnikai csoport is működik, *Pál Sándor* vezetésével, mégis, mivel a Mechanikai és Szilárdságtani Osztály egyes munkatársai által végzett kutatómunka az elektrotechnika területére is átterjedt, szükségesnek tartom az elért eredményekről itt megemlékezni. Az Osztály munkatársainak többsége elsajátította a matrix-algebra és analízisnek az előadó által kidolgozott módszereit, és több kísérlet történt e módszerek elektrotechnikai alkalmazására is. *Lovass-Nagy Viktor* kidolgozta párhuzamos vezetékekből álló vezetékrendszer esetében a telegráf-egyenletnek megfelelő differenciálegyenlet-rendszer matrix-függvényekkel való megoldását. Az eredmény speciális alesetként magában foglalja a háromfázisú áramokra ismeretes (*Fortescue*-nak tulajdonított) eddigi eredményeket is, az eredmények publikálása folyamatban van.

Szükségesnek tartom, hogy itt megemlékezzem az elektrotechnikai csoport, illetőleg az Intézet egyéb osztályainak munkatársai által végzett elméleti elektrotechnikai jellegű vizsgálatokról is. Így *Freud Géza* értékes dolgozatot írt (az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei-ben) párhuzamos elektromos vezeték mágneses terének számításáról, *Fazekas Ferenc* (az elektrotechnikai csoport munkatársa) az egyenletesen töltött rúd potenciálterének és a keletkező földáramoknak mérnökök számára alkalmas tárgyalását adta egy, az ipar köréből jött megbízásból kifolyólag.

Végül itt kívánom megemlíteni *Fenyő István*-nak az Alkalmazott Matematikai Intézet Vegyipari Osztálya vezetőjének „A matematikai fizika néhány differenciálegyenletének egy megoldási módszeréről" című dolgozatát, amely az elméleti villamosságtant is érdeklő matematikai problémákat tárgyal. A dolgozat (amely az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei-ben jelent meg) parciális differenciálegyenletek peremérték — és kezdeti-érték — feladatait úgy kívánja megoldani, hogy képezi a szóbanforgó differenciálegyenlet minden tagjának Fourier-együtthatóit az egyik változóra vonatkozólag egy alkalmas ortogonális függvényrendszer szerint. Az ortogonális függvényrendszer megfelelő választása esetén a Fourier-együtthatók egy közönséges differenciálegyenlet megoldásaként nyerhetők. Ez a megoldási elv két példán van illusztrálva: egyik a diffúzió differenciálegyenletének egy speciális esete, másik egy potenciál-elméleti probléma megoldása.

Végül azon véleményemet kívánom megjegyezni, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet-nek elsősorban a termelés, közelebbről az ipar igényeit kell kielégítenie és csak ezt követően az elméleti fizika közvetlen igényeit. A célból azonban, hogy az elméleti fizika igényei kielégíthetők legyenek, szükséges volna, hogy az Intézet — sajnos számszerűen nagyon kis létszámú — munkatársi gárdájának valamely tagja előzetesen kellő jártasságra tenne szert a modern elméleti fizikai kutatás legfontosabb speciális területein: a kvantummechanikában, a Riemann-féle geometriában, stb.

Befejezésül hangot kívánok adni az Intézet külső megbízói felé szóló azon kívánságomnak, mely szerint az Intézethez beküldött megbízásokban lehetőleg törekedjenek a problémák olyan megfogalmazására, amely az alkalmazott matematikusok számára megkönnyíti a feladatokban foglalt matematikai kérdések felismerését. Ezáltal teszik ugyanis az Intézet külső megbízói lehetővé, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet munkatársai a kívülről nyert megbízásoknak továbbra is kielégítő módon tehessenek eleget.

HOZZÁSZÓLÁSOK

GILLEMOT LÁSZLÓ lev. tag:

Egerváry akadémikus előadásában néhány példát említett meg az Alkalmazott Matematikai Intézet és a műszaki kutató intézetek, valamint az üzemek együttműködése köréből. Ezek a példák és ezeken keresztül az Alkalmazott Matematikai Intézet eddigi működése is bizonyítják azt a fontos szerepet, amit a matematika alkalmazása a műszaki tudományokban betölt. Azokon az eseteken kívül, amikor a matematikai tudomány a műszaki tudományos kutatásnak hasznos segédeszköze, néhány olyan példát is szeretnék bemutatni, ahol a megoldást a matematika eszközei nélkül egyszerűen nem is lehet létrehozni.

Egy ilyen példa a nagy fesztávolságú drótkötélpályák esete. Ennél az egyes kötélszakaszok Martin-acélból készült kapcsolóhüvellyel vannak összekötve, ahol az elvileg végtelenül hajlékonynak tekinthető drótkötélpálya tartó kötelében egy ilyen kapcsolóhüvely véges hosszúságú, de merev közbeiktatott szakasznak tekinthető. Évekkel ezelőtt még az anyagvizsgálat minden eszközével vizsgáltuk annak a jelenségnek az okát, hogy ezeknek a kapcsolóhüvelyeknek a környezetében a drótkötélszálak viszonylag igen rövid idő alatt és sűrűn törnek. Nem részletezem itt a laboratóriumi kísérletek leírását, csupán azok végeredményét, amely szerint semmiféle eszközzel anyaghibát, kifáradást vagy más anyagvizsgálati szempontból hozzáférhető okot nem sikerült kimutatnunk, mely a törések magyarázatára alkalmas lehetett volna. A drótkötélpályák feszültségeloszlásának matematikai vizsgálata — melyeket annakidején a Bányászati és Kohászati Lapokban közzé is tettem — azt mutatták, hogy a csatlakozó hüvelyek környezetében a feszültségeloszlás megváltozik és a feszültség kb. 70 százalékkal emelkedik a pályán uralkodó átlagos feszültséghez képest.

Egy másik példa a 40 MW-os turbógenerátor rótorok hőkezelésének esete. Ezeknek a testeknek a súlya 25 000 kg és így egy-egy turbógenerátor rótor igen nagy értéket képvisel már csak nyersanyagánál fogva is. Ezen rótorok optimális hőkezelési technológiájának megállapítása kísérletileg rendkívül nehezen hozzáférhető, mert 25 tonna acél hőkezelése és az azt követő szilárdsági vizsgálatok olyan költségeket jelentenek, ami gyakran nem ismételhető. Ezért szükségessé vált a hőkezelés során keletkező hőmérsékleteloszlásnak az időtől és helytől függő megállapítása, amelyet éppen az Alkalmazott Matematikai Intézet végzett el felkérésemre. A hőmérsékleteloszlásnak a helytől s időtől függő meghatározása után számíthatóvá válik a lehülési sebesség értéke a rótor egyes pontjaiban és ebből a hőkezelési technológiára messzemenő következtetéseket lehet levonni különösebb további kisérletek nélkül, tehát a rendkívül költséges kisérlet méreteiben erősen összezsugorodik a matematika segítségére támaszkodva.

A fenti példák mutatják a matematika, és ezen át az Alkalmazott Matematikai Intézet működésének jelentőségét. Ahhoz, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet működését még sikeresebbé tehessük, az eddiginél szorosabb együttműködés szükséges a mérnök és a matematikus között. A jó együttműködés alapja az, hogy a mérnök meg tudja fogalmazni a maga problémáit a matematika szaknyelvén. A matematikustól ugyanis nehezen várhatjuk el, hogy a műszaki tudományok rendkívül szerteágazó területén mindenhol olyan jártasságot szerezzen, hogy a folyton változó feladatkörökben a matematikai modell megalkotását önállóan végezhesse el. Véleményem szerint tehát a matematikai modellt elsősorban a mérnöknek kell megalkotnia, igaz, hogy a matematikus közreműködésével. Ebből szükségszerűen következik, hogy legalábbis kutató mérnökeink matematikai képzettségének színvonalát erősen emelni kell, legalább addig a fokig, hogy ha a megoldásban nem is tudnak közreműködni, de a matematikai modell megalkotásában feltétlenül közreműködjenek. A matematikusok működését pedig ki kellene bővíteni olyan módon, hogy a matematikus ne csak a feladat megoldását adja meg, hanem kísérje figyelemmel a gyakorlatban is eredményeinek felhasználását és a gyakorlattal való egyezését. Így minden esetben jó képet fog kapni a modellalkotás helyességéről és esetleg eredményeit a szükséghez képest korrigálni tudja.

A Vasipari Kutató Intézet, illetőleg a Fémipari Kutató Intézet eddig is többízben és eredményesen vette igénybe az Alkalmazott Matematikai Intézet közreműködését. Remélem, hogy a három intézet közötti eddig is jó kapcsolat a jövőben még jobban meg fog szilárdulni, amit nemcsak az intézetek között a közeljövőben megkötendő szerződés alapján remélek, hanem azért is, mert a fenti intézetekben dolgozó aspiránsokat *Egerváry* akadémikus megbízásából éppen az Alkalmazott Matematikai Intézet munkatársai képezik tovább matematikából. Remélem, hogy így az ipari kutató intézetekben dolgozó kutatógárda megszerzi azt az előbb említett magasabb matematikai műveltséget, amelyik a matematikusokkal való együttműködést a jövőben még jobban elő fogja mozdítani. Javasolom, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet minden olyan szervnél, vagy üzemnél, amellyel rendszeresen együttműködik, hasonló tanfolyamok tartásával képezze ki a műszakiakat, ami nézetem szerint nagy mértékben fogja előrelendíteni a matematika alkalmazását a műszaki tudományokban.

PÁL SÁNDOR:

Az ötéves terv sikeres befejezése és túlteljesítése fejlettebb, gazdaságosabb termelési módszerek, megbízhatóbb, pontosabb méretezési eljárások bevezetése nélkül elképzelhetetlen. A megbízhatóbb, pontosabb méretezés pedig a matematikának termelési problémák megoldására való fokozottabb alkalmazását igényli.

A XIX. Pártkongresszuson *Szaburov* elvtárs megállapította:

> „A tudományos kutató intézeteknek és a főiskoláknak jelentős mértékben meg kell javítaniok a tudományos munkát, jobban ki kell használniok a tudományos erőket a népgazdaság fejlesztésével és az élenjáró tapasztalatok általánosításával kapcsolatos legfontosabb problémák megoldására. Biztosítani kell a tudományos felfedezések széleskörű gyakorlati alkalmazását, minden módon támogatni kell a tudósokat abban, hogy a tudomány minden területén tanulmányozhassák az elméleti problémákat, s szorosabbra kell fűzni a tudomány és termelés kapcsolatát."

Matematikai módszerek alkalmazása révén a termelési folyamatban szerepet játszó egyes fizikai adatok összefüggéseiről átfogó képet nyerhetünk. Üzemeink, kutatóintézeteink egy jelentős része felismerte annak a segítségnek az értékét, melyet matematikai módszerek alkalmazása nyujthat a termelésben. Számos üzem, kutatóintézet rendszeresen kérte különböző problémáinak megoldásához az Alkalmazott Matematikai Intézet segítségét. Ezekkel az üzemekkel, kutatóintézetekkel kialakult egy rendszeres kooperáció, amely egyrészt a megbízó vállalat, kutatóintézet munkáját javította meg, másrészt pedig megismertette az Alkalmazott Matematikai Intézet kutatóival a termelés problémáit, felhívta az Alkalmazott Matematikai Intézet kutatóinak figyelmét a matematika alkalmazásának lehetőségeire, megoldatlan problémákat vetett fel és így elősegítette az Intézet fejlődését.

Munkánk során rendszeres kapcsolat alakult ki a Gottwald (volt Ganz) Villamossági Gyárral, a Vasipari Kutatóintézettel, a Cukoripari Kutató Intézettel, a Központi Biokémiai Ipari Kutató Laboratóriummal, ezenkívül több üzemmel kialakulófélben van, így például a Villamos Forgógéptervező Intézettel, a Mintagépgyárral.

Intézetünk matematikai statisztikai osztálya a Csepel Autógyárral és további három üzemmel szocialista versenyszerződéseket kötött a statisztikai minőségellenőrzés bevezetése és alkalmazása céljából. Megfontolás tárgyává kellene tennünk, nem volna-e helyes, ha az Intézet többi osztálya, így elsősorban a matematikai fizikával foglalkozó osztályok követnék ezt a jó példát és azokkal a vállalatokkal, amelyekkel rendszeresen együttműködünk, egy-egy alapvető fontosságú feladatnak közös erővel való megoldására szocialista versenyszerződést kötnének. Tudomásom szerint két ilyen szerződés megkötése folyamatban van.

Egerváry professzor, akadémikus, ismertette az együttműködés egyes fázisait képező munkák egy részét, engedtessék meg nekem, hogy — részben folyamatban lévő munkák ismertetésével — ezt a felsorolást megkíséreljem kiegészíteni.

A Gottwald (volt Ganz) Villamossági Gyár által felvetett számos kérdés közül az *Egerváry* akadémikus által említett hengeres és kúpos héjakra vonatkozó vizsgálatokon kívül megemlíteném a turbogenerátorok melegedésére és hőtágulására vonatkozó vizsgálataimat. Ennek a feladatnak kapcsán egy szakaszonként állandó keresztmetszetű, felületén hűtött, két végén melegített rúd hővezetési problémáját a négypóluselmélet módszereivel oldottuk meg. Egy palástján melegített hengeres test hőtágulásának számítása szükségessé tette a hővezetés differenciálegyenletének a rugalmasságtan egyenleteivel való kombinálását.

A Központi Biokémiai Ipari Kutató Laboratórium megbízásából végzett különböző diffúzióval kapcsolatos vizsgálatok közül kiemelném az antibiotikumok értékmeghatározásánál szokásos mérés kiértékeléséhez szükséges számításokat, amelyeknél a végtelennek tekintett homogén térben adott kezdeti koncentrációeloszlás ismeretében történő hengerszimmetrikus diffúziós kiegyenlítődés koncentrációgörbéit kellett meghatározni. A számítás két független módszerrel történt, amelyek egymást ellenőrzik: *Fenyő István* a Hankel-transzformáció alkalmazásának alapján adódó paraméteres integrállal, *Pál Sándor* pedig hőpotenciálok alkalmazásával oldotta meg a feladatot. A két módszer numerikus számításra egyenlő mértékben alkalmasnak bizonyult.

Szintén a Központi Biokémiai Ipari Kutató Laboratórium megbízásából foglalkoztam az antibiotikumok nagyüzemi gyártásánál szükséges centrifugális extraktor tervezési kérdéseivel. Ebben a készülékben centrifugális erőtér hatása alatt két folyadék ellenkező irányban áramlik. A készülék folyadékáramlási problémáját — lamináris áramlás feltételezésével — megoldottuk. A numerikus számítások még folyamatban vannak. Természetesen az eredmények kísérleti úton való ellenőrzést igényelnek.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet az ötéves terv egyik legfontosabb feladatával, az automatizálással kapcsolatos vizsgálatokba is bekapcsolódik. A Mintagépgyár megbízásából *Fazekas Ferenc* foglalkozott a szerszámgépekre utólag felszerelhető Hydrofix automatikus másolóberendezés követéshűségével.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet elektrotechnikai csoportján belül *Gedeon Sándor*, a Villamos Forgógéptervező Iroda megbízásából foglalkozik indukciós motorok hornyaiban fellépő áramkiszorítás (szkin-effektus) okozta veszteséggel.

A Gottwald Villamossági Gyár megbízásából, irányításom mellett *Bognár László* foglalkozik transzformátortekercsekben fellépő járulékos (áramkiszorítás okozta) veszteség meghatározásával.

Az előadásban és a hozzászólásban eddig felsorolt munkák nagy százalékban külső szervek megkeresésére készültek. Ezek a megbízások jól beleilleszthetők az Intézet tudományos tervébe. Számos elvi jelentőségű általános vizsgálat indult ki külső szervek megbízásainak ösztönzésére: így például a Gottwald Villamossági Gyár, illetőleg az Iparterv megbízására rugalmas héjakkal foglalkozó különböző munkák rávilágítottak a dimenzióanalízis módszerének a héjak elméletében való előnyös alkalmazási lehetőségeire.

Mint már felszólalásom elején említettem, a Gottwald Villamossági Gyár megbízásából megvizsgáltuk a kerületén előírt hőfokú hengeres test hőmérsékleteloszlását. Ezt általánosítva felvetettük annak az általánosabb és a valóságot jobban megközelítő modellnek problémáját, hogy a hengerpaláston a polárszögtől függően hőforrásokat és hőszigetelőrétegeket helyezünk el. Ez vegyes határfeltételes potenciálelméleti problémát eredményez; megoldásával *Fenyő István* és *Pál Sándor* foglalkozik.

Hasonlóan parabolikus típusú parciális differenciálegyenletekre, illetőleg önadjungált differenciálegyenletekre vonatkozó elvi vizsgálatokra vezettek *Egerváry Jenő*, *Lovass Nagy Viktor* és *Pál Sándor* hővezetéssel, illetőleg diffúzióval kapcsolatos számításai, melyeket egészen távolálló műszaki területekről származó feladatok megoldása tett szükségessé. Az egész különböző elektrotechnikai területekről származó szkin-effektus-problémák szintén általános vizsgálatokat kezdeményeztek.

Mindez azt bizonyítja, hogy külső szervek megbízásai nem hátráltatják, hanem inkább elősegítik az Intézet tudományos tervének teljesítését. Ennélfogva az Intézet fejlesztésének *elengedhetetlen* feltétele a külső megbízások számának szaporodása. Ezért véleményem szerint nagyon hasznos volna, ha az Intézet egyes osztályvezetői, vagy kutatói megbeszéléseket kezdeményeznének olyan vállalatok vagy kutatóintézetek mérnökeivel, vagy kutatóival, amely vállalatok, kutatóintézetek még eddig az Intézettel kapcsolatban nem állottak, de feltehetően segítségükre lehetne az Alkalmazott Matematikai Intézet eddig már elért eredményeinek közlésével, vagy jövőbeni kutatómunkájával. A megbeszélések tárgya volna, hogy milyen matematikai vonatkozású problémáik vannak, milyen területen lehetne rendszeres kooperációt kiépíteni az illető vállalat, kutatóintézet és az Alkalmazott Matematikai Intézet között.

Ez egyrészt az illető vállalatoknak jelenthetne komoly segítséget, másrészt Intézetünk munkáját átfogóbbá, általánosabbá tehetné.

Az általános természetű kutatások eredményei a legkülönbözőbb műszaki területeken alkalmazhatók.

Így a mechanikai osztály által végzett mátrix-számítással kapcsolatos kutatások alkalmazhatók mechanikai, rezgési, elektrotechnikai, sőt kvantummechanikai és egyéb problémákra.

Fenyő István, az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményeiben közölt cikkeiben parciális differenciálegyenletek peremérték és kezdetiérték feladatát ortogonális sorba való fejtéssel az együtthatókra vonatkozó közönséges differenciálegyenletekre redukálja. Ez egy újabb módszer például az időtől függő kerületi feltételes differenciálegyenletek megoldására, amellyel *Egerváry Jenő, Lovass Nagy Viktor* és *Pál Sándor* foglalkozott.

Fenyő István foglalkozott a módosított Newton-féle eljárásnak, Banach-terekben értelmezett nem-lineáris egyenletekre való alkalmazásával, megvizsgálta annak konvergenciáját és így sok esetben a Kantorovics-féle módszernél kényelmesebben alkalmazható módszert kap. Alkalmazható ez a módszer nem-lineáris differenciálegyenletekre, integrálegyenletekre, differencia-differenciálegyenletekre, és í. t.

Bizonyosan meglepő, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet legkülönbözőbb osztályai foglalkoznak ugyanazzal a problémakörrel: például potenciálelméleti és hővezetési problémákkal foglalkoznak a mechanikai osztály, a vegyipari osztály és az elektrotechnikai csoport munkatársai; rugalmasságtani kérdésekkel foglalkozik az Elektrotechnikai csoport vezetője és mint erre *Egerváry* akadémikus utalt, egyes elektrotechnikai problémák megoldása kiadódik a Mechanikai Osztály eredményeiből. Ezek a jelenségek általában indokoltak, mert hiszen a matematikai fizikán belül a mechanikai, hőtani, diffúziós, elektrotechnikai, vagy akár kvantummechanikai problémákat nem lehet egymástól teljesen elhatárolni, mert a különböző fizikai jelenségek hasonló matematikai modellel írhatók le és ugyanazokkal a matematikai tételekkel tárgyalhatók. Másrészt gyakran előfordult, hogy az Intézet különböző osztályaihoz tartozó kutatók ugyanazzal a problémával foglalkoztak és sokszor látszólag eltérő eredményekre jutottak. Ez egyes esetekben igen termékeny vitákra adott alkalmat és kifejlesztette a kritikai szellemet, amelyet a Nagygyűlés megnyitásakor *Palladin* akadémikus oly fontosnak ítélt:

„Nem szabad megfeledkezni arról — mondotta —, hogy semmiféle tudomány nem fejlődhetik a vélemények harca nélkül. Mi saját munkánk tapasztalatából tudjuk, milyen óriási jelentősége van az alkotó, baráti bírálatnak és önbírálatnak.

A Tudományos Akadémiák előtt még egy nagy feladat áll: a tudományos káderképzés. Ahhoz, hogy akadémiáink meg tudják oldani feladataikat, magas képzettségű tudományos káderekre van szükségünk. Merészen be kell kapcsolni a munkába a fiatalokat és közel kell hozni hozzájuk a tudományt. Gyakran hallani, hogy a fiataloknak nincs elég tapasztalatuk; de ezért bőségesen kárpótol az ifjúságban lévő lelkesedés, lendület és az új iránti érzék. Az új iránti érzék pedig rendkívül értékes tulajdonsága a tudomány munkásának."

Ez a két szempont: a bírálat és az ifjúság lelkességének felhasználása jól érvényesült Intézetünk osztályértekezletein, amelyeken az egyes kutatók beszámoltak eredményeikről és azokat megvitatták. Az Intézet Közleményeiben a mechanikai osztály egyik értekezletéről szóló beszámoló egy ilyen vitáról szól, amelyet *Egerváry* akadémikus előadásában már ismertetett, domború lemezek behorpadására vonatkozó problémára *Lovass Nagy Viktor* és *Pál Sándor* egy-egy látszólag egymást kizáró matematikai modellt javasoltak. Tüzetesebb vizsgálat után kiderült, hogy a két javaslat ellentmondása csak látszólagos, mindegyik a maga területén érvényes lehet és egymást kiegészíthetik.

Nemrég zajlott le szintén a mechanikai osztálynak az az értekezlete, amelyen *Lovass Nagy Viktor*, a Vas- és Fémipari Kutatóintézet által felvetett, már említett nagyfrekvenciás edzési problémának egy elsőfajú Volterra típusú integrálegyenlettel való megoldását javasolta. Az értekezleten lezajlott vita eredményekép egy egyszerűbb javaslatot tettem Egerváry akadémikusnak. Ez a javaslat lényegében *Egerváry Jenő* és *Lovass Nagy Viktor* szerzők „A hővezetési differenciálegyenlet megoldása az időtől lineárisan függő kerületi feltétel mellett" c. cikkének gondolatkörében mozog és a megoldást jól konvergáló végtelen sor alakjában explicite megadja.

Fel kell azonban hívni a figyelmet arra a veszélyre, hogy az egyes osztályok egymástól függetlenül dolgoznak egy problémán és egymástól elszigetelődve nem dolgoznak olyan hatékonyan, mintha egymást támogatva, a Szovjetunióban már régóta kialakult kollektív kutatás módszerével dolgoznának. Megállapítható, hogy bár régebben kétségtelenül erős hajlam mutatkozott az egyes osztályok elszigetelődésére, ezen a téren komoly javulás tapasztalható, amiről éppen az említett osztályértekezletek tanúskodnak. Egyes osztályértekezletekre a rokon területeken dolgozó gyakorlati szakembereket, kutatókat, mérnököket is meghívjuk. Az elektrotechnikai csoport például egy ilyen osztályértekezleten megvitatta *Fazekas Ferenc*nek a Hydrofixre vonatkozó munkáját és a meghívott vendégek igen értékes szempontokkal járultak hozzá az értekezlet sikeréhez.

Számításaink eredményeinek közlési módjáról kell végezetül néhány szót szólnom. Sajnos, üzemi mérnökeink matematikai képzettsége a mult oktatási rendszer maradványaként sok esetben nem kielégítő a termelés mostani fejlettebb módszereivel összevetve, idegenkednek a matematikától, öncélúnak tartják és még ma sem foglalkoznak vele. Ennélfogva kívánatos számításaink eredményeit olyan alakra hozni, hogy azok közvetlenül vagy legfeljebb logarléc használattal felhasználhatók legyenek a termelésben, áttekintést adjanak a fizikai mennyiségek összefüggéseiről.

Előfordul, hogy például egy parciális differenciálegyenlettel megadott kezdeti érték vagy peremértékfeladat integrálegyenlettel oldható meg. A matematikus szempontjából a probléma megoldottnak tekinthető az integrálegyenlet felírásával, a megoldás létezésének és unicitásának bizonyításával és egy, a megoldást szolgáltató iteráció elvi konstrukciójával. A gyakorlat számára azonban *feltétlenül szükséges* az integrálegyenlet megoldásának görbébe vagy táblázatba foglalása, vagy ha túlságosan sok paraméter van a feladatban, legalább egy-két jellemző számpéldának a végső számadatokig való kidolgozása. Ugyanez a helyzet bonyolultabb *képletekkel* is: célszerű a végeredményre nomogrammot készíteni a felhasználó részére.

Itt kell élnem a bírálat és önbírálat kötelezettségével is, amire *Egerváry* akadémikus felszólított. Egyes esetekben tapasztalható volt, hogy a mechanikai osztály dolgozói annak érdekében, hogy minél előbb a megbízó kezéhez juttassák az eredményeket, erre a végső, számítástechnikai részre nem fordítottak kellő súlyt.

Saját magam viszont sokszor az ellenkező hibába estem: hosszadalmas numerikus számításokat végeztettem, ami a megbízás teljesítését időben nagyon kitolta és nem hoztam a megbízó tudomására a már elkészült részleteredményeket.

Mindkét hiba súlyos. A helyes megoldás az, hogy menetközben rendszeresen tájékoztatjuk a megbízót a részleteredményekről, de elvégezzük a lehetőségekhez képest a numerikus számításokat is. Ez természetesen csak úgy lehetséges, ha a kutatómunka szerves része a megbízóval és felhasználóval, tehát a *gyakorlattal* való állandó szoros kapcsolat fenntartása.

AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZET MUNKÁJA A VALÓSZINŰSÉGSZÁMÍTÁS IPARI ALKALMAZÁSAI TERÉN

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1953. május 28-án tartott nyilvános osztályülésen

Előadásomnak nem lehet célja, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet valószínűségszámítási osztályának a valószínűségszámítás ipari alkalmazásai terén végzett munkájáról részletesen beszámoljak, erre a rendelkezésre álló idő nem elegendő. Csak néhány elvi kérdésről, továbbá gyakorlati tapasztalatainkról fogok beszélni, a részleteket illetőleg pedig utalok az Osztály munkatársainak már megjelent, illetve a közeljövőben megjelenő dolgozataira.* Előadásom első részében a valószínűségszámítás ipari alkalmazásairól, a második részben azokról a matematikai problémákról fogok beszélni, amelyek ezzel kapcsolatban felvetődtek.

1. A valószínűségszámítási módszerek alkalmazása nem korlátozódik az iparnak semilyen részterületére, hanem szinte az ipar minden ágában jelentőséggel bír. Ennek oka, hogy a valószínűségszámítás véletlen tömegjelenségekkel foglalkozik és véletlen tömegjelenségekkel az ipari tömeggyártás bármely vonalán találkozunk. Az iparban bármilyen árucikknek a méretére, minőségére vonatkozó előírások a gyakorlat által megkívánt közelítő betartása komoly problémát jelent. Annak oka, hogy nem lehet tökéletesen egyforma darabokat gyártani, a tömeggyártás természetében rejlik. A nyersanyag tökéletes homogenitása nem biztosítható, a megmunkáló berendezés is állandóan változik (pl. a gép bizonyos alkatrészei kopnak) a munkás figyelme, koncentrációja is kisebb ingadozásokat mutat. Olyan tényezőket, mint pl. a hőmérséklet, a legtökéletesebb berendezéssel is csak megközelítőleg lehet állandóvá tenni. A statisztikus ingadozások nem küszöbölhetők ki teljesen a gyártási folyamatból, csak arra szorítkozhatunk, hogy ezeket az ingadozásokat a műszakilag megengedett tűrési határok közé szorítsuk. Ezt viszont feltétlenül el kell érnünk. Egy másik terület, ahol ilyen ingadozások kiküszöbölhetetlenek, az energiafogyasztás kérdése. A világítási áramfogyasztás pl. állandó ingadozást mutat, de vonatkozik ez egy-egy üzem gépeinek energiafogyasztására is. A harmadik terület, ahol a véletlen ingadozások szükségképpen fellépnek: kopásnak, törésnek, vagy más módon való elhasználódásnak kitett gépalkatrészek ill. egyéb felszerelési tárgyak élettartamának, továbbá erőművek meghibásodásának kérdése.

* Lásd az előadáshoz csatlakozó dolgozatjegyzéket, amely az Osztály munkatársainak azokat a dolgozatait tartalmazza, amelyek a valószínűségszámítás ipari alkalmazásaival kapcsolatosak.

Ezeknek a véletlen ingadozásoknak a vizsgálata a valószínűségszámítás módszereinek alkalmazását kívánja meg. Milyen eredménnyel jár ezeknek a módszereknek az alkalmazása? Általában azt állapíthatjuk meg, hogy a valószínűségszámítási módszerek ipari alkalmazása segítséget nyujt olyan célkitűzések megvalósításában, amelyek ma iparunknak elsőrendű, égető feladatai. Gondolok itt az anyagtakarékosság, a meglévő kapacitás kihasználása, a selejt elleni harc kérdéseire. *Gerő Ernő* az MDP II. kongresszusán elmondott beszédében ezekről a kérdésekről a következőket mondotta: „... ideje, hogy komolyan elkezdjünk foglalkozni a technológia, a gyártási előírások kérdéseivel, mert ezeknek a kérdéseknek elhanyagolása azzal jár, hogy gazdaságtalanul használjuk ki a rendelkezésünkre álló korszerű munkagépeket és ipari felszerelést, pocsékoljuk a nyersanyagot, magas a selejt százaléka, gyártmányaink nem eléggé szabványosítottak s mindez természetesen kedvezőtlenül hat ki a termelésre, a termelékenységre és az önköltségre."* Egy másik beszédében *Gerő Ernő* a döntő tervév teljesítésének feltételeivel kapcsolatban ezt mondotta: „Az első kérdés: a rendelkezésre álló termelési eszközök, ipari felszerelés, gépek, berendezések, épületek, nyersanyag jobb kihasználása és persze, ezzel együtt a munkaerő helyesebb, rendszeresebb, tervszerűbb felhasználása."** — Annak ellenére, hogy ezen a téren a Szovjetunióban már jóval előbbre vannak, mint nálunk, *G. M. Malenkov* és *M. Z. Szaburov* a Szovjetunió Kommunista Pártjának XIX. kongresszusán mondott beszédeiből kitűnik, hogy a termelési kapacitás teljes kihasználása ott is aktuális kérdés. „Sok vállalatnál — mondotta *G. M. Malenkov* — nagy veszteségeket okoz a rossz gazdálkodás, valamint az anyagok, a nyersanyag, a fűtőanyag, a villamosenergia, a szerszámok és más anyagi értékek nem-gazdaságos felhasználása... A termelési kapacitások elégtelen kihasználása és a rossz gazdálkodásból származó nagy veszteségek következtében sok iparvállalat nem teljesíti feladatait a termelés önköltségének csökkentése terén és óriási többletkiadásokat enged meg magának."*** Ugyanerről a kérdésről beszélt *M. Z. Szaburov* is: „Most az a lényeg — mondotta — hogy a népgazdaság fellendülésének hatalmas forrásává változtassuk a ki nem használt termelési tartalékokat... Az egyes vállalatoknál észlelhető s a berendezés teljes kihasználását akadályozó szűk keresztmetszetek leggyorsabb felszámolásával a legteljesebben kihasználjuk a termelési kapacitást. Országunk hatalmas termelési apparátussal rendelkezik, amelyet a sztálini ötéves tervek éveiben hoztunk létre és amelyet élenjáró technikával, valamint nagyszámú, gazdag munkatapasztalattal rendelkező szakképzett munkással, mérnökkel és technikussal láttunk el. Ez nagy lehetőségeket nyujt arra, hogy rendszeresen növeljük a termelést a meglévő termelési kapacitás jobb kihasz-

* *Gerő Ernő:* Beszámoló az MDP II. kongresszusán, 1951. II. 28-án.

** *Gerő Ernő:* A döntő tervév teljesítésének feltételei. MDP KV által összehívott országos aktívaértekezleten tartott beszéd. 1952. I. 13.

*** *G. M. Malenkov:* Beszéd a SzKP XIX. kongresszusán.

nálása útján."* Ezeknek a kérdéseknek a megoldásához jelentős segítséget nyújthat a valószínűségszámítás módszereinek felhasználása.

A következőkben néhány konkrét ipari problémát sorolok fel, amelyekkel már behatóbban foglalkoztunk, ill. foglalkozunk:

a) *A szükségleti tényező meghatározása.* Ezzel kapcsolatban az Intézet Közleményeiben egy dolgozatot közöltünk *Szentmártony Tibor*ral együtt „Gépipari üzemek egyidejűségi tényezőjének valószínűségszámítási vizsgálata" címen. A dolgozat azzal a problémával foglalkozik, hogy ha egy üzem gépei, amelyeket ugyanaz az energiaforrás táplál villamosenergiával, nem állandóan működnek, akkor egy tetszőleges pillanatban általában az üzem gépeinek csak egy része működik, tehát a pillanatnyi energiafogyasztás nem azonos a beépített kapacitással, annak csak egy tört része. Ennek a tört résznek az átlagos nagyságát megadja a kihasználási tényező, a tényleges fogyasztás azonban az átlagos érték körül ingadozik; minket elsősorban az ingadozások felső határa érdekel. Hogy ezek az ingadozások ne okozzanak a termelésben fennakadást, meg kell határozni azt a határt, amely fölé az energiafogyasztás csak rendkívül ritkán emelkedik. Ennek a gyakorlatilag maximális energiafogyasztásnak és a beépített kapacitásnak a hányadosát nevezzük szükségleti tényezőnek. Abban az esetben, amikor teljesen egyforma gépegységekről van szó, ez az egyidejűségi tényezőre redukálódik. — Erre a problémára *Knizsek Ferenc* főmérnök hívta fel a figyelmünket és megadta azokat a szempontokat, amelyeknek figyelembevétele feltétlenül szükségesnek látszott. A problémát ezen általános feltételek mellett tárgyaltuk. Feltettük, hogy a gépek különbözőek, és figyelembevettük, hogy az egyes gépek fogyasztása időközben ingadozhat. A kérdés elméleti megoldása a közölt dolgozatban megtörtént. A gyakorlati felhasználás kérdésével az Intézet és több illetékes intézmény még foglalkozik. Igyekeztünk a végeredményeket olyan formába önteni, hogy minél kevesebb tapasztalati adatból lehessen kiszámítani a szükségleti tényezőt. Lassítja a munkát, hogy nehéz megbízható számadatokat szerezni egyes gépek kihasználására és igénybevételére vonatkozólag, mert üzemeink ilyen megfigyelésekre nincsenek berendezve. Tapasztalatunk szerint az Intézet az ilyen üzemi adatfelvételek terén a legmegbízhatóbb eredményt akkor éri el, ha saját munkatársai végzik a méréseket.

b) *Kompresszorok méretezése sűrített levegővel működő gépek ellátására.* Ezt a problémát *Sors László*, a Gépipari Tervező Iroda mérnöke vetette fel, megoldását Intézetünk Közleményeiben közöltük. Itt csak annyit jegyzek meg, hogy ezzel kapcsolatban egészen speciális matematikai problémák adódtak. Nemcsak a kompreszorok méretezéséről volt szó, hanem a légtartály méretezéséről is, ahonnan a sűrített levegővel dolgozó gépek a levegőt kapják. Probléma volt továbbá a részleges automatizálás, amely abban áll, hogy ha a nyomás a tartályban egy bizonyos határt meghalad, a kompresszor automa-

* *M. Z. Szaburov:* Beszéd a SzKP XIX. kongresszusán.

tikusan kikapcsol és csak akkor kapcsol újra be, amikor a nyomás egy bizonyos határ alá csökken. Mindezek a körülmények bonyolulttá tették a problémát, úgy, hogy itt nem volt elégséges a közönséges Markov-láncok elmélete, csak magasabbrendű Markov-láncok segítségével lehetett megoldani a feladatot. A kompresszor méretezésére vonatkozólag a végeredményt diagrammok formájában készítettük el.

c) Aprítási folyamatok. Ilyen kérdésekkel az Intézet már régebben foglalkozik, ezeknek elsősorban a kőbányászatban van jelentősége. *A. N. Kolmogorov* a zúzásnál előálló kőtörmelék eloszlásának logaritmikusan normális voltára vonatkozó eredményeinek egyszerűsítésével foglalkozik az első, ezzel a kérdéssel kapcsolatos, az Intézetben készült dolgozat. Ennek folytatásaként az Intézet Közleményeiben *Székely Gábor* egy dolgozata foglalkozik azzal, hogy hogyan lehet egy megadott finomságú zúzott anyag zúzásához szükséges energiamennyiséget meghatározni. A szükséges energia a Rittinger-féle elv szerint arányos a zúzásnál létrehozott új felülettel. Sikerült a két fázisban történő zúzásnál a pofás-törők optimális beállításának problémáját megoldani és a végeredményt szintén diagramm formájában megadni. Az üzemi kísérletek most indulnak meg az uzsai kőbányában. — A legutóbbi hetekben a logaritmikus normális eloszlástörvény egy egészen másfajta és első pillanatra távolesőnek látszó alkalmazása merült fel, a szénportüzeléssel kapcsolatban. A szénpor tüzelésénél az égés a szemcse felületén folyik. Ennek következtében a szénportüzelés hatásfoka a szénpor szemcséinek nagyságától függ. Minél finomabbra őrlik a szénport, annál gazdaságosabb a tüzelés, azonban annál költségesebb a szénpor őrlése. A feladat ármost az, hogy meghatározzuk a leggazdaságosabb finomságot. Ez jellemző példa arra, hogy látszólag távoleső ipari problémák néha ugyanazzal a matematikai módszerrel oldhatók meg.

d) Erőművek kooperációja. Erre vonatkozóan *Kovács Károly Pál* lev. tag az 1951. évi akadémiai nagygyűlésen tartott előadásában tért ki részletesen. Az utóbbi időben a hőerőművekkel foglalkozó műszaki szakemberek részéről felmerült az a kívánság, hogy ezzel a kérdéssel részletesebben foglalkozzon az Intézet, mégpedig olyan módon, hogy a véletlen meghibásodások folyamatát ne stacionér folyamatnak tételezzük fel, vagyis a jósági számot az idő függvényének tekintsük. Bizonyos kooperációs kérdések szempontjából az erőművek tervszerű karbantartási munkálataival kapcsolatban kívánatos ennek a kérdésnak a megvizsgálása.

e) Gépalkatrészek tartalékolása. Ezzel a kérdéssel foglalkozik egy *Szentmártony Tibor*ral együtt írt dolgozatunk, amely a Matematikai Lapokban jelent meg az elmult évben. A probléma a következő: gépalkatrészek, vagy más felszerelési tárgyak (tengelyek, fogaskerekek, fúrók, izzólámpák, autógumik, stb.), amelyek egy időben és egyszerre több példányban vannak igénybe véve, előbb-utóbb kicserélésre szorulnak. A valószínűségszámítási módszerek alkalmazásának célja itt annak kiszámítása, hogy egy bizonyos időn belül hány cserére lesz szükség és ennek megfelelően milyen mennyiségű alkatrészt kell raktáron tartani s milyen ütemben kell ezt a raktárkészletet kiegészíteni. Ez a kérdés az ipar szempontjából igen nagyjelentőségű. A kérdés érdekes abban az értelemben is, hogy másképpen merül fel a szocialista iparban, mint a kapitalista iparban. Ez a kérdés a szocialista ipar sajátos problémája. A szocialista iparban nemcsak az jelent kárt a népgazdaságnak, ha az üzem nem gondoskodik kellő tartalékról és így kiesés következik be a termelésben, hanem az is, ha egy alkatrészből túl nagy tartalékot tárol és így elvonja azt más üzemektől, amelyeknél ennek következtében alkatrészhiány áll elő. Az e kérdés terén elért eredményeinkről itt csak annyit szeretnék említeni, hogy ezekből az eredményekből az derül ki, hogy az iparban eddig alkalmazott előírások sok helyütt lényegesen csökkenthetők s ilymódon rejtett tartalékok szabadíthatók fel. Ennek az elméletnek bizonyos továbbfejlesztése mutatkozott szükségesnek. A probléma megvizsgálásába *Takács Lajos* is bekapcsolódott és úgy látszik, hogy ezt az elméletet sikerül továbbfejlesztenünk, figyelembe véve többek között azt, hogy a szóbanforgó felszerelési tárgyak nincsenek állandó igénybevételnek kitéve.

f) A minőségellenőrzés és a selejt elleni harc kérdései. Erre a kérdésre *Vincze István* fog bővebben kitérni hozzászólásában. A minőségellenőrzés problémája két részre oszlik: gyártásközbeni ellenőrzésre, amelynek célja a selejt megelőzése és a készáru ellenőrzése az átvételnél, amely már csak konstatálja a selejtet, de megóv a nem megfelelő szállítmány átvételétől. Hangsúlyozni szeretném, hogy ezen a téren igen nagy lehetőségei vannak a matematikai statisztika egy új módszere alkalmazásának, a rendezett minták elméletének. Ez az elmélet csak a legutóbbi években indult fejlődésnek, szovjet matematikusok dolgozták ki és ennek az elméletnek a továbbfejlesztésébe nekünk is sikerült bekapcsolódnunk.

Mindezek a problémák matematikai megoldásának az iparban való alkalmazása folyamatban van. Az elért eredmények gyakorlati felhasználásáról az illetékes állami szervek kell, hogy gondoskodjanak. Ez eddig nem haladt olyan gyors tempóban, mint ahogy szeretnénk. Persze, figyelembe kell venni, hogy nehéz feladatról van itt szó, mert a pontos adatok beszerzése az iparból nem könnyű dolog. Másrészt ezeknek az új módszereknek az iparba való bevezetése terén minden alkalommal bizonyos konzervativizmust is le kell győzni. A magunk részéről arra kell törekednünk, hogy eredményeinket a műszaki szakemberek minél szélesebb köre számára hozzáférhetőbbé tegyük. Eddigi munkánk hiányosságaira vonatkozólag elsősorban azt említeném meg, hogy általában közvetlen kapcsolatban állottunk a műszaki szakemberekkel, de nem mindig álltunk elég szoros kapcsolatban a műszaki tudományok szakembereivel. Nagyon helyesen hangsúlyozta ezt *Gillemot László* lev. tag tegnapi felszólalásában a matematikai fizikával kapcsolatban, ugyanez vonatkozik azonban a valószínűségszámítás ipari alkalmazásaira is.

2. Áttérek ezután azoknak a matematikai problémáknak a vázlatos ismertetésére, amelyek a valószínűségszámítás ipari alkalmazásaival kapcsolatban merültek fel. Általában meg kell állapítanunk, hogy az ipari alkalmazásokkal való foglalkozás a valószínűségszámítás terén végzett elméleti kutatómunkánk számára is rendkívül termékenynek bizonyult. Az elméleti kutatás három főbb területen folyik:

a) a sztochasztikus folyamatok elmélete,

b) a valószínűségszámítás határeloszlástételeinek elmélete,

c) a rendezett minták elmélete.

a) A sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatban különösen azt a tapasztalatunkat szeretném kiemelni, ami igen sok problémára vonatkozik, hogy általában a gyakorlati problémák megoldásánál nem elégedhetünk meg a Markov-folyamatok elméletének alkalmazásával. Figyelembe kell vennünk itt azt, hogy a sztochasztikus folyamatok elméletének egyetlen alaposan kidolgozott elmélete éppen a Markov-folyamatok elmélete és így ezt az elméletet éppen a nem-Markov-típusú folyamatok irányában kellett továbbfejlesztenünk. A nem-Markov-típusú folyamatokat bizonyos átalakítással visszavezethetjük Markov-folyamatokra. Ez történt a kompresszor-probléma esetében is és számos más esetben is. Különösen *Takács Lajos* dolgozatait emelem ki ezen a téren, továbbá *Pál Lénárd,* a Szovjetunióban dolgozó fizikus aspiráns két ilyentárgyú dolgozatát, amelyek a nyár folyamán az Intézetben végzett munkájának eredményei. — Hasonló matematikai problémák vetődtek fel a kvantummechanika bizonyos kérdéseivel kapcsolatban is. Ez feltétlenül megerősített abban az elhatározásban, hogy az Intézet valószínűségszámítási osztályának több munkatársával együtt elhatároztuk, hogy egy monográfiát fogunk írni a sztochasztikus folyamatok elméletéről, különös tekintettel a nem-Markov-típusú folyamatoknak Markov-típusú folyamatokra való visszavezetésére.

A. N. Kolmogorov akadémikus nemrégiben Moszkvában tartott előadásában a valószínűségszámítás terén az egyik legfontosabb feladatként jelölte meg egy összefoglaló monográfiának a megírását a sztochasztikus folyamatok elméletéről. Egy ilyen monográfiának a megírására elsősorban szovjet matematikusok volnának hivatottak; mi a magunk részéről a nem-Markov-folyamatok rendszeres tárgyalásával szándékozunk ennek a feladatnak a végrehajtásához hozzájárulni.

b) A második témakörből kiemelek, egy a szükségleti, illetve egyidejűségi tényezővel kapcsolatban végzett vizsgálatok során felmerült feladatot. A valószínűségszámítás központi határeloszlástételei megadják a független valószínűségi változók összegének határeloszlását, ha a változók száma a végtelenhez tart; a gyakorlati problémáknál viszont arra van szükség, hogy becsléssel rendelkezzünk véges számú változó esetére. Az ipari alkalmazás során ugyanis az a természetes kérdés merült fel, hogy mekkora gépszámtól kezdve alkalmazhatók a képleteink. Ehhez exakt becslésekre volt szükség, mégpedig nemcsak a binomiális eloszlásnak a normális eloszlástól való eltérése, hanem sokkal általánosabb esetre vonatkozólag. Erre a célra fel tudtuk használni a Csebisev-féle egyenlőtlenségnek azt az általánosítását, amelynek az alapgondolata *Sz. Bernstein*től származik és amelyet egyetemi előadásaimban részletesen kidolgoztam.

c) A harmadik problémakör, amellyel az elméleti vizsgálatok szoros kapcsolatban voltak, a rendezett minták elmélete. A mintavétel elméletének főcélja az, hogy a minta elemeiből megbízható következtetéseket tudjunk levonni az egész statisztikai sokaságra vonatkozólag. A rendezett minták elmélete a legkevesebb számolást igénylő módon biztosítja ezt, mert lehetővé teszi, hogy az empirikus paraméterértékek számítása helyett pusztán a minta-elemek nagyság szerinti elrendezéséből le lehet vonni a kívánt következtetéseket. A minőségellenőrzésnél ez a módszer lehetővé teszi azt, hogy a kontrollkártyára csak a mérések eredményét kell felvezetni és azokból nem kell középértéket, szórást, stb. számítani. Figyelembevéve azt, hogy ezt a munkát nem matematikailag képzett munkaerők végzik, nyilvánvaló, hogy ennek a módszernek a minőségellenőrzésnél nagy lehetőségei vannak.

A rendezett minták elméletének néhány alapvető kérdésével foglalkozik egy *Hajós György* akadémikussal közösen írt dolgozatunk. A rendezett minták elméletében egy új módszert dolgoztam ki, amely eredményesen alkalmazható az elmélet számos problémájára.

A rendezett minták elméletének legfontosabb feladata, hogy a minta elemeinek eloszlásából a teljes sokaság eloszlására, tehát a minta empirikus eloszlásából az elméleti eloszlásra következtessen. Ez a következőképpen történhet: Egy statisztikai sokaságból egy N elemű mintát véve, a minta elemei — a sokaság kiválasztott elemeinek bizonyos vizsgált méretei (átmérő, szakítási szilárdság, stb.) — egymástól független valószínűségi változóknak tekinthetők. A teljes sokaság eloszlásfüggvényéről csak azt tesszük fel, hogy folytonos. Ezután elkészítjük a minta empirikus eloszlásfüggvényét, úgy, hogy a minta elemeit felmérjük az X tengelyre. Ezek a számok a számegyenesre felmérve maguktól nagyság szerint rendeződnek el. Az empirikus eloszlásfüggvény ebből azonnal adódik, hiszen az nem más, mint az a lépcsős függvény, amely minden minta-elemnél $1/N$-nel ugrik. Ha a minta elemszámát minden határon túl növeljük, akkor ezek a lépcsős függvények 1 valószínűséggel minden határon túl hozzásimulnak az elméleti eloszlásfüggvényhez. Ez *V. Glivenko* tétele, amely szabatosan a következőképpen szól:

$$P\left(\sup_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x)-F(x)| \to 0\right) = 1 \tag{1}$$

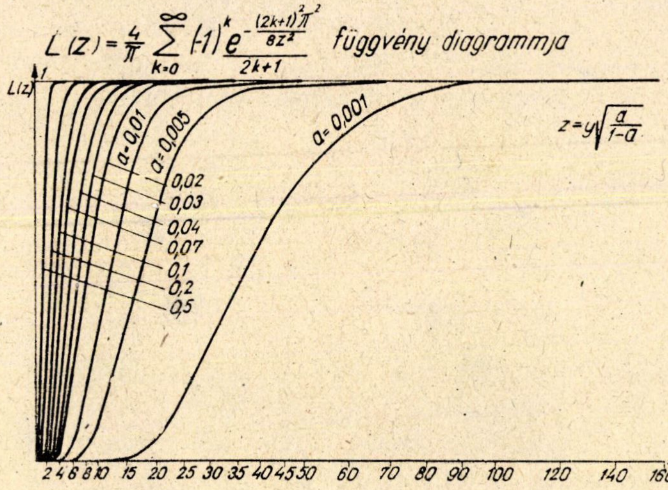
A rendezett minták elméletének legfontosabb eredménye *A. N. Kolmogorov* tétele, amely szerint a $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x)-F(x)|$ eltérés általában $\frac{1}{\sqrt{n}}$ nagyságrendű, tehát a minta elemei számának négyzetgyökével fordítottan arányos.

Ha $\sqrt{n}$-nel beszorozzuk, úgy ez a mennyiség, amely maga is valószínűségi változó (hiszen mintáról mintára más a különbség felső határa), egy nagyságrendű lesz. *Kolmogorov* tétele szerint létezik a határértéke a

$$\sqrt{n} \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x)-F(x)| < y$$

esemény valószínűségének, mégpedig

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x)-F(x)| < y\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2y^2} \tag{2}$$



1. ábra

Ennek a tételnek a tanulmányozása közben merült fel az a gondolat, hogy célszerűbb az $|F_n(x)-F(x)|$ „hiba" helyett a „relatív hibát", vagyis az $\frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)}$ mennyiséget vizsgálni. A relatív hibának a vizsgálata ebben a problémában ugyanis bizonyos szempontból többet mond. Éppen ezért igyekeztem a relatív hiba maximumának határeloszlását meghatározni és sikerült is ezt a kérdést az említett új módszer segítségével megoldani. Mivel $F(x)$ 0-vá válik, ha $x \to \infty$ arra kell szorítkozni, hogy a relatív eltérést egy $a \leq F(x) \leq 1$ $(a>0)$ intervallumon vizsgáljuk. Ez azt jelenti, hogy figyelmen kívül kell hagyni a legszélső elemeket. Gyakran ez gyakorlatilag nem is történhet másképpen. Többek között bebizonyítottam*, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{a\leq F(x)\leq 1} \frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)} < y\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\frac{2k^2(1-a)}{ay^2}}}{2k+1} \tag{3}$$

A tétel alkalmazásainak elősegítésére a valószínűségszámítási osztály két

* Ezek az eredmények az Osztályközleményekben sajtó alatt vannak, azért azok részletes ismertetésétől itt eltekintünk.

munkatársa, *Palásti Ilona* és *Várnai Péterné* elkészítették a (3) jobboldalán álló függvény értékeinek táblázatát. A

$$G(y, a) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\frac{2k^2(1-a)}{ay^2}}}{2k+1}$$

függvényt a különböző értékeire az 1. ábra tünteti fel, amely ezen táblázatok alapján készült.

Befejezésül azt említem még meg, hogy annak egyik oka, hogy bizonyos eredményeket sikerült elérnünk, az volt, hogy a valószínűségszámítási osztályon kollektív munkamódszert alakítottuk ki.

A továbbiakban igyekszünk mind az elméleti vizsgálatokat továbbfolytatni, mind pedig az ipari alkalmazások terén is újabb eredményeket elérni. Ezen a téren nemcsak alkalmazott matematikai, hanem szervezési problémák megoldása is vár ránk, amelyeket az ipar szakembereivel együtt kell megoldanunk. Hogy az érdeklődés ezek iránt a kérdések iránt a műszaki szakemberekben megvan, azt bizonyítják az utóbbi időben a Mérnöki Továbbképző Intézetben tartott előadásaink tapasztalatai. Az együttműködés megfelelő módszereinek kialakítása terén azonban még igen sok a teendő. Mi a magunk részéről igyekszünk megbírkózni a ránk háruló feladatokkal, ugyanakkor azonban azt várjuk, hogy a műszaki szakemberek aktívabban bekapcsolódjanak ebbe a munkába.

IRODALOMJEGYZÉK

Aczél János: Összetett Poisson-eloszlásokról. III. Acta Mathematica. (Sajtó alatt.)

Hajós György—Rényi Alfréd: A rendezett minták elméletének néhány alapvető kérdéséről. (Sajtó alatt az Osztályközleményekben.)

Jánossy L.—Rényi A.—Aczél J.: Összetett Poisson-eloszlásokról. Osztályközlemények *2*, 1951. 315—328.

Prékopa András: Összetett Poisson-eloszlásokról. IV. Acta Mathematica. (Sajtó alatt.)

Rényi Alfréd: A Poisson-eloszlás problémaköréről. Osztályközlemények. I. 1950. 202—212.

Rényi Alfréd: On some problems concerning Poisson-processes. Publicationes Mathematicae. 2. 1951. 66—73.

Rényi Alfréd: Újabb eredmények a valószínűségszámítás terén. Osztályközlemények. *2*, 1951. 125.

Rényi Alfréd: Összetett Poisson-eloszlásokról. II. Osztályközlemények. *2*, 1951. 329—342.

Rényi Alfréd—Szentmártony Tibor: Gépalkatrészek és felszerelési tárgyak törzskészletének valószínűségszámítási meghatározása. Matematikai Lapok III. 1952. 129—139.

Rényi Alfréd—Szentmártony Tibor: Gépipari üzemek elektromos energiaszükségletének és egyidejűségi, illetőleg szükségleti tényezőjének valószínűségszámítási meghatározása. Alk. Mat. Int. Közleményei I. 1952. 85—104.

Rényi Alfréd: Az aprítás matematikai elméletéről. Építőanyag. 1950. 1—8.

Rényi Alfréd: Kompresszorok és légtartályok racionális méretezése üzemek sűrített levegővel való ellátására. Alk. Mat. Int. Közleményei. I. 1952. 105—138.

Rényi Alfréd: A rendezett minták elméletéről. (Sajtó alatt az Osztályközleményekben.)

Rényi Alfréd: О некоторых предельных теоремах теорий вероятностей, és О некоторых новых критериях согласия являющихся аналогичныни критериями согласия А. Н. Колмогорова (Megjelennek a Доклады Академий Наук СССР-ben).

Rényi Alfréd: Eine neue Methode in der Theorie der geordneten Stichproben. Berlin. Math. Tagung. 1953.

Rényi Alfréd—Takács Lajos: Poisson-folyamatok által származtatott történés-folyamatokról és azok technikai és fizikai alkalmazásairól. Alk. Mat. Int. Közleményei. I. 1952. 139—146.

Székely Gábor: A kőtörés valószínűségszámítási tárgyalásához. Osztályközlemények. I.. 245—249.

Székely Gábor: Szövőgépek optimális fordulatszámának valószínűségszámítási meghatározása többgépes rendszer esetén. Alk. Mat. Int. Közleményei I. 1952. 149—157.

Székely Gábor: Kőtörés energiaszükségletének minimalizálása az elő- és utántörők legcélszerűbb beállításával. Alk. Mat. Int. Közleményei. I. 1952. 157—165.

Takács Lajos: Bekövetkezési és koincidencia jelenségek időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén. Osztályközlemények I. 2. 371.

Takács Lajos: Koincidencia jelenségek állandó időtartamú események esetén. I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei. 731—740.

Takács Lajos: Időtartamban tetszőleges eloszlású történésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról. Sajtó alatt az Acta Mathematica-ban.

Takács Lajos: Poisson-eloszlás által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokról és azok fizikai alkalmazásáról. (Sajtó alatt az Osztályközleményekben.)

Takács Lajos: Gépegyüttállások valószínűségszámítási tárgyalása tekintettel a várakozási időkre. Osztályközlemények, I. 228—234.

Takács Lajos: Több gép egyidejű működésének valószínűségszámítási tárgyalása. Magyar Technika, 1950.

Takács Lajos: Gépegyüttállások valószínűségszámítási tárgyalása. Magyar Technika, 1950.

Vincze István: Az ipari minőségellenőrzés statisztikai módszerei és az Intézet feladatai e módszerek bevezetése terén. Alk. Mat. Int. Közleményei. I. 1952. 239—250.

HOZZÁSZÓLÁSOK

KOVÁCS K. PÁL lev. tag:

A valószínűségszámítás alkalmazásának néhány kérdését szeretném megemlíteni, azokat, amelyekről már *Rényi Alfréd* lev. tag beszámolójában is megemlékezett.

A villamos energiagazdálkodás keretében együttműködő, távvezetékekkel összekapcsolt erőműrendszer tartalék kérdéseivel kapcsolatban merült fel az a gondolat, hogy az elegendő nagy számú gép, kazán, transzformátor, stb. meghibásodás okozta kiesései miatt szükséges tartalékot a rendelkezésre álló statisztikai adatokból kiindulva a valószínűségszámítás módszerével állapítsuk meg. E kérdéscsoportról először az 1950. évi nagygyűlés alkalmából szólottam, amikor kimutattam, hogy a statisztikai adatokból nyerhető gépkiesési tartamdiagrammok, a bizonyos feltételekből kiinduló valószínűségszámítási értékekkel jó egyezést mutatnak. Jelen felszólalásomban a valószínűségszámítás alkalmazásának kérdését a dunai vízerőművel kapcsolatban kívánom bemutatni.

Érdekes előljáróban megemlíteni, hogy az Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának idei nagygyűlésén szereplő energetikai előadások közül kettő használja fel a valószínűségszámítás módszereit a felmerült energetikai kérdések megoldásánál.

A dunai vízerőművel kapcsolatban a következőkről van szó:

Mint említettem, nagyobb energiarendszerben több erőmű és ezeken belül sok gépegység működik együtt. Ezeknek a gépegységeknek a száma már elég nagy ahhoz, hogy a valószínűségszámítás eredményeit alkalmazhassuk a véletlen meghibásodások következtében történő kiesések számításánál. Minden gépegységnek van egy bizonyos jósági száma (annak a valószínűsége, hogy a gép üzemben legyen). Például egy kazánnak a tervszerű karbantartások figyelembevételével évente 7200 órát kellene üzemben lennie. A statisztikai adatok megmutatják, hogy a 7200 órához képest véletlen kiesés miatt hány óra hiányzott a kazán üzemidejéből. A tényleges üzemidő és az elméleti üzemidő hányadosa adja a jósági számot.

A gőzerőmű rendszer tartalékát természetesen az egyidőben valószínűen bekövetkező legnagyobb együttes gépkiesés határozza meg. Más a helyzet azonban, ha a gőzerőmű rendszerhez vízerőmű, különösen folyami vízerőmű csatlakozik. Itt az a különleges helyzet áll elő, hogy a gépek véletlen meghibásodás miatt — a vízturbinák és velük kapcsolt generátorok különleges üzemi sajátságait tekintetbe véve (lassú forgás, kis nyomás, alacsony hőfok) — egyáltalában nem kell a rendszerben tartalékot fenntartani; a vízerőmű gépi berendezésének jósági számát gyakorlatilag egynek lehet felvenni.

Ezzel szemben a folyami erőmű a vízjárás okozta ingadozások miatt nem áll állandó teljesítménnyel az erőműrendszer rendelkezésére. A vízerőmű árvizek idején és nagyon alacsony vízállás mellett vagy egyáltalán nem, vagy csak csökkentett teljesítménnyel áll rendelkezésre. Az 50 évre visszanyúló dunai vízhozam-statisztikák alapján meg lehet rajzolni a Duna vízhozam-tartóssági görbéjét, amiből viszont megállapítható a tervezett teljesítményű (kb. 120 MW-os) vízerőmű átlagos kiesési tartamgörbéje is. Itt tehát azzal az érdekes esettel állunk szemben, hogy az erőműrendszerbe olyan újabb erőművet iktatunk be, amelynek a véletlen kiesései nem a gépek meghibásodásából, hanem a dunai vízállástól függenek. Minthogy azonban mindkét esetben a nagyszámok törvénye jut érvényre, ezért a kétféle kiesési tartamgörbét — az egyiket, amelyet a hőerőműrendszerben a jósági számok alapján, — a másikat, amelyet a vízerőmű esetében a Dunára vonatkozó statisztikai adatokból állapítottunk meg — kombinálni lehet. E kombináció, amely a valószínűségszámításnak igen szép példája, azt mutatja, hogy a hőerőműrendszerben lévő tartalék, amely természetesen az újonnan csatlakozó vízerőmű részére is tartalékul szolgál, elegendő ahhoz, hogy a véletlen egyidejű kiesések valószínűségének megfelelő együttes gőz- és vízerőmű teljesítmény-hiányt fedezni tudja. E számítások alapján kiderül tehát, hogy a hálózat szempontjából a dunai vízerőmű pontosan egyenértékű a beépített teljesítményével.

Ez az eredmény azért igen lényeges, mert szemben korábbi — többé-, kevésbbé műszaki érzékre alapított — véleményekkel, a vízerőmű az együttműködő rendszer szempontjából nemcsak a beépített teljesítményének 60—70%-át, hanem mint mondottuk 100%-át éri. Ez az eredmény egyéb gazdasági meggondolások mellett alaposan alátámasztotta a dunai vízerőmű építésének helyességét és indokoltságát. E példával kívántam rámutatni arra, hogy korszerű matematikai eszközöknek ipari alkalmazása népgazdaságilag milyen nagyfontosságú eredményekre vezethet.

Ilyen és hasonló példák alátámasztják és magyarázzák a matematikusok és a műszaki szakemberek együttműködésének szükségességét. Egyetértek azzal, amit *Rényi* Alfréd e vonatkozásban említett. Ugyanis szerinte és ez a magam megállapítása is, a kapcsolat az ipar és az Alkalmazott Matematikai Intézet között sokkal szervesebb, mint a műszaki tudomány művelői és az Intézet között, holott az utóbbiaknál lenne szükséges szorosabb kapcsolatot létrehozni. A tudományos munkában működő mérnökök — magamat sem kivéve — úgy vélik, hogy felmerülő matematikai problémáikat maguknak kell megoldaniok, ami sokszor igen fáradságos és nehéz útnak bizonyul. Szükséges tehát, hogy a tudományos munkát végző műszakiak matematikai problémáikkal minél gyakrabban felkeressék az Alkalmazott Matematikai Intézetet.

Ugyanakkor meg kell említeni, hogy az Intézet nagyon vigyázzon arra, nehogy a nála dolgozó mérnök-matematikusok kissé elszakadva a műszaki tudományban alkalmazott legkorszerűbb módszerektől a maguk feje után akarjanak egyes kérdéseket megoldani, amire a legutóbb bizonyos automatizálási kérdésekkel kapcsolatban volt példa.

SORS LÁSZLÓ:

Engedjék meg, hogy röviden *Rényi Alfréd* professzor elhangzott előadásához a gyakorlati élet szempontjából néhány megjegyzést fűzzek.

Legelőször is — úgy érzem — e helyen is köszönetet kell mondanom *Rényi* professzornak és az Alkalmazott Matematikai Intézetnek azért a segítségért, mellyel a Gépipari Tervező Irodát munkájában segítette. Mi több kérdéssel fordultunk az Alkalmazott Matematikai Intézethez, melyeket saját erőnkből megoldani nem tudtunk. *Rényi* professzor és munkatársai a valószínűségszámítás alkalmazásával a feladatot megoldották és a megoldást könnyen kezelhető formában rendelkezésünkre bocsátották.

Hangsúlyozni szeretném, hogy az említett segítség igen értékes volt és számottevően járult hozzá tervezési módszereink fejlesztéséhez.

A szóbanforgó kérdések részben az elektromos szükségleti tényező megállapítására, részben pedig a kompresszorok és légtartályok helyes tervezésére vonatkoztak.

Rényi professzor beszámolójában mindkét kérdést és azok megoldását is ismertette. Ezért én most csak a nyujtott segitség jelentőségét kívánom megvilágítani.

Vizsgáljuk meg először, hogy mi volt a helyzet az elektromos szükségleti tényező megállapítása terén, az Alkalmazott Matematikai Intézet beavatkozása előtt?

Még egy évvel ezelőtt is — egyéb lehetőség hiányában — a létesítmények elektromos csatlakozási igényének megállapításánál kénytelenek voltunk mintegy 30—40, elég bizonytalan pontosságú mérésre alapozott eljárást alkalmazni, amelynek semmi elméleti alapja nem volt és így jó eredményt nem is biztosíthatott. Hogy azonban az áramot elosztó transzformátor túlterhelése ne következhessék be, a „kellő" biztonság miatt (idézőjelben mondva), az e módszer alapján amúgy is túl bőven meghatározott szükségletet még 20%-kal megemeltük.

Az áramszükséglet fenti módon történt meghatározása után következett a beépitendő transzformátor kiválasztása. Miután e transzformátorok a szabványositás és tipizálás — egyébként helyes elvének alkalmazása következtében csak korlátolt számú típusban készülnek, szinte természetes volt, hogy a választás minden esetben a számított értéknél *nagyobb* teljesítményű típusra esett.

Mellesleg megjegyezve, a fenti kétszeres biztonságot növelte még az a körülmény is, hogy transzformátorok szerkesztői és tervezői is alkalmaztak már egy biztonságot számításaikban; mindezek alapján érthető, hogy a beépítésre kerülő transzformátor a valóban felmerülő szükséges teljesítménynél kétszer, két és félszer nagyobb volt. Hogy mindez így van, beigazolódott például a nemrég üzembehelyezett ATRA-gyárban és az Ikarusz-gyárban is, hol a gyakorlat szerint a felénél is kevesebb áramcsúcsérték mutatkozott az eredetileg betervezettnél.

Ez volt azonban még a kisebbik baj.

A nagyobbik baj az volt, hogy a létesítmény helykijelölésénél az említett hiányosság miatt a magasabb energiaszükségletet vették figyelembe és ennek megfelelő kapacitást tartalékoltak a rendelkezésre álló árammennyiségből a létesítmény számára.

Miután pedig tudvalévőleg elektromos energia terén igen szűk a keresztmetszetünk, feltételezhető, hogy egyes létesítmények üzembehelyezése látszólagos energiahiány miatt időbelileg kitolódott, vagy esetleg nem az egyébként legalkalmasabb helyre lett telepítve.

Felismerve a hibákat — a szovjet irodalomhoz fordultunk segítségért. Itt megtaláltuk *D. Sz. Livsic* szovjet mérnök képletét, melynek alkalmazását a Glavelelektromontázs 1948-ban elrendelte. Sajnálattal kellett azonban megállapitanunk, hogy a képlet szerint meghatározott elektromos szükséglet nálunk sok esetben kevésnek bizonyult. Ennek oka abban a különbségben keresendő, mely a fejlett szovjet ipar és a mi iparunk között van. Tudvalévőleg a Szovjetunióban a gépesítés már igen nagyfokú; ez egyben azt is jelenti, hogy sokkal több motort alkalmaznak, mint mi, közöttük olyanokat is, melyek csak ritkán és kis terheléssel futnak. E körülmény logikailag is igazolja, hogy a szükségleti tényezőnek a Szovjetunióban valóban sokkal kisebbnek kell lennie, mint nálunk.

Ez volt a helyzet, amikor az Alkalmazott Matematikai Intézethez fordultunk. Amint tudják, az Intézet kérésünkre megoldotta a feladatot. A levezetett képlet, ill. képletek az eddigi mérések szerint jól megközelítik a valóságot és így előreláthatóan sikerülni fog e komoly hiányosságot kiküszöbölni, annak ellenére, hogy egyelőre még nehézségek vannak a képletben szereplő konstansok meghatározásánál. Erre azonban még később visszatérek.

A második kérdés — melynek kapcsán az Intézethez fordultunk, a kompresszorok és légtartályok helyes méretezésének kérdése volt. A helyzet e téren sem volt jobb, mint annakidején az elektromos szükségleti tényező terén. A légtartályok irodalmi adatok szerint történő méretezésnél 100—150 %-os különbségek adódtak aszerint, hogy a méretezés melyik szerző képlete alapján történt.

Ennek okát abban látom, hogy az egyes szerzők a kérdést nem tudományos alapon vizsgálták, így például nem vették figyelembe a munkaciklus megoszlását álló és használati időkre és több, hasonló elvi hibát követtek el. Az óvatos tervezők természetesen itt is a magasabb értékeket vették figyelembe és e téren is többszörös biztonságot alkalmaztunk, melynek következménye felesleges és túl nagy teljesítményű kompresszorok alkalmazása lett, ami az egyébként is költségesnek mondható, bár különben sok előnnyel bíró sűrített levegő előállítási költségét még magasabbra emelte.

A helyes méretezés kérdését újból az Alkalmazott Matematikai Intézet oldotta meg; — jól használható diagrammokkal, melyek segítségével még a járatlanabb tervezők is egyszerűen és gyorsan el tudják végezni a helyes méretezést. E segítség alapján tehát ezen a téren is döntő javulás várható.

Tisztelt III. Osztály, az előbb nem véletlenül, hanem tudatosan használtam a „várható" kifejezést, mert sajnos még nem mondható, hogy akár egyik, akár másik kérdésben a gyakorlati felhasználás minden további nélkül azonnal megkezdhető. Mind az elektromos szükségleti tényező, mind a kompresszorok méretezésére szolgáló képletekben ugyanis konstansok szerepelnek, melyek megállapítása rendkívül nagy nehézségekkel jár. Ezek megállapításához szükséges mérések hosszadalmasak és fáradságosak. Nehézségek vannak a káderek vonalán és nehézségek vannak a segédeszközök: műszerek, mérőeszközök vonalán is. Ennek ellenére úgy vélem, haladéktalanul hozzá kell látnunk a szükséges mérések lefolytatásához, hogy az e téren lévő rejtett tartalékokat mielőbb felszínre hozzuk. Üzemeinkben — nagyon helyesen — folyik a harc a másodpercekért, de közben *Rákosi* elvtársat idézve: „megesszük a holnapunkat", vagyis nem foglalkozunk eleget és nem fektetünk elég súlyt az ilyen tudományos eredmények gyakorlati alkalmazásához szükséges adatgyűjtésre.

Példát e téren is a nagy Szovjetuniótól kell vennünk, ahol a már említett *Livsic* mérnök által alkalmazott képlet konstansainak megállapításához sok éven át folytattak széleskörű jól megszervezett méréseket. Remélem, a Nagygyűlés is nagyban hozzá fog járulni ahhoz, hogy az egyes tárcák felfigyeljenek az Alkalmazott Matematikai Intézet tudományos eredményeire és lehetővé teszik majd azoknak teljes mértékű átültetését a gyakorlatba,

Befejezésül hangsúlyozni kívánom, hogy nemcsak a többi tervező irodának, és kutató intézeteknek, hanem nagyobb vállalatainknak is mind jobban kell igénybe venni az Alkalmazott Matematikai Intézet minden osztályának munkáját, mert amint *Malenkov* elvtárs a Szovjetunió Kommunista Pártjának XIX. kongresszusán kifejtette:

„Minél teljesebben és észszerűbben használjuk fel a termelési tartalékokat, minél takarékosabban és körültekintőbben vezetjük gazdaságunkat, annál nagyobb sikereket érünk el a népgazdaság valamennyi ágának fejlesztésében, annál nagyobb eredményeket érünk el a nép anyagi és kulturális színvonalának emelésében."

VINCZE ISTVÁN:

Hozzászólásom két kérdéssel foglalkozik. Egyik a matematikai statisztika hazai művelésének kérdése, s ezzel együtt — igen röviden — az Intézet e téren végzett munkája, a másik kérdés a matematikai statisztika elvi és gyakorlati vonatkozásai ugyancsak az Intézet munkája kapcsán.

1. Ismeretes, hogy míg a valószínűségszámítás bonyolult események valószínűségeit határozza meg egyszerűbb események valószínűségeiből, addig a matematikai statisztika — ennek egyik fejezete — foglalkozik azzal a kérdéssel, hogyan lehet a tapasztalati adatokból az ismeretlen valószínűségre, eloszlásokra, illetve azok adataira visszakövetkeztetni. A matematikai statisztika szerepe tehát alapvető mindenütt, ahol a véletlenszerű kis hatások befolyását kiküszöbölve exakt törvényszerűségeket akarunk feltárni; így nagy szerepet játszik a természettudományokban, ipari és mezőgazdasági tudományos kutatásban stb. Viszont fokozott elővigyázatot igényel alkalmazása ott, ahol nem véletlenszerű, hanem szisztematikus hatások játszanak közre a jelenségek lefolyásánál, így a társadalomtudományokban. A nyugati országok statisztikusai, elsősorban a gazdasági statisztikusok, éppen ilyen irányú alkalmazásokkal járatták le a matematikai statisztikát, amikor elválasztva azt annak elméleti hátterétől, a valószínűségszámítástól, formálisan, tudománytalanul alkalmazták, hogy kapitalista, marxistaellenes álláspontjukat igazolják. Ennek az áramlatnak sokszor a tudományos kutatás is uszályába került: a matematikai statisztika kézikönyvei a statisztikai módszereket, mint recepteket kezelték, nem ügyelve arra, hogy milyen feltételek mellett alkalmazhatók megállapításai. Végül: elsősorban az angol iskolában, mely egyébként sok jelentős eredményt mutathat fel, olyan „elvek" születtek, amelyek a valóságtól, a való élet törvényszerűségeitől elszakadva állítanak fel formális követelményeket, amelyek matematikai statisztikai problémák megoldására szolgáló eljárásoknak képezik alapját. Gondolok itt elsősorban *R. A Fischer* iskolájára.

Hazánkban a felszabadulás előtt a matematikai statisztika elhanyagolt terület volt. Legkiválóbb művelője *Jordán Károly* jelentős eredményei mellett is elszigetelten működött; ki kell emelnünk, hogy sok elvi kérdésben állott helyes, ösztönösen materialista állásponton — szemben a nyugati felfogással — és tett olyan megállapításokat, amelyek találkoztak a szovjet valószínűségszámítási iskola felfogásával.

A felszabadulás után a szovjet valószínűségszámítási iskola — elsősorban *Rényi Alfréd* személyében — követőkre talált hazánkban és rövidesen valószínűségszámítási iskola alakult ki az Alkalmazott Matematikai Intézet körül. *Rényi Alfréd* a szovjet matematikusok — *Kolmogorov, Bernstejn, Gnyedenko* — példáját követve, igyekezett a tudományos, dialektikus materialista felfogás alapján állástfoglalni a nyugati formalista, tudománytalan irányzatokkal szemben. Ismertté vált ugyanakkor az a vitaanyag is, amely a matematikai módszereknek a társadalmi és gazdasági statisztikában való kritikátlan alkalmazását bírálta és helytelen szerepét világította meg.

A matematikai statisztika az Intézeten belül a valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztály keretében került elsősorban művelésre. Noha néhány hónapja külön valószínűségszámítási osztály és külön matematikai statisztikai osztály működik, az Intézetben elért eredmények lényegében még az előbbi osztálybeosztásban születtek. A tudományos eredmények közül említeni kell *Rényi Alfréd* eredményeit a rendezett minták elmélete terén, amelylyel *Kolmogorov* által kezdeményezett módszereket fejlesztett jelentősen tovább, azonkívül *Hajós György* és *Rényi Alfréd* eredményeit, amelyek a rendezett minták elméletének alapvető kérdései köré csoportosulnak. Megemlítendők továbbá a *Lipták József* által eloszlások eltérésének vizsgálatára vonatkozó, szovjet eredmények alkalmazásának elősegítésére kidolgozott táblázatok. *Székely Gábor*nak a fonalszakadásra és kőtörésre vonatkozó valószínűségszámítási vizsgálatai is tartalmaznak matematikai statisztikai vonatkozásokat. A regressziós együttható meghatározására vonatkozó eredményről még alább kívánok — bárcsak elvi szempontból — szólni. A matematikai statisztika tárgykörébe vágó munka ma is megoszlik. A valószínűségszámítási osztály keretén belül működik az orvosi matematikai statisztikai csoport, ahol *Juvancz Ireneusz* és *Lipták József* dolgoznak, továbbá idetartoznak a mezőgazdasági statisztikai kérdések, ahol *Székely Gábor* tevékenykedik. A további kérdések a matematikai statisztikai osztályhoz tartoznak, ahol központi szerepet játszik az ipari tömegcikk-gyártás minőségellenőrzésének matematikai statisztikai módszere. Ez a kérdéskör az elmélet és gyakorlat összefüggő kérdéseinek széles skáláját érinti. Az osztály ma négy üzemnél szocialista versenyszerződés alapján segíti a minőségellenőrzés statisztikai módszereinek bevezetését és számos más üzem és intézmény részére nyújtott vagy nyújt segítséget. Elméleti téren sok egyéb probléma mellett egy *Braginszkij*tól származó új statisztikai ellenőrző módszer bevezetésének előkészítése folyik *Rényi Alfréd* kezdeményezésére. A minőségellenőrzés statisztikai módszereinek bevezetése és elterjesztése terén végzett munkájában *Fontányi Ágota* működik és ért el kezdeti eredményeket. Sajnos, azonban meg kell állapítanunk, hogy ez a munka nem folyik üzemeink és hatóságaink kellő támogatása mellett, sőt sokszor olyan körülmények között, amely nagyon nehézzé teszi az Intézet számára feladatának teljesítését.

Annak, hogy a minőségellenőrzés statisztikai módszerei iparunk gyakorlatában csupán az utolsó 1—2 évben jelentek meg és ma sem honosodtak meg a szükséges mértékben, jelentősen oka, hogy a matematikai statisztika még ma sem sajátja mérnökeinknek, matematikusainknak és más szakembereinknek.

2. A matematikai statisztika, mint említettem, a felszabadulás után együtt terjedt el a helytelen irányzatok kritikájával s ez a körülmény élesen mutatkozott meg egy az antibiotikumok értékmeghatározásánál felmerült matematikai statisztikai problémához való hozzáállásban és annak megoldásánál. Az értékmeghatározási eljárás egy amerikai folyóiratban volt lefektetve s mindenütt alkalmazták. *Tettamanti Károly* elvtárs a Központi Biokémiai Kutató Intézet akkori igazgatója azonban Intézetünk felé felvetette e nehézkes és sok bizonytalanságot tartalmazó eljárás egyszerűsítésének a kérdését, az amerikai irodalom utasításaihoz kitartóan ragaszkodó munkatársainak véleménye ellenére. A feladat a regressziós egyenesnek adott alappontok esetén — és más feltételek melletti — olyan meghatározásához vezetett, ami a gyakorlat számára könnyen kezelhető és elméletileg kellőképpen alátámasztott. Mi azt a reális célt tűztük magunk elé, hogy a regressziós együttható szórásnégyzetének minimumát határozzuk meg s ilymódon talált legmegfelelőbb eredményhez keressünk a tőle nem túl távoleső, de technikai kivitelre és konkrét számolásra alkalmas-

módszert. A feladat eléggé kényelmetlen feltételes szélsőérték-meghatározáshoz vezetett, amelynek teljes megoldása némi matematikai nehézséget okozott. Ha e feladatnál a statisztikai becsléselméletnek *R. A. Fischer*től származó „maximum likelyhood" elvét használjuk fel, úgy az adott problémát egy formálisan konstruált függvénynek — az ú. n. maximum likelyhood függvénynek — szélső értékei útján oldhatjuk meg, amely függvényt a felvetett problémához a legtöbb esetben nem fűzi mélyebb, reális kapcsolat. Az adott esetben is a „megoldás" egyszerűen adódott, de hogy milyen összefüggésben volt egy reális elvi követelménnyel, azt nehéz lett volna megmutatni, ugyanakkor a kérdést gyakorlati irányban sem vitte előre. Mi ennek ellenére tovább vizsgáltuk eredeti módszerünkkel a problémát és elvi következetességünk és fáradságunk meghozta eredményét. Azt a meglepő eredményt kaptuk, hogy a szórásnégyzet minimuma a gyakorlati mérés és a numerikus számolás részére egyaránt a legmegfelelőbb eredményt adja, t. i. általában 2 vagy legfeljebb 3 alappont igénybevételével kell mérni. Az ilymódon konstruált eljárás gyakorlati alkalmazása meggyőzően mutatta eredményeink helyességét.

A statisztikai becsléselmélet, melyről tulajdonképpen szóltam, másik fontos alkalmazási területe a késztermék ellenőrzés mintavételes, statisztikai módszere, amikor is a nagyszámú tömegcikket tartalmazó tétel minőségére viszonylag kisszámú mintából kell következtetni. Az itt felhasznált módszerek kiindulásukban sokszor eltérnek az exakt, tudományos elvtől a Bayes-féle okok valószínűségének tételétől s itt hivatkozom *Bernstejn* kritikai cikkére, amely rámutat arra, hogy az ettől eltérő elvek, ha sok esetben is, de nem mindig nyújtanak helyes, kielégítő eredményt. Lengyelországban *H. Steinhaus* és tanítványa, *N. Oderfeld* foglalkoztak a mintavételes ellenőrzésnél a Bayes módszer és más egyszerűbben kezelhető módszerek dualitási tételének felállításával. Eredményeiket *Oderfeld* alkalmazta is a gyakorlati számításokban a lengyel mintavételi szabványelőírások megalkotásánál. A binomiális eloszlásra vonatkozó dualitási tételüket illetően *Rényi Alfréd* ösztönzésére *Sarkadi Károly* bebizonyította, hogy az a hipergeometrikus eloszlásra is kiterjeszthető.

Amikor tehát Intézetünk a matematikai statisztikai módszerek további elterjesztésére törekszik, mind az ipari minőségellenőrzés, mind más alkalmazási területek terén, joggal ügyel arra, hogy a felhasznált módszereket az elvi tisztaság követelményeinek megfelelő megvilágításba helyezze és jogosultságuk határait mindenkor tudományosan tisztázza.

Örömmel üdvözli az Intézet mindazt a kezdeményezést, amely ipari szakemberek részéről matematikai statisztikai módszerek alkalmazása és elterjesztése irányában történik. Így üdvözölnünk kell *Borbély Mihály* Kossuth-díjasnak, a Győri Textilművek kiváló szakemberének ilyenirányú munkáját, továbbá *Kovács Károly Pál* lev. tag, *Zilahi Márton* professzor, *Telegdi Kovács László* professzor, *Kollár Károly* tudományos kutató és sok más szakember munkáját. Az Intézet készségesen együttműködik e törekvésekkel, ugyanakkor azonban feladatának tartja, hogy minden esetben ügyeljen a matematikai szabatosság, az elvi tisztaság követelményeinek betartására.

AZ ALGEBRA FEJLŐDÉSÉRŐL, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A HAZAI ALGEBRAI KUTATÁSOKRA

FUCHS LÁSZLÓ

Előadta az 1953. május 29-én tartott nyilvános osztályülésen

I. Bevezetés

A matematikának napjainkban végbemenő hatalmas mértékű fejlődésében döntő szerepet játszanak az algebrai kutatások. Hiszen gondoljunk csak arra, hogy a matematika különféle ágainak új fejezeteire milyen megtermékenyítő hatással volt — és van most is — a modern algebrában kibontakozó, egészen újszerű s csodálatos perspektívákat megnyitó probléma-látás és tárgyalásmód. Így egészen természetes, hogy világszerte mind nagyobb érdeklődéssel fordulnak a kutatók az algebrai problémák felé; ennek nyomán pedig a fejlődés még hatalmasabb lendületet vesz. Hazánkban is, különösen a felszabadulás után, rohamos fejlődésnek indultak az algebrai kutatások, és ma már ott tartunk, hogy a magyar matematikában az analízis elvitathatatlan vezető szerepe mellett főként az algebra terén dicsekedhetünk igen értékes eredményekkel.

Gyorsan fejlődő tudományágaknál sok esetben fennáll annak a veszélye, hogy a fejlődés nem a helyes irányban történik, s különösen fennáll ennek veszélye speciális jellegénél fogva a modern algebrában. Éppen ezért nagy örömmel üdvözöljük a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának azt a határozatát, hogy megvizsgálja: helyes irányban fejlődnek-e a hazai algebrai kutatások és milyen módon lehetne a kutatásokat még hathatósabban elősegíteni? Az Akadémia Matematikai Bizottsága 1952. évi november 29-i ülésén egy-két algebrista bevonásával már tárgyalta ezt a kérdést és úgy határozott, hogy az 1953. évi akadémiai nagygyűlés alkalmával e kérdést a nyilvánosság bevonásával újra megvitatja. Ezért megbízta a jelen referátum készítőjét, hogy a november 29-i ülés anyagát összefoglalóan, megfelelő módon kibővítve ismertesse. Mielőtt ezen feladatomnak eleget tenném, legyen szabad megjegyeznem, hogy e referátum a magyar algebrai kutatók által a felszabadulás óta elért eredményeket veszi alapul; készítésénél felhasználtam az 1951-ben a Szovjetunióban az algebra fejlődéséről lefolyt roppant érdekes és tanulságos vita anyagát, valamint *Szele Tibor*nak az 1951. évi akadémiai nagygyűlésen tartott kitűnő beszámolóját. Főként az említett ülésen kialakult álláspontot ismertetem, de sok helyen mások, vagy a magam véleményét említem meg.

Az algebra a matematikának egyik legrégibb ága. A számokkal való számolás szabályainak a felismerése, valamint ismeretlenek meghatározására vonatkozó adhoc eljárások jelentik az algebra kezdő stádiumát. Komolyabb, tudományosabb formát akkor kezd ölteni, mikor a már ismert eljárások szisztematikus tárgyalására kerül sor (*Diophantos*, majd *al Chwarizmi*). A fejlődés gyors ütemben csak *Vietá*val, az igen alkalmas szimbolika bevezetése után indul meg: megállapítják a betűkkel való számolás szabályait, majd fokozatosan az egyenletek megoldásának problémája kerül előtérbe. A magasabbfokú egyenletekkel kapcsolatban felmerülő számos igen nehéznek bizonyuló probléma szolgál a fejlődés rúgójául. Így például a gyökjelekkel való megoldhatóság kérdése vezette *Galois*t azon módszerek és fogalmak megalkotására, amelyekkel döntő módon befolyásolta az egész algebra fejlődését. A XIX. században a matematikának rohamléptekkel való előretörése szükségessé tett újabb mennyiségi formákkal való számolást (kvaterniók, mátrixok, geometriai transzformációk stb.). Ezzel párhuzamosan a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria és az analízis halmazelméleti megalapozására irányuló vizsgálatok hatásaképpen kialakul az axiomatikus módszer fejlett formája. A századforduló után jelentősen megváltozik az algebra arculata. Kezdik észrevenni, hogy a matematika különféle ágaiban felbukkanó és azonos műveleti szabályoknak eleget tevő mennyiségek számára egységes tárgyalásmód kínálkozik, ha eltekintünk e mennyiségeknek és a köztük értelmezett műveleteknek konkrét jelentésétől. Egyre céltudatosabban és mind határozottabb formában összpontosítják a figyelmet csupán a műveleteknek előre megadott és alkalmas módon kiszemelt tulajdonságaira, igen általános tételeket állapítanak meg az axiomatikus módszer segítségével, és maguk a kutatók is meglepődve tapasztalják, hogy az eredmények előre nem is sejtett mértékben nyernek alkalmazást a matematikán belül, de az elméleti fizikában is. Az absztrakt csoport, test, gyűrű, majd háló* fogalmának kialakulása és a hozzájuk fűződő kutatások megindulása jelentik e ragyogó fejlődés legfontosabb állomásait. Az a nagymértékű, mintegy dinamó-szerű kölcsönhatás, amely az algebra ezen új ága és a matematika többi ága között fennáll, hatalmas nyereséget jelentett az egész matematika számára és igen sok kutatót vonzott e terület munkásainak sorába. Kifejlődnek az algebra egyes határterületein a matematikának fontos és ma is nagy iramban fejlődő ágai (folytonos csoportok elmélete, topologikus algebra stb.), és egyre dúsabb termést hoznak az algebrának fiatal hajtásai.

Az algebrának ez a nagymértékű és sokirányú fejlődése igen nehézzé teszi a mai algebra felosztását. A már említett szovjet algebrai vita alkalmával többen is megpróbálkoztak az algebrának különböző szempontok szerint való felosztásával, de egyik sem bizonyult kielégítőnek. Úgy látszik, e téren még sok elvi kérdés vár tisztázásra. Annyi azonban bizonyosnak látszik, hogy szigorú felosztás a fejlődés mai stádiumában aligha lehetséges. A továbbiakban ilyen felosztásra nem lesz szükségünk: tárgykörönként osztályozva tekint-

* *Háló*nak nevezzük az angol *lattice*nek megfelelő fogalmat.

jük végig a fontos hazai eredményeket. Egy dologra azonban már előljáróban utalnom kell. A számelmélet hovatartozásáról még nem alakult ki egyöntetű vélemény. Bár *A. G. Kuros* szovjet akadémikus és *Rédei László* lev. tag véleménye szerint a számelmélet az algebra részének tekintendő, a többség álláspontját fogadva el, a számelméletet — akár fontosságát, akár módszereit tekintjük — nem degradálhatjuk az algebra egyik alfejezetévé, hanem a matematika önálló, külön ágának kell számítanunk, és ezért referátumomban nem fogok kiterjeszkedni a számelméleti eredményekre.

Hazánkban számottevő algebrai kutatások csak a múlt század második fele óta folynak. Egyre több és értékesebb eredmény, fontos módszer fűződik magyar kutató nevéhez. Hogy csak a legkiválóbbakat említsük: *Hunyady Jenő, Kőnig Gyula, Rados Gusztáv, Kürschák József, Bauer Mihály, Haar Alfréd,* de ezenkívül sok más matematikus, köztük *Fejér Lipót* is, folytatott algebrai irányú vizsgálatokat. Közvetlenül a felszabadulás előtti időben csupán három kutató működik az algebra területén: *Bauer Mihály* a Galois-elméletben, az algebrai számtestek elméletében, *Hajós György* a csoportelméletben, *Rédei László* pedig az algebrai számtestek elméletében ért el figyelemreméltó eredményeket. *Bauer Mihályt* azonban tanításában korlátozzák, sok kutató matematikus külföldre kényszerül, és így nem tud *Bauer* körül kialakulni egy magyar algebrai iskola. A fiatal *Sándor Gyula,* nagy algebrai ígéretünk a fasizmus áldozata lett. Gyökeres változást hozott e téren is a felszabadulás. Az algebra terén működő kutatók száma szinte ugrásszerűen emelkedett, tehetséges fiatal kutatók tüntek fel, akik már eddig is sok értékes eredménnyel járultak hozzá a magyar matematikai iskola jó hírnevéhez, és egyre határozottabb formában bontakoznak ki annak a magyar algebrai iskolának körvonalai, amely a világhírű magyar analízis iskola nyomdokain halad. A kutatók számának növekedésével együttjárt a kutatási terület spektrumának jelentős kiszélesedése, kivált az absztrakt algebrában: a Galois-elmélet, az algebrai számtestek elmélete és a csoportelmélet bizonyos kérdései helyett ma már a csoport- és a gyűrűelmélet legtöbb fejezetében, emellett pedig az algebra számos más ágában és egy-egy határterületen munkálkodnak kutatóink és érnek el világviszonylatban is figyelemreméltó eredményeket.

Minek köszönhető mármost az algebrának ez a hatalmas fellendülése? Ennek két oka van. Az egyik az algebrának már említett, világszerte megfigyelhető hatalmas előretörése, amelynek nyomán számos, algebrai hagyományokkal rendelkező országban intenzív algebrai kutatások indultak meg. A másik ok pedig az a hatalmas méretű változás, amely tudományos életünkben felszabadulásunk nyomán bekövetkezett. Kormányzatunk tervszerű és egyre intenzívebb tudománypártoló intézkedései, kutatóink erkölcsi és anyagi megbecsülése, a kutatómunka biztosítása, a kutatás lehetőségének egyre szélesebb körök előtt való megnyitása, tudományos utánpótlásunk részére a gondtalan tanulás lehetőségének biztosítása — egész tudományos életünk fellendüléséhez vezetett és igen örvendetes, hogy ilyen szép eredményeket hozott létre az algebrai kutatásokban is. Algebristáink éltek a nekik nyujtott lehetőségekkel és meggyőződésünk, hogy már a közeljövő is újabb sikereket fog hozni, újabb eredményekkel fogja gazdagítani a magyar algebrát.

II. Eredményeink

Áttérek most a felszabadulás óta elért fontosabb eredmények ismertetésére. E néhány év alatt algebristáink oly sokoldalú, az algebrának sok kérdéskörét felölelő, kiterjedt tudományos munkásságot fejtettek ki, hogy az eredményeknek még futólagos ismertetésénél sem törekedhetünk teljességre. Egyes, nálunk kevéssé kultivált tárgykörökről csak épphogy említést tehetek — az idevágó eredmények ismertetését nehezen lehetne megvalósítani a rendelkezésemre álló idő keretein belül. Főként a tulajdonképpeni algebrára szorítkozom, az alkalmazási és határterületekről csak röviden fogok szólni, erre nem is érzem magam hivatottnak.

A klasszikus algebrai kérdések nem állottak kutatóink érdeklődésének középpontjában, bár szép eredményekkel e téren is dicsekedhetünk. *Turán Pál* a Descartes-féle jelszabályhoz hasonló alsó korlátot adott a pozitív gyökök számára vonatkozóan; egy másik, alapvető jellegű dolgozatában többek közt kimutatta, hogy a polinomok Hermite-féle kifejtése kapcsolatba hozható egy a gyököket tartalmazó sávval, továbbá több cikkben foglalkozott polinomok gyökeinek approximatív meghatározásával. A Newton-féle gyökközelítő eljárásról írt *Rényi Alfréd* és *Barna Béla*. *Szőkefalvi-Nagy Gyula* számos cikkét szentelte különféle kérdések vizsgálatának, amelyek túlnyomó részben bizonyos polinomok gyökeinek elhelyezkedésére, értékkészletére, abszolút értékére, racionális törtfüggvények pólusaira stb. vonatkoznak. Ezen eredmények egy része klasszikus tételek általánosításai, más része újabb keletű, sok esetben magától a szerzőtől származó eredményeknek továbbfejlesztése.

A mátrix-elmélet terén az *Egerváry Jenő*től és *Gyires Bélá*tól származó újabb eredményeket említhetjük meg. *Egerváry* a mátrixoknak alkalmas kanonikus alakban való előállítása révén jelentős mértékben egyszerűsítette a mátrix-kalkulus bizonyos problémáinak tárgyalását. Eredményeinek már eddig is sok alkalmazása van. A lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságára vonatkozóan *Surányi János* kapott érdekes eredményt.

Az algebrai struktúrák elméletében különösen gazdag terméssel dicsekedhetünk a csoport- és gyűrűelmélet terén. E területeken is a faktorizáció-probléma és a bővítés-elmélet, valamint a végtelen Abel-csoportok elmélete állott az érdeklődés homlokterében. A faktorizáció-probléma gyökerei a felszabadulás előtti időre nyúlnak vissza. A Minkowski-féle nevezetes megoldatlan problémát *Hajós György* véges Abel-csoportokra vonatkozó faktorizációs kérdéssé fogalmazta át, majd a csoportelméletbe átültetett problémát végleg megoldotta — ezzel a tudományos világ nagy elismerését vívta ki. A felszabadulást követően *Rédei László*nak és *Szele Tibor*nak sikerült *Hajós* eredeti bizonyítását nagy mértékben egyszerűsíteni. Újabb eredmények is születtek e téren: a Minkowski-féle probléma általánosítását kimondó Keller-féle sejtésnek *Hajós* csoportelméleti átfogalmazását adta, ezzel a problémát a dimenzió-számtól függetlenné tette s nagy lépést haladt a kérdés elintézése felé. *Hajós* és *Rédei* ciklikus csoportok faktorizációjának kérdésével is foglalkoztak.

Egy másfajta faktorizáció-problémát vetett fel *Szép Jenő:* ez egy csoportnak két alcsoport szorzatára való bontására vonatkozik. Analóg kérdésekkel foglalkozott *Szép*től függetlenül *Zappa* olasz matematikus is. A *Szép* által alkalmazott módszer kitűnő eszköznek bizonyult egyszerű csoportok vizsgálatánál, amely téren magának *Szép*nek, valamint *Rédei*nek vannak becses eredményei. A Zappa—Szép-féle szorzásnak megfelelő bővítés-problémának a Schreier-féle bővítés-elmélettel való analógiája vezette *Rédei László*t arra, hogy az általa kidolgozott nagyjelentőségű ferde szorzat fogalmának segítségével addig egymástól elszigetelten álló konstrukcióknak egységes és igen általános tárgyalását adja. Emellett érdekes új eredmények is adódtak. Vizsgálatai komoly külföldi visszhangra is találtak; nálunk *Rédei* több cikkén kívül *Steinfeld Ottó*nak, *Szélpál István*nak, *Szendrei János*nak és *Fuchs László*nak vannak csatlakozó eredményei. Lényegileg szintén a bővítés-elméletbe vágó eredmény *Fuchs*nak két csoport vagy gyűrű összes szubdirekt összegeinek meghatározására adott konstrukciója.

A végtelen Abel-csoportok elméletében, ebben a szerte a világon az algebrai kutatások élvonalában szereplő elméletben, szintén szép sikereket könyvelhetünk el. A legjelentősebb eredmény *Szele Tibor* nevéhez fűződik, akinek sikerült átültetni *E. Steinitz* klasszikus testelméleti eredményeinek lényeges részét az Abel-csoportok elméletébe, kidolgozva az Abel-csoportok algebrai és transzcendens bővítésének elméletét. *Szele* eredményei számos fontos és alapvető tételt foglalnak magukban. Itt említjük meg, hogy az úgynevezett algebrailag zárt Abel-féle csoportok egyenletrendszereire vonatkozóan érdekes eredményt kapott *Gacsályi Sándor.*

A végtelen Abel-csoportok direkt felbontásával kapcsolatos vizsgálatok során kutatóink igen nagy mértékben támaszkodtak szovjet tudósok által elért eredményekre; így többek közt értékes ösztönzést és indíttatást nyertek *A. G. Kuros* és *L. Ja. Kulikov* munkáiból. Számos szovjet eredményt foglal magában *Szele Tibor*nak ciklikus direkt szummandra vonatkozó kritériuma. Ciklikus csoportok direkt összegére való felbonthatóságot vizsgálnak p-csoportokban, ill. tetszőleges csoportban *Kertész Andor* és *Fuchs László.* Eredményeik több fontos felbontási tételt speciális esetként tartalmaznak. *Kertész* jól alkalmazható kritériumot talált direkt irreducibilis csoportokra való bonthatóságra.

Az említetteken kívül számos speciális kérdést oldottak meg kutatóink az Abel-csoportok elméletében. Ezek közül kiemeljük *Szelé*től a p-csoportok endomorfizmus-gyűrűje centrumának meghatározását, valamint a direkt összeg fogalmának egy általánosítását. A többi dolgozat közül jónéhány, speciális tulajdonságokkal rendelkező Abel-csoportoknak teljes leírását szolgáltatja (*Rédei, Szele, Kertész, Szélpál, Szendrei, Fuchs*). A nem-kommutatív csoportok elméletében *Rédei, Szele* és *Szép* dolgozatait említjük meg, amelyek számos speciális problémát vitatnak meg.

A csoportfogalom általánosítása terén elért eredményünk aránylag kevés van. Megemlítendő *Rédei*től a Schreier-féle bővítés-problémának általánosítása félcsoportokra, *Szász Gábor*tól az asszociativitás-feltételek függetlenségének igazolása, valamint a *Kalmár László* által adott egyszerű bizonyítás a Markov—Post-tételre, amely szerint a félcsoportok szóproblémája algoritmikus eljárással nem oldható meg. Ugyancsak *Kalmár* nevéhez fűződik a valós számok Cantor-féle bevezetésére *B. L. van der Waerden* által adott algebrizált eljárásnak a tökéletesítése.

A gyűrűk elméletében is széles területet ölelnek fel a kutatások. *Rédei* és *Szele* két hosszú dolgozatban foglalkozott olyan kérdésekkel, amelyek adott gyűrűben értelmezett függvényeknek polinom-alakban történő előállításával kapcsolatos problémák körül forognak. Ugyancsak *Rédei*nek sikerült a feltételek megfelelő módosításával kiterjeszteni az algebra (hiperkomplex rendszer) fogalmát úgy, hogy ezek az ú. n. dupla-algebrák már nem teszik szükségessé az alapgyűrű kommutativitását. Ide sorolandó még *Fuchs*nak több dolgozata, amelyekben kommutatív gyűrűk ideáljainak különféle felbontásaival és az ezek közötti kapcsolatokkal foglalkozik.

Szele Tibor, ill. *Rédei László* és *Steinfeld Ottó* azt az érdekes problémát tették vizsgálat tárgyává, hogy mennyire van determinálva egy gyűrű additív csoportja, ill. multiplikatív struktúrája által. Vizsgálataik sok meglepő eredményre vezettek.

A *Kürschák József* vizsgálatai nyomán megindult és azóta igen sokat fejlődött értékelés-elméletet sikerült *Fuchs László*nak egy további lépéssel általánosítani. Az eredmény lehetőséget nyujt arra, hogy az integritási tartományok bizonyos tulajdonságait egy részben rendezett csoport egyszerűbb struktúrájában vizsgáljuk.

A gyűrűelméletben felvetett számos speciális kérdéssel is foglalkoztak kutatóink (*Rédei, Szele, Steinfeld, Szélpál, Szendrei, Fuchs*). Több cikk olyan gyűrűk karakterizálására irányuló vizsgálatokat tartalmaz, amelyek speciális tulajdonsággal rendelkeznek (pl. minden részgyűrű ideál vagy minden részgyűrűben van egységelem, vagy pl. *Szendrei*nek legfrissebb eredménye: olyan gyűrűk, amelyek direkt szummandjai bármely, őket ideálként tartalmazó gyűrűnek stb.).

A rendezett struktúrák elméletének egyes kérdéseivel foglalkozott *Fuchs László, Szele Tibor* pedig érdekes eredményre jutott a nem-kommutatív testek elrendezhetőségére vonatkozóan.

Háló-elméleti vonatkozásban — ezen elméletnek az újabb algebrában lévő szerepéhez képest — csak kevés eredményt könyvelhet el a magyar matematika. Mindazonáltal örvendetes ténynek kell tekintenünk, hogy *Szász Gábor* személyében már eredményesen működő háló-elméleti érdeklődésű kezdő kutatónk is van. *Szász Gábor* eredményei félig moduláris hálókra, ill. a komplementum fogalmának általánosítására vonatkoznak, továbbá sikerült neki a disztributív hálók axiómarendszerének függetlenségét kimutatni. *Fuchs* a kommutatív gyűrűk ideálelméletében egyes régebbi eredményeknek adta háló-elméleti tárgyalását.

Gyengén állunk algebrai könyvek dolgában. A felszabadulás óta algebrai tárgyú könyv csak kettő készült el, ezek is csak kéziratban. Az egyik *Szele Tibor* bevezető algebrai tankönyve, a másik pedig *Rédei László*nak a csoport-, gyűrű- és testelmélet számos kérdéskörét felölelő, komoly studiumra alkalmas kézikönyve. Ezek a munkák még ez évben elhagyják a sajtót.

Az algebra határterületein felmerülő problémák nem foglalkoztatták kellő mértékben kutatóinkat, néhány fontosabb eredményről azonban itt is beszámolhatunk. A matematikai logikával kapcsolatos kutatásokról már tettem említést; az algebra transzfinit módszereivel csupán egy dolgozat *(Szele)* foglalkozik. A geometriával határos területről már hivatkoztam *Szőkefalvi-Nagy Gyulá*nak kiterjedt vizsgálataira; ugyancsak *Szőkefalvi-Nagy Gyula* nevéhez fűződnek egyes, a geometriai szerkesztések elméletébe vágó kutatások is. Igen kevés történt algebrai számelméleti vonatkozásban. Itt *Rédei*nek az osztálytestek elméletében végzett bizonyos régebbi vizsgálatainak átdolgozásáról és továbbfejlesztéséről kell szólanom. Megemlítem még *Dénes Péter*nek a Fermat-féle problémakörrel kapcsolatos és algebrai számelméleti jellegű vizsgálatait, továbbá *Fuchs*nak a relatív ideálnormára vonatkozó eredményét. A folytonos csoportelmélethez közelálló eredmények szép számmal találhatók *Aczél János* dolgozataiban. Ezek főként bizonyos függvényegyenletek megoldásaira vonatkoznak és algebrai szempontból is sok érdekeset tartalmaznak. *Rényi Alfréd*nak az eloszlások algebrájáról írt cikkében is találhatunk algebrai vonatkozásokat.

III. A kutatások analizálása

Végigtekintve a kutatóink által elért gazdag eredményeken, örömmel szögezhetjük le, hogy algebrai vonatkozásban is számottevő tényezővé vált a magyar matematika. Különösen szembetűnő ez a fejlődés, ha a dolgozatok évszámát figyeljük meg: évről-évre fejlődést mutatnak algebrai kutatásaink mind mennyiségben, mind színvonalban, mind pedig a problémák gazdagságában. Különösen nem-algebrista matematikus számára lesz tanulságos megvizsgálni, hogy mik tekinthetők a hazai algebrai kutatások legjelentősebb eredményeinek és hogy általában, milyen problémák, milyen módszerek karakterisztikusak a kialakulófélben lévő magyar algebrai iskolára.

Mindenekelőtt az tűnik fel, hogy a vezető szerepet az algebrai struktúrák elméletének különféle kérdései és ezen belül is a csoport- és gyűrűelméleti problémák viszik, bár — és ez szintén fontos momentum — egyéb területeken is értékes eredményekkel dicsekedhetünk. Igen örvendetes, hogy, a csoport- és gyűrűelméleten belül maradva is, a vizsgálatok elég széles területet ölelnek fel, igen fontos kutatási területeken munkálkodnak algebristáink. A legfontosabb eredményeink is e területről valók: a faktorizáció-probléma és a bővítés-elméleti kérdések terén elsősorban *Rédei László* és *Hajós György*, azonkívül *Szép Jenő*, a végtelen Abel-csoportok elméletében pedig *Szele Tibor* eredményei emelendők ki. Nem lenne azonban tökéletes ez az értékelés, ha nem említenők meg a *Rédei* és *Szele* által egyéb területeken is kifejtett úttörő munkásságot, valamint fiataljaink által megoldott néhány igen szép és fontos problémát.

Ezekután nézzük meg a hazai algebrai kutatások jellemző vonásait. Elsőnek említem meg azt a törekvést, amely ugyan még nem tekinthető algebránk döntő jellemvonásának, de elsőrendű fontosságú és sok kutatásban már megnyilvánult. Ez a kisebb-nagyobb elméletek megalkotására és elszórt speciális esetek összefoglalására való törekvés. Ez figyelhető meg pl. *Rédei*nek a ferde szorzatról szóló két alapvető dolgozatában, vagy *Szelé*nek az Abel-csoportok algebrai lezárásáról, valamint ciklikus direkt szummand létezéséről szóló dolgozataiban, s legyen szabad itt a ciklikus csoportok direkt összegére való bontásról szóló saját dolgozatomat is megemlítenem.

Egy másik karakterisztikus sajátság az említettel bizonyos tekintetben ellentétes: sok cikk speciális tulajdonságokkal rendelkező csoportok, gyűrűk jellemzését tűzi ki feladatul (pl. csoportok, amelyeknek minden valódi alcsoportjuk kommutatív, vagy nem tartalmaznak két egymással izomorf alcsoportot stb.). Nem-algebrista matematikusok részéről bizonyára könnyen érheti az a vád az ilyen cikkek íróit, hogy túlságosan speciális és talán sokak számára kevéssé érdekes kérdésekkel foglalkoznak. Ezek a vádak azonban — ha egyáltalán felmerülnek — könnyen eloszlathatók, ha figyelembevesszük, hogy hasonló természetű kérdések pl. az analízisben igen sokat szerepelnek és nagy jelentőséggel bírnak (folytonos, de seholsem differenciálható függvények stb.). És hogy ezek a gyakran súlyos kérdéseket érintő vizsgálatok sokszor milyen fontos eredményekre és módszerekre vezettek, arra számos példát lehetne felhozni magyar szerzőkkel kapcsolatban is. Csak egyet említek: ilyen speciális problémák vizsgálata során merült fel *Szele Tibor*nál a direkt összeg általánosításának szükségessége, amely már nem egy további kutatásnál jutott szóhoz.

Végül pedig, de nem utolsósorban említem meg azt az igen egészséges és termékeny hatást, amelyet kutatásainkban a csoportelmélet, ill. a gyűrű- és testelmélet közötti analógiák felismerése jelentett. Ilyen összefüggések felkutatására irányuló törekvés és analóg problémák közös tárgyalása — talán ezek a magyar absztrakt algebrai kutatások legjellemzőbb sajátságai. Ez egészen speciális magyar irányzat, amely ilyen tudatosan és ilyen pregnánsan, úgy hiszem, sehol a világon nem nyilvánul meg.

Ha ki akarnók jelölni a magyar algebrai kutatások helyét világviszonylatban, akkor örömmel állapíthatjuk meg, hogy előkelő helyet foglalunk el. Nem dicsekedhetünk ugyan annyi és oly sok jelentős eredménnyel, az algebra szinte minden részére kiterjedő sokoldalú vizsgálatokkal, mint pl. a Szovjetunió, USA, Németország, vagy Franciaország, de büszkén jelenthetjük ki, hogy az említett államoktól eltekintve, algebrai kutatásunk az élvonalban halad. Az is nagy díszére válik a magyar matematikának, hogy olyan nagyjelentőségű és döntő szerepet játszó modern elmélet, mint az értékelés-elmélet megalapítása magyar kutató: *Kürschák József* nevéhez fűződik.*

Vitathatatlanul jelentős sikereink mellett komoly hiányosságai is vannak algebrai kutatásainknak, amelyeket alaposan meg kell vizsgálnunk. Kutatóink vizsgálatai felölelik ugyan az algebrának számos ágát, mégis meg kell állapítanunk, hogy a szorosabb értelemben vett algebrán belül és az algebrának a matematika többi ágaival szomszédos határterületein igen fontos diszciplinák alig vannak, vagy egyáltalán nincsenek képviselve. Így pl. keveset foglalkoztak kutatóink a hálók elméletével, amely pedig ma már közel oly fontos és átfogó szerepet tölt be a matematikában, mint a csoportelmélet. Ugyancsak hiányzanak a Galois-elméletbe és az általános testelméletbe vágó eredmények, és nem szerepelnek kellő súllyal a lineáris algebra területéről vett problémák sem. Legifjabb kutatóink elhanyagolják a funkcionális algebra kérdéseit s nem talál követőre *Szőkefalvi-Nagy Gyula* munkássága sem az algebrai geometria terén, pedig ő egyik legkitünőbb szakértője a polinomok geometriájának. Szinte teljesen figyelmen kívül hagyják kutatóink a topológikus algebra, a Lie-csoportok és algebrák területét — egy olyan területet, amely iránt világviszonylatban meglehetősen nagy érdeklődés nyilvánul meg. Szomorúan kell megállapítanunk, hogy a hiányzó vagy alig kultivált területek között olyanok is akadnak, amelyeken értékes hagyományokkal rendelkezünk *(Bauer Mihály, Haar Alfréd)*. Érezhető hiányossága algebránknak a határterületekkel és alkalmazásokkal való kapcsolatoknak a szegénysége. Így pl. hiányoznak a funkcionál-analízis által felvetett algebrai problémák, a differenciálalgebra, valamint a gyakorlati életben és a természettudományokban felmerülő algebrai vonatkozású kérdések vizsgálata. Egészen fehér foltot jelent a hazai matematika térképén a reprezentáció-elmélet, amely pedig igen komoly tényező a csoportok és az algebrák elméletében, és amelyből napjainkban a Szovjetunióban az analízisnek egy fontos új ága sarjad ki. Egyedül a matematikai logikával való kapcsolataink bizonyultak eredményeseknek, ami főként *Kalmár László*-nak köszönhető.

* Legyen szabad felhívnom a figyelmet arra, hogy az idén van 40 éve, hogy *Kürschák* alapvető dolgozata a Crelle Journalban megjelent.

Arra természetesen nem gondolhatunk, hogy a felsorolt hiányosságok erőszakos beavatkozással egyhamar kiküszöbölhetők. Nem is lenne helyes, ha ezt nem az egészséges fejlődéstől várnók. Megfelelő irányítás, meggyőzés, gondos és alapos nevelés azonban jelentős javulást idézhet elő. Különösen annak érdekében van sok tennivaló, hogy algebristáink nagyobb szeretettel és intenzívebben forduljanak az algebrának a matematika egyéb ágaiban, a fizikában és a gyakorlatban való alkalmazásainak kérdései felé. Az már ma minden algebrista előtt világos, hogy ezek a vizsgálatok nemcsak az illető tudományág fejlődését segítik elő, hanem ezáltal sokat, sőt egyes esetekben igen sokat nyerhet maga az algebra is. Igen nagy hasznát vehetnők ebben a vonatkozásban a szovjet algebristák gazdag tapasztalatainak és reméljük, hogy — részben a Szovjetunióban tanuló *Kis Ottó* aspiráns közvetítésével — ezek el is jutnak majd kutatóinkhoz.

IV. A publikációk

Az absztrakt algebrai vizsgálatoknál fennáll annak veszélye, hogy az algebrai tartalom rovására az absztrakció nyomul előtérbe és ennek folytán bizonyos öncélúság nyilvánul meg a kutatásokban. Ezért fontos dolog megvizsgálni, hogy algebristáink nem szakadnak-e el túlságosan a valóságtól, nem térnek-e le a helyes útról az érdektelen túl-absztrakt felé. Hiszen alig jelent problémát magunk által konstruált struktúrákat gyártani halomszámra és olcsó siker a definíciókból ismert módszerek alkalmazásával kihozott triviális következményekből futószalagon írni a cikkeket. Ilyen kutatások azonban — ha bizonyos esetekben érdekes eredményekre is vezetnek — nem értékesek: nem többek egyszerű logikai tornánál. Természetesen éles határt nem lehet vonni az érdekes és érdektelen között, hiszen nem egyszer fordul elő az, hogy egy-egy cikk értékelésében megoszlanak a vélemények. Ez persze valóban komoly s jelentős eredményeknél nemigen szokott előfordulni. Jól tudjuk, hogy egy dolgozat helyes megítélésében problémát az okoz, hogy nem lehet annak alapján dönteni, van-e a cikkben hiba vagy nincs. Egészen hibátlan cikk is lehet menthetetlenül rossz, ha teljesen érdektelen, mesterkélt problémát vitat meg. Kétségtelen, ez komoly óvatosságra kell hogy intse a kutatót.

Kuros akadémikus a moszkvai algebrai vita alkalmával elhangzott felszólalásában szintén rámutatott arra, hogy igen könnyű dolog különféle struktúrákat életrehívni, „elméleteket" kidolgozni, de semilyen tudomány ilyen módon nem fejlődhetik. Ezzel természetesen távolról sem az absztrakció, az általánosításra irányuló törekvések ellen szól: ennek jogosultságát értelmetlen és tudományellenes dolog lenne tagadni, hiszen akkor el kellene vetni a csoportfogalom számos igen termékenynek bizonyuló általánosítását is. De még az ellen sem lehet kifogást emelni, hogy egy-egy axióma jelentőségének megvizsgálása céljából olyan struktúrákat teszünk vizsgálat tárgyává, amelyekben egy *fontos* algebrai struktúra összes többi axiómái fennállanak a megvizsgálandótól eltekintve. A százlábúval kapcsolatos közismert hasonlat erős túlzás, hiszen ilyen axióma-elhagyással keletkezett a matematikának az a nevezetes ága, amelyet ma Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria néven tart számon a tudományos világ. — Az absztrakció másik formája: mikor egy fontos tulajdonság kivizsgálása céljából az axiómákat gyengítjük, szintén nem kifogásolható (feltéve, hogy ezt nem viszik túlzásba a kutatók), hiszen ez is a tudomány fejlődését segíti elő.

Kérdés ármost, hogy mi a helyzet nálunk e téren. Úgy tűnik, hogy elég jó. Öncélúság, vagy higítás útján történő általánosítás nem kisérőjelensége algebrai kutatásainknak. Hiányosság azonban, hogy egyes helyeken a nyert eredmények nincsenek eléggé kiaknázva. Algebristáinknak mindenképpen arra kell törekedniök, hogy eredményeiknek minél szélesebb körben való alkalmazását nyujtsák, hiszen a nagymértékű alkalmazhatóság egyik próbaköve annak, hogy a kutatás helyes irányban történt. A konkrét struktúrákkal kapcsolatos eredmények kicsiny száma nemcsak nálunk, hanem világszerte mutatkozó hiányosság. Kutatóinknak egyre nagyobb gondot kellene fordítaniok átfogóbb, nagyobb jelentőségű kérdések vizsgálatára, a maguk problémái mellett olyanokra is, amelyek szerte a világon az algebrai kutatások középpontjában állanak. Ezeket a nagy és alapvető problémákat kellene elsősorban fiataljaink figyelmébe is ajánlani.

Még néhány szót a publikációkkal kapcsolatban. Úgy tűnik, hogy aránylag sok a rövidlélekzetű, kisebb dolgozat, bár kétségtelen, hogy ezek túlnyomórészben egy-egy érdekes és fontos részletkérdést vitatnak meg. Ezzel kapcsolatban érdemes felvetni azt a kérdést, hogy ez nem jelenti-e algebrai kutatóink erejének elaprózását: vajjon nem lenne-e helyesebb több kisebb problémát felölelő, nagyobb dolgozatoknak a publikálása? Mielőtt e kérdést érdemben elintéznők, két igen lényeges szempontot kell figyelembevennünk. Először azt, hogy az algebrai bizonyítások az algebra természeténél fogva igen tömörek, rövidek, sokszor egészen komoly és nehéz tételek bizonyítása is elintézhető néhány sorban. Innen van az, hogy egy 3—4 oldalas algebrai cikk átlagban véve kb. 6—10 oldalas, ugyanolyan fajsúlyú s azonos szellemi megerőltetést kívánó (klasszikus) analízis tárgyú cikknek felel meg. A rövid cikkek tehát az algebra természetéből folynak. A másik, nem kevésbbé fontos szempont az, hogy több rokontémájú, de nem a *legszorosabban* egymáshoz kapcsolódó eredménynek egy nagyobb dolgozatban való megjelentetése azért nem látszik kívánatosnak, mert ez igen megnehezíti az irodalomban való tájékozódást. Szinte minden matematikusnak nem kis bosszúságot okozott az, hogy erejét már megtárgyalt, de „eltemetett" kérdések vizsgálatára pazarolta. A matematikai cikkek számának hatalmas mérvű növekedése azt eredményezte, hogy a kutatók saját munkájuk irodalmi vonatkozásait sokszor csak a referáló folyóiratokból ismerik meg. Ilyen szempontból pedig kívánatosabbnak látszik a nem összegyűjtött közlés. Az indokolatlan elaprózás természetesen elítélendő és az sem helyeselhető, ha valaki rövid cikkekre specializálja magát. Olyan esetekben, mikor eredményeinknek közvetlen folytatását várjuk saját magunk kutatásaitól, nem szabad a meglévő eredmények publikálásával sietni, hiszen ha sikerül továbbfejlesztenünk eredményeinket, gyakran az új eredmények a régieket új, érdekesebb megvilágításba helyezik. A gyors és részletekben való publikációt indokolhatja, ha a prioritást kell biztosítani; ez azonban nem gyakori eset.

V. *A kutatók*

A kutatóink számában beállott örvendetes növekedésről és ennek okairól már bevezetőben szólottam. Legyen szabad ehelyütt újból hangsúlyoznom, hogy a közeljövőben további komoly fejlődésre számíthatunk; erre a reményre feljogosít bennünket az a körülmény, hogy növekvő létszámú és színvonalú egyetemi hallgatóságunk egyre nagyobb érdeklődést mutat a tudományos kérdések iránt és az évről-évre egyetemeinkről kikerülő kutató-jelöltek egyre inkább beváltják a hozzájuk fűzött reményeket.

A fiatal algebrista kutatók feltűnése és az, hogy ezek eredményei jórészt az őket irányító tapasztaltabb kutatók érdeklődési területeihez kapcsolódnak, valamint a szép számmal szereplő közös dolgozat ékesen tanúskodik az algebristáink között kialakult egészséges szellemről. Kutatóink nem egymástól elszigetelten, részleteredményeiket egymás elől eltitkolva, csupán egyéni becsvágytól fűtve végzik munkájukat, hanem ellenkezőleg: egymást tanácsokkal segítve, a fiatalokat támogatva és irányítva. Erről a már említetteken kívül az a tény is tanúskodik, hogy sok olyan kutatási terület is van, ahol három-négy algebrista is munkálkodik, egymás eredményeit kiegészítve, fejlesztve. Igen gyümölcsözőnek bizonyult az a szokás, hogy a vizsgálatok egyes fázisaiban vagy az eredmények publikálása előtt közlik egymással — még a helyileg távolabb működő kutatókkal is — az elért eredményeket, ill. a felmerülő problémákat. Nagy szolgálatot tesz e téren a Bolyai János Matematikai Társulat az előadóülésekkel. Ezáltal sok esetben nyert értékes gyarapodást a megjelenő dolgozat részben a tárgyhoz fűzött észrevételek, részben pedig az addig figyelembe nem vett eredményeknek a vizsgálatba való bevonása révén. Fiatal s kutatómunkájuk kezdetén álló algebristáink sok értékes tanácsot és útmutatást nyertek fejlettebb kutatóinktól, de ugyanakkor emezek is igen sokat köszönhetnek a fiatalabbak, tanítványaik észrevételeinek. Sok fontos és értékes megjegyzésért, érdekes probléma felvetéséért lehetnek algebristáink hálásak a nem-algebrista matematikusoknak is.

Nem mulaszthatjuk el, hogy ehelyütt meg ne említsük azt a nagy és értékes segítséget, amelyet a kibontakozó magyar algebrai iskola feje: *Rédei László* nyujt algebrai kutatóinknak. Közvetlen környezetében működik algebristáinknak mintegy a fele, de útmutató tanácsai minden algebristához eljut-nak. Igen nagy hatással van algebristáinkra *Szele Tibor* is, akinek irányítása mellett nem egy fiatal kutató ért el szép eredményeket. Főként *Rédei* és *Szele* intenzív nevelőmunkájának, inspiráló hatásának köszönhető, hogy az utóbbi években a szegedi és a debreceni egyetem egymásután nevelte ki az algebrai utánpótlást. A budapesti egyetemen az algebra terén, a vidéki egyetemekkel összehasonlítva, elmaradás észlelhető, de bizonyos javulás már itt is mutatkozik.

A fiatal kutatókkal kapcsolatban rá kell mutatnunk egy igen fontos problémára. Az egészen természetes, hogy a fiatalság a tudományban is különös vonzalommal viseltetik az új, a modern iránt, és ezért nagy szeretettel és lelkesedéssel fordul a matematikának újonnan kifejlődött ágai, így az absztrakt algebra felé is, bizonyos mértékig elhanyagolva a klasszikus irányzatokat. Félő azonban, hogy kellő ismeretek megszerzése nélkül vetik magukat a kutatásra, csábítja őket az, hogy aránylag kevés előtanulmánnyal is publikálható eredményeket érhetnek el. Emellett azonban látókörük nem fejlődik, nem látnak tovább a maguk egészen szűk területénél. Ezért különös nyomatékkal kell hangsúlyozni azt, hogy a megfelelő alapismeretek elsajátítása, a kellő perspektíva megszerzése a matematika minden fontos területén, és ezen belül az algebra klasszikus s modern ágaiban és alkalmazásaiban, nemcsak azért elengedhetetlen feltétele a jó kutatómunkának, mert ennek birtokában a kutató algebrista eredményeinek jobb kiaknázását remélheti, hanem azért is, mert ez bizonyos mértékben megóvja az algebristát attól, hogy öncélnak tekintse új eredmények publikálását és érdektelen kérdésekre pazarolja energiáját. Hadd emeljük itt ki *N. J. Vilenkin* felszólalását a szovjet algebrai vitában, aki bebizonyította, hogy a legjelentékenyebb eredmények mindig a konkrét esetekben felmerült problémák során keletkeznek. Az algebrában is az igazi fejlődés útját a konkrétan felmerülő algebrai struktúrák jelzik. Fiatal algebrai kutatóinktól, elsősorban aspiránsainktól, ezért helyes lenne megkívánni, hogy algebrai tanulmányaik mellett beható ismereteket szerezzenek speciális algebrai studiumuknak a matematika többi ágaiban és a gyakorlatban való alkalmazása terén is.

Az utóbbi időben kutatóink egyre behatóbban tanulmányozzák a szovjet algebristák kimagasló eredményeit és ezt igen jól érvényesítik a maguk kutatásai közben. Különösen csoportelméleti vonatkozásban járt ez gazdag eredménnyel. A szovjet algebristákkal való kapcsolataink azonban igen gyengék, e téren komoly elmaradás jelentkezik, pedig értékes hagyományokra is hivatkozhatunk *(Bauer* és *Csebotarjov).* A közeljövőnek egyik fontos feladata kell hogy legyen a szovjet algebrai iskolával való kapcsolat felvétele és kiépítése. Más kiváló külföldi algebristákkal való együttműködést is tovább kell fejleszteni és újabb kapcsolatokat teremteni, elsősorban a baráti államok kutatóival. Magyar algebristák külföldi publikációi, valamint külföldi algebristáknak magyar folyóiratokban megjelent cikkei tanúskodnak amellett, hogy ezek a kapcsolatok igen gyümölcsözőknek bizonyultak és nem csekély mértékben járultak hozzá a magyar algebra nemzetközi elismeréséhez.

Algebristákkal kapcsolatban vetődött fel, de nem speciális algebrista, hanem általános matematikus-probléma: az időhiány kérdése. Mindig a legnagyobb örömmel szögezzük le, hogy míg a felszabadulás előtti időben sok kiváló matematikusunk nem tudott megfelelő munkához jutni, sokan nélkülözni voltak kénytelenek, vagy kivándorolni kényszerültek, addig most államunk méltó módon gondoskodik a kutatókról, biztosítva oktató és kutató munkájukat. Sőt, egyetemeink nagymérvű fejlődése sokkal több jólképzett matematikus beállítását tenné szükségessé, mint amennyi jelenleg rendelkezésre áll. Azonban az a tény, hogy nagy a hiány megfelelő káderekben, jelentős terheket ró a kutató matematikusokra. A kötelező előadások mellett — speciális előadásokra, szemináriumokra csak nagyon kevés idő jut — a sok hosszú értekezlet és a nagy adminisztrációs munka sok értékes időt és energiát von el a kutatás elől. Ezen igen nehéz lenne lényegesen változtatni, hiszen tudósaink gazdag tapasztalataira, tanácsaira okvetlenül szükség van a tudományos élet és a felsőoktatás irányításában, azonban szükségesnek látszik, hogy ezt a kérdést illetékesek alaposabban megvizsgálják és fontolóra vegyék, miként lehetne több időt biztosítani a kutatómunka céljaira.

VI. Javaslatok

A fentiekben igyekeztünk, a rendelkezésünkre álló időhöz mérten, összefoglalni a hazai algebrai eredményeket, ezeket analizálni és rámutatni a fennálló hiányosságokra, nehézségekre. Ezzel azonban nem szabad megelégednünk, hanem minden erőnkkel arra kell törekednünk, hogy mindezt felhasználva, elősegítsük az algebrának a helyes úton való fejlődését és kiküszöböljük a munkánkban jelentkező hibákat, hiányosságokat. Ennek érdekében legyen szabad a következő javaslatokat tennem:

1. *A kutatási terület kiszélesítése.* Ez vonatkozik egyfelől az algebra területén belül maradva, másfelől a matematika többi ágaival és a gyakorlattal való kapcsolatokra kiterjesztve. Mindezt azonban úgy kell megvalósítanunk, hogy közben még intenzívebben fejlesztjük tovább azokat a területeket, ahol szép és jelentős eredményekkel dicsekedhetünk. Nem vagyunk nagy ország, és így természetesen nem rendelkezünk akkora kutatógárdával, hogy a fontos területek mindegyikén egyenlő mértékű kutatást folytathassunk. Nem is lenne helyes, ha erre törekednénk, mert ez erőnk szétforgácsolására vezetne, és bizonyára kevesebb értékes eredményt is tudnánk csak felmutatni. Viszont helyes volna, ha amellett, hogy egyre növekvő lendülettel folytatjuk a kutatást a magyar algebra súlyponti területein: a csoportelmélet és a gyűrűelmélet vonalán, fokozatosan kiterjesztenénk vizsgálatainkat éppen azokra az elméleti és gyakorlati vonatkozású problémákra is, amelyekkel ezek szorosan összefügg-

nek. Így igen fontos lenne a folytonos csoportok elméletének, a háló-elméletnek és a gyakorlati kérdések vizsgálatának tervszerű és erőteljes fejlesztése.

2. *A publikációk színvonalának emelése.* A hazai algebrai kutatások már elérkeztek arra a fokra, hogy komoly igényeket támasszunk a publikációkkal szemben. Arra törekedjünk, hogy a vizsgált problémát minél alaposabban megvitassuk, minél több ismert eredménnyel hozzuk kapcsolatba és igyekezzünk eredményeinknek minél szélesebb körben való alkalmazását is adni. A dolgozat megírásánál járjunk el a legnagyobb körültekintéssel. Gondoljunk arra, hogy egy gyenge, féligsikerült vagy kevesetmondó dolgozat többet árt a cikkírónak, mint amennyit 1—2 szép és ügyes dolgozat használni tud.

Fontos feladata lenne algebristáinknak egyes ismertetésszerű, eredményösszefoglaló cikkek közlése a magyar matematikusok számára. Jó lenne, ha a III. Osztály Közleményei egyik feladatául tűzné ki az ilyen cikkek közlését.

3. *Algebrai tárgyú könyvek kiadásának fokozása.* Tudjuk, hogy egy-egy jó tankönyv, vagy monográfia milyen nagy segítséget jelent a kutatóknak, kezdőknek és fejlettebbeknek egyaránt. Amikor örömmel szögezzük le, hogy a felszabadulás után megjelent matematikai könyvek száma milyen örvendetesen nagy, sajnálattal kell megállapítanunk, hogy ezek közt szorosabb értelemben vett algebrai tárgyú munka egyáltalán nem szerepel. Remélhetőleg hamarosan javulás következik be ebben a vonatkozásban is. *Szele Tibor* bevezető algebrai tankönyve, *Rédei László* nagy algebrai kézikönyve, valamint *A. G. Kuros* kitűnő csoportelméleti tankönyvének fordítása ez év folyamán megjelenik. Ezeken kívül további tankönyvek és fordítások kiadása van folyamatban. Igen örvendetes volna, ha a fejleszteni kívánt területek mindegyikén rövidesen megjelenhetne egy-egy jó tankönyv, akár magyar szerzőtől, akár pedig fordításban.

4. *A fiatalok tervszerű és alapos nevelése, különös tekintettel az algebra határterületeire és alkalmazásaira.* Ennek fontosságát már fentebb kifejtettem, most csak újból, nyomatékosan alá kívánom húzni.

5. *Más kutatási területek matematikusaival való kapcsolatok elmélyítése.* Ezen a téren bőven akad tennivalónk. Helyes lenne, ha nem-algebrista matematikusaink fokozottabb mértékben fordulnának algebrai természetű problémáikkal algebristáinkhoz, viszont algebristáink nagyobb érdeklődést mutatnának a matematika különféle ágaiban felmerülő algebrai problémák iránt. Különösen fontos lenne az Alkalmazott Matematikai Intézettel való szoros és állandó kapcsolat megteremtése.

6. *Kapcsolatok kiépítése és továbbfejlesztése kiváló külföldi algebristákkal, elsősorban a Szovjetunió és a baráti államok algebrai kutatóival.* Felesleges ecsetelnem, hogy a kiváló külföldi tudósokkal való tudományos együttműködés milyen nagy mértékben lendítheti előre a hazai kutatásokat. Igen sokat várhatunk a szovjet csoportelméleti iskolával való kapcsolatoktól.

7. *A magyar algebra, s általában a magyar matematika történetének feldolgozása, kiváló algebristáink munkásságának ismertetése.* Kiváló elődeink

emlékének méltó formában való megörökítése elsőrendű feladatunk kell hogy legyen.

Befejezésül, szeretnék hálás köszönetet mondani az algebristák nevében legfelsőbb tudományos fórumunknak, a Magyar Tudományos Akadémiának és III. Osztályának, hogy a hazai algebra helyzetének ilyen széleskörű megvitatásával hathatós segítséget nyujt algebrai kutatóinknak. Meggyőződésünk, hogy ez a vita igen értékes lesz mindnyájunk számára és mi algebristák igen sokat fogunk belőle tanulni s nagy hasznát fogjuk venni további kutatómunkánkban. Nagy örömmel várunk és hálával fogadunk minden bírálatot és tanácsot, és minden erőnkkel azon fogunk munkálkodni, hogy minél szebb és értékesebb eredményekkel gazdagítsuk a magyar algebrát.

HOZZÁSZÓLÁSOK

SZELE TIBOR:

Fuchs László előadása tökéletes képet nyujtott a hazánkban folyó algebrai kutatások helyzetéről és e kutatásokkal kapcsolatban felmerülő problémákról. Azzal kell kezdenem hozzászólásomat, amivel *Fuchs László* előadása végződött, hogy t. i. én is köszönetet mondjak a Magyar Tudományos Akadémiának azért, hogy algebristáink kutatómunkáját e vitaülés megrendezésével is elősegíti. Köszönetemet fejezem ki továbbá *Fuchs László*nak is rendkívül fontos és értékes munkájáért, amelyet az elhangzott kitűnő előadás elkészítésére fordított.

Fuchs László előadása annyira alapos, minden részletre kiterjeszkedő beszámoló volt, és a felvetődött problémákkal kapcsolatban is annyi konkrét megoldási lehetőségre mutatott rá, hogy hozzászólásomban jórészt arra szorítkozhatom, hogy a magam részéről is kiemeljek és aláhúzzak az előadásból néhány olyan részletet, amelyeket a legfontosabbnak tartok.

Mindenekelőtt azt akarom kiemelni, hogy *Fuchs László* előadása rendkívül szépen domborította ki azt a viszonyt, amelyben a hazánkban folyó algebrai kutatások mai helyzete van a felszabadulás előttihez képest. Kitűnt az előadásból, hogy matematikai életünk a felszabadulás előtti időkben sem szűkölködött kiváló, nem egyszer világhírű eredményeket elérő algebristákban, mégis rendkívül nagy jelentőségű változás következett be a felszabadulással a hazánkban folyó algebrai kutatások vonalán is. Azelőtt nem beszélhettünk egységes és sajátos jelleget mutató magyar algebrai iskoláról. Ma már ez az iskola lényegében kialakult és további fejlődéséhez a legszebb reményeket fűzhetjük. Mindezt Népköztársaságunk messzemenő és tervszerű tudománypártoló politikájának köszönhetjük, és annak, hogy az algebra területén dolgozó kutatóink — számos más tudományos munkaterület tudósaihoz hasonlóan — örömmel és készséggel ragadták meg és használták fel mindazokat a nagyszerű lehetőségeket, amelyeket ez a magas színvonalú államvezetés számukra nyujtott.

Egy további igen lényeges részlete *Fuchs László* előadásának az, amelyben az élenjáró szovjet csoportelméleti és modern algebrai iskolával már eddig fennálló kapcsolataink jövőbeli elmélyítésének és kiszélesítésének súlyponti fontosságát domborítja ki. Ezen a ponton örömmel fűzhetek hozzá az elhangzott előadáshoz néhány kiegészítő megjegyzést saját tapasztalataimból. 1947-ben figyeltem fel azokra, a modern matematika fejlődésében új korszakot megnyitó nagyjelentőségű eredményekre, amelyeket az *O. Ju. Smidt* és *A. G. Kuros* akadémikusok vezetése alatt működő szovjet csoportelméleti iskola az utóbbi évtizedek alatt elért. 1948 óta pedig módomban áll közvetlen levelezést folytatni e világhírű csoportelméleti iskola több tagjával. Azok az új eredmények és új módszerek, amelyeket ilyen módon megismerhettünk, döntően befolyásolták azt a kutatómunkát, amelyet a végtelen csoportok elmélete terén tanítványaimmal együtt folytatunk. A legújabb igen hatékony szovjet módszerek alkalmazásával számos olyan problémát tudtunk a közelmultban megoldani, amelyeket azelőtt csaknem reménytelenül nehéznek kellett tartanunk. Tanítványaim fejlődését és tudományos haladását is a szovjet eredményekben és módszerekben való elmélyedő tájékozódás mozdítja elő leghatékonyabban. Ki kell emelnem pl. legtehetségesebb tanítványom, *Kertész Andor* aspiráns egyik eredményét, amely *Kulikov* szovjet matematikus vizsgálatainak tanulmányozása alapján keletkezett, és *Kulikov* egyik nagyfontosságú tételének általánosítását tartalmazza. *Kulikov* tételének *Kertész*től eredő általánosítása élesebb eredményt tartalmaz, mint *J. Dieudonné* francia matematikus egyidejűleg publikált általánosítása. Meg vagyok győződve arról, hogy a hazánkban folyó algebrai kutatásoknak újabb fellendülést fog adni az, ha sikerül kiszélesítenünk a szovjet tudósokkal és a szovjet tudománnyal eddig fennálló kapcsolatainkat.

Végül *Fuchs László* előadásának azt a részletét szeretném még kiemelni, amelyben a hazai algebristák előtt álló jövőbeli feladatokról, közelebbről a kutatások vonalán fennálló hiányosságok pótlásáról szól. Magam részéről is rendkívül nagy jelentőséget tulajdonítok annak, hogy épüljenek ki hazánkban is erős kapcsolatok a modern algebra és a határterületek között. Minthogy a legközelebbi célok kitűzése tekintetében nem kívánatos túlságosan tágra szabni a kereteket, két konkrét vonalat szeretnék megjelölni, amelyen haladva meggyőződésem szerint rövid időn belül kedvező eredményeket várhatunk az említett hiányosságok pótlása tekintetében. Tervszerűen meg kell szerveznünk a kutatómunkát egyrészt a topológikus csoportok, tágabb értelemben a topológikus algebra területén, másrészt a modern algebra eszközeinek és eredményeinek a funkcionális analízis körében való alkalmazásának területén. Mindkét kutatási irányra fel kell hívnunk kutatóink érdeklődését, fiatal algebristáinkat pedig tervszerűen rá kell nevelnünk az ilyen irányú vizsgálatokban való elmélyedésre, hogy így idővel önálló kutatómunkát is végezhessenek ezeken a fontos területeken. Ha ez sikerül, akkor teljességgel kiküszöbölődik majd annak veszélye, hogy a hazánkban folyó algebrai kutatások egyoldalúvá válnak. Egy ilyen irányú nagyméretű és tervszerű nevelő, valamint szervező munkához természetesen elengedhetetlenül szükség van arra is, amire *Fuchs László* szintén rámutatott előadásában, hogy t. i. több nyugodt munkaidő legyen biztosítva kutatóink számára. Meggyőződésem szerint tudományos életünk vezetői meg fogják találni ennek a fontos kérdésnek a megoldását is.

RÉDEI LÁSZLÓ lev. tag:

Fuchs László referátuma olyan részletes és alapos volt, hogy érdemben csak kevés hozzáfűznivalóm lesz. Elvi kérdésként merült fel a számelmélet hovatartozása. Természetesen a számelméletből csak az elemi- és algebrai számelméletet számítom az algebrához, minthogy tárgyuk a 0 karakterisztikájú prímtest és ennek végesfokú testbővítései. Persze beszélhetünk algebrai számelméletről, de csak mint az algebra egyik kutatási területéről. Megvilágításul néhány példát említek. *Dedekind* az általa megteremtett ideálelmélet felépítését olyan eszközökkel végezte, amelyek a mai gyűrűelméletnek is alapjait képezik. Világos tehát, hogy *Dedekind* az algebrai számelmélet megalapozása közben egyszersmind algebrista volt. *Hensel* megteremtette a *p*-adikus számokat, az ő nyomán *Kürschák* az értékeléselméletet. Vajjon *Hensel* nem volt-e algebrista, amikor az első példát nyujtotta az értékelésre, vagy *Kürschák* nem nevezhető a számelmélet kutatójának? Nyilvánvaló, hogy a számelméletnek az algebrától való elválasztása erőszakos, de káros is, mert ha valaki úgy akar foglalkozni az algebrai számelmélettel, hogy az algebra egyéb területeit a lehetőségig mellőzi, akkor szűklátókörűen jár el. Szó volt a referátumban az algebra fejlődéséről. Azt merem mondani, hogy az algebra a matematikának nemcsak egyik legrégibb, hanem a legrégibb ága, sőt egyáltalán az emberi művelődésnek egyik legősibb területe. Úgy hiszem, hogy az algebra még a geometriánál is régebbi tudomány. Az iskolában is előbb tanítjuk a számokkal való műveleteket, mint a geometriát. Kifejlesztés tekintetében persze a geometriáé az elsőség, korai axiómatizálása folytán. Az algebra fejlődése sokkal lassúbb volt, első rendszeres feldolgozása *Steinitz* nevéhez fűződik, aki forradalmi lendülettel az izomorfia fogalmat az algebra élére állította, s a testelméletet axiómatizálta és kiépítette. Nyomában *E. Noether* hasonlót végzett a gyűrűelméletben, s végül csak *van der Waerden* tankönyvei óta, tehát mintegy 25 éve beszélhetünk mai értelemben vett modern algebráról. Eszerint az algebra mint önálló rendszeres tudomány igen fiatal, amelyben nagyon sok a tennivaló az alapok tisztázása, s a többé-kevésbbé elszigetelten fejlődött fejezetek összekapcsolása körül, amit más szavakkal a referens is említett. Az algebrának ez a fiatal volta egyik magyarázata nagy vonzóerejének, amelynél fogva hazánkban is sok kutatót foglalkoztat. Ez egyáltalán nem túlméretezett, hanem szükséges. Erre nézve hadd említsek egy igen kirívó példát. Jóllehet az asszociativitás kérdése az algebrának egyik alapköve, mégis az asszociativitásaxiómák függetlenségének megvizsgálását — mint a referátum is említette — éppen csak az utóbbi hónapban végezte el *Szász Gábor*. Örvendetes, hogy ez a kutatás hazánkban történt. A különböző fejezetek öszszekapcsolásából *Fuchs László*nak egyik munkáját kell hangsúlyoznom, amelyben kimutatta két fontos gyűrű-, illetve csoportelméleti fogalomnak, a Jacobson-féle radikálnak és a Frattini-féle csoportnak egymással való meglepő azonosságát. Az alapok tisztázását célozza az a nagyszabású tevékenység is, amit *Szele Tibor*, s vele együtt *Kertész Andor* és *Fuchs László* a szovjet vizsgálatokhoz csatlakozva az Abel-féle csoportok struktúraproblémája körül végeznek. Általában megállapítható, hogy hazai algebristáinkat szinte kizárólag az alapvető fontosságú kérdések érdeklik. További ilyen példa a csoportok faktorizációjának vizsgálata, amit két különböző irányban *Hajós György* és *Szép Jenő* alapoztak meg. Becsesek azok a referens előtt még bizonyára ismeretlen legújabb vizsgálatok, amelyeket *Szendrei János* és *Steinfeld Ottó* a Schreier-féte gyűrűbővítés Jacobson-féle radikáljának és a gyűrűk prímideáljainak vizsgálata körül végeztek. Úgy vettem ki a referátumból, mintha a referens mentegetné a hazai algebrai cikkek rövidségét. Én ezt nem látom indokoltnak, hanem úgy vélem, hogy elegendő mértékben szerepelnek terjedelmes cikkek és nem túl sok az aránylag rövid cikk. Az algebra elhanyagolt területei közül megemlítem az algebrai függvénytestek elméletét, amelynek hazánkban nincs művelője. Az egyébként igen részletes referátumban hiányolom a hazai kutatások külföldi visszhangjának ismertetését, bár kétségtelen, hogy ezzel a referátum terjedelme túlságosan felduzzadt volna. Hangsúlyozni szeretném azonban, hogy hazai algebrai kutatásaink sikere azok külföldi visszhangján is jól lemérhető. Például *Fuchs László, Szele Tibor* és *Szép Jenő* dolgozatai nagy külföldi visszhangot keltettek. *Fuchs László* és *Szele Tibor* említették a hazai algebrai vizsgálatok felvirágzásának örvendetes okait. Ehhez csupán azt fűzöm hozzá, hogy ennek a felvirágozásnak kormányzatunk és az Akadémia nagyvonalú tudományfejlesztő politikája mellett fontos tényezője az is, hogy algebristáink egymással szoros kapcsolatban végzik munkájukat. Ennek az együttműködésnek, amely jelentősen hozzájárul a kutatások sikeréhez, látható jele az aránylag igen nagy számú társszerzők által írt dolgozat.

SZÉP JENŐ:

Azt javaslom, hogy a Matematikai Lapokban ismertetés jelenjen meg időnként arra vonatkozólag, hogy a matematika egyéb területein miféle struktúra problémák merülnek fel, speciálisan milyen konkrét algebrai problémák érdeklik a más területen dolgozókat.

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag:

Mindenekelőtt pár szót az algebrának nálunk elhanyagolt, illetve továbbfejlesztendő irányairól. Ezek között említette az előadó a topologikus algebrát. Az a véleményem, hogy itt nagyobb nehézségek vannak, mint az algebra más határterületein. Ugyanis a topológikus algebra az algebrának a matematika egy olyan ágával, a topológiával határos területe, amelyet nálunk kevéssé művelnek. Könnyebb megteremteni a kapcsolatot a matematika olyan ágaival, amelyekben dolgozik egy-két szakember, aki meg tudja mondani, mit vár a matematika kérdéses ága az algebristától. Javasolom, hogy a Magyar Tudományos Akadémia tűzze tárgysorra legközelebb a geometria fejlesztését is és vitassa meg, mit lehetne különösen a topológia fejlődése érdekében tennünk.

A számelmélet és az algebra kapcsolatának kérdése régóta vitatott kérdés, felmerült már a Szovjetunióban lefolyt algebrai vita kapcsán is. Nem értek egyet *Rédei* tagtárssal abban, hogy a számelmélet az algebrának része. *Rédei* tagtárs azt mondja, hogy az algebra fejlődése szempontjából káros volna a számelmélet elválasztása az algebrától. Véleményem szerint még károsabb volna magán a számelméleten belül szétválasztani a különböző módszerekkel dolgozó területeket. A számelmélet fejlődésének biztosítéka éppen e területek egysége, amely a különböző módszerek ellenére fennáll és amely a közös problémákból származik. Gondoljunk pl. arra, hogy az analitikus számelmélet a maga legfontosabb problémáit az elemi számelmélettől kapta, amelyet *Rédei* tagtárs az algebrai számelmélet egy speciális fejezetének tekint; az analitikus számelmélet módszereit azután átvitték az algebrai számtestek ideáljainak vizsgálatára is. Hová sorolná *Rédei* tagtárs a *Waring*-problémát, amelyet *Hilbert* algebrai úton oldott meg, *Hardy* és *Littlewood* pedig analitikus módszerekkel?

A számelmélet és az algebra történetileg külön fejlődtek, mai fejlettségi fokukon pedig az absztrakció különböző fokain állnak. Az algebra a maga problémáit absztraktabb módon fogalmazza meg és általánosabban tárgyalja, mint a számelmélet. Már ez is nehézséget okozna, ha a számelméletet az algebra részének akarnók tekinteni.

Azzal sem értek egyet, hogy az algebra a matematika legrégibb fejezete volna. Az iskolára való hivatkozás nem meggyőző; a matematika története egészen mást mutat, t. i. hogy a geometria régebbi mint az algebra.

Azzal kapcsolatban, hogy a matematika más ágain dolgozó matematikusok adjanak problémákat az algebristáknak, megemlítek egy algebrai problémát az analízis azon új felépítésével, helyesebben tovább-építésével kapcsolatban, amelyet *Gombás* tagtárs előadásához tett hozzászólásomban említettem. Ebben a felépítésben fontos szerepet játszanak olyan $a(\varepsilon)$ függvények, amelyekre azonosan (azaz minden pozitív ε-ra) teljesül valamely $|a(\varepsilon)-a|\leqq\varepsilon$ egyenlőtlenség. Az ilyen függvényeket fel lehet arra is használni, hogy a valós számok *Dedekind*-féle, vagy *Cantor*-féle bevezetése helyett ezek segítségével vezessük be a valós számokat. Természetesen nem minden (pozitív racionális ε-ra definiált) ilyen $a(\varepsilon)$ függvény alkalmas erre, hanem azok és csak azok az $a(\varepsilon)$ függvények, amelyekre azonosan teljesül az $|a(\varepsilon)-a(\eta)|\leqq\varepsilon+\eta$ egyenlőtlenség. E függvények halmazában mindenekelőtt egy ekvivalencia-relációt kell definiálnunk: azok és csak azok a függvények ekvivalensek, amelyek ugyanannak a számnak „közelítő függvényei". Könnyű látni, hogy ehhez szükséges és elegendő, hogy a kérdéses $a(\varepsilon)$ és $b(\varepsilon)$ függvények azonosan teljesítsék az $|a(\varepsilon)-b(\varepsilon)|\leqq 2\varepsilon$ egyenlőtlenséget. Ennek az ekvivalencia-relációnak ekvivalencia-osztályai talán algebrai szempontból is érdekes struktúrát alkotnak az itt szóbajövő összeadás és szorzás műveleteire nézve. Az összeg definiciója egyszerű: az $a(\varepsilon)$ és $b(\varepsilon)$ függvényekkel reprezentált osztályok összegét az $a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+b\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ függvény reprezentálja. A szorzat definícióját nem írom fel; az a mód vezet hozzá, ahogyan két szám szorzatát tetszőleges ε pontossággal megközelíthetjük, ha a tényezőket ugyancsak tetszőleges pontossággal meg tudjuk közelíteni. Természetesen előbb-utóbb ki kell derülnie, hogy ez a struktúra izomorf a valós számok testével.

Még néhány apró megjegyzés a referátumhoz. Bántóan hangzik a magyarban a direkt szummand kifejezés. Az Akadémia egyízben már hozott határozatot terminológiai kérdésben, matematikai szakkifejezésre vonatkozólag. (Lattice = háló.) Ajánlom a direkt szummand helyett a direkt összeadandó szakkifejezést.

Az előadó több izben használta a „mennyiség" kifejezést, amikor általános struktúrák elemeiről volt szó. Véleményem szerint helyesebb ilyenkor a „mennyiségi forma" kifejezés használata, amelyet tudomásom szerint *Kolmogorov* szovjet akadémikus vezetett be a matematikáról szóló enciklopédia-cikkében, amikor *Engels*nek a matematika tárgyáról adott meghatározása dialektikus továbbfejlesztésének lehetőségéről beszél.

*Fuchs László*nak azzal a megállapításával, hogy az axiómatikus módszer a *Bolyai*-geometriával kapcsolatban alakult ki, nem értek egyet. Természetesen *Bolyai*nak és *Lobacsevszkij*nak fontos érdemei vannak az axiómatikus módszer fejlesztése terén is; maga az axiómatikus módszer azonban legalább is *Euklidesz*ig vezethető vissza.

Azt sem helyeslem, hogy *Fuchs László* a speciális vizsgálatok között sorolta fel azoknak a csoportoknak vizsgálatát, amelyeknek minden valódi részcsoportja kommutatív. Valójában ezeket a vizsgálatokat is egy rendszerező törekvés hozta létre, amelynek célja a nem kommutatív csoportok osztályozása.

VINCZE ISTVÁN:

Fuchs László kartárs két pontban utalt azokra a feladatokra, amelyek a gyakorlattal kapcsolatosak és amelyek az algebristák előtt állnak. Ezek között szerepel az AMI-val való kapcsolat. Örömmel ragadjuk meg az alkalmat a kapcsolat felvételére és máris megjelölhetek egy területet az algebristák és az AMI közötti együttműködésre. A szűrő láncok elméletében lépten-nyomon használják az algebra módszereit. Itt Budapesten is dolgozik ennek a módszernek egy kiváló művelője, *Henyei Zoltán*, aki az algebristáktól függetlenül folytatja vizsgálatait. Az AMI meg fogja hívni egy előadás tartására és ezen az előadáson szívesen fogjuk látni az algebristákat is.

A szovjet algebrai vitaanyagra hivatkozva megemlítem, hogy a lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása terén vannak jelentős szovjet eredmények. *A. A. Abramov* a Csebisev-polinomok sajátságainak felhasználásával olyan módszereket dolgozott ki, amelyek lehetővé teszik sokismeretlenü lineáris egyenletrendszer megoldásának iterációs eljárás segítségével való lényeges meggyorsítását. *Ju. V. Linnik* a sokszögű kábelek darabjainak racionális összeillesztésére a primitív gyökök elméletét alkalmazta, továbbfejlesztve az ilyen irányú eredményeket.

Szeretnék néhány szót szólni az algebra elsőbbségével kapcsolatban. Persze nem mérhetjük az algebra kezdetét az aritmetika kezdetével. Azt hiszem, hogy az algebra kezdetének megjelölésénél legalább is követelmény az algebrai betűkifejezések használata. Ez elég jó objektív időszakhoz kötődik, ugyanúgy, mint ahogy a geometriai fogalmak kialakulásának kezdetét is figyelemmel tudjuk kísérni. Ezzel kapcsolatban *Rédei László* lev. tag említést tett arról, hogy az algebra forradalmi fejlődéséről csak az utolsó néhány évtizedben beszélhetünk. Meg vagyok győződve róla, hogy az algebra fejlődése során is voltak ugrásszerű fejlődések és érdekes volna megállapítani, hogy mikor voltak ezek, mi volt társadalmi hátterük. *Fuchs László* is hangsúlyozta, hogy a mostani társadalmi átalakulás milyen gyökeres átalakulást jelentett az algebra művelésében hazánkban. Azt hiszem, hogy a matematika története ilyenszerű kérdéseinek tisztázása is hozzátartozik tudományos feladatainkhoz.

FUCHS LÁSZLÓ válasza:

Csak egészen röviden szeretnék a hozzászólásokra reflektálni és ezekkel kapcsolatban néhány megjegyzést tenni. Mindenekelőtt nagyon köszönöm a hozzászólóknak, hogy észrevételeikkel, megjegyzéseikkel kiegészítették referátumomat és ezzel hozzájárultak a vitaülés színvonalának emeléséhez. Külön köszönöm *Szele Tibor*nak, hogy felszólalásában a referátum egyes részeit újabb szempontokkal világította meg és kiemelt olyan momentumokat, amelyek nem nyertek fontosságukat megillető hangsúlyt a referátumban.

Rédei László és *Kalmár László* levelezőtagok hozzászólásukban kitértek a számelmélet hovatartozásának problémájára. Ezt a kérdést igen nehéz eldönteni, hiszen sok érv szól az ellen, hogy a számelméletet az algebra részének tekintsük, de sok érv szól mellette is.

Köszönöm *Rédei* professzor hozzászólását, amelyben a referátumban felvetett számos problémát érintett. Valóban hiánya referátumomnak az, hogy nem tartalmazta a hazai algebrai kutatások külföldi visszhangját. Itt szeretném megragadni az alkalmat és újból felhívni a figyelmet arra, amit a referátumban is érintettem: az eredmények alapos kiaknázását; t. i. a gyors külföldi reflektálás egyes esetekben — bár az esetek túlnyomó többségénél nem ez a helyzet — arra utalhat, hogy a cikkíró nem aknázta ki eléggé a tárgyalt kérdéskört.

Szép Jenő javaslatát nagyon köszönöm. Ezt igen egészséges ötletnek tartom, mert ilyen ismertető cikkek által nemcsak maguk az algebristák, hanem más matematikusok is megismerkedhetnek ezekkel a kérdésekkel, kiegészíthetik ezeket az általuk ismert eredményekkel és így a matematika fejlődését jelentős mértékben segíthetjük elő. Az algebristáknak az Alkalmazott Matematikai Intézettel való kapcsolatára vonatkozó javaslatot *Vincze István* részéről szintén köszönöm. Igen örvendetes lenne, ha már a közeljövőben megvalósulhatna ez a kapcsolat.

A HAZAI ALKALMAZOTT MATEMATIKAI KUTATÁSOK HELYZETÉRŐL

HAJÓS GYÖRGY r. tag

Előadta az 1953. május 27-én tartott nyilvános osztályülésen

1. Ha az alkalmazott matematikai kutatásokról akarunk képet alkotni, előbb a matematikának s az alkalmazásoknak viszonyáról, s e viszony történelmi kialakulásáról kell szólni.

Engels meghatározása szerint a matematika az anyagi világ mennyiségi viszonylataival és térbeli formáival foglalkozik. E viszonylatok és formák vizsgálatát csak magának az anyagi világnak tanulmányozása indíthatja el. Szükségszerű tehát az a tény, hogy a matematika az évezredek során problematikájának túlnyomó részét az anyagi világot magát tanulmányozó tudományoktól, így elsősorban a fizikától, csillagászattól és a műszaki tudományoktól kapta és kapja. Így hatottak a termelés igényei közvetve a matematika kibontakozására és kifejlődésére.

A matematika azonban nem állt meg, s nem állhatott meg a mennyiségi viszonylatok és térbeli formák, s az anyagi világot tanulmányozó tudományok által felvetett problémák öncélú tanulmányozásánál. Az anyagi világ e formai elemeinek vizsgálata visszahatott a fogalmak kikristályosítása, a vonatkozások megismerése és eljárások kidolgozása révén az anyagi világgal foglalkozó tudományok fejlődésére. A matematika formai egységbe olvasztotta az anyagi világ különféle megnyilvánulásaival foglalkozó tudományokat. A matematika továbblendítette azokat a tudományokat, amelyeknek szinte létét köszönheti. Ez bekövetkezett sokszor — néha megkésve — még abban az esetben is, amikor a formai elem szépsége által elbűvölt matematikus azt hitte, hogy a matematikát öncélúan fejleszti. Így hatott a matematika az anyagi világgal foglalkozó tudományokra és így közvetve magára a termelésre.

Ha tehát a matematika, valamint az anyagi világgal magával foglalkozó tudományok viszonyát tekintjük, akkor nem helyes sem alárendelésről, sem fölérendelésről beszélni, hanem együttműködést kell megállapítani. Ebben a referátumban ezt a viszonyt a matematika szemszögéből kívánjuk vizsgálni. Csak ez indokolja azt, hogy azokat az anyagi világot tanulmányozó tudományokat, amelyek felhasználják a matematikát, alkalmazó tudományoknak fogjuk nevezni. Ilyen magyarázat nélkül ez az elnevezés torz képet eredményezhetne. Az alkalmazó tudományok között említendő elsősorban a fizika, műszaki tudományok, csillagászat, statisztika, meteorológia, kémia, de bizonyos mértékig még a biológia, orvostudomány, közgazdaságtan, geológia, sőt mindennemű kvantitatív vonatkozást vizsgáló tudomány is.

Hiba volna azt állítani, hogy a matematika egyetlen célja az alkalmazó tudományok segítése. Ez a prakticizmus megbénítaná a matematika fejlődését. Viszont kétségtelen, hogy a mondott segítség a matematikai kutatásoknak egyik igen fontos rendeltetése. Mi itt a rendeltetés betöltésének kérdéseivel foglalkozunk.

2. A matematika és az alkalmazó tudományok együttműködése kétségtelenül nagyjelentőségű kívánalom. Nem öncélként van erre szükség, hanem az alkalmazó tudományok szabatossága és előrehaladása, valamint a matematika valósághoz igazodása és problémabősége érdekében.

Az együttműködés mintegy a mult század közepéig szinte tökéletesnek volt mondható. Ugyanazok voltak (*Newton, Laplace, Euler, Gauss,* stb.) a kor legkiválóbb matematikusai s egyben legnagyobb fizikusai, csillagászai és — ha ezt a szót arra a korra használni szabad — mérnökei is. A matematikának és az alkalmazó tudományoknak az elmult száz évben bekövetkezett robbanásszerű kifejlődése lehetetlenné tette a legkiemelkedőbb kutatók személyi azonosságát, sőt még azt is, hogy az egyik terület kiváló munkásainak igazi áttekintésük lehessen a másik területen. Annál kevésbbé lehetséges ez, mert hiszen ma már a matematika, a fizika vagy a műszaki tudományok egésze is akkora biradalommá szélesült, hogy egyetlen ember még e területeknek egyikén sem lehet mindenütt otthon.

Ez a fejlődés az együttműködés tekintetében sajnálatos tényeket eredményezett. Ki-ki előképzettsége vagy vonzalma szerint az egyik terület munkásává szegődött, a másikat meg sem ismerhette egészen, ezért meg sem akarta ismerni, sőt gyakran megvetette. Hozzájárult a feszültség kialakításához a tőkés munkamegosztás, s ennek következményeként a tudományok tervszerű elzárkózása, sőt titkolódzása. Az egészséges együttműködéstől megfosztott tudományok túlzottan absztrakt, illetőleg prakticista irányban fejlődtek. Sokan — éppen ismereteik hiányossága miatt — torz képet alkottak a másik területről, azt csak alárendelt területnek látták, sőt azt a jogot formálták, hogy saját munkaterületük igényeinek és szellemének megfelelően formálhassák a másik terület munkájának egészét. Ez a tátongó szakadék az egészséges fejlődést gátló tényezők hatása alatt a tudományok fejlődésével együtt szélesült, s még ma is e szakadék áthidalásával kell foglalkoznunk.

Akadálya ennek az áthidalásnak, a kívánt együttműködésnek, a másik terület tárgyi nem ismerésén túl egymás gondolatvilágának nem ismerése és a közös nyelvezet hiánya. Mesterséges akadályt állítottak a fejlődés elé azok a polgári filozófusok, akik a tiszta matematikát az emberi agy öncélú, játékos alkotásának igyekeztek feltüntetni.

3. Hogyan lehetséges hát mégis a tudományokat megtermékenyítő együttműködés? Milyen szervezéssel lehet ezt az együttműködést elősegíteni? Tudományos propagandára, megfelelő személyi keret kiépítésére, jól irányított oktatásra és továbbképzésre, céltudatos tudományos munkára van szükség.

Világnézeti neveléssel, tudományos propagandával kell azt elérni, hogy a matematikusok s az alkalmazó tudományok művelői becsüljék egymás tudományát s annak szellemét, hogy egymás tudományát ne saját izlésük szerint torzított alakban akarják rögzíteni, s e torzított társsal való manipulációt ne nevezzék a tudományok együttműködésének. Propagandára van szükség, hogy mindkét terület dolgozói tudatában legyenek a szakadék áthidalása fontosságának, hogy örömmel és segítőkészséggel üdvözöljenek minden ténykedést, amely az áthidalás szándékával indul, bármely oldalról indult is el a munka, s bármily csekély, vagy nyers eredményhez vezetett is el. Propagandára van szükség, hogy még a gyarló, de jó szándékú próbálkozást is segítő és építő kritika fogadja, nem pedig lenéző visszautasítás.

Nem oldható meg a kérdés a matematikában s az alkalmazó tudományokban egyaránt jártas vezetőréteg létesítésével, sőt egyaránt jártas szakértők kiképzésével sem. Személyek közötti együttműködésre, személyi munkamegosztásra van szükség. A szakterületek nagysága, szellemüknek és tudományos nyelvezetüknek különbözősége indokolja ezt. Miként senkinek nincs két anyanyelve, úgy nem lehet senki igazi matematikus és az alkalmazó tudomány igazi művelője egyszerre. Csak az lehetséges, hogy valaki szilárdan álljon az egyik területen, s emellett megismerje a másik tudományterületnek egyik-másik fejezetét, annak szellemét és nyelvezetét is. Az így képzett szakemberek közreműködésével képzelhető csak el és lehetséges is az együttműködés.

Nyomban felmerül a kérdés, hogy az alkalmazó tanulja-e meg a matematika fejezeteit, vagy a matematikus az alkalmazó tudomány részeit. Mindkettőre törekedni lehet, bizonyos határig kell is. Ha azonban meggondoljuk, hogy az alkalmazó tudományok egy-egy fejezete nemcsak egy-egy matematikai fejezet segítségét várja, hanem több fejezetét, sőt azt, hogy a matematikus válassza ki a legjobban segítő fejezetet, akkor a matematikus tanulását kell hangsúlyozni. E választ ugyanaz a logika szüli, mint amely szerint: ne a háztartások vásároljanak egyes drágább szerszámokat, hanem a szerelő menjen szerszámtáskájával a háztartásokba. Ez a válasz természetesen korántsem zárja ki, hogy szerencsés esetben ne születhessék szép és a tudományok közötti igazi együttműködést szolgáló eredmény az alkalmazó tudományban is, képzett matematikus közbejötte nélkül.

Szükség van mindenesetre olyan matematikusokra, akik ismerik az alkalmazó tudomány szellemét s egy-egy fejezetét, akik lelkesednek azért, hogy matematikai tudásukat az alkalmazásban hasznosítsák, akik az alkalmazó tudomány művelőivel együttműködve végzik tudományos munkájukat: szükség van alkalmazott matematikusokra.

Hiba volna azonban azt hinni, hogy ilyen matematikusok kiképzése minden problémát megold. Gondoskodnia kell az oktatásnak, hogy a matematikusok és az alkalmazó tudományok művelői egyaránt lássák az együttműködés fontosságát, hogy valamelyest megismerkedjenek a másik terület igazi szellemével és számukra mulhatatlanul szükséges alapanyagával. Szükség van annak biztosítására is, hogy az alkalmazó tudományok művelői tovább képezhessék magukat, ha matematikai tudásuk kiegészítésére vágynak, valamint hogy az alkalmazott matematikusok elmélyedhessenek az alkalmazó tudomány egyik vagy másik fejezetében.

Megannyi komoly és súlyos feladat. Túllépném referátumom kereteit, ha ezekről az oktatási feladatokról részletesebben akarnék szólni. Legyen szabad csak annyit mondanom, hogy e feladatok nem oldhatók meg a másik terület szellemének semmibevételével. Igen helytelen volna, ha pl. a matematikus a fizikának csak matematikai csontvázát ismerné meg; teljesíthetetlen és céltalan vágyálom, ha — mondjuk — a mérnökök minden szükséges matematikai ismeretet pilulákban akarnának kényelmesen lenyelni, úgyhogy a matematikai okoskodások szigorú logikája közben kényelmetlenséget ne okozzon. Viszont még nagyobb hiba volna matematikusokat nevelni akarni az alkalmazó tudományok oktatása, vagy alkalmazókat a matematikusok képzése során. Kellő mértéktartásra van itt szükség.

4. Részletesebben kell szólnom a matematika s az alkalmazó tudományok együttműködését szolgáló és megkönnyítő tudományos tevékenységről: az alkalmazott matematikai munkáról.

Sokrétű tudományos munkásság említendő itt meg. Az együttműködést előkészíti, aki az alkalmazó tudomány konkrét problémáját matematikai alakba önti. Az alkalmazó tudomány s a matematika tényleges együttműködésével választandó meg a valóságot elegendő hűen megközelítő, s ugyanakkor matematikailag kezelhető modell. Az adódó matematikai probléma megoldása, az eredmény számszerű vagy grafikus rögzítése, esetleg az eredményt gyorsan szolgáltató eljárás kidolgozása, vagy éppen megfelelő matematikai gépek építése, az eredménynek a valóságból merített adatokkal való összevetése, az eltérések okainak felderítése: csupa olyan feladat, melynek megoldása elevenné teszi a hiányolt kapcsolatot. Nagyon téved, aki azt hiszi, hogy csak kész matematikai tudásanyag egyszerű alkalmazására van szükség. Majd minden konkrét probléma teherpróbát jelent a matematikai alkotókészség számára is.

Nagyon megkönnyíti a tudományokat fejlesztő együttműködést, ha a matematikus a matematikának azokat a fejezeteit építi és csiszolja, amelyek különösen gyakran jutnak szóhoz, konkrét problémák matematikai kezelésénél, vagy amelyeknek szerepeltetése előre várható szükséglet. Ilyen fejezetekként említem a differenciál- és integrálegyenletek, a valószínűségszámítás, a matematikai statisztika, a numerikus és grafikus módszerek fejezetét. Említhetném azonban a variációszámítást, a függvényegyenleteket, a funkcionálanalízisnek majdnem minden fejezetét, a csoportok előállításelméletét; a görbült terek vizsgálatát, a mátrixszámítást. Folytathatnám a felsorolást, sőt a matematika minden fejezetét megemlíthetném, hiszen történelmi példák mutatják, hogy még olyan matematikai eredmények is alkalmazást leltek, amelyekről ezt felfedezőjük nem is sejthette. Ebben a megvilágításban válik érthetővé *Kuratowski* lengyel akadémikusnak 1951. évi nagygyűlésünkön elhangzott paradox kijelentése: „nincs alkalmazott matematika, csak matematika van". Mindenesetre tudománytalan és káros volna, a matematikát metafizikusan preciziós és approximációs részre vágni, s az utóbbit illetni „alkalmazott" jelzővel.

Mi hát ezek után az alkalmazott matematika? Nem szándékom semmibe mosni ezt az elnevezést. Viszont hangsúlyozni akarom, hogy szabatos tárgyi elhatárolása szinte lehetetlen és mindenesetre céltalan. Ha valaki megkísérelne egy elhatárolást áterőszakolni, az amúgy is csak egy adott pillanatra vonatkozhatnék. Értelmetlen dolog volna akár felduzzasztani egy definícióval a matematikát, úgyhogy élettérszerűen elnyelje az alkalmazó tudományokat, akár pedig elszegényíteni s ezzel a matematikai gondot az alkalmazó nyakába varrni akarni. Különféle külföldi intézmények és folyóiratok elnevezésére és anyagelhatárolására hivatkozva csak növelhetnők a zavart. Nem is lombikban gyártott meghatározásra van szükség, hanem munkára, amely megkönnyíti és fejleszti a matematika s az alkalmazó tudományok termékeny együttműködését. Ez a munka alkotja az alkalmazott matematikát.

Nehéz és szinte haszontalan megválaszolni egy konkrét munka esetében azt a kérdést, vajjon alkalmazott matematikai munka-e az. Nyilván szükséges kelléke ennek, hogy az alkalmazó tudományok valamely problémájával foglalkozzék, vagy pedig közvetlen alkalmazása lehetséges legyen. Viszont ebben az esetben is nyitva maradhat még a kérdés, hogy a munka nem az alkalmazó tudomány körébe tartozik-e. Erre vonatkozólag irányelvül csak azt a magától értetődő megjegyzést tehetem, hogy egy munka csak akkor nevezhető matematikainak bármilyen jelzővel, ha matematikai jellegű problémát old meg, tehát a matematikai alkotókészséget teszi próbára.

Inkább két negatívumot akarok hangsúlyozni. Nem alkalmazott matematikai az olyan álgyakorlati munka, melyben a matematikus nem a valóságban gyökerező problémát old meg, vagy pedig ilyen problémával foglalkozik ugyan, de távol áll az alkalmazó tudomány szellemétől, s ezért eredményeit az alkalmazó tudomány nem is használhatja. Nem alkalmazott matematikai az olyan álelméleti munka sem, melyben az alkalmazó tudomány művelője csak játszik (remélhetően a játékszabályokat el nem felejtve és meg nem sértve) a matematikai algoritmussal, s e játék eredménye csak a játék maga. Igaz ugyan, hogy mindkét említett munkafajtát sokszor helyes vágy, a matematika s az alkalmazás egybekovácsolásának vágya szüli, maga a munka azonban nem ér el semmit e cél megvalósításának érdekében, legfeljebb csak olcsó látszatsikert eredményezhet.

Kik végezhetik és végezzék az alkalmazott matematikai munkát? A fentebb már mondottak szerint elsősorban az alkalmazott matematikusok. Szerencsés esetben az alkalmazó tudomány művelője matematikus segítsége nélkül is fejlesztheti tudományának s a matematikának helyes kapcsolatát. Hangsúlyozni kell azonban, hogy a legcélravezetőbb az alkalmazó tudomány művelőinek s az alkalmazott matematikusoknak személyes együttműködése. Az alkalmazott matematikus bevonhat azután a munkába szükség esetén olyan matematikust is, aki az alkalmazó tudományt nem is ismeri.

5. A matematika s az alkalmazó tudományok viszonyában világszerte fellépő jelenségekről volt szó. Nézzük hát, mi volt a helyzet e téren hazánkban a közvetlen multban, és hogyan alakul napjainkban.

A felszabadulás előtti időkben komolyabb méretű alkalmazott matematikai kutatás nálunk nem volt. Ennek oka főként az, hogy a feudális Magyarország fejletlen és szűklátókörű kapitalista ipara nem érezte át annak elvi, sőt gyakorlati fontosságát, hogy a termelés kihasználja a matematika segítségét. Az ipar alig alkalmazott matematikusokat, nem igyekezett még a kész matematikai eredmények gyakorlati hasznosítására sem. Nem volt intézményes lehetősége annak sem, hogy tanácsért a matematikusokhoz fordulhasson. Felsőoktatásunk az egyetemi autonómia sáncain belül keveset tett annak érdekében, hogy az alkalmazó tudományok s a matematika oktatását kívánatos mértékben összeforrassza. Alig volt egy-két olyan matematikus, aki lelkesedett azért, hogy matematikai tudásával az alkalmazó tudományokat s a termelést támogassa. Az elmélet és gyakorlat annyira eltávolodott egymástól, hogy a távolság leküzdésének szükségét alig érezték át az egyes szakmák művelői. Bizonyos megvetéssel tekintettek a tudását az alkalmazások terén aprópénzre váltó matematikusra. A gyakorlatot elmélettel cicomázó mérnöknek öncélú luxusát babonás tisztelet övezte.

Volt azért szórványosan alkalmazott matematikai munka abban az időben is hazánkban. Az alkalmazás érdekeit is szolgáló tiszta elméleti kutatás terén kiemelhetem *Fejér Lipót*nak a stabilitásra vonatkozó potenciálelméleti vizsgálatait, valamint az interpolációra s a mechanikus kvadraturára vonatkozó munkáit. Az iparban alkalmazott s a munkanélküliség veszélye elől odamenekülő matematikusok közül *Csillag Pál* a statika, *Grünwald Géza* az elektrotechnika matematikai megsegítése terén működött eredményesen. A biztosító társaságok tőkegazdagsága több matematikust állított a biztosításmatematika és gazdasági matematika szolgálatába. Az ezen a területen elméleti szempontból is érdemlegeset alkotók közül *Arany Dániel, Goldziher Károly, Veress Pál* és *Huszár Géza* nevét emelhetem ki. A valószínűségszámítás és matematikai statisztika munkásaként dolgozott hosszú évtizedeken át *Jordan Károly,* munkásságát azonban kezdetleges fokon álló termelésünk nem gyümölcsöztette. A műegyetemi oktatók valamelyes közelségbe jutottak a termelés problematikájához, azonban sem az állam, sem a termelő üzemek nem törekedtek e kapcsolat kiaknázására. Kevés eredmény keletkezett ezért e kapcsolat folytán. Megemlíthetem *Egerváry Jenő*nek a differenciálegyenletek és *Szentmártony Tibor*nak a matematikai statisztika műszaki vonatkozásait tárgyaló (csak a felszabadulás után megjelent) füzeteit, valamint a hibabecslésről irt saját munkámat. Fizikus kutató intézményeink szűk személyi kerete alig adott lehetőséget matematikailag is érdemleges elméleti fizikai kutatásokra. *Gombás Pál*nak akkori atomfizikai munkásságát emelhetem ki ilyen vonatkozásban. Megemlíthetem *Bródi Imre* elméleti fizikai munkáit is. Az elméleti fizikának nyújtott matematikai segítséget *Szőkefalvi-Nagy Béla* a perturbációszámításra vonatkozó, már akkor meginduló munkásságával. A műszaki kutatást szűk prakticizmus jellemezte. A műszaki tudományok dolgozói a matematikai algoritmusnak sokszor nemzetközi szinvonalon álló alkalmazásán túlmenően nem igen jutottak el az igazi matematikával való szerves kapcsolat kiépítéséhez. Ilyen kivételként *Reuss Endré*nek a plasztikus anyagok mechanikájára és *Barta József*nek az oszlopkihajlásokra vonatkozó munkáját említem. Hangsúlyozni szeretném, hogy referátumomban mindvégig a hazai alkalmazott matematikai kutatásokkal, s nem a magyar tudósok munkásságával foglalkozom.

Részletesebben szóltam a mult hiányairól s e hiányok okairól, mert úgy érzem, hogy ezeknek az okoknak feltárása tanulságos és még ma is adhat irányítást a fejlődés felé.

Lényegesen megváltozott az alkalmazott matematika helyzete az ország felszabadítását követő fejlődés során. A szocialista országépítés szükségessé tette az elmélet és gyakorlat szoros együttműködését. Az alkalmazott matematika terén is érvényesült a Szovjetunió nagylelkű támogatása. Kiemelhetem itt a szovjet könyvek magyarra fordításának megkönnyítését, s elsősorban a rövidesen megjelenő *Kantorovics—Krilov* kötetre gondolok. A népi demokráciákkal való együttműködés is egyre hatékonyabb. Hadd emeljem itt ki a lengyel alkalmazott matematikusokkal kialakuló, egyre szorosabb együttműködésünket.

Államunk erős kézzel karolta fel a gyakorlat és elmélet egybeforrasztásának ügyét, ez az oktatás terén is erősen érvényesült, a matematika gyakorlati alkalmazása már nem lenézett, hanem vonzó munkaterület lett, megindult az alkalmazott matematikusok képzése, az ország iparosodása egyre fokozottabb mértékben igényli a matematika segítségét, az alkalmazó tudományok oktatói és művelői intézményesen is törekednek a matematikával való kapcsolat kiépítésére és a matematika hasznosítására.

Az alkalmazott matematikai munka közvetlen megindítása, irányítása és egybefogása szempontjából azonban első helyen az Alkalmazott Matematikai Intézet létesítését kell említenem. Az intézet 1949-ben alakult *Egerváry Jenő* vezetése mellett, 1950-ben a Magyar Tudományos Akadémia intézetévé vált. *Rényi Alfréd* agilis vezetése mellett tekintélyes munkabirású és munkavállalású intézménnyé duzzadt. Jelenleg mechanikai és szilárdságtani, vegyipari, valószínűségszámítási, matematikai statisztikai, valamint numerikus és grafikus módszerekkel foglalkozó osztálya, továbbá önálló elektrotechnikai és függvényapproximációs csoportja van. Az intézet a termelés és a kutatóintézetek konkrét problémáinak megoldásával, valamint saját kezdeményezésre kutatási tervben körvonalazott kutatómunkával foglalkozik.

6. Amidőn a jelenlegi magyar alkalmazott matematikai kutatás eredményeiről kívánok szólni, az Alkalmazott Matematikai Intézet közleményeinek negyedéve megjelent, szép munkát felölelő kötete, valamint a nagygyűlésünk keretében tegnap tartott beszámoló előadások felmentenek attól, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet keretében elért eredményeknek részletes felsorolásába kezdjek. Ehelyett inkább jellemezni kívánom ezt a munkát, s a kiemelkedőbb eredmények felsorolására szorítkozom.

A mechanikai és szilárdságtan terén főként konkrét felkérésekre válaszoló s ilyen felkérések nyomán tovább is haladó munkák szerepelnek. Ezek közül ki kell emelnem *Egerváry Jenő*nek a forgó rendszerek kritikus szögsebességére vonatkozó vizsgálatait, továbbá *Lovass-Nagy Viktor*nak rugalmasságtanra és hőtanra, *Rózsa Pál*nak pedig a korpuszkuláris húrmodellre vonatkozó, *Egerváry Jenő* irányításával elért eredményeit, valamint *Pál Sándor*nak rugalmasságtani munkáját. Mind e munkáknak matematikai oldala a differenciálegyenletek elméletébe vág.

A vegyipari osztály konkrét ipari feladatok megoldásán túlmenően az integrálegyenletek elméletével és gyakorlatával is foglalkozik. Így itt *Pál Sándor*nak a cukoripari diffúzióra vonatkozó munkáját, valamint *Fenyő István*nak az integrálegyenletekre vonatkozó, az alkalmazásokkal azonban szoros kapcsolatot nem tartó munkásságát említhetem.

A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika terén az Intézet szép munkát fejt ki, ami elsősorban *Rényi Alfréd* tudományos kezdeményező és szervező készségének köszönhető. A matematikai oldalt tekintve a munkák három irányban folytak: a centrális határeloszlások, a sztohasztikus folyamatok s a rendstatisztika elméletébe vágnak. A centrális határeloszlástételek vizsgálata terén kiemelkedő *Rényi Alfréd*nek nem-független valószínűségi változókra vonatkozó eredménye, melyet *Kolmogorov* az első magyar matematikai kongresszuson továbbfejlesztett. Ezzel a tárggyal kapcsolatban kell megemlékezni *Rényi Alfréd*nak és *Szentmártony Tibor*nak az elektromos energiaszükséglet ingadozására, *Székely Gábor*nak pedig a kőtörésre vonatkozó eredményeiről. Itt említendő meg *Medgyessy Pál*nak módszere, mellyel normális eloszlások keverékéből meghatározza a komponenseloszlásokat. A sztohasztikus folyamatok elmélete terén említésre méltó *Rényi Alfréd, Jánossy Lajos, Aczél János* és *Prékopa András* összetett Poisson-eloszlásokra vonatkozó cikksorozata, és *Pál Lénárd*nak, valamint *Takács Lajos*nak számos gyakorlati alkalmazást lehetővé tevő koincidencia-vizsgálata. A rendstatisztika terén *Rényi Alfréd*nek az elméleti és tapasztalati eloszlás eltérésére vonatkozó, magamnak és *Rényi Alfréd*nek a rendstatisztika megalapozásáról szóló, *Vincze István*nak pedig a regressziós egyenes meghatározásáról írt munkáját említhetem meg. Komoly munkát végzett az intézet a minőségellenőrzés terén.

A numerikus és grafikus módszerek osztályát illetően a dolog természetéből következik, hogy az osztály feladata a külső megkereséseken túl elsősorban az intézet egészének kiszolgálása. Megemlíthetem *Pál Sándor*nak nomogrammtervezésre vonatkozó kombinált numerikus-grafikus eljárását, valamint saját eredményemet a Clark-féle nomogrammok egyszerűbb tárgyalására vonatkozóan. Szép munkát végzett az osztály a nomogrammok preciziós előállítása terén.

A matematikusoknak az Alkalmazott Matematikai Intézet által egybefogott alkalmazott matematikai kutatásán kívül meg kell még emlékezni máshol elért matematikai jellegű eredményekről is. Kiemelendőnek tartom *Jánossy Lajos*nak perioduskutatásra vonatkozó munkáját, melyhez a kozmikus sugárzás tanulmányozása vezetett, továbbá *Gombás Pál*nak és tanítványainak, köztük különösen *Gáspár Rezső*nek az atomfizikával foglalkozó egyes olyan munkáit, melyek a numerikus eljárások terén matematikai nehézségeket is leküzdenek. Mérnökeink matematikailag is jelentős eredményei közül hadd említsem *Geleji Sándor*nak a hegesztés, *Pelikán József*nek pedig a héjszerkezetek matematikai kezelésénél elért eredményeit, valamint *Kovács Károly Pál*nak a valószínűségszámítás műszaki alkalmazására vonatkozó önálló kezdeményezését. Megemlíthetem talán még *Valkó Iván Péter*nek és *Gergely György*nek kísérleti fizikai munkásságát, amely matematikai gépek építésénél hasznosítható.

7. Népi demokráciánk gondoskodása folytán az alkalmazott matematika helyzete, a matematika s az alkalmazó tudományok termékeny kapcsolata ma lényegesen jobb, mint megelőzően volt. Hadd szóljak azonban a még ma is fennálló fogyatékosságokról. E helyen az Alkalmazott Matematikai Intézet munkájára korlátozom megjegyzéseimet.

Megállapitható, hogy az intézetnek szorosabbak a kapcsolatai az iparral, mint a természettudományokkal. Ha választani kell, akkor e választást helyesnek kell mondani. Viszont arra is törekednie kell az intézetnek, hogy a természettudományokkal és az ipari kutató intézetekkel való együttműködést kiépítse és fokozza. Az iparból szép számban érkeznek már a megkeresések az intézethez, számukat azonban még tovább kell fokozni. E téren információra, propagandára és a már meglévő kapcsolatok elmélyítésére van szükség. Törekednie kell az intézetnek arra, hogy a termelés és kutatás valamennyi szektorával kiépitse a kapcsolatot. Ma még hiányos a kapcsolat az intézet és a közlekedésügy, az építészeti statisztika, a bánya- és kohóipar között. Nem elég szorosak a kapcsolatok a távközlés, az automatizálás, a geodézia, a csillagászat, a fizika és a geológia terén. Bővebb munkaterület mellett bővebb cikkanyag áll majd rendelkezésre az intézet közleményei számára. Így lehetségessé válik majd az anyag jobb megválogatása, egységesebbé az anyag alkalmazott matematikai minősége, s elkerülhetővé az, hogy olyan cikkek is helyet kapjanak, amelyekről erősen vitatható, vajjon helyük lehet-e ilyen kötetben. Erre vonatkozó példaként főként a biszimmetria függvényegyenletéről írt cikket említem.

Valamennyi osztálynak fokoznia kell a belső tervmunkát is. E megjegyzés a valószínűségszámítási osztályra alig vonatkozik, azért ott is említhetők hiányzó és fontos munkaterületek, mint az idősorok és a Gauss-féle folyamatok elmélete. A mechanikai és szilárdságtani osztálynak a széleskörű alkalmazási igény elé siető több belső kezdeményezésre volna szüksége. A vegyipari osztálynak az iparral való szorosabb kapcsolat teremtésével újabb vegyipari munkaterületek keresésére, s ha munkaterületét az integrálegyenletekkel bővíti, az alkalmazásokkal való szorosabb kapcsolatra kell törekednie. A matematikai statisztikai osztálynak szélesebb keretben kellene folytatnia a tudományos kutató munkát, a termeléssel való kapcsolat fejlesztése érdekében is. A numerikus és grafikus módszerek osztályának erősebb belső munkatempóra volna szüksége, és nagyobb lendülettel kellene a numerikus eljárásokat, különösen a differenciálegyenletek numerikus megoldását felkarolnia. Az újabb elektrotechnikai és függvényapproximációs csoportnak munkaterületük rendszeres kiépitésére és megszervezésére van szüksége. Tudom, hogy mind e hiányokat részben az intézet szűk személyi kerete és az országos szakemberhiány idézi elő, amihez még az intézet zsúfolt elhelyezése is járul. Ezen akadályok elhárításával is harcolni kell az intézet jobb munkájáért.

Az intézet osztályainak összeállítása a kialakulás személyi nehézségeinek nyomát hordozza magán. Arra volna szükség, hogy az intézet bővítésével gazdát kapjanak a matematikának az alkalmazás szempontjából fontos fejezetei. Kirívó példa erre, hogy nincs differenciálegyenletekkel foglalkozó osztály, pedig sürgős szükség van e téren a szakemberigény kellő mérvű fedezésére. Egyre szükségesebbnek mutatkozik továbbá, hogy az intézet osztályai számának növelésével Matematikai Intézetté bővüljön, mely magába öleli az alkalmazó osztályokat is. E terv végrehajtása nemcsak a jobb munkamegosztás érdekében, hanem azért is fontos, hogy így a tiszta matematika s az alkalmazott matematika egészséges együttműködése hatékonyabban és intézményesen biztosítható legyen.

Igyekeztem kidomboritani referátumomban a fogyatékosságok mellett fejlődésünk tempóját s a már elért eredmények jelentőségét is. Félreértések elkerülése végett hangsúlyozni szeretném, hogy nem érzem magam az általam említett fogyatékosságok felett állónak, sőt tudom, hogy önmagam felett is kritikát gyakoroltam.

Remélem, hogy a vitaülés rámutat referátumom esetleges hibáira, hiányaira vagy túlzásaira. Úgy hiszem, hogy vitaülésünk akkor teljesíti feladatát, ha a hazai alkalmazott matematikai munka részleteinek megítélésén túl a fejlődés irányvonalával, a felvetett elvi kérdésekkel foglalkozik, ha a tények kritikáján túl elvi döntést is talál.

HOZZÁSZÓLÁSOK

Hajós György r. tag előadását élénk vita követte. A vitát *Rázsó Imre* akadémikus vezette. Bevezető szavaiban hangsúlyozta, hogy az előadás olyan kérdéseket vetett fel, amelyek a műszaki tudományokat közelről érintik. Míg korábban a matematika és az alkalmazó tudományok egységet alkottak, addig az egyes tudományágak fejlődése folytán ez az egység ma már megbomlott és ez a helyzet komoly feladatok elé állít bennünket. A probléma megoldása égetővé vált. Annak a reményének adott kifejezést, hogy a vitaülés sok szempont tisztázásával közelebb fog vezetni a kérdés eredményes megoldásához. — *Egerváry Jenő* akadémikus sajnálattal állapította meg, hogy a vitaülésen csak kevés műszaki szakember jelent meg. Hangsúlyozta, hogy ahhoz, hogy a közeljövőben az Intézet szélesebb körű működése lehetővé váljék, az Intézet tagjainak nagy fokú tehermentesítésére és a létszám, valamint a helyiség növelésére lesz elkerülhetetlen szükség.

Turán Pál felszólalásában egy füzetekben rendszeresen megjelenő folyóirat szükségességét hangsúlyozta, amely az Alkalmazott Matematikai Intézet munkáját ismertetné és nagyobb olvasóközönséghez jutna el. Főértelmet ennek az adna, hogy a hazai matematikai közvélemény és különösen az alkalmazott matematikus hallgatók általa megismernék az alkalmazott matematika reális és aktuális problémáit.

Aczél János felszólalásában rámutatott néhány, a matematika és az alkalmazó tudományok közötti együttműködéssel kapcsolatos ideológiai kérdésre. *Alexits György* akadémikus *Aczél János* felszólalásához kapcsolódva azzal a kérdéssel foglalkozott, hogy mi volt az oka az alkalmazó tudományok és a matematika eltávolodásának, annak, hogy a matematika szülőanyjától, a gyakorlattól nagymértékben elszakadhatott. Rámutatott arra, hogy ebben nagy szerepe volt a tőkés munkamegosztásnak. A burzsoá filozófusok helytelenül szembeállították egymással a kultúrát és a civilizációt. A felszabadulás utáni egészséges fejlődés következtében szükségessé vált egy alkalmazott matematikai intézet létesítése. Az Intézet munkája felhívta a matematikusok figyelmét arra, hogy az elméleti matematika fejlődését is nagy mértékben elősegítik az alkalmazásokból eredő tapasztalatok. Ma már eljutottunk oda, hogy nincs olyan matematikus, aki szembenállana az alkalmazott matematika szükségességének gondolatával, sőt, nagyrészük úgy érzi, hogy az alkalmazások kérdése termékeny kutatások forrását jelenti számára is. Már odáig haladt a fejlődés, hogy az alkalmazásokkal eddig keveset foglalkozó matematikusok egy-egy alkalmazott matematikai kérdésből kiindulva eredményeket tudnak elérni nemcsak az alkalmazott matematika, hanem a tiszta matematika terén is. Ilyen megváltozott helyzetben elérkezett az ideje, hogy még szorosabbá tegyük a kapcsolatot az alkalmazott és tiszta matematika között. Ennek szervezeti feltétele véleménye szerint az volna, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet most már alakuljon át Matematikai Intézetté, amelynek megfelelő számú osztálya a matematika alkalmazási problémáival fog foglalkozni, de szoros összeköttetésben dolgozik azokkal az osztályokkal, amelyek elméleti jellegű kérdésekkel foglalkoznak. Az osztályoknak az alkalmazott és a tiszta matematika szerint való szigorú elhatárolása nem lehetséges, mert minden osztály találhat alkalmazási lehetőségre a munkája során. Ez a vélemény alkult ki az Alkalmazott Matematikai Intézet Tudományos Tanácsában.

Rényi Alfréd az Alkalmazott Matematikai Intézet fejlesztésével kapcsolatban azt húzta alá, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet továbbfejlesztése tekintetében egyetért *Alexits György* felszólalásával, mely szerint az Alkalmazott Matematikai Intézetet Matematikai Intézetté kell fejleszteni. Az Intézet olyan matematikai intézetté váljék, amelyen belül az alkalmazott matematika továbbfejlesztése a nem közvetlenül az alkalmazásokkal foglalkozó matematikusok bevonásával folyik. Rámutatott, hogy idővel közvetlen alkalmazást nyerhet a matematika szinte bármely fejezete és szűk prakticizmus volna, ha csak a pillanatnyi szükségletek irányába fejlesztenénk a matematikát. A matematika elvont fejezeteit és az alkalmazott matematikát szoros egységben kell fejleszteni a szovjet matematika példáját követve. Ezt hívatott szolgálni az Intézet tervbevett átszervezése és fejlesztése.

Kovács Károly Pál lev. tag rámutatott arra, hogy a műszaki szakemberek tudományos munkájában döntő jelentősége van az alkalmazott matematikának és feltétlenül szükséges a matematikusok és az alkalmazó tudományok művelőinek az eddiginél sokkal szorosabb és eredményesebb együttműködése.

Olgyai István felszólalásában a matematikai gépek jelentőségével foglalkozott. Hangsúlyozta, hogy a Szovjetunióban nagy figyelmet fordítanak erre a kérdésre. Nekünk rendelkezésünkre állnak a Szovjetunió tapasztalatai és feltétlenül időszerű, hogy ezekkel a kérdésekkel behatóan foglalkozzunk. Hangsúlyozta, hogy a gépek építése mérnöki feladat, amelyhez nemcsak matematikai, hanem széleskörű műszaki ismeretek szükségesek.

Vincze István felhívta a figyelmet arra, hogy a műszaki egyetemi matematika oktatás színvonalát is javítani kell és biztosítani kell, hogy az erősebb matematikai érdeklődésű mérnökhallgatók az egyetem elvégzése után bekapcsolódjanak az alkalmazott matematika terén folyó munkába. Már az egyetemi évek során is biztosítani kell az ilyenirányú érdeklődés kifejlesztését.

A vita jelentős része az alkalmazott matematika definíciójának, körülhatárolásának kérdése körül forgott. Ezzel a kérdéssel foglalkoztak felszólalásaikban *Gombás Pál, Alexits György, Rázsó Imre* akadémikusok, *Rényi Alfréd* és *Kovács Károly Pál* lev. tagok, *Vincze István, Fenyő István* és még mások. Végeredményben az az álláspont alakult ki, amelyet *Hajós György* lev. tag referátumában képviselt, hogy nem az alkalmazott matematika formális körülhatárolására, hanem alkotó munkára és a matematikusok és az alkalmazó tudományok szakembereinek együttműködésére van szükség. Az alkalmazott matematikai munka körülhatárolását illetőleg *Rázsó Imre* akadémikus rámutatott, hogy minden olyan matematikai ténykedést, amikor a matematikus egy más szakmának segítségére siet, és az ott felvetődő problémát megoldja, alkalmazott matematikai munkának nevezzünk. A mérnököt, amikor egy problémával az alkalmazott matematikusokhoz fordul, az érdekli, hogy a probléma megoldása sikerül-e. Nem érdekli az, hogy már kidolgozott matematikai apparátust alkalmaz-e a matematikus, vagy olyan módszereket, amelyek a matematika területén is újat jelentenek. A matematikust viszont különösen érdekli, az, ami matematikailag számára is új. Ez az érem két oldala s ez szüli a látszólagos ellentéteket. Ha a matematikus maga vetette fel a problémát, akkor is igyekezzék a gyakorlati vonatkozásait maga is keresni. Fokozottabban kell közelednünk egymáshoz mindkét részről.

Alexits György akadémikus rámutatott, hogy ha alkalmazott matematikának nevezünk minden olyan kutatást, amelynél matematikai módszerek kerülnek alkalmazásra, ezzel az alkalmazott matematika fogalmát túlságosan kitágítjuk; ha így értelmeznénk az alkalmazott matematika fogalmát, akkor minden mérnököt és fizikust alkalmazott matematikusnak kellene minősítenünk. Hangsúlyozta, hogy véleménye szerint szorosabb értelemben alkalmazott matematikai kutatásnak csak olyan tudományos tevékenység nevezhető, amely a matematikát az alkalmazások érdekében továbbfejleszti. — Ezt az álláspontot képviselte *Rényi Alfréd* lev. tag is, aki ezzel kapcsolatban kiemelte, hogy az Intézet a legnagyobb örömmel fogadja a műszaki tudományok művelőinek matematikai tevékenységét, mert ebben a jövőbeni együttműködés lehetőségét látja. Nyomatékosan hangsúlyozta, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet munkájának tapasztalatai azt mutatják, hogy az esetek egy részében lehetett csak a felmerült gyakorlati problémákat a gyakorlat által megkívánt módon meglévő matematikai módszerekkel megoldani, igen sok esetben viszont a felhasznált matematikai módszerek továbbfejlesztésére volt szükség ahhoz, hogy megbízható eredményt tudjunk a megbízó kezébe adni. Hogyha felmerül egy gyakorlati probléma, megnézzük azt, hogy az irodalomban található módszerek mennyire használhatók a konkrét célra, ha azonban megfelelő kész módszer nem áll rendelkezésre, akkor a szóbanforgó nyitott matematikai problémát meg kell oldani. Nem volna helyes, ha másodrendűnek tekintenénk a matematikának az alkalmazások érdekében való továbbfejlesztését. — Megemlítette, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei első kötetének előszava is rámutat arra, hogy a Közleményekben megjelent 27 dolgozat, amelyek többségükben konkrét megbízás alapján végzett munka eredményei, szinte kivétel nélkül tartalmaznak tudományos szempontból új eredményt. Az Intézet azonban soha nem zárkózott el és nem is zárkózhat el olyan matematikai feladat megoldása elől, amely csak már ismert, — sőt esetleg közismert módszereket igényel és nem jelent matematikai szempontból újat.

Jánossy Lajos akadémikus felszólalásában kifejtette, hogy nem tartja helyesnek sokat vitatkozni az alkalmazott matematika definíciójáról, hanem arról kellene vitatkozni, mik az esetleges hibák és hogy mit kellene tenni ezeknek a hibáknak a kijavítására. Véleménye szerint a matematikusoknak többet kellene foglalkozni nagyobb elvi kérdésekkel és kevésbbé egyes kisebb napi ipari problémák megoldásával, bár ilyenekkel is foglalkozni kell alkalomadtán. Az Alkalmazott Matematikai Intézet az ipari kutató intézeteken át megszűrt nagyobb problémákkal foglalkozzék, továbbá elvi kérdésekkel és új módszerek kidolgozásával.

Hevesi Gyula lev. tag, az Akadémia Műszaki Osztályának a titkára felszólalásában rámutatott, hogy az Alkalmazott Matematikai Intézet valóban nagyon sok feladatot megoldott az ipar számára. Meg kell azonban állapítani, hogy valójában a matematika tudományának a szocializmus építésébe és a technika tervszerű fejlesztésébe való teljes bekapcsolásáról még nem beszélhetünk. A matematikus megold egyes problémákat, amikor a műszaki szakembereknek segítségre van szükségük, de az, hogy a matematika óriási ismerettömegét mozgósítsa és tervszerűen ráirányítsa a népgazdaság feladataira, még nem valósult meg. Például a matematikusok igen jó segítséget adtak akkor, amikor egyik nagy erőművünkben a turbinalapátok megrepedtek. De helyesebb lett volna, ha a matematikai kutatásokat már akkor erre a kérdésre irányították volna, amikor ezeket a turbinákat gyártották. Ilyen példát nem egyet lehet találni. Az alkalmazott matematika ma ott tart, ahol valamikor az orvostudomány tartott, hogy csak akkor jutott el a beteghez, amikor már operálni kellett. *A kérdés megoldása az, hogy a második ötéves műszaki tudományos tervnek és a matematika és fizika ötéves tudományos tervének kidolgozása szoros* *együttműködésben és összhangban történjék.* Mindenütt, ahol új iparágak létesítéséről, vagy új módszerek kidolgozásáról, új technikáról van szó, ott kell lennie a matematikusnak és fizikusnak a technikus, a műszaki szakember mellett, a bajokat pedig meg kell előzni. Ez rendkívül komoly feladatokat hárít nemcsak a matematikusokra, hanem a technikusokra, a műszaki szakemberekre és fizikusokra egyaránt.

Hevesi Gyula lev. tag javaslatát a második 5 éves tudományos terv kidolgozására vonatkozólag a vitaülés egyhangulag elfogadta. Ugyancsak elfogadta az ülés *Rázsó Imre* elnök javaslatát, hogy a III. és VI. osztály együttes ülésen vitassa meg a következő ötéves tudományos tervvel kapcsolatos műszaki problémák matematikai vonatkozásait.

Ára: 23·— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: Mestyán János. Műszaki felelős: Tóth Ferenc.
A kézirat beérkezett: 1953. VI. 20. — Példányszám: 500. — Terjedelem: 10³/₄ (A/5) ív, 3 ábra.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 532587 Felelős vezető: Vincze György

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

III. KÖTET 4. SZÁM

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1953.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
ALEXITS GYÖRGY, EUDÓ ÁGOSTON, GYULAI ZOLTÁN,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, TURÁN PÁL

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

III. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V. Nádor-utca 12.
Kiadóhivatal: Budapest, V. Alkotmány-utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának felolvasóülésein bemutatott dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest, V. Nádor-utca 12.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V. Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 04-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, VI. Sztálin-út 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

MATRIX-FÜGGVÉNYEK KANONIKUS ELŐÁLLÍTÁSÁRÓL ÉS ANNAK NÉHÁNY ALKALMAZÁSÁRÓL

EGERVÁRY JENŐ r. tag

Előadta az 1953. január 5-én tartott felolvasó ülésen

Ismeretes, hogy a matrix-algebra és analízis mindinkább jelentős szerepet nyer lineáris problémák: algebrai- és differenciálegyenletrendszerek gyakorlati megoldásában.

Ezzel szemben a matrix-elmélet tan- és kézikönyveinek túlnyomó többsége a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjait kevéssé méltatja figyelemre. Kitűnik ez a tény abból, hogy a tárgyalás előterében mindig magának az adott matrixnak kanonikus előállítása áll és a matrix-függvénynek (mely tudvalevőleg differenciálegyenletek matrix-kalkulussal való megoldásának a kulcsa) az előállíthatósága csupán mint mellékeredmény szerepel. Továbbá, magának a matrixnak a kanonikus előállítására adott eljárás is számítástechnikailag hosszadalmas és fölösleges részleteket tartalmaz.

Így pl. egy n-edrendű valós szimmetrikus $\mathbf{A} = [a_{ij}] = [a_{ji}]$ matrix kanonikus előállítása (mechanikai fogalmazásban, normálkoordináták bevezetése) céljából a korszerű kézikönyvek[1] a következő műveletek elvégzését írják elő:

1. Meghatározandók a $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}| = \det[a_{ij}-\lambda\delta_{ij}] = 0$ karakterisztikus egyenlet $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ gyökei.
2. Meghatározandó az $\mathbf{A}-\lambda_k\mathbf{E}$ matrix ϱ_k rangszáma.
3. Meghatározandó az $(\mathbf{A}-\lambda_k\mathbf{E})\mathbf{x} = 0$ homogén, lineáris egyenletrendszernek $n-\varrho_k$ számú lineárisan független megoldása.
4. Az így nyert megoldások rendszere ortogonalizálandó és normirozandó.

A jelen dolgozatban diagonál-alakra hozható matrixfüggvények kanonikus előállítására egy olyan direkt eljárást fogunk ismertetni, mely lényegileg a következő két lépésből áll:

I. Matrix hatványsorának minimális fokszámú polinomra való redukálása a karakterisztikus (minimál) egyenlet felhasználásával. Ennél a redukciónál a matrixfüggvény automatikusan Lagrange f. matrix-polinomok összegére redukálódik.[2]

II. A Lagrange f. matrix-polinomok felbontása a sajátvektorok diadikus szorzatainak összegére. Ez a felbontás — a Lagrange f. matrix-polinomoknak, mint projektoroknak eddig észre nem vett tulajdonsága folytán — a diádokban

[1] L. pl. Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств. Moszkva, 1952. pp. 238—239. H. Jung, Matricen und Determinanten, Leipzig, 1951. pp. 92—99.

[2] A Lagrange f. interpolációs polinomokat a matrixelméletben először alkalmazta J. J. Sylvester, Philos. Mag. 1883. pp. 267—269.

szereplő sajátvektorokat automatikusan ortogonalizált és normált alakban szolgáltatja.

A vázolt eljárás második lépése tehát a fentebb 2. 3. és 4-gyel jelölt műveletsorozatokat egyesíti és kivitelezéséhez csupán másodrendű determinánsok szukcesszív számítása szükséges.

* * *

A dolgozat első része a matrix-aritmetika fontosabb tételeit foglalja össze. Ennek a fejezetnek a beiktatását azért véltük szükségesnek, mert egyrészt a matrix-elmélet a magyarnyelvű tan- és kézikönyvekben alig van képviselve, másrészt a matrix-elméletben döntő szerepe van egy konzekvens szimbolikának, melyet legcélszerűbben egy előzetes összefoglalás kapcsán lehet megismertetni.

Az első fejezet természetesen nem tart igényt teljességre. Benne elsősorban a matrix (és determináns-) elméletnek azokat az alaptételeit ismertettük, melyek a későbbi fejezetekben alkalmazásra kerülnek.

A második fejezet a matrix rangját evidenciába helyező diadikus felbontással foglalkozik. Ebben a fejezetben mutatkozik először a biortogonális diádokra való felbontás jelentősége a matrix sajátértékeinek és sajátvektorainak a meghatározása szempontjából. A második fejezetben bizonyítjuk továbbá, hogy ha egy projektor-matrix diádok összegére van bontva, akkor a felbontásban szereplő diádok automatikusan biortogonalizálva vannak.

A harmadik fejezet a matrix karakterisztikus és minimál-egyenletével foglalkozik. A hermitikus matrixoknak többszörös sajátérték mellett bekövetkező rangszámcsökkenését egy egyszerű algebrai identitás segélyével vezetjük le.

A negyedik fejezet élén matrix-függvénynek hatványsorral való definíciója áll. Innen (diagonál-alakra hozható matrix esetén) az előző fejezetekben levezetett tételek alkalmazása közvetlenül a Lagrange f. matrix-polinomokkal, majd a biortogonális diádokkal való kanonikus előállításra vezet. Ugyanezen fejezetben röviden érintjük az általános (diagonál-alakra nem hozható) matrixok függvényeinek Hermite f. matrix-polinomokkal való előállítását.

Az utolsó, ötödik fejezet a matrix-függvényeknek lineáris differenciálegyenletrendszerek megoldására való alkalmazását mutatja be. Az elsőrendű rendszerek megoldását ciklikus együttható-matrix esetén, egy valószínűségszámítási probléma tárgyalásával kapcsolatban ismertetjük. Másodrendű rendszerekhez vezetnek tudvalevőleg a végesszámú szabadsági fokkal bíró konzervatív mechanikai rendszerek kis rezgései. Ilyen típusú példaképpen a korpuszkuláris húrmodell sajátrezgéseinek meghatározását mutatjuk be a matrixkalkulus felhasználásával.

I. Fejezet

A matrix-aritmetika alaptételeinek áttekintése

1. §. Az alábbiakban fellépő matrixok elemei általában tetszőleges komplex számok.

Egyetlen oszlopból álló matrix neve: oszlop-vektor. Jele és részletes kiírása:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Egyetlen sorból álló matrix neve: sorvektor. Jele és részletes kiírása:

$$\mathbf{b}^* = [b_1, b_2, \ldots, b_m] \quad \text{vagy} \quad \mathbf{b}^j = [b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jm}]. \tag{2}$$

n sorból és m oszlopból álló matrix jele általában $\mathbf{A}$; ha a sorok és oszlopok számát feltüntetni kívánjuk, akkor $\mathbf{A}_m^n$. Valamely matrix kifejezhető oszlop-, ill. sorvektoraival[3], valamint skalár-elemeivel:

$$\mathbf{A}_m^n = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]. \tag{3}$$

$\mathbf{A}$ minor-matrixait a következőképpen jelöljük:

$$\mathbf{A}_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r}^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_s} = \begin{bmatrix} a_{\nu_1 \mu_1}\, a_{\nu_1 \mu_2} \ldots a_{\nu_1 \mu_r} \\ a_{\nu_2 \mu_1}\, a_{\nu_2 \mu_2} \ldots a_{\nu_2 \mu_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\nu_s \mu_1}\, a_{\nu_s \mu_2} \ldots a_{\nu_s \mu_r} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

(Ha valamely matrix típusának $\mathbf{A}_m^n$ jelölése félreértést okozhat, akkor az $\mathbf{A}_{12\ldots m}^{12\ldots n}$ jelölés alkalmazandó.)

Két matrix definíció szerint akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha azok ugyanannyi sort és oszlopot tartalmaznak, továbbá a megfelelő helyeken álló elemeik egyenlők. Egy $\mathbf{A}_m^n = \mathbf{B}_m^n$ típusú egyenlet tehát $n \cdot m$ skalár egyenlettel, valamint n, illetve m vektor-egyenlettel ekvivalens.

Valamely $\mathbf{A}$ matrix konjugáltja: $\bar{\mathbf{A}}$ az a matrix, melynek elemei $\mathbf{A}$ megfelelő elemeinek konjugáltjai.

Valamely $\mathbf{A}$ matrix transzponáltja: $\mathbf{A}^*$ az a matrix, mely $\mathbf{A}$-ból a sorok és oszlopok felcserélésével keletkezik. Ennek megfelelően a sorvektor $\mathbf{b}^*$ jele arra utal, hogy az a $\mathbf{b}$ oszlopvektor transzponáltja.

[3] Valamely matrixnak oszlop- v. sorvektoraival való kifejezése nem egyéb, mint annak speciális módon való particionálása. L. pl. A. C. Aitken, Determinants and Matrices. Edinburgh, 1948. pp. 24—25.

Az $\mathbf{A}_n^n$ típusú matrixot quadratikusnak nevezzük, n a matrix rendszáma. Diagonál-matrix az olyan quadratikus matrix, melynek a fődiagonálison kívüli elemei mind 0-sal egyenlők. Rövidebb jelölésére a

$$\begin{bmatrix} a_1 0 \ldots 0 \\ 0\, a_2 \ldots 0 \\ . \; . \; . . . . \\ 0\; 0 \ldots a_n \end{bmatrix} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \tag{5}$$

írásmód alkalmazható.

Egység-matrix az olyan diagonálmatrix, melynek mindegyik fődiagonális eleme 1-gyel egyenlő. Jele: $\mathbf{E} = [\delta_{ij}]$.

Ha $\mathbf{A}$ minden eleme 0, akkor azt 0-matrixnak nevezzük, és 0-val jelöljük.

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, azaz $a_{ij} = a_{ji}$, akkor $\mathbf{A}$ szimmetrikus.

Ha $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}^*$, azaz $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, akkor $\mathbf{A}$ hermitikus.

2. §. Az összeadás és kivonás csupán ugyanannyi sort és oszlopot tartalmazó matrixokra van definiálva. Ha $\mathbf{A}_m^n = [a_{ij}]$ és $\mathbf{B}_m^n = [b_{ij}]$, akkor $\mathbf{A}_m^n \pm \pm \mathbf{B}_m^n = [a_{ij} \pm b_{ij}]$. Az így értelmezett összeadás asszociatív és kommutatív.

Matrixnak skalárral való szorzási szabálya (bizonyos folytonossági követelmények mellett) a matrix-összeadás definíciójának következménye: Ha $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, akkor $c \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot c = [c \cdot a_{ij}]$.

A skalárral való szorzás kommutatív és disztributív.

A matrix-aritmetika legjellegzetesebb művelete a matrixok szorzása. Ezzel kapcsolatban indokoltnak látszik két körülményt kiemelve előrebocsátani:

Két matrixnak adott sorrendben vett szorzata csak akkor van értelmezve, ha a tényezők „konformábilisak", azaz ha az első (baloldali) tényezőnek ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora van a második (jobboldali) tényezőnek. $\mathbf{A}_m^n \cdot \mathbf{B}_r^s$ tehát csak akkor van értelmezve, ha $m = s$.

A matrixok szorzása általában *nem* kommutatív.

A konformábilis $\mathbf{A}_m^n = [a_{ij}]$ és $\mathbf{B}_r^m = [b_{kl}]$ matrixok szorzata definíció szerint a következő $\mathbf{C}_r^n$ típusú matrix:

$$\mathbf{C}_r^n = [c_{ij}] = \left[\sum_{\nu=1}^{m} a_{i\nu} b_{\nu j} \right] \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, \ldots, n) \\ (j = 1, 2, \ldots, r). \end{matrix} \tag{6}$$

A matrixok szorzásának legegyszerűbb esete az $\mathbf{A}_n^1 \mathbf{B}_1^n$ ill. $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}$ típusú szorzat képzése (két vektor skaláris szorzata):

$$\mathbf{a}^* \mathbf{b} = \mathbf{b}^* \mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu .^{4} \tag{7}$$

[4] Uniter metrikájú térben két komplex vektor skalár szorzata az $a^* \bar{b}$ kifejezéssel van értelmezve.

Az $\mathbf{a}^*\mathbf{b}$ szorzatnak a fenti képlettel megadott képzési módját az $[a_1 \dots a_n]$ sor és az $\begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}$ oszlop komponálásának nevezzük.

Eszerint általános (konformábilis) matrixok szorzásánál a szorzat i-dik sorában és j-dik oszlopában álló elemet úgy nyerjük, hogy a baloldali tényező i-dik sorát a jobboldali tényező j-dik oszlopával komponáljuk.

A mondottakból nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ matrixok csak akkor szorozhatók úgy az $\mathbf{AB}$, mint a $\mathbf{BA}$ sorrendben, ha $\mathbf{A}_m^n$ és $\mathbf{B}_n^m$ típusúak. A szorzatok $\mathbf{C}_n^n$, ill. $\mathbf{D}_m^m$ típusú quadratikus matrixok. Ennek a megkülönböztetésnek figyelemreméltó példáját mutatják egy $\mathbf{A}_n^1 = \mathbf{a}^*$ sorvektornak és egy $\mathbf{B}_1^n = \mathbf{b}$ oszlopvektornak különböző sorrendben vett szorzatai.

Míg ugyanis az $\mathbf{A}_n^1\mathbf{B}_1^n = \mathbf{a}^*\mathbf{b}$ szorzat a $\mathbf{A}_n^1\mathbf{B}_1^n = \mathbf{C}_1^1$ összefüggésnek megfelelően a fentebb ismertetett $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu$ skalárral egyenlő, addig az ellenkező sorrendben vett szorzás a[5]

$$\mathbf{B}_1^n\mathbf{A}_n^1 = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}^* = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix} [a_1 a_2 \dots a_n] = \begin{vmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 \dots b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 \dots b_2 a_n \\ . & . \; \dots \; . \\ b_n a_1 & b_n a_2 \dots b_n a_n \end{vmatrix} = \mathbf{C}_n^n \tag{8}$$

n-edrendű quadratikus matrixot eredményezi. A $\mathbf{ba}^*$-típusú matrixot az irodalomban kialakult szokásnak megfelelően két vektortényező diadikus szorzatának, vagy röviden *diád*-nak fogjuk nevezni.

3. §. Két ugyanolyan rendű quadratikus matrix szorzata mindkét sorrendben értelmezve van, azonban az így nyert szorzat-matrixok általában különbözők. Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, akkor az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ matrixokat kommutabiliseknek vagy felcserélhetőknek nevezzük.

Az egységmatrix és a 0-matrix bármely vele egyező rendű matrix-szal felcserélhető és

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}; \quad \mathbf{A}\cdot 0 = 0\cdot\mathbf{A} = 0.$$

Miután $\langle c, c, \dots, c\rangle \mathbf{A} = c\mathbf{EA} = c\mathbf{A}$, azért az n-edrendű matrixok aritmetikájában szorzás szempontjából a $\langle c, c, \dots, c\rangle$ matrix és a c skalár ekvivalensek.

Két diagonális matrix mindig felcserélhető, mert nyilván

$$\langle a_1 a_2 \dots a_n\rangle\langle b_1 b_2 \dots b_n\rangle = \langle a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n\rangle.$$

Valamely $\mathbf{A}_n^n\mathbf{B}_n^n$ típusú matrix-szorzat két különböző alakban állítható elő aszerint, hogy a tényezőket oszlop- v. sorvektoraikból felépítettnek tekintjük.

[5] A ba^* szorzat nyilván különböző dimenziójú vektor-tényezők esetén is értelmezhető.

Az $\mathbf{A}_n^n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_n^n = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n]$

alakban írt tényezők esetén

$$\mathbf{A}_n^n \mathbf{B}_n^n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^1\mathbf{b}_2 \dots \mathbf{a}^1\mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^2\mathbf{b}_2 \dots \mathbf{a}^2\mathbf{b}_n \\ \cdot & \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ \mathbf{a}^n\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^n\mathbf{b}_2 \dots \mathbf{a}^n\mathbf{b}_n \end{bmatrix}, \tag{9}$$

tehát a szorzat egyetlen n-edrendű matrix, melynek elemei skalár szorzatok.

Az $\mathbf{A}_n^n = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n]$, $\mathbf{B}_n^n = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^n \end{bmatrix}$ alakban írt tényezőkből kiindulva

$$\mathbf{A}_n^n \mathbf{B}_n^n = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^n \end{bmatrix} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}^1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}^2 + \dots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}^n, \tag{10}$$

ekkor tehát a szorzat a tényezők közös rendszámával megegyező számú diád összegeként van előállítva.

Az alábbiakban többször fogjuk alkalmazni egy matrix-szorzat valamely minormatrixának a következő előállítását:

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}_k^n$; $\mathbf{C} = \mathbf{C}_m^l$ és $\mathbf{ABC} = \mathbf{D}_m^n$, akkor

$$\mathbf{D}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}^{\nu_1\nu_2\dots\nu_s} = \mathbf{A}_{12\dots k}^{\nu_1\nu_2\dots\nu_s} \mathbf{B} \mathbf{C}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}^{12\dots l} \quad \begin{matrix} (s \leqq n) \\ (r \leqq m) \end{matrix}. \tag{11}$$

Ez az azonosság a szorzat definíciójának közvetlen következménye és arra redukálódik az $r = 1, s = 1, k = l, \mathbf{B} = \mathbf{E}$ esetben.

4. §. A skaláris szorzásnak további két alaptörvénye: az asszociativitás és a disztributivitás érvényes matrixok szorzásánál is. A szorzat definíciójának közvetlen következménye, hogy

$$(\mathbf{A}_m^n \mathbf{B}_r^m)\mathbf{C}_s^r = \mathbf{A}_m^n(\mathbf{B}_r^m \mathbf{C}_s^r) = \mathbf{D}_s^n,$$

ugyanis mindkét szorzat-matrix általános eleme: $d_{ij} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{r} a_{i\mu} b_{\mu\nu} c_{\nu j}$, tehát többtényezős matrix-szorzat (a sorrend megtartása mellett) a zárójellel kijelölt csoportosítás módjától független. Eszerint a zárójelezés fölösleges és tetszőleges számú (szomszédos páronként konformábilis) matrix szorzata az első (szélsőbal) tényezővel egyező számú sort, és az utolsó (szélsőjobb) tényezővel egyező számú oszlopot tartalmaz:

$$\mathbf{A}_\beta^\alpha \mathbf{B}_\gamma^\beta \mathbf{C}_\delta^\gamma \cdots \mathbf{M}_\nu^\mu = \mathbf{N}_\nu^\alpha.$$

A tényezők közt természetesen sor- és oszlopvektorok is előfordulhatnak. Ennek legismertebb példája az $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j$ bilineáris alaknak

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y} = [x_1 x_2 \dots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \\ a_{n1} \dots a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

matrix-szorzat alakban való előállítása.

A matrix-szorzás disztributivitását a

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C}$$

reláció fejezi ki, mely az összeg és szorzat definíciójának közvetlen következménye. Alkalmazásánál mindig figyelembe kell lenni a tényezők sorrendjére. Pl.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{D} = (\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C})\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{D}+\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{D}.$$

Többtényezős matrix-szorzat speciális esete valamely quadratikus matrix természetes egész kitevőjü hatványa:

$$\mathbf{A}^n = \underset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}} \cdot \underset{\mathrm{II}}{\mathbf{A}} \cdots \underset{n}{\mathbf{A}}.$$

A szorzás asszociativitása folytán $\mathbf{A}^n$ és $\mathbf{A}^m$ (az $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$ egyenlettel értelmezett 0-dik hatványt is beleértve) kommutabilisek. Innen következik, hogy egy- és ugyanazon $\mathbf{A}$ matrixból skalár együtthatókkal szerkesztett $c_0\mathbf{E}+c_1\mathbf{A}+\cdots+c_n\mathbf{A}^n$ alakú matrix-polinomok közti racionális egész műveletek ugyanazon szabályok szerint végezhetők, mint skalár-polinomok esetén, továbbá, hogy egy változót tartalmazó racionális egész skalár identitások érvényesek maradnak akkor, ha bennük a változót tetszőleges quadratikus matrix-szal, az egységet pedig $\mathbf{E}$-vel helyettesítjük.

5. §. Noha az n-edrendű matrixok összesége gyűrűt alkot, azaz olyan mennyiségrendszert, melyben a fentiek szerint az összeadás, kivonás és szorzás definiálva vannak, (oly módon, hogy az összeadás kommutatív és asszociatív, a szorzás asszociatív és mindkét oldalról disztributív) ennek dacára az egyes matrixokhoz eddig semilyen számérték nem lett hozzárendelve. A végből, hogy a skalár-aritmetika egyes tételei a matrix-aritmetikába átvihetők legyenek, kívánatos minden quadratikus $\mathbf{A}$ matrixhoz egy olyan, $|\mathbf{A}|$-val jelölendő számértéket hozzárendelni, mely — a skalár $|ab| = |a|\,|b|$ azonosság mintájára — bármely két matrix esetén eleget tesz az $|\mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$ azonosságnak.

Ilyen hozzárendelés lehetőségét és egyértelműségét biztosítja a következő [6]

I. Tétel: *Ha* $|\mathbf{A}|$ *olyan minimális fokú racionális egész függvénye az* $\mathbf{A}$ *matrix (független változóknak tekintendő)* a_{ij} *elemeinek, mely a*

$$|\mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}| \tag{12}$$

[6] Az I. Tétel bizonyítását illetőleg l. pl. C. C. Mac Duffee, The Theory of Matrices. Berlin, 1933. pp. 6—7.

azonosságot kielégíti, akkor $|\mathbf{A}|$ *az* $\mathbf{A}$ *matrix determinánsával egyenlő.* (Ennek megfelelően szükség esetén $|\mathbf{A}|$ helyett a $\det(\mathbf{A})$ jelet is fogjuk használni.)

Későbbi alkalmazásokra való tekintettel idézzük a determinánselmélet alábbi tételeit.[7]

1. Ha az

$$(-1)^{\alpha+\beta}|\mathbf{A}_{1\,2\dots\beta-1,\,\beta+1,\dots n}^{1\,2\dots\alpha-1,\,\alpha+1,\dots n}| = A_{\alpha\beta}$$

jelölést az $a_{\alpha\beta}$ elem komplementer minora számára bevezetjük, akkor a determinánsnak sor vagy oszlop szerinti kifejtésére vonatkozó identitások a következő alakban írhatók:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}A_{j\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}A_{\nu j} = \delta_{ij}|\mathbf{A}| = \delta_{ij}|\mathbf{A}^*|. \tag{13}$$

2. Cauchy—Binet tétele: Ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}_k^n$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m^k$, akkor

$$|(\mathbf{A}\mathbf{B})_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}^{\nu_1\nu_2\dots\nu_r}| = |\mathbf{A}_{1\,2\dots k}^{\nu_1\nu_2\dots\nu_r}\cdot\mathbf{B}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}^{1\,2\dots k}| = \sum_{(\gamma)}|\mathbf{A}_{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r}^{\nu_1\nu_2\dots\nu_r}|\,|\mathbf{B}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}^{\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_r}|, \tag{14}$$

ahol $\sum\limits_{(\gamma)}$ az $1, 2, \dots, k$ számok összes r-edosztályú $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_r$ kombinációira kiterjedő összegezést jelent. (Ennek speciális esete $k = m = n = r$ esetben (12) és $r = 1$ esetben (7).)

3. A $|\lambda\mathbf{E}_n - \mathbf{A}_n^n|$ determináns a λ skalár változónak n-edfokú polinomja, melynek explicit kifejtése:

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \lambda^n - \lambda^{n-1}\sum_i a_{ii} + \lambda^{n-2}\sum_i\sum_j|\mathbf{A}_{ij}^{ij}| - \dots \pm |\mathbf{A}|. \tag{15}$$

4.

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \sum_{(\alpha)}|(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})_{\alpha_1,\dots\alpha_{n-k}}^{\alpha_1\dots\alpha_{n-k}}|, \tag{16}$$

ahol $\sum\limits_{(\alpha)}$ az $1, 2, 3 \dots n$ számok összes $n-k$-ad osztályú $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-k}$ kombinációira vonatkozó összegezést jelent.

6. §. A determináns fogalmának a matrix-elmélet szempontjából való jelentősége először az osztás műveletének bevezetésénél mutatkozik. A skalár aritmetikában az a számmal való osztás ekvivalens a reciprok értékével való szorzással. Az a szám reciprokát pedig az $ax = xa = 1$ egyenlet definiálja, melyből nyilvánvaló, hogy csupán 0-tól különböző a számnak van reciprokja.

Ennek alapján közelfekvő, hogy a matrixok osztásának általános tárgyalása előtt azt a kérdést vizsgáljuk, van-e adott $\mathbf{A}$ matrixnak reciprokja, azaz van-e olyan $\mathbf{X}$ matrix, mely az

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E}, \text{ ill. } \mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{E} \tag{17}$$

egyenletek valamelyikét kielégíti. Ezen egyenletek megoldhatóságára azonnal

[7] L. pl. A. C. Aitken, Detereminants and Matrices. Edinburgh, 1948.

nyerünk egy szükséges feltételt, ha a bal- és jobboldali matrixok determinánsaira térünk át és a (12) alaptulajdonságot felhasználjuk. Ekkor az $|\mathbf{AX}|=|\mathbf{E}|$ és $|\mathbf{XA}|=|\mathbf{E}|$ egyenletek mindegyikéből következik

$$|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{X}|=|\mathbf{X}|\cdot|\mathbf{A}|=1.$$

Tehát a (17) egyenletek bármelyikének csak akkor lehet megoldása, ha az $\mathbf{A}$ matrix determinánsa 0-tól különböző.

Ki fogjuk mutatni, hogy a reciprok-matrix létezéséhez ez a feltétel elegendő, a feltétel teljesülése esetén a (17) egyenleteknek egyetlen közös megoldásuk van, tehát jobb- és baloldali reciprok-matrixok megkülönböztetése fölösleges, és az $\mathbf{A}^{-1}$ reciprok-matrix racionális műveletekkel megszerkeszthető $\mathbf{A}$ elemeiből.

7. §. A reciprok-matrix megszerkesztése céljából először az adjungált matrix fogalmát vezetjük be. Jelöljük most is az $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ quadratikus matrix determinánsát $|\mathbf{A}|$-val és az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst (az a_{ij} elem komplementer minorát) A_{ij}-vel. Ekkor az $[A_{ji}]$ matrixot $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ adjungáltjának nevezzük és adj. $\mathbf{A}$-val jelöljük. Eszerint:

$$\text{adj. } \mathbf{A}=\text{adj.}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{vmatrix}. \tag{18}$$

Külön kiemeljük, hogy $\mathbf{A}$ adjungáltja az $|\mathbf{A}|$ minoraiból alkotott matrixnak a *transzponált*ja.

A determináns fentebb idézett (13) tulajdonsága alapján

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}A_{j\nu}=\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}A_{\nu j}=0, \quad \text{ha} \quad i\neq j \tag{19$_1$}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}A_{i\nu}=\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i}A_{\nu i}=|\mathbf{A}|, \tag{19$_2$}$$

ennek következtében

$$\mathbf{A}\cdot\text{adj. }\mathbf{A}=\text{adj. }\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \cdots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & & |\mathbf{A}|\end{vmatrix}=|\mathbf{A}|\cdot\mathbf{E}. \tag{20}$$

Ebből az azonosságból kiolvasható a következő alapvető

II. Tétel: *Egy matrix a saját adjungáltjával mindig kommutálható és szorzatuk az egység-matrixtól csupán az $|\mathbf{A}|$ skalár szorzóban különbözik.*

A (20) identitás közvetlenül mutatja, hogy a (17) egyenletek mindegyike ugyanazon $\mathbf{X}$ matrix-szal kielégíthető, ha csak $|\mathbf{A}|\neq 0$. Ekkor ugyanis az $\mathbf{X}=|\mathbf{A}|^{-1}\text{adj. }\mathbf{A}$ matrix mind a két egyenletet kielégíti, tehát a bal- és jobboldali reciprok matrixok megegyeznek és közös értékük $\mathbf{A}^{-1}$-nel jelölhető:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj.}\,\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}. \tag{21}$$

Valamint az $a \cdot x = 1$ egyenletnek nincs megoldása $a = 0$ esetén, épp úgy az $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ és $\mathbf{XA} = \mathbf{E}$ egyenleteknek sincs megoldásuk $|\mathbf{A}| = 0$ esetén. Ennek megfelelően a 0 determinánssal bíró matrixokat szingulárisoknak (vagy nem-invertálhatóknak) fogjuk nevezni.

Nyilván $|\mathbf{A}| \neq 0$ esetén a fentiek alapján $\mathbf{A}$-nak tetszőleges negatív egészkitevőjű hatványai is értelmezve vannak és azok úgy egymásközt, mint $\mathbf{A}$ természetes kitevőjű hatványaival felcserélhetők.

Ezekután tetszőleges matrixok osztását (nem-szinguláris osztó mellett) az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ egyenletnél $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$-vel, az $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ egyenletnél pedig $\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1}$-nel értelmezzük. Az osztás eredménye tehát függ az osztandó és osztó sorrendjétől.

Matrix-szorzat reciprokjának a képzése a

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \tag{22}$$

azonosság szerint történik, melynek helyességét a

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{E}$$

egyenlőségek igazolják.

Ha az a és b skalárok kielégítik az $a \neq 0, ab = 0$ relációkat, akkor ezekből természetesen $b = 0$ következik. Matrixok esetén $\mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{AB} = 0$-ból általában nem következik $\mathbf{B} = 0$. Ha azonban $|\mathbf{A}| \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^{-1}$ létezik és $\mathbf{AB} = 0$-ból $\mathbf{A}^{-1}$-nel való szorzással $\mathbf{B} = 0$ következik.

Ha az a, b és c skalárok kielégítik az $ac = bc = cb \neq 0$ relációkat, akkor ezekből nyilván $a = b$ következik. Viszont az előbbivel analóg meggondolás azt mutatja, hogy $\mathbf{AC} = \mathbf{BC} \neq 0$-ból csak akkor következik $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, ha $|\mathbf{C}| \neq 0$.

Az $\mathbf{AC} = \mathbf{CB} \neq 0$ relációkból pedig $|\mathbf{C}| \neq 0$ esetén sem következik általában $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Mindamellett $|\mathbf{C}| \neq 0$ esetén a

$$\mathbf{AC} = \mathbf{CB}, \text{ ill. } \mathbf{A} = \mathbf{CBC}^{-1} \tag{23}$$

egyenletekkel összekapcsolt $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ matrixok közt szoros kapcsolat áll fenn. Először is (23)-ból következik

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{C}|\,|\mathbf{B}|\,|\mathbf{C}|^{-1} = |\mathbf{B}|.$$

Továbbá, ha $\mathbf{A}_1 = \mathbf{CB}_1\mathbf{C}^{-1}$ és $\mathbf{A}_2 = \mathbf{CB}_2\mathbf{C}^{-1}$, akkor

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{C}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)\mathbf{C}^{-1};\ \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{CB}_1\mathbf{C}^{-1}\mathbf{CB}_2\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{CB}_1\mathbf{B}_2\mathbf{C}^{-1}.$$

Ha tehát a $\mathbf{A} = \mathbf{CBC}^{-1}$ kapcsolatban álló matrixokat *hasonlók*nak nevezzük és a vonatkozást $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$-vel jelöljük, akkor $\mathbf{A}_1 \sim \mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_2 \sim \mathbf{B}_2$-ből $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \sim \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \sim \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ következik. Minthogy továbbá valamely $\mathbf{A}$

matrixnak bármely skalár együtthatós $f(\mathbf{A})=\sum_{0}^{n} c_\nu \mathbf{A}^\nu$ polinomja **A**-ból összeadásokkal és szorzásokkal épül fel, tehát az előbbiek alapján érvényes a

III. Tétel: *Ha* $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$ *és* $f(x)$ *tetszőleges skalár polinom, akkor*

$$f(\mathbf{A})\sim f(\mathbf{B}) \quad \textit{és} \quad |f(\mathbf{A})|=|f(\mathbf{B})|.$$

Pl. $f(x)=\lambda-x$ esetén $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$-ből következik

$$\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}\sim\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B} \quad \text{és} \quad |\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}|.$$

II. Fejezet

Matrix rangja és diadikus felbontása. Vektorok lineáris függése. Projektor-matrix felbontása biortogonális diádok összegére

1. §. A matrix elmélet egyik legfontosabb fogalomalkotása a matrix rangja. Valamely **A** matrix rangja: $\varrho(\mathbf{A})$ számára két definíciót adunk, melyek egymással ekvivalenseknek fognak bizonyulni.

I. Definíció. **A** *rangja:* $\varrho(\mathbf{A})$ *egyenlő az*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{n1} \quad a_{nm} \end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{r}\begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{bmatrix}[v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{km}]=[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_r]\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix}=\sum \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \qquad (1)$$

alakú előállításhoz szükséges diádok minimális számával. Rövidség kedvéért a továbbiakban minden olyan (1) alakú előállítást, mely ennek a minimumkövetelménynek eleget tesz, az **A** matrix egy minimális diadikus előállításának fogunk nevezni.

Célszerű már e helyen bevezetni a vektorok lineáris függetlenségének a fogalmát.

Az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_r$ *vektorokat akkor nevezzük lineárisan függetleneknek, ha az*

$$x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+\dots+x_r\mathbf{u}_r=0 \qquad (2)$$

egyenlet fennállásából $x_1=x_2=\dots=x_r=0$ *következik.* Ha viszont az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_r$ vektorok közt fennáll olyan (2) alakú egyenlet, melyben nem mindegyik $x_i=0$, akkor azt mondjuk, hogy a vektorok közt lineáris összefüggés van.

Ebből a definícióból rögtön következik, hogy **A** *bármely minimális diadikus előállításában úgy a baloldali* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_r$ *tényezők, valamint a jobboldali* $\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \dots, \mathbf{v}_r^*$ *tényezők lineárisan függetlenek.* Ha ugyanis pl. a baloldali tényezők közt fennállna egy (2) alakú egyenlet, melyben egyik skalár együttható, pl. $x_r \neq 0$, akkor abból $\mathbf{u}_r$ kifejezhető volna

$$\mathbf{u}_r=-\frac{x_1}{x_r}\mathbf{u}_1-\frac{x_2}{x_r}\mathbf{u}_2-\dots-\frac{x_{r-1}}{x_r}\mathbf{u}_{r-1}$$

alakban és ennek folytán létezne egy

$$\mathbf{A}=\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*+\ldots+\mathbf{u}_{r-1}\mathbf{v}_{r-1}^*-\left(\frac{x_1}{x_r}\mathbf{u}_1+\ldots+\frac{x_{r-1}}{x_r}\mathbf{u}_{r-1}\right)\mathbf{v}_r^*=$$

$$=\mathbf{u}_1\left(\mathbf{v}_1^*-\frac{x_1}{x_r}\mathbf{v}_r^*\right)+\mathbf{u}_2\left(\mathbf{v}^*-\frac{x_2}{x_r}\mathbf{v}_r^*\right)+\ldots+\mathbf{u}_{r-1}\left(\mathbf{v}_{r-1}^*-\frac{x_{r-1}}{x_r}\mathbf{v}_r^*\right)$$

alakú előállítás, tehát $\sum_{k=1}^{r}\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*$ nem lenne minimális, feltevésünkkel ellentétben. (Később, a **4.** §.-ban ki fogjuk mutatni, hogy ha $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$, valamint $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ lineárisan függetlenek, akkor a $\sum_{k=1}^{r}\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*$ előállítás minimális.)

II. Definíció. **A** *rangja: $\varrho(\mathbf{A})$ egyenlő a belőle kiválasztható maximális rendű nem-szinguláris minormatrixok rendszámával.*

2. §. $\varrho(\mathbf{A})$ megállapítására először egy olyan módszert ismertetünk, mely az I.) definíción alapszik és egyszersmind számítástechnikailag is alkalmas eljárást ad a rang meghatározására. Utólag verifikálni fogjuk, hogy az így meghatározott rang a II.) definíció követelményeit is kielégíti.

$\mathbf{A}=0$ esetén nyilván $\varrho(\mathbf{A})=0$.

Ha $\mathbf{A}\neq 0$, akkor van legalább egy 0-tól különböző eleme: $a_{\beta_1\gamma_1}$ tehát képezhető a

$$\mathbf{A}-\frac{1}{a_{\beta_1\gamma_1}}\begin{bmatrix}a_{1\gamma_1}\\a_{2\gamma_1}\\\vdots\\a_{n\gamma_1}\end{bmatrix}[a_{\beta_1 1}a_{\beta_1 2}\ldots a_{\beta_1 m}]=\mathbf{A}-\mathbf{u}_1\mathbf{v}^*=\mathbf{A}'=[a'_{ij}] \quad (3\cdot1)$$
$$(u_{1\gamma_1}v_{\beta_1 1}=a_{\beta_1\gamma_1}\neq 0)$$

matrix, melynek γ_1-dik oszlopa és β_1-dik sora csupa 0 elemet tartalmaz. Ha $\mathbf{A}'\neq 0$, akkor van legalább egy 0-tól különböző $a'_{\beta_2\gamma_2}$ eleme, tehát képezhető a

$$\mathbf{A}'-\frac{1}{a'_{\beta_2\gamma_2}}\begin{bmatrix}a'_{1\gamma_2}\\a'_{2\gamma_2}\\\vdots\\a'_{n\gamma_2}\end{bmatrix}[a'_{\beta_2 1}a'_{\beta_2 2}\ldots a'_{\beta_2 m}]=\mathbf{A}'-\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^*=\mathbf{A}''=[a''_{ij}] \quad (3\cdot2)$$
$$(u_{2\gamma_2}v_{\beta_2 2}=a'_{\beta_2\gamma_2}\neq 0)$$

matrix, melynek γ_1 és γ_2-dik oszlopai, valamint β_1 és β_2-dik sorai csupa 0 elemet tartalmaznak. (3·1) és (3·2) szerint

$$\mathbf{A}-\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*-\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^*=\mathbf{A}''.$$

Nyilvánvaló, hogy a redukciós eljárást folytatva, eljutunk egy olyan $r\leqq n, m$ értékhez, melyre $\mathbf{A}^{(r)}=0$ és ezzel előállítottuk az adott matrixot a

$$\mathbf{A}=\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*+\mathbf{u}_2\mathbf{v}^*+\ldots+\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^* \quad (4)$$

alakban (a diádok előtt álló $a_{\beta_1\gamma_1}^{-1}$ stb. skalártényezőket tetszőleges arányban oszthatjuk szét az $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}^*$ stb. vektortényezők közt).

Az I. definíció szerint **A** rangja nem változik, ha a sorok, ill. oszlopok sorrendjét felcseréljük, mert a sorok, ill. oszlopok cseréje a baloldali, ill.

jobboldali vektortényezők koordinátáinak felcserélésével ekvivalens. Ennek alapján — a könnyebb áttekintés kedvéért — vigyük át a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$-dik sort, úgyszintén a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$-dik oszlopot az első, második, ... r-dik helyre; a többi sor és oszlop elrendezése tetszőleges. Ekkor a felcseréléssel nyert $\tilde{\mathbf{A}}$ matrix a következő alakú:[8]

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{r} \tilde{\mathbf{u}}_k \tilde{\mathbf{v}}_k^* = \sum_{k=1}^{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{k,k} \\ u_{k+1,k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{bmatrix} [0 \ldots 0 \; v_{kk} \ldots v_{km}] =$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \ldots 0 \\ u_{21} & u_{22} & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{r1} & u_{r2} & \ldots u_{rr} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots u_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ 0 & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & v_{rr} \ldots & v_{rm} \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{V}^*, \tag{5}$$

melyből nyilvánvaló, hogy

$$\pm \left| \mathbf{A}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_r}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r} \right| = \left| \tilde{\mathbf{A}}^{12\ldots r}_{12\ldots r} \right| = \prod_{k=1}^{r} u_{kk} v_{kk} \neq 0. \tag{6}$$

Ezzel kimutattuk, hogy az (5) előállítás minimális, mert r-nél kevesebb diád összegének minden r-edrendű minormatrixa szinguláris, (6)-tal ellentétben.

(5)-ből nyilvánvaló továbbá, hogy $\mathbf{A}$-nak minden $r+1$-edrendű minormatrixa szinguláris és ezzel (6) figyelembe vétele mellett az is verifikálva van, hogy az (1) előállítással meghatározott rangszám a klasszikus II.) definíció követelményeit is kielégíti.

A fenti redukciós eljárás effektív kivitele csupán másodrendű determinánsok szukcesszív számítását teszi szükségessé, miként azt az alábbi példákból látható.

$$\begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 15/2 \\ 4 \end{bmatrix} [3 \; 2 \; 13/4] + \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \; 0 \; 9/4] = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 15/2 & -3/2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 13/4 \\ 1 & 0 & 9/4 \end{bmatrix}.$$

[8] A β_i és γ_j indexek alkalmas választásával előzetes sor- és oszlopcsere *nélkül* is elérhető, hogy az (5)-ben szereplő tényezők *egyike* trapéz- ill. háromszög-matrix legyen.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 5 & 5\\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0\\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5\\ -1 & -3 & -8 & -9 & -10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ -2 \end{bmatrix}[1\ 2\ 3\ 4\ 5]+\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 7 & 4 & 7 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ -2 \end{bmatrix}[1\ 2\ 3\ 4\ 5]+\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 0\\ -1 \end{bmatrix}[2\ 1\ 3\ 1\ 0]+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ -2 \end{bmatrix}[1\ 2\ 3\ 4\ 5]+\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 0\\ -1 \end{bmatrix}[2\ 1\ 3\ 1\ 0]+\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}[3\ 2\ 1\ 0\ 0]=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

megfelelő átrendezéssel

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. §. A fenti redukciós eljárás a diádok $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ tényezőit rekurzív módon szolgáltatja. Egy közismert determinánstétel[9] felhasználásával azonban (3·1), (3·2), ... alapján a diadikus előállítás a következő explicit alakban is felírható:

$$\mathbf{A}=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{D_{k-1}D_k}\begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & a_{\beta_1\gamma_2} & \dots & a_{\beta_1\gamma_k}\\ a_{\beta_2\gamma_1} & a_{\beta_2\gamma_2} & \dots & a_{\beta_2\gamma_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{\beta_{k-1}\gamma_1} & a_{\beta_{k-1}\gamma_2} & \dots & a_{\beta_{k-1}\gamma_k}\\ \mathbf{a}_{\gamma_1} & \mathbf{a}_{\gamma_2} & \dots & \mathbf{a}_{\gamma_k} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} & a_{\beta_1\gamma_2} & \dots & a_{\beta_1\gamma_{k-1}} & \mathbf{a}^{\beta_1}\\ a_{\beta_2\gamma_1} & a_{\beta_2\gamma_2} & \dots & a_{\beta_2\gamma_{k-1}} & \mathbf{a}^{\beta_2}\\ \\ \\ a_{\beta_k\gamma_1} & a_{\beta_k\gamma_2} & \dots & a_{\beta_k\gamma_{k-1}} & \mathbf{a}^{\beta_k} \end{vmatrix},$$

ahol

$$D_0=1,\quad D_k=\begin{vmatrix} a_{\beta_1\gamma_1} a_{\beta_1\gamma_2} \dots a_{\beta_1\gamma_k}\\ a_{\beta_2\gamma_1} a_{\beta_2\gamma_2} \dots a_{\beta_2\gamma_k}\\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\\ a_{\beta_k\gamma_1} a_{\beta_k\gamma_2} \dots a_{\beta_k\gamma_k} \end{vmatrix},\quad \mathbf{a}_i=\begin{bmatrix} a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{ni} \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}^j=[a_{j1}, a_{j2}, \dots a_{jn}].$$

Adott matrixnak minimális számú diád összegeként való előállítása nyilván nem egyértelmű. Kimutatható azonban, hogy ha egy $\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{V}^*$ minimális

[9] L. pl. E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik. I. Erste Hälfte. Leipzig, 1910. pp. 120—121.

előállítás ismert, akkor abból az összes minimális előállítások

$$\mathbf{A} = (\mathbf{U}\mathbf{M})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}^*)$$

alakban adódnak, ahol $\mathbf{M}$ tetszőleges r-edrendű nem-szinguláris matrix.

A definíciók közvetlen következménye, hogy egy matrix rangja nem lehet nagyobb, mint a sorok, ill. az oszlopok száma. Quadratikus matrix rangja tehát nem nagyobb a rendszámnál és azzal csak akkor egyenlő, ha a matrix nem-szinguláris, azaz determinánsa 0-tól különböző. Ez esetben a matrix (5) előállításában trianguláris matrix-tényezők szerepelnek.

Az alábbi tételek, melyek összeg és szorzat rangjára vonatkoznak, szintén a definíciók egyszerű következményei.

IV. Tétel: *Összeg rangja nem nagyobb a tagok rangjainak összegénél:*

$$\varrho(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqq \varrho(\mathbf{A}) + \varrho(\mathbf{B}). \tag{7}$$

Ha ugyanis $\varrho(\mathbf{A}) = r$, $\varrho(\mathbf{B}) = s$, akkor $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ diadikus előállításához *legfeljebb* $r+s$ diád szükséges. Tehát $\varrho(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqq r+s$, q. e. d.

IV'. Tétel: 1. *Matrix rangja szorzás által nem növekszik.*

$$\varrho(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leqq \varrho(\mathbf{A}). \tag{8}$$

Legyen $\varrho(\mathbf{A}) = r$. Ekkor $\mathbf{A} = \sum_1^r \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^*$, tehát $\mathbf{A}\mathbf{B} = \sum_1^r \mathbf{u}_k(\mathbf{v}_k^*\mathbf{B})$, következésképpen $\mathbf{A}\mathbf{B}$ diadikus előállításához *legfeljebb* r diád szükséges, azaz $\varrho(\mathbf{A}\mathbf{B}) \leqq r$. Q. e. d.

Corollárium. Matrix rangja nem-szinguláris matrixszal való szorzás esetén nem változik.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{M}$ nem szinguláris, azaz $\mathbf{M}^{-1}$ létezik. Ekkor (8) szerint

$$\varrho(\mathbf{A}\mathbf{M}) \leqq \varrho(\mathbf{A})$$

és

$$\varrho(\mathbf{A}) = \varrho\{(\mathbf{A}\mathbf{M})\mathbf{M}^{-1}\} \leqq \varrho(\mathbf{A}\mathbf{M}),$$

vagyis

$$\varrho(\mathbf{A}\mathbf{M}) = \varrho(\mathbf{A}). \qquad \text{q. e. d.}$$

4. §. A matrix rangját evidenciába helyező (1) diadikus előállítás felhasználásával igen egyszerűen tárgyalható a lineáris algebrának következő két ekvivalens feladata:

I. *adott vektorok közti lineáris összefüggések megállapítása,*

II. *homogén, lineáris egyenletrendszer megoldása.*

Adott $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ n-dimenziós vektorok közti lineáris összefüggések megállapítása ugyanis a fentebb adott definíció szerint az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ skalár ismeretleneket tartalmazó

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_m x_m = 0 \tag{2}$$

egyenlet, vagy részletesen kiírva, a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m&=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m&=0 \end{aligned} \tag{2·1}$$

homogén, lineáris egyenletrendszer, illetve az ezzel ekvivalens

$$\begin{bmatrix} a_{11}\,a_{12}\,\ldots\,a_{1m}\\ a_{21}\,a_{22}\,\ldots\,a_{2m}\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}\,a_{n2}\,\ldots\,a_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix}=\mathbf{A}\mathbf{x}=0 \tag{2·2}$$

matrix-egyenlet megoldásainak diszkusszióját teszi szükségessé.

Eszerint m számú n-dimenziós vektor közti lineáris összefüggések megállapítása m ismeretlent tartalmazó és n homogén lineár egyenletből álló rendszer megoldásával ekvivalens feladat.

Legyen az $\mathbf{A}$ koordináta-matrix (ill. együttható-matrix) rangja: $r \leqq m, n,$ továbbá tegyük fel, hogy az egyenletek, valamint az ismeretlenek (5)-nek megfelelően át vannak számozva és legyen annak minimális diadikus előállítása: $\mathbf{A}=\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*+\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^*+\cdots+\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*$. Ekkor a megoldandó egyenletrendszerrel ekvivalens matrix-egyenlet:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{u}_1(\mathbf{v}_1^*\mathbf{x})+\mathbf{u}_2(\mathbf{v}_2^*\mathbf{x})+\cdots+\mathbf{u}_r(\mathbf{v}_r^*\mathbf{x})=0.$$

Ebből azonban az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ tényezők lineáris függetlensége miatt következik, hogy

$$\mathbf{v}_1^*\mathbf{x}=0,\ \mathbf{v}_2^*\mathbf{x}=0, \ldots, \mathbf{v}_r^*\mathbf{x}=0. \tag{9}$$

Az ily módon keletkező és (2)-vel ekvivalens egyenletrendszer azonban a fokozatos redukcióval nyert $\mathbf{v}_k^*$ vektoroknak (5)-ből látható struktúráját figyelembe véve a következő alakú:

$$\begin{aligned} v_{11}x_1+v_{12}x_2+\cdots+v_{1m}x_m&=0 \quad v_{11}\neq 0\\ v_{22}x_2+\cdots+v_{2m}x_m&=0 \quad v_{22}\neq 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\\ v_{rr}x_r+\cdots+v_{rm}x_m&=0 \quad v_{rr}\neq 0. \end{aligned} \tag{9·1}$$

Vizsgáljuk először az $r=m$ esetet. Ekkor a (9·1) rendszernek nyilván csupán a triviális megoldása: $x_1=x_2=\ldots=x_m=0$ létezik, tehát érvényes a

V. Tétel: *Ha* $\varrho[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_m]=m$, *azaz a vektorok koordináta-matrixának* (az együtthatók matrixának) *rangja egyenlő a vektorok számával, akkor a vektorok lineárisan függetlenek* (csupán a triviális megoldás létezik).

Vizsgáljuk ezek után az $r<m$ esetet. Ekkor a (9·1) rendszerben $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m$-nek tetszőleges értékeket adva, a rendszer az $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ismeretlenekre nézve nyilván rekurzív módon egyértelműen megoldható:

$$\begin{aligned} x_r&=b_{r,r+1}x_{r+1}+b_{r,r+2}x_{r+2}+\cdots+b_{rm}x_m\\ x_{r-1}&=b_{r-1,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{r-1,m}x_m\\ \cdots&\cdots\cdots\cdots\\ x_1&=b_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{1,m}x_m. \end{aligned} \tag{9·2}$$

Ezek az egyenletek mindenekelőtt a (2·1) homogén lineár egyenletrendszer megoldásait, mint egy $m-r$ parametertől függő sokaságot szolgáltatják. Másszóval, az $\mathbf{A}\mathbf{x}=0$ egyenletnek a következő $m-r$ lineárisan független vektor tesz eleget:

$$\mathbf{x}=\mathbf{b}_{r+1}=\begin{bmatrix} b_{1,r+1} \\ \vdots \\ b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\mathbf{b}_{r+2}\begin{bmatrix} b_{1,r+2} \\ \vdots \\ b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{x}=\mathbf{b}_m=\begin{bmatrix} b_{1m} \\ \vdots \\ b_{rm} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ha továbbá a paramétereknek rendre az

$$x_{r+1}=0, \ldots, x_{k-1}=0, x_k=-1, x_{k+1}=0, \ldots, x_m=0$$

értékeket adjuk, akkor (2) és (9.2)-ből a

$$\mathbf{a}_1 b_{1k}+\mathbf{a}_2 b_{2k}+\cdots+\mathbf{a}_r b_{rk}=\mathbf{a}_k \qquad (k=r+1, r+2, \ldots, m)$$

egyenleteket nyerjük, melyek alapján kimondható a

VI. Tétel: *Ha* $\varrho[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_m]=r<m$, *azaz a vektorok koordinátamatrixának rangja: r kisebb, mint a vektorok száma: m, akkor a vektorok közt van r számú lineárisan független:* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, *míg a többiek:* $\mathbf{a}_{r+1}, \mathbf{a}_{r+2}, \ldots \mathbf{a}_m$ *ezeknek homogén lineáris függvényeiként kifejezhetők.*

1. Corollárium. Ha a vektorok száma nagyobb a dimenziónál, azaz $m>n$ és így szükségképpen $m>r$, akkor a vektorok nem lehetnek lineárisan függetlenek.

2. Corollárium. A most bizonyított tételekből következik, hogy ha $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$, valamint $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ lineárisan függetlenek, akkor $\mathbf{U}\mathbf{V}^*=\sum_1^r \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*$ rangja r-rel egyenlő. Ugyanis egyrészt, miután $\mathbf{U}\mathbf{V}^*$ r diád összege, azért $\varrho(\mathbf{U}\mathbf{V}^*)\leqq r$. Másrészt a vektorok lineáris függetlensége folytán $\mathbf{U}$, ill. $\mathbf{V}^*$ tartalmaz egy nem-szinguláris $\mathbf{U}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r}^{1\,2\,\ldots\,r}$ ill. $\mathbf{V}^{*\beta_1\beta_2\ldots\beta_r}_{1\,2\,\ldots\,r}$ minor-matrixot. Eszerint $|(\mathbf{U}\mathbf{V}^*)_{\gamma_1\ldots\gamma_r}^{\beta_1\ldots\beta_r}|\neq 0$, tehát $\varrho(\mathbf{U}\mathbf{V}^*)=r$, q. e. d.

5. §. Skalárok szorzata tudvalevőleg csak akkor 0, ha legalább egyik skalártényező 0-sal egyenlő. Ennek közvetlen analogonja matrixokra a következő

VII. Tétel: *Ha* $\mathbf{A}_m^n\mathbf{B}_p^m\mathbf{C}_q^p=0$, *és* $\varrho(\mathbf{A}_m^n)=m$, $\varrho(\mathbf{C}_q^p)=p$, *akkor*

$$\mathbf{B}_p^m=0.$$

Bizonyítás: A tétel premisszáiból következik, hogy $\mathbf{A}$, ill. $\mathbf{C}$ tartalmaz egy nem-szinguláris $\mathbf{A}_{1\,2\,\ldots\,m}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, ill. $\mathbf{C}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_p}^{1\,2\,\ldots\,p}$ minor-matrixot. Továbbá $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}=0$-ból nyilván következik:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C})_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}=\mathbf{A}_{1\,2\,\ldots\,m}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\mathbf{B}\mathbf{C}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_p}^{1\,2\,\ldots\,p}=0.$$

Ha itt balról $(\mathbf{A}_{1\,2\,\ldots\,m}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m})^{-1}$-nel, jobbról $(\mathbf{C}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_p}^{1\,2\,\ldots\,p})^{-1}$-nel szorzunk, adódik $\mathbf{B}=0$, q. e. d.

Matrix-szorzat azonban lehet 0 anélkül, hogy a tényezők bármelyike 0-matrix lenne, csupán a tényezők rangjainak kell bizonyos korlátozásnak eleget tenniök. Erre nézve érvényes a

VII'. Tétel: *Két quadratikus matrix szorzata csak akkor lehet* 0, *ha a tényezők rangjainak összege nem nagyobb a közös rendszámnál.* (Két skalár szorzatára vonatkozó analóg tétel ennek speciális esete, ha skalárt elsőrendű matrixnak, 0-tól különböző szám rangját 1-nek, 0 rangját 0-nak vesszük.)

Bizonyítás: Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ n-edrendűek, $\varrho(\mathbf{A})=r$, $\varrho(\mathbf{B})=s$ és $\mathbf{AB}=0$. A minimális diadikus $\mathbf{A}=\sum_1^r \mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*$, $\mathbf{B}=\sum_1^s \mathbf{w}_k\mathbf{z}_k^*$ előállítások alkalmazásával

$$\mathbf{AB}=[\mathbf{u}_1\ldots\mathbf{u}_r]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_r^*\end{bmatrix}[\mathbf{w}_1\ldots\mathbf{w}_s]\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1^*\\ \vdots\\ \mathbf{z}_s^*\end{bmatrix}=[\mathbf{u}_1\ldots\mathbf{u}_r]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\mathbf{w}_1 & \ldots & \mathbf{v}_1^*\mathbf{w}_s\\ \vdots & & \vdots\\ \mathbf{v}_r^*\mathbf{w}_1 & \ldots & \mathbf{v}_r^*\mathbf{w}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1^*\\ \vdots\\ \mathbf{z}_s^*\end{bmatrix}=0.$$

Minthogy az első és utolsó tényező maximális rangúak, azért az előbbi VII. tétel szerint kell, hogy a középső tényező 0 legyen. Eszerint az x_i és y_j változókra nézve identikusan

$$(\mathbf{v}_1^*x_1+\cdots+\mathbf{v}_r^*x_r)(\mathbf{w}_1y_1+\cdots+\mathbf{w}_sy_s)\equiv 0.$$

Ha most feltesszük, hogy $r+s>n$, akkor a VI. tétel szerint a

$$\overline{\mathbf{v}}_1\overline{x}_1+\cdots+\overline{\mathbf{v}}_r\overline{x}_r=\mathbf{w}_1y_1+\cdots+\mathbf{w}_sy_s$$

homogén, lineáris egyenletnek van nem-triviális megoldása, melyben legalább egyik $\overline{x}_i\neq 0$ és egyik $y_j\neq 0$ (ellenkező esetben a $\mathbf{v}_i$ ill. $\mathbf{w}_j$ vektorok nem lennének lineárisan függetlenek). Ez a megoldás egy olyan vektort határoz meg, mely nem 0 és kielégíti a

$$(\mathbf{v}_1x_1+\cdots+\mathbf{v}_rx_r)^*(\overline{\mathbf{v}}_1\overline{x}_1+\cdots+\overline{\mathbf{v}}_r\overline{x}_r)=0$$

egyenletet, ami ellenmondás. Ezzel tételünk be van bizonyítva.

6. §. Gyakran célszerű a fenti előállításban szereplő diádok tényezőit bizonyos módon normirozni. Ilyen esetekben a diadikus előállítás alakja következőképpen módosul:

VIII. Tétel: *r-edrangú matrix előállítható, mint r számú normirozott diádnak lineáris formája:*

$$\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^*+\lambda_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^*+\cdots+\lambda_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^*, \tag{10}$$

ahol a $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ skalár együtthatók a normirozás módjától függnek.

Valamely matrix diádikus előállításával kapcsolatban már most a matrixelmélet egyik alapvető problémája a következő alakban vethető fel: Létezik-e adott matrixnak olyan (10) alakú előállítása, melynél az $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_r$ és

$\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \ldots, \mathbf{v}_r^*$ vektorok biortogonális rendszert alkotnak, melynél tehát teljesülnek a

$$\mathbf{u}_k^* \mathbf{v}_l = \delta_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, r) \quad (11)$$

relációk.

A feltett kérdésre fokozatosan, az elmélet további kiépítése során fogunk végleges választ nyerni, azonban már e helyen megállapíthatjuk, hogy a (11) feltevésnek elegettevő (10) alakú, tehát biortogonális diádokkal való előállítás létezése esetén milyen jelentőséggel bírnak az abban szereplő λ_k skalár-tényezők és az $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k^*$ vektortényezők.

Az

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \quad , \quad \mathbf{u}_k^* \mathbf{v}_l = \delta_{kl}$$

relációkból ugyanis azonnal következik a

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_k^* \mathbf{A} = \lambda_k \mathbf{v}_k^* \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \qquad (12)$$

egyenletek fennállása. E szerint az $\mathbf{u}_k$, ill. $\mathbf{v}_k^*$ vektorok az $\mathbf{A}$ matrixnak jobb- ill. baloldali *sajátvektorai* és a λ_k skalár a megfelelő *sajátérték.* Ezzel a megállapítással tehát a következő tételt nyertük:

IX. Tétel: *Ha egy quadratikus matrix elő van állítva, mint biortogonális diádok lineáris formája, akkor a diádok vektortényezői a matrixnak jobb- és baloldali sajátvektorai, a diádok skalár együtthatói pedig a matrix sajátértékei.*

7. §. A (10) alakú és a (11) feltételeket kielégítő előállítás lehetőségét először bizonyos speciális struktúrájú matrixok, az ú. n. projektor-matrixok esetében fogjuk megvizsgálni.

Projektor-matrixnak (v. idempotens matrixnak) nevezünk minden olyan quadratikus $\mathbf{P}$ matrixot, mely a

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \qquad (13)$$

egyenletnek eleget tesz. Ezen projektor-matrixokra nézve ki fogjuk mutatni, hogy a (10) (11) alakban való előállítás nemcsak lehetséges, hanem egyedüli lehetőség $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 1$ skalár együtthatókkal.

X. Tétel: *Ha egy r-edrangú* $\mathbf{P}$ *projektor-matrix elő van állítva lineárisan független diádok összegeként:*

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \qquad (10_1)$$

alakban, akkor az itt szereplő $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k^*$ *vektorok a projektor-matrixnak jobb- és baloldali sajátvektorai, melyek automatikusan biortogonalizálva vannak, azaz kielégítik a*

$$\mathbf{u}_k^* \mathbf{v}_l = \delta_{kl} \qquad (11)$$

relációkat.

Ez a tétel nyilván azt az állítást is magában foglalja, hogy egy r-edrangú projektor-matrixnak r számú saját értéke 1-gyel egyenlő[10], mert (10_1) és (11)-ből rögtön következik

$$\mathbf{P}\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_k^* \mathbf{P} = \mathbf{v}_k^* \quad (k = 1, 2, \ldots r).$$

A tétel bizonyításánál célszerű a diádikus előállításnak (5) alakját felhasználni. Ekkor a $\mathbf{P}^2 - \mathbf{P} = 0$ egyenlet a következő alakban írható:

$$[\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} - [\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} = 0,$$

azaz

$$\begin{bmatrix} u_{11}\,u_{12} \ldots u_{1r} \\ u_{21}\,u_{22} \ldots u_{2r} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_{n1}\,u_{n2} \ldots u_{nr} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^* \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_r] - \mathbf{E}_r^r \right\} \begin{bmatrix} v_{11}\,v_{12} \ldots v_{1n} \\ v_{21}\,v_{22} \ldots v_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_{r1}\,v_{r2} \ldots v_{rn} \end{bmatrix} = \mathbf{U}[\mathbf{v}_k^*\mathbf{u}_l - \delta_{kl}]\mathbf{V} = 0.$$

Az $\mathbf{u}_k$ és a $\mathbf{v}_k^*$ vektorok lineáris függetlenségéből következik, hogy az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ matrixok r-edrangúak, tehát az **5. §.** VII. tétel alapján a fenti három-tényezős szorzat középső matrixtényezője eltűnik, azaz

$$[\mathbf{v}_k^*\mathbf{u}_l - \delta_{kl}] = 0,$$

q. e. d.

A most kimutatott tételnek elméleti és gyakorlati jelentőséget ad az a felismerés, hogy a projektor-matrixot nem is lehet másképpen diádok összegére bontani, mint úgy, hogy a diádok vektor-tényezői biortogonálisak.

Pl. a 429. oldalon bemutatott felbontásban szereplő

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{vmatrix}$$

matrix projektor, mert kielégíti a $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ egyenletet. Ennek megfelelően az ottani felbontásnál nyert

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 15/2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1^* = [3\;\;2\;\;13/4], \quad \mathbf{v}_2^* = [1\;\;0\;\;9/4]$$

vektorok valóban biortogonális rendszert alkotnak.

A projektor-matrixok definíciójából következik továbbá, hogy annak minden oszlop- ill. sor-vektora jobb- ill. baloldali saját-vektor $\lambda = 1$ sajátérték mellett. Ha ugyanis a projektor oszlopvektorokkal kifejezett alakja:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n],$$

[10] A többi $n-r$ számú sajátérték 0-val egyenlő és ezekhez az $\mathbf{E}-\mathbf{P}$ diadikus felbontásában szereplő vektortényezők tartoznak, mint bal- és jobboldali sajátvektorok.

akkor $P^2 = P$-ből következik

$$P . [a_1 a_2 \dots a_n] = [P a_1, P a_2, \dots P a_n] = [a_1 a_2 \dots a_n],$$

tehát

$$P a_i = a_i. \tag{14. 1}$$

Hasonlóképpen bizonyítható

$$a^j . P = a^j. \tag{14. 2}$$

8. §. A későbbi alkalmazásokra való tekintettel foglalkoznunk kell még hermitikus projektoroknak hermitikus diádok összegére való felbontásával. Egy P projektor hermitikus, ha egyidejűleg kielégíti a $P = \overline{P}^*$ és a $P^2 = P$ egyenleteket. Egy uv^* diád pedig hermitikus, ha $u = \overline{v}$.

Legyen $P = [a_{kl}]$, ahol $a_{lk} = \bar{a}_{kl}$, ekkor $P^2 = \left[\sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} a_{\nu l}\right]$, tehát a fődiagonális elemek összege P-ben $\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ és P^2-ben $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} a_{\nu k}\right)$. Ebből a $P = P^2$ reláció folytán a

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{k\nu} a_{\nu k}\right) = \sum_{k}\sum_{\nu} |a_{k\nu}|^2$$

egyenlet adódik, melyből $P \neq 0$ esetén következik, hogy az a_{kk} fődiagonális elemek közt van legalább egy pozitív. Legyen ez pl. a_{11}, akkor a

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{vmatrix}, \quad \overline{u}_1^* = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}[a_{11} a_{12} \dots a_{1n}]$$

jelölésekkel az $u_1 \overline{u}_1^*$ diád hermitikus, továbbá $P - u_1 \overline{u}_1^*$ szintén hermitikus projektor, mert $\overline{u}_1^* u_1 = \frac{\Sigma a_{1\nu} a_{\nu 1}}{a_{11}} = 1$ és így a fenti (14) relációk folytán

$$(P - u_1 \overline{u}_1^*)^2 = P^2 - P u_1 u_1^* - u_1 \overline{u}_1^* P + u_1 \overline{u}_1^* u_1 \overline{u}_1^* = P - u_1 \overline{u}_1^* .$$

E szerint $\varrho(P) > 1$ esetén az $A - u_1 u_1^*$ projektorból a fenti eljárással egy további $u_2 \overline{u}_2^*$ hermitikus diád választható le. Ha $\varrho(P) = r$, akkor r számú lépés után ilymódon a 0 projektorhoz jutunk, tehát

XI. Tétel: Bármely hermitikus projektor előállítható

$$P = u_1 \overline{u}_1^* + u_2 \overline{u}_2^* + \dots + u_r \overline{u}^* \tag{15}$$

alakban és az itt szereplő vektorok kielégítik az $u_k^* \overline{u}_l = \delta_{kl}$ relációkat, azaz uniter-ortogonális rendszert alkotnak.

Valós hermitikus, azaz valós szimmetrikus projektor esetén nyilván $\overline{u}_k = u_k$, tehát egy r-edrangú valós szimmetrikus projektor r számú ortogonális, normált diád összegére bontható a következő alakban:

$$P = u_1 u_1^* + u_2 u_2^* + \dots + u_r u_r^*,$$

ahol

$$u_k^* u_l = \delta_{kl}.$$

III. Fejezet

Karakterisztikus polinom. Minimál polinom.
Karakterisztikus-matrix rangcsökkenése

1. §. A projektor-matrixok tulajdonságainak levezetése (II. fej. 7. §) kizárólag azon a tényen alapul, hogy bármely $\mathbf{P}$ projektor kielégíti a $\mathbf{P}^2-\mathbf{P}=0$ egyenletet. Közelfekvő ezekután a következő kérdés: Kielégít-e egy tetszőleges $\mathbf{A}$ matrix valamely

$$c_0\mathbf{A}^m+c_1\mathbf{A}^{m-1}+\dots c_{m-1}\mathbf{A}+c_m\mathbf{E}=0$$

alakú algebrai egyenletet? Erre a kérdésre ad választ a Hamilton—Cayley-től származó

XII. Tétel: *Bármely n-edrendű quadratikus* $\mathbf{A}$ *matrix kielégíti a hozzátartozó*

$$D(\lambda)\equiv|\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A}|\equiv\lambda^n-\sum a_{ii}\lambda^{n-1}+\sum\sum\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}\lambda^{n-2}-\dots+|\mathbf{A}|=0 \quad (1)$$

karakterisztikus egyenletet, azaz $D(\mathbf{A})=0$.

A matrix-algebra ezen középponti tételének a bizonyítása legegyszerűbben arra a tényre alapítható, hogy az $\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A}=0$ matrix-egyenlet a $\lambda=\mathbf{A}$ helyettesítéssel triviális módon kielégíthető. Ugyanis [I. Fej. 20] szerint λ-ban identikusan

$$(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})\,\mathrm{adj.}\,(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})\equiv\mathrm{adj.}\,(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})\cdot(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})\equiv\mathbf{E}|\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A}|\equiv\mathbf{E}D(\lambda).$$

Ez a λ skalárra vonatkozó azonosság általában nem marad érvényben, ha λ helyébe egy tetszőleges matrixot helyettesítünk, mert az azonosság levezetésében λ-nak bármely tényezővel való felcserélhetősége implicite fel volt tételezve. Azonban $\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A}$ és adj. $(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})$ felcserélhetősége következtében nyilván $\mathbf{A}$ az adj. $(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})=\mathbf{A}_0\lambda^{n-1}+\mathbf{A}_1\lambda^{n-2}+\dots+\mathbf{A}_{n-1}$ polinom minden egyes matrix-együtthatójával felcserélhető, ezért a (2) azonosság a $\lambda=\mathbf{A}$ helyettesítésnél érvényben marad és így adódik

$$\mathbf{E}.D(\mathbf{A})=(\mathbf{E}\mathbf{A}-\mathbf{A})\,\mathrm{adj.}\,(\mathbf{E}\mathbf{A}-\mathbf{A})=0,$$

tehát $\mathbf{E}\neq 0$ következtében $D(\mathbf{A})=0$, q. e. d.

2. §. Miként (1)-ből látható a $|\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A}|=0$ karakterisztikus egyenlet fokszáma megegyezik az $\mathbf{A}$ matrix rendszámával, λ^k együtthatója pedig (I. I. (16)) az $|\mathbf{A}|$ determináns $n-k$-adrendű főminorainak összegével egyenlő.

Pl. ha a $\mathbf{P}=\mathbf{u}\mathbf{v}^*=[u_iv_j]$ diád tényezői kielégítik az $\mathbf{u}^*\mathbf{v}=\mathbf{v}^*\mathbf{u}=\sum u_kv_k=1$ relációt, akkor a hozzátartozó karakterisztikus egyenlet:

$$|\mathbf{E}\lambda-\mathbf{P}|\equiv\begin{vmatrix}\lambda-u_1v_1 & -u_1v_2\dots & -u_1v_n\\ -u_2v_1 & \lambda-u_2v_2\dots & -u_2v_n\\ \dots & \dots & \dots\\ -u_nv_1 & -u_nv_2\dots & \lambda-u_nv_n\end{vmatrix}\equiv\lambda^n-\lambda^{n-1}\sum_{k=1}^{n}u_kv_k\equiv\lambda^n-\lambda^{n-1}=0$$

($\varrho(\mathbf{P})=1$, következésképpen $\mathbf{P}$ másod- és magasabbrendű minorai eltűnnek).

Tehát a Cayley—Hamilton-tétel szerint $\mathbf{P}$ kielégíti a $\mathbf{P}^n-\mathbf{P}^{n-1}=0$ egyenletet.

Másrészt könnyen felismerhető, hogy $\mathbf{P}$ projektor, ugyanis a $\mathbf{v}^*\mathbf{u}=1$ feltétel figyelembevétele mellett $\mathbf{P}^2=\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{u}\mathbf{v}^*=\mathbf{u}\mathbf{v}^*=\mathbf{P}$, tehát $\mathbf{P}$ kielégíti a projektorokat jellemző $\mathbf{P}^2-\mathbf{P}=0$ egyenletet, melynek fokszáma $n>2$ esetén kisebb, mint a fent levezetett karakterisztikus egyenleté.

Ez a példa mutatja, hogy vannak matrixok, melyek a rendszámuknál alacsonyabb fokú egyenletet is kielégítenek és ezzel a következő probléma felvetésére vezet.

Meghatározandó adott $\mathbf{A}$ matrixnak a „minimál-egyenlet"-e (redukált karakterisztikus egyenlete), vagyis az a legalacsonyabb fokú algebrai egyenlet, melyet az $\mathbf{A}$ matrix kielégít.

A megoldás kiinduló pontja ez esetben is a

$$(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A}).\mathrm{adj}.(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})\equiv\mathbf{E}.D(\lambda) \tag{2}$$

identitás.

Vizsgáljuk, lehet-e ezen identitás két oldalán álló matrixokat λ-nak valamely skalár polinomjával osztani. Miután egy matrixnak skalárral való osztása ekvivalens a matrix valamennyi elemének az osztásával, nyilvánvaló, hogy a baloldali első tényező: $\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A}=[\delta_{kl}\lambda-a_{kl}]$ λ-nak semilyen (valódi) polinomjával nem osztható, tehát oszthatóság szempontjából a baloldalon csupán az $\mathrm{adj}.(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})=[D_{kl}(\lambda)]$ tényező jön tekintetbe. Ezen matrix $D_{kl}(\lambda)$ elemei λ-nak legfeljebb $n-1$-edfokú polinomjai, melyeknek esetleg van nem-konstans legnagyobb közös osztójuk, jelöljük ezt $\theta(\lambda)$-val. A jobboldalon álló $D(\lambda)$ determináns lineáris formája a saját $n-1$-edrendű minorainak, vagyis a $D_{kl}(\lambda)$ elemeknek, tehát nyilván osztható ezek legnagyobb közös osztójával: $\theta(\lambda)$-val. Minthogy továbbá $\theta(\lambda)\not\equiv 0$, tehát a (2) identitás mindkét oldalát oszthatjuk $\theta(\lambda)$-val:

$$(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})\frac{\mathrm{adj}.(\mathbf{E}\lambda-\mathbf{A})}{\theta(\lambda)}=\mathbf{E}\frac{D(\lambda)}{\theta(\lambda)}\equiv\mathbf{E}\Delta(\lambda). \tag{3}$$

Ha most az így nyert identitásban a fenti meggondolások alapján λ helyébe az $\mathbf{A}$ matrixot helyettesítjük, azt nyerjük, hogy $\Delta(\mathbf{A})=0$. Kimutatható, hogy a $\Delta(\lambda)=0$ egyenlet, melynek baloldala $D(\lambda)$-nak és a $D_{kl}(\lambda)$ minorok legnagyobb közös osztójának hányadosa, a legalacsonyabb fokú algebrai egyenlet, melyet az $\mathbf{A}$ matrix kielégít.[11]

3. §. A fokszám redukciója, vagyis $D(\lambda)$ és $\Delta(\lambda)$ fokszámainak különbségére nézve felső korlát állapítható meg a következő módon. Legyen $D(\lambda)$ prímtényezős alakja:

$$D(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{\alpha_s};\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_s=n \tag{1_1}$$

Ekkor $\theta(\lambda)$, mint $D(\lambda)$ osztója szükségképpen a következő alakkal bír

$$\theta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\beta_1}(\lambda-\lambda_2)^{\beta_2}\dots(\lambda-\lambda_s)^{\beta_s};\ \beta_k\leq\alpha_k$$

[11] L. pl. C. C. Mac Duffee l. c.[6] pp. 20—21.

Kimutatjuk, hogy $\beta_n \leqq \alpha_k - 1$. Ugyanis $\theta(\lambda)$, mint a $D_{kl}(\lambda)$ minorok legnagyobb közös osztója, egyszersmind ezen minorok bármely homogén lineár formájának, így a $D'(\lambda) = \sum_k D_{kk}(\lambda)$ derivált polinomnak is osztója, következésképpen a $\lambda - \lambda_k$ prímtényezőt nem tartalmazhatja $\alpha_k - 1$-nél magasabb hatványon.

Ebből a megállapításból először is következik, hogy $\Delta(\lambda) = D(\lambda)$, ha a $D(\lambda) = 0$ karakterisztikus polinom csupa egyszeres gyökkel bír.

Továbbá, többszörös gyökök esetén a maximális fokszámredukció akkor áll be, ha (konstans faktortól eltekintve)

$$\theta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1 - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s - 1} = (D(\lambda), D'(\lambda)).$$

Ebben az esetben

$$\Delta(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{\theta(\lambda)} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s),$$

tehát a $\Delta(\lambda) = 0$ minimál-egyenlet a $D(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenlet valamennyi gyökét egyszeres multiplicitással tartalmazza.

Mint látni fogjuk, azok a matrixok, melyeknek minimál-egyenlete csupa egyszeres gyökkel bír, a matrixoknak egy fontos alosztályát alkotják, mely az alkalmazásokban előforduló matrixoknak túlnyomó többségét felöleli és amelyeknek az elmélete elemi eszközökkel felépíthető.

4. §. Ezekután önként felmerül a kérdés, vannak-e olyan matrixok, melyeknek külső struktúrájából (vagyis a $\theta(\lambda)$ legnagyobb közös osztó direkt kiszámítása nélkül) megállapítható, hogy minimál-egyenletük csupa egyszeres gyökkel bír.

Ki fogjuk mutatni, hogy egy hermitikus (és ennek speciális eseteként egy valós szimmetrikus) matrix mindig ilyen tulajdonságú.

A bizonyításhoz néhány segédtételt bocsátunk előre.

Valamely hermitikus matrix karakterisztikus egyenletének nincs tisztán képzetes gyöke.

Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy egy hermitikus, tehát az $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^*$ relációt kielégítő matrixnál $|\mathbf{E}i\mu - \mathbf{A}| = 0$, ahol μ 0-tól különböző valós szám. Akkor fennáll a

$$|\mathbf{E}i\mu - \mathbf{A}|\,|\mathbf{E}i\mu + \mathbf{A}| = -|\mathbf{E}\mu^2 + \mathbf{A}^2| = -|\mathbf{E}\mu^2 + \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^*| = 0$$

egyenlet, illetve részletesen kiírva, a

$$0 = \mu^{2n} + \mu^{2n-2} \sum_k \sum_l a_{kl} \bar{a}_{kl} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} \dots \bar{a}_{1n} \\ \dots\dots \\ \bar{a}_{n1} \dots \bar{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

egyenlet is, ami 0-tól különböző valós μ esetén nyilván ellenmondás. Ezzel tételünk be van bizonyítva.

Valamely hermitikus matrix karakterisztikus egyenletének összes gyökei valósak.

Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy az $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^*$ hermitikus matrix karakterisztikus egyenletét kielégíti a $\lambda = \varkappa + i\mu$ $(\mu \neq 0)$ komplex szám, azaz fennáll a $|\mathbf{E}(\varkappa + i\mu) - \mathbf{A}| = 0$ egyenlet. Ekkor azonban nyilván $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \varkappa\mathbf{E}$ matrix is hermitikus és erre nézve fennállna az $|\mathbf{E}i\mu - \mathbf{B}| = 0$ egyenlet, ami ellenmondásban van az előbb bizonyított tétellel, az $|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| = 0$ egyenletnek tehát nincsenek komplex gyökei. Q. e. d.

XIII. Tétel: *Ha* $\mathbf{A}$ *hermitikus, akkor* $|\mathbf{E}\lambda - \mathbf{A}| \equiv D(\lambda)$ *összes* $D_{kl}(\lambda)$ *minorai oszthatók* $(D(\lambda), D'(\lambda))$*-val.*

Ismeretes, hogy[12]

$$\begin{vmatrix} D_{kk}(\lambda), & D_{kl}(\lambda) \\ D_{lk}(\lambda), & D_{ll}(\lambda) \end{vmatrix} = D(\lambda) D_{\substack{kl \\ kl}}(\lambda),$$

eszerint

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} D_{kl}(\lambda) D_{lk}(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} D_{kk}(\lambda) \sum_{l=1}^{n} D_{ll}(\lambda) - D(\lambda) \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} D_{\substack{kl \\ kl}}(\lambda).$$

Azonban $\Sigma D_{kk}(\lambda) = D'(\lambda)$, $\Sigma\Sigma D_{\substack{kl \\ kl}}(\lambda) = D''(\lambda)$ és λ *valós értékei mellett* $\overline{D_{lk}(\lambda)} = D_{kl}(\lambda)$, tehát valós λ-ra fennáll a következő identitás:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |D_{kl}(\lambda)|^2 \equiv D'(\lambda)^2 - D(\lambda) D''(\lambda).$$

Az előzők szerint $D(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$ összes 0-helyei valósak, ennélfogva a jobboldal és vele együtt a baloldal is osztható a $\lambda - \lambda_k$ *valós* prímtényező $2(\alpha_k - 1)$-edik hatványával. Ez azonban csak úgy lehetséges, hogy a baloldali négyzetösszeg *minden tagja* osztható $(\lambda - \lambda_k)^{2(\alpha_k - 1)}$-nel. Minthogy pedig az oszthatóság k minden értékére fennáll, tehát mindegyik $D_{kl}(\lambda)$ minor osztható $\prod_{n=1}^{s} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k - 1}$-gyel, azaz $(D(\lambda), D'(\lambda))$-val és így a fentiek figyelembevételével ki van mutatva, hogy a $D_{kl}(\lambda)$ minorok legnagyobb közös osztója: $\theta(\lambda) = (D(\lambda), D'(\lambda))$-val. Érvényes tehát a következő

XIV. Tétel: *Hermitikus (valós szimmetrikus) matrix minimál-egyenlete csupa egyszeres, valós gyökkel bír.*

[12] L. pl. E. Pascal l. c.[9] p. 61.

IV. Fejezet

Matrix analitikus függvénye és annak redukciója minimális fokszámú matrix-polinomra. Matrix-függvény kanonikus előállítása egyszeres gyökökkel bíró minimálegyenlet esetén

1. §. Legyen $f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ a z skalárváltozónak közönséges hatványsora. Ha valamely n-edrendű $\mathbf{A}$ matrix behelyettesítésénél a

$$S_N(\mathbf{A})=\sum_{\nu=0}^{N} c_\nu \mathbf{A}^\nu$$

matrix minden eleme $N\to\infty$ mellett véges limeshez tart, akkor azt mondjuk, hogy a

$$f(\mathbf{A})=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \mathbf{A}^\nu \tag{1}$$

matrix-hatványsor konvergens és az $\mathbf{A}$ matrixnak $f(\mathbf{A})$ analitikus függvényét definiálja.

A (1) matrix-hatványsor konvergenciájára nézve érvényes a

XV. Tétel: *Ha az* $\mathbf{A}$ *matrix karakterisztikus gyökei az* $f(z)=\sum c_\nu z^\nu$ *hatványsor konvergencia-körének belsejébe esnek, akkor a* $\sum c_\nu \mathbf{A}^\nu$ *matrix-hatványsor konvergens és a minimálpolinomnál alacsonyabb fokszámú matrix-polinomra redukálható.*

Legyen az $\mathbf{A}$ matrix minimálpolinomja

$$\Delta(z)=(z-\lambda_1)^{\gamma_1}(z-\lambda_2)^{\gamma_2}\cdots(z-\lambda_s)^{\gamma_s};\quad \gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_s=m\leqq n \tag{2}$$

és képezzük az $S_N(z)$ polinomnak a $\Delta(z)$ osztóra vonatkozó (legfeljebb $m-1$-ed fokú) $R_N(z)$ maradékát, melyet a

$$S_N(z)=\Delta(z)\cdot Q_N(z)+R_N(z) \tag{3}$$

azonosság definiál. Ebből $\Delta(\mathbf{A})=0$-ra való tekintettel következik

$$S_N(\mathbf{A})=R_N(\mathbf{A}). \tag{3. 1}$$

Az $R_N(z)$ maradékpolinom-sorozat effektív kiszámítása osztás útján kivihetetlennek minősítendő úgy formális, mint még inkább numerikus számítás szempontjából. Éppen ezért — nem csak e helyen, de az egész matrix-redukálási elmélet szempontjából — alapvető az a felismerés, hogy a $R_N(z)$ osztási maradék explicite kifejezhető a Hermite-f. interpolációs polinomok segélyével.

(3) szerint ugyanis $S_N(z)-R_N(z)$ osztható $\Delta(z)=\Pi(z-\lambda_k)^{\gamma_k}$-val, ennek következtében

$$R_N(\lambda_k)=S_N(\lambda_k),\ R'_N(\lambda_k)=S'_N(\lambda_k),\ldots,R_N^{(\gamma_k-1)}(\lambda_k)=S_N^{(\gamma_k-1)}(\lambda_k)\ (k=1,2,\ldots,s). \tag{4}$$

Minthogy pedig $R_N(z)$ fokszáma legfeljebb $m-1=\sum\gamma_k-1$, tehát $R_N(z)$ a

$\sum \gamma_k$ számú (4) feltétellel egyértelműen meg van határozva. Bevezetve a[13]

$$H_{k\varkappa}^{(\nu)}(\lambda_\mu) = \delta_{k\mu}\delta_{\varkappa\nu} \qquad \begin{matrix}\mu, k = 1, 2, \ldots, s \\ \varkappa, \nu = 0, 1, \ldots, \gamma_k - 1\end{matrix} \tag{5}$$

relációkkal definiált, legfeljebb $m-1$-ed fokú Hermite-f. $H_{k\varkappa}(\lambda)$ alappolinomokat, az $R_N(z)$ osztási maradéknak következő előállításához jutunk:

$$R_N(z) = \sum_{k=1}^{s} \{S_N(\lambda_k)H_{k0}(z) + S_N'(\lambda_k)H_{k1}(z) + \ldots + S_N^{(\gamma_k-1)}(\lambda_k)H_{k,\gamma_k-1}(z)\}.$$

Ebből (3_1) figyelembe vételével

$$S_N(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} \{S_N(\lambda_k)H_{k0}(\mathbf{A}) + S_N'(\lambda_k)H_{k1}(\mathbf{A}) + \ldots + S_N^{(\gamma_k-1)}(\lambda_k)H_{k,\gamma_k-1}(\mathbf{A})\}. \tag{6}$$

Minthogy a jobboldalon álló matrixok N-től függetlenek, az $N\to\infty$ határátmenet nehézség nélkül elvégezhető és pedig tekintettel arra, hogy feltevés szerint $\mathbf{A}$ karakterisztikus gyökei: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ $\sum c_\nu z^\nu$ konvergenciakörének belsejébe esnek, $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(\lambda_k) = f(\lambda_k)$, $\lim\limits_{N\to\infty} S_N'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \ldots$, tehát

$$f(\mathbf{A}) = \lim_{N\to\infty} S_N(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s} \{f(\lambda_k)H_{k0}(\mathbf{A}) + \ldots + f^{(\gamma_k-1)}(\lambda_k)H_{k,\gamma_k-1}(\mathbf{A})\}. \tag{7}$$

Ezzel kimutattuk, hogy az előírt feltételek mellett az $f(\mathbf{A})$ matrix-függvény értelmezve van és kifejeztük azt a $H_{k\varkappa}(\mathbf{A})$ Hermite-f. matrix-polinomok lineáris formájaként.

2. §. Az $f(\mathbf{A})$ matrix-függvény fenti (7) kifejezése lényegesen egyszerűsödik és további redukcióra nyújt lehetőséget akkor, ha a $\Delta(z)$ minimálpolinom csupa egyszeres gyökkel bír, azaz

$$\Delta(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_s) \qquad s \leqq n \tag{2. 1}$$

alakú. Ekkor ugyanis csupán a

$$L_k(\lambda_\varkappa) = \delta_{k\varkappa} \qquad (k, \varkappa = 1, 2, \ldots, s) \tag{5. 1}$$

relációkkal definiált és a

$$L_k(z) \equiv \frac{\Delta(z)}{\Delta'(\lambda_k)(z-\lambda_k)} \tag{5. 2}$$

explicit formulákkal előállított, legfeljebb $s-1$-ed fokú Lagrange-f. alappolinomok alkalmazása válik szükségessé és a (7) előállításnak jelen esetre való alkalmazásával a következő eredményre jutunk:

XVI. Tétel: *Ha az* $\mathbf{A}$ *matrix minimálegyenletének valamennyi* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *gyöke egyszeres, ha továbbá az* $f(z) = \sum c_\nu z^\nu$ *hatványsor konvergenciaköre ezeket a gyököket a belsejében tartalmazza, akkor az* $f(\mathbf{A})$ *matrix-függvény előállítható Lagrange-f. matrix-polinómok lineáris formájaként a következő alakban:*

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)L_1(\mathbf{A}) + f(\lambda_2)L_2(\mathbf{A}) + \ldots + f(\lambda_s)L_s(\mathbf{A}). \tag{8}$$

[13] A Hermite f. alappolinomokra nézve l. pl. Szász Pál, A differenciál és integrálszámítás elemei. Budapest, 1951, II. köt. 22—29. old.

3. §. Állapítsuk meg az ebben az előállításban szereplő $L_k(\mathbf{A})$ matrixok $\varrho(L_k)$ rangszámát. A Lagrange-polinómok közt fennálló $\sum L_k(z) \equiv 1$ identitásból következik

$$\sum_{k=1}^{s} L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{E},$$

tehát II. *Fejezet* IV. Tétel szerint

$$n = \varrho(\mathbf{E}) = \varrho\left(\sum_{k=1}^{s} L_k(\mathbf{A})\right) \leqq \sum_{k=1}^{s} \varrho(L_k(\mathbf{A})). \tag{9}$$

Másrészt (5_2) szerint

$$(z-\lambda_k)L_k(z) = \Delta'(\lambda_k)^{-1} \cdot \Delta(z),$$

tehát

$$(\mathbf{A}-\lambda_k\mathbf{E})L_k(\mathbf{A}) = 0.$$

Ha továbbá (I. III. (1_1)) $D(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} (\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}$ akkor $D^{(\alpha_k)}(\lambda_k) \neq 0$. De $D^{(\alpha_k)}(\lambda)$ egyenlő $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$ $n-\alpha_k$-ad rendű főminorainak összegével, ezek tehát nem tűnhetnek el mind a $\lambda = \lambda_k$ helyen, vagyis $\varrho(\lambda_k\mathbf{E}-\mathbf{A}) \geqq n-\alpha_k$. Innen II. Fejezet VII. Tétel felhasználásával következik, hogy

$$\varrho(L_k(\mathbf{A})) \leqq \alpha_k; \quad \sum_{k=1}^{s} \varrho(L_k(\mathbf{A})) \leqq \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = n \tag{10}$$

A (9) és (10) egyenlőtlenségek azonban csak akkor állhatnak fenn egyidejüleg, ha $\varrho(L_k(\mathbf{A})) = \alpha_k$. Ezzel kimutattuk, hogy a (8) előállításban szereplő $L_k(\mathbf{A})$ Lagrange-f. matrix-polinom rangja egyenlő a λ_k karakterisztikus gyök multiplicitásával:

$$\varrho(L_k(\mathbf{A})) = \alpha_k.$$

4. §. Az $L_k(z)$ Lagrange-f. alappolinomok bizonyos oszthatósági tulajdonságokkal bírnak, melyekből az $f(\mathbf{A})$ matrix-függvény további redukciója szempontjából alapvető következtetéseket fogunk levonni.

1. $L_k(z)$ (5) szerint eltűnik a $\lambda_1 \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} \ldots \lambda_s$ helyeken, és $1-L_k(z)$ eltűnik a λ_k helyen. Eszerint $L_k(z)\,(L_k(z)-1)$ eltűnik $\Delta(z)$ valamennyi 0-helyén, tehát

$$L_k(z)(L_k(z)-1) \equiv L_k(z)^2 - L_k(z) \equiv \Delta(z) \cdot Q(z)$$

alakban írható. Innen $z = \mathbf{A}$ helyettesítéssel

$$L_k(\mathbf{A})^2 - L_k(\mathbf{A}) = 0 \tag{11}$$

Ezzel bebizonyítottuk a következő

XVII. Tételt: *Ha az* $\mathbf{A}$ *matrix karakterisztikus egyenletének különböző gyökei:* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, *akkor az ezeken a helyeken interpoláló Lagrange-f. matrix-polinomok mindegyike projektor.*

Fentebb kimutattuk, hogy $\varrho(L_k(\mathbf{A}))=\alpha_k$. Ezt figyelembe véve, a (8) tétel szerint $L_k(\mathbf{A})$ felbontható α_k számú diád összegére:

$$L_k(\mathbf{A})=\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^*+\mathbf{u}_{k2}\mathbf{v}_{k2}^*+\ldots+\mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^*. \tag{12}$$

Minthogy azonban a most bizonyított tétel szerint $L_k(\mathbf{A})$ projektor, azért a II. Fejezet X. Tétel értelmében $L_k(\mathbf{A})$ bármely (12) alakú felbontásában a diádok automatikusan biortogonalizálva vannak, azaz

$$\mathbf{u}_{ki}^*\mathbf{v}_{kj}=\delta_{ij} \qquad (i,j=1,2,\ldots,\alpha_k) \tag{12'}$$

Ennek következtében az $\mathbf{u}_{ki}$ ill. $\mathbf{v}_{kj}^*$ tényezők egyszersmind az $L_k(\mathbf{A})$ projektor jobb- ill. baloldali saját vektorai.

2. (5_2)-ből nyilvánvaló, hogy $k\neq h$ esetén $L_k(z)L_h(z)$ eltűnik $\Delta(z)$ valamennyi 0-helyén, tehát

$$L_k(z)\cdot L_h(z)\equiv\Delta(z)\cdot Q(z) \qquad k\neq h$$

alakban írható. Innen $z=\mathbf{A}$ helyettesítéssel

$$L_k(\mathbf{A})L_h(\mathbf{A})=L_h(\mathbf{A})L_k(\mathbf{A})=0. \tag{13}$$

Eszerint, ha az α_k-ad rendű $L_k(\mathbf{A})$, ill. α_h-ad rangú $L_h(\mathbf{A})$ matrixok diadikus előállításai

$$L_k(\mathbf{A})=\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^*+\ldots+\mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^*$$

és (14)

$$L_h(\mathbf{A})=\mathbf{u}_{h1}\mathbf{v}_{h1}^*+\ldots+\mathbf{u}_{h\alpha_h}\mathbf{v}_{h\alpha_h},$$

akkor $L_k(\mathbf{A})L_h(\mathbf{A})=[\mathbf{u}_{k1}\ldots\mathbf{u}_{k\alpha_k}]\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{k1}^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_{k\alpha_k}^*\end{bmatrix}[\mathbf{u}_{h1}\ldots\mathbf{u}_{h\alpha_h}]\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{h1}^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_{h\alpha_h}^*\end{bmatrix}=0,$

tehát a II. Fejezet VII. tétel értelmében

$$\mathbf{v}_{ki}^*\mathbf{u}_{hj}=0 \qquad k\neq h, \quad \begin{matrix}i=1,2,\ldots,\alpha_k\\ j=1,2,\ldots,\alpha_h\end{matrix}. \tag{14'}$$

Ezzel kimutattuk, hogy bármelyik $L_k(\mathbf{A})$ projektornak valamennyi bal (jobb) oldali saját vektora ortogonális az összes többi $L_h(\mathbf{A})$ projektoroknak valamennyi jobb (bal) oldali saját vektorára.

5. §. Az (12') és (14') relációk egyidejű figyelembevételéből közvetlenül következik a

(XVIII). Matrixfüggvények kanonikus előállításának alaptétele. *Ha az* $\mathbf{A}$ *matrix karakterisztikus polinomja:* $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=D(\lambda)=\prod_1^s(\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}$, *minimálpolinomja:* $\Delta(\lambda)=\prod_1^s(\lambda-\lambda_k)$, *ha továbbá az* $f(z)=\Sigma c_\nu z^\nu$ *hatványsor konvergenciaköre a* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ *0-helyeket a belsejében tartalmazza, akkor a* $f(\mathbf{A})$ *matrix-függvény a következő kanonikus alapban állítható elő:*

$$f(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{s}f(\lambda_k)L_k(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{s}f(\lambda_k)(\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^*+\cdots+\mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^*), \tag{15}$$

ahol $L_k(z) = \dfrac{\Delta(z)}{\Delta'(\lambda_k)(z-\lambda_k)}$ *és a* $\mathbf{u}_{ki}$, $\mathbf{v}_{lj}$ *vektorok biortogonális rendszert alkotnak, azaz*

$$\mathbf{u}_{ki}^{*}\mathbf{v}_{lj} = \delta_{kl}\delta_{ij}\begin{pmatrix} k, l = 1, 2, \dots s \\ i = 1, 2, \dots \alpha_k \\ j = 1, 2, \dots \alpha_l \end{pmatrix}. \tag{15. 1}$$

Az $\mathbf{u}_{ki}$ *ill.* $\mathbf{v}_{kj}^{*}$ *vektoroknak* $\mathbf{A}$*-nak* λ_k*-hoz tartozó jobb- ill. baloldali saját vektorai.*

Innen az $f(z) \equiv z$ esetben magának az $\mathbf{A}$ matrixnak

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k(\mathbf{u}_{k1}\mathbf{v}_{k1}^{*} + \dots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{v}_{k\alpha_k}^{*}) \tag{16}$$

kanonikus felbontása adódik.

Ha $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^{*}$, azaz $\mathbf{A}$ hermitikus, akkor a minimálpolinomnak csupa egyszeres 0-helye van, tehát minden hermitikus matrix előállítható a

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k(\mathbf{u}_{k1}\overline{\mathbf{u}}_{k1}^{*} + \dots \mathbf{u}_{k\alpha_k}\overline{\mathbf{u}}_{k\alpha_k}^{*}) \tag{17}$$

kanonikus alakban.

Ha $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}$, és $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{*}$, azaz $\mathbf{A}$ valós, szimmetrikus, akkor kanonikus előállítása:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k(\mathbf{u}_{k1}\mathbf{u}_{k1}^{*} + \dots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{u}_{k\alpha_k}^{*}). \tag{18}$$

Ha ezt az eredményt a $\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j = \mathbf{x}^{*}\mathbf{A}\mathbf{x}$ quadratikus alakra alkalmazzuk, nyerjük annak ortogonális transzformációval négyzetösszegbe átvitt alakját:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{*}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}^{*}\sum_{k=1}^{s} \lambda_k(\mathbf{u}_{k1}\mathbf{u}_{k1}^{*} + \dots + \mathbf{u}_{k\alpha_k}\mathbf{u}_{k\alpha_k}^{*})\mathbf{x} = \\ &= \sum_{k=1}^{s} \lambda_k\{(\mathbf{u}_{k1}^{*}\mathbf{x})^2 + \dots : (\mathbf{u}_{k\alpha_k}^{*}\mathbf{x})^2\}. \end{aligned} \tag{19}$$

6. §. Ha az adott $\mathbf{A}$ matrix rendszáma: n határozatlan, akkor az $L_k(\mathbf{A})$ Lagrange-f. matrix-polinomok effektív kiszámítására gyakran a direkt behelyettesítésnél előnyösebb a következő eljárás, mely az $L_k(\mathbf{A})$ és az adj. $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ matrixok közti összefüggésen alakul. Ezen összefüggés levezetésének kiinduló pontja a következő

Lemma. Ha $D(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - \lambda_k)$ n-ed fokú polinom, melynek nincsenek többszörös 0-helyei, akkor érvényes a következő identitás

$$\frac{D(x) - D(y)}{x - y} = \sum_{k=1}^{n} D'(\lambda_k)L_k(x)L_k(y), \tag{20}$$

ahol

$$L_k(x) = \frac{D(x)}{D'(\lambda_k)(x - \lambda_k)}. \tag{5. 3}$$

Bizonyítás: $\frac{D(x)-D(y)}{x-y}$ az y változónak $n-1$-ed fokú polinomja, tehát y szerint a $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ helyeken interpolálva

$$\frac{D(x)-D(y)}{x-y}=\sum_{k=1}^{n}\frac{D(x)}{x-\lambda_k}L_k(y).$$

Ha itt $\frac{D(x)}{x-\lambda_k}$ helyébe annak (5. 3)-ból adódó kifejezését helyettesítjük, éppen a bizonyítandó egyenlőséget nyerjük.

7. §. Legyenek $\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$ az $\mathbf{A}$ matrix egyszeres sajátértékei és helyettesítjük az I. 4. §. befejező megjegyzés alapján a (20) identitásban x helyébe a $\lambda\mathbf{E}$ matrixot és y helyébe az $\mathbf{A}$ matrixot. Ekkor a $D(\mathbf{A})=0$ és a (III. (2)) egyenletek következtében

$$\text{adj.}(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})=\frac{\mathbf{E}D(\lambda)}{\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}}\sum_{k=1}^{n}D'(\lambda_k)L_k(\lambda)L_k(\mathbf{A}).$$

Ebből $\lambda=\lambda_k$ helyettesítéssel $L_k(\mathbf{A})$ következő kifejezéséhez jutunk:

$$L_k(\mathbf{A})=\frac{1}{D'(\lambda_k)}\text{adj.}(\lambda_k\mathbf{E}-\mathbf{A}). \tag{21}$$

(Ha $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinómja: $D(\lambda)=\Pi(\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}$ és minimálpolinomja: $\Delta(\lambda)=\Pi(\lambda-\lambda_k)$, akkor a fentiekhez hasonlóan kimutatható, hogy $L_k(\mathbf{A})$ és adj. $(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})$ közt a következő összefüggés áll fenn:

$$L_k(\mathbf{A})=\frac{\alpha_k}{D^{(\alpha_k)}(\lambda_k)}\{\text{adj.}(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\}^{(\alpha_k-1)}_{\lambda=\lambda_k}. \tag{21'}$$

8. §. A matrixok kanonikus előállításáról szóló fenti alaptétel még a következőképpen is fogalmazható:

XIX. T é t e l: *Minden olyan* $\mathbf{A}$ *matrix, melynek minimálpolinomja csupa egyszeres* 0-*hellyel bír, hasonló a sajátértékeiből alkotott diagonális matrixhoz:*

$$\mathbf{A}\sim\langle\lambda_{11}\dots\lambda_{1\alpha_1}\dots\lambda_{s1}\dots\lambda_{s\alpha_s}\rangle,\quad \lambda_{k1}=\lambda_{k2}=\dots=\lambda_{k\alpha_k}=\lambda_k;\quad k=1,2,\dots,s$$

azaz, létezik olyan $\mathbf{U}$ *matrix, melyre*

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\langle\lambda_{11}\dots\lambda_{1\alpha_1}\dots\lambda_{s1}\dots\lambda_{s\alpha_s}\rangle\mathbf{U}^{-1}.$$

Bizonyítás: Az egyszerűbb írásmód kedvéért jelöljük a fenti sorrendben vett (multiplicitásuknak megfelelően ismételt) saját értéket $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$-nel és a hozzájuk tartozó jobb- és baloldali biortogonalizált saját vektorokat $\mathbf{u}_1\dots\mathbf{u}_n$, ill. $\mathbf{v}_1^*\dots\mathbf{v}_n^*$-gal. Ekkor a (16) kanonikus előállítás így írható:

$$\mathbf{A}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*=[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\dots\mathbf{u}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^*\\ \mathbf{v}_2^*\\ \vdots\\ \mathbf{v}_n^*\end{bmatrix}. \tag{22}$$

Azonban az $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n]$ és $\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{v}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^* \end{bmatrix}$ matrixok az $\mathbf{v}_i^* \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$ biortogonálási relációk következtében egymásnak reciprokjai, azaz $\mathbf{V}^* = \mathbf{U}^{-1}$, tehát (22)-ből következik

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\langle\lambda_1 \ldots \lambda_n\rangle\mathbf{U}^{-1}.$$

Hermitikus, $\mathbf{A}$ matrix mindig hasonló egy diagonális matrixhoz és a (17) reláció ez esetben a

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\langle\lambda_1 \ldots \lambda_n\rangle\bar{\mathbf{U}}^*$$

alakot ölti. Valós, szimmetrikus matrix esetén (18) alapján hasonló meggondolással nyerjük, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\langle\lambda_1 \ldots \lambda_n\rangle\mathbf{U}^*.$$

V. Fejezet

Lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek megoldása a matrix-számítás felhasználásával

1. §. Az $x = e^{At}$ függvény kielégíti az $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenletet és a $t = 0$ helyen 1 értéket vesz fel. Következésképpen az

$$\dot{x} = Ax$$

elsőrendű homogén differenciálegyenletnek az

$$x(0) = x_0$$

kezdőfeltételt kielégítő $x(t; x_0)$ megoldását nyilván a

$$x(t; x_0) = e^{At}.x_0 \tag{1}$$

formula szolgáltatja.

Az $\dot{x} - Ax = e^{At}\frac{d}{dt}(e^{-At}.x)$ azonosságból pedig következik, hogy az

$$\dot{x} - Ax = g(t)$$

elsőrendű inhomogén differenciálegyenletnek az

$$x(0) = 0$$

kezdőfeltételt kielégítő megoldását a

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}.g(\tau)\,d\tau \tag{2}$$

formula adja.

Az $x = \cos(\sqrt{A}.t)$, ill. a $x = \dfrac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}$ függvények kielégítik a $\ddot{x} + Ax = 0$ differenciálegyenletet, továbbá a $t = 0$ helyen a $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, ill. a $x(0)=0; \dot{x}(0)=1$ kezdőfeltételeket. Következésképpen az

$$\ddot{x}+Ax=0$$

másodrendű homogén differenciálegyenletnek a

$$x(0)=x_0; \quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0$$

kezdőfeltételeket kielégítő $x(t; x_0, \dot{x}_0)$ megoldását nyilván a

$$x(t; x_0 \dot{x}_0)=\cos(\sqrt{A}t).x_0+\frac{\sin(\sqrt{A}t)}{\sqrt{A}}\dot{x}_0 \tag{3}$$

formula szolgáltatja.

Direkt számítással verifikálható továbbá, hogy a

$$\ddot{x}+Ax=g(t)$$

másodrendű inhomogén differenciálegyenletnek az

$$x(0)=0; \quad \dot{x}(0)=0$$

kezdőfeltételeket kielégítő megoldását az

$$x(t)=\int_0^t \frac{\sin\sqrt{A}(t-\tau)}{\sqrt{A}} g(\tau)\,d\tau \tag{4}$$

formula adja.

(Ha az inhomogén differenciálegyenleteknél más kezdőfeltételek vannak előírva, akkor azokat a homogén differenciálegyenlet megfelelő partikuláris megoldásának szuperponálásával elégítjük ki.)

2. §. A matrix-számításnak az analóg differenciálegyenletrendszerek megoldására való alkalmazása mármost lényegileg úgy jellemezhető, hogy a fentebb idézett egyszerű megoldási formulák rendszerekre is érvényesek maradnak, ha az azokban szereplő skalárokat megfelelő matrixokkal helyettesítjük.

Tekintsük először az $\dot{x}=Ax$ egyenletnek és az $x(0)=x_0$ kezdeti feltételeknek megfelelő

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & x_1(0)&=x_{10}\\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n; & x_2(0)&=x_{20}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots & &\\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n & x_n(0)&=x_{n0}
\end{aligned}$$

homogén differenciálegyenletrendszert és kezdőfeltételt. Ezek a

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} x_{10}\\ x_{20}\\ \vdots\\ x_{n0}\end{bmatrix}$$

vektorok és az $[a_{ij}]=\mathbf{A}$ matrix bevezetésével nyilván az

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0 \tag{1_1)(1_2}$$

matrix-egyenletekké foglalhatók össze.

Kimutatjuk, hogy az (1) skalár-formulából a megfelelő helyettesítésekkel keletkező

$$\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0)=e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}_0$$

vektor kielégíti a (1_1) differenciálegyenletet és az (1_2) kezdőfeltételt. Az $\mathbf{A}$ matrixnak itt szereplő

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{E}+\mathbf{A}t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2+\cdots$$

függvénye ugyanis minden $\mathbf{A}$ matrixra és minden t-re konvergens hatványsorral van definiálva. A t szerint tagonkénti differenciálással nyert sor:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{A}+\mathbf{A}^2t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^3t^2+\cdots=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t},$$

tehát az $e^{\mathbf{A}t}$ matrix kielégíti az (5) differenciálegyenletet (abban az értelemben, hogy $e^{\mathbf{A}t}$ oszlop-vektorai kielégítik az (5) rendszert és annak egy alaprendszerét alkotják). Továbbá a $t=0$ helyen $e^{\mathbf{A}t}$ nyilván az egységmatrixba megy át.

Innen azonban rögtön következik, hogy az $e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}_0$ vektor mind az (1_1) differenciálegyenletet, mind az (1_2) kezdőfeltételt kielégíti. $e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}_0$ ugyanis $e^{\mathbf{A}t}$ oszlop-vektorainak, vagyis partikuláris megoldásoknak homogén lineár kombinációja, tehát maga is megoldás. Továbbá $\lim\limits_{t\to 0}(e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}_0)=\mathbf{E}\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_0$, tehát a kezdőfeltétel is ki van elégítve.

Az analóg meggondolásokat a fentidézett többi egyenlettípusra is elvégezve, a következő eredményekhez jutunk:

Az $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ egyenletrendszernek az $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$ kezdőfeltételt kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0)=e^{\mathbf{A}t}\cdot\mathbf{x}_0. \tag{1'}$$

Az $\dot{\mathbf{x}}-\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{g}(t)$ egyenletrendszernek az $\mathbf{x}(0)=0$ kezdőfeltételt kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}(t)=\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{g}(\tau)\,d\tau. \tag{2'}$$

Az $\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{A}\mathbf{x}=0$ egyenletrendszernek az $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0)=\dot{x}_0$ kezdőfeltételeket kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_0,\dot{\mathbf{x}}_0)=\cos(\sqrt{\mathbf{A}}t)\cdot\mathbf{x}_0+\frac{\sin(\sqrt{\mathbf{A}}t)}{\sqrt{\mathbf{A}}}\dot{\mathbf{x}}_0. \tag{3'}$$

Az $\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{g}(t)$ rendszernek az $\mathbf{x}(0)=0$, $\dot{\mathbf{x}}(0)=0$ kezdőfeltételeket kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}(t)=\int_0^t\frac{\sin\sqrt{\mathbf{A}}(t-\tau)}{\sqrt{\mathbf{A}}}\mathbf{g}(\tau)\,d\tau. \tag{4'}$$

(Az $\mathbf{A}$ matrix négyzetgyökeinek itteni szereplése látszólagos, tekintettel a cos és sin függvények hatványsorainak paritására.)

A gyakorlati alkalmazásoknál e megoldási formulákban szereplő matrix-függvényeket a IV. (7) alatti redukált, ill. a IV. (15) alatti kanonikus alakra hozzuk. Redukció után a (2') (4') megoldási formulák csupán skalár-függvények integráljait tartalmazzák.

Ciklikus matrix kanonikus előállítása és annak alkalmazása egy valószínűség-számítási problémára

3. §. Egy n-edrendű $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ matrixot akkor nevezünk ciklikusnak, ha annak elemei az indexek különbségének modulo n periodikus függvényei, azaz

$$a_{ij}=c_{j-i};\quad c_{-k}=c_{n-k}\quad (i,j,k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

alakúak. Ezen definícióból következik, hogy egy ciklikus matrix teljesen meg van határozva első sorának elemei által. Erre való tekintettel egy ciklikus matrixot a következőképpen fogunk jelölni:

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 c_2 \ldots c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 c_1 \ldots c_{n-2} \\ \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 c_3 \ldots \quad c_0 \end{bmatrix}=\mathbf{C}(c_0,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1}). \tag{5}$$

A ciklikus matrixokra jellemző a következő tulajdonság:

Bármely n-edrendű $\mathbf{C}(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})$ ciklikus matrix kifejezhető, mint az $\Omega=\mathbf{C}(0,1,0,\ldots,0)$ primitív ciklikus matrixnak legfeljebb $n-1$-edfokú polinomja. Ugyanis nyilván

$$\mathbf{C}(c_0,c_1,\ldots,c_{n-0})=c_0\mathbf{E}+c_1\mathbf{C}(0,1,0,\ldots,0)+\cdots,c_{n-1}\mathbf{C}(0,0,\ldots,1). \tag{6}$$

Továbbá Ω definíciójából következik, hogy

$$\begin{aligned} \Omega^2 &=\mathbf{C}(0,0,1,0,\ldots,0)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \Omega^{n-1}&=\mathbf{C}(0,0,\ldots\ldots 1)\\ \Omega^n &=\mathbf{E}, \end{aligned}$$

tehát (6)-ból

$$\mathbf{C}(c_0,\ldots,c_{n-2})=c_0\mathbf{E}+c_1\Omega+c_2\Omega^2+\cdots+c_{n-1}\Omega^{a-1}.$$

Ezzel feladatunk az $\Omega=\mathbf{C}(0,1,0,\ldots,0)$ primitív ciklikus matrix polinomjának kanonikus előállítására van visszavezetve.

Ω karakterisztikus polinomja:

$$|\lambda\mathbf{E}-\Omega|=D(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0\ldots 0 \\ 0 & \lambda & -1\ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0\ldots\lambda \end{vmatrix}=\lambda^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda-\omega_k);\ \omega_k=e^{\frac{2k\pi i}{n}}. \tag{7}$$

E szerint Ω sajátértékei az n-edik egységgyökök, ezek mind különbözők és így $D(\lambda)$ Ω-nak egyszersmind minimal polinomja. IV. (8) szerint tehát Ω tetszőleges $\varphi(\Omega)$ polinomjának kanonikus előállítása a következő:

$$\varphi(\Omega)=\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\omega_k)L_k(\Omega),\qquad \omega_k=e^{\frac{2k\pi i}{n}};$$

itt

$$L_k(x)=\frac{D(x)}{D'(\omega_k)(x-\omega_k)}=\frac{x^n-1}{n\omega_k^{n-1}(x-\omega_k)}=\frac{1}{n}\{1+\bar{\omega}_k x+\bar{\omega}_k^2x^2+\cdots+\bar{\omega}_k^{n-1}x^{n-1}\},$$

tehát

$$L_k(\Omega)=\frac{1}{n}(\mathbf{E}+\bar{\omega}_k\Omega+\bar{\omega}_k^2\Omega^2+\cdots+\bar{\omega}_k^{n-1}\Omega^{n-1}),$$

vagyis (7) figyelembevételével

$$L_k(\Omega)=\frac{1}{n}\{\mathbf{C}(1,0,\ldots,0)+\bar{\omega}_k\mathbf{C}(0,1,0,\ldots,0)+\cdots+\bar{\omega}_k^{n-1}\mathbf{C}(0,0,\ldots,1)\}=$$

$$=\frac{1}{n}\mathbf{C}(1,\bar{\omega}_k,\ldots,\bar{\omega}_k^{n-1})=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1 & \bar{\omega}_k & \ldots & \bar{\omega}_k^{n-1}\\ \omega_k & 1 & \ldots & \bar{\omega}_k^{n-2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \omega_k^{n-1} & \omega_k^{n-2} & \ldots & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \vdots\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1\,\bar{\omega}_k\ldots\bar{\omega}_k^{n-1}].\tag{8}$$

$L_k(\Omega)$ tehát hermitikus diád és ennek felhasználásával

$$\varphi(\Omega)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(\omega_k)\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \vdots\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix}[1\,\bar{\omega}_k\ldots\bar{\omega}_k^{n-1}].\tag{9}$$

Ha most φ az adott ciklikus matrixnak

$$\mathbf{C}(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})=c_0\mathbf{E}+c_1\Omega+\cdots+c_{n-1}\Omega^{n-1}=\varphi(\Omega)$$

alakú előállításában szereplő polinom, akkor (8)-ból következik, hogy

Valamely n-edrendű $\mathbf{C}(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})$ ciklikus matrix sajátértékei:

$$\lambda_k=c_0+c_1\omega_k+\cdots+c_{n-1}\omega_k^{n-1},\ \omega_k=e^{\frac{2k\pi i}{n}},\ (k=0,1,\ldots,n-1).\tag{10}$$

Sajátvektorai:

$$\mathbf{u}_k=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix}1\\ \omega_k\\ \vdots\\ \omega_k^{n-1}\end{bmatrix};\ \mathbf{u}_k^*=\frac{1}{\sqrt{n}}[1,\bar{\omega}_k,\ldots,\bar{\omega}_k^{n-1}]\tag{11}$$

uniter-ortogonális rendszert alkotnak. azaz $\bar{\mathbf{u}}_k^*\mathbf{u}_h=\delta_{kh}$.

Kanonikus előállítása:

$$\mathbf{C}(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}(c_0+c_1\omega_k+\cdots c_{n-1}\omega_k^{n-1})\,\mathbf{u}_k\bar{\mathbf{u}}_k^*.\tag{12}$$

4. §. Az alábbi alkalmazásra való tekintettel foglalkozzunk a következő elsőrendű differenciálegyenletrendszerrel:

$$\frac{dx_0}{dt} = -\left(\sum_1^{n-1} c_\nu\right) x_0 + c_1 x_1 + \cdots + c_{n-1} x_{n-1}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = c_{n-1} x_0 - \left(\sum_1^{n-1} c_\nu\right) x_1 + \cdots + c_{n-2} x_{n-1}$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = c_1 x_0 + c_2 x_2 + \cdots - \left(\sum_1^{n-1} c_\nu\right) x_{n-1}.$$

Itt $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ nem-negatív számok, melyek nem mind tünnek el. A $t=0$-ra előírt kezdőértékek tetszőleges $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ nem-negatív számok, melyek a $\sum_0^{n-1} \xi_\nu = 1$ normirozást kielégítik.

Matrix-formában

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Sigma c_\nu & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & -\Sigma c_\nu & \ldots & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_1 & c_2 & & -\Sigma c_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_1(0) \\ \vdots \\ x_{n-1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix}; \sum_0^{n-1} \xi_\nu = 1,$$

azaz

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0) = \xi; \quad \sum_0^{n-1} \xi_\nu = 1. \qquad (11)\ (12)$$

A $\mathbf{C}$ ciklikus matrix sajátértékei (10) szerint

$$\lambda_k = \sum_1^{n-1} c_\nu \left(e^{\frac{2k\nu\pi i}{n}} - 1\right) = -2\sum_1^{n-1} c_\nu \sin^2 \frac{k\nu\pi}{n} + i \sum_1^{n-1} c_\nu \sin \frac{2k\nu\pi}{n}; \quad \lambda_k = \overline{\lambda_{n-k}}. \qquad (13)$$

$$(k = 0, 1, \ldots n-1).$$

E szerint ahhoz, hogy $\lambda_0 = 0$ kivételével valamennyi sajátérték negatív valós résszel bírjon, elegendő, hogy az alábbi feltételek valamelyike teljesüljön:

Valamennyi c_ν pozitív, vagy $\sum_1^{n-1} c_\nu > 0$ és n primszám. (Vagy általánosabban: azon ν indexek legnagyobb közös osztója, melyekre $c_\nu > 0$, relatív prim n-hez.)

Ekkor a (11) differenciálegyenletnek a (12) kezdeti feltételt kielégítő megoldása

$$\mathbf{x}(t;\xi) = e^{\mathbf{C}t}\xi = \frac{1}{n}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}[1, 1, \ldots 1] + \sum_1^{n-1} e^{\lambda_k t} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{bmatrix} [1\ \overline{\omega}_k \ldots \overline{\omega}_k^{n-1}]\right\}\xi. \qquad (14)$$

Ha az előbbi feltételek valamelyike teljesül, akkor $\Re(\lambda) < 0$, $k = 1, 2, \ldots n-1$, továbbá (12) szerint $[1, 1, \ldots 1]\,\xi = 1$, tehát

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t;\xi) = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}[1, 1, \ldots 1]\xi = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix},$$

vagyis az $\mathbf{x}(t;\xi)$ vektor $t \to \infty$ esetén a ξ kezdeti vektortól független $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots \frac{1}{n}\right]^*$ vektorhoz konvergál.

5. §. A ciklikus matrixok kanonikus előállítására vonatkozó fenti eredmények érdekes alkalmazást nyerhetnek a valószínűségszámításban, mégpedig mod n additív és homogén Markov-folyamatok ergodicitásának vizsgálatánál. Ezek a folyamatok a következő egyszerű modellel realizálhatók: Egy pont végezzen „bolyongás"-t az egységkör kerületén, lehetséges helyzetei legyenek egy az egységkörbe írt szabályos n-szög $A_1, A_2, \ldots A_n$ csúcspontjai. Tegyük fel, hogy a $t > 0$ időpontban a pont az A_j csúcsban van, és ezen feltétel mellett vizsgáljuk annak a valószínűségét, hogy a $t+\tau$ időpontban ($\tau \geqq 0$) a pont az A_k csúcsban legyen. Tegyük fel, hogy ez a valószínűség nem függ attól, hogy egy tetszőleges $\tau_0 < t$ időpontban hol volt a pont (vagyis, hogy a folyamat Markov-típusú), továbbá, hogy ez a valószínűség nem függ t-től (vagyis, hogy a folyamat időben homogén) végül, hogy ez a valószínűség t-n kívül csak a $k-j$ különbség mod n vett maradékától függ. (Vagyis, hogy a folyamat mod n additív.)

Ezen feltevések mellett a szóbanforgó valószínűséget jelölhetjük $p_{k-j}(t)$-vel, ahol definíció szerint $p_r(t) \equiv p_s(t)$, ha $r \equiv s$ (mod n).

A $p_\nu(t)$ függvények értelmezéséből következik, hogy

$$p_\nu(t) \geqq 0 (\nu = 0, 1, \ldots n-1) \text{ és } \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu(t) = 1, \tag{15}$$

továbbá, hogy $\mathbf{P}(t)$-vel jelölve a $[p_{k-j}(t)]$ ciklikus matrixot,

$$\mathbf{P}(t+\tau) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(\tau) \text{ és } \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}. \qquad (16)\ (17)$$

Ha még feltesszük, hogy léteznek a $p'_\nu(0) = c_\nu$ deriváltak[14] és a $[c_{k-j}]$ ciklikus matrixot $\mathbf{C}$-vel jelöljük, úgy (16)-ből:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}(t) \tag{18}$$

($\mathbf{P}'(t)$ létezését $t > 0$-ra nem kell feltenni, ez következik $\mathbf{P}'(0)$ létezéséből és (16)-ből.)

A (15) feltevésekből következik, hogy $c_\nu > 0$, ha $\nu = 1, 2, \ldots n-1$ és $c_0 = -\sum_{1}^{n-1} c_\nu$. Eszerint a probléma a fentebb tárgyalt differenciálegyenletrendszerre van visszavezetve és így az előbb nyert eredményünk értelmében (ha azon ν számok legnagyobb közös osztója, melyekre $c_\nu > 0$, relatív prím n-hez), akkor

[14] Elegendő a $p_\nu(t)$ függvények folytonosságát a $t = 0$ helyen feltételezni. L. pl. J. L. Doob, Stochastic Processes. Wiley, 1953. Chap. VI.

$$\lim_{t\to\infty} p_\nu(t) = \frac{1}{n} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-1). \quad (19)$$

Tegyük most fel, hogy a $t=0$ időpontban a pont w_j valószínűséggel tartózkodott az A_j csúcsban $\left(\sum_1^n w_j = 1\right)$, úgy annak valószínűségét, hogy a $t>0$ időpontban a pont az A_k csúcsban legyen, $W_k(t)$-vel jelölve

$$W_k(t) = \sum_{j=1}^{n} w_j p_{k-j}(t)$$

és így (19) szerint

$$\lim_{t\to\infty} W_k(t) = \frac{1}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Tehát tetszőleges kezdeti valószínűség eloszlás mellett a pont $t\to\infty$-re határértékben egyforma valószínűséggel lesz található a szabályos n-szög bármely csúcsában.

Ilyen módon a ciklikus matrix kanonikus előállítása segélyével kimutattuk a vizsgált Markov-folyamat ergodicitását.[15]

Szimmetrikus matrix kanonikus előállítása és annak alkalmazása egy mechanikai problémára

6. §. Végesszámú szabadsági fokkal bíró, konzervatív mechanikai rendszernek stabilis egyensúlyi konfiguráció kis környezetében végbemenő rezgései tudvalevőleg másodrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletrendszer által vannak meghatározva, melynek megoldására a klasszikus mechanika a változók szeparálásának, más néven normál-koordináták bevezetésének elvét alkalmazza.

Az alábbiakban egy egyszerű példán, a korpuszkuláris húr-modell tárgyalása kapcsán meg fogjuk mutatni, hogy a rendszer megoldását szolgáltató trigonometrikus matrix-függvény kanonikus előállítása éppen a fenti elveknek megfelelő megoldási formára vezet.

Korpuszkuláris húr-modellnek nevezzük rugalmas, tömegtelen fonál egyes pontjaihoz rögzített tömegpontok rendszerét. Legyen a tömegpontok száma $n-1$, mindegyiküknek tömege: $m=1$, a szomszédosak távolsága: $l=1$ és a fonál rugalmas feszültsége: $F=1$.

Ha a k-dik tömegpontnak az egyensúlyi helyzettől számított transzverzális elmozdulása t időpontban $x_k(t)$, akkor — kis kilengések esetén — a tömegpontok mozgását a

$$\begin{gathered} \ddot{x}_k + (-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1}) = 0 \\ (k = 1, 2, \ldots n-1) \end{gathered} \qquad (20)$$

[15] A matrix-elméletnek fenti alkalmazására Rényi Alfréd volt szíves a figyelmemet felhívni.

differenciálegyenletrendszer és a végpontok rögzítettségét kifejező

$$x_0 \equiv 0; \quad x_n \equiv 0 \tag{21}$$

kerületi feltétel határozza meg.

A (20) differenciálegyenletek *és* a (21) kerületi feltételek összefoglalhatók a kontinuáns típusú matrix-szal bíró

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = 0 \text{ ill. } \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

vektor-differenciálegyenletté.

A tömegpontoknak a $t=0$ pillanatban elfoglalt kezdőhelyzetei $x_{10}, x_{20}, \dots x_{n-1,0}$ komponensekkel bíró $\mathbf{x}_0$ vektorrá, kezdő sebességei az $\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dots \dot{x}_{n-1,0}$ komponensekkel bíró $\dot{\mathbf{x}}_0$ vektorrá foglalhatók össze. A kezdeti feltételek tehát:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0.$$

(3) szerint a (20) differenciálegyenletnek a kezdeti feltételeket kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) = \cos(\sqrt{\mathbf{A}}t) \cdot \mathbf{x}_0 + \frac{\sin(\sqrt{\mathbf{A}}t)}{\sqrt{\mathbf{A}}} \cdot \dot{\mathbf{x}}_0. \tag{3}$$

7. §. Ahhoz, hogy ebből az igen tömör megoldási formulából a normálkoordinátákban kifejezett megoldáshoz jussunk, az itt szereplő matrixfüggvényeket kanonikus alakjukra kell hoznunk. IV. (15) szerint

$$\cos(\sqrt{\mathbf{A}}t) = \sum_{k=1}^{n-1} \cos(\sqrt{\lambda_k}t) \cdot L_k(\mathbf{A}); \quad \frac{\sin(\sqrt{\mathbf{A}}t)}{\sqrt{\mathbf{A}}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}} L_k(\mathbf{A}), \tag{22}$$

ahol $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ az $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei (melyek ez esetben mind különbözőknek fognak bizonyulni).

Az $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}|$ kontinuáns 0-helyeinek a kiszámításánál célszerű a $\lambda = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$ relációval egy új θ parametert bevezetni. Ezzel a jelöléssel[16]

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{A} - 4\sin^2\frac{\theta}{2}\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2\cos\theta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta \end{vmatrix}_{n-1} = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}. \tag{23}$$

Tehát a $D_{n-1}(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei a θ parameter $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$ értékeinek felelnek meg, azaz

$$\lambda_k = 4\sin^2\frac{\theta_k}{2} = 4\sin^2\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \dots n-1). \tag{23'}$$

[16] L. PL. E. Pascal, Die Determinanten. Leipzig. 1900. pp. 155—156.

Miután a gyökök mind egyszeresek, ezért a (22) előállításban szereplő, $L_k(\mathbf{A})$ matrixok mind elsőrangúak, vagyis egyetlen diádra redukálódnak.

Az $L_k(\mathbf{A})$ matrixok effektiv kiszámításához ezúttal célszerűbb azoknak az adj. $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ matrix-szal való IV. (21) kapcsolatát felhasználni.

Jelöljünk egy k-adrendű $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|$ típusú kontinuánst $D_k(\lambda)$-val, továbbá adj. $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$-nek az i-edik sorban és j-dik oszlopban álló elemét $A_{ij}(\lambda)$-val.

Ekkor könnyen belátható, hogy $i \leqq j$ esetén

$$A_{ij}(\lambda) = (-1)^{j-i} D_{i-1}(\lambda) D_{n-1-j}(\lambda). \tag{24}$$

Ebből az algebrai komplementum $(-1)^{i+j}$-nel való szorzással adódik, tehát (23) figyelembevételével

$$A_{ij}(\lambda) = \frac{\sin i\theta}{\sin\theta} \, \frac{\sin(n-j)\theta}{\sin\theta}; \quad \text{ha} \quad i \leqq j$$

és $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ szimmetriája folytán

$$A_{ij}(\lambda) = \frac{\sin(n-i)\theta}{\sin\theta} \, \frac{\sin j\theta}{\sin\theta}, \quad \text{ha} \quad i \geqq j$$

IV. (21) szerint:

$$L_k(\mathbf{A}) = -\frac{1}{D'_{n-1}(\lambda_k)} \text{adj.} (\mathbf{A}-\lambda_k\mathbf{E}) = -\frac{1}{D'_{n-1}(\lambda_k)} [A_{ij}(\lambda_k)]$$

(24) alapján

$$A_{ij}(\lambda_k) = A_{ij}\left(4\sin^2\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin\frac{ki\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} \cdot \frac{\sin\frac{k(n-j)\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} = (-1)^k \frac{\sin\frac{ki\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} \cdot \frac{\sin\frac{kj\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}},$$

továbbá

$$D'_{n-1}(\lambda_k) = \frac{d}{d\sin^2\frac{\theta}{2}} D_{n-1}\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_{\theta=\frac{k\pi}{n}} (-=1)^k \frac{n}{2\sin^2\frac{k\pi}{n}},$$

tehát mindezek figyelembevételével

$$L_k(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^*; \quad \mathbf{u}_k^* = \sqrt{\frac{2}{n}}\left[\sin\frac{k\pi}{n}, \sin\frac{2k\pi}{n}, \ldots \sin\frac{(n-1)k\pi}{n}\right]. \tag{25}$$

Könnyen verifikálható, hogy az így megszerkesztett vektorrendszer ortogonális, azaz kielégíti a $\mathbf{u}_h^*\mathbf{u}_l = \delta_{kl}$ relációkat.

Az $L_k(\mathbf{A})$ matrixok ezen kifejezéseit, valamint λ_k (23)-ből adódó értékeit a trigonometrikus matrix-függvények (22) képletébe, majd ezeket a (3) megoldási képletbe helyettesítve, a húr-modell differenciálegyenletrendszerének az alábbi explicit megoldását nyerjük:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^* \left\{\mathbf{x}_0 \cos\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}t\right) + \dot{\mathbf{x}}_0 \frac{\sin\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}t\right)}{2\sin\frac{k\pi}{n}}\right\}$$

vagy részletes skalár írásmódban:

$$x_i(t) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{ki\pi}{n}\left\{(\mathbf{u}_k^*\mathbf{x}_0)\cos\left(2\sin\frac{k\pi}{n}t\right) + (\mathbf{u}_k^*\dot{\mathbf{x}}_0)\frac{\sin\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}t\right)}{2\sin\frac{k\pi}{n}}\right\}.$$

Itt a kezdeti adatoktól való függést az $(\mathbf{u}_k^*\cdot\mathbf{x}_0)$ és $(\mathbf{u}_k^*\cdot\dot{\mathbf{x}}_0)$ skalár szorzatok juttatják kifejezésre. Ez a tény azzal függ össze, hogy az $X_k = \mathbf{u}_k^*\cdot\mathbf{x}$ skalárok a rendszer normálkoordinátái, vagyis, hogy ezekkel kifejezve a tömegpontrendszernek úgy a kinetikus, valamint a potenciális energiája négyzetösszegre redukálódik.

Valóban, a kinetikus energia:

$$\sum \dot{x}_k^2 = \dot{\mathbf{x}}^*\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^*(\sum \mathbf{u}_k\mathbf{u}_k^*)\dot{\mathbf{x}} = \sum(\mathbf{u}_k^*\dot{\mathbf{x}})^2 = \sum \dot{X}_k^2$$

és a potenciális energia:

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^*\sum(\mathbf{u}_k\lambda_k\mathbf{u}_k^*)\mathbf{x} = \sum\lambda_k(\mathbf{u}_k^*\mathbf{x})^2 = \sum\lambda_k X_k^2,$$

tehát a

$$X_k = \mathbf{u}_k^*\mathbf{x} = \sqrt{\frac{2}{n}}\left\{x_1\sin\frac{k\pi}{n} + x_2\sin\frac{2k\pi}{n} + \ldots + x_{n-1}\sin\frac{(n-1)k\pi}{n}\right\}$$

új függő változók bevezetésével a (20) differenciálegyenletrendszer szétesik az egyes normálrezgéseket meghatározó

$$\ddot{X}_k + \lambda_k X_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

szeparált differenciálegyenletekre.

ÉSZLELÉSEK TÖRVÉNYSZERŰSÉGÉNEK MEGHATÁROZÁSA TÖBB VÁLTOZÓ ESETÉN

JORDAN KÁROLY lev. tag

Előadta az 1952. november 3-án tartott felolvasó ülésen

I.

Legyen a megállapitandó törvény a következő:

$$F(x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots) = 0 \tag{1}$$

legyenek adva az $x_i, y_i, z_i, \ldots$ mérési adatai az $x, y, z, \ldots$ változóknak, $i = 1, 2, \ldots, N$-re; $a, b, c, \ldots$ pedig a paraméterek, melyek felett úgy kell rendelkezni, hogy az (1) függvény lehetőleg jól közelítse meg az észlelési adatokat, a legkisebb négyzetek elve szerint.

Ha az (1) képletben a paraméterek adva vannak, továbbá $y_i, z_i, \ldots$ is, akkor a képlettel kiszámíthatjuk az ezeknek megfelelő x értéket, jelöljük azt x_i'-vel; ξ_i lesz a lemért és a kiszámított x közötti eltérés $\xi_i = x_i - x_i'$. Hasonlóképpen ha $x = x_i, z = z_i, \ldots$ mennyiségek vannak adva, meghatározhatjuk a lemért és kiszámított y értékek eltérését. $\eta_i = y_i - y_i'$ és így tovább kapjuk $\zeta_i = z_i - z_i', \ldots$.

A problémát rendesen úgy oldották meg, hogy választottak egy változót, például y-t és a paraméterek felett úgy rendelkeztek, hogy a fenn definiált η_i eltérések négyzetösszege legyen minimum. Az így meghatározott $a, b, \ldots$ értékek azonban önkényesek, ha más változót választottunk volna, más $a, b, \ldots$ értékeket kaptunk volna. Az eljárás nem egyértelmű.

Egyértelmű eljárás volna a következő: Kiindulva a paraméterek lehetőleg jól megközelítő értékeiből, kiszámítjuk a leírt módon a $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \ldots$ eltéréseket, minden i-re és a paraméterek felett úgy rendelkezünk, hogy $\Sigma r_i^2 = \Sigma(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 + \ldots)$ minimum legyen. Ez az eljárás eleget tesz a legkisebb négyzetek elve első követelményének t. i., hogy az eltérések *közvetlen mérési adatok* eltérései legyenek, nem pedig a mérési adatok valamely függvényének eltérései, amely utóbbi esetben az eljárás nem volna egyértelmű.

Ha adott P_i pontokat az n dimenziós térben egy ponttal kívánjuk megközelíteni, akkor a legkisebb négyzetek elve értelmében a pont koordinátái felett úgy rendelkezünk, hogy a P_i pontoknak a kérdéses ponttól való távolságaik négyzetösszege legyen minimum; ami teljesen megfelel a fenti előírásnak.

Ha azonban a pontokat valamely görbével vagy felülettel kívánjuk megközelíteni, akkor már nem tehetjük minimummá a pontoknak a görbétől vagy a felülettől való távolságaik négyzetösszegét, mert az már nem felelne meg a legkisebb négyzetek elvének; végeredményben mindig a Σr_i^2 mennyiséget kell minimummá tenni, ami a szokásos eljárástól eltérően, egyértelmű eredményre vezet.

Van azonban a gyakorlatban az előző eljárásnál egy nehézség: az $x, y, z, \dots$ változók rendesen különböző dimenziójúak, továbbá eltéréseik nem egyenlően valószínűek és ennélfogva az eltérések négyzeteinek összeadása értelmetlen volna.

E nehézségeken úgy segíthetünk, hogy kiszámítjuk az (1) képlettel a jelzett módon, $a_0, b_0, c_0, \dots$ megközelítő értékekből kiindulva a $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \dots$ eltéréseket minden i-re.

Amennyiben az (1) egyenlet megoldása valamelyik változóra nehézségekbe ütközik, akkor, például ha az x változóról van szó, írjuk az egyenletet $F(x) = F(x_i - \xi_i) = 0$-nak és határozzuk meg az egyenlet legkisebb $|\xi_i|$ gyökének megközelítő értékét. Fejtsük sorba az $F(x_i - \xi_i)$ függvényt ξ_i hatványai szerint és hanyagoljuk el ξ_i egynél magasabb hatványait.

$$F(x_i - \xi_i) = F(x_i) - \xi_i \frac{dF}{dx_i} + \dots = 0,$$

ennélfogva a megközelítő érték

$$\xi_i' = F(x_i) \Big/ \frac{dF}{dx_i}. \qquad (2)$$

Ha ξ_i' kicsiny, elfogadhatjuk azt ξ_i értéke gyanánt, de ha nagy, akkor egy k értéket úgy választunk meg, hogy $F(x_i)F(x_i + k) < 0$ legyen; azután $F(x_i)$ és $F(x_i + k)$ között interpolálva meghatározzuk a kívánt pontossággal ξ_i értékét.

Ha az eltéréseket minden i-re kiszámítottuk, meghatározzuk a változók négyzetes eltéréseit; miután N az észlelések száma, tehát:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma \xi_i^2}{N}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma \eta_i^2}{N}}, \quad \sigma_z = \sqrt{\frac{\Sigma \zeta_i^2}{N}}, \dots$$

Ha e mennyiségeket választjuk a változók egységeül, vagy azoknak egy konstans ω-val való szorzatát, ami az alábbi új változók bevezetésének felel meg;

$$x^{(1)} = \frac{x}{\omega \sigma_x}, \quad y^{(1)} = \frac{y}{\omega \sigma_y}, \quad z^{(1)} = \frac{z}{\omega \sigma_z}, \dots,$$

akkor az új változók mindegyikének négyzetes eltérése $1/\omega$ lesz; tehát $x^{(1)} < K$, $y^{(1)} < K$, $z^{(1)} < K$ mindenesetre egyenlően valószínűk lesznek, továbbá dimenziójuk nulla lesz, ennélfogva összeadhatók lesznek. Az ω állandót csak a számítások könnyebb keresztülvitele szempontjából vezetjük be.

$$S_1 = \Sigma r_{1i}^2 = \Sigma[\xi_{1i}^2 + \eta_{1i}^2 + \zeta_{1i}^2 + \dots] = \frac{nN}{\omega^2}, \qquad (3)$$

ahol $\xi_{1i} = \xi_i/\omega\sigma_x$, $\eta_{1i} = \eta_i/\omega\sigma_y, \dots$; ω értékét úgy választjuk meg, hogy S_1 ne legyen túl nagy szám.

Természetesen az új változók bevezetése révén az (1) formula állandóinak értéke, dimenzióiknak megfelelően megváltozik. Ezeket is meg kell határozni. Legyenek az új állandók $a_1, b_1, \ldots$; írjuk az (S) egyenletben a_1 helyébe $a_2 = a_1 + h_1$, b_1 helyébe $b_2 = b_1 + h_2$ és így tovább és rendelkezzünk $h_1, h_2, \ldots$ felett úgy, hogy S_1 minimum legyen. Ha m a paraméterek száma, akkor az azokat meghatározó normálegyenletek lesznek $\nu = 1, 2, \ldots, m$-re

$$\frac{dS_i}{dh_\nu} = 2\Sigma[\xi_{1i}\frac{d\xi_{1i}}{dh_\nu} + \eta_{1i}\frac{d\eta_{1i}}{dh_\nu} + \ldots] = 0. \tag{4}$$

Ha mint rendesen a $\xi_{1i}, \eta_{1i}, \ldots$ eltérések nem lineáris függvényei a h_ν mennyiségeknek, akkor az eltéréseket sorba kell bontani $h_1, h_2, \ldots$ hatványai szerint, elhanyagolva h_ν egynél magasabb hatványait

$$\xi_{1i}(h_1, h_2, \ldots) = (\xi_{1i})_0 + h_1\left(\frac{d\xi_{1i}}{dh_1}\right)_0 + h_2\left(\frac{d\eta_{1i}}{dh_2}\right)_0 + \ldots. \tag{5}$$

Ha megtudjuk oldani az (1) egyenletet a változókra, akkor a deriváltakat egyszerűen kiszámíthatjuk. Ha ellenben valamelyik változóra, például x_i-re nem tudjuk megoldani, akkor ξ_i deriváltjait az

$$F(x_{1i} - \xi_{1i}, y_{1i}, z_{1i}, \ldots, a_1 + h_1, b_1 + h_2, \ldots) = 0 \tag{6}$$

implicit egyenletből kell meghatározni

$$\frac{d\xi_{1i}}{dh_1} = -\frac{dF}{da_1}\Big/\frac{dF}{d\xi_{1i}},\quad \frac{d\xi_{1i}}{dh_2} = -\frac{dF}{db_1}\Big/\frac{dF}{d\xi_{1i}}, \ldots.$$

Ha az (5) mennyiséget minden változó esetén behelyettesítjük a (4) egyenletbe, akkor tekintetbe véve, hogy $(\xi_{1i})_0 = \xi_{1i}$,

$$\left(\frac{d\xi_{1i}}{dh_1}\right)_0 = \frac{d\xi_{1i}}{da_1},\quad \left(\frac{d\xi_{1i}}{dh_2}\right)_0 = \frac{d\xi_{1i}}{db_1}, \ldots$$

a következő eredményre jutunk:

$$\frac{dS_1}{dh_1} = \Sigma\left[\xi_{1i} + h_1\frac{d\xi_{1i}}{da_1} + h_2\frac{d\xi_{1i}}{db_1} + \ldots\right]\frac{d\xi_{1i}}{da_1} + \Sigma\left[\eta_{1i} + h_1\frac{d\eta_{1i}}{da_1} + \right.$$
$$\left. + h_2\frac{d\eta_{1i}}{db_1} + \ldots\right]\frac{d\eta_{1i}}{da_1} + \ldots.$$

Rendezzük ez egyenletet $h_1, h_2, h_3, \ldots$ szerint:

$$\frac{dS_1}{dh_1} = \Sigma\left[\xi_{1i}\frac{d\xi_{1i}}{da_1} + \eta_{1i}\frac{d\eta_{1i}}{da_1} + \ldots\right] + h_1\Sigma\left[\left(\frac{d\xi_{1i}}{da_1}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_{1i}}{da_1}\right)^2 + \ldots\right] +$$
$$+ h_2\Sigma\left[\frac{d\xi_{1i}}{da_1}\cdot\frac{d\xi_{1i}}{db_1} + \frac{d\eta_{1i}}{da_1}\cdot\frac{d\eta_{1i}}{db_1} + \ldots\right] + \ldots. \tag{7}$$

Jelöljük h_1 koefficiensét a ν-edik egyenletben $a_{1\nu}$-vel, h_2 koefficiensét $a_{2\nu}$-vel és így tovább, a konstans tagot $-\lambda_\nu$-vel, akkor az m normál egyenlet a következő lesz:

$$
\begin{aligned}
a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + a_{13}h_3 + \cdots + a_{1m}h_m &= \lambda_1 \\
a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + a_{23}h_3 + \cdots + a_{2m}h_m &= \lambda_2 \\
a_{31}h_1 + a_{32}h_2 + a_{33}h_3 + \cdots + a_{3m}h_m &= \lambda_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}h_1 + a_{m2}h_2 + a_{m3}h_3 + \cdots + a_{mm}h_m &= \lambda_m
\end{aligned}
\tag{8}
$$

a normál egyenleteket a szokásos módon oldjuk meg.

Ha a változók száma n és a paramétereké m, akkor a kiszámítandó $\Sigma \frac{h\xi_i}{dh_\nu} \cdot \frac{h\xi_i}{hh_\mu}$ összegek száma $\frac{1}{2}nm(m+3)$; tehát ha a paraméterek száma nagyobb mint három, az már tekintélyes munkát jelent.

A $h_1, h_2, \ldots$ értékek kiszámítása után meg kell győződni arról, hogy elég kicsinyek-e ahhoz, hogy második hatványukat elhanyagolhassuk, ha nem volnának, akkor más megközelítő értékekből kellene kiindulni.

A számítás harmadik részét a nyert $a_2 = a_1 + h_1$ és $b_2 = b_1 + h_2 \ldots$ állandóknak megfelelő $\xi_{2i}, \eta_{2i}, \ldots$ eltérések kiszámítása képezi, ami az (1) egyenlet segélyével, a tárgyalt módon történik. Végül ki kell számítani az új eltérések négyzet összegét:

$$S_2 = \Sigma[\xi_{2i}^2 + \eta_{2i}^2 + \zeta_{2i}^2 + \cdots].$$

Ha ez kisebb, mint S_1, akkor az eljárás igazolva van. De ha az új négyzetes eltérések még túl nagyok, akkor meg lehet ismételni a számítás második részét az $a_2, b_2, \ldots$ állandókból kiindulva.

Ha ellenben $S_2 > S_1$, akkor az egész számítást újra kell kezdeni, kedvezőbb $a_0, b_0, \ldots$ kezdő érték.

Ha S_2 elfogadható, akkor még vissza kell térni az $x_1, y_1, \ldots$ változókról az eredeti $x, y, \ldots$ változókra, továbbá a nyert négyzetes eltéréseket, valamint a paramétereket is át kell számítani, ez utóbbi váltózóknak megfelelően.

Az (1) formula e transzformációk révén nem változik meg, minthogy lényegében csak a változók egységeit változtatjuk meg.

II.

Alkalmazzuk az előző eljárást *Van der Waals* formulájában szereplő a és b állandók meghatározására. Ez az egyenlet a következő:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT, \tag{9}$$

ahol v a gáz köbtartalma, p nyomása és T abszolút hőmérséklete. Válasszuk az egységeket a következő módon: Legyen v egysége a gáz köbtartalma 0° C és egy atmoszféra légnyomás mellett; továbbá p a nyomás atmoszférákban; T az abszolút hőmérséklet Celsius fokokban. R pedig egy univerzális állandó, mely minden gázra ugyanaz, de amely természetesen függ a választott egységektől. Miután tökéletes gázoknál $vp/T = R$, tehát a fenti egységeknél: $R = 1.1/273 = 0{,}003662$.

Az a állandó dimenziója $v^2 p$; a/v^2 a molekulák vonzása révén létrejövő nyomás csökkenés, amely tehát csökken v növekedésével. A b állandó pedig a molekulák által elfoglalt köbtartalom az abszolút nulla fokon. Az a és b állandók a gáz összetételétől függnek. Minden gáznál az észlelések alapján külön kell meghatározni azokat az a és b értékeket, amelyeknél a (9) egyenlet legjobban közelíti meg az észlelési adatokat, a legkisebb négyzetek elve szerint.

Ha ismeretesek az észlelési adatok v_i, p_i, T_i-re $i = 1, 2, \ldots, N$ esetén, akkor ez a legjobb eljárás és mégis ritkán alkalmazták, és akkor sem kifogástalanul; ugyanis leggyakrabban megoldották az egyenletet a p változóra és úgy rendelkeztek a és b felett, hogy az észlelt és kiszámított p értékek közötti eltérések négyzetösszege minimum legyen. Láttuk, hogy ez az eljárás önkényes.

A számítás végrehajtására nem sok adat áll rendelkezésre. A legjobbak közé tartoznak *Thomas Andrews*, a szénsavra vonatkozó adatai.[1] Ez adatokat már *Van der Waals* is felhasználta, továbbá *Jellinek* is.[2]

Induljunk ki *Andrews* alábbi adataiból.

v	p	t
0,07921	12,01	6,89
5371	17,69	6,45
3462	24,81	6,73
2224	34,49	6,02
6671	17,60	63,86
3560	31,39	63,83
1871	54,33	63,57
1083	81,11	63,75
7628	17,42	100,39
4158	31,06	100,64
2277	53,81	100,34
1000	105,69	100,37

Ahol a választott egységek azonosak az előzőkkel. $T = t + 273$.

A számítás első részét a v, p, T változók négyzetes eltéréseinek kiszámítása és új, egyenlően valószínű változók bevezetése képezi. Mindenekelőtt ki kell indulni az a, b állandóknak lehetőleg jól megközelítő értékeiből. Előzetes számítások révén válasszuk azokat a következőkép: $a_0 = 0{,}008589$ és $b_0 = 0{,}00282$. Azután ezekből, valamint az észlelt v_i, p_i, T_i adatokból kiindulva megkapjuk a (1) és (11) képletekkel kiszámított η_i és ζ_i értékeket.

$$\eta_i = p_i - \frac{R T_i}{v_i - b_0} + \frac{a_0}{v_i^2} \tag{10}$$

$$\zeta_i = T_i - \left(p_i + \frac{a_0}{v_i^2}\right) \frac{v_i - b_0}{R}. \tag{11}$$

ξ_i megközelítő értékét legcélszerűbb kiszámítani a (2) egyenlettel, innen:

$$\xi_i = \left[p_i + \left(\frac{a_0}{v_i^2}\right)(v_i - b_0) - RT_i\right] \Big/ \left[p_i - \frac{a_0}{v_i^2}\left(\frac{v_i - 2b_0}{v_i}\right)\right].$$

Ha a ξ_i, η_i, ζ_i értékeket minden i-re kiszámítottuk, akkor meghatározhatjuk a megfelelő négyzetes eltéréseket. Az eredmény a példa esetén $\sigma_v = 0{,}0007394$, $\sigma_p = 0{,}7767$ és $\sigma_T = 4{,}48560$. Ezek után bevezetjük az új változókat $x_1 = v/\omega\sigma_v$, $y_1 = p/\omega\sigma_p$ és $z_1 = T/\omega\sigma_T$; ekkor az új eltérések $\xi_{1i} = \xi_i/\omega\sigma_v$, $\eta_{1i} = \eta_i/\omega\sigma_p$ és $\zeta_{1i} = \zeta_i/\omega\sigma_T$.

Az új változók bevezetése következtében az R, a és b állandók is megváltoznak. Legyen $\omega = 10$, akkor

$$R_1 = \frac{\sigma_T}{\omega\sigma_v\sigma_p} R \quad 2{,}86027 \quad \text{és} \quad b_1 = \frac{b'}{\omega\sigma_v} = 0{,}38129$$

$$a_1 = a_0/\omega^3\sigma_v^2\sigma_p = 20{,}2270.$$

Ellenőrzésül kiszámíthatjuk az x_1, y_1, z_1 változók négyzetes eltéréseit, mindegyikre $1/\omega = 0{,}1$-et kell kapni. Miután az észlelések száma 12, tehát az eltérések négyzetösszege lesz

$$S = \Sigma\xi_{1i}^2 + \Sigma\Sigma\eta_{1i}^2 + \Sigma\zeta_{1i}^2 = 0{,}36.$$

A számítás második része az a_1 és b_1 állandók legvalószínűbb értékeinek kiszámítása; illetve a megfelelő h_1 és k_1 korrekciók meghatározása a legkisebb négyzetek elve szerint. Erre ismernünk kell a ξ, η és ζ eltérések deriváltjait az a és b paraméterek szerint. η és ζ esetén azokat a (10) és (11) egyenletek értelmében az alábbi egyenletek adják:

$$\frac{d\eta_{1i}}{da_1} = \frac{1}{x_i^2} \qquad \frac{d\eta_{1i}}{db_1} = -\frac{Rz_i}{(x_i - b_1)^2}$$

$$\frac{d\zeta_{1i}}{da_1} = -\frac{x_i - b_1}{R_1 x_i^2} \qquad \frac{d\zeta_{1i}}{db_1} = \left(y_i + \frac{a_1}{x_i^2}\right)/R_1$$

ξ_{1i} deriváltjait az

$$f(x, a_1, b_1) = \left(y + \frac{a_1}{x^2}\right)(x - b_1) - R_1 z = 0$$

implicit függvény adja

$$\frac{d\xi_{1i}}{da_1} = (x_i - b_1)\Big/x_i^2\left[y - \frac{a_1}{x^2}(x - 2b_1)\right]$$

$$\frac{d\xi_{1i}}{db_1} = -\left(y_i + \frac{a_1}{x_i^2}\right)\Big/\left[y_i + \frac{a_1}{x_i^2}\left(\frac{x_i - 2b_1}{x_i}\right)\right].$$

Ezeket is minden i-re ki kell számítani. Továbbá a normál egyenletekben szereplő következő összegeket is: $\Sigma\left(\frac{d\xi_{1i}}{da_1}\right)^2$, $\Sigma\left(\frac{d\xi_{1i}}{db_1}\right)^2$, $\Sigma\left[\frac{d\xi_{1i}}{da_1}\cdot\frac{d\xi_{1i}}{db_1}\right]$, $\Sigma\xi_{1i}\cdot\frac{d\xi_{1i}}{da_1}$, $\Sigma\xi_{1i}\cdot\frac{d\xi_{1i}}{db_1}$; ezenkívül a megfelelő öt összeget η_{1i}-re, valamint

ζ_{1i}-re is. Végül

$$\alpha_{11}=\Sigma\left(\frac{d\xi_{1i}}{da_1}\right)^2+\Sigma\left(\frac{d\eta_{1i}}{da_1}\right)^2+\Sigma\left(\frac{d\zeta_{1i}}{da_1}\right)^2=0{,}74052$$

$$\alpha_{22}=\Sigma\left(\frac{d\xi_{1i}}{db_1}\right)^2+\Sigma\left(\frac{d\eta_{1i}}{db_1}\right)^2+\Sigma\left(\frac{d\zeta_{1i}}{db_1}\right)^2=1173{,}356$$

$$\alpha_{12}=\Sigma\frac{d\xi_{1i}}{da_1}\cdot\frac{d\xi_{1i}}{db_1}+\Sigma\frac{d\eta_{1i}}{da_1}\cdot\frac{d\eta_{1i}}{db_1}+\Sigma\frac{d\zeta_{1i}}{da_1}\cdot\frac{d\zeta_{1i}}{db_1}=19{,}2794$$

$$\lambda_1=-\left[\Sigma\xi_{1i}\cdot\frac{d\xi_{1i}}{da_1}+\Sigma\eta_{1i}\cdot\frac{d\eta_{1i}}{da_1}+\Sigma\zeta_{1i}\cdot\frac{d\zeta_{1i}}{da_1}\right]=-0{,}2111$$

$$\lambda_2=-\left[\Sigma\xi_{1i}\cdot\frac{d\xi_{1i}}{db_1}+\Sigma\eta_{1i}\cdot\frac{d\eta_{1i}}{db_1}+\Sigma\zeta_{1i}\cdot\frac{d\zeta_{1i}}{db_1}\right]=-5{,}89898$$

h_1 és h_2 értékeit az

$$\alpha_{11}h_1+\alpha_{12}h_2=\lambda_1 \quad \text{és} \quad \alpha_{12}h_1+\alpha_{22}h_2=\lambda_2$$

normál egyenletek adják. Miután

$$\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2=497{,}1933 \qquad \lambda_1\alpha_{22}-\lambda_2\alpha_{12}=-172{,}602$$

$$\alpha_{11}\lambda_2-\alpha_{12}\lambda_1=1{,}1828.$$

Ennélfogva: $h_1=-0{,}34715$ $h_2=0{,}002379$, úgyhogy

$$a_2=a_1+h_1=19{,}8798 \quad b_2=b_1+h_2=0{,}38347.$$

A számítás harmadik része az a_2, b_2 állandóknak megfelelő ξ_{2i}, η_{2i}, ζ_{2i} eltérések és azok négyzetösszegeinek, továbbá a megfelelő négyzetes eltérések kiszámításából áll. Az eredmény

$$\Sigma\xi_{2i}^2=0{,}10637 \quad \Sigma\eta_{2i}^2=0{,}11599 \quad \Sigma\zeta_i^2=0{,}11980.$$

Következőleg $S_2=0{,}34216$, tehát $S_2<S_1$, úgy hogy az a_2 és b_2 állandók értéke elfogadható. Az azoknak megfelelő négyzetes eltérések

$$\sigma_{2x}=0{,}09411 \quad \sigma_{2y}=0{,}09832 \quad \sigma_{2z}=0{,}09991.$$

Végül vissza kell térni az x, y, z változókról a v, p és T változókra. Miután az előzők értelmében

$$v=x\cdot\omega\sigma_v \qquad p=y\cdot\omega\sigma_p \qquad T=z\cdot\omega\sigma_T.$$

Következőleg $\xi=\xi_2\omega\sigma_v$, $\eta=\eta_2\omega\sigma_p$ és $\zeta=\zeta_2\omega\sigma_T$, továbbá az a_2, b_2 állandóknak megfelelő négyzetes eltérések

$$\sigma_{2v}=\sigma_{2x}\,\omega\sigma_v=0{,}00070, \quad \sigma_{2p}=\sigma_{2y}\,\omega\sigma_p=0{,}76365$$

$$\sigma_{2T}=\sigma_{2z}\,\omega\sigma_T=4{,}58147, \quad a=a_2\omega^3\sigma_v^2\sigma_p=0{,}008442$$

$$b=b_2\,\omega\sigma_v=0{,}002835, \quad R=0{,}003662.$$

Összegezve az eredményeket, megállapíthatjuk, hogy *Van der Waals* formulájának, fenti, a hőmérséklettől független állandói, ugyanolyan pontosságot adnak, mint a *Jellinek* által minden izotermára külön kiszámított állandók. A valószínű hiba a legkedvezőtlenebb esetben is kisebb, mint 5 százalék.

Az S_1 és S_2 közötti csekély különbségből következik, hogy a formulával jobb megközelítés nem várható. Megjegyzendő azonban, hogy a formula a *kritikus pontra* nem érvényes, ugyanis például szénsav esetén a kritikus nyomás $p_0 = 79{,}9$ atm., a kritikus hőmérséklet $T_0 = 303{,}98$, ami a_2 és b_2 fenti értékeivel $v_0 = 0{,}00849$ kritikus köbtartalmat ad (a definiált egységekben), holott a kísérleti eredmények a következők voltak: *Andrews* $v_0 = 0{,}0066$; *Cailletet* $v_0 = 0{,}00428$, *Amagat* $v_0 = 0{,}00423$; *Dorsman* (Diss. Amsterdam 1908) $v_0 = 0{,}00438$.

Eljárásunknál az a cél vezetett, hogy a formula lehető legjobban közelítse meg az észlelési adatokat, tekintet nélkül minden más körülményre, például *Van der Waals* formulájánál a gázok kritikus állandóira, energia mennyiségekre stb. Ezek nem tartoznak a probléma keretébe.[3]

IRODALOM

[1] Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Volume 166.

[2] Physikalische Chemie, Band I.

[3] *Van der Waals* egyenlete esetén a fenti szempontokat „Sur l'équation d'état de *Van der Waals*" című értekezésben tárgyaltam.

A RENDEZETT MINTÁK ELMÉLETÉRŐL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Bevezetés

A matematikai statisztikában egyre nagyobb jelentőségre tesz szert a rendezett minták elmélete. A rendezett minták elméletének jelentőségét az adja meg, hogy eredményei bármely (folytonos) eloszlású statisztikai sokaságra alkalmazhatók; módszerei tehát ú. n. „nem-paraméteres" módszerek, amelyeknek alkalmazási köre sokkal tágabb, mint a „paraméteres" módszereké, amelyek csak bizonyos megadott típusú eloszlások esetében alkalmazhatók. A módszer másik fő előnye a gyakorlati alkalmazások szempontjából, — különösen a minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszereit illetőleg — abban rejlik, hogy sokkal kevesebb számolást igényel, mint más ismert statisztikai módszerek.

A század eleje óta többen, így *K. Pearson* [1], *L. v. Bortkiewicz* [2], *E. L. Dodd* [3], *L. H. C. Tippet* [4] és *M. Fréchet* [5] foglalkoztak olyan részletkérdésekkel, amelyek a rendezett minták elmélete körébe sorolhatók, azonban szovjet matematikusok, *A. N. Kolmogorov* [6], *V. I. Glivenko* [7], *N. V. Szmirnov* [8], *B. V. Gnyegyenko* [9] és tanítványaik voltak azok, akik, felismerve a problémakör nagy elméleti és gyakorlati jelentőségét, azt összefüggő elméletté fejlesztették.

Különösen az elmult három évben számos cikk foglalkozott ezzel a problémakörrel; ezek közül kiemeljük *B. V. Gnyegyenko* és *V. S. Koroljuk* [10], *B. V. Gnyegyenko* és *E. L. Rvacseva* [11], *B. V. Gnyegyenko* és *V. S. Mihalevics* [12], *V. S. Mihalevics* [13], *J. D. Kvit* [14], *G. M. Mania* [15] és *I. I. Gihman* [16] munkáit. Eredményeik továbbfejlesztésébe számos más matematikus is bekapcsolódott: kiemeljük ezek közül *W. Feller* [17], *J. L. Doob* [18], *F. J. Massey* [19], *M. D. Donsker* [20], *T. W. Anderson* és *D. A. Darling* [21] munkáit. A problémakör 1947-ig terjedőleg viszonylag teljes bibliográfiája megtalálható *S. S. Wilks* [30] tanulmányában, amely 90 dolgozat felsorolását tartalmazza.

Jelen dolgozat célja egy új módszer bemutatása, amelynek segítségével a rendezett minták elméletének ma már klasszikus eredményei meglepő egyszerűséggel nyerhetők és amely lehetővé teszi számos új tétel bebizonyítását is. A módszer lényege abban áll, hogy a rendezett mintákra vonatkozó problémákat független valószínűségi változók összegeinek vizsgálatára vezeti vissza. Az 1. § tartalmazza a módszer ismertetését, a 2. § néhány ismert tétel egyszerű bizonyítását az új módszer segítségével; a 3. § a módszerrel elérhető új eredmények megfogalmazását tartalmazza az empirikus és elméleti eloszlásfüggvény összehasonlítására vonatkozólag, amelyek *A. N. Kolmogorov* és *N. V. Szmirnov* alapvető eredményeihez csatlakoznak. Jelentse $F_n(x)$ egy $F(x)$ folytonos eloszlású statisztikai sokaságból vett n elemű minta (empirikus) eloszlásfüggvényét (vagyis $F_n(x)$ az x-nél kisebb elemek relatív gyakoriságát jelenti a mintában); *Kolmogorov* meghatározta $|F_n(x)-F(x)|$ felső határának, *Szmirnov* pedig az $(F_n(x)-F(x))$ felső határának határeloszlását; a 4. §-ban az $\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}$, ill. $\left|\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}\right|$ viszonylagos eltérések felső határának határeloszlását határozzuk meg. Ehhez módszerünkön kívül a 4. §-ban közölt segédtételekre van szükség, amelyek *Erdős Pál* és *M. Kac* [22] eredményeit általánosítják. Ezek a segédtételek önmagukban is érdekességgel bírnak. Az 5. § a 3. §-ban megfogalmazott eredmények bizonyítását, a 6. § pedig a tételeinkben szereplő határeloszlásfüggvények numerikus kiszámítására vonatkozó megjegyzéseket és ezek kiszámítását szolgáló táblázatokat tartalmaz. Az 1. §-ban ismertetett módszerre *S. Malmquist* [23] egy tételének elemzése útján jutottam; az 1. § tartalmazza többek között *Malmquist* tételének egy új és egyszerű bizonyítását is. Egy másik egyszerű bizonyítást ugyanerre a tételre *Hajós Györggyel* együtt találtunk és egy közös dolgozatunkban [24] közöljük. Mindezek a vizsgálatok az Alkalmazott Matematikai Intézet Valószínűségszámítási és Matematikai Statisztikai Osztályainak közös szemináriumában folytatott megbeszélésekből indultak ki. A dolgozatban foglalt eredmények egy részét előadtam 1952 szeptemberében Krakowban és Wroclawban, továbbá 1953 januárjában a berlini Humboldt-egyetem kongresszusán*, valamint 1953 szeptemberében Varsóban a VIII. Lengyel Matematikai Kongresszuson. Ez utóbbi alkalommal *A. N. Kolmogorov* akadémikus néhány igen értékes megjegyzést tett, melyekért ezúton mondok neki köszönetet. Az Intézet munkatársai közül köszönettel tartozom *Lipták Tamás*nak, aki néhány részletszámítás kidolgozásával, továbbá *Palásti Ilonán*ak és *Várnai Péterné*nek, akik a numerikus számítások elvégzésével vettek részt a dolgozat elkészítésében.

1. §. Egy új módszer a rendezett minták elméletében

Kiindulunk a következő speciális esetből: legyen adva egy exponenciális eloszlású ζ valószínűségi változó értékére vonatkozó n-elemű minta, vagyis n független megfigyelés eredménye, amelyeket jelöljenek $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$; másszóval $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ független és ugyanazon exponenciális eloszlásfüggvénnyel bíró valószínűségi változók ($n=1, 2, 3, \ldots$). Szükségünk lesz az exponenciális

* Ez az előadás a kongresszus közleményeiben „Eine neue Methode in der Theorie der geordneten Stichproben" címen jelenik meg.

eloszlás következő jólismert tulajdonságára: ha ζ exponenciális eloszlású, úgy

$$P(\zeta < x+y \mid \zeta \geqq y) = P(\zeta < x) \tag{1.1}$$

(ha $x > 0$ és $y \geqq 0$)*.

Ez a tulajdonság egyébként egyértelműen jellemzi az exponenciális eloszlást. Legyen ugyanis ζ eloszlásfüggvénye $F(x)$, úgy

$$P(\zeta < x+y \mid \zeta \geqq y) = \frac{F(x+y)-F(y)}{1-F(y)},$$

tehát (1. 1) ekvivalens a következő relációval:

$$\Phi(x+y) = \Phi(x)\,\Phi(y), \tag{1.2}$$

ahol $\Phi(x) = 1-F(x)$; márpedig ismeretes, hogy a $0 \leqq \Phi(x) \leqq 1$ feltételnek eleget tevő függvények közül a $\Phi(x) \equiv 0$ és $\Phi(x) \equiv 1$ triviális esetektől eltekintve a $\Phi(x) = e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0)$ függvényekre és csak ezekre áll fenn az (1. 2) függvényegyenlet.

Különösen szemléletessé válik (1. 1) jelentése, ha a ζ valószínűségi változót mint egy véletlentől függő időtartamú esemény időtartamát interpretáljuk. Ezen interpretáció mellett az (1. 1) állítás úgy fogalmazható meg, hogy egy exponenciális eloszlású időtartamú esemény esetében, amely egy y időpontban még folyamatban van, az, hogy még meddig fog folyni, független y-tól, vagyis attól, hogy mióta folyik.

Ha a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ számokat nagyság szerint elrendezzük és bevezetjük a

$$\zeta_k^* = R_k(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \quad (1 \leqq k \leqq n) \tag{1.3}$$

jelölést, ahol az $R_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-változós függvény az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok közül a nagyság szerint k-adikat jelenti ($k = 1, 2, \ldots, n$), tehát például $\zeta_1^* = \min\limits_{1 \leqq k \leqq n} \zeta_k$ és $\zeta_n^* = \max\limits_{1 \leqq k \leqq n} \zeta_k$, úgy a $\zeta_1^* \leqq \zeta_2^* \leqq \ldots \leqq \zeta_n^*$ *rendezett minta* elemeinek eloszlása és együttes eloszlása igen egyszerűen meghatározható. Ebből a célból interpretáljuk a ζ_k változókat mint egymástól független események időtartamait; akkor ζ_k^* annak az eseménynek az időtartamát jelenti, amelyik k-adikként ér véget.

Számítsuk ki mindenekelőtt a $\zeta_{k+1}^* - \zeta_k^*$ különbségek eloszlásait. Ha $\zeta_k^* = y$, úgy

$$P(\zeta_{k+1}^* - \zeta_k^* > x \mid \zeta_k^* = y) = P(\zeta_{k+1}^* > x+y \mid \zeta_k^* = y) \tag{1.4}$$

és az (1. 4) jobboldalán annak valószínűsége áll, hogy az y időpontban még folyamatban lévő $n-k$ esemény közül egyik sem ér véget $x+y$ időpontig; ennek értéke viszont (1. 1) szerint

$$[P(\zeta > x)]^{n-k} = e^{(n-k)\lambda x}$$

és így $\zeta_{k+1}^* - \zeta_k^*$ feltételes eloszlásfüggvénye $\zeta_k^* = y$ feltétel mellett

$$P(\zeta_{k+1}^* - \zeta_k^* < x \mid \zeta_k^* = y) = 1 - e^{(n-k)\lambda x}. \tag{1.5}$$

* $P(A)$ az A esemény valószínűségét. $P(A \mid B)$ az A eseménynek a B feltételre vonatkozó feltételes valószínűségét jelöli.

Mivel az (1.5) alatti eloszlás nem függ y-tól, (1.5) egyben megadja $\zeta_{k+1}^*-\zeta_k^*$ feltétel nélküli eloszlásfüggvényét is; ugyanis a teljes valószínűség tétele szerint

$$P(\zeta_{k+1}^*-\zeta_k^*<x)=\int_0^\infty P(\zeta_{k+1}^*-\zeta_k^*<x\,|\,\zeta_k^*=y)\,dG_k(y)=1-e^{-(n-k)\lambda x}, \quad (1.6)$$

ahol $G_k(y)$-nal jelöltük ζ_k^* eloszlásfüggvényét. Tehát a $\zeta_{k+1}^*-\zeta_k^*$ különbségek maguk is exponenciális eloszlásúak $\frac{1}{(n-k)\lambda}$ várható értékkel és így a

$$\delta_{k+1}=(n-k)(\zeta_{k+1}^*-\zeta_k^*) \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1) \qquad (1.7)$$

változók mind $\frac{1}{\lambda}$ várható értékű exponenciális eloszlással rendelkeznek. ((1.7)-ben definíciószerűen $\zeta_0^*\equiv 0$).

Az elmondottakból az is következik, hogy a $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ változók összességükben függetlenek. Ugyanis egyszerűen belátható, hogy a

$$P(\zeta_{k+1}^*-\zeta_k^*<x\,|\,\zeta_1^*=y_1,\zeta_2^*-\zeta_1^*=y_2,\ldots,\zeta_k^*-\zeta_{k-1}^*=y_k);(k=1,2,\ldots,n-1) \quad (1.8)$$

valószínűség nem függ az $y_1,y_2,\ldots,y_k$ változóktól; ez nyilvánvaló, hiszen a feltételek azt jelentik, hogy $\zeta_1^*=y_1,\zeta_2^*=y_1+y_2,\ldots,\zeta_k^*=y_1+y_2+\cdots+y_k$, vagyis megadják, hogy a $t=0$ időpontban egyidejűleg kezdődő n esemény közül elsőnek befejeződő k esemény mely időpontokban fejeződött be; a feltételek azt jelentik, hogy a $t=y_1+y_2+\cdots+y_k$ időpontban még $n-k$ esemény van folyamatban, és annak a valószínűsége, hogy ezek közül legalább egy véget ér $t+x$ időpont előtt, $1-e^{(n-k)\lambda x}$. Így tehát az (1.8) baloldalán álló valószínűség $1-e^{-(n-k)\lambda x}$-szel egyenlő, vagyis nem függ az $y_1,y_2,\ldots,y_n$ változóktól és ez equivalens azzal, hogy a $\zeta_{k+1}^*-\zeta_k^*$ változók és így a δ_k változók is ($k=1,2,\ldots,n$) összességükben függetlenek. Ilyen módon tehát a ζ_k^* változók előállíthatók

$$\zeta_k^*=\frac{\delta_1}{n}+\frac{\delta_2}{n-1}+\cdots+\frac{\delta_k}{n-k+1}, \qquad k=1,2,\ldots,n \qquad (1.9)$$

alakban független és egyforma eloszlású változókból képezett lineáris kifejezések formájában. (1.9) úgy is kifejezhető, hogy *a ζ_k^* változók Markov-láncot (mégpedig ú. n. additív láncot) alkotnak.* (1.9) segítségével ζ_k^* eloszlása, ill. a ζ_k^* változók közül tetszőleges számú változó együttes eloszlása explicit alakban meghatározható.

Nézzük most meg, hogy az elmondottak hogyan alkalmazhatók általában rendezett minták vizsgálatára. Legyen ξ egy tetszőleges, folytonos és monoton *növekvő** $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó, legyen $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ a ξ változó értékére vonatkozó független megfigyelésekből álló n-elemű minta, vagyis legyenek $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ összességükben független és ugyanazon

* Azon, hogy $F(x)$ monoton növekvő, azt értjük, hogy szigorúan növekvő abban a legkisebb (a,b) intervallumban, melyre $F(a)=0$ és $F(b)=1$, ahol $a=-\infty$ és $b=+\infty$ is lehet.

(folytonos) $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók. Rendezzük el a ξ_k mintaelemeket nagyság szerint, vagyis képezzük a $\xi_k^* = R_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ új változókat $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

A rendstatisztika feladata a ξ_k^* változók vizsgálatában áll; ez azonban visszavezethető arra a speciális esetre, amikor a ζ_k változók exponenciális eloszlásúak (és így — az (1.9) képlet szerint — független valószínűségi változók összegeinek vizsgálatára), mégpedig a következőképpen: legyen

$$\eta_k = F(\xi_k) \quad \text{és} \quad \zeta_k = \log \frac{1}{\eta_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.10}$$

jelentse $\eta_k^* = F(\xi_k^*)$ az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ változók közül a nagyság szerinti k-adikat, vagyis legyen $\eta_k^* = R_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, továbbá legyen

$$\zeta_k^* = \log \frac{1}{\eta_{n+1-k}^*}. \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.11}$$

Mivel $\log \frac{1}{x}$ monoton *csökkenő* függvény, tehát

$$\zeta_k^* = R_k(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.12}$$

vagyis ζ_k^* a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ változók közül a nagyság szerinti k-adik. Mivel a ξ_k változókról feltettük, hogy függetlenek, következik, hogy a ζ_k változók is függetlenek.

Vizsgáljuk most meg a ζ_k változók eloszlását. Ha $0 \leqq x \leqq 1$, úgy $y = F^{-1}(x)$-szel jelölve az $x = F(y)$ függvény inverz függvényét (amely — $F(x)$ szigorúan monoton növekvő lévén — a $0 \leqq x \leqq 1$ intervallumban egyértelműen definiálva van), nyerjük:

$$P(\zeta_k < x) = P\left(\log \frac{1}{F(\xi_k)} < x\right) = P(\xi_k > F^{-1}(e^{-x})) = 1 - F(F^{-1}(e^{-x})) = 1 - e^{-x},$$

ha $0 \leqq x \leqq 1$, tehát a $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ változók függetlenek és exponenciális eloszlással bírnak, mégpedig 1 várható értékkel. Ilyen módon maguk a ξ_k^* valószínűségi változók előállíthatók

$$\xi_k^* = F^{-1}(e^{-\zeta_{n+1-k}^*}) = F^{-1}\left(e^{-\left(\frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n-1} + \cdots + \frac{\delta_{n+1-k}}{k}\right)}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.13}$$

alakban, ahol $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ független és ugyanazon $1 - e^{-x}$ exponenciális eloszlásfüggvénnyel bíró valószínűségi változók. Eredményünkből az is következik, hogy az

$$\frac{\eta_k^*}{\eta_{k+1}^*} = e^{-\frac{\delta_{n+1-k}}{k}} \tag{1.14}$$

hányadosok függetlenek egymástól (itt definíciószerűen $\eta_{n+1}^* = 1$), tekintve, hogy a δ_{n+1-k}^* változók, mint láttuk, függetlenek. Egy másik következménye (1.13)-nak, hogy *a* $\xi_n^*, \xi_{n-1}^*, \ldots, \xi_1^*$ *változók Markov-láncot alkotnak*; ugyanis (1.13) szerint

$$\xi_{n-k}^* = F^{-1}\left[e^{-\log \frac{1}{F(\xi_{n-k+1}^*)} - \frac{\delta_{k+1}}{n-k}}\right], \tag{1.15}$$

továbbá ξ^*_{n-k+1} és δ_{k+1} függetlenek egymástól, tekintve, hogy

$$\xi^*_{n-k+1} = F^{-1}\left[e^{-\left(\frac{\delta_1}{n}+\frac{\delta_2}{n-1}+\cdots+\frac{\delta_k}{n-k+1}\right)}\right].$$

Arra a tényre, hogy a ξ^*_k változók ($k=1,2,\ldots,n$), vagyis egy rendezett minta elemei, Markov-láncot alkotnak, először *A. N. Kolmogorov* mutatott rá 1933-ban [6b] dolgozatában. A jelen dolgozatban foglalt új módszer ebből az alapvető megállapításból indul ki; ebben a tényben rejlő lehetőségek teljes kiaknázása azonban csak azáltal vált lehetségessé, hogy a $\zeta^*_k = \log\frac{1}{F(\xi^*_{n+k-1})}$ transzformáció segítségével a $\{\xi^*_k\}$ Markov-láncot additív lánccá alakítottuk át. Ezzel kapcsolatban érdekes megvizsgálni általában a következő kérdést: mely $\{\xi_t\}$ Markov-folyamatok esetében adható meg egy $G_t(x)$ függvénysereg úgy, hogy az $\eta_t = G_t(\xi_t)$ változók additív Markov-folyamatot alkossanak. Ehhez szükséges, hogy a $P(\xi_t < x \mid \xi_s = y) = F(x,s,y,t)$ eloszlásfüggvény eleget tegyen a

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right)$$

differenciálegyenletnek. A kérdésre más alkalommal vissza kívánunk térni.

Az η_k változók nyilvánvalóan egyenletes eloszlásúak a $(0,1)$ intervallumban, hiszen ha $0 < x < 1$, úgy

$$P(\eta_k < x) = P(\xi_k < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x \tag{1.16}$$

és így az $\eta^*_k = R_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ változók nem mások, mint egy, a $(0,1)$ intervallumban egyenletes eloszlású sokaságból vett n-elemű minta nagyság szerint elrendezett elemei.

(1.14)-ből következik, hogy

$$\left(\frac{\eta^*_k}{\eta^*_{k+1}}\right)^k = e^{-\delta_{n+1-k}}$$

és mivel $P(e^{-\delta_{n+1-k}} < x) = P\left(\delta_{n+1-k} < \log\frac{1}{x}\right) = e^{-\log\frac{1}{x}} = x$, tehát *az* $\left(\frac{\eta^*_k}{\eta^*_{k+1}}\right)^k$ *változók függetlenek és egyforma, mégpedig egyenletes eloszlásúak* a $(0,1)$ intervallumban. Ez *S. Malmquist* tétele, melyet a bevezetésben említettünk; ennek a tételnek egy elemi bizonyítása a [24] dolgozatban található; a fent adott bizonyítás még egy fokkal egyszerűbb.

2. §. *A rendezett minták elméletének felépítése az új módszerrel*

Az elmondottak alapján a rendezett minták elemeinek határeloszlására vonatkozó eredményekhez igen egyszerűen lehet eljutni. Hogy erről képet adjunk, bebizonyítjuk a következő tételeket:*

* Ebben a §-ban is az 1. §-ban bevezetett jelöléseket használjuk.

1. 1. tétel: Ha $k \geqq 1$ rögzített pozitív egész szám, úgy

$$\lim_{n\to\infty} P(n\zeta_k^* < x) = \int_0^x \frac{t^{k-1}e^{-t}}{(k-1)!}\,dt, \qquad (x>0),$$

vagyis $n\zeta_k^*$ határértékben k-adrendű Γ-eloszlással rendelkezik.

Bizonyítás: Mint láttuk,

$$\zeta_k^* = \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n-1} + \cdots + \frac{\delta_k}{n+1-k},$$

ahol $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $1-e^{-x}$ $(x \geq 0)$ eloszlásfüggvénnyel; tehát $\frac{\delta_j}{n+1-j}$ sűrűségfüggvénye

$$(n+1-j)e^{-(n+1-j)x} \qquad (x>0)$$

és így egyszerű számolással következik, hogy ζ_k^* sűrűségfüggvénye

$$g_k(t) = \binom{n}{k} k e^{-nt} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} e^{jt},$$

tehát $n\zeta_k^*$ sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{n} g_k\left(\frac{t}{n}\right) = \binom{n-1}{k-1} e^{-t}\left(1-e^{-\frac{t}{n}}\right)^{k-1} = \frac{\left[n\left(1-e^{-\frac{t}{n}}\right)\right]^{k-1} e^{-t} \prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)}{(k-1)!}. \qquad (2.1)$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-e^{-\frac{t}{n}}\right) = t,$$

tehát $n\zeta_k^*$ sűrűségfüggvénye, ha $n\to\infty$, konvergál a

$$\frac{t^{k-1}e^{-t}}{(k-1)!}$$

függvényhez, vagyis egy k-adrendű Γ-eloszlás sűrűségfüggvényéhez.

Az eredményt előre láthattuk volna a következő meggondolással:

$$n\zeta_k^* = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_k + \sum_{j=2}^{k} \frac{(j-1)\delta_j}{n+1-j}; \qquad (2.2)$$

azonban $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_k$ sűrűségfüggvénye $\frac{t^{k-1}e^{-t}}{(k-1)!}$, a $\sum_{j=2}^{k} \frac{(j-1)\delta_j}{n+1-j}$ változó viszont sztochasztikusan 0-hoz konvergál, ha $n\to\infty$.

A következő segédtételre van szükség, hogy ezt a meggondolást szabatos bizonyítássá építsük ki:

*1. lemma: Legyen $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$, ahol α_n és β_n valószínűségi változók, α_n eloszlásfüggvénye $G_n(x)$ továbbá**

$$\lim_{n\to\infty} M(\beta_n) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} D(\beta_n) = 0.$$

Tegyük fel, hogy a $G_n(x)$ eloszlásfüggvényeknek létezik a határértéke, vagyis fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x)$$

a $G(x)$ eloszlásfüggvény minden folytonossági helyén. Jelölje $F_n(x)$ a γ_n eloszlásfüggvényét; akkor

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = G(x).$$

Bizonyítás: Feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy $M(\beta_n) = 0$. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenség szerint $P(|\beta_n| > \varepsilon) < \frac{D^2(\beta_n)}{\varepsilon^2}$, tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ számokhoz megadható olyan $n_0(\varepsilon, \delta)$ pozitív egész szám, hogy ha $n > n_0$, úgy $P(|\beta_n| > \varepsilon) < \delta$. De akkor

$$F_n(x) = P(\gamma_n < x) \leqq P(\alpha_n < x + \varepsilon) + P(\beta_n < -\varepsilon); \tag{2.3}$$

ugyanis, ha $\alpha_n + \beta_n < x$, úgy vagy $\alpha_n < x + \varepsilon$, vagy $\alpha_n \geqq x + \varepsilon$, de ugyanakkor $\beta_n < -\varepsilon$ és így teljes valószínűség tételének alkalmazásával adódik (2.3). Hasonlóképpen

$$F_n(x) = P(\gamma_n < x) \geqq P(\alpha_n < x - \varepsilon) - P(\beta_n > \varepsilon); \tag{2.4}$$

ugyanis, ha $\alpha_n < x - \varepsilon$, akkor vagy $\alpha_n + \beta_n < x$, vagy $\alpha_n + \beta_n \geqq x$, de ugyanakkor $\beta_n > \varepsilon$. Tehát

$$G_n(x - \varepsilon) - \delta \leqq F_n(x) \leqq G_n(x + \varepsilon) + \delta.$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet és figyelembevéve, hogy ε és δ tetszőleges kicsinynek választhatók, következik, hogy

$$G(x - 0) \leqq \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leqq \overline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \leqq G(x + 0),$$

vagyis, hogy $G(x)$ minden x folytonossági helyén

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = G(x).$$

Ezzel az 1. lemmát bebizonyítottuk.

Az 1. 1. tétel ebből a lemmából azonnal következik, mivel

$$M\left(\sum_{j=2}^{k} \frac{(j-1)\delta_j}{n+1-j}\right) = \sum_{j=2}^{k} \frac{j-1}{n+1-j} \quad \text{és} \quad D^2\left(\sum_{j=2}^{k} \frac{(j-1)\delta_j}{n+1-j}\right) = \sum_{j=2}^{k} \frac{(j-1)^2}{(n+1-j)^2}$$

és így a lemma feltételei teljesülnek.

Az 1. 1. tétel segítségével egyszerűen meghatározhatjuk η_k^* határeloszlását is; ugyanis $\eta_{n+1-k}^* = e^{-\zeta_k^*}$ és így

$$P\left(n(1 - \eta_{n+1-k}^*) < x\right) = P\left(\zeta_k^* \leqq \log \frac{1}{1 - \frac{x}{n}}\right).$$

* Itt és a továbbiakban $M(\beta)$-val a β valószínűségi változó várható értékét, $D(\beta)$-val pedig a szórását jelöljük.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{n}}}{\dfrac{x}{n}}=1$ és a Γ-eloszlás folytonos, következik, hogy $n(1-\eta^*_{n+1-k})$ határértékben szintén k-adrendű Γ-eloszlású, $\dfrac{t^{k-1}e^{-t}}{(k-1)!}$ $(t\geqq 0)$ sűrűségfüggvénynyel. Mármost az η_k valószínűségi változók egyenletes eloszlásúak a $(0, 1)$ intervallumban és függetlenek; az egyenletes eloszlás szimmetriája következtében ugyanez áll fenn az $(1-\eta_k)$ változókra is $(k=1, 2, \ldots, n)$ és így

$$\eta^*_k=R_k(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \text{ és } 1-\eta^*_{k+1-k}=R_k(1-\eta_1, 1-\eta_2, \ldots, 1-\eta_n)$$

egyforma eloszlásúak. Ezért tehát fennáll a következő

*1. 2. tétel: Az $n\eta^*_k$ és $n(1-\eta^*_{n+1-k})$ változók eloszlása, ha $k\geqq 1$ rögzítve van és $n\to\infty$, konvergál a $\dfrac{t^{k-1}e^{-t}}{(k-1)!}$ $(t\geqq 0)$ sűrűségfüggvényű k-adrendű Γ-eloszláshoz.**

Az 1. 2. tétel segítségével meghatározhatjuk ξ^*_k és ξ^*_{n+1-k} határeloszlásait is; ezek azonban — ellentétben az η^*_k és ζ^*_k változók határeloszlásaitól — függni fognak az $F(x)$ eloszlásfüggvénytől. (Lásd [8]-at.)

Most bebizonyítjuk a következő

*1. 3. tételt:** η^*_k és η^*_{n+1-k} határértékben függetlenek, ha $n\to\infty$ ugyanakkor pedig k és j rögzítve vannak, vagyis*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\eta^*_k<\frac{x}{n}, 1-\eta^*_{n+1-j}<\frac{y}{n}\right)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y\frac{u^{k-1}v^{j-1}}{(k-1)!\,(j-1)!}e^{-(u+v)}\,du\,dv.$$

Bizonyítás: Mindenekelőtt bebizonyítunk egy segédtételt:

2. lemma: Legyen $\gamma_n=\alpha_n+\beta_n$, ahol α_n és β_n valószínűségi változók, $\lim\limits_{n\to\infty} M(\beta_n)=0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} D(\beta_n)=0$, továbbá legyen δ_n független α_n-től. Ha $F_n(x)$ jelenti α_n eloszlásfüggvényét és $G_n(y)$ a δ_n eloszlásfüggvényét, továbbá a $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} G_n(y)=G(y)$ határeloszlások léteznek, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P(\gamma_n<x, \delta_n<y)=F(x)\,G(y),$$

vagyis γ_n és δ_n határértékben függetlenekké válnak egymástól.

* Az η^*_k változók eloszlása véges n-re pontosan is kiszámítható és határátmenettel némi számolással így is bebizonyítható az 1. 2. tétel (l. H. Cramér [25] 370—371). Ezt a tételt itt azért bizonyítottuk be módszerünkkel, hogy annak felhasználását először egy egyszerű eseten keresztül mutassuk meg.

** Lásd H. Cramér [25] 371. Ezt az ismert tételt azért tárgyaljuk itt, mert módszerünk jobban megvilágítja a tételben kifejezésre jutó tény mélyebb hátterét, mint a tétel ismert bizonyítása.

Bizonyítás: Válasszuk (mint az 1. lemma bizonyításánál) n értékét olyan nagyra, hogy ha $n > n_0$, úgy $P(|\beta_n| > \varepsilon) < \delta$. — Az 1. lemma bizonyításánál alkalmazott meggondoláshoz hasonlóan belátható, hogy ha $n > n_0$, ahol n_0 az ε és δ pozitív számok megválasztásától függ, úgy

$$P(\alpha_n < x-\varepsilon, \delta_n < y)-\delta \leqq P(\gamma_n < x, \delta_n < y) < P(\alpha_n < x+\varepsilon, \delta_n < y)+\delta \quad (2.5)$$

és mivel feltevésünk szerint α_n és δ_n függetlenek, tehát

$$P(\alpha_n < x \pm \varepsilon, \delta_n < y) = F_n(x \pm \varepsilon) G_n(y)$$

és ugyanúgy, mint az 1. lemma bizonyításánál, nyerjük, hogy olyan x értékekre, amelyek $F(x)$-nek folytonossági helyei

$$\lim_{n\to\infty} P(\gamma_n < x, \delta_n < y) = F(x)G(y).$$

Ezzel a 2. lemmát bebizonyítottuk.

Mármost

$$\zeta^*_{n+1-k} - \log n = \frac{\delta_{j+1}}{n-j} + \cdots + \frac{\delta_{n+1-k}}{k} - \log n + \zeta^*_j,$$

ahol $\zeta^*_j = \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n-1} + \cdots + \frac{\delta_j}{n+1-j}$ és így

$$\lim_{n\to\infty} M(\zeta^*_j) = \lim_{n\to\infty} D(\zeta^*_j) = 0.$$

Mivel továbbá a $\frac{\delta_{j+1}}{n-j} + \cdots + \frac{\delta_{n+1-k}}{k} - \log n$ összeg független ζ^*_j-tól és $\lim_{n\to\infty} n \log \frac{1}{1-\frac{y}{n}} = y$, továbbá már tudjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(n\zeta^*_j < y) = \int_0^y \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-t}\, dt,$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\eta^*_k < \frac{x}{n}, 1-\eta^*_{n+1-j} < \frac{y}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\zeta^*_{n+1-k} - \zeta^*_j \geqq \log \frac{n}{x}\right) \cdot \int_0^y \frac{t^{j-1}e^{-t}}{(j-1)!}\, dt. \quad (2.6)$$

De az 1. lemma szerint

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\zeta^*_{n+1-k} - \zeta^*_j \geqq \log \frac{n}{x}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\zeta^*_{n+1-k} \geqq \log \frac{n}{x}\right) \quad (2.7)$$

és az 1.2. tétel szerint

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\zeta^*_{n+1-k} \geqq \log \frac{n}{x}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\eta^*_k < \frac{x}{n}\right) = \int_0^x \frac{t^{k-1}e^{-t}}{(k-1)!}\, dt. \quad (2.8)$$

A (2.6), (2.7) és (2.8) összefüggésekből az 1.3. tétel állítása következik.

Az 1.3. tétel segítségével kiszámíthatjuk az $\eta^*_n - \eta^*_1$ különbség határeloszlását is. Ennek azért van jelentősége, mert $\eta^*_n - \eta^*_1$ nem más, mint az

$(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n)$ minta *terjedelme* és egy minta terjedelmét fel lehet használni az eloszlás szórásának becslésére. Mivel nagy n-re 1-hez közeli valószínűséggel η_n^* közel van 1-hez és η_1^* közel van 0-hoz, nyilván az $n[1-(\eta_n^*-\eta_1^*)]$ változót kell vizsgálnunk, mivel $n\eta_1^*$ és $n(1-\eta_n^*)$ az 1.3. tétel szerint határértékben függetlenek, összegük határeloszlása egyenlő határeloszlásaik kompozíciójával. Mivel mind $n\eta_1^*$, mind pedig $n(1-\eta_n^*)$ határeloszlásának sűrűségfüggvénye e^{-x}, ha $x \geqq 0$, $n[1-(\eta_n^*-\eta_1^*)]$ határeloszlásának sűrűségfüggvénye $\int\limits_0^x e^{-(x-y)}e^{-y}dy = xe^{-x}$, ha $x \geqq 0$, tehát $n[1-(\eta_n^*-\eta_1^*)]$ határértékben 2-rendű Γ-eloszlású valószínűségi változó.

Az η_k^* valószínűségi változók határeloszlásai segítségével a ξ_k^* valószínűségi változók határeloszlásai meghatározhatók; ehhez azonban, mivel $\xi_k^* = F^{-1}(\eta_k^*)$, szükséges az $F^{-1}(x)$ inverz függvény ismerete. Mivel ez az inverz függvény az esetek többségében nem írható fel explicit alakban, ez bizonyos számítástechnikai nehézségekkel jár.

Eddig a rendezett minta ξ_k^* elemeinek (ill. η_k^* és ζ_k^* transzformáltjainak) határeloszlását azon feltevés mellett vizsgáltuk, hogy a k sorszám (ill. $j = n+1-k$) rögzítve van és ugyanakkor $n \to \infty$; ezt a problémakört a minta „szélső elemei" vizsgálatának nevezik. Most áttérünk a ξ_k^* (ill. η_k^*, ill. ζ_k^*) elemek határeloszlásának vizsgálatára azon feltevés mellett, hogy n-el együtt k is végtelenhez tart, mégpedig úgy, hogy $|k-nq|$ korlátos, ahol q állandó $(0 < q < 1)$. A ξ_{k+1}^* változóra, ahol $k = [nq]$, ez teljesül; ezt a változót a minta *q-quantilisének* nevezik; speciálisan, ha $n = 2m+1$, úgy ξ_{m+1}^* a minta mediánja; nyilvánvaló, hogy a minta q-quantilise nem más, mint a minta empírikus eloszlásfüggvényének q-quantilise és így a minta mediánja nem más, mint a minta empírikus eloszlásfüggvényének mediánja; ennek megfelelően, ha n páros, $n = 2m$, úgy a minta mediánjának a $\frac{\xi_m^* + \xi_{m+1}^*}{2}$ számot nevezzük.

Be fogjuk bizonyítani a következő tételt,* amely tartalmazza azt az állítást, hogy a minta q-quantilisei határértékben normális eloszlásúak, feltéve, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény eleget tesz bizonyos egyszerű feltételeknek.

1.4. tétel: A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók közös $F(x)$ eloszlásfüggvényének létezzék az $f(x) = F'(x)$ sűrűségfüggvénye és tegyük fel, hogy az (a, b) intervallumban, $(a < b)$, $f(x)$ folytonos és pozitív; akkor, ha $0 < F(a) < q < F(b) < 1$, továbbá, ha $|k_n - nq|$ korlátos $\left(\text{tehát a fortiori} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = q\right)$, *úgy $\xi_{k_n}^*$ határértékben normális eloszlású $Q = F^{-1}(q)$ körül, vagyis az $F(x)$*

* Az irodalomban ez a tétel a $\left|\frac{k_n}{n}\right| = q$ feltevés mellett szerepel; a $|k_n - nq| \leqq A$ feltétel ennél kevesebbet kíván meg.

eloszlásfüggvény q-quantilise, mint középérték körül, mégpedig

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\xi^*_{k_n}-Q}{\frac{1}{f(Q)}\sqrt{\frac{q(1-q)}{n}}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Bizonyítás: Először vizsgáljuk meg ζ^*_{n+1-k} határeloszlását:

$$\zeta^*_{n+1-k}=\sum_{j=1}^{n+1-k_n}\frac{\delta_j}{n+1-j}, \tag{2. 9}$$

ahol a δ_j változók függetlenek és exponenciális eloszlásúak, $1-e^{-x}$ $(x\geqq 0)$ eloszlásfüggvénnyel, tehát $M(\delta_j)=D^2(\delta_j)=1$ és

$$M(|\delta_j-1|^3)=\int_0^\infty |x-1|^3e^{-x}dx<\int_0^1 e^{-x}dx+\int_0^\infty x^3e^{-x}dx\leqq 7.$$

De akkor

$$M_n=M(\zeta^*_{n+1-k_n})=\sum_{j=1}^{n+1-k_n}\frac{1}{n+1-j}$$

$$S_n^2=D^2(\zeta^*_{n+1-k_n})=\sum_{j=1}^{n+1-k_n}\frac{1}{(n+1-j)^2} \tag{2. 10}$$

és

$$K_n^3=\sum_{j=1}^{n+1-k_n} M\left(\left|\frac{\delta_j-1}{n+1-j}\right|^3\right)\leqq 7\sum_{j=1}^{n+1-k_n}\frac{1}{(n+1-j)^3}$$

és így

$$\frac{K_n}{S_n}\leqq\frac{7}{k_n} \tag{2. 11}$$

tehát, ha $n\to\infty$, úgy $\frac{K_n}{S_n}\to 0$; ez azt jelenti, hogy a (2. 9) összegek sorozatára alkalmazható a központi határeloszlástétel Ljapunov-féle alakja és így

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\zeta^*_{n+1-k_n}-M_n}{S_n}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{2. 12}$$

Mármost ismeretes, hogy

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}=\ln m+C+\Delta_m,$$

ahol C az Euler-féle állandó, továbbá megadható olyan $A>0$ állandó, hogy $|\Delta_m|<\frac{A}{m}$. Egyszerű számolással belátható továbbá, hogy ha $H\geqq h\geqq 2$, úgy

$$\sum_{k=h}^{H}\frac{1}{k^2}\leqq\sum_{k=h}^{H}\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{h-1}-\frac{1}{H}=\frac{1}{h}-\frac{1}{H}+\frac{1}{h(h-1)},$$

és

$$\sum_{k=h}^{H}\frac{1}{k^2}\geqq\sum_{k=h}^{H}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{h}-\frac{1}{H+1}=\frac{1}{h}-\frac{1}{H}+\frac{1}{H(H+1)}$$

tehát

$$\sum_{k=h}^{H}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{h}-\frac{1}{H}+\frac{\vartheta}{h(h-1)},\quad \text{ahol } 0<\vartheta<1. \tag{2. 13}$$

Ennélfogva

$$M_n=\log\frac{n}{k_n}+\varepsilon_n' \tag{2. 14}$$

és

$$S_n^2=\frac{1}{k_n}-\frac{1}{n}+\varepsilon_n'', \tag{2. 15}$$

ahol $|\varepsilon_n'|<\frac{2A}{k_n}$ és $|\varepsilon_n''|<\frac{B}{k_n^2}$, A és B az n-től nem függő állandók; ennélfogva

$$\frac{\zeta_{n+1-k_n}^{*}-M_n}{S_n}=\frac{\zeta_{n+1-k_n}^{*}-\ln\frac{n}{k_n}}{\sqrt{\frac{n-k_n}{nk_n}}}+\varepsilon_n''', \tag{2. 16}$$

ahol $|\varepsilon_n'''|\leqq W\sqrt{\frac{n}{k_n(n-k_n)}}$ és $W>0$ n-től független állandó. De ha $n\to\infty$, úgy $\frac{k_n}{n}\to q$ és így $\varepsilon_n'''\to 0$ és ezért

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\zeta_{n+1-k_n}^{*}-\log\frac{n}{k_n}}{\sqrt{\frac{n-k_n}{nk_n}}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{2. 17}$$

A rövidség kedvéért vezessük be a $q_n=\frac{k_n}{n}$ jelölést, akkor tehát (2. 17) szerint

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\zeta_{n+1-k_n}^{*}-\log\frac{1}{q_n}}{\sqrt{\frac{1-q_n}{nq_n}}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{2. 18}$$

Mivel $\zeta_{n+1-k_n}^{*}=\log\frac{1}{F(\xi_{k_n}^{*})}$, (2. 18)-ból következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\xi_{k_n}^{*}>F^{-1}\left(q_ne^{-x\sqrt{\frac{1-q_n}{nq_n}}}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{2. 19}$$

Viszont a differenciálszámítás középértéktétele értelmében

$$F^{-1}(y)-F^{-1}(x)=(y-x)\left(\frac{dF^{-1}(x)}{dx}\right)_{x=z},\quad \text{ahol } x<z<y$$

és így

$$F^{-1}\left(q_n e^{x\sqrt{\frac{1-q_n}{nq_n}}}\right)=F^{-1}(q_n)+q_n\left(e^{x\sqrt{\frac{1-q_n}{nq_n}}}-1\right)\left(\frac{dF^{-1}(x)}{dx}\right)_{x=q_n\vartheta_n},$$

ahol $e^{x\sqrt{\frac{1-q_n}{nq_n}}}<\vartheta_n<1$; azonban $q_n\left(e^{x\sqrt{\frac{1-q_n}{nq_n}}}-1\right)=-x\sqrt{\frac{(1-q_n)q_n}{n}}(1+\varrho_n)$, ahol $\lim\limits_{n\to\infty}\varrho_n=0$, tehát (2. 19)-ből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\xi^*_{k_n}-F^{-1}(q_n)}{\sqrt{\frac{q_n(1-q_n)}{n}}(1+\varrho_n)\left(\frac{dF^{-1}(x)}{dx}\right)_{x=q_n\vartheta_n}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \quad (2.20)$$

Most szükségünk lesz a következő egyszerű lemmára:

3. lemma: Ha $\eta_n=a_n\alpha_n+b_n$, ahol $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, továbbá $F_n(x)$ jelöli $a\alpha_n+b$ eloszlásfüggvényét és $G_n(x)$ az η_n eloszlásfüggvényét és létezik $\lim\limits_{n\to\infty}G_n(x)=G(x)$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=G(x)$$

$G(x)$ minden folytonossági helyén.

Bizonyítás:

$$F_n(x)=P(a\alpha_n+b<x)=G_n\left(\frac{a_n}{a}x+\frac{b_na-ba_n}{a}\right)$$

és mivel $n\to\infty$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a}x+\frac{b_na-ba_n}{a}\right)=x$, tehát

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}G_n(x)=G(x),$$

ami nem más, mint lemmánk állítása.

Alkalmazva ezt a lemmát, legyen $\alpha_n=\sqrt{n}(\xi^*_{k_n}-Q)$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{q_n(1-q_n)}(1+\varrho_n)\left(\frac{dF^{-1}(x)}{dx}\right)_{x=q_n\vartheta_n}} \quad \text{és } b_n=\sqrt{n}(Q-F^{-1}(q_n))a_n,$$

akkor, mivel $\left(\frac{dF^{-1}(x)}{dx}\right)_{x=q}=\frac{1}{f(F^{-1}(q))}=\frac{1}{f(Q)}$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{f(q)}{\sqrt{q(1-q)}}$ és mivel $|q_n-q|\leqq\frac{D}{n}$, ahol D n-től független állandó, tehát

$$b_n=\sqrt{n}(Q-F^{-1}(q_n))a_n\to 0,$$

ennélfogva lemmánk értelmében

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\xi^*_{k_n}-Q}{\frac{1}{f(Q)}\sqrt{\frac{q(1-q)}{n}}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad (2.21)$$

amit bizonyítani akartunk.

Tételünk állítása úgy jellemezhető, hogy az n-elemű minta q-quantilise nagy n esetében közelítőleg normális eloszlású Q, vagyis a sokaság q-quantilise körül, $\frac{1}{f(Q)}\sqrt{\frac{q(1-q)}{n}}$ szórással.

Ilyen módon a minta mediánja segítségével megadhatók azok a határok, amelyek közé 1-hez tetszőlegesen közeli valószínűséggel az eloszlás mediánja esik. Speciálisan szimmetrikus eloszlás — pl. a normális eloszlás — esetében az eloszlás mediánja megegyezik a várható értékkel és így ezen az úton a várható értékre is következtethetünk.

A rendezett minták elmélete igen jól felhasználható a tömeggyártás gyártásközbeni statisztikai minőségellenőrzésénél,* ami a valószínűségszámítás egyik fontos alkalmazási területe. Tegyük fel, hogy egy automatagépen gyártott gépalkatrész valamely méretének (amely példányról példányra bizonyos apró véletlen ingadozásokat mutat, tehát valószínűségi változónak tekinthető) eloszlásfüggvénye, normális gyártási körülmények között, a (folytonos) $F(x)$ függvény; a gyártási folyamat ellenőrzése céljából bizonyos időközönként egy n-elemű — pl. 5-elemű — mintát veszünk.

A minta elemeinek vizsgált méretét lemérjük és a kapott eredményeket az ú. n. *kontrollkártyára* a mintavétel időpontjának megfelelő abszcisszán át húzott függőleges egyenesre felmérjük és egy ponttal jelöljük; a felmérés következtében a minta elemei maguktól nagyság szerint rendeződnek el. Annak megállapítása céljából, hogy a gyártási folyamatban nem lépett-e fel valamilyen rendellenesség (az automatagép beállításának eltolódása, a megmunkálást végző gép valamely részének kopása, stb.) a kontrollkártyára 5, párhuzamos egyenesek által alkotott sávot rajzolunk fel, amelyek rendre megadják azokat a határokat, amelyek közé az 5-elemű minta nagyság szerint legkisebb, második, harmadik, negyedik, ill. legnagyobb elemének egy megadott valószínűséggel — pl. 95%-valószínűséggel — esniük kell, normális gyártási körülmények között. Ezen határok meghatározása az elmondottak alapján igen egyszerűen történhetik, ugyanis ha ξ_k^* jelenti a minta nagyság szerinti k-ik elemét ($k=1, 2, 3, 4, 5$), úgy a

$$\zeta_k^* = \log \frac{1}{F(\xi_{6-k}^*)}$$

változók eloszlását, ill. együttes eloszlását, mint láttuk, pontosan ki tudjuk számítani.

Ennek a módszernek a gyakorlati alkalmazásával a minőségellenőrzésnél a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Mate-

* Lásd erre vonatkozólag *L. I. Braginszki* [26] munkáját; *Braginszki* számításai szabatossá tehetők a rendezett minták elméletének felhasználásával; a gyakorlati alkalmazásoknál célszerű a kontrollkártyákat a szabatos számítások alapján elkészíteni.

matikai Statisztikai Osztálya foglalkozik, a módszer felhasználásához szükséges táblázatok elkészítése is folyamatban van.

Nem folytatjuk itt a módszerrel nyerhető tételek bemutatását, csak összefoglalásul kiemeljük, hogy módszerünk lényege abban áll, hogy segítségével mindezeket a tételeket az (1.9) képlet segítségével a valószínűségszámítás legfejlettebb fejezetének, a független valószínűségi változók összegei határeloszláselméletének ismert tételeiből vezethetjük le.

3. §. Az elméleti és empirikus eloszlásfüggvény összehasonlítására vonatkozó új tételek megfogalmazása

Az eddigi elmondottakkal csak azt mutattuk meg, hogyan lehet módszerünkkel a rendstatisztika bizonyos jólismert klasszikus eredményeit egységes új eljárással egyszerűen bebizonyítani. Most rátérünk arra, hogy milyen új eredmények nyerhetők ugyanezzel a módszerrel.

A. N. Kolmogorov [6b] egy alapvető tételt bizonyított be, amely kritériumot szolgáltat arra vonatkozólag, hogy egy minta származhat-e egy megadott eloszlású statisztikai sokaságból, vagyis megmutatja, hogy hogyan lehet a minta elemeinek eloszlásából a teljes sokaság ismeretlen eloszlására következtetni. Legyen

$$\left.\begin{aligned} &F_n(x)=0, &&\text{ha} \quad x\leqq \xi_1^*, \\ &F_n(x)=\frac{k}{n}, &&\text{ha } \xi_k^*<x\leqq \xi_{k+1}^* \quad (k=0,1,2,\ldots,n-1) \\ &F_n(x)=1, &&\text{ha} \quad x>\xi_n^*, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

és

vagyis jelölje $F_n(x)$ a minta empirikus eloszlásfüggvényét, másszóval a minta x-nél kisebb elemeinek relatív gyakoriságát. *Kolmogorov* tétele a következőképpen szól:

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}\sup_{-\infty<x<+\infty}|F_n(x)-F(x)|<y)=\begin{cases}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k e^{-2k^2y^2}, & \text{ha } y>0\\ 0 & \text{ha } y\leqq 0.\end{cases} \tag{3.2}$$

Kolmogorov tétele tehát az empirikus és elméleti eloszlásfüggvények abszolút eltérése felső határának határeloszlását adja meg, amely határeloszlás nem függ az $F(x)$ eloszlásfüggvénytől, amelyről a tétel érvényességéhez csak azt kell feltenni, hogy folytonos. *Kolmogorov* tétele az $|F_n(x)-F(x)|$ eltérést ugyanolyan súllyal veszi figyelembe, akármekkora is $F(x)$ értéke; ezáltal pl. az $|F_n(x)-F(x)|=0{,}01$ eltérés ugyanolyan súllyal esik latba olyan x helyen, ahol $F(x)=0{,}5$, vagyis ahol ez az eltérés $2\%_0$, mint egy olyan x pontban, ahol $F(x)=0{,}01$, vagyis ahol az eltérés 100%-ot tesz ki. Ezen úgy segíthetünk, hogy $|F_n(x)-F(x)|$ helyett az $\frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)}$ hányadost, vagyis $F_n(x)$

viszonylagos hibáját tekintjük. Ilyen módon természetesen merül fel a gondolat, hogy megvizsgáljuk az empirikus és elméleti eloszlásfüggvények közti viszonylagos eltérés abszolút értéke felső határának, vagyis $\frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)}$ felső határának határeloszlását.

Kolmogorov tételéhez hasonló tételt bizonyított be N. V. *Szmirnov* az empirikus és elméleti eloszlásfüggvények egyoldalú eltérésére vonatkozólag. *Szmirnov* tétele a következőképpen szól:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{-\infty<x<+\infty} (F_n(x)-F(x))<y\right) = 1-e^{-2y^2}. \qquad (y\geqq 0) \qquad (3.3)$$

Ennél a tételnél is felmerült a viszonylagos eltérés vizsgálatának szükségessége.

Ezeket a problémákat sikerült a fent vázolt módszer segítségével megoldani. A probléma megoldása során egy természetes korlátozást kell bevezetnünk: mivel $F(x)$ tetszőleges kis értékeket is felvesz, nem célszerű $\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}$-nek az egész $-\infty<x<+\infty$ intervallumra, hanem csak valamely $x_a\leqq x<+\infty$ intervallumra vonatkozó felső határát vizsgálni, ahol x_a az $F(x_a)=a>0$ feltétellel definiált abszcissza; a értéke azonban tetszőleges kicsiny pozitív szám lehet. Az 5. §-ban a következő eredményeket fogjuk bebizonyítani:

3. 1. tétel:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{a\leqq F(x)\leqq 1}\left(\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}\right)<y\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{y\sqrt{\frac{a}{1-a}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, & \text{ha } y>0 \\ 0 & \text{ha } y\leqq 0. \end{cases} \qquad (3.4)$$

3. 2. tétel:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{a\leqq F(x)\leqq 1}\left|\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}\right|<y\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2(1-a)}{8y^2a}}}{2k+1}, \\ \qquad \text{ha } y>0 \\ 0, \quad \text{ha } y\leqq 0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Megvizsgálhatjuk a $\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}$ változónak, ill. abszolút értékének azon $x_a\leqq x\leqq x_b$ intervallumbeli felső határának határeloszlását is, ahol $F(x_a)=a$, $F(x_b)=b$ és $0<a<b<1$; az erre vonatkozó tételek a következők:

3. 3. tétel:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{a\leqq F(x)\leqq b}\left(\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}\right)<y\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{y\sqrt{\frac{b}{1-b}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\left[\int_0^{\left(\sqrt{\frac{b}{1-b}}y-u\right)\sqrt{\frac{a(1-b)}{b-a}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]du$$

$$(-\infty<y<+\infty) \qquad (3.6)$$

és

3. 4. tétel:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n} \sup_{a\leq F(x)\leq b} \left|\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}\right| < y\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2(1-a)}{8y^2a}}}{2k+1} E_k, \quad (3.7)$$

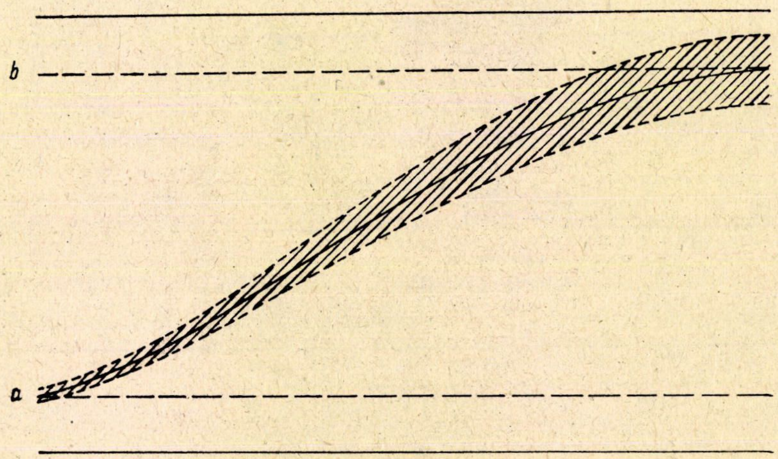
ha $y>0$, ahol

$$E_k = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{y\sqrt{\frac{b}{1-b}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \varrho_k$$

és

$$\varrho_k = \frac{2e^{-\frac{by^2}{2(1-b)}}}{\sqrt{2\pi}\, y \sqrt{\frac{a}{1-a}}} \int\limits_0^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{(1-b)u^2}{2by^2}} \sin u\, du. \quad (3.8)$$

Ezek a tételek kritériumokat szolgáltatnak annak a hipotézisnek az ellenőrzéséhez, hogy egy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta egy $F(x)$ eloszlásfüggvényű sokaságból származik. Ezeknek a kritériumoknak a jellegzetessége abban áll, hogy egy olyan sávot adnak meg $F(x)$ körül, amelyben a hipotézis helyessége esetén az $F_n(x)$ empirikus eloszlásfüggvényeknek bizonyos megadott valószínűséggel haladnia kell, amely sávnak a szélessége minden x pontban $F(x)$-szel arányos (lásd az 1. ábrát). Ez a sáv azonban nem szimmetrikus. Ezen úgy segíthetünk, hogy a kritériumot kétszer alkalmazzuk, először a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ mintára és az $F(x)$ eloszlásfüggvényre, azután a $(-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_n)$ mintára és az $1-F(-x) = G(x)$ eloszlásfüggvényre.



1. ábra

Mutassunk rá a 3.3. tétel egy igen meglepő következményére: *Szmirnov* (3. 3) tételéből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\sup_{-\infty<x<+\infty} (F_n(x)-F(x))<0\Big)=0, \tag{3. 9}$$

vagyis annak a valószínűsége, hogy az empirikus eloszlásfüggvény végig az elméleti eloszlásfüggvény alatt haladjon, 0-hoz tart, ha $n\to\infty$. A 3. 1. tételből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\sup_{x_a\leqq x<+\infty} (F_n(x)-F(x))<0\Big)=0, \tag{3.10}$$

vagyis ugyanez áll fenn akkor is, ha csak a $(x_a, +\infty)$ intervallumot vizsgáljuk; ezzel szemben a 3.3. tétel értelmében

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\sup_{x_a\leqq x\leqq x_b} (F_n(x)-F(x))<0\Big)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\Bigg[\int_0^{u\sqrt{\frac{a(1-b)}{b-a}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\Bigg]du>0, \tag{3.11a}$$

vagyis határértékben is pozitív a valószínűsége annak, hogy azon a szakaszon, ahol $F(x)$ értéke valamely $a>0$ és $b<1$ szám közé esik, az empirikus eloszlásfüggvény végig az elméleti eloszlásfüggvény alatt haladjon, akármilyen kicsiny pozitív szám is a és akármilyen közel is van b az 1-hez. Ezen eredménynek nyilvánvalóan jelentősége van a statisztikai gyakorlat szempontjából is.

Azt, hogy a (3.11a) baloldalán álló határérték pozitív, *Gihman* [16] is bebizonyította és azt az eredményt kapta, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\sup_{x_a\leqq x\leqq x_b} (F_n(x)-F(x))<0\Big)=\frac{1}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{a(1-b)}{b(1-a)}}. \tag{3.11b}$$

Gihman közli továbbá, hogy — személyes közlése szerint — a (3.11b) eredményt már *Gnyegyenko* ismerte. A (3.11a) és (3.11b) jobboldalán álló kifejezések természetesen azonosak; ez a következő meggondolással látható be: (3.11a) jobboldala nem más, mint annak kétszeres valószínűsége, hogy az (x, y) síkon normális eloszlású és $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ sűrűségfüggvényű pont a $0<x<\infty$, $0<y<x\sqrt{\frac{a(1-b)}{b-a}}$ szögtérbe essék; ez a valószínűség nem más, mint

$$\frac{2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a(1-b)}{b-a}}}{2\pi}=\frac{1}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{a(1-b)}{b(1-a)}}. \tag{3.12}$$

Ugyanis az $\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ sűrűségfüggvényű normális eloszlás körszimmetriája folytán a φ nyílású szögtérnek megfelelő valószínűség $\frac{\varphi}{2\pi}$.

A 3. 1.—3. 4. tételeket az 5. §-ban fogjuk bebizonyítani. Előbb azonban a 4. §-ban néhány segédtételt bizonyítunk be, amelyek önmagukban is érdekességgel bírnak.

4. §. Néhány új határeloszlástétel

Legyen adva egy valószínűségi változók szériáiból álló sorozat:

$$\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,N_n} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Tegyük fel, hogy az összes $\xi_{n,k}$ valószínűségi változók várható értéke zérus és szórása véges, továbbá, hogy az ugyanazon szériához tartozó valószínűségi változók összességükben függetlenek és kielégítik a Lindeberg-féle feltételt; másszóval bevezetve az $F_{n,k}(x)=P(\xi_{n,k}<x)$ jelölést és feltéve, hogy $M(\xi_{n,k})=$ $=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_{n,k}(x)=0$, továbbá bevezetve az $S_{n,k}=\sum\limits_{\nu=1}^{k}\xi_{n,\nu}$ és

$$B_n^2=D^2(S_{n,N_n})=\sum_{k=1}^{N_n}D^2(\xi_{n,k}) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

jelöléseket, teljesül a következő reláció:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{N_n}\int\limits_{|x|>\varepsilon B_n} x^2\,dF_{n,k}(x)=0, \quad \text{ha} \quad \varepsilon>0. \tag{4. 1}$$

A fenti feltételeknek eleget tevő széria-sorozatokra vonatkozólag a következő három tételt fogjuk bebizonyítani:

4. 1. tétel:

$$\lim_{n\to\infty}P(\max_{1\leq k\leq N_n}S_{n,k}<xB_n)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt, & \text{ha} \quad x>0\\ 0, & \text{ha} \quad x\leq 0.\end{cases} \tag{4. 2}$$

4. 2. tétel:

$$\lim_{n\to\infty}P(\max_{1\leq k\leq N_n}|S_{n,k}|<xB_n)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8x^2}}}{2k+1}, & \text{ha} \quad x>0\\ 0, & \text{ha} \quad x\leq 0.\end{cases} \tag{4. 3}$$

4. 3. tétel:

$$\lim_{n\to\infty}P(-yB_n\leq\min_{1\leq k\leq N_n}S_{n,k}\leq\max_{1\leq k\leq N_n}S_{n,n}<xB_n)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{2(x+y)^2}}\sin(2k+1)\pi\frac{x}{x+y}}{2k+1}, & \text{ha} \quad x>0 \text{ és } y>0;\\ 0, & \text{ha} \quad x<0 \text{ vagy } y<0.\end{cases} \tag{4. 4}$$

Megjegyzés: Ha $y=x$, úgy a 4. 3. tétel a 4. 2. tételre redukálódik. A 4. 2. tétel tehát speciális esete a 4. 3. tételnek.

4. 4. tétel: Ha $A_n^2 = D^2(S_{n,M_n})$, *ahol* $1 \leq M_n < N_n$ *és* $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lambda$ $(0 \leqq \lambda < 1)$, *úgy*

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{M_n < k \leqq N_n} |S_{n,k}| < yB_n) =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8y^2}} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{y}{\lambda}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \varrho_k\right], \text{ ha } y > 0; \\ 0, \quad \text{ha } y \leqq 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

ahol

$$\varrho_k = \frac{2\lambda e^{-\frac{y^2}{2\lambda^2}}}{\sqrt{2\pi}y} \int_0^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\lambda^2 u^2}{2y^2}} \sin u \, du.$$

Megjegyzés: Ha $M_n = 1$ (és így $\lambda = 0$), úgy a 4. 2. tétel a 4. 4. tételből speciális esetként adódik.

Megjegyezzük, hogy arra a speciális esetre, amelyben az összes szóbanforgó $\xi_{n,k}$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak, a 4. 1. és 4. 2. tételek állítását *Erdős Pál* és *M. Kac* [22] bizonyították be.* A fenti általánosabb tételek bebizonyítása céljából az ő bizonyításukat annyiban módosítjuk, hogy az ott alkalmazott többdimenziós határeloszlástétel helyett közönséges (egydimenziós) határeloszlástételt alkalmazunk. Ez lehetővé teszi, hogy eredményeiket messzemenően általánosítjuk. A 4. 1.—4. 4. tételeket az 5 §-ban segédtételként használjuk a

$$\sup_{a \leqq F(x) \leqq b} \left(\frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)}\right) \quad \text{és} \quad \sup_{a \leqq F(x) \leqq b} \left|\frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)}\right|$$

változók határeloszlásának meghatározására, ahol $F_n(x)$ a folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvényű ξ valószínűségi változóra vonatkozó n független megfigyelés eredményeinek empírikus eloszlásfüggvénye és $0 < a < b < 1$. Térjünk rá a 4. 1. tétel bizonyítására. Legyen

$$P_n(x) = P(\max_{1 \leqq k \leqq N_n} S_{n,k} < xB_n).$$

Legyenek az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots$ valószínűségi változók független, 0 várható értékű és 1 szórású normális eloszlású változók és vezessük be a

$$\zeta_k = \sum_{\nu=1}^{k} \eta_\nu \qquad k = 1, 2, \ldots$$

* Gondolatmenetüket *M. D. Donsker* fogalmazta meg általánosságban (l. [20b]). Lásd továbbá *A. Wald* dolgozatát, [27], amelyben egyforma eloszlású változók esetében, továbbá *A. Wald* [28] és *K. L. Chung* [29] munkáit, amelyekben korlátos harmadik momentumú változók esetében vizsgálják az első n részletösszegek maximumának határeloszlását; utóbbi erre a speciális esetre maradéktag-becslést is ad.

valószínűségi változókat. Először is azt bizonyítjuk be, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ és pozitív egész k esetén

$$\varliminf_{n\to\infty} P_n(x) \geqq P(\max(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k) < (x-\varepsilon)\sqrt{k} - \frac{1}{\varepsilon^2 k} \tag{4.6}$$

és

$$\varlimsup_{n\to\infty} P_n(x) \leqq P(\max(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k) < x\sqrt{k}). \tag{4.7}$$

Legyen ugyanis $m_j\,(j=1,2,\ldots,k)$ azon legkisebb pozitív egész szám, melyre

$$\sum_{r=1}^{m_j} D^2(\xi_{n,r}) \geqq \frac{j}{k} B_n^2.$$

Nyilvánvaló, hogy $1 \leqq m_1 \leqq m_2 \leqq \ldots \leqq m_k = N_n$. Definiáljuk most a következő valószínűségi változókat:

$$\Delta_{n,1} = S_{n,m_1},\ \Delta_{n,j} = S_{n,m_j} - S_{n,m_{j-1}} \qquad (j=2,3,\ldots,k). \tag{4.8}$$

Könnyen beláthatjuk, hogy minden rögzített j esetén $(j=1,2,\ldots,k)$ a

$$\xi_{n,m_{j-1}},\ \xi_{n,m_{j-1}+2}, \ldots, \xi_{n,m_j} \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{4.9}$$

széria-sorozatra szintén fennáll a Lindeberg-féle feltétel. Bevezetve ugyanis a

$$B_{n,j}^2 = D^2(\Delta_{n,j})$$

jelölést és felhasználva a (4. 1)-ből triviálisan következő

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sup_{1\leqq k\leqq N_n} D^2(\xi_{n,k}) = 0$$

összefüggést, nyerjük, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén

$$\frac{1-\delta}{k} B_n^2 \leqq B_{n,j}^2 \leqq \frac{1+\delta}{k} B_n^2, \qquad \text{ha} \quad n > n_0(\delta). \tag{4.10}$$

Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett

$$\frac{1}{B_{n,j}^2} \sum_{r=m_{j-1}+1}^{m_j} \int\limits_{|x|>\varepsilon B_{n,j}} x^2 dF_{n,r}(x) \leqq \frac{k}{1-\delta} \frac{1}{B_n^2} \sum_{r=1}^{N_n} \int\limits_{|x|>\varepsilon' B_n} x^2 dF_{n,r}(x),$$

ha $n > n_0(\delta)$, ahol $\varepsilon' = \varepsilon \sqrt{\frac{1-\delta}{k}}$. A (4. 9) alatti sorozatra tehát valóban teljesül a Lindeberg-feltétel. A központi határeloszlástétel szerint tehát

$$\lim_{n\to\infty} P(\Delta_{n,j} < xB_{n,j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (j=1,2,\ldots,k) \tag{4.11}$$

De a $\Delta_{n,1}, \Delta_{n,2}, \ldots, \Delta_{n,k}$ valószínűségi változók függetlenek és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_{n,j}}{B_n} = \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad (j=1,2,\ldots,k),$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\Delta_{n,j}}{B_n} < \frac{x_j}{\sqrt{k}};\ j=1,2,\ldots,k\right) = \tag{4.12}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k} \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=k}^{k} t_j^2\right)} dt_1\ldots dt_k,$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\Delta_{n,1}+\Delta_{n,2}+\cdots+\Delta_{n,j}}{B_n} < x,\ j=1,2,\ldots,k\right) = \tag{4.13}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^k} \int\int\cdots\int_{(T_x)} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k} t_j^2\right)} dt_1\ldots dt_k,$$

ahol az integrációt az alábbi egyenlőtlenségekkel definiált T_x tartományra kell kiterjeszteni:

$$T_x: \{-\infty < t_1+t_2+\cdots+t_j < x\sqrt{k},\quad j=1,2,\ldots,k\}.$$

Így a következőt olvashatjuk le

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{1\leqq j\leqq k} S_{n,m_j} < xB_n) = P(\max_{1\leqq j\leqq k} \delta_j < x\sqrt{k}). \tag{4.14}$$

Legyen most

$$P_{n,k}(x) = P(\max_{1\leqq j\leqq k} S_{n,m_j} < xB_n)$$

és jelentse $\Pi_{n,r}(x)$ annak a valószínűségét, hogy $S_{n,r}$ az első az S_n, $(j=1,2,\ldots,r)$ összegek közül, amely $\geqq xB_n$, vagyis legyen

$$\Pi_{n,r}(x) = P(S_{n,r} \geqq xB_n;\ \max_{1\leqq j\leqq r-1} S_{n,j} < xB_n).$$

Nyilvánvalóan $\sum_{r=1}^{N_n} \Pi_{n,r}(x) = 1 - P_n(x) \leqq 1.$

Legyen $m_{j-1} < r \leqq m_j$; bevezetve a

$$\Pi_{n,r}^{(1)}(x) = P(S_{n,r} \geqq xB_n;\ \max_{1\leqq j\leqq r-1} S_{n,j} < xB_n;\ |S_{n,m_j} - S_{n,r}| \geqq \varepsilon B_n) \tag{4.15}$$

és a

$$\Pi_{n,r}^{(2)}(x) = P(S_{n,r} \geqq xB_n;\ \max_{1\leqq j\leqq r-1} S_{n,j} < xB_n;\ |S_{n,m_j} - S_{n,r}| < \varepsilon B_n) \tag{4.16}$$

jelöléseket, nyilvánvalóan

$$\Pi_{n,r}(x) = \Pi_{n,r}^{(1)}(x) + \Pi_{n,r}^{(2)}(x).$$

Alkalmazzuk a Csebisev-féle egyenlőtlenséget:

$$\Pi_{n,r}^{(1)}(x) = \Pi_{n,r}(x) P(|S_{n,m_j} - S_{n,r}| \geqq \varepsilon B_n) \leqq \Pi_{n,r}(x) \frac{B_{n,j}^2}{\pi^2 B_n^2}$$

és vegyük figyelembe a (4. 10) alatti relációt; így kapjuk, hogy

$$\Pi_{n,r}^{(1)}(x) \leqq \Pi_{n,r}(x) \frac{1+\delta}{\varepsilon^2 k},$$

tehát

$$1-P_n(x)=\sum_{r=1}^{N_n}\Pi_{n,r}(x)\leqq\frac{1+\delta}{\varepsilon^2 k}+\sum_{r=1}^{N_n}\Pi_{n,r}^{(2)}(x).$$

Viszont

$$\sum_{r=1}^{n}\Pi_{n,r}^{(2)}(x)\leqq 1-P_{n,k}(x-\varepsilon),\ \text{tekintve, hogy ha}$$

$$S_{n,r}\geqq xB_n \ \text{ és } \ |S_{n,m_j}-S_{n,r}|<\varepsilon B_n, \ \text{úgy } S_{n,m_j}>(x-\varepsilon)B_n;$$

így

$$1-P_n(x)\leqq\frac{1+\delta}{\varepsilon^2 k}+1-P_{n,k}(x-\varepsilon).$$

Ha még figyelembevesszük a triviális $P_n(x)\leqq P_{n,k}(x)$ $(k=1,2,\ldots)$ egyenlőtlenségeket is, nyerjük, hogy

$$P_{n,k}(x-\varepsilon)-\frac{1+\delta}{\varepsilon^2 k}\leqq P_n(x)\leqq P_{n,k}(x) \tag{4. 17}$$

A fenti (4. 17) alatti relációt (4. 14)-vel összevetve éppen a kívánt (4. 6) és (4. 7) alatti egyenlőtlenségeket kapjuk.

Tekintsük most azon speciális esetet, amikor $\xi_{n,k}$ csak a $+1$ és -1 értékeket veszi fel és

$$P(\xi_{n,k}=+1)=P(\xi_{n,k}=-1)=\frac{1}{2} \qquad (k=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots)$$

Ekkor

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{\substack{-n<\nu<[x\sqrt{n}]\\ \nu\equiv n \bmod 2}}\left\{\binom{n}{\frac{n+\nu}{2}}-\binom{n}{\frac{n-\nu}{2}+[x\sqrt{n}]+1}\right\}, \tag{4. 18}$$

ha $x\sqrt{n}$ nem egész szám, és így a Moivre—Laplace tételből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{4. 19}$$

Ezért, mivel (4. 6) szerint

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,P(\max(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_k)<x\sqrt{k})\leqq\lim_{n\to\infty}P_n(x+\varepsilon) \tag{4. 20}$$

és (4. 7)-ből

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\,P(\max(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_k)<x\sqrt{k}\geqq\lim_{n\to\infty}P_n(x) \tag{4. 21}$$

következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty}P(\max(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_k)<x\sqrt{k})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \tag{4. 22}$$

és így a (4. 6) és (4. 7) relációkat még egyszer alkalmazva, (4. 2) következik.

A most közölt bizonyítás alapgondolata a következőkben foglalható össze: kimutattuk, hogy a $\xi_{n,k}$ változók speciális választása mellett fennáll (4.2); ebből (4.6) és (4.7) segítségével következtettünk arra, hogy (4.2) akkor is fennáll, ha $\xi_{n,k}=\eta_k$ és az η_k változók normális eloszlásúak; ebből újból (4.6) és (4.7) segítségével következett, hogy (4.2) fennáll tetszőleges, a tétel feltételeinek eleget tevő $\xi_{n,k}$ változók esetében is.

A 4.2. és 4.3. tétel bizonyítása ugyanezen a gondolaton alapszik és a megfelelő módosításokkal lépésről-lépésre megegyezik a 4.1. tétel bizonyításával.

Elegendő a 4.3. tétel bizonyításával foglalkozni, mivel az, mint arra rámutattunk, a 4.2. tételt speciális esetként tartalmazza. A bizonyítás első részét felesleges részletezni, csak a második részével foglalkozunk.

Legyen újból $P(\xi_{n,k}=1)=P(\xi_{n,k}=-1)=\frac{1}{2}$ $(k=1,2,\ldots,N_n;\ n=1,2,\ldots,)$ és tegyük fel, hogy a $\xi_{n,k}$ $(k=1,2,\ldots,N_n)$ változók függetlenek, úgy a síkbeli bolyongás elméletéből jólismert meggondolással következik, hogy ha $B=[y\sqrt{n}]+1$ és $A=[x\sqrt{n}]+1$, úgy

$$P(-y\sqrt{n}<S_{n,k}<x\sqrt{n};\ k=1,2,\ldots,n)= \tag{4.23}$$

$$=\sum_{-B<k<A}\left[v_k+\sum_{\nu=1}^{\infty}\{(v_{2\nu(A+B)+k}-v_{2\nu(A+B)-2B-k})+(v_{-2\nu(A+B)+k}-v_{-2\nu(A+B)+2A-k})\}\right],$$

ahol

$$v_k=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{n+k}{2}}, & \text{ha}\quad k\equiv n \mod 2,\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases} \tag{4.24}$$

Mivel a Moivre—Laplace-tétel szerint

$$\sum_{\frac{n}{2}-b\frac{\sqrt{n}}{2}<k<\frac{n}{2}+a\frac{\sqrt{n}}{2}}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{a}e^{-\frac{u^2}{2}}du, \tag{4.25}$$

ebből egyszerű számolással következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}P(-y\sqrt{n}<S_{n,k}<x\sqrt{n};\ k=1,2,\ldots,n)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{2(x+y)^2}}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{x+y}}{2k+1}. \tag{4.26}$$

Ugyanúgy, mint a 3.1. tétel esetében, következik, hogy ugyanez a határértéke a (4.4) baloldalán álló valószínűségnek az általános esetben is.

A 3.4. tétel a 3.3. tételből a következőképpen vezethető le: a teljes valószínűség tétele szerint, tekintetbe véve, hogy S_{n,M_n} és $S_{n,k}-S_{n,M_n}$ függetlenek, ha $k>M_n$, továbbá hogy

$$P(\max_{M_n<k\leq N_n}|S_{n,k}|<yB_n)=P(-yB_n<(S_{n,M_n}+(S_{n,k}-S_{n,M_n}))<yB_n),$$

következik, hogy

$$P(\operatorname*{Max}_{M_n < k \leqq N_n} |S_{n,k}| < yB_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P\Big(-(x+y)B_n < S_{n,k} - S_{n,M_n} < (y-x)B_n\Big) dF_n(x), \tag{4. 27}$$

ahol $F_n(x)$ az $\frac{S_{n,M_n}}{B_n}$ változó eloszlásfüggvényét jelenti. Mivel feltételeink értelmében az $S_{n,M_n} = \sum_{k=1}^{M_n} \xi_{n,k}$ összegekre érvényes a Lindeberg-féle feltétel és $D\left(\frac{S_{n,M_n}}{B_a}\right) = \frac{A_n}{B_n} \to \lambda$, tehát (minden véges intervallumon x-ben egyenletesen)

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\lambda^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\lambda}} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{4. 28}$$

Mivel továbbá a 4. 3. tétel szerint — figyelembevéve, hogy

$$D(S_{n,N_n} - S_{n,M_n}) = \sqrt{B_n^2 - A_n^2},$$

következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(-(x+y)B_n < S_{n,k} - S_{n,M_n} < (y-x)B_n;\ k = 1, 2, \ldots, n) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2(1-\lambda^2)}{8y^2}}}{2k+1} \sin (k+1) \frac{\pi(y-x)}{2y}, & \text{ha } -y \leqq x \leqq y \\ 0, & \text{ha } |x| > y, \end{cases} \tag{4. 29}$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} P(\operatorname*{Max}_{M_n < k \leqq N_n} |S_{n,k}| < yB_n) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2(1-\lambda^2)}{8y^2}}}{2k+1} \int_{-y}^{+y} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}{\sqrt{2\pi}\lambda} \sin (2k+1)\pi \frac{y-x}{2y} dx, & \text{ha } y > 0 \\ 0, & \text{ha } y \leqq 0. \end{cases} \tag{4. 30}$$

Ebből egyszerű számolással következik a 3. 4. tétel, ugyanis

$$\int_{-y}^{+y} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}{\sqrt{2\pi}\lambda} \sin (2k+1)\pi \frac{y-x}{2y} dx = (-1)^k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2\lambda^2}{8y^2}} \left(\int_{-\frac{y}{\lambda}}^{+\frac{y}{\lambda}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(t - \frac{(2k+1)i\lambda}{2y}\pi\right)^2}}{\sqrt{2\pi}} dt \right). \tag{4. 31}$$

Mármost, mivel $e^{-\frac{t^2}{2}}$ integrálja egy zárt görbén eltűnik, tehát ha $a > 0$ és b

valós, úgy

$$\int_{-a}^{+a} \frac{e^{-\frac{(t-ib)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \int_{-a-ib}^{a-ib} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \int_{-a}^{+a} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt +$$

$$+\int_{-a-ib}^{-a} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt + \int_{a}^{a-ib} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \int_{-a}^{+a} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt + \frac{2e^{-\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{b} e^{\frac{b^2}{2}} \sin av\,dv.$$

Ennélfogva

$$\int_{-y}^{+y} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}{\sqrt{2\pi}\lambda} \sin(2k+1)\pi\frac{y-x}{2y}\,dx =$$

$$=(-1)^k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2\lambda^2}{8y^2}} \left[1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{y}{\lambda}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{2e^{-\frac{y^2}{2\lambda^2}}\lambda}{\sqrt{2\pi}y}\int_{0}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\lambda^2v^2}{2y^2}} \sin v\,dv\right].$$

Ezzel a 4. 4. tételt bebizonyítottuk.

5. §. Kolmogorov és Szmirnov kritériumaival analóg új kritériumok bizonyítása

Legyen ξ folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változó, jelentsék $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a ξ-re vonatkozó n számú független megfigyelés eredményeit, azaz legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ összességükben független valószínűségi változók, ugyanazon $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvénnyel. Jelöljük $F_n(x)$-szel ezen változók empírikus eloszlásfüggvényét.

Bebizonyítjuk a 3. §.-ban megfogalmazott tételeket, az 1. §-ban kifejtett módszerrel és a 4. §. tételeinek felhasználásával.

Legyen $\eta_k = F(\xi_k)$ és $\zeta_k = \log\frac{1}{\eta_k}$, továbbá $\eta_k^* = F(\xi_k^*)$ és $\zeta_k^* = R_k(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, úgy az η_k változók a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlásúak és empírikus eloszlásfüggvényük

$$G_n(x) = F_n(F^{-1}(x))$$

ahol $y = F^{-1}(x)$ az $x = F(y)$ függvény inverz függvénye. De könnyen látható, hogy

$$\sup_{a \leq F(x) \leq 1} \left(\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}\right) = \sup_{a \leq x \leq 1} \left(\frac{G_n(x)-x}{x}\right), \tag{5. 1}$$

tehát az (5. 1) baloldalán álló változó helyett vizsgálhatjuk a vele azonos

$$\sup_{a \leq x \leq 1} \left(\frac{G_n(x)-x}{x}\right)$$

változót. Az η_k^* változók — mint láttuk — Markov-láncot alkotnak. Láttuk továbbá, hogy a $\delta_{k+1}=(n-k)(\zeta_{k+1}^*-\zeta_k^*)$ változók összességükben függetlenek és 1 várható értékű exponenciális eloszlásúak, azaz

$$P(\delta_k<x)=1-e^{-x} \qquad (x\geqq 0).$$

Láttuk, hogy a δ_k változók segítségével a $\zeta_k^*=\ln\frac{1}{\eta_{n+1-k}^*}$ változókat független valószínűségi változók összegeként állíthatjuk elő a következőképpen:

$$\zeta_k^*=\sum_{j=1}^{k}\frac{\delta_j}{n+1-j}.$$

Térjünk rá most a 3. 1. tétel bizonyítására. Mindenekelőtt könnyen belátható, hogy a (3. 4) reláció helyett elegendő bebizonyítani, hogy

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leqq G_n(x)}\left(\frac{G_n(x)-x}{x}\right)<y\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\frac{a}{1-a}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (y>0). \quad (5.2)$$

Ugyanis ha $|G_n(x)-x|\leqq\varepsilon$, úgy abból, hogy $G_n(x)\geqq a+\delta$, következik, hogy $x\geqq G_n(x)-\varepsilon\geqq a$ és így ezen feltevés mellett

$$\sup_{a\leqq x}\frac{G_n(x)-x}{x}\geqq\sup_{G_n(x)\geqq a+\varepsilon}\frac{G_n(x)-x}{x},$$

vagyis abból, hogy $\sup\limits_{a\leqq x}\frac{G_n(x)-x}{x}<\frac{y}{\sqrt{n}}$, következik, hogy $\sup\limits_{G_n(x)\geqq a+\varepsilon}\frac{G_n(x)-x}{x}\leqq$ $\leqq\frac{y}{\sqrt{n}}$. De ha A és B tetszőleges események és $AB\subset A'B$, úgy

$$P(A)=P(A\bar{B})+P(AB)\leqq P(\bar{B})+P(A'B)\leqq P(\bar{B})+P(A')$$

Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget arra az esetre, amikor B a $|G_n(x)-x|\leqq\varepsilon$ eseményt, A a $\sup\limits_{a\leqq x}\left(\frac{G_n(x)-x}{x}\right)<\frac{y}{\sqrt{n}}$ eseményt és A' a $\sup\limits_{G_n(x)\geqq a+\varepsilon}\frac{G_n(x)-x}{x}<\frac{y}{\sqrt{n}}$ eseményt jelenti, következik, hogy

$$P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leqq x}\frac{G_n(x)-x}{x}<y\right)\leqq P(|G_n(x)-x|>\varepsilon)+P\left(\sqrt{n}\sup_{a+\varepsilon\leqq G_n(x)}\frac{G_n(x)-x}{x}<y\right).$$

Hasonlóképpen látható be, hogy

$$P\left(\sqrt{n}\sup_{a-\varepsilon\leqq G_n(x)}\frac{G_n(x)-x}{x}<y\right)\leqq P(|G_n(x)-x|>\varepsilon)+P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leqq x}\frac{G_n(x)-x}{x}<y\right).$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}P(|G_n(x)-x|>\varepsilon)=0$, hacsak $\varepsilon>0$, következik, hogy ha (5. 2) teljesül, úgy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leqq x}\frac{G_n(x)-x}{x}<y\right)\leqq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\frac{a+\varepsilon}{1-a-\varepsilon}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

és

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leq x}\frac{G_n(x)-x}{x}<y\right)\geqq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\frac{a-\varepsilon}{1-a+\varepsilon}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Mivel ε tetszőleges kicsinynek választható és az integrál a felső határának folytonos függvénye, következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leq x}\frac{G_n(x)-x}{x}<y\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\frac{a}{1-a}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Tehát (3. 4) valóban következik (5. 2)-ből és így a 3. 1. tétel bizonyításához elegendő kimutatni (5. 2) érvényességét.

Szükségünk lesz még a következő összefüggésre:

$$\sqrt{n}\sup_{a\leq G_n(x)}\left(\frac{G_n(x)-x}{x}\right)=\sqrt{n}\max_{na\leq k\leq n}\left(\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*}-1\right). \tag{5. 3}$$

Ez abból következik, hogy $G_n(x)$ állandó η_k^* és η_{k+1}^* között és így egy $\eta_k^*<x<\eta_{k+1}^*$ szakaszon $\frac{G_n(x)-x}{x}=\frac{G_n(x)}{x}-1$ felső határa

$$\frac{G_n(\eta_k^*+0)}{\eta_k^*}-1=\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*}-1.$$

A bizonyításhoz szükségünk van még a 4. 1. tételre.

Alkalmazzuk ezt a tételt a

$$\frac{\delta_j-1}{n+1-j}\qquad (j=1,2,\ldots,[n(1-a)]+1;\ n=1,2,\ldots)$$

változó-szériákból álló sorozatra, amely eleget tesz a Lindeberg-féle feltételnek (sőt, még a Ljapunov-féle feltételnek is), ha $0<a<1$. Ekkor (1. 11)-re való tekintettel tetszőleges $z>0$ esetén nyerjük, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{an\leq k\leq n}\left(\ln\frac{1}{\eta_k^*}-\sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{\nu}\right)<z\sqrt{\sum_{an\leq k\leq n}\frac{1}{k^2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{5. 4}$$

Mivel $k\geq an$ és $0<a<1$ esetén

$$\sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{\nu}=\ln\frac{n}{k}+O\left(\frac{1}{n}\right)\ \text{és}\ \sqrt{\sum_{an\leq k\leq n}\frac{1}{k^2}}=\sqrt{\frac{1-a}{an}}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

az (5. 4) alatti relációból:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{an\leq k\leq n}\ln\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*}<z\sqrt{\frac{1-a}{an}}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \tag{5. 5}$$

tehát végül, bevezetve a $z\sqrt{\frac{1-a}{a}}=y$ jelölést,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\max_{an\leq k\leq n}\left(\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*}-1\right)<y\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\frac{a}{1-a}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{5.6}$$

ha $y>0$. (5.6)-ból (5.2) és (5.3) figyelembevételével a 3.1. tétel következik.

Térjünk át most a 3.3. tétel bizonyítására. A

$$\tau_1=\sqrt{n}\max_{na\leq k\leq nb}\left(\log\frac{1}{\eta_k^*}-\sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{\nu}\right)=\sqrt{n}\max_{na\leq k\leq nb}\sum_{j=1}^{n+1-k}\frac{\delta_j-1}{n+1-j} \tag{5.7}$$

valószínűségi változót két változó összegeként állíthatjuk elő, $\tau_1=\tau_2+\tau_3$ alakban, ahol

$$\tau_2=\sqrt{n}\sum_{1\leq j\leq n+1-nb}\frac{\delta_j-1}{n+1-j} \tag{5.8}$$

és

$$\tau_3=\sqrt{n}\max_{na\leq n+1-k\leq nb}\sum_{j=1}^{k}\frac{\delta_j-1}{n+1-j}. \tag{5.9}$$

Nyilvánvaló, hogy τ_2 határértékben $\sqrt{\frac{1-b}{b}}$ szórású normális eloszlású valószínűségi változó, a 3.1. tétel bizonyításából pedig láthatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau_3\sqrt{b}<z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{z\sqrt{\frac{a}{b+a}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad (z>0). \tag{5.10}$$

Figyelembevéve továbbá, hogy τ_2 és τ_3 függetlenek, (5.8)-ból és (5.10)-ből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau_1<y)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{b}{1-b}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{bu^2}{2(1-b)}}\int_0^{(y-u)\sqrt{\frac{ab}{b-a}}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,du. \tag{5.11}$$

Ezzel a (3.3) tételt bebizonyítottuk.

Ugyanezen módszerrel bizonyíthatjuk be a 3.2. tételt is:

Az (5.3) alatti reláció helyét itt

$$\sqrt{n}\sup_{a\leq G_n(x)}\left|\frac{G_n(x)-x}{x}\right|=\sqrt{n}\max_{na\leq k\leq n}\left(\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*}-1\right|,\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_{k+1}^*}-1\right|\right) \tag{5.12}$$

veszi át, melyből következik, hogy

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\max_{na\leq k\leq n}\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*}-1\right| &\leq \sqrt{n}\sup_{a\leq G_n(x)}\left|\frac{G_n(x)-x}{x}\right|\leq \\ &\leq \sqrt{n}\max_{na\leq k\leq n}\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*}-1\right|+\frac{1}{a\sqrt{n}}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Ugyanis, ha $\eta_{k+1}^* < \frac{k}{n}$, úgy $\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_{k+1}^*} - 1\right| = \frac{\frac{k}{n}}{\eta_{k+1}^*} - 1 < \frac{\frac{k+1}{n}}{\eta_{k+1}^*} - 1 = \left|\frac{\frac{k+1}{n}}{\eta_{k+1}^*} - 1\right|$,

ha viszont $\eta_{k+1}^* \geqq \frac{k}{n}$, úgy $k \geqq na$ esetén $\eta_{k+1}^* \geqq a$ és így

$$\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_{k+1}^*} - 1\right| = 1 - \frac{\frac{k}{n}}{\eta_{k-1}^*} \leqq 1 - \frac{\frac{k+1}{n}}{\eta_{k-1}^*} + \frac{1}{n\eta_{k+1}^*} \leqq \left|\frac{\frac{k+1}{n}}{\eta_{k+1}^*} - 1\right| + \frac{1}{na}.$$

Tehát minden körülmények között

$$\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_{k+1}^*} - 1\right| \leqq \left|\frac{\frac{k+1}{n}}{\eta_{k+1}^*} - 1\right| + \frac{1}{na} \qquad (k \geqq na)$$

és így, mivel $\max\left|\frac{\frac{k+1}{n}}{\eta_{k-1}^*} - 1\right| = \max\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*} - 1\right|$, tehát

$$\max_{na \leqq k \leqq n}\left(\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*} - 1\right|, \left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_{k+1}^*} - 1\right|\right) \leqq \max_{na \leqq k \leqq n}\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*} - 1\right| + \frac{1}{na}.$$

Az itt szereplő

$$\sqrt{n} \max_{na \leqq k \leqq n}\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*} - 1\right|$$

változó határeloszlása megegyezik a

$$\sqrt{n} \max_{na \leqq k \leqq n}\left|\log\frac{1}{\eta_k^*} - \sum_{\nu=k}^{n}\frac{1}{\nu}\right| = \sqrt{n} \max_{na \leqq k \leqq n}\left|\sum_{j=1}^{n+1-k}\frac{\delta_j - 1}{n+1-j}\right|$$

változó határeloszlásával, melyet a (4. 2) tétel segítségével határozhatunk meg.

A 3. 4. tétel bizonyításához egyidejűleg kell alkalmaznunk azokat az eljárásokat, amelyeket a 3. 2. és a 3. 3. tétel bizonyításánál alkalmaztunk; a 3. 4. tétel bizonyításához a 4. 2. tétel helyett a 4. 4. tételt használjuk fel.

A bizonyítás alapgondolata a következő:

$$\sqrt{n} \sup_{a \leqq F(x) \leqq b}\left|\frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)}\right|$$

határeloszlása megegyezik a $\varkappa_1 = \sqrt{n} \max_{na \leqq k \leqq nb}\left(\left|\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*} - 1\right|\right)$ határeloszlásával, ennélfogva megegyezik

$$\varkappa_2 = \sqrt{n} \max_{na \leqq k \leqq nb}\left|\ln\frac{\frac{k}{n}}{\eta_k^*}\right| = \sqrt{n} \max_{na \leqq k \leqq nb}\left|\sum_{j=1}^{n+1-k}\frac{\delta_j - 1}{n+1-j}\right|$$

határeloszlásával és így a 4. 4. tétel akalmazható, mégpedig, mivel az abban szereplő A_n ill. B_n konstansok értékei itt: $B_n = \sqrt{\frac{1-a}{an} + O\left(\frac{1}{n}\right)}$ és $A_n =$

$$=\sqrt{\frac{1-b}{bn}}+O\left(\frac{1}{n}\right), \text{ tehát}$$

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\sqrt{\frac{a(1-b)}{b(1-a)}},$$

és így bevezetve az $S_{n,r}=\sum_{j=1}^{r}\frac{\delta_j-1}{n+1-j}$ jelölést,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sqrt{n}\sup_{a\leqq F(x)\leqq b}\left|\frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)}\right|<y\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left(\max_{n+1-nb\leqq r\leqq n+1-na}|S_{n,r}|\leqq y\sqrt{\frac{a}{1-a}}B_n\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2(1-a)}{8y^2a}}}{2k+1}\left[1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{y\sqrt{\frac{b}{1+b}}}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\varrho_k\right],$$

ahol

$$\varrho_k=\frac{2\sqrt{\frac{1-b}{b}}e^{\frac{y^2b}{2(1-b)}}}{\sqrt{2\pi}y}\int_0^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{u^2(1-b)}{2by^2}}\sin u\,du.$$

Ezzel a 3. 4. tételt be is bizonyítottuk.

6. §. *Megjegyzések a 3. 1—3. 4 tételekben szereplő határeloszlásfüggvényekről*

A 3. 1. tételben szereplő határeloszlásfüggvény értékeit a normális eloszlás táblázatából olvashatjuk le. A 3. 2. tételben szereplő határeloszlásfüggvény értékeit úgy határozhatjuk meg, hogy az

$$L(z)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8z^2}}}{2k+1}\qquad(z>0)\qquad(6.1)$$

függvénybe a $z=y\sqrt{\frac{a}{1-a}}$ értéket helyettesítjük be. A fejezet végén táblázatot adunk az $L\left(y\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)$ függvényre, a különböző értékei mellett. Az $L\left(y\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)$ eloszlásfüggvény menete a különböző értékeire a 2. ábrán látható.

A 3. 3. tételben szereplő határeloszlásfüggvényt közelítőleg a következőképpen számíthatjuk ki:

$$F(y,a,b)=\frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{y\sqrt{\frac{b}{1-b}}}e^{-\frac{u^2}{2}}\int_0^{\left(y-u\sqrt{\frac{1-b}{b}}\right)\sqrt{\frac{ab}{b-a}}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv\,du=\frac{1}{\pi}\iint_T e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}du\,dv\qquad(6.2)$$

ahol T egy végtelen háromszögalakú tartomány az (u, v) síkon, amelyet a következő egyenlőtlenségek definiálnak:

$$-\infty < u < y\sqrt{\frac{b}{1-b}},\quad 0 \leqq v \leqq \sqrt{\frac{a(1-b)}{b-a}}\left(y\sqrt{\frac{b}{1-b}} - u\right) \tag{6. 3}$$

Az $r = \sqrt{u^2+v^2}$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$ polárkoordinátákat bevezetve, kapjuk, hogy

$$F(y, a, b) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\alpha}\left(1-e^{-\frac{ay^2}{2(1-a)\sin^2(\varphi+\alpha)}}\right)d\varphi, \tag{6. 4}$$

ahol $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{a(1-b)}{b-a}}$ és $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, tehát

$$F(y, a, b) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\pi}\left(1-e^{-\frac{ay^2}{2(1-a)\sin^2\beta}}\right)d\beta. \tag{6. 5}$$

Mivel

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-e^{-\frac{ay^2}{2(1-a)\sin^2\beta}}\right)d\beta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\frac{a}{1-a}}} e^{-\frac{u^2}{2}}du, \tag{6. 6}$$

tehát végül nyerjük a következő közelítő kifejezést:

$$F(y, a, b) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{y\sqrt{\frac{a}{1-a}}} e^{-\frac{u^2}{2}}du - \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a(1-b)}{b-a}}}{\pi}(1-R), \tag{6. 7}$$

ahol

$$R = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} e^{-\frac{ay^2}{2(1-a)\sin^2\beta}}d\beta \text{ és } \alpha = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a(1-b)}{b-a}}. \tag{6. 8}$$

Ha $1-b=\varepsilon$ kicsiny, úgy R általában elhanyagolható, kivéve y igen kis értékeit, tekintve, hogy

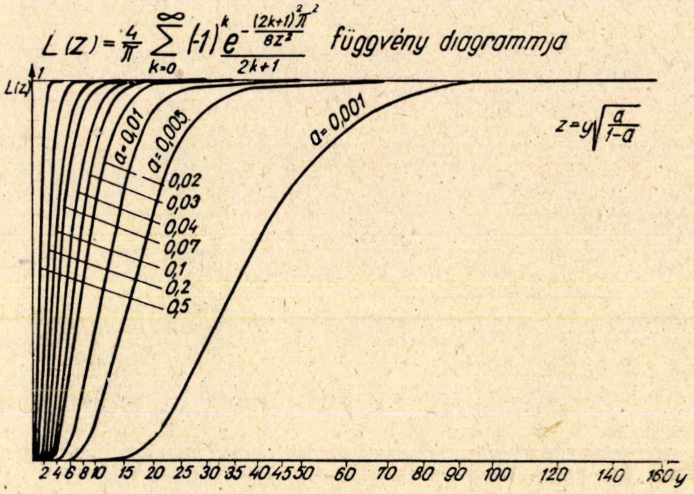
$$R \leqq e^{-\frac{ay^2}{2(1-a)\sin^2\alpha}} = e^{-\frac{by^2}{2(1-b)}}. \tag{6. 9}$$

A 3. 4. tételben szereplő határeloszlásfüggvény a következőképpen számítható ki közelítőleg: az integrálszámítás második középértéktételéből következik, hogy

$$|\varrho_k| = \frac{2e^{-\frac{by^2}{2(1-b)}}\sqrt{\frac{1-b}{b}}}{\sqrt{2\pi}\,y}\left|\int_0^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} e^{\frac{(1-b)u^2}{2by^2}}\sin u\,du\right| \leqq$$
$$\leqq \frac{2e^{-\frac{by^2}{2(1-b)}}\sqrt{\frac{1-b}{b}}}{\sqrt{2\pi}\,y}\,e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2(1-b)}{8y^2b}}. \tag{6. 10}$$

Ilyen módon a 3. 4. tételben szereplő határeloszlásfüggvény a következő alakra hozható, a (6. 1) jelölés felhasználásával:

$$\frac{4}{\pi} L\left(y\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)\left(1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{y\sqrt{\frac{b}{1-b}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)+\Delta, \tag{6. 11}$$



2. ábra

ahol, amint egyszerű számolással belátható

$$\Delta < \frac{2\lambda e^{-\frac{by^2}{2(1-b)}}\sqrt{\frac{1-b}{b}}}{\pi\sqrt{2\pi}\,y}\log\frac{1+e^{-\frac{\pi^2(b-a)}{8aby^2}}}{1-e^{-\frac{\pi^2(b-a)}{8aby^2}}}, \tag{6. 12}$$

amelyből láthatjuk, hogy ha b igen közel van 1-hez, úgy Δ elhanyagolható. Figyeljük meg, hogy a főtag első tényezője csak a-tól, második tényezője csak b-től függ: ez igen leegyszerűsíti a kiszámítást; ugyanis az első tényezőt az $L(z)$ függvény táblázatából, a másodikat a normális eloszlás táblázatából meghatározhatjuk.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *K. Pearson,* Note on Francis Galton's problem. Biometrika *1* (1902) 390—399.

[2] *L. v. Bortkiewicz,* Variationsbreite und mittlere Fehler. Sitzungsber. Berl. Math. Ges. *21* (1922) 3—11.

[3] *E. L. Dodd,* The greatest and the least variate under general laws of error. Trans. Amer. Math. Soc. *25* (1923) 525—539.

[4] *L. H. C. Tippet,* On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population. Biometrika *17* (1925) 264—387.

[5] *M. Fréchet,* Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. Ann. Soc. Polon. Math. *6* (1928) 92—116.

[6] *a)* А. Н. Колмогоров: Известия Акад. Наук СССР Сер. физ-мат.. (1933) 363—372.

b) A. N. Kolmogoroff, Giornale dell'Istitutio Italiano degli Attuari *4* (1933) 1—11 és 83—91.

[7] *V. I. Glivenko,* Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita. Giorn. Ist. Ital. Attuari *4* (1933) 92—99.

[8] *a) N. V. Smirnoff,* Über die Verteilung des allgemeinen Gliedes in der Variationsreihe, Metron *12* (1935) 59—81.

b) Н. В. Смирнов: Comptes Rendus Ac. Sci. Paris. *202* (1936) 449.

c) Н. В. Смирнов: Матем. Сборник *2* (44) (1937) 973 993.

d) Н. В. Смирнов: Матем. Сборник *6* (44) (1939) 3—26 és Вюллемен Мат. *2* (1939).

e) Н. В. Смирнов: Бюллетен Мат. *2* (1939) és Annals of Math. Statistics *19* (1948) 279—281.

[9] *B. V. Gnedenko,* Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, Ann. of Math. *44* (1943) 423—453.

[10] Б. В. Гнеденко и В. С. Королюк: О максимальном расхождении двух эмпирических распределений, Д. А. Н, *80* (1951), 525—528.

[11] Б. В. Гнеденко и Е. Л. Рвачева: Об одной задаче сравнения двух эмпирических распределений, Д. А. Н *82* (1952) 513—516.

[12] Б. В. Гнеденко и В. С. Михалевич: Две теорема о поведений эмпирических функций распределения, Д. А. Н. *85* (1952) 841—845 és 25—27.

[13] В. С. Михалевич: О взаимнои расположении двух эмпирических функций распределения, Д. А. Н. *85* (1952) 485—488.

[14] И. Д. Квит, Д. А. Н. *71* (1950) 229—231.

[15] Г. М. Мания, Обобщение критерия А. Н. Колмогорова для оценки закона распределения по эмпирическим данным, Д. А. Н. (1949(495—497.

[16] И. Н. Гихман: Об емпирической функций распределения в случае группировки данных. Д. А. Н. *82* (1952) 837—840.

[17] *W. Feller,* On the Kolmogorov—Smirnov limit theorems for empirical distributions. Ann. Math. Statistics *19* (1948) 177—189.

[18] *J. L. Doob,* Heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems. Ann. Math. Statistics *20* (1949) 393—403.

[19] *a) F. J. Massey,* A note on the estimation of a distribution function by confidence limits. Ann. Math. Statistics *21* (1950) 116—119.

b) A note on the power of a non-parametric test. Ann. Math. Statistics *21* (1950), 440—443.

c) Distribution table for the deviation between two sample cumulatives. Ann. Math Statistics *23* (1952) 435—441.

[20] *a) M. D. Donsker,* Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems. Ann. Math. Statistics *23* (1952) 277—281.

b) An invariance principle for certain probability limit theorems, Memoirs Amer. Math. Soc. *6* (1951) 1—12.

[21] *T. W. Anderson—D. A. Darling,* Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes Ann. Math. Statistics *23* (1952), 193—212.

[22] *P. Erdős—M. Kac,* Bull. Amer. Math. Soc. *52* (1946) 292.

[23] *S. Malmquist,* Skand. Actuarietidskrift. *33* (1950) 214.

[24] *Hajós György—Rényi Alfréd,* A rendezett minták elméletének néhány alapvető kérdéséről, sajtó alatt a III. Oszt. Közleményeiben.

[25] *H. Cramér,* Mathematical methods of statistics. Princeton, 1946.

[26] Л. И. Брагински: Оперативый статистический контроль качества в машиностроенин, Москва, Машгиз, 1951.

[27] *A. Wald,* Limit distribution of the maximum and minimum of successive cumulative sums of random variables. Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947) 142—153.

[28] *A. Wald,* On the distribution of the maximum of successive cumulative sums of independently but not identically distributed chance variables, Bull. Amer. Math. Soc. *54* (1948) 422—430.

[29] *K. L. Chung,* Asymptotic distribution of the maximum cumulative sum of independent random variables, Bull. Amer. Math. Soc. *54* (1948) 1162—1170.

[30] *S. S. Wilks,* Order Statistics. Bull. Amer. Math. Soc. *54* (1948) 6—50.

y \ a	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,1													0,0000	0,0000
0,5											0,0000	0,0000	0,0008	0,0092
1,0						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0092	0,0716	0,2001	0,3708
1,5			0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0023	0,0050	0,0092	0,1420	0,3543	0,5591	0,7328
2,0		0,0000	0,0001	0,0008	0,0036	0,0101	0,0212	0,0367	0,0563	0,0791	0,3708	0,6193	0,7951	0,9082
2,5		0,0001	0,0022	0,0112	0,0299	0,0578	0,0925	0,1320	0,1730	0,2155	0,5778	0,7966	0,9714	0,9751
3,0	0,0000	0,0015	0,0157	0,0474	0,0941	0,1487	0,2061	0,2632	0,3184	0,3708	0,7328	0,9009	0,9915	0,9954
3,5	0,0001	0,0092	0,0491	0,1135	0,1879	0,2629	0,3341	0,3994	0,4598	0,5140	0,8398	0,9561	0,9978	0,9991
4,0	0,0006	0,0291	0,1052	0,2001	0,2942	0,3804	0,4570	0,5244	0,5835	0,6353	0,9082	0,9823	0,9995	0,9999
4,5	0,0031	0,0643	0,1776	0,2950	0,4001	0,4902	0,5665	0,6311	0,6860	0,7328	0,9511	0,9936	0,9999	1,0000
5,0	0,0096	0,1135	0,2582	0,3895	0,4985	0,5873	0,6594	0,7193	0,7683	0,8088	0,9751	0,9979	1,0000	
5,5	0,0225	0,1726	0,3511	0,4784	0,5863	0,6723	0,7374	0,7903	0,8326	0,8665	0,9887	0,9994		
6,0	0,0428	0,2375	0,4204	0,5591	0,6627	0,7409	0,8006	0,8463	0,8817	0,9081	0,9954	0,9999		
6,5	0,0707	0,3045	0,4952	0,6310	0,7282	0,7989	0,8509	0,8895	0,9181	0,9395	0,9977	1,0000		
7,0	0.1053	0,3708	0,5639	0,6939	0,7834	0,8461	0,8904	0,9220	0,9446	0,9607	0,9991			
7,5	0,1452	0,4347	0,6193	0,7484	0,8294	0,8839	0,9207	0,9460	0,9633	0,9752	0,9996			
8,0	0,1889	0,4950	0,6811	0,7951	0,8671	0,9135	0,9436	0,9634	0,9763	0,9847	0,9999			
8,5	0,2348	0,5513	0,7301	0,8345	0,8977	0,9365	0,9606	0,9756	0,9850	0,9908	1,0000			
9,0	0,2819	0,6032	0.7731	0,8696	0,9221	0,9540	0,9729	0,9849	0,9907	0,9946				
9,5	0,3290	0,6510	0,8104	0,8950	0,9410	0,9713	0,9817	0,9898	0,9944	0,9969				
10,0	0,3754	0,6938	0,8427	0,9175	0,9564	0,9770	0,9878	0,9936	0,9967	0,9983				
10,5	0,4205	0,7328	0,8704	0,9358	0,9680	0,9840	0,9921	0,9961	0,9981	0,9991				
11,0	0,4640	0,7678	0,8939	0,9505	0,9768	0,9891	0,9949	0,9976	0,9989	0,9995				
11,5	0,5055	0,7992	0,9137	0,9622	0,9833	0,9927	0,9968	0,9986	0,9994	0,9997				
12,0	0,5450	0,8271	0,9303	0,9713	0,9882	0,9951	0,9980	0,9992	0,9997	0,9999				
12,5	0,5824	0.8517	0,9441	0,9784	0,9917	0,9968	0,9988	0,9995	0,9998	0,9999				
13,0	0,6174	0,8734	0,9555	0,9841	0,9943	0,9980	0,9993	0,9997	0,9999	1,0000				
13,5	0,6509	0,8924	0,9648	0,9883	0,9961	0,9987	0,9996	0,9999	1,0000					
14,0	0,6812	0,9090	0,9724	0,9915	0,9973	0,9992	0,9998	0,9999						
14,5	0,7099	0,9234	0,9780	0,9938	0,9982	0,9995	0,9999	1,0000						
15,0	0,7367	0,9358	0,9833	0,9956	0,9988	0,9997	0,9999							
15,5	0,7615	0,9464	0,9872	0,9969	0,9992	0,9998	1,0000							
16,5	0,7844	0,9555	0,9902	0,9978	0,9995	0,9999								
16,5	0,8055	0,9631	0,9927	0,9985	0,9997	0,9999								
17,0	0,8249	0,9697	0,9944	0,9990	0,9998	1,0000								

17,5	0,8428	0,9752	0,9958	0,9993	0,9999
18,0	0,8591	0,9797	0,9969	0,9995	0,9999
18,5	0,8740	0,9836	0,9977	0,9997	1,0000
19,0	0,8876	0,9867	0.9983	0,9998	
19,5	0,9000	0,9893	0,9988	0,9999	
20,0	0,9112	0,9915	0,9991	0,9999	
20,5	0,9213	0,9932	0,9994	0,9999	
21,0	0,9304	0,9946	0,9996	1,0000	
21,5	0,9386	0,9957	0,9997		
22,0	0,9460	0,9967	0,9998		
22,5	0,9526	0,9974	0,9998		
23,0	0,9590	0,9980	0,9999		
23,5	0,9636	0,9984	0,9999		
24,0	0,9696	0,9983	1,0000		
24,5	0,9724	0,9991			
25,0	0,9760	0,9993			
26	0,9821	0,9996			
27	0,9867	0,9998			
28	0,9902	0,9999			
29	0,9929	0,9999			
30	0,9949	1,0000			
35	0,9991				
40	0,9999				
43	1,0000				

Az $L\left(y\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)$ függvény értékeinek táblázata.

FEJÉR LIPÓT EGY SORELMÉLETI TÉTELÉRŐL

FREUD GÉZA

Bemutatta Turán Pál r. tag az 1952. június 16-án tartott felolvasó ülésen

Fejér Lipót[1,2] bebizonyította, hogy ha az

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

függvény $|z| < 1$-re reguláris, korlátos és egyrétű, akkor az (1) hatványsor minden olyan $z = e^{i\varphi}$ helyen konvergens, ahol a

$$\lim_{r=1-0} f(re^{i\varphi}) = f(e^{i\varphi}) \tag{2}$$

radiális határérték létezik és a sor összege ott egyenlő $f(e^{i\varphi})$-vel. *Fejér* bizonyítása azon a felismerésen alapul, hogy a $w = f(z)$ leképezés a $|z| < 1$ kört olyan tartományba viszi át, melynek területe véges:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^2 \, r \, d\varphi \, dr = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 < \infty. \tag{3}$$

Ebből *Fejér* tétele egyszerű becslésekkel levezethető.

Megmutatjuk, hogy a (3) becslés és ennek következtében *Fejér tétele is, akkor is érvényes marad, ha $f(z)$ már nem egyrétű, de az egységkörben reguláris, korlátos és egyrétű $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z)$ függvényeknek racionális egész függvénye:*

$$f(z) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 0}^{N} c_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \varphi_1^{k_1} \varphi_2^{k_2} \cdots \varphi_n^{k_n}. \tag{4}$$

A továbbiakban az egységkör belsejében reguláris és korlátos függvényeket, amelyek (1) hatványsora eleget tesz a (3) feltételnek, *Fejér-féle függvényeknek* fogjuk nevezni. Tehát speciálisan az egységkör belsejében reguláris, korlátos és egyrétű függvények Fejér-féle függvények. (3)-ból következik, hogy egy Fejér-féle függvény (1) hatványsora minden olyan $z = e^{i\varphi}$ helyen konvergál, ahol a (2) határérték létezik és összege $f(e^{i\varphi})$. Bebizonyítjuk az alábbi tételt:

Tétel: A Fejér-féle függvények gyűrűt alkotnak.

Ez az alábbi két segédtételből következik:

I. segédtétel: Ha $f_1(z)$ és $f_2(z)$ Fejér-féle függvény, akkor $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ is Fejér-féle függvény.

Bizonyítás. Miután $f_1(z)$ és $f_2(z)$ az egységkörben korlátosak, ugyanott $f_1(z) + f_2(z)$ is korlátos lesz. Legyen

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} z^n; \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n. \tag{5}$$

akkor $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_{1n} + a_{2n}|^2 \leqq 2\sum_{n=1}^{\infty} n|a_{1n}|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} n|a_{2n}|^2 < \infty$, miután az $f_1(z)$ és $f_2(z)$ Fejér-féle függvények együtthatói eleget tesznek a (3) feltételnek.

II. Segédtétel: Ha $f_1(z)$ és $f_2(z)$ Fejér-féle függvények, akkor $f(z) = f_1(z) f_2(z)$ is Fejér-féle függvény.

Bizonyítás: $f_1(z) f_2(z)$ az egységkörben korlátos, miután mind a két tényező korlátos. k legyen $f_1(z)$ és $f_2(z)$ közös korlátja. Akkor

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^2 r\,d\varphi\,dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi}) f_2(re^{i\varphi}) + f_1(re^{i\varphi}) f_2'(re^{i\varphi})|^2 r\,d\varphi\,dr <$$

$$< k \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_1'(re^{i\varphi})|^2 r\,d\varphi\,dr + k \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f_2'(re^{i\varphi})|^2 r\,d\varphi\,dr < \infty .$$

Még csak annyit kell megjegyeznünk, hogy $f(z) \equiv 1$ és általánosabban $f(z) \equiv a_0$ is triviális módon Fejér-féle függvény. Ennek következtében (4) is eleme a Fejér-féle függvények gyűrűjének, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Turán Pál egy egyszerű példájából* következik, hogy a korlátosság feltétele nem hagyható el. Legyen ugyanis

$$f_1(z) = f_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad a_n = \frac{1}{n \log^{\frac{5}{8}} n} .$$

Könnyen belátható, hogy $\lim\limits_{x=1-0} f(x) = +\infty$, tehát $f(z)$ az egységkörben nem korlátos. Legyen

$$[f(z)]^2 = \sum_{n=4}^{\infty} \beta_n z^n ,$$

akkor

$$\beta_n = \sum_{\nu=2}^{n} a_\nu a_{n-\nu} > \frac{1}{n \log^{\frac{5}{8}} n} \int_4^n \frac{dx}{x \log^{\frac{5}{8}} x} =$$

$$= \frac{8}{3} \left(\frac{1}{n \log^{\frac{1}{4}} n} - \frac{(\log 4)^{\frac{3}{8}}}{n \log^{\frac{5}{8}} n} \right) > \frac{1}{2} \frac{1}{n \log^{\frac{1}{4}} n}, \quad \text{ha} \quad n > 150.$$

Tehát a $\Sigma n |\beta_n|^2$ sor majoránsa a divergens $\frac{1}{4} \sum\limits_{150}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\frac{1}{2}} n}$ sornak és így maga is divergál.

Tehát az egységkör belsejében reguláris függvények, amelyek a (3) feltételnek eleget tesznek, de nem szükségképpen korlátosak, nem alkotnak gyűrűt.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

1. *L. Fejér:* Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene, *Schwarz Festschrift* (Springer, 1914) 42—53.

2. *L. Fejér:* Fourierreihe und Potenzreihe, Monatshefte für Math. *28*, (1917), 64—76.

* Szóbeli közlés.

ORTOGONÁLIS POLINOMOK ERŐS $(C, 1)$-SZUMMÁLHATÓSÁGÁRÓL

FREUD GÉZA

Bemutatta Alexits György r. tag. az 1952. június 16-án tartott felolvasó ülésen

I

Bevezetés

Tandori Károly[7] bebizonyította, hogy *Hardy* és *Littlewood*[4] Fourier-sorok erős $(C, 1)$-szummálhatóságára vonatkozó tétele az ortogonális polinom-sorok egy széles osztályára általánosítható. *Tandori* tétele pontosan a következőket mondja:

$p_0(x), p_1(x), \ldots$ legyen az (a, b) intervallumban a $w(x) \geqq 0$ súlyfüggvényekhez tartozó normált ortogonális polinomok sorozata. A szokásos módon $p_n(x)$ legyen a pontosan n-edfokú polinom és $p_n(x)$ kifejtésében x^n együtthatója legyen pozitív. Ha most (a, b) egy (α, β) belső részintervallumában

$$|p_n(x)| \leqq k \qquad (n = 0, 1, 2) \ldots \tag{1}$$

(k n-től független), továbbá $w(x)[f(x)]^2 \in L$ (a továbbiakban rövidítve: $f \in L^2(w)$), akkor az

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu p_\nu(x), \ a_\nu = \int_a^b f(x) p_\nu(x) w(x)\, dx \tag{2}$$

ortogonális sorfejtés (α, β)-ban majdnem mindenütt erősen $(C, 1)$-szummálható $f(x)$-hez.

Bebizonyítjuk, hogy ez a tétel lényegesen általánosítható, éspedig az (1) feltétel az annál sokkal gyengébb

$$\sum_{\nu=0}^{n} [p_\nu(x)]^2 = O(n) \tag{3}$$

feltétellel helyettesíthető. Ezen felül megmutatjuk, hogy a (3) teljesülését is csak egy rögzített x értékre kell feltételeznünk; ebben az esetben a (2) sor az x helyen $(C, 1)$-szummálható, ha az alább részletezett (4) lokális feltétel teljesül.

Ezen általánosítás azért jelentős, mert (3) *biztosan teljesül, ha a $w(t)$ súlyfüggvénynek az x hely egy (akármilyen kis) környezetében pozitív alsó korlátja van.*

Bár a klasszikus Jacobi-féle polinomokra (1) teljesül, nem ismerünk olyan általános, a súlyfüggvényre vonatkozó kritériumot, amiből (1) következne. A szakirodalomban ismert kritériumok (*Bernstejn*,[1] *Geronimusz*,[3] *Ko-*

*rous**,[5] *Szegő***)[6] erős megszorításokat tesznek a súlyfüggvényre; ennek megfelelően viszont többet állítanak, mint (1).

Tételek

I. tétel: Az x helyen ($a < x < b$) *teljesüljön* (3), $f \in L^2(w)$ *és legyen*

$$\varphi_x(h) = \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]^2 w(t)\, dt = O(|h|), \tag{4}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(x) - f(x)| = 0. \tag{5}$$

Ha (3) *és* (4) *az* (a, b)*-nek egy* (α, β) *belső részintervallumában egyenletesen teljesül, akkor* (5) *is* (α, β) *minden belső részintervallumában egyenletesen teljesül.*

II. tétel: Az (a, b) *egy belső* (α, β) *részintervallumában legyen*

$$w(x) > m > 0, \tag{6}$$

akkor a (3) *becslés* (α, β) *minden belső részintervallumára egyenletesen teljesül.*

Ha $f \in L^2(w)$, akkor (4) az (a, b) ortogonalitási intervallumban majdnem mindenütt teljesül (*Tandori*[7]) és így a (2) ortogonális kifejtés (α, β)-ban majdnem mindenütt $(C, 1)$-szummálható. Ezen felül *Zygmund*[8] egy tételéből következik:

III. tétel: Ha (a, b)*-nek egy E részhalmazán* (3) *teljesül, akkor a* (2) *ortogonális kifejtés E majdnem minden pontjában erősen* $(C, 1)$*-szummálható* $f(x)$*-hez.****

Ha

$$M > w(x) > m > 0, \quad \text{ha} \quad \alpha \leqq x \leqq \beta. \tag{7}$$

Akkor a II. tétel szerint (3) az (α, β) minden belső részintervallumában egyenletesen teljesül; ha ezen felül $f(x)$ (α, β)-ban folytonos, akkor a (4) becslés (α, β) minden belső részintervallumára egyenletesen érvényes. Ebből az I. tétel szerint következik, hogy

IV. tétel: A $w(x)$ *súlyfüggvény tegyen eleget a* (7) *egyenlőtlenségnek és* $f(x)$ *legyen* (α, β)*-ban folytonos; akkor a* (2) *ortogonális kifejtés részletösszegeinek számtani közepei* (α, β) *minden belső részintervallumában egyenletesen* $f(x)$*-hez tartanak.* (*Fejér* approximációtételének általánosítása.)

* Lásd még *I. P. Natanson* Konstruktív Függvénytan 3. tétel, 277.

** 12. 1. 6. tétel, 291.

*** Mint ismeretes, az erős $(C, 1)$-szummálhatóság azt jelenti, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \sum [s_\nu(x) - f(x)]^2 = 0.$$

Az I. tétel bizonyítása

Legyenek n és $\nu \leqq n$ nemnegatív egészszámok, (2) következtében

$$s_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\nu} a_r p_r(x) = \int_a^b k_\nu(x,t) f(t)\,dt, \tag{8}$$

ahol

$$k_\nu(x,t) = \sum_{r=0}^{\nu} p_r(x) p_r(t) = \gamma_\nu \frac{p_{\nu+1}(x)p_\nu(t) - p_\nu(x)p_{\nu+1}(t)}{x-t}, \tag{9}$$

ahol a Schwarz-féle egyenlőtlenség szerint

$$\begin{gathered} 0 < \gamma_\nu = \int_a^b p_\nu(t) p_{\nu+1}(t) w(t)\,dt \leqq \\ \leqq \Big(\int_a^b [p_\nu(t)]^2 w(t)\,dt\Big)^{1/2} \Big(\int_a^b |t| [p_{\nu+1}(t)]^2 w(t)\,dt\Big)^{1/2} \leqq \mathrm{Max}\,(|a|, |b|). \end{gathered} \tag{10}$$

Tekintettel (8) és (9)-re

$$s_\nu(x) - f(x) = A_\nu - \gamma_\nu p_{\nu+1}(x) B_\nu + \gamma_\nu p_\nu(x) B_{\nu+1}, \tag{11}$$

ahol

$$A_\nu = \int_{x-\frac{c}{n+1}}^{x+\frac{c}{n+1}} k_\nu(x,t)[f(t)-f(x)]w(t)\,dt, \tag{12}$$

$$B_\nu = \int_a^{x-\frac{c}{n+1}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} p_\nu(t) w(t)\,dt + \int_{x+\frac{c}{n+1}}^{b} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} p_\nu(t) w(t)\,dt. \tag{13}$$

A $c > 0$ állandót válasszuk úgy, hogy a $a < x-c < x+c < b$ (12), (9), (3) és (4)-ből, tekintettel arra, hogy $\nu \leqq n$:

$$\begin{gathered} |A_\nu| \leqq \Big(\int_{x-\frac{c}{n+1}}^{x+\frac{c}{n+1}} [f(t)-f(x)]^2 w(t)\,dt\Big)^{1/2} \Big(\int_a^b [k_\nu(x,t)]^2 w(t)\,dt\Big)^{1/2} = \\ = O(n^{-1/2}) \Big(\sum_{r=0}^{\nu} [p_r(x)]^2\Big)^{1/2} = O(1) \end{gathered} \tag{14}$$

(13) következtében B_ν a ν indexű együtthatója az

$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x - \dfrac{c}{n+1} < t < x + \dfrac{c}{n+1} \\ \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}, \text{ ha } t < x - \dfrac{c}{n+1}, \text{ vagy } t > x + \dfrac{c}{n+1} \end{cases}$$

függvénynek. Tehát a Bessel-féle egyenlőtlenség következtében, tekintettel (4)-re:

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} B_\nu^2 \leqq \int_a^{x-\frac{c}{n+1}} [F(t)]^2 w(t)\,dt + \int_{x+\frac{c}{n+1}}^{b} [F(t)]^2 w(t)\,dt =$$

$$= \left[\frac{\varphi_x(t-x)}{(t-x)^2}\right]_a^{x-\frac{c}{n+1}} + \left[\frac{\varphi_x(t-x)}{(t-x)^2}\right]_{x+\frac{c}{n+1}}^{b} + 2\int_a^{x-\frac{c}{n+1}} \frac{\varphi_x(t-x)}{(t-x)^2}\,dt + \tag{15}$$

$$+2\int_{x+\frac{c}{n+1}}^{b} \frac{\varphi_x(t-x)}{(t-x)^3}\,dt = 0(n).$$

Tehát

$$\sum_{\nu=0}^{n} (|p_\nu(x)|\,|B_{\nu+1}| + |p_{\nu+1}(x)|\,|B_\nu| \leqq 2\left(\sum_{\nu=0}^{n+1} [p_\nu(x)]^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} B_\nu^2\right)^{1/2} = o(n) \tag{16}$$

(10), (11), (14) és (16) következtében (5) teljesül. Q. e. d.

Ha (3) és (4) (α, β)-ban egyenletesen teljesül, akkor (α, β) minden rögzített belső $(\alpha_0 \beta_0)$ részintervallumába eső x pontokra a c állandót ugyanakkorának választhatjuk. Ennek következtében (15) is (α_0, β_0)-ban egyenletesen teljesül.

A II. tétel bizonyítása

Ismeretes, hogy $k_n(x, x)$ a felső határa $|\pi_n(x)|^2$-nek, ha $\pi_n(x)$ végigfut azon legfeljebb n-edfokú polinomokon, amelyek kielégítik az

$$\int_a^b |\pi_n(t)|^2 w(t)\,dt \leqq 1 \tag{17}$$

feltételt.*

A továbbiakban éppen azt a polinomot jelöljük $\pi_n(t)$-vel, amely az x helyen a $|\pi_n(x)|^2 = k_n(x, x)$ felső határt tényleg felveszi. A $w(x) \geqq m > 0$ feltételből és (17)-ből következik, hogy

$$m \int_a^b |\pi_n(t)|^2\,dt \leqq 1,$$

tehát ugyanezen Szegő-féle lemma alapján

$$m|\pi_n(x)|^2 = m\,k_n(x, x) \leqq \sum_{\nu=0}^{n} [p_\nu^*(x)]^2, \tag{18}$$

ahol $p_\nu^*(x)$ az (α, β) intervallumban $w^*(x) \equiv 1$ súlyfüggvényhez tartozó

* Lásd *Szegő* loc. cit.[6], 3. 1. 3 tétel 38.

ν-edfokú ortogonális polinom. Könnyen belátható, hogy

$$p_\nu^*(x)=\sqrt{\frac{2\nu+1}{\beta-\alpha}}\,P_\nu\left(-1+2\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right), \tag{19}$$

ahol $P_\nu(x)$ a ν-edfokú Legendre-féle polinomot jelenti, a szokásos $P_\nu(1)=1$ normálással. Laplace egy klasszikus becslése szerint $(-1, +1)$ minden belső részintervallumában u-ban egyenletesen*

$$P_\nu(u)=0(\nu^{-1/2}) \tag{20}$$

(18), (19) és (20)-ből kapjuk tehát, hogy

$$k_n(x, x)=\sum_{\nu=0}^{n}[p_\nu(x)]^2=0(n). \tag{21}$$

Ugyanezt a gondolatmenetet, amely a (18) egyenlőtlenséget szolgáltatta, *Erdős Pál* és *Turán Pál*[2] használták először, a Lagrange-féle interpoláció alapfüggvényeinek becslésére.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *S. Bernstein,* Sur les polynomes orthogonaux relatifs á un segment fini, Journal de Math. (9), *9* (1930), 127—177. és *10* (1931), 219—286.

[2] *P. Erdős—P. Turán,* On interpolation, III, Annals of Math., *41* (1940), II. Lemma 524—525.

[3] Я. Л. Теронимус: Об ортогональных полиномах В. А. Стеклова, Доклады Ак. Наук СССР *83* (1952), 5—8.

[4] *G. H. Hardy* és *J. E. Littlewood,* Sur la série de Fourier d'une fonction á carré sommable, C. R. Acad. Sci. Paris, *156* (1913), 1307—1309.

[5] *J. Korous,* O rozwoji funkci jedné reálné proménné v radu jistich orthogonálnich polinomu. Rozpravy Ceske Akadémie (2), *48* (1938), 12.

[6] *G. Szegő,* Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXIII. kötet (1939).

[7] *K. Tandori,* Über die Cesárosche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *3* (1952), 73—82.

[8] *A. Zygmund,* Un theoreme sur les séries orthogonales, Studia Math., *2* (1930), 181—182.

* Lásd *I. P. Natanson* Konstruktív Függvénytan (143) képlet, 294.

A MAGASABBRENDŰ GÖMBFELÜLETI FÜGGVÉNYEKRE VONATKOZÓ INTEGRÁLEGYENLETRŐL

FENYŐ ISTVÁN

Bemutatta Egerváry Jenő r. tag az 1953. március 2-án tartott felolvasó ülésen

Jelöljük az $n+2$ dimenziós euklideszi térben definiált gömbfelületi függvényeket $S_k^{(n)}$-el, ahol k a gömbfelületi függvény fokszáma. Ismeretes, hogy adott k mellett

$$u_k = \frac{(k+n-1)!}{k!\,n!}(2k+n)$$

egymástól lineárisan független gömbfelületi függvény létezik.[1] Ortogonalizáljuk és 1-re normáljuk ezeket az egységsugarú gömbfelületre vonatkozólag. Így jutunk az

$$S_{k,1}^{(n)}, S_{k,2}^{(n)}, \ldots, S_{k,u_k}^{(n)} \qquad (k=0,1,2,3,\ldots)$$

$n+2$ dimenziós egységsugarú gömbön ortonormált függvénysorozatra.

1. Bebizonyítjuk a következő tételt:

I. tétel. Legyen $F(\xi)$ tetszőleges, négyzetével együtt integrálható függvény. Ha az egységgömb két, P és Q pontjához húzott sugár által alkotott szög γ, akkor a

$$\varphi(P) = \lambda \int_G F(\cos\gamma)\,\varphi(Q)\,df_Q \, *$$

homogén integrálegyenlet sajátértékei

$$\lambda_k = \frac{(2k+n)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\cdot 4\pi^{\frac{n}{2}+1} C_k}; \quad C_k = \frac{2^{n-1}k!\left(\frac{n}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\pi\Gamma(n+k)} \int_{-1}^{+1} F(\xi)\,V_k^{(n)}(\xi)(1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\,d\xi,$$

normált sajátfüggvényei

$$\varphi(P) = S_{k,i}^{(n)}(P) \qquad (k=0,1,2,\ldots;\ i=1,2,\ldots u_k),$$

ahol $V_k^{(n)}$ jelenti az $n+2$ dimenziós Gegenbauer-függvényeket. Minden sajátérték multiplicitása u_k.

Ennek a tételnek speciális esete *Egerváry Jenő* doktori értekezésében bebizonyított tétel.[2] Ha ugyanis $n=0$, azaz a tételt a kétdimenziós síkra vonatkoztatjuk, akkor nyilván $F(\cos\gamma) = K(x-y)$ alakú szimmetrikus függvény. A tétel szerint a sajátérték

* G jelenti az $n+2$ dimenziós tér egységgömb felületét.

$$\lambda_k^{(0)}=\lim_{n\to 0}\lambda_k^{(n)}=\lim_{n\to 0}\frac{(2k+n)\,\Gamma(n+k)}{2\pi^{\frac{n}{2}}k!\left(\frac{n}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int\limits_{-1}^{+1}V_k^{(n)}(\xi)F(\xi)(1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}d\xi}=$$

$$=\lim_{n\to 0}\frac{(2k+n)\,\Gamma(n+k)}{2\pi^{\frac{n}{2}}k!\left(\frac{n}{2}+k\right)\int\limits_{0}^{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)V_k^{(n)}(\cos\vartheta)F(\cos\vartheta)\sin^n\vartheta\, d\vartheta}.$$

Minthogy [3]

$$\lim_{n\to 0}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)V_k^{(n)}(\cos\vartheta)=\frac{2\cos k\vartheta}{k}$$

és a konvergencia egyenletes, figyelembevéve, hogy $F(\cos\vartheta)$ páros függvény, könnyen bizonyítható, hogy

$$\lambda_k^{(0)}=\frac{1}{\int\limits_0^{2\pi}F(\cos\vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta}.$$

Ezekhez a számokhoz tartozó sajátfüggvények (mint ez a későbbiekből egészen nyilvánvaló)

$$\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx$$

alakúak.

A tételt először igen speciális esetre — bizonyos differenciálegyenletnek eleget tevő $F(\xi)$ függvény esetére — *Appel* és *Kampé de Feriet* bizonyították be.[4] Később a tétel bizonyítását általános esetre *A. Erdélyi* adta.[5] *Erdélyi* bizonyítása elég mély segédeszközöket használ fel, mint pl. a Gegenbauer-féle függvényekre vonatkozó elég bonyolult addiciós képletet és a komplex Fourier-transzformációra vonatkozó Plancherel-féle elméletet. Ezenkívül *Erdélyi* a tételt a miénktől eltérő alakban nyeri. Az ő sajátértékformulái a mienknél sokkal bonyolultabbak.

Az első tétel speciális esetét $n=1$-re nemrégen bizonyítottuk be.[6]

A következőkben a tétel új, egyszerű bizonyítását adjuk.

2. *Bizonyítás.* Legyen $F(\xi)\,[-1,+1]$-ben négyzetével együtt integrálható függvény. Miután

$$\int\limits_{-1}^{+1}V_\nu(\xi)V_\mu(\xi)(1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}d\xi=\begin{cases}0, & \text{ha } \nu\neq\mu\ ^7\\ \dfrac{\pi\Gamma(n+\nu)}{2^{n-1}\nu!\left(\frac{n}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}, & \text{ha } \mu=\nu,\end{cases}$$

fejtsük az F függvényt a V_k-k szerint haladó sorba:

$$F(\xi)\sim\sum_{k=0}^{\infty}C_kV_k(\xi),$$

ahol

$$C_k=\frac{2^{n-1}k!\left(\frac{n}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\pi\Gamma(n+k)}\int\limits_{-1}^{+1}F(\xi)V_k(\xi)(1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}d\xi.$$

Ennek a sornak N indexű részletösszege legyen $\sigma_N(\xi)$, akkor a Bunjakovszkij-féle egyenlőtlenség és az $S_{k,i}$ függvények normáltsága folytán

$$I^2 = \left(\int_G [F(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)] S_{k,i}(Q)\, df_Q\right)^2 \leqq \int_G [F(\cos\gamma) - \sigma_N(\cos\gamma)]^2 df_Q .$$

De $df_Q = \sin^n\varphi_1 \sin^{n-1}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_n\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n\, d\varphi_{n+1}$, ahol $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ jelentik a Q gömbfelületi pont polárkoordinátáit. Az előbbi integrálok nyilván változatlanok maradnak, ha a koordinátarendszert úgy forgatjuk el, hogy a P pont arra a koordinátatengelyre essék, amelytől a φ_1 szöget számítjuk. Ekkor $\gamma = \varphi_1$ és így

$$I^2 \leqq \int_0^\pi \overset{(n)}{\cdots} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [F(\cos\varphi_1) - \sigma_N(\cos\varphi_1)]^2 \sin^n\varphi_1 \sin^{n-1}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_n\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n\, d\varphi_{n+1} =$$

$$= 2\pi A_n \int_0^\pi [F(\cos\varphi_1) - \sigma_N(\cos\varphi_1)]^2 \sin^n\varphi_1\, d\varphi_1 =$$

$$= 2\pi A_n \int_{-1}^{+1} [F(\xi) - \sigma_N(\xi)]^2 (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi,$$

ahol

$$A_n = \int_0^\pi \overset{(n-1)}{\cdots} \int_0^\pi \sin^{n-1}\varphi_2 \sin^{n-2}\varphi_3 \ldots \sin\varphi_n\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n = \begin{cases} \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{3\cdot5\cdot7\ldots(n-1)} & \text{ha } n \text{ páros,} \\[2ex] \dfrac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{2\left(\frac{n-1}{2}\right)!} & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

és $\xi = \cos\varphi_1$.

Válasszuk N-et akkorának, hogy bármely $\nu \geqq N$ indexre

$$I^2 = 2\pi A_n \int_{-1}^{+1} [F(\xi) - \sigma_\nu(\xi)]^2 (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi < \varepsilon^2$$

legyen, akkor

$$I = \left|\int_G [F(\cos\gamma) - \sigma_\nu(\cos\gamma)]\, S_{k,i}(Q)\, df_Q\right| =$$

$$= \left|\int_G F(\cos\gamma)\, S_{k,i}(Q)\, df_Q - \int_G \sigma_\nu(\cos\gamma)\, S_{k,i}(Q)\, df_Q\right| =$$

$$= \left|\int_G F(\cos\gamma)\, S_{k,i}(Q)\, df_Q - \int_G \sum_{l=0}^{\nu} C_l V_l(\cos\gamma)\, S_{k,i}(Q)\, df_Q\right| =$$

$$= \left|\int_G F(\cos\gamma)\, S_{k,i}(Q)\, df_Q - C_k \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)} S_{k,i}(P)\right| < \varepsilon$$

bármely $k \leqq \nu$-re, mert ismert, hogy[8]

$$\int_G V_k(\cos\gamma)\, S_{l,i}(Q)\, df_Q = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq l \\ \dfrac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)} S_{k,i}(P), & \text{ha } l = k \quad (i = 1, 2, \ldots, u_k). \end{cases} \tag{1}$$

Miután ε akármilyen kicsiny pozitív szám lehet, azért

$$S_{k,i}(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)}{4\pi^{\frac{n}{2}+1} C_k} \int_G F(\cos\gamma)\, S_{k,i}(Q)\, df_Q.$$

Qu. e. d.

3. Az (1) alatti egyenletből következik, hogy a $V_k(\cos\gamma)$ magnak csak véges sok sajátértéke van. Mert legyen λ ennek a magnak egy sajátértéke, mely a φ sajátfüggvényhez tartozik. Akkor a definíció szerint

$$\varphi(P) = \lambda \int_G V_k(\cos\gamma)\, \varphi(Q)\, df_Q.$$

Szorozzuk végig ezt az egyenletet $S_{l,i}(P)$-vel és integráljunk a G gömbfelületre, feltéve, hogy $l \neq k$; az (1) alapján

$$\int_G \varphi(P) S_{l,i}(P)\, df_P = 0.$$

Ha pedig $l = k$, akkor

$$\int_G \varphi(P) S_{k,i}(P)\, df_P = \lambda \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)} \int_G \varphi(P) S_{k,i}(P)\, df_P.$$

Ha

$$\lambda \neq \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)}{4\pi^{\frac{n}{2}+1}},$$

akkor

$$\int_G \varphi(P) S_{k,i}(P)\, df_P = 0,$$

vagyis φ ortogonális az egész $\{S_{k,i}(P)\}$ függvénysorozatra. Mivel pedig ez teljes, kell, hogy $\varphi \equiv 0$ legyen. Marad tehát az az eset, amikor

$$\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)}{4\pi^{\frac{n}{2}+1}};$$

ekkor viszont φ ortogonális az $S_{l,i}(P)$ függvényekre, ha $l \neq k$. De az $\{S_{l,i}\}$ sorozat teljessé tehető véges sok $S_{k,i}$ hozzáadásával $(i = 1, 2, \ldots, u_k)$, tehát közismert tétel szerint φ nem lehet más, mint az $S_{k,i}$ függvények lineáris kombinációja. Ebből pedig éppen u_k lineárisan független. És éppen ezt állítottuk. Mivel $V_k(\cos\gamma)$ a P és Q-ban szimmetrikus, nincsen sajátértéknélküli része, ezért

$$V_k^{(n)}(\cos\gamma)=\frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)}\sum_{i=1}^{a_k} S_{k,i}^{(n)}(P)S_{k,i}^{(n)}(Q). \tag{2}$$

Ha ide a gömbfelületi függvények ismert kifejezését

$$S_{k,i}^{(n)}(P)=\sum_{p_{1i}p_{2i}\dots p_{ni}} a^{(n)}_{p_{1i}\,p_{2i}\dots p_{ni}} P^{(n)}_{k\,p_{1i}}(\cos\varphi_1)P^{(n-1)}_{p_{1i}p_{2i}}(\cos\varphi_2)\times$$
$$\times P^{(n-2)}_{p_{2i}p_{3i}}(\cos\varphi_3)\dots P_{p_{\overline{n-1}i}p_{ni}}(\cos\varphi_n)\,(\alpha_{k\,i}\cos p_{ni}\varphi_{n+1}+\beta_{k\,i}\sin p_{ni}\varphi_{n+1})$$

írjuk, ahol

$$k\geqq p_{1i}\geqq p_{2i}\geqq\dots\geqq p_{ni}\geqq 0$$

és

$$P_{k,v}^{(m)}(x)=(1-x^2)^{\frac{v}{2}}\frac{d^v V_u^{(m)}(x)}{dx^v} \qquad (v\leqq u);$$

továbbá az $a^{(n)}_{p_{1i}p_{2i}\dots p_{ni}}, \alpha_{k\,i}, \beta_{k\,i}$ számokat úgy választjuk, hogy az $S_{k,i}^{(n)}$ függvények 1-re legyenek normálva, akkor kapjuk a Gegenbauer-féle függvényekre vonatkozó addíciós tételt, ami nem egyéb, mint a Legendre-polinomokra vonatkozó Lagrange-féle addíciós tétel általánosítása.

A (2) alatti képletből közvetlenül leolvasható az is, hogy ha például a P pontot rögzítjük a gömbön és csupán a Q mozog, akkor $V_k^{(n)}(\cos\gamma)$ mint Q függvénye nem egyéb, mint egy $n+2$ dimenziós gömbfelületi függvény.

4. A következőben a

$$\Phi_k=\int_G V_k^{(n)}(\cos\gamma)\varphi(\cos\gamma)\,df$$

transzformáció egy sajátságát fogjuk kimutatni, mely a Laplace, Fourier, véges Fourier stb. transzformációkkal teljes analógiában van. Ez a transzformáció (rögzített n mellett) a φ függvényt a $\{\Phi_k\}$ számsorozatba viszi át. A szóbanforgó tulajdonság bebizonyítására szükségünk van egy meglehetősen közelfekvő lemmára.

5. Az előbbiekben többször szerepeltek olyan, a gömbfelület P és Q pontjának helyzetétől függő $F(P, Q)$ szimmetrikus függvények, melyek csupán a P és Q-hoz vont sugarak alkotta γ szögtől függenek. Ezeket jelöljük a jövőben

$$F(\cos\gamma)=F(\widehat{PQ})$$

szimbolummal.

Lemma. Legyenek f és g tetszőleges $[-1, +1]$-ben definiált függvények, akkor a

$$h(T,Q)=\int_G f(\widehat{TP})g(\widehat{PQ})\,df_P$$

függvény ismét csupán a T és Q pontokhoz húzott sugarak alkotta szögtől függ.

Bizonyítás. A (2) alatti képlet és az I. tétel szerint, bármilyen Q pont mellett

$$\int_G V_k(\widehat{TP})g(\widehat{PQ})\,df_P = \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)}\sum_{i=1}^{\nu_k} S_{k,i}(T)\int_G S_{k,i}(P)g(\widehat{PQ})\,df_P =$$

$$= \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)}\,\frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}\gamma_k}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)}\sum_{i=1}^{\nu_k} S_{k,i}(T)S_{k,i}(Q) =$$

$$= \frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2k+n)}\,V_k(\widehat{TQ}),$$

ahol

$$\gamma_k = \frac{2^{n-1}k!\left(\frac{n}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\pi\Gamma(n+k)}\int_{-1}^{+1} g(\xi)\,V_k(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\,d\xi.$$

Legyen

$$f(\xi) \sim \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l V_l(\xi),$$

ahol

$$\varphi_l = \frac{2^{n-1}l!\left(\frac{n}{2}+l\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\pi\Gamma(n+l)}\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,V_l(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\,d\xi.$$

Ez utóbbi sor N indexű részletösszege legyen ismét $\sigma_N(\xi)$, akkor

$$\left(\int_G \sigma_N(\widehat{TP})g(\widehat{PQ})\,df_P - h(T,Q)\right)^2 = \left(\int_G \sigma_N(\widehat{TP})g(\widehat{PQ})\,df_P -\right.$$

$$\left.-\int_G f(\widehat{TP})g(\widehat{PQ})\,df_P\right)^2 = \left(\int_G [\sigma_N(\widehat{TP})-f(\widehat{TP})]g(\widehat{PQ})\,df_P\right)^2 \leqq$$

$$\leqq \int_G [\sigma_N(\widehat{TP})-f(\widehat{TP})]^2\,df_P\cdot\int_G g^2(\widehat{PQ})\,df_P < \varepsilon^2,$$

hacsak N már kellően nagy. Másrészt láttuk, hogy

$$\int_G \sigma_N(\widehat{TP})g(\widehat{PQ})\,df_P = \sum_{l=1}^{N}\varphi_l\int_G V_l(\widehat{TP})g(\widehat{PQ})\,df_P =$$

$$= \sum_{l=1}^{N}\frac{4\pi^{\frac{n}{2}+1}\gamma_l\varphi_l}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(2l+n)}\,V_l(\widehat{TQ}) = h_N(\widehat{TQ}),$$

ezért

$$|h_N(\widehat{TQ}) - h(T,Q)| < \varepsilon,$$

amiből a lemma állítása következik.

6. A már jelzett transzformációra vonatkozik a következő

II. (a konvolució) tétel. Ha

$$f_3(\widehat{TQ}) = \int_G f_1(\widehat{TP}) f_2(\widehat{PQ})\, df_P$$

és

$$\Phi_k^{(i)} = \binom{n+k-1}{k}^{-1} \int_G V_k(\widehat{PQ}) f(\widehat{PQ})\, df_P \qquad (i = 1, 2, 3)$$

akkor

$$\Phi_k^{(3)} = \Phi_k^{(1)} \Phi_k^{(2)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy

$$\int_G V_k(\widehat{TP}) f_2(\widehat{PQ})\, df_P = \frac{1}{\lambda_k} V_k(\widehat{TQ}).$$

Ha $T = Q$, akkor

$$\int_G V_k(\widehat{QP}) f_2(\widehat{PQ})\, df_P = \frac{1}{\lambda_k} V_k(1) = \frac{1}{\lambda_k} \binom{n+k-1}{k}.$$

De

$$\int_G V_k(\widehat{QP}) f_2(\widehat{PQ})\, df_P = A_n \int_{-1}^{+1} f_2(\xi) V_k(\xi) (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi = A_n \varphi_k^{(2)},$$

tehát

$$\frac{1}{\lambda_k} V_k(1) = A_n \varphi_k^{(2)}.$$

Másrészt

$$\varphi_k^{(3)} = \int_{-1}^{+1} f_3(\xi) V_k(\xi) (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi = \frac{1}{A_n} \int_G f_3(\widehat{PQ}) V_k(\widehat{PQ})\, df_Q =$$

$$= \frac{1}{A_n} \int_G \int_G f_1(\widehat{PR}) f_2(\widehat{RQ})\, V_k(\widehat{PQ})\, df_R\, df_Q =$$

$$= \frac{1}{A_n} \int_G f_1(\widehat{PR})\, df_R \int_G f_2(\widehat{RQ}) V_k(\widehat{PQ})\, df_Q =$$

$$= \frac{1}{A_n \lambda_n} \int_G f_1(\widehat{PR}) V_k(\widehat{RP})\, df_R = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\lambda_n} = \frac{A_n}{V_k(1)} \varphi_k^{(1)} \varphi_k^{(2)},$$

tehát

$$\frac{A_n}{V_k(1)} \varphi_k^{(3)} = \frac{A_n}{V_k(1)} \varphi_k^{(1)} \cdot \frac{A_n}{V_k(1)} \varphi_k^{(2)},$$

azaz

$$\Phi_k^{(3)} = \Phi_k^{(1)} \Phi_k^{(2)}.$$

Qu. e. d.

7. Az I. tételnek a következő valószínűségi alkalmazása van:* Legyen ismét G az $n+2$ dimenziós egységgömb, melynek felületén egy P pont

* Erre *Rényi Alfréd* hívta fel figyelmemet.

bolygómozgást végez. P_t jelentse a P helyzetét a t időpontban. $K(P, Q)$ a $P = P_t$, $Q = P_{t+1}$ átmenet valószínűség-sűrűségfüggvénye. Azzal a feltevéssel, hogy ennek az átmenetnek a valószínűsége csupán a $\gamma = POQ\sphericalangle$-től függ $K(P, Q) = F(\cos\gamma)$ alakú függvény. F jelentése szerint pozitív és tegyük fel, hogy folytonos függvény. Ha $\varphi_0(P)$ jelenti a P pont kezdeti eloszlásfüggvényét és $\varphi_t(P)$ a P_t pont sűrűségfüggvényét, akkor a Markov-tételből következik, hogy

$$\varphi_{t+1}(P) = \int_G F(\cos\gamma)\,\varphi_t(Q)\,df_Q \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots)$$

$F(\cos\gamma)$ folytonosságából és pozitív voltából következik, hogy $\lim_{t\to\infty}\varphi_t(P) = \varphi(P)$ létezik és az előbbi alapján ez az $F(\cos\gamma) = K(P, Q)$ mag sajátfüggvénye, mely az 1 sajátértékhez tartozik. Mivel $n_0 = 1$, azért 1 egyszeres sajátérték, melyhez a $\varphi(P) =$ konst. sajátfüggvény tartozik. Ez valóban sajátfüggvény, mivel F jelentése alapján

$$\int_G F(\cos\gamma)\,df_Q = 1.$$

Eszerint $\lim_{t\to\infty}\varphi_t(P)$ nem függ a P-től, ami azt jelenti, hogy bármilyen kezdeti eloszlásból indulunk el, határértékben egyenletes eloszlás jön létre az $n+2$ dimenziós gömbfelületen. A kör és a gömbre nézve ($n = 0$ és $n = 1$ esetre) ez az állítás ismeretes volt.[10]

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

1 Lásd pl. *Appel—Kampé de Fériet*: Fonctions hypergéometriques et hypersphériques. Paris 1926. 204.

2 *Egerváry Jenő*: Az integrálegyenletek egy osztályáról. Mat. Fiz. Lapok. 1914.

3 Lásd pl. *Lense*: Kugelfunktionen. Leipzig. 1950. 287.

4 *Appel—Kampé de Fériet*. l. cit. 222.

5 *A. Erdélyi*: Die Funksche Integralgleichung. Math. Ann. *115*, (1937), 456.

6 *I. Fenyő*: Über eine Klasse von Integralgleichungen. Publ. Math. Debrecen, 1952. 248. Amikor ez a dolgozat készült, Erdélyi dolgozatáról nem volt tudomásunk, ezért nem történt ott hivatkozás rá.

7 *Lense*. l. cit. 290. Mivel a tér dimenziószáma rögzített, így e tekintetben félreértés nem lehet, ezért gyakran, a könnyebb írásmód kedvéért, a felső n indexet elhagyjuk mind a *Gegenbauer*, mind a gömbfelületi függvényeknél.

8 *Appel—Kampé de Fériet*: l. cit. 209.

9 *Appel—Kampé de Fériet*: l. cit. 390.

10 *M. B. Hostinský*: Méthodes générales du Calcul des Probabilités. 1931. 51. és 52.

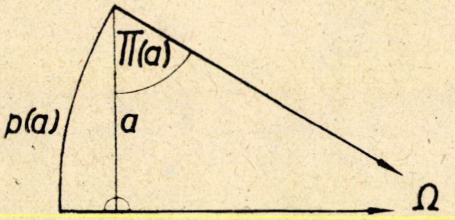
A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIA ÚJ ELŐÁLLÍTÁSA A PARASZFÉRA FELHASZNÁLÁSÁVAL

SZÁSZ PÁL

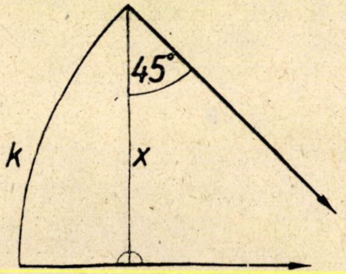
Bemutatta Hajós György r. tag az 1953. február 2-án tartott felolvasó ülésen

Jelöljük az a távolsághoz tartozó parallelaszöget a szokott módon $\Pi(a)$-val, az a magasságú paraciklus-ív pedig legyen $p(a)$ (1. ábra). Már *Bolyai János*[1] bebizonyította, hogy

$$p(a)\,\mathrm{tg}\,\Pi(a) = k \tag{1}$$



1. ábra



2. ábra

az a távolságtól független, állandó paraciklus-ív (amelyet ő i-vel jelölt). E k paraciklus-ív magassága tehát a $\Pi(x) = 45^\circ$ parallelaszögnek megfelelő x távolság (2. ábra). *V. F. Kagan*[2] az (1) alatti tételt sokkal közvetlenebbül, csupán a paraszféra felhasználásával bizonyította be, és e tételből kiindulva figyelemreméltó egyszerű módon újból előállította a klasszikus

$$\mathrm{tg}\,\frac{\Pi(a)}{2} = e^{-\frac{a}{k}} \tag{2}$$

egyenletet s ezzel a hiperbolikus trigonometriát. Bizonyítás nélkül felhasználja azonban, hogy a paraciklus-ívnek a húrjához való viszonya 1-hez tart, midőn az ív 0-hoz konvergál.[3]

Az alábbiakban az (1) és (2) egyenleteket ismét más módszerrel állítjuk elő, az említett hiányt is pótolva. Módszerünk abban áll, hogy alkalmazva egy a paraszférára vonatkozó másik *Kagan*[4]-féle konfigurációt, egyszerűbben bizonyítjuk be az (1) tételt, amely megadja a derékszögű háromszög hiperbolikus szögtrigonometriáját, ebből előállítjuk a

$$\mathrm{tg}\,\frac{\Pi(a)}{2} = e^{-\frac{a}{l}}$$

egyenletet,[5] végül a paraciklus-ív rektifikációjával megmutatjuk, hogy itt l egyenlő k ívhosszával.

1. §. A derékszögű háromszög hiperbolikus szögtrigonometriája

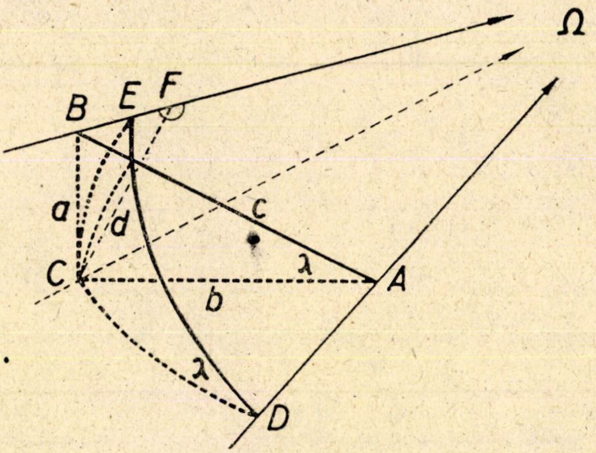
Legyen ABC derékszögű háromszög ($C_{\sphericalangle}=90°$), amelynek alkatrészei

$$\overline{BC}=a,\quad \overline{CA}=b,\quad \overline{AB}=c,\quad A_{\sphericalangle}=\lambda,\quad B_{\sphericalangle}=\mu.$$

Minthogy a paraszférán az euklideszi geometria érvényes (ha egyenes alatt paraciklust értünk), *Bolyai János*[6] klasszikus okoskodásával tüstént következik, miszerint

$$\sin\lambda=\frac{p(a)}{p(c)}. \tag{3}$$

Most alkalmazzuk *V. F. Kagan*[7] konfigurációját: állítsunk a háromszög síkjára A-ban merőlegest, amelynek egyik végtelen távoli pontja Ω s tekintsük a C ponton átmenő Ω középpontú paraszférát, amely az $A\Omega$ tengelyt D-ben, $B\Omega$-t pedig E-ben messe (3. ábra). Minthogy a szerkesztésből folyólag az



3. ábra

$AC\Omega$ sík merőleges ABC-re, azért BC merőleges $AC\Omega$-ra, tehát $BC\Omega_{\sphericalangle}=90°$ s így $CB\Omega_{\sphericalangle}=\Pi(a)$. Ennélfogva, ha C-ből $B\Omega$-ra a $\overline{CF}=d$ merőlegest bocsátjuk, a BCF derékszögű háromszögben (amelynek átfogója $\overline{BC}=a$), a (3) alatti tétel szerint

$$p(d)=p(a)\sin\Pi(a). \tag{4}$$

Mivel pedig a CDE paraszféra-háromszögben nyilván $D_{\sphericalangle}=\lambda$, továbbá $\widehat{CD}=p(b)$ és $\widehat{CE}=p(d)$, a paraszféra euklideszi geometriája értelmében (4)-re tekintettel

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{p(a)}{p(b)}\sin\Pi(a). \tag{5}$$

Mármost (3) és (5)-ből λ kiküszöbölésével

$$p(c)^2=p(a)^2+\frac{p(b)^2}{\sin^2\Pi(a)}, \tag{6}$$

s hasonlóan

$$p(c)^2 = p(b)^2 + \frac{p(a)^2}{\sin^2 \Pi(b)}.$$

E két egyenletből pedig

$$p(a) \operatorname{tg} \Pi(a) = p(b) \operatorname{tg} \Pi(b).$$

Miután a és b egymástól függetlenek, ezzel az (1) tétel be van bizonyítva.

E tétel alapján (3), ill. (5) a

$$\sin \lambda = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(a)}{\operatorname{ctg} \Pi(c)}, \tag{I}$$

ill.

$$\operatorname{tg} \lambda = \cos \Pi(a) \operatorname{tg} \Pi(b) \tag{II}$$

alakot ölti, (6) pedig tüstént a

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b) \tag{III}$$

alakra hozható.

(III) alapján (I) és (II)-ből

$$\cos \lambda = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(c)}, \tag{IV}$$

(II) és a μ szögre vonatkozó hasonló képletből pedig

$$\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} \mu = \sin \Pi(c), \tag{V}$$

végül (IV) és az (I)-hez hasonló képletből

$$\frac{\sin \mu}{\cos \lambda} = \sin \Pi(a). \tag{VI}$$

Ezek a derékszögű háromszög hiperbolikus szögtrigonometriájának *N. I. Lobacsevszkij*-féle alapképletei.[8]

2. §. *A parallelaszög meghatározása*

A szögtrigonometria birtokában az a_1, a_2 és $a = a_1 + a_2$ távolságoknak megfelelő $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ parallelaszögek között fennáló klasszikus egyenlethez[9] most már következőkép juthatunk. (Valamely latin betűvel jelölt távolsághoz tartozó parallelaszöget rövidség kedvéért mindig a megfelelő görög betűvel fogjuk jelölni.)

Rakjuk fel valamely egyenesre egymás után az $\overline{AB} = a_1, \overline{BC} = a_2$ távolságokat, mikor is $\overline{AC} = a$, s állítsunk B-ben az egyenesre merőlegest, amelynek egyik végtelen távoli pontja legyen Ω (4. ábra). Akkor α_1 és α_2 jelentése szerint

$$\Omega A B_{\sphericalangle} = \alpha_1, \quad \Omega C B_{\sphericalangle} = \alpha_2.$$

Bocsássuk A-ból $C\Omega$-ra az $\overline{AD} = t$ merőlegest, mikor is $\Omega A D_{\sphericalangle} = \tau$ s legyen $CAD_{\sphericalangle} = \lambda$. Minthogy $\tau = \alpha_1 - \lambda$, azért

$$\sin \tau = \sin \alpha_1 \cos \lambda - \cos \alpha_1 \sin \lambda. \tag{7}$$

Az ACD derékszögű háromszögben (IV) szerint

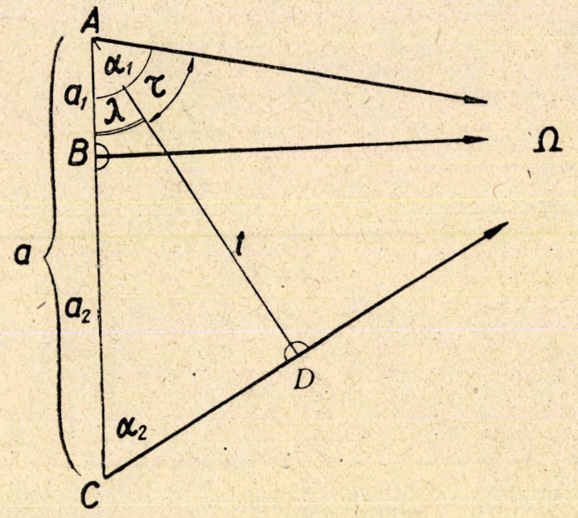
$$\cos\lambda = \frac{\cos\tau}{\cos\alpha},$$

(VI) értelmében pedig

$$\sin\lambda = \cos\alpha_2 \sin\tau,$$

tehát (7) alatt $\sin\tau$-val végigosztva

$$1 = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha} \operatorname{ctg}\tau - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2.$$



4. ábra

De (I) értelmében

$$\operatorname{ctg}\tau = \operatorname{ctg}\alpha \sin\alpha_2,$$

tehát a nyert egyenlet

$$1 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \frac{1}{\sin\alpha} - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2,$$

honnan a félszögek tangenseinek bevezetésével adódik

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}.$$

Ez $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$-re másodfokú egyenlet, amelynek gyökei nyilván $\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}$ és $\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2}$. Azonban $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} > 1$ míg $\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} < 1$, tehát innen a kívánt egyenlet

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{2}.$$

Minthogy növekedő a mellett α folyvást csökken és a 0° és 90° közti minden értéket felvesz, azért α az a távolságnak folytonos függvénye s így $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ is folytonos. Ennélfogva e függvényegyenletből következik,[10] hogy

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=e^{\frac{a}{l}}, \tag{8}$$

ahol l bizonyos távolság.

Ez l távolságot meghatározandó, elvégezzük a p paraciklus-ív rektifikációját. (8)-ból folyólag

$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{sh}\frac{a}{l},$$

tehát a már bebizonyított (1) alatti tétel értelmében valamely a magasságú $p(a)$ paraciklus-ívnek a k ívhez való viszonya

$$\frac{p(a)}{k}=\operatorname{sh}\frac{a}{l}.$$

Ennélfogva $p(a)\to 0$ esetén (mikor is a fortiori $a\to 0$)

$$\frac{\frac{p(a)}{k}}{\frac{a}{l}}\to 1. \tag{9}$$

Osszuk a p paraciklus-ívet a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ részekre és legyenek ez ívek húrjai rendre $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Ismeretes, hogy

$$\min\frac{\frac{p_i}{k}}{\frac{s_i}{l}}\leqq\frac{\frac{p_1}{k}+\frac{p_2}{k}+\cdots+\frac{p_n}{k}}{\frac{s_1}{l}+\frac{s_2}{l}+\cdots+\frac{s_n}{l}}\leqq\max\frac{\frac{p_i}{k}}{\frac{s_i}{l}}.$$

Ha mármost az ívek legnagyobbika 0-hoz tart, akkor itt (9) értelmében mind az alsó, mind a felső korlát 1-hez konvergál, s így innen következik, hogy

$$\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{l}\to\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{k}=\frac{p}{k}$$

vagyis

$$s_1+s_2+\cdots+s_n\to\frac{p}{k}l.$$

Tehát a p paraciklus-ív rektifikálható és ívhosszúsága az l távolságnak $\frac{p}{k}$-szorosa. Ezt a $p=k$ esetre alkalmazva, nyerjük, hogy

$$l=k \text{ ívhossza.} \tag{10}$$

A k ív hosszát is k-val jelölve, az $\alpha=\Pi(a)$ parallelaszöget meghatározó (8) képlet (10) alapján a

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=e^{\frac{a}{k}} \tag{8*}$$

alakot ölti. Ezzel a (2) alatti tételt is bebizonyítottuk.

Minthogy (8*)-ból

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{a}{k}}, \quad \cos \alpha = \operatorname{th} \frac{a}{k}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{a}{k}},$$

az 1. §-ban nyert (I)—(VI) képletek átmennek a derékszögű háromszög hiperbolikus trigonometriájának ismert alapképleteibe.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *Johannes Bolyai* de eadem, Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens etc., Marosvásárhely 1832, főkép § 30. Magyarul l. *Stäckel Pál*, Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai, ford. *Rados Ignác*, Budapest 1914., II. köt. 212., vagy Mat. és Fiz. Lapok *6* (1897), 170.

[2] *V. F. Kagan, N. I. Lobacsevszkij*, Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből, ford. *Bizám György*, sajtó alá rendezte *Kárteszi Ferenc*, Budapest 1951, főkép 130—141.

[3] Már *F. Schur* rámutatott arra, hogy ez a hiány az Appendixben is megvan, l. *Stäckel Pál*,[1] i. m. II. köt., 292.

[4] *V. F. Kagan*,[2] i. m. 132.

[5] V. ö. *szerzőtől*, A hiperbolikus trigonometriáról, Mat. és Fiz. Lapok *48* (1941), 401—409., ahol is ez egyenletet az általános háromszög szögtrigonometriájából vezettük le, amit viszont az egymásnak megfelelő derékszögű háromszögek felhasználásával állítottunk elő.

[6] *Johannes Bolyai*,[1] i. m. § 25.

[7] Lásd [4].

[8] V. ö. *F. Engel*, Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, etc., Leipzig 1898, 20., (14) form.

[9] V. ö. *F. Engel*,[8] i. m. 20., (11) form.

[10] *A. L. Cauchy*, Analyse algébrique, Paris 1821, Ch. V., § I., problème II., Oeuvres II^e^ série, t. III., 100—102.

A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIA ÚJ SÍKBELI ELŐÁLLÍTÁSA A KLASSZIKUS SEGÉDESZKÖZÖKKEL

SZÁSZ PÁL

Bemutatta Hajós György r. tag az 1953. február 2-án tartott felolvasó ülésen

A hiperbolikus trigonometriát síkbelileg a klasszikus segédeszközökkel, vagyis az *elpattanó egyenesek* és a *paraciklus* használata mellett, elsőnek *H. Liebmann*[1] állította elő. Eljárását egy előbbi dolgozatomban[2] erősen egyszerűsítettem *Bolyai János*nak az elpattanási szög meghatározására szolgáló klasszikus konfigurációja[3] felhasználásával. Ez azonban még mindig nem a legegyszerűbb előállítási mód ezen az úton. Ennél lényegesen egyszerűbbet kívánok az alábbiakban bemutatni. Itt már nem használom fel sem a paraciklus egyenletét, sem a távolságtrigonometria alapképletét, hanem csupán azt a tételt, hogy egymástól x távolságban haladó koncentrikus paraciklusokon a külső valamely $\widehat{AB}$ ívének a belső megfelelő $\widehat{A'B'}$ ívéhez való viszonya

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}} = e^{\frac{x}{k}},$$

ahol k bizonyos meghatározott távolság, az ú. n. *természetes hosszegység*, vagy a hiperbolikus geometria *paramétere*. Valamely távolságnak erre az egységre vonatkozó mérőszáma az ú. n. *természetes mérőszám*.

Erre az előállítási módra *H. Liebmann*[4] egy korábbi dolgozatának és *D. Hilbert*[5] ezt megelőző munkájának tanulmányozása vezetett.

1. §. Végtelen távoli pont koordinátája

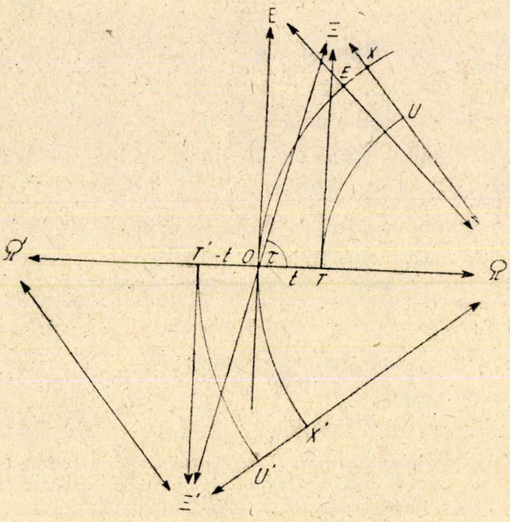
Legyen adva a síkban a pozitív forgási értelem[6], az O pont és a rajta átmenő $O\Omega$ irányított egyenes, amelynek a pozitív irányba eső végtelen távoli pontja Ω. Jelöljük ez irányított egyenes O-beli normálisának a pozitív irányba eső végtelen távoli pontját E-nal s messe az $E\Omega$ egyenes az O ponton átmenő Ω középpontú paraciklust E-ben. Az irányított síkban felvett $O\Omega$ egyenes által ily módon definiált *koordinátarendszerben* egy az Ω-tól különböző Ξ végtelen távoli pont ξ *koordinátájának* fogjuk nevezni az $\Omega\Xi$ egyenessel a fenti paraciklusból levágott $\widehat{OX}$ ívnek az $\widehat{OE}$ ívre mint egységre vonatkozó mérőszámát, pozitív vagy negatív előjellel aszerint, amint $\widehat{OX}$ az $\widehat{OE}$-vel megegyező, vagy azzal ellenkező értelmű (1. ábra).

Ha a Ξ pont vetülete az $O\Omega$ egyenesen T (amennyiben $O\Xi$ különbözik $O\Omega$-tól) és az ezen átmenő Ω középpontú paraciklus az $\Omega\Xi$ egyenest U-ban metszi, akkor $\widehat{TU}$ éppen az egységnyi paraciklus-ív, tehát a $\tau = \Omega O \Xi_{\sphericalangle}$-höz tartozó $t = \overline{OT}$ *elpattanási távolsággal* kifejezve (amely $\gtreqless 0$ aszerint, amint τ hegyes-, derék- vagy tompaszög), a Ξ végtelen távoli pont koordinátája abszolút értékben (ha t az $\overline{OT}$ természetes mérőszáma)

$$|\xi| = \widehat{OX} : \widehat{TU} = e^t. \tag{1}$$

Jelöljük az $O\Xi$ egyenes másik végtelen távoli pontját Ξ'-vel. Az $\Omega O \Xi' \sphericalangle$-nek megfelelő elpattanási távolság nyilván $-t$, tehát Ξ' koordinátája abszolút értékben (1) szerint

$$|\xi'| = e^{-t}. \tag{2}$$



1. ábra

S mivel ξ és ξ' nyilván ellenkező előjelűek, (1) és (2)-ből folyólag

$$\xi' = -\frac{1}{\xi}. \tag{3}$$

A mondottak alapján nyilvánvaló a következő két segédtétel.

1. *Segédtétel. Az $O\Omega$ egyenest Ω körül elforgatva az $O'\Omega$ helyzetbe, Ξ koordinátája az új rendszerben $\xi' = \xi - \lambda$, ahol $\lambda = \widehat{OO'}$ pozitívnak vagy negatívnak véve aszerint, amint $\widehat{OO'}$ és $\widehat{OE}$ megegyező vagy ellenkező értelműek.*

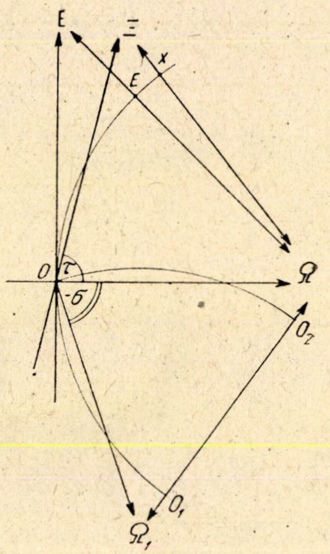
2. *Segédtétel. Az O pontot az $O\Omega$ egyenesen eltolva O'-be, Ξ koordinátája az új rendszerben $\xi' = e^{-a}\xi$, ahol $a = \overline{OO'}$ előjellel véve.*

Legyen továbbá Ω' az $O\Omega$ egyenes másik végtelen távoli pontja és tegyük fel ismét, hogy Ξ ettől is különböző (1. ábra). Az $\Omega O \Xi$ háromszöget O körül 180°-kal elforgatva, az átmegy az $\Omega' O \Xi'$ háromszögbe, tehát Ξ' koordinátája az $O\Omega'$ egyenessel definiált koordinátarendszerben nyilván egyenlő Ξ eredeti koordinátájával. S mivel Ξ és Ξ' koordinátái az új koordinátarendszerben (3) szerint egymásnak negatív reciprokértékei, érvényes a következő

3. *Segédtétel. Az $O\Omega$ egyenes másik végtelen távoli pontját Ω'-vel jelölve, egy az Ω-tól és Ω'-től különböző Ξ végtelen távoli pont koordinátája az $O\Omega'$ egyenessel definiált koordinátarendszerben $\xi' = -\dfrac{1}{\xi}$.*

2. §. Az elpattanási szög meghatározása

Tekintsük a Ξ végtelen távoli pont ξ koordinátáját, mint a $\tau = \Omega O \Xi_{\sphericalangle}$ függvényét. A szöget *analitikus mérőszámban* adva meg, vagyis a szögegységet úgy választva, hogy a derékszög mérőszáma $\frac{\pi}{2}$, legyen e függvény $\xi = f(\tau)$. Ez a $0 < \tau < \pi$ intervallumban pozitív, s mivel τ növesztésénél szigorúan fogyólag minden pozitív értéket felvesz, azért folytonos. E függvényre ez intervallumban függvényegyenletet állítunk elő azáltal, hogy az $f(\tau + \sigma)$ függvényértéket kifejezzük az $f(\tau)$ és $f(\sigma)$ értékekkel.



2. ábra

Legyen Ω_1 a $-\sigma$ szögnek megfelelő végtelen távoli pont, amelyre tehát $\Omega O \Omega_{1\sphericalangle} = -\sigma$ (2. ábra). Minthogy ekkor $\Omega_1 O \Xi_{\sphericalangle} = \tau + \sigma$, azért Ξ koordinátája az $O\Omega_1$ egyenessel definiált koordinátarendszerben nyilván $f(\tau + \sigma)$. Messe az O ponton átmenő Ω középpontú paraciklus az $\Omega\Omega_1$ egyenest O_1-ben, az O-n átmenő Ω_1 középpontú pedig O_2-ben. Az $O\Omega$ egyenessel definiált eredeti koordinátarendszerről egymás után áttérve az $O_1\Omega$, $O_1\Omega_1$, $O_2\Omega_1$, $O\Omega_1$ egyenesekkel definiált koordinátarendszerekre, az 1., a 3., a 2., végül újra az 1. segédtétel alkalmazásával nyerjük, miszerint Ξ koordinátája az $O\Omega_1$ egyenes által definiált rendszerben

$$f(\tau + \sigma) = -\frac{m}{f(\tau) + f(\sigma)} + f(\sigma) = \frac{f(\tau) f(\sigma) + f(\sigma)^2 - m}{f(\tau) + f(\sigma)}, \tag{4}$$

ahol m bizonyos pozitív szám. E számot tüstént meghatározhatjuk. Ugyanis az $O\Xi$ egyenes másik Ξ' végtelen távoli pontjának koordinátája az eredeti rendszerben (3) szerint $-\frac{1}{f(\tau)}$ lévén, az $O\Omega_1$ egyenessel definiált rendszerre vonatkozó koordinátája a (4) előállításánál követett okoskodással

$$\frac{-\frac{f(\sigma)}{f(\tau)} + f(\sigma)^2 - m}{-\frac{1}{f(\tau)} + f(\sigma)} = \frac{(f(\sigma)^2 - m) f(\tau) - f(\sigma)}{f(\tau) f(\sigma) - 1}.$$

S mivel ennek ugyancsak (3) értelmében egyenlőnek kell lennie a (4)-ből adódó

$$-\frac{1}{f(\tau + \sigma)} = \frac{-f(\tau) - f(\sigma)}{f(\tau) f(\sigma) + f(\sigma)^2 - m}$$

értékkel, azért szükségkép

$$f(\sigma)^2 - m = -1.$$

Ezt (4)-be visszahelyettesítve, előáll az

$$f(\tau+\sigma)=\frac{f(\tau)f(\sigma)-1}{f(\tau)+f(\sigma)} \tag{5}$$

függvényegyenlet.

Bevezetve az

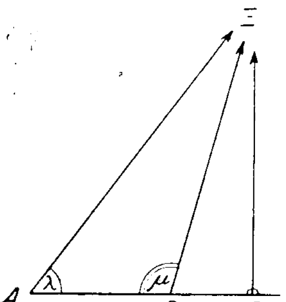
$$f(\tau)=\operatorname{ctg} F(\tau), \quad 0<F(\tau)<\frac{\pi}{2} \tag{6}$$

jelölést, az (5) függvényegyenlet a

$$F(\tau+\sigma)=F(\tau)+F(\sigma) \tag{7}$$

alakot ölti, minthogy (6)-ra tekintettel $0<F(\tau)+F(\sigma)<\pi$. De a szóbanforgó $0<\tau<\pi$ intervallumban $f(\tau)$ folytonos lévén, a (6) alatt definiált $F(\tau)$ függvény is folytonos s ennélfogva (7)-ből

$$F(\tau)=c\tau, \tag{8}$$



3. ábra

ahol c állandó.[7] Mivel pedig a $\tau=\frac{\pi}{2}$ helyen nyilván

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{ctg} F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

azért $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, tehát (8) alatt

$$c=\frac{1}{2}.$$

Eszerint (6)-ból

$$f(\tau)=\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}. \tag{9}$$

Minthogy (1) értelmében a τ szöghöz tartozó t elpattanási távolsággal kifejezve másrészt

$$f(\tau)=e^t,$$

(9) szerint *a természetes mérőszámban megadott t távolság és a megfelelő τ elpattanási szög között fennáll az*

$$e^t=\operatorname{ctg}\frac{\tau}{2} \tag{10}$$

klasszikus egyenlet.[8]

3. §. *A hiperbolikus trigonometria alapképletei*

Tekintsünk olyan $AB\Xi$ háromszöget, amelyben a Ξ szögpont végtelen távoli, A és B viszont valóságos pont. Legyen (előjeltől eltekintve)

$$BA\Xi_{\sphericalangle}=\lambda, \quad AB\Xi_{\sphericalangle}=\mu$$

s példának okáért λ hegyes-, μ pedig tompaszög (3. ábra). Akkor Ξ vetületét az AB egyenesen R-rel jelölve, az $\overline{AB}=c$, $\overline{AR}=c_1$, $\overline{BR}=c_2$ egyenesdarabokra

$c=c_1-c_2$, s mivel (10) értelmében

$$e^{c_1}=\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}, \quad e^{c_2}=\operatorname{ctg}\frac{\pi-\mu}{2}=\operatorname{tg}\frac{\mu}{2},$$

adódik

$$e^{-c}=\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}. \tag{11}$$

Hasonlókép nyerjük e képletet minden más esetben. Ennek (10) az a speciális esete, midőn a λ, μ szögek egyike $\frac{\pi}{2}$.

J. Hjelmslev[9] elegáns gondolatmenetét követve, a (11) képlet alapján a derékszögű háromszög két szöge és három oldala közül három-három között fennálló egyenletek most már következőképpen nyerhetők.

Legyen ABC derékszögű háromszög ($C_\sphericalangle=90°$), amelynek alkatrészei

$$\overline{AB}=c, \quad \overline{BC}=a, \quad \overline{CA}=b, \quad BAC_\sphericalangle=A, \quad CBA_\sphericalangle=B.$$

Jelöljük a CA egyenesnek C-től az A irányába eső végtelen távoli pontját Ω-val, a másikat Ω'-vel (4. ábra) és legyen

$$AB\Omega_\sphericalangle=\omega, \quad AB\Omega'_\sphericalangle=\omega'.$$

(11)-et az $AB\Omega$, ill. $AB\Omega'$ háromszögre alkalmazva

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=e^{-c}\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\omega'}{2}=e^{-c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}, \tag{12}$$

tehát

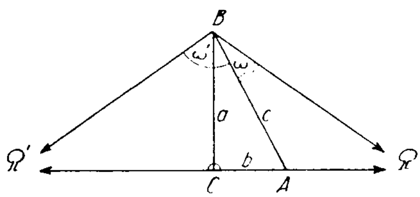
$$\operatorname{tg}\frac{\omega+\omega'}{2}=\frac{e^{-c}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right)}{1-e^{-2c}}=\frac{1}{\sin A\operatorname{sh}c}. \tag{13}$$

De a ω és ω' jelentésénél fogva $CB\Omega_\sphericalangle=CB\Omega'_\sphericalangle=\frac{\omega+\omega'}{2}$ s így (11)-et a $BC\Omega$ háromszögre alkalmazva

$$e^{-a}=\operatorname{tg}\frac{\omega+\omega'}{4},$$

tehát másrészt

$$\operatorname{tg}\frac{\omega+\omega'}{2}=\frac{2e^{-a}}{1-e^{-2a}}=\frac{1}{\operatorname{sh}a}. \tag{14}$$



4. ábra

(13) és (14)-ből mármost

$$\sin A=\frac{\operatorname{sh}a}{\operatorname{sh}c}. \tag{I}$$

Minthogy $B+\omega=\omega'-B$, azért $B=\frac{\omega'-\omega}{2}$, tehát (12)-re tekintettel

$$\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}\frac{\omega'-\omega}{2}=\frac{e^{-c}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)}{1+e^{-2c}},$$

honnan

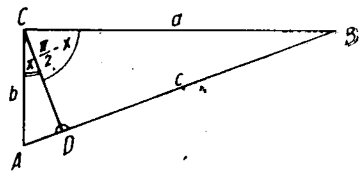
$$\operatorname{ch}c=\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B. \tag{II}$$

Az ABC háromszöget az $\overline{AB}$ átfogóhoz tartozó $\overline{CD}$ magassággal két derékszögű háromszögre bontva fel (5. ábra), az $ACD_{\sphericalangle}=x$ jelöléssel a (II) tétel értelmében az ACD háromszögben

$$\operatorname{ch} b=\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} x,$$

míg BCD-ben $\left(\text{ahol is } BCD_{\sphericalangle}=\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$\operatorname{ch} a=\operatorname{ctg} B \operatorname{tg} x.$$



5. ábra

Ezek összeszorzásával (II)-re tekintettel adódik

$$\operatorname{ch} c=\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b. \qquad \text{(III)}$$

(I), (II) és (III) alapján most már könnyen előállíthatjuk a még hiányzó három egyenletet.

Először is (I) és (II)-ből c kiküszöbölésével

$$1=\operatorname{ctg}^2 A \operatorname{ctg}^2 B-\frac{\operatorname{sh}^2 a}{\sin^2 A},$$

amiből evidens átalakítás után négyzetgyökvonással

$$\operatorname{ch} a=\frac{\cos A}{\sin B}. \qquad \text{(IV)}$$

Ebből és a B szögre vonatkozó (I)-hez hasonló egyenletből (III) felhasználásával

$$\cos A=\frac{\operatorname{th} b}{\operatorname{th} c}. \qquad \text{(V)}$$

Végül (I) és (V)-ből (III)-ra tekintettel

$$\operatorname{tg} A=\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b}. \qquad \text{(VI)}$$

A hiperbolikus trigonometria négy általános alapképlete, amelyek a háromszög három oldala és három szöge közül négy-négy között állapítanak meg összefüggést (I), (IV) és (V) alapján adódik legegyszerűbben.[10] Ezeknek (I)—(VI) speciális esetei.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *H. Liebmann,* Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie, Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math. phys. Klasse, *59* (1907), 187—210.

[2] *Szász Pál,* Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, Acta Scientiarum Mathematicarum *14* (1952), 174—178.

[3] *J. Bolyai,* Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, etc., Marosvásárhely 1832, §. 29. Magyarul lásd *Stäckel Pál,* Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai, ford. *Rados Ignác,* Budapest 1914, II. köt. 210—211., vagy Matematikai és Fizikai Lapok *6* (1897), 168—169.

[4] *H. Liebmann,* Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie, Mathematische Annalen *59* (1904), 110—128.

[5] *D. Hilbert,* Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, Mathematische Annalen *57* (1903), 137—150, vagy Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig und Berlin 1930, Anhang III., 159—177.

[6] V. ö. *Kerékjártó Béla,* A geometria alapjairól, I. köt., Szeged 1937, 20. §.

[7] V. ö. *A. L. Cauchy,* Cours d'analyse etc., Chapitre V., § 1. Oeuvres II^{e} série, t. III., 99—100.

[8] V. ö. *J. Bolyai,* loc. cit., továbbá *F. Engel,* Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij Leipzig 1898, 20. (12) form.

[9] *J. Hjelmslev,* Grundlag for den projektive Geometri, Kobenhavn 1943, § 7., 36—37.

[10] V. ö. *Szász Pál,* A hiperbolikus trigonometriáról, Matematikai és Fizikai Lapok *48* (1941), 401—409., speciálisan 405—406.

A HIPERBOLIKUS TRIGONOMETRIA KÖZVETLEN ELŐÁLLÍTÁSA A TÉR FELHASZNÁLÁSÁVAL

SZÁSZ PÁL

Bemutatta Hajós György r. tag az 1953. február 2-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

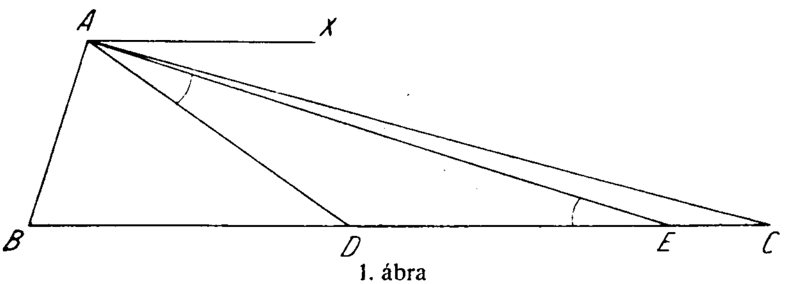
Az ú. n. *hiperbolikus* vagy *Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria* legfontosabb része a *hiperbolikus trigonometria,* amely annak analitikus tárgyalását és euklideszi interpretációját teszi lehetővé. Ezt a klasszikus segédeszközök használatának elkerülésével, közvetlenül először *L. Gérard*[1] állította elő, mégpedig egészen síkbelileg. Azóta több ilyen előállítás is keletkezett.[2]

Réthy Mór[3] vázolta a hiperbolikus trigonometriának ugyancsak közvetlen előállítását, amely azonban térbeli meggondolást is alkalmaz. Az alábbiakban hasonló előállítást mutatunk be, részletes kidolgozásban. Ez közvetlenül a hiperbolikus geometria alapfeltevésére támaszkodik, amely *Euklides* párhuzamossági axiómájával ellentétben (a többi axióma megtartása mellett) azt mondja, hogy *van olyan e_0 egyenes és azon kívüli P_0 pont, amelyek síkjában a P_0 ponton át nem csak egy oly egyenes fektethető, amely e_0-t nem metszi. (Nem-metszési axióma.)* Ebből egyszerű térbeli meggondolással (a folytonosság axiómájának felhasználása nélkül) már következik,[4] miszerint *ugyanez bármely e egyenes és azon kívüli P pont esetén fennáll.*

Célszerűség okából a szögeket *analitikus mérőszámban* adjuk meg, vagyis *a szögegységet úgy választjuk, hogy a derékszög mérőszáma* $\frac{\pi}{2}$ *legyen.*

1. §. Háromszög defektusa

Segédtétel. Ha az ABC háromszögben rögzített $\overline{AB}$ *oldal és* $B_\sphericalangle$ *mellett* $\overline{BC} \to +\infty$, *akkor* $C_\sphericalangle \to 0$.



1. ábra

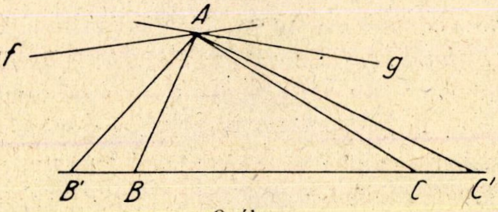
Ezt következőkép láthatjuk be[5]. Tekintsük (1. ábra) az AB egyenesnek a háromszöget tartalmazó oldalán az A-ból kiinduló félegyeneseket. Ezek között a folytonosság axiómája értelmében van olyan AX félegyenes, amely a BC-t metsző félegyeneseket a BC-t nem metszőktől elválasztja. Maga AX nyilván nem metszi BC-t. Adatván mármost $\varepsilon > 0$, válasszuk a $BAX_{\sphericalangle}$-nek AD félegyenesét úgy, hogy $DAX_{\sphericalangle} < \varepsilon$ legyen. E félegyenes az AX fogalma szerint már metszi BC-t valamely D pontban. Ha most már $\overline{BD}$ meghosszabbítására felrakva $\overline{AD} = \overline{DE}$, akkor $DEA_{\sphericalangle} = DAE_{\sphericalangle} < DAX_{\sphericalangle}$, tehát AD választása folytán $DEA_{\sphericalangle} < \varepsilon$. S ha $\overline{BC} > \overline{BE}$, akkor a külső szög tétele értelmében $BCA_{\sphericalangle} < DEA_{\sphericalangle}$, tehát még inkább $BCA_{\sphericalangle} < \varepsilon$. Ezzel kimutattuk, hogy $BCA_{\sphericalangle} \to 0$, midőn $\overline{BC} \to +\infty$.

I. Tétel. Bármely ABC háromszögben

$$A_{\sphericalangle} + B_{\sphericalangle} + C_{\sphericalangle} < \pi.$$

Bizonyítás. Legyen f és g az A ponton átmenő két olyan egyenes a háromszög síkjában, amelyek BC-t nem metszik (2. ábra). Tekintsük azt az $(f, g)_{\sphericalangle}$-et, amely a A-t a BC egyenes pontjaival összekötő egyeneseket tartalmazza. A BC egyenesen a B előtti B' és a C utáni C' pont úgy választható, hogy

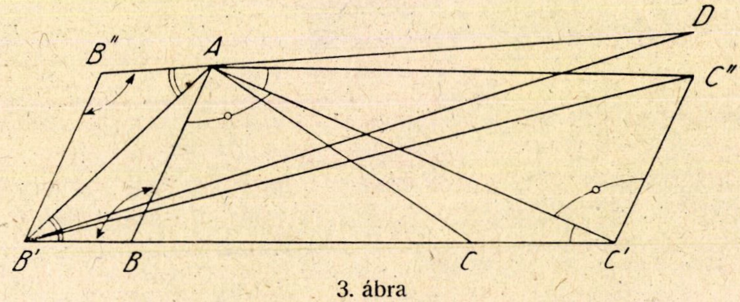
$$AB'B_{\sphericalangle} + AC'C_{\sphericalangle} < \pi - (f, g)_{\sphericalangle},$$



2. ábra

mert a segédtétel értelmében $AB'B_{\sphericalangle} \to 0$ midőn $\overline{BB'} \to +\infty$, valamint $AC'C_{\sphericalangle} \to 0$, ha $\overline{CC'} \to +\infty$. Minthogy $B'AC'_{\sphericalangle} < (f, g)_{\sphericalangle}$, még inkább áll

$$AB'B_{\sphericalangle} + AC'C_{\sphericalangle} < \pi - B'AC'_{\sphericalangle},$$



3. ábra

vagyis az $AB'C'$ háromszög szögeinek összege $< \pi$. Ebből azonban következik, hogy az ABC' háromszög szögösszege is $< \pi$. Ugyanis legyen[6] átrakva AC' másik oldalára $BC'A_{\sphericalangle} = C''AC'_{\sphericalangle}$ és $\overline{C'B} = \overline{AC''}$, továbbá átrakva AB' másik oldalára $BB'A_{\sphericalangle} = B''AB'_{\sphericalangle}$ és $\overline{B'B} = \overline{AB''}$ (3. ábra). Minthogy az

$AB'C'$ háromszög szögösszege $<\pi$, a szerkesztés folytán az AB'' és AC'' félegyenesek szöget alkotnak, amelynek AB' és AC' közbülső egyenesei. Legyen még $\overline{B''A}$ meghosszabbítására átrakva $\overline{AC''}=\overline{AD}$. Akkor a $B'DA$ és $B'C''A$ háromszögekben $\overline{B'D}>\overline{B'C''}$, mert $B'AD_{\sphericalangle}>B'AC''_{\sphericalangle}$, a bezáró oldalak pedig rendre egyenlők. De így a $B'DB''$ és $C''B'C'$ háromszögekben $B'B''D_{\sphericalangle}>$ $>C''C'B'_{\sphericalangle}$, mert a szerkesztés folytán $\overline{B'B''}=\overline{AB}=\overline{C'C''}$ és $\overline{B''D}=\overline{C'B'}$. S mivel ugyancsak a szerkesztésből folyólag $B'B''D_{\sphericalangle}=ABB'_{\sphericalangle}$ és $C''C'A_{\sphericalangle}=$ $=BAC'_{\sphericalangle}$, nyerjük, hogy

$$ABB'_{\sphericalangle}>BC'A_{\sphericalangle}+BAC'_{\sphericalangle},$$

tehát az ABC' háromszög szögösszege valóban $<\pi$. Ebből hasonlókép következik, hogy az ABC háromszög szögösszege is $<\pi$. Qu. e. d.

Korollárium. Konvex négyszög szögeinek összege $<2\pi$.

Az olyan konvex négyszöget, amelynek három szöge derékszög, *Lambert-féle négyszögnek* nevezzük.[7] A fenti korollárium értelmében *Lambert-féle négyszög negyedik szöge hegyesszög.* Ebből következik, hogy *ha $ABCD$ Lambert-féle négyszög, amelyben $A_{\sphericalangle}=B_{\sphericalangle}=C_{\sphericalangle}=\frac{\pi}{2}$, akkor $\overline{AB}<\overline{DC}$.*

Az olyan $ABCD$ konvex négyszög, amelyben $A_{\sphericalangle}=B_{\sphericalangle}=\frac{\pi}{2}$ és $\overline{AD}=\overline{BC}$, ú. n. *Saccheri-féle négyszög*[8]. Minthogy az $\overline{AB}$ oldal F felezőpontját a $\overline{DC}$ oldal G felezőpontjával összekötő FG egyenes ez oldalakra nyilván merőleges, azért FG e *Saccheri*-féle négyszöget az egymással kongruens $AFGD$ és $BFGC$ *Lambert*-féle négyszögekre bontja. Ennélfogva a fentebbiekből folyólag *e Saccheri-féle négyszögben $C_{\sphericalangle}=D_{\sphericalangle}<\frac{\pi}{2}$* és $\overline{AB}<\overline{DC}$.

Valamely ABC háromszög szögösszegének a π-től való eltérését, vagyis a $\pi-(A_{\sphericalangle}+B_{\sphericalangle}+C_{\sphericalangle})$ pozitív különbséget, a háromszög *defektusának* nevezzük és így jelöljük: *def.* ABC. Ha S az $\overline{AB}$ oldal közbülső pontja, akkor nyilván

$$\text{def. } ABC=\text{def. } ASC+\text{def. } SBC,$$

vagyis a defektus additív mennyiség. A továbbiakban alapvető szerepet játszik a következő

II. Tétel. Ha az ABC háromszög oldalai 0*-hoz tartanak, akkor* def. $ABC\to 0$.

Bizonyítás. Szorítkozhatunk derékszögű háromszögre, minthogy bármely háromszöget a legnagyobb oldalhoz tartozó magasság két derékszögű háromszögre bont.

Valamely C csúcsú derékszöget felező félegyenesen (4. ábra) válasszuk a C-től különböző P pontot. Bocsássuk P-ből a derékszög száraira a $\overline{PQ}$ és $\overline{PR}$ merőlegeseket. Ha a CQ félegyenesre valamely $\overline{CA}<\overline{CQ}$, CR-re pedig valamely $\overline{CB} < \overline{CR}$ egyenesdarabot rakunk fel, akkor nyilván

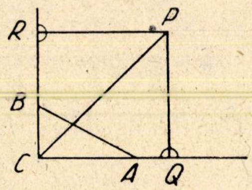
$$\text{def. } ABC < \text{def. } PCQ + \text{def. } PCR = 2 \text{ def. } PCQ.$$

Ennélfogva a tételt bebizonyítandó elég megmutatnunk, miszerint

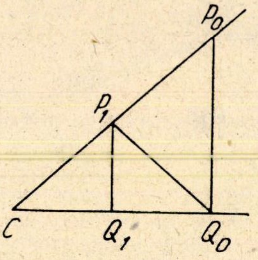
$$\text{def. } PCQ \to 0, \text{ midőn } \overline{CP} \to 0.$$

Kiindulva a szóbanforgó szögfelező valamely P_0 pontjából, amelyhez a $\overline{P_0Q_0}$ merőleges tartozik (5. ábra), állítsunk a $\overline{CQ_0}$ egyenesdarab Q_1 felezőpontjában CQ_0-ra merőlegest, amely CP_0-t P_1-ben messe. Akkor

$$2 \text{ def. } P_1CQ_1 = \text{def. } P_1CQ_0 < \text{def. } P_0CQ_0,$$



4. ábra



5. ábra

tehát

$$\text{def. } P_1CQ_1 < \frac{1}{2} \text{ def. } P_0CQ_0.$$

E szerkesztést folyvást ismételve, az n-edik lépésben adódik

$$\text{def. } P_nCQ_n < \frac{1}{2^n} \text{ def. } P_0CQ_0$$

s annál inkább

$$\text{def. } PCQ < \frac{1}{2^n} \text{ def. } P_0CQ_0$$

hacsak $\overline{CP} < \overline{CP_n}$. Bármely pozitív ε-hoz található oly n, hogy

$$\frac{1}{2^n} \text{ def. } P_0CQ_0 < \varepsilon,$$

tehát még inkább

$$\text{def. } PCQ < \varepsilon,$$

ha $\overline{CP} < \overline{CP_n}$. Eszerint fennáll a fenti limesreláció, qu. e. d.

2. §. *A* $\sin x$ *és* $\cos x$ *függvény interpretációja*

Legyen az A csúcsú hegyesszög egyik szárán $\overline{AB'} < \overline{AB}$ s bocsássuk a másik szárra a $\overline{BC}$ és $\overline{B'C'}$ merőlegeseket. Bebizonyítjuk az alábbi két segédtételt.[9]

1. *Segédtétel. Ha F a $\overline{BB'}$ egyenesdarab felezőpontja s az F-ből AC-re bocsátott merőleges $\overline{FG}$, akkor*

$$2\overline{FG} < \overline{BC} + \overline{B'C'}. \tag{1}$$

Ez akkor is érvényes, midőn B' összeesik A-val (mikor is $\overline{B'C'} = 0$).

Bizonyítás. Bocsássuk B-, ill. B'-ből FG-re a $\overline{BD}$, ill. $\overline{B'D'}$ merőlegeseket (6. ábra). Nyilvánvaló, hogy F a D és G közé, D' az F és G közé esik és $\overline{FD} = \overline{FD'}$. Ebből folyólag

$$2\overline{FG} = \overline{DG} + \overline{D'G}.$$

Azonban a $DGCB$ és $D'GC'B'$ *Lambert*-féle négyszögekben (1. §)

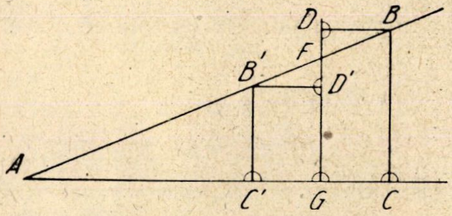
$$\overline{DG} < \overline{BC}, \quad \overline{D'G} < \overline{B'C'},$$

tehát előbbiből folyik (1). (Ha B' összeesik A-val, akkor D' összeesik G-vel és $2\overline{FG} = \overline{DG} < \overline{BC}$.)

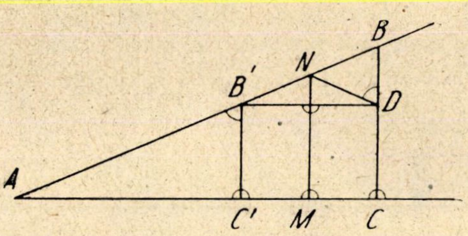
2. *Segédtétel. Ha M a $\overline{CC'}$ egyenesdarab felezőpontja s az M-ben AC-re emelt merőleges AB-t N-ben metszi, akkor*

$$2\overline{AN} < \overline{AB} + \overline{AB'}. \tag{2}$$

Ez akkor is érvényes, midőn B' összeesik A-val (mikor is $\overline{AB'} = 0$).



6. ábra



7. ábra

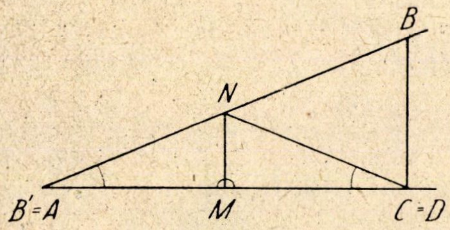
Bizonyítás. Minthogy (7. ábra) $ABC_{\measuredangle}$ valamint $AB'C'_{\measuredangle}$ hegyesszög, a $BCC'B'$ négyszögben $BB'C'_{\measuredangle} > B'BC_{\measuredangle}$, következőleg $\overline{B'C'} < \overline{BC}$. Ennélfogva B és C között van olyan D pont, hogy $\overline{DC} = \overline{B'C'}$. A $B'C'CD$ *Saccheri*-féle négyszögben a $\overline{CC'}$ oldal felező merőlegese egyszersmind a $\overline{B'D}$ oldalt is merőlegesen felezi, tehát $NB'D_{\measuredangle} = NDB'_{\measuredangle}$. S mivel még $DB'C'_{\measuredangle} = B'DC_{\measuredangle}$, következik, miszerint $NB'C'_{\measuredangle} = NDC_{\measuredangle}$. Ebből folyólag $AB'C'_{\measuredangle} = NDB_{\measuredangle}$. Ellenben $AB'C'_{\measuredangle} > B'BC_{\measuredangle}$, mert a I. tétel korolláriuma értelmében a $BCC'B'$ négyszög szögösszege $< 2\pi$ s így $BB'C'_{\measuredangle} + B'BC_{\measuredangle} < \pi$. Ezek szerint a DBN háromszögben $NDB_{\measuredangle} > NBD_{\measuredangle}$, tehát $\overline{NB} > \overline{ND}$. De mivel MN a $\overline{B'D}$ felező merőlegese, azért $\overline{ND} = \overline{NB'}$ s így előbbiből $\overline{NB} > \overline{NB'}$ vagyis

$$\overline{AB} - \overline{AN} > \overline{AN} - \overline{AB'},$$

azaz fennáll (2). (Ha B' összeesik A-val, akkor D összeesik C-vel (8. ábra) s

$$NDB_{\sphericalangle}=\frac{\pi}{2}-BAC_{\sphericalangle}>ABC_{\sphericalangle}=NBD_{\sphericalangle},$$

lévén a I. tétel szerint az ABC háromszög szögösszege $<\pi$.)



8. ábra

III. Tétel. A fenti jelölések mellett

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}<\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \tag{3}$$

ellenben

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}>\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}. \tag{4}$$

Bizonyítás. (3)-at igazolandó, legyenek először $\overline{AB}$ és $\overline{AB'}$ összemérhetők. Ekkor $\overline{AB}$ egyenlő részekre osztható úgy, hogy valamelyik osztópont B'-vel összeesik. Legyen ez a felosztás

$$\overline{P_0P_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots=\overline{P_{n-1}P_n} \quad (P_0=A, P_n=B)$$

és P_{ν_n} essék össze B'-vel. Ha a P_i pontból AC-re bocsátott merőleges $\overline{P_iQ_i}$, az 1. segédtétel értelmében

$$2\,\overline{P_iQ_i}<\overline{P_{i-1}Q_{i-1}}+\overline{P_{i+1}Q_{i+1}} \quad (i=1,2,\ldots,n-1). \tag{5}$$

Ez egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\overline{P_1Q_1}<\frac{\overline{P_2Q_2}}{2}<\frac{\overline{P_3Q_3}}{3}<\cdots<\frac{\overline{P_nQ_n}}{n}. \tag{6}$$

Ugyanis az $i=1$-nek megfelelő egyenlőtlenség szerint $\overline{P_1Q_1}<\frac{\overline{P_2Q_2}}{2}$, s ha fennáll, hogy

$$\frac{\overline{P_{i-1}Q_{i-1}}}{i-1}<\frac{\overline{P_iQ_i}}{i},$$

akkor (5) alapján

$$2\,\overline{P_iQ_i}<\frac{i-1}{i}\,\overline{P_iQ_i}+\overline{P_{i+1}Q_{i+1}}$$

honnan

$$\frac{\overline{P_iQ_i}}{i}<\frac{\overline{P_{i+1}Q_{i+1}}}{i+1},$$

tehát egymás után adódnak a (6) alatti egyenlőtlenségek. Mármost (6)-ból folyólag

$$\frac{\overline{B'C'}}{\nu_n} = \frac{\overline{P_{\nu_n}Q_{\nu_n}}}{\nu_n} < \frac{\overline{P_nQ_n}}{n} = \frac{\overline{BC}}{n}$$

vagyis

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} < \frac{\nu_n}{n} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}},$$

amivel (3) ez esetre be van bizonyítva.

Legyenek most $\overline{AB}$ és $\overline{AB'}$ összemérhetetlenek. Válasszuk B' és B között a B^* pontot úgy, hogy $\overline{AB}$ és $\overline{AB^*}$ összemérhetők legyenek s legyen ennek vetülete az AC egyenesen C^*. Az $\overline{AB^*}$ egyenesdarabot n egyenlő részre osztva a $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ osztópontokkal, essék B' a P_{ν_n-1} és P_{ν_n} közé ($P_0 = A$; $P_n = B^*$). Az előbbiek szerint

$$\frac{\overline{P_{\nu_n}Q_{\nu_n}}}{\overline{AP_{\nu_n}}} \leqq \frac{\overline{B^*C^*}}{\overline{AB^*}}$$

(az egyenlőség érvényes, ha $\nu_n = n$), tehát még inkább

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AP_{\nu_n}}} < \frac{\overline{B^*C^*}}{\overline{AB^*}},$$

mert a $B'C'Q_{\nu_n}P_{\nu_n}$ négyszögben $B'P_{\nu_n}Q_{\nu_n}\sphericalangle < P_{\nu_n}B'C'\sphericalangle$ s így $\overline{B'C'} < \overline{P_{\nu_n}Q_{\nu_n}}$. Ebből az $n \to +\infty$ határátmenettel következik, hogy

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} \leqq \frac{\overline{B^*C^*}}{\overline{AB^*}}.$$

De mivel $\overline{AB}$ és $\overline{AB^*}$ összemérhetők, a fentebbiek értelmében fennáll még

$$\frac{\overline{B^*C^*}}{\overline{AB^*}} < \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

s e két egyenlőtlenségből folyik (3).

A 2. segédtételből hasonlóan következik, hogy

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

tehát (4) is érvényes. Qu. e. d.

E tétel alapján rögzített $A\sphericalangle = x$ mellett $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ valamint $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ meghatározott véges határértékhez tartanak, midőn $\overline{AB} \to 0$. Legyen a $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ számközben

$$S(x) = \lim \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad C(x) = \lim \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad (\overline{AB} \to 0). \tag{7}$$

Minthogy $\overline{AB}$ csökkentésénél $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ fogy, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ viszont növekedik, azért

$$S(x) < \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} < C(x),$$

tehát mindenesetre

$$S(x) < 1, \quad C(x) > 0. \tag{8}$$

Ez $S(x)$ és $C(x)$ függvények meghatározása céljából szükségünk van a következő tételre.

IV. Tétel. Ha az ABC háromszög oldalai 0-hoz tartanak és $C_{\sphericalangle} \to \frac{\pi}{2}$, $A_{\sphericalangle} \to \xi$, akkor $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ határértéke 0, 1, *vagy $S(\xi)$ aszerint, amint $\xi = 0$, $\xi = \frac{\pi}{2}$, vagy $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$.*

Bizonyítás. A tételt először arra az esetre bizonyítjuk be, midőn $C_{\sphericalangle} = \frac{\pi}{2}$.

A $\xi = 0$ esetben így következtethetünk. Adatván $\varepsilon > 0$, nyilván van olyan AB^*C^* derékszögű háromszög $\left(C^*_{\sphericalangle} = \frac{\pi}{2}\right)$, amelyben

$$\frac{\overline{B^*C^*}}{\overline{AC^*}} < \varepsilon. \tag{9}$$

Legyen már $BAC_{\sphericalangle} < B^*AC^*_{\sphericalangle}$ és $\overline{AB} < \overline{AC^*}$, s képzeljük a háromszögeket a 9. ábrán látható módon egymásra helyezve. A feltevésnél fogva AB metszi B^*C^*-ot valamely B' pontban. Minthogy $\overline{AC^*} < \overline{AB'}$, feltevésünk folytán még inkább $\overline{AB} < \overline{AB'}$, tehát a III. tétel értelmében

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} < \frac{\overline{B'C^*}}{\overline{AB'}} \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC^*}} = \frac{\overline{B'C^*}}{\overline{AC^*}}.$$

S mivel $\overline{AB} > \overline{AC}$ és a feltevés alapján $\overline{B'C^*} < \overline{B^*C^*}$, (9)-ből folyólag még inkább

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} < \varepsilon,$$

amivel az állítás ez esetre be van bizonyítva.

Ha $\xi = \frac{\pi}{2}$ vagyis $A_{\sphericalangle} \to \frac{\pi}{2}$, akkor a II. tétel alapján $B_{\sphericalangle} \to 0$, tehát az előbbiek értelmében

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \to 0.$$

Azonban $0 < \overline{AB} - \overline{BC} < \overline{AC}$ folytán

$$0 < 1 - \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} < \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

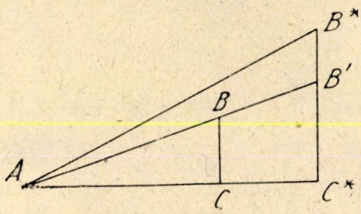
tehát a fortiori

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \to 1,$$

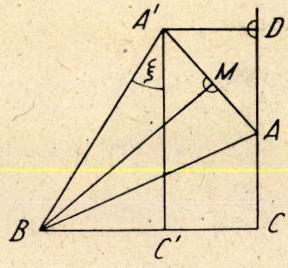
amint állítottuk.

Legyen most $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$. Tekintsük azt az $A'BC'$ derékszögű háromszöget $\left(C'_{\sphericalangle} = \frac{\pi}{2}\right)$, amelyben $BA'C'_{\sphericalangle} = \xi$, $\overline{A'B} = \overline{AB}$, s amely a 10. ábrán látható módon van ABC-re helyezve. Ha A'-ből AC-re az $\overline{AD}$ merőlegest bocsátjuk, az $A'C'CD$ *Lambert*-féle négyszögben $\overline{CC'} < \overline{DA'}$ (1. §) és még inkább $\overline{CC'} < \overline{AA'}$. (Nyilván feltehető, hogy $A_{\sphericalangle} \neq \xi$, tehát A és A' különbözők). Következőleg

$$\left|\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{BC'}}{\overline{A'B}}\right| = \frac{\overline{CC'}}{\overline{AB}} < \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}},$$



9. ábra



10. ábra

vagy $\overline{AA'}$ felezőpontját M-mel jelölve

$$\left|\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{BC'}}{\overline{A'B}}\right| < \frac{2\overline{MA}}{\overline{AB}}. \tag{10}$$

Minthogy $\overline{AB} = \overline{A'B}$, azért

$$ABM_{\sphericalangle} = \frac{1}{2} ABA'_{\sphericalangle} = \frac{1}{2} |ABC_{\sphericalangle} - A'BC'_{\sphericalangle}|$$

és $AMB_{\sphericalangle} = \frac{\pi}{2}$. De a II. tétel értelmében $ABC_{\sphericalangle}$ és $A'BC'_{\sphericalangle}$ mindketten $\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right)$-hez tartanak s így $ABM_{\sphericalangle} \to 0$, tehát a fentebbiek szerint

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} \to 0.$$

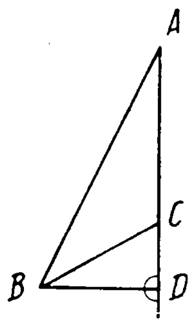
Továbbá a (7) alatti definíció értelmében

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{A'B}} \to S(\xi).$$

E két limesrelációból (10) alapján következik, hogy

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \to S(\xi).$$

Ezzel a tétel a $C_{\sphericalangle} = \frac{\pi}{2}$ esetre be van bizonyítva.



11. ábra

Az általános tételt most már következőkép bizonyíthatjuk be. Bocsássuk B-ből AC-re a $\overline{BD}$ merőlegest (11. ábra). Az ABD háromszögben a már bebizonyítottak szerint

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \to \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi = 0 \\ 1, & \text{ha } \xi = \frac{\pi}{2} \\ S(\xi), & \text{ha } 0 < \xi < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Mivel pedig a $BCD_{\sphericalangle}$ vagy a $BCA_{\sphericalangle}$-gel, vagy annak mellékszögével esik egybe, a feltevés értelmében $BCD_{\sphericalangle} \to \frac{\pi}{2}$, tehát szintén a fentebbiek szerint

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \to 1.$$

Ezekből összeszorzással folyik az állítás. Qu. e. d.

Korollárium. A $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *intervallum minden helyén* $C(x) = S\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

V. Tétel. Megállapodva abban, hogy

$$S(0) = C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = C(0) = 1 \tag{11}$$

legyen, az $S(x)$ *és* $C(x)$ *függvények folytonosak a* $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ *zárt intervallumban.*

Bizonyítás. Legyen ξ az intervallum rögzített helye. Tekintsünk valamely ABC derékszögű háromszöget $\left(C_{\sphericalangle} = \frac{\pi}{2}\right)$, amelyben $A_{\sphericalangle} = x$. Adatván $\varepsilon > 0$, a IV. tétel és a (11) alatti megállapodás értelmében

$$\left| S(\xi) - \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

hacsak x eléggé megközelíti a ξ helyet és $\overline{AB}$ elég kicsiny. De x-et rögzítve, az $S(x)$ (7) alatti definíciója szerint

$$0 < \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} - S(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ha $\overline{AB}$ továbbmenőleg eléggé kicsiny. E két egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|S(\xi)-S(x)|<\varepsilon$$

ha x eléggé közel van ξ-hez. Ezzel kimutattuk, hogy $S(x)$ a ξ helyen folytonos. Ebből az előbbi korollárium és a (11) alatti megállapodás alapján már következik, hogy $C(x)$ is folytonos a $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ számköz minden helyén. Qu. e. d.

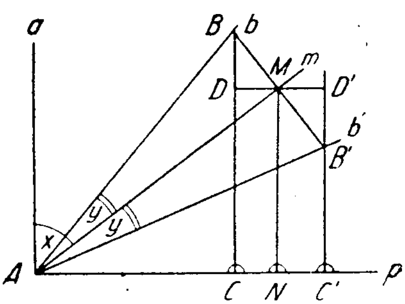
VI. Tétel. A $C(x)$ *függvény eleget tesz a*

$$C(x-y)+C(x+y)=2C(x)\,C(y) \tag{12}$$

$$\left(0<y<x<\frac{\pi}{2},\quad x+y<\frac{\pi}{2}\right)$$

függvényegyenletnek.

Bizonyítás. Legyenek a és m a A pontból kiinduló félegyenesek, amelyeknek szöge $(a, m)_{\sphericalangle}=x$. Jelöljük b-vel e szögnek azt a közbülső félegyenesét, amelyre $(b, m)_{\sphericalangle}=y$, továbbá b'-vel ennek m-re vonatkozó tükörképét (12. ábrát). A b félegyenesen felvévén az A-tól különböző B pontot, legyen b'-re átrakva $\overline{AB}=\overline{AB'}$ s messe BB' az m-et M-ben. Ekkor $m \perp BB'$ és $\overline{BM}=\overline{B'M}$. Állítsuk még A-ban a-ra a p merőlegest s bocsássuk a B, M, B' pontokból p-re a $\overline{BC}, \overline{MN}, \overline{B'C'}$ merőlegeseket, mikor is nyilván $\overline{AC}<\overline{AN}<\overline{AC'}$. Végül legyen C-ből a B, C'-ből a B' felé felrakva $\overline{MN}=\overline{CD}, \overline{MN}=\overline{C'D'}$. Miután



12. ábra

$BMN_{\sphericalangle}>\frac{\pi}{2}$ viszont $MBC_{\sphericalangle}<\frac{\pi}{2}$, tehát $BMN_{\sphericalangle}>MBC_{\sphericalangle}$, azért a $BCNM$ négyszögben $\overline{BC}>\overline{MN}$, vagyis D a B és C közé esik. Minthogy pedig a szerkesztésből folyólag $MAB'_{\sphericalangle}=y$, $B'AC'_{\sphericalangle}=\frac{\pi}{2}-(x+y)$, azért $\overline{AB}\to 0$ esetén a II. tétel szerint $AB'M_{\sphericalangle}\to\frac{\pi}{2}-y$ és $AB'C'_{\sphericalangle}\to x+y$, tehát ezek összege $MB'C'_{\sphericalangle}\to\frac{\pi}{2}+x$, következőleg *eléggé kicsiny* $\overline{AB}$ *mellett* $MB'C'_{\sphericalangle}>$ $>\frac{\pi}{2}$. Viszont $B'MN_{\sphericalangle}<\frac{\pi}{2}$, tehát a $B'C'NM$ négyszögben ekkor $\overline{B'C'}<\overline{MN}$, azaz B' a C' és D' között van. Mármost

$$\overline{BC}=\overline{CD}+\overline{BD}=\overline{MN}+\overline{BD}$$

$$\overline{B'C'}=\overline{C'D'}-\overline{B'D'}=\overline{MN}-\overline{B'D'},$$

tehát $\overline{AB} = \overline{AB'}$-vel végigosztva és összeadva, célszerű átalakítással

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = 2\frac{\overline{MN}}{\overline{AM}}\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BD}}{\overline{BM}}\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{B'D'}}{\overline{B'M}}\frac{\overline{B'M}}{\overline{AB'}}. \tag{13}$$

Itt $\overline{AB} \to 0$ esetén a $C(x)$ függvény definíciója értelmében

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \to C(y),$$

az $S(x)$ függvény definíciója szerint pedig a IV. tétel korolláriuma alapján

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} \to C(x), \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \to C(x-y), \quad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} \to C(x+y).$$

Ugyanekkor az $MNCD$ és $MNC'D'$ *Saccheri*-féle négyszögek oldalai nyilván 0-hoz tartanak, tehát a II. tételből folyólag $BDM_{\sphericalangle} \to \frac{\pi}{2}$ valamint $B'D'M_{\sphericalangle} \to \frac{\pi}{2}$. S mivel a $BCC'B'$ négyszög oldalai is evidenter 0-hoz tartanak, azért a II. tétel folytán a már talált $MB'C' \to \frac{\pi}{2} + x$ (másszóval $MB'D'_{\sphericalangle} \to \frac{\pi}{2} - x$) limesreláció mellett $MBC_{\sphericalangle} \to \frac{\pi}{2} - x$. Tehát a II. tétel szerint $BMD_{\sphericalangle} \to x$, valamint $B'MD'_{\sphericalangle} \to x$ s így a IV. tétel értelmében

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} \to S(x), \quad \frac{\overline{B'D'}}{\overline{B'M}} \to S(x).$$

És ismét az $S(x)$ függvény definíciója szerint

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'M}}{\overline{AB'}} \to S(y).$$

Ezek alapján (13)-ból folyik (12), qu. e. d.

Az V. és VI. tétel alapján a $C(x)$ függvényt most már következőkép határozhatjuk meg.[10]

Az $x \to \frac{\pi}{4}$, $y \to \frac{\pi}{4}$ határátmenettel (12)-ből az V. tétel alapján következik, hogy

$$1 = 2C\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

honnan (8)-ra tekintettel

$$C\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}, \tag{14}$$

Feltéve, hogy $C\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\frac{\pi}{2^n}$, (12)-ből az $x \to \frac{\pi}{2^{n+1}}$, $y \to \frac{\pi}{2^{n+1}}$ határátmenettel az V. tétel alapján

$$1+\cos\frac{\pi}{2^n} = 2C\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2$$

s ebből (8)-ra tekintettel

$$C\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}. \tag{15}$$

Mivel ez (14) szerint $n=1$-re fennáll, teljes indukcióval következik, hogy érvényes az $n=1, 2, 3, \ldots$ értékek mindegyikére. Megmutatjuk még, miszerint általánosabban

$$C\left(\frac{m\pi}{2^{n+1}}\right) = \cos\frac{m\pi}{2^{n+1}}, \quad \text{ha} \quad m=1, 2, \ldots 2^n-1 \tag{16}$$

$$(n=1, 2, 3, \ldots).$$

Ha ugyanis feltesszük, hogy

$$C\left(\frac{(k-1)\pi}{2^{n+1}}\right) = \cos\frac{(k-1)\pi}{2^{n+1}}, \quad C\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) = \cos\frac{k\pi}{2^{n+1}},$$

akkor $x=\frac{k\pi}{2^{n+1}}$, $y=\frac{\pi}{2^{n+1}}$ mellett (12)-ből (15)-re tekintettel

$$C\left(\frac{(k+1)\pi}{2^{n+1}}\right) = 2C\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)C\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - C\left(\frac{(k-1)\pi}{2^{n+1}}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{k\pi}{2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} - \cos\frac{(k-1)\pi}{2^{n+1}} = \cos\frac{(k+1)\pi}{2^{n+1}}.$$

De (16) $m=1$-re és $m=2$-re (15) szerint fennáll, tehát következik az $m=1, 2, \ldots, 2^n-1$ értékek mindegyikére. Minthogy pedig a $0<x<\frac{\pi}{2}$ számköz bármely x helyéhez ilyen $\frac{m\pi}{2^{n+1}}$ alakú számok sorozatán át konvergálhatunk, (16)-ból az V. tétel alapján következik, miszerint

$$C(x) = \cos x \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Tekintettel a IV. tétel korolláriumára, ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy

$$S(x) = \sin x \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

Ezek értelmében a (7) alatti képletek átmennek a $\sin x$ és $\cos x$ függvény következő interpretációjába:

$$\sin x = \lim\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}, \qquad \cos x = \lim\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \tag{7*}$$

$$(\overline{AB}\to 0).$$

3. §. *Bolyai János sinus-tétele*

A továbbiak alapjául szolgál a következő tétel, amely független a párhuzamosság axiómájától.[11]

VII. Tétel. Ha $\sigma > \sigma'$ *az* s, *ill.* s' *húroknak megfelelő középponti szögek mérőszámai a körben, akkor*

$$\frac{s'}{\sigma'} > \frac{s}{\sigma}. \qquad (1)$$

E tételt a III. tételhez hasonlóan bizonyíthatjuk be az alábbi segédtétel alapján.

Segédtétel. Ha az $\widehat{AP}$ *köríven* Q *a* P*-től különböző pont és* H *a* $\widehat{PQ}$ *ív felezőpontja, akkor*

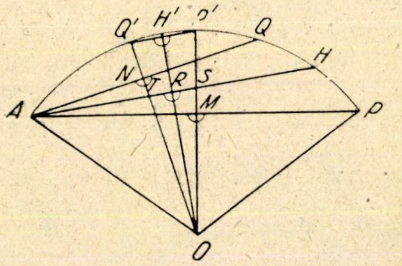
$$2\overline{AH} > \overline{AP} + \overline{AQ}. \qquad (2)$$

Ezt következőkép láthatjuk be. Legyenek az $\widehat{AP}, \widehat{AQ}, \widehat{AH}$ ívek felezőpontjai rendre P', Q', H' s ezeket a kör O középpontjával összekötő egyenesek messék az $\overline{AP}, \overline{AQ}, \overline{AH}$ húrokat rendre az M, N, R pontokban (13. ábra). Akkor nyilván

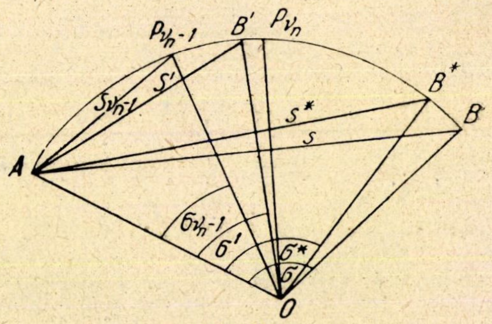
$$2\overline{AM} = \overline{AP}, \quad 2\overline{AN} = \overline{AQ}, \quad 2\overline{AR} = \overline{AH} \qquad (3)$$

és

$$AMP'\sphericalangle = ANQ'\sphericalangle = ARH'\sphericalangle = \frac{\pi}{2}. \qquad (4)$$



13. ábra



14. ábra

AH messe az OP', ill. OQ' egyenest S, resp. T-ben. A H' pont nyilván felezi a $\widehat{P'Q'}$ ívet, ezért $H'O$ a $\overline{P'Q'}$ egyenesdarab felező merőlegese. S mivel AH az OH' egyenest R-ben (4) szerint derékszögben metszi, a szimmetria folytán $\overline{RS} = \overline{RT}$. Ennélfogva $2\overline{AR} = \overline{AS} + \overline{AT}$. De (4) alapján $\overline{AS} > \overline{AM}$ és $\overline{AT} > \overline{AN}$, tehát $2\overline{AR} > \overline{AM} + \overline{AN}$ s ezzel (3)-ra tekintettel (2)-be van bizonyítva. (Ha Q összeesik A-val és így $\overline{AQ} = 0$, akkor $\overline{AH} = \overline{HP}$, tehát (2) evidens.)

A VII. tétel jelzett bebizonyítása most már a következő. Tekintsük az O középpontú $\widehat{AB}$ köríven a közbülső B' pontot s legyen

$$AOB\sphericalangle = \sigma, \quad AOB'\sphericalangle = \sigma', \quad \overline{AB} = s, \quad \overline{AB'} = s'.$$

Ha $\widehat{AB}$ és $\widehat{AB'}$ összemérhetők, akkor a segédtételből következik, hogy (1) fennáll. Legyenek most $\widehat{AB}$ és $\widehat{AB'}$ összemérhetetlenek. Válasszuk a $\widehat{B'B}$ íven a közbülső B^* pontot (14. ábra) úgy, hogy $\widehat{AB}$ és $\widehat{AB^*}$ összemérhetők legyenek s legyen $AOB^*\sphericalangle=\sigma^*$, $\overline{AB^*}=s^*$. Az $\widehat{AB^*}$ ívet n egyenlő részre osztván a $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ osztópontokkal, essék B' a P_{ν_n-1} és P_{ν_n} közé ($P_0=A$, $P_n=B$) és legyen $AOP_{\nu_n-1}\sphericalangle=\sigma_{\nu_n-1}$, $\overline{AP_{\nu_n-1}}=s_{\nu_n-1}$. Ha n elég nagy, akkor $1<\nu_n<n$, tehát $\sigma_{\nu_n-1}\neq 0$ és $s_{\nu_n-1}\neq 0$. Az előbbiek szerint

$$\frac{s_{\nu_n-1}}{\sigma_{\nu_n-1}}>\frac{s^*}{\sigma^*}.$$

Minthogy $\sigma'>\sigma_{\nu_n-1}$, azért $s'>s_{\nu_n-1}$, tehát ez egyenlőtlenség maga után vonja

$$\frac{s'}{\sigma_{\nu_n-1}}>\frac{s^*}{\sigma^*}$$

fennállását. Ebből az $n\to+\infty$ határátmenettel következik, hogy

$$\frac{s'}{\sigma'}\geqq\frac{s^*}{\sigma^*}.$$

De mivel $\widehat{AB}$ és $\widehat{AB^*}$ összemérhetők, a fentebbiek értelmében egyszersmind

$$\frac{s^*}{\sigma^*}>\frac{s}{\sigma}$$

s e két egyenlőtlenségből folyik (1), qu. e. d.

VIII. Tétel. Ha σ, ill. s valamely középponti szögnek, ill. a megfelelő húrnak a mérőszáma a körben, akkor $\sigma\to 0$ esetén $\frac{s}{\sigma}$ meghatározott pozitív határértékhez tart. [12]

Bizonyítás. Az (1) egyenlőtlenség szerint σ csökkentésénél $\frac{s}{\sigma}$ növekedik. Tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy $\frac{s}{\sigma}$ bizonyos korlát alatt marad.

Rögzítsünk valamely α középponti szöget, amely bizonyos $\widehat{AB}$ ívnek felel meg. Adatván bármely σ középponti szög, az α felbontható az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ részekre úgy, hogy mindegyik $\alpha_i<\sigma$. A megfelelő húrokat rendre $s_1, s_2, \ldots, s_n$-nel jelölve, tudvalevőleg

$$\min\frac{s_i}{\alpha_i}\leqq\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}. \tag{5}$$

Minthogy $\alpha_i<\sigma$ ($i=1,2,\ldots,n$) folytán (1) értelmében

$$\frac{s}{\sigma}<\min\frac{s_i}{\alpha_i}$$

és $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\alpha$, azért még inkább áll

$$\frac{s}{\sigma}<\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{\alpha}.$$

Azonban $s_1+s_2+\cdots+s_n$ az $\widehat{AB}$ ívbe írt poligon hossza, tehát kisebb, mint egy az ív köré írt poligon p hosszúsága. Ennélfogva ez egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{s}{\sigma}<\frac{p}{\alpha}$$

bármely σ középponti szögre. Qu. e. d.

Jelöljük a szóbanforgó határértéket, mint a kör r sugarának függvényét $K(r)$-rel, vagyis legyen per definitionem

$$K(r)=\lim\frac{s}{\sigma}\quad(\sigma\to 0). \tag{6}$$

IX. Tétel. Ha valamely hegyesszög egyik szárára felrakjuk az A csúcspontból a $c=\overline{AB}<\overline{AB'}=c'$ *egyenesdarabokat s a másik szárra az* $a=\overline{BC}$ *és* $a'=\overline{B'C'}$ *merőlegeseket bocsátjuk, akkor*

$$\frac{K(a)}{K(c)}=\frac{K(a')}{K(c')}. \tag{7}$$

Bizonyítás. Tekintsük a C-, ill. C'-ben az AC egyenesre merőleges síkban a C középpontú a sugarú, ill. a C' középpontú a'-sugarú kört (15. ábra). Messe egy az AC egyenesből kiinduló félsík e köröket P, ill. P'-ben, egy másik ilyen félsík pedig Q, resp. Q'-ben. A szerkesztésből folyólag $ACP_\triangle\equiv ACB_\triangle$ valamint $AC'P'_\triangle\equiv AC'B'_\triangle$, tehát

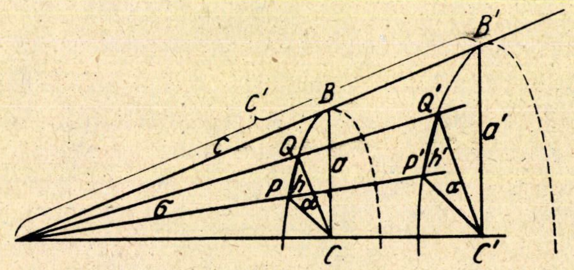
$$PAC_\sphericalangle=BAC_\sphericalangle=B'AC'_\sphericalangle=P'AC'_\sphericalangle$$

s így P' az AP félegyenesre esik. Hasonlókép Q' az AQ félegyenesre esik. Legyen

$$PCQ_\sphericalangle=P'C'Q'_\sphericalangle=\alpha,\quad PAQ_\sphericalangle=P'AQ'_\sphericalangle=\sigma,$$

továbbá

$$\overline{PQ}=h,\quad \overline{P'Q'}=h'.$$



15. ábra

Ha $\alpha\to 0$, akkor $\overline{PQ}\to 0$, tehát, egyben $\sigma\to 0$. Mármost a (6) alatti definíció szerint egyrészt

$$\frac{h}{\alpha}\to K(a),\quad \frac{h'}{\alpha}\to K(a'),$$

s mivel nyilván $\overline{AP} = \overline{AQ} = c$ és $\overline{AP'} = \overline{AQ'} = c'$, azért másrészt

$$\frac{h}{\sigma} \to K(c), \quad \frac{h'}{\sigma} \to K(c').$$

Ennélfogva egyidejűleg

$$\frac{\sigma}{\alpha} \to \frac{K(a)}{K(c)}, \quad \frac{\sigma}{\alpha} \to \frac{K(a')}{K(c')}.$$

Tehát (7) valóban fennáll. Qu. e. d.

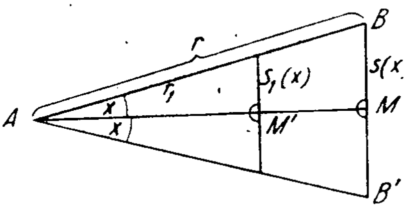
X. Tétel. Ha $r \to 0$, *akkor* $\frac{K(r)}{r}$ *pozitív határértékhez tart.*

Bizonyítás. Legyen ABB' egyenlőszárú háromszög, amelyben

$$BAB'_{\sphericalangle} = 2x, \quad \overline{AB} = \overline{AB'} = r$$

(16. ábra). Ebben a $\overline{BB'}$ alap az x függvénye, mondjuk

$$\overline{BB'} = 2s(x).$$



16. ábra

A (6) alatti definíció értelmében

$$\frac{s(x)}{x} = \frac{2s(x)}{2x} \to K(r), \text{ midőn } x \to 0. \tag{8}$$

A $\overline{BB'}$ felezőpontját M-mel jelölve $AMB_{\sphericalangle} = \frac{\pi}{2}$, $\overline{BM} = s(x)$, tehát $r_1 < r$ mellett a III. tétel értelmében a megfelelő jelöléssel (16. ábra)

$$\frac{s_1(x)}{r_1} < \frac{s(x)}{r}$$

vagy x-szel végigosztva

$$\frac{1}{r_1}\frac{s_1(x)}{x} < \frac{1}{r}\frac{s(x)}{x}.$$

Ebből rögzített r és r_1 mellett az $x \to 0$ határátmenettel (8) alapján következik, hogy

$$\frac{K(r_1)}{r_1} \leqq \frac{K(r)}{r}.$$

Ezzel megmutattuk, miszerint $\frac{K(r)}{r}$ az r csökkentésénél monoton fogy. De bizonyos pozitív korlát felett is kell maradnia. Ugyanis (8) értelmében rögzített r-nél

$$\frac{s\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} \to K(r), \text{ midőn } n \to +\infty,$$

vagyis ekkor

$$\frac{n\,s\left(\frac{\pi}{n}\right)}{r} \to \pi\frac{K(r)}{r}. \tag{9}$$

Minthogy azonban $2ns\left(\frac{\pi}{n}\right)$, mint a A középpontú r sugarú körbe írt és a A-t tartalmazó sokszög kerülete, nagyobb $4r$-nél[13], azért

$$\frac{ns\left(\frac{\pi}{n}\right)}{r} > 2.$$

Ennélfogva (9)-ből következik, hogy $\frac{K(r)}{r}$ is bizonyos pozitív korlát felett marad. Ezekből folyólag létezik a

$$\lim_{r=0} \frac{K(r)}{r} > 0$$

határérték. Qu. e. d.

XI. Tétel. Ha a derékszögű háromszögben a λ hegyesszöggel szemben-fekvő befogó a és az átfogó c, akkor

$$\sin\lambda = \frac{K(a)}{K(c)}. \tag{10}$$

Bizonyítás. Rögzített λ mellett $c \to 0$ esetén $\frac{K(a)}{K(c)}$ a IX. tétel értelmében állandó, továbbá a fortiori $a \to 0$, tehát az

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{K(a)} \frac{K(a)}{K(c)} \frac{K(c)}{c}$$

átalakításból a 2. § (7*) képlete és a X. tétel alapján folyik (10). Qu. e. d.

A X. tételnek most már a következő pontosabb alakot adhatjuk:

X. Tétel. Ha $r \to 0$, akkor* $\frac{K(r)}{r} \to 1$.

Ugyanis (10)-ből

$$\frac{\sin\lambda}{\lambda} = \frac{K(a)}{a} \frac{a}{\lambda} \frac{1}{K(c)},$$

s mivel rögzített c mellett $a \to 0$ esetén $\lambda \to 0$ és így a (6) alatti definíció szerint $\frac{a}{\lambda} = \frac{2a}{2\lambda} \to K(c)$, ebből következik, hogy

$$\frac{K(a)}{a} \to 1, \quad \text{ha } a \to 0.$$

Továbbá az általános háromszöget két derékszögű háromszög összegére vagy különbségére bontva fel, a XI. tételből rögtön következik annak következő általánosítása:

XI. Tétel. Ha a háromszög oldalai a, b, c s az ezekkel szemben fekvő szögek rendre λ, μ, ν, akkor*

$$\sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu = K(a) : K(b) : K(c).$$

A $K(r)$ függvény (6) alatti definíciójából következik, hogy *az r sugarú kör kerülete $2\pi K(r)$.* Írjunk ugyanis a körbe olyan konvex sokszöget, amely a középpontot belsejében tartalmazza s legyenek ennek oldalai $s_1, s_2, \ldots, s_n$, a megfelelő középponti szögek pedig $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Akkor

$$\min \frac{s_i}{\sigma_i} \leqq \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n} \leqq \max \frac{s_i}{\sigma_i}$$

és itt

$$\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n = 2\pi.$$

S ha $\max \sigma_i \to 0$, akkor (6) értelmében mind az alsó, mind a felső korlát $K(r)$-hez tart. Tehát ez egyenlőtlenségből következik az állítás, hogy

$$s_1+s_2+\cdots+s_n \to 2\pi K(r), \text{ midőn } \max \sigma_i \to 0.$$

Ennélfogva a XI*. tétel másszóval azt mondja, hogy *a háromszög szögeinek sinusai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szembenfekvő oldalakkal mint sugarakkal leírt körök kerületei. (Bolyai János sinus-tétele.*[14]*)*

4. §. *A derékszögű háromszög trigonometriai képletei*

Legyen ABC derékszögű háromszög $\left(C_{\sphericalangle} = \frac{\pi}{2}\right)$, amelyben

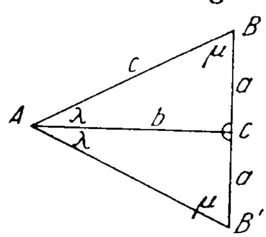
$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c, \quad A_{\sphericalangle} = \lambda, \quad B_{\sphericalangle} = \mu.$$

Alkalmazzuk *Réthy Mór*[15] mesterfogását, vagyis egészítsük ki a háromszöget az AC-re vonatkozó tükörképével (17. ábra). Az így előálló ABB' háromszögben

$$\overline{BB'} = 2a, \quad BAB'_{\sphericalangle} = 2\lambda, \quad BB'A_{\sphericalangle} = \mu,$$

tehát a XI*. tétel értelmében

$$\frac{\sin 2\lambda}{\sin \mu} = \frac{K(2a)}{K(c)}.$$



17. ábra

A XI. tétel szerint azonban

$$\sin \lambda = \frac{K(a)}{K(c)}, \tag{1}$$

tehát innen $\sin 2\lambda = 2 \sin \lambda \cos \lambda$ folytán következik, hogy

$$\frac{\cos \lambda}{\sin \mu} = \frac{K(2a)}{2K(a)} = \varphi(a), \tag{2}$$

csak az a függvénye. Minthogy a I. tétel értelmében $\lambda + \mu < \frac{\pi}{2}$, mindenesetre

$$\varphi(a) > 1. \tag{3}$$

Megmutatjuk még, miszerint

$$\frac{K(a)^2}{\varphi(a)^2 - 1} = k^2 \tag{4}$$

állandó.[16] Ugyanis a XI. tétel értelmében

$$\sin \mu = \frac{K(b)}{K(c)},$$

tehát (2)-re tekintettel

$$\cos\lambda = \frac{K(b)}{K(c)}\varphi(a).$$

Ezt (1)-gyel összevetve, nyerjük, hogy

$$K(a)^2 + K(b)^2\varphi(a)^2 = K(c)^2.$$

Hasonlókép

$$K(b)^2 + K(a)^2\varphi(b)^2 = K(c)^2$$

s e két egyenletből adódik

$$\frac{K(a)^2}{\varphi(a)^2 - 1} = \frac{K(b)^2}{\varphi(b)^2 - 1}.$$

Minthogy a és b egymástól függetlenek, ezzel (4) igazolva van.

A $\varphi(a)$ és $K(a)$ függvényeket a (2) és (4) alatti függvényegyenletek alapján most már következőkép határozhatjuk meg.

Írjuk (2)-t a

$$K(2a) = 2K(a)\varphi(a), \tag{2*}$$

(4)-et pedig a

$$\varphi(a)^2 = \left(\frac{K(a)}{k}\right)^2 + 1 \tag{4*}$$

alakban. (3) alapján

$$\varphi(a) = \operatorname{ch} x(a), \tag{5}$$

ahol $x(a) > 0$ az a-nak valamely függvénye. Erre (4*)-ból

$$\frac{K(a)}{k} = \operatorname{sh} x(a), \tag{6}$$

tehát (2*) és (5) alapján

$$\operatorname{sh} x(2a) = 2\operatorname{sh} x(a)\operatorname{ch} x(a) = \operatorname{sh} 2x(a)$$

vagyis

$$x(2a) = 2x(a). \tag{7}$$

A X*. tétel alapján (2*)-ból következik, hogy

$$\lim_{a=0}\varphi(a) = 1$$

s ennélfogva (5)-ből folyik, miszerint

$$\lim_{a=0} x(a) = 0.$$

Ennek felhasználásával (6)-ból ismét a X*. tétel alapján következik, hogy

$$\lim_{a=0}\frac{x(a)}{a} = \frac{1}{k}. \tag{8}$$

De (7) értelmében

$$\frac{x(a)}{a} = \frac{x\left(\frac{a}{2}\right)}{\frac{a}{2}} = \cdots = \frac{x\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a}{2^n}} = \cdots,$$

tehát (8)-ból folyólag

$$x(a)=\frac{a}{k}.$$

Ezt (5), ill. (6)-ba helyettesítve

$$\varphi(a)=\operatorname{ch}\frac{a}{k} \tag{9}$$

és

$$\frac{K(a)}{k}=\operatorname{sh}\frac{a}{k}. \tag{10}$$

Ezzel a $\varphi(a)$ és $K(a)$ függvényeket meghatároztuk.

A (10) képlet alapján a XI. tétel szerint a derékszögű háromszögben

$$\sin\lambda=\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}} \tag{I}$$

és hasonlóan

$$\sin\mu=\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}. \tag{I*}$$

A (2) és (9) képletek értelmében pedig

$$\frac{\cos\lambda}{\sin\mu}=\operatorname{ch}\frac{a}{k}. \tag{II}$$

Hasonlóképpen

$$\frac{\cos\mu}{\sin\lambda}=\operatorname{ch}\frac{b}{k}. \tag{II*}$$

(II) és az (I*) képletből folyik

$$\cos\lambda=\operatorname{ch}\frac{a}{k}\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}},$$

amit (I)-gyel összevetve, adódik

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{\operatorname{th}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}. \tag{III}$$

Hasonlókép

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\operatorname{th}\frac{b}{k}}{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}. \tag{III*}$$

Minthogy (I), resp. (I*)-ból

$$\sin^2\lambda\operatorname{sh}^2\frac{c}{k}=\operatorname{ch}^2\frac{a}{k}-1,\qquad \sin^2\mu\operatorname{sh}^2\frac{c}{k}=\operatorname{ch}^2\frac{b}{k}-1,$$

a (II)-ből adódó

$$1-\sin^2\lambda = \sin^2\mu \,\mathrm{ch}^2\frac{a}{k}$$

egyenletet $\mathrm{sh}^2\frac{c}{k}$-val végigszorozva

$$\mathrm{sh}^2\frac{c}{k}+1-\mathrm{ch}^2\frac{a}{k}=\left(\mathrm{ch}^2\frac{b}{k}-1\right)\mathrm{ch}^2\frac{a}{k},$$

honnan

$$\mathrm{ch}\frac{c}{k}=\mathrm{ch}\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\frac{b}{k}. \qquad \text{(IV)}$$

(III) és (III*)-ból (IV)-re tekintettel nyerjük, hogy

$$\mathrm{ctg}\,\lambda\,\mathrm{ctg}\,\mu=\mathrm{ch}\frac{c}{k}. \qquad \text{(V)}$$

Végül a $\cos\lambda$ fenti képletéből (IV) alapján

$$\cos\lambda=\frac{\mathrm{th}\frac{b}{k}}{\mathrm{th}\frac{c}{k}}, \qquad \text{(VI)}$$

és hasonlókép

$$\cos\mu=\frac{\mathrm{th}\frac{a}{k}}{\mathrm{th}\frac{c}{k}}. \qquad \text{(VI*)}$$

(I)—(VI) a hiperbolikus trigonometria alapképletei, a derékszögű háromszög két szöge és három oldala közül három-három között fennálló egyenletek.

A (4) képlettel definiált k távolság az ú. n. *természetes hosszegység* vagy a hiperbolikus geometria *parametere.*

5. §. *Az általános háromszög trigonometriai képletei*

Legyenek az ABC háromszög alkatrészei

$$\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c,\ A_{\sphericalangle}=\lambda,\ B_{\sphericalangle}=\mu,\ C_{\sphericalangle}=\nu.$$

Az előbbi § (10) képletére tekintettel a λ, μ szögek és az ezekkel rendre átellenes a, b oldalak között a XI*. tétel értelmében fennáll a

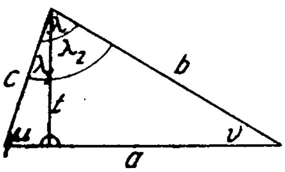
$$\frac{\sin\lambda}{\sin\mu}=\frac{\mathrm{sh}\frac{a}{k}}{\mathrm{sh}\frac{b}{k}} \qquad \text{(1)}$$

egyenlet. Ez az ú. n. *sinus-tétel.*

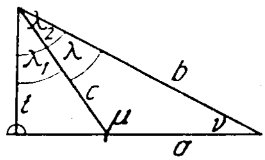
Most előállítjuk a λ, μ, ν szögek és az egyik, mondjuk a c oldal közti egyenletet. Feltehetjük, hogy $\mu \neq \frac{\pi}{2} \neq \nu$.

Jelöljük az a oldalhoz tartozó magasságot t-vel s ossza ez a λ szöget a λ_1 és λ_2 részekre (18 a., 18 b., 18 c. ábra), ahol is $\lambda_1 \gtreqless 0$ aszerint, amint $\mu \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$ és $\lambda_2 \gtreqless 0$ aszerint, amint $\nu \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$. A fenti (II) képlet szerint $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$ folytán

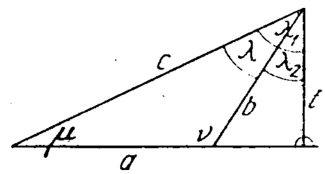
$$\cos\nu = \sin\lambda_2 \operatorname{ch}\frac{t}{k} = (\sin\lambda\cos\lambda_1 - \cos\lambda\sin\lambda_1)\operatorname{ch}\frac{t}{k},$$



18 a. ábra



18 b. ábra



18 c. ábra

s mivel ugyancsak (II) értelmében

$$\sin\lambda_1 \operatorname{ch}\frac{t}{k} = \cos\mu,$$

(VI) szerint pedig

$$\cos\lambda_1 = \frac{\operatorname{th}\frac{t}{k}}{\operatorname{th}\frac{c}{k}},$$

innen

$$\cos\nu = -\cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\,\frac{\operatorname{sh}\frac{t}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}\operatorname{ch}\frac{c}{k}.$$

De (I) értelmében

$$\sin\mu = \frac{\operatorname{sh}\frac{t}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}},$$

tehát végül nyerjük, hogy

$$\cos\nu = -\cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\sin\mu\operatorname{ch}\frac{c}{k}. \tag{2}$$

Ez az ú. n. *második cosinus-tétel.*

A λ, ν szögek és az egyiket, mondjuk λ-t bezáró b, c oldalak közötti egyenlethez most már kiküszöböléssel juthatunk. Nevezetesen $\cos\mu$ és $\sin\mu$ értékét a (2)-höz, ill. (1)-hez hasonló

$$\cos\mu = -\cos\nu\cos\lambda + \sin\nu\sin\lambda\operatorname{ch}\frac{b}{k}, \quad \frac{\sin\mu}{\sin\nu} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}},$$

egyenletekből (2) alatt behelyettesítve

$$\cos\nu = \cos\nu\cos^2\lambda - \sin\nu\sin\lambda\cos\lambda\operatorname{ch}\frac{b}{k} + \sin\lambda\sin\nu\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{cth}\frac{c}{k},$$

s ez egyenletet $\sin\nu\sin\lambda$-val végigosztva, összevonással előáll a

$$\sin\lambda\operatorname{ctg}\nu = -\cos\lambda\operatorname{ch}\frac{b}{k} + \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{cth}\frac{c}{k} \tag{3}$$

ú. n. *cotangens-tétel.*

Végül az egyik szög, mondjuk ν, és az a, b, c oldalak közti egyenlet a következő kiküszöböléssel nyerhető.

(3)-at $\sin\lambda\operatorname{ch}\frac{b}{k}$-val végigosztva

$$\frac{\operatorname{ctg}\nu}{\operatorname{ch}\frac{b}{k}} = -\operatorname{ctg}\lambda + \frac{1}{\sin\lambda}\operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{cth}\frac{c}{k},$$

s ebbe $\operatorname{ctg}\lambda$ és $\sin\lambda$ értékét a (3)-hoz, ill. (1)-hez hasonló

$$\sin\nu\operatorname{ctg}\lambda = -\cos\nu\operatorname{ch}\frac{b}{k} + \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{cth}\frac{a}{k}, \quad \frac{\sin\lambda}{\sin\nu} = \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}$$

egyenletekből behelyettesítve

$$\frac{\operatorname{ctg}\nu}{\operatorname{ch}\frac{b}{k}} = \operatorname{ctg}\nu\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{cth}\frac{a}{k}}{\sin\nu} + \frac{1}{\sin\nu}\frac{\operatorname{th}\frac{b}{k}}{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}\operatorname{ch}\frac{c}{k},$$

honnan összevonással

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \cos\nu\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}. \tag{4}$$

Ez az ú. n. *első cosinus-tétel.*

A derékszögű háromszögre vonatkozó fenti (I)—(VI) képletek ez általános képleteknek speciális esetei.

Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézete.

IRODALOM

[1] *L. Gérard,* Sur le géométrie non euclidienne, Thèse, Paris 1892, Chapitre I.

[2] Lásd pl. *W. H. Young,* On the analytical Basis of Non-Euclidean Geometry, American Journal of Mathematics *33* (1911), 249—286, vagy *szerzőtől,* Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, Acta Scientiarum Mathematicarum *12* (1950), Pars A., 44—52.

[3] *Réthy Mór,* Bolyai János „ujj más világának" ismertetése, Matematikai és Fizikai Lapok *12* (1903), 1—29.

[4] V. ö. *szerzőtől,* Az elliptikus, az euklideszi és a hiperbolikus geometria szétválasztása, Matematikai és Fizikai Lapok *48* (1941), 243—271. speciálisan 261—263.

[5] V. ö. *Bolyai János*[14], i. m. 1. §.

[6] V. ö. *K. Fladt,* Der Saccheri—Legendresche Satz etc., Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht *56* (1925), 345.

[7] V. ö. *F. Engel—P. Stäckel,* Die Theorie der Parellellinien von Euklid bis auf Gauss etc., Leipzig 1895, 144.

[8] V. ö. *F. Engel P. Stäckel,* i. m. 37.

[9] V. ö. *W. H. Young,*[2] i. m. § 3, 10.

[10] V. ö. *A. L. Cauchy,* Cours d'analyse etc., Chapitre V, § 2, Oeuvres II^{e} série, t. III., 106—109.

[11] Lásd *szerzőtől,*[2] i. h. 44—46.

[12] Lásd *szerzőtől,*[2] i. h. 46.

[13] Lásd Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok *15* (1938/39), 127—128.

[14] *Johannes Bolyai* de eadem, Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens etc., Marosvásárhely 1832, 25. §. Magyarul lásd *Stäckel Pál,* Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai, fordította *Rados Ignác,* Budapest 1914., II. köt. 195—232., speciálisan 208, vagy Matematikai és Fizikai Lapok *6* (1897), 145—192., speciálisan 164—165.

[15] *Réthy Mór,*[3] i. h. 15—16.

[16] *Réthy Mór,*[3] i. h. 17.

MEGJEGYZÉS AZ UNIVERZÁLIS TEREKRE VONATKOZÓAN

KRÁLIK DEZSŐ

Bemutatta Alexits György r. tag az 1953. március 4-én tartott felolvasó ülésen

Ismeretes *Uriszon* tétele,[1] mely szerint minden R szeparábilis*, metrikus tér homeomorf a Hilbert-tér Q alaptéglájának** egy részhalmazával, vagyis a Hilbert-tégla univerzális tere a szeparábilis, metrikus tereknek.

P. Sz. Alekszandrov a Bolyai-héten való budapesti tartózkodása alkalmával szóbelileg megjegyezte, hogy *Uriszon* konstrukciójában a $h(R)=R'\subset Q$ leképezés ugyan egyenletesen folytonos, de úgy látszik, nem lehetséges bármely R szeparábilis metrikus térhez olyan $h(R)=R'\subset Q$ homeomorfiát hozzárendelni, amelynél $h(R)$ és egyszersmind $h^{-1}(R')$ is egyenletesen folytonos. Ennek a megjegyzésnek egyszerű bizonyítását adjuk a következőkben.

Legyen tehát R egy szeparábilis, metrikus tér, R' pedig R-nek a Hilberttéglában fekvő homeomorf képe. Megmutatjuk, hogy ha R nem feltételesen kompakt,*** akkor a $h^{-1}(R')=R$ leképezés nem lehet egyenletesen folytonos.

Ismeretes,[2] hogy a feltételes kompaktság ekvivalens a következő tulajdonsággal: bármely $\varepsilon>0$ számhoz található végesszámú $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pont úgy, hogy bármely x pont legalább az egyik x_i-től ε-nál kisebb távolságra legyen. (Ilyen pont-n-est ε-hálónak nevezünk.) Ebből a tulajdonságból következik, hogy minden feltételesen kompakt metrikus tér korlátos, vagyis átmérője véges.****

Ha R'-nek R-re való leképezése a köztük fennálló h^{-1} homeomorfiában egyenletesen folytonos lenne, akkor bármely $\varepsilon>0$ számhoz léteznék olyan $\delta>0$ szám, hogy ha R' két x' és x_1' pontjának távolsága $<\delta$, akkor

* Az R metrikus tér szeparábilis, ha van mindenütt sűrű megszámlálható részhalmaza, mint például az euklideszi térnek.

** A Hilbert-tér Q alaptéglája azon pontok összessége, amelyek $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ koordinátái eleget tesznek a

$$0\leqq x_n\leqq \frac{1}{n} \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

feltételeknek.

*** Valamely M metrikus ponthalmaz feltételesen kompakt, ha bármely végtelen részhalmazából kiválasztható egy $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Cauchy-féle sorozat. Például az euklideszi n-dimenziós tér minden korlátos, végtelen részhalmaza feltételesen kompakt, általában minden kompakt és zárt halmaz bármely végtelen részhalmaza feltételesen kompakt.

**** Abból azonban, hogy egy szeparábilis, metrikus tér korlátos, még nem következik a feltételes kompaktság. Például a $[0, 2\pi]$ intervallumban definiált s az $|f(x)|\leq 1$ feltételt kielégítő folytonos függvények bármely halmaza szeparábilis, korlátos teret alkot, ha az $f(x)$ és $g(x)$ pontok távolságát a szokásos

$$\sup_{0\leqq x\leqq 2\pi} |f(x)-g(x)|$$

számmal értelmezzük, de a $\sin x$, $\sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$ függvényekből álló halmaznak nincs Cauchy-féle részsorozata, vagyis nem feltételesen kompakt.

az R-beli $h^{-1}(x') = x$ és $h^{-1}(x_1') = x_1$ pontok távolsága $< \varepsilon$. Minthogy R' a kompakt Hilbert-tégla részhalmaza, R' feltételesen kompakt, tehát minden $\delta > 0$-hoz létezik az előbbi tulajdonsággal rendelkező $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ δ-háló. Ezek képpontjai R-ben: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ha most $x \in R$ tetszőleges pont, $x' = h(x)$, akkor legalább egy x_i'-re az $\overline{x'x_i'}$ távolság $< \delta$, s a feltételezett egyenletes folytonosság miatt az $\overline{xx_i}$ távolság $< \varepsilon$ lenne, másszóval az R tér bármely x pontja az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontok közül legalább az egyikhez ε-nál kisebb távolságra lenne, ami R feltételes kompaktságát jelentené. Ezzel az ellentmondással állításunk be van bizonyítva.

Következmények

Az előbbi bizonyításban a Hilbert-téglának, mint univerzális térnek csak a kompaktságát használtuk ki, ezért eredményünket a következőképpen is megfogalmazhatjuk: ha a Q kompakt metrikus tér univerzális tere a metrikus terek valamely $\mathfrak{R}$ rendszerének és $\mathfrak{R}$ tartalmaz nem feltételesen kompakt R teret is, akkor R homeomorf képének, $R' \subset Q$-nak R-re való inverz leképezése nem egyenletesen folytonos.

Ismeretes pl. a Menger—Nöbeling-féle tétel,[3] amely szerint az R_{2n+1} euklideszi tér egységkockája univerzális tere az n-dimenziós szeparábilis, metrikus tereknek. Erre az esetre is alkalmazható tehát tételünk.

Ha R lokálisan kompakt* topologikus tér, akkor Alekszandrov egy ismert tétele szerint[4] egyetlen ξ pont hozzácsatolásával R kompakttá tehető, úgyhogy R eredeti topológiája a bővített térben változatlan maradjon. Ha R metrikus és lokálisan kompakt, akkor eredményünkből következik, hogy R metrikája az $R + \{\xi\}$ kompakt bővítés során általában megváltozik. Jelöljük ugyanis R'-vel R-nek a bővített térben lévő képét. Ha $R = R'$ volna, akkor R topologikus leképezése R'-re és ennek megfordítása, vagyis R' leképezése R-re egyaránt egyenletesen folytonos volna, ami az előbbiek szerint általában nem lehetséges.

Megjegyzem végül, hogy *Alexits György* akadémikus, aki erre a kérdésre és annak következményeire volt szíves figyelmemet felhívni, közölt velem egy bizonyítást is, amely azonban valamivel kevésbbé egyszerű, mint a fenti.

Budapesti Műszaki Egyetem
Matematikai Tanszéke.

IRODALOM

1 *P. Uriszon,* Mathem. Annalen *94,* (1925), 309.

2 Lásd Hausdorff: Mengenlehre (1927), 108—109.

3 *Nöbeling,* Mathem. Annalen *104,* (1930), 71—80.

4 Lásd pl. *P. Alekszandrov:* Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe, 258., 9. tétel.

* Valamely $x \in R$ pontban az R tér (lokálisan) kompakt, ha létezik olyan $U(x)$ környezete x-nek, amelynek zárt burka kompakt. Az R tér lokálisan kompakt, ha minden pontjában kompakt.

A LAGRANGE-FÉLE INTFRPOLÁCIÓ LEBESGUE-FÜGGVÉNYEIRŐL

FREUD GÉZA

Bemutatta Alexits György r. tag az 1953. április 6-án tartott felolvasó ülésen

Bevezetés

Legyen

$$
\begin{array}{c}
a \leqq x_{11} \leqq b \\
a \leqq x_{12} < x_{22} \leqq b \\
\cdots \\
\cdots \\
a \leqq x_{1n} < x_{2n} < \cdots < x_{nn} \leqq b \\
\cdots \\
\cdots
\end{array}
\tag{1}
$$

és az (1) mátrix n-edik sorának elemeire, mint alappontokra képezett Lagrange-féle interpoláció x_{kn} alapponthoz rendelt alapfüggvénye legyen $l_{kn}(x)$. *G. Helly*[9] és *H. Hahn*[8] egy ismert tétele szerint az

$$L_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{kn})\, l_{kn}(x) \tag{2}$$

interpolációs sorozat konvergenciatulajdonságait a

$$\Lambda_n(x)=\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \tag{3}$$

Lebesgue-féle függvények szabják meg. *G. Faber*[5] egy tétele értelmében (lásd még *S. Bernstein,*[3] *Fejér Lipót*[6] akárhogyan is írjuk elő az (1) alappontmátrixot az (a, b) intervallumban, találhatók olyan, az (a, b)-be eső ξ_n számok, melyekre

$$\Lambda_n(\xi_n) > c_1 \log n, \tag{4}$$

ahol c_1 (és a továbbiakban $c_2, c_3 \ldots$) n-től független állandók *S. Bernstein*[3] kimutatta, hogy a (4) becslés pontos abban az értelemben, hogy $a=-1$, $b=+1$ esetén, amennyiben (1) n-edik sorának a $T_n(x)$ Csebisev-polinom gyökeit választjuk, akkor

$$\Lambda_n(x)=0\,(\log n) \tag{5}$$

$(-1,+1)$-ben egyenletesen. Szegő Gábor[12] bebizonyította, hogy (5) a $(-1,+1)$ intervallum minden belső részintervallumában egyenletesen érvényes még akkor is, ha az interpoláció alappontjainak nem a Csebisev-polinomokat, hanem a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi-polinomok gyökeit választjuk.

Ennél általánosabb érvényű, de (5)-nél gyengébb becsléseket találtak *J. Shohat*[11], továbbá *Grünwald Géza* és *Turán Pál*[7]: Legyen $\{P_n(x)\}$ a $p(x)$

L-integrálható súlyfüggvényhez tartozó ortogonális polinomok sorozata, az ortogonalitási intervallum legyen (a, b) és legyenek az x_{kn} alappontok $(k=1, 2, \ldots n)$ a $P_n(x)$ polinom gyökei. Eredményük szerint, ha minden $a \leqq x \leqq b$-re

$$p(x) \geqq m > 0; \text{ ill. } p(x)\sqrt{(x-a)(b-x)} \geqq m > 0;$$

akkor

$$\Lambda_n(x) = 0(\sqrt{n})$$

(a, b) minden belső részintervallumában egyenletesen, ill. az egész (a, b) ortogonalitási intervallumban egyenletesen. Várható, hogy a Jacobi-polinomok gyökhelyeinek (3) interpolációs sajátsága is elsősorban ezen polinomok ortogonalitásán mulik. Ennek ellenére *Szegő Gábor* (5) bizonyításához csak a Jacobi-polinomokra és első deriváltjaikra érvényes speciális becsléseket használ fel. Az alábbiakban egy, a Jacobi-polinomok gyökhelyeinek esetén lényegesen túlmenő, olyan általános tételt bizonyítunk be, amelyből *Szegő* tétele speciális esetként következik:

I. tétel. Legyen $\{P_n(x)\}$ *az* (a, b) *intervallumban a* $p(x)$ *L-integrálható nemnegatív súlyfüggvényre ortogonális és normált polinomok sorozata és képezzük a* $\{P_n(x)\}$ *gyökeiből az* (1) *interpolációs mátrixot. Ha* (a, b) *egy* (α, β) *belső részintervallumában*

$$0 < m \leqq w(x) \leqq M \tag{6}$$

és ugyanott

$$|P_n(x)| \leqq K; \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

akkor az (5) becslés (α, β) minden belső részintervallumára egyenletesen teljesül.

A $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Jacobi polinomok esetén $\alpha, \beta > -1$ mellett a súlyfüggvény L-integrálható és $(-1, +1)$ minden belső részintervallumában korlátos, továbbá a normált Jacobi-polinomok ugyanott egyenletesen korlátosak: tételünk Szegő tételét magában foglalja. De általánosabb annál, mert pl. *J. Korous*[10] (V. ö. Szegő Gábor[12] 157. o.) egy tételéből következik, hogy (7) akkor is teljesül, mégpedig a $(-1, +1)$ interpolációs intervallum minden belső részintervallumára egyenletesen, ha a $(-1, +1)$ ortogonalitási intervallumban az alábbi súlyfüggvényt választjuk:

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\varphi(x),$$

ahol $\alpha > -1$, $\beta > -1$ és $(-1, +1)$-ben $\varphi \in \mathrm{Lip}\, 1$ továbbá

$$\varphi(x) > k > 0.$$

Az I. tétel bizonyítása.

Miután $x_{1n}, x_{2n}, \ldots x_{nn}$ egyben a $w(x)$ súlyfüggvényhez tartozó n-edfokú Gauss-féle mechanikus kvadratúra alappontjai, tetszőleges legfeljebb $2n-1$-edfokú $\pi_{2n-1}(x)$ polinomra

$$\int_a^b \pi_{2n-1}(x) w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{2} \lambda_{kn} \pi_{2n-1}(x_{kn}), \tag{8}$$

ahol $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \dots \lambda_{nn}$ a mechanikus kvadratúra Cotes-féle számai. Ennek következtében

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} = \int_a^b w(x)\, dx = c_2 \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} [P_{n-1}(x_{kn})]^2 = \int_a^b [P_{n-1}(x)]^2 w(x)\, dx = 1 \tag{10}$$

és végül, tekintettel arra, hogy $l_{kn}(x_{in}) = \delta_{ik}$,

$$\int_a^b l_{km}(x) \pi_n(x) w(x)\, dx = \lambda_{kn} \pi_n(x_{kn}), \tag{11}$$

ahol $\pi_n(x)$ legfeljebb n-edfokú polinom. Helyettesítsünk (11)-be rendre $\pi_n(x)$ helyébe $P_0(x), P_1(x), \dots P_{n-1}(x)$-et, akkor megkapjuk $l_{kn}(x)$-nek $\{P_n(x)\}$ szerint haladó ortogonális kifejtésének együtthatóit: a Christoffel—Darboux-képlet szerint tehát

$$l_{kn}(x) = \lambda_{kn} \sum_{\nu=0}^{n-1} P_\nu(x_{kn}) P_\nu(x) = \lambda_{kn} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{P_{n-1}(x_{kn}) P_n(x)}{x - x_{kn}}. \tag{12}$$

Elemi becslés segítségével (lásd *Alexits György*)

$$0 < \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} < \operatorname{Max}(|a|, |b|) = c_3. \tag{13}$$

Szükségünk lesz az alábbi segédtételekre:

I. segédtétel: (α, β) minden rögzített belső részintervallumába eső x_{kn} alappontok egyenletesen

$$0 < \lambda_{kn} = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{14}$$

Ennek bizonyítását lásd *Erdős Pál* és *Turán Pál*[4], V. lemma, 530.

II. segédtétel: Ugyancsak az (α, β) rögzített belső részintervallumába eső $x_{kn}, x_{k+1,n}$ alappontokra egyenletesen

$$x_{k+1,n} - x_{k,n} > \frac{c_4}{n}. \tag{15}$$

Lásd *Erdős Pál* és *Turán Pál*[4], VIII. tétel, 538.

Ezenkívül (12), (14) és (7) felhasználásával (α, β) minden belső részintervallumába eső x_{kn} és x értékekre egyenletesen

$$l_{kn}(x) = O(1). \tag{16}$$

Legyen most x az $(\alpha+h, \beta-h)$ intervallum egy tetszőleges pontja és $\alpha_1=\alpha+h/2$; $\beta_1=\beta-h/2$, végül az x-szel szomszédos két alappont legyen x_{in} és $x_{i+1,n}$.

Bontsuk fel (3) jobboldalán álló összeget három részre. Az első részben hagyjuk a $k=i$ és $k=i+1$-hez tartozó tagokat; a második részbe soroljuk azokat a tagokat, amelyek az előbbiektől különböznek és amelyekhez tartozó alappontok (α_1, β_1)-be esnek; végül a harmadik részbe soroljuk a többi alappontot. Ilyen módon, tekintettel (12), (7) és (13)-ra*

$$\begin{aligned}\Lambda_n(x)=\sum_{x=i}^{i+1}+\sum_{x_{kn}\in(\alpha_1\beta_1)}'+\sum_{x_{kn}\overline{\in}(\alpha_1\beta_1)}<c_5+|P_n(x)|\Bigg\{\frac{c_6}{n}\sum_{x_{kn}\in(\alpha_1\beta_1)}'\frac{1}{|x-x_{kn}|}+\\+\frac{c_7}{h}\sum_{x_{kn}\overline{\in}(\alpha_1\beta_1)}\lambda_{kn}|P_{n-1}(x_{kn})|\Bigg\}.\end{aligned}\tag{17}$$

A II. segédtétel alapján, miután a Σ' összegezésből az x-szel szomszédos alappontokat kihagytuk,

$$\sum_{x_{kn}\in(\alpha_1\beta_1)}'\frac{1}{|x-x_{kn}|}<2\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{c_4r/n}<c_8n\log n. \tag{18}$$

Másrészt (9) és (10) felhasználásával

$$\begin{aligned}\sum_{x_{kn}\overline{\in}(\alpha_1\beta_1)}\lambda_{kn}|P_{n-1}(x_{kn})|<\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}|P_{n-1}(x_{kn})|<\\<\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}[P_{n-1}(x_{kn})]^2}=c_2^{1/2}\end{aligned}\tag{19}$$

tehát (16), (17) és (18) felhasználásával

$$\Lambda_n(x)<c_5+c_9|P_n(x)|\log n \tag{20}$$

amiből (5) következik, Q. e. d.

Az interpolációsorozat konvergenciája és maradéktagja

Legyen $p_{n-1}(x)$ az a legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, amely az adott folytonos $f(x)$ függvényt az (a, b)-szakaszon a Csebisev-féle értelemben a legjobban megközelíti és legyen

$$E_{n-1}=\max_{x\in(a,b)}|f(x)-p_{n-1}(x)|. \tag{21}$$

Az (1) mátrix segítségével képezett $L_n(f;x)$ interpolációs eljárás alapfüggvényeire az x helyen legyen érvényes az (5) becslés. Akkor

$$\begin{aligned}|L_n(f;x)-f(x)|\leqq|L_n(f;x)-p_{n-1}(x)|+|p_{n-1}(x)-f(x)|\leqq\\\leqq|L_n(f-p_{n-1},x)|+E_{n-1}\leqq[\Lambda_n(x)+1]E_{n-1}.\end{aligned}\tag{22}$$

II. tétel: Az $f(x)$ függvény az (a, b) intervallumban egyenletesen tegyen eleget az

$$|f(x_2)-f(x_1)|=o(|\log(x_2-x_1)|^{-1}) \tag{23}$$

* $x_{kn}\overline{\in}(\alpha,\beta)$ azt jelenti, hogy az (α,β) intervallum nem tartalmazza x_{kn}-t.

feltételnek. Akkor az I. tételben definiált $L_n(f)$ interpolációs eljárásokra (α, β) minden belső részintervallumára egyenletesen

$$\lim_{n=\infty} L_n(f; x) = f(x) \tag{24}$$

Jacobi polinomokra ezt a tételt *Szegő Gábor*[12] (14,4 tétel, 328) bizonyította.

Bizonyítás: Az I. tétel értelmében (5) (α, β) minden belső részintervallumára egyenletesen teljesül. Másrészt *D. Jackson* tétele szerint (23)-ból következik, hogy

$$E_{n-1} = o\,(\log n) \tag{25}$$

(22), (5) és (25)-ből (24) leolvasható.

III. Tétel: $f(x)$ legyen (a, b)-ben r-szer differenciálható és ugyanott legyen $f^{(r)} \in$ Lip α, akkor az I. tételben definiált $L_n(f)$ interpolációs eljárásokra minden belső részintervallumában egyenletesen*

$$L_n(f, x) = f(x) + 0\,(n^{-r-\alpha} \log n). \tag{26}$$

Bizonyítás: Feltételünk szerint *D. Jackson* tételéből

$$E_{n-1} = 0\,(n^{-r-\alpha}), \tag{27}$$

amivel állításunk a II. tétel bizonyításához hasonlóan következik.

A III. tételhez analóg összefüggés ortogonális polinomsorokra is érvényes (lásd *Alexits György*[2]).

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

* r 0 úgy értendő, hogy $f \in$ Lip α.

IRODALOM:

[1] *G. Alexits:* Sur la convergence des séries de polynomes orthogonaux. Commentarii Math. Helvetici. *13,* (1943), 200—208.

[2] *G. Alexits:* Über den Annäherungsgrad der Orthogonalpolynomentwicklungen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. *3,* (1952), 43—48.

[3] *S. Bernstein:* Quelques remarques sur l'interpolation. Math. Annalen *79,* (1918), 1—12.

[4] *P. Erdős* és *P. Turán:* On interpolation. III. Annals of Math. *41,* (1940), 510—553.

[5] *G. Faber:* Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung *23,* (1914), 192—210.

[6] *L. Fejér:* Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen. Math. Zeitschr. *32,* (1930), 426—457.

[7] *G. Grünwald* és *P. Turán:* Über Interpolation. Annali della Schole Normale Superiora di Pisa. *7,* (1938), 137—146.

[8] *H. Hahn:* Über das Interpolationsproblem. Math. Zeitschr. *1,* (1918), 115—142.

[9] *E. Helly:* Über lineare Funktionaloperationen. Sitzungsber. der math.-naturw. Klasse der Akad. in Wien, Abt. II. a. *121,* (1912), 265—297.

[10] *Korous:* O rozvoji funkci jedré reálné promenné v radu jistych ortogonálnich polynomu. Razpravy Ceske Akademie (2) *48,* (1938), 12.

[11] *J. Shohat:* On interpolation. Annals of Math. *34,* (1933), 130—146.

[12] *G. Szegő:* Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXIII. 1939.

AZ ASSZOCIATIVITÁSFELTÉTELEK FÜGGETLENSÉGE*

SZÁSZ GÁBOR

Bemutatta Rédei László lev. tag az 1953. április 6-án tartott felolvasó ülésen

1. §. Bevezetés

Legyen S adott ν-elemű halmaz; ν lehet véges vagy végtelen. Ha az S-ben értelmezve van egy szorzás, akkor azt mondjuk, hogy az S halmaz a definiált szorzásra nézve egy S^* *multiplikatív struktúrát* alkot. Megjegyezzük, hogy az S^*-hoz tartozó szorzástól általában semmiféle megszorító feltevés teljesülését nem kívánjuk meg.

Egy S halmazban természetesen többféle szorzás is értelmezhető, azaz egy S halmazból különböző S^* struktúrák képezhetők. Egy S^* struktúrát *asszociatív multiplikatív struktúrá*nak (máskép *félcsoport*nak) nevezünk, ha az összes

$$(xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in S) \tag{1}$$

egyenletek fennállnak. Az (1) egyenleteket *asszociativitásfeltételek*nek nevezzük.

Rédei László professzor készülő könyvének írásával kapcsolatban vetette fel azt az algebra szempontjából elvi fontosságú problémát, hogy adott ν-elemű S halmaz esetén az (1) egyenletek bizonyos valódi részének fennállásából következik-e a többi egyenlet teljesülése (t. i. az S-ből képezhető összes S^* struktúrákat illetően). A problémát sikerült teljesen megoldanom, mégpedig azzal a meglepő eredménnyel, hogy ha $\nu \geqq 4$, akkor az (1) egyenletek egyike sem következik a többiből. Pontosabban: *legalább négyelemű S halmaz esetén az* (1) *egyenletek bármelyikét kiszemelve, megadható egy olyan S^* multiplikatív struktúra, amelyben a kiszemelt egyenlet nem teljesül, az összes többi viszont teljesül.* Röviden szólva ez azt jelenti, hogy az (1) asszociativitásfeltételek $\nu \geqq 4$ esetén *független axiómarendszert alkotnak.*

A mondott eredmény bizonyítása lényegesen támaszkodik a $\nu = 3$ esetre. Részint ezért, részint a teljesség kedvéért megvizsgáltam a $\nu \leqq 3$ eseteket is. Kiderült, hogy a $\nu \leqq 3$ esetekben az (1) egyenletek nem függetlenek egymástól: sikerült is megadnom ezekben az esetekben az (1) axiómáknak egy független teljes[1] részrendszerét.[2]

* Megjelenik német nyelven az Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 15. kötetében.

[1] Mint szokásos, egy axiómarendszer valamely részrendszerét *teljes rendszer*nek nevezzük, ha ekvivalens az eredeti axiómarendszerrel.

[2] A $\nu = 3$ esetben ez csak egyféleképpen lehetséges, $\nu = 2$ esetén azonban többféleképpen is. A $\nu = 1$ esetben csak egy S^* struktúra létezik, s ez triviálisan asszociatív. Ezért a továbbiakban a $\nu \geqq 2$ esetre szorítkozunk.

Dolgozatom beosztása a következő lesz:
2. §. Előkészületek.
3. §. A $\nu=3$ eset részleges tárgyalása.
4. §. A $\nu\geqq 4$ eset.
5. §. A $\nu=3$ eset teljes tárgyalása.
6. §. A $\nu=2$ eset.

2. §. Előkészületek

Tárgyalásunk során a, b, c, d, e betűkkel fogjuk jelölni az S halmaz (különböző) elemeit. Az x, y, z, t betűk viszont a halmaz tetszésszerinti (tehát nem feltétlenül különböző) elemeinek jelölésére szolgálnak, mint már fentebb (1)-ben is.

A könnyebb kifejezés kedvéért néhány elnevezést vezetünk be.

Egy S^* struktúrának valamely (x, y, z) elemhármasát *asszociatív*nak nevezzük, ha $(xy)z=x(yz)$; ha ellenben $(xy)z\neq x(yz)$, akkor az (x, y, z) elemhármast *nemasszociatív*nak mondjuk.

Az S halmaz elemeiből képezett valamely (x, y, z) elemhármast *izolált*nak fogunk nevezni, ha van olyan S^* multiplikatív struktúra, amelyben egyedül az (x, y, z) elemhármas nemasszociatív. Főállításunk tehát így fogalmazható: $\nu\geqq 4$ esetén minden elemhármas izolált.

Két (x, y, z) és (x', y', z') elemhármast azonos típusúnak fogunk mondani, ha egymásból az S elemeinek valamely permutációjával állnak elő. Az azonos típusú elemeket egy osztályba sorozva, az S-ből képezhető elemhármasoknak egy osztályozását nyerjük. Az egyes osztályokat egy-egy reprezentánsukkal jellemezve, az S elemhármasai a következő típusok egyikéhez tartoznak:

$$(a, a, a)\text{-típus} \tag{2.1}$$
$$(a, a, b)\text{-típus} \tag{2.2}$$
$$(b, a, a)\text{-típus} \tag{2.3}$$
$$(a, b, a)\text{-típus} \tag{2.4}$$
$$(a, b, c)\text{-típus,} \tag{2.5}$$

amelyek közül az utolsó csak $\nu\geqq 3$ esetén fordul elő.

Tegyük fel, hogy az S halmaz valamely (x, y, z) elemhármasa izolált és legyen (x', y', z') az előbbi elemhármassal azonos típusú. Az x, y, z elemeknek rendre x', y', z'-re való átjelölésével azonnal látható, hogy (x', y', z') szintén izolált.[3] Jogos tehát nemcsak izolált elemhármasokról, hanem *izolált típus*okról is beszélni: egy típust izoláltnak nevezünk, ha a hozzátartozó elemhármasok izoláltak. A mondottak egyszersmind azt is jelentik, hogy nem lesz szükséges

[3] Ennek az eljárásnak pontos tárgyalására nézvé l. *Rédei L.:* Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie (Journal für die reine und angewandte Mathematik, *188.* kötet, 1950., 201—227.) c. dolgozatának 2. §-át.

minden elemhármast megvizsgálni az izoláltság tekintetében; elegendő csupán az egyes típusoknak egy-egy (például a (2. 1)—(2. 5)-ben felsorolt) reprezentánsával foglalkozni.

A továbbiak megkönnyítése végett még néhány egyszerű segédtételt bocsátok előre, amelyeknek triviális bizonyítását mellőzhetem.

1. segédtétel. Az $S=\{a,b\}$ halmazon[4] az

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \end{array} \tag{3}$$

Cayley-táblával megadott struktúrák asszociatívok.

Nevezzük egy S^* multiplikatív struktúra valamely x elemét *baloldali zéruselem*nek, ha minden $y(\in S)$-re $xy=x$; hasonlóan, a $z(\in S)$ elemet *jobboldali zéruselem*nek nevezzük, ha minden $y(\in S)$-re $yz=z$.

Az olyan elemet, amely egyszerre bal- és jobboldali zéruselem, röviden *zéruselem*nek mondjuk.

2. segédtétel. Minden olyan (x,y,z) elemhármas asszociatív, amelyben vagy x baloldali vagy z jobboldali zéruselem.

3. segédtétel. Minden olyan elemhármas asszociatív, amelynek (legalább) egyik eleme zéruselem.

4. segédtétel. Legyen S^* a T^* multiplikatív struktúrának részstruktúrája. Ha a $T-S$ halmaz[5] valamely z elemére teljesül

$$xt=z \quad \text{és} \quad tx=z \qquad (x\in T,\ t\in T-S), \tag{4}$$

akkor a T^* struktúra nemasszociatív elemhármasai megegyeznek az S^* részstruktúra nemasszociatív elemhármasaival.[6] (Más szóval: minden olyan elemhármas asszociatív, amely legalább egy $T-S$-beli elemet tartalmaz).

Megjegyezzük, hogy a 4. segédtételben szereplő z zéruselem. Másrészt, azt is látjuk, hogy a 3. segédtétel a 4.-nek az a speciális esete, amikor $T-S$ egyedül a T^*-nak a zéruseleméből áll.

Az S^* valamely x elemét *baloldali egységelem*nek nevezzük, ha minden $y(\in S)$-re $xy=y$.

5. segédtétel. Ha x baloldali egységelem, akkor minden (x,y,z) elemhármas asszociatív.

6. segédtétel. Ha egy x elem idempotens, akkor az (x,x,x) elemhármas asszociatív.

[4] A $\{\ \}$ jel ebben a dolgozatban a halmazelméleti értelemben szerepel.

[5] $T-S$ jelenti a T azon elemeinek halmazát, amelyek S-ben nincsenek benne.

[6] A T^*-ot az S^* triviális bővítésének is nevezhetjük, mert az S^*-ról a T^*-ra való áttéréskor minden „új" szorzat értéke z.

3. §. A $\nu = 3$ eset részleges tárgyalása

Ebben a fejezetben a háromelemű $S = \{a, b, c\}$ halmazból képezett S^* struktúrákkal fogunk foglalkozni és kimutatjuk, hogy

1. lemma. *Az $S = \{a, b, c\}$ halmaz összes nem (a, a, a)-típusú elemhármasai izoláltak.*

A tétel bizonyítása úgy fog történni, hogy megadunk egy-egy olyan S^* struktúrát, amelyben rendre egyedül az (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a) illetve (a, b, c) elemhármas nemasszociatív, a többi pedig mind asszociatív. Az (a, a, a)-típussal az 5. fejezetben külön fogunk foglalkozni, s látni fogjuk, hogy ez a típus ($\nu = 3$ esetén) nem izolált.

1°. Az (a, a, b) elemhármas izoláltságának kimutatására tekintsük az

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \tag{5}$$

Cayley-táblával meghatározott S^* struktúrát.[7]

Látjuk, hogy (5)-ben egy szorzat értéke csak akkor lehet $\neq c$, ha az első tényező a. Másrészt mindig $xy \neq a$, tehát mindig $(xy)z = c$.

Viszont, akkor és csak akkor $x(yz) \neq c$, ha $x = a$ és $yz = b$, azaz ha $x = a$, $y = a$ és $z = b$.

Ezzel kimutattuk, hogy (a, a, b) nemasszociatív, de minden más elemhármas asszociatív. Tehát az (a, a, b) elemtípus izolált.

2°. Az előbbi Cayley-táblának a főátlóra való tükrözésével előálló

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & c & c & c \\ b & b & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \tag{6}$$

rendszerben (b, a, a) az egyetlen nemasszociatív elemhármas. Ez az előbbihez

[7] Ezt a példát *Al. C. Climescu:* Etudes sur la Théorie des Systèmes Multiplicatifs Uniformes I., L'indice de non-associativité (Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassi, *2.* kötet, 1947, 97—121. o.) c. dolgozatából vettem át (114. o., $i = 1$ jelzésű példa, az a és c szerepének felcserélésével), de teljes bizonyítást adok hozzá. Ő más szempontból foglalkozik az (1) egyenletek fennállásának kérdésével, mint mi. Egy véges ν-elemű S^* struktúra *(nemasszociativitási) index*ének nevezi az S^*-ban nem teljesülő (1) egyenletek számát. Az index tehát bizonyosan a $0, 1, \ldots, \nu^3$ egész számok valamelyike. *Climescu* kimutatja azt a meglepő tényt, hogy $\nu \geqq 3$ esetén az i minden $0 \leqq i \leqq \nu^3$ értékéhez található olyan ν-elemű struktúra, amelynek indexe éppen i. A mi szempontunkból ösztönző és hasznos volt ennek az eredménynek az a részlete, hogy $\nu \geqq 3$ esetén van 1 indexű struktúra, ami a mi beszédmódunk szerint azt jelenti, hogy $\nu \geqq 3$ esetén van izolált elemtípus. A mi vizsgálatunkhoz persze nem elégedhetünk meg az izolált elemtípusok exisztenciájának kimutatásával, hanem azt is meg kell vizsgálnunk, mely elemtípusok izoláltak.

hasonló módon látható be, a Cayley-tábla sorainak és oszlopainak a szerepét felcserélve. Tehát, a (b, a, a)-típus is izolált.

3^0. Tekintsük azt az S^* struktúrát, amelynek Cayley-táblája

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & a & b & c \\ c & c & c & c \end{array} \tag{7}$$

Ebben (a, b, a) nemasszociatív, mert

$$(ab)a = ca = c \quad \text{és} \quad a(ba) = aa = a.$$

Minden további elemhármas asszociatív az alábbi részletezés szerint.

Minthogy c zéruselem, ezért a 3. segédtétel folytán minden c-t tartalmazó elemhármas asszociatív. Csak azokat az elemhármasokat kell tehát tovább vizsgálni, amelyekben c nem szerepel.

A b baloldali egységelem lévén, az 5. segédtétel szerint a b-vel kezdődő elemhármasok asszociatívok.

Hátra vannak az a-val kezdődő és csak a, b-t tartalmazó elemhármasok. Ezek közül (a, a, a) a 6. segédtétel folytán asszociatív, az (a, b, a) nemasszociativitását pedig fentebb megállapítottuk. Marad tehát az (a, a, b) és (a, b, b) elemhármas:

$$(aa)b = ab = c \quad \text{és} \quad a(ab) = ac = c,$$
$$(ab)b = cb = c \quad \text{és} \quad a(bb) = ab = c.$$

Tehát, az (a, b, a)-típus izolált.

4^0. Legyen végül egy S^* struktúra Cayley-táblája

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array} \tag{8}$$

Ebben először is

$$(ab)c = ac = c \quad \text{és} \quad a(bc) = ab = a,$$

tehát (a, b, c) nemasszociatív.

A többi elemhármas azonban, mint az alábbi részletezés mutatja, asszociatív.

Minthogy b és c baloldali zéruselemek, ezért a 2. segédtétel szerint minden (b, x, y) és (c, x, y) elemhármas asszociatív. Hátra vannak tehát az a-val kezdődő elemhármasok.

A (8)-ból látjuk, hogy S^*-ban az a, b és a, c elempárok kételemű részstruktúrákat alkotnak. Ez a két részstruktúra az 1. segédtétel szerint asszociatív. Eszerint az a-val kezdődő elemhármasok közül is mindazok asszociatívok, amelyekben b és c egyszerre nem fordul elő.

Meg kell még vizsgálni az a-val kezdődő olyan elemhármasokat, amelyek a b és c elemeket egyszerre tartalmazzák. Ilyen csak kettő van. Az (a, b, c)-t már fentebb néztük; az (a, c, b)-re pedig

$$(ac)b = cb = c \quad \text{és} \quad a(cb) = ac = c.$$

Ezzel kimutattuk az (a, b, c)-típus izoláltságát is, amivel az 1. lemma bizonyítását befejeztük.

4. §. *A $\nu \geqq 4$ eset*

A $\nu = 3$ esetre vonatkozó eredmények felhasználásával könnyen kimutathatjuk főtételünket.

1. tétel. *Legalább négyelemű halmaz esetén az* (1) *egyenletek független axiómarendszert alkotnak.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása úgy fog történni, hogy kimutatjuk a következőt: $\nu \geqq 4$ esetén az összes elemhármasok izoláltak.

Az (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a) és (a, b, c)-típusok izolált voltát az előző fejezet eredményeiből fogjuk nyerni a következő igen egyszerű módon. Legyen $S = \{a, b, c\}$ és $T = \{a, b, c, d, \ldots\}$, ahol a $\ldots$ $\nu > 4$ esetben további elemeket (esetleg végtelen sokat) jelent, $\nu = 4$ esetében pedig az üres halmazt. Tekintsük azt a T^* struktúrát, amelyben

1) S^* részstruktúra;

2) minden $t \in T - S$ és $x \in T$ esetén $xt = d$, $tx = d$.

A 4. segédtétel szerint a T^* nemasszociatív elemhármasai megegyeznek az S^* nemasszociatív elemhármasaival. Ha tehát S^* helyébe rendre az (5)—(8) Cayley-táblákkal adott rendszert írjuk, akkor máris kaptunk egy-egy olyan $\nu \geqq 4$ elemű (akármilyen számosságú) T^* struktúrát, amelyben rendre egyedül az (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a) illetve (a, b, c) elemhármas nemasszociatív.

Ki kell még mutatnunk az (a, a, a)-típus izoláltságát. Ebből a célból tekintsük azt az $S = \{a, b, c, d, \ldots\}$ halmazból képezett S^* multiplikatív struktúrát, amelyben

1) $aa = b$

2) $ab = c$

3) minden további x, y elempárra $xy = d$.

Az 1)—3) által definiált S^* struktúrában mindenekelőtt

$$(aa)a = ba = d \quad \text{és} \quad a(aa) = ab = c.$$

A többi asszociativitásfeltételek viszont teljesülnek, az alábbiak szerint.

Minthogy az $x \neq a$ esetben korlátlanul $xt = d$, azért minden olyan (x, y, z) elemhármasra, ahol $x \neq a$, fennáll

$$(xy)z = dz = d \quad \text{és} \quad x(yz) = d.$$

A továbbiakban tehát csak az a-val kezdődő elemhármasokat kell vizsgálni.

Ha az (a, y, z) elemhármasban y a $c, d, \ldots$ elemek közül való, akkor

$$(ay)z = dz = d \quad \text{és} \quad a(yz) = ad = d;$$

ha pedig a z elem a $c, d, \ldots$ közül való, akkor, $tc = td = \ldots = d$ $(t \in S)$ miatt,

$$(ay)z = d \quad \text{és} \quad a(yz) = ad = d.$$

Eszerint csak azok az (a, y, z) hármasok vannak hátra, amelyekben y és z mindketten az a és b közül valók.

Az $y = a$, $z = a$ esetet fent már elintéztük. A többi három esetben

$$\begin{aligned} (aa)b &= bb = d \quad \text{és} \quad a(ab) = ac = d, \\ (ab)a &= ca = d \quad \text{és} \quad a(ba) = ad = d, \\ (ab)b &= cb = d \quad \text{és} \quad a(bb) = ad = d. \end{aligned} \tag{9}$$

Ezzel a $\nu \geqq 4$ esetre kimutattuk az (a, a, a)-típus izoláltságát, s így az 1. tétel bizonyítását befejeztük.

5. §. *A $\nu = 3$ eset teljes tárgyalása*

A $\nu = 3$ esetben az (a, a, a)-típus elemhármasai egészen másképp viselkednek mint $\nu \geqq 4$ esetén:

2. lemma. *Ha az $S = \{a, b, c\}$ halmazból képezett valamely S^* multiplikatív stuktúrában az összes*

$$\left.\begin{matrix} (a, a, x) & (x, a, x) \\ (a, x, a) & (x, a, a) \end{matrix}\right\} \; x = b \text{ vagy } x = c \tag{10}$$

elemhármasok asszociatívok, akkor (a, a, a) is asszociatív.

Az 1. és 2. lemmáknak közvetlen következményeként adódik a

2. tétel. *Háromelemű halmaz esetén az* (1) *asszociativitásfeltételeknek egyetlen független teljes részrendszere létezik; ez úgy áll elő, hogy töröljük* (1)*-ből azt a 3 egyenletet, amelyre $x = y = z$.*

Az 1. lemma szerint ugyanis a nem (a, a, a)-típusú elemhármasok mind izoláltak, tehát az (1) egyenleteknek az a 24 egyenletből álló részhalmaza, amelyre nem áll fenn $x = y = z$, független részrendszert alkot. A 2. lemma viszont azt mondja ki, hogy ez a 24 egyenletből álló részhalmaz már teljes rendszer az (1) egyenletekre nézve.

A 2. lemma bizonyítása indirekt úton fog történni: feltesszük, hogy az (a, a, a) elemhármas a (10) asszociativitásfeltételek teljesülése ellenére nemasszociatív, s ebből a feltevésből ellentmondásra fogunk jutni.

Minthogy (a, a, a)-ról nemasszociativitást tettünk fel, azért a következő esetek valamelyikének kell fennállnia:

I. $(aa)a = a$ és $a(aa) = x$,
II. $(aa)a = x$ és $a(aa) = a$,
ahol $x = b$ vagy $x = c$;
III. $(aa)a = x$ és $a(aa) = y$,
ahol $x = b$ és $y = c$ vagy $x = c$ és $y = b$.
Az egyes esetekkel külön foglalkozunk. Előre megjegyezzük, hogy a 6. segédtétel folytán $aa \neq a$.

I. eset. Legyen $z (\in S)$ az az elem, amelyre $z \neq a, x$. Két alesetet fogunk megkülönböztetni aszerint, hogy $aa = x$ vagy $aa = z$.

Ha $aa = x$, akkor az I.-ben szereplő feltevések szerint

$$xa = a \quad \text{és} \quad ax = x.$$

De akkor

$$a(xa) = aa = x \quad \text{és} \quad (ax)a = xa = a,$$

vagyis (a, x, a) nemasszociatív elemhármas.

Ha viszont $aa = z$, akkor I. miatt

$$za = a \quad \text{és} \quad az = x; \tag{11}$$

ezekből pedig ismét azt fogjuk kapni, hogy (a, x, a) nemasszociatív. Ugyanis, a (10)-ben felsorolt asszociativitásfeltételek alkalmazásával (11) szerint

$$ax = a(az) = (aa)z = zz = z(aa) = (za)a = aa = z,$$
$$xa = (az)a = a(za) = aa = z,$$

amelyekből

$$(ax)a = za = a \quad \text{és} \quad a(xa) = az = x.$$

II. eset. Ez az eset az I.-gyel analóg módon tárgyalható, csupán az összes fellépő szorzatokban az elemek sorrendjét kell felcserélni. Vagyis ebben az esetben ismét (a, x, a) nemasszociatív.

III. eset. Ismét két aleset lehetséges aszerint, hogy $aa = x$ vagy $aa = y$. Vizsgáljuk először azt az alesetet, amikor

$$aa = x. \tag{12}$$

Ekkor, a III.-ban adott feltételekből

$$xa = x \quad \text{és} \quad ax = y. \tag{13}$$

Kimutatjuk, hogy (a, a, y) nemasszociatív. Ehhez előbb néhány elempár szorzatát számítjuk ki, a (10)-beli asszociativitásfeltételek alkalmazásával:

$$xx = x(aa) = (xa)a = xa = x \quad \text{(12), (13) miatt;} \tag{14}$$
$$xy = x(ax) = (xa)x = xx = x \quad \text{(13), (14) miatt;} \tag{15}$$
$$ay = a(ax) = (aa)x = xx = x \quad \text{(13), (12), (14) miatt.} \tag{16}$$

A (12), (15), (16) és (13)-ból

$$(aa)y = xy = x \quad \text{és} \quad a(ay) = ax = y.$$

Az $aa = y$ aleset tárgyalását visszavezetjük az $aa = x$ alesetére. Az $aa = x$ aleset kiindulási feltételei az $(aa)a = x$, $a(aa) = y$ és $aa = x$ egyenletek voltak. Ha ezekben az x és y szerepét felcseréljük, s vele egyidőben az egyes szorzatok sorrendjét is, akkor éppen a még hátralévő aleset kiindulási feltételeit kapjuk. Ha tehát az x, y elemeknek és a szorzatok sorrendjének felcserélését az $aa = x$ aleset egész tárgyalásában keresztülvisszük, akkor az

$$x(aa) = y \quad \text{és} \quad (xa)a = x$$

eredményre jutunk.

Az I—III. esetek összes aleseteiben fellépő ellentmondással a 2. lemmát (s vele együtt a 2. tételt) bebizonyítottuk.

6. §. A $\nu = 2$ eset

Végül megvizsgáljuk a $\nu = 2$ esetet. Az $S = \{a, b\}$ halmaz elemeiből képezhető nyolc különböző elemhármast három osztályba sorozzuk:

$$C_1: \quad (a, a, a), (a, b, a);$$
$$C_2: \quad (b, b, b), (b, a, b);$$
$$C_3: \quad (a, a, b), (a, b, b), (b, a, a), (b, b, a);$$

és kimutatjuk a következő tételt:

3. tétel. *Ha az $S = \{a, b\}$ halmazból képezett valamely multiplikatív struktúrában a C_1, C_2, C_3 osztályból egy-egy elemhármas asszociatív, akkor S^* félcsoport.* (Más szóval: A $\nu = 2$ esetben az asszociativitásfeltételeknek minden olyan részhalmaza független teljes rendszert alkot, amely a C_1, C_2, C_3 osztályok egy-egy elemhármasának asszociativitását írja elő.)

Bizonyítás. Az olvasó közvetlen számolással könnyen meggyőződhetik arról, hogy az $S = \{a, b\}$ halmazból képezhető 16 különböző S^* struktúra közül nyolc asszociatív, a többi nyolc esetében pedig a nemasszociatív elemhármasok pontosan vagy a $C_i (i = 1, 2, 3)$ osztályok egyikének összes elemhármasai, vagy az összes különböző elemhármasok. Ezért bármely S^* struktúra esetén egy-egy C_i osztály elemei vagy mind asszociatívok, vagy mind nemasszociatívok, s ez éppen a tétel helyességét jelenti.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézete.

ANKÉT O. J. SMIDT „NÉGY ELŐADÁS A FÖLD KELETKEZÉSÉNEK ELMÉLETÉRŐL" CÍMŰ KÖNYVÉRŐL

A Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya 1953. január 12-én ankétot rendezett O. J. Smidt akadémikus könyvéről, amely az Akadémiai Kiadó kiadásában 1952-ben jelent meg magyar fordításban és amely a szerző új kozmogóniai elméletének kifejtését tartalmazza. A bevezető előadást *Földes István* tartotta, az előadást élénk vita követte, melyet Földes zárószavaival foglalt össze.

Alábbiakban közöljük az ankét anyagát.

FÖLDES ISTVÁN:

A természettudományos alapokon álló kozmogóniai kutatás a XVIII. század derekán vette kezdetét *Kant* ismert könyvével (Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels), melyet kb. négy évtizeddel később *Laplace* feltevése követett. A XVIII. és XIX. század kozmogóniai elméletei azonban nem támaszkodhattak az égitestek fizikájának és a csillagvilág szerkezetének akkor még fel nem derített tényeire és azért a puszta spekulációkban merültek ki. Csak a legutóbbi néhány évtized folyamán jöttek létre azok a feltételek, melyek lehetővé teszik, hogy a csillagok és a bolygók keletkezésére és fejlődésére nézve empirikusan jól megalapozott magyarázatot állíthassunk fel. A régebbi ad hoc feltevéseket a tudomány későbbi fejlődése nagyrészben megcáfolta. A kozmogónia korai művelői működésének jelentőségét elsősorban abban kell látnunk, hogy hangsúlyozták a csillagászatban az anyag fejlődésének gondolatát. A kozmogónia a XIX. század végén és a XX. század elején fellépett válságának egyik lényeges megnyilvánulása azonban éppen abban áll, hogy sok idealista gondolkodású kozmogonista megtagadta a fejlődés eszméjét.

A kozmogónia krízise éppen annak következtében állt elő, hogy ezek a csillagászok nem az anyagi világot, nem a modern asztrofizika és sztellárasztronómia eredményeit vették a kozmogóniai kutatások alapjául, hanem önkényes hipotéziseket, melyek gyakran minden komoly alapot nélkülöztek. A tényeknek ez a figyelmen kívül hagyása természetesen nem csak az egyes konkrét kozmogóniai elméleteket kompromittálta, hanem bizonyos, az agnosztikus filozófia álláspontjához közelálló körökben azt a nézetet váltotta ki, hogy tudományos kozmogóniai elmélet felállítása általában elvileg nem lehetséges.

A kozmogóniának ebből a látszólagos csődjéből a szovjet csillagászok mutatták meg a kivezető utat. *Ambarcumjan, Kukarkin, Parenago, Smidt, Voroncov—Veljaminov, Feszenkov, Krat* és mások munkásságából világosan kitűnik, hogy nem csak a kozmogóniát kell a modern asztrofizika eredményeivel gazdagítani, hanem számos asztrofizikai elméletet is át kell építeni az égitestek és azok rendszerei fejlődésére vonatkozó ideák alapján, kritikailag figyelembevéve a sztellárasztronómia modern eredményeit is. Az égitestek fizikai és kémiai szerkezeti sajátságait csak akkor érthetjük meg, ha az asztrofizikában a dialektikus logikával ellentétes, örökérvényűnek tekintett „egyensúlyi állapot" feltételezése helyett a fejlődés és átalakulás elveiből indulunk ki. Hasonlóképpen a bolygók mozgásában mutatkozó azon sajátságokat is, melyek nem következnek a mechanika általános elveiből, szintén csak akkor magyarázhatjuk meg, ha nyomon követjük fejlődésük vonalát, kialakulásuk mozzanatától kezdve.

A Naprendszer valamennyi szembeszökő strukturális sajátságának egységes szempont alapján való értelmezése eddig egyedül *Smidt* szovjet akadémikusnak sikerült. *Smidt* elméletének vázlata a következő: Feltételezi, hogy a Nap körül szilárd részecskékből és gázmolekulákból álló raj keringett, melynek teljes impulzusnyomatéka zérustól különböző volt. Feltételezi továbbá még azt is, hogy a raj részecskéi nagyobb testekkel egyesülhettek, így egyre nagyobb tömegű és méretű kondenzációk jöhettek létre, melyek végül is a bolygók kialakulásához vezettek. Ezekkel a posztulátumokkal kapcsolatban mindenekelőtt azt kell megvizsgálni, hogy miként jöhetett létre a részecskéknek a Nap körül keringő raja, továbbá, hogy rendelkezik-e egy ilyen raj azzal a képességgel, hogy részecskéi nagyobb testekké tömörüljenek össze. Ami az első kérdést illeti, *Smidt* a raj keletkezését kaptációs folyamatnak tulajdonítja: feltételezi, hogy a Nap valamikor keresztülhaladt egy galaktikai gáz és porködön és kilépve abból, magávalragadta a köd anyagának egy részét; láthatjuk ebből, miképpen használja fel *Smidt* a ködök létére és gyakoriságára, valamint a ködök és csillagok mozgására vonatkozó modern eredményeket kozmogóniai elméletének kidolgozására. A kaptáció lehetősége nem volt még kimutatva, mikor *Smidt* első kozmogóniai publikációi megjelentek. *Smidt* és munkatársa, *Hilmi* érdeme, hogy az égi mechanikának ezt az alapvető kérdését az elmélet további kifejlesztése során véglegesen tisztázták. Más szovjet kutatók pedig olyan kaptációs folyamatok lehetőségét is kimutatták, melyben a gravitációs vonzáson kívül egyéb fizikai hatótényezők is érvényesülnek, mely esetben egy testnek egy másik által való kaptációja akkor is lehetségesnek bizonyul, ha egy harmadik test jelenlétét nem tételezzük fel. Hasonlóképpen nem volt még eredetileg felderítve a másik előbb említett kérdés, a raj kondenzációja lehetőségének kérdése sem; ezt a hiányt *Gurevics* és *Lebegyinszkij* később pótolták, megvizsgálva a rajban a sűrűségi ingadozások következtében helyenként és időnként előálló kondenzációs gócok stabilitásának feltételeit. A raj fejlődésének folyamatát egyébként *Hilmi* is levezette a Poincaré—Carathéodory-féle visszatérési tételnek, valamint ugyancsak a differenciálegyenletek kvalitatív elméletéhez tartozó egyes saját korábbi eredményeinek felhasználásával (minimális vonzási centrum exisztenciája Lagrange-féle értelemben stabilis mozgások esetében).

Az elmélet alapfeltevései eszerint biztosan összhangban vannak a fizika törvényeivel. Másrészt *Smidt*nek sikerült kimutatnia, hogy a fentemlített posztulátumokból levonható csillagászati következtetések megfelelnek a Naprendszer lényeges vonásait kifejező megfigyelési tényeknek és kimerítik azokat. A raj nagyszámú részecskéinek rendezetlen mozgásából egy kiegyenlítődési processzus folytán szimmetria-okokból kiadódnak a pályák kis excentricitásai és kis hajlásai; a raj jelentékeny értékű impulzusnyomatéka megszabja a kialakuló bolygók pályaimpulzusnyomatékainak közös előjelét, vagyis a bolygók közös keringési irányát; a bolygók tengelyforgásainak (egy kivételtől eltekintve) a közös keringési iránnyal megegyező iránya is megmagyarázható, ha figyelembe vesszük, hogy egyrészt egy bolygó forgási impulzusnyomatéka úgy adódik ki, hogy a raj azon részeinek összes impulzusnyomatékából, melyből a kérdéses bolygó kialakul, levonjuk a bolygó pályaimpulzusnyomatékát, másrészt ugyanakkor a kinetikus energia egy része hővé alakul át; a Bode-féle szabály is megmagyarázható, ha a fajlagos impulzusnyomaték szempontjából egy bizonyos plauzibilis eloszlási törvényt tételezünk fel a rajban; továbbá, ha figyelembe vesszük, hogy a Naptól távolabbi zónákban az alacsonyabb hőmérséklet következtében a gázmolekulák ráfagytak a szilárd részecskékre, melyek kötve tartották őket, ezzel szemben a Naphoz közel a már kialakult bolygók sem tudták a magasabb hőmérséklet folytán a könnyű elemeket, elsősorban a hidrogént megtartani, úgy magyarázatot nyer az a körülmény is, hogy a bolygók a fizikai szerkezet szempontjából két csoportra oszlanak; végül az ütközések statisztikus vizsgálata alapján levezethető a Föld kora is, mely összhangban van az egyéb úton nyert értékekkel. Ehhez járul még, hogy a felsorolt levezetéseknél alkalmazást nyernek a matematika modern fejezeteinek mély eredményei is, ami nagyban fokozza az elmélet hitelességét.

Annak ellenére azonban, hogy a Smidt-elmélet nyujtja a Naprendszer sajátságainak legteljesebb értelmezését, mégsem tekinthető még lezártnak és néhány irányban feltétlenül lényeges kiegészítésre szorul (pl. a galaktikai mágneses tér befolyásának kérdésében). Mai megbeszélésünknek éppen abban vélem látni legfőbb célját, hogy megállapítsuk, melyek az elmélet azon pontjai, melyek kiegészítést vagy kiigazítást igényelnek. Ha ezt a programmot sikerülni fog megvalósítanunk, akkor eredményesen járulunk hozzá ezáltal az elmélet sikeres továbbfejlesztéséhez.

HOZZÁSZÓLÁSOK

DETRE LÁSZLÓ:

A *Smidt*-féle elméletet népszerű formában már igen sokszor ismertették magyar nyelven. Dolgozóink különösen a Természettudományi Társulat által rendezett üzemi előadásokon ismerték meg az elméletet. Ilyen üzemi előadások alkalmával a hozzászóló azt tapasztalta, hogy igen sok helyütt, nyilván a népszerűsítő cikkek és előadások helytelen értelmezése folytán az a nézet alakult ki, hogy a *Smidt*-elmélet teljesen lezárt elmélet, amely véglegesen elintézte a bolygórendszer keletkezésének problémáját.

Ezzel szemben le kell szegezni, hogy a Smidt-elméletnek még vannak hiányosságai és az elméletet az eddigi alapon tovább kell fejleszteni. Az elmélet megítélésénél tekintetbe kell venni, hogy a kozmogónia általában a csillagászat legnehezebb és legfejletlenebb ága, de különösen nehéz a bolygórendszerek kialakulásának problémája, sokkal nehezebb, mint akár a csillagok, vagy a csillagrendszerek kialakulásának és fejlődésének problémája. Mert csillagokból és csillagrendszerekből a legkülönbözőbb fejlődési fokon álló individuumok millióit figyelhetjük meg, míg bolygórendszert jelenleg még csak egyet ismerünk. Igaz ugyan, hogy a bolygórendszer szerkezetét pontosabban ismerjük mint a csillagokét és a csillagrendszerekét, de ezek a pontos ismeretek a Naprendszer jelenlegi állapotára vonatkoznak. Egyáltalában nem biztos, hogy a bolygórendszer jelenlegi tulajdonságai mind azonosak az egy-két milliárd évvel ezelőttiekkel. Az égi mechanika még nem oldotta meg a Naprendszer stabilitásának kérdését és így erre a kérdésre nem tud kielégítő választ adni.

A Smidt-elmélet hiányosságai közül hozzászóló a következőket említi:

1. Az elméletnek még nem sikerült tisztázni, hogy a meteorfelhőből a bolygók képződéséhez elegendő anyagot tud-e befogni a Nap. Nagy érdeme az elméletnek, hogy a kaptáció problémáját ismét felszínre hozta. *Hilmi*t a Smidt-elmélet ösztönözte nagyjelentőségű vizsgálataira, melyek folyamán bebizonyította, hogy a háromtestproblémában lehetséges a kaptáció. Csakhogy *Hilmi* eredményei nem alkalmazhatók közvetlenül a *Smidt*-elmélet által felvetett esetre, úgy hogy további vizsgálatokra van szükség ebben az irányban.

2. A Smidt-elmélet a bolygóknak a Naptól való távolságában mutatkozó szabályosságot, az úgynevezett Bode-törvényt, ugyan megmagyarázza, de ehhez feltevést kell tennie az impulzusmomentum eloszlására a meteorfelhőben. Hozzászóló véleménye szerint nem szabad lemondani arról, hogy a *Bode* törvényt minden feltevés nélkül, tisztán stabilitási vizsgálatokból kíséreljük meg levezetni.

3. Az elmélet nem magyarázza meg, hogy a Nap tengelyforgása ugyanolyan értelmű, mint a bolygók keringése és tengelyforgása és hogy a Nap forgástengelye közel merőleges az invariábilis síkra. *Smidt* először a Napba hulló meteoroktól származtatta a Nap tengelyforgását. Ezen feltevés helyességét empirikusan is el lehetett volna dönteni, mert ha a feltevés igaz, akkor a Tejútrendszer síkjában mozgó csillagok tengelyforgásának általában gyorsabbnak kellene lenni, mint a Tejút síkjára nagy hajlásszöggel mozgó csillagokénak, tekintve, hogy intersztelláris meteorfelhők csak a Tejút síkjában fordulnak elő.

Hozzászóló szerint a bolygórendszer kialakulásának problémáját nem lehet elválasztani a kettős és többszörös csillagok kialakulásának kérdésétől, illetve általában a csillagok fejlődésének problémájától. Ma ugyan még csak magános csillagok összeállását tudjuk megmagyarázni a Tejút gáz- és porfelhőiből, de a turbulenciaelmélet segítségével arra is kaptunk már támpontokat, hogy miért alakul ki a legtöbb esetben kettős vagy többszörös, nem pedig magános csillag. Ezekkel a vizsgálatokkal való szintézis útján a közeljövőben minden valószínűség szerint el lehet tüntetni a Smidt-elmélet jelenlegi hiányosságait.

Kétségtelen, hogy a Smidt-elmélet jelenlegi hiányosságai mellett is a legjobb elmélet a bolygórendszer keletkezésére. A csillagfejlődés terén is szovjet kutató, *Ambarcumján* érte el eddig a legnagyobb eredményeket. Legújabban *Kukarkin* a változó csillagok vizsgálata alapján a csillagrendszerek kozmogóniájára kapott igen fontos eredményeket. Így a kozmogónia mindhárom ágában nyilvánvaló a szovjet kozmogónia élenjáró szerepe.

HERCZEG TIBOR:

A kozmogónia jelenlegi helyzetét vizsgálva, nem hagyhatjuk figyelmen kívül a legtöbb nyugati kozmogóniai elmélet különböző gyengéin és meglehetősen rögtönzött jellegén kívül azt az általános magatartást sem, amely a kozmogóniai vizsgálatok pontossága, megbízhatósága, egyáltalában értékelése tekintetében náluk megnyilvánul. Ezt az általános attitüdöt egy idézettel szeretném bemutatni. *H. N. Russel* megjegyzi, egy a Naprendszer kozmogóniájáról szóló munkájában (The solar system and its origin) a *Jeffreys* által módosított Jeans-féle elméletről, (a 108. oldalon), hogy „mint a többiek, neki is megvannak a maga nehézségei a holdak keletkezésével kapcsolatban, ámbár szinte minden megtörténhetett a heves turbulenciának abban a periódusában, amelyik a Napból eredő anyagsugár keletkezését és különálló testekké való szétválását tartalmazza." Természetes, hogy az ilyen „szinte minden megtörténhetett" meggondolások kevéssé alkalmasak tudományos kozmogóniai elméletek felépítésére. Még a viszonylag legjobb, Alfvén és Weizsäcker-féle kozmogóniai elméletek sem állják ki az összehasonlítást a Smidt-elmélet eredményességével és pontosságával. Az Alfvén-féle elmélet egyoldalúsága nyilvánvaló, a Weizsäcker elméletről pedig *Smidt* többször leszögezte, hogy premisszái nagyon is mesterkéltek.

Ami magát a *Smidt* és munkatársai által javasolt kozmogóniai elméletet illeti, azt mondhatjuk, hogy ennek kidolgozása teljes mértékben igazolta: a Naprendszer keletkezésének magyarázata a tudománynak *aktuális és megoldható* problémája. Nyugodtan leszögezhetjük azt is, hogy kellő szigorral alkalmazva a rendelkezésre álló kritériumokat, a meteorit-hipotézisen alapuló elmélet az egyetlen kozmogóniai teória, amely ma a továbbfejlesztés szempontjából komolyan számításba jöhet. Az előttem felszólaló már említett néhány feladatot és problémát, aminek a megvizsgálása ebből a szempontból fontos lenne. Ezekhez a következőket szeretném, további aktuális problémaként hozzátenni.

Mindenesetre ki kellene egészíteni a részecskeraj fejlődésének vizsgálatát az elektromágneses hatások tekintetbevételével.

Szükséges volna minél nagyobb számú kormeghatározást végezni meteoriteken. Az erre vonatkozó adatok nagyon gyérek, pedig a meteoritek kormeghatározása fontos támpontokat adhat a Napot körülvevő részecskeraj koráról, esetleg kialakulásának körülményeiről. Ilyen munkák elvégzésére bőven szolgáltathatna anyagot a Nemzeti Múzeum szép meteoritgyüjteménye vagy más hazai gyüjtemények.

Tüzetesebben meg kellene vizsgálni az intersztelláris meteorok gyakoriságára vonatkozó, ez idő szerint meglehetősen ellentmondó adatokat. Amennyiben intersztelláris meteorok nagyobb számban érkeznek a földre, ez erősen befolyásolhatja a Föld korára adott Smidt-féle becslést.

Hasznos lenne újra diszkutálni a Föld—Hold-rendszer dagályevolúcióját a Smidt-féle hipotézis alapján.

Ami végül a Naprendszer-kozmogóniáknak más rendszerek kozmogóniáival való összekapcsolását illeti, ez kétségtelenül sürgős és fontos feladat. Ez a kérdés a geológiai vonatkozású problémákon kívül talán a legaktuálisabb kérdése az elméletnek. Az előttem hozzászóló hangsúlyozta a bolygókozmogónia és a csillagkozmogónia esetleges összekapcsolásának sürgős szükségét. A magam részéről szeretném ezt kiegészíteni azzal a megjegyzéssel, hogy a bolygókozmogóniát nemcsak a csillagkozmogóniával, hanem a Tejútrendszer kozmogóniájával is össze kellene kapcsolni. Mint ismeretes ugyanis, *Agekjan* 1950-ben megjelent dolgozatában kimutatta, hogy a kaptáció aktuális feltételei a jelenlegi szerkezetű Tejútrendszerben az intersztelláris anyagok viszonylag kis sűrűsége miatt meglehetősen ritkán teljesülnek. Kérdéses azonban, hogy 6—8 milliárd évvel ezelőtt nem volt-e egészen más a Tejútrendszer struktúrája, hiszen ez az időtartam a Galaxis korának nem jelentéktelen hányadát teheti ki.

Egy másik említésreméltó körülmény a különböző kozmogóniai elméletek kapcsolata tekintetében az, hogy bizonyos esetekben éppen a bolygókozmogónia eredményeit lehet felhasználni a csillagkozmogónia kérdéseinek tárgyalásánál. Egy példával szeretném ezt illusztrálni. Amennyiben a Smidt-elmélet alapjára helyezkedünk, akkor leszögezhetjük azt, hogy a Nap a kaptáció bekövetkezésének idején aligha lehetett korai színképtípusú óriáscsillag (amint azt pl. a Feszenkov-elmélet megköveteli). Ebben az esetben ugyanis a Poynting-effektus sokkal erősebben működött volna és a tömegeloszlás egészen másként alakulhatott volna a bolygók között, ha ugyan egyáltalán kialakulhattak volna ez esetben „normális“ méretű bolygók. Ez egyébként jól összevág a Nap fejlődésének azzal a szkémájával, ami Ambarcumján elméletéből következik.

A felsorolt kérdésekről érdemes még megjegyezni, hogy mind olyan természetűek, amelyek vagy egyenesen közel esnek a hazai csillagászati kutatások egyes irányaihoz, vagy aránylag kis dologi és személyi beruházásokkal érdemleges módon lehetne vizsgálatukba magyarországi munkákkal belekapcsolódni. Megvan tehát annak a konkrét lehetősége, hogy a bolygók kozmogóniáját hazai kutatók is továbbfejleszthessék.

Végül a Nap rotációjának az imént felvetett kérdéséhez szeretnék egy megjegyzést fűzni. Ezt a problémát a magam részéről nem látom olyan súlyosnak. Kétségtelen, hogy a Nap rotációjának létrejöttét egyedül a meteoritek becsapódásával megmagyarázni nem lehet. De ha arra az álláspontra helyezkedünk, mint újabban *Smidt* maga is, hogy a meteoritek csak módosították a Nap már eredetileg is meglévő forgását, akkor a forgástengely jelen, az invariábilis síkra közel merőleges helyzetét nem kell véletlen egybeesésnek tekintenünk.

CSADA IMRE:

Az előző felszólalások alapján arra a megállapításra jutunk, hogy a nyugati kozmogóniák közül *Alfvén* dolgozatai érdemelnek különösebb figyelmet. *Alfvén* 1941-ben kezdte meg a bolygórendszer egy kozmogóniai elméletének a kidolgozását, melyet egész terjedelmében a stockholmi csillagvizsgáló kiadványaiban közölt le. Elméletének alapját egy előzetes dolgozata képezte, melyben homogén mágnesezettségű gömb viselkedését vizsgálta ionizált gázfelhőben. Számításai szerint az ionfelhőben olyan áramlások lépnek fel, melyek a felhő és a gömb impulzusmomentumát kiegyenlíteni igyekeznek. Ha tehát az ionfelhő eredetileg nyugalomban volt, úgy az mozogni kezd (az impulzus momentum átlagértéke az egész gázfelhőben zérustól különböző lesz), míg a gömb forgása lecsökken.

Kozmogóniai elméletében a homogén mágnesezettségű gömb helyébe a Nap lép, az ionfelhőnek pedig egy intersztelláris ionfelhő felel meg. *Alfvén* felteszi azt, hogy a Nap sokmillió évvel ezelőtt haladt át ezen az ionfelhőn. Felteszi továbbá azt, hogy az áthaladás előtt a Nap impulzusnyomatéka a mainál nagyobb volt. Belépve a gázfelhőbe az előbbiek szerint lecsökkent a forgása, vagyis impulzusnyomatékát átadta az ionfelhőnek. (Ez az elmélet igen jól beleillik a Russell-diagramm azon tulajdonságába, hogy a B és A csillagok tengelyforgási sebessége igen nagy, egészen az F5 típusig, itt az effektus hirtelen megszűnik. Az elmélet szerint a csillagoknak éppen ez az állapota felel meg az intersztelláris ionfelhőbe való belépésnek).

Az elmélet további részletei szerint az ionfelhő mozgása közben kondenzációs gócok alakulnak ki, amelyeknek a helye közelítőleg a külső bolygók távolságával esik össze. *Alfvén* megkísérelte azt, hogy a bolygók távolságára törvényszerűséget vezessen le, azonban csupán annyit sikerült megállapítania, hogy a Naptól való távolság növekedésével a bolygók tömege mind kisebb és kisebb lesz.

Figyelemreméltóak *Smidt* akadémikus elméletének és *Alfvén* elektrodinamika elméletének közös vonásai, melyek annak ellenére állnak fenn, hogy a kiindulási feltételek igen eltérőek. *Smidt* elmélete jobban leírja a bolygórendszer mai állapotát, azonban nem ad határozott feleletet arra, hogy a bolygórendszer kialakulása kapcsolatos-e a csillag fejlődésével. Az elektrodinamikai elmélet viszont erre elfogadható feleletet ad. Arra a következtetésre juthatunk tehát, hogy Smidt-elméletének további fejlesztésében az elektromágneses hatások figyelembevételével feleletet kaphatunk erre a kérdésre is.

VADÁSZ ELEMÉR r. tag:

Az élenjáró szovjet tudomány egyik, minden tudományt érintő és érdeklő kérdése: a Föld keletkezését és fejlődését új alapokon magyarázó *Smidt*-elmélet. Az erre vonatkozó gazdag szovjet irodalom eddig magyar nyelven rendelkezésre álló részéből, kezdettől fogva fölfigyeltünk reá világnézeti, szakmai és oktatói tekintetben is. Ideológiai tekintetben mindannyiunk számára példamutatóan, a dialektikus materializmus módszerével, komplex módon törekedik a kérdés vizsgálatára. Ezért a matematikailag és asztrofizikailag alátámasztott csillagászati kérdést egészen az érdekelt földtan, geofizika, geokémia szaktudományokig vezeti s ezek kritikáját várja.

A földtan szemszögéből, a Smidt-elméletet matematikailag és csillagászatilag bizonyitottnak föltételezve, a Föld anyaga s annak időrendi változása, alakulása és fejlődése adja a vizsgálati terület közös alapját. A földtan ugyanis a Földet fölépítő anyagok, a különböző kőzetek keletkezésével, változásával, fejlődésmenetével és elrendeződési módjával foglalkozik, a Földön élő szerves élet kapcsolatában. Tapasztalati megismeréssel és erre alapított oknyomozással, a Föld külső részét, a szilárd földkérget fölépítő legrégibb kőzetekig megy el, a Föld őskorába. Az ezt megelőző időt és földfejlődést, a Föld csillagállapotának tekintve, a csillagászat vizsgálati körébe utalja.

Való tény, hogy a földtan, a Föld keletkezésében mindmáig túlnyomólag a nagy hőmérséklet szerinti keletkezési elméletek alapján dolgozik, noha azok csillagászati hibáiról és meghaladottságáról tudomásunk van. Ez az elmélet a Föld termikus viszonyaira vonatkozó elgondolásokat, a Föld belsejének öves elrendezettségét, a vulkáni működésből nyert megfigyelések, a megolvadt, izzón folyó lávaanyagból történt kihűlés szerinti kőzetképződéssel magyarázta. Az oknyomozó földtani vizsgálatokkal, különösen a radioaktivitás megismerésével, a geofizika és geokémia fejlődésével, ezek a fölfogások tárgyi tekintetben is meghaladottakká váltak. Az ellentmondások a földtani értelmezésben mindinkább szaporodtak és különösen a szárazföldek és tengermedencék kéregalkati különbségének, a hegységek keletkezésének magyarázatában a Föld kihűlése és annak nyomán történő összehúzódásból származó feszültségek energiája alkalmazhatatlannak bizonyult. A *Kant—Laplace*-elmélettől és az ahhoz kapcsolódó elgondolásoktól a földtani tudományos megismerések teljesen elszakadtak, más utakon jártak ugyan, nem volt azonban helyettük más, korszerűbb vagy tudományosabb földkeletkezési elmélet.

Fölvetődik már most az a kérdés, hogy a *Smidt*-elmélet a földtan mai állásában megfelelőbb-e, elfogadható-e? Erre azt a határozott választ adhatjuk, ami lényegileg a szovjet akadémiai vitából és a vele kapcsolatos szakirodalomból is kialakult. A *Smidt*-elmélettel nem oldhatunk meg minden idevágó földtani kérdést, de alkalmas az ilyenirányú földtani nyílt kérdések újravizsgálatára és kétségtelenül megszüntet már nagyon sok ellentmondást a magyarázatokban. A földtani tényekkel többnyire nincs ellentmondásban. Részletekbe menni itt nem kívánok, csak általánosságban említem a tektogenezist, a szárazföldek és geoszinklinálisok alakulását, a hegységképződést tehát a földfejlődés nagyjelenségeit, a földkéreg változásait.

Tektogenezis alatt értjük a földkéreg anyagának szerkezeti elrendeződését, mozgásban megnyilvánuló jelenségeit és folyamatait, alakban és anyagban történő változásait. Szerkezeti elrendeződés szerint a Föld egészében, tömegének minden részében vannak változások. A Föld, keletkezésétől kezdve, belső és külső erőhatásokból eredő, hosszúidejű, pusztítva-építő fejlődés anyagának alakban és anyagban végbemenő mozgása, térben és időben. A tektonizmusban többféle mozgás együttes hatása érvényesül, nemcsak a földkéreg anyagbeli tagolódása szerint, hanem azon túlmenően, a Föld belső állapota és anyagelrendeződése tekintetében. A hegységképződés ezek szerint, a szilárd földkéreg fejlődésmechanikája, nem önmagában végbemenő folyamat, hanem lokalizáltan, a Föld belsejében levő anyagok sokféleségében történő változásokkal összefüggő, azokból összegeződő eredmény. A Föld öves elrendeződésű anyagainak más-más módon (minőség) és mértékben (mennyiség) történő anyagmozgásai, egymásrahatásukkal hozzák létre a földkéreg anyagában, a folyamatos mennyiségi mozgásokból összegeződő, ugrásszerű, minőségi hely- és alakváltozásokat.

A Föld, anyagának összetétele tekintetében zárt egység, ahova kívülről ma már érdemleges anyaghozzájárulás nincs. Minden változás tehát a Föld anyagában, az eredeti kozmikus anyagszármazással szemben csak minőségi változás. Tudjuk azonban, hogy a földkéreg anyagában, a Föld mélyében nagy hőfokú, izzónfolyós állapotú anyagok vannak. A *Smidt*-elmélet szerint hideg kozmikus anyagokból keletkezett Földön, ez a hőmérsékletkülönbség, helyben történt fejlődést jelent. *Smidt* szerint, a Föld tömegének fele, keletkezésének egy milliárd évi kezdeti ideje alatt tömörült. Ezután, a folyamat lassult s ma már igen kevés kozmikus anyag jut a Földre, ami földtani értelemben nem számottevő. A földfejlődés anyagszaporulatára, amit földtanilag kozmikus üledékképződésnek mondhatunk, az aktualizmus, nem vonatkozik. A *Smidt*-elmélet szerint a Föld keletkezése idősebb a földkéreg alakulásánál, ami csak későbbi fejlődés eredménye. Ez megfelel a földtörténeti tényeknek is. A földtörténet ugyanis a szilárd földkéreg legrégibbnek ismert kőzeteivel kezdődik, amiket már átalakult kőzetekként ismerünk, tehát az eredeti anyag megváltozásából származnak. Ezért a földfejlődésben is megkülönböztetünk egy földtörténet-előtti, csillagállapotot is.

Az anyagváltozásnak, a Föld egészére nézve legnagyobbszabású földtani jelensége a hegységképződés. Hatalmas földkéregbeli kőzetösszleteknek nyomásból történt összegyűrődése és tördeltsége. Ez térben és időben meghatározott módon, a földkéreg legmozgékonyabb részein létesül. A földtörténeti tények szerint a földkéreg mozgékonyabb részei a nagy tengermedencék (geoszinklinálisok). A szárazföldek merevebbek. Tudjuk, hogy ezek anyagában is különbségek vannak. A hegységképződés során nagy tömegeltolódások történnek, emelkedő-süllyedő függőleges kéregmozgásokkal, az egyik helyen történt kiemelkedésnek a földkéreg más részén történő süllyedéssel való kiegyenlítődésével. Ezekhez kapcsolódik a különböző összetételű magma, különböző természetű mélységi benyomulása vagy vulkáni felszínre jutása.

Mindezeknek közös mozgatója a Föld belsejében levő hőenergia. Geofizikai és geokémiai vizsgálatokból tudjuk, hogy a Föld belseje felé a hőmérséklet bizonyos határig növekedik s elfogadható az is, hogy ez a hőmérséklet nem a földkeletkezésből eredő, örökölt sajátság, hanem a radioaktivitás ismerete szerint belső anyagváltozásból ered. A Föld nyolc orogenetikus nagy szakasza, fokozottabb vulkáni, illetőleg magmás tevékenységgel, a földtörténeti vizsgálatok szerint meghatározott időtávolságokban ment végbe. Az errevonatkozó különböző számítások a hegységképződési nagy földkéregmozgalmak 200 millió év körüli szakaszos megismétlődését, tehát határozott időszakosságot állapították meg. Földtanilag hegységképződési szüneteket, süllyedéses lehűlési időszakokat, átmeneti fölmelegedési szakaszok váltják föl orogenetikus kéregfejlődéssel. A hőtermelésnek, illetve az atombomlásos energiatermelésnek a tektonizmussal való összefüggését, újabban *Wahl*, az uránólommódszerrel végzett kőzetanyagvizsgálattal, hét főbb orogenetikus szakaszra a következőkben állapította meg:*

Szakasz	Orogén	Kulmináció ideje évmillió	Kulminációk közötti időtartam évmillió
VII.	Alpi	59	227
VI.	Varisztid	286	95
V.	Kaledoni	381	231
IV.	Keletafrika-szamikus	612	189
III.	Kareli-huroni	801	140
II.	Gotid-algoman	941	181
I.	Szvekofenid-lőrinci	1122	

* *Wahl:* Altersvergleich d. Orogenese. (Geol. Rundschau 34. 1943.)
Holmes: The age of the earth. (Endeavour vol. VI. 1947.)
Kober: Vom Bau der Erde zum Bau der Atome. Wien, 1949.

Az atombomlás egyenletességének, állandóságának és befolyásolhatatlan voltának föltételezésével végzett számítási eredmények az egymásra következő hegységképződési szakaszok között meglehetősen egyenlőtlen időközöket mutatnak. Az átlagos időköz 165 millió év, ami a kétmilliárd éves földtörténet tartamában 12—13 orogén-szakaszt jelent. A IV. és V. szakasz közötti legnagyobb, 231 millió éves időtartamra esik a földkéreg szervetlen anyagának, a különböző üledékkifejlődéseknek és a vulkáni tevékenységnek általános elterjedése, a legnagyobb és legváltozatosabb ércterületek keletkezésével és a kambriumelőtti időkben indult szerves élet kiteljesedésével. Csaknem valamennyi orogén-szakaszban szial-anyagú gránitosodás is van, ami tudvalevőleg a szialanyagú szárazföldek növelésével és merevítésével jár.

A számítási adatok és módok részletezése nélkül a radiogeológiai vizsgálatokból kitűnik, hogy a Föld radioaktivitása és az orogén-szakaszok között kapcsolat van. Az atombomlás a Föld belsejének anyagában változásokat létesít, amelyek energiafölszaporodásra vezetve, időszakonként nagyobb földfejlődési mozgalmakat váltanak ki. *Kober* szerint, a radioaktivitás földtanilag magmatizmus, a mélységben állandó nehéz atomoknak magasabb földkéreg-övekbe nyomulása, ahol labilissá lesznek, szétbomlanak, földfejlődési energiát termelnek s anyagváltozást létesítenek. A földkéreg meghatározott helyein radioaktívciklusok vannak meghatározott anyagokkal, orogén-időszakban gazdagabban, geoszinklinális-szakaszokban szegényebb módon. Meg kell még említenünk, hogy a legújabb geokémiai vizsgálatok szerint, mindez a radioaktív anyagváltozás, az ionvándorlással, szilárd anyagban mehet végbe, ami azt jelenti, hogy nincs szükség az izzón folyó kőzetanyagnak, a magmának, a Föld belső mélységéből kész állapotban történő fölnyomulására, hanem a magma a magasabb földkéregövben, a radioaktív anyagok bomlásából helyben keletkezhetik, esetleg kisebb hőfokú részeken is.

Nem célom mindezeknek a földtani elgondolásoknak kvantitatív értékelése, ami különben nem földtani, hanem geokémiai és geofizikai föladat. Tény az, hogy a földkéreg anyagának ilyen változásában a főtényezők az anyagok potenciális energiája (gravitációs energia) és a radioaktív hőtermelés. Ezeket a Föld kihülésével és a Föld anyagának egyenletes öves elrendeződésével összhangba hozni nem lehet. A *Smidt*-elmélet szerint azonban a hideg kozmikus anyagokból tömörült Földnek, az anyagok radioaktivitásától függő termikus fejlődése van. (A radioaktív anyagok eloszlása, kezdettől fogva sem egyenletes a Föld alakulásában. Ez érthetővé teszi az anyagok különböző összetételűvé alakulását a földkéregben, a szial és szima eloszlását a szárazföldeken és tengermedencékben. A radioaktív anyagok egyenlőtlen eloszlásából következik az is, hogy az atombomlásos energiatermelés a földtörténet során más-más helyeken és egyenlőtlen szakaszokban történik. A radioaktív anyagfejlődés térben és időben eltolódik. Ebben a vonatkozásban további magyarázatot igényel a hegységképződési öveknek északról-délre vándorlási ténye, ami a Föld belső anyagában is hasonló radioaktív anyagvándorlást tesz szükségessé.

A *Smidt*-elmélet szerint a multban a Föld anyagában több radioaktív anyag volt, de időközben elbomlott. Ez összeegyeztethető volna azzal a földtörténeti ténnyel, hogy a legrégibb szárazulati tömbök fejlődése sokkal erőteljesebb, nagyobb méretű szialitosodást mutat, mint a későbbiek. A legrégibb, kambriumelőtti orogenezis is nagyobb méretű s a későbbi hegységképződési szakaszok gránitosodása is fokozatosan kisebb méretekben növelte a meglevő szial-földkéregrészeket. A bekövetkezett kéregalkati változások mindig ugrásszerűek. A *Smidt*-elmélet alátámasztja az aktualizmusnak dialektikus-materializmus szellemében módosított használatát: a Föld fejlődésében a maiakkal azonos erők, de más intenzitással működhettek. Nyitva hagyja azonban még az atombomlás módjának és minőségének multbeli azonosságára vonatkozó kérdésünket.)

A földtannak a legkorszerűbb és legáltalánosabb, világnézetileg fontos kérdéseivel csak vázolni kívántam azt a bevezetőben adott megállapítást, hogy a *Smidt*-elmélet általában nincs ellentétben a földtannal. Földtanilag három alaptételét vesszük alapul:

1. A belső bolygók és a Hold anyaga csaknem azonos, kozmikus eredetű anyag, aminek összetétele valamennyi égitest anyagában megtalálható. Ez a világegyetem anyagi egysége.

2. A Föld belső melege és a magma hőmérséklete nem a Napból származó „örökség", hanem elsősorban a kozmikus por radioaktív elemeinek atombelüli energiája, másrészt a tektonikus folyamatok mozgásmechanizmusából származó hőenergia.

3. Ezek a források, *Smidt* szerint nem elegendők a Föld anyagának egyetemleges megolvasztására, ezért a földkéreg külső része, keletkezésétől kezdve megtartotta szilárd állapotát. Az utóbbi, az anyag fejlődésének megfelelően, földtanilag úgy értelmezhető, hogy a kozmikus anyag eredeti összetétele, az első radioaktív bomlásokkal, szilárd állapotban változott földkéreggé.

Összefoglalásul, a részleteket illetően a geokémiai és geofizikai vizsgálatokra való utalással, azok eredményeit figyelembevéve, úgy találjuk, hogy a *Smidt*-elmélet alkalmas a kapcsolatos földtani kérdések kiépítésére és a földtanban ebben a tekintetben fönnállott ellenmondások újravizsgálatára és kiküszöbölésére. Oktatási és akadémiai vonalon, földtani-geokémiai-geofizikai vonatkozásban, részletesebben is vizsgálni fogjuk.

SZÁDECZKY—KARDOSS ELEMÉR r. tag:

Smidt elmélete a geokémiai és kőzetképződési kérdéseknek egész sorát veti fel. E hozzászólásban csak három főkérdést igyekszünk vázlatosan körvonalazni. Az egyik a földszerkezet geokémiai modelljei kapcsolatának kérdése a kozmogóniai elméletekkel, a másik e földszerkezeti sémák származtatásának, ill. az elemek differenciációjának és migrációjának a problémája, a harmadik a kőzetképződés alapvető különbségeinek kérdése a két nagy csoportba osztható kozmogóniai elméletek, t. i. a *Kant—Laplace* alapú izzónfolyó- és a *Smidt*-féle hideg kozmikus anyagból való bolygó származtatás szempontjából.

1. Nyilván nem véletlen, hogy a kozmogóniai elméletek kétirányú fejlődéséhez hasonló, sőt ezzel párhuzamos folyamat észlelhető a földszerkezeti elképzelések történetében.

Az első kellőleg megalapozott elmélet a Föld belső szerkezetéről tudvalevően a 20-as évek elején keletkezett, főleg *Goldschmidt* és *Tammann* szintézise alapján. Ez az elmélet mint ismeretes, három adatsor összekapcsolásából indult ki: a meteoritfajták statisztikájából, a vaskohászati folyamatok elemdúsulásainak kémizmusából és a földrengési hullámok visszaverődési felületeiből, ill. azok mélységi adataiból. A szintézis a közismert 2900 km sugarú vasmag, felette az oxid-szulfidhéj és legfelül az 1200 km-es szilikátkéreg feltevéséhez vezetett. Ehhez többé-kevésbbé hasonló volt *Washington* és követőinek modellje, azzal a különbséggel, hogy az oxid-szulfidhéj helyett a vasmag és a szilikátkéreg közt egy fokozatos átmeneti övet tételezett fel.

Noha ezek a modellek az izzónfolyó Föld-származtatás talajában születtek, mégis ezzel rejtett ellentétben álló eredményt jelentettek. A *Goldschmidt—Tammann*-féle földszerkezeti modell u. i. kémiailag feltűnően kevés kapcsolatot mutat a Nap, ill. a napatmoszféra összetételével. Az ilyen szerkezetű Földet, ill. földöveket a Napból kémiailag csak segédfeltevésekkel lehetett levezetni. Ilyen segédfeltevés a könnyen illó elemeknek — főleg a H és talán a He-nak — elszabadulása a világűr felé, továbbá az elemek földi keletkezésének ez idő szerint még minden alapot nélkülöző lehetősége. A könnyen illók elszabadulásának feltevése azonban további, kevéssé valószínű segédfeltevéseket is szükségel, így a mainál eredetileg sokkal nagyobb tömegű bolygók elképzelését és az elszabadult óriási H és He tömegek sorsának, helyének kimutatását.

A földszerkezeti modellnek a *Kant—Laplace*-elmélettel való jobb összeegyeztetése céljából 1941-ben *Werner Kuhn* és *Rittmann* oly feltevést közöltek, mely szerint a Föld belsejében egy nagyobbrészt szoláris anyagból, tehát elsősorban hidrogénből és héliumból álló mag volna. A magmás differenciáció, ill. az elemek migrációjának nehézségei miatt ugyanis a Föld nagy nyomású belsejéből a könnyű atomok aligha juthatnának a Föld felszínére, és innen a világűrbe. A részletes kritika, különösen *Eucken* ezt a modellt nem fogadta kedvezően és így a kifogástalan és egyszersmind az izzónfolyó bolygószármaztatás elméletével egészen összhangban álló földszerkezeti modell kérdése továbbra is nyitva maradt.

1949-ben jelent meg azután *Ramsey* tollából egy olyan földszerkezeti modell feltevésének leírása, amely úgylátszik anélkül, hogy maga a szerző észrevette volna, a legmeglepőbb egyezést mutatja a Smidt-kozmogónia követelményeivel. A *Ramsey*-modell szerint u. i. a Földnek csaknem egészét a meteoritek átlagos összetételével egyező, kémiailag egységes anyag alkotja, legfeljebb a nehezebb elemeknek némi szaporodásával a mélység felé. A kémiailag különböző földövek elkülönítésére ebben az elméletben ugyanis többé nincs szükség, mert a földrengési hullámok visszaverődési felületeit teljesen új alapon értelmezi, t. i. az atomok elektronszerkezetének a növekvő nyomással ugrásszerűen bekövetkező hirtelen megváltozásával. E modell ugyan nem áll ellentétben az izzónfolyó bolygó-származtatás elméletével sem, de sokkal inkább kedvez a *Smidt*-féle elméletnek, mert egyetlen csapással megoldja az elméletnek azt az ez ideig talán legnehezebbnek látszó kérdését, amely a különböző elemek földbeli fajsúlyszerinti gravitációs differenciációjára vonatkozik. Ahhoz ugyanis, hogy az egységes kiindulási anyagból jól elhatárolt, kémiailag különböző összetételű övekre elkülönült bolygó keletkezzék, a földtani időméretekben is hosszantartó, izzónfolyó, kis viszkozitású állapotra volna szükség. A *Ramsey*-féle modell azonban a földrengési hullámok határfelületének új értelmezésével mellőzhetővé tette a kémiailag lényegesen különböző földszerkezeti öveknek és ezzel együtt a nagyobbmérvű gravitációs differenciációnak feltevését.

2. A földszerkezeti modell kérdése azonban csak akkor nem jelent többé nehézséget a *Smidt*-kozmogónia számára, ha a földkéreg szerkezete is minden részletével együtt előállhat az eredetileg hideg kozmikus anyagból. Ez a második kérdést, a földövek, ill. a kőzetek elkülönülésének, tehát a migrációnak, ill. a differenciációnak problémáját jelenti. A differenciációs jelenségek teljes kikapcsolásáról u. i. a *Ramsey*-féle modell esetében sem lehet szó, mert a

kontinentális szial-táblák elkülönülése az oceáni szimatól magában is hatalmas méretű elvándorlást jelent. Sőt még nagyobb méretű elemvándorlás feltevését teszi szükségessé az, hogy a számítások szerint a Föld hőegyensúlyának fenntartásához kb. elégséges a szial-táblákban foglalt radioaktív anyagtartalom is, tehát további jelentékeny radioaktív anyagmennyiséggel a Föld mélyében nem számolhatunk. Ha tehát a Föld eredetileg többé-kevésbbé egységes anyagból keletkezett, úgy a legfelső szial-táblákban koncentrált radioaktív elemeknek, az egész Föld anyagából kellett egységesen kiszűrődnie.

Az eddig uralkodó nézetekkel szemben meg kell állapítanunk, hogy a nagyméretű elemmigráció feltevésének szükségessége többé hideg kozmikus porból származó bolygók esetében sem jelent nehézséget. Egyrészt u. i. az elemmigráció igen könnyűvé válik az allotróp átalakulások hőmérsékén jelentkező rendkívül labilis átmeneti állapotban, amikor az anyag kémiai aktivitása és diffúziós képessége hatalmasan megnövekedik. Erre legújabban *Glangeaud* mutatott rá. Másodszor az elemmigráció a kőzet szilárd hideg állapotában is lehetséges, éspedig a folyékony, vagy gázalakú makrofázisokon kívül főleg magános ionok állandó, sorozatos áthatolásával, amikor is a döntő tényezőnek a *Ramberg*-féle fiktív sűrűséget, ill. pontosabban az általunk bevezetett ion-fajsúly értékeket tekinthetjük. Harmadszor: *Vernadszkij* meggondolásai szerint a radioaktív sugárzás bombázó hatása az elemmigrációnak különösen hatékony úttörője. Negyedszer: a radioaktív felmelegedéssel — különösen egy erre optimális, kb. 50—100 km mélységű övben — izzónfolyó magmává lett részeknek nagy összefüggő tömegekben való vándorlása és fajsúlyszerinti elkülönülése, vagyis a régi értelemben vett magmás differenciáció is lehetségessé válik.

A *Smidt*-elméletnek tehát ez a legnehezebbnek tekintett geokémiai vonatkozása sem jelent többé komoly nehézséget.

3. Ezzel áttérhetünk a harmadik kérdésre, a *Smidt*-féle elmélet következményeire a szorosabb értelemben vett petrológiai, kőzetképződési folyamatok tekintetében. Mindenekelőtt megváltozik az új elméletre áttérés esetében a magmás, metamorf és üledékes kőzetképződés viszonya és e három fő kőzetcsoportnak egymáshoz képesti viszonylagos jelentősége is. Lényegesen nagyobb szerepet nyer a *metamorf* kőzetképződés a magmás kőzetképződéssel szemben. A Smidt-féle bolygó-származtatás értelmében u. i. a hideg kozmikus porból először metamorf kőzetállapotú anyag alakul ki, csak azután keletkezhet a megfelelő mérvű radioaktív felmelegedés, majd a részleges vagy teljes megolvadás (ultrametamorfózis, anatexis) után a magmás állapot. A metamorf kőzetképződés tehát az új elmélet következményeként egyrészt elsőleges feltétlen és uralkodó jelleget nyer a magmással szemben, míg a magmás folyamat esetleges és alárendelt szerepűvé válik.

A *magmás kőzeteken* belül pedig éppen ellentétessé válik a képződés *sorrendje*. Az izzónfolyó anyagból való származás esetében u. i. a túlnyomóan elsőlegesnek, juvenilisnek tekintett magmák kristályosodási sorrendje a bázisostól a savanyú felé halad, megfelelően a *Rosenbusch—Bowen*-féle kristályosodási sorrendnek. A kozmikus porból való származás esetében viszont a normális magmás kristályosodás sorrendjét az anatexis határozza meg, vagyis először keletkezik és intrudál a legkönnyebben megolvadó savanyú összetételű anyag, majd fokozatos sorrendben következnek a bázisos tagok.

Az ú. n. *juvenilis* és *palingén* magma megkülönböztetése is érvényét veszíti a *Smidt*-féle elméletben, vagyis itt nem lehet elkülöníteni az izzónfolyó bolygó-származtatás elmélete szerinti ősi (juvenilis) magmát a szilárd kőzetek felolvadásából származó (palingén) magmától. Ennek az elkülönítésnek azonban nem is volt tárgyi alapja; ez az elkülönítés az izzónfolyó Föld-származtatás elméletének maradványa. Véleményünk szerint a kozmogóniai elméletektől függetlenül is minden emberileg érzékelhető magmás kőzetet eredetileg szilárd földkéregrész megolvadásából kell származtatni. Az izzónfolyó magma u. i. viszonylag labilis egyensúlyt, rendezetlen atomszerkezetet képvisel, amiből viszonylag könnyen fejlődik ki az atomok-ionok szorosabb térkitöltését képviselő rendezett szilárd, sőt kristályos állapot. Aligha képzelhető el tehát, hogy valamilyen ősi, például *Kant—Laplace* szerinti csillag-állapot maradványaként volna még ma is összefüggő magmaöv, vagy akár egy egykori összefüggő magmaöv maradványaként volnának elkülönült magmakamrák Földünkben.

A kétféle kozmogóniai elmélet fontos különbségekhez vezet az *üledékes kőzetképződés* lehetőségeiben is. Az izzónfolyó bolygókeletkezés esetében általános és intenzív üledékképződés csak akkor indul meg, amikor a Föld felszíne a kritikus hőmérséklet alá süllyed és így hidroszféra különülhet el. A hideg kozmikus porból való bolygó-származtatás esetében viszont a gázfázisból azonnal keletkezhet hidroszféra és így az üledékképződés megindulhat akár a magmás kőzetképződés előtt is.

De különböznie kell a kétféle elmélet következményei szerint az először képződő üledékek összetételének is. Izzónfolyó Földszármazás esetében az üledékes kőzetek túlnyomóan már a felszíni, főleg savanyú, szialikus kőzetekből keletkeznek és így maguk is Si-ban gazdagabb, homokosabb összetételűek. A kozmikus porból származó Föld esetében viszont a korai üledékes képződmények inkább magukon viselhetik az eredeti kozmikus anyag meteorit-jellegű, bázisosabb összetételét, és így csakhamar uralkodóan anyagos jellegűek lesznek.

Ezek az ellentétes következmények nagyjelentőségűek visszahatólag is a kozmogóniai elméletekre, mint azok közvetlen földi bizonyítékai, ill. cáfolatai. Az említett kőzetképződési időrendi és fontossági sorrendek u. i. bizonyos esetekben ilyen irányú tudatos földtani vizsgálatokkal elvben meghatározhatók, noha a szóbanforgó képződmények nagy földtani kora miatt inkább csak közvetve és kivételesen. A kiadódó sorrend azonban közvetlen adatot jelentene a két ellentétben álló kozmogóniai elmélet-csoport közti döntéshez.

Az első pontban előadott szempontra maga *Smidt* akadémikus is utalt már. Viszont a 2. és 3. pontban kifejtettek az eddig számunkra hozzáférhető irodalom alapján újnak tekinthetők.

EGYED LÁSZLÓ:

A Smidt-féle elmélettel kapcsolatban a geofizika szemszögéből a következő észrevételeket lehet tenni:

A Föld alakjának a kérdése és a Föld öves felépítése igen jól összefér a Smidt-elmélettel, miután egy statisztikus összeállásnál egy kvázi-homogén állapot a legvalószínűbb. A felszín pedig csak annyiban térhet el a forgó folyadékok alakjától, amennyiben a nyírásnak az anyagok ellenállni tudnak. Ez legfeljebb 5—10 km-es eltérést jelenthet az elméleti felülettől. A megfigyelés evvel igen jól egyezik. A belső rész öves felépítése létrejöhetett későbbi differenciálódás által, de magyarázható tisztán a nyomások folytán előálló helyzettel. A legújabb kompresszibilitási vizsgálatok eredményei is alá tudják támasztani a Smidt-féle elmélet alapján keletkezett Föld övek szerinti felépítését.

A szeizmikus hullámok alapján felfedezett elsőrendű törési felület jelenléte szintén magyarázható a nagy nyomás folytán létrejött nem folytonos térfogatváltozással. Ezt laboratóriumi mérések esetében is tapasztalták. Nehézséget jelent azonban a transzverzális hullámok tovahaladásának a megszűnése a szeizmikus határon túl.

Az újabb geotermikus vizsgálatok is a Smidt-féle elmélethez közelebb álló eredményeket adtak.

Komoly nehézséget jelent a Föld felszínének kontinentális és óceáni területekre való tagolódása, amely tagolódás nemcsak a topografia, hanem összetétel szempontjából is lényeges különbséget jelent. Ha azonban radioaktív alapon később megolvadt felszínnel számolunk, akkor ez a nehézség is eliminálható.

Nem igen lehet magyarázni a Smidt elmélettel a tektonikaigeofizikai szempontból aktív területek zonális eloszlását.

A Smidt-féle elmélet alátámasztását jelenti azonban a meteorit porok jelenléte a mélytengeri üledékekben.

FALUDI BÉLA:

Két oka van annak, hogy egy kérdéshez, amelyben teljesen laikus vagyok, mégis hozzá kívánok szólni: az egyik ok ideológiai, a másik a csillagászati kérdések időnként pl. napjainkban is felmerülő határterületi jellege.

Ideológiai oldalról a kérdés a biológiát rendkívül nagy mértékben érdekli. Ha végig megyünk a természettudományok történetén, akkor azt látjuk, hogy a csillagászat, a biológia és részben a geológia, látszólag nagyon távol álló tudományok története, messzemenően hasonlít egymáshoz, sokkal nagyobb mértékben, mint a többi természettudományhoz. *Sztálin* elvtárs nyelvtudományi munkája nyomán a Szovjetunióban és vele egyidőben a népi demokráciákban — nem utolsó sorban nálunk — élénk viták folytak arról, hogy a természettudomány a nyelvhez hasonlóan nem felépítmény és nem semmisül meg a társadalmi osztályok váltakozásával. A természettudomány, miként a nyelv, természeténél fogva, elvileg alkalmas arra, hogy mindenfajta társadalmat szolgáljon. Közömbös az osztályokkal szemben. Hiba lenne azonban, ha azt hinnők, hogy az egyes társadalmi osztályok is közömbösek a természettudományokkal szemben. És éppen ezért, mert nem közömbösek, a természettudományoknak van felépítményhez tartozó, a természettudományokat át, meg át szövő eleme is. A felépítménynek szerepe van abban, hogy egy felfedezés mikor válik lehetségessé és elfogadottá, szerepe van abban, hogy a tényadatokból milyen törvényeket von le a természettudomány és végül döntő szerepe van abban, hogy a tényadatokból és törvényekből milyen filozófiai következtetések születnek. Ha megnézzük ebből a szempontból a csillagászatot és a biológiát, akkor azt látjuk, hogy az egyiptomi, babiloniai társadalmaktól kezdve ez a két tudomány volt legszorosabb kapcsolatban a termelőerők fejlődésével és ez volt az a két tudomány, amelyet legjobban üldözött tűzzel, vassal a papi és világi reakció (gondoljunk csak *Galilei*re, *Giordano Bruno*ra és *Servetus*ra, akiket a klérus égettetett el), amikor a termelőerők fejlesztése nem volt közvetlen érdeke. Éppen úgy ez volt mindig az a két tudomány, amelynek meghamisított adataival és meghamisított törvényeivel gazdagítani igyekezett miszticizmusának a tárházát és hűséges szövetségesének, a babonának a tömeggyártmányait.

Ez az oka annak, hogy ebben a két tudományban vannak napjainkban is a legforradalmibb változások és folynak a legtermékenyebb viták a haladók oldalán és legkörmönfontabb hamisítások és legelkeseredettebb gáncsolási törekvések a reakciósok oldalán. Miért ez a gyűlölet a reakció részéről? Nyilván azért, hogy éppen ez a két tudomány bizonyítja legjobban a világ anyagi egységét és összefüggését, a világ végtelenségét, a szüntelen mozgást, változást, fejlődést, a fejlődés ugrásszerűségét. *Engels* azt mondotta, hogy a természet a dialektika próbaköve. Természetesen ebből a szempontból nincs kitüntetett helye a csillagászatnak és a biológiának, de kétségtelen itt mutatkozik a próbakő a legérzékenyebbnek. Most áttérek a második kérdésre, a határterület kérdésére. Ez a szerves világ kialakulásának a kérdése. Napjainkban ez a kérdés a biológiában azáltal nyert különös aktualitást, hogy *Oparin* akadémikus először a biológia történetében olyan elméletet dolgozott ki, amely elmélet következetesen materialista és ugyanakkor a kísérletes megközelítésre a technika mai fejlettségi fokán többirányú lehetőséget nyujt. *Oparin* a szerves vegyületek építőköveinek a C. H. N. O-nak a történetével kezdi elméleti munkáját. Ebben elsősorban a csillagászat adataira támaszkodik, a Nap és a bolygók anyagi összetételére, valamint a meteoritek vegyi összetételére. *Oparin* elméletében még a régi csillagászati elméletekre támaszkodik. Nyilvánvaló, hogy fennáll annak a veszélye, hogy a Smidt elméletre támaszkodva Oparin elméletével szemben aggályok fognak felmerülni. Ennek meg vannak a jelei nálunk is.

Természetesen én nem foglalkozom a Smidt-elmélettel, mert nem értek hozzá, csak annyit engedjenek leszögeznem, hogy az előtte felállított elméletek tudománytalanok, mert a véletlenre épültek. Miért? Azért, mert a világegyetem általunk ismert részében jelentős számú különböző hőfokú és nagyságú és forgássebességű égitest ismeretes, ezzel szemben a Naprendszerek kialakulása igen ritka. Ennélfogva izzó testek forgása nem vezet szükségszerűen a naprendszerek kialakulására, még kevésbbé égitestek véletlen összeütközésére.

Amiről azonban beszélni szeretnék, az az, hogy a Smidt-elmélet beigazolódása az Oparin elmélet lényegét illetően nem tesz szükségessé semmi változtatást az Oparin elméletben. Igaz, hogy Oparin a Föld izzó állapotából indul ki, de csak két vonatkozásban. Először negatív értelemben. Olyan értelemben, hogy csak a Föld lehülése után keletkezhetett a Földön szerves élet. Ebből a szempontból tehát semmiféle revizióra nincsen szükség. Egyszer pedig pozitív értelemben, amikor rámutat arra, hogy a szerves anyagok szervetlen építőkövei ciánná, vagy ammoniává, karbiddá magas fokon szintetizálódnak. Ezek a vegyületek kimutathatók a bolygókban és a meteoritokban. Utóbbiban rendesen CH vegyületek is előfordulnak. A kérdés tehát a szerves anyagok előtörténetét illeti és elvileg tökéletesen mindegy, hogy a fentemlített vegyületek többsége a Föld izzó állapotában keletkezett és kisebb része a meteoritokkal került a Földre vagy pedig valamennyi a meteoritokkal került a Földre. Ha a Földön cian, ammonia, karbid, szén és hidrogén bármely arányú vegyülete a metintól és metánig előfordult, már pedig ezek a meteoritokban előfordulnak, akkor Oparin elmélete alapján ezekből a vegyületekből a szerves vegyületek fejlődése levezethető. Levezethető alacsonyabb hőmérsékleten is, nem kizárólag a cseppfolyós víz hőmérsékletének megfelelő zónában.

Az Oparin-elmélet híveinek semmi okuk nincs az aggodalomra, mint ahogy az aggodalom nem is tőlük indul ki, hanem részben azoknak az oldaláról, akik nem ismerik kellőképpen az élőanyagnak az élettelenből történő fejlődésének elméletét, azoknak az oldaláról, akik örömest vennék, hogy ha a két ideológiailag rendkívül jelentős elmélet valójában ellentétben állana egymással. Megnyugtathatom mindazokat, akiknek a számára ez kérdéses volt hogy a két elmélet között lényeget érintő ellentét nincs.

RÉNYI ALFRÉD lev. tag:

Néhány megjegyzést kívánok tenni a Smidt-féle elmélet matematikai megalapozását illetőleg, különösen a bolygótávolságok Smidt-féle törvényével kapcsolatban.

A bevezető előadás rámutatott, hogy *O. J. Smidt* akadémikus nagyszabású kozmogóniai elmélete két alapvető tézisen nyugszik. Az első szerint a nap egy galaktikai ködön áthaladva magával ragadta annak egy részét, így alakult ki egy körülötte keringő raj — ezt nevezzük a rövidség kedvéért *kaptáció-elméletnek,* — a második tézis szerint e raj részecskéinek összetömörülése folytán jöttek létre a bolygók — ezt nevezzük a rövidség kedvéért a *kondenzáció-elméletnek.*

Mind a kaptáció-elmélet, mind a kondenzáció-elmélet megalapozásához *O. J. Smidt* mélyenjáró matematikai módszereket használ fel. Elméletének fölénye más elméletekkel szemben nem utolsó sorban abban is megmutatkozik, hogy azoknál sokkal nagyobb mértékben támaszkodik szabatos matematikai módszerekre és így nemcsak kvalitatív, hanem kvantitatív következtetésekhez is el tud jutni, amelyek a tényleges adatokkal egyes pontokon igen jó megegyezést mutatnak: így például a bolygótávolságok kérdésében, amelyre a továbbiakban részletesen ki fogok térni. A kaptáció-elmélet klasszikus mechanikai meggondolásokat alkalmaz és a felhasznált matematikai módszereket lényegében a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete szolgáltatja. Ezzel szemben a kondenzáció-elmélet statisztikus mechanikai meggondolásokkal operál és a felhasznált matematikai módszerek a valószínűségszámítás körébe tartoznak. *O. J. Smidt* elmélete a valószínűségszámítás csillagászati alkalmazásai terén is új fejezetet nyitott meg. Meg vagyok győződve, hogy elmélete mélyebb matematikai módszerek alkalmazásán nyugvó pontjainak részletesebb kidolgozása nemcsak a kozmogóniát fogja előbbrevinni, de a matematikát is újabb problémák elé fogja állítani és ezzel annak fejlődését is elő fogja segíteni.

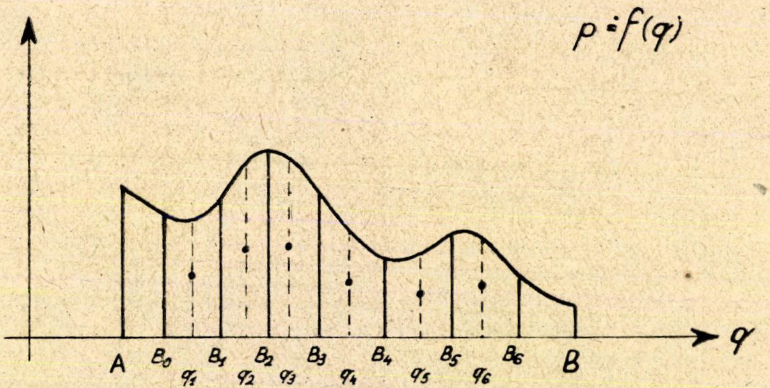
Röviden szeretnék egy matematikai problémára rámutatni, amely a bolygótávolságok törvényének Smidt-féle levezetésével kapcsolatban azonnal szemünkbe tűnik, ha azt közelebbről elemezzük.* Ezt a problémát Smidt könyvének olvasásakor fogalmaztam meg, teljes megoldását eddig nem ismerem. *Smidt* felteszi, hogy a raj a q fajlagos impulzusnyomaték szerint $f(q)$ sűrűségfüggvényű eloszlással bír, és azt írja, hogy „minden egyes eloszlási törvénynek, azaz minden $f(q)$ függvénynek megfelel a bolygótávolságoknak egy törvénye." Ez valóban így is van, amint azt alábbiakban be is fogjuk bizonyítani, azonban ezt a megállapítást ki kell egészíteni azzal a megjegyzéssel, hogy vannak olyan $f(q)$ sűrűségfüggvények, amelyeknek a bolygótávolságoknak nem egy, hanem több különböző törvénye felel meg. *Smidt* felteszi, hogy $f(q) = Cq^{\lambda}$, majd később csak a $\lambda = 0$ esetet vizsgálja, tehát azt, amikor $f(q)$ egy (A, B) intervallumban egy pozitív állan-

* A következők *O. J. Smidt* „Négy előadás a föld keletkezésének elméletéről" c. könyvének (Akadémiai Kiadó 1952) 44—50. oldalain elmondottakhoz kapcsolódnak.

dóval, és azon kívül 0-val egyenlő. Ebben az esetben az (A, B) intervallum és a bolygók száma, N, a bolygótávolságokat egyértelműen meghatározza. A bolygók pályájának (közel) köralakú volta miatt, ha R_n az n-ik bolygó pályasugara és q_n a fajlagos impulzusnyomatéka, fennáll a $q_n = \gamma\sqrt{R_n}$ összefüggés, ahol γ n-től független állandó ($\gamma = K\sqrt{M}$ ahol M a nap tömege és K a gravitáció állandója), tehát az R_n pályasugarakat megkapjuk, ha a q_n fajlagos impulzusnyomatékokat meghatározzuk. Ezekre vonatkozólag *Smidt* szerint fennállnak a

$$q_n = \frac{\int\limits_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} q f(q)\,dq}{\int\limits_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} f(q)\,dq} \qquad (n = 1, 2, \ldots N) \qquad (1)$$

összefüggések, ahol $\beta_0 = \frac{A + q_1}{2}$, $\beta_n = \frac{q_n + q_{n+1}}{2}$ ha $n = 1, 2, \ldots N-1$ és $\beta_N = \frac{q_N + B}{2}$. Az (1) egyenletrendszerből kell a q_n állandókat adott $f(q), A, B$ és N mellett meghatározni.



1. ábra

Geometriailag az (1) összefüggés azt jelenti, hogy ha felrajzoljuk a $p = f(q)$ függvény görbéjét, úgy q_n nem más, mint az ezen görbe, a q-tengely, a $q = \beta_{n-1}$ és $q = \beta_n$ egyenesek által bezárt tartomány súlypontja vetületének koordinátája a q-tengelyen. Az (1) egyenletrendszer felállításánál az egyszerűség kedvéért fel van téve, hogy a rajban a fajlagos impulzusnyomaték korlátos, tehát $f(q) = 0$ ha $q < A$ vagy $B < q$. Ilyen módon a $q_1, q_2, \ldots q_N$ számok a következő feltételeknek kell, hogy eleget tegyenek: *Ha az* (A, B) *intervallumot a* $q_1, q_2, \ldots q_N$ *osztópontokkal* $N+1$ *szakaszra bontjuk, a* q_n *abszcisszájú pontokban* $(n = 1, 2, \ldots N)$ *a q-tengelyre merőleges* e_n *egyeneseket emelünk és a* $\beta_0 = \frac{A + q_1}{2}$, $\beta_n = \frac{q_n + q_{n+1}}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots N-1)$ és $\beta_N = \frac{q_N + B}{2}$ *pontokban meghúzzuk a q-tengelyre merőleges* E_n *egyeneseket*

($n=0, 1, 2, \ldots, N$) *úgy a* $p=f(q)$ *görbe, a q-tengely, valamint az* E_{n-1} *és* E_n *egyenesek által határolt tartomány súlypontja rá kell, hogy essék az* e_n *egyenesre* (lásd az 1. ábrát, amelyen az E_n egyenesek kihúzott vonallal, az e_n egyenesek szaggatott vonallal vannak jelölve, az egyes sávok súlypontjai be vannak karikázva és $N=6$).

Azt állítjuk, hogy legalább egy ilyen tulajdonságú $q_1, q_2, \ldots, q_N$ értékrendszer mindig található. Ez a következőképpen látható be: legyen először $N=1$ és q egy tetszőleges érték az (A, B) intervallumban, $Q=Q(q)$ pedig a $\beta_0=\frac{A+q}{2}$ és $\beta_1=\frac{q+B}{2}$ abszcisszájú pontokban húzott E_0, ill. E_1 egyenesek között és a $p=f(q)$ görbe alatti terület súlypontjának abszcisszája. Könnyen belátható, hogy $Q(q)$ q-nak folytonos függvénye, ha $f(q)$ integrálható és $\int_{\beta_0}^{\beta_1} f(t)dt$ q minden értékére pozitív ($A \leqq q \leqq B$). (Ez a feltétel természetes, hiszen ha ez nem teljesül, úgy $Q(q)$ nincs is definiálva minden q-ra). Mivel nyilvánvalóan $Q(A)>A$ és $Q(B)<B$ vagyis $Q(q)-q$ pozitív, ha $q=A$ és negatív, ha $q=B$ tehát, kell, hogy az (A, B) intervallumban legyen legalább egy olyan q_1 érték, melyre $Q(q_1)-q_1=0$, vagyis $Q(q_1)=q_1$. Ezzel állításunkat $N=1$-re bebizonyítottuk; ebből az állítás minden N-re teljes indukcióval következik; ugyanis tegyük fel, hogy az állítás $(N-1)$-re már be van bizonyítva, ($N \geqq 2$) legyen $q>A$ tetszőleges és alkalmazzuk ezt az állítást az (A, q) intervallumra, úgy tehát találhatók olyan $q_1(q), q_2(q), \ldots, q_{N-1}(q)$ számok, amelyekre fennállnak az

$$\frac{\int_{\beta_{n-1}(q)}^{\beta_n(q)} tf(t)dt}{\int_{\beta_{n-1}(q)}^{\beta_n(q)} f(t)dt}=q_n(q) \tag{2}$$

összefüggések, ahol

$$\beta_0(q)=\frac{A+q_1(q)}{2}, \quad \beta_n(q)=\frac{q_n(q)+q_{n+1}(q)}{2} \quad (n=1, 2, \ldots, N-2)$$

és $\beta_{N-1}(q)=\frac{q_{N-1}(q)+q}{2}$. Legyen továbbá $Q(q)$ a $p=f(q)$ görbe, a q— tengely továbbá a $\beta_{N-1}(q)$ és a $\frac{q+B}{2}$ abszcisszájú pontokban húzott, a q-tengelyre merőleges egyenesek által határolt tartomány súlypontjának abszcisszája. Mivel nyilvánvalóan

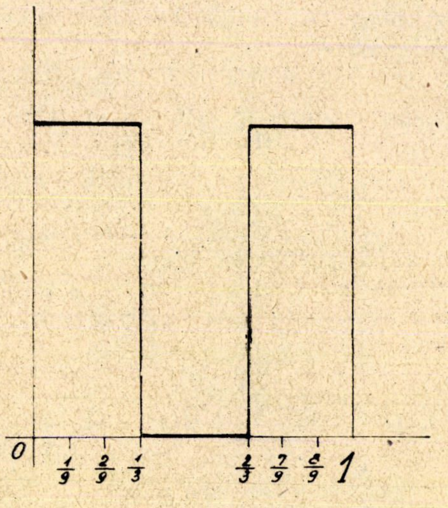
$$\lim_{q \to A} Q(q)>A \quad \text{és} \quad Q(B)<B$$

tehát kell, hogy legyen olyan $q=q_N$ érték, amelyre $Q(q_N)=q_N$ ekkor azonban a $q_1(q_N), q_2(q_N), \ldots, q_{N-1}(q_N)$ és q_N számok eleget tesznek a követelményeinknek. Igy tehát állításunk $N-1$-ről N-re következik, vagyis minden pozitív egész N-re igaz.

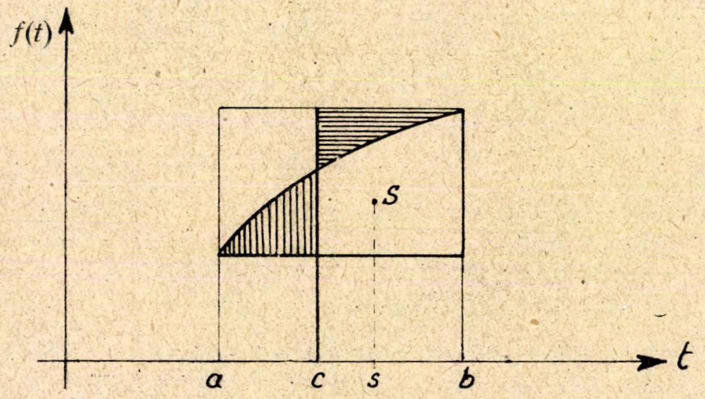
Mutassuk most meg, hogy a q_n ($n=1, 2, \ldots, N$) számok nem minden $f(q)$ mellett vannak egyértelműen meghatározva; legyen $N=1$, $A=0$, $B=1$, legyen továbbá (l. 2. ábra)

$$f(q)=\begin{cases} \frac{3}{2} \text{ ha } 0 \leqq q \leqq \frac{1}{3} \\ 0 \text{ ha } \frac{1}{3} < q < \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \text{ ha } \frac{2}{3} \leqq q \leqq 1, \end{cases}$$

akkor a következő három q_1-érték felel meg a követelményeknek: $q_1 = \frac{1}{2}$,



2. ábra



3. ábra

$q_1=\frac{2}{9}$ és $q_1=\frac{7}{9}$, vagyis három különböző megoldás van. Hogy $q_1=\frac{1}{2}$ megfelel, az szimmetria-okokból nyilvánvaló; ha $q_1=\frac{2}{9}$ úgy $\beta_0=\frac{1}{9}$ és $\beta_1=\frac{11}{18}<\frac{2}{3}$ tehát

$$\frac{\int_{\beta_0}^{\beta_1} tf(t)dt}{\int_{\beta_0}^{\beta_1} f(t)dt}=\frac{\frac{3}{2}\int_{1/9}^{1/3} tdt}{\frac{3}{2}\int_{1/9}^{1/3} dt}=\frac{2}{9}=q_1,$$

vagyis $q_1=\frac{2}{9}$ is kielégíti az (1) feltételt, tehát szimmetria-okokból $q_1=\frac{7}{9}$ is.

Könnyen belátható, hogy ha

$$D(q)=Q(q)-q=\frac{\int_{\frac{A+q}{2}}^{\frac{q+B}{2}} tf(t)dt}{\int_{\frac{A+q}{2}}^{\frac{q+B}{2}} f(t)dt}-q \tag{3}$$

q-nak monoton csökkenő függvénye, ha $A\leq q\leq B$ úgy a $q_1, q_2, \ldots, q_N$ számok egyértelműen meg vannak határozva; ez a feltétel teljesül, ha a és $b>a$ minden értékére fennáll az

$$\int_a^b \frac{f(b)-f(t)}{f(b)-f(a)}\,dt<\frac{\int_a^b (t-a)f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt} \tag{4}$$

egyenlőtlenség, ami teljesül például ha $f(t)=ct^{\alpha}$ ahol $\alpha>0$, továbbá, ha $f(t)$ monoton növekvő és konkáv függvény*. Ezzel szemben van olyan monoton növekvő konvex $f(t)$, amelyre (4) nem teljesül. Ilyen például $a=0$, $b=1$, $f(t)=\frac{t}{2}$, ha $0\leq t<x$ és $f(t)=\frac{x}{2}+\frac{1-\frac{x}{2}}{1-x}(t-x)$ ha $x\leqq t\leqq 1$; $f(t)$ mo-

* *Vincze István* felhívta a figyelmemet arra, hogy a (4) egyenlőtlenség monoton növekvő $f(t)$ esetében a következő alakra hozható:

$$\sigma<b-m \text{ ahol } m=\frac{\int_a^b tdf(t)}{f(b)-f(a)} \text{ az } \frac{f(t)-f(a)}{f(b)-f(a)}\ (a\leqq f\leqq b)$$

eloszlásfüggvényű valószínűségi változó várható értéke, és

$$\sigma^2=\frac{\int_a^b (t-m)^2df(t)}{f(b)-f(a)}$$

ugyanezen változó szórásnégyzete.

noton növekvő és konvex, azonban, ha $2(\sqrt{2}-1)=0,8284\ldots<x<1$ úgy (4) nem teljesül. A (4) egyenlőtlenség geometriailag azt jelenti, hogy ha $f(t)$ monoton növekvő függvény és c az az érték, melyre

$$\int_a^c (f(t)-f(a))dt=\int_c^b (f(b)-f(t))dt,$$

vagyis amelyre a 3. ábrán látható két vonalkázott terület egyenlő, akkor az $y=f(t)$ görbe alatti és a és b közötti tartomány S súlypontjának s abszciszszája nagyobb c-nél.

Megjegyzendő egyébként, hogy c nem más, mint az

$$y'=\frac{f'(t)}{f(b)-f(a)}$$

görbe alatti, a és b közötti terület súlypontjának abszcisszája.

Megoldatlan a következő probléma: mi annak szükséges és elégséges feltétele, az $f(q)$ függvényre nézve, hogy a $q_1, q_2, \ldots, q_N$ számok egyértelműen meg legyenek határozva? Ennek az elemi matematikai kérdésnek a megoldása a bolygótávolságok törvényének kérdése szempontjából az elmondottak alapján nyilvánvaló jelentőséggel bír.

FÖLDES ISTVÁN:

Az elhangzott hozzászólásokból világosan kitűnt, hogy melyek a Smidtelméletnek további diszkussziót kívánó kérdései, melyeknek irányában az elmélet további kifejlesztése várható, azonkívül meggyőződtünk arról, hogy ez a csillagászati oldalról jól megalapozott elmélet a geológia modern megállapításaival is összhangban van.

Detre és *Herczeg* kartársak rámutattak a *Smidt*-elmélettel kapcsolatos következő csillagászati kérdések vizsgálatának fontosságára:

1. Egy meteorrészecske a Nap által való kaptációjánál az egész felhő mennyiben tudja betölteni a kaptációt lehetővé tevő harmadik test szerepét.

2. A kaptált rajban a fajlagos impulzusnyomaték eloszlástörvényét, melyből *Smidt* a bolygótávolságok törvényét levezeti, kívánatos volna nemcsak kozmogóniai következményei által igazolni, hanem ezektől függetlenül, valamely ismert fizikai hatótényezőre való hivatkozással direkt úton is levezetni; egyébként *Rényi* Alfréd lev. tag megvilágította a bolygótávolságok valamely adott törvényével a *Smidt* elmélet értelmében összeegyeztethető összes impulzusnyomatékeloszlások kérdését.

3. A Nap forgástengelyének a bolygók pályasíkjaira való közelítő merőlegessége nem nyert még eddig kielégítő magyarázatot a Smidt-elméletben.

4. Kívánatos volna a dagályevolúció elméletét változó tömegek esetére is kidolgozni.

5. Újra megvizsgálandó a hazai meteoritkészlet a meteoritok korának szempontjából; pontosan ellenőrizendő a jelenleg naponta a Földre hulló meteoritok összes tömegének értéke és tisztázandó a meteoritok és üstökösök eredetének kérdése.

6. Kidolgozandó a planetáris és a sztelláris kozmogónia modern elméleteinek szintézise.

Csada kartárs az elektromágnesesség jelenségei figyelembevételének fontosságára mutatott rá, utalva *Alfvén* elméletére.

Vadász akadémikus hozzászólásából megtudtuk, hogy a tektogenezis jelenségeit előidéző energia valóban a radioaktív anyagok bomlásából származtatható; a radioaktív bomlási folyamatok által termelt energia fölszaporodása időszakonként nagyobb orogenetikus aktivitást vált ki; ilyen módon magyarázatot nyer a hegységképződés szakaszos lefolyásának ténye.

Szádeczky-Kardoss akadémikus megállapította, hogy *Ramsey* földszerkezeti modellje jól harmonizál azzal az állásponttal, hogy a Föld kezdetben nem volt folyékony. A földkéreg szerkezete és az ennek megmagyarázásához feltételezett differenciációs folyamatok (elemmigráció) szintén összeegyeztethetők a bolygók hideg eredetének tényével; a radioaktív anyagok felszínrekerülése is megindokolható ezen az alapon. Végül a kőzetképződés időrendi kérdéseinek beható vizsgálata alapján a Föld hideg, illetve meleg eredetének kérdése közvetlenül eldönthetővé válik.

Egyed kartárs előadta, hogy a Föld kozmikus porból való kialakulása összhangba hozható a rezgéshullámok visszaverődéseiből nyert eredményekkel, valamint a Földnek a hidrosztatikai egyensúly feltételeiből levezethető egyensúlyi konfigurációval megegyező alakjával. Bizonyos nehézségek lépnek azonban fel az óceáni és a szárazföldi anyageloszlások között mutatkozó eltérésekkel, valamint az orogének és a mélyfókuszú földrengések zonális elrendeződésével kapcsolatban.

Faludi kartárs rámutatott arra, hogy a Föld hideg eredete nincs ellentétben az élet keletkezésének Oparin-féle elméletével, ha feltételezzük, hogy bizonyos mennyiségű CN és HN a meteoritrészecskékkel együtt kész állapotban ment át a Föld anyagi állományába.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az ankét eredményes munkát végzett, amennyiben sikerült a Smidt-elmélettel kapcsolatos további kutatások irányait kijelölni és az elmélet egyes lényeges kérdéseit a dialektikus materializmus elveinek megfelelően több oldalról, különféle összefüggéseik tekintetbevételével megvilágítani.

I. G. PETROVSZKIJ: „ELŐADÁSOK A KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK ELMÉLETÉRŐL" CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

Az I. rész az elsőrendű egyváltozós differenciálegyenletekkel foglalkozik. Egyszerű példákon mutatja meg, hogy természettudományi és technikai kérdések sokszor vezethetnek differenciálegyenletekhez. Az elmélet feladata a megoldások keresése, a megoldások adta függvények sajátságainak vizsgálata.

A fejezetek foglalkoznak

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \text{ és a } \frac{dx}{dy}=f(y)$$

alakú legegyszerűbb egyenletekkel, a

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

alakú, illetve ily alakúra hozható, ú. n. szeparabilis egyenletekkel, majd a

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

az ú. n. homogén egyenletekkel és az

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

alakú egyenletekkel. A szerző a legegyszerűbb esettől a mind bonyolultabb eset felé halad a tárgyalás során. Világosan mutatja meg a szélső eseteket is. Pl. a $\frac{dy}{dx}=f(x)$ megoldásairól megmutatja, hogy az $a<x<c$ intervallumban és a $c<x<b$ intervallumban külön-külön egyértelmű, ha az x_0-hoz tartozó y_0 kezdeti érték is meg van adva. Lehetséges azonban, hogy az $x=c$ egyenes érintője valamennyi integrálgörbének.

1. Az esetben, ha az $x=c$-hez asszimptótikusan közelednek az integrálgörbék, akkor azt mondjuk, hogy az $y(x)$ integrálgörbék az egész $a<x<b$ intervallumban egyértelműek.

2. Az esetben, ha az integrálgörbék a végesben érintik az $x=c$ egyenest, akkor a differenciálegyenletnek az $a<x<b$ intervallumban végtelen sok megoldása van.

A könyvben a differenciálegyenletek megoldási elvei között megtaláljuk a változók szétválasztásának elvét, a helyettesítés elvét, az együtthatók összehasonlításának elvét.

Az $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ megoldása könnyű, ha a baloldal teljes differenciál; (ekkor az egyenlet neve „exakt"). Sokszor ilyenné tehető az egyenlet az „integráló tényezővel“ való végig szorzással. Sok fejezet a

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

megoldását tárgyalja.

Feltehető, hogy $f(x, y)$ egy G tartományban van értelmezve, itt az (1) „iránymezőt“ határoz meg. Ez irányok módot adnak integrálvonalak megszerkesztésére. Az „EULER-féle törtvonalakkal“ elég pontos integrálvonalat lehet szerkeszteni.

Adott (x_0, y_0) ponton átmenő integrálgörbe unicitása még nincs biztosítva, ha $f(x, y)$ folytonos a G-ben. *M. A. Lavrentyev* szerkesztett oly (1) típusú differenciálegyenletet, amelynél adott ponton át nem egy, hanem legalább két integrálgörbe megy át, noha az $f(x, y)$ folytonos.

Az (1) egyenlet megoldásának Peano-féle exisztencia bizonyítását mutatja be a könyv. E szerint, ha $f(x, y)$ folytonos G-ben, akkor minden x_0, y_0 pontján legalább egy integrálgörbe megy át. A bizonyításhoz az Euler-féle görbe vonalak oly végtelen sorozatára van szükség, amelyek mindegyike átmegy az adott (x_0, y_0) ponton és amelyek leghosszabb szakasza is a zérushoz tart. A könyv a bizonyításhoz az Arzéla-tételt veszi segítségül. (E tétel szerint: Ha $\{f(x)\}$ függvény-halmaz minden tagja az (a, b)-ben egyenletesen folytonos és korlátos, akkor e halmazból kiválasztható egy végtelen, egyenletesen konvergens sorozat.)

Az (1) egyenlet megoldása unicitásához elegendő feltételt ad az Osgood-féle unicitási tétel. E szerint, ha az $|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqq \varphi(y_2-y_1)$ egyenlőtlenség a tartomány két azonos abszcisszájú, egyébként tetszőleges pontjára fennáll oly $\varphi(u)>0$ esetében, amely $0<u\leqq a$-ban folytonos, továbbá melyre a $\int_\varepsilon^a \frac{du}{\varphi(u)} \to \infty$ míg $\varepsilon \to 0$. Tehát, ha mindezek fennállanak, az (x_0, y_0) ponton az (1) egyenletnek csak egy megoldása mehet át.

Ilyen „$\varphi(u)$“ függvények $K\cdot u$, $Ku \ln u$ stb., ahol K konstans (pl. $\varphi(u)=Ku$ esetben, $|\varphi(y_2)-\varphi(y_1)|=K|y_2-y_1|$ a Lipschitz-feltétel).

Az (1) egyenlettel ekvivalens az

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi$$

integrálegyenlet. A megoldásának egyik módszere a szukcesszív approximáció. Ezen elvnél általánosabb a kontrakciós elv (Tyihonov—Caccioppoli-tétel). Ez a következő:

$\{\varphi\}$ oly függvények halmaza, melyek mindegyike ugyanazon az $\mathfrak{M}$ (tetszőleges) halmazon értelmezett.

1. Mindegyik φ-heź tartozik egy $M_\varphi \geqq |\varphi|$ korlát.

2. A $\{\varphi\}$ halmaz bármely egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye is függvénye a $\{\varphi\}$-nek.

3. A $\{\varphi\}$-re vonatkozóan definiáljunk egy A operatort, úgy, hogy $A(\varphi)$ is a $\{\varphi\}$-hez tartozzék, bármelyik függvény is φ a halmazból.

4. A halmaz bármely két függvénypárjára fennáll az

$$|A(\varphi_2)-A(\varphi_1)|\leqq m \sup|\varphi_2-\varphi_1|,$$

ahol

$$0, \leqq m<1 \quad \text{és} \quad \sup|\varphi_2-\varphi_1| \text{ a } |\varphi_2-\varphi_1|$$

különbségnek az $\mathfrak{M}$ halmazon felvett felső határát jelöli.

Akkor $\varphi=A(\varphi)$-nek a függvényhalmaz elemei között egy és csak egy megoldása van.

Nem érdektelen megjegyezni, hogy a kontrakciós elv más érdekes egyenlet megoldásának ekszisztenciáját is bizonyítja, többek között

1. a $\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$ integrálegyenletét,

2. az $x=f(x)$ egyenlet megoldhatóságáét.

Minden esetben az operator alkalmas választása kell.

A könyv a továbbiakban a $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ megoldásának a kezdeti értéktől való függését tárgyalja, majd a $\frac{dy}{dx}=f(x,y,\mu,\ldots,\mu_n)$ egyenlet megoldásának a paraméterektől való függését mutatja meg.

Az integrálgörbékkel kapcsolatban az esetleges szinguláris pontokról és vonalakról ír a további fejezet; végül a burkológörbék differenciálegyenletével zárja le a szerző az első részt.

A II. rész a közönséges differenciálegyenletrendszerekkel foglalkozik. Tetszőleges rendű rendszert elsőrendű rendszerré lehet redukálni. Ezért elég elsőrendű rendszerrel foglalkozni. A fő tételek megfogalmazása

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,y_2,\ldots y_n)\,; \qquad i=1,2,\ldots n \tag{2}$$

egyenletrendszerhez fűződik.

A Peano-féle exisztencia tétel, az Arzéla-tétel, az Osgood-féle unicitási tétel a (2) egyenletrendszerhez módosul.

Itt érvényes az operatoregyenletrendszerekre érvényes kontrakciós elv. A könyvben ezután a lineáris rendszerek elméletét találjuk, elsősorban a homogén rendszerekét.

Ha a megoldásokból alkotott determináns (a Wronszky-determináns) nem zérus, e megoldások alaprendszert alkotnak. (A Wronszky-determinánsokra érvényes Liouville-tételt is bizonyítja az egyik fejezet.)

A magasabb rendű egyenlet példaként van említve mint, amely elsőrendű egyenletrendszerre redukálható.

A lineáris inhomogén rendszer megoldásához partikuláris megoldásra van szükségünk. Az általános megoldás a rendszerhez tartozó homogén differenciálegyenlet rendszer általános megoldása és az inhomogén rendszer egy partikuláris megoldásának összege.

A homogén rendszer megoldása után az inhomogén egy partikuláris megoldása az állandók variálásának az elvével nyerhető el.

Az állandó együtthatós, homogén, elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet-rendszer legcélszerűbb transzformációja a kanonikus alakot kialakító. Ez a transzformáció a szekuláris egyenlet gyökeivel lehetséges és az indukció segítségével megy végbe. Ki kell hangsúlyozni, hogy a menetközben alkalmazott transzformációk a szekuláris egyenlet gyökeit nem változtatták.

Az „elemi osztók" vizsgálatával képet nyerünk a differenciálegyenletrendszer megoldásáról. (Az n-ed rendű homogén egyenlet megoldása az eddigiek alkalmazása. Az inhomogén egyenlet az állandók variálásával sikerül.)

A függelék még elsőrendű parciális differenciálegyenletekkel foglalkozik ezek között a lineár, majdnem-lineár, kvázi-lineár differenciálegyenletekkel. Ezekkel főleg azért, hogy megmutassa, hogy ezek megoldásai miként vezethetők vissza a közönséges differenciálegyenletek integrálási feladataira.

Seres Iván

ENGELBERT BRODA: „A RADIOKÉMIA ÚJABB EREDMÉNYEI" CÍMŰ KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

Engelbert Broda, haladó szellemű osztrák radiokémikus új könyvében az 1936 óta elért eredményeket foglalja össze és bő világirodalmi utalásokat szolgáltat minden eredményről és minden fejezetről. A könyv vázlata 1946-ban készült el, mikor a szerző Edinbourghban volt, mint ösztöndíjas, a nyers kézirat pedig 1949 decemberében.

A szerző az alapfogalmak magyarázatával nem foglalkozik, ezek ismeretét feltételezi.

A radiokémia fogalmának megmagyarázása után (olyan elemek kémiája, melyek magsugárzásaik révén mutathatók ki) az izotópok közelegyenlőségét tárgyalja a mű. A radioelemek némely fizikai-kémiai jellemzője közül az oldhatósági szorzatokról közöl adatokat, valamint a radioelemek nem specifikus adszorpciójának jelenségét és ennek feltételeit tárgyalja kimerítően. Ennek segítségével u. i. kémiailag hasonló ionok is elválaszthatók egymástól. A specifikus adszorpció megvalósításához jó hordozó szükséges, mely a nyomelemmel hasonló kémiai tulajdonságú. A hordozóhatás alapja: a specifikus adszorpció, vagy az elegykristályképződés. Tárgyalja mindegyik előfordulásának feltételeit és a kettő egymástól való megkülönböztetésére alkalmas módszereket. Ezzel szemben nyomennyiségben adszorpció nélkül is különíthetünk el anyagokat, ezek az ú. n. radiokolloidok. Felsorolja ezen anyagok tulajdonságait és keletkezésük feltételeit.

Radioelemek szilárd — vagy folyadékfázisban szükséges feldúsítására alkalmas eljárás a frakcionált lecsapás és kristályosítás. Az eredmény függ a komponensek két fázis közti megoszlásától. (Berthelot - Nernst-féle megoszlási szabály.) Ugyanezt az eredményt találták oldószerek közti megoszlásra is. A szerző mindegyik jelenségre számos példát sorol fel.

Megtudhatjuk a továbbiakban, hogy a gázokban lévő nyommennyiségek kinyerését alacsony ill. magas hőmérsékleten történő párologtatás útján valósítják meg, (tulajdonképpen desztillációnak tekinthető), az így nyert aktív lerakások csomókba tömörülnek.

Radioelemek előállítása elektromos leválasztással is történhet. A szerző számos példát sorol fel az áramnélküli (rövidrezárt helyi oldékonysági galvánelem) és elektrolízissel történő leválasztásra, majd pedig elméletileg magyarázza a leválasztásnál megfigyelt jelenségeket. (Törés nélküli I—V-görbe, polarizáció, stb.)

Radioelemek magszintézissel való előállításának megismerése előtt megtudhatjuk, hogy mit jelent egy magreakció hatáskeresztmetszete, melyek a leghatásosabb magátalakító részecskék (deuteron), mit értünk átmeneti mag alatt és mi a különbség a szóródás és magátalakulás közt, valamint azt, hogy a gerjesztés nagyságától hogyan függ a kibocsátott részecske fajtája.

A következő fejezetekben kimerítően tárgyalja a szerző a neutronok jelentőségét a radiokémiában, előállításukkal kapcsolatban a természetes és mesterséges neutronforrásokat és hatásfokukat, hatékonyságukkal kapcsolatban pedig a neutronok lelassításának módjait, lassú neutronok tulajdonságait, valamint a hőneutronok hatáskeresztmetszeteit és sűrűségi eloszlását.

Ezután a maghasadás fajtáiról, a hasadáshoz szükséges energiáról kapunk felvilágosítást, és a hasadás módjának fizikai és kémiai bizonyítékait sorolja fel a szerző. A láncreakciókban gyártott radioelemek fajtáit és tulajdonságait szintén megismerhetjük.

A különleges érdekességű új radioelemeknek külön fejezetet szentel E. Broda, így a $(4n+1)$-es rádióaktív sorozatról, a Np. Pu, Am, Cu előállításáról és magtulajdonságáról, a transzurán elemek kémiai tulajdonságairól, a 43, 61, 85, 87-es elemekről, a radiohidrogénről és radioszénről közöl érdekes adatokat.

Megmagyarázza továbbá a különleges radiokémiai hatások fogalmát és összefüggést közöl a visszalökött magok energiája és tömege között. A visszalökött magok összegyüjtésének megfelelő módja gyors, hatékony és tiszta vékony hártyákat szolgáltat, a csoportos visszaverődés viszont komoly szennyeződéseket okoz.

Kimerítően ismerteti a Szilárd—Chalmers-hatást és ennek gyakorlati hasznát. (Nagy fajlagos aktivitások elérése, magizomérek elkülönítése, kis neutronsűrűségek kimutatása, radioelemeket tartalmazó kémiai vegyületek gyors, közvetlen szintézise.)

A könyv utolsó fejezete avval a hatalmas fejlődéssel foglalkozik, amelyet a radiokémiai mérési technikában az utolsó években elértek. Ionizációs kamrák, elektroszkópok, Geiger-számlálók alkalmazási területeit és feltételeit sorolja fel és felhívja a figyelmet a vastagsági korrekciók számításbavételének szükségességére.

A legújabb, legegyszerűbb és legtöbbet igérő kutatási mód a fotóemulziókkal történő vizsgálat.

A radiokémiában aktivitások felismerésére és kimutatására tömegspektrográfot is használnak, ez főleg analitikai jelentőségű.

Befejezésül a radioelemek ultramikrokémiájával foglalkozik a könyv és leirja az ilyenfajta vizsgálatokhoz szükséges precíziós felszereléseket.

Broda könyve a fejezetek végén összesen közel ezer irodalmi utalást közöl, ezeken kívül a szöveg közben is számos példát és utalást találhatunk, továbbá 16 táblázat foglalja össze az utolsó évek érdekesebb eredményeit.

Béressné Triznyai Mária

J. SZ. UMANSZKIJ, B. H. FINKELSTEIN ÉS M. E. BLANTER: „A METALLOGRÁFIA FIZIKAI ALAPJAI" C. KÖNYVÉNEK ISMERTETÉSE

A metallográfiának egyik legfőbb feladata, hogy megmagyarázza az ötvözetek szerkezetét és a bennük végbemenő változásokat és felderítse ezeknek a folyamatoknak a fizikai okait. Metallográfusok és fizikusok együttes fáradozásai a feladat megoldásában komoly sikerekre vezettek. Ha ma még nincs is birtokunkban az ötvözetek *szerkezetének* és a bennük végbemenő folyamatoknak pontos, *kvantitatív* elmélete, mégis igen sok *jelenség fizikai okát* lényegében véve ismerjük és vannak olyan elméleteink, melyeknek segítségével módunkban áll helyesen tájékozódni az ötvözetek *szerkezetére* és tulajdonságaira vonatkozó kérdésekben. Számos, a gyakorlati életben is sikeresen alkalmazott elgondolás mutatja, hogy a fizikai metallográfia bizonyos fokú érettséget ért el, mely egy nagy átfogó könyv megírását teszi indokolttá. Ezt a feladatot oldották meg *J. Sz. Umanszkij, B. N. Finkelstein* és *M. E. Blanter.* A könyv legnagyobb részének megírását *J. Sz. Umanszkij* végezte el; *B. N. Finkelstein* munkája az I. fejezet, a III. fejezet 5. része és a függelék; *M. E. Blanteré* a VIII. fejezet 3. és 4. része.

Az ismertetendő könyv a Szovjetunióban tankönyv azon főiskolák számára, ahol a metallográfia fizikai alapjairól szóló előadások tartása vált szükségessé. De magas színvonalával és tudományos tárgyalásmódjával jelentős segítséget nyújt a fizikus és metallográfus kutatóknak azáltal, hogy ezen határterületen fekvő tudomány problémáit kimerítő részletességgel tárgyalja. A szerzők azt tűzik ki célul, hogy a metallográfiának két fizikai kérdésével ismertessék meg az olvasót: a fázisok szerkezetének tanával és a fázisok kialakulásának elméletével. Ez a megszorítás a könyvnek feltétlenül javára válik, mert a figyelmet az előadandó anyagnak mélyreható és minden oldalról való átfogására összpontosítja.

Szovjet szerzők részére ez az anyag rendkívül hálás. A fizikai metallográfiának már az alapjait is a nagy orosz metallográfus, *D. K. Csernov* vetette meg. Szovjet időkből való: *A. F. Joffé*nak a Laue-féle foltok „aszterizmus"-ának jelenségéről való igen fontos felfedezése, *G. B. Konobejevszkij* a túltelített szilárd oldatok szétesésére vonatkozó munkái, *G. V. Kurdjumov*nak a diffuziómentes átalakulásokra vonatkozó munkái, melyek a martensit-átalakulások elméletének kiépítésére és a fémek fizikájára rendkívül fontos eme folyamatok új sajátságainak felismerésére vezettek; *V. J. Danilov* munkái a megolvasztott fémek szerkezetéről *J. Sz. Umanszkij* és mások munkái; *J. I. Frenkel* és *L. D. Landau* szovjet elméleti kutatók a szilárd és folyékony testekben végbemenő diffúziós folyamatokra, a fémek struktúrájára, a fázisokra, stb. dolgoztak ki elméletet.

A könyv nagy nyereség a magyar tudományos irodalom számára is, mert megismerhetjük belőle ezt a szovjet fizikusok és metallográfusok által oly nagy intenzitással művelt területet, melynek fontosságát fejlődő nehéziparunk szempontjából nem kell túlságosan hangsúlyoznunk, úgy is nyilvánvaló.

Vegyük szemügyre röviden a könyv tartalmát:

Az első fejezet a kémiai kötés és a fémes kötés elméletének elemeivel ismerteti meg az olvasót és a molekulák és fémek elektronszerkezetébe nyújt mélyebb bepillantást. A kémiai kötések közül a szilárd testek elméletének szempontjából legfontosabb homopoláris kötéssel foglalkozik részletesebben és letárgyalja a H_2^+-molekulaion, H_2-molekula kötését és rámutat a kicserélődési energia fontos szerepére a kémiai kötés létrehozásában. Az anyag fémes állapotával foglalkozó részben, a kísérleti alapok részletes ismertetése után, a fémekben lévő szabad elektrongáz sajátságait vizsgálja meg és egy analitikusan keresztülszámolható egydimenziós modell segítségével a fémekben lévő elektronok energiaspektrumának sávos szerkezetére mutat rá. Ezen ú. n. Brillouin-zónák segítségével osztályozva a szilárd testeket az ötvözetek és az átmeneti fémek elektronszerkezetét ismerteti. Az alig 33 oldalas fejezetben meglepő könnyedséggel eljut odáig, hogy az olvasó a szilárd testek elektronszerkezetéről világos kvalitatív képet alakíthat ki magának.

A második fejezetben a kovalens kristályok elektronszerkezetével foglalkozva megmutatja, hogy fő jellegzetességük a lokalizált kötésekben és ezt az elektronszerkezetben képviselő elektronhidakban nyilvánul meg. A fémes elemeknél ezzel szemben a kötések nem lokalizálhatók, az elektroneloszlás az atommagok közvetlen környezetétől eltekintve jó közelítéssel egyenletesnek vehető. A fejezetben részletesen táblázatban adják meg a szerzők a fémek és néhány az ötvözetek szempontjából fontos nemfém kristályszerkezetére vonatkozó jellemző adatokat.

A harmadik fejezetben először a szilárd oldatok típusait ismerteti a könyv, s rámutat arra, hogy egyes szilárd oldatok kialakulásakor az eredeti rács milyen mértékben deformálódik. Részletes termodinamikai vizsgálat tárgyává teszi a fémek kölcsönös oldhatóságára vonatkozó tényeket s rámutat azokra a feltételekre, amik a korlátlan, illetőleg korlátolt oldhatóság eseteit megszabják. Ebből a szempontból különös figyelmet szentel a deformációs energiának, aminek a számításbavételével lehetővé válik két fázis határterületeinek a meghatározása. Az egyes rácstípusokkal kapcsolatos szuperstruktúrák bőséges ismertetése után a rendeződési folyamatok termodinamikájáról ad részletes diszkussziót és rámutat a szilárd oldatok és folyadékok elméletének szempontjából olyan fontos közeli és távoli rendezettség fogalmára.

A negyedik fejezet a fémötvözetekben lévő átmeneti fázisokkal foglalkozik. Itt kerül szó az ú. n. *elektronvegyületekről,* vagyis olyan *fázisokról,* amikre az elektronkoncentráció meghatározott értéke jellemző. Az elektronvegyületek általános jellemzése után a szerző kifejti és példákkal részletesen szemlélteti az elektronvegyületek kvantumelméletének alapgondolatát, amit a Brillouin-zónák alapján lehet kifejteni. A nikkelarzenid rácsú és $MgCu_2$, $MgZn_2$ és $MgNi_2$ szerkezetű fázisok ismertetése után a térkitöltési fázisok tárgyalására tér rá.

Az ötödik fejezetben a fémekben végbemenő diffúziót veszi szemügyre. A fejezet elején a diffúziónak az alaptörvényeit vezeti le, majd a szilárd testekben végbemenő diffúzió mechanizmusát ismerteti, amelynek elméletét *Frenkel* dolgozta ki. Ennek lényege az, hogy a kristályrács, egyik pontjából részecskék mennek át a másikba, részint helycsere, részint pedig a rácspontok között lévő üres helyekbe való kerülés, ú. n. disszociáció következményeképpen és azután ezek a rácsközökbe disszociált ionok és az üres rácspontok ú. n. lyukak, diffúziós mozgással terjednek. Kísérleti adatok alapján bebizonyítást nyert, hogy a fellazítási munka lényegében a diffundáló anyag természetétől függ éspedig értéke annál kisebb, minél jobban különböznek az oldott anyag atomjai a diffundáló elem atomjaitól. Ennek oka pedig a potenciáltereknek az atomok különbözősége miatti eltorzulásában keresendő. Részletes vizsgálat alá veszi a könyv a diffúziót befolyásoló tényezőket, különösen részletesen kitér a határréteg, a felületi diffúzió és a szemcsenagyságnak a diffúzió együtthatóra gyakorolt hatására. Diffúzió folyamán gyakran fellépnek fázisátalakulások és kémiai reakciók, a könyv ezekről is elég részletesen megemlékezik.

A hatodik fejezet a folyadékfázisból történő kristályosodással foglalkozik. A fejezet elején fogalmat kapunk a megolvasztott fémek szerkezetéről, mint „elmosódott" kristályszerkezetről; jellegzetes erre, hogy a távoli rend nincs meg, de a közeli rendezettség fennáll. Azután a kristályosodási folyamatok kinetikáját jellemző alapparaméterekről beszél és az új fázis kialakulásának feltételeit diszkutálja. Igen fontos a fejezetnek az a része, ahol a meglévő határfelületeknek a fázisképződésre való hatását fejtegeti és rámutat, arra hogy anizotróp alapon való kristályosodáskor az alapra ránövő kristályok mindig úgy indulnak, hogy a két kristályszerkezet között a lehető legjobb megegyezés álljon fenn. Ezen követelmény kielégítése céljából a ránövő kristály egy igen vékony rétege gyakran jelentős deformációkat is szenved. A kristálynövekedés és termodinamikájának egyszerű, de részletes ismertetése módot nyújt a szerzőnek arra, hogy igen sok a kristályosodással kapcsolatos kérdésre magyarázatot találjon.

A hetedik fejezetben a szilárd fázisban való átalakulások megvizsgálása következik. Itt vannak leírva az ólom allotrópikus átalakulásának törvényszerűségei, amelyek alaposan tanulmányozhatók az átalakulás kicsiny sebessége miatt. E fejezetnek nagyobbik része a martensit-átalakulással foglalkozik, aminek során a főfigyelem *G. Kurdjumov*nak és iskolájának munkái felé irányul. Miközben előadja a *diffúziómentes* átalakulásoknak *G. Kurdjumov*tól nyújtott elméletét, a szerző elidőzik azoknál a fontos kísérleteknél, amik alapvetésül szolgáltak és amik igazolták jóslatait a rugalmas martensit-átalakulásra vonatkozóan. Az előadás jellegét illetőleg a hetedik fejezet egyike a legjobbaknak.

A nyolcadik fejezetben a *diffúziós típusú* átalakulásokról van szó. Ebben részletes vizsgálat alá kerülnek a túltelített szilárd oldatok szétesésének alapvető törvényszerűségei, az öregedésnél beálló visszaalakulás jelensége, a kristályrács alakváltozásának és nem tökéletes voltának befolyása. Ebben a fejezetben különös figyelem irányul *Konobejevszkij* munkáira, ő adott következetes fogalmakat a túltelített szilárd oldatok mechanizmusáról és a szétesés folyamatainak a törvényszerűségeiről; a az öregedésnél fellépő visszaalakulás jelenségéről és ő állapította meg annak a feszültségnek, ami a szétesésnél fellép a szétesés folyamatára való autokatalitikus befolyását. Csakhogy *Konobejevszkij* elméletének alaptételei egyáltalában nincsenek tökéletesen kifejtve és ez hátrányosan nyilvánul meg az elmélet következtetéseinek és a kísérleti adatok értelmezésének megítélésében. További vizsgálat alá kerül még ebben a fejezetben a megkeményedett martensit keletkezése, főként *G. Kurdjumov* iskolájának munkái alapján, az acélnak melegedésénél beálló átalakulása, az acélban fellépő perlitátalakulás.

A könyv végén kaptak helyet:

1. a statisztikai fizika elemei, 2. az atomszerkezet elméletének elemei, 3. a szilárd testek fajhőjét érintő kvantum-elméletnek az alaptételei, 4. a túltelített gőzből való cseppképződés folyamatának molekuláris-kinetikai elemzése c. függelékek. A könyv a Szovjetunió egyes főiskoláin tankönyv és éppen ezért feltétlenül szükséges, hogy a hallgatókat, akik egyébként a megfelelő atomfizikai alapokkal nem rendelkeznek, még ezekbe is bevezesse. A fent felsorolt függelékek ezt a bevezetést igen részletesen és érdekesen adják meg és alkalmasak arra, hogy a könyv lelkiismeretes és gondos tanulmányozását előkészítsék.

Általában azt mondhatjuk, hogy ezt a könyvet a mérnökök és a fizikusok egyforma haszonnal forgathatják. A mérnök megkapja azokat a fizikai alapokat, amelyek a munkája közben előforduló metallográfiai problémák kidolgozásához értékes segítséget nyújthatnak, a fizikusokat pedig abban fogja a könyv segíteni, hogy a gyakorlat számára fontos, de az ő tudományukkal csak rokon tudomány problémáit a fizikus szemszögéből nézhessék.

Gáspár Rezső

BESZÁMOLÓ AZ OSZTÁLY FELOLVASÓ ÜLÉSEIRŐL

Ezentúl minden félévben közöljük a megtartott felolvasó ülések anyagát. A felolvasó üléseken bemutatott, de az Osztályközleményekben meg nem jelenő dolgozatok kivonatát is közöljük. Ezért ez úton is kérjük a szerzőket, szíveskedjenek dolgozatuk kivonatát a III. Osztály Közleményei címére (Bp. V., Nádor-utca 12.) beküldeni.

1953. január hó 5-én

1. *Egerváry Jenő* r. tag: Hővezetési feladatok megoldása az időtől lineárisan függő kerületi feltételek mellett.
   Egerváry Jenő r. tag: Komplex koordináták alkalmazása a síkbeli háromtest-problémában.
   Egerváry Jenő r. tag: Matrix-függvények kanonikus előállításáról.
2. *Selényi Pál* lev. tag: Fejezetek a technikai szelénegyenirányító fizikájából I. (Formálás, hajlítási hatás és anomális zörgés.)
3. *Jordan Károly* lev. tag bemutatja *Aujeszky László:* „Kapcsolat a függőleges légoszlop hőenergiája és geopotenciális energiája között" c. dolgozatát.
4. *Szőkefalvi-Nagy Gyula* r. tag: „Teljesen valós racionális függvény nem valós értékeiről" című dolgozatát megbízásból bemutatja az osztálytitkár.
5. *Rényi Alfréd* lev. tag bemutatja *Takács Lajos:* „Poisson-folyamat által származtatott történés-folyamatokról" című dolgozatát.

1953. február hó 2-án

1. *Gombás Pál* r. tag bemutatja *Gombás Pál, Gáspár Rezső* és *Kónya Albert:* „A HJ molekula kötésének elméletéről" című dolgozatát.
2. *Rényi Alfréd* lev. tag: Markov-folyamatok ergodicitásáról.
3. *Szőkefalvi-Nagy Béla* lev. tag: Önadjungált operátorokra vonatkozó momentumproblémáról.
4. *Alexits György* r. tag bemutatja *Freud Géza:* „Ortogonális polinomsorok abszolút konvergenciájáról" című dolgozatát.
5. *Hajós György* lev. tag bemutatja *Szász Pál:* „A hiperbolikus trigonometria új előállítása a paraszféra segítségével", „A hiper-

bolikus trigonometria közvetlen előállítása a tér segítségével" és „A hiperbolikus trigonometria új síkbeli előállítása a klasszikus segédeszközökkel" című dolgozatait.

6. *Turán Pál* lev. tag bemutatja *Rényi Alfréd* és *Turán Pál:* „A D. Bernoulli—Lobacsevszkij—Graeffe-féle gyökmegközelítő módszerről", K. *Zarankiewicz:* „On a problem of P. Turán", *Szüsz Péter:* „Az egyenletes eloszlás elméletéről" és *Freud Géza:* „Egy Tauber-típusú tételről II." című dolgozatait.

1953. március hó 2-án

1. *Rédei László* lev. tag: Teljes ideálgyűrűkről.
2. *Egerváry Jenő* r. tag bemutatja *Fenyő István:* „A magasabbrendű gömbfelületi függvényekre vonatkozó integrálegyenletről" és *Rózsa Pál:* „Korpuszkuláris húrmodell vizsgálata a matrix-kalkulus felhasználásával" című dolgozatait.
3. *Novobátzky Károly* r. tag bemutatja *Marx György:* „Atommagok dilatációs rezgései" című dolgozatát.
4. *Rédei László* lev. tag bemutatja *Kertész Andor:* „Abel-féle p-csoportok felbontása ciklikus csoportok direkt összegére", *Fuchs László:* „Ciklikus csoportok direkt összege", *Kertész Andor:* „Teljesen reducibilis Abel-féle torziócsoportok" és *Fuchs László* és *Szele Tibor:* „Félig egyszerű gyűrűkről" című dolgozatait.

1953. április hó 6-án

1. *Rédei László* lev. tag: Feltételes Artin-féle szimbólum alkalmazással az osztálytestelméletben.
2. *Rédei László* lev. tag: Másodfokú számtestek és a Pell-féle egyenlet elmélete.
3. *Alexits György* r. tag bemutatja *Králik Dezső:* „Megjegyzések univerzális terekre vonatkozóan" és Freud Géza: „A Lagrange-féle interpoláció Lebesgue-függvényeiről" című dolgozatait.
4. *Hajós György* lev. tag bemutatja *Fejes-Tóth László:* „A hiperbolikus sík kitöltése körökkel" című dolgozatát.
5. *Rédei László* lev. tag bemutatja *Szász Gábor:* „Az asszociativitásfeltételek függetlensége" című dolgozatát.

6. *Rényi Alfréd* lev. tag bemutatja *Mikolás Miklós*: „A-függvény és a trigonometrikus függvények kapcsolatáról" és W. *Krysicki* (Lódz): „Egy magasabbrendű tagokra vonatkozó határértéktétel a Bayes-féle problémával kapcsolatban" című dolgozatait.
7. *Kovács István* lev. tag bemutatja *Deézsi Irén, Koczkás Edit* és *Mátrai Tibor:* „A SrO néhány kék sávjának rotációs analízise" című dolgozatát.

1953. május 24-én

1. *Alexits György* r. tag: A függvények szerkezeti tulajdonságainak összefüggése Fourier-soraik majdnem mindenütt való konvergenciájával.
2. *Novobátzky Károly* r. tag bemutatja *Marx György:* „Az elektromágneses tér mozgó anizotrop közegekben" című dolgozatát.
3. *Novobátzky Károly* r. tag bemutatja *Szamosi Géza:* „Nukleonok közötti spin-pálya kölcsönhatás", *Horváth János:* „Az elektromágneses tér geometriai elméletéről" és „Újabb felsődifferenciálgeometriai módszerek a térelméletben", *Román Pál:* „A vákuumpolarizáció néhány hatásának szemléletes tárgyalása", *Marx György:* „Elemi részek kölcsönhatása és a megmaradási tételek" és *Nagy Károly:* „Az utolsó neutron kötési energiájának kiszámítása" című dolgozatait.
4. *Rényi Alfréd* lev. tag bemutatja *Aczél János:* Láncreakciók generátorfüggvényei függvényegyenletrendszerének megoldása", *Hosszú Miklós:* „A disztributivitás függvényegyenletéről", *Szüsz Péter:* „A diophantikus approximáció elméletének egy kérdéséről", *Takács Lajos:* „Várakozási idő" — problémák tárgyalása Markov-folyamatok segítségével" és *Targonszky I. György:* „Egy iterációs eljárásról" című dolgozatait.

1953. június hó 8-án

1. *Rényi Alfréd* lev. tag bemutatja *Takács Lajos:* „Bizonyos fizikai regisztráló berendezésekkel kapcsolatos sztochasztikus folyamatokról" és „Poisson-folyamat által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatra vonatkozó tételéről" című dolgozatait.
2. *Turán Pál* lev. tag bemutatja *Freud Géza:* „Erdős P. és Turán P. egy tételéről" című dolgozatát.

3. *Novobátzky Károly* r. tag bemutatja N. S. *Kalitzin* (Stalin, Bulgária): Über eine neue Kerntheorie" című dolgozatát.
4. *Gyulai Zoltán* lev. tag bemutatja *Nagy János:* „Mg (a, n) Si atommagfolyamatok gerjesztési függvényeinek vizsgálata" című dolgozatát.
5. *Rényi Alfréd* lev. tag bemutatja *Pál Lénárd:* Egy nem-Markov típusú sztochasztikus folyamatról" és „Néhány megjegyzés véletlen koincidenciák számításával kapcsolatban" című dolgozatait.

Ára: 33·— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

KÖNYVISMERTETÉSEK

Technikai szerkesztő: Erdős Lajosné

A kiadásért felelős: Mestyán János. Műszaki felelős: Tóth Ferenc.

A kézirat beérkezett: 1953. VII. 21. — Példányszám: 600. — Terjedelem: $17^1/_2$ (A/5) ív, 20 ábra.

Csongrádmegyei Nyomdaipari Vállalat, Szeged. 531377 Felelős vezető: Vincze György