

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

I. KÖTET

1-4. FÜZET



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1951

Akadémiai Kiadó (Budapest, V, Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestván János

Délmagyarország Nyomda, Szeged 514914

Felelős vezető: Priskin Sándor

TARTALOMJEGYZÉK

	Oldal
ELŐADÁSOK A MODERN FIZIKA KÖRÉBŐL	
<i>Jánossy Lajos</i> : A kiterjedt léghizapороk jelenlegi problémái	3
<i>Gyulai Zoltán</i> : Kristálynövekedés és határréteg	10
<i>Szigeti György</i> : Lumineszkálás elméletére vonatkozó újabb kutatások	30
<i>Nagy Elemér</i> : A lumineszkálási jelenségek vizsgálatánál alkalmazott új berendezések	47
<i>Gombás Pál</i> : Az alkáli fémek állapotegyenletéről	54
<i>Szalay Sándor és Földvári Aladár</i> : Kőzetek radiológiai vizsgálata	60
<i>Neugebauer Tibor</i> : Új összefüggés a gravitáció és mágnesség között	73
<i>Kónya Albert</i> : A Compton-sáv profiljának elméleti meghatározása	89
<i>Fényes Imre</i> : Az irreverzibilis termodinamikai folyamatok kvantitatív leírása	94
ELŐADÁSOK AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKA KÖRÉBŐL	
<i>Egerváry Jenő</i> : A matematika gyakorlati alkalmazásai különös tekintettel a technika differenciálegyenleteire	101
<i>Vincze István</i> : A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének feladatairól	116
<i>Fenyő István</i> : Az integrálegyenletek egy osztályáról és annak gyakorlati alkalmazásáról	120
<i>Aczél János</i> : Függvényegyenletek az alkalmazott matematikában	131
<i>Pál Sándor</i> : Ellenáramú diffúziós rendszerek	143
MATEMATIKAI MÓDSZEREK A FIZIKÁBAN	
<i>Infeld Leopold</i> : A mozgás problémája	164
<i>Novobátzky Károly</i> : A variációszámítás és tenzorkalkulus fizikai alkalmazásai	168
<i>Budó Ágoston</i> : Matematikai módszerek a molekula-fizika egyes területein	173
<i>Kovács István</i> : Harmadfokú szekuláris egyenletek közelítő megoldásának fizikai alkalmazásai	181
<i>Varga Ottó</i> : Az integrálegeometria alkalmazása a geometriai optikában	192
VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS ALKALMAZÁSAI	
<i>Rényi Alfréd</i> : A Poisson-eloszlás problémaköréről	202
<i>Jánossy Lajos</i> : A kaszkádfolyamatok egy statisztikai problémájáról	213
<i>Jordan Károly</i> : Következtetések statisztikai észlelésekből	218
<i>Takács Lajos</i> : Gépegyüttállások valószínűségi számításai tárgyalása tekintettel a várakozási időkre	228
<i>Földes István</i> : A valószínűségi számítás alkalmazásai a csillagászatban	235
<i>Székelty Gábor</i> : A költörés valószínűségi számításai tárgyalásához	245
SZÁMOLÓGÉPEK ÉS KÖZELÍTŐ SZÁMOLÁSI ELJÁRÁSOK	
<i>Tarján Rezső</i> : Elektronikus számológépek	249
<i>Náray Zsolt</i> : Közvetlen és közvetett analógiarendszerek	266
<i>Hajós György</i> : A nomográfia alkalmazhatóságának határaitól	268
<i>Alexits György</i> : Az elméleti fizika és technika sorfejtései által elérhető megközelítések nagyságrendjéről	274
<i>Turán Pál</i> : Magasabbfokú algebrai egyenletek közelítő megoldásáról	279
<i>Szőkefalvi-Nagy Béla</i> : Sajátérték-feladatok perturbációszámítása	288

Az Osztályközlemények feladatairól	297
----------------------------------------------	-----

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

<i>Egerváry Jenő és Turán Pál</i> : A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiről	303
<i>Jánossy Lajos, Rényi Alfréd és Aczél János</i> : Összetett Poisson eloszlásokról I.	315
<i>Rényi Alfréd</i> : Összetett Poisson eloszlásokról II.	329
<i>Jánossy Lajos</i> : A Laplace-transzformáció általánosítása a valószínűségszámításban	343
<i>Rényi Alfréd</i> : A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról	351
<i>Jánossy Lajos</i> : Egy az elektronsokszorozó elméletében fellépő sztochasztikus folyamatról	357
<i>Rényi Alfréd és Turán Pál</i> : Két bizonyítás Jánossy Lajos egy tételére	369
<i>Takács Lajos</i> : Bekövetkezési és koincidencia jelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén	371

AZ AKADÉMIAI INTÉZETEK MUNKÁJÁRÓL

<i>Vincze István</i> : A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének működéséről	387
<i>Detre László</i> : A Magyar Tudományos Akadémia Csillagvizsgáló Intézetének munkájáról	393

EGYÉB KÖZLEMÉNYEK

<i>Szamosi Géza</i> : Az első Magyar Fizikus Vándorgyűlés	397
A Természettudományi Társulat Csillagászati Múzeumának megnyitása	401

KÖNYVISMERTETÉSEK

Beszámoló a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának 1951. évi könyvkiadási tervének végrehajtásáról	403
<i>Szentmártony Tibor</i> : B. V. Gnyegyenko és A. N. Kolmogorov „Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai“ című könyvéről	409
<i>Fenyő István</i> : L. I. Gutenmaher „Elektromos modellek“ című könyvéről	417

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI
OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

I. KÖTET I. SZÁM

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

ALEXITS GYÖRGY, GYULAI ZOLTÁN,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, TURÁN PÁL

SZERKESZTI:

RÉNYI ALFRÉD

ÜNNEPI SZÁM A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
FENNÁLLÁSÁNAK 125. ÉVFORDULÓJA ALKALMÁBÓL



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1951

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
ALEXITS GYÖRGY, GYULAI ZOLTÁN, NOVOBÁTZKY KÁROLY, TURÁN PÁL

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

I. kötet. 1. szám

Szerkesztőség Budapest V, Géza-útca 2.
Kiadóhivatal: Budapest VI, Sztálin-út 31.

A Magyar Tudományos Akadémia III. Matematikai és Természettudományi osztályának közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának előadóülésein bemutatott dolgozatokat tartalmazzák. Négy füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V, Géza-utca 2.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Minden szerzót 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 20 forint, külföldi címre 30 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest VI, Sztálin-út 31. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 936.550), külföldi megrendelések a »Kultúra« Könyv- és Hírlap külkereskedelmi Vállalat Budapest VIII, Rákóczi-út 5. Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 929.040) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. Matematikai és Természettudományi Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

Acta Mathematica Hungarica Szerkesztősége, Budapest V, Géza-utca 2.
Acta Physica Hungarica Szerkesztősége, Budapest V, Géza-utca 2.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

A Magyar Tudományos Akadémia 125 éves fennállása alkalmából rendezett
Ünnepi Hét előadásai.

Az osztály előadásainak programja :

ELŐADÁSOK A MODERN FIZIKA KÖRÉBŐL

November 27., hétfő

Jánossy Lajos r. tag : A kiterjedt légizapороk jelenlegi problémái.
Gyulai Zoltán lev. tag : Kristálynövekedés és határréteg.
Szigeti György : Lumineszkálás elméletére vonatkozó újabb kutatások.
Felkért hozzászóló : Nagy Elemér : Lumineszkálási jelenségek vizsgálatánál alkalmazott új berendezések.
Imre Lajos : Határfelületi ionkicserélődési folyamatok statisztikus termodinamikája. I. *

November 28., kedd

Gombás Pál r. tag : Alkáli fémek állapotegyenletéről.
Szalay Sándor és Földvári Aladár : Köztradiológiai vizsgálatok.
Neugebauer Tibor : Egy új összefüggés a gravitáció és mágnesség között.
Kónya Albert : A Compton-sáv profiljának elméleti meghatározása.
Fényes Imre : Az irreverzibilis termodinamikai folyamatok kvantitatív leírása.

ELŐADÁSOK AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKA KÖRÉBŐL

November 29., szerda

Egerváry Jenő r. tag : A matematika gyakorlati alkalmazásai, különös tekintettel a technika differenciálegyenleteire.
Vincze István : A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének feladatairól.
Borbély Samu lev. tag : A ballisztika alapkérdéseiről.*
Fenyő István : Az integrálegyenletek egy osztályáról és annak gyakorlati alkalmazásairól.
Aczél János : Függvényegyenletek az alkalmazott matematikában.
Pál Sándor : Ellenáramú diffúziós rendszerek.

MATEMATIKAI MÓDSZEREK A FIZIKÁBAN

November 30., csütörtök

L. Infeld : A mozgás problémája.
Novobátzky Károly r. tag : A variációszámítás és tenzorkalkulus fizikai alkalmazásai.
Budó Agoston lev. tag : Matematikai módszerek a molekula-fizika egyes területein.
Kovács István lev. tag : Harmadfokú szekuláris egyenletek közelítő megoldása és alkalmazásai.
Varga Ottó lev. tag : Az integrálegeometria alkalmazása a geometriai optikában.

November 30., csütörtök

K. K. Mardzsanisvili : : Néhány additív számelméleti problémáról.*

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS ALKALMAZÁSAI

Rényi Alfréd lev. tag : A Poisson-eloszlás probléma-köréről.
Jánossy Lajos r. tag : A kaszkádfolyamatok egy statisztikai problémájáról.
Jordán Károly lev. tag : Következtetések statisztikai észlelésekből.
Takács Lajos : Gépegyüttállások valószínűségi számításai tárgyalása, tekintettel a várakozási időre.

December 1., péntek

Földes István : A valószínűségszámítás alkalmazásai a csillagászatban.

Székely Gábor : A kötörés valószínűségszámítási tárgyalásához.

SZÁMOLÓGÉPEK ÉS KÖZELÍTŐ SZÁMOLÁSI ELJÁRÁSOK

Tarján Rezső : Elektronikus számológépek.

Felkért hozzászóló: *Náray Zsolt* : Közvetlen és közvetett analógiarendszerek

Hajós György lev. tag ; A nomográfia alkalmazhatóságának hatáiról.

Alexits György r. tag : Az elméleti fizika és technika sorfejtései által elérhető megközelítések nagyságrendjéről.

Turán Pál lev. tag : Magasabbfokú algebrai egyenletek közelítő megoldásáról.

Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag : Sajátértékfeladatok perturbációszámítása.

A *-gal megjelölt előadások később fognak az *Osztályközleményekben* megjelenni.

A KITERJEDT LÉGIZÁPOROK JELENLEGI PROBLÉMÁI

JÁNOSSY LAJOS r. tag

Előadta az 1950. november 27-én tartott osztályülésen

Kísérleti eredmények

Két, három vagy több számlálócső koincidenca-kapcsolásban akkor is koincideneciákat regisztrál, ha a csövek több méternyi távolságban állanak egymástól. Ezeket a koincideneciákat az úgynevezett kiterjedt légizáporok hozzák létre. Nagyszámú részecske egyszerre esik a számlálóberendezésre, és ha minden számlálócsőre legalább egy részecske esik, akkor a berendezés koincideneciát jelez.

Az egyes záporok sűrűsége nagyon is különbözik. Ezt egyszerűen meg lehet állapítani pl. a következő *Ferretti* és *Cocconi*-tól származó módszerrel.¹

Képzeljünk el egy n -szeres koincidenca-rendszert, amelyik n számlálócsőből áll, mindegyiknek S legyen az érzékeny területe. Tegyük fel, hogy erre a berendezésre egy légizápor esik, amelynek átlagos sűrűsége x részecske egységnyi területen. Továbbá tegyük fel, hogy a részecskék a zápor területén véletlen eloszlást mutatnak. Annak a valószínűsége, hogy egy részecske se érjen egy adott számlálócsövet, e^{-Sx} . Annak valószínűsége pedig, hogy legalább egy részecske találja a számlálócsövet $1 - e^{-Sx}$ és annak a valószínűsége, hogy a zápor egy n -szeres koincideneciát okozzon

$$P_n(x) = (1 - e^{-Sx})^n \quad (1)$$

Legyen az x és $x + dx$ közötti sűrűségű záporok száma percenként $D(x)dx$, akkor az n -szeres koincideneciák száma

$$p_n(S) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-Sx})^n D(x)dx \quad (2)$$

(2)-t mint integrálegyenletet lehet felfogni. $p_n(S)$ -t empirikusan meg lehet állapítani és $D(x)$ az ismeretlen függvény.

Cocconi és később mások kísérletileg megállapították, hogy

$$p_n(S) = A_n S^\gamma \quad (3)$$

$\gamma \sim 1,5$ és A_n nem függ S -től. (2)-nek a megfelelő megoldása

$$D(x) = Bx^{\gamma+1} \quad (4)$$

(3)-at és (4)-et (2)-be bevezetve a következő egyenletet kapjuk ($y = Sx$):

$$A_n = B \int_0^{\infty} (1 - e^{-y})^n \frac{dy}{y^{\nu+1}} \quad (5)$$

A fenti integrál divergens, ha $n = 1$. A divergencia abból származik, hogy a (4) spektrumban az alacsony sűrűségű záporok végtelen sok részecskét tartalmaznak. (4) persze csak közelítőleg igaz, és kis x értékeknél $D(x)$ értékeinek lényegesen a (4) által megadott érték alá kell esni. Ez azt is jelenti, hogy (3) nem lehet érvényes bármilyen nagy S értékre; viszont kísérletileg (3) érvényességének határát eddig még nem sikerült megállapítani; mindenesetre (3) jól megközelíti a kísérleti eredményeket, ha S néhány cm^2 -ről néhány ezer cm^2 -re nő.

A sűrűségi spektrum értelmezése

A sűrűségi spektrumot, amit (4) fejez ki, meg lehet érteni, ha feltesszük, hogy a kiterjedt záporok nagy elektron-foton kaszkádok. Egy primér elektron fotonokat bocsát ki, ezek pedig elektronpárokat hoznak létre.

A következő táblázatban összeállítottuk, hogy kb. mennyi részecske várható egy kaszkádban, tengersiz magasságban, ha a kaszkád az egész atmoszférán keresztül fejlődött.

TÁBLÁZAT

Primer energia eV-ben	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}	10^{16}	10^{17}
Szekunder elektronok	2	100	3000	90 000	10^6	$2 \cdot 10^7$
Átlagos sűrűség elektron/ m^2			0,3	9	100	2000

A sűrűséget azzal a feltevéssel számítottuk ki, hogy a zápor tengersiz magasságon körülbelül $10\,000 \text{ m}^2$ területre terjed ki. A kaszkádemélet ilyen nagyságrendű kiterjedést követel egy tiszta kaszkád-zápor esetében.

Az a számlálócső-készülék, amelyben az egyes csövek területe körülbelül 1000 cm^2 , főleg olyan záporokat fog jelezni, amelyek m^2 -enként több mint 10 részecskét tartalmaznak; vagyis a táblázat szerint olyan záporokat fog jelezni, melyek primérjeinek több mint 10^{15} eV energiája van. Egy készülék, melynek csövei 10 cm^2 nagyságúak, 10^{17} -nél nagyobb primér energiájú záporokra sül ki. Tehát gyakorlatban főleg olyan záporokat észlelünk, melyek primér energiái 10^{15} – 10^{17} eV intervallumban találhatók.

A záporok abszolút számából ki lehet számítani, hogy hány primér elektronnak van 10^{15} – 10^{17} eV energiája. Az ilyen módon számított primérek szá-

mának nagyságrendje más tapasztalattal is összehangolható. A primér spektrum és intenzitás ismeretes $3 \cdot 10^9$ — 10^{10} eV körül. Feltesszük ebből a célból, hogy az energiaspektrum alakja a következő:

$$T(E) = T_0/E^\beta \quad \beta \sim 1,8 \quad (6)$$

$T(E)$ azon részecskék száma, melyek energiája nagyobb, mint E . A z ismert 10^{10} eV tájéktól extrapolálhatunk a 10^{16} eV tájékra a (6) segítségével is. Így azt találjuk, hogy nagyságrendileg ugyanazt az intenzitást kapjuk, mint a kaszkád-számítással.

Továbbá megjegyezzük, hogy a (4) és a (6) egyenletek nagyon hasonlóak. Részletesebb kaszkád-számítással ki lehet mutatni, hogy ez a hasonlóság nem véletlen, minthogy a sűrűségi spektrum az energiaspektrummal egyszerű összefüggésben áll.²

A kaszkádfelfogás tehát a záporok intenzitását és sűrűségi spektrumát egyszerűen magyarázza. Továbbá — és ezt itt nem tudom részletesen kifejteni — a kaszkád-felfogás a záporoknak a magassággal való szaporodását is jól magyarázza. Ezeket a jelenségeket tehát úgy lehetne magyarázni, hogy a kiterjedt záporok nagy elektron-foton kaszkádok, melyeknek nagy része 10^{15} — 10^{16} eV energiájú primérektől származik.

Annak ellenére, hogy a kaszkád-elmélet az eddig tárgyalt tü neményeket jól magyarázza, valószínű, hogy a kiterjedt záporok mégsem tiszta kaszkádok. Hogy ezt kimutassam, még egy jelenség-csoportot kell megvizsgálni.

Áthatoló részecskék

A kaszkádelmélet szerint egy légizáport úgy kell elképzelni, hogy a nagy-energiájú elektronok és fotonok mind a zápor tengelye körül koncentrálnak egy nagyon szűk területen. A zápor nagyobb része kis energiájú elektronokból és fotonokból áll. Ezek az elektronok és fotonok a zápor tengelyéből származnak.

A kisebb energiájú elektronok és fotonok rövid úton elnyelődnek, de új elektronok és fotonok, melyek később bocsátódtak ki a tengelyből, az elnyelt részecskéket helyettesítik. Ennek a felfogásnak helyességét egyszerűen be lehet bizonyítani a következő módon. Ha egy számlálócső-berendezés csöveit abszorbenssel letakarjuk, akkor úgy találjuk, hogy a kisülések száma csökken. Ez a csökkenés aránylag nagyobb, mint az a csökkenés, melyet akkor észlelünk, ha pl. a barometrikus nyomás az abszorbens vastagságának megfelelően nő, és az egész zápornak egy vastagabb levegőrétegen kell áthatolnia. A barometrikus változás főleg a zápor tengelyére hat, és ezért az abszorpció a nagy energiájú részek abszorpcióját mutatja — egy helyi abszorbens viszont pontosan azokat a részecskéket befolyásolja, amelyek közvetlenül a csövekre esnek. Ha ezek a részecskék elnyelődnek, nem kaphatnak utánpótlást a zápor messze lévő tengelyétől.

A záporok helyi abszorpciós görbéje azt mutatja, hogy a záporok nagy töredéke elnyelődik, ahogy ez elektronoknál és fotonoknál várható. Ezt a pontot véglegesen tisztázták *Occhialini* és *Schönberg* észrevétele segítségével, még pedig azzal, hogy a fotonok 10^6 eV körül csak kevéssé nyelődnek el, minthogy ilyen energiájú fotonok számára a Compton-effektus már nem, a párképzés pedig még nem fontos.

A kiterjedt záporok helyi abszorpciós görbéje 10 cm *Pb*-ig a kaszkádelmélettel összhangban van. Viszont nagyobb abszorbens rétegek alatt a részecskék 2%-a megmarad. Ez a 2% nyilvánvalóan nem elektronokból áll. Valószínű, hogy e részecskék legalább részben mezonok és nukleonok.

Az áthatoló részecskék vizsgálata

Az áthatoló részecskék sűrűségi spektrumát ugyanolyan módon lehet megállapítani, mint az összes részecske spektrumát. Ezt egy abszorbenssel letakart koincidenca készülékkel lehet keresztülvinni. Ilyen kísérletek hosszadalmasak, minthogy kis intenzitások szerepelnek. Az eddigi kísérleti eredmények azt mutatják, hogy az áthatoló részecskék sűrűségi spektrumát is egy (4)-hez hasonló kifejezéssel lehet megközelíteni.

Az áthatoló részecskék sűrűségi spektrumának megállapításánál fontosabb probléma a két spektrum közötti összefüggés megállapítása. Ugyanis fontos lenne azt a $\bar{D}(x, y) dx dy$ függvényt meghatározni, amely azoknak a záporoknak számát fejezi ki, melyek x és $x+dx$ közötti sűrűségűek, az áthatoló részecskék sűrűsége pedig bennük y és $y+dy$ között van.

Két szélsőséges lehetőséget kell tárgyalnunk.

$$(I) \bar{D}(x, y) dx dy = a(x)b(y) dx dy$$

$$(II) \bar{D}(x, y) dx dy = D(x) \delta(x - y/k) dx dy; \quad k \sim 1/50$$

($\delta(z)$ a Dirac-féle szinguláris függvény.)

Az első lehetőség annyit jelent, hogy a részecskék egymástól független sűrűséggel lépnek fel, a második pedig azt jelenti, hogy a két sűrűség mindig egy pontosan adott viszonyban lép fel.

A valóságban a sűrűségi spektrum (I) és (II) között fekszik. Hogy a két sűrűség nem független egymástól, azt egy *Chowdhuri*-által keresztülvitt kísérlet is bizonyítja (azóta több más ilyen kísérletet is végeztek).

Részletektől eltekintve, ez a kísérlet a következő:

Egy Wilson-kamrát olyan hármaskoincidenca berendezés vezérelt, amely kiterjedt záporokra szólalt meg. A számlálócsövek területe nagyobb, mint a Wilson-kamráé és ezért, a Wilson-felvételek statisztikája kis sűrűségétől eltekintve, a (4) sűrűségi spektrumot mutatja. Ez körülbelül azt jelenti, hogy az n nyomot tartalmazó fényképek relatív száma körülbelül $n^{-\gamma}$.

A Chowdhuri-féle kísérletben még egy nagy felületű és 15 cm ólommal eltakart számlálócső-csoportot is kapcsoltak a készülékhez, és pedig olyan módon, hogy minden felvétel esetén meg lehetett állapítani, hogy az eltakart csövek kiszültek-e vagy sem.

A kamra felülete körülbelül 80 cm², az eltakart számlálócsövek felülete pedig körülbelül 600 cm². Ez annyit jelent, hogy, ha a statisztikai ingadozásoktól pillanatnyilag eltekintünk, akkor a csövekre 600/80 = 7,5-szer annyi részecske jut, mint a kamrára. Ha egy felvétel 6 nyomot mutat a kamrában, akkor 6 · 7,5 = 45 részecskét várhatunk a számlálócsövek területén; 45-nek 2%-a ~1, tehát a statisztikai sűrűség-ingadozásoktól eltekintve, egy áthatoló részecskét várhatunk.

Ha a kombinált sűrűségi spektrum formája (II)-höz hasonlít, akkor azt várjuk, hogy $n \gg 5$ felvételeknél az eltakart csövek majdnem mindig megszólalnak, $n < 5$ -nél pedig csak kivételesen. Ha pedig a kombinált spektrum alakja (I), akkor minden n érték esetében egy bizonyos fényképeknek állandó töredékét kísérné az eltakart csövek kiszülése.

A Chowdhuri-féle kísérlet eredménye azt mutatja, hogy a spektrum mindenesetre inkább a (II)-hez hasonlít, mint az (I)-hez. A kísérlet tudniillik az mutatja, hogy azok a fényképek, amelyek egy, vagy két részecskét mutatnak, azokat ritkán kísérik az eltakart koincidencia kiszülések. Viszont koincideneciák kísérik a nagyobb részét azoknak a fényképeknek, melyek több részecskét mutatnak, és ötnél nagyobb részecske-szám majdnem mindig koincideneciával együtt lép fel.

Ezt a kvalitatív elgondolást a következő módon lehet matematikailag kifejezni. Legyen a Wilson-kamra területe K és az el nem takart vezérlő hármaskoincideneciacsövek területe S , akkor az n nyomot tartalmazó felvételek száma:

$$W(n) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-Sx})^3 e^{-Kx} \frac{(Kx)^n}{n!} D(x) dx \quad (7)$$

$(e^{-Kx} \frac{(Kx)^n}{n!})$ a Poisson-féle valószínűség arra, hogy egy x átlagos sűrűség éppen n részecskét adjon a kamra területére.)

Legyen az eltakart csövek területe T ; ha az áthatoló részecskék helyi átlagsűrűsége pontosan 2%-a az egész sűrűségnek, akkor a felvételek száma, amelyeket az eltakart csövek kiszülése kíséri

$$w(n) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-Sx})^3 (1 - e^{-KTx}) \frac{(Kx)^n}{n!} e^{-Kx} D(x) dx \quad (8)$$

$D(x)$ -t (7) és (8)-ba lehet helyettesíteni (4)-ből és így $W(n)$ -t és $w(n)$ -t numerikusan ki lehet számítani. Chowdhuri eredménye mutatja, hogy az ilyen módon kiszámított értékek a kísérleti eredményekkel összhangban vannak.

Ez az eredmény azt mutatja, hogy két részecske-csoport erős összefüggésben van. Kísérletek, amelyeket Dublinban elkezdtem és most volt munkatársaim folytatnak, azt mutatják, hogy a valódi $D(x, y)$ mégsem pontosan (II)-nek felel meg, hanem az x és y sűrűségek, bár erős korrelációt mutatnak, mégis részben függetlenek.⁴ (Vigyázni kell arra, hogy x és y minden esetre csak helyi átlag sűrűséget jeleznek és az igazi részecskék száma egy adott területen Poisson-féle ingadozást mutat, de itt nem erről a függetlenségről van szó.)

Sikerült kimutatni, hogy vannak olyan területek egy záporban, melyekben az x sűrűség majdnem olyan, mint az y sűrűség.

Interpretáció

A szoros összefüggés az áthatoló részecskék és puha részecskék között a zápor szerkezetének sajátosságaira mutat. A korreláció legegyszerűbb magyarázata az lenne, hogy az elektronok és fotonok áthatoló részecskéket hoznak létre, és a két csoport egymással egyensúlyban van. Ezt a felfogást egy ideig magam is képviseltem, de közben meggyőződtem róla, hogy ez az álláspont nem helyes. A fő nehézség az, hogy az átlag elektronok és fotonok energiája túlságosan alacsony ahhoz, hogy elegendő áthatoló részecskéket hozhassanak létre.

Valószínű, hogy az áthatoló részecskék a következő módon magyarázhatók:

A tiszta kaszkád-folyamat esetében az elektronokat és fotonokat egy tengely sugározza ki, viszont a valódi folyamatban a mezonok és nukleonok is mind a zápor tengelyéből származnak éppúgy, mint az elektronok és a fotonok. Egy ilyen folyamat megmagyarázhatná az erős korrelációt elektronok és más részecskék között.

A zápor folyamatának részletes értelmezése eszerint a következő : A primér egy nukleon (valószínűleg proton). Ez a nukleon atommagokkal ütközik össze és mezonokat és több nukleont hoz létre. A semleges mezonok fotonokra bomlanak, és ezek elektron-foton-kaszádokat hoznak létre. A nagyenergiájú szekundérek mind a tengely közelében maradnak, és ott egy komplikált elektron-foton-nukleon kaszkádot képeznek. A tengely kisugárzása pedig a zápornak nagyobb részét képezi. Ebben a részben több elektront és fotont találunk, mint például mezont, azért, mert az elektronok és fotonok gyorsan szaporodnak, és utána eltűnnek. A mezonok viszont a tengelytől messzebbre távolodhatnak el és azért kisebb sűrűséggel nagyobb területre oszlanak szét. A dublini kísérletekben talált területek, ahol $x = y$, valószínűleg példák erre. Ezek oly záporterületek, melyek messze esnek a tengelytől és ezért elektronok és fotonok oda már nem érhetnek.

A nukleon-elektron-kaszád részletei nincsenek még matematikailag kidolgozva. Ezért ezeknek az elgondolásoknak jellege kvalitatív ; sok elméleti és kísérleti munkába fog még kerülni a részletek tisztázása.

Megjegyzem, hogy nem meglepő, hogy e záporokat nagyjából mint tiszta elektron-foton-kaszádöt interpretálhattuk előadásunk első részében. Ennek az oka a következő véletlen körülmény :

A kaszkád-egység levegőben körülbelül 40 g/cm^2 , ez körülbelül egyenlő a sugárzó ütközések átlagos távolságával. Viszont a levegőben a nukleonok ütközési keresztmetszete véletlenül éppen ilyen nagyságrendű. Ezért a levegőben (de csak a levegőben) a nukleon-kaszkád és az elektron-kaszkád hasonló lépésekben halad.

Összefoglalva felsorolom azokat a problémákat, melyek szerintem jelenleg fontosak.

1. A nukleon-elektron-kaszkád elméleti kidolgozása.
2. A záporok $D(x, y)$ sűrűségi spektrumának térképezése.
3. Annak megállapítása, hogy milyen típusú részecskék szerepelnek a záporokban.

*Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézete,
Kozmikus Sugárzási Osztálya.*

IRODALOM

- ¹ Cocconi, Loverdo, Tongiorgi : Nuovo Cim. IX 1 (1944), 314; 2 (1944), 1.
- ² Skobelzyn : C. R. USSR 37 (1942), 141; 42 (1944), 388; 44 (1944), 142.
- ³ B. Chowdhuri : Nature 161 (1948), 680.
- ⁴ McCusker : C.B.A. Proc. Ir. Ac. sajtó alatt.

KRISTÁLYNÖVEKEDÉS ÉS HATÁRRÉTEG

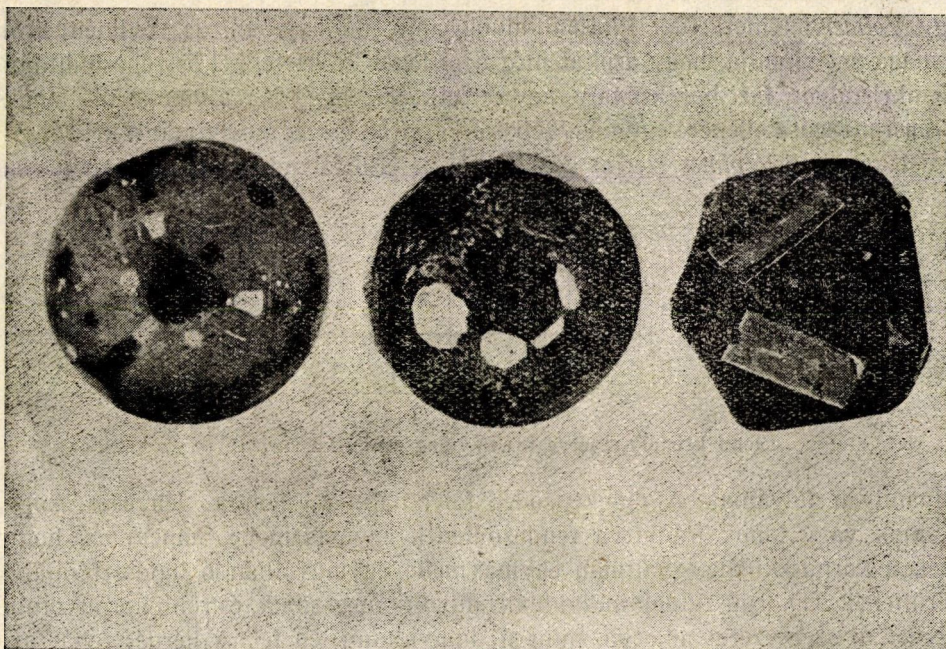
GYULAI ZOLTÁN lev. tag

Előadta az 1950. november 27-én tartott osztályülésen

A kristálynövekedés kérdése anyagszerkezeti kérdés. De míg a krisztallográfia az anyag külső, geometriai tulajdonságait tárja fel, a röntgenspektroszkópiai szerkezeti elemzés az atomok, ionok és molekulák térbeli elrendeződéséről ad számot, addig a kristálynövekedési vizsgálatok az anyag szerkezeti felépülését mozgási folyamatában tárják fel. Az előbbi két vizsgálati módszer tényszerű megállapításokat tesz, az utóbbi a folyamatok bizonyos irányítására is képesít. Gyakori feladat szép nagy kristályok előállítása. Így pl. optikai célokra ma már mesterséges fluorit — $NaCl$ és KCl ú. n. Sylvin kristályokat termelnek. A kutatás feladata elsősorban az egyes kristálynövekedési módokat, a kristálynövekedés feltételeit anyagonként megvizsgálni. Csak ezek ismerete után kerülhet sor az egyes kristályok előállítására.

A fizikus szeret általános szabályokat, törvényeket és elméleteket felállítani. Ezek birtokában a jelenségek kvantitatív irányítása és felhasználása aránylag egyszerű. A kristályosodás mechanizmusának területén még nem jutottunk el ilyen általános elméletig. Amikor *Buckley*¹ azt mondja, hogy a kristálynövekedés ma még művészet, azt akarja kifejezni, hogy egységes elv vagy szabály még nincsen. Még nem lehet megmondani, hogy adott anyagból — pl. $PbCl_2$ -ből — milyen módon lehet szép nagy kristályokat termelni. Ezzel szemben $NaCl$ -ből vagy timsóból könnyű szép, nagy kristályokat termelni, bár ezek is bizonyos szempontból még sok hibát tartalmazhatnak. Megjegyzem, hogy az utolsó évtizedek érdekes felismerése az ú. n. kristályhibák vagy hibás helyek felfedezése. Ezeknek a hibás helyeknek lényeges szerepük van a kristályok általános fizikai viselkedésében. Van néhány általános szabály is, ezek azonban főleg a halmazállapotváltozás folyamatára vonatkoznak. Így pl. rég ismeretes, hogy egy oldat fokozatos bepárlásánál az oldott anyag kikristályosodik. Ugyancsak régen ismeretes, hogy az olvadáspont alá hűtött olvadék megfagy és kristályos szerkezetű lesz.

Arra a kérdésre, hogy miképpen nő egy kristály, ezek a szabályok még túl általánosoknak bizonyulnak. Ezt a kérdést először a mineralógusok vetették fel. Ők foglalkoztak először a kristályok külső alakjával. Az első elképzelés szerint az anyag úgy rakódik a kristálylapokra, hogy a lapok merőleges irányban nőnek. Ezt a feltevést a részletes megfigyelések nem igazolták. A kérdés az, hogy egyenesen nő-e az oldatába helyezett egy kristály minden oldala. A tapasztalat



1. ábra.

Kristálynövekedési gömbkísérletek. (Spangenberg és Neuhaus után.)

szerint ez nem így történik. Ennek a kérdésnek a tisztázására végezték az ú. n. gömbkísérleteket.² Lehetőleg szép kristályból gömböt esztergályozunk és telített oldatába helyezük. A kísérlet lényege, hogy a kristály minden felületi eleme egyenlő geometriai viszonyok között kezd növekedni. Ha a növekedés a felületre merőlegesen történne, a kristály továbbra is gömbalakú maradna. Az 1. számú ábrából látszik, hogy bizonyos oldalak kisímulnak, bizonyos kristálytani lapok erőteljesebben növekednek. A gömbkristály az eredeti kristályalak felvételére törekszik (3. ábra). Az ábrákon a fehér felületek újonnan kialakított kristálysíkokat jelentenek. A vonalkázott helyek megfigyelése fontos, ez sok esetben a ránövő rétegek széleit jelenti. Ezek a képek azt mutatják, hogy az anyagrárakódás folyamata a növekedésben levő kristályra mélyebb összefüggések szerint megy végbe.

Újabb ismereteink alapján a kristálynövekedés megindulását — akár oldatból, akár olvadékból, akár gőzfázisból — magképződésnek nevezzük. A kristálynövekedéshez a nem kristályos fázisból ki kell alakulnia egy kis kristálynak, magnak, (lásd a 2. szemantik ábrát) ami aztán tovább nő. Ennek a kis kristálynak a kialakulása sajátosság folyamat; lényegesen különbözik a már növekedésben levő kristályon lejátszódó folyamatoktól.

A másik kérdés a kész, vagy növekedésben levő kristály továbbnövekedésének kérdése. Ezeket a kérdéseket megpróbálták termodinamikai alapon tárgyalni.

Így *Volmer* : Kinetik der Phasenbildung című munkájában, de eredményeiről ő maga azt mondja, hogy azokat még nem lehet kísérletekkel összehasonlítani. Nemkristályos fázisból kristály úgy keletkezik, hogy az atomok, ill. ionok *Brown*-mozgása ellenére egy nagyobb szerkezet áll össze, amely már a kristályos fázist képviseli. *Volmer* szerint gőzfázisból az első folyadékcseppek kialakulása

-	+	-
+	-	+
-	+	-

2. ábra.

Elemi kristály, illetve kristálymag sematikus rajza.

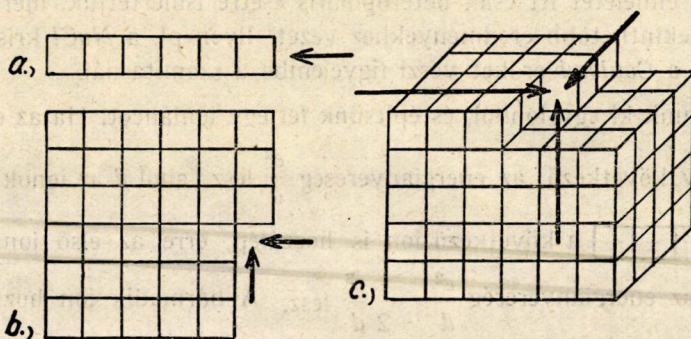
ugyanilyen folyamat. A magképződés folyamatában nem az lényeges, hogy atomok vagy ionok irányítva rendeződjenek egymás mellé, hanem az, hogy ezek a korpuszculák egyáltalán egymás mellé, egymás állandó hatásszférájába kerüljenek. E korpuszculák individuális mivolta megszűnik, és több korpuszkula együtt új szerkezetet alkotva, mint új individuum lép fel. A kérdés tehát az, hogy mi a feltétele annak, hogy pl. a gőzfázisban több atom vagy ion nagyobb képződménnyé álljon össze, vagy mi módon lehetséges, hogy *NaCl* oldatban több *NaCl* ion elveszítse hidrátburkát és együtt maggá álljon össze. Néhány ionpár összeállása a *Coulomb*-erők alapján jól elképzelhető, de az oldatban fellépő koncentráció-ingadozás miatt ezek az ionok újra oldatba mehetnek, mivel az említett koncentráció-ingadozás következtében a magot csupán H_2O molekulák veszik körül. Ugyanez az eset előállhat gőzfázisban is, ha az összeállott magba nagysebességű molekula ütközik és ott annyi hőt fejleszt, hogy a mag újra elpárolog. Ugyanez a helyzet telített vízgőz esetében is. Két H_2O molekula ideiglenesen összeállhat, de az említett nagy energiájú ütközőrészecske hatására újra széteshet. Mikor lesz maradandó több korpuszkula összeállása? Világos, hogy nem az összeállott korpuszculák irányított elhelyezkedése a főkérdés, hanem az, hogy egyáltalán együtt maradhassanak. Hasonló folyamatról van szó a forrás megindulásánál is. Pl. gőzfázisban megfigyelhető kis vízcseppek elpárolgása. Hasonlóan, oldatban a kis kristályok újra feloldódnak. Konyhasó oldatba alkoholt cseppentettem és mikroszkóp alatt megfigyeltem, hogy a hirtelen kiváló kis kristálykákból egyesek újra eltűnnek.

A kristálynövekedés második fontos kérdése az, hogy miképpen nő tovább egy adott, stabil mag. Természetes, hogy a magot olyan környezetbe kell hoznunk, ahol az anyagkiválás lehetséges. Termodinamikailag ez azt jelenti, hogy a két fázist olyan állapotba hozzuk, ahol a halmazállapotváltozás a kristálynövekedés irányában történik. Oldatoknál, a koncentráció növelésével vagy túlhűtéssel, azaz túltelítettséggel létrehozásával áll be ez az állapot. Olvadékoknál

pedig hűtéssel, illetve túlhűtéssel. A kérdés az, hogy miképpen rakódik rá az anyag a már kialakult kristályra. Már régebben megfigyelték, hogy az anyag a kristályra irányítottan helyezkedik el, tehát a hozzánövés sem történhetik bárhol. Azokat a helyeket, amelyek energetikailag alkalmasak új elem beépülésére, egyes kutatók aktív helyeknek nevezik.

A fenti megfontolásokból nyilvánvaló, hogy termodinamikai szemléletünket finomítani kell. *Kossel* könnyen áttekinthető atomisztikus elméletet alkalmaz. *Kossel* elmélete ellen sokan azt a kifogást hozták fel, hogy túlságosan idealizált. Ez igaz, de *Kossel* elmélete túlzottan ideális kiindulása ellenére is feltárt néhány jellegzetes mozzanatot.

*Kossel*³ atomisztikus elméletét két esetre fejt ki: homeopoláris és heteropoláris kristályokra. Alap gondolata, mindkét kristályfajta az, hogy



3. ábra.

Az izográd lépések ionkristályok esetén: a) egy-, b) két-, c) háromdimenziós esetben.

keresi a növekedésben levő kristály felületén azokat a helyeket, ahol a másik fázisból kiválni készülő új korpuszkula a legkedvezőbbben helyezkedik el. A legkedvezőbb elhelyezkedés az, ahol ez a korpuszkula mechanikailag egyensúlyban lesz, vagyis ahol legkisebb lesz a potenciális energiája. A korpuszkulának a kristálytömbhöz való hozzáépülése itt jár a legnagyobb energianyereséggel. *Kossel* kiszámítja az energianyereséget a kristály különböző kitüntetett helyeire. Így: középre, élre és csúcsra. *Kossel* keresi, hogy milyen elrendeződés esetében lehetséges, hogy egy növekedésben levő kristály minden lépés (részecske felvétel) után olyan állapotba kerüljön, amelyben teljesen hasonló alkalom nyílik újabb részecske odailleszkedésére. *Kossel* ezt a lépést *izográd* lépésnek nevezi. A 3a. ábrából látható, hogy a nyíl irányában az állapot nem változik, ha elég messze vagyunk a lánc végétől. Ugyanis az erőingadozások néhány elem után már egészen lecsökkennek. A 3b. ábrán látható, hogy síkfelület esetében a szélektől elég messze a megkezdett lánc növekedése az az eset, amidőn egy elem hozzánövése után a helyzet változatlan marad. Végül háromdimenziós esetben látható, hogy kubikuskristály esetében a félkockán egy félig kialakult réteg mellett egy megkezdett lánc növekedése az a folyamat, amelynél egy új elem

beépülése után a következő elem számára a helyzet ugyanaz. Tehát elég messze a csúcsoktól és élektől a lépések teljesen egyenlő értékűek. Ez az elgondolás alkalmazható homeopoláris és heteropoláris esetre is. A 3 c. ábrából látható, hogy így teljesen felépíthetjük a kristályt, mivel néhány lépés után már elég távol vagyunk a szélektől. Ha a kristály molekuláris rácsenergiája U és ha L az elemek száma, akkor — eltekintve a szélektől — egyetlen izográd lépés u energiája így adódik:

$$u = \frac{U}{L}$$

Ezt az u energiát kell egy lépésre kiszámítani. A kristály feloldása vagy elpárolgása hasonló lépésekből adódik.

Kossel elméletét itt csak heteropoláris esetre ismertetjük, mert ez szám szerint legáttekinthetőbb eredményekhez vezet. Ilyen pl. a NaCl kristály esete. *Kossel* csak a *Coulomb*-erőket veszi figyelembe a számításnál.

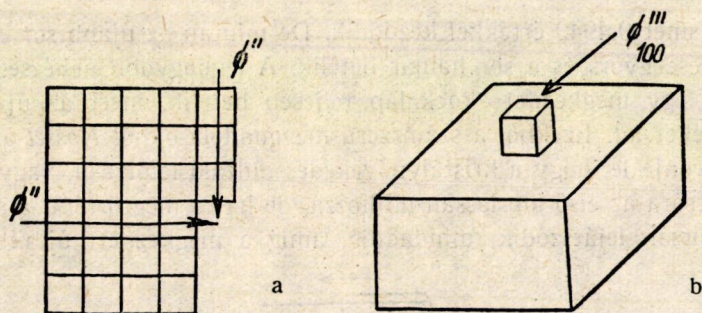
Induljunk ki egy ionból, és építsünk fel egy ionláncot. Ha az első ionhoz hozzáad egy következő, az energianyereség $\frac{e^2}{d}$ lesz, ahol d az ionok távolsága. Ha most $\boxed{- \quad + \quad -}$ a következő ion is hozzá lép, erre az első ion taszítólag hat, tehát az energianyereség $\frac{e^2}{d} - \frac{1}{2} \frac{e^2}{d}$ lesz. A harmadik ion hozzá lépésénél az energianyereség $\frac{e^2}{d} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ a negyediknél $\frac{e^2}{d} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$ és így tovább. Ha olyan messze vagyunk a végektől, hogy azok hatása már nem érvényesül, megkapjuk az energianyereséget az ismétlődő izográd lépésekre:

$$\Phi'_{100} = \frac{e^2}{d} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots\right) = 0.69315 \frac{e^2}{d}.$$

Hasonló módon számolunk kétdimenziós esetben is. Itt is azt kell kiszámolni, hogy elég nagy sík esetén mekkora lesz a Φ''_{100} értéke. A számítások szerint

$\Phi''_{100} = 0.1144 \frac{e^2}{d}$. Teljes félkocka esetén azt kell kiszámolni, mekkora az energianyereség, ha az ion a félkocka közepén helyezkedik el. (4 a. ábra) Az eddigi gondolatmenetből nyilvánvaló, hogy az energianyereség igen kicsi lesz, ha az ion a kocka felső lapjára illeszkedik, mert ilyenkor négy ellentétes ion $d\sqrt{2}$ távolságból taszítást gyakorol rája. Φ'''_{100} tehát kicsiny lesz. (4 b. ábra.) A számítások szerint

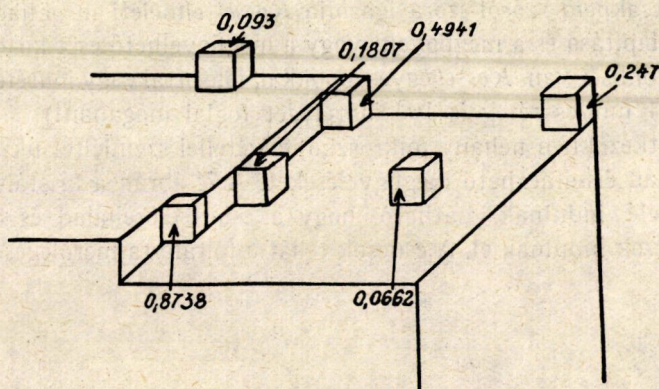
$$\Phi'''_{100} = 0.0662 \frac{e^2}{d}$$



4. ábra.

Az energianyereségek két- és háromdimenziós esetben.

Az 5. ábrában egy növekedésben levő félkockára a nyilakkal jelzett helyekre felírtuk az energianyereség értékét. Látjuk, hogy ezek az értékek egymástól erősen különböznek. *Kossel* szerint az a lépés következik be, amely a legnagyobb energianyereséggel jár. Így nyilvánvaló, hogy az új ion a második beugrásban fog elhelyezkedni. *Kossellel* azt is mondhatjuk, hogy az új ionra itt hat majd a legnagyobb erő, mivel itt három ellentétes töltésű ion van hozzá legközelebb. Tökéletes kockalap továbbnövekedésére az előbbieket szerint három különböző

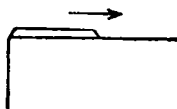


5. ábra.

Energianyereségek a kristály kitüntetett helyein.

eset lehetséges aszerint, hogy a következő lépés a lapon, az élen vagy a csúcson történik meg. A legvalószínűbb, hogy a növekedés a csúcson történik, mivel ott kaptuk az energianyereségre a legnagyobb értéket. A csúcson új ion kiválása után gyorsan megindul egy új sor növekedése. Ez nyilvánvaló, mert amint az előbbi számításból láttuk, az energianyereség több mint 0,5. Az új sorból származó értékhez hozzájárul az alatta levő ionokból származó érték. Miután a kockára ránőtt egy ionsor, az ionoknak újból választani kell a 0,0662, 0,4940 és a 0,2470 értékek között. Az újabb sor a kocka szélén fog elindulni. Néhány sor felépülése után a 0,8738 értékhez jutunk. A növekedés úgy történik, hogy a megkezdett sor gyorsan betelik. Ekkor egy kis szünet következik be, mivel

az új sor ismét 0,4940 értékkel kezdődik. De miután az újabb sor elkezdődött, a növekedése gyors és a sor hamar betelik. A legnagyobb nehézség akkor lép fel, mikor egy megkezdett kockalap teljesen betelik, mert az új lépés csak 0,2470 értéket ad. Ezekből a számszerű meggondolásokból *Kossel* azt a következtetést vonja le, hogy a kristálynövekedés pulzáló lefolyású, vagyis egy kész kocka csúcsára az első ion lassan nő hozzá, de ha ez megtörtént, a sorok növekedése gyorsan lejátszódik, mindaddig, amíg a megkezdett új réteg teljesen

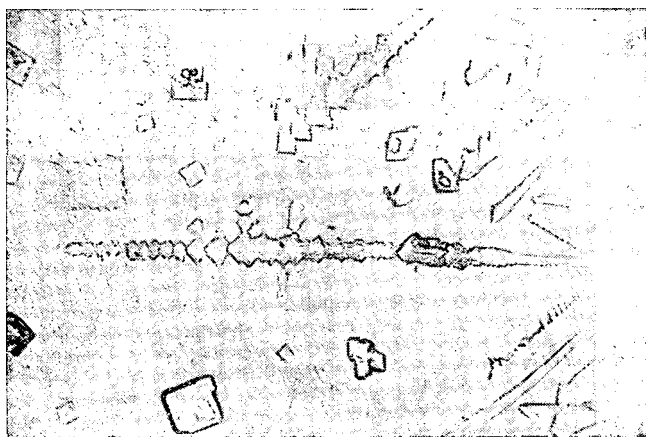


6. ábra.

A növekedés menetének mikroszkópban megfigyelhető mozzanata.

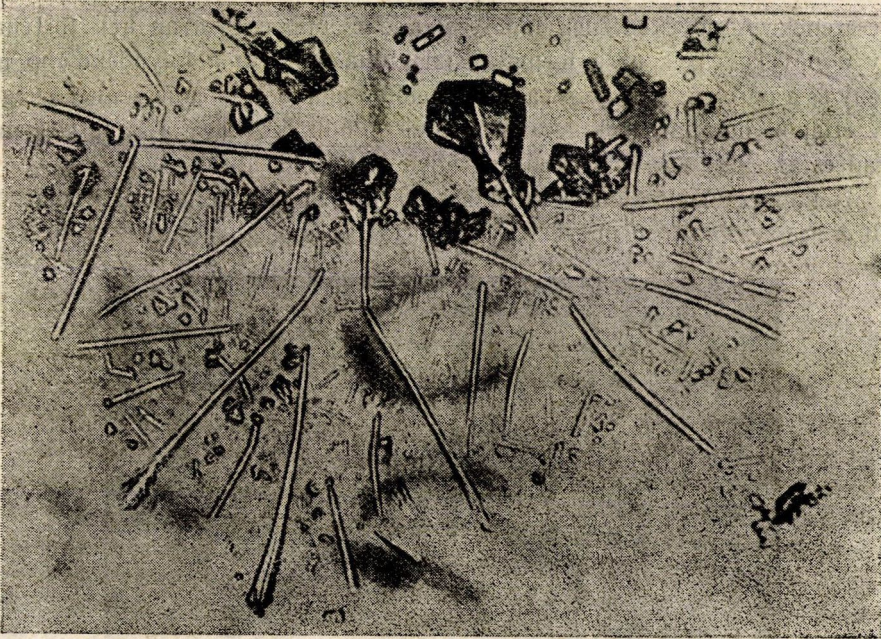
megtelik. Ekkor szünet áll be. *Kosselnek* ez az elméleti megállapítása igen fontos. 1935-ben mikroszkópban megfigyeltem⁵, hogy *NaCl* kristályok növekedésénél kis lemezcúscból egy kis vonal indul el és lassú mozgással végigmegy az élen (6. ábra); bizonyos idő múlva egy másik vonal indul el és így tovább. Gyakran megfigyelhető, hogy két ilyen kis élszegély is halad egymásután. Ez a megfigyelés csaknem szóról-szóra igazolja *Kossel* elméleti megállapítását. (Bár *Kossel* megállapítása és a megfigyelt, vagy a megfigyelhető eset között méretben igen nagy különbség van. *Kossel* egyes ionokkal, ionsorral vagy ionréteggel számol, de még 0,001 mm-es réteg is 10^4 ionréteget foglal magában!)

A következőkben néhány mikroszkópfelvétellel szemléltetjük a *Kossel*-féle elmélet alapján értelmezhető megfigyeléseket. A 7. ábrán a kristályok az oldat széléből befelé indulnak. Látható, hogy a csúcs előrehalad és belőle újabb és újabb csúcsok indulnak el. A csúcsok tehát a főirányra merőlegesen új ágakat



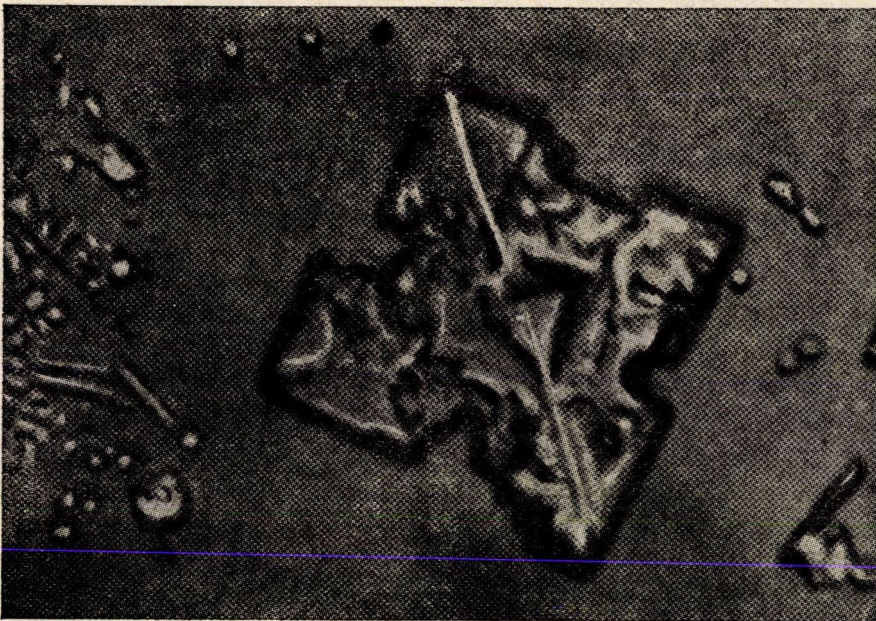
7. ábra.

NaCl kristályok ú. n. csúcsnövekedése. (Z. f. Krist. 935.)



8. ábra.

Nagy sebességgel való kristálynövekedés. (Z. f. Krist. 935.)

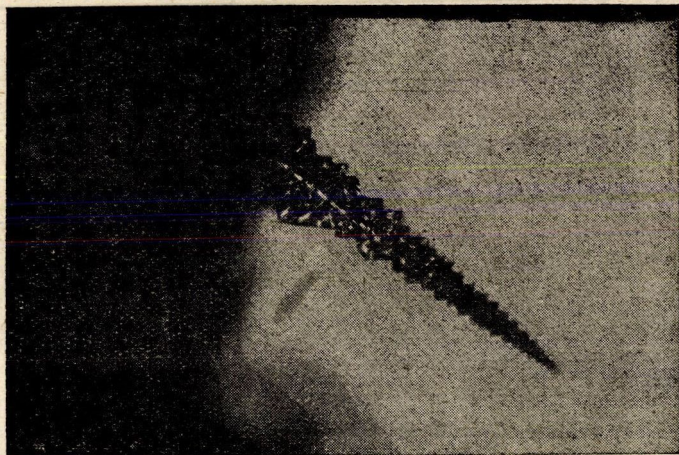


9. ábra.

NaCl kristály; a csúcsos növekedés szemléltetése. (Z. f. Krist. 935.)

növesztenek. A növekedésnek lapos folyadékcseppben gyorsan kell történnie, hogy a növekedésnek ez a formája kialakulhasson. Ha a folyadékcsepp igen vékony és a párolgás igen nagy, akkor az előbbi ágakból — amelyeknél az egyes négyzetlapok még láthatók — csak annyi fejlődik ki, hogy a kapcsolat megmarad és az egész ág vonalszerű kristályá alakul. (8. ábra)

Kellő megvilágítás mellett megfigyelhetjük, hogy a cakkozás itt is látható, tehát a szalag sok apró négyzeteslemez átlós sorából áll.



10. ábra.

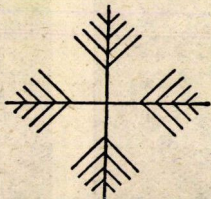
Csúcsos növekedés NaCl -gőzből. (Z. f. Krist. 935.)

Ugyancsak csúcsos növekedést szemléltet a 9. ábra. Az anyag a csúcsokból indul ki, minden csúcsból önállóan, de már nem volt alkalma a lapokat teljesen betölteni.

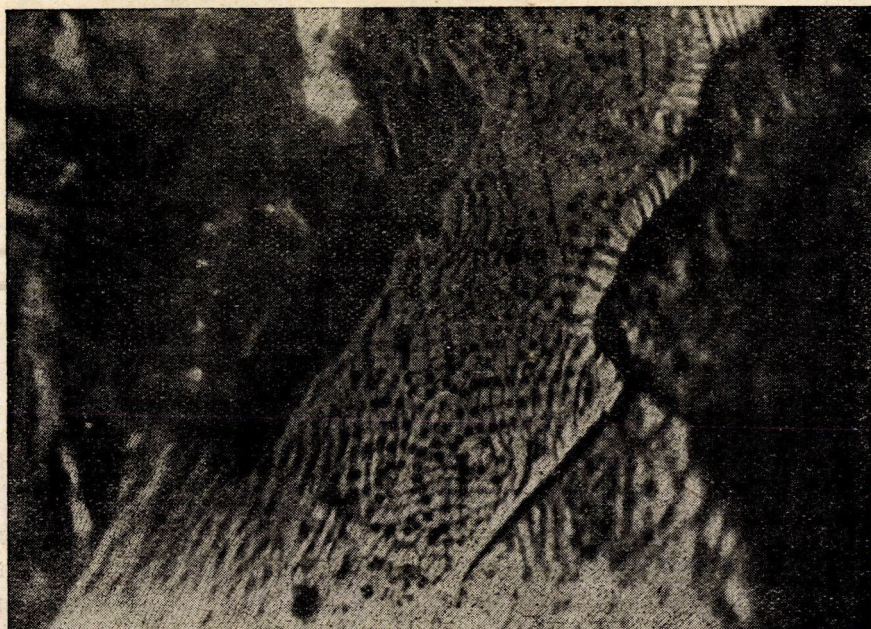
Az előbbieket szerint a kristálynövekedés elvei függetlenek attól, hogy oldatban, gőzben vagy olvadékban történik a növekedés. Láttuk, hogy csak az ionok illeszkedése játszik szerepet. Ugyanazokat a növekedési szabályokat látjuk megvalósulni gőznél és olvadéknál is.

A 10. ábrán látható, hogy a csúcsok előrehaladnak, az önálló négyzeteslapok átlós irányban sorra egymáshoz illeszkednek. A kristályrendszer így fokozatosan olyan térbe kerül, ahol a gőzsűrűség kisebb és így a kristályok fokozatosan kisebbednek. Ugyanez figyelhető meg olvadék esetében is. Itt négyzeteslemez alakú kristálymag keletkezik. Ennek minden csúcsa egyenlő környezetben van, tehát egyszerre kezd növekedni. Mikroszkóp alatt megfigyelhető a 11a. ábrában megadott sematikus alak. (A jelenséget a gyorsaság miatt még nem sikerült lefényképeznem.) A 11/b. ábra ugyanennek mikrofotográfiája a sócsepp megmerevedése után. A folyamat gyors, az egész sócsepp megfagyása után az eredeti finom ágas képződmény átkristályosodik. Hasonló szép megfigyelések érhetők el gőz esetében is, ha párolgó sócsepp közelébe fűtött drótot helyezünk.

Nagy kubikus szerkezetű individuumok lépnek fel, de anyagihiány miatt a kocka nem tud teljesen betelni és az anyag csak az éleken helyezkedik el. (12. ábra). Ezeken az éleken is megfigyelhető, amint az anyag a csúcsból tovább folyik.

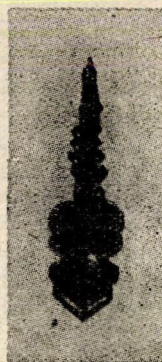
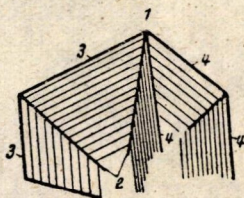
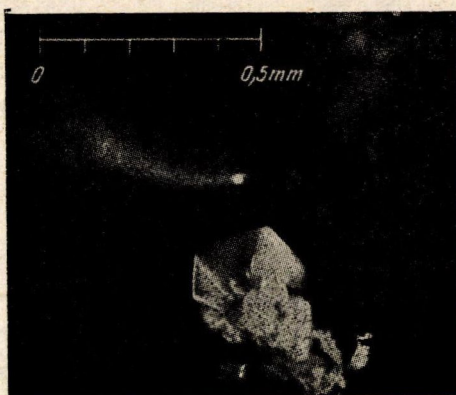


11/a ábra.
NaCl kristály növekedése olvadék felületén.



11/b. ábra.
A 11/a. kristály maradványa a sócsepp megfagyása és rekrisztallizáció után.

Felületi vándorlás. 1923-ban megfigyeltek benzofenon esetében egy jelenséget, ami arra mutat, hogy szilárd felületen az atomok, ionok vagy molekulák — vándorolni képesek. Felhozok néhány példát a NaCl esetére: egy sócsepp olvadáspontja közelében párologni kezd, s felületén különböző kristályalakok keletkeznek. A 13/b ábrán egy alacsony, tömzsi kubikus és egy finom elágazású képződmény látható. Ezek részben felületi vándorlással nőttek, ami igen szemléletesen látszik a 14. ábrán. Itt látható, hogy a kocka felületén vele egyenlő irányítású kubikus oszlop nő. A kocka felületén láthatók a bemélyedések, ahonnan az anyag eltávozott. A mellérajzolt vázlat a fénykép hiányosságait



12. ábra

NaCl kristály növekedése gőzből egy melegített dróton. Felette az olvadt sócepp. Alatta a kristály sematikus váza.

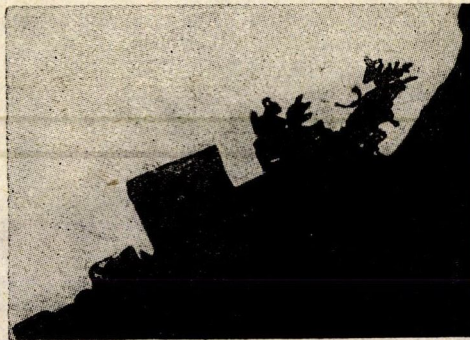
pótolja. A felületi vándorlás csak a hőmérséklettől függ. A megfigyelések szerint a felületi vándorlással egyidejűleg a felület, melegebb helyein, párolog. A finom ágakból álló kristályok ebből származnak. Ez a 15. ábrán látható. Ezek a megfigyelések azt mutatják, hogy a *Kossel*-elmélet, túl idealizáltsága ellenére, feltétlenül tartalmaz helyes magot. *László Tihamér* Kolozsvárott megfigyeléseket végzett a hat kristályrendszerhez tartozó anyagokon és azt találta, hogy minden kristályrendszerben helytállóak (vizes és más oldatnál) a fenti elvek. A megfigyelések szerint egyhajlású és háromhajlású rendszerbeli anyagoknál nem minden csúcs viselkedik egyformán. Sajnos, *László* dolgozata még nem jelent meg.

Határréteg. A *Kossel*-elmélet érvényességét több esetre igazoltuk. Láttuk, hogy ez a kristálynövekedés fázisától független. Most az elméleti séma és a megfigyelhető rétegek közötti méretbeli eltéréssel foglalkozunk.

Gondoljunk egy oldatból növvő kristályra. Az oldat párolog, ennek megfelelően a túltelítődés állandó. A kristály felületére a hozzánövekedés azonban szakaszos. A mikroszkópiai megfigyelés szerint atomáris méretekhez képest,



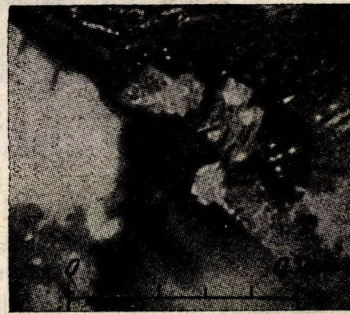
a



b



c

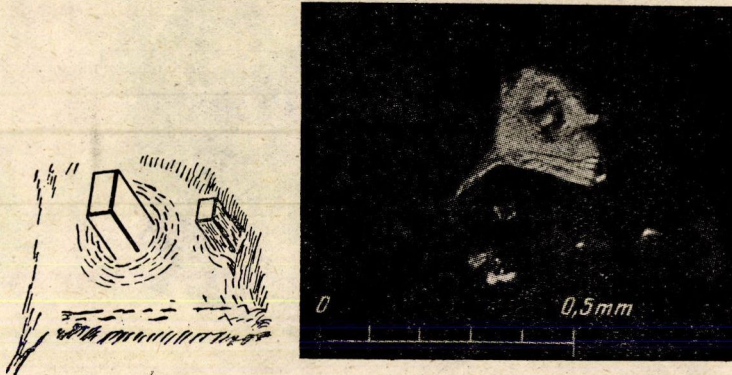


d

13. ábra.

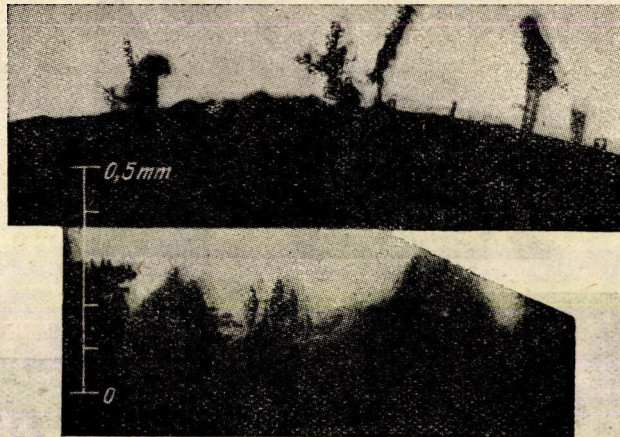
Kristályok a magas hőmérsékletű sószemcse felületén. Alacsony kockaszerű és vékony elágazó képződmények.

egyszerre igen vastag réteg válik ki. Ilyen sok ion egyidejű kiválása nem lehetséges, ha a kristályfelület közelében a koncentráció ugyanolyan, mint a folyadék többi részében. Így a kiválás után ionhiány lépne fel a felület mellett, ami nem értelmezhető. A felület közelében nagyobb ionkoncentrációt nem tételezhetünk



14. ábra.

Egy felületen ionvándorlással ránövő kristály. Alul látható a bemélyedés az ionok elvándorlása következtében.



15. ábra.

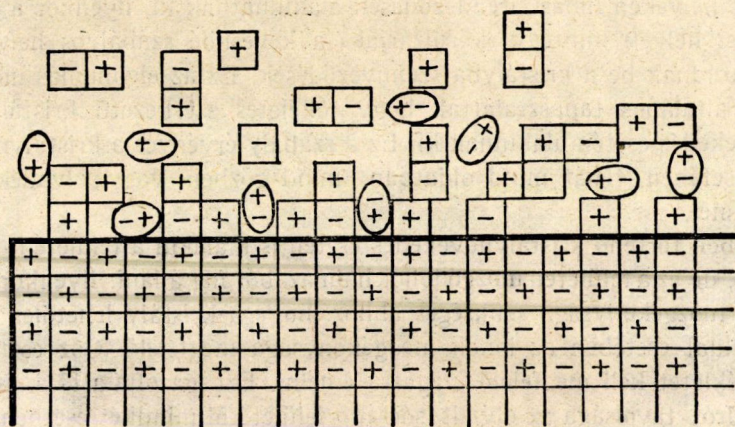
A forró sócsepp felületén gőzből nőtt kristályok.

fel, mert az ionok nem diffundálnak a kisebb koncentrációjú helyről ide. Tehát szükséges, hogy a kristályfelület közelében nagyobb ionmennyiség legyen jelen. Ezt normális diffúzió jelenség nem hozhatja létre. Keresnünk kell a magyarázatát annak, hogy miképpen jön létre a kristályfelület közelében nagyobb ionkoncentráció.

Ehhez egy új hatás fellépését kell feltételeznünk. Ezt a kérdést elméletileg először Kolozsvárott fejtettem ki. Elgondolásom a következő. A kristály ionjai

az oldatban levő ionokra kifelé is vonzóerőt gyakorolnak. Az oldat túltelített, így lesznek ionok, amelyek hidrátburka már nem tökéletes. Várható, hogy egyes ionok a hidrátburokkal együtt a kristály felületéhez kapcsolódnak. Figyelembe kell venni azt is, hogy a vízmolekulák dipolok, tehát a kristályfelület közelében azokra is vonzóerő hat. Így egyes H_2O molekulák szintén a kristályfelülethez kapcsolódhatnak. Nem tudhatjuk, hogy a vízmolekula pólusaival egy ionpárhoz kapcsolódik-e, vagy pedig »rááll« az ionra.

Ennek eldöntéséhez az ion és molekula méreteket is figyelembe kell vennünk. Igen valószínű, hogy a kristály szélső ionrétegére a részecskék rendezetten fognak hozzátapadni. A hozzátapadt réteg bizonyos értelemben a rács folytatását képezi, tehát rendezett, de kevésbé tökéletesen, mint a szélső hálózati réteg. Erre, a részben rendezett rétegre, ionokból és vízmolekulákból egy másik



16. ábra.

A kristály felületén az átmeneti határréteg sematikus rajza.

réteg rakodik rá. Ebben a rétegben a rendezettség kisebb lesz, mint a megelőzőben. Az ionkoncentráció a határrétegben nagyobb lesz, mint az oldatban. Így maga a kristályfelület, amelynek ionszerkezete miatt jól meghatározott elektromos erőtere van, alkotja azt az agenszt, ami az ionokat koncentrálja. Röviden: a kristályfelületen féligrendezett réteg alakul ki (1.16. ábra), amelyben nagyobb az ionkoncentráció, mint az oldatban. Ebben a rétegben egyes ionok még a nem teljes hidrátburokukkal vesznek részt, más ionok viszont ellentétes töltésű ionpárjukkal együtt szerepelnek. Ebben a rétegben a *Brown*-mozgás kisebb, mint az oldatban. Az átmeneti réteg szerkezete kifelé fokozatosan romlik.

Láttuk, hogy a kristály az átmeneti rétegből veszi a növekedéséhez szükséges ionokat. Az új ionrétegek kialakulása csúcson kezdődik. Az átmeneti réteg egy pontján megbomlik az egyensúly (kvázi egyensúly) és ennek következtében az ionok hozzáilleszkednek a kristályhoz. A hozzáilleszkedés ebben az esetben nem egyetlen ionréteget ad, hanem több ionátmérőjú réteget, a közelben

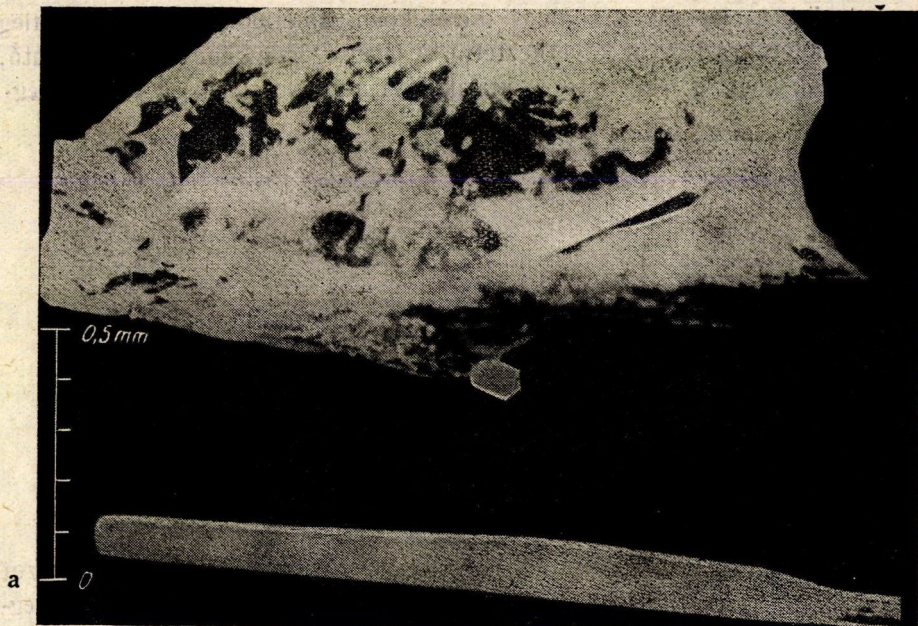
felhalmozott ionmennyiségnek megfelelően. Ennél a folyamatnál nemcsak az történik, hogy az ionok hozzánőnek a kristályhoz, hanem a felesleges vízmolekulák az átmeneti réteg távolabbi részével keverednek, úgyhogy helyreáll az oldat távolabbi részeinek megfelelő koncentráció. Ez kvalitatíve valószínűsíthető, hiszen a nagyobb ionkoncentráció a normális koncentráció értékén levő oldatban keletkezett. A kristályhoz éppen a koncentráció-többletet okozó ionmennyiség nő hozzá.

Ez megegyezik azzal is, hogy a kristály felületén adott esetben egy aktusban csak egy ionréteg keletkezik. Ha az oldat párolgása igen lassú, a kristály-növekedés is lassú lesz.

A fenti kép továbbelemzéséből következik, hogy egyes vízmolekulák beszorulhatnak a határrétegbe, mivel aránylag gyorsan több ionréteg alakul ki. Így egyes helyeken hibás elrendeződések alakulhatnak ki, ilyenkor a szabályos növekedési helyek mintegy »körülzárják« a kevésbé szabályos helyet. Ilyen módon záródnak be a kristályba szennyeződések. Ez az elgondolás megegyezik azzal az általános tapasztalattal, hogy tökéletes szerkezetű kristályok csak lassú növekedés esetén alakulnak ki. Ez a szabály érvényes a kristály-növekedés minden esetében, tehát mind oldatban, mind gőzben, vagy oldadékban való növekedésnél.

Gőzben történő kristály-növekedés esetén is kialakul a felületen egy átmeneti réteg, de ez a felületen mozgó ionok halmazából fog állani. Ilyenkor az ionok megfelelő mozgékonyasága szükséges ahhoz, hogy a kristály lehetőleg tökéletes legyen. Oldat esetében az ionok mozgékonyasága megfelelő. Gőz esetén ehhez a hőmérsékletet kell megfelelő magasra emelni. Ezt igazolja a 17/a. és b. ábra. A felfogódrót távolsága az olvadt sócsepp felületétől mindkét esetben 0.3 mm. A 17/a esetben a felfogódrót szobahőmérsékletű, a 17/b esetben a felfogódrót fűtött. Utóbbi esetben nagy egykristály alakul ki, előbbi esetben csak apró kristályokból álló hőszerű képződmény.

Kísérleteket végeztem az átmeneti réteg reális voltának igazolására. A sűrűdési alapon végzett kísérleteim nem vezettek megfelelő eredményhez. Újabban azonban több megfigyelést tettünk, amelyek pozitív bizonyítékként foghatók fel. Ilyen megfigyelések egyike a következő: lapos edényben $NaCl$ oldatot párologtatunk el. Az edény alján apró kristályok jelennek meg. Idővel ezek csaknem kivétel nélkül egy bizonyos keresztirányú csíkozatot mutatnak. A 18./a. ábrán ilyen kristály felülről látható. Kellő idő múlva a kristály alulról nézve lépcsőzetes szerkezetű lesz (18/b). Ez a lépcsőzetes szerkezet csak a kristály felületén levő átmeneti határréteg segítségével alakulhatott ki. Kezdetben a kristály c lapjával a d üveglapon feküdt. Később felemelkedett. Ekkor a c lap alatt oldat van. Párolgás nincs, tehát a kristály l lépcsői nem ebből az anyagból nőttek ki. Az l lépcsők csak úgy alakulhattak ki, hogy az anyag befolyt a kristály e oldalai alá. Az e lapokon és az f fedőlapon kialakult az átmeneti határréteg.

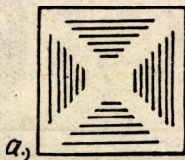
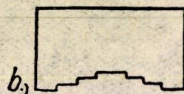


17. ábra.

A NaCl -gőz kikristályosodása meleg (nagy egykristályok) és hideg (hószzerű kiskristályok) felületen.

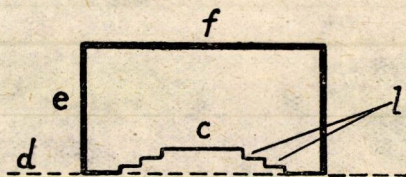
Az anyag hozzánövése a kristályhoz úgy történik, hogy a felületen csúcsokból, illetve élékből kiindulva mintegy szétfolyik és az e lapok éleinél behatol a kristály alá. Ha a kristály elég nagy, a rendelkezésre álló anyag az alsó lapot nem tudja teljesen betölteni. Ilyenkor csak a külső éltől bizonyos távolságra tud behatolni. A kristály szélességben is nő és így nyilvánvaló, hogy az alsó részen a lépcsők kifelé tartanak. Ezt a jelenséget *Seignette*-sónál is megfigyeltem. Itt a lépcsők centiméteres méretet is elérnek. *Bielek Sándor* munkatársam véle-

ménye szerint a lépcsők szabályos méreteken ismétlődnek. Ebből esetleg kvantitatív adatokra lehetne következtetni. A jelenség igen könnyen előállítható, ami arra utal, hogy a felületi réteg kialakulása általános jelenség és jól meg-

a₁b₁

18/a. ábra.

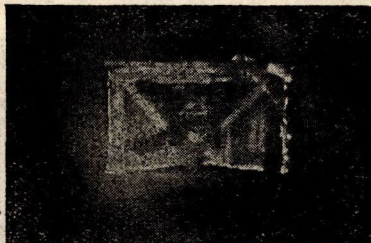
Az oldat alján nőtt kristályok rajza.



18/b. ábra.

Az edény alján keletkező NaCl kristályok keresztmetszetben.

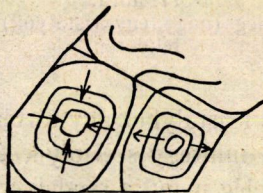
határozott tulajdonságokkal rendelkeznek. A 19. ábra ilyen keresztmetszet fényképe. 1935-ben megjelent dolgozatomban leírtam erre vonatkozó megfigyeléseimet, amint a felületi réteg, előretörő frontjának vonalát változtatva,



19. ábra.

A lépcsős keresztmetszet fotográfiája.

szinte tapogatózva halad előre (lásd az említett dolgozat 2. sematikus ábráját). A felületi rétegek maradványai természetes kristályokon is megfigyelhetők. C. W. Bunn és H. Emmeth⁸ a rétegek növekedését más anyagokon is megfigyelték.

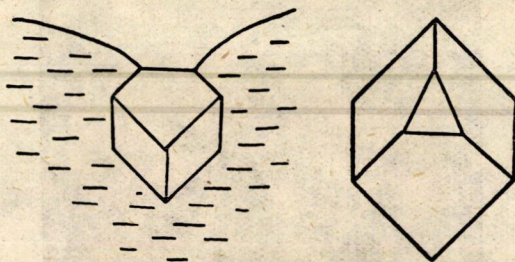


20. ábra.

Rétegnövekedés ammóniumsulfát kristályon (Bunn és Emmeth után).

Tőlük származik a 20. ábra, amely a réteges növekedést tünteti fel ammóniumsulfát esetében. A szerzők a réteges növekedésre mikroszkópiai felvételeket is

közölnek. (Idézett dolgozat *d* ábrája). *C. W. Bunn*⁸ növekedésben levő kristály körül az oldatban keletkező koncentrációnövekedéssel is foglalkozik. Ezt optikailag mutatja ki és interferencia felvételtől kiméri. Megállapítja, hogy a kristály felületétől 0,5—1 mm távolságra a koncentrációkülönbség még mérhető. Ez a koncentrációkülönbség a fentiek szerint csakis úgy jöhet létre, ha valami külön hatórendszer fenntartja. Még nem merem határozottan állítani, hogy fenti elgondolásom és *Bunn* mérése teljesen megegyezik. A kísérletek mindenestre az átmeneti határréteg reális existenciájára mutatnak. A koncentráció *Bunn*-féle kimérését nagy mértékben zavarja a folyadék áramlása, és az átvilágítás miatt fellépő hőmérsékletkülönbségek. *Bunn*⁹ dolgozatának 5. ábráján megadja több tízedmilliméter távolságra a túltelítés növekedését. *Bunn* nem talált összefüggést a koncentrációkülönbségek és a kristály-növekedési sebesség között, de dolgozata végén maga is valami új, magyarázó tényezőt keres. Véleményem szerint ez az új tényező éppen a kristály felületén levő átmeneti határréteg. A határréteg csak rövid ideig stabil szerkezet, amelyben a hozzánövés pillanata független a környező oldat koncentrációjától. Ez a megállapítás megegyezik *Bunn* megfigyelésével NaClO_3 kristály esetében.



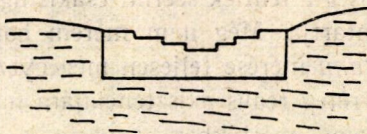
21. ábra.

Oldat felületén nőtt és lebegő kristályok sematikus rajza.

Bunn a NaClO_3 kristály esetében azt tapasztalta, hogy erős növekedésben levő helyeken a koncentráció alacsonyabb. *Bunn* a koncentráció és a kristály-növekedési sebesség között arányosságot keres, ezért ezt nem tudta értelmezni. Az átmeneti réteg kialakulása a kristály közvetlen környezetében csökkenti a túltelítettséget. Az átmeneti réteg kialakulása és a kristályhoz való hozzánövése gyorsan történik meg és ez teszi a túltelítettséget alacsonyvá. Tehát, az átmeneti határréteg önálló szerkezeti mivolta és működése megmagyarázza *Bunn* tapasztalatát.

Megfigyeléseink másik sorozata az oldat szabad felületén növő, lebegő kristályokra vonatkozik. (21. ábra) Az oldat felületén lebegő kristályok növekedését valószínűleg az oldat felszínén úszó láthatatlan kis szennyezések segítik elő. A megfigyelések arra is utalnak, hogy az oldatban levő átmeneti határrétegből az anyag a szabad kristályfelszínre áramlik. A szabad felület sok esetben síma-

növekedést mutat, bár az oldat nem borítja be. Ez esetleg úgy történhet, hogy az anyag oldalról áramlik a felületre. A 22. ábra olyan esetet mutat, amikor a szabad felület lépcsőzetesen kiemelkedik, illetve besüllyed, ami annak a következménye, hogy a szélek az oldatban levő lapokon lépcsőzetesen kiemelkednek.

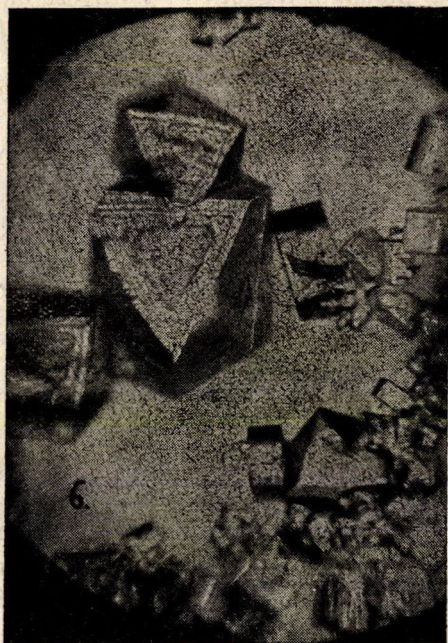


22. ábra.

Az oldat felületén lebegő, lépcsőzetes keresztmetszetű kristály sematikus rajza.

Egy mikrofotográfiai felvétel a 23. ábrán lebegő kristályok felületének kialakulását mutatja.

Közismert, hogy minden test felülete a környező gázból egy réteget adszorbeál. Ismeretes, hogy a só felületén a víz adszorbeálódik, ennek jelentős



23. ábra.

Oldat felületén lebegő kristályok.

szerepe van a kristály elektromos vezetőképességében. Az oldatban lebegő kristályok felületén jelentékeny mennyiségű adszorbeált víz van. Feltűnő, hogy ennek ellenére az oldat nem kúszik rá a felületére, ahogyan azt kapilláris megfontolásokból várnánk. Sok kísérlet igazolja, hogy ez nem történik meg. Ez azt bizonyítja, hogy a kristály felületén adszorbeált víz és a $NaCl$ ionok olyan

szerkezetet alkotnak, ami az oldat felületén levő határréteggel mintegy egyensúlyt tart. Ez a megfontolás azt bizonyítja, hogy a szabad felületen levő adszorbeált réteg is önálló szerkezet szerepét tölti be.

A fenti kísérletek több oldalról megvilágítják azt, hogy az oldat és oldott anyag határozott szerkezetű határréteget képes alkotni.

Újabb kísérleteimben, különösen a határréteg kísérleti kimutatásában, *Bielek Sándor* tanársegéd segédkezett nagy szorgalommal és invencióval.

Műszaki Egyetem

Kísérleti Fizikai Intézete, Budapest.

IRODALOM

- ¹ *Buckley* : Habit modification in crystals as a result of the introduction of impurities during growth.
- ² *Spangenberg és Neuhaus* : Zeitschrift f. Krist. 68 (1928), 1. és N. Jahrb. és Z. f. Min. Mügge Festband 1928.
- ³ *Leipziger Vorträge* 1928. I. Tafel. 9. old.
- ⁴ *Leipziger Vorträge* 1928.
- ⁵ *Gyulai Z.* : Z. Kristallogr. (A)97 (1935), 149.
- ⁶ *Gyulai Z.* : Zeitschr. f. Physik. 125. S. 1—17. 1948.
- ⁷ *Gyulai Z.* : Acta Bolyai 1946. 8—14. Cluj-Kolozsvár.
- ⁸ *Bunn C. W. and Emmeth H.* : Crystals Growth. Discussion of the Faraday Society No. 5. 1949.
- ⁹ *Bunn C. W.* : Concentration Gradient and the Rates of Growth of Crystals.

LUMINESZKÁLÁS ELMÉLETÉRE VONATKOZÓ ÚJABB KUTATÁSOK

SZIGETI GYÖRGY

Előadta az 1950. november 27-én tartott osztályülésen

Ebben a dolgozatban összefoglaló képet kívánunk adni azokról a kutatásokról, amelyeket az Egyesült Izzólámpa és Villamossági Rt. kutatólaboratóriumában (ma TKI III. sz. labor.) végeztünk. A mindinkább fejlődő fénycső- és katódsugárcsőgyártás szükségessé tette, hogy fluoreszkáló anyagok tanulmányozásával foglalkozzunk. Új anyagok kifejlesztése a jelenségek elméleti ismerete nélkül nehezen képzelhető el, igyekeztünk tehát a lumineszkáláskor lejátszódó folyamatok alapjaihoz hozzáférközni.

Az első idevágó méréseket és vizsgálatokat 1940-ben kezdtem, 1943-ban kapcsolódott be a munkába *Nagy Elemér*. A felszabadulás és a laboratórium újjáépítése után a tudományos kutatásnak az eddiginél sokkal nagyobb lehetősége nyílt meg előttünk. Ekkor vontuk be a munkába *Makai Endrét*, *Bodó Zalánt* és végül *Gergely Györgyöt*.

A vizsgálatokat főleg mangánnal aktivált cinkszilikátokon végeztük, de egyes esetekben vizsgálat tárgyává tettük az ugyancsak mangánnal aktivált cinkberilliumszilikátot és a mangánnal, valamint antimonnal aktivált mesterséges apatitot (kalciumklorofluorofoszfátot) is. Első feladatunk volt a fluoreszkáló anyagok spektrumának pontos felvétele. Miután a rendelkezésre álló König—Martens-féle spektrofotométer pontossága nem volt kielégítő, ki kellett dolgoznunk egy, a kompenzáció elvén működő spektrofotométert, amely fotomultiplier segítségével egy 20 Å szélességű sávban a fény intenzitásának kb. 0,5% pontosságú mérését tette lehetővé. Ezt a készüléket és általában a mérésre használt többi apparátusunkat *Nagy Elemér* részletesen ismerteti.

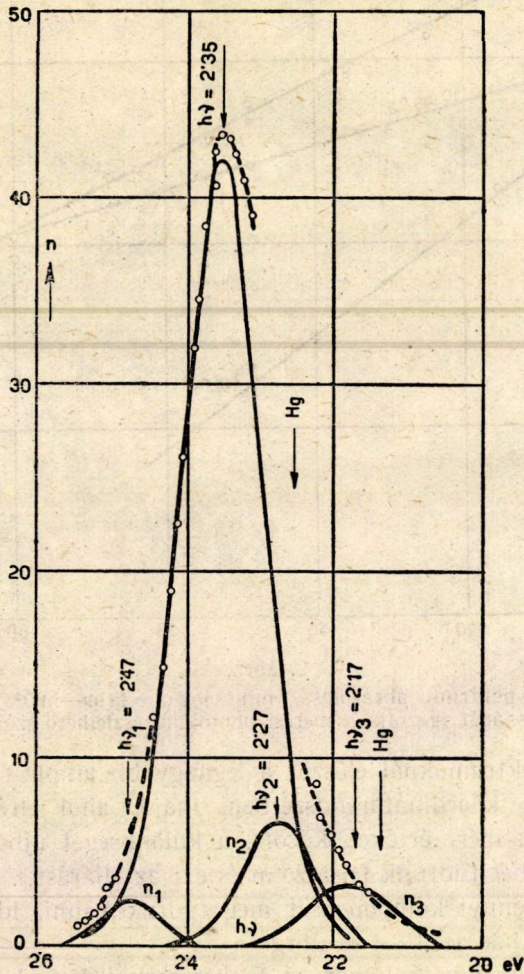
Méréseink első eredményeképpen megállapíthattuk, hogy a vizsgált anyagok spektruma abban az esetben, ha az emittált fotonok számát ábrázoljuk a frekvencia függvényében, *Gauss-görbék* összege gyanánt ábrázolható. Ez az egyszerű összefüggés legszembetűnőbben azon anyagoknál mutatkozott, amelyek spektruma, így pl. a cinkberilliumszilikaté, főleg egyetlen sávból áll. Ez az összefüggés a régebbi szerzőknek azért nem tűnt fel, mert az eddigi gyakorlat szerint nem a fotonok számát, hanem a fény intenzitását ábrázolták, és azt is főleg a hullámhossz függvényében. Ebben az ábrázolásban pedig az

általunk szimmetrikusnak felismert spektrum igen lényeges aszimmetriát mutat fel.

Ezt az összefüggést a legszembetűnőbben akkor észlelhetjük, ha a görbét oly koordináta-rendszerben ábrázoljuk, amelyben a Gauss-görbének egyenes felel meg, tehát az abszcissa a maximum helyétől mért frekvenciakülönbség négyzete, az ordináta pedig az emittált fotonok számának logaritmus. Látható, hogy az utóbbi esetben milyen pontosan reprezentálja az

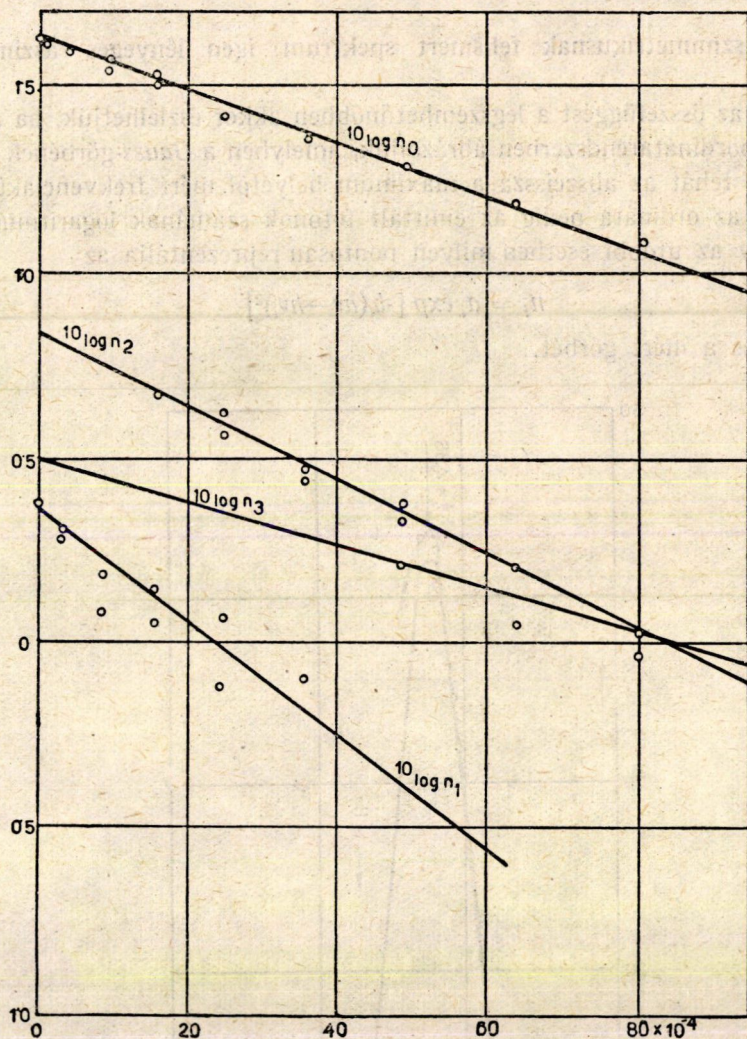
$$n_i = a_i \exp [-b_i(h\nu - h\nu_i)^2] \quad (1)$$

összefüggés a mért görbét.



1. ábra.

Mangánnal aktivált cinkszilikát emissziós spektruma. Az emittált fotonok számát (n) mint $h\nu$ függvényét ábrázolva, a spektrum egy főszávrá és három mellészávrá bontható.

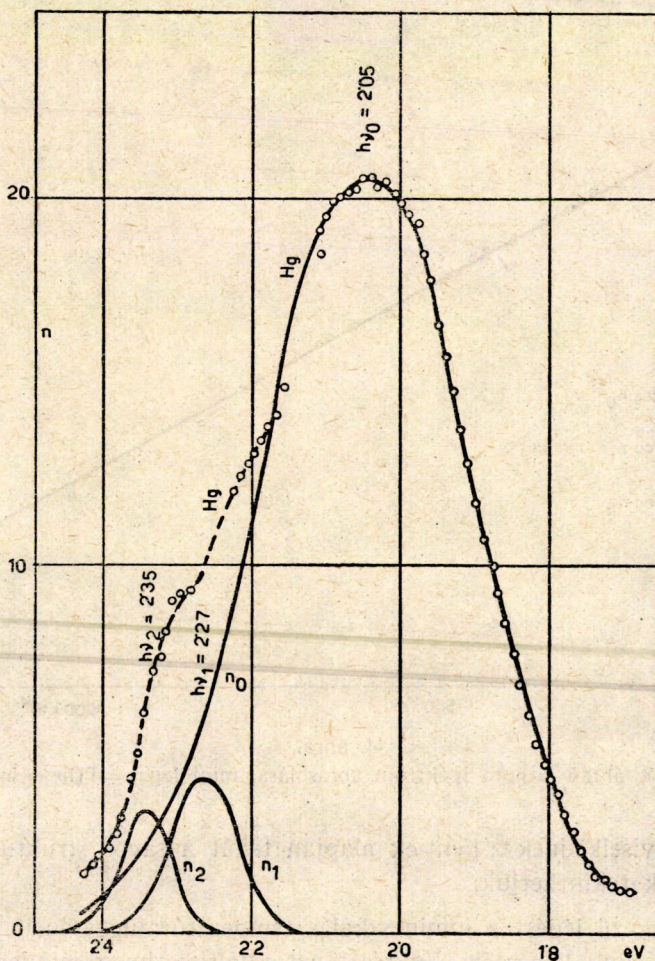


2. ábra.

Az 1. ábrán látható spektrum ábrázolása, mint $\log n = f(h\nu - h\nu_0)^2$. A Gauss görbékre való felbontás jogosságát igazolja a mérési pontoknál észlelhető szórás csekély volta.

Összetett spektrumoknál először a legnagyobb amplitudójú komponenset ábráztuk a leírt koordináta-rendszerben, majd, ahol eltérés mutatkozott a Gauss-görbe és a mért értékek között, a különbséget újból ábrázolva, egy második Gauss-görbét tudunk felrajzolni és ezt az eljárást többször ismételve, a spektrum valamennyi komponensét meg tudtuk kapni. Idevágó méréseink eredményeit mutatják az 1—4-es ábrák.

Ezen eredményeinket először az Elektrotechnikában,¹ majd a Műegyetemi Közleményekben² és a Journal of the Optical Society of America-³ ban közzétettük.

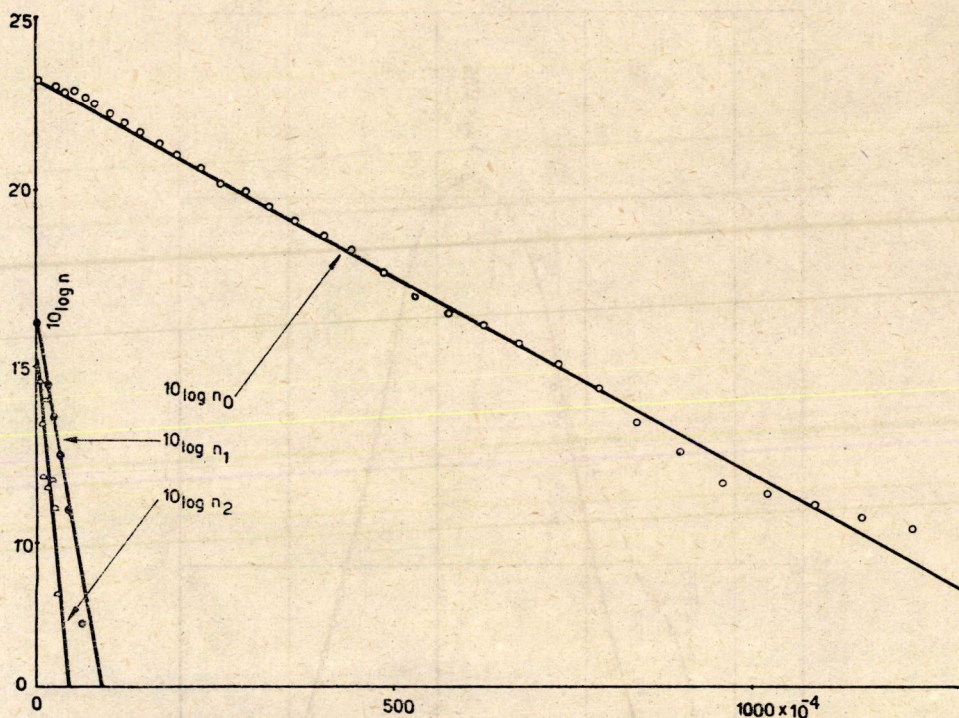


3. ábra.

Mangánnal aktivált cink-berillium-szilikát emissziós spektruma. A spektrum egy főszávot és két mellékszávot tartalmaz.

Hasonló módon ki tudtuk mutatni a Gauss-görbékre való felbonthatóságot az irodalomban található igen sok különböző emissziós, abszorpciós, és gerjesztési spektrumra is, minden esetben akkor, ha a közölt görbéket átszámítottuk a fotonszám és a frekvencia függvényére.

Az általunk alkalmazott felbontás jogosult voltát újabban Schulman⁴ kétségbevonta, azonban egyrészt K. H. Butler^{5, 5a} a mi méréseinkével teljesen azonos eredményre jutott, másrészt pedig újabb méréseink során foszforeszcenciában sikerült az egyes sávokat egymástól teljes mértékben elválasztani.⁶ Ugyancsak igazolják méréseink és felbontási módunk helyességét azok a mérési eredményeink, amelyek szerint az egyes sávok hőmérséklet hatására külön-



4. ábra.

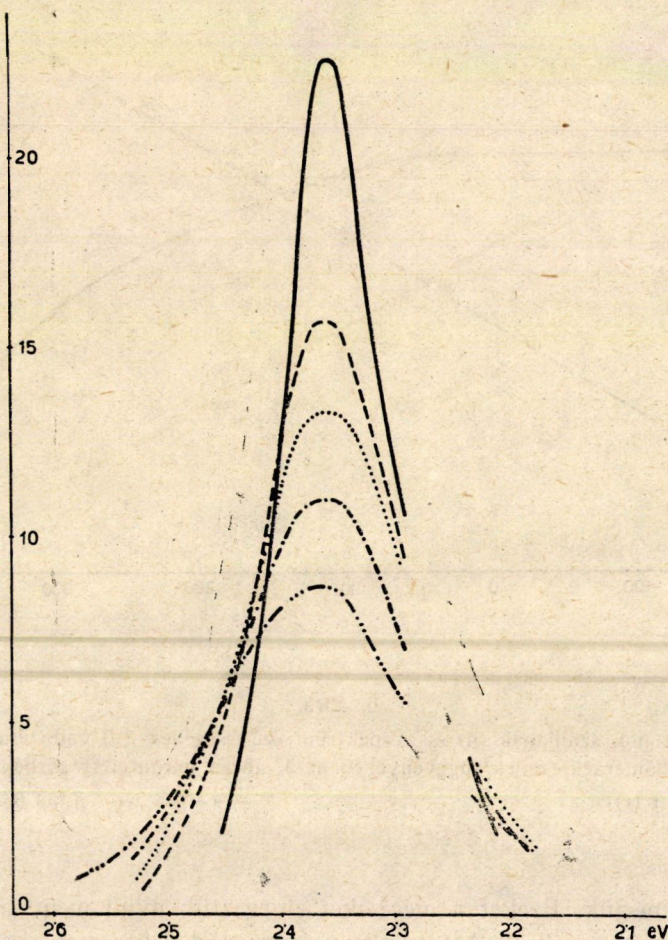
A 3. ábrán látható spektrum ábrázolása, mint $\log n = f(h\nu - h\nu_i)^2$

böző módon viselkednek³. Fentiek alapján tehát a sávos struktúra létezését bizonyítottan tekinthetjük.

A következő lépést a lumineszkálás temperatúrafüggésének vizsgálatára irányuló méréseink képezték. Egyrészt azt találtuk, hogy minden egyes sáv a temperatura hatására mindinkább elszélesedik, másrészt pedig a kibocsátott fotonok száma a temperatura növelésével előbb állandó, majd igen gyorsan csökken (5. ábra). A fotonszám csökkenésének törvényszerűsége mindig leírható a következő formulával:

$$N = N_0 \frac{1}{1 + C \exp(-E/kT)}. \quad (2)$$

A mi méréseink eredményei teljesen egyeznek *Laskarev* és *Koszogonova*⁷ méréseivel és igazolják a fenti *Mott—Gurney* formulát⁸. A sáv szélességnek hőmérséklettel való függésére megállapítottuk azt, hogy igen tág határok között a sáv szélesség a hőmérséklettel lineárisan változik, igen magas hőmérsékleten esetleg annál szélesebb. A sáv szélesség változása általában kb. 1,5—1,7 *kT* nagyságrendű. Extrapolálva méréseinket 0 abszolút hőmérsékletre, mindig



5. ábra.

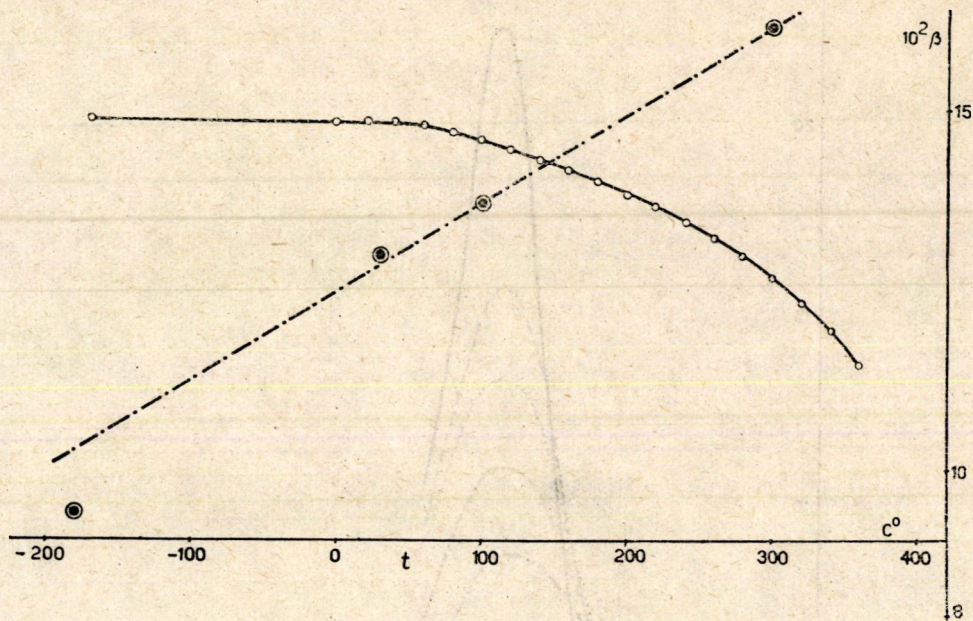
1 % Mn-al aktivált cinkszilikát emissziós spektrumának változása növekvő hőmérséklettel

— T = 100° K
 - - - T = 300° K
 . . . T = 400° K

- · - · - T = 500° K
 - · - · - T = 600° K

arra az eredményre jutunk, hogy a sávok szélessége ott is véges, tehát a sávok nem tekinthetők kiszélesedett vonalnak (6. ábra).

Ezek a felismerések akkor nyertek mélyebb értelmet, amikor összevetettük a porok elektromos sajátságainak vizsgálatával. A régebbi irodalomban általában szokás volt vizsgálni a foszforeszkáló és fluoreszkáló anyagoknak elektromos vezetőképességét és dielektromos állandóját a gerjesztés függvényében. Előzetes megfontolásaink arra vezettek, hogy a por viselkedésére fentieknél sokkal jellemzőbb képet kell kapnunk, ha az anyagok dielektromos



6. ábra.

Az emittált fotonok számának (n) és a spektrum szélességének (β) változása a fluoreszkáló por hőmérsékletének függvényében az 5. ábrán feltüntetett görbék alapján

—○—○— $n = f(t)$

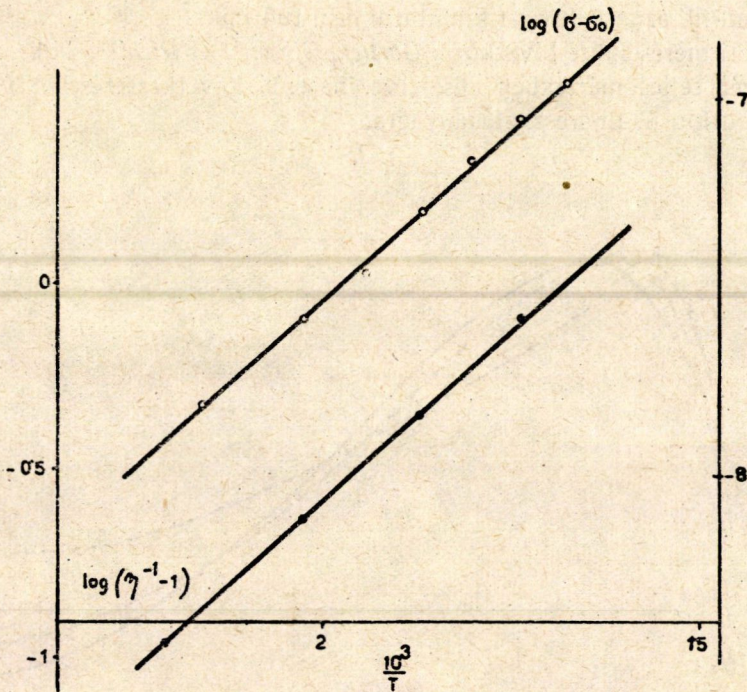
— . —○— . — $\beta = f(t)$

veszteségeit mérjük. Ezeket a méréseket elvégeztük mind megvilágítás alatt, mind megvilágítás nélkül. Azt találtuk, hogy a dielektromos veszteségekből (pl. 20 Mc-nál mérve) kiszámíthatunk egy, a szóbanforgó anyagra jellemző vezetőképességet, amely több nagyságrenddel nagyobb, mint az egyenárammal mért vezetőképesség. Míg azonban az egyenárammal mért vezetőképesség a megvilágításnak volt függvénye (Randall⁹, Garlick és Gibson¹⁰), addig a dielektromos veszteségek alig függtek a megvilágítástól. További kísérleteink rávezettek arra, hogy elektronvezetés csak gerjesztés alatt és foszforeszcencia közben észlelhető, míg a dielektromos veszteségek a por fluoreszkáló képességével függenek össze. Ezek felismerésével mérésorozatot végeztünk a dielektromos veszteségeknek a temperatura függvényében történő meghatározására. A dielektromos veszteségeket az alábbi mérésorozatban megvilágítás nélkül, tehát gerjesztetlen porokon mértük. Azt találtuk, hogy a szobahőmérsékleten, besugárzás nélkül, tehát sötétben levő poron mért dielektromos veszteségek különböző cinkszilikátpéldányoknál kb. arányosak a por világítóképességével. Ezek a veszteségek bizonyos határig a temperaturától függetlennek mutat-

koztak. Egy adott (egy-egy poroknál különböző, kb. 60—200° C) temperatura felett azonban a dielektromos veszteségek rohamosan növekedni kezdtek. Ezek a növekvő veszteségek észleleteink szerint a temperaturával exponenciálisan növekedtek. A dielektromos veszteségek egész lefolyását az alábbi formulával tudtuk pontosan leírni^{1, 2, 3, 11}:

$$\sigma = \sigma_0 + A \exp(-E/kT). \quad (3)$$

A dielektromos veszteségek és a fénycsökkenés közötti összefüggés onnan vált nyilvánvalóvá, hogy a két jelenség temperaturafüggését leíró exponenciális kitevője ugyanannál a pornál azonos (7. ábra).



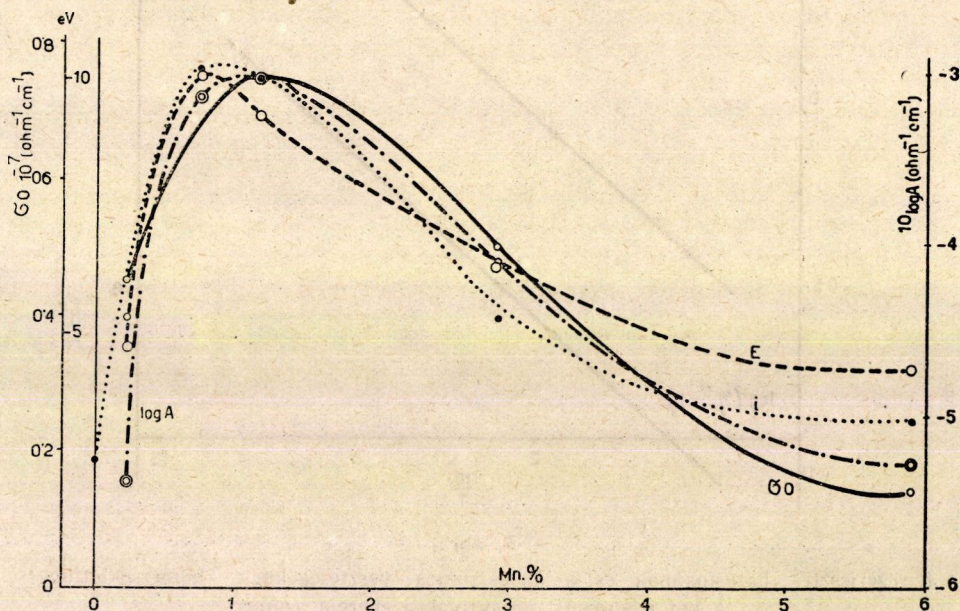
7. ábra.

A fénygerjesztés hatásfokának és a dielektromos veszteségeknek hőmérsékletfüggése. A két jelenségnél az aktiválási energia azonos.

Mivel azt tapasztaltuk, hogy a hőmérséklet növelésével a dielektromos veszteség megnő, és ez a növekedés a fénycsökkenéssel párhuzamosan történik, megkísérelhetjük a fénycsökkenés okát a dielektromos veszteség növekedésének okával összekapcsolni. Ha a dielektromos veszteség növekedésének oka az exponenciálisan növekedő számú dipólusokban keresendő, megkísérelhetjük ezen

dipólusokat tekinteni a fénycsökkenés okának, azzal a legegyszerűbb feltevésével, hogy ezek a dipólusok a világító centrumokkal a gerjesztő ultraibolya elnyelésében konkurrálnak. Ezt az elképzelést támogatja az a tény is, hogy méréseink szerint az aktiválatlan anyag ultraibolyasugárzást nem abszorbeál, nem világít és dielektromos vesztesége sincs. Azt találtuk, hogy az ultraibolya abszorpció — és természetesen a világítóképesség is — a vizsgált anyagnál az aktivátor jelenlétéhez van kötve. Ugyanúgy, aktivátort tartalmazó anyagnál lehetett csak észlelni a mért dielektromos veszteségeket, melyeknek a temperaturától független része az anyag világítóképességével volt arányos és a temperaturától függő része pedig a világítóképességnek a temperatura növelésekor mutatkozó csökkenésnek felelt meg. Meg kell még említenünk, hogy egyenáramú mérésekkel a vizsgált anyagon vezetőképeességet, ill. azon változást kimutatni nem tudtunk.

Fenti méréseinkre hivatkozik *Garlick, Gibson*¹² és *Riehl*¹³, akik, méréseink helyességét teljes mértékben elismerve, hasonló következtetéseket vonnak le cinkszulfid típusú fluoreszkáló anyagra.



8. ábra.

Az aktivátor mennyiségének hatása a lumineszkálásra és a dielektromos veszteségre.

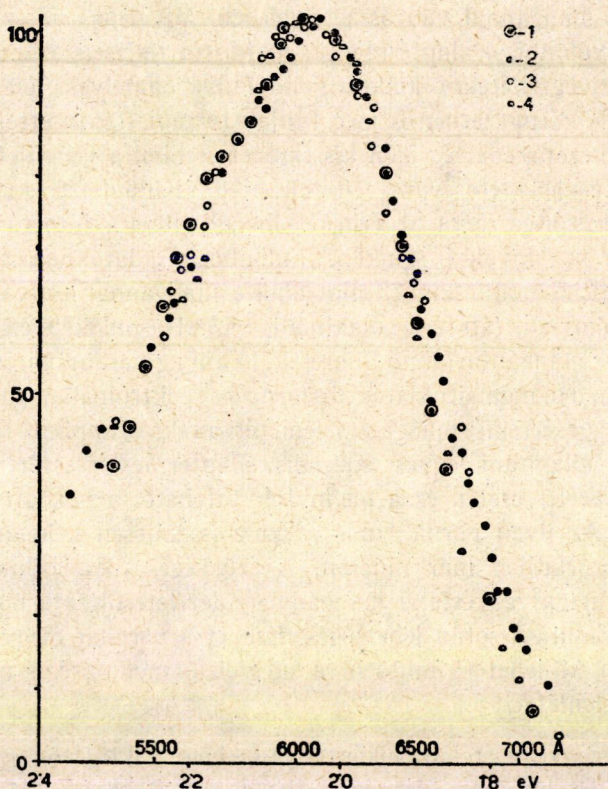
- i a fény intenzitása
- E - - - - - a fénycsökkenés és a dielektromos veszteségek hőfokfüggésére jellemző aktiválási energia
- σ_0 ————— a dielektromos veszteségek hőfoktól független része
- σ_∞ - - - - - a $T = \infty$ hőfokra extrapolált dielektromos veszteség az aktivátorkoncentráció függvényében.

E vizsgálatok után természetszerűleg felmerült a kérdés, vajjon mi idézi elő ezen dipólusok fellépését. Tekintettel arra, hogy a temperaturától független dipólusok fellépése, amely a világitóképességgel halad párhuzamosan, az aktivátor jelenlétéhez van kötve és az aktivátorként beadott kétvegyértékű mangán mennyiségével kezdetben nő, majd később csökken³ (8. ábra); fel lehet tételezni, hogy e dipólusok létezése nem a kétvegyértékű, hanem valamely más formában jelenlevő mangánnal van összefüggésben. Mivel az emissziós sáv helyzete és szélessége különböző alaptérrácsnál majdnem teljesen azonosnak bizonyult, olyan mangánvegyületekre kellett gondolnunk, amelyek jellegzetes nívóikat en különböző környezetben is meg tudják tartani. Tekintettel a temperaturától független vezetőképesség igen kis értékére, ebből a vegyületből is csak igen kis mennyiség jelenléte volt feltételezhető. Különböző mangánvegyületek spektrumát vizsgálva, arra az érdekes megállapításra jutottunk, hogy a permanganát ionok elnyelési színe különböző oldatokban azonos helyeken mutat abszorpciós maximumot, mint ahol a mangánnal aktivált cinkszilikátok fluoreszkálásakor emittált fénye maximális^{14, 15}. Hasonlóképpen megállapítottuk azt is, hogy sok mangántartalmú fluoreszkáló anyag narancsvörös emissziós sávja teljesen azonos a manganátoldatok abszorpciós spektrumában mutatkozó sávval (9. ábra). Magasértékű mangán jelenlétét makroszkopikus mennyiségekben meg tudtuk állapítani egyes speciális alaptérrács-összetételű anyagokban. Megfelelő hőkezelés esetén ez a mennyiség kitehette a beadott összes mangán $\frac{1}{3}$ részét is. Az ilyen porok már a színe is teljesen kékeszöld, és világitóképessége gyakorlatilag már nincsen. A szükséges (becslésünk szerint 10^{-3} % mennyiségű) magasvegyértékű mangánvegyület létesülése a normális, jól világitó porok előállítása során lehetséges. Ezeket a porokat megvizsgálva, kémiai úton valóban ki lehetett mutatni a megfelelő mennyiségű magasvegyértékű mangánion jelenlétét.

Fentiek szerint tehát elképzelhető, hogy aktivátor gyanánt beadott mangánvegyületnek csak kis részét (10^{-3} — 10^{-4}) kitevő $(MnO_4)^-$, illetőleg $(MnO_4)^{2-}$ csoportok szerepelnek. Ezek mennyisége nagyságrendben azonos a cinkszulfidnál aktivátor gyanánt működő Ag, vagy Cu mennyiségével.

A sávok struktúrák tárgyalása során említettük, hogy az egyes sávok foszforeszcenciában különböző viselkedést mutatnak. Ezen tulajdonságok vizsgálatát egyrészt ultrabolyával történt gerjesztéssel, másrészt pedig katódsugaras gerjesztéssel végeztük. Mérési módszereink két lényeges újítást tartalmaztak: 1. sikerült pontosan megmérni nagyságrendben néhány μsec ideig tartó katódsugárgerjesztés alatt a fény növekedését, majd utána kialakulását, és így képet kaphattunk olyan gyors processzusokról, amelyek eddig hozzáférhetetlenek voltak; 2. multiplier alkalmazása esetén fel tudtuk venni a foszforeszcencia egy adott időpillanatában a teljes spektrumot. A hosszú (0,1 sec, vagy ennél hosszabb) időtartamú foszforeszcenciát *Randall* és munkatársai⁹

igen alaposan megvizsgálták, ezzel szemben a rövid ideig tartó részt az összes szerzők egyetlen exponenciális görbével próbálták leírni. A laboratóriumunkban alkalmazott módszer segítségével sikerült ezt az eddig egységesnek tartott komponenst három különböző exponenciális görbére felbontani¹⁶, melyek idő-

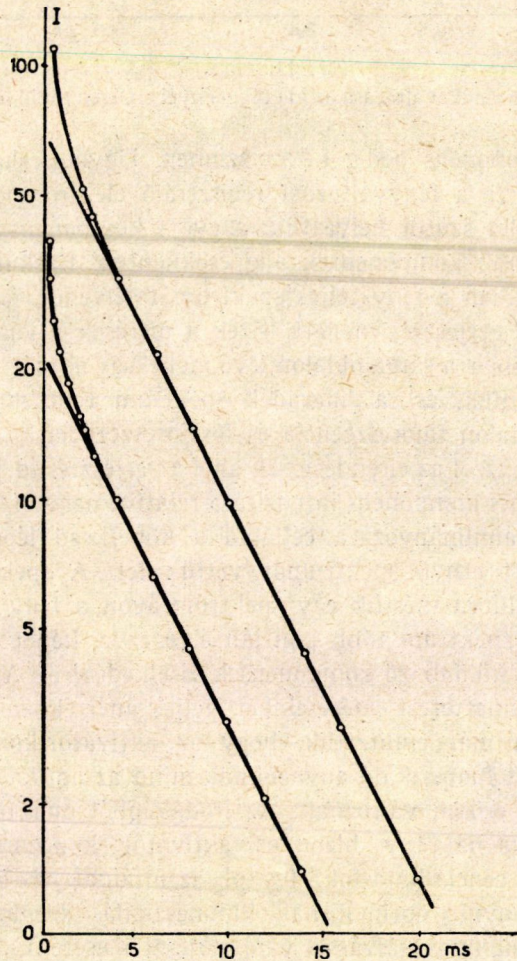


9. ábra.

Különböző cinkberilliumszilikát minták (2–3), cinkborát (4) spektruma és alkalikus közegben oldott káliummanganát abszorpciós tényezője (1), a hullámhossz függvényében.

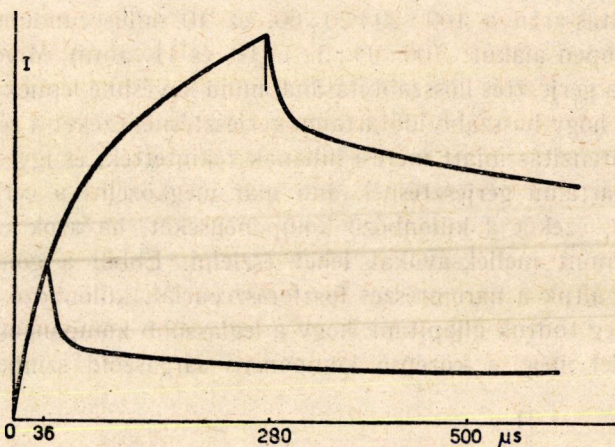
állandói rendre: 200 (ez volt ismert), kb. 2000 és kb. 80 000 sec^{-1} . Megállapítottuk, hogy a gerjesztés rövidítésével az aránylag gyorsabb processzusok lépnek előtérbe. Amennyiben feltételezzük azt, hogy ez a három processzus egymástól független, akkor az ismert időállandókból visszszámolva, 1 μsec –10 msec közti összes gerjesztésre az egyes komponensek amplitúdóit kiszámíthatjuk. Ezeket nagy pontossággal a kísérletekkel megegyezőnek találtuk. Például 1 mikrosecundum gerjesztésnél a teljes fény, a lassú, közepes és igen gyors kompo-

nensek intenzitás-aránya 100 : 20 : 20 : 60, ez 10 millisekundum gerjesztésnél a következőképpen alakul: 100 : 94 : 5 : 1 (10. és 11. ábra). Mivel a gyorsabb komponensek a gerjesztés hosszabbításánál mind kevésbé lépnek fel, ez magyarázza meg azt, hogy hosszabb időtartamú gerjesztésnél ezeket a régebbi kutatók a kis többletintenzitás miatt mérési hibának tekintették, és így elhanyagolták. A hosszú időtartamú gerjesztésnél, ami már megközelíti a gerjesztés egyensúlyi állapotát, ezeket a különböző komponenseket, ha azok esetleg színben különböznek, mint melléksávokat lehet észlelni. Ebből a gondolatmenetből kiindulva vizsgáltuk a háromrészes foszforeszcenciát, különböző szűrők közbeiktatásával. Meg tudtuk állapítani, hogy a leglassúbb komponens a cinkszilikát fősávjának felel meg, a középső komponens sárgászöld színben fluoreszkál,



10. ábra.

A cinkszilikát foszforeszkálásának intenzitása az idő függvényében, hosszú gerjesztés után



11. ábra.

A cinkszilikát világításának változása az idő függvényében, igen rövid idejű gerjesztés esetén.

a leggyorsabb komponens pedig kékes színben. Ugyanis, ha a katódsugárral gerjesztett foszfor és a fényváltozást regisztráló elektronsokszorozó közé pl. a kéket elnyelő zöld szűrőt helyeztük, a gyors komponens majdnem teljesen eltűnt, míg a lassabb komponensek alig csökkentek. Ezekután megpróbáltuk az egyes időpontokban a fény teljes spektrumát felvenni, forgótárcsára alkalmazott ultrabolya gerjesztés mellett. Ezek a mérések a várt eredményt szolgáltatották, amennyiben a sárga oldalon levő melléksávok már 3 msec foszforeszcencia után eltűntek, és a maradék spektrum teljesen szimmetrikusnak látszott. A kék oldalon fluoreszcencia és foszforeszcencia között nem tudtunk különbséget találni ezzel az elrendezéssel, ahol a gerjesztés ideje aránylag hosszú és ennél fogva a gyors komponens intenzitása relatíve nagyon kicsi volt. A viszonyok alaposabb tanulmányozása céljából a következő lépésben egy katódsugárral gerjesztett ernyő spektrumát vettük fel. A spektrográfot egy-egy hullámhosszra beállítva mértük egy spektrumsávon a fény időbeli lefolyását. Ezt elég sűrűn, a spektrum több pontján elvégezve, képet kaptunk az egyes hullámhosszakon a különböző komponensek viselkedéséről. Az így kapott eredmények a fent ismertetett méréseinket teljes mértékben alátámasztották.

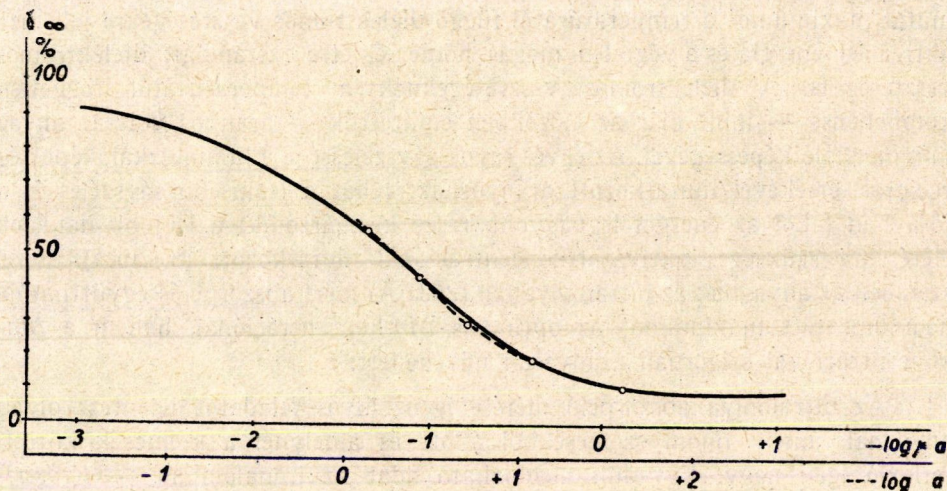
A fentiekben már említettük, hogy az aktivátor-koncentráció változtatásával a vizsgált fuoreszkáló anyagoknak mind az optikai, mind az elektromos tulajdonságai erősen változnak. Az irodalomból már rég közismert volt, hogy minden anyagnál egy bizonyos aktivátor koncentrációnál érhető el a legjobb lumineszcencia-hatásfok. Így pl. az általunk vizsgált cinkszilikátoknál 1% *Mn* bizonyult optimálisnak lumineszkálás szempontjából (2537 Å hullámhosszú ultrabolyasugárázással való gerjesztés esetén). Az egyes tulajdonságokat alaposabban megvizsgálva, azt találtuk, hogy a fényhatásfoknak a változásával párhuzamosan változik, és ezzel azonos *Mn*-koncentrációnál

mutat maximumot a temperatúrától függő dielektromos veszteségekre jellemző aktiválási energia és a végtelen magas hőmérsékletre extrapolált dielektromos veszteség is. A dielektromos veszteségeknek a temperatúrától független komponense — mint már az előzőkben említettük — arányos volt az anyag lumineszkáló képességével. Az egyes sávok sávszélessége a lumineszkálóképesség reciprok értékével mutatkozott arányosnak, tehát a legkisebb sávszélesség a fősávban (ahol az energia legnagyobb része kisugárzódik) a legjobb hatások eléréséhez szükséges aktivátor-koncentrációnál mutatkozott (8. ábra). Ezzel szemben az anyagnak az ultraibolyában (2537 Å) mért abszorpciós együtthatója nem mutatott maximumot az optimális *Mn*-koncentrációnál, hanem a *Mn*-koncentrációval szigorúan arányosan növekedett.

Az ultraibolya abszorpció mérése igen súlyos feladatot jelentett olyan anyagnál, amely finom szemcsékből állott és amelynél a szemcsék közötti reflexió igen nagy. Egyedüli megbízható adat az irodalomban — *Kröger*¹⁷ régebbi és eléggé bizonytalan, tisztán kvalitatív méréseitől eltekintve — *Brumberg* és *Pekerman*¹⁸ szovjet tudósok közleménye, akik *ZnS* egykristály abszorpció együtthatóját mikroszkóp és spektrográf kombinációval határozták meg. A rendelkezésünkre álló anyag azonban olyan természetű volt, hogy ebből még mikroszkópon megfigyelhető egykristályt sem tudtunk növelni. Az egész problémát olyan módon sikerült megoldani, hogy a közvetlen abszorpciómérés helyett a poralakú anyag diffuz-reflexióját mértük, a szemcsenagysághoz képest igen vastag réteg esetén. Ez esetben a rétegen áthatoló sugárzás 0-nak volt vehető, és a reflektált fény mennyisége alapján az abszorpciós tényező kiszámítható volt. A számítás kb. 10% pontossággal egyezett ismert abszorpciós tényezőjű anyagokon végzett diffuz reflexiós ellenőrző mérésekkel.

Arra az esetre, midőn a vizsgált anyag szemcsenagysága homogén és a szemcsék alakja azonos, a számítást egyszerűen el lehet végezni (12. ábra). A mérésekhez szükséges homogén szemcsenagyságú anyagot ülepítéssel állítottuk elő, és a szemcsenagyságot mikroszkóppal ellenőriztük. A reflexiómérés segítségével kiszámított abszorpciós együttható a következőnek adódott ki: 1% *Mn* tartalmú *Zn* szilikátra $\mu = 600 \text{ cm}^{-1}$. Az abszorpciós tényező a *Mn* koncentrációval arányosnak mutatkozott. 1% *Mn*-tartalmú *Cd*-borátra: $\mu = 200 \text{ cm}^{-1}$ 25 C°-nál és $\mu = 2400 \text{ cm}^{-1}$ 300 C°-nál mérve. 2% *Sb* és 3% *Mn*-nal aktivált mesterséges apatitra: $\mu = 300 \text{ cm}^{-1}$.

Nagyon fontosnak tartjuk méréseinknek azt az eredményét, hogy az aktiválatlan *Zn*-szilikát elnyelési tényezője 2537 Å hullámhossznál gyakorlatilag elhanyagolható (60 cm^{-1} -nél kisebb), ami azt jelenti, hogy a legjobban világító pornál az abszorpciónak legfeljebb 10%-a történik az alaptérrácson. Azonban megállapítható volt, hogy ez a mintánk nem volt teljesen mentes *Mn* és feltehetőleg egyéb szennyezésektől. Tiszta anyagnál a valódi abszorpciós együttható ennél feltétlenül csak kisebb lehet. Hasonló viselkedést mutattak



12. ábra.

A mért (—o—o—) és számított (—) diffúz reflexió (γ) az abszorpciós tényező (μ) és a szemcsenagyság (a) függvényében.

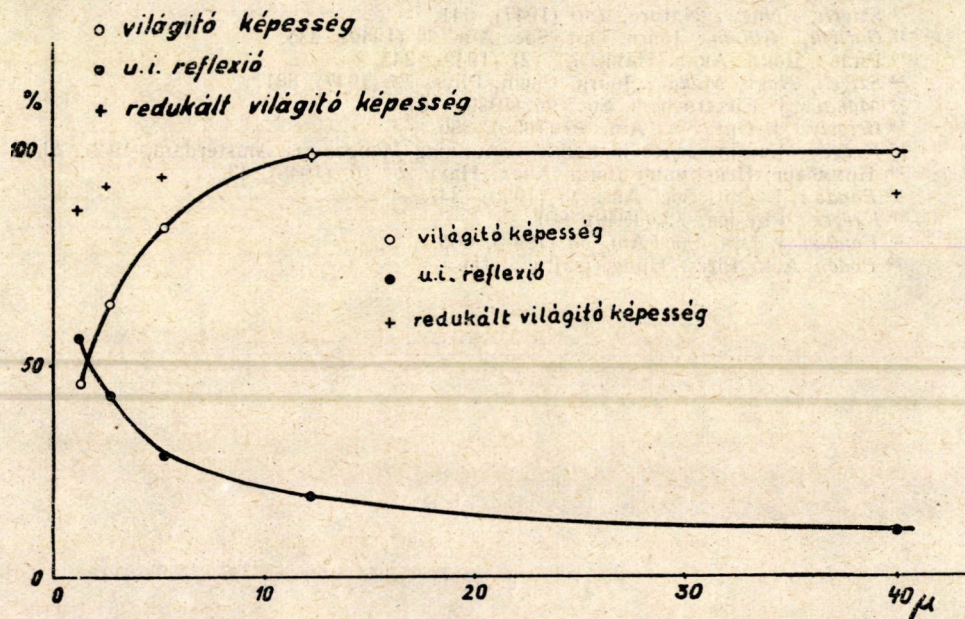
az apatitok is, ahol a *Sb* aktivátor mennyiségének csökkentésével, szintén erősen csökkent az ultraibolya-abszorpció. Érdekes itt megemlíteni, hogy az apatitoknál az ultraibolya-abszorpciót nem a *Mn* okozza, hanem a *Sb*. *Sb* nélküli apatit ultraibolya-sugárzás hatására egyáltalán nem is fluoreszkál (mert hiszen nem is nyeli el az ultraibolyát), ezzel szemben katódsugarak hatására a világító-képesség az adagolt *Mn*-nak megfelelő.

Fentiek megerősítik azt a következtetést, hogy az ultraibolya elnyelésében az aktivátor és alaptérrács együttesen játszanak szerepet. Bizonyos alapanyagok az aktivátor gyanánt használt *Mn*-t képessé teszik arra, hogy az ultraibolyát elnyelje, más anyagok viszont nem; ezeknél az abszorpció előidézésére második, külön aktivátort kell beadagolni. (Az említett apatitokon kívül ilyen anyagok még a *Ca*-szilikát¹⁹, vagy *Sr*-foszfát²⁰, vagy *ZnF₂*²¹ stb., ahol a *Mn*-on kívül, amely az emisszióban vesz részt, a kellő ultraibolya abszorpció elérése céljából a *Sb*-t, vagy *Pb*-t szokás adagolni.) Az emittált fényben, függetlenül az abszorpció mechanizmusától, minden esetben mutatkozik a *Mn*-ra jellemző szinkép, és az emittált fény intenzitása egy adott *Mn*-mennyiségnél mutat optimumot.

Ismeretes az, hogy egyes fémek, pl. *Fe*, *Ni* stb. igen kis mennyiségben képesek arra, hogy a fluoreszkálás határfokát rendkívül mértékben lerontsák. Az ú. n. »killer« mechanizmus vizsgálatára először azt néztük meg, hogy ezek az anyagok növelik-e az abszorpció-képességet, és olyan mértékben-e, hogy a fénycsökkenést csupán a killer által elnyelt ultraibolya és a killer által elnyelt látható fény okozza-e. Méréseink segítségével meg tudtuk állapítani, hogy pl. vasnál az abszorpció az ultraibolyában olyan erősen megnő, hogy ez az effektus

már elegendőnek látszik a killer-hatás magyarázatára. Vagyis kb. 0,2% nagyságrendű *Fe* ultraibolya abszorpciója összemérhető a százalék nagyságrendű *Mn* által előidézett abszorpcióval. Amíg azonban a *Mn* által abszorbeált ultraibolya-sugárzás átalakulhat látható fénné, addig a vas által elnyelt ultraibolyánál ilyen átalakulást kimutatni nem sikerült.

Az utolsó nagyobb kérdés, amivel részletesen foglalkoztunk, a szemcsenagyságnak a világítóképességre való hatása volt. Az irodalomban számos egymással ellentmondó nézet terjedt el a szemcsenagyságnak fénycsökkenést



13. ábra.

A világítóképesség és a reflexiós tényező függése a por szemcsenagyságától. Ha a reflexiós tényező megnövekedése miatt előállott abszorpciósökkenést leszámítjuk, kapjuk az u. n. redukált világítóképességet.

előidéző hatására vonatkozólag. Az általunk részletesen vizsgált cinkszilikátra és apatitokra megállapítottuk²², hogy a kisebb szemcse kisebb világítóképessége onnan ered, hogy a kisebbméretű szemcsén a gerjesztő ultraibolya egy része áthatol, illetőleg a szemcsehatárokon reflexiót szenved. Berendezést készítettünk egyes szemcsék világítóképességének mérésére, és megállapítottuk, hogy mikroszkóp alatt a kis szemcse valóban gyengébben világít és ezt számszerűleg szemcsénként külön-külön le is mértük. Összevetve a mért fényerőket az ugyancsak mért ultraibolya abszorpcióval és reflexióval, azt találtuk, hogy a látható fény csökkenése nagyrészt az abszorpció csökkenésére vezethető vissza (13. ábra).

IRODALOM

- ¹ Szigeti : Elektrotechnika, 4—5. sz. (1947)
- ² Szigeti, Nagy : Műegyetemi Közlemények, 7 (1948), 117.
- ³ Nagy : J. Opt. Soc. Am. 39 (1949), 42.
- ⁴ Schulman : J. Opt. Soc. Am. 40 (1950), 622.
- ⁵ Butler : J. Electrochem. Soc. 93 (1948), 143.
- ^{5a} Butler : J. Electrochem. Soc. 97 (1950), 265.
- ⁶ Nagy : J. Opt. Soc. Am. 40 (1950), 407.
- ⁷ Лашкарев, Косоконова : Докл. Акад. Наук. 54 ((1946), 2.
- ⁸ Mott—Gurney : Luminescence (Trans. Far. Soc.), 1939), 69.
- ⁹ Randall, stb. : Proc. Roy. Soc. 184 (1945), 350.
- ¹⁰ Garlick, Gibson : Proc. Roy. Soc. 188 (1946), 485.
- ¹¹ Szigeti, Nagy : Nature, 160 (1947), 641.
- ¹² Garlick, Gibson : Journ. Opt. Soc. Am. 39 (1949), 935.
- ¹³ Риль : Докл. Акад. Наук. 67 (2) (1949), 245.
- ¹⁴ Szigeti, Nagy, Makai : Journ. Chem. Phys. 15 (1947), 881.
- ¹⁵ Makai : J. Electrochem. Soc. 95 (1949), 107.
- ¹⁶ Gergely : J. Opt. Soc. Am. 40 (1950), 356.
- ¹⁷ Kröger : Luminescence in Solids Containing Manganese, Amsterdam, 1940. 20. I.
- ¹⁸ Брумберг, Пекерман : Докл. Акад. Наук. 61, 6. (1948), 43.
- ¹⁹ Fonda : J. Opt. Soc. Am. 40 (1950), 347.
- ²⁰ Kröger : Physica, 15 (1949), 801.
- ²¹ Fonda : J. Opt. Soc. Am. 38 (1948), 665.
- ²² Bodó : Acta Phys. Hung. (sajtó alatt).

A LUMINESZKÁLÁSI JELENSÉGEK VIZSGÁLATÁNÁL ALKALMAZOTT ÚJ BERENDEZÉSEK*

NAGY ELEMÉR

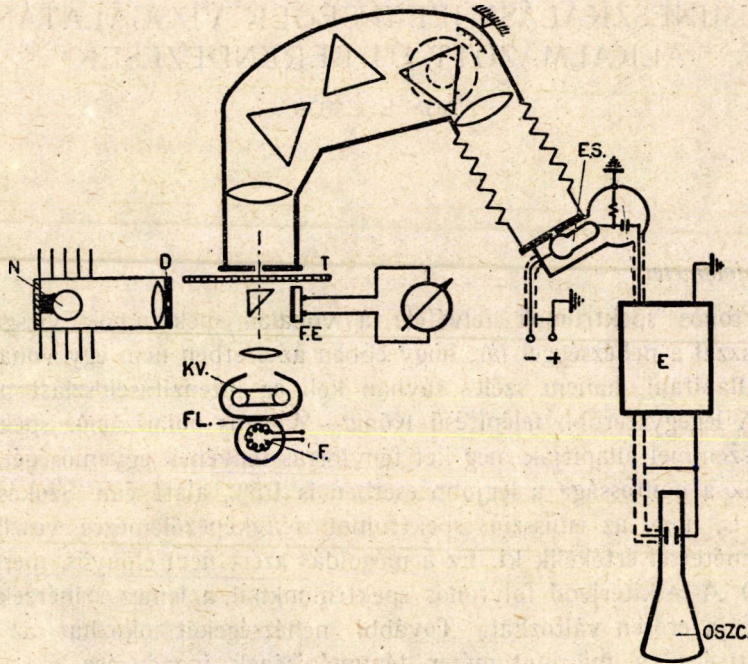
1. Spektrofotométer

Folytonos spektrumok felvétele a vonalas spektrumok vizsgálatával szemben azzal a nehézséggel jár, hogy ebben az esetben nem egy vonal helyét kell megállapítani, hanem széles sávban kell az intenzitáseloszlást pontosan ismerni. A legegyszerűbb felépítésű König—Martens polarizációs spektrofotométernél szemmel állapítják meg két fényforrás fényének egyenlőségét. Ennek a mérésnek a pontossága a legjobb esetben is 1,5% alatt van. Szokásos az a megoldás is, hogy az emissziós spektrumot fényképezőlemezre veszik fel és mikrofotométerrel értékelik ki. Ez a megoldás azért nem előnyös, mert széles, 500—2000 Å-re kiterjedő folytonos spektrumoknál a lemez színérzékenysége és gradációja erősen változhat. További nehézségeket okozhat az emulzió szemcsézettsége, a mikrofotométer fénymérésének ingadozása és a lemeztovábbítás egyenetlensége. Mindezen okok alapján arra a meggyőződésre jutottunk, hogy folytonos spektrumok fényképezéssel való felvétele és megkívánt pontosságú kiértékelése az adott esetben olyan nagy nehézségbe ütköznék és annyi többletmunkát jelentene, hogy ezt a megoldást nem alkalmazhattuk.

1945-ben egy Steinheil-spektrográfot a következő módon alakítottunk át direkt mérésűvé¹: Fényfelvevő berendezésként elektronsokszorozót használtunk, amelyre a fényt felváltva bocsátottuk rá a vizsgálandó fényforrásból és egy normál fényforrásból. Mechanikai modulációval gondoskodtunk arról, hogy a két fény sec.-ként kb. 160-szor váltakozzzék. E két fény különbsége a multiplier anódegyenáramára váltóáramú komponensként szuperponálódik. Ezt a váltóáramot az egyenáramról leválasztva külön erősítjük és oszcillográfon figyeljük meg. Ebben az esetben tehát az oszcillográfon mutatkozó kitérés azt jelzi, hogy a két fény nem egyenlő. Amennyiben a normállámpa fényét ismert módon változtatni tudjuk (állandó szálhőmérsékleten), ez a különbségi jel eltüntethető, és a normállámpa fényének intenzitásából a vizsgált anyag fénye megállapítható.

Ezen elvek alapján a spektrográfot a következőképpen szereltük fel (1. ábra): A bemenő rést két részre osztottuk, egyik részén a vizsgálandó, a másik részén 45°-os prizmán keresztül a normál fényforrás fényét vittük be. A rés előtt két koncentrikus lyuksorozatú tárcsa forog, amely felváltva egyik résfelet nyitja, a másikat zárja. Ez a kerék adta tehát a szükséges modulációt.

* Hozzászólás Szigeti György előadásához.



1. ábra.

Spektrográf felépítése: T forgó moduláló tárcsa, ES elektronsokszorozó, E erősítő, Oszc. oszcillográf, D diafragma, FE fényelem, KV kvarclámpa, FL fluoreszcens anyag, F fűtőtest, N normállámpa.

Az elektronsokszorozó fixen a lemeztartóra van felépítve, katódja előtt egy keskeny rés vágja ki a kívánt spektrum-részletet. A bemenő és hátsó rés szélessége együtt kb. $0,01 \text{ eV}$ széles sávot vág ki a zöldben. Elektronsokszorozóként a vörösben egy Weiss-típusú (fokozatonként 100 V feszültség, 16 fokozat), egyébként RCA 931A csövet használunk (fokozatonként 100 V). Megállapítottuk azt, hogy ilyen aláfeszítésnél a cső stabilabban működik és a jel/zaj viszony is jobb. Ugyanezen okok miatt az anód földelt, az utolsó sokszorozó elektródák kondenzátorral vannak áthidalva, és a katód van negatív feszültségen. Ezt a feszültséget gondosan stabilizált és szűrt anódpótlónak kell szolgáltatnia. A jel/zaj viszony további javítása érdekében az eredő jel erősítésére lehangolt, keskenysávú erősítőt használunk, kb. $10\,000$ -szeres erősítéssel. Az erősítő fűtését és anódfeszültségeit akkumulátorról és száraztelepből vesszük.

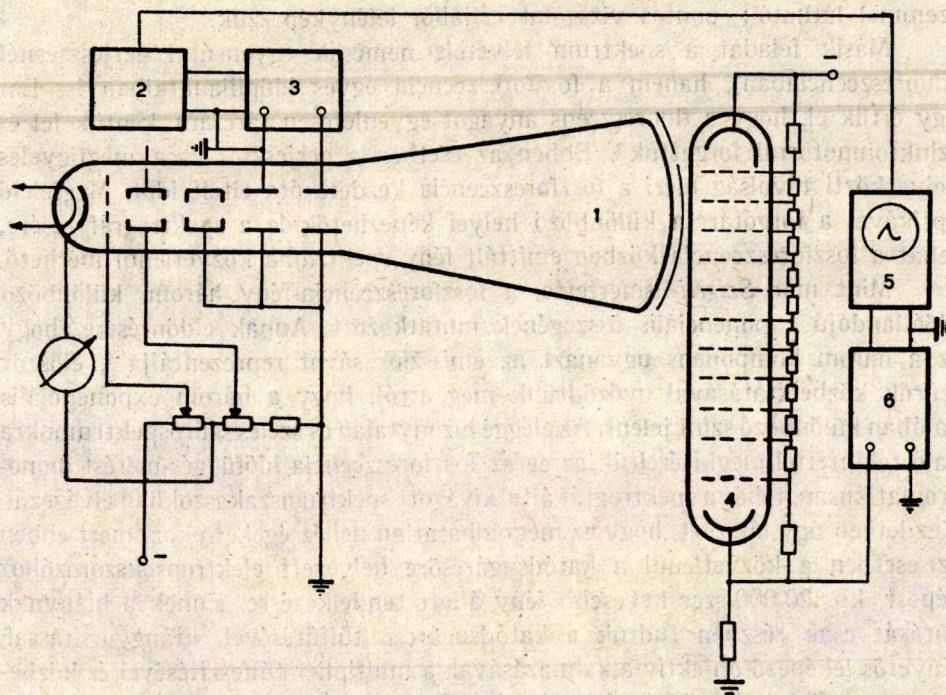
Ezen elv alapján természetesen csak akkor tudunk fényforrásokat összehasonlítani, ha azok fénye az időben nem változik, és az egyetlen változást a kerék modulációja jelenti. Ebből a célból mind a normál izzólámpa fűtése, mind az ultrabolya gerjesztés egyenáramról történik.

Az áramokat akkumulátortelepről vesszük, pontos műszerrel mérjük, és ezenkívül Wheatstone-híd egyik ágába bekötve kb. 1 mA pontossággal

állandónak tartjuk. Az izzólámpa fekete vetítő dobozban van, fényének változtatása egy lencse átmérőjének iris-diafragmával való változtatásával történik. Az izzólámpából jövő fény mennyisége meghatározható a diafragma méretéből, de egyszerűbb közönséges *Se* fényelemmel mérni. Ebben az elrendezésben a fényelem mindig ugyanolyan színű fényt kap, az elektronsokszorozó színérzékenysége pedig azért esik ki, mert *O*-műszerként szerepel. A kvarclámpa áramát nem elegendő beállítani állandó áramra, hanem az ultraibolya-fény mennyiségét állandóan mérni kell. Ezt egy *Se*-cella — vörös szűrő — vörösben fluoreszkáló anyag kombinációval érhetjük el a legegyszerűbben. A mérések reprodukálhatósága ugyanolyan beállításnál, több gyakorlott megfigyelő között 0,5%-on belül van. Ez a pontosság céljainknak teljesen megfelel.

2. Berendezések a foszforeszcencia vizsgálatára

A foszforeszcencia-vizsgálat klasszikus módszerén a Becquerel-foszforoszkópon túlmenőleg (mely kb. csak ezred másodperc hosszúságú gerjesztési időt tud biztosítani), a kb. 10 éve használatos katódsugárgerjesztési és direkt foszforeszcencia-görbe ábrázolási módszert² alkalmaztuk². Az eljárás elvile-



2. ábra.

Foszforeszcencia időfüggésének vizsgálata katódsugár gerjesztésnél: 1 katódsugárcső, ernyőjén a vizsgálandó anyag, 2 impulzusgenerátor, 3 impulzuserősítő, 4 elektronsokszorozó, 5 ábrázoló oszcillográf, 6 erősítő.

abban áll, hogy a vizsgálandó fluoreszkáló anyagot katódsugárcső ernyőjére visszük fel (2. ábra), és a katódsugár a vizsgálandó port elektromos úton beállított, kívánt időtartamig éri. A kísérletek során a gerjesztési időt 1 mikroszekundum és 10 milliszekundum között változtattuk. Ilyen lökéseket, melyeket négyszög hullámú generátor állított elő, vagy mint nyitófeszültséget, a különben állandóan lezáró rácstra vittük rá — tehát elektronáram az ernyőt csakis a nyitás idejéig éri — vagy a lökéseket az eltérítő lemezpárok egyikére téve, a gerjesztés időtartama alatt a katódsugár kitér, és az ernyő egy határozott helyére ér. A jobb eredményeket az első módszerrel kaptuk. A lökések, melyek teljesen meredek voltak (emelkedési és lefutási idő $\frac{1}{2}$ mikroszekundumnál rövidebb), másodpercenként 50-szer ismétlődtek. A katódsugárcső világító foltja elé elektronsokszorozót helyezve, a sokszorozó munkaellenállásán fellépő feszültség arányos a pillanatnyi fényintenzitással, azaz az időbeni feszültségváltozás arányos a fluoreszcencia felnövekedésének és kialvásának görbéjével. Az elektronsokszorozó munkaellenállásán fellépő feszültséget oszcillográf függőleges kitérítő lemezeire visszük, a vízszintes eltérítőlemezre az impulzusok frekvenciáját, jelen esetben 50 periódust viszünk rá, ennek következtében az egyes impulzusok okozta foszforeszcencia mind egymásra esik, a görbe szabad szemmel látható; pontos vizsgálat céljából lefényképezzük.

Másik feladat a spektrum felvétele nemcsak egyensúlyi gerjesztésnél (fluoreszcenciában), hanem a foszforeszcencia egyes időpillanataiban is. Ezt úgy értük el, hogy a fluoreszcens anyagot egyenletesen tárcsára kentük fel és szinkronmotorral forgattuk³. Ebben az esetben a gerjesztés és a megfigyelés helye közti távolság méri a foszforeszcencia kezdete óta eltelt időt. Megfelelő optikával a forgótárcsa különböző helyei képezhetők le a spektrográf részére, tehát a foszforeszcencia közben emittált fény spektruma közvetlenül mérhető.

Mint már *Szigeti* ismertette, a foszforeszcencia-fény három, különböző időállandójú exponenciális összegének mutatkozott. Annak eldöntésére, hogy ez a három komponens ugyanazt az emissziós sávot reprezentálja-e, először szűrők közbeiktatásával győződünk meg arról, hogy a három exponenciális valóban különböző színt jelent. Az eléggé bizonytalan és széles szűrőspektrumokra való tekintettel megkíséreltük az egész foszforeszcencia időfüggés-mérést monokromatikusan, tehát a spektrográf által kivágott spektrumszakaszokban elvégezni. Kezdetben úgy látszott, hogy ez megoldhatatlan nehézségeket okoz, mert ebben az esetben a közvetlenül a katódsugárcsőre helyezett elektronsokszorozóhoz képest, kb. 20 000-szer kevesebb fény állott rendelkezésre. Ennek a hiánynak hatását csak részben tudtuk a katódsugárcső túlfűtésével, utángyorsítással, fényerős leképező objektív alkalmazásával, a multiplier túlfeszítésével és közbeiktatott szélessávú erősítővel hatástalanná tenni, úgyhogy ezt a mérést a leg-rövidebb időtartamú gerjesztéseknél eddig még nem tudtuk elvégezni⁴. A hosszabb gerjesztéseknél (50 mikroszekundum és fölötte) ki tudtuk mutatni, hogy a leggyorsabb foszforeszcencia-komponens igen széles sávú, a kék szélén

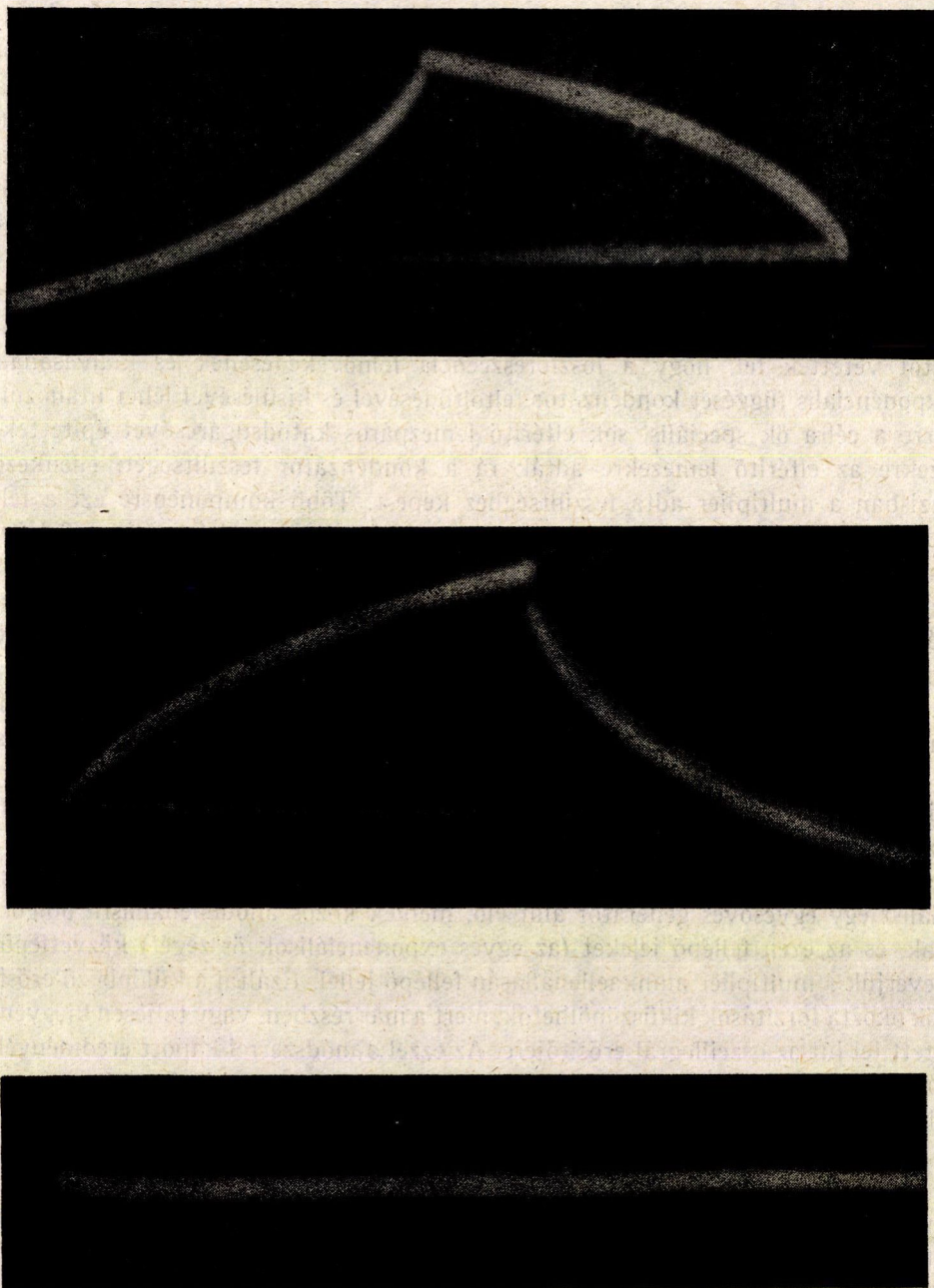
kezdődik és belenyúlik egészen a zöldbe. Ez a magyarázata annak, hogy teljesen megfelelő színszűrőt — amely ezt a komponens^t meghagyja, a többi sávot pedig elnyeli — nem is tudtunk találni. Jelenleg kísérleteket végzünk arra vonatkozólag, hogy amikor a gyors processzusok kiemelése céljából nem 50 periódust, hanem ennél nagyobb frekvenciájú vízszintes kitérítést alkalmazunk, a katódsugárcső elektronáramát multivibrátorral vezérelten bizonyos időpillanatokra (közvetlenül a vizsgálandó rész után) kioltjuk, és ezzel a zajnívót lényegesen csökkentjük.

A foszforeszcenciában mutatkozó exponenciális komponensek időállandóinak és amplitudóinak megállapítására *Strange* és *Henderson*⁵ azt a gondolatot vetették fel, hogy a foszforeszcencia felnövekedésének és kialvásának exponenciális függését kondenzátor feltöltődésével és kisülésével lehet utánozni. Erre a célra ők speciális, sok eltérítő lemezpáros katódsugárcsővet építettek, ezekre az eltérítő lemezekre adták rá a kondenzátor feszültségét, ellenkező fázisban a multiplier adta feszültséghez képest. Több komponensre ezt a feladatot nem tudták megoldani, és nyilvánvaló az eljárás nehézsége. *Tolsztoj* és *Feofilov*⁶ szovjet tudósok lényegesen egyszerűbb és szellemesebb megoldást dolgoztak ki. A görbevizsgáló katódsugárcső függőleges lemezpárjára a vizsgálandó feszültséget, a vízszintesre a kompenzáló feszültséget helyezték, amely elrendezésben a teljes kiegyenlítésnek ferde egyenes vonal felel meg. Ezt az eljárást ők csak egyetlen exponenciális esetén alkalmazták. Hasonló elvekből indultunk ki mi is berendezésünk megszerkesztésénél, amellyel *Valkó* és *Gergely* kartársainknak sikerült meglevő eszközeinkkel olyan eljárást kidolgozni, amelynél nemcsak egy, hanem egyszerre három (elvileg korlátlan számú) exponenciális szuperpozícióját is elő lehet állítani elektronikusan, és a fényjelet ki lehet egyenlíteni. Eljárásuknak az a lényege, hogy minden egyes exponenciális egy egycsőves generátor állít elő, melyek közös anóellenállásra dolgoznak, és az ezen fellépő jeleket (az egyes exponenciálisok összegét) közvetlenül keverjük a multiplier munkaellenállásán fellépő jellel. Ezáltal a különböző erősítők okozta torzítások kiküszöbölhetők, mert a már részben, vagy teljesen kiegyenlített jel jut az oszcillográf erősítőjére. Az ezzel a módszerrel kapott eredmények jól egyeznek a görbe grafikus analízisével kapott eredményekkel, és az eljárás sokkal gyorsabb.

A 3. ábra az utánvilágítás kiegyenlítését mutatja. A második szakasz, amely láthatólag nincs kiegyenlítve, a foszforeszcencia felnövekedésének görbéje. Ez a jelenség a monomolekuláris processzusoknál természetesen fellép, mert a fény felnövesi ágának időállandója a foszforeszcenciáénál, egy, a gerjesztéssel arányos mennyiséggel nagyobb.

3. Fluoreszkáló porok fotometrálsa mikroszkóp alatt

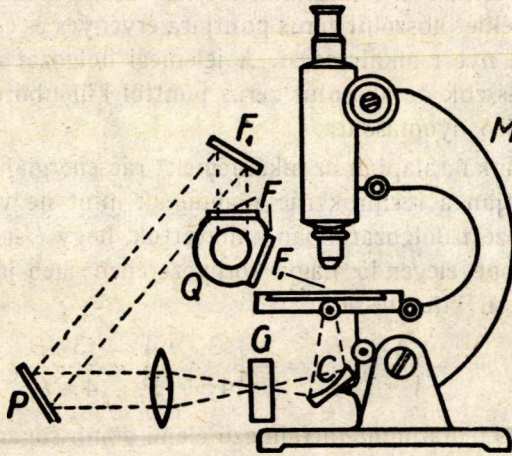
Tekintettel az egymással ellentmondó irodalmi adatokra, új utat kellett megpróbálnunk, amellyel lehetségessé válik egyetlen egy szemcse világító-



3. ábra.

Foszforeszcencia és kondenzátorkisülés időfüggésének azonosítása. *a)* Foszforeszcencia, *b)* kondenzátor feszültség, *c)* kiegyenlítés. Az utánvilágításban (baloldalt) az időkonstansok egyeznek, a felnövekedés alatt nem.

képességének mérése. E feladat megoldásának elvi alapja az a felismerés, hogy az alulról látható fényvel megvilágított porszemcse, teljesen szabálytalan alakja miatt, egészen sötétnek látszik.⁷ Ha tehát a fluoreszkáló port ultraibolyával megvilágítjuk, és ezzel egyidőben a mikroszkóp látómezejében fluoreszcenciája színével egyező színű háttérrel létesítünk, akkor bizonyos háttérmegvilágítás-erősségnél a szemcse úgy világít, mint a környezete, tehát a határai elmosódnak. Ennek gyakorlati megoldására (4. ábra) azonos kvarclámpával gerjesztettük



4. ábra.

Egyes fluoreszkáló szemcsék fotometrálnak mikroszkóp alatt. M. mikroszkóp, F_1 a vizsgálendő fluoreszcens anyag egy szemcséje és az anyagból készült bevonat, Q kvarclámpa, F szűrők, P síktükör, G szürke ék, C gyűjtőtükör.

mind a vizsgálendő szemcséket, mind egy, ugyanebből a fluoreszkáló porból készített réteget. Ez utóbbi réteg fénye szolgáltatta az összehasonlító fényt, amelyet tükrökkel a mikroszkóp kondenzorán keresztül juttattuk a látómezőbe. A háttér fényintenzitásának változtatását fogasléccel mozgatott szürke ékkel értük el. A fogasléc állása megfelelő áttétellel mechanikus fordulatszámoló leolvasásával állapítható meg.

Távközlési Kutató Intézet,
Budapest.

IRODALOM

- ¹ Szigeti, Nagy: Műegyetemi Közlemények, 7 (1948), 117.
- ² Gergely: J. Opt. Soc. Am. 40 (1950), 356.
- ³ Nagy: J. Opt. Soc. Am. 40 (1950), 407.
- ⁴ Nagy, Gergely: Acta Phys. Hung. (sajtó alatt).
- ⁵ Strange, Henderson: Proc. Phys. Soc. 58 (1946), 369.
- ⁶ Толстой и Феофилов: Успехи физических наук 41 (1950), 44.
- ⁷ Bodó: Acta Phys. Hung. (sajtó alatt).

AZ ALKÁLIFÉMEK ÁLLAPOTEGYENLETÉRŐL

GOMBÁS PÁL r. tag

a Magyar Tudományos Akadémia alelnöke

Előadta az 1950. november 28-án tartott osztályülésen

A szerző néhány előző dolgozatában¹ az alkálifémeknek egy elméletét dolgozta ki, mely a fémionok statisztikus modelljén alapszik. Az elmélet eredeti alakjában a hőmérséklet abszolút zérus pontjára érvényes és eddig szinte kizárólag zérus nyomásra nyert alkalmazást. A jelenlegi dolgozat célja az, hogy ezt az elméletet kiterjesszük az abszolút zérus ponttól különböző hőmérsékletekre és zérustól különböző nyomásokra.

Az idézett munkák alapján az alkálifémek* rácsenergiája U a hőmérséklet abszolút nulla pontján a reciproknak mint negyedfokú polinomja állítható elő. Az idézett dolgozatokban kimutattuk, hogy U -nak ez a kifejezése, az egyensúlyi állapot elegendő nagy környezetében igen jól approximálható a következő egyszerű kifejezéssel:

$$U = -\frac{A}{V^{1/2}} + \frac{B}{V} = -\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \frac{A}{R} + \frac{3}{4\pi} \frac{B}{R^3}, \quad (1)$$

ahol R jelenti az egy fématomot tartalmazó elemi gömb sugarát, és $V = 4\pi R^3/3$ jelenti az egy fématomra eső térfogatot; A és B a következő állandók

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{3}{2} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} e^2, \\ B &= \frac{1}{3} A V_0^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} e^2 V_0^{1/2} = \frac{2\pi}{3} e^2 R_0^2. \end{aligned} \right\} (2)$$

e a pozitív elemi töltés, V_0 a V térfogat értéke az egyensúlyi helyzetben, vagyis az a V érték, amelynél U minimum; R_0 az R sugár értéke ugyanott.

A rácsenergiának (1) kifejezésével minden további egyszerűen adódik, így pl. a rácsenergia és a kompresszibilitás a hőmérséklet abszolút zérus pontján az egyensúlyi helyzetben a következőképpen állítható elő:

$$U_0 = -\frac{2}{3} \frac{A}{V_0^{1/2}} = -\frac{e^2}{R_0}, \quad (3)$$

$$\kappa_0 = \frac{9}{2A} V_0^{1/2} = \frac{4\pi}{e^2} R_0^4. \quad (4)$$

Ezekből a formulákból U_0 és κ_0 értékeit V_0 , illetőleg R_0 empirikus értékeivel kiszámítottuk. Ezeket az értékeket az 1. táblázatban adjuk meg. A kísérleti értékekkel való összehasonlítás céljából U_0 és κ_0 empirikus értékeit is feltüntettük

* A Li fémet a tárgyalásainkból kizárjuk, mert a Li^+ -ion csak két elektront tartalmaz, ami a statisztikus tárgyalást lehetetlenné teszi.

a táblázatban. A rácsenergia empirikus értéke a szabad atom ionizációs energiájának és a fém szublimációs energiájának az összege. κ_0 empirikus értékei pedig a *Bardeen*² által megadott értékek, melyeket *Bardeen Bridgmannak*³ magasabb hőmérsékleten mért értékeiből extrapolált az abszolút nullpontra.

A (3) és (4) egyenlet megfelelő oldalának összeszorzásából nyerjük az úgynevezett első Grüneisen-féle relációt:

$$U_0 \kappa_0 = -3 V_0. \quad (5)$$

Annak megállapítására, hogy ezt a relációt a mérések mennyire igazolják, $U_0 \kappa_0$ és V_0 empirikus értékeivel kiszámítottuk a $-U_0 \kappa_0 / V_0$ hányadost. Értékeit az 1. táblázatban tüntettük fel. Ennek a hányadosnak az (5) egyenlet szerint 3-mal kellene egyenlőnek lennie és a kísérleti értékek, mint látható, ehhez valóban igen közel is esnek.

1. TÁBLÁZAT

	Na	K	Rb	Cs
$R_0, 10^{-8}$ cm egys., emp.	2,09	2,58	2,77	2,98
$V_0, 10^{-24}$ cm ³ egys., emp.	38,24	71,94	89,03	110,85
$-U_0, 10^{-12}$ erg egys., { elm.	110,4	89,31	83,19	77,42
{ emp.	102,9	87,50	83,89	78,81
$\kappa_0, 10^{-12}$ cm ² /dynegys., { elm. ...	10,4	24,2	32,2	42,9
{ emp.	12,3	23,9	31,9	42,8
$-U_0 \kappa_0 / V_0$	3,31	2,91	3,01	3,04
γ	1,58	1,53	1,48	1,48

További célunk először is az alkálifémek állapotegyenletét levezetni az abszolút nullponton, és ennek az egyenletnek a segítségével a fém térfogatát és kompresszibilitását mint a nyomásnak a függvényét megadni, továbbá a kompresszibilitásnak a térfogattól való függését meghatározni, ami, mint látni fogjuk, nagyon egyszerű összefüggésekhez vezet. Ezek az eredmények praktice megegyeznek azokkal az eredményekkel, melyeket a rácsenergiának a bevezetésben idézett teljes kifejezéséből nyerünk, ez utóbbiakat azonban nem lehet analitikailag előállítani. Ezenkívül meghatározzuk a Grüneisen-féle állandót, és megmutatjuk, hogyan lehet az állapotegyenletet magasabb hőmérsékletekre levezetni.

A hőmérséklet abszolút zérus pontján a nyomásnak, P -nek a definíciójából, tehát a $dU = -PdV$ egyenletből, U -nak (1) kifejezésével azonnal nyerjük:

$$P = \frac{A}{3} \frac{V_0^{3/2} - V^{3/2}}{V^2}. \quad (6)$$

Ez az alkálifémek állapotegyenlete az abszolút zérus ponton. Ha a relatív térfogat számára bevezetjük a következő jelölést $q = V/V_0$, akkor a (4) egyenlet segítségével ezt az állapotegyenletet a következő alakban írhatjuk:

$$\kappa_0 P = \frac{3}{2} \frac{1 - q^{1/3}}{q^2}. \quad (7)$$

Az állapotegyenletnek ezen alakjából látható, hogy a nyomásnak és az abszolút nullponton vett kompresszibilitásnak a szorzata csak a relatív térfogattól, q -tól függ, tehát a $\kappa_0 P$ szorzat egy az összes alkálifémekre érvényes univerzális függvénnyel állítható elő.

Ezt az egyenletet q -ra megoldva nyerjük a relatív térfogatot q -t, mint $z = \frac{9}{2A} V_0^{2/3} P = \kappa_0 P$ függvényét

$$q = \frac{V}{V_0} = \left(\frac{3}{4z}\right)^{1/2} \left\{ \left[1 + \left(1 + \frac{2}{9z}\right)^{1/2} \right]^{1/3} + \left[1 - \left(1 + \frac{2}{9z}\right)^{1/2} \right]^{1/3} \right\}^{3/2} \equiv f(z). \quad (8)$$

Mint látható, természetszerűen q is egy az összes alkálifémekre érvényes univerzális függvénnyel állítható elő, melyet az 1. ábrán tüntettünk fel. A tapasztalattal való összehasonlítás kedvéért ezen az ábrán feltüntettük a Bridgman-féle görbéket⁴ is az abszolút nullpontra átszámítva⁵, V_0 és κ_0 helyébe mindenütt az empirikus értékeket helyettesítve. Az összehasonlítás eredménye nagyon kielégítő, mert egyrészt az empirikus görbék igen közel futnak egymáshoz, másrészt pedig az elméleti görbe az empirikusokat nagyon jól approximálja. A cesiumra vonatkozó görbénél a $\kappa_0 P \cong 0,95$ abszcissa értéknél fellépő diszkontinuitás egy kristálystruktúrabeli változás következménye.

Hogy az abszolút nullponton a kompresszibilitásnak a térfogattól, illetve a nyomástól való függését megállapíthassuk, a kompresszibilitás definíciójából indulunk ki, mely a következő:

$$\frac{1}{\kappa} = -V \frac{dP}{dV} = V \frac{d^2U}{dV^2}. \quad (9)$$

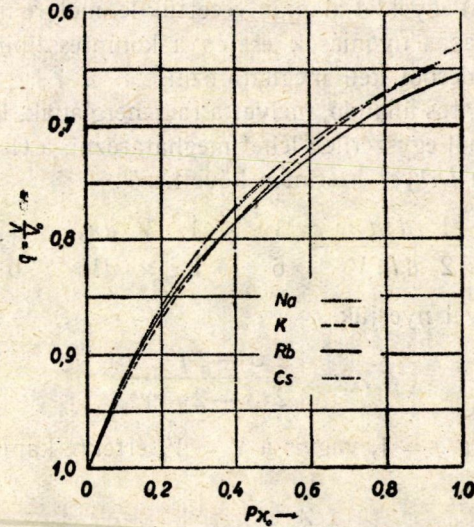
Ebből az egyenletből a (6), illetve az (1) és (8) egyenletek segítségével a következő összefüggést nyerjük:

$$\kappa = \kappa_0 \frac{q^2}{3 - 2q^{1/3}} = \kappa_0 \frac{f^2(z)}{3 - 2f^{1/3}(z)} = \kappa_0 \frac{f^2(\kappa_0 P)}{3 - f^{1/3}(\kappa_0 P)}. \quad (10)$$

Nem túl nagy nyomások esetén ($P \lesssim 5000 \text{ kg/cm}^2$), vagyis kis nyomásváltozások esetén a (10) egyenletből a (7) egyenlet segítségével másod- és magasabbrendű kicsiny tagok elhanyagolásával a következő összefüggést kapjuk:

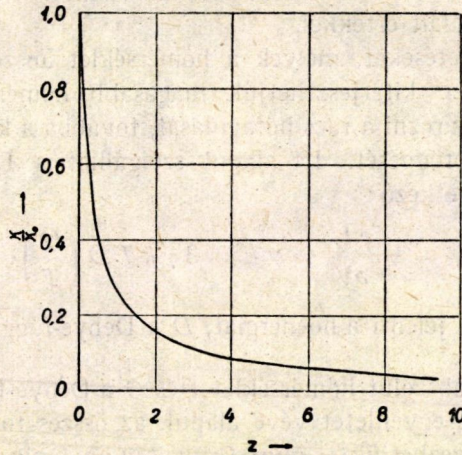
$$\kappa = \frac{\kappa_0}{1 + \frac{10}{3}z} = \frac{\kappa_0}{1 + \frac{10}{3}\kappa_0 P}. \quad (11)$$

A (10) és (11) egyenletekből látható, hogy a relatív kompresszibilitás κ/κ_0 szintén q -nak, illetve z -nek az összes alkálifémekre érvényes univerzális függvénye gyanánt állítható elő. A (10) egyenlet alapján számított relatív kompresszibilitás,



1. ábra.

mint z függvénye a 2. ábrán van feltüntetve. A $z = \kappa_0 P$ összefüggés alapján a (10) egyenlet jobboldalát természetesen mint a nyomásnak, P -nek, a függvényét is felfoghatjuk. A kompresszibilitás mint a nyomás függvénye a különböző alkálifémekre különböző, mivel κ_0 különböző alkálifémek esetén különböző értékű.



2. ábra.

A kompresszibilitásnak a nyomás-koefficiensére a (11) egyenlet alapján a következő kifejezés adódik:

$$\frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial \kappa}{\partial P} = - \frac{10}{3} \frac{\kappa_0}{(1 + \frac{10}{3} \kappa_0 P)^2}. \quad (12)$$

Ez a kifejezés szintén csak nem túl magas nyomásokra ($P \lesssim 5000 \text{ kg/cm}^2$) érvényes, mivel a (11) egyenlet alapján vezettük le, melyre ugyanez a korlátozás áll fenn. Nagyon magas nyomások esetén a kompresszibilitás nyomás-koefficiensét a (10) egyenletből kell meghatározni.

Egy további fontos állandó, melyet a rácsenergiának, illetve a kompresszibilitásnak kifejezéséből egyszerűen lehet meghatározni, a Grüneisen-féle állandó γ ; ennek definíciója Debye⁶ szerint a következő:

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{d \ln \kappa}{d \ln V} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \frac{V}{\kappa} \frac{d \kappa}{d V} - \frac{1}{6}. \quad (13)$$

Innen (10) segítségével nyerjük

$$\gamma = \frac{5 - 2q^{3/2}}{2(3 - 2q^{3/2})}.$$

Ebből a kifejezésből a $q = 1$, vagyis a $V = V_0$ értékre kapjuk

$$\gamma = \frac{3}{2}. \quad (14)$$

A Grüneisen-féle állandó ebben a közelítésben az összes alkálifémekre azonos értékű. A rácsenergiának a bevezetésben idézett teljes kifejezése γ számára praktice ugyanezt az értéket⁷ szolgáltatja, a maximális eltérés kisebb, mint 5%. γ -nak teljesen más úton, mégpedig Slater⁸ által semi-empirikus úton meghatározott értékei szintén az 1. táblázatban vannak feltüntetve, és igen jól egyeznek a fentebb talált értékkel.

Ezeket a fejtegetéseket, melyek a hőmérséklet abszolút nulla pontjára vonatkoznak, könnyen kiterjeszthetjük magasabb hőmérsékletre, és ennek alapján meg lehet határozni a rács hőtágulását, továbbá a kompresszibilitásnak a hőmérséklettől való függését. Itt alapul szolgálhat a Debye-féle⁹ állapot-egyenlet, mely a következő:

$$PV + V \frac{\partial U}{\partial V} = \gamma E = 3 \gamma k T D \left(\frac{\Theta}{T} \right), \quad (15)$$

ahol $E = 3 k T D \left(\frac{\Theta}{T} \right)$ jelenti a hőenergiát, D a Debye-függvény⁹, k a Boltz-

mann-állandót, T az abszolút hőmérsékletet és Θ a Debye-féle karakterisztikus hőmérsékletet. Ezt az egyenletet véve alapul, az összes további számításokat teljesen hasonlóan végezhetjük el mint Grüneisen. A Grüneisen-féle elmélet és az itt kifejtett elmélet között van azonban egy igen lényeges különbség. T. i., amíg mi az elmélet alapját alkotó rácsenergia-kifejezést teljesen elméleti úton vezettük le empirikus és félempirikus adatok nélkül, addig Grüneisen egy fél-

empirikus rácsenergia-kifejezést vesz alapul. A (15) egyenlet alapján nyert termikus expanzió a tapasztalattal jól egyezik. A kompresszibilitásnak a hőmérséklettől való függését azonban nem sikerült eddig összehasonlíttanom a tapasztalattal, minthogy a megfelelő kísérleti értékek nem állanak rendelkezésemre.

Földalkáli fémekre hasonló számításokat lehet végezni, ezeknek a fémeknek a rácsenergiáját is elő lehet állítani egy (1)-hez hasonló kifejezéssel.* Az egyetlen különbség az, hogy az A és B állandók értéke a földalkáli-fémek esetében, eltérően az alkálifémektől, a következő:

$$A = 4,755 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} e^2, \quad B = \frac{1}{3} AV_0^{1/2}.$$

Tehát az alkáli fémekre levezetett formulák földalkáli fémekre is érvényesek, azzal a különbséggel, hogy az A és B állandók helyébe ezeket az értékeket kell helyettesíteni; a Grüneisen-féle állandó értéke az összes földalkáli fémekre szintén $3/2$. Az alkálifémekre levezetett univerzális összefüggések, tehát pl. az (5), (7), (8), (10), (11), (12) és (14) összefüggések, a földalkáli fémekre is változatlan formában érvényesek. Ennek oka az, hogy ezeket az összefüggéseket a fématomok közötti erőtvény kifejezése determinálja, vagyis az 1 kifejezésben V exponensei által vannak megadva, és ezek az exponensek mindkét esetben azonosak. Tehát az 1. és 2. ábrán megadott elméleti görbék földalkáli fémekre is érvényesek, de természetesen nem olyan jó közelítésben, mint az alkálifémek esetében, mivel az (1) kifejezés a földalkáli fémek rácsenergiája esetében kevésbé jó approximációt ad mint az alkálifémek esetében. Mivel a földalkálifémek esetében nem áll rendelkezésünkre elegendő kísérleti adat, az elméleti görbékkel való összehasonlítást mellőzzük.

Műszaki Egyetem

Fizikai Intézete, Budapest.

IRODALOM

- ¹ Gombás P.: Nature (London) 157 (1946), 668; Hung. Acta Phys. 7, No. 2, 1947; Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Springer, Wien, 1949, 299—332 old.; a további irodalom is itt van megadva.
- ² Bardeen J.: Journ. Chem. Phys. 6 (1938), 372.
- ³ Bridgman P. W.: Proc. Amer. Acad., 72 (1938), 207.
- ⁴ Bridgman P. W.: Proc. Amer. Acad., 72 (1938), 207.
- ⁵ Bardeen J.: Journ. Chem. Phys. 6 (1938), 372.
- ⁶ Lásd pl. Slater J. C.: Introduction to Chemical Physics, International Series in Physics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1939, 239. old.
- ⁷ Kónya A.: Journ. Chem. Phys. 17 (1949), 837.
- ⁸ Slater J. C.: Introduction to Chemical Physics, International Series in Physics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London 1939, 454 old.
- ⁹ Lásd pl. Grüneisen E.: Handb. d. Phys. X, Berlin, 1926, 17—21.

* Ezzel kapcsolatban utalunk a szerzőnek idézett¹ munkáira. A *Be* fémét a tárgyalásainkból ki kell zárni, mert a *Be* $++$ -ion csak két elektront tartalmaz, minélfogva a statisztikus tárgyalás lehetetlenné válik.

KÖZETEK RADIOLÓGIAI VIZSGÁLATA

SZALAY SÁNDOR és FÖLDVÁRI ALADÁR

Előadta az 1950. november 28-án tartott osztályülésen

A radioaktivitás felfedezése óta nagy az érdeklődés a Földön előforduló radioaktív anyagok iránt. A radioaktív anyagok jelentős szerepet játszanak Földünk hőháztartásában, a geotermikus gradiens kialakulásában, és így érdekes kérdés a radioaktív elemek eloszlásának vizsgálata a Föld kérgét alkotó kőzetekben. Az atommagfizikai ismeretek rohamos haladása, az atommaghasadás felfedezése és az atomenergia sikeres felszabadítása ezt az érdeklődést nagymértékben fokozták. Az atomenergia sikeres felszabadítása óta az Urán az egyik igen keresett nyersanyag, amely után érdeklődéssel kutatnak a Föld legkülönbözőbb pontjain. Megvan a lehetőség arra, hogy az atommagfizikai és technológiai ismeretek kellő előrehaladásával, kellő tapasztalatgyűjtés után, az atomenergia az ipari civilizáció fejlődésében is jelentős szerepet fog nyerni. Van még egy tudományos szempont is, a geokémia szempontja. A geokémikusok *Goldschmidt* úttörő vizsgálatait után nekiláttak az egyes elemek Földünkön való elterjedése és eloszlása megállapításának. Az ilyen irányú vizsgálatok nehézsége főleg abban áll, hogy az igen kis mennyiségben (diszperz állapotban) előforduló elemek megállapítása rendkívül körülményes. Eddig főleg a spektroszkópos módszerek szolgáltatták a legfontosabb adatokat a részünkre hozzáférhető világ anyageloszlásáról.

A radioaktív elemek mennyiségének mérésére alkalmas fizikai módszerek sokkal pontosabbak és érzékenyebbek a vegyi módszereknél, és így ezeknek az elemeknek a kutatása kisebb koncentrációban is sokkal kényelmesebben végezhető el, mint más anyagoké.

*V. I. Vernadskij*¹ és főleg a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának leningrádi Intézetében kialakult világhírű iskolája² több geokémiai alaptörvényt állapított meg, amelyek az elemek körforgására (ciklusos migrációjára), vándorlására, koncentrálódására, esetleg szétszóródására vonatkoznak. E vándorlások során, melyek a Föld különböző szféráiban és a különböző geológiai korszakok folyamán — tehát térben és időben elszórtan — játszódtak le, az egyes elemek hol feldúsulnak, hol szétszóródnak. *Vernadskij* volt az, aki rámutatott arra, hogy az elemek vándorlásának körfolyamata az élők világába is belenyúlik. Az élőlényeknek is szerepük van egyes elemek felhalmozódásában. Elég, ha hivatkozunk az élőlények közvetítésével felhalmozódott széntelepekre, petróleumtelepekre, egyes tengeri élőlényekben felhalmozódó vanádiumra stb.

A fenti szempontok vezettek bennünket abban, hogy a Magyarország területén előforduló talajok, kőzetek radioaktivitására vonatkozó rendszeres kutatásokat kezdjünk. A geológusok megegyező véleménye szerint koncentrált előfordulásokra itt alig van remény. Magyarország területén az eddig hozzáférhető felszíni vagy fúrásokkal átkutatott rétegekben komoly ércesedés seholsem ismeretes azokból a fémekből, amelyek kísérőjeként jelentkeznek az Urán vagy a Thórium. Magyarországon e téren forrásvizek radiológiai átvizsgálásán kívül eddig nagyon kevés történt.

1947 tavasza óta rendszeresen folytatunk munkaközösségben kőzet-radiológiai vizsgálatokat, amelyeknek keretében a fizikai, radiológiai, mérési metodikai feladatokat a Debreceni Egyetem Kísérleti Fizikai Intézete végezte az egyik társszerző vezetésével (*Szalay Sándor*), míg a geológiai irányítást, felvételezést és kiértékelést a másik társszerző (*Földvári Aladár*) vállalta. A külszíni vizsgálatokat a Magyar Földtani Intézet támogatta, adminisztrálta, és a beszámolókat is az Intézet vette át.

A külszíni vizsgálatokhoz Geiger—Müller számlálócsöves berendezések, a laboratóriumi vizsgálatokhoz pedig ionizációs kamra és egyéb radiológiai vizsgáló berendezések készültek a Debreceni Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében. Hordozható Geiger—Müller számlálócsöves berendezésünk legújabb modellje kálózattól független, cca. 4 kg súlyú készülék, az összes beépített telepekkel együtt. Külső mérete nem nagyobb válltáskánál, és vállszíjon, vagy kézben könnyen hordozható. Kis hangszórón kívül elektromágneses számláló berendezéssel is fel van szerelve, amelyik másodpercenként 20 impulzust képes maximálisan regisztrálni, mintegy 1 mAmp. fogyasztás mellett. A számlálócső táplálásához szükséges cca 1000 Volt feszültséget egy külön erre a célra kidolgozott kisméretű Zamboni oszlop szolgáltatja. A számlálócső mérete 2 cm \varnothing és 10 cm hosszúságú volt, 3 mm falvastagságú erős vastokba volt helyezve. Természetes effektusa (kozmos sugárzás) a Föld felszínén percenként cca 20 impulzust tett ki. Ehhez járult még a környezet radioaktív sugárzása. A készüléket ellátó száraz telepek kapacitása többszáz üzemórára volt elegendő, a Zamboni oszlop egy-két évig volt elegendő.

Geiger—Müller számlálócsöves berendezéseket világszerte elterjedten alkalmaznak radioaktív anyagok felkutatására, azaz kvalitatív jelzésére. Minthogy a mi vizsgálataink célja kifejezetten tudományos volt, és koncentrált érc-előfordulásokra nem számíhattunk, arra törekedtünk, hogy a számlálócsővel közvetlenül a helyszínen legalább fél-quantitatív mérési eredményhez jussunk, mert kőzetmintáknak kvantitatív laboratóriumi radiológiai megvizsgálása rendkívül hosszadalmas, fáradságos és költséges feladat, amely tömegmunkában nem végezhető el. Szükséges volt a mérések elvi alapjait pontosan tisztázni és a módszert ilyen módon kvantitatívvá kiépíteni. Ezt a feladatot a Debreceni Egyetem Kísérleti Fizikai Intézetében *Szalay Sándor*

és *Csongor Éva*³ végezték el. Újabban különösen az USA-ban kiterjedten alkalmaznak furatba leereszthető ionizációs kamrákat a nyersolajkutatáshoz (»radioaktív lyukszelvényezés«). Tőlünk függetlenül, pár hónappal később *R. E. Fearon*⁴ is közölt számításokat radioaktív lyukszelvényezéssel kapcsolatban, amelyek nem számlálócsőre, hanem ionizációs kamrára vonatkoznak. A következőkben ismertetjük számlálócsöves méréseink elvi alapjait és a hitelesítés módját, úgy, ahogy azt kifejlesztettük.

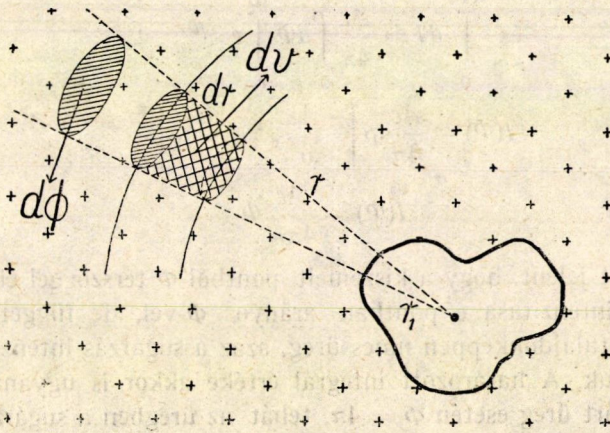
A természetben előforduló radioaktív anyagok nagyrésze vagy a Thórium, vagy az Urán radioaktív bomlási sorozat tagja. Ezek azok, amelyek számunkra érdekesek, és amelyek a természetben a legtöbb radioaktív sugárzást adják. Rádióaktív még a Kálium, Samarium, Cassiopeiium, Rubidium és Rhenium. Ez utóbbiak radioaktivitása csekély, és így jelentőségük elhanyagolható. Még jelentős Kálium-tartalommal bíró (3—4%) eruptív kőzetekben is túlnyomó részben a Thórium- és Urán-nyomoktól ered a rádióaktív sugárzás; a Kálium a sugárzásnak csak tört részét adja.

A Geiger—Müller számlálócsővel már eleve a gamma-sugárzást akartuk mérni, mert így egy nagyobb közettömegeből kaphatunk átlagértéket, amely kiközepelel a koncentráció-ingadozásokat. A Geiger—Müller számlálócső nem tesz különbséget abból a szempontból, hogy milyen radioaktív elemtől származik a gamma-sugárzás. Ennek megfelelően a mérések csak félkvantitatívva építhetők ki. Mérjük az összes gamma-sugárzást és megadjuk, hogy a kőzet rádióaktív anyagtartalma mennyi Thórium gamma ekvivalens, azaz tonnánként hány gramm Thórium adna összes bomlási termékeivel radioaktív egyensúlyban annyi gamma-sugárzást, mint a kőzetben jelenlevő összes radioaktív anyagok együttvéve.

Lássuk most a mérési módszer elvi alapjait :

Legyen először kőzetünk végtelen kiterjedésű, amelyben egyenletes koncentrációban gamma-sugárzó radioaktív anyag van eloszolva. A kőzet belsejében egy kis üreget képezünk (1. ábra), és ebbe helyezzük a számlálócsövet. Az a kérdés, hogy milyen kapcsolatban lesz a számlálócső által jelzett impulzusok száma a kőzet radioaktív anyag koncentrációjával? A koncentrációt (c) fejezzük ki egyelőre gramm Thórium gamma ekvivalens/cm³ egységekben. Minthogy a kőzet végtelen kiterjedésű, az összes gamma-sugárzás, ami a kőzetben keletkezik, abszorbeálódik benne. Gyakorlatilag végtelenül rövid idő alatt sugárzási egyensúly jön létre, azaz a kőzet bármelyik dv térfogat eleme másodpercenként ugyanannyi gamma-kvantumot fog abszorbeálni, mint amennyit kibocsát. A kőzet tehát sugárzási egyensúlyban van, a kőzetet egy gamma-kvantum gáz járja át, úgyhogy annak a kőzet minden cm³-ében van egy bizonyos koncentrációja.

A kőzetbe készítsünk képzeletben egy tetszésszerű alakú üreget, és ebbe helyezzük el a számlálócsövet. Az üreg belsejét is átjárják az áthaladó



1. ábra.

gamma-kvantumok. Az a kérdés, hogy mitől függ és mekkora lesz az üregben a kvantum gáz sűrűsége?

Szemeljünk ki az üregben egy tetszőszerinti pontot, és számítsuk ki az oda beérkező össz-sugárzás intenzitását. Számításunknál felhasználjuk azt a kísérletileg ismert tényt, hogy a gamma-sugárzás magában a közet anyagában abszorpciót (önabszorpció) szenved, amely jó közelítésben egy exponenciális törvénnyel állítható elő:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (1)$$

μ : az abszorpciós együttható, jellege cm^{-1} az illető közet anyagában mérve.

I_0 a sugárzás eredeti, I a csökkent intenzitása x vastagságú abszorbens rétegben való áthaladás után. Intenzitáson értsük a haladás irányára merőleges felületegységen egy másodperc alatt áthaladó gamma-kvantumok számát.

Legyen dv az a kiszemelt térfogatelem, amelynek sugárzását (dI) az üreg kiszemelt pontjában észleljük; $d\Phi$ a térszög eleme, r a távolság, r_1 az üregben megtett út. A dv térfogatelemből kiinduló sugárzás intenzitása arányos a sugárzó anyag tartalmával ($A \cdot c \cdot dv$), ahol A az arányossági szorzó, c a sugárzó anyag koncentrációja. A sugárzás intenzitása r távolságban $4\pi r^2$ -el fordított arányban csökken; közben $r-r_1$ vastag közetrétegben önabszorpciót szenved. Fentiek alapján:

$$dI = \frac{A \cdot c \cdot dv}{4\pi r^2} e^{-\mu(r-r_1)} \quad \text{és} \quad dv = r^2 dr d\Phi \quad (2)$$

$$\text{tehát} \quad dI = \frac{Ac}{4\pi} d\Phi \cdot e^{-\mu(r-r_1)} \cdot dr \quad (3)$$

$$\text{és } \int_0^{I(\Phi)} dI = \frac{Ac}{4\pi} \int_0^\Phi d\Phi \int_{r_1}^\infty e^{-\mu(r-r_1)} \frac{dr}{r} \quad (4)$$

$$I(\Phi) = \frac{Ac}{4\pi} \Phi \left[-\frac{1}{\mu} \cdot e^{-\mu(r-r_1)} \right]_{r_1}^\infty \quad (5)$$

$$I(\Phi) = \frac{Ac}{4\pi\mu} \Phi \quad (6)$$

Ez annyit jelent, hogy a kiszemelt pontból Φ térszöggel elhatárolt közet sugárzásának intenzitása e pontban arányos Φ -vel, de független r_1 -től. Ha $r_1 = 0$, akkor tulajdonképpen nincs üreg, azaz a sugárzás intenzitását a tömör közetben kapjuk. A határozott integrál értéke akkor is ugyanakkora, mint üreg esetén. Zárt üreg esetén $\Phi = 4\pi$, tehát az üregben a sugárzás intenzitása

$$I = \frac{Ac}{\mu} \quad (7)$$

ugyanakkora, mintha az üreg helyét is közet tölténé ki, és értéke független az üreg alakjától és nagyságától.

Itt tulajdonképpen analógia van a szilárd test hőmérsékleti sugárzásának intenzitásával termodinamikai egyensúly esetén. Az üregben ugyan emittáló források nincsenek, viszont abszorpció sincs, tehát a sugárzási egyensúly nem zavarodik meg.

Ha most az üregbe valamiféle mérőműszert teszünk, akkor az a sugárzás intenzitásával arányosan fog jelezni, és ha benne a sugárzás nem szenved nagy abszorpciót, akkor a sugárzási egyensúlyt sem zavarja meg.

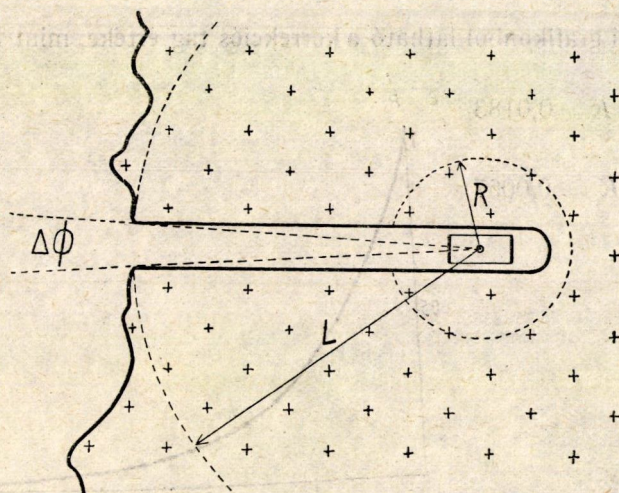
A fentieket a következő konkluziókban foglalhatjuk össze:

Ha van egy végtelen kiterjedésű, homogén fajsúlyú és homogén radioaktív tartalmú közet, akkor

1. A közetben γ -sugárzási egyensúly jön létre, azaz a sugárzás egyensúlyi intenzitása akkora, hogy a közet minden térfogat-eleme ugyanannyi γ -kvantumot bocsát ki mp-enként, mint amennyit elnyel. A közetet tehát egy a koncentrációval (c) arányos, az abszorpcióval (μ) fordítva arányos sűrűségű γ -kvantum gáz tölti be.

2. A közetben levő bármilyen alakú és nagyságú, de zárt üregben a γ -kvantum gáz sűrűsége egyensúlyban ugyanakkora, mint a közetben, azaz mintha a közet az üregben is jelen volna, ha a közet kiterjedése végtelen, vagy »elég nagy«. (Lásd később a korrekciót véges kiterjedésre.)

3. A közetben készített bármilyen alakú, de zárt üregbe helyezett és γ -sugarak mérésére alkalmas bármilyen mérőeszköz (ionizációs kamra, G.—M. számlálócső, fotografiai lemez stb.) segítségével mért adat arányos a környező közet átlagos radioaktív γ -sugárzó anyag tartalmával, és így annak mérésére felhasználható.



2. ábra.

A következőkben vizsgáljuk meg, hogy ha a kiindulási feltételek nem teljesülnek, cca milyen hibák léphetnek fel, és hogyan vehetünk igazítást. A gyakorlatban a kőzet nem végtelen kiterjedésű és az üreg nem zárt, hanem az egyik oldalán nyitott szűk furat, melybe a számlálócsövet behelyezzük (2. ábra).

Visszatérünk az (5) egyenlethez, de az r szerinti integrációt csak a kőzet véges legközelebbi határáig terjesztjük ki:

$$\text{tehát } I(\Phi, r) = \frac{cA}{4\pi} \Phi \left[-\frac{1}{\mu} e^{-\mu(r-r_1)} \right]_{r=r_1}^r, \quad (8)$$

$$I(\Phi, r) = I(\Phi, \infty) \cdot (1-K), \text{ ahol } K = e^{-\mu(r-r_1)} \quad (9)$$

a korrekciós tag, amelynek segítségével a mért eredményt ∞ kiterjedésű kőzetre akarjuk redukálni. E tag exponenciálisan eltűnik, ha $r \rightarrow \infty$

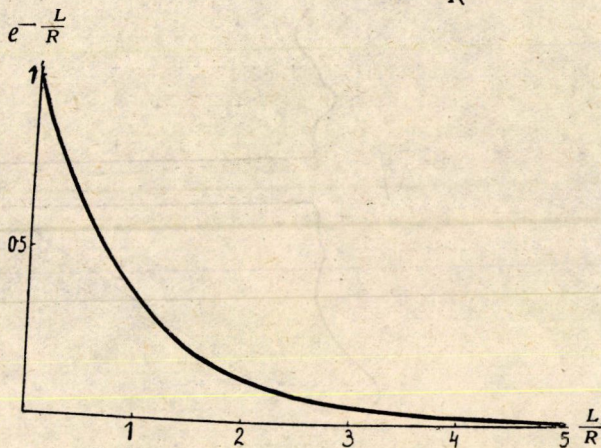
A korrekciós tag értéke $\frac{1}{e}$, ha $\mu(r-r_1) = 1$, azaz $r-r_1 = R = \frac{1}{\mu}$

Ezt a hosszúság-jellegű mennyiséget (R) ezentúl »közepes hatótávolság-nak fogjuk nevezni. Fizikai jelentése az a kőzetréteg vastagság, amelyen a kőzet saját γ -sugárzása áthatolva, annak intenzitása önabszorpció következtében $\frac{1}{e}$ -ed részére csökken. Értéke éppen az abszorpció-koefficiens reciproka. Ha a kőzettomeget L sugarú gömbhéjjal közelítőleg határoljuk, akkor $\frac{L}{R}$ viszonyból közvetlenül megkapjuk a korrekciós tagot (3. ábra).

Az alábbi grafikonból látható a korrekciós tag értéke, mint $\frac{L}{R}$ függvénye :

$$\frac{L}{R} = 4 \text{ esetén } K = 0,0183$$

$$\frac{L}{R} = 5 \text{ esetén } K = 0,0067$$



3. ábra.

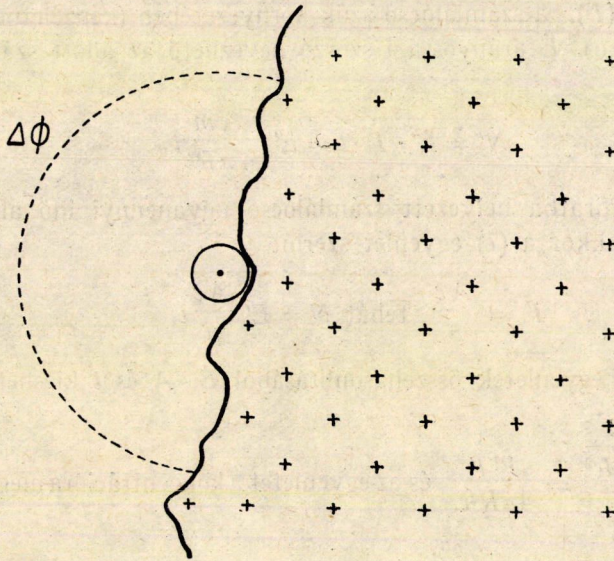
A gyakorlat szempontjából megemlítjük, hogy Uránium, Thórium és bomlástermékeik γ -sugárzása esetén μ -értéke az átlagos 2,8 fajsúlyú kőzetekben $0,1 \text{ cm}^{-1}$ körül van. 40—50 cm mély furat gyakorlatilag már végtelen mélynek tekinthető, mert a korrekció jelentéktelen.

A gyakorlatban a 2. és 4. ábrán látható geometriai konfigurációk fordulnak elő :

A 2. ábrán látható esetben, ha a kőzet határát L sugarú gömbbel közelítjük (ahol L a próbafurat mélysége), akkor túl nagy korrekciót veszünk, a hiba a valóságban kisebb, mint $e^{-\frac{L}{R}}$.

Lássuk a javítást az üreg nem zárt volta miatt. Az üreg nem zárt, tehát az integrációt Φ szerint nem lehet a teljes gömbre kiterjeszteni, mert a sugárzó anyaggal kitöltött térszög (2. és 3. ábrán) $\Delta\Phi$ -vel kisebb Φ -nél. A geometriai szemlélet és az eddigiek mutatják, hogy ha a furat mélysége többszöröse a karakterisztikus önabszorpciós méretvastagságnak, akkor a korrekció csekély, és igen jó közelítésben úgy becsülhetjük, hogy a furat nyílás-területe és a számlálócső középpontja által alkotott $\Delta\Phi$ térszöget vesszük figyelembe. A gyakorlatban cca 35 mm átmérőjű és 400 mm mély furatokat alkalmaztunk úgy, hogy a számlálócső középpontja cca 350 mm-re volt a furat szélétől. Ekkor $\Delta\Phi$ értéke cca 0,8%, tört része a 4π -nek.

A 4. ábrán látható szélsőséges esetben, amikor furat nélkül a felszínen mérünk, $\Delta\Phi$ értéke közel 2π , azaz a számlálócső csak közel fele sugárzást kap a kőzettől. Ezek szerint a korrekciós faktor értéke kb. 2 lenne. Minthogy azonban a levegő mindig tartalmaz kimutatható rádiumemanációt, annak sugárzása és a környező tárgyak sugárzása a mérések pontosságát károsan



4. ábra.

befolyásolja, ezért így csak hozzávetőleges eredményt kaphatunk, és ahol csak technikailag lehetséges, mindig furatban mérünk.

A 2. ábrán látható mérési mód alkalmazható a legjobban a gyakorlatban, és a korrekciót is pontosabban kiszámíthatjuk. Ha a kőzet síkkal van határolva, amelyre merőleges L cm hosszú furatba helyezük a számlálócsövet, akkor az integráció az exponenciális integrálhoz vezet, amelynek értékei különböző függvénytáblázatokban numerikusan megtalálhatók.

A számlálócső hitelesítése egyaránt történhet akár Thóriumra, akár Uránra. A kivitelezés módja az, hogy a számlálócsőtől jól meghatározott távolságra ismert mennyiségű Thóriumot helyezünk el, amelyik összes radioaktív bomlási termékeivel bomlási egyensúlyban van. Meghatározzuk a percenként tapasztalt impulzusok számát, és annak segítségével kiszámíthatjuk a hitelesítő konstans \dot{E} szám értékét. Az Uránra való hitelesítés üvegcsőben leforrasztott kis mennyiségű Rádiummal történhetik a fenti módon. A radioaktív gamma-sugárzás azon kemény komponensei, amelyekre a számlálócső érzékeny, a Rádium bomlástermékeitől származnak. Az Urántól a Rádiumig terjedő bomlástermékek gamma-sugárzása fentihez képest kicsi, és mint említettem, a módszer úgyis félkvantitatív, tehát exact mérési eredményekre úgysem számíthatunk.

Lássuk most a számítást. Helyezzünk el a számlálócső középpontjától R távolságban m gramm Thóriumot, amelyik összes rádióaktív bomlástermékeivel bomlási egyensúlyban van. Határozzuk meg egy bizonyos idő (t) alatt észlelt impulzusok számát (N'). Nyilvánvaló, hogy N' arányos lesz a γ -sugárzás

intenzitásával (I'), a számlálócső szűk környezetében (képzeletben F felülettel körülzárt térben). E arányossági szorzó nevezhető az adott számlálócső érzékenységének.

$$N' = E' \cdot I' \cdot t = E' \frac{A m}{4 \pi R^2} t \quad (10)$$

A kőzetbe a furatba helyezett számlálócső ugyanennyi idő alatt számoljon N impulzust, akkor a (7) egyenlet szerint

$$I' = \frac{A c}{\mu}, \text{ tehát } N = E' \frac{A c}{\mu} t \quad (11)$$

A (10) és (11) egyenletek összehasonlításából E , A és t kiesnek:

$$\frac{N'}{N} = \frac{\frac{m}{4 \pi R^2}}{\frac{c}{\mu}} = \frac{m \mu}{4 \pi R^2 c}, \text{ és az egyenletet a koncentrációra megoldva:} \quad (12)$$

$$c = \frac{N}{N'} \frac{m \mu}{4 \pi R^2} \quad (13)$$

Az egyenletben szereplő c a koncentrációt a kőzet térfogategységében, μ az abszorpció-koefficiens a kőzet anyagában jelentik. Célszerű helyettük bevezetni a koncentrációt C a kőzet tömegegységében ($C = \frac{c}{\rho}$, ahol ρ a kőzet fajsúlya), és az ú. n. tömegabszorpció koefficiensét ($\mu' = \frac{\mu}{\rho}$), amelyik adott kvantumenergiájú γ -sugárzás esetén az abszorbeáló közeg fajsúlyától jó közelítésben független számérték. Ekkor

$$C = \frac{c}{\rho} = \frac{N}{N'} \frac{m}{4 \pi R^2} \frac{\mu}{\rho} = \frac{N}{N'} \frac{m}{4 \pi R^2} \mu' \quad (14)$$

Egy adott számlálócső hitelesítését elvégezve, az egyenletben szereplő összes tényezők numerikusan kifejezhetők és egy konstansba (α) foglalhatók össze:

$$C = N \cdot \alpha \quad \text{ahol } \alpha = \frac{m \mu'}{N' 4 \pi R^2} \quad (15)$$

A kőzet rádióaktív anyag koncentrációjával arányos a meghatározott (t) idő alatt észlelt impulzusok száma. μ' értéke adott és homogén γ -sugárzást adó rádióaktív anyagra az irodalomban ismeretes.⁵ A jelen munka szempontjából számításba jövő radioaktív anyagoknál a helyzet a következő: a Thórium-sorozat γ -sugárzásának spektrális összetételét *A. Alihanov* és *G. G. Latisev*^{6, 8} kutatók vizsgálták meg. Kisebb intenzitású lágyabb komponensek mellett

túlnyomó intenzitással lép fel egy 2,6 MeV-os γ -komponens, amelynek tömegabszorpció koefficiense $\mu' = 0,039 \text{ cm}^2/\text{gr}$ 1 gr Thórium bomlástermékeivel egyensúlyban cca $1,38 \times 10^3$ ilyen 2,6 MeV-os γ -kvantumot bocsát ki másodpercenként. Az Urán-rádium sorozat γ -sugárzásának spektrális összetételét A. Alihanov és V. P. Dzepelov^{7 8} vizsgálták meg. A sugárzás a legkevésbé sem monokromatikus nagy számú komponensből áll, melyek közül intenzitásban az 1,1 MeV-os cca 22%-ot, az 1,4 MeV-os cca 11%-ot, az 1,75 MeV-os 22 %-ot, az ezen felüliek együtt (1,8—2,4 MeV között) cca 20%-ot tesznek ki. Ennek megfelelően csak közelítésben lehet egyetlen (empirikusan megállapítható és használható) átlagos abszorpció koefficiensről beszélni. A gyakorlatban a $\mu' = 0,046 \text{ cm}^2/\text{gr}$ érték használatos és empirikusan jól használható is.⁹ Az intenzitás 1 gr Rádium és bomlástermékeire összesen cca $3,0 \times 10^{10}$ keményebb γ -kvantum másodpercenként. A kálium F. Behounek¹⁰ régebbi, valamint főleg E. Gleditsch és T. Graf¹¹ újabb vizsgálatai szerint grammonként és másodpercenként 3,6 γ -kvantumot bocsát ki 1,55 MeV energiával, amelynek megfelelő tömegabszorpció-koefficiens az irodalomban fellelhető⁵ grafikus összefüggés alapján $\mu' = 0,05 \text{ cm}^2/\text{gr}$ -nak adódik.

A fenti, számításba jövő radioaktív anyagoknál a lágy γ -sugár komponensek relatív erőssége jóval kisebb, továbbá a számlálócső érzékenysége is jóval kisebb ezekkel szemben. Az elkövetett hiba további csökkentésére a számlálócsövet a méréseknél 2 mm vastag ólommal ekvivalens vastagságú vastokban tartottuk. A tok fala a lágy komponenseket erősen abszorbeálja, a keményeket alig.

Mint az előadás elején említettem, a számlálócsöves mérések félkvantitatív eredményhez vezetnek, mert a számlálócső nem ad arra nézve eredményt, hogy a sugárzás hányadrésze származik Urántól, Thóriumtól, vagy Káliumtól. E kérdés megvizsgálása csak utólagos laboratóriumi vizsgálattal lehetséges. Minthogy ilyen vizsgálat nagyon fárasztó, és sok időt vesz igénybe, csak egyes esetekben, a legaktívabb kőzeteknél végezhetjük el. A vizsgálat a következő módon történik: a kőzetből vett mintát előbb acélmozsárban, azután achátmozsárban, finom porrá törve platina tégelyben, olvasztott alkáli karbonátos feltárásnak vetjük alá. Az olvadékot a kihülés után hígított sósavban feloldjuk, a kvasav-főlöslegtől többszöri tömény füstölő sósavval való bepárlással megszabadítjuk. A tiszta sósavas szűrletet, amely a Rádiumot és Thoriumot tartalmazza, felhígítjuk és mosópalackba töltjük. A mosópalack két szárát leforrasztjuk. A rádium emanáció néhány hét alatt a bennlevő Rádiummal és Urániummal bomlási egyensúlyba jön. Azután kellő óvatossággal a csúcsokat letörve, rádiumemanáció mentes tiszta légárammal a rádiumemanációt kihajtjuk a mosópalackból és bepumpáljuk egy ionizációs kamrába, ahol mennyiségileg meghatározzuk. A meghatározásból következtethetünk az Urán mennyiségére. A Thórium meghatározása hasonlóképpen történik, de az emanációk felezési idejében levő nagy különbség módot nyújt a szétválasztásra.

Ha a mosópalackban levő oldatot levegő-átbugyborékoltatással alaposan átszelőztetjük, akkor a rádiumemanáció eltávozik, és minthogy felezési ideje 3,6 nap, csak lassan fog újra képződni. Ha most állandó légáramot bugyborékoltatunk át a mosópalackon, és azt szárítás után folyamatosan az ionizációs kamrán át cirkuláltatjuk, akkor, minthogy a Thorium emanáció felezési ideje csak 55 másodperc, rögtön újra keletkezik, és áramlási egyensúlyban az ionizációs kamrában ionizációt hoz létre. Az ionizációs mérőműszer hitelesítése Thóriumra, ismert koncentrációjú Thórium oldaton, levegőnek ugyanolyan sebességgel való átbugyborékoltatása útján történik, Rádiumra viszont hitelesített rádium törzs-oldat egyensúlyi emanáció mennyiségének meghatározása útján.

A következőkben a külszíni méréseinkről szeretnénk beszámolni. Hazánk területén két komoly mélységbeli eruptív közethegység található : ezek a Velencei-hegység és a Mecsek-hegység. Minthogy a radioaktív anyagoknak (Thórium és Urán) a mélységbeli savanyú, eruptív kőzetek (gránit) az ősforrásai, ezzel szemben a neutrális és bázikus eruptív kőzetekben (andezit stb.) előfordulásuk jelentéktelenül csekély, elsősorban e hegységek területeit vettük munkaprogramunkba.

1947 nyarán a Velencei-hegységbe szálltunk ki, ahol cca egy hónapot töltöttünk külszíni mérésekkel. E mérésekről mind a hivatalos fórumoknak, mind a Magyar Földtani Intézet évi jelentésében beszámoltunk, és az nyomtatásban is megjelent^{12 13}. Összesen cca 150 mérési pontot fektettünk, túlnyomórészt a Velencei-hegységben, mintegy 30 km² területen, részben azonban annak távolabbi környékén is, egészen a budai hegyekig, és hozzávetőleg meghatároztuk a Velencei-hegységtől távolodva az izorad (egyenlő sugárzás intenzitású helyeket összekötő) görbéket. E mérések eredményei részletezve térképeken az idézett munkákban megtalálhatók, itt csak röviden foglaljuk őket össze :

Legnagyobb radioaktivitást a savanyú eruptív kőzetek (gránit, apilit) mutattak. Úgyszólván teljesen inaktívek voltak a neutrális és bázikus eruptív kőzetek (andezit) és a hidrotermális kvarcitok. A kontakt palákban mérsékelt aktivitást találtunk. E hegység gránitjainak radioaktív anyag tartalma helyszíni, valamint utólag a Debreceni Kísérleti Fizikai Intézetben végzett laboratóriumi mérések alapján cca 40—60 gramm Thórium/tonna és cca 8—9 gramm Uranium/tonna. Számottevő feldúsulást nem észleltünk. A mérések természetesen csak a föld felszínére és a hozzáférhető exponált helyekre (köfejtők, szabadon álló sziklák és kőfalak) szorítkoztak. Bányászható ércesedés, fémesedés e hegységben nem ismeretes. Magától értetődő azonban, hogy 1 méter vastag talajréteg már teljesen visszatartja a gamma-sugárzást, és így e vizsgálatok csak a felszínről adhatnak tájékozódást. A kutatások kibővítése kutató fúrásokkal rendkívül költséges lenne, és speciális technikát igényelne, ami meghaladja az Intézet technikai lehetőségeit és így ezzel nem próbálkoztunk meg.

1949 nyarán a Mecsek-hegység és környékének savanyú eruptív előfordulásait, valamint más számításba jövő érdekesebb kőzeteit vizsgáltuk meg. A vizsgálatok mintegy 70 km² területre terjedtek ki és egy hónapig tartottak. Nagyszámú mérési pontot vettünk fel, amelyekről részletes, nyilvános közlés még nem történt. Itt csak annyit közlünk ezekből, hogy e vizsgálatok hasonló eredménnyel jártak, mint a Velencei-hegységben. A Mecsek-hegység savanyú eruptív kőzetei szintén cca ugyanolyan aktivitást mutattak, mint a Velencei-hegységé. Aktivitásuk csak néhol haladta meg cca 20 %-kal a Velencei-hegységben tapasztalt aktivitást.

A magyarországi felszínen elérhető és általunk megvizsgált gránitok aktivitása ezek szerint lényegesen nagyobb a gránitok átlagos aktivitásánál és e hazai gránitok a vizsgálatok alapján az erősebb aktivitásúak közé sorolandók be.

Ezeket a gránitokat tekinthetjük a magyarországi Urán és Thórium ősforrásainak. A felszínen levő és napjainkban a mélységben rejtőző, még fel nem tárt gránitmasszívumok anyagának elmállása útján a különböző geológiai korokban oldatba került Uranium- és Thórium-mennyiségeket az üledékes kőzetekben találhatjuk meg. Az elmállott kőzetanyag szállítása és lerakódása közben a radioaktív anyagok mennyisége feldúsulhatott és méréseink szerint helyenként valóban feldúsult, mégpedig az eredeti gránitban mért koncentrációnál nagyobb mértékben.

Miután ezzel már végeztünk a magyarországi gránitok felszíni átvizsgálásával, 1950 nyarán üledékes kőzetek átvizsgálásához kezdtünk. E kőzetek átvizsgálása a legkönnyebben szénbányákban volt lehetséges, ahol az aknák és a tárók segítségével többszáz méter vastagságban hozzáférhetők a különböző kőzetretegek, és azonkívül a fűrőberendezések is rendelkezésre állanak, úgyhogy módunkban volt a méréseket furatba helyezett számlálócsővel végezni. Találtunk egyes üledékes kőzetekben (szervesanyagtartalmú palák, szénpalák), valamint szenekben a hazai gránitokénál lényegesen nagyobb aktivitást is. Ez arra mutat, hogy a szervesanyagtartalmú üledékes rétegek keletkezése alkalmával a környező hegységek mállása révén oldatba jutott Urán- és Thóriumnyomok bizonyos kedvező körülmények között a szerves étellel, vagy a szervesanyag rothadásával kapcsolatban a vízből hosszabb időn át az üledékben feldúsulhattak. Minthogy ez üledékes kőzetek vizsgálatát 1950 nyarán kezdtük el, még túlkevés adat áll rendelkezésünkre ahhoz, hogy általános következtetést vonhassunk le arról, hogy mi várható e téren. A jövőben ez irányban kívánjuk a vizsgálatokat folytatni.

Ez a munka úgy tekintendő, mint egy alapleltár, kataszter készítése a radioaktív anyagok eloszlásáról a földkéreg Magyarországhoz tartozó részén. Az érzékeny módszer lehetővé teszi, hogy a sugárzó anyagok útját nyomon követhessük a különböző geológiai idők folyamán a magyarországi kőzetekben. Megismerhetjük a folyamatokat, melyek a vándorlás folyamán lejátszódtak, látjuk a szétszóródás és felhalmozódás tényezőit. E feladatból még csak elenyésző

csékély részt végeztünk el. Igen nagy területek és igen vastag rétegcsoportok várnak még átvizsgálásra. Ezeket a jövőben is folyamatosan és rendszeresen fogjuk végezni. Munkánk végeredménye egy természettudományos módszerekkel és természettudományos szempontból összeállított kataszter lesz, mely a radioaktív anyagok eloszlását, koncentrációját fogja feltüntetni Magyarország területén.

Még a gyakorlati vonatkoztatásokra kell kitérnünk: Kétségtelen, hogy a ma bányászott nagy koncentrációjú, de kis kiterjedésű Uranium-telepek az erős igénybevétel miatt hamar kimerülnek. Mint az összes többi bányászott nyersanyagnál, az Urániumnál is hamar elérkezik az idő, mikor a kis koncentrációjú, de nagy kiterjedésű telepek nagyipari felhasználására kerül a sor. Ekkor érkezik el annak az ideje, hogy a mi vizsgálataink szerint készült kataszter alapján kijelöljük azokat a kőzetcsoportokat, melyekből a termelés megindítható. Ekkor érkezik el az ideje annak, hogy a geokémiai ciklusnak (körfolyamatnak) kijelöljük azt a szakaszát, melyben nálunk az Uránium másodlagos feldúsulása legnagyobb mértékű volt.

A vizsgálatokból már eddig is látszik, hogy a radioaktív anyagok másodlagos felhalmozódásában a következő folyamatoknak van nagy szerepe:

1. A hegységek lepusztulásakor a kőzetek vegyi mállása folytán keletkező málladékoldatok képződésének.

2. Ez oldatok vándorlásának.

3. Alkalmos környezetben az aktív anyagok kiválásának a mállási oldatokból. Itt kétségtelenül kolloidkémiai folyamatoknak és esetleg organizmusoknak, vagy legalább is elhalt organizmusokból keletkezett organikus kolloidoknak is szerepe van az aktív anyag feldúsulásában.

Reméljük, hogy a vizsgálatok folyamán új geokémiai törvényszerűségekre fogunk bukkanni, és ezzel a tudományt azon az úton néhány lépéssel továbbvinni, melyet *Fersmann* Turkesztánban a Tuja—Mujuni radioaktív anyag előforduláson, mások a Colorádó-vidék carnotit-telepein, a skandináviai kolmpalák vizsgálatánál megindítottak.

*Debreceni Tudományegyetem
Kísérleti Fizikai Intézete.*

IRODALOM

- ¹ *Vernadsky V. I.*: Geochemie, Leipzig 1930. Orosz eredetije: *Очерки Геохимии.*
- ² *Fersmann A.*: *Geochemische Migration der Elemente*, W. Knapp, Halle (Saale) 1930.
- ³ *Szalay A. and Csongor Eve*: *Science* 109 (1949), 146—147.
- ⁴ *Fearon R. E.*: *Nucleonics* 4 (1949), 67—75.
- ⁵ *The Science and Engineering of Nuclear Power*, Vol. 1. Addison-Wesley Press Inc. Camb. 42. Mass. USA (1947), 39, 40, 43.
- ⁶ *Alichanow A. and Latyshev G.*: *Jour. Phys. U. S. S. R.* 3 (1940), 263.
- ⁷ *Alichanow A. and Dzepelov V. P.*: *Compt. rend. U. S. S. R.* 20 (1938), 133.
- ⁸ *Lásd Cork I. M.*: *Radioactivity and Nuclear Physics* d. Van Nostrand Co Inc. New-York 1950.
- ⁹ *Mme Curie P.*: *Radioactivité*, Tome 1. 303—322. Hermann et Cie, Paris 1935.
- ¹⁰ *Behounek F.*: *Z. Phys.* 69 (1941), 654.
- ¹¹ *Gleditsch E. and Graf T.*: *Phys. Rev.* 72 (1947), 640.
- ¹² *Földvári A.*: *Magyar Áll. Földtani Intézet Évi Jelentései X. kötet* (1948), 35—50.
- ¹³ *Szalay S.*: *Magy. Áll. Földtani Intézet Évi Jelentései X. kötet* (1948), 5—21.

ÚJ ÖSSZEFÜGGÉS A GRAVITÁCIÓ ÉS MÁGNESÉG KÖZÖTT

NEUGEBAUER TIBOR

Előadta az 1950. november 28-án tartott osztályülésen

Mint ismeretes, a Föld és a többi égitest mágneses momentumának a problémája még mindig megoldatlan. A Föld mágneses terének változásait (a mágneses háborgásokat) a Birkeland-Störmer-féle elmélet ugyan kifogástalanul meg tudja magyarázni, de magának a mágneses momentum felléptének az oka még teljesen megoldatlan probléma, annak ellenére, hogy már igen sok elméleti próbálkozás történt ennek a kérdésnek a tisztázására. Ezeket az elméleteket két csoportba oszthatjuk. Az elsőbe tartozók egy új, eddig ismeretlen természettörvényt tételeznek fel, amely összefüggést állapítana meg a gravitációs tér vagy az anyag mozgása és a mágneses tér közt; ezek az ú. n. fundamentális elméletek. A második csoportba tartozó megfontolások tisztára az eddig ismeretes természettörvények alapján igyekeznek magyarázatot találni a Föld mágneses terére vonatkozólag.

1. §. Az első csoportba tartozó elméletek közül a látszólag legegyszerűbb feltevéssel dolgozik *Wilson*¹ hipotézise, amely felteszi, hogy egyszerűen a Biot-Savart-törvény analógiájára, mely szerint

$$H = \frac{e}{cr^3} [v, r], \quad (1)$$

nemcsak mozgó töltések, hanem a mozgó elektromosan semleges anyag is létesít mágneses teret. Tehát eszerint:

$$H = - \frac{M}{cr^3} [v, r]. \quad (2)$$

Hogy (2) egyenletünk dimenzionalisan is helyes legyen, a benne szereplő tömeget ú. n. gravitációs egységekben kell kifejeznünk, tehát az

$$M = f^{1/2} m \quad (3)$$

mennyiséget kell (2)-be helyettesítenünk, ahol f a gravitációs állandó. A Coulomb-törvény és gravitációs vonzás törvényeinek összehasonlításából mindjárt láthatjuk, hogy ebben az esetben e és $M = f^{1/2} m$ azonos dimenziójúak. A (2) képlet alapján számított mágneses momentum a Föld és Nap esetében valóban legalábbis nagyságrendi egyezésben van a tapasztalattal, vagyis ezen égitestek mechanikai és mágneses momentumának a viszonyára (2)-ből a tapasztalattal lényegileg

egyező eredmények adódnak. Sőt újabban *Babcock*-nak² sikerült ezeket az adatokat egy csillag, a 78 Virginis esetében is mérnie, és szintén nagyságrendi egyezést talált az előbbi elmélettel. Igaz ugyan, hogy újabban még arra vonatkozólag is felmerültek kételyek, hogy a Napnak van-e egyáltalában mágneses momentuma³, de ez az általánosan elfogadott nézeten, a Nap mért mágneses momentumának a helyességére vonatkozólag, nem változtatott.

Másrészt mérési eredmények bizonyítják, hogy legalább is translációs mozgások esetében a (2) összefüggés nem állhat fenn. Ezért még csak azt lehetne feltenni, hogy (2) pusztán rotációs mozgások esetében érvényes. Ez a feltevés azonban ellentmondásra vezet a speciális relativitás elméletével. Itt még csak azt említjük meg, hogy pl. egy modern vadászgép sebessége ugyanolyan nagyságrendű, mint a Föld felszíne egy pontjának a forgástól származó lineáris sebessége; tehát ezen esetben az iránytű viselkedésének rögtön el kellene árulnia a (2) összefüggés fennállását, ennek azonban nyomát sem találni.

Igaz ugyan, hogy a neutron esetében tényleg az a helyzet, hogy egy töltés nélküli anyagi részecske, amelynek impulzusmomentuma van, mágneses momentummal is rendelkezik; de mivel itt egy elemi korpuszkuláról van szó, az előbb említett a relativitástannal kapcsolatos nehézségek nem lépnek fel. Azonkívül *Wick* hipotézise szerint a neutron mágneses momentuma úgy jön létre, hogy ez a korpuszkula az idő egy tört részében virtuálisan egy protonra, egy elektronra és egy neutrínóra, vagy modern megfogalmazásban egy protonra és egy mezonra van felbontva.

Wilson gondolatait részben felújította az elmúlt években *Blackett*⁴, aki *Babcock*-nak az említett mérési eredményei alapján határozottan egy fundamentális összefüggés fennállására következtetett egy égitest mágneses (P) és mechanikai (U) momentuma közt, amely szerinte a következő alakú:

$$P = \beta \frac{f^{1/2}}{c} U, \quad (4)$$

ahol f ismét a gravitációs állandó, c a fénysebesség és β egy kis numerikus állandó. A P/U viszonyra a Föld és a Nap esetében c. g. s. egységekben a $1,11 \cdot 10^{-15}$ és $0,79 \cdot 10^{-15}$ numerikus értékek adódnak. Tehát csakugyan azonos nagyságrendű mennyiségek, annak ellenére, hogy pl. a Nap mechanikai momentuma nyolc nagyságrenddel nagyobb, mint a Földé. Egy elektron esetében az említett viszonyra $0,88 \cdot 10^7$ adódik, úgyhogy

$$\frac{(P/U)_{\text{Elektron}}}{(P/U)_{\text{Égitest}}} \approx 10 + 22. \quad (5)$$

Blackett ebből az összefüggésből még érdekes elméleti következtetéseket is vont le, és kimutatta, hogy (4)-et le lehet vezetni *Wilson* hipotéziséből. Éppen ezért azonban (4)-gyel szemben is fennállnak az említett elméleti nehézségek.

Az általános relativitás elméletének új hipotézisekkel való kiegészítése segítségével *Clark*⁶ dolgozott ki egy elméletet, amelyből valóban a *Wilson*, ill. *Blackett*-féle összefüggés következik egy forgó test mechanikai és mágneses momentumának a viszonyára vonatkozólag. Hasonló megfontolások származnak *Giāo-tól*⁶ egy ötdimenziós világra vonatkozóan. *Alfvén*⁷ viszont, megmaradva a jelenegi fizikai ismereteink keretében, összefüggést vezetett le egy elektromosan vezető folyadék örvénylő mozgása és az ennek folytán (spontán) fellépő mágneses tér közt. Gondolatait továbbfejlesztette *Batchelor* és *Towsend*⁸ míg *Walen*⁹ megkísérelte ilyen módon a Nap mágneses momentumát, *Bullard*¹⁰ pedig a Földét megmagyarázni. Egészen más gondolat származik *Benfieldtől*¹¹ aki arra hívta fel a figyelmet, hogy ha egy fémdarab egy része igen nagy nyomás alatt áll, akkor a benne levő vezetési elektronok egy részének szükségképpen át kell mennie a fémdarab nyomásnak ki nem tett részébe; tehát az előbbi pozitív, az utóbbi pedig negatív töltésre tesz szert. Mivel továbbá a Föld belső magja a régebbi felfogás szerint, amelyet azonban még egyáltalában nem tekinthetünk megdőltnek, olvadt fémekből éspedig főként vasból áll, azért — alkalmazva erre *Benfield* felfogását — a Föld forgása következtében mágneses momentumnak kell fellépnie, amely a valóban mért momentummal egyező előjelű. Amint azonban a továbbiakban látni fogjuk, nagyságrendekkel túl kicsiny, amint ezt különben már *Benfield* is sejtette. Végül még megemlítjük *Biermann* és *Schlüter*¹² legújabb elméleti megfontolásait az égitesteken és az interstelláris térben fellépő mágneses erőterre vonatkozólag.

2. §. A legrégebbi gondolat a Föld mágneses momentumának megmagyarázására az volt, hogy a Föld belseje ferromágneses. Természetesen ez már mostani ismereteink szerint teljesen elavult, mivel, jóllehet a Föld belső magja a régebbi felfogás szerint csakugyan főképp vasból és nikkeltől áll, hőmérséklete azonban a Curie-hőmérsékletnél szükségképpen sokkal magasabb. Igaz ugyan, hogy az anyag ott óriási nyomás alatt áll, és ezért a Heisenberg-féle kicserélődési integrálok értéke is változhat, minthogy ezek exponenciálisan függenek a részek távolságától. *Sutherland*¹³ szerint meg lehetne magyarázni a Föld mágneses momentumának a felléptét, ha feltennők, hogy a Föld magja pozitív töltésű, és ezt egy negatív héj veszi körül. Ennek az elméletnek egyik nagy előnye az lenne, hogy az egész Földnek nem kellene elektromos töltést tulajdonítani: azonkívül nem tenné szükségessé semilyen új természettörvény feltételezését. A ténylegesen fellépő mágneses momentum megmagyarázására azonban olyan nagy töltéseket kellene feltételezni, hogy ezek egy $10^8 \frac{\text{völt}}{\text{cm}}$ nagyságú gradiens felléptét okoznák a Föld anyagában. Márpedig egyáltalában nem ismeretes olyan szigetelőanyag, amely ilyen óriási elektromos szilárdsággal rendelkezne.

Az egyetlen eddig ismeretes körülmény, amelynek folytán egy forgó testnek szükségképpen mágneses momentuma is van, a Barnett-effektus folytán

fellépő mágnesezettség. *Chapman* és *Bartels*¹⁴ azonban kimutatták, hogy ez ugyan a helyes előjelet szolgáltatja, de a Föld mágneses momentumának a megmagyarázására tiz nagyságrenddel túl kicsiny.

Jelen dolgozat célja egy ezideig tekintetbe nem vett effektus megbeszélése, amely minden új hipotézis bevezetése nélkül, tisztán az eddigi fizikai ismereteink alapján, összefüggést állapít meg a gravitáció és a mágneses momentum közt.

3. §. Gázok esetében a Föld gravitációs tere következtében a barometrikus magassági formulának megfelelő sűrűségeloszlás áll elő. Tehát igaz ugyan, hogy a sűrűség lent nagyobb lesz, mint nagyobb magasságokban, azonban annak ellenére, hogy az atomok tömege úgyszólván teljesen a magban van koncentrálnva, a gravitációs tér hatására az atommagok és az ezeket környező elektronhéjak egymáshoz képest nem tolnak el, minthogy az elektronok pillanatnyilag követik az atommagok mozgását. Ez a gondolatmenet addig marad helyes, amíg a gáz sűrűsége olyan kicsiny, hogy az egyes atommagokat környező elektronburkok kölcsönös Fermi-féle taszítása nem játszik szerepet. Természetesen azonban egészen mások lesznek a viszonyok, ha gázatomok egy vízszintes merev felületbe ütköznek, mert ott az ütközéskor az atommag nagy tehetlensége miatt az atom erősen deformálódni fog.

Egészen mások lesznek azonban a viszonyok, ha kondenzált anyagról van szó, tehát szilárd testekről vagy folyadékokról, melyeknél lényegileg az elektronhéjaknak a Pauli-elv folytán fellépő taszítása (a Fermi-taszítás) határozza meg az atomoknak egymástól való távolságát. Hasonlóak különben a viszonyok igen erősen összesűrített gázok esetében is. A gravitációs erő hatására ekkor az anyag természetesen elsősorban bizonyos mértékig össze lesz nyomva, másrészt azonban az atommagok a belső elektronokkal együtt kissé eltolódnak a gravitációs potenciál gradiensének az irányában, viszonyítva a külső elektronhéjuk geometriai középpontjához. Ez a külső elektronhéj t. i. a szomszédos atomok elektronhéjának Fermi-taszítása miatt nem tudja a mag elmozdulását teljesen követni. Ennek folytán a polarizációnak bizonyos formája lép fel, amelynek az az oka, hogy a tömeg legnagyobb részét az atommagokban van koncentrálnva, és ezért a gravitációs tér ezeket a magokat kissé eltolja a külső elektronfelhőjük elektromos súlypontjához képest. Normális állapotú gázokban ez a jelenség azért nem áll elő, mert ottan elegendő hely áll rendelkezésre ahhoz, hogy a külső elektronok is követhessék az atommag mozgását.

Tegyük fel, hogy a kérdéses atomnak vagy ionnak nyolc külső elektronja van és jelöljük a magjának a tömegét M -mel; a belső elektromos teret pedig, amely a kérdéses atomnak az előbb tárgyalt módon való deformációja (a mag és a külső elektronhéj elektromos súlypontjának egymáshoz képest való eltolása) révén áll elő, E -vel. Szemléletesség okából most azt tesszük fel, hogy az atommag a belső héjak elektronjaival és a külső elektronhéj egymáshoz képest mozdulnak el; levezetéseink azonban, amint azt látni fogjuk, sokkal általáno-

sabban is érvényesek. Az atommag (és a belső héjakból álló komplexum)-ra ható gravitációs és elektromos erőnek egyensúlyban kell lennie, tehát

$$Mg = 8 e E, \quad (6)$$

ahol g a gravitációs állandó, és e az elektron töltése. (6)-ból

$$E = \frac{Mg}{8e}. \quad (7)$$

Felírhatjuk továbbá az energiaegyenletet,

$$\frac{1}{2} \alpha E^2 = \frac{1}{2} M g l, \quad (8)$$

ahol l az atommagnak a külső elektronhéj elektromos súlypontjához való relatív eltolódása és α az atom (vagy ion) polarizálhatósága (elektromos térrel szemben). (8)-ből

$$l = \frac{\alpha E^2}{Mg} \quad (9)$$

és ide betéve (7)-et

$$l = \frac{2Mg\alpha}{128e^2} \quad (10)$$

Az összes töltés a kérdéses égitest forgó mozgása miatt egy kört ír le. Jelöljük N -nel az atomok számát a térfogategységben, akkor ebben $8Ne$ negatív és l távolsággal eltolva ugyancsak $8Ne$ pozitív töltés van, tehát a forgás révén egy ilyen térfogatelem

$$\pm \frac{8Ne}{T} \quad (11)$$

nagyságú áramsűrűséget létesít, ahol T a kérdéses égitest sziderikus forgási ideje. Az elektronoktól létesített mágneses momentumra a következő képletet kapjuk :

$$\mu_1 = \frac{if}{c} = \frac{\pi r^2}{c} \cdot \frac{8Ne}{T}, \quad (12)$$

és hasonlóan a pozitív töltésektől létesítettre az alábbi :

$$\mu_2 = \frac{i \cdot f'}{c} = \frac{\pi (r-l')^2}{c} \cdot \frac{8Ne}{T}, \quad (13)$$

ahol r a távolságot jelenti az égitest tengelyétől. (12) és (13)-ból végül

$$\mu'_0 = \mu_1 - \mu_2 = \frac{2\pi r l'}{c} \cdot \frac{8Ne}{T} \quad (14)$$

következik. (14)-et most integrálnunk kell egy elemi vastagságú gömbhéj egész felületére. Ebből a célból bevezetünk egy térbeli polárkoordinátarendszert ; akkor

$$r = R \sin \vartheta, \quad (15)$$

ahol R a kérdéses égitest egy gömbhéjának a sugara és ϑ a tengelyével bezárt szög. Hasonlóan

$$l' = l \sin \vartheta, \quad (16)$$

ahol l' az l -nek az r -re, tehát a forgástengelytől való merőleges távolságra való vetülete. Végül tehát a következő integrált kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{8NeI}{T} \left[\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi \right] \cdot \Delta R \\ &= \frac{128\pi^2 NeIR^3}{3cT} \cdot \Delta R. \end{aligned} \quad (17)$$

Ez tehát a ΔR vastagságú gömbhéj mágneses momentuma. Az egész égitest mágneses momentumának kiszámítására még ki kell fejeznünk l -et mint R függvényét, hogy azután R szerint integrálhassunk. Ecélből először is feltesszük, hogy a kérdéses égitest homogén sűrűségű. Ekkor a gravitációs potenciál a belsejében

$$V = 2\pi f \kappa (R_0^2 - \frac{1}{3}R^2), \quad (18)$$

ahol R_0 jelenti az égitest sugarát, f ismét a gravitációs állandót és κ a homogénnek feltételezett sűrűséget. Különbén minden nehézség nélkül keresztülvihetnénk a számításainkat akkor is, ha κ R -nek lenne a függvénye. (18)-ból a felépő erőre a következő képlet adódik:

$$g = -\frac{dV}{dR} = \frac{4\pi}{3} f \kappa R, \quad (19)$$

tehát az égitest felszínén

$$g_0 = \frac{4\pi}{3} f \kappa R_0. \quad (20)$$

(19) és (20)-ból a következő összefüggést kapjuk:

$$g = \frac{g_0}{R_0} R, \quad (21)$$

és végül ezt az eredményt betéve (10)-be:

$$l = \frac{2Mg_0 \alpha}{128e^2 R_0} R. \quad (22)$$

Evvel l -et kifejeztük R segítségével, és ezt az eredményt (17)-be helyettesítve végül keresztülvihetjük az R szerinti integrálást:

$$\mathfrak{M} = \int_0^{R_0} \mu_0(R) dR = \frac{2\pi^2 N M \alpha g_0}{3cTeR_0} \int_0^{R_0} R^4 dR = \frac{2\pi^2 N M \alpha g_0}{15cTe} R_0^4. \quad (23)$$

Láthatjuk tehát, hogy egy forgó test saját gravitációs tere és atomjainak mindig meglevő polarizálhatósága folytán szükségszerűen létesít maga körül mágneses teret.

4. §. Eddigi tárgyalásainkban feltettük, hogy a tekintetbejövő atomoknak vagy ionoknak egy nyolc elektronból álló külső héjuk van, és a mag a belső héjak elektronjaival együtt ehhez képest mozdul el. Ez a feltevés mindenesetre igen megközelíti a való viszonyokat, mert hiszen ion-vegyületek általában lezárt nemesgázszerű héjjal rendelkező ionokból vannak felépítve, és azonkívül az egész elektromos polarizálhatóság tulajdonképpen ezen külső nyolcashéj elmozdíthatóságából áll, mivel egy nyolcszorosan pozitív ion praktikus értelemben véve már egyáltalában nem polarizálható. Ennek ellenére nézzük meg, hogy a levezetett képletünk mennyiben módosulna, ha feltesszük, hogy a legkülső laza héjban nem éppen nyolc, hanem egy tetszőleges n számú elektron van. (6) képletünk helyett akkor a

$$Mg = n e E \quad (24)$$

összefüggést kapjuk, (8) nem módosul, (10) helyett azonban az

$$l = \frac{Mg \alpha}{n^2 e^2} \quad (25)$$

eredményt vezetjük le; hasonlóan (11) helyett

$$\pm \frac{n N e}{T} \quad (26)$$

lesz a létesített áramsűrűség stb. Mindezek tekintetbevételével (17) helyett a

$$\mu_0 = \frac{16 n \pi^2 N e l R^3}{3 c T} \cdot \Delta R, \quad (27)$$

és (22) helyett az

$$l = \frac{Mg_0 \alpha}{n^2 e^2 R_0} R \quad (28)$$

eredményt kapjuk, tehát végül most

$$\mathfrak{M} = \int_0^R \mu_0(R) dR = \frac{16 \pi^2 N M \alpha g_0}{15 c T n e} R_0^4. \quad (29)$$

Igen érdekes körülmény, hogy (29)-ben nemcsak az elektromos polarizálhatóság, hanem azonkívül az atom legkülső héjában levő elektronok száma is előfordul, tehát a jelen esetben maga az elektromos polarizálhatóság nem elegendő a mozgó polarozott dielektrikum által létesített mágneses tér leírására. Ennek a meglepő eredménynek az oka a következő: Elektromos tér esetében az indukált elektromos dipolmomentum

$$\mu_{el} = \alpha E, \quad (30)$$

tehát, ha ismét feltesszük, hogy n számú elektron van a külső héjban, akkor

$$n e l_{el} = \alpha E, \quad (31)$$

ahol most l_{el} a külső héj elektromos súlypontjának és a fennmaradó pozitív ionnak egymáshoz képest való eltolódását jelenti az elektromos tér hatására, ez tehát egyszerűen E lineáris függvénye. Az itt tárgyalt gravitációs esetben viszont (25) alapján

$$l_{grav} = \frac{Mg \alpha}{n^2 e^2}, \quad (32)$$

tehát a deformálhatóság (α) mellett még a külső elektronok számának a négyzete is fellép a nevezőben; míg (31)-ből

$$l_{el} = \frac{\alpha E}{n e} \quad (33)$$

következik, tehát itt csak n első hatványa lép fel. Ha tehát ismét visszatérünk az elektromos momentum számításához, akkor az elektromos erők létesítette momentum esetében, amely

$$\mu_{el} = l_{el} n e = \alpha E, \quad (34)$$

a külső elektronok száma kiesik, míg a gravitációs erők létesítette elektromos momentumok esetében, amely (32)-ből adódóan

$$\mu_{el} = l_{grav} n e = \frac{Mg \alpha}{n e} \quad (35)$$

ezek száma nem esik ki, és ezért lép fel a (29) végeredményünkben is.

5. §. A következő kérdés annak megvizsgálása, hogy milyenek lesznek a viszonyok aránylag kicsiny forgó testeknél, amelyeknél nem a gravitáció, hanem a centrifugális erő játssza a főszerepet. Természetesen relativista szempontból a centrifugális erőteret ugyancsak mint egy gravitációs teret foghatjuk fel, azonban ennek ellenére is fennáll itt az a különbség, hogy a gravitációs tér egy golyót összehúzni igyekszik, amihez azonban a lehetőségek korlátozottak; a centrifugális erő viszont a forgó golyót szét akarja szakítani. A fellépő tágulás miatt tehát ez utóbbi esetben az atommagok egy bizonyos mértékig magukkal vihetik külső elektronfelhőjüket, de minthogy a kémiai kötés kvantummechanikai elmélete szerint a kötést létesítő elektronok felhőinek fedniök kell egymást, azért itt is megvan annak a lehetősége, hogy az atommagok a külső elektronhéjukhoz viszonyítva a centrifugális erő hatására eltolódnak.

Jelöljük ω -val a forgó test szögsebességét, akkor kizárólag a centrifugális erő tekintetbevételével (6) és (8) helyett a következő összefüggéseket kapjuk:

$$M \omega^2 r = 8 e E, \quad (36)$$

és

$$\frac{1}{2} \alpha E^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 r l. \quad (37)$$

Továbbá egészen hasonló számítások segítségével, mint amelyek segítségével (6) és (8)-ből levezethettük a (23) eredményünket, most

$$\mathfrak{M} = - \frac{N \omega^3 M \alpha \pi}{15 e c} R_0^5 \quad (38)$$

következik. Ha ismét feltesszük, hogy nem nyolc, hanem általában n számú elektron van a legkülső héjban, akkor (36) helyett az

$$M \omega^2 r = n e E \quad (39)$$

egyenletet kell felírunk, és ennek segítségével

$$\mathfrak{M} = - \frac{8 N \omega^3 M a \pi}{15 n e c} R_0^5. \quad (40)$$

Egy a szimmetriatengelye körül forgó henger esetében, ha ennek hosszát L -lel jelöljük, nyolc külső elektron feltételezésével

$$\mathfrak{M} = - \frac{N \omega^3 M a \pi}{16 c e} L R^4. \quad (41)$$

Az általános esetben pedig a

$$\mathfrak{M} = - \frac{N \omega^3 M a \pi}{2 n c e} L R^4 \quad (42)$$

képlet adódik.

6. §. Most még ki akarjuk számítani, hogy (23)-ból a Föld mágneses momentumára milyen nagy érték adódik. Mivel a felülethez közelebb eső rétegek fogják ezen esetben a főszerepet játszani, azért főképp ezeknek a numerikus adatait kívánjuk használni. A $SiAl$ és a $SiMa$ rétegek közepes atomsúlyát 27-nek vesszük, ebből a közepes atommagtömegre $M = 36,3 \cdot 10^{-24} g$ adódik. N részére viszont egy közepes 5,5 nagyságú sűrűség feltételezésével $1,5 \cdot 10^{23}$. Ha ezeket a számadatokat és az összes többi (23)-ban álló mennyiség részére ezek ismert értékeit helyettesítjük be, akkor

$$\mathfrak{M} \approx 10^9 \quad (43)$$

következik, tehát egy nagyságrendileg túl kicsiny érték, ugyanúgy, mint a Barnett-effektusból, mivel a Föld mért mágneses momentuma $7,9 \cdot 10^{25}$ el. stat. c. g. s. egység. Tény azonban, hogy ez a jelenség ugyanúgy helyes előjelével szolgáltatja a Föld mágneses momentumát, mint a Barnett-effektus. Ezt mindjárt beláthatjuk, ha tekintetbe vesszük azt az ismertényt, hogy a Föld mágneses momentuma olyan előjelű, mintha egy keletről nyugatra folyó elektromos áram idézné elő. A jelen dolgozatban tárgyalt effektusnál ez valóban így is van, mivel a negatív töltés súlypontja írja le a forgás folytán a nagyobb sugarú kört, tehát egy nyugatról keletre folyó negatív áram lép fel.

Fennáll azonban a Barnett-effektussal szemben az a nagy különbség, hogy az itt tárgyalt effektusnál elgondolható egy erősítő mechanizmus, amelynek segítségével a létrejövő polarizáció és ennek folytán a mágneses momentum nagyságrendekkel nagyobbakká válhatnak. A Barnett-effektusnál hasonló lehetőségről persze szó sem lehet.

Amint ismeretes, a ferroelektromos anyagok egy csoportjánál, melybe a $Ba Ti O_3$ is tartozik — és ennek a csoportnak ez a legismertebb képviselője — igen valószínű, hogy e jelenség úgy jön létre, hogy az igen nagy mértékben

polározható ioncsoportok olyan közel vannak egymáshoz, hogy az ezekben egyszer indukált momentum olyan erősen polározza a szomszédait, hogy az ezekben fellépő nagy momentum viszont ismét az előbbi ioncsoportot polározza erősen stb. Vagyis, a polarizálható ioncsoportok kölcsönhatása olyan erős, hogy egymást tudják polározni, tehát egy spontán polározottsági állapot lép fel. (Természetesen nem akarjuk elhallgatni, hogy van a $BaTiO_3$ spontán elektromos polározottságának egy más elmélete¹⁵ is, amely ezt a jelenséget arra vezeti vissza, hogy a Ti ionok ennek rácsában egy túlságosan nagy üregben vannak, tehát ott »lőtyög«-nek, és ezért a legkisebb térintenzitás hatására is elmozdulnak.) Meg kell továbbá gondolnunk, hogy a Föld belsejében az anyag igen erősen össze van nyomva, tehát az atomok egymáshoz közel jönnek. Elgondolható tehát, hogy ilyen viszonyok közt normálisan nem ferroelektromos anyagok ilyen típusú tulajdonságokra tesznek szert, tekintve, hogy egy dipolus tere a távolság harmadik hatványával fordítva arányos, és ezért csökkenő távolsággal igen gyorsan nő. Ezen elképzelés alapján tehát, ha a polarizálhatóságot mint konstans tekintjük, a kérdéses polarizálható atomok egy bizonyos távolságánál előáll a polarizációs katasztrófa, vagyis a polarizáltság értéke végtelen nagygyá válna. Ilyen mértékben ez persze nem következhetik be, mert az indukált momentum és az azt előidéző térintenzitás közti lineáris összefüggés csak a térintenzitás egy bizonyos értékéig lehet érvényes. Végül tehát egy nagy (de nem végtelen nagy) konstans polározottság lép fel. Egy további szempont, amelyet figyelembe kell vennünk, a következő: ha a szomszédos atomok ilyen polarizációs kölcsönhatását egyszerűen úgy számítjuk, hogy a polározandó atom középpontjában fellépő elektromos teret szorozzunk ezen atom konstans polarizálhatóságával, és ezt a mennyiséget tekintjük az indukált dipolmomentumnak, akkor a kérdéses atomok meghatározott távolsága alatt fellép a spontán polározottság állapota, míg fölötte ilyesmi nem lehetséges, a kérdéses anyag a külső elektromos tér jelenléte nélkül egyáltalában nincsen polározva. Tekintetbe kell azonban vennünk azt a körülményt, hogy az atomok, ionok vagy ioncsoportok kiterjedése ugyanolyan nagyságrendű, mint az egymástól való távolságaik, tehát még közelítőleg sem lehet az egész elektronfelhőjüket polározó teret egyszerűen a középpontjukban fellépő térrel azonosítani, hanem tekintetbe kell venni, hogy ez a tér igen erősen inhomogén. Azonkívül ne felejtjük el, hogy egy dipolusnak a szokásos módon megadott tere csak első közelítés, míg a jelen esetben az említett körülmény — a dipolus kiterjedése és a polározható ionok vagy ioncsoportok távolságának egyenlő nagyságrendje — miatt a további közelítéseket is tekintetbe kell venni. Tehát képletben a térintenzitás

$$E = \frac{e}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{e}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{e}{r^2} \left(\frac{2l}{r} + \frac{l^3}{r^3} \dots \right) = \frac{2el}{r^3} + \frac{el^3}{r^5} \dots$$

ahol a jobboldalon álló első tag a matematikai dipolustól létesített térintenzitás. A további tagok tekintetbevétele azt eredményezi, hogy még olyan távolságnál is, amelynél az elemi megfontolások szerint már nem léphet fel spontán polarizáltság, egy külső elektromos tér által vagy más módon létesített polarizáció, ha egy bizonyos határértéknél nagyobb értéket vesz fel, kezdi önmagát felerősíteni. Mindezen megfontolásokból azt a következtetést vonhatjuk le, hogy igenis lehetséges, hogy a leírt módon a gravitációtól származó elektromos polarizáció még tovább felerősítse önmagát.

7. §. További érdekes kérdés, hogy milyen nagynak kellene lennie a külső elektronhéj és a fennmaradó pozitív ion középpontjai egymáshoz való maximális eltolódásának ahhoz, hogy ez megmagyarázza a Föld mágneses momentumát. (22)-ből l maximális értékére a következő képletet kapjuk

$$l_0 = \frac{2 M \alpha g_0}{128 e^2} \quad (44)$$

Ezt az eredményt behelyettesítjük (23)-ba

$$\mathfrak{M} = \frac{128 e l_0 N \pi^2 R_0}{15 c T}, \quad (45)$$

ahonnan kifejezhetjük l_0 -t.

$$l_0 = \frac{15 \mathfrak{M} c T}{128 e N \pi^2 R_0^4}. \quad (46)$$

Ha (46)-ban \mathfrak{M} helyébe behelyettesítjük a Föld már említett mágneses momentumának értékét és az összes többi mennyiségnek ismert értékeit, akkor az

$$l \approx \frac{1}{2} \cdot 10^{-9} \text{ cm} \quad (47)$$

értéket kapjuk.

8. §. Most még ki akarjuk számítani a Föld mágneses momentumát, amelynek a *Benfield* (l. o.) által megadott gondolatmenet alapján kell fellépnie. A Föld felépítéséről vallott régebbi felfogás alapján tehát feltesszük, hogy a belseje egy főképpen vasból (és nikkeltől) álló magból áll, és ezt egy szintén legnagyobbbrészt fémes tulajdonságú közbülső réteg veszi körül. Újabb felfogás szerint persze a Föld belseje legnagyobbbrészt »napanyag«-ból áll.¹⁶ Nem kívánunk itt erre a kérdésre részletesebben rátérni, csak megemlítjük, hogy ez még távolról sincsen tisztázva és az új felfogással szemben is komoly kételyek merültek fel.¹⁷ Tény azonban, hogy az alább közölt számítások, mutatis mutandis, az új felfogás szerint is érvényesek. Hiszen igen nagy nyomás alatt még a hidrogén is fémes tulajdonságokat vesz fel.¹⁸

Tegyük fel tehát, hogy a Föld egy R_1 sugarú magból áll, amelyet egy R_2 sugárig terjedő közbülső réteg vesz körül (ill. ennek eddig a sugárig van negatív töltése), és *Benfield* gondolatmenete alapján a magban uralkodó igen nagy nyomás elektronokat szorít innen ki ebbe a közbülső rétegbe. Egyszerűség

okából még feltesszük, hogy az ebből származó elektromos töltés mindkét rétegben homogén; a pozitív töltés sűrűségét a magban jelöljük ρ_1 -gyel és a negatívét a közbülső rétegben ρ_2 -vel. Ezen töltéseloszlás elektrosztatikai energiájának a kiszámítására először is szükségünk van a potenciál kifejezésére, mint a középponttól való távolság (r) függvényére. Ez $r = 0$ -tól $r = R_1$ -ig mint ismeretes.¹⁰

$$V_1(r) = \frac{4r^2\pi}{3}\rho_1 + 2\pi\rho_1(R_1^2 - r^2) + 2\pi\rho_2(R_2^2 - R_1^2), \quad (48)$$

és $r = R_1$ -től $r = R_2$ -ig

$$V_2(r) = \frac{4R_1^3\pi}{3r}\rho_1 + \frac{4(r^3 - R_1^3)\pi}{3r}\rho_2 + 2\pi\rho_2(R_2^2 - r^2). \quad (49)$$

Az $r = 0$ -tól $r = R_1$ -ig terjedő rész (a mag) elektrosztatikus energiájának a kiszámítására szoroznunk kell (48)-at $\frac{1}{2}\rho_1 4\pi r^2 dr$ -rel, és aztán integrálunk. Ilyen módon kapjuk, hogy

$$E_1 = \frac{2}{3}\frac{Q_1^2}{R_1} + \pi\rho_2(R_2^2 - R_1^2)Q_1, \quad (50)$$

ahol

$$Q_1 = \frac{4R_1^3\pi\rho_1}{3} \quad (51)$$

a Föld magjának a pozitív töltése. Hasonlóan vezetjük le, hogy az $r = R_1$ -től $r = R_2$ -ig terjedő réteg (héj) elektrosztatikus energiája

$$E_2 = \frac{4}{3}\pi^2\rho_1\rho_2R_1^3(R_2^2 - R_1^2) + \frac{4\pi^2\rho_2^2}{15}(4R_2^5 + 6R_1^5 - 10R_1^3R_2^2). \quad (52)$$

(52) első tagja természetesen (50) második tagjával egyenlő, míg (52) második tagját a

$$Q'_1 = \frac{4R_1^3\pi}{3}\rho_2 \text{ és } Q_2 = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho_2 \quad (53)$$

jelölések segítségével a

$$\frac{2}{3}\frac{(|Q'_1| + Q_2)^2}{R_2} - \frac{2}{3}\frac{Q'_1{}^2}{R_1} - 2\pi\rho_2(R_2^2 - R_1^2)|Q'_1| \quad (54)$$

alakban írhatjuk.

Egy további probléma az ezen töltéseloszlásoktól származó és a Föld forgása folytán fellépő mágneses momentumnak a kiszámítása. Ebből a célból egyszerűség okából feltesszük, hogy $\rho_1 = -\rho_2$. Jelöljük azonkívül a közbülső réteg egy térfogategységében levő elektronok vagy a mag egy térfogategységében levő lyukak számát n -nel, ekkor tehát $\rho_1 = -ne$ és $\rho_2 = ne$, ahol $e = -4,8 \cdot 10^{-10}$ el. stat. egység az elektron töltése. Vagyis a Föld forgása révén egy

1 cm² felületdarabon a tengelytől d távolságra a következő nagyságú áram halad keresztül:

$$i = 2\pi d \frac{ne}{T}. \quad (55)$$

Ez viszont

$$\mu = \frac{if}{c} = \frac{2\pi^2 d^3}{c} \cdot \frac{ne}{T} \quad (56)$$

nagyságú mágneses momentumot létesít, tehát a Föld magjának egész mágneses momentuma ezen elmélet alapján

$$M_1 = \int_0^R \int_0^R \mu r d\vartheta dr = \frac{4}{3} \frac{2\pi^2 ne}{cT} \cdot \frac{R_1^5}{5} \quad (57)$$

lesz. Hasonlóan az R_1 -től R_2 -ig terjedő réteg mágneses momentuma:

$$M_2 = \frac{4}{3} \frac{2\pi^2 ne}{cT} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{5}. \quad (58)$$

Tehát végül az egész mágneses momentum:

$$M = M_2 - M_1 = \frac{2\pi^2 ne}{cT} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{R_2^5 - 2R_1^5}{5}, \quad (59)$$

ahonnan n -et ki lehet számítani:

$$n = \frac{15 c T (M_2 - M_1)}{8 \pi^2 e (R_2^5 - 2 R_1^5)}, \quad (60)$$

ha a momentum M ismeretes. A geofizikai irodalom szerint a Föld magjának a sugara $R_1 = 3470$ km. A közbülső réteg sugarát, amely 5170 km, nem tehetjük egyszerűen egyenlővé R_2 -vel, mivel feltettük, hogy a két réteg teljes töltése egyenlő nagy, továbbá a sűrűségek abszolút értékét is egyenlőnek tettük fel, és ezért a második réteg határát $R_2 = 4372$ km-nek kell feltételeznünk. Ezen szám adatok segítségével (60)-ból — betéve oda $M_2 - M_1$ helyébe a Föld ismert mágneses momentumát —

$$n = 1,37 \cdot 10^7 \quad (61)$$

adódik. Mivel ennek folytán ismeretesek az elektromos sűrűségek, ezért (50) és (52)-ből kiszámíthatjuk a teljes elektrosztatikus energiát E -t

$$E = E_1 + E_2 = \frac{3}{5} \frac{Q_1^2}{R_1} + 2\pi\varrho_2 (R_2^2 - R_1^2) Q_1 + \frac{4\pi^2 \varrho_2^2}{15} \left\{ 4R_2^5 + 6R_1^5 - 10R_1^3 R_2^2 \right\}. \quad (62)$$

A numerikus kiértékelés erre az

$$E = 5,46 \cdot 10^{38} \text{ erg.} \quad (63)$$

értéket szolgáltatja.

Egy más és fizikailag talán még plauzibilisebb feltevés a töltéelosztásra a következő: Ismét feltesszük, hogy a Föld magjának a nagy nyomás folytán pozitív töltése van, de a közbülső réteg vele határos része legyen elektromosan semleges, és a negatív töltés csak a közbülső réteg külső részében lépjen fel. Tekintve, hogy, amint említettük, a közbülső réteg külső sugara 5170 km, és mivel a pozitív és negatív töltéseknek ismét le kell rontaniuk egymást, azért fel kell tennünk, hogy a közbülső réteg negatív töltése a 4585 km nagyságú sugárral kezdődik. Ezen új feltevések alapján az előbbi okoskodáshoz analóg módon

$$n = 6,96 \cdot 10^6 \quad (64)$$

következik, és ennek segítségével

$$E = 2,33 \cdot 10^{38} \text{ erg.} \quad (65)$$

(61) és (64) ill. (63) és (65) összehasonlításából tehát látjuk, hogy a fellépő töltéssűrűség és a teljes elektrosztatikus energia mindkét felfogás szerint ugyanolyan nagyságrendű.

Másrészt a Föld magjából a nyomás által eltávolított elektronok (tehát a lyukak) számára (61)-ből:

$$N = \frac{4 R_1^3 \pi}{3} n = 2,20 \cdot 10^{33}. \quad (66)$$

Viszont az a térfogat, amelyet egy vezetési elektron egy fémbe elfoglal, tehát az »elektrontérfogat« 10^{-24} cm^3 nagyságrendű.²⁰ A mag és a közbülső réteg közt fellépő nyomáskülönbség viszont $10^6 \text{ Atm.} \approx 10^{12} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$ nagyságrendű. Ha tehát ezt a nyomást megszorozzuk az elektrontérfogattal és (66)-tal, akkor azt a maximális gravitációs energiát kapjuk, amely annak révén szabadul fel, hogy a nagy nyomás a magból kiszorít N számú elektront. Ez az energia

$$E_{\text{grav}} \approx 10^{21} \text{ erg.} \quad (67)$$

(67)-et összehasonlítva (63)-mal vagy (65)-tel, láthatjuk, hogy a rendelkezésre álló gravitációs energia 17 nagyságrenddel túl kicsiny ahhoz, hogy meg tudja magyarázni azon elektrosztatikus energia felléptét, amely a Föld mért mágneses momentumát előidéző töltéeloszlást tudná fenntartani. Láthatjuk tehát, hogy a Föld mágneses momentumát, ha csak nem teszünk fel valamilyen eddig teljesen ismeretlen erősítő mechanizmust, ezen az úton nem lehet megmagyarázni.

9. §. Végül még meg akarjuk beszélni azt a kérdést, hogy milyen nagy mágneses momentummal kellene rendelkeznie a Föld anyaga minden egyes

atomjának, ha gondolatkísérletképpen feltennénk, hogy a Föld mágneses momentuma egyszerűen az egyes atomok egymáshoz párhuzamosan állított momentumainak az eredője. Ebből a célból először tegyük fel, hogy minden a Föld anyagát felépítő atomnak éppen egy magmagneton nagyságú mágneses momentuma van. Ekkor

$$\mathfrak{M}' = \frac{eh}{4\pi\mu c} \cdot \frac{4R_0^3\pi}{3} N, \quad (68)$$

ahol most μ egy proton tömege és R_0 a Föld sugara. N az atomok száma 1 cm^3 »földanyag«-ban, amelyre középértékben $0,7 \cdot 10^{23}$ -at helyettesíthetünk be (68)-ba. Mindezen adatok segítségével

$$\mathfrak{M}' = \infty 25 \cdot 10^{25}. \quad (69)$$

Amint már említettük, a Föld mágneses momentuma $7,9 \cdot 10^{25}$ elektrosztatikai egység, úgyhogy ezen értéknek kereken a háromszorosát kapjuk. Azt lehetne ugyan gondolni, hogy azon atommagféleségek, amelyeknek valóban van mágneses momentumuk, a Föld anyagának csak egy elenyésző kicsiny részét fogják képezni, mivel a páros számú protonokból és neutronokból felépített magok a természetben túlnyomóan gyakoriak. Ez azonban nincsen így, mivel az Al , amely a földkéreg nekünk hozzáférhető részének a $8,1\%$ -át képezi,²¹ + $3,628$ nagyságú mágneses magmomentummal rendelkezik²² (magmagnetonokban kifejezve), és a Na -nak, amely $2,75\%$ -kal van képviselve, + $2,216$ nagyságú magmomentuma van.

Igen érdekes körülmény, hogy azon feltevés segítségével, hogy az egész Föld analóg módon van felépítve, tehát, hogy a magmomentummal rendelkező atommagok a Föld anyagában mindenütt ilyen arányban vannak elszolva — ha mindezen momentumokat gondolatkísérletképpen egymáshoz párhuzamosan állítjuk — akkor nemcsak nagyságrendileg, hanem numerikusan is egészen jól megkapjuk a Föld mágneses momentumának az értékét, t. i. ilyen módon $8,8 \cdot 10^{25}$ elektrosztatikus egységet számítunk ki.

Másrészt azonban semmilyen fizikai kölcsönhatás nem képzelhető el, amely egy ilyen magmomentum-ferromágnességet normális vagy magas hőmérsékleten meg tudna magyarázni. Egy mechanikai kölcsönhatás a Föld, mint pörgettyű és az atommag impulzuszmomentuma közt, a termikus energiához képest túlon-túl kicsiny lenne ahhoz, hogy önmagához párhuzamosan tudja beállítani a magspineket, és azonkívül a Föld momentumát helytelen előjellel is szolgáltatná, mivel mind az Al , mind a Na magjainak a mágneses momentuma pozitív.

Egy további lehetőség, amelyre még gondolni lehetne, az, hogy, amint ismeretes, a magmomentum és a kristályrác közt a kölcsönhatás csak igen gyenge, s így elméletileg igen hosszú relaxációs idő lép fel az ilyen jelenségeknél. Ezért tehát talán lehetséges lenne a Föld mágneses momentumát, mint az elmúlt geológiai korok egy maradványát értelmezni, amely még nem haht el

teljesen. Ehhez azonban az elméletileg számított relaxációs idők mégis túl kicsinyek. *Waller*²³ számításaiból nem fémes szilárd anyagokra szobahőmérsékleten ezen időre 10^4 sec-ot, míg 1° K-nél 10^{17} sec-ot kapott. Ehhez jön még, hogy a valóban mért relaxációs idők még sokkal kisebbek és még a folyékony hélium hőmérsékletén is csak néhány másodpercet tesznek ki, amiért ferromágneses szennyezéseket tesznek felelőssé²⁴. *Drain*²⁵ szobahőmérsékleten 0,1 és 0,005 sec. közti értékeket talált.

*Budapesti Eötvös Lóránd Tudomány Egyetem,
Fizikai Intézete.*

IRODALOM

- ¹ *Wilson H. A.* : Proc. Roy. Soc. London A. 104 (1923), 451.
- ² *Babcock H. W.* : Astrophys. J. 105 (1947), 105 ; továbbá Nature 166 (1950), 249.
- ³ *Groetzinger G. és Mc. Clure G. W.* : Phys. Rev. 77 (1950), 777.
- ⁴ *Blackett P. M. S.* : Nature 159 (1947), 658. és Phil. Mag. 40. (1949.) 125.
- ⁵ *Clark G. L.* : Proc. Roy. Soc. London A. 201 (1950), 488 és 207 (1950), 510.
- ⁶ *Gião A.* : C. R. 228 (1949), 1203 és Journ. d. Phys. 10 (1949), 240.
- ⁷ *Alfvén H.* : Ark. Mat. Astr. Fys. 29B. no. 2 és 29A. no. 12. (1943).
- ⁸ *Batchelor G. K. és Towsend A. A.*, Proc. Roy. Soc. London A. 190 (1947), 534 és *Batchelor G. K.* : Proc. Roy. Soc. London A. 201 (1950), 405.
- ⁹ *Walen C.* : Ark. Mat. Astr. Fys. 33A. no. 18 (1946).
- ¹⁰ *Bullard E. C.* : Proc. Roy. Soc. London A. 197 (1949), 433.
- ¹¹ *A. E. Benfield* : Phys. Rev. 75 (1949), 211 ; Nature 166 (1950), 31. V. ö.
- H. P. Berleage* : Nature 165 (1950), 242.
- ¹² *Biermann L. és Schüüter A.* : Z. f. Naturforschung. 5a (1950), 65.
- ¹³ *Sutherland, Terr.* Magn. 5 (1900), 73 ; 8 (1903), 49 9 (1904), 167 és 13 (1908), 155.
- ¹⁴ *Chapman S. and Bartels H.* : Geomagnetism. Oxford 1940, 705.
- ¹⁵ *Devonshire A. F.* : Phil. Mag. (7), 40 (1949), 1040.
- ¹⁶ *Kuhn W. és Rittmann A.* : Geol. Rundschau 32 (1941), 215 és *Kuhn W.* : Naturwiss. 30 (1942), 689.
- ¹⁷ *Pl. Wolf F. v.* : Stoff und Zustand im Inneren der Erde. Nova Acta Leopoldina. Bd. 12. N. 87. Halle (Saale) 1943.
- ¹⁸ *Wigner E. és Huntington H. B.* : Journ. Chem. Phys. 3 (1935), 764.
- ¹⁹ A szerző ebben a paragrafusban közölt számítási eredményeinek részletes levezetése a Acta Physica Hungarica-ban van megjelenőben.
- ²⁰ *Pl. Biltz W.* : Raumchemie der festen Stoffe. Leipzig (1934), 206.
- ²¹ *Pl. Branson E. B. és Tarr W. A.* : Introduction to Geology. 2. ed. New-York and London. Mc. Grow-Hill Book Company 1941. 6.
- ²² *J. Mattauch und S. Flügge* : Kernphysikalische Tabellen. Berlin. Springer Verlag 1942. Tabelle I.
- ²³ *Waller I.* : Zs. f. Phys. 79 (1932), 370.
- ²⁴ *Hatton J. és Rollin B. V.* : Proc. Roy. Soc. London A. 199 (1949), 222.
- ²⁵ *Drain L. E.* : Proc. Phys. Soc. A. 62 (1949), 301.

A COMPTON-SÁV PROFILJÁNAK ELMÉLETI MEGHATÁROZÁSA

KÓNYA ALBERT

Előadta az 1950. november 28-án tartott osztályülésen.

Bevezetés

Ismeretes, hogy atomokon történő Röntgensugár-szóródáskor fellép a Rayleigh-szórás, mely a beeső λ hullámhosszal azonos hullámhosszú sugarakból áll, és a Compton-szórás. Ez utóbbinak hullámhosszára Compton¹ a

$$\lambda_c = \lambda_i + 2 \gamma \sin^2 \Theta/2,$$
$$\gamma = \frac{h}{mc} = 0,00243 \text{ \AA} \quad (1)$$

formulát vezette le, mely azonban csak akkor érvényes, ha a szóródás *szabad és nyugalomban levő* elektronokon történik. (A formulában λ_c a Compton-vonal hullámhosszát, h a Planck-féle állandót, m az elektron tömegét, c a fénysebességet vákuumban, Θ pedig az eltérítés szögét jelenti).

A kísérleti eredmények szerint azonban ez az inkohereus szórt sugárzás nem egyetlen éles vonalból áll, hanem keskeny sávot alkot, melyben a szóró atomra jellemző intenzitáseloszlás alakul ki. A maximális intenzitáshoz tartozó hullámhossz közel λ_c -hez esik és az intenzitáseloszlás erre a maximumra nézve közel szimmetrikus.² Ennek a jelenségnek nyilván az az oka, hogy a szórás nem szabad és nyugvó elektronokon, hanem az atomhoz kötött és mozgást végző elektronokon történik. Wentzel³, Schnaidt⁴, Bloch⁵ és Franz⁶ kvantum-mechanikai vizsgálataikkal kimutatták, hogy a maximális intenzitás helyének λ_c -től való kismértékű eltolódását, valamint az intenzitáseloszlásban tapasztalható csekély aszimmetriát relativisztikus effektus és az elektronok kötött volta okozzák. A sávon belüli intenzitáseloszlást, azaz a Compton-sáv »profilját« döntő módon azonban az elektronok impulzuseloszlása határozza meg.

Du Mond a fény korpuszkuláris felfogásából kiindulva olyan elméletet dolgozott ki⁷, amely módot ad a Compton-sáv profiljának közelítő számítására. Mivel a következőknek ez szolgál alapjául, röviden ismertetjük ennek az elméletnek az eredményeit.

Ez az elmélet lényegében a Compton-effektus jól ismert, elemi korpuszkuláris magyarázatának általánosítása arra az esetre, ha a szóródás nem nyugvó, hanem adott impulzuseloszlású elektronokon történik.

Ha a foton mozgó elektronnal ütközik, akkor a Compton-féle energia-vesztésen kívül még Doppler-effektus is fellép, ami ugyancsak megváltoztatja a szórt sugárzás hullámhosszát. Ennek a járulékos hullámhosszváltozásnak a

nagysága a szórást okozó elektron kezdeti impulzusának irányától és nagyságától függ.

Du Mond eredménye szerint, ha a szórás sok elektronon történik, melyek mindegyike p nagyságú kezdeti impulzussal bír, de az impulzusok iránya a tér irányaiban egyenletes eloszlást mutat, úgy ezek az elektronok λ_c körül

$$- 2 \frac{p}{mc} \lambda^* \leq l \leq 2 \frac{p}{mc} \lambda^*, \quad (2)$$

$$\lambda^* = \lambda_i \sin \Theta/2$$

intervallumban okoznak szórt sugárzást (l a hullámhossztérést jelenti λ_c -től mérve).

Tekintsünk most egy atomot, melyben az elektronok impulzuseloszlása $\Phi(p)$ (vagyis $\Phi(p)$ adja azon elektronok számát, melyek impulzusa p és $p + dp$ közötti érték).

Mint (2)-ből látható, azok az elektronok, melyeknek impulzusa $p = \frac{mcl}{2\lambda^*}$ és $p + dp$ között van, λ_c körül $2l$ hosszúságú intervallumban okoznak szórást. Jelöljük az így keletkező intenzitást dI -vel. Természetes feltevés, hogy a keletkező összintenzitás az őt okozó elektronok számával arányos:

$$4 \frac{p}{mc} \lambda^* dI = k' \Phi(p) dp,$$

amiből

$$I(q) = k \int_q^\infty \Phi(p) dp, \quad (3)$$

$$q = \frac{mcl}{2\lambda^*}$$

adja a Compton-sáv intenzitáseloszlását. Ennek ismeretében egyszerűen nyerjük az ú. n. felezési sáv szélességet is, vagyis azon hullámhosszeltolódás kétszeresét, melyre

$$\frac{I(I_0)}{I_0} = \frac{1}{2}.$$

Az elektronok impulzuseloszlásának meghatározása statisztikus tárgyalásmód alapján

Célunk egy egyszerű és kevés numerikus számolást igénylő módszer ismertetése, mellyel egy atom elektronjainak impulzuseloszlását jó közelítéssel meg lehet határozni. A számítások keresztülviteléhez szükséges, hogy az elektronok sűrűségeloszlása a koordinátatérben, ϱ , ismert legyen. A következőkben csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor $\varrho = \varrho(r)$, ahol r a magtól mért távolságot jelenti.

A statisztikus tárgyalásnak megfelelően bontsuk fel az atom térfogatát dv elemi térfogatokra, melyekben a potenciál változásától már eltekinthetünk, de amelyekbe még elég sok elektron esik, hogy a statisztikus tárgyalás jogos legyen. Mivel az elektronok a Fermi-statisztikát követik, a mondott feltételek esetén a dv -be eső ϱdv számú elektront úgy tekinthetjük, mint amelyek az abszolút hőmérséklet nullapontján levő teljesen degenerált gázt alkotnak. Ebből pedig ismert módon következik, hogy a dv -ben levő elektronok impulzusai nulla és

$$p_m = (3 \pi^2)^{1/3} \varrho^{1/3} = 3,0037 \varrho^{1/3} \text{ at. egys.} \quad (4)$$

maximális érték között minden lehetséges értéket betöltenek, vagyis ezek az elektronok az impulzustér kezdőpontja körül a p_m sugarú gömb belsejét töltik ki.

$\varrho(r)$ a gyakorlatban előforduló esetekben mindig monoton csökkenő függvénye r -nek, — s így (4) szerint ugyanez érvényes p_m -re is. Tehát p_m -nél nagyobb impulzusú elektronok a koordinátatérben csak a mag körüli $r = r(p_m)$ sugarú gömbön belül lehetnek. Így azok az elektronok, melyek impulzusa p és $p + dp$ között van, a koordinátatérben $\frac{4\pi}{3} [r(p)]^3$ térfogatot, az impulzustérben pedig $4\pi p^2 dp$ térfogatot, töltenek ki. A fázistérben kitöltött térfogat ezért

$$4\pi p^2 dp \cdot \frac{4\pi}{3} [r(p)]^3 = n h^3, \quad (5)$$

ahol n a fázistér azon h^3 nagyságú elemi celláinak számát jelenti, melyeket a p és $p + dp$ közti impulzussal rendelkező elektronok betöltenek. Ezen elektronok száma azonban $\Phi(p) dp$. Mivel az elektronokra érvényes a Pauli-elv, így minden betöltött, h^3 nagyságú fázistércellába az abszolút hőmérséklet nullapontján 2 elektron esik, vagyis

$$2n = \Phi(p) dp. \quad (6)$$

(5) és (6) alapján pedig

$$\Phi(p) = \frac{32 \pi^2}{3 h^3} [r(p)]^3 p^2,$$

vagy atomi egységekben kifejezve

$$\Phi(p) = \frac{4}{3\pi} [r(p)]^3 p^2. \quad (7)$$

A levezetésből következik, hogy ha ϱ a normált sűrűségeloszlás, azaz

$$\int \varrho dv = N,$$

(N az atom elektronjainak száma), úgy $\Phi(p)$ is normált:

$$\int \Phi(p) dp = N.$$

(7) megadja tehát az elektronok impulzuseloszlását. Ennek segítségével a Compton-sáv profilja (v. ö. (3)-mal)

$$I(q) = k \int_q^{\infty} \frac{4}{3\pi} [r(p)]^3 p dp.$$

Duncanson és Coulson szerint a k arányossági tényező értékét úgy választjuk, hogy ú. n. normált profilt kapjunk, vagyis melyre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(q) dq = 1.$$

Egyszerű számítás mutatja, hogy ez $k = \frac{1}{2N}$ -nel teljesül. Így végül is

$$I(q) = \frac{2}{3\pi N} \int_q^{\infty} [r(p)]^3 p dp. \quad (8)$$

Eredmények

A numerikus számításokat a Ne -atomra végeztük el, egyrészt mert erre pontos mérési adatok vannak⁸, másrészt, mert ugyanerre az atomra számos kvantummechanikai vizsgálatot⁹ is végeztek, s így eredményeinket minden irányban kontrollálni tudjuk.

A számításokat a Ne -atom több közelítő sűrűségeloszlásával is elvégeztük, így a Thomas—Fermi—Dirac-féle atommodell sűrűségével és a Gombás által a korrelációs kölcsönhatással korrigált Thomas—Fermi—Dirac-féle atommodell sűrűségével. Mint a mellékelt táblázatból látható, a korrigált atommodellek

	Szerző	$2l_0$ x-egys.
Thomas—Fermi-modell	Burkhardt	3,0
Thomas—Fermi—Dirac-modell	Kónya	16,9
Korrelációval bővített Thomas—Fermi—Dirac-modell	Kónya	17,0
Hartree—Dougall-féle sajátfüggvényekkel, hullámmech.	Burkhardt	28,0
Hartree—Bronwn sűrűségeloszlással, statiszt.	Kónya	22,9
Duncanson—Coulson sajátfüggvényekkel, hullámmech.	Duncanson—Coulson	34,9
Duncanson—Coulson sűrűségeloszlással, statiszt.	Kónya	30,6
Kísérleti eredmény	Kappeler	32,0

lényegesen jobb eredményt adnak. (A feltüntetett felezési sáv szélességek a $MoK\alpha$ -vonalára vonatkoznak, ha az eltérítés szöge, $\theta = 180^\circ$). Mindenesetre a korrigált modellek esetén kapott érték is csak mintegy 50%-a az irodalmi értéknek — ennél jobb eredmény azonban a statisztikus atommodelltől nem is

várható. A felezési sáv szélesség u. i. a rendszámtól igen erősen függ, és a periódusos rendszerben periodikusan változik. Minden sorban az alkáli-atomokra lesz értéke a legkisebb, s a nemes gázok felé haladva egyre nő, a nemes gáznál maximumot ér el, majd a következő alkáliatomnál ismét kis értékre esik le. Mivel a statisztikus atomelmélet minden ilyen változó mennyiségnek csak középértékét képes visszaadni, így eredményünk kielégítő.

Hullámmechanikai közelítő módszerekkel meghatározott sűrűségeloszlásokkal is kiszámítottuk statisztikus módszerünk alapján a felezési sáv szélességet. Legpontosabban tekinthetők a *Duncanson* és *Coulson* által variációs módszerrel meghatározott sajátfüggvények. Az ebből kapott eredmény ($2 l_0 = 30,6 X$ -egys.) kielégítően megegyezik mind a kísérleti ($2 l_0 = 32,0 X$ -egys.), mind az exaktabb, de sokkal hosszadalmasabb hullámmechanikai számítások eredményével ($2 l_0 = 34,9 X$ -egys.).

Nehézipari Műszaki Egyetem

Fizikai Tanszéke, Miskolc.

IRODALOM

- ¹ *Compton A. H.*: Phys. Rev. (2) 21, (1923) 483.
- ² *Du Mond J. W.*: Rev. Mod. Phys. 5, (1933) 1. *Wollan E. O.*: Phys. ZS. 35 (1934), 353.
- ³ *Wentzel G.*: ZS. f. Phys. 43 (1927), 1; 43 (1927), 779; 58 (1929), 348.
- ⁴ *Schnaidt F.*: Ann. d. Phys. (5) 21 (1934), 89.
- ⁵ *Bloch F.*: Phys. Rev. (2) 46 (1934), 674.
- ⁶ *Franz W.*: ZS. f. Phys. 90 (1934), 623; 95 (1935), 652.
- ⁷ *Du Mond J. W.*: Rev. Mod. Phys. 5 (1933), 1.
- ⁸ *Kappeler H.*: Ann. d. Phys. (5) 27 (1936), 129.
- ⁹ *Kirckpatrick P., Ross P. A., Ritland H. O.*: Phys. Rev. (2) 1928 50 (1936), 1928; *Burkhardt G.*: Ann. d. Phys. (5) 26 (1935), 567; *Duncanson W. E., Coulson C. A.*: Proc. Phys. Soc. LVII. (1945), 190.

AZ IRREVERZIBILIS TERMODINAMIKAI FOLYAMATOK KVANTITATÍV LEÍRÁSA

FÉNYES IMRE

Előadta az 1950. november 28-án tartott osztályülésen

Az irreverzibilis termodinamikai folyamatok kvantitatív jellemzésére irányuló vizsgálatok két csoportba oszthatók. Az egyik csoportba tartozók (tudatosan vagy nem tudatosan) a Clausius-féle nem-kompenzált hőre építenek, a többiek új, az egyensúlyi állapot termodinamikájában nem szereplő princípiumokat keresnek.

A klasszikus termodinamika az irreverzibilitást a Clausius-féle nem-kompenzált hővel jellemzi

$$DQ' = TdS - DQ, T > 0 \quad (1)$$

ahol DQ a valóságos hőhatás. Több testből álló rendszer esetén

$$\left. \begin{aligned} DQ'_i &= T_i dS_i - DQ_i, T_i > 0 \\ DQ' &= \Sigma DQ'_i = \Sigma T_i dS_i - \Sigma DQ_i \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

Az irreverzibilitásnak DQ' -vel való jellemzését az teszi indokolttá, hogy reverzibilis változás esetén

$$DQ' \equiv 0, \text{ (rev)}, \quad (2)$$

míg irreverzibilis változásnál

$$DQ' > 0, \text{ (irrev)}. \quad (3)$$

A nem-kompenzált hő, bár a (3) szerint az irreverzibilitás irányát egyértelműen megadja, mégsem tekinthető az irreverzibilitás egyértelmű mértékének, mert — miként a DQ — a DQ' sem teljes differenciál, így értéke nemcsak a kezdő és végállapottól, hanem a változás »út«-jától is függ.

Ebből már látszik, hogy az irreverzibilitás mértékének meghatározása egyértelmű a nem-kompenzált hő integráló osztójának*) meghatározásával. Ha a kezdeti és a végállapotnak van olyan τ függvénye, hogy

*) Az integráló osztó exisztenciájának vizsgálatát és ezzel több alapvetően fontos probléma vizsgálatát a termodinamika hagyományos tárgyalásmódja teljesen elhanyagolja. Azonban exakt megalapozás nélkül egyetlen tudomány sem érhet el komoly eredményeket, ezért állt meg a termodinamika fejlődése is már néhány évtized óta. A klasszikus termodinamika teljes exaktsággal megalapozható, l. szerző megjelenőben levő könyvét a termodinamika alapjairól.

$$\frac{DQ'}{\tau} = d\sigma, \tau > 0 \quad (4)$$

és ha

$$\oint d\sigma = 0, \quad (5)$$

akkor $d\sigma$ az irreverzibilitás egyértelmű mértékének tekinthető. Mivel integráló osztóval nem minden Pfaff-féle kifejezés rendelkezik, és mivel az (5) nem szükségszerű következménye a (4)-nek, mindkét relációnak külön-külön tapasztalati alappal kell bírnia. A $\tau > 0$ megszorítás szintén lényeges, u. i. $\tau = 0$ -nak a definíció szerint nincs értelme, másrészt, ha τ kétféle előjelű lehetne, akkor az irreverzibilitásnak nem volna határozott iránya.

Mivel a (4) és az (5) egzisztenciája, továbbá a τ és a σ fizikai jelentése nem következik a nem-kompenzált hő egzisztenciájából, a kérdés megoldása már itt is új princípiumok bevezetését igényli. Új princípiumok nélkül tehát nem várhatjuk, hogy lényegesen többet tudjunk mondani, mint amennyit a klasszikus termodinamika alapján is megállapíthatunk.

Az első csoporthoz tartozik a *De Donder* és iskolája¹ által kiépített elmélet is, mely lényegében a következő: Bizonyos kémiai reakció lefolyásakor a belső energia megváltozása (a Gibbs-féle kémiai potenciált μ_i -vel jelölve):

$$dE = TdS - pdV + \sum \mu_i dm_i, \quad (6)$$

másrészt kvázisztatikus folyamatoknál

$$dE = DQ - pdV, \quad (7)$$

ahová a DQ értékét az (1)-ből behelyettesítve

$$dE = TdS - pdV - DQ' \quad (8)$$

A (6) és a (8) összehasonlításából a nem-kompenzált hő

$$-DQ' = \sum \mu_i dm_i \quad (9)$$

De Donder, minden külön megalapozás nélkül, feltételezte az integráló osztó létezését:

$$DQ' = A d\xi \quad (10)$$

ahol A az affinitás és ξ a reakció haladásának foka (»degré d'avancement de la réaction«). Megjegyezzük, hogy a (10) érvénye igen egyszerűen, már a molekuláris szerkezet tényéből igazolható. Ugyanis

$$d\xi = \frac{dm_i}{\nu_i M_i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

ahol ν_i -k a stöchiometriai arányszámok és M_i -k a molekulásúlyok. Így

$$A = -\sum \nu_i M_i \mu_i, \quad (12)$$

ami pontosan egyezik a klasszikus termodinamika affinitásával. ξ a klasszikus termodinamikából szintén ismeretes (a tömeghatás elvének levezetésekor lép fel),

de ott nincs külön neve. *De Donder* termodinamikája semmivel sem haladja túl a klasszikus termodinamika érvényességi területét; egyedüli érdeme az, hogy — a ξ konzekvens alkalmazásával — a tárgyalást áttekinthetőbbé teszi.

R. C. Tolman és *P. C. Fine* elmélete² közvetve szintén a nem-kompenzált hőre épít. Ennek lényeges pontja az »irreverzibilis entrópia produkció« fogalmának bevezetése. Az entrópia összes változása

$$\Delta S = \Sigma S_m + \Sigma \frac{Q_n}{T_n} + \Delta S_{irr}, \quad (13)$$

ahol ΣS_m az anyaggal, $\Sigma \frac{Q_n}{T_n}$ a hőhatással szállított entrópia mennyiség. Továbbá

$$\Delta S = \int \frac{DQ^*}{T}, \quad (14)$$

ahol DQ^* bizonyos »effektív« hőhatás. Az előbbi jelölésekkel összehasonlítva

$$DQ^* = DQ + DQ' = T dS \quad (15)$$

A (13) — és (15)-ből már látható az irreverzibilis entrópia-produkció és a nem-kompenzált hő kapcsolata. Ez az elmélet azokban a speciális esetekben alkalmazható, midőn ΔS_{irr} a fizika valamelyik fejezetében ismert törvényből származtatható. Pl. a hőmérséklet kiegyenlítődésekor

$$\Delta S_{irr} = \int_T^{T'} \frac{C}{T} dT$$

továbbá pl. a Joule-hővel kapcsolatban (ahol még az időtől való függés is számbavehető)

$$\left(\frac{dS}{dt} \right)_{irr} = \frac{I^2 R}{T},$$

ahol C a hőkapacitás, I az áramerősség, R az ellenállás stb.

Tolman és *Fine*, felhasználva *Eckart*³ eredményeit, elméletüket inhomogén testekre (kontinuumokra) is kiterjesztették. Persze ezzel még szintén nem oldották meg általánosan a problémát.

Az irreverzibilitás kvantitatív tárgyalására vonatkozó vizsgálatok másik csoportját az új elvek keresése jellemzi. Ebben az irányban különösen kiemelendők *T. Ehrenfest*—*Afanassjewa*⁴ vizsgálatai. Sajnos, azonban ezek a vizsgálatok csak értékes irányelveket adnak, de még messze vannak attól, hogy segítségükkel felépíthessük az irreverzibilis folyamatok kvantitatív termodinamikáját.

Nemrégén jelent meg *H. Müller*⁵ dolgozata, amelyben arra a kérdésre keres választ: milyen formájú variációs elvvel kell kiegészíteni a klasszikus termodinamika alaptételeit ahhoz, hogy az irreverzibilis változás jellemzése egyértelművé váljék. Ezen az úton elindulva sikerült a problémát formálisan megoldani abban a speciális esetben, amikor az energia az állapotot kölcsönösen

egyértelműen jellemzi. Feltétlenül hasznosnak kell tartanunk minden olyan megállapítást, amelyik az irreverzibilis változást leíró egyenletek formáját előre megszabja, de a Müller-féle elmélet ezen a téren is keveset nyújt. Ugyanis a termodinamikai irreverzibilitást lényegében a kezdő, ill. határfeltételek szabják meg, nem pedig a változást leíró egyenletek formája. Ezen a ponton kapcsolhatjuk az eddig elmondottakat az alábbi, tőlem származó elgondolásokhoz.

Próbáljuk meg a termodinamika ismert egyenleteit olyan formára hozni, amelyet a mechanika formális elvei előírnak⁶. Ezáltal nemcsak azt érzük el, hogy a reverzibilis és az irreverzibilis változást leíró egyenleteknek egységes formát adunk, hanem azt is, hogy a mellékfeltételek figyelembe vétele is egységes formalizmus szerint történhetik. Látni fogjuk, hogy a formális mechanikának és a termodinamikának ilyen megfeleltetése csak újabb termodinamikai állapothatározók bevezetése által lehetséges. Ily módon tehát egy általánosított termodinamikához jutunk, amelyik már lehetőséget nyújt az összes termodinamikai folyamat időbeli lefolyásának egyértelmű jellemzésére, és amelyik a klasszikus termodinamikát speciális esetként tartalmazza.

A két szabadsági fokú termodinamikai rendszert két szabadsági fokú mechanikai rendszernek tekintjük. Az egyik szabadsági fok (1-es index) közvetlen mechanikai jelentésű, a másikkak (2-es index) mechanikai jelentése rejtett, és makroszkópicusan csakis termodinamikai tulajdonságként kontrollálható. Legyenek az általános koordináták, általános sebességek, impulzusok és ezek idő szerinti deriváltjai: q, \dot{q}, p, \dot{p} , továbbá a térfogat, nyomás, hőmérséklet és entrópia: V, P, T, S ; közöttük az alábbi megfelelés áll fenn:

$$\begin{matrix} q_1 & \dot{q}_1 & p_1 & \dot{p}_1 & q_2 & \dot{q}_2 & p_2 & \dot{p}_2 \\ V & \frac{dV}{dt} & -P & -T & S & \frac{dS}{dt} \end{matrix}$$

A rendszer mozgását két (egymástól független) nem-holonóm kényszerfeltétel korlátozza, melyek a

$$T = g(V, P), \quad q_2 = g(q_1, p_1)$$

$$S = h(V, P), \quad p_2 = h(q_1, p_1)$$

állapotegyenletekkel azonosak. A rendszer Hamilton-függvénye

$$H = E + e, \quad E = E(V, S) \tag{16}$$

ahol E a belső energia, egyensúlyhoz közeledve $e \rightarrow 0$. A Lagrange-függvény

$$\left. \begin{aligned} L &= -H + \sum p_i q_i \\ L &= -F + p_1 \frac{dV}{dt} - e = -F - f, \quad F = F(V, T) \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

ahol F a szabad energia és az egyensúlyhoz közeledve $f \rightarrow 0$. Az e és az f ponto-

⁷ Matematikai és Természettudományi Osztályának Közleményei. III. o.

TÁBLÁZAT

	I.	II.	III.	
Hamilton-egyenletek	$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$	$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial e}{\partial p_i}$	$\frac{dV}{dt} = 0$	(1)
		$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V + \frac{\partial e}{\partial S}$	$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V$	(2)
	$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$	$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S - \frac{\partial e}{\partial V}$	$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S$	(3)
		$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial e}{\partial q_2}$	$\frac{dS}{dt} = 0$	(4)
Általános impulzusok	$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$	$p_i = -\frac{\partial f}{\partial \frac{dV}{dt}}$	$p_i = \text{határozatlan}$	(5)
		$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V - \frac{\partial f}{\partial T}$	$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$	(6)
Lagrange-egyenletek	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$	$-\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \frac{dV}{dt}} + \frac{\partial f}{\partial V} + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = 0$	$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$	(7)
		$\frac{dS}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0$	$\frac{dS}{dt} = 0$	(8)
Helmholtz-egyenlet	$-L = H - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$	$F + f = E + e - p_1 \frac{dV}{dt} + T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V + T \frac{\partial f}{\partial T}$	$F = E + T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$	(9)
„Kinetikus energia“	$2K = H + L$	$2K = E - F + e - f$	$2K = E - F = TS$	(10)
„Potenc. energia“	$2U = H - L$	$2U = E + F + e + f$	$2U = E + F$	(11)
„Általános erők“	$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i}$	$2Q_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial e}{\partial \frac{dV}{dt}} - \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T - \frac{\partial e}{\partial V}$	$2Q_1 = P - T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$	(12)
		$2Q_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial e}{\partial T} - \frac{\partial e}{\partial q_2}$	$2Q_2 = 0$	(13)
Hamilton-elv	$\delta \int L dt = 0$	$\delta \int (E + f) dt = 0$	$\delta \int F dt = 0$	(14)

sabb jelentésére később még rátérünk. Először azt fogjuk megmutatni, hogy $f \equiv 0$ esetén ellentmondásra jutnánk. U. i. a q_i -hez konjugált impulzus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

tehát pl. (mivel F nem függ $\frac{dV}{dt}$ -től)

$$p_1 = - \frac{\partial f}{\partial \frac{dV}{dt}}$$

és ha $f \equiv 0$, akkor $p_1 \equiv 0$. Megfelelően a

$$\frac{d}{dt} p_1 + \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad (18)$$

Lagrange-egyenlet így alakulna

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = 0,$$

ami nyilvánvaló ellentmondás. Az ellentmondás csak akkor szűnik meg, ha f -et és vele együtt p_1 -t is figyelembe vesszük, amikor a (18) termodinamikai megfelelője

$$P + \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = 0$$

valóban létezik.

A mechanikai elveknek a termodinamikában való alkalmazásával már *Helmholtz* (7) foglalkozott, aki megállapította hogy a termodinamikában a Lagrange-függvénynek a szabad energia negatívja felel meg. Az előbbieket szerint ez a megállapítás nem egészen helytálló, és így kiegészítésre szorú. A táblázatból látjuk, hogy a (17) szerinti kiegészítés alapján a termodinamika és a formális mechanika kapcsolata kölcsönösen egyértelmű. (A közölt táblázat első oszlopában a formális mechanika második oszlopában az általánosított termodinamika, harmadik oszlopában a határesetként adódó klasszikus termodinamika egyenletei állnak).

Az elmélet, amelynek alapjait vázoltuk, nemcsak az egy komponensű és egyetlen testből (fázisból) álló rendszerre, hanem általános esetben is alkalmazható. e és f éppen azt az energiát jelenti, amelyik a testek kölcsönhatásakor*) átalakul. Meghatározásuk vagy empirikusan, vagy statisztikus megfontolások segítségével történhetik. Ez azt jelenti, hogy a vázolt fenomenológikus elmélet

* E »kölcsönhatási« energiák és a megfelelő intenzitás-paraméterek exakt értelmezése az ú. n. nulladik főtétele lényeges általánosításán alapszik (l. a szerző megjelenőben levő második dolgozatát).

nem teljes (mint ahogyan egyetlen fenomenológikus elmélet sem lehet teljes), csupán a formális kereteket tartalmazza. Mindenesetre már ezzel is lényegesen többet nyújtottunk az eddig elért eredményeknél.

Debreceni Tudományegyetem

Elméleti Fizikai Intézete.

IRODALOM

- ¹ Lásd pl. *Prigogine I.—Defay R.*: *Thermodynamique Chimique*, Paris, Dunold.
- ² *Rev. of Mod. Phys.* 20, (1948); 51, az elmélet további alkalmazását l. *DallasL. Tuck*: *Journ. of Chem. Phys.* 18 (1950), 1128.
- ³ *Eckart C.*: *Phys. Rev.* 58 (1940), 267.
- ⁴ *Zs. f. Phys.* 33 (1925), 933; 34 (1925), 638; *Journ. Applied Phys. Moscow* 5 (1928), 3; *Wis-en Natuurk. Tidschr.* 8 (1936), 29; 8 (1936), 38.
- ⁵ *Ann. d. Phys.* 7 (1950), 73.
- ⁶ Lásd szerző megjelenőben levő dolgozatát.
- ⁷ *Crell's Journal* 100 (1886), 155. A kérdéssel még *Mimura* is foglalkozott, azonban teljesen eredménytelenül: *Journ. Sc. Hiroshima Univ.* 1 (1930), 117.

Előadások az alkalmazott matematika köréből

A MATEMATIKA GYAKORLATI ALKALMAZÁSAI KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A TECHNIKA DIFFERENCIÁL- EGYENLETEIRE

EGERVÁRY JENŐ r. tag

Előadta az 1950. november 29-én tartott osztályülésein

Elmélet és alkalmazás a matematikában elválaszthatatlanul összefüggnek egymással, hiszen könnyű a matematika fejezeteiből olyan sorozatokat összeállítani, amelyekben minden tag a rákövetkezőnek elmélete és a megelőzőnek alkalmazása. Ilyen sorozat pl. a következő: axiomatika, valós szám és limes, differenciál- és integrálszámítás, differenciálegyenletek, a rugalmasságtan parciális differenciálegyenletei, forgó rendszerek feszültségi állapotát meghatározó differenciálegyenlet, a kritikus szögsebességet meghatározó transzcendens egyenlet és annak nomogramja. Ha tehát a matematika gyakorlati alkalmazásairól beszélünk, először is meg kell mondanunk, vagy legalább körül kell írunk, mit értünk ezen.

Az elmélet és a gyakorlat egységének kérdése tekintetében matematikai vonatkozásban alig idézhetnénk méltóbb személyiséget, mint a kiváló göttingai matematikust, *Felix Klein*-t, aki a maga korában apostola volt a matematikusok és mérnökök együttműködésének. A *Zentralblatt für angewandte Mathematik und Mechanik* alapításakor a szerkesztőséghez intézett levelében többek közt a következőket írta: »Ha a legkiválóbb autorok alkotásait összehasonlítjuk a matematikai alapon álló természettudományok célkitűzéseit illetően, többnyire csak azt a követelményt találjuk hangsúlyozva, hogy képesek legyünk azok segítségével adott premisszákból, a természeti törvényeknek megfelelően, a jelenségek további lefolyását meghatározni, pl. egy lövedék pályáját, melynek adott irányú és nagyságú kezdősebessége van, vagy egy fénysugár útját, mely adott optikai készüléken halad át. Van azonban egy másik probléma, mely gyakorlati jelentőségében az előbbin túlnő, és amely nem kevésbé matematikai természetű: a lövedéket úgy kell kilőni, hogy az egy előírt célba érjen, az optikai készüléket úgy kell megszerkeszteni, hogy vele a legtökéletesebb képet nyerjük«. Elvi összefoglalásban: »Az exakt természettudományok célja ne csupán a jelenségek passzív megértése legyen, hanem elsősorban a természet fölötti aktív uralkodás előfeltételeinek megteremtése«.

Legyen szabad még *J. Bezikovic*s egyik ismert könyvének egy részletét idéznünk, mely a matematika gyakorlati alkalmazásának helyes körülhatárolását szinte szuggerálja: »Az ember gyakorlati tevékenysége szüntelenül össze van kötve a számmal; szám a természeti jelenségek mérésének eredménye; szám a természet erőt az emberiség szolgálatába állító műszaki tervezések eredménye.

Mindezek alapján a matematika gyakorlati alkalmazását oly módon határolhatjuk körül, hogy az a fizikai valóság empirikus megismerése céljából végzett mérések számadataiból indul ki, azokból a matematika fogalomalkotásai és módszerei segítségével prediktív következtetéseket von le, és ezek anyagi megvalósításának alapjaként konkrét számokat, számtáblázatokat, ábrákat bocsát a termelés rendelkezésére. Ha azonban végig akarjuk követni azt a munkafolyamatot, amelynek során az empirikus mérőszámokból kiindulva a technikai alkotások megvalósításának alapjául szolgáló számadatokhoz vagy függvénykapcsolatokhoz eljutunk, akkor ezt a munkafolyamatot több, egymástól elég élesen elhatárolt fázisra kell bontanunk. A tárgykör irodalmával megegyezésben négy fázist fogunk megkülönböztetni: I. Az elvi megállapítások (modell-választás) fázisát. II. A tiszta matematikai kutató tevékenységet. III. A specifikusan alkalmazott matematikai kutató és számító munkát. IV. A numerikus, grafikus és gépi módszerek alkalmazását.

I.

Az első fázisban a következő kérdéssel állunk szemben: A fizikai vilóságra, az anyagi vilóságra vonatkozó összes empirikus és fizikailag vagy technikailag hasznosítható ismeretanyagunk véges számú, korlátolt pontosságú mérőszámból, vagy ha a funkcionális kapcsolatot kihangsúlyozzuk, számpárból áll. Ezzel szemben a matematikának már oly egyszerű fogalma is, mint pl. a differenciálhányados, definíciója szerint végtelen sok számnak (helyesebben számpárnak) precíziós ismeretét tételezi fel. Hogyan lehetséges tehát, és mi értelme van egyáltalán, hogy a precíziós matematika fogalmait és módszereit az anyagi világ tanulmányozásánál alkalmazzuk? Válaszunk csak az lehet, hogy az alkalmazásnak *a priori* semmi értelme nincs, a precíziós matematika azáltal válik alkalmazott matematikává, hogy a precíziós matematikai fogalmakat a gyakorlat előrelátható igényeinek megfelelően választjuk. Ezt az álláspontot képviseli *Bezikovics* is, aki szerint »maga az a kérdés is, hogy egy általunk lemért hosszúság mennyivel egyenlő, értelmetlen, mivel minden mérési adat szükségképpen közelítő«.

Szándékosan állítjuk ezt a kérdést ilyen kiélezett formában hallgatóink elé, mert az emögött rejlő probléma, valamint megoldásának kulcsa sokszor a kutató szakemberben sem eléggé tudatos, a nem-szakember, vagy éppen a kezdő előtt pedig az is ismeretlen, hogy egyáltalán van ilyen probléma.

Az összekötő láncszem a durva empirikus ismeretanyag és a precíziós finomságú matematikai fogalmak között: az absztrakcióval nyert, csupán a kérdés szempontjából lényeges tulajdonságokat megtartó »idealizált« anyag, test, folyamat, más néven a *matematikai modell*. Ilyen matematikai modellek tudvalevőleg: az anyagi pont, a merev test, a Hooke-féle rugalmas test, a súrlódásmentes vagy súrlódó, inkompresszibilis vagy kompresszibilis folyadék, az, az abszolút fekete test stb.

A modell megválasztásának (definíciójának) csupán az alábbi két követelményt kell kielégítenie: 1. A modell precíziós matematikai formában legyen definiálva, arra nézve tehát a precíziós matematika fogalmai és módszerei legyenek közvetlenül alkalmazhatók. 2. A modellre vonatkozó számítási eredményeknek egyezniük kell a modell alapjául szolgáló fizikai objektum (test, rendszer, folyamat) empirikus megfigyelésénél nyert mérőszámokkal (természetesen közelítőleg, legjobban esetben az alkalmazott mérési eljárás hibakorlátján belül).

Az utóbbi követelményre kell nézetünk szerint a matematikát alkalmazók figyelmét külön hangsúllyal ráirányítani, mert köztudomású, hogy sok jobb sorsra érdemes energia ment és megy kárba oly módon, hogy azt rossz modellek számítására pazarolják.

A modellválasztás jelentőségét bizonyítja az is, hogy a matematikai fizikának azok a fejezetei váltak elsősorban a technikai (és egyéb, pl. asztronómiai) tudományok hasznos, sőt nélkülözhetetlen segédeszközeivé, amelyek — legalábbis a praktikus szükségletek határain belül — jó modellel rendelkeznek. Köztudomásúlag például, hogy az anyagi pont az asztronómia minden olyan kérdésénél, mely az égitestek térbeli helyzetére vonatkozik, kitűnő modellek bizonyult, viszont ballisztikus problémáknál már sok esetben nem kielégítő.

Igen jó modell a merev test az összes szilárd anyagokra, melyekből gépalkatrészek készülnek, hiszen ezek megengedett alakváltozása legtöbbször elhanyagolható. Jó modellek bizonyult a Hooke-féle rugalmas test is a technikai szilárdságtanban, hiszen csak újabban, kivételes esetekben kell a plaszticitással, vagy a kihajlással (Knickung) összefüggő jelenségeket egy komplikáltabb modellel figyelembe venni. Az eddig felsoroltakkal ellentétben rosszaknak és matematikailag alig kezelhetőeknek minősítendőek a folyadékok és gázok modelljei. Bizonyíték erre a turbulenciaprobléma mindmáig megoldatlan volta, továbbá a hidraulika című ismeretanyagának a pusztán létezése, amely, megállapítván a klasszikus hidrodinamika gyakorlati hasznavehetetlenségét, saját útjain halad, és a funkcionálisan meg nem oldható kérdésekre empirikus formulákkal igyekszik gyakorlatilag kielégítő választ adni.

Nem kívánjuk megtilgatóinkat további modellek felsorolásával fárasztani, de szükségesnek tartjuk, hogy a modellválasztás fent említett bizonyos határokon belüli önkényességével kapcsolatban néhány megjegyzést tegyünk.

Newton az általános gravitációt tudvalevőleg a $P = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ formulával fejezte ki. Nos, *Newcomb* vizsgálat tárgyává tette, mekkora relatív hibával igazolják *Newton* törvényét az észlelések, és a következőket találta: teresztrikus megfigyeléseknél 30%, a föld-nap távolságon belüli megfigyeléseknél 0.2%, és csupán a legtávolabbi bolygókon végzett megfigyelések adtak az észlelések hibahatárával egyenlő nagyságrendű eltéréseket. Ezek szerint nyitva áll a lehe-

tőség arra, hogy *Newton* törvényében pl. a 2 exponenst egy kevéssé eltérő számmal helyettesítsük, és valóban *Hall* — még a relativitási elmélet felfedezése előtt — a $2 + 0,1574 \cdot 10^{-7}$ exponenst javasolta avégből, hogy a Mercur keringésének rendellenességei a *Newton*-féle törvény következményeként legyenek feltűnő tethetők.

A fentínél sokkal figyelemreméltóbb következményeket mutat a modell megválasztása tekintetében fennálló önkény az anyag két közismert modelljének összehasonlítása esetén. A szilárd testek körére szorítkozva, ismeretes, hogy azokat a klasszikus fizika többnyire, a technikai fizika pedig mindig kontinuumnak, az az a teret folytonosan kitöltő anyagnak minősíti. Ezzel szemben áll a ma már nemcsak következményei által, hanem szinte direkt szemlélettel megerősített korpuszkuális anyagelmélet, mely pl. a kristályos szilárd testeket egy térrács pontjaiban rögzített (illetőleg ott stabilis egyensúlyi helyzettel rendelkező) diszkrét molekulák halmazának tekinti. Felmerül tehát a gyakorlati szempontból sem érdektelen kérdés: lehet-e empirikusan megkülönböztetni a két modellt? Vagy pontosabban: van-e olyan jelenség, amelynél a két modell közti eltérés a mai mérési technika mellett észlelhető?

A felelet: sztatikus jelenségeknél nem, kinetikusoknál igen. Ha ugyanis pl. 1 dm^3 kockaalakú konyhasókristálynak valamelyik szimmetria-tengelyére vonatkozó inercianyomatékát kiszámítjuk, előbb a kontinuum-modell, majd a korpuszkuális modell alapján, akkor az eltérés mindössze kb. 10^{-17} -nak adódik, valószínűtlen tehát a méréstechnika olyan fokú fejlődése, amely mellett z a különbség észlelhetővé válik.

Ellenben *Routh* »Advanced Dynamics« című könyvében található egy eddig alig figyelemre méltatott részlet, melyből kiderül, hogy rezgési, tehát kinetikus folyamat esetén a folytonos és a korpuszkuális modell között feltűnő különbség mutatkozik.

Ha ugyanis egy húrt rezgésre kényszerítünk azáltal, hogy egyik végpontját harmónikus mozgásban tartjuk és másik végpontját — az eredmény egyszerűbb kimondása érdekében — végtelen távolinak vesszük, akkor lényegesen különböző eredményt kapunk aszerint, hogy a valóságos húrt folytonos egydimenziós kontinuum-moddellel helyettesítjük, vagy rugalmasan összekötött molekulák sorával, mint korpuszkuális modellel. A folytonos modellen a kényszerítő mozgásnak bármilyen frekvenciája mellett csillapítatlan haladó hullám keletkezik, a korpuszkuális modellen ellenben csak akkor, ha a kényszer frekvenciája egy korlát alatt marad (ami a molekulák tömegeinek, távolságának és rugalmas kötésének a függvénye). Ha azonban a kényszer frekvenciája ezt a korlátot meghaladja, akkor egyrészt a rezgés amplitúdója a kényszer helyétől számítva exponenciálisan csillapul, másrészt az alaki viszonyok is megváltoznak, amennyiben szomszédos molekulák minden pillanatban ellentett irányú kilengést mutatnak.

Ez a Routh-féle jelenség — amely egyébként rugalmas fonálra fűzött golyóssorral kísérleti úton is kimutatható — alaposabb kivizsgálás után gyakorlati jelentőséget is nyerhet, hisz nem kevesebbet mond annál, hogy egy bizonyos határon felüli rezgésszámú rezgések az útjukban álló testet nem hozzák teljes egészében rezgésbe, hanem annak a felületétől számított kis mélységben teljesen elhalkulnak. Mindenesetre ez a Routh-féle példa feltűnően mutatja, milyen körültekintéssel kell eljárni, ha több, első tekintetre egyenlő értékűnek látszó modell közt kell választanunk.

II.

Ha egy empirikusan észlelt jelenség modelljét megválasztottuk, akkor ezzel a matematikai kutatás útja is determinálva van. A modell tanulmányozása során szükségessé válhat a tiszta matematika legkülönbözőbb ágainak alkalmazása, olyanoké is, melyek alkalmazhatóságára megalkotóik aligha gondoltak. Így tudvalevőleg alkalmazást nyert pl. a Riemann-féle geometria az univerzum Einstein-féle modelljének a vizsgálatánál, a halmazelmélet a valószínűségszámításban, valamint a turbulencia magyarázata céljából kigondolt egyes modellek-nél stb.

A matematikának az általunk elfogadott értelemben vett gyakorlati alkalmazásában gyakoriság és jelentőség dolgában egyaránt első helyen szerepelnek az egyenletek (ebbe a gyűjtőnévbe foglalva az algebrai és transzcendens egyenleteket, a differenciál- és differenciaegyenleteket, az integrál- és egyéb függvényegyenleteket). E helyen — előadásunk címének megfelelően — elsősorban a differenciálegyenletekkel kívánunk foglalkozni.

Talán nem fölösleges, ha először megkíséreljük nemmatematikusok számára megmagyarázni, miért oly alapvető és gyakori segédeszköz a differenciálegyenlet az egyes jelenségek modelljének a tanulmányozásánál. Tegyük fel, hogy adva van egy ismert alakú, méretű és anyageloszlású, rugalmas szilárd test, továbbá adva vannak felületének minden pontjában a reá ható feszültségek. A gyakorlatban legtöbbször azt kérdezik, megengedhető-e az adott terhelés, am matematikailag annyit jelent, hogy nem halad-e meg a húzó vagy nyíró feszültség (esetleg ezeknek valamilyen függvénye) egy a test anyagi minősége által megszabott korlátot. A kérdés eldöntéséhez nem is szükséges tehát ismerni az egész test minden pontjában a feszültségeket, csupán ezek maximális értékeit.

Itt bukkanunk rá a matematikai tárgyalásmód egyik sajátosságára, amely abban áll, hogy ámbár a vizsgált jelenséggel kapcsolatban sokszor csak egy szám, egy méret érdekel, ennek meghatározása céljából mégis a jelenség kimerítő ismeretéhez kell eljutnunk a matematikai analízis segítségével. A szóbanforgó esetben tehát a »feszültségcsúcs« meghatározásához ismernünk kell a teljes feszültségeloszlást és ezenkívül szélsőértékszámítást is kell végeznünk.

A matematikai tárgyalásmódnak egy másik jellegzetessége a következő. Minden fizikai jelenség, vagy technikai folyamat a térnek egy részében (és egy

bizonyos időtartam alatt) megy végbe. A matematikai módszerek már most általában úgy alakultak, hogy különválasztják egyrészt azt a törvényszerűséget, mely a jelenséget a szóbanforgó *térrész* (és esetleg időtartam) *belsejében* szabályozza, másrészt azt, amely a térrész (időtartam) határán a folyamatnak a külső befolyásoktól való függőségét fejezi ki.

Ez a különválasztás — mely első pillanatra komplikációnak is tűnhet fel — lényeges módszertani előnnyel jár. A folyamatnak a térrész (időtartam) belsejében érvényes törvényszerűsége ugyanis független a térrész (időtartam) méreteitől, alakjától, úgyszintén a térrész (időtartam) határán fellépő viszonyoktól, ha azt egy elemi térfogatra (időtartamra) fogalmazzuk meg. Minthogy pedig az elemi térfogatra (időtartamra) vonatkozó törvényszerűséget a jelenség-nél szereplő mennyiségek differenciáljai közti egyenletek fejezik ki, az ezekből származó differenciálegyenletekben ismerjük fel tehát a jelenségek méret-és alaki viszonyoktól független törvényszerűségének kifejezőjét.

Egy differenciálegyenletnek tudvalevőleg végtelen sok megoldása van. Amennyiben mármost sikerül — az *ú. n.* általános integrál meghatározása útján — mindezek birtokába jutnunk, akkor a feladat hátralevő része abban áll, hogy a megoldások végtelen halmazából kiválasszuk azt, amelyik a jelenség színhelyéül szolgáló térrész (időtartam) határán fennálló követelményeket kielégíti.

Fenti példánkra vonatkoztatva a most elmondottak azt jelentik, hogy először meg kell határoznunk a feszültségeloszlást a test belsejében szabályozó differenciálegyenletek általános megoldását és azután az ebben foglalt partikuláris megoldások végtelen halmazából ki kell keresnünk azt, amely a test határának (felszínének) minden pontján az ott működő előírt terheléssel meg-egyezik.

Azt hisszük, hogy a mondottakból elég világosan kitűnik az a kettős feladat, amely a differenciálegyenletek gyakorlati alkalmazásával úgyszólván mindig egybe van kötve : 1. az általános megoldás, azaz a megoldások összességének meghatározása ; 2. kiválasztása annak az individuális (a matematika műnyelvén : partikuláris) megoldásnak, mely a jelenség színhelyéül szolgáló térrész (időtartam) határán előírt feltételeknek megfelel. Ezt a kettős célkitűzést a differenciálegyenletekkel kapcsolatban tudvalevőleg *kerületi problémának* nevezik, megkülönböztetésül a differenciálegyenletekre vonatkozó kutatások kezdetén elsősorban vizsgált kezdőértékproblémától.

Nyilvánvaló, hogy e helyen a differenciálegyenletek egyes típusainak ismertetésébe, sőt még felsorolásába sem bocsátkozhatunk, hanem csupán néhány általános érdekű megjegyzésre kell szorítkoznunk.

Szigorúan véve, az empirikus világ minden jelensége a háromméretű térben és az időben megy végbe. Ha tehát a jelenség matematikai modellje egy kontinuum (egy térrész, egy térrészt folytonosan betöltő anyageloszlás), akkor a modell kimerítő ismeretéhez szükséges, hogy a térrész minden pontjára és minden

időpillanatra nézve meg tudjuk mondani a jelenségnél szereplő egyes mennyiségeknek (állapot- és helyzethatározóknak) ott és akkor mutatkozó értékét. A matematika nyelvén ez azt jelenti, hogy a jelenségnél szereplő mindegyik mennyiséget egy — a három térkoordinátától és az időtől függő — négyváltozós függvény jellemzi.

Ezeknek a meghatározása pedig, aszerint, amint egy vagy több ismeretlen mennyiség szerepel, parciális differenciálegyenletre, illetve ilyenek kapcsolt rendszerére vezet. Összefoglalva tehát: kontinuumszerű matematikai modellek tárgyalása parciális differenciálegyenletek megoldását teszi szükségessé.

Más a helyzet, ha a modell véges számú tömegpontból (naprendszer első közelítésben), vagy merev testből (gép első közelítésben) áll, általában, ha állapota, illetve helyzete véges számú koordinátával meghatározható. Ekkor a modell tárgyalása véges számú közöséges differenciálegyenletből (esteleg közöséges egyenletből) álló rendszerre vezet.

Végül megemlítjük még, hogy újabban a gyakorlati alkalmazásoknál is szerepet játszó korpuszkuális anyagmodell: a végtelen tömegpont-rács tanulmányozásához végtelen sok közöséges differenciálegyenletből álló rendszer megoldása szükséges.

E helyen említjük meg a parciális differenciálegyenletek megoldási technikájára jellemző tényt, hogy t. i. azokat megfelelő új változók bevezetésével közöséges differenciálegyenletekre igyekszünk visszavezetni.

Míg az eddig felmerült kérdéseket csupán futólag érintettük, addig úgy véljük, részletesebben kell foglalkoznunk a differenciálegyenlet-típusok egy másik megkülönböztetésével. Egy differenciálegyenlet ugyanis lehet lineáris (ha benne az ismeretlen, valamint annak deriváltjai csupán első hatványon szerepelnek) vagy nemlineáris, és rögtön hangsúlyozzuk, hogy ez a megkülönböztetés mind elméleti, mind gyakorlati szempontból igen mélyreható.

Gyakorlatilag a különbség legtömörebben talán így fejezhető ki: lineáris differenciálegyenleteknél a megoldások szuperponálhatók, nemlineárisoknál nem. Közérthetőbb magyarázata ennek a megkülönböztetésnek a következő. Egy differenciálegyenletnek — mint már fentebb említettük — végtelen sok megoldása van, és általában arra törekszünk, hogy ezek összességét egy »általános« megoldás alakjában előállítsuk. Felmerül tehát a kérdés, jelent-e a megoldások összességének előállítása érdekében valami előnyt, vagy könnyítést, ha néhány partikuláris megoldás birtokában vagyunk? A felelet lineáris differenciálegyenleteknél igenlő, nemlineárisaknál tagadó. A lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó válasz pontosabb fogalmazásban: a partikuláris megoldásoknak egy $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ sorozata (mely közöséges differenciálegyenletnél véges, parciálisan végtelen sok tagot tartalmaz) elegendő ahhoz, hogy abból szuperponálás, azaz tetszőleges c_1, c_2, c_3, \dots számokkal való lineáris kombinálással

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 + \dots$$

alakban a megoldások összességét előállítsuk. Ezzel szemben nemlineáris differenciálegyenleteknél akárhány partikuláris megoldást ismerünk is, ezekből (általában) egyetlen további partikuláris megoldás sem származtatható közvetlenül.

Még fokozottabb mértékben mutatkozik az ellentét a fentemlített kerületi problémáknál, melyeknél az általános megoldás ismerete előfeltétele annak, hogy belőle a kerületi (határ) feltételeket kielégítő egyedet kiválaszthassuk. Ez a kiválasztás közönséges differenciálegyenleteknél csupán algebrai egyenletek megoldását, parciális differenciálegyenleteknél pedig egy sorfejtés együtthatóinak a Fourier-sorok elméletéből ismert kiszámítását (és esetleg sajátérték-feladatoknál egy transzcendens egyenlet megoldását) teszi szükségessé. Nemlineáris differenciálegyenleteknél az esetek túlnyomó többségében nem ismerjük az általános megoldást, és ha az történetesen ismert, akkor a kerületi feltételek kielégítése rendszerint különös nehézséggel jár.

A dolgok ilyen állása mellett nem hagyhatjuk érintetlenül a kérdést: az alkalmazásban szereplő differenciálegyenletek közt a két típus melyike fordul elő többségben? A történeti fejlődés folyamán — mely kétségtelenül a kisebb ellenállás irányában haladt — a lineárisak fordultak elő túlnyomó többségben. Ennek a ténynek a magyarázata azonban elsősorban az, hogy a gyakorlat — éppen a linearizálás érdekében — legtöbbször megelégedett a legegyszerűbb modellel. Ez pedig nyilván úgy adódik, hogy a modellt jellemző mennyiségeket Taylor-sorba fejthetőnek minősítjük, a kifejtésnél azonban csak a lineáris tagot vesszük figyelembe. Ilyenek tudvalevőleg a Hooke-féle rugalmas test, a kis rezgéseknél fellépő visszatérítő erő, a lineáris súrlódási-, hőtágulási-, hővezetési-törvény, a súrlódó folyadékok lassú mozgásának elmélete stb. Viszont egyes területeken, így az égi mechanikában, a gépek instacionárius mozgásánál, a hidrodinamikában már a kutatás kezdetleges fejlődési fokán sem volt lehetséges, illetve megengedhető a linearizálás.

Azt lehetne tehát gondolni, hogy egyes jelenségek tárgyalásánál a lineáris differenciálegyenletek kielégítőek, másoknál nem. A fejlődő technika fokozódó követelményei azonban mind nyilvánvalóbbá teszik, hogy a lineáris differenciálegyenletek alkalmazása egy területen sem mondható kivétel nélkül kielégítőnek. A centrifugál-regulátor stabilitásának kérdése pl. szükségessé tette a rezgéseknek nemlineáris differenciálegyenletekkel való vizsgálatát. Számos műszaki alkotás ismeretes, melyeknek modelljénél nemlineáris rugalmas, illetve súrlódó erőt kell számításba venni.

Különösen figyelemreméltó példa arra, hogy a korábban jól bevált lineáris egyenleteket nemlineárisakkal kell helyettesíteni, a szilárdságtanból jól ismert kihajlás (Knickung). Míg ugyanis a kihajlásra kritikus terhelések még egy lineáris kerületiérték-feladatból megállapíthatók, addig pl. a kihajlott rúd viselkedésére a rugalmasságtan lineáris differenciálegyenletei semmi felvilágosítást sem adnak. Minthogy pedig — elsősorban légi járművek súlycsökkentése

érdekében — újabban a szilárdság és terhelés olyan viszonya is megengedhető, amely mellett a rudak kihajolnak (és ilyen állapotban maradnak), ezért ilyen esetekben a rugalmasságtan differenciálegyenleteit is szükséges a másodfokú tagokkal kiegészíteni, így ezek a hidrodinamikai differenciálegyenletekkel egyenlő nehézségi fokúvá válnak, ennek következtében eddig csupán a legegyszerűbb esetekben sikerült őket megoldani.

III.

Midőn a specifikusan alkalmazott matematikai tevékenység ismertetésébe kezdünk, nem hallgathatunk el egy triviálisan hangzó megállapítást. Ha a matematika az általa felvetett feladatokat, vagy ezek közül legalább azokat, amelyek közvetlenül a gyakorlati alkalmazás szolgálatában állnak, a gyakorlat szükségleteinek megfelelően meg is tudná oldani, — itt természetesen nem pusztán existenciabizonyításra, hanem numerikus számításra alkalmas megoldásra gondolunk — akkor specifikus alkalmazott matematika nem létezne, illetve egybeolvadna az általános matematikával. Meg kell viszont állapítani azt is, hogy a matematikai módszerek bármily nagyfokú fejlettsége esetén is fölösleges munkapazarlás lenne az empirikus jelenségeket túlrészletezett, túlfinomult modellekkel megközelíteni. Hiszen — mint már többször hangsúlyoztuk — az empirikus jelenségekre vonatkozó minden észlelésünk, mérési adatunk korlátolt pontosságú, konkrét példát idézve tehát értelmetlen és paradox lenne egy rótor szilárdsági vizsgálatánál a hengeres alaktól való, cca 1‰ eltérést számításba venni akkor, amikor az anyag rugalmas állandóira és homogeneitására vonatkozó számadatoknál csak néhány százalék pontosságot tudunk biztosítani.

Mindezen tények alapján körülírhatjuk a specifikus alkalmazott matematikai tevékenység jellegzetes feladatát: *úgy megválasztani a modellt, hogy az egyrészt számítástechnikailag uralható legyen, másrészt az alapjául szolgáló empirikus jelenséget a gyakorlat által megkívánt pontossággal megközelítse.* A pontosság optimumát nyilván elérjük akkor, ha a modellre vonatkozó számítás és a valóságban végzett mérések közti eltérés ugyanolyan nagyságrendű, mint a használt mérési eljárás hibakorlátja.

Az alkalmazott matematikusnak a munka megkezdésekor rendelkezésére állnak egyrészt a különböző lehetőségek a modell megválasztása terén, másrészt a matematika kialakult módszerei a modellre vonatkozó számítások elvégzéséhez. Megkíséreljük áttekintést adni azokról a lehetőségekről, melyek célja a modell, vagy a matematikai segédeszköz egyszerűsítése.

A modell egyszerűsíthető:

1. a struktúrájára és környezetével való kölcsönhatására vonatkozó feltevések alakjában;

2. a vizsgált jelenség geometriai sajátosságainak (dimenziószám-csökkenés, szimmetriák) kihasználásával;

3. a modell lényeges és alárendelt jelentőségű részeinek következetes megkülönböztetésével.

Amennyiben pedig az alkalmazott matematikai segédeszköz differenciál-egyenlet, úgy annak megoldása egyszerűsíthető:

1. differencia-egyenletté való átírással,
2. végtelen sorok mellőzésével, közvetlenül közelítő, véges-sor alakú megoldással.

Az 1. pontban említett egyszerűsítés tipikus példája a repülőgépek (longitudinális) mozgásának matematikai tárgyalása. A komplikált alakú gépet függélyes szimmetriasíkú merev testnek tekintjük és az összes erőhatásoka (légnyomás, légcsavar vontató ereje, nehézségi erő) egy eredőbe és egy eredő nyomatékba foglaljuk össze. Ily módon sikerül a mozgást három közönséges differenciálegyenlettel leírni. A légnyomás legfontosabb komponense természetesen a szárnyakra gyakorolt dinamikus felhajtóerő. Ennek vizsgálatát pedig tudvalevőleg szinte kivétel nélkül azáltal egyszerűsítjük, hogy a környezetben levő más merev testekkel (és esetleg lokális légmozgásokkal) való kölcsönhatást számításon kívül hagyjuk, vagyis a szárnyat végtelen nyugvó légtérben mozgónak tekintjük.

Legtágabb tere nyílik a modell egyszerűsítésének a 2. pontban körülírt módon. Ugyanis — ámbár minden fizikai test háromdimenziós és minden jelenség a háromdimenziós térben megy végbe — nagy számban találunk éppen a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos eseteket, midőn egy test 2-, 1-, vagy éppen 0-dimenziós modellel jól megközelíthető. Nem kevésbé fontosak az olyan jelenségek, melyek lefolyásában geometriai szabályosságok mutatkoznak, amelyek tehát feljogosítanak arra, hogy azt 2- vagy 1-dimenziós, vagy henger-, ill. gömbszimmetriát mutató modellel közelítsük meg.

A test 0-dimenziós modelljének, az anyagi pontnak szerepét már említettük. A testek egy- és kétdimenziós modelljeivel köztudomásúlag igen gyakran találkozunk a műszaki mechanikában és az elektrotechnikában. A merev és rugalmas rudak, húrok, lineáris áramvezetők mind egydimenziós modellek, a hárták, lemezek, héjszerkezetek kétdimenziósak, és e modellek alkalmazása nyilván annál jogosultabb, minél kisebbek az elhanyagolt dimenziók a számításba vettekhez képest.

Ide tartozik a modellegyszerűsítésnek az a módja is, melynél a test egyes méreteit végtelen nagynak minősítjük. Így pl. egy véges hosszúságú körhengeralakú testben a forgásnál keletkező feszültségeloszlás, vagy a lehülés, vagy az abban végbemenő rugalmas, ill. elektromágneses hullámterjedés matematikai vizsgálata igen bonyolult, de a számítás jelentékenyen egyszerűsíthető azáltal, hogy a hengert végtelen hosszúnak tételezzük fel.

Már e helyen is hangsúlyozni kívánjuk, hogy az ilyen közelítések értékelésénél az alkalmazott matematika nem érheti be azzal, hogy azokat a mérnöki »ösztön« kielégítőknak minősíti, hanem ellenőriznie kell őket legalább olyan

egyszerű esetekben, amikor a pontosabb modell matematikailag kivizsgálható, és így az egyszerűsített modellel összehasonlítható.

Nem kisebb jelentőségű a modellegyszerűsítésnek fentemlített másik módja, mely legtöbbször akkor válik aktuálissá, ha a vizsgálat tárgya valamely térrészben kialakuló folyadék-, ill. elektromos áramlás, vagy hőmérséklet-, feszültség-, potenciál-eloszlás, amikor tehát — a matematika műnyelvén szólva — egy skalár- vagy vektoreloszlást kell meghatároznunk.

Legegyszerűbb a térbeli eloszlás, ha az minden egyes, valamely adott irányra merőleges síkban ugyanoyan értéket mutat, tehát csupán egy (a síkokra merőleges irányban mért) koordinátától függ. Ilyen geometriai törvényszerűséget mutatnak a fentemlített folyamatok közelítőleg egy hengeres térrészben, ha annak palástfelülete impermeábilis, ill. súrlódásmentes és a folyamat állapot-határozói a henger véglapjain minden pillanatban egyező értékűek.

Különösen gyakoriak és fontosak — a komplex változós függvényttannal való kapcsolatuk révén — a kétdimenziós térbeli eloszlások. Ezeket tudvalevőleg az jellemzi, hogy a folyamat párhuzamos síkokban kongruens struktúrát mutat. Ha tehát e síkok egyikében a kérdéses skalár- vagy vektoreloszlás már ismeretes, akkor ebből a többi síkban az eloszlást merőleges vetítéssel nyerjük. Az a számítástechnikai előny, amit a kétdimenziós esetek komplex függvényttani tárgyalása nyújt a háromdimenziósokkal szemben, annyira jelentékeny, hogy sokszor olyan jelenségeket is kétdimenziós modellel közelítünk meg, melyeknek térbeli törvényszerűsége helyenként messze eltér a kétdimenziós eloszlástól. Döntő bizonyíték erre a repülőgépszárny körül kialakuló légmozgás Kutta—Zsukovszkij-féle közismert kétdimenziós modellje, továbbá a turbínák, a csatornáknakban végbemenő áramlások, a lemezhengetési eljárás kétdimenziós modelljei.

Foglalkoznunk kell még e helyen az eloszlások hengeres vagy gömbi szimmetriájából származó előnyök kihasználásával. Ha koaxiális hengerekkel határolt — tehát csőszerű — test belső és külső palástját egyenletes nyomással terheljük, ha egyenletes hőmérsékleten vagy potenciálon tartjuk, ha tengelye körül forgatjuk, akkor a szimmetria elve világosan mutatja, hogy a testben kialakuló nyomás, hőmérséklet, potenciál, illetőleg a rugalmas feszültség csupán a tengelytől mért távolságtól függ, másszóval az eloszlás koaxiális hengereken közös értéket mutat (a hengervegeknél fellépő eltérésektől eltekintve). Az ilyen eloszlást hengerszimmetriásnak mondjuk s talán nem érdektelen megjegyezni, hogy ha egy jelenségnek (az előbbi értelemben vett) egydimenziós modelljénél az eloszlást trigonometrikus függvény jellemzi, akkor ugyanezen jelenség hengerszimmetriás modelljénél az eloszlást a (0 indexű) Bessel-függvény szabja meg.

Hasonló egyszerűsödést von maga után az eloszlás gömbi szimmetriája, vagyis az az eset, melynél az állapot-határozók csupán egy fix ponttól mért távolságtól függenek.

Úgy véljük, e pontnál nem hagyhatjuk válasz nélkül azt a kérdést, mik a fent említett dimenziószám csökkenésnek, illetőleg a hengeres vagy gömbi

szimmetriának a számítástechnikai előnyei. Ha figyelembe vesszük, hogy statikai feladatokban az idő egyáltalán nem szerepel, rugalmas vagy elektromágneses rezgési, valamint hővezetési feladatoknál pedig az idő (az $e^{i\omega t}$ függvény alkalmazásával vagy operátorszámítással) kiküszöbölhető, akkor feladatunk általában egy háromváltozós parciális differenciálegyenlet megoldását teszi szükségessé. Ez kétdimenziós modell esetén kétváltozósra redukálódik, egydimenziós, valamint henger- és gömbszimmetriás modell esetén pedig közönséges differenciálegyenletbe megy át.

3. A matematikának a gépészet körében való alkalmazásánál gyakran előfordul, hogy a gép egyik része tömeg, sebesség, kinetikus energia stb. szempontjából a többihez képest preponderál. Ilyen esetekben jelentékeny számítástechnikai előnnyel jár, ha a többi alkatrészek relatíve csekély nagyságrendű számadatait 0-val helyettesítjük. Szisztematikus kiépítést nyert ez a gondolat az ú. n. Rayleigh-féle elvben. Ez lényegileg azt mondja ki, hogy egy több testből álló rugalmas rendszer rezgéseinek vizsgálatánál a valóságos viszonyokat jól megközelítjük, ha a preponderáló testet tömegével és rugalmasságával vesszük számításba, míg a kis tömegű testeket tömegtelen, de rugalmas elemeknek minősítjük. Ez az elv tette pl. lehetővé egy olyan számítási eljárás és nomogramm kidolgozását, amelynek segítségével egy rőtorból és annak csekélyebb tömegű tengelydarabjaiból álló rendszer kritikus fordulatszámra percek alatt kielégítő pontossággal meghatározhatóvá vált.

*

Ha a modell indokolt egyszerűsítésére nincs lehetőség, akkor a differenciálegyenlet megoldásával járó feladatot egyszerűsíthetjük az alábbiakban kijelölt úton.

Mivel minden differenciálhányados különbségi-hányados határértéke, azért a közelítő megoldás szempontjából minden differenciálegyenlet differenciálegyenlettel helyettesíthető. Ez a módszer közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldására már régóta használatos, mégpedig numerikus és grafikus alakban is. Parciális differenciálegyenletek esetén, a kiszámítandó függvényértékek nagy számából eredő nehézségek miatt, csak újabban kezdik alkalmazni. Egyes esetekben a számítástechnika rendkívül egyszerű. Így pl. a síkbeli Dirichlet-probléma megoldásánál (mely tudvalevőleg egy sereg rugalmassági, áramlási, elektrotechnikai problémának a kulcsa) a differenciaszámítás alapjául felvett rácpontokhoz úgy kell a függvény értékeket meghatározni, hogy mindegyik egyezzen négy szomszédjának a számtani közepével.

Az eljárás alkalmazható nemlineáris differenciálegyenletekre is, ezzel a módszerrel sikerült Henckeynek egy síklemezalakú akadály környezetében a két lehetséges áramlási típust meghatározni.

A differenciálegyenletek gyakorlati megoldásának egyszerűsítésére hivatott másik, szintén Rayleighre visszanyúló eljárás Rayleigh—Ritz-módszer néven

ismeretes. Ez általában nem is törekszik a differenciálegyenlet exakt, végtelen soralakú megoldására, hanem közvetlenül végesség-alakú, közelítő megoldást ad.

A módszer ismertetésénél előre kell bocsátanunk azt a tényt, hogy a mechanikai és szilárdságtani problémák legtöbbször extremum-feladat formájában is megfogalmazható, az itt fellépő extremum-feladatok szigorú megoldása azonban a variáció-számítás segédeszközeit igényeli. De ha az extremum szempontjából csak azokat a függvényeket vesszük tekintetbe, amelyek egy véges tagszámú sorból keletkeznek az együtthatók változtatásával, akkor a feladat olyan közönséges maximum-minimum számításra redukálódik, amely a differenciál-számítás elemi szabályai szerint megoldható. Természetes, hogy az így nyert eredmény csak közelítő lehet, a pontosság azonban az alkalmazott sor tagszám növelésével tetszőlegesen fokozható. Az eljárást előnyösen alkalmazták olyan esetekben, amikor a modell struktúrája komplikált, és megnyugtató módon nem egyszerűsíthető.

*

Nem hagyhatjuk említés nélkül az alkalmas modell megszerkesztésénél tekintetbe jövő fordított eljárást sem: a modell finomítását. Ez elsősorban akkor fordul elő, ha a műszaki gyakorlat által használt, de matematikai szempontból igen pontatlan modelleket kell a határfok, az üzembiztosság vagy az ökonómia igényeinek megfelelően javítani.

Legyen szabad a modell finomításának módját egy jellegzetes példán bemutatni. A turbinákban lejátszódó folyamat mind alak, mind sebességeloszlási szempontból olyan komplikált, azonkívül a hidrodinamika folyadékmodelljei olyan kevésbé kielégítőek, hogy a folyamat kimerítő matematikai tárgyalására való törekvés kilátástalan.

Ilyen körülmények közt a turbinák számításánál elsősorban a modell kvalitásától független, általános impulzus- és energiatételek jönnek tekintetbe. Legegyszerűbb a már *Euler* által ismert »áramfonalas« (másnéven végtelen sok lapáttal bíró) modell, melynél a folyadékot előírt áramvonalak mentén vezetettnek tekintjük, a be- és kiömlési feltételek racionális előírása mellett. Nyilvánvaló, hogy a technika fejlődésével ennek a primitív modellnek a finomítása vált szükségessé. Ennél a finomításnál döntő szerepe van a Kutta—Zsukovszkij-féle szárnymodellnek, általában a komplex változós függvénytanaknak. A Kutta—Zsukovszkij-modell ugyanis kielégítően leírja egy szárnynak, illetőleg lapátnak a végtelen légtérben való mozgását. A konformis leképezés mármint módot ad arra, hogy a Kutta—Zsukovszkij-modellt általánosítsuk tetszőleges számú, szabályos eloszlású lapát esetére. Axiális turbina esetén a $w = \log z$ függvény radiális turbina esetén pedig a $w = \sqrt[n]{z}$ függvény transzformálja a Kutta—Zsukovszkij modellt a megfelelő áramképbe. Természetesen nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy az így szerkesztett modellnél —különösen a radiális turbinánál — a centrifugális erőt külön korrekcióval kell figyelembe venni.

A modell további finomításaképpen *Busemann* kimutatta, hogy légnemű közeg alkalmazása esetén a turbínába vezetett energiának nem jelentéktelen hányada hanghullámszerű pulzációk alakjában távozik a végtelenbe.

IV.

Ha fenti követelményeket kielégítő modellel kapcsolatos matematikai probléma megoldást nyert, akkor az alkalmazott matematikus szerepe — elméleti szempontból — véget ért.

Ha azonban a gyakorlat követelményeit, előadásunk célkitűzéseihöz híven, minden vonalon figyelembe akarjuk venni, akkor legalábbis meg kell emlékeznünk a matematika alkalmazásának utolsó fázisáról, a numerikus, grafikus és gépi módszerekről. Az alkalmazott matematika a keresett számokat vagy függvényeket legtöbbször végtelen sorokkal (vagy egyéb végtelen processzusokkal) állítja elő. Idomokat, felületeket pedig egyenletükkel ad meg. Hogy kellő előkészítés nélkül ezekkel az eredményekkel ilyen alakban nem lehet a mérnököt terhelni, azt eléggé mutatja az alább felsorolt néhány példa.

Gömböv alakú héjszerkezetek feszültségeloszlásának pontos leírásához hipergeometrikus sorok szükségesek. A jénai Schott-művek kupolájának számításánál (1923—24) ezen sorok 35 tagját kellett kiszámítani, miközben ezek részletösszege több mint százszorosára nőtt annak a számnak, amelyhez a sor végül konvergál.

Mint már említettük, a Dirichlet-probléma közelítő megoldása differenciaegyenlet segítségével csupán összeadást és négyzel való osztást igényel, látszólag tehát egy elemistára is rábízható. Ha azonban tekintetbe vesszük, hogy a megoldás elég pontos térképezéséhez legalább ezer rácspont szükséges, és a limes kellő megközelítése érdekében a rács »Euler-vonalát« legalább 3—5-ször végig kell futni, akkor nyilvánvaló, hogy a módszernek csak akkor van gyakorlati értéke, ha a műveleteket automatizált géppel végezhetjük.

Hiperboloidikus kerek fogazásánál olyan egyenesvonalú profilfelületeket keresünk, melyek — egymáson csúszva-gördülve — kitérő tengelyek közt előírt szögsebesség-áttételt létesítenek. Nyilvánvaló egyrészt, hogy a probléma meg van oldva a profilfelületek egyenletének előállításával, viszont épp oly nyilvánvaló, hogy a tervezés és gyártás céljaira az eredmény csak akkor használható, ha annak alapján kellő vetület- és metszetrajzok készültek.

Egy rőtorból és annak tengelydarabjaiból álló rendszer legkisebb kritikus fordulatszámát — még a Rayleigh-elv alapján egyszerűsített modellre is — az alábbi, elég bonyolult transzcendes egyenlet legkisebb gyöke adja :

$$Y = 6 \frac{\left(\frac{ctg \xi}{\xi} + X\right) \left(\frac{cth \xi}{\xi} - X\right)}{\xi (ctg \xi + cth \xi)}$$

ahol ξ az ismeretlen, X , Y pedig a forgórész méreteitől és anyagi állandóitól függő mennyiségek.

Ennek a gyöknek a közelítő kiszámítása függvénytáblák használatával igen fárasztó és hosszadalmas. Viszont egy alkalmas nomogrammból a keresett szám a forgórészek méretei alapján néhány másodperc alatt kiolvasható.

A felsorolt példák — úgy véljük — nem hagynak kétséget abban a tekintetben, hogy a matematikai kutatás eredményei a gyakorlatban csak akkor hasznosíthatók teljes mértékben, ha azokat a mérnök, tervező stb. a saját igényeinek megfelelő formában kapja kézhez. Ennek a követelménynek a teljesítése elsősorban az alkalmazott matematikusokra hárul, akiket rá kell nevelni arra, hogy soha se elégedjenek meg a feladat megoldását tartalmazó analitikus formula levezetésével, hanem igyekezzenek azt a gyakorlat numerikus, grafikus vagy gépi számítás szempontjából legcélszerűbb formába önteni.

*

A fentiekben adott összefoglaló áttekintés nem tart igényt teljességre sem az anyaggyűjtés, sem a módszerek felsorolása tekintetében. Szinte teljesen hiányoznak belőle a matematikának a fizika ill. technika területén kívül eső alkalmazásai.

Szerző fő célja az volt, hogy tájékoztassa az olvasót a matematika és a valóság viszonyát érintő elvi kérdésekről, és bemutassa a matematika gyakorlati alkalmazásának különböző fázisait.

*Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK FELADATAIRÓL

VINCZE ISTVÁN

Előadta az 1950. november 29-én tartott osztályülésen

A matematika, mint a jelenségek leírására szolgáló eszköz, az elméleti, kísérleti és gyakorlati fizika körén túl, mind gyakrabban talál helyet a kémiában a biológiában, az orvostudományban, a gazdasági életben. A jelenségek leírásának matematikai formulázása természetesen nem jelent számunkra abszolút helyes, örökérvényű képet, hanem a valóság többé-kevésbé jó megközelítését. Ezt a megközelítést finomítjuk akkor, ha a jelenségeket még pontosabban megismerjük, és a jelenségek matematikai leírását egyszerűsítjük, ha azt az alkalmazás úgy kívánja. Ugyanakkor mindig megvizsgáljuk tisztán matematikai műveleteinknek konkrét jelentését, eredményeinknek a gyakorlattal való egyezését, hiszen ez teszi exakttá a matematikai módszerek alkalmazását. A tiszta matematika kialakulása a gyakorlat, a tapasztalat fejlődésével elválaszthatatlanul szoros összefüggésben állott, eredete a gyakorlat, a tapasztalat. Éppen ez a körülmény magyarázza meg azt, hogy a matematikai formula sokszor többet mond a valóságról, mint amennyi a valóság közvetlen, egyéb módon való szemléléséből kiolvasható. Klasszikus példa erre az elektromágneses jelenségeknek differenciálegyenletekben történt leírása, ami *Maxwell* nevéhez fűződik. Ezekből a differenciálegyenletekből vonta le azután *Hertz*, a — még akkor ismeretlen — távolbahatásra vonatkozó gyakorlati következtetéseit, és ezzel megvetette a fizika és technika új korszakának alapjait.

Mindennapi gyakorlatunk is számtalan ilyen példát vet fel, ha nem is ilyen jelentőségben és méretekben. Amikor arra a kérdésre várunk választ, hogy valamely fizikai vagy kémiai jelenség milyen hőmérsékleten, milyen intenzitás mellett, milyen rezgésszám mellett, milyen koncentráció mellett következik be, erre igen sokszor csak hosszú ideig tartó, költséges és fáradságos kísérletsorozattal tudunk válaszolni. Sok hőmérsékleten, sok rezgésszám mellett, sok koncentráció mellett stb. kell ezeket a kísérleteket elvégezni. Ha azonban ugyanakkor a kérdéses feladatot sikerül matematikai formulába öltöztetni, és az így nyert matematikai problémát sikerül megoldani, akkor a kívánt eredményt tisztán számítással megkaphatjuk, vagy legalábbis megszükitjük a kérdéses fizikai mennyiségek azon értékeinek skáláját, amelyekre nézve a kísérleteket el kell végezni.

Azt hiszem, hogy ez a körülmény messzemenően indokoltta teszi, hogy az iparban, a mezőgazdaságban és a tudományos életben elegendő számban legyenek olyan matematikusok, akik ismerik az illető szakmát is.

Mi volt a helyzet nálunk ebben a kérdésben a felszabadulás előtt, milyen feladatok előtt állunk ma ezen a téren? A magyar ipar és magyar tudomány nyilván azelőtt is használt matematikai módszereket. Előfordult szörványosan, hogy a kapitalisták a munkabérek leszorításán, árkartellek kialakításán és hasonló tőkés módszereken kívül más eszközökkel is igyekeztek profitjukat növelni. Kiváló matematikus is akadt bőven; létszámuk nagyobb volt, mint amit akkor az igények megkívántak. De hatalmas szakadék tátongott a magyar matematikai kutatás és annak gyakorlati alkalmazása között; matematikusaink jórésze, még ha foglalkozott is a gyakorlathoz közelálló problémákkal, nem foglalkozott eredményeinek gyakorlati vonatkozásaival. Azt kell mondanunk, hogy csak a munkanélküliség, a mindennapi kenyér gondja vitte néhány igen kiváló matematikusunkat az alkalmazott matematikai pályára. Elsősorban *Csillag Pálra* és *Grünwald Gézára* gondolok itt, akik kiváló eredményeik révén külföldön is jólismert és nagyrabecsült matematikusok voltak.

Alapvetően megváltozott a helyzet a felszabadulás után. A Párt, a népi demokrácia kormánya, a magyar iparnak, a magyar mezőgazdaságnak, a magyar nép kulturális életének példátlanul hatalmas arányú fejlesztését tűzte ki feladatul. Ez nem lehetett csupán mennyiségi növelés. Az üzemek számának és kapacitásának emelése mellett elsőrendű feladattá vált a termelés minőségének, a termelékenységnek emelése is, ez pedig új, modernebb technikai eljárások bevezetését, új munkamódszerek kidolgozását tette szükségessé. A dolgozók, a munkások, mérnökök és technikusok egyre világosabban látták új viszonyukat munkahelyükhöz, a nép államának tulajdonához. Általában megértették, mit jelent számukra a jobb és olcsóbb termelés, és mind többen és többen tették magukévá a selejtt elleni küzdelmet, vettek részt az újíto, észszerűsítő mozgalomban. Mezőgazdaságunk fejlesztése a mezőgazdasági tudományos kísérleti állomások egész sorának felállítását eredményezte. S a szocialista ideológia behatolása a tudomány területére ezen a téren is felszámolta a kapitalizmus káros maradványait: a szervezatlenséget, az öncélúságot, a gyakorlattól való távolmaradást.

Érthető tehát, hogy a gazdasági és tudományos életünkben bekövetkezett döntő változások, amelyek főként minőségi feladatokat jelentettek, és a dolgozók új viszonyát a feladatokhoz, egyúttal a problémáknak új szemlélését is eredményezték: a kérdések tisztább, finomabb megfogalmazását, s egyáltalán kérdést, problémát ott, ahol eddig senkinek eszébe sem jutott, hogy a mult gyakorlatával szemben valamit kritika tárgyává tegyen. Ennélfogva a szakemberek is mind gyakrabban ismerték fel problémáiknak más területekkel való rokonságát. Természetes következménye volt ennek, hogy az ipar, a mezőgazdaság és a tudományos élet különféle szektoraiból mind gyakrabban keresték fel matematikusainkat megoldásra váró problémáikkal.

Míg azonban a felszabadulás előtt fölös számban voltak kiváló matematikusaink, ma — egyrészt a második világháború sajnálatos pusztításai miatt,

másrészt népgazdaságunk, oktatásügyünk fokozott igényeinek következtében — még arra sem gondolhatunk, hogy legnagyobb üzeinket és legnagyobb tudományos kutatóintézeteinket ellássuk alkalmazott matematikusokkal. Így átmenetileg egyedül helyes megoldásnak az Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének felállítása mutatkozott. Az erre vonatkozó rendelet ez év júniusában jelent meg. Tudományos intézetbe szervezte és kibővítette azt a kis csoportot, amely *Egerváry Jenő* r. tag vezetésével, majd később az alkalmazott matematika más területein *Rényi Alfréd* és *Hajós György* lev. tagok irányításával, bár szerény keretek között és a szükséges publicitás nélkül, immár közel két éve dolgozik és végez érdemleges munkát.

Népgazdaságunk és tudományos életünk matematikai problémáinak megoldása jelenleg tehát az Alkalmazott Matematikai Intézetre vár. Ez a mai helyzetben az Intézet alapvető feladata. A jövőben, mint említettük, üzeinknek és nagyobb intézményeinknek alkalmazott matematikusokkal való ellátása szükséges. Erre a feladatra az Eötvös Lóránd Tudományegyetem Természettudományi Karán ez évben bevezetett alkalmazott matematikus-képzés hivatott. De itt is vannak tennivalói az Alkalmazott Matematikai Intézetnek: az egyetemet végző alkalmazott matematikus hallgatónak gyakorlati oktatását kell ellátnia. Ezek a hallgatók az Intézetben töltenek el egy évet, amelynek során a gyakorlat problémáinak megoldásában és a matematikai műszerek, táblázatok használatában jártasságot szereznek.

Gondolnunk kell továbbá arra is, hogy a matematikában már bizonyos képzettséggel bíró mérnökeink, kutatóink az esetek nagyobb részében nem jártasak matematikai feladatok megoldásában, nem ismerik fel azokat a problémákat, amelyek matematikailag megragadhatók. Emelnünk kell mérnökeink, kutatóink matematikai színvonalát. Fontos feladata tehát az Intézetnek, hogy kapcsolatot létesítsen a termelés szakembereivel és a természettudományok művelőivel. Bár Intézetünknek nem elsősorban az oktatás a feladata, az adott helyzetben mégis szükséges, hogy az Intézet továbbképző tanfolyamokat és előadássorozatot is rendezzen.

Ugyanakkor nélkülözhetetlenül szükséges a kapcsolat az Intézet dolgozói és a termelés, a gyakorlat között. Először is, matematikusainknak tudniuk kell, hogy a termelés adta problémákat helyesen irták-e át a matematika nyelvére, helyesen állították-e fel például a differenciálegyenleteket stb. Ehhez matematikusainknak igen sok tapasztalatra és ismeretre van szükségük, s ezt csak a termeléssel való szüntelen kapcsolat révén szerezhetik meg. Ezenkívül a problémák megoldásában, a matematikai formulák egyszerűsítésében is segítséget nyújt a problémák technikai hátterének pontos ismerete.

További feladata az Intézetnek, hogy kapcsolatot építsen ki a külfölddel: éspedig a népi demokratikus országok — Lengyelország, Csehszlovákia és Németország — hasonló intézményeivel, tapasztalatcsere céljából. A legnagyobb súlyt helyezzük természetesen arra, hogy a Szovjetunió példáját ezen a területen

is kövessük. A Szovjetunió ezen a téren is élenjár. Ott ugyanis az üzemek és intézmények már el vannak látva alkalmazott matematikusokkal, és így az Alkalmazott Matematikai Intézet csak a legfontosabb elvi problémákkal foglalkozik. Ennek az intézetnek munkájában ragyogó példáját látjuk az elmélet és gyakorlat egységének. Itt ugyanis a legkiválóbb szovjet matematikusok működnek, akik az alkalmazott matematikában alkotott kiváló eredményeikkel is elősegítik szocialista hazájuk népgazdaságának fejlődését.

A marxizmus-leninizmus elmélete óva int a szűk prakticismustól, attól, hogy a mindennap problémái mellett a távolabbi célokat, az elméletet elhanyagoljuk. Ennek a követelménynek teszünk eleget, amikor — az Intézet belső munkaterveként — feladatul tűzzük ki az alkalmazott matematikai tudományok olyan területeinek fejlesztését is, amelyek felhasználására nem ma, esetleg nem holnap, de a fejlődés során sor kerülhet. Feladatunk tehát olyan problémák vizsgálata és megoldása, amelyek elméleti matematikai problémák, de a gyakorlatban, vagy a gyakorlattal kapcsolatban merültek fel és esetleg túlnőnek a ma gyakorlatának problémáin. Belső munkatervünk jó teljesítése teszi lehetővé, hogy külső feladatainkat megoldjuk; — és belső munkatervünk helyes felállítását viszont csak a gyakorlattal való szüntelen kapcsolatunk útján tudjuk biztosítani.

*Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

AZ INTEGRÁLEGYENLETEK EGY OSZTÁLYÁRÓL ÉS ANNAK GYAKORLATI ALKALMAZÁSÁRÓL

FENYŐ ISTVÁN

Előadta az 1950. november 29-én tartott osztályülésen

Az integrálegyenletek elméletének mind a matematikai fizikában, mind pedig a technikában igen kiterjedt és sokoldalú gyakorlati alkalmazása van. Maga az egész elmélet fizikai problémák szükségéből nőtt ki. Éppen a kiterjedt alkalmazások miatt, ebben az előadásban az integrálegyenleteknek csupán egy osztályához kívánok néhány megjegyzést fűzni.

Ismeretes, hogy egy lineáris integrálegyenlet általános alakja

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (1)$$

ahol $K(x, y)$ adott kétváltozós függvény, az egyenlet ú. n. magja, és $f(x)$ szintén adott. Ha $f(x) \equiv 0$, akkor (1) egyenletnek a $\varphi(x) \equiv 0$ függvényen kívül csakis abban az esetben van nemtriviális megoldása, ha a λ paraméter bizonyos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$ értékeket vesz fel:

$$\varphi_i(x) = \mu_i \int_a^b K(x, y) \varphi_i(y) dy.$$

A $\varphi_i(x) \equiv 0$ függvényeket a K mag sajátfüggvényeinek, a μ_i állandókat sajátértékeknek hívjuk.

Igen fontos szerepet játszanak az integrálegyenletek elméletében az ú. n. Schmidt-féle sajátértékek és sajátfüggvények. A λ_i számot Schmidt-féle sajátértéknek hívjuk, ha a

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, y) \varphi_i(y) dy, \quad \psi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(y, x) \varphi_i(y) dy$$

egyenletpárnak van nemtriviális $\varphi_i(x), \psi_i(x)$ megoldása. Ki lehet mutatni, hogy míg a μ_i sajátértékek nem mindig léteznek, vannak sajátérték nélküli magok, addig a Schmidt-féle sajátértékek mindig léteznek, és valós magok esetén ezek mindig valós számok. Természetesen, ha a K mag szimmetrikus, azaz $K(x, y) = K(y, x)$ akkor $\varphi_i(x) \equiv \psi_i(x)$, és $\lambda_i = \mu_i$, vagyis a φ_i és ψ_i függvények közönséges értelemben véve sajátfüggvényei a szimmetrikus

magnak. A λ_i^2 számok sajátértékei a következő szimmetrikus magoknak, mint ahogy ezt az előbbi egyenleteknek egymásba való behelyettesítéséből azonnal be lehet látni :

$$\overline{K}(x, y) = \int_a^b K(x, t) K(y, t) dt \text{ és } \underline{K}(x, y) = \int_a^b K(t, x) K(t, y) dt.$$

A Schmidt-féle sajátfüggvények birtokában mind az elsőfajú

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

mind a másodfajú

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x)$$

lineáris integrálegyenleteket meg lehet oldani, és a megoldást a φ_i Schmidt-féle sajátfüggvények szerint (melyek egy ortogonális rendszert alkotnak), haladó sor alakjában lehet megkapni.

Mielőtt tulajdonképpen tárgyunkba kezdenénk, meg kell említenünk még, az ú. n. alternatíva-tételt. Egy inhomogén lineáris másodfajú integrálegyenletnek :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x),$$

($f(x) \equiv 0$) mindig van egy, és csakis egy megoldása, ha λ nem sajátérték. Ha történetesen λ éppen sajátérték, akkor ennek az egyenletnek akkor, és csak akkor van megoldása, ha $f(x)$ ortogonális a $\kappa(x, y) = K(y, x)$ magnak a λ sajátértékéhez tartozó összes sajátfüggvényére. Ezesetben az egyenletnek nem egy, hanem végtelen sok megoldása van, és az általános megoldást úgy kapjuk, hogy egy tetszőleges megoldáshoz hozzáadjuk a $K(x, y)$ mag λ -hoz tartozó sajátfüggvényeinek tetszőleges lineáris kombinációját.

A következőkben az integrálegyenleteknek ahhoz a fajtájához szeretnék néhány megjegyzést fűzni, melyek magja — legfeljebb az $x = y$ egyenes kivételével — eleget tesz a következő relációnak :

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = \sum_{i=1}^N a_i(x) \cdot b_i(y). \tag{2}$$

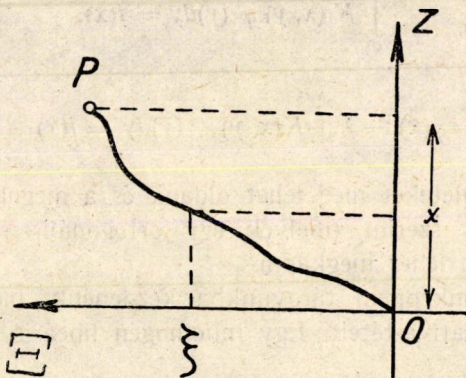
Az a_i és b_i függvények lehetnek olyanok, melyek közvetlenül K -val vannak kifejezve, tehát például ilyenszerű összefüggés lehetséges :

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = K(x, 0) K(y, 1) - K(x, 1) K(y, 0).$$

Először szeretném az ilyen integrálegyenlet gyakorlati fontosságát néhány példával illusztrálni.

A legrégebb integrálegyenlet, melynek problémáját egy mechanikai kérdés vetette fel, szintén ebbe az osztályba tartozik. Ez az ú. n. Ábel-féle integrálegyenlet. Ha függőleges síkban fekvő pályán egy anyagi test elhanyagolható kicsiny súrlódással mozog a nehézségi erő hatása alatt, akkor felmerül az a kérdés, milyen lesz a mozgás időtartama, míg a test a pálya elejétől a végéig ér.

Hogy erre a kérdésre válaszolhassunk, válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy a pálya végpontja az origóba essék, és a Z tengely függőlegesen



1. ábra.

lefelé legyen irányítva a rajzon látható módon, s legyen a t idő alatt befutott út hossza.

A kezdeti P pont ordinátája legyen x , akkor az energia tétele szerint

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x-z)}.$$

Ebből tehát az esési idő

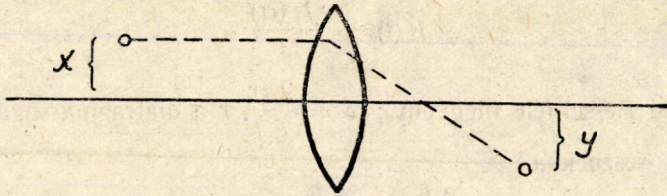
$$t(x) = \int_x^0 \frac{ds}{\sqrt{2g(x-z)}} = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{s'(z) dz}{\sqrt{x-z}}.$$

Ha a kérdést fordítva tesszük fel: előre adva van a $t = t(x)$ függvény és azt kérdezzük, melyek azok a pályák, amelyek befutásához $t(x)$ idő szükséges, akkor az előbbi összefüggésből $s = s(t)$ számítandó ki. Ez s' -re nézve egy integrálegyenlet. (Ha $t(x) = c$, akkor az izochronok meghatározásának problémája előtt állunk, mely abban áll, hogy meg kell határozni azokat a pályákat, melyeknek befutási ideje a magasságtól független.) Ennek az integrálegyenletnek a magja az (2)-típusú magok közé tartozik, amennyiben eleget tesz a

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial z} = 0 \quad (2')$$

összefüggésnek.

Egy másik példát az optika területéről mutatunk be. A geometriai optika tanítása szerint, valamely lencserendszer által adott leképezés a képet geometriai értelemben a tárgyhoz hasonlóan képezi le. Eszerint ha a tárgy egy pont, akkor a kép is pont. A valóságban egy pontnak nem pont, hanem fényes korong felel meg, melynek fényereje ott a legnagyobb, ahova a geometriai optika szerint a tárgypont képe tartozik. A tárgynak az optikai tengelytől való távolsága legyen x , a képe y , akkor az egységnyi fényintenzitású pontszerű tárgy képének fényintenzitása nyilván y függvénye, de hogy ez milyen függvénye y -nak, az nyilván x -től is függ. A kép fényessége, tehát $K(x, y)$ két-



2. ábra.

változós függvény. A valóságban természetesen a tárgy sem pont, hanem véges kiterjedésű világító test, melynek fényességeloszlása legyen $f(x)$. A tárgy egy adott x pontjából kiinduló fénysugár a képben olyan korongot hoz létre, melynek fényességeloszlása $K(x, y)$ $f(x)$. Világos, hogy a képben ezek a hatások szuperponálódnak, ha x befutja az egész tárgy felületét, tehát a fényességeloszlás a képben ez lesz :

$$g(y) = \int_{-a}^{+a} K(x, y) f(x) dx,$$

ha a tárgy az optikai tengelyre nézve szimmetrikus elhelyezkedésű. Optikai szempontból a legérdekesebb ez a kérdés: mikor hasonló a kép és a tárgy, nemcsak geometriai, hanem fényességeloszlás tekintetében is? Vagyis milyen tárgyfényességeloszlásnál lesz a kép a tárgéhoz hasonló fényességeloszlású? Keresnünk kell tehát azt az $f(x)$ tárgyfényességeloszlást, mely mellett az előbbi $g(y) = c f(y)$.

Végeredményben az

$$f(y) = \frac{1}{c} \int_{-a}^{+a} K(x, y) f(x) dx$$

sajátfüggvény- és sajátérték-probléma megoldásáról van szó. *Mangyelstam* szovjet fizikus kutatásai szerint a K mag kizárólag x - y -től függ, az előbbi

probléma tehát

$$f(y) = \frac{1}{c} \int_{-a}^{+a} K(x-y) f(x) dx$$

sajátérték-probléma megoldását jelenti. Centrálisan megvilágított tárgynál és négyzet alakú diafragma esetében

$$K(t) = \frac{\sin ct}{t}, \text{ ahol } c = \frac{2\pi d}{l \cdot f}$$

($2d$ a négyzet oldala, l a fény hullámhossza, f a lencserendszer fókusz távolsága). Köralakú diafragma esetén pedig

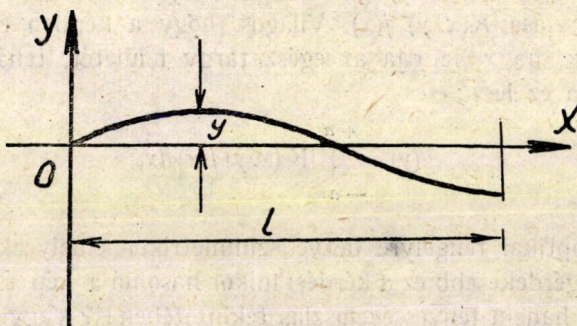
$$K(t) = \frac{J_1(ct)}{t}$$

(J_1 az elsőfajú Bessel-féle függvény; $c = \frac{2\pi r}{l \cdot f}$, r a diafragma sugara). Ezek a magok eleget tesznek a

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = 0$$

alakú differenciálegyenletnek.

További példa gyanánt egy a statikából vett esetet említünk meg. Egy l hosszúságú tartóra tengelyirányú erő hat, melynek hatása alatt a tartó



3. ábra.

deformálódik. A választott koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a tartó egyik végpontja; y jelölje a deformált tartó tengelyének az eredeti helyzettől való távolságát. Legyen $M(x, t)$ a t abszcisszájú pontban ható egységnyi erőnek az x pontban előidézett hajlítási nyomatéka, $I(x)$ a tehetetlenségi nyomaték és $m(x)$ a hajlítási nyomaték. Akkor, mint az Trefftz kutatásaiból ismert,

$$y(t) = \int_0^l M(x, t) \frac{m(x)}{EI(x)} dx,$$

ahol E a rugalmassági modulus. Ez $\frac{m}{EI}$ -re nézve elsőrendű integrálegyenlet.

Ha a tartónak támasza van, vagy be van fogva, akkor

$$M(x, t) = \begin{cases} M_0 - Q_0 x, & \text{ha } x \leq t, \\ M_0 - Q_0 x - (x-t), & \text{ha } x > t. \end{cases}$$

Itt M_0, Q_0 állandók (a támasztóerő és a befogóerőtől függenek). Ez a mag ismét (2') alakú relációnak tesz eleget, amennyiben az $x = y$ pontoktól eltekintve érvényes rá ez az összefüggés:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial t} = -Q_0.$$

Végezetül megemlítjük, hogy ha adva van egy

$$L[u] + \lambda u = 0$$

alakú differenciálegyenlet, ahol $L[u]$ önadjungált másodrendű differenciál-kifejezés, akkor ennek megoldását homogén határfeltételek mellett vissza lehet vinni egy integrálegyenlet sajátérték-problémájának megoldására. Ennek az integrálegyenletnek a magja tudvalevően az ezen problémához tartozó ún. Green-féle függvény. Az említett differenciálegyenlet tehát ekvivalens egy ilyen alakú integrálegyenlettel:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, y) u(y) dy.$$

A helyzet mármost az, hogy számos probléma Green-féle függvénye kielégíti a (2') alatti relációt; ha pl. $L[u] = u''$ és a határfeltételek $u(0) = u(1) = 0$, akkor

$$G(x, y) = \frac{1}{2} [x + y - 2xy + |x - y|].$$

Ennél, ha $x \neq y$, teljesül a

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 1 - x - y$$

feltétel.

Ugyanennél az egyenletnél, de $u(0) = u'(1) = 0$ határfeltételek mellett

$$G(x, y) = \frac{1}{2} [x + y - |x - y|].$$

Itt ismét, ha $x \neq y$,

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 1.$$

Vagy $u(0) = -u(1)$ és $u'(0) = -u'(1)$ határfeltételek mellett

$$G(x, y) = -\frac{1}{2} |x - y| + \frac{1}{4}.$$

Ez pedig a

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

feltételt elégíti ki.

Még további példákat sorolhatnánk fel olyan magokra, melyek az említett típusba tartoznak, de úgy gondoljuk, hogy ezek a példák is elegendők az integrálegyenletek ezen osztálya gyakorlati szempontból való jelentőségének illusztrálására.

A következőkben az integrálegyenletek ezen osztályának elméletéhez kívánunk néhány megjegyzést fűzni.

Tegyük fel tehát, hogy a K mag eleget tesz az (2) alatti egyenletnek, és hogy van λ sajátértéke, melyhez φ_k sajátfüggvények tartoznak ($k = 1, 2, \dots, r$), akkor

$$\varphi_k(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_k(y) dy.$$

Ebből parciális integrálással a (2) alatti kifejezést figyelembevéve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = \lambda \int_0^1 \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \varphi_k(y) dy &= \lambda \sum_{i=1}^N \beta_{ki} a_i(x) - \lambda K(x, 1) \varphi_k(1) + \\ &+ \lambda K(x, 0) \varphi_k(0) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_k'(y) dy. \end{aligned}$$

Itt β_{ki} állandók:

$$\beta_{ki} = \int_0^1 b_i(y) \varphi_k(y) dy.$$

Ha

$$F_k(x) = \lambda \sum_{i=1}^N \beta_{ki} a_i(x) - \lambda K(x, 1) \varphi_k(1) + \lambda K(x, 0) \varphi_k(0),$$

akkor

$$\varphi_k'(x) = F_k(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_k'(y) dy. \quad (3)$$

A sajátfüggvény deriváltjára nézve egy másodfajú, inhomogén Fredholm-féle integrálegyenletet kaptunk, melynek λ paramétere sajátérték, az említett alternatíva tétel szerint tehát megoldása csakis akkor van, ha

$$\int_0^1 \psi_l(x) F_k(x) dx = \lambda \sum_{i=0}^N a_{li} \beta_{ki} + \psi_l(0) \varphi_k(0) - \psi_l(1) \varphi_k(1) = 0, \quad (3')$$

ahol $\psi_l(x)$ jelenti a $K(y, x)$ mag λ -hoz tartozó egyik sajátfüggvényét és

$\alpha_{ii} = \int_0^1 \psi_i a_i dx$. Ez azt jelenti, hogy a sajátfüggvényeknek ilyen alakú határ-feltételeknek kell eleget tenniök. Megjegyezzük, hogy a (3) alatti inhomogén egyenletnek bármely λ mellett van megoldása, mert ha λ nem sajátérték, akkor nyilván van megoldása, ha pedig λ sajátérték, úgy ezt az egyenletet a saját-függvény differenciálhányadosa elégíti ki.

A (3) integrálegyenlet egy tetszőleges megoldása legyen $\Phi_k(x)$, akkor az egyenlet összes megoldásait úgy kapjuk, hogy a λ -hoz tartozó összes saját-függvénynek lineáris kombinációját hozzáadjuk. Ha λ -hoz r sajátfüggvény tartozik, akkor ezek szerint

$$\varphi_k'(x) = \Phi_k(x) + \sum_{l=1}^r \kappa_{kl} \varphi_l(x) \quad (k=1, 2, \dots, r), \quad (4)$$

ahol κ_{kl} állandók. Az (2) tulajdonsággal bíró mag sajátfüggvényei tehát egy állandó együtthatós, elsőrendű differenciálegyenletrendszer elégitenek ki. Elegendő számú differenciálhatóságot feltételezve nyilvánvaló, hogy a (4) alatti egyenletrendszer ekvivalens egy r -edrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlettel:

$$\varphi_k^{(r)} + p_1^{(k)} \varphi_k^{(r-1)} + \dots + p_r^{(k)} \varphi_k + A_k L_k(x) = 0,$$

ahol $p_i^{(k)}$ és A_k állandók.

A φ_k -k meghatározásához quadratúrára nincs is mindig szükség, a (3) integrálegyenletből ugyanis

$$\varphi_k''(x) = F_k'(x) + \lambda \int_0^1 \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \varphi_k'(y) dy.$$

Az előbbi eljárást megismételve kapjuk azt, hogy

$$\begin{aligned} \varphi_k''(x) = F_k'(x) + \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x) \beta_{ki}^* - \lambda K(x, 1) \varphi_k'(1) + \lambda K(x, 0) \varphi_k'(0) + \\ + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_k''(y) dy, \end{aligned}$$

vagy egyszerűbben

$$\varphi_k''(x) = \Gamma_k(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_k''(y) dy.$$

Ez most φ_k'' -re olyan inhomogén integrálegyenlet, melynek λ paramétere saját-érték. Ha ennek egyik megoldása $\Psi_k(x)$, akkor az összes megoldás megint úgy adódik, hogy $\Psi_k(x)$ -hez hozzáadjuk a λ -hoz tartozó sajátfüggvények lineáris kombinációját. De akkor

$$\varphi_k''(x) = \Psi_k(x) + \sum_{l=1}^r V_{kl} \varphi_l(x) \quad (k = 1, 2, \dots, l). \quad (5)$$

(4) egyenletből

$$\varphi_k'' = \Phi_k' + \sum_{l=1}^r \nu_{kl} \varphi_l' (x) = \Phi_k' (x) + \sum_{l=1}^r \kappa_{kl} [\Phi_l + \sum_{m=1}^r \kappa_{lm} \varphi_m (x)].$$

Vessük ezt össze (5)-tel és azt kapjuk, hogy

$$f_k (x) = \sum a_{kl} \varphi_l (x) = \Phi_k' (x) + \sum_1^r \kappa_{kl} \Phi_l (x) - \psi_k (x). \quad (6)$$

Mivel $\sum a_{kl} \varphi_l (x)$ a λ sajátértékhez tartozó sajátfüggvények lineáris kombinációja, ezért $f(x)$ is sajátfüggvény. Ennek következtében (6) megadja az egyik sajátfüggvény explicit alakját. A Φ_k és ψ_k függvényekben, valamint κ_{kl} -ben ismeretlen állandók szerepelnek. Az állandókat úgy kell meghatározni, hogy (6)-ot a homogén integrálegyenletbe behelyettesítjük és akkor az ismeretlen együtthatók módszerével ezen állandókra nézve egy lineáris egyenletrendszert kapunk.

Megemlítjük még, hogy igen egyszerű számítással konstatalhatjuk, hogy a Schmidt-féle \overline{K} és \underline{K} magok szintén eleget tesznek egy (2) típusú relációnak; ez azt jelenti, hogy ezzel a módszerrel meg lehet határozni a tekintetbe vett magok Schmidt-féle sajátfüggvényeit is.

Eddigi megállapításainkat arra szeretnénk felhasználni, hogy megállapítsuk két fontos speciális mag sajátfüggvényei néhány tulajdonságát.

Az első az, amikor K szimmetrikus és olyan, hogy $\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = 0$.

Ez esetben $\kappa(x, y) = K(x, y)$ és $\varphi_k(x) \equiv \varphi_k(x)$, ekkor (3') így módosul:

$$\varphi(0)^2 = \varphi_k(1)^2.$$

Tehát vagy $\varphi_k(0) = \varphi_k(1)$, vagy pedig $\varphi_k(0) = -\varphi_k(1)$.

Ez azt jelenti, hogy a sajátfüggvényeknek két rendszere van: az egyiknél $\varphi_k(0) = \varphi_k(1)$, a másiknál $\varphi_k(0) = -\varphi_k(1)$ érvényes. Érdekes tényként megemlítjük, hogy minden ilyen tulajdonságú magnak mindkét fajtából van sajátfüggvénye. Az az eset nem fordulhat elő, hogy csak az egyik, vagy csak a másik fajta sajátfüggvénnyel rendelkezzen a mag.

Ha ugyanis mindegyik sajátfüggvény pl. olyan lenne, hogy

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(1),$$

akkor

$$\varphi_k'(x) = \lambda \varphi_k(1) [K(x, 0) - K(x, 1)] + \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi_k'(y) dy \quad (7)$$

is érvényes volna. Szorozzuk ezt végig valamely más λ^* sajátértékhez tartozó sajátfüggvénnyel és integráljunk:

$$\int_0^1 \varphi^* \varphi dx = \frac{\lambda}{\lambda^*} \varphi(1) [\varphi^*(0) - \varphi^*(1)] - \frac{\lambda}{\lambda^*} \int_0^1 \varphi^* \varphi dy.$$

De a feltevés szerint $\varphi^*(0) = \varphi^*(1)$ is fennáll, amiből

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda^*}\right) \int_0^1 \varphi'(x) \varphi^*(x) dx = 0.$$

Mivel $\lambda^* \neq \lambda$, ezért

$$\int_0^1 \varphi'(x) \varphi^*(x) dx = 0.$$

Mivel φ^* akármilyen sajátfüggvény, ezért φ' ortogonális K összes sajátfüggvényeire, de nyilván ortogonális a λ -hoz tartozó többi sajátfüggvényére is, ami (3)-ból következik. Ortogonális tehát K -ra is:

$$\int_0^1 K(x, y) \varphi'(y) dy = 0.$$

De akkor (7) szerint

$$\varphi'(x) = \lambda \varphi(0) [K(x, 0) - K(x, 1)].$$

Ez viszont lehetetlen, mert akkor az összes sajátfüggvény

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \varphi_k(0) \eta(x) + b_k \quad \left(\eta(x) = \int_0^1 [K(x, 0) - K(x, 1)] dx \right)$$

alakú lenne. De a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények egymásra ortogonálisak, és ebből a tényből egyszerű számítással következik, hogy a sajátfüggvények nem lennének lineárisan függetlenek, ami pedig ellentmond az ortogonalitásnak.

A másik speciális eset, amit meg szeretnénk említeni, az, amikor $K(x, y) = K(x-y)$ alakú periodikus függvény egységnyi periódussal: $K(t+1) = K(t)$. Az ilyen magokkal először *Egerváry Jenő* foglalkozott ismert doktori értekezésében. Eredményei a mostaniaknál általánosabbak, amennyiben a magról nem tételeznek fel differenciálhatóságot. Jelen esetben tehát a vizsgált integrálegyenlet

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x-y) \varphi(y) dy.$$

Ez esetben

$$\varphi(0) = \lambda \int_0^1 K(-y) \varphi(y) dy \quad \text{és}$$

$$\varphi(1) = \lambda \int_0^1 K(1-y) \varphi(y) dy = \lambda \int_0^1 K(-y) \varphi(y) dy = \varphi(0). \quad (8)$$

Mivel $K(x-1) = K(x-1+1) = K(x)$, ezért

$$\varphi'(x) = \lambda \int_0^1 K(x-y) \varphi'(y) dy.$$

Ilyen magoknál tehát φ' is sajátfüggvény, azaz

$$\varphi'_k(x) = \sum_{i=1}^r a_{ki} \varphi_i(x).$$

Ismeretes, hogy ennek a differenciálegyenletnek a megoldása ilyen alakú:

$$e^{\mu_k x}.$$

Ezt behelyettesítve az integrálegyenletbe, és figyelembevéve a (8) alatt megállapított határfeltételeket kapjuk, hogy a sajátfüggvények

$$\varphi_k(x) = e^{-2\pi i x}$$

alakúak.

Ebből viszont már következik, hogy az egyenlet sajátértékei

$$\lambda_k = 1 / \int_0^1 K(t) e^{-2\pi i k t} dt.$$

Hasonlóképpen kezelhetők azok a magok is, melyekre a $K(x) = p K(x+1)$ ($p \neq 1$) összefüggés érvényes.

*Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

FÜGGVÉNYEGYENLETEK AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKÁBAN

ACZÉL JÁNOS

Előadta az 1950. november 29-én tartott osztályülésein

1. A függvényegyenleteket sokan szeretik a matematika legkevésbé alkalmazható, legabsztraktabb, »játék«-nak minősített fejezetei közé sorolni. Pedig akár történeti kifejlődését, akár jelenlegi állását vizsgáljuk a problémának, ennek ellenkezőjét tapasztaljuk.

A függvényegyenletek elmélete megindulását egy alkalmazott matematikai vizsgálatnak köszönheti, amely az erőparallelogramma-szabály megindokolását célozta. Ma már az alkalmazott matematikának szinte minden ágában felmerül függvényegyenletek megoldásának szükségessége.

Tekintve, hogy általában ismert azoknak a függvényegyenleteknek alkalmazott matematikai szerepe, melyekben egyváltozós függvény és egy független változó tetszőszerinti értéke szerepel — amilyenek például a differenciaegyenletek — másrészt viszont a többváltozós függvényekre vonatkozó függvényegyenletek elmélete és azok gyakorlati alkalmazása (pl. a nomográfiában) még gyermekcipőben jár, itt az egyváltozós függvényt és több tetszőszerinti értékűnek választható független változót tartalmazó, ú. n. Cauchy-féle függvényegyenletek néhány alkalmazott matematikai előfordulását szeretném bemutatni.

Igen egyoldalú tárgyalásmód volna azonban, ha úgy állítanók be a dolgot, mintha az alkalmazások során felvetődő függvényegyenleteket mindig »az absztrakt matematika oldaná meg«, és az így kapott megoldást lehetne azután »alkalmazni«. A valóságban ez a folyamat gyakran úgy zajlott le — itt is meg fogom próbálni ezt néhány így alakított példán érzékeltetni —, hogy legalább a függvényegyenletek alaptípusainak megoldási módszerét is a függvényegyenletet felvető alkalmazott matematikai probléma sugalmazta.

2. Első példánk mindjárt ilyen természetű lesz: a kamatoskamat-képlet indokolását tartalmazza folytonos kamatozásnál. Az egyszerűség kedvéért a következőkben mindig a betétkönyvre betett pénz kamatozásával fogom a gondolatmenetet illusztrálni. Először is azt nézzük meg, hogyan kell függnie a valamely fix kamatozási idő alatt felnövekedett betétnek az eredetileg betett összegtől. Nyilvánvaló követelmény, hogy a külön betett x és y nagyságú betétek felnövekedett értékeinek összege megegyezzék az együtt betett $x + y$ betét felnövekedett összegével, mert hisz ellenkező esetben betétek szétválasztásával vagy egyesítésével növelhetnék meg a betevők a betétjük szaporodását,

a kamatozást biztosító állam rovására. Ha tehát a betett x összeg felnövekedett értékét $f(x)$ -el jelöljük, akkor követelményünk így fejezhető ki: $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Ez az ú. n. Cauchy-féle függvényegyenlet jellemzi tehát a felnövekedett betét függését a betett összegtől és a gondolatmenet folytatása mindjárt a függvényegyenlet megoldására is rávezet.

Mindenekelőtt követelményünk folyománya, hogy kettőnél több alapbetét egyesítése is a felnövekedett összegek összegeződésével jár: $f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n)$. Egyenlő betétek esetén pedig a betét n -szereződése a felnövekedett összeget is n -szerezi: $f(nx) = nf(x)$. Tehát ha 1 Ft betét $f(1) = c$ Ft-ra nő fel, úgy n Ft $f(n) = nf(1) = cn$ -Ft-ra nő. Ha a filléreket is figyelembe vesszük, n fillér kamatozása így alakul: Ha a betett n fillér összeget megszázsoroznánk, $100 n$ fillér $= 100 n \frac{\text{Ft}}{100} = n$ Ft lenne a betét és ez felnövekedne

$$f(n) = f\left(100 \frac{n}{100}\right) = 100 f\left(\frac{n}{100}\right)$$

összegre és így $\frac{n}{100}$ Ft felnövekedik

$$f\left(\frac{n}{100}\right) = \frac{f(n)}{100} = \frac{nf(1)}{100} = c \frac{n}{100}$$

Ft-ra. Tehát akár egész, akár (tizedes) tört a betett x összeg, a felnövekedett összeg $f(x) = cx$, egyenesen arányos a betéttel; ezzel az $f(x+y) = f(x) + f(y)$ Cauchy-féle függvényegyenlet általános megoldását is megtaláltuk. [A matematikailag teljes megoldáshoz tudvalevően szükséges még $f\left(\frac{n}{v}\right) = c \frac{n}{v}$ bizonyítása $v \neq 100$ -ra, ami ugyanígy megy; továbbá $f(x)$ folytonosságát, vagy pl. monotonitását, mérhetőségét feltételezve, folytonossági megfontolással az $f(x) = cx$ képlet kiterjesztése pozitív irracionális x -ekre, végül pedig a kiterjesztés $x = 0$ -ra és negatív x -re is szükséges. Ez utóbbiakat az $f(x+y) = f(x) + f(y)$ egyenletből egyrészt $x = 0$ helyettesítéssel nyerjük, $f(0) = 0$; másrészt $y = -x$ helyettesítéssel kapjuk: $(0) = f(x) + f(-x)$, $f(-x) = -f(x) = -cx = c(-x)$.]

Mármost vizsgáljuk meg, hogyan függ a felnövekedett összeg a betét kamatozási idejétől. Feltevésünk az, hogy — legalábbis nem túl hosszú időn belül, pl. kamatlábváltozásig — a kamatozás homogén, vagyis, ha bármikor teszünk be egy összeget a bankba, az pl. két év alatt mindig ugyanannyira növekszik fel.

Ha 1 Ft t idő alatt $g(t)$ Ft-ra nő, akkor x Ft az előbbieket szerint $xg(t)$ Ft-ra nő. Hogy a betétnek közben való kivételével és azonnali visszatételével sem a betevő, sem az állam ne károsodjék, kell, hogy az 1 Ft-ból t idő múlva $g(t)$ Ft-ra felnövekedett összeget további u időre benthagyva a bankban, a

teljes felnövekedett összeg, azaz $g(t)g(u)$ ugyanakkora legyen, mintha eredetileg mindjárt $t + u$ időre tettük volna be 1 Ft-ot, amikor is $g(t + u)$ Ft-ra növekedett volna, tehát $g(t + u) = g(t)g(u)$. Ezt a függvényegyenletet is, — mely különben a $g(t) = a^{t(u)}$ helyettesítéssel visszavezethető a fentebb megoldott Cauchy-féle függvényegyenletre, — megoldhatjuk a fenti gondolatmenet folytatásával.

Itt is világos, hogy n megszakítás sem változtat a felnövekedett összeg értékén és így $g(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = g(t_1)g(t_2) \dots g(t_n)$, vagy egyenlő időközökben történő megszakításoknál $g(nt) = g(t)^n$. Tehát ha 1 Ft 1 év alatt $g(1) = q$ Ft-ra, akkor n év alatt $g(n) = q^n$ Ft-ra növekszik. Ha most az év tizenkettedrészét (hónap) vagy pl. háromszázhatvanötödét (nap) vagy általában v -ed részét is figyelembe akarjuk venni, így érvelünk: Ha $\frac{n}{v}$ év helyett n évig

hagynánk kamatozni, az 1 Ft betét $g(n) = g\left(v \frac{n}{v}\right) = g\left(\frac{n}{v}\right)^v$ Ft-ra növekedne fel, tehát az $\frac{n}{v}$ év alatt felnövekedett összeg:

$$g\left(\frac{n}{v}\right) = g(n)^{\frac{1}{v}} = \left[g(1)^n\right]^{\frac{1}{v}} = q^{\frac{n}{v}}.$$

Tehát akár egész, akár tört érték is t , $g(t) = q^t$, x Ft betét pedig eszerint, mint már tudjuk, xq^t Ft-ra növekszik. Annak kiszámítására, hogy az 1 Ft-ra felnövekedett összeg mekkora t év előtt betett betétből keletkezett, szükségünk van $g(t)$ értékeire negatív t esetére is. A t idővel ezelőtt betett, 1 Ft-ra felnőtt betét eredeti összegét $g(-t)$ -vel jelölve, az t idő alatt $g(-t)q^t = 1$ Ft-ra nő, tehát $g(-t) = q^{-t}$ és így $g(t) = q^t$ negatív t értékekre is érvényes (az, hogy $t = 0$ -ra is érvényes — triviális). Ezzel megkaptuk a $g(t + u) = g(t)g(u)$ függvényegyenlet általános megoldását: $g(t) = q^t$. (A matematikailag teljes megoldáshoz itt is szükséges még az a folytonossági megfontolás is, hogy $g(t) = q^t$ irracionális t -kre is érvényes marad).

Így kaphatjuk meg a t évig kamatozó x Ft betét kamatoskamat képletét: xq^t . Úgy is mondhatjuk, hogy bebizonyítottuk, hogy az $F(x + y, t + u) = F(x, t)F(y, t) + F(y, t)F(x, t)$, illetve az $F(x + y, t + u) = F[F(x, t) + F(y, t), u]$ kétváltozós függvényegyenlet általános megoldása $F(x, t) = xq^t$.

A fenti, a politikai számtan előadásánál oktatási célokra is kitűnően felhasználható metodológiai gondolatmenetet Kalmár László volt szíves velem közölni.

Ugyanezek a függvényegyenletek és ugyanez a gondolatmenet vezet a fizikában és kémiában pl. a rádióaktív vagy kémiai bomlásnál, lehűlésnél, felmelegedésnél, abszorpciónál stb., a jelenség leírását szolgáló képlet nyeréséhez.

3. Most a Cauchy-típusú függvényegyenleteknek már említett, történeti jelentőségű mechanikai alkalmazására térek rá: a vektorok (erők) összeadási parallelogramma-szabályának megindolására. A következőkben lényegében *Poisson* gondolatmenetét ismertetem ⁽¹⁾. Az erőparallelogramma-szabály a következő mechanikailag kézenfekvő alapfeltevésekből vezethető le:

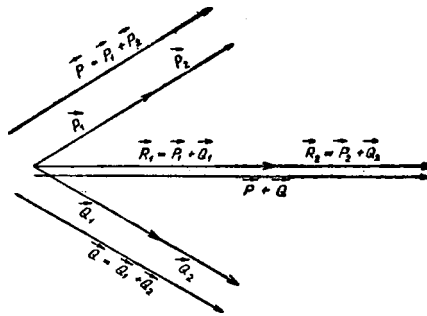
I. A vektorösszeadás kommutatív és asszociatív művelet.

II. Az egyirányú, vagy ellenkező irányú vektorok összeadása közönséges algebrai összeadással történik.

III. Egyenlő nagyságú vektorok összege síkjukban, szögfelezőjükön fekszik.

Itt a parallelogramma-szabályt csak egyenlő nagyságú (különböző irányú) erőkbe bizonyítjuk be, mert ez a gondolatmenet az, amiben a függvényegyenletek alkalmazására van szükség. Ebből két tetszőleges nagyságú erő eredőjére a parallelogramma-szabály már néhány egyszerű geometriai megfontolással adódik.

Először azt nézzük meg, hogy az eredő vektor hossza hogyan függ az eredeti vektorok hosszától. A két egymással fix szöget bezáró egyenlő hosszú \vec{P}_1 és \vec{Q}_1 vektor hosszát $|\vec{P}_1| = |\vec{Q}_1| = x$ -szel jelöljük, tehát az eredő $|\vec{P}_1 + \vec{Q}_1| = f(x)$ hosszát keressük.

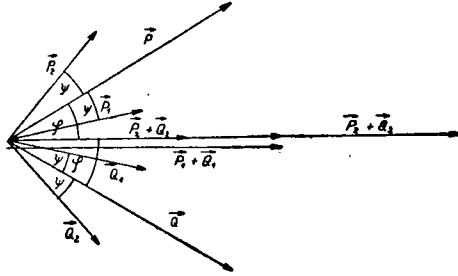


1. ábra.

Két adott szöget bezáró $x + y$ hosszúságú vektor összegét I. és II. érte-
mében így kapjuk:

$$\begin{aligned}
 |\vec{P}_1| &= |\vec{Q}_1| = x, & |\vec{P}_2| &= |\vec{Q}_2| = y, & |\vec{P}| &= |\vec{Q}| = x + y, \\
 \vec{P}_1 + \vec{P}_2 &= \vec{P}, & \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 &= \vec{Q}, \\
 \vec{P}_1 + \vec{Q}_1 &= \vec{R}_1, & \vec{P}_2 + \vec{Q}_2 &= \vec{R}_2, \\
 |\vec{P}_1 + \vec{Q}_1| &= f(x), & |\vec{P}_2 + \vec{Q}_2| &= f(y), & |\vec{P} + \vec{Q}| &= f(x + y) \\
 f(x + y) &= |\vec{P} + \vec{Q}| = |(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) + (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)| = \\
 &= |(\vec{P}_1 + \vec{Q}_1) + (\vec{P}_2 + \vec{Q}_2)| = |\vec{R}_1 + \vec{R}_2| = f(x) + f(y).
 \end{aligned}$$

De ez éppen a Cauchy-féle alap-függvényegyelet, melynek megoldása, mint tudjuk, $f(x) = c x$; itt c az illető fix szöget bezáró egységvektorok eredőjének hossza, $c = f(1)$. Tehát az eredő hossza arányos a kiinduló egyenlő erők hosszával.



2. ábra.

Ha már most két egységvektor \vec{P} és \vec{Q} ($|\vec{P}| = |\vec{Q}| = 1$), egymással 2φ (eredőjükkel tehát φ) szöget zár be, jelöljük eredőjük hosszát $|\vec{P} + \vec{Q}| = 2g(\varphi)$ v.l., így az x hosszúságú vektorpár eredőjének hossza $2xg(\varphi)$. Nézzük hogyan függ ez φ -től. \vec{P} -hez is, \vec{Q} -hoz is vegyünk fel két-két ψ szög alatt hajló \vec{P}_1, \vec{P}_2 , ill. \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 vektort, melyeknek összege \vec{P} , ill. \vec{Q} .

Tehát $2|\vec{P}_1|g(\psi) = 1, |\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = |\vec{Q}_1| = |\vec{Q}_2| = \frac{1}{2g(\psi)}$

Mivel $|\vec{P} + \vec{Q}| = |(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) + (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)| = |(\vec{P}_1 + \vec{Q}_1) + (\vec{P}_2 + \vec{Q}_2)|$

tehát $2g(\varphi) = 2|\vec{P}_1|g(\varphi - \psi) + 2|\vec{P}_2|g(\varphi + \psi) =$
 $= \frac{2}{2g(\psi)}g(\varphi - \psi) + \frac{2}{2g(\psi)}g(\varphi + \psi),$

vagyis $g(\varphi + \psi) + g(\varphi - \psi) = 2g(\varphi)g(\psi).$

Ezt a függvényegyenletet, melynek megoldása direkt is elvégezhető (megint csak a mechanikai gondolatmenet folytatásával), vissza is lehet vezetni a Cauchy-féle alapfüggvényegyenletre, illetve arra, amire tulajdonképpen a Cauchy-féle egyenletet is visszavezettük: az $f(n\varphi) = nf(\varphi)$ egyenletre ahol n végigfut a pozitív egész számokon. Vezessük ugyanis be a $g(\varphi) = \cos f(\varphi)$ összefüggéssel definált új $f(\varphi)$ függvényt (ezt csak akkor szabad megtennünk, ha $|g(\varphi)| < 1$, amit azonban a mechanikai feladat természete biztosít; különben ellenkező esetben is elvégezhető a visszavezetés a $g(\varphi) = \operatorname{ch} f(\varphi)$ helyettesítéssel). Így kapjuk a

$$\begin{aligned} \cos f(\varphi + \psi) + \cos f(\varphi - \psi) &= 2 \cos f(\varphi) \cos f(\psi) = \\ &= \cos [f(\varphi) + f(\psi)] + \cos [f(\varphi) - f(\psi)] \end{aligned}$$

egyenletet, amiből

$$\cos f(\varphi + \psi) = \cos [f(\varphi) + f(\psi)] + \cos [f(\varphi) - f(\psi)] - \cos f(\varphi - \psi)$$

Másrészt az eredeti egyenletbe $\psi = 0$ -t téve: $2g(\varphi) = 2g(\varphi)g(0)$, innen kapjuk, hogy $g(0) = 1$ [másrészt $\varphi = 0$ -t téve $g(\psi) + g(-\psi) = 2g(\psi)g(0)$, tehát $g(-\psi) = g(\psi)$]. Így $\cos f(0) = 1$, azaz $\cos f(0, \psi) = 1 = \cos 0 \cdot f(\psi)$. Érvényes $\cos f(1, \psi) = \cos f(\psi) = \cos 1 \cdot f(\psi)$ is. Állítom, hogy minden nemnegatív n -re $\cos f(n, \psi) = \cos n f(\psi)$.

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk: bebizonyítjuk, hogy ha $(n-1)$ -re és n -re igaz, érvényes $(n+1)$ -re is. Függvényegyenletünkbe $\varphi = n\psi$ -t helyettesítve $\cos f[(n+1)\psi] = \cos f(n\psi + \psi) = \cos [f(n\psi) + f(\psi)] + \cos [f(n\psi) - f(\psi)] - \cos f(n\psi - \psi) = \cos n f(\psi) \cos f(\psi) - \cos f[(n-1)\psi] = \cos(n+1)f(\psi) + \cos(n-1)f(\psi) - \cos(n-1)f(\psi) = \cos(n+1)f(\psi)$.

Tehát valóban $\cos f(n, \psi) = \cos n f(\psi)$ minden nem-negatív n -re, ebből $f(n, \psi) = n f(\psi)$ (tulajdonképpen ebből csak $f(n, \psi) = \pm n f(\psi) + 2k\pi$ következik, de a függvényegyenletből könnyen adódik, hogy csak $f(n, \psi) = n f(\psi)$ felel meg az egyenletnek, így a következőkben eltekinthetünk az arc cos függvény többértékűségétől). Mint láttuk, ebből minden pozitív φ -re következik $f(\varphi) = c\varphi$, tehát $g(\varphi) = \cos c\varphi$, és ez negatív φ -kre is igaz, mert

$$g(-\varphi) = g(\varphi) = \cos c\varphi = \cos(-c\varphi) = \cos c(-\varphi)$$

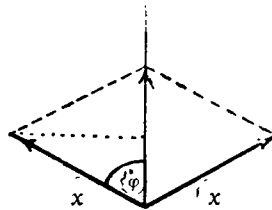
tehát bebizonyítottuk, hogy a

$$g(\varphi + \psi) + g(\varphi - \psi) = 2g(\varphi)g(\psi)$$

függvényegyenlet általános megoldása

$$g(\varphi) = \cos c\varphi \quad (\text{ill. } g(\varphi) = \text{ch } k\varphi).$$

De a II-ből adódó $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (ellentett egyenlő erők eredője 0) összefüggés biztosítja, hogy $c = 1$ (és hogy a ch-megoldás itt mechanikai okokból nem jöhet számításba; egyébként a nem-euklidesi térben számított erőtörvénynél éppen függvényegyenletünk ch-megoldása játszik szerepet.) Tehát az egymás-



3. ábra.

sal 2φ szöget bezáró egységvektorok eredőjének hossza $2\cos\varphi$, és az egyenlő x hosszúságú, 2φ szöget bezáró vektorok eredőjének (mely szögfelezőjükön fekszik) hossza $2x\cos\varphi$, ami éppen a paralelogramma szabályt adja egyenlő hosszú vektorok összeadására. Ebből, mint említettem, egyszerű geometriai megfontolásokkal következik a paralelogramma-szabály teljes általánosságban.

[Azt is mondhatjuk, hogy bebizonyítottuk, hogy a kétváltozás $F(x, \varphi)$ függvényre vonatkozó

$$F(x + y, \varphi + \psi) + F(x + y, \varphi - \psi) = 2 [F(x, \varphi) + F(y, \psi)] F(1, \psi), \text{ ill.}$$

$$F(x + y, \varphi + \psi) + F(x + y, \varphi - \psi) = F[2 F(x, \psi), \varphi] + F[2 F(y, \psi), \varphi]$$

függvényegyenletek általános megoldása

$$F(x, \varphi) = x \cos c\varphi \quad (\text{és } F(x, \varphi) = x \operatorname{ch} c\varphi).$$

Hasonlóképpen a $g(\varphi + \psi) + g(\varphi - \psi) = 2 g(\varphi) \cos \psi$ függvényegyenlet megoldása [az általános megoldás $g(\varphi) = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi$] a skaláris és vektoriális szorzat (tehát a munka és a forgatónyomaték) képzési szabályának axiomatikus megindokolásához segít.

4. Egy másik mechanikai probléma megoldásához *Fenyő Istvánnal* jutottunk el függvényegyenletek segítségével². Azt vizsgáltuk, hogy milyen erőterekben van minden pontrendszernek súlypontja a következő értelemben : Két egységnyi tömegű pont súlypontjáról természetes feltevés, hogy az összekötő egyenesükön fekdjék, továbbá, hogy a súlypontjukban egyesített tömeghez az erőtér által rendelt erő egyenlő legyen a két eredeti tömegponthoz rendelt erő eredőjével, végül, hogy a súlypontban egyesített tömeg által gyakorolt forgatónyomaték egyenlő legyen a két tömegpont által gyakorolt összes forgatónyomatékkal. Ha a két pont helyzetvektorát r -rel és t -vel, a súlypontét s -szel, az r végpontjában fekvő egységnyi tömeghez az erőtér által rendelt erőt $g(r)$ -rel jelöljük, akkor az utóbbi két feltétel így írható :

$$2 g(s) = g(r) + g(t),$$

$$2 g(s) \times s = g(r) \times r + g(t) \times t$$

(a \times jel vektorszorzást jelent).

Itt csak az okoskodás döntő részét ismertetem, ahol a függvényegyenlet megoldása eldöntötte a kérdést : amikor azt az esetet vizsgáltuk, ahol az erők egy síkban fekszenek, és az erőtér csak egy egyenesen fekvő pontokra hat, de a rájuk ható erők iránya nem fekszik ebben az egyenesben.

Ha az egyenesen egy t koordinátát vezetünk be, és a t pontban ható g erőnek az egyenes irányába eső komponensét $\varphi(t)$ -vel, az arra merőleges komponenst $\psi(t)$ -vel jelöljük, azt kapjuk vektoregyenleteinkből, hogy

$$2 \varphi(s) = \varphi(r) + \varphi(t), \tag{1}$$

$$2 \psi(s) = \psi(r) + \psi(t), \tag{2}$$

$$2 \psi(s) s = \psi(r) r + \psi(t) t. \tag{3}$$

Feltételezzük az erőtérrel, hogy komponensei, $\varphi(t)$ és $\psi(t)$, folytonosak és szigorúan növekvők. Akkor (2) és (1)-ből (φ^{-1} a φ függvény inverze) :

$$s = \varphi^{-1} \left[\frac{\varphi(r) + \varphi(t)}{2} \right],$$

$$\varphi \varphi^{-1} \left[\frac{\varphi(r) + \varphi(t)}{2} \right] = \frac{\varphi(r) + \varphi(t)}{2},$$

vagy $\psi(r) = x$, $\psi(t) = y$; $r = \psi^{-1}(x)$, $t = \psi^{-1}(y)$; $\varphi\psi^{-1}(x) = f(x)$ jelöléssel:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Ez az ú. n. Jensen-féle függvényegyenlet, amely a következőképpen vezethető vissza a Cauchy-féle alapegyenletre, amihez alakjában is hasonlít:

Vonjuk ki az egyenlet mindkét oldalából az $f(0) = d$ mennyiséget:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) = \frac{f(x) - f(0) + f(y) - f(0)}{2}.$$

Az $F(x) = f(x) - d$ függvényre $F(0) = 0$, és itt is teljesül, hogy

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{F(x) + F(y)}{2}.$$

$y = 0$ -t téve $F\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{F(x)}{2}$, vagyis

$$\frac{F(x) + F(y)}{2} = F\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{F(x+y)}{2}, \text{ azaz}$$

$$F(x+y) = F(x) + F(y),$$

tehát $F(x)$ kielégíti a Cauchy-féle alapegyenletet. Ennélfogva $F(x) = cx$, $f(x) = cx + d$, és ez valóban ki is elégíti a Jensen-féle $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ egyenletet.

Akkor pedig $\varphi\psi^{-1}(x) = cx + d$ lévén, $\varphi(t) = c\psi(t) + d$.

Másrészt (2)-ből és (3)-ból

$$\frac{\psi(r) + \psi(t)}{2} = \psi\left[\frac{\psi(r)r + \psi(t)t}{\psi(r) + \psi(t)}\right].$$

Ezt a függvényegyenletet visszavezethetjük a Jensen-féle. Ugyanis $\psi(r) = x$, $\psi(t) = y$, $r = \psi^{-1}(x) = g(x)$, $t = g(y)$ jelöléssel

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{xg(x) + yg(y)}{x+y},$$

vagy $\frac{x+y}{2}$ -vel szorozva

$$\frac{x+y}{2}g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{xg(x) + yg(y)}{2}.$$

Az új $xg(x) = f(x)$ függvényt bevezetve, éppen a Jensen-féle függvényegyenletet kapjuk:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Tehát

$$f(x) = Cx + D, \quad g(x) = C + \frac{D}{x}, \quad \psi(t) = \frac{D}{t-C} = \frac{1}{at + \beta}$$

$$\text{megoldása és } \varphi(t) = -\frac{c}{at + \beta} + d = \frac{at + b}{at + \beta}.$$

Könnyű meglátni, hogy ez olyan erőteret jelent, ahol az erővektorok irányai mind metszik egymást egy pontban (erőcentrum), amely nem fekszik az alap-egyenesen és a valamely pontban az egységnyi tömrege támadó erő nagysága egyenesen arányos az illető pontnak az erőcentrumból mért távolságával, és fordítva arányos az illető pontnak egy az alapegyenest metsző fix egyenestől mért távolságával.

Ebből az egy egyenesen fekvő pontokra vonatkozó eredményből azután néhány egyszerű geometriai megfontolással könnyen következik az, hogy melyik a mondott feltételeket kielégítő legáltalánosabb síkbeli, ill. térbeli erőter. Eredményül adódik, hogy a térben a legáltalánosabb ilyen erőter az, ahol az erővektorok irányai mind egy erőcentrum-pontban metszik egymást, és az egy pontban az egységnyi tömrege támadó erő nagysága egyenesen arányos az illető pontnak az erőcentrumból való távolságával és fordítva arányos az illető pontnak egy fix síktól mért távolságával (tehát az erőter nivőfelületei azonos fókuszú és direktrixű kúpszeletsereg forgásfelületei). Ennek elfajult eseteiben az erőcentrum, vagy a fix sík a végtelenben is lehet. Ilyen erőter az ismert erőterek közül pl. a homogén parallel erőter és az elasztikus erőter. Érdekes, hogy a gravitációs erőter nem ilyen, tehát ott teljes pontossággal nem, hanem csak első közelítésben található olyan súlypont, amelyben a tömegek erőhatás és forgatónyomaték szempontjából egyaránt egyesítve képzelhetők.

Ezzel egyúttal arra is láttunk példát, hogy vektoregyenleteink megoldása hogyan vezethető vissza közönséges függvényegyenletek megoldására.

Itt a megoldás $g(\tau) = \frac{c\tau}{d + n \cdot \tau}$ (a koordinátaközéppont az erőcentrumban

van, n a fixsík normális egységvektora, d az erőcentrumból való távolsága; » . « skaláris szorzást jelent). Megjegyzendő, hogy az eredmény nemcsak az előirt feltételeket teljesíti, hanem azt is lehetővé teszi, hogy bármekkora, az erőterbe helyezett diszkrét vagy folytonos tömegrendszerhez hozzárendeljünk olyan súlypontot, amelyben tömege erőhatás és forgatónyomaték szempontjából egyaránt egyesítve tekinthető.

5. Végül politikai számtani és mechanikai alkalmazások után hadd fejezzem be e néhány kiragadott példa ismertetését egy az alkalmazott matematika legkifejlettebb és legaktuálisabb ágában, a valószínűségszámításban és a matematikai sta-

tisztikában jószolgálatot tevő, szintén függvényegyenletek megoldásán alapuló meggondolás elmondásával, aminek szíves közlését *Rényi Alfrédnek* köszönhetem.

Ez a Poisson-féle stochasztikus folyamat általános képletének levezetése. Itt ritka események előfordulási valószínűségének meghatározásáról van szó. Jelentse a $w_k(x)$ folytonos, az $x = 0$ helyen deriválható függvény annak valószínűségét, hogy valamely esemény (pl. meteorhullás, baleset, sajtóhiba, rádió-aktív bomlás stb.) x idő alatt k -szor következik be. Így egyrészt

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) = 1,$$

másrészt $w_0(0) = 1$, mert bizonyos, hogy 0 idő alatt egyszer sem következik be az esemény (ebből viszont következik, hogy $w_k(0) = 0$ $k \geq 1$ -re). Olyan folyamatokat vizsgálunk, ahol a következő előfeltételek teljesülnek:

a) A folyamat stacionárius: annak valószínűsége, hogy az esemény t és $t + x$ időpontok között valahányszor bekövetkezzék, független t -től (attól hogy mikor kezdjük mérni az időt).

b) Az esemény ritka: $w'_k(0) = 0$ $k > 1$ esetén és $w'_1(0) \neq 0$, ami $w_k(0) = 0$ ($k \geq 1$) miatt valóban azt jelenti, hogy kicsi annak valószínűsége, hogy rövid idő alatt az esemény egynél többször előforduljon. Ebből következik $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) = 1$ miatt, hogy $w'_1(0) = -w'_0(0) = \lambda$, ahol $\lambda > 0$, mert $w_0(x)$ csak csökkenhet, $w_1(x)$ csak nőhet $x = 0$ után. [Megjegyzendő, hogy ez utóbbi

$$w'_1(0) = -w'_0(0) = \lambda \neq 0$$

feltevés elegendő b) helyett, hiszen

$$w_k(0) = 0 \quad (k \geq 1) \quad \text{és} \quad w_k(x) \geq 0$$

miatt

$$w'_k(0) \geq 0 \quad (k \geq 1),$$

és így $\sum_{k=0}^{\infty} w'_k(0) = 0$ és $w'_0(0) + w'_1(0) = 0$ -ból következik $w'_k(0) = 0$ $k \geq 2$ -re; egyébként még ez is helyettesíthető még gyengébb feltétellel].

c) A két egymásba nem nyúló időintervallumban történő események függetlenek egymástól.

Mármint $x + y$ idő alatt az esemény 0-szor úgy következik be, hogy 0-tól x időpontig is 0-szor és x -től $x + y$ időpontig is 0-szor következik be, és így valószínűsége (tekintve, hogy két egymástól független esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő a két valószínűség szorzatával):

$$w_0(x + y) = w_0(x) w_0(y).$$

Ez egy olyan, a Cauchy-féle alapegyenletre visszavezethető függvényegyenlet, amit már a 2. pontban tárgyaltunk és láttuk, hogy megoldása

$$w_0(x) = q^x$$

($w_0(0) = 1$ ebből is következtethető). Vagy $w_0'(0) = \ln q = -\lambda$ miatt

$$w_0(x) = e^{-\lambda x}$$

Ugyanígy $x + y$ idő alatt egyszer vagy úgy következik be az esemény, hogy 0-tól x időpontig egyszer és x -től $(x + y)$ -ig 0-szor, vagy pedig úgy, hogy 0-tól x -ig 0-szor, és x -től $(x + y)$ -ig egyszer következik be, vagyis (tekintve,

hogy két esemény közül valamelyik bekövetkezésének valószínűsége egyenlő a két valószínűség összegével)

$$w_1(x + y) = w_1(x) w_0(y) + w_0(x) w_1(y),$$

és $w_0(x)$ értékét behelyettesítve

$$w_1(x + y) = w_1(x) e^{-\lambda y} + w_1(y) e^{-\lambda x}$$

Ezt a függvényegyenletet is visszavezethetjük a Cauchy-féle alapegyenletre, ugyanis $w_1(x) = v_1(x)e^{-\lambda x}$ jelöléssel

$$v_1(x + y)e^{-\lambda x - \lambda y} = v_1(x)e^{-\lambda x - \lambda y} + v_1(y)e^{-\lambda x - \lambda y}$$

$$v_1(x + y) = v_1(x) + v_1(y),$$

ami éppen az alapegyenlet. Megoldása, mint tudjuk, $v_1(x) = cx$, ill. $\lambda = w_1'(0) = -\lambda v_1(0) + v_1'(0) = v_1'(0) = c$ miatt $v_1(x) = \lambda x$ és így $w_1(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ függvényegyenletünk megoldása.

Hasonló megfontolással

$$w_2(x + y) = w_2(x) w_0(y) + w_1(x) w_1(y) + w_0(x) w_2(y),$$

tehát

$$w_2(x + y) = w_2(x) e^{-\lambda y} + \lambda^2 x y e^{-\lambda x - \lambda y} + w_2(y) e^{-\lambda x},$$

amely függvényegyenlet megint csak visszavezethető az alapegyenletre :

$$w_2(x) = v_2(x)e^{-\lambda x}, \quad v_2(x + y) = v_2(x) + v_2(y) + \lambda^2 xy,$$

$$v_2(x) = \frac{\lambda^2 x^2}{2!} + u_2(x), \quad u_2(x + y) = u_2(x) + u_2(y),$$

$u_2(x) = cx$, vagyis $0 = w_2'(0) = -\lambda v_2(0) + v_2'(0) = -\lambda u_2(0) + u_2'(0) = c$ miatt

$$u_2(x) = 0, \quad w_2(x) = \frac{(\lambda x)^2}{2!} e^{-\lambda x} \text{ a keresett megoldás.}$$

Továbbá

$$w_3(x + y) = w_3(x) w_0(y) + w_2(x) w_1(y) + w_1(x) w_2(y) + w_0(x) w_3(y)$$

vagyis

$$w_3(x + y) = w_3(x) e^{-\lambda y} + \frac{\lambda^3 x^2 y}{2} e^{-\lambda x - \lambda y} + \frac{\lambda^3 x y^2}{2} e^{-\lambda x - \lambda y} + e^{-\lambda x} w_3(y),$$

$$w_3(x) = \left(\frac{\lambda^3 x^3}{3!} + u_3(x) \right) e^{-\lambda x}, \quad u_3(x + y) = u_3(x) + u_3(y),$$

tehát

$$u_3(x) = cx, \text{ de } 0 = w_3'(0) = -\lambda u_3(0) + u_3'(0) = c$$

miatt

$$u_3(x) = 0, \quad w_3(x) = \frac{(\lambda x)^3}{3!} e^{-\lambda x} \text{ a keresett megoldás.}$$

Így tovább folytatva megkapjuk, hogy

$$w_k(x) = \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$$

annak valószínűsége, hogy eseményünk x idő alatt k -szor következik be és ez a gyakorlatban, különösen a modern ipari statisztikában nagyjelentőségű Poisson-féle statisztikai folyamat keresett általános képlete. Hasonlóképpen lehet általános (nem »ritka«) események előfordulási valószínűségét meghatározni (összetett Poisson-eloszlás). Itt valójában függvényegyenletrendszerrel oldottunk

meg: $w_k(x+y) = \sum_{n=0}^k w_n(x) w_{k-n}(y)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Ugyancsak matematikai statisztikai vonatkozású az $S = k \ln W$ entrópia-képlet ismert levezetése az $S(W_1 \cdot W_2) = S(W_1) + S(W_2)$ függvényegyenlettel, mely a $W = a^x$ $S(W) = S(a^x) = f(x)$ helyettesítésével vezethető vissza a Cauchy-féle $f(y) = f(x) + f(x)$ függvényegyenletre.

6. Befejezésül még két megjegyzés:

I. A két utolsó alkalmazott matematikai kérdést, amelyet mi függvényegyenletek megoldása útján intéztünk el, eredetileg differenciálegyenletekkel oldották meg az itt elmondottnál jóval hosszadalmasabban. Még a többi itt elmondott függvényegyenletre vezető probléma által előhozott függvényegyenletek megoldását is szeretik az alkalmazott matematikusok a közvetlen megoldásnál hosszadalmasabban, differenciálegyenletekre való visszavezetéssel megoldani. Ennek oka bizonyára az, hogy a függvényegyenletek tanában még nem fejlődtek ki olyan mechanikus, automatikusan alkalmazható megoldási módszerek, mint a differenciálegyenleteknél, hanem minden egyes függvényegyenlet megoldása külön megfontolást igényel. — Azt, hogy a megoldás közvetlenül vagy pedig differenciál- (esetleg integrál-) egyenletekre való visszavezetéssel célszerűbb-e, az dönti el, hogy a szóban forgó függvényegyenlet olyan típusúra vezethető-e vissza, melynek megoldása ismeretes. Mivel azonban a függvényegyenletek elméletének eredményei általában kevésbé ismeretesek, gyakran olyan feladatokat is bonyolultan, differenciálegyenletek segítségével oldanak meg, melyek közvetlenül függvényegyenletekkel egyszerűbben volnának megoldhatók. — Pedig a függvényegyenletekkel való megoldás egyúttal a feltételek enyhítését is hozza magával: differenciálhatósági feltételek helyett folytonossági, sőt mérhetőségi feltételek elegendők, — amellet az így kapott általános megoldásról azután rendszerint kiderül, hogy a differenciálhatósági feltételeknek is eleget tesz.

II. Itt csak az egyváltozós függvényt és két tetszőszerint megválasztható változót tartalmazó függvényegyenleteknek néhány alkalmazott matematikai előfordulására mutattam rá, még hozzá csak olyanokéra, amelyek lényegében mind visszavezethetők a Cauchy-féle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ alapegyenletre. Ter mészetesen ezeknek is, a többi függvényegyenlet-típusoknak is — amelyeknek megoldása esetleg nem ennyire kézenfekvő — még számos más alkalmazott matematikai alkalmazása van.

Így láthatjuk be, hogy a függvényegyenletek elméletének valamennyire is rendszeres kiépítése milyen nagyjelentőségű lenne az alkalmazott matematika szempontjából is.

*Nehézipari Műszaki Egyetem
II. Matematikai Tanszéke,
Miskolc.*

IRODALOM

- ¹ Picard É.: Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'analyse et de physique mathématique. 1928, 1950, I. Ch., III. 1., 2.
² Aczél J. and Fenyő St.: Hungarica Acta Mathematica, 7, 3 (1948), 53—60.

ELLENÁRAMÚ DIFFÚZIÓS RENDSZEREKRŐL

PÁL SÁNDOR

Előadta az 1950. november 29-én tartott osztályülésen

Számos kémiai eljárásnál döntő szerepe van a processzus tér- és időbeli lefolyásánál a diffúzióknak.

A diffúziós eljárásoknál az a cél, hogy valamilyen anyagból oldószer segítségével egy harmadik anyagot kivonjunk. Modern berendezéseknél ez az extrakciós folyamat többnyire ellenáramú.

Ellenáramú diffúziós rendszerekkel történik például cukorrépaszeletekből vízzel, diffuzőrökben a cukor kivonása.¹ Hasonló rendszer szerint történik az olajnak növényi magvakból való kivonása. Ellenáramú diffúziós rendszereket alkalmazhatunk növényi olajok finomítására is. A finomításnál az olajból alkohollal ki kell vonni a zsírsavakat. Legcélszerűbb az olajat és szeszt oldótoronyban egymásra rétegezni, majd az olajrétegen szeszecseppeket, a szeszrétegen olajcseppeket átengedni. Ellenáramú rendszerben szokás barnaszénkátrányból az alkoholt által oldható anyagokat kimosni. Ezenkívül még számos példát mondhatnánk arra, milyen elterjedt módszer az ellenáramú diffúzió a kémiai iparban.

Legegyszerűbb esetben háromféle anyag vesz részt az átalakulásban :

1. Az az anyag, amelynek a koncentrációja a diffúzió során csökken (1. közeg).
2. Az az anyag, amelynek a koncentrációja a diffúzió során növekszik (2. közeg).
3. Az az anyag, amely egyik közegből a másikba diffundál.

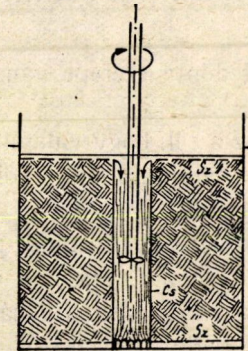
A folyamat természetesen annál gyorsabb, minél finomabb a két közeg egymásban való eloszlása.

Mi azzal az esettel foglalkozunk, amelyben a két közeg közül az egyik folyadék, a másik pedig egybevágónak tekintett, nagyszámú (apró) testből áll, és ezek együttesen nagy felületen érintkeznek az első közeggel. (Pl. szemcsék, porok, cseppek, szeletek stb.) Az egyszerű kifejezésmód kedvéért nevezzük az elsőt folyékony, a másodikat szilárd közegnek.

Ha a két közeg egymáshoz képest nyugszik, a két közeg koncentrációja kezdetben gyorsan, később mind lassabban közeledik az egyensúlyi állapothoz ; ugyanis a diffúzió folyamatának sebessége annál nagyobb, minél nagyobb a közegek átlagos koncentrációjának eltérése a (közös vagy nem közös) egyensúlyi koncentrációktól.

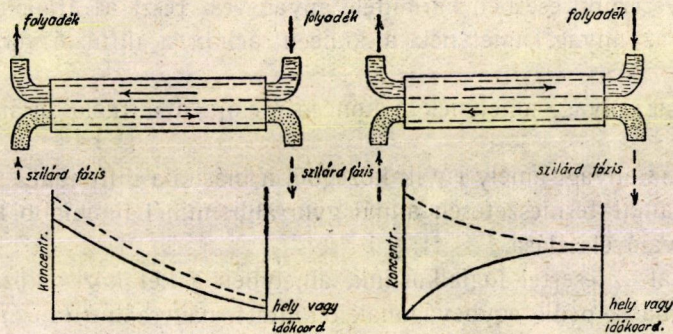
A nyugvó diffúziós folyamatnál a nagy koncentrációjú szilárd közeg kis koncentrációjú folyadékkal érintkezik, vagyis a koncentrációkülönbség igen nagy. Később, amikor a kiegyenlítődézés már közel megtörtént, igen kicsi a koncentrációkülönbség. Tehát a szilárd közeg a nagy koncentráció stádiumában kis koncentrációjú lével, a kis koncentráció stádiumában nagy koncentrációjú lével érintkezik.

Az ilyen diffúziós rendszereket nyugvó, zárt rendszereknek fogjuk nevezni.



1. ábra

Egy ilyen rendszer sematikus kivitelezési módját láthatjuk az 1. ábrán. A Cs csőben forgó propeller állandó gyors cirkulációban tartja az oldó folyadékot. A szilárd részecskéket alul és felül az Sz szűrőkkel visszatartjuk. A folyadék nagy sebességgel áramlik. Az áramlás turbulenciája miatt a folyadékban koncentráció-



2. ábra

különbségek nem lehetnek. A rendszer tehát úgy fogható fel, mintha az edényben levő szilárd részek igen kis diffúziós ellenállású, de nyugvó folyadékkal érintkeznének. »Zárt«-nak azért nevezzük, mert a szilárd és folyékony közeg együttes diffundáló anyag-tartalma változatlan marad.

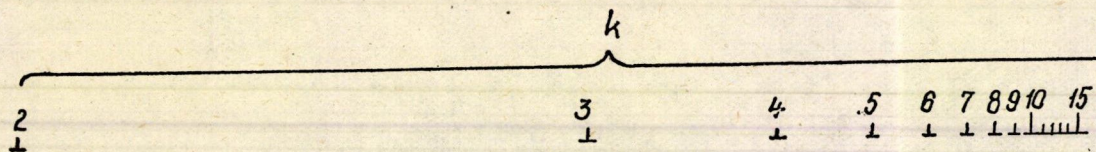
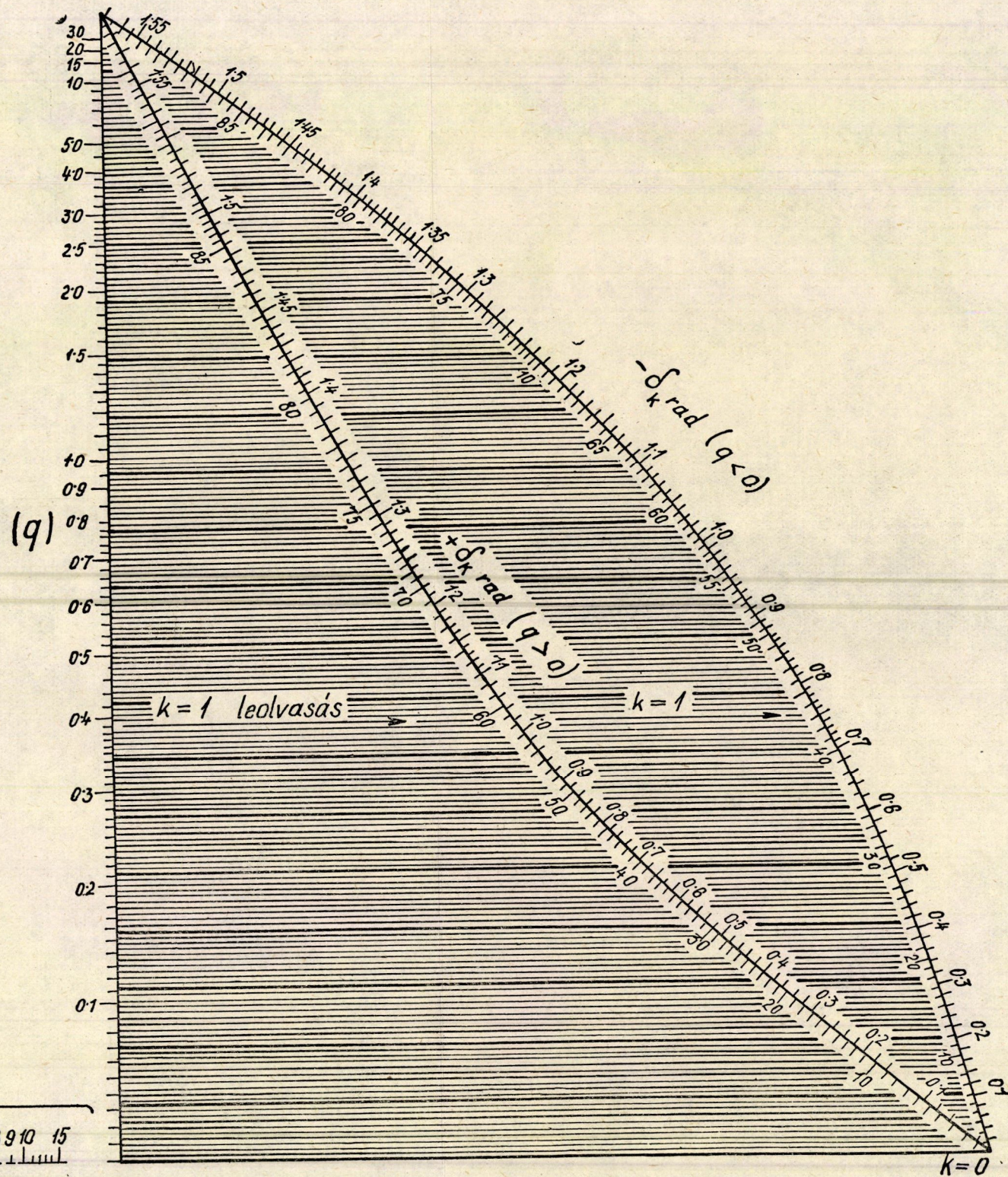
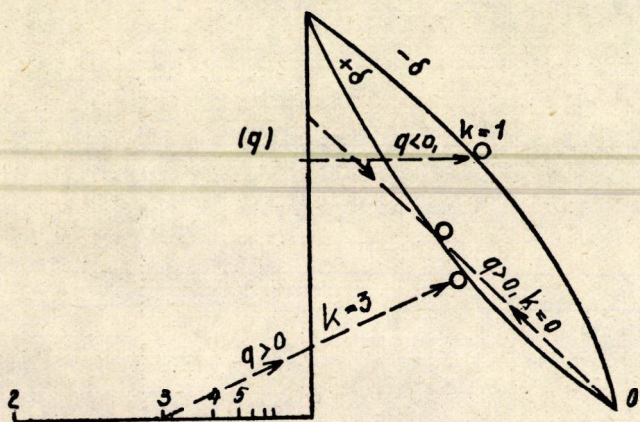
A berendezés jobb kihasználása szempontjából kívánatosabb, ha a szilárd és folyékony közeg koncentrációkülönbsége nem változik erősen, ha tehát a

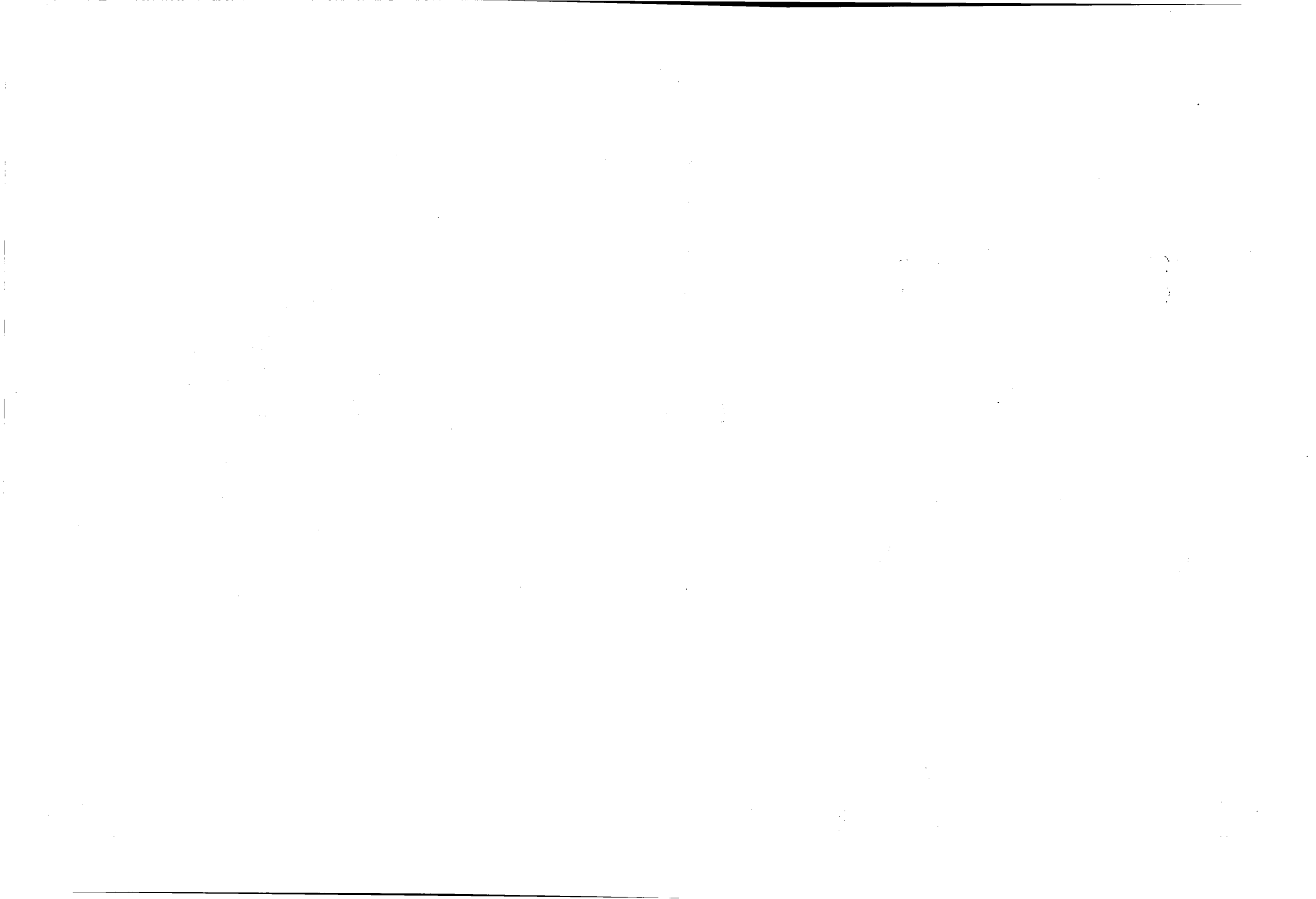
$$\operatorname{tg} \mu_k = q \mu_k$$

$$\mu_k = k\pi + \delta_k$$

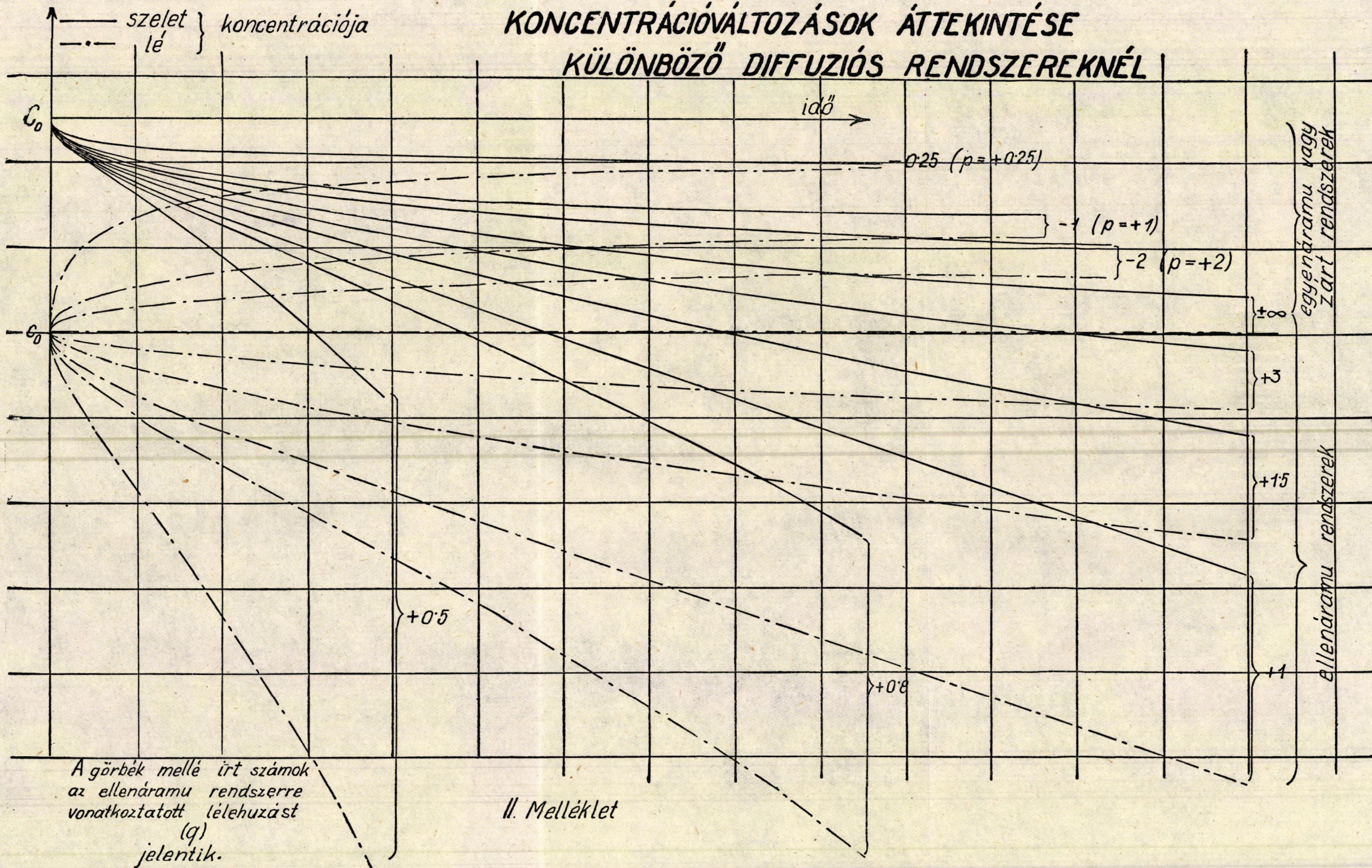
$q > 0$ esetben $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$q < 0$ esetben $k = 1, 2, 3, \dots$

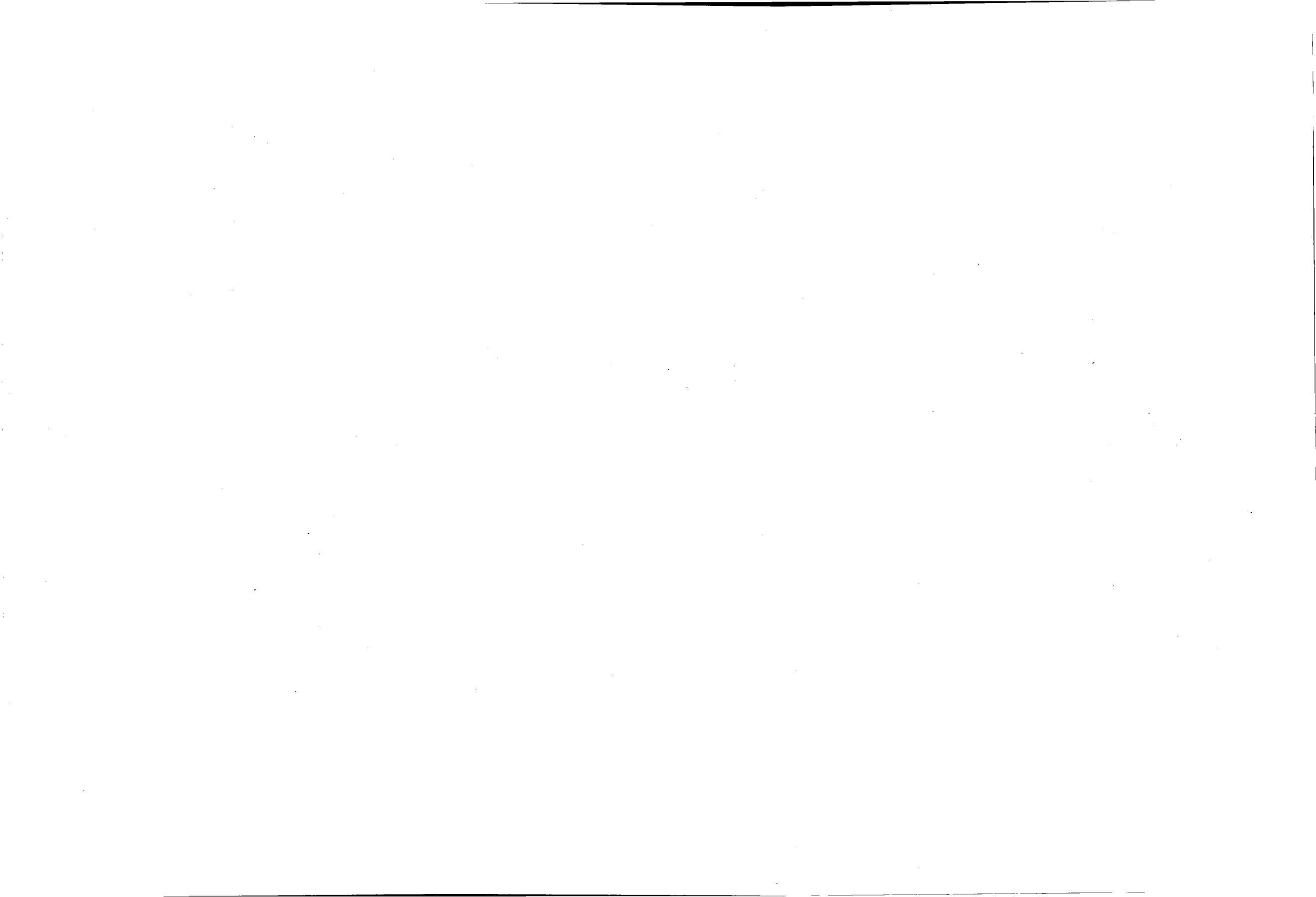


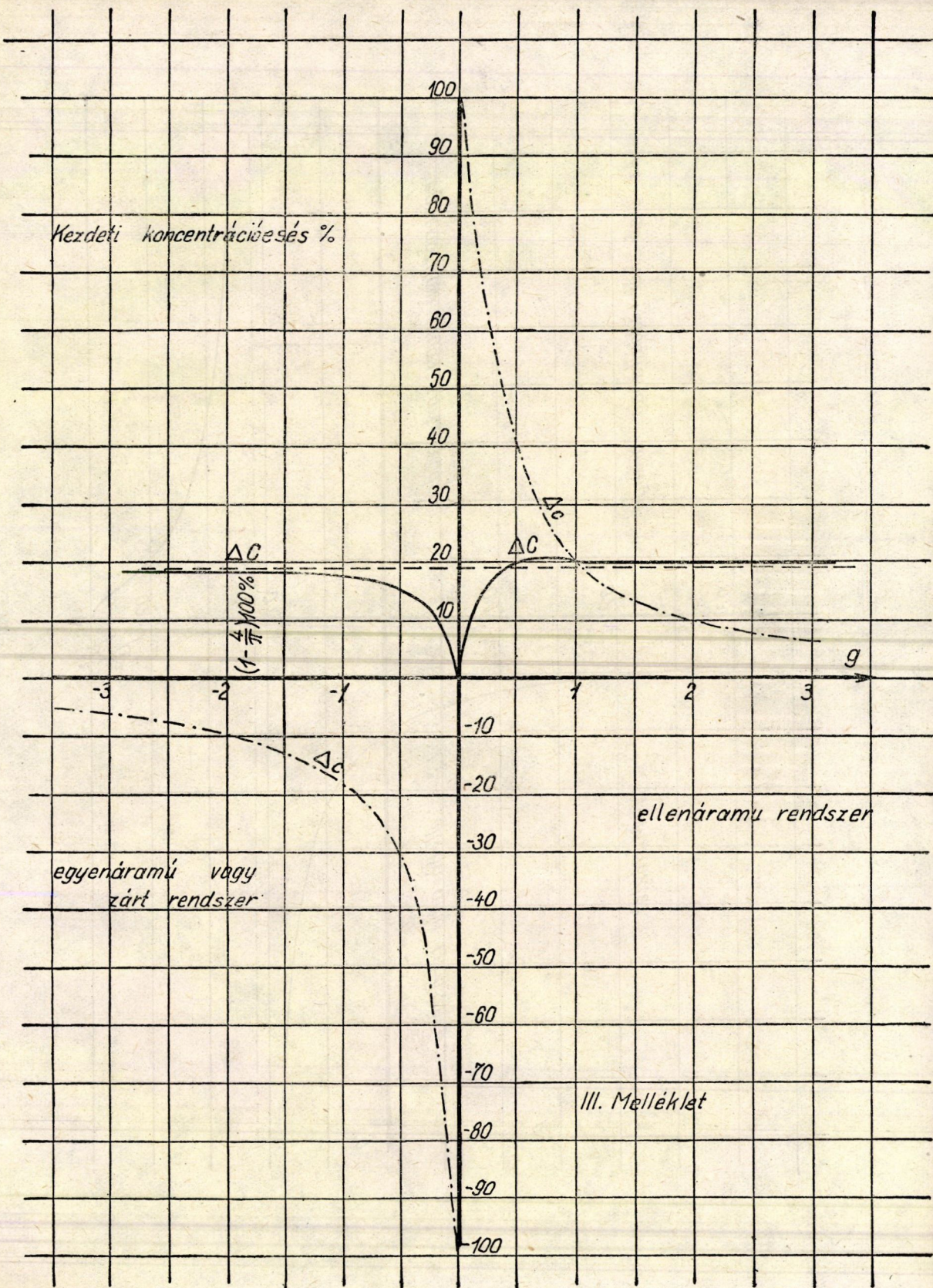


KONCENTRÁCIÓVÁLTOZÁSOK ÁTTEKINTÉSE KÜLÖNBÖZŐ DIFFUZIÓS RENDSZEREKNÉL



II. Melléklet





Kezdeti koncentrációesés %

ΔC

$(1 - \frac{4}{\pi}) \cdot 100\%$

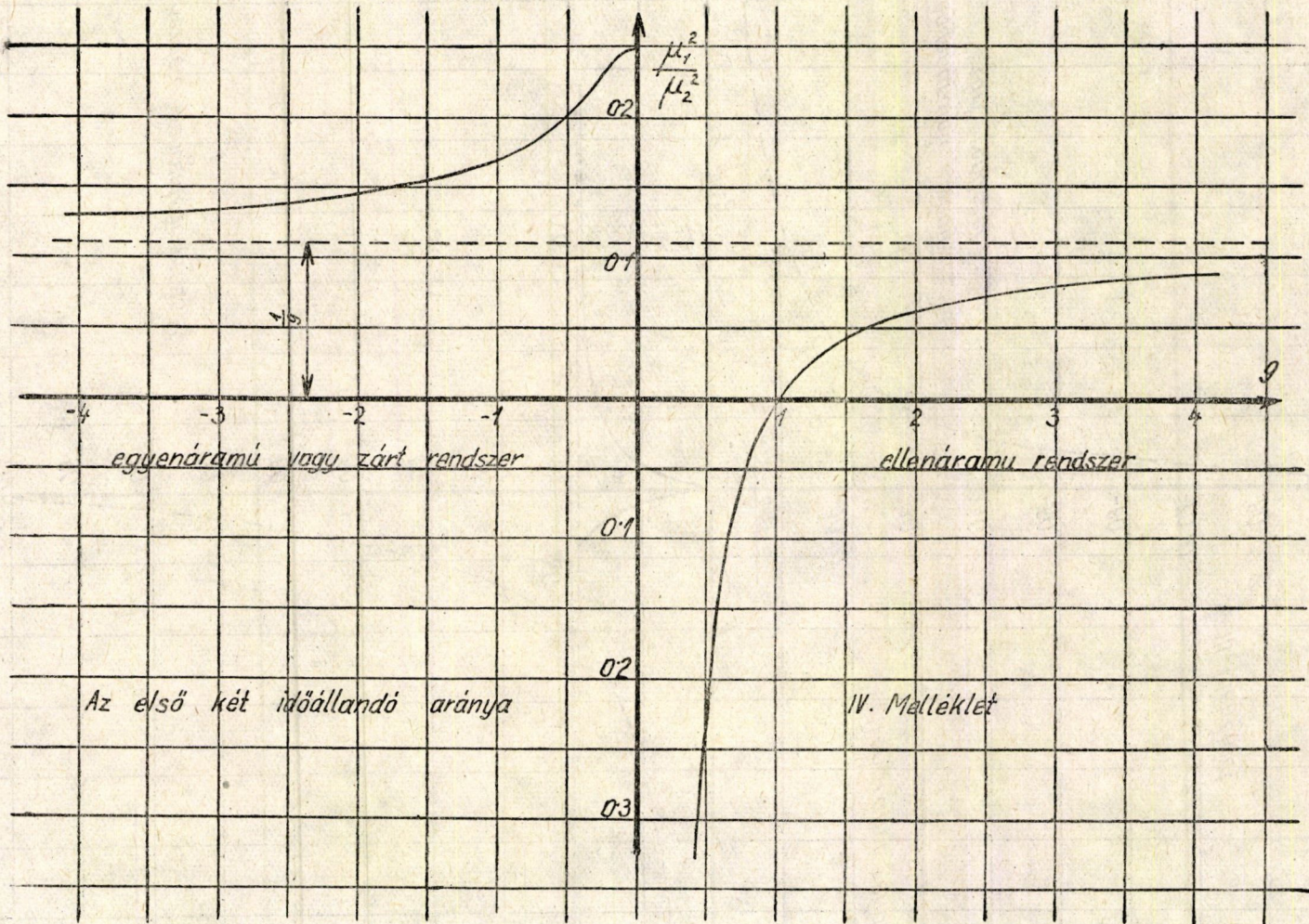
ΔC

g

ellenáramú rendszer

egyenáramú vagy
zárt rendszer

III. Melléklet



szilárd közeg a nagy koncentráció stádiumában nagyobb, a kis koncentráció stádiumában kisebb koncentrációjú folyékony közeggel érintkezik. Ez akkor következik be, ha a két közeg ellenkező irányban áramlik, úgynevezett ellenáramban. A koncentráció változását mindkét fajta rendszernél a hely, illetőleg az idő függvényében a 2. ábrán tüntettük fel.

Az előadás célja stacionárius ellenáramú rendszerben a két közeg koncentrációjának változását visszavezetni az álló rendszer problémájára. Ekkor azonban a gyakorlatban nagyon bonyolult rendszert indokolt munkahipotézisekkel leegyszerűsítjük.

Munkahipotézisek :

1. Abban a »nyugvó« rendszerben, mellyel az áramló rendszert szembeállítjuk, valójában a szilárd és folyékony fázist nagy sebességgel keverjük. A keverés eredményeképpen a folyadék koncentrációja nagyon jó közelítéssel független a helytől, mert bármilyen koncentrációkülönbsége folyadékban elhanyagolható idő alatt kiegyenlítődik a folyadék erősen turbulens áramlása miatt.

2. Ellenáramú, vagy egyenáramú rendszereknél feltesszük, hogy mindkét közeg állandó sebességgel halad, és hogy a szilárd és folyékony közegek kezdeti koncentrációja legfeljebb az időtől függ (a csőbe lépés helyétől nem).

3. Feltesszük, hogy a folyékony közeg diffúzióállandója nem kisebb nagyságrendű a szilárd közeg diffúzióállandójánál, továbbá, hogy a csőben található folyadék térfogata nem nagyobb nagyságrendű a szilárd közeg térfogatánál. *Továbbá feltesszük, hogy a szilárd testekhez nem tapad tartósan nagyobb tömegű folyadék, mely természetesen lényegesen nagyobb koncentrációjú volna, mint a környező folyadékrészek.*

Képzeljük folyadékunkat állónak és mozogjanak ebben a folyadékban a szilárd részecskék. Ha a folyékony közeg egy kiválasztott keresztmetszetében mindig ugyanazok a folyadékrészek érintkeznének szilárd részekkel (és a folyadékban semmiféle áramlás nem volna), akkor egyező nagyságrendű diffúzióállandók esetén a folyékony közeg kiválasztott rétegében fellépő koncentrációkülönbségek nagyságrendben megegyeznének az ott található szilárd részekben fellépő koncentrációkülönbségekkel. Azonban a kiválasztott folyadékréteg a szilárd részek szabálytalan térbeli eloszlása miatt mindig más pontokon érintkezik a szilárd részekkel, tehát a folyadékban az előbbinél sokszorta kisebb koncentrációkülönbségek lépnek fel a keletkező koncentrációkülönbségek statisztikus kiegyenlítődése miatt.

Külön csökkenti még a folyékony közeg keresztmetszeteiben létrejövő koncentrációkülönbségeket a szilárd testecskék közötti labirintusokban történő folyadékáramlás turbulenciája.

Tehát ellenáramú vagy különböző sebességű egyenáramú rendszereknél (relatív sebesség legyen!) sok gyakorlati esetben nem követünk el lényeges hibát, ha feltesszük, hogy *a folyadék koncentrációja csak a csőirányú koordinátától és az időtől függ, egy megadott csőkeresztmetszetben, egy adott időpontban állandó.*

4. Feltesszük még, hogy a folyadékban a cső hosszúságában történő koncentrációváltozások kialakításában az áramlásnak van döntő szerepe, tehát, hogy a diffúzió okozta koncentrációkiegyenlítődés lassú az áramláshoz képest.

Ezekkel a kézenfekvő feltevésekkel lehetővé válik az áramló rendszer problémájának visszavezetése az álló rendszer esetére.

A stacionárius egyen- vagy ellenáramú problémát pedig visszavezetjük az álló, zárt rendszer problémájára. Zárt rendszernél a szilárd és folyékony közeg összes diffundáló anyag-tartalma konstans marad.

Végül foglalkozunk cukorrépaszeletek diffuzőrőkben való kilúgozásával. Ez jó példa az általános elmélet gyakorlati alkalmazására.

Az álló, zárt diffúziós rendszer

Jelölje t az időt,

x, y, z a helykoordinátákat,

$C(x, y, z, t)$ a szilárd rész koncentrációfüggvényét,

$c(t)$ a folyékony rész koncentrációfüggvényét (miután a folyadékban koncentrációkülönbségek nem lépnek fel, a helytől nem függ),

D a diffúzióállandót a szilárd közegben,

V a szilárd test térfogatát,

ρV a folyadék térfogatát (itt ρ az úgynevezett lélelhúzás),

k az egyensúlyi állandó. Egyensúly esetén: $c = kC$.

Érvényes a szilárd közegben a diffúzió differenciálegyenlete:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C. \quad (1)$$

A differenciálegyenlethez tartozó határfeltételek: A II. Fick-féle törvény szerint a szilárd test felszínén kidiffundáló anyag mennyisége az időegységben

$$-D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF,$$

ahol $\frac{\partial C}{\partial n}$ a normális irányú deriváltat jelenti. Az anyag megmaradása miatt ugyanannyit vesz fel a folyékony közeg. A folyékony közeg koncentrációja az időegységben $\frac{dc}{dt}$ mennyiséggel nő. Ez térben állandó mennyiség, tehát a felvett anyag-mennyiség

$$\rho V \frac{dc}{dt}.$$

Vagyis a határfelületen a következő határfeltételek érvényesek :

$$c = kC,$$

$$pV \frac{dc}{dt} = -D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF. \quad (2)$$

Vagy összefoglalva :

$$pkV \frac{\partial C}{\partial t} + D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF = 0. * \quad (3)$$

Ha még ehhez hozzávesszük a

$$C(x, y, z, 0) = C_0(x, y, z), \quad (5a)$$

$$c(0) = c_0 \quad (5b)$$

alakú kezdeti feltételeket (ahol c_0 nem egyezik meg feltétlenül kC_0 értékével a határoló felületen), akkor mindkét koncentrációfüggvényünk egyértelműen meg van határozva.**

Egyenletesen áramló rendszer

Tegyük fel, hogy szilárd közegünk Γ , cseppfolyós közegünk γ sebességgel áramlik a cső hosszirányában felvett ξ -tengely irányában. (Természetesen Γ és γ előjellel vett számok, mert az áramlás lehet egyenáramú vagy ellenáramú.)

Koordinátarendszerünket most úgy vesszük fel, hogy egy kiválasztott szilárd résszel együtt haladjon, tehát Γ sebességgel. Ebben a koordinátarendszerben a szilárd közeg nyugszik, a folyékony pedig $\gamma - \Gamma$ sebességgel áramlik ξ irányban. A nyugvó szilárd közegben változatlanul érvényben marad az (1) differenciálegyenlet.

A szilárd és folyékony közeg koncentrációja, minthogy feltesszük, hogy a diffúziós kiegyenlítődés ξ irányban kicsi a konvekciós koncentrációváltozáshoz képest, az időn kívül ξ -től is függ :

$$C = C(\xi; x, y, z; t),$$

$$c = c(\xi, t).$$

*) A Gauss-féle tétel alkalmazásával (1) és (2) egyenleteinkből a következő egyenlet nyerhető egyszerű módon :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{V} \int_{(V)} C dV + pc \right] = 0$$

vagy, tekintettel arra, hogy az $\frac{1}{V} \int_{(V)} C dV$ C -nek a térfogatra vonatkozó integrál közepét jelöli, melyet \bar{C} -sal jelölhetünk, a

$$\bar{C} + pc = \text{konst.} \quad (4)$$

egyenletet kapjuk, amely a diffundáló anyag megmaradását fejezi ki.

**) Érdekes további probléma, melynek megoldását programmba vettem, ennek a differenciálegyenletnek, mint sajátfüggvény-problémának vizsgálata, a (2)-höz hasonló határfeltételekkel, némi általánosítással.

A (2) egyenlet, mely a diffundáló anyag megmaradását fejezte ki az álló rendszernél, egy új taggal bővül. Jelölje p egy kiválasztott (nagyinak tekinthető) térfogatban levő összes cseppfolyós és szilárd közeg térfogatarányát. Akkor a folyadék által az időegységben felvett diffundáló anyag mennyisége most is pVc -nek idő szerinti differenciálhányadosa, de tekintetbe kell vennünk, hogy c explicite a helytől is függ. A szilárd közegünket körülvevő lé $\gamma - \Gamma$ sebességgel áramlik, tehát $\xi = (\gamma - \Gamma)t$, és így a folyadék által az időegységben felvett anyagmennyiség kiszámításánál tekintetbe kell vennünk, hogy c kétváltozós közvetett függvénye az időnek:

$$pV \frac{dc}{dt} = pV \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{\partial c}{\partial \xi} \right),$$

$$\text{ámde } \frac{d\xi}{dt} = \gamma - \Gamma, \text{ tehát } pV \frac{dc}{dt} = pV \left[\frac{\partial c}{\partial t} - (\Gamma - \gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi} \right].$$

Ezt az egyenletet (2)-be helyezve

$$pV \left[\frac{\partial c}{\partial t} - (\Gamma - \gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi} \right] = -D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF. \quad (6)$$

Kihasználva, hogy a határon $c = kC$, egyenletünk következőképp alakul:

$$p k V \frac{\partial C}{\partial t} + D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF = + pV (\Gamma - \gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi}. \quad (7)$$

Az egyenlet baloldalán álló kifejezés a szilárd részecske és az őt körülvevő pV mennyiségű folyékony közegnek a diffundáló anyagban való együttes szaporulatát jelenti. Álló rendszernél (v. ö. (3) egyenlet) ez a mennyiség 0 volt. Most pedig azért nem 0, mert a folyadékáramlás következtében a testet körülvevő folyékony közeg kicserélődik. Ha a közeget egy pillanatra állónak képzeljük, ugyanazt a hatást akkor is elérhetjük, ha a szilárd testet körülvevő (állónak képzelt) folyadék koncentrációját a diffundáló anyag kívülről történő beadagolásával az időegységben mesterségesen $(\Gamma - \gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi}$ -vel »növeljük«.

Stacionárius eset

Ezen oly áramlást értünk,elynél a rendszer már oly hosszú ideje működik, hogy a koncentrációk a cső bármely keresztmetszetében gyakorlatilag függetlenek az időtől.

A cső rögzített keresztmetszetének egyenlete γ sebességgel mozgó koordináta-rendszerünkben

$$\xi = -\Gamma t + \alpha,$$

ahol α a keresztmetszetnek csőhöz képesti helykoordinátája, tehát konstans.

Mint hogy erre a ξ -re $c(\xi, t)$ független az időtől, azért

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0,$$

$$\text{és } \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\Gamma \text{ tekintetbevételével}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Helyettesítsük be ezt a stacionárius és nem stacionárius esetre egyaránt érvényes (6) egyenletünkbe. $c = kC$ tekintetbevételével a

$$\frac{\gamma}{\Gamma} p k V \frac{\partial C}{\partial t} + D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF = 0$$

egyenletet kapjuk, mint határfeltételt. Az egyenletben szereplő $\frac{\gamma}{\Gamma} p$ jelenti egy meghatározott időtartam alatt a csőbe áramló folyékony és szilárd közeg térfogatarányát (míg p egy tetszésszerű térfogatban található folyékony és szilárd közeg térfogatarányát jelentette). Nevezzük áramló diffúziós rendszerek-nél ezt a viszonyszámot lélehúzásnak. Ha a $\frac{\gamma}{\Gamma} p = q$ jelölést vezetjük be, akkor a

$$q k V \frac{\partial C}{\partial t} + D \int_{(F)} \frac{\partial C}{\partial n} dF = 0 \quad (8)$$

egyenletet kapjuk, amely (3) egyenlettel teljesen analóg. A kezdeti feltételekre figyelemmel a C függvény egyértelműen meg van határozva, az álló zárt rendszerrel formailag azonos módon.

Kimondhatjuk tehát, hogy a *jelentebb körvonalazott áramló diffúziós rendszerek számítástechnikai szempontból olyan álló, zárt rendszerrel azonosak, amelynél a folyékony és szilárd fázis térfogataránya q , a kezdeti koncentrációk pedig az áramló rendszer szilárd fázisának bemenő oldalán vett koncentrációk.*

Nézzük, hogy alakul modellünk ellenáramú esetre. Γ és γ most ellentett előjelű számokat jelentenek. A következőkben Γ , γ és q alatt inkább az abszolút értékeket értjük, $q = \frac{\gamma}{\Gamma}$ megint egy tetszésszerű időtartam alatt bemenő térfogatok aránya.

Stacionárius ellenáramú rendszerünk így matematikailag oly álló, zárt rendszerrel azonos, melynél a folyékony és szilárd közegek térfogataránya $-q$ (negatív lélehúzás), a szilárd és folyékony fázisok kezdeti koncentrációja pedig az ellenáramú rendszer szilárd közegének bemenő és folyékony közegének kilépő koncentrációjával azonos.

Cukorkilúgozás ellenáramú rendszerben

A cukorgyártásnál a cukrot a cukorrépából forró vízzel vonják ki. A répát vékony szeletekre vágják. A répaszeletek tömegét nagyon változatos módon érintkezésbe hozzák a forró vízzel, mire a szeletekben levő cukor kivándorol a forró vízbe.

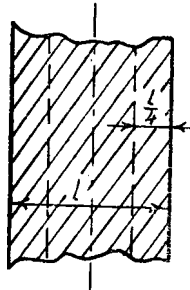
Egy ilyen megoldás, hogy a répaszeleteket tartányokba (ú. n. diffúzorokba) rakják, majd a sorbakapcsolt tartányokon keresztüláramoltatják nyomással a vizet. Ez a kilúgozási mód megközelítéssel stacionárius ellenáramúnak fogható fel.

A cukor kivándorlása a répaszeletekből meglehetősen bonyolult folyamat, minthogy különböző vegyi folyamatok, sejtfalakon való átdiffundálás stb. szabja meg a lefolyását. Első közelítésben megengedhető egyszerűsítés, ha a cukor kivándorlásánál feltesszük, hogy a répaszelet homogén és benne a cukor vándorlása a diffúzió differenciálegyenlete szerint megy végbe.

Irodalmi áttekintés

A cukoriparban a modernebb telepek a cukorrépaszeletekből ellenárammal vonják ki a cukrot. Az ellenáramú cukorkivonás elmélete a legutóbbi időben alakult ki, főként szovjet tudósok kutatásai alapján.

P. M. Szilin és Z. M. Szilin 1937-ben közölt dolgozatában² a diffúzorokban több fokozatban történő ellenáramú cukorkilúgozásnál fellépő cukorkoncent-



3. ábra.

rációk kiszámításával foglalkozik. A cukorrépaszeleteket l vastagságú plan-parallel lemezeknek tekinti. Fick törvényéből kiindulva, azzal az erősen egyszerűsítő feltevéssel él, hogy a diffúziónál $l/4$ közepes diffúziós távolsággal számolhatunk, vagyis a szelet cukortartalmát a szelet felületétől $l/4$ távolságra koncentrálna képzeletben (3. ábra).

Ez a feltevés egyébként egyenértékű azzal, hogy a szelet szimmetriavonalától mindkét irányban lineárisan csökken a koncentráció.

Legyen $\frac{dQ}{dt}$ az időegységben kidiffundáló cukormennyiség

q az időegységben beadagolt szelet és lé térfogataránya,

D a diffúzióállandó,
 F a szelet felülete,
 $C(t)$ a szeletkoncentráció (térbeli) középértéke,*
 $c(t)$ a lékoncentráció (térbeli) középértéke,
 t az idő,
 l a szelet vastagsága.

(*Szil in* jelöléseit kissé megváltoztatjuk a tárgyalás folyamatosságának biztosítására.)

Akkor — *Szil in* szerint —

$$\frac{dQ}{dt} = DF \frac{C-c}{\frac{l}{4}}. \quad (9)$$

Az egyenletet kissé átalakíthatjuk, ha a koncentráció = $\frac{\text{cukormennyiség}}{\text{térfogat}}$

egyenlőségből $\frac{dQ}{dt}$ helyébe — $\frac{dC}{dt} F \frac{l}{2}$ -et helyettesítünk. Ezáltal a (9) egyenletet felírhatjuk tisztán koncentrációkra :

$$\frac{dC}{dt} = - \frac{4D}{l} \frac{F}{V} (C-c). \quad (10)$$

Planparallel lemezalakú szeletnél, melynek vastagsága kicsiny másik két méretéhez képest, $v \approx \frac{1}{2} Fl$. Ennélfogva vékony szeletekre *Szil in* feltevésével

$$\frac{dC}{dt} = - \frac{8D}{l^2} (C-c) \text{ vezethető le.}$$

A (9) egyenlet teljesen analóg a hőkicserélőkben a kicserélő falán át történő hőátadás törvényszerűségével. Ezért *Szil in* felhasználja a hőkicserélők Grashof-féle formuláját.

Ez a formula lényegében a koncentrációk $A + Be^{-qt}$ alakú változásának feltételezésével egyenértékű (t az idő, A , B , q a folyamatra jellemző konstansok). Evvel a folyamat matematikailag nagyon egyszerű fogalmazást kapott.

Szil in a fenti lényeges egyszerűsítő feltevésekkel hallgatólagosan felteszi, hogy a cukorrépaszeletek felületi koncentrációja megegyezik a környező lúgzóvíz koncentrációátlagával (környező alatt értendő egy olyan térrész, melynek lineáris méretei nem nagyok a szelet lineáris méreteihez képest). Ez azt jelenti, hogy a szelet környezetében koncentrációváltozás nincs. *Szil in* eredményei akkor fogadhatók el, ha feltesszük, hogy a szelethez hosszabb ideig nem tapad a szelettérfogattal egyező nagyságrendű létérfogat.

*A t változó helyett bevezethettük volna a szeletáramlás irányában mért ξ helykoordinátát is.

Viszont tagadhatatlan, hogy az egymásra szűfolt háztető-keresztmetszetű szeletekhez mindig tapad némi folyadék.

Dronov kiegészíti cikkeiben³ *Szilin* eredményeit, tekintetbe véve a folyadék diffúziós ellenállását is, és ezáltal megalapozza a kilúgozás egészen új, dinamikus elméletét.

A következő alapvető egyenletet kapja (jelöléseink szerint) :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C - c}{\frac{l}{4D} + \frac{1}{\beta}} F. \quad (11)$$

β az általa »konvektív diffúziós állandó«-nak nevezett szám, a szeletek közti hézagoktól, a szeletek alakjától, a sebességtől stb. függő konstans. Kiszámítása nehéz hidrodinamikai számításokat tesz szükségessé. (V. ö. fent idézett cikkek.)

$\frac{1}{\beta}$ a folyadék diffúzióval szemben kifejtett ellenállására jellemző tag. A

$$D_0 = \frac{1}{\frac{l}{4D} + \frac{1}{\beta}} \quad (11a)$$

általános diffúziós koefficiens értelmezésével*

$$\frac{dQ}{dt} = D_0 (C - c) F. \quad (11b)$$

Dronov kísérleti eredményei alapján kis (0,15—0,30 cm/sec) lésebességeknél a sebességeknek nagy befolyása van a konvektív diffúziós koefficiensre. A következő értékeket közli :

Kísérletek száma	Az extraháló folyadék sebessége cm/sec.	A diffúzió általános koefficiens cm/sec.	Konvektív diffúziós koeff. cm/sec.
1. kísérlet	0,307	1,112	2,795
2. kísérlet	0,201	1,012	2,392
3. kísérlet	0,154	0,927	1,926

Viszont, a nálunk szokásos sebességértékek 1—2 cm/sec nagyságrendűek, ezeknél a Cukoripari Kutatóintézet feltevése alapján a β érték már meg lehetőségen nagy, úgyhogy az első közelítésben $\frac{1}{\beta} \approx 0$ -val számolhatunk. Eredményünk ezután tovább finomítható *Dronov* képletének felhasználásával.

* Megjegyzendő, hogy a *Dronov* által bevezetett β és D_0 „diffúzióegyütthatók“ dimenziója nem egyezik meg a diffúzióegyüttható nálunk szokásos dimenziójával, illetőleg a D molekuláris diffúzióegyüttható dimenziójával.

Slaviček⁴ a következő két egyenletből indul ki :

$$dQ = + \gamma dc = - \Gamma dC \quad (a)$$

a cukor megmaradását fejezi ki ;

$$dQ = \frac{DF}{L} (C - c) dt, \quad (b)$$

ahol a L a cukormolekula »közepes úthossza« a szelet belsejéből a lébe, a Fick-törvény alapján. A $\frac{DF}{L}$ meghatározáshoz szükséges mennyiségek egy része ismeretlen. Ezért ezeknek az egyenleteknek a számszerű megoldásához szükséges $\frac{DF}{L}$ konstans értéket kísérletileg óhajtja meghatározni.

Oplatka⁵ hasonló egyenletekből indult ki. A (b) egyenletnek megfelelő egyenlet :

$$dC = - \lambda (C - c) dt.$$

Összefoglalva : Az eddigi szerzők vizsgálataiban közös, hogy az ellenáramú diffúzióra két egyenletet állítanak fel, melyek közül az első a kontinuitást fejezi ki, a második pedig a Fick-törvénnyel analóg. Szelethez rögzített koordinátarendszerben :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = p \left[\frac{\partial C}{\partial t} - (\gamma + \Gamma) \frac{\partial c}{\partial \xi} \right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \lambda (C - c). \quad (13)$$

Itt p a csőben valamely pillanatban található folyadék és szelet térfogataránya ; λ empirikusan vagy elméleti úton meghatározható konstans.

A Cukoripari Kutatóintézet ezt a két egyenletet stacionárius esetre megoldotta a következő határfeltételek figyelembevételével :

$C(0) = C_0$, a szeletek kezdeti koncentrációja és

$c(T) = c_1$, a lé kezdeti koncentrációja ismert.

T jelenti a csövön, illetőleg a diffúziórsoron való végighaladás idejét.

Eredményei a következők :

$$C(t) = c_1 + (C_0 - c_1) \frac{q e^{-qt} - e^{-qT}}{q - e^{-qT}}, \quad (14)$$

$$c(t) = c_1 + (C_0 - c_1) \frac{e^{-qt} - e^{-qT}}{q - e^{-qT}}, \quad (15)$$

ahol C_0 a szelet } kezdeti koncentrációja,
 c_1 a lé }

q a csövön határozott idő alatt belépő lúgzóvíz és szelet térfogataránya,
 T a csövön való áthaladási ideje.

$$q = \lambda \left(1 - \frac{1}{q} \right).$$

λ összefüggése kísérletileg meghatározható mennyiségekkel

Nagyon kívánatos a cukorgyári üzemben, hogy az üzem rugalmasan alkalmazkodjék a kilúgozásra kerülő szelet minőségének változásához. Tehát pl. ha rosszabbul vágott, vagy kisebb diffúzióállandójú szelet kerül az első diffúzorbe, a q térfogatarányt — lehetőség szerint késedelem nélkül — célszerű megnövelni.

Ezért a Cukoripari Kutatóintézet részéről felmerült az az óhaj, hogy találjunk összefüggést a stacionárius ellenáramú rendszer λ -ja és az álló, zárt rendszerben mérhető D/l^2 mennyiség között. (D a répaszelet diffúzióállandója, l a vastagsága.)

Ha ez sikerül, a diffúzorbe adagolt répaszeletekből vett minta D/l^2 -ét gyorsan végrehajtható laboratóriumi méréssel meghatározzuk, ami két időpontban való koncentrációmérést kíván, majd nomogrammból rögtön a megfelelő λ -hoz tartozó legkedvezőbb lélehúzást olvassuk le.

A feladatot oly módon oldottuk meg,¹ hogy feltételeztük, hogy a szelet és lé koncentrációja a diffúzió során kevéssel különbözik. Hibája ennek a módszernek, hogy csak bizonyos (1 körüli) lélehúzásokra érvényes eredményt ad, tehát nem illeszthető be egy általánosabb képbe, és nem magyarázza meg, miért éppen $\lambda = 1$ -re egyszerűsödik le a diffúzió differenciálegyenletével való bonyolult tárgyalásmód a (13) egyenletre, amely, mint láttuk, az I. Fick-törvénnyel teljesen analóg. Továbbá nem állapítható meg, milyen lélehúzásokra milyen pontossággal érvényes az összefüggés.

Az ellenáramú rendszer levezetett általános törvényszerűségét alkalmazhatjuk most is.

Álló, zártrendszerű cukorkilúgozásnál a cukor közepes koncentrációja a szeletben és a lében nem túlságosan kicsiny időértékekre jól konvergáló végtelen sorral adható meg: ¹

$$C(t) = \frac{C_0 + c_0 p}{1 + p} + 2 p^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p\mu_k)^2 + p + 1} e^{-4D \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 t} (C_0 - c_0), \quad (17)$$

$$c(t) = \frac{C_0 + c_0 p}{1 + p} - 2 p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p\mu_k)^2 + p + 1} e^{-4D \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 t} (C_0 - c_0), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\text{ahol } \mu_k \text{ a} \\ &tg\mu = -p\mu \end{aligned} \quad (19)$$

egyenlet k -adik pozitív gyökét jelenti (4. ábra),

C_0 a répaszeletek kezdeti koncentrációját,

c_0 a lúgzóvíz kezdeti koncentrációját.

Most alkalmazzuk az ellenáramú rendszerre levezetett általános törvényszerűséget erre a speciális esetre. p helyébe $-q$ -t helyettesítve:

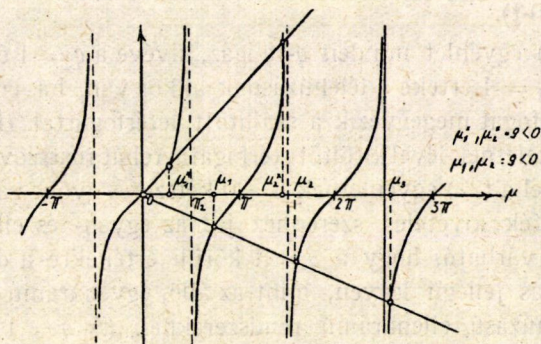
$$C(t) = \frac{C_0 - q c_0}{1 - q} + 2 q^2 (C_0 - c_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q\mu_k)^2 + 1 - q} e^{-4D \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 t}, \quad (20)$$

$$c(t) = \frac{C_0 - q c_0}{1 - q} + 2q(C_0 - c_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q\mu_k)^2 + 1 - q} e^{-4D\left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 t}, \quad (21)$$

ahol most μ_k a

$$\operatorname{tg} \mu = +q\mu \quad (22)$$

egyenlet k -adik pozitív gyökét jelenti (4. ábra).



4. ábra.

μ_k -t meghatározható például az I. mellékleten megadott nomogramm segítségével is. A nomogramm pozitív és negatív q -k meghatározására egyaránt használható (negatív $q =$ pozitív p).

A nomogramm használatánál ügyelnünk kell arra, hogy

1. A nomogrammból nem μ_k hanem $\mu_k - k\pi = \delta_k$ olvasható le.
2. A μ -k számozása pozitív q esetén némileg eltér a cikk többi részében használttól. ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$ és nem $k = 1, 2, 3, \dots$).
3. Pozitív és negatív q -khoz tartozó δ -k leolvasásánál ugyanaz a q skála de más δ skála használandó.

4. $k = 0$ -ra a nomogrammból csak nagyon pontatlanul, $0 < q < 1$ esetben pedig sehoggy sem lehet értéket leolvasni, de ez nem is szükséges, mert ezek az értékek a Jahnke—Emde-ben táblázatosan megtalálhatók ($0 < q < 1$ eset: lásd alább).

($0 < q < 1$ esetben az egyenletnek van egy imaginárius gyöke is, melyet szintén tekintetbe kell vennünk. Erre később még visszatérünk.)

C_0 most is a szelet kezdeti koncentrációját jelenti. c_0 azonban nem a kezdeti lékoncentráció, hanem a friss szeletet körülvevő nyerslé koncentrációja, vagyis a lé végkoncentrációja, amelyet nem ismerünk, épp ez az egyik meghatározandó mennyiség. Viszont ismerjük a lékoncentráció kezdeti értékét a másik csővégen: $c_1 = c(T)$. (21) egyenletbe $t = T$ -t helyettesítve kifejezhető belőle c_0 . Így most már a (20) és (21) egyenletek jobb oldalán minden mennyiség kifejezhető ismert adatokkal.

Hogy az ellenáramú kilúgozást összehasonlíthassuk az egyenáramúval, mégis rögzített C_0 és c_0 mellett ábrázoltam különböző q értékek felvételével

a $C(t)$ és a $c(t)$ függvényeket (II. melléklet), a (20) és (21) képleteken alapuló számítás eredményeképpen.

Az ábra értelmezésénél ügyelni kell arra, hogy ha az egyen- és ellenáramú rendszer *üzemi viszonyait* akarnók összehasonlítani, ez az eljárás (t. i. C_0 és c_0 rögzítése) teljesen helytelen volna, tekintettel arra, hogy egyenáramú rendszernél c_0 , ellenáramú rendszernél pedig c_1 jelenti a lúgzó víz kezdeti koncentrációját (általában 0-t).

(19) és (20) egyenlet minden q -ra igaz, kivéve a $q = 1$ értéket, ahol értelmetlenné válik. $q = 1$ értéke a lélehúzásnak akkor van, ha egy adott idő alatt szállított répatérfogat megegyezik a szállított létérfogattal. (Répatérfogat alatt természetesen a szeletnek lével kitöltött térfogata, tehát rostszövet nélküli térfogat értendő.) $q = 1$ -nél a (22) egyenletnek $\mu = 0$ kétszeres gyöke van. Ebből látható, hogy a $q = 1$ érték kivételes szerephez jut az egyen- és ellenáramú diffúzió vizsgálatánál, és várható, hogy a $q = 1$ körüli értékekre a diffúziós folyamat lefolyása egész más jellegű legyen, mint az álló, egyenáramú vagy 1-től lényegesen eltérő lélehúzású ellenáramú rendszereknél. (A $q = 1$ kivételes szerepe egyébként az 5. ábrából is kitűnik.)

A gyakorlatban előforduló lélehúzások ellenáramú rendszereknél $q = 1$ közelébe esnek. Ugyanis, mint ismeretes, ha $q < 1$, végtelen idő alatt sem állhat be teljes koncentráció kiegyenlítődés, viszont $q \gg 1$ esetben túlságosan sok vizet kell a nyersléből elpárologatnunk, hogy besűrített cukorszirupot kapjunk. Ezért $q = 1$ érték közelébe eső rendszerekkel bővebben foglalkozunk.

$q = 1$ közelébe esik

a) Ha $q > 1$, akkor a μ_k -k sorozatának legkisebb tagját, μ_1 -et az $y = tg\mu$ görbe $0 < \mu < \pi$ szakaszának az $y = +q \cdot \mu$ egyenessel való metszéspontja adja (4. ábra). Szemlélet alapján belátható, hogy μ -t q függvényeképpen felfogva q -nak monoton növekvő függvénye, $\lim_{q \rightarrow 1} \mu = 0$, tehát 1 közelébe eső q értékekre μ kicsi lesz.

Elég kis μ_1 értékekre azonban a (17) és (18) sor tagjai $k = 2$ -től kezdve gyakorlatilag elhanyagolhatók a sor konstans és $k = 1$ -es tagja mellett.

Például $q = 1,25$ ellenáramú cukorkilúgozásnál már elég nagy érték. Erre

$$\mu_1 \simeq 0,484 \frac{\pi}{2},$$

$$\mu_2 \simeq 2,78 \frac{\pi}{2}.$$

Ebből $\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \simeq 33$. Ennyiszor nagyobb a $k = 2$ -es tag kitevője a $k = 1$ -es tagénál, ami azt eredményezi, hogy a $k = 2$ -es tag 33-szor gyorsabban tart 0-hoz,

mint a $k = 1$ -es tag. Ezért nagyon kis időértékektől, illetőleg nagyságrendben a csőhossz 33-adrészétől eltekintve gyakorlatilag a $k = 2, 3, 4, \dots$ indexű tagok elhanyagolható kicsinyek, úgy hogy jó közelítéssel

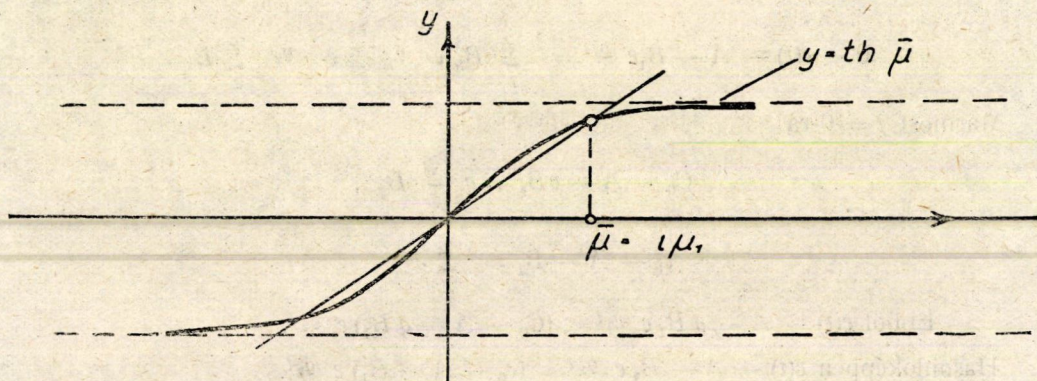
$$C(t) \approx \frac{C_0 - qc_0}{1 - q} + \frac{2q^2}{(q\mu_1)^2 + (1 - q)} e^{-4D \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 t}, \quad |23|$$

$$c(t) \approx \frac{C_0 - qc_0}{1 - q} + \frac{2q}{(q\mu_1)^2 + (1 - q)} e^{-4D \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 t}. \quad |24|$$

b) Ha $q < 1$, akkor (23) és (24) változatlanul érvényben marad. Azonban tekintetbe veendő, mint már említettük, a $tq\mu = q\mu$ egyenlet imaginárius gyöke is. Jelöljük ezt $\mu_1 = i\bar{\mu}$ -sal. Akkor (19) [19a] egyenletünk a következőképp alakul:

$$th\bar{\mu} = q\bar{\mu}.$$

Ennek egy pozitív megoldása van, ha $q < 1$, nincs pozitív megoldása, ha $q > 1$ (5. ábra).



5. ábra.

A (17) és (18) sorok tagjai közül a $k = 1$ -es exponenciálisan *növekedő*, minthogy

$$\mu_1^2 = (i\bar{\mu})^2 = -\bar{\mu}^2,$$

$k = 2, 3, 4, \dots$ -es exponenciálisan csökkenő tagok. Ezek a tagok annál lassabban csökkennek (v. ö. 4. ábra), minél kisebb értékű q . Ekkor viszont az exponenciálisan növekedő első tag gyorsabban növekszik (v. ö. 5. ábra). Mindenesetre megállapítható, hogy megint kis t értékektől, illetőleg a cső elejétől eltekintve elhanyagolhatók a $k = 2, 3, 4, \dots$ tagok. A (23) és (24) képlet most is érvényes marad, csak $-\mu_1^2$ helyébe $+\bar{\mu}^2$ helyettesítendő.

Hibabecslés

Az egyen- és ellenáramú, továbbá az álló diffúziós rendszer cukorkilúgozása ugyanazzal a (17), (18) formulával adható meg. Láttuk, hogy kis t értékektől eltekintve $q = 1$ körüli értékekre, továbbá a $[0 < q < 1]$ értékekre, tehát 0-tól

kb. 1,4-ig terjedő léleházásértékekre jó közelítéssel két taggal közelíthetjük függvényünket (23) és (24) szerint.

Semmi nehézséget nem okoz annak a hibának megbecslése, melyet a $k = 2, 3, 4, \dots$ tagok elhanyagolása okoz.

Egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket :

$$C(t) = A + q \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\varrho_k t} ,$$

$$c(t) = A + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\varrho_k t} .$$

A jobboldali sorok monoton csökkenők minden nem-negatív t -re. Felírhatók a következő egyenlőtlenségek :

$$0 < C(t) - A - q B_1 e^{-\varrho_1 t} = q \sum_2^{\infty} B_k e^{-\varrho_k t} \leq q e^{-\varrho_2 t} \sum_2^{\infty} B_k ,$$

$$0 < c(t) - A - B_1 e^{-\varrho_1 t} = \sum_2^{\infty} B_k e^{-\varrho_k t} \leq e^{-\varrho_2 t} \sum_2^{\infty} B_k .$$

Mármost $t = 0$ -ra

$$C_0 - A - q B_1 = q \sum_2^{\infty} B_k ,$$

$$c_0 - A - B_1 = \sum_2^{\infty} B_k .$$

$$\text{Ebből } c(t) - A - q B_1 e^{-\varrho_1 t} < (C_0 - A - q B_1) e^{-\varrho_2 t} .$$

$$\text{Hasonlóképpen } c(t) - A - B_1 e^{-\varrho_1 t} < (c_0 - A - B_1) e^{-\varrho_2 t} .$$

Ha $\varrho_2 t$ ϱ_1 -hez képest nagyok tételezzük fel ($0 < q < 1,4$), $e^{-\varrho_2 t}$ már kis t értékeknél nagyon kicsivé válik, vagyis közelítőleg

$$C(t) = A + q B_1 e^{-\varrho_1 t} ,$$

$$c(t) = A + B_1 e^{-\varrho_1 t} \quad (t \neq 0) .$$

Az egyenlőség nem áll fenn $t = 0$ -ra :

$$\lim_{t \rightarrow 0} C(t) < C_0 (= A + q \sum B_k) ,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} c(t) < c_0 (= A + \sum B_k) .$$

Tehát a koncentrációk igen rövid idő alatt leesnek C_0 -ról $\lim_{t \rightarrow 0} C(t)$ -re ill.

c_0 -ról $\lim_{t \rightarrow 0} c(t)$ -re

Ennek a gyors koncentrációesésnek oka az, hogy kis időértékeknél a diffúzió a szelet határrétege és a lé közti nagy koncentrációkülönbség miatt ugrásszerűen csökken, amíg a szelet belsejében egy aránylag egyenletesebb eloszlás fel nem lép.

A kezdeti szakaszban a magasabbrendű tagok is erősen belefolyanak a koncentrációváltozásba; a sor rosszul konvergál.

Nevezzük általában »kezdeti koncentrációesés«-nek a $C_0 - \lim_{t \rightarrow 0} C(t)$,

illetőleg $c_0 - \lim_{t \rightarrow 0} c(t)$ kifejezéseket.

$C(t)$ és $c(t)$ alatt a (23) és (24) szerinti C és c értendő. (Megjegyzendő, hogy az elnevezés csak $0 < q < 1,4$ esetben találó, egyébként a koncentrációesés nem gyors.)

(23) és (24) szerint

$$C_0 - \lim_{t \rightarrow 0} C(t) = - (C_0 - c_0) q \left[\frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(q\mu_1)^2 + 1 - q} \right],$$

$$c_0 - \lim_{t \rightarrow 0} c(t) = - (C_0 - c_0) \left[\frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(q\mu_1)^2 + 1 - q} \right].$$

Ez a kezdeti koncentrációesés jellemző arra a hibára, melyet akkor követünk el, ha a (17) és (18) sor helyett csak az egyszerű exponenciális (23) és (24) kifejezést vesszük figyelembe. A képlet alapján kiszámított koncentrációeséseket q függvényében a III. mellékletben ábráztuk.

$C_0 - c_0$ azonban ellenáramú, 1-nél nem sokkal nagyobb lélelhúzású rendszereknél kicsi C_0 -hoz képest, tehát 1 közelébe eső lélelhúzásoknál valóban elhanyagolható az ábra szerint a (23) és (24) használatánál elkövetett hiba. Egyenáramú és zárt rendszereknél ez már egyáltalában nem állítható.

A későbbi exponenciális tagok azért is elhanyagolhatók q fenti értékeire, mert az elhanyagolt exponenciális tagok kitevőinek együtthatói nagy abszolút pontértékű negatív számok. A IV. mellékletben az »időállandók« arányát, vagyis $\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}$ -et ábráztuk q függvényében. Ha ez kicsi, az első exponenciális tag szerepe túlnyomó.

λ meghatározása

(23) és (24) szerint

$$(23a) \quad C(t) \cong A + qBe^{-\lambda t},$$

$$(24a) \quad c(t) \cong A + Be^{-\lambda t}$$

alakja van a koncentráció függvényeknek, (az 1 indexet B és q mellől elhagytam)

ahol

$$e = \frac{4D}{l^2} \mu_1^2, \quad (25)$$

illetőleg

$$e = -\frac{4D}{l^2} \bar{\mu}^2. \quad (26)$$

(23a) és (24a) segítségével

$$\frac{dC}{dt} = -q B e^{-et},$$

$$C - c = (q - 1) B e^{-et}$$

$$\text{és így } \lambda = -\frac{\frac{dC}{dt}}{C - c} = \frac{q}{q - 1} e = \frac{q}{q - 1} \frac{4D}{l^2} \mu_1^2, \quad (27)$$

illetőleg

$$\lambda = \frac{q}{1 - q} \frac{4D}{l^2} \bar{\mu}^2.$$

Kellemetlen még, hogy a formulában μ_1 és $\bar{\mu}^2$ implicite tartalmazza q -t. Ezért — tekintve, hogy q nem sokkal különbözik 1-től, — μ_1 -t Taylor-sorba fejtjük, $q = 1$ körül q szerint. Az alábbiakban írjunk μ_1 helyett egyszerűen μ -t.

μ definiáló egyenlete:

$$\operatorname{tg} \mu = q \mu$$

Ebből $q - 1 = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\mu} - 1$, és a $\operatorname{tg} \mu$ Taylor-sorát $\mu = 0$ hely körül felhasználva

$$q - 1 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{(2k)!} \mu^{2k-2},$$

ahol a B_{2k} -k a Bernoulli-számokat jelölik. Innen

$$q - 1 = \frac{1}{3} \mu^2 + \frac{2}{15} \mu^4 + \frac{17}{105} \mu^6 + \dots \quad (28)$$

Az Abel-féle tételt alkalmazva sorok megfordítására, megkapjuk μ^2 -nek $q - 1$ szerint haladó sorát. Az így kapott sort még $\frac{q-1}{q}$ szerint haladó sorba rendezve

a következő sort kapjuk:

$$\mu^2 = 3 \left[\frac{q-1}{q} - \frac{1}{5} \left(\frac{q-1}{q} \right)^2 + \frac{4}{175} \left(\frac{q-1}{q} \right)^3 \pm \dots \right]. \quad (29)$$

Ezt a sort (27-be) visszahelyettesítve

$$\lambda = \frac{12D}{l^2} \left[1 - \frac{1}{5} \frac{q-1}{q} + \frac{4}{175} \left(\frac{q-1}{q} \right)^2 \pm \dots \right] \quad (30)$$

Szerencse, hogy ez a sor lényegesen jobban közelíthető első tagjaival, mint a $q - 1$ hatványai szerint haladó sorfejtés. Ezért jó közelítéssel igaz λ első közelítő formulája:

$$\lambda \simeq \frac{12 D}{l^2}. \quad (30a)$$

Ez a formula megegyezik az I. Magyar Matematikai Kongresszuson levezetett értékkel.

$$q = 1$$

Teljesség kedvéért külön foglalkozunk $q = 1$ esettel, mely mint mondtuk, kivételes szerepet tölt be az egyen- és ellenáramú rendszerek között.

$q = 1$ -re (23) és (24) értelmetlenné válik. Ezért ki kell használnunk, hogy C és c a q folytonos függvényei, tehát

$$\lim_{q \rightarrow 1} C(t) = [C(t)]_{q=1}, \quad (31)$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} c(t) = [c(t)]_{q=1}. \quad (32)$$

Felhasználva μ_1^2 fent közölt végtelen sorát, a határérték egyszerű eszközökkel kiszámítható:

$$C(t) = C_0 - (C_0 - c_0) \left[\frac{1}{5} - \frac{12D}{l^2} \right] t = C_0 - \frac{1}{5} (C_0 - c_0) - \lambda (C_0 - c_0) t, \quad (33)$$

$$c(t) = c_0 - (C_0 - c_0) \left[\frac{1}{5} - \frac{12D}{l^2} \right] t = c_0 - \frac{1}{5} (C_0 - c_0) - \lambda (C_0 - c_0) t. \quad (34)$$

Az összefüggésből $\lim_{t \rightarrow 0} C(t) = C_0 - \frac{1}{5} (C_0 - c_0)$, tehát a koncentráció-függvények jobboldali határértéke $\frac{1}{5} (C_0 - c_0)$ -lal kisebb a kezdeti koncentrációknál, azaz $\frac{1}{5} (C_0 - c_0)$ koncentrációesés lép fel.

Elvileg ez a koncentrációesés a végtelen sor $k = 2, 3, 4, \dots$ tagjainak együttes értékével egyenlő $t = 0$ -nál, és azért esik le hirtelen a koncentráció, mert ezek a tagok k növelésével gyorsan tartanak 0-hoz, tehát gyorsan helyreáll

a $\frac{\partial C}{\partial t} = -\lambda (C - c)$ egyenlet érvénye.

A gyakorlatban $C_0 - c_0$ nem szokott C_0 15 ÷ 20%-ánál több lenni, és így az $\frac{1}{5} (C_0 - c_0)$ tag kicsi a C_0 mellett. Egyébként is, amennyiben a kilúgozás sorba kapcsolt diffuzőrökben történik, a legnagyobb koncentrációjú diffuzőrben kisebb a hőfok, azonkívül az áramlás iránya megfordul a diffuzőr lúgzóvízzel való

feltöltésének időtartamára. Ebből kifolyólag a kísérletek tanúsága szerint a lékoncentráció változásának görbéje nem exponenciális, elméleti eredményeink erre az aránylag rövid kezdeti szakaszra nem alkalmazhatók. Ezért az $\frac{1}{5}(C_0 - c_0)$ koncentrációesést kísérletileg igazolni nagyon nehéz volna.

A (33) és (34) képletek levezethetők — ha az $\frac{1}{5}(C_0 - c_0)$ tagot elhanyagoljuk — a (12) és (13) egyenletből nyert képlettel.

Hasonlóképpen $q < 1$ és $q > 1$ esetben is a kezdeti kis koncentrációesés elhanyagolása után képleteink megegyeznek a (14) és (15) képlettel. Tehát a (14), (15) képletek eredményeink első közelítésekként foghatók fel, ha $0 < q < 1,4$.

Egybevetés Szilin és Dronov eredményeivel

A (10) képlet alapján Szilin $l/4$ -es »diffúziós útjával« számított λ érték

$$\lambda = \frac{8D}{l^2}$$

szemben a (30a)-ban levezetett első közelítő

$$\lambda = \frac{12D}{l^2}$$

értékkel.

Ez azt jelenti, hogy a »diffúziós út« hosszát elvi szempontból helyesen $l/4$ helyett $l/6$ -nak kellene venni. Vagy tekintetbevéve, hogy téglalap keresztmetszetű szeletnél 1 cm^3 térfogatra még nagyobb felszín jut, mint planparalell lemez alakú szeletnél, még kisebbnek.

Feltehető, hogy *Dronov* a Szilin-féle hipotézis alapján számította ki a molekuláris diffúzió-állandó mérhető értékéből és az általános diffúzióállandónak az üzemi ellenáramú görbéből visszszámítható értékéből a lé »konvekciós« diffúzióállandóját, β -t.

Sajnos, a molekuláris diffúzióállandó értékeit *Dronov* nem adta meg. Ezért feltételezve, hogy β értékét a molekuláris és az általános diffúzióegyütt- hatóból számította, visszafelé kiszámítottuk azokat a $\frac{4D}{l}$ -ket, melyek D_0 és β közölt értékével kielégítik a (11a) egyenletet. A (11a) egyenlet szerint

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{D_0} - \frac{l}{4D}.$$

Ha a (30a) szerinti levezetett λ értéket és az ebből folyó $\frac{l}{6}$ diffúziós úthosszt fogadjuk el helyesnek, akkor *Dronov* β állandójának értéke a következőképpen módosul:

$$\frac{1}{\beta^*} = \frac{1}{D_0} - \frac{l}{6D}. \quad (35)$$

Vagyis

$$\beta^* < \beta.$$

A 2. táblázatban feltüntettük a *Dronov* által közölt értékek mellett visszafelé kiszámított értékeit, továbbá a (35) szerinti értéket is.

Kísérletek száma	V cm/sec	D_0	$\frac{4D}{l}$ (11a)-val vissza- számítva	β (Dronov sz.)	β^* (35) szerint
1. kísérlet	0,307	1,112	1,847	2,795	1,867
2. kísérlet	0,201	1,012	1,754	2,392	1,644
3. kísérlet	0,154	0,927	1,787	1,926	1,417

Dronov hangsúlyozni kívánta a szeletek között megtapadó lé diffúziós ellenállásának szerepét. Eredményünk ezt a nézetet még jobban alátámasztja az általa mért kicsiny sebességeknél.

Az ismertetett elméleti eredmények kísérleti vizsgálatáról a Cukoripari Kutatóintézet közreműködésével későbbi cikkben lesz szó. Végül köszönetet kell mondanom a Cukoripari Kutatóintézet dolgozóinak, hogy elméleti és kísérleti téren egyaránt segítségemre voltak a diffúziós jelenségek tanulmányozásában, a szükséges irodalmat rendelkezésemre bocsátották; előadásom kísérő ábráit is részben ők bocsátották rendelkezésemre.

Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

¹ Pál S.: Cukoripari diffúziós problémák. I. Magyar Matematikai Kongresszus, sajtó alatt.

² Szilin P. M.: Cong. International des Ind. Agr. II. (1937) 534.

³ Дронов, С. Ф. Динамическая теория диффузионного способа извлечения веществ. „Сахарная промышленность“ № 10. 1949 стр. 15. И. а. № 11. стр. 24.

⁴ Дронов, С. Ф. Мацерационный способ работы на диффузии. „Сах. пром. № 6. 1949. стр. 8.

⁵ Slaviček: Ellenáramú cukorkilúgozásról. Listy Cukrovarnicke 65 (1948—49), 105.

⁶ Oplatka: Magyar Kémikusok Lapja (1949), 10—11. szám.

Matematikai módszerek a fizikában

A MOZGÁS PROBLÉMÁJA

L. INFELD

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésein

Vizsgáljuk meg, milyen eredményeket ért el újabban a relativitáselmélet a mozgás tárgyalása terén. Ahhoz, hogy ezt a problémát jól áttekinthessük, vissza kell mennünk a múltba háromezred száz évet, egészen *Newton* idejéig. Általános az a felfogás, hogy a *Newton*-féle mechanikától a XIX. század végének fizikájához vezető fejlődés lényege az, hogy a mechanikus szemléletmódot az erőtér fogalmán alapuló szemléletmód váltotta fel. A klasszikus mechanikában az alapvető szerepet a részecskék játsszák, amelyek külső erők hatására mozognak a térben. Ez matematikailag abban nyilvánul meg, hogy a mechanika egyenletei közönséges differenciálegyenletek. Ezzel szemben a térelméletben a vizsgált jelenségeknek színhelye az egész tér, míg a mechanikában csak a térben leírt vonalakkal foglalkozunk. A speciális relativitáselmélet kifejezőmódjával azt is mondhatjuk, hogy a térelméletben az események háttere az egész négydimenziós tér-idő. Ennek következtében az erőteret leíró egyenleteink parciális differenciálegyenletek. A mechanikus felfogásból az erőtér fogalmán alapuló felfogásra való áttérés egyike a tudomány történetében bekövetkezett legjelentősebb és legeredményesebb forradalmaknak.

Azt hiszem, ez a felfogás a dolgok túlságos leegyszerűsítését jelenti. A térelméleti felfogás első nyomai már a *Newton*-féle mechanikában megtalálhatók. A *Newton*-féle mechanika alapegyenlete a következő:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

A baloldalon szerepel a *tömeg* szimbóluma. A *tömeg* korántsem egyszerű fogalom, mégis át szeretnénk siklani a *tömeg* pontos definíciójával kapcsolatban felmerülő nehézségeken. A baloldalon a második szimbólum a *gyorsulás* jele. A *gyorsulás* egyszerű kinematikai fogalom, értelmezése nem ütközik különösebb nehézségekbe. Az egyenlet jobb oldalán az *erő* áll. A klasszikus mechanikában minden gyakorlatban előforduló esetben az *erő* a koordinátáknak és esetleg a sebességnek a függvénye. Ezt a függvényt részint találgatással, részint kísérletekkel határozzák meg. Minden esetben, amikor a mozgásegyenleteket a mechanikában alkalmazni akarjuk, az erőfüggvény ismeretes. Csak ismert erő kifejezés esetén jutunk differenciálegyenletre, csak ekkor tudjuk összehasonlítani a differenciálegyenletek megoldását a tapasztalattal. Szép példáját láthatjuk ennek a klasszikus mechanikában a *Newton*-féle gravitációs erők tárgyalásánál. Ilyenkor F

egyszerű függvény, mely a részecskék pillanatnyi távolságától függ. Ilyen módon vált lehetővé az égitestek mozgásának tárgyalása. (A bolygómozgás problémájának megoldása talán a Newton-féle mechanika legnagyobb diadala.) A Newton-féle mechanikában az erő már erőtér formájában jelenik meg: az erőt ismerjük, bármi legyen is a mozgó test helyzete a térben. Ha tovább követjük a klasszikus mechanika fejlődését, *Hamilton, Lagrange, Jacobi* munkája mutatja, hogyan nyomul előtérbe a tér fogalma már a klasszikus mechanikában. Ez különösen szembeszökik a Hamilton—Jacobi-egyenletnél, amelyik parciális differenciálegyenlet, hasonlóan a térelmélet összes egyenletéhez.

A térelmélet csak jóval később, a XIX. sz. második felében fejlődött ki egészen, amikor sikeresen le tudta írni az elektromágneses jelenségeket. Ezt *Faraday* működése tette lehetségessé. Az elektromágneses tér törvényeit *Maxwell* formulázta meg, lineáris parciális differenciálegyenletek alakjában. Az elmondottakból láthatjuk, hogy a térelmélet nem annyira egyetlen forradalomnak, hanem inkább egymásután tett lépésekből álló fejlődésnek az eredménye. A legjelentősebb lépést kétségtelenül *Faraday* és *Maxwell* tette meg.

Mindezek ellenére nem mondhatjuk, hogy *Maxwell* elmélete következetesen végigviszi a térelmélet célkitűzéseit. Igaz, hogy felállítja azokat a törvényeket, melyek leírják az elektromágneses tér időbeli változását, de nem lehet levezetni a Maxwell-egyenletekből olyan törvényeket, melyek töltött részecskék mozgásának kiszámítására alkalmasak volnának. Akár az elektromágneses tér szingularitásainak fogjuk fel a töltött részecskéket, akár folytonos töltéseloszlást tételezünk fel, a téregyenletek mellett külön fel kell írunk a mozgásegyenleteket is. Azt mondhatjuk, hogy az elektromágnesség elmélete két pilléren nyugszik: egyik pillért alkotják a *téregyenletek*, a másikat a *Lorentz-féle mozgásegyenletek*. Abban nem reménykedhetünk, hogy a Lorentz-féle mozgásegyenleteket levezethetjük *Maxwell* téregyenleteiből. Mozgásegyenletek sohasem vezethetők le lineáris téregyenletekből, márpedig a Maxwell-egyenletek lineáris egyenletek.

Fordítsuk figyelmünket a téregyenleteknek egészen más csoportja, a gravitációs tér egyenletei felé. *Einstein* volt az, aki először vette revízió alá Newton gravitációs elméletét, amikor a gravitációs teret új egyenletekkel írta le. A gravitációs téregyenleteket szimbolikusan a következő alakban írhatjuk fel:

$$R_{kl} = 0$$

Az egyenletek szerkezetének részletes tárgyalásába nem bocsátkozunk, csak két megjegyzést teszünk: Először is ezek az egyenletek leírják a gravitációs teret, meghatározzák a gravitációs tenzor tíz komponensét, ugyanúgy, ahogy a Maxwell-egyenletek az elektromágneses tenzor hat komponensét határozzák meg. Második megjegyzésünk az, hogy ezek az egyenletek, ellentétben a Maxwell-egyenletekkel, nem lineárisak.

Einstein elmélete ugyanolyan nehézségekkel találkozott, amilyen *Maxwell* elméletében is fellépett. A relativitáselmélet kifejlődésének első szakaszában,

1914 körül, a következő fontos kérdés merült fel: milyen mozgást fog végezni egy kis részecske valamilyen megadott gravitációs térben. Ha le akarjuk írni a bolygók mozgását, válaszolnunk kell erre a kérdésre. A válasz így hangzott: a részecske adott erőterben geodétikus vonalon fog mozogni. A relativitáselmélet alapfeltevései ezek szerint a következő két egyenletben foglalhatók össze:

$$R_{kl} = 0, \\ \delta \int ds = 0.$$

Az első egyenlet a gravitációs teret határozza meg, a másik pedig kis részecskék mozgását írja le a gravitációs térben. Látható a hasonlóság ezek között az egyenletek és az elektromágneses tér egyenletei között. Az elektromágnesség tárgyalásánál szerepelnek a Maxwell-féle téregyenletek és a Lorentz-féle mozgásegyenletek. A gravitáció elméletében szerepelnek az Einstein-féle téregyenletek és az Einstein-féle geodétikus mozgásegyenletek. Ismételten le kell szögeznünk, hogy *Einstein* mozgásegyenletei csak kis részecskék mozgásának leírására alkalmasak. Két nagytömegű test, például kettős csillag mozgásának tárgyalása jóval nehezebb probléma. Ezt a relativitáselmélet kifejlődésének első szakaszában nem is tudták megoldani.

Nyilvánvalóan sokkal kielégítőbb volna a helyzet, ha a mozgásegyenleteket le tudnók vezetni a téregyenletekből. Említettem, hogy erre az elektromágneses tér esetében semmi remény nincsen, hiszen az elektromágneses tér egyenletei lineárisak. Más azonban a helyzet a gravitációs tér esetében, ahol a téregyenletek nem lineárisak. Amikor 1936-ban *Princetonba* kerültem, *Einstein* elbeszélte nekem, hogy 15 éve foglalkozik ezzel a fontos kérdéssel. Azt a véleményét nyilvánította, hogy a mozgásegyenletek levezethetők a téregyenletekből. A probléma végleges és — azt hiszem — kielégítő megoldását *Einsteinnel* együtt 1949-ben találtuk meg. Közös dolgozatban kimutattuk, hogy az elektrodinamikától eltérően a relativitáselmélet egyetlen pilléren nyugszik: a *téregyenleteken*. A mozgásegyenletek ezekből levezethetők. Azonban a mozgásegyenletek explicit alakjának meghatározása a téregyenletek alapján nem könnyű feladat.

Ugyanezt a problémát majdnem egyidejűleg egy szovjet fizikus, *Fok* is felvetette, és munkatársaival együtt részben meg is oldotta.

Foglaljuk össze röviden az eredményeket: a relativitáselméletnek azt a törvényét, hogy kis részecskék geodétikus vonalon mozognak, nem kell külön feltevésként bevezetni, mert a téregyenletekből levezethető. Két nagyobb tömegű test mozgástörvényei is levezethetők a téregyenletekből. A mozgástörvény első közelítésben megegyezik a Newton-féle mozgástörvénnyel. Ha azonban magasabb közelítésben számolunk, azt találjuk, hogy a relativisztikus mozgástörvény eltér a Newton-féle mozgástörvénytől.

Rövid áttekintésemet egy filozófiai vonatkozású megjegyzéssel szeretném befejezni.

El kell ismernünk, hogy a mozgásegyenletek levezetésének módja nem egyszerű. A Newton-féle mozgásegyenleteken túlmenő közelítés kiszámítása igen sok munkával jár. Valaki feltehetné a szkeptikus kérdést: nem volna-e egyszerűbb önálló feltevésként felvenni a téregyenletek mellett a mozgásegyenleteket is? Azt hiszem, hogy a kérdésre válaszolva először különbséget kell tennünk *logikai* egyszerűség és *technikai* egyszerűség között. Egy olyan elmélet, amely elveti a mozgásegyenletek önálló feltevésként való bevezetésének gondolatát, és azokat a téregyenletekből származtatja le, technikailag talán bonyolultabb, azonban logikailag mégis sokkal egyszerűbbnek tekinthető, mint az olyan elmélet, amely a téregyenletek mellett a mozgásegyenleteket is önálló feltevésnek tekinti. Kevesebbet tételezünk fel, ezért kell hosszabb levezetéseket csinálnunk, noha a levezetések elvégzése korántsem könnyű feladat. A tudomány, fejlődésének egész története során azt látjuk, hogy a fizikus nem a *technikai*, hanem a *logikai* egyszerűségekre törekszik. Mindig kész vállalni a számítások technikai nehézségeit a logikai egyszerűség kedvéért. Azt mondhatjuk, hogy a modern fizika számításai technikailag egyre bonyolultabbá válnak, de ez a logikai egyszerűség felé való törekvés következménye. Ilyen szempontból a mozgásegyenleteknek téregyenletekből való levezetését nyereségnek kell tekintenünk, mert ennek segítségével az általános relativitáselmélet logikai felépítését egyszerűbbé tehetjük.

*Varsói Egyetem,
Elméleti Fizikai Intézete.*

A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS ÉS TENZORKALKULUS FIZIKAI ALKALMAZÁSAI

NOVOBÁTZKY KÁROLY r. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

A fizika számos fejezetében kettős tagozódás észlelhető. A probléma egyfelől az egyensúly feltételeinek meghatározása, másfelől a természeti történet törvényszerű leírása. Ez a két feladat matematikai módszereiben jellemzően különbözik egymástól. Az egyensúly feltételeit rendszerint egy függvény szélső értéke szabja meg. Ez a mechanikai sztatikában a rendszer potenciális energiájának minimuma, az elektrosztatikában a Thomson-féle tétel szerint ugyancsak az elektrosztatikai energia minimuma, a termodinamikában, melynek találébb neve termosztatika volna, az entrópia, vagy termodinamikai potenciál maximuma.

Egészen másképpen áll a helyzet, amikor jelenségek időbeli lefolyásának leírásáról van szó. A differenciálegyenletek, melyek a fizikai mennyiségek időfüggését jellemzik, nem valamely függvény, hanem egy határozott integrál extrémumfeltételeiből származnak, Euler-féle egyenletei egy variációs problémának. Elég futólag átlapozni valamely modern fizikai kompendiumot, hogy meggyőződjünk róla, mennyire centrális módszere a variációszámítás a mai elméleti fizikának. Éspedig kettős értelemben: úgy is, mint kutató módszer, úgy is, mint páratlan összefoglaló képességű kalkulus. Ha az elméleti fizikus olyan helyzetbe kerülne, hogy hiányos emlékezetét semmiféle kézikönyv nem támogatná, akkor is könnyen reprodukálhatná a kérdéses fizikai fejezet minden mennyiségi vonatkozását az összes részletfinomságokkal együtt, ha egyetlenegy kifejezést emlékezetében tartott: a fejezet Lagrange-függvényét. Csodálatos és mindmáig meg nem indokolható tény, hogy a klasszikus és relativisztikus mechanika, az elektromágneses tér, a skalár- és vektormezontér, az elektron- és gravitációs-tér differenciálegyenletei egy-egy variációs probléma Euler-féle egyenleteiként adódnak.

Legismertebb a mechanika esete. Ha valamely rendszer általános koordinátáit q_1, q_2, \dots -vel jelöljük, időszerinti differenciálhányadosaikat pedig $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ -vel, akkor a mechanikai mozgásegyenletek pontos ekvivalensek azzal a követelménnyel, hogy a következő integrál

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) \dots dt$$

stationér értéket vegyen fel. Az L Lagrange-függvény a klasszikus mechaniká-

ban végig a rendszer kinetikai és potenciális energiájának különbsége :

$$L = T - V.$$

A problémából eredő Euler-egyenletek :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

és ezek csakugyan azonosak a dinamikai megfontolásokból adódó ú. n. másodfajú Lagrange-féle mozgásegyenletekkel. A variációt állandó integrálhatárok mellett kell keresztülvinni. Jellemző és a felsorolt tereknél folyton megisméltendő jelenség, hogy az alapvető Lagrange-függvénynek közvetlen fizikai jelentése nincs. Így pl. az elektromágneses tér esetében a Lagrange-függvény az elektromos és mágneses energiasűrűség különbsége, holott összegüknek volna kézzelfogható fizikai jelentése. Ugyancsak általános vonás, hogy a vázolt esetekben az integrál szélső értékének természete, vagy létezése, egyáltalán nem érdekli a fizikust. Másképpen áll a helyzet speciális problémák megoldásánál. Ott a második variáció definit vagy indefinit jellege lényeges szerepet játszik.

Az általános relativitás elméletének megalkotásával a variációszámítás fontossága erősen megnövekedett. Ez az elmélet új $g_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ függvényeket vezet be, melyek együtthatói a tér ivelemnégyzetének :

$$ds^2 = \Sigma \Sigma g_{ik} dx_i dx_k.$$

A g_{ik} mennyiségek a gravitációs teret jellemzik és másodrendű parciális differenciálegyenletek által vannak meghatározva. Nevezetes, hogy ezeket az Einstein-féle gravitációs egyenleteket ugyancsak variációs elv szolgáltatja. De fizikai szempontból sokkal fontosabb a következő tény : most már az általános kovariancia követelményének megfelelően pl. az elektromágneses tér Lagrange-függvényét mint invariánst, a szigorúan vett elektromágneses mennyiségeken kívül, a g_{ik} -ból is fel kell építeni. A feladat nem nehéz, hiszen lényegében semmi mást nem jelent, mint L -t általános koordinátákban felírni. A g_{ik} -k variációja alkalmából L tizenhattagú összeget ad, mely ilyen alakú : $\delta L = \Sigma \Sigma T_{ik} \delta g_{ik}$. Nagy horderejű körülmény, hogy ezeknek a T_{ik} koefficienseknek elsőrendű fizikai jelentésük van. Jelentik sorban az elektromágneses tér energiáját, három impulzuskomponensét és a Maxwell-féle feszültségeket. Továbbmenően ezeknek a komponenseknek a divergenciája a Lorentz-féle ponderomotoros erőt adja. Gondoljuk meg, milyen fáradságos fizikai megfontolások útján jutott el *Maxwell* az energia és a feszültségek analitikai kifejezéseire, milyen mély elmerülés vezetett a Poynting-féle vektor fogalmi megkonstruálásához, most pedig egyszerű variációs formalizmus megengedi, hogy játszva alkossuk meg ezeket a fontos fizikai mennyiségeket. Ha egy elméleti fizikus szellemesen el akarna szórakozni, íróasztala mellett ülve, költött Lagrange-függvényből megalkothatná egy lehetséges erőternek nemcsak

differenciálegyenleteit, hanem összes fontos fizikai mennyiségeit. Olyan tisztán látna bele ebbe a költött világba, mintha valóságban előtte állana. Ez természetesen csak játék volna, de világosan megmutatja a variációs módszer heurisztikus erejét. Így pl. mikor *Proca* mélyreható meggondolások alapján megalkotta a ma annyira fontos mezontér Lagrange-függvényét, már tulajdonképpen készen is volt feladatával. Nem kellett végig járnia elődei fáradságos útját, formális eljárással meghatározhatta ennek az erőternek minden jellegzetes mennyiségét. *Einstein* és *Schrödinger*, akik hisznek a gravitáció és elektromágnesség szerves egységében, hosszú évek óta a variációs módszerrel folytatják kutatásaikat.

Ismeretes, hogy a mechanikának és az erőterek elméletének legfontosabb és leggyakrabban felhasznált tételei az energia és impulzus megmaradása. Ezeket a megmaradási tételeket is a hatásintegrálnak egy speciális variációja szolgáltatja. A gondolatmenet igen egyszerű. Tekintettel arra, hogy az $I = \int L dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ általános hatásintegrál feltétel szerint invariáns, egy $\bar{x}_i = x_i + \xi_i$ infinitezimális transzformáció, hol ξ_i végtelen kicsiny, tényleges változást nem idézhet elő benne. Formális változások azonban a transzformáció végrehajtása alkalmával igenis fellépnek. Magától értetődő tehát, hogy ezek a változások azonosan zérusok, ha I invariáns. Rendkívül érdekes, hogy az így kapott négy azonosság éppen az energia és impulzus megmaradását fejezi ki. A transzformáció keresztülvitele adott esetben nem éppen egyszerű feladat. A variációszámítás azonban itt is segítségünkre siet, és a hosszadalmas számítást sima alakisággá változtatja.

Maga a kanonikus elmélet, mely különösen az újabb időben a kvantumelmélettel kapcsolatban egészen különleges fontosságra tett szert, ugyancsak közvetlen összefüggésben áll a variációszámítással. Egyfelől azért, mert a Lagrange-függvényből származó Euler-egyenletek egyszerű Legendre-transzformációval átmennek a kanonikus egyenletekbe, másfelől maguk is Euler-egyenletei egy másik variációs problémának.

Végül feltétlenül fel kell említenem a variációszámítás ú. n. határformulájának nevezetes fizikai szerepét. Egyszerűség kedvéért ismét a mechanika esetére szorítkozom. Ha a hatásintegrál kifejezésében az integrál határait nem tekintjük változatlanoknak, hanem magát t -t, a független változót is variáljuk, akkor δI kifejezése valamivel komplikáltabb lesz. A jól ismert

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta L}{\delta q_i} \delta q_i dt$$

kifejezéshez hozzájárul még a következő:

$$-H \delta t + p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \dots$$

Itt H jelenti a mechanikai rendszer *Hamilton-függvényét*, p_1, p_2, \dots a q_1, q_2, \dots -nek megfelelő kanonikus impulzusokat. Ez a határformula szolgál most a

kanonikusan konjugált mennyiségek definíciójául. A δq_1 együtthatója p_1 , a q_1 -hez rendelt kanonikus impulzus. De épp oly jogosan megállapíthatjuk *Pauli* tiltakozása ellenére, hogy a t időnek konjugáltja a $-H$. Ennek pedig a kvantumelméletben fontos következménye van. Ez az elmélet a kanonikus konjugáltakat differenciáloperátorokkal azonosítja. Így a p_1 -t a $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_1}$ -vel, p_2 -t $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_2}$ -vel stb. Ennélfogva a t időnek konjugáltját, $-H$ -t a $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$ -vel kell azonosítani. De tudvalevőleg a H Hamilton-függvényt a q_i koordinátákkal és a p_i impulzusokkal is ki tudjuk fejezni: $-H = -H(q_i, p_i)$. A két operátor megkövetelt egyenlőségéből következik tehát, hogy mindkettő csak olyan $\psi(q_1, q_2, \dots)$ függvényekre alkalmazható, melyekre fennáll a $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -H\psi$, vagy $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + H\psi = 0$ egyenlőség. Ez a kvantummechanika jól ismert hullám-

egyenlete. Különös, hogy a vázolt leszármaztatásra az irodalom nem utal. Kiemelendő, hogy a kanonikus egyenletek nem definiálják t -t és H -t konjugált párnak, ott ugyanis az előjelek nem vágnak. A definíciót csak a variációszámítás határformulájára lehet alapítani. Az erőterek négydimenziós elméletében egészen hasonlóan megállapíthatjuk az x_1, x_2, x_3, x_4 független változók konjugált társait, és ugyancsak levonhatjuk a kvantumelméleti következményeket.

A variációszámítás módszerei nélkül a klasszikus és a kvantumfizika is nehezen hozzáférhető, módszertanilag széthulló diszciplínákból állna.

A tenzorkalkulushoz is megadja az átvezető hidat. Hiszen az első variáció két végtelenül szomszédos vonalhoz vagy felülethez tartozó integrálértékek különbsége, és mint ilyen, független minden koordinátarendszertől. A vonatkozó rendszertől függetlenül értelmezhető mennyiségeket általában tenzoroknak szoktuk nevezni, és ebbe a fogalomcsoportba beletartozik a vektor és a skalár is. A vektor miniatűr hasonmása a koordinátadifferenciálok által megadott irányított ívelem. Éppen ezért a vektort úgy is definiáljuk, hogy komponensei úgy transzformálódnak, mint a koordinátadifferenciálok: $v_1 \sim dx_1$. Ennek mintájára a kétindexes tenzort is így határozzuk meg: olyan mennyiség, melynek T_{ik} komponense úgy transzformálódik, mint a $dx_i dx_k$ szorzat. A definíció következménye, hogy a transzformált komponensek az eredetieknek lineáris formái: $\bar{T}_{ik} = \Sigma \Sigma \alpha_{ik} T_{ik}$. Az a kijelentés tehát, hogy egy tenzor komponensei egy koordinátarendszerben O -ok, azt jelenti, hogy minden más koordinátarendszerben is azok. A kijelentés minden vonatkozó rendszertől független. Az általános relativitás elméletének egyik szép alkotása, hogy kimutatta: minden fizikai mennyiség transzformációs tulajdonságánál fogva skalár, vektor, vagy többindexes tenzor, melynek lehetnek még speciális szimmetriatulajdonságai. (Újabb felismerés a szpinor.) Így pl. az elektromos és mágneses térerősség három-három komponense úgy transzformálódik, mint

egy antiszimmetrikus tenzor. A legegyszerűbb ilyen tenzort egy vektornak a rotációja szolgáltatja. És valóban kitűnt, hogy az elektromágneses térerősség a négyes potenciálnak a rotációja. Nem állhatom meg, hogy rá ne mutassak ennek a kijelentésnek az óriási horderejére. Ez az egyszerű mondat magában foglalja az indukció egész jelenségkörét, mai elektrotechnikánk alfáját és omegáját. Ez a formális kijelentés összesíti *Faraday* sokévi drámai kutatóharcának eredményét, sőt megtoldja még azzal, hogy valódi mágnesség nincs. Matematikailag jobban áthatni egy jelenségkört, eredményeit tömörebben összefoglalni már igazán nem lehet.

A relativitás elmélete azonban egy másik követeléssel is előáll. Ismeretes, hogy a fizikai elméleteket differenciálegyenletrendszerek írják le. Gondoljuk ezeket zérusra redukált alakban. Exakt elmélet esetében a baloldalnak tenzorkomponenseknek kell lenniök. Pl. $T_{ik} = 0$. Ugyanis ekkor az előbb mondottak szerint egy másik koordináta-rendszerben ugyancsak így hangzanak: $\overline{T}_{ik} = 0$. Ez a körülmény évtizedeken át szuggesztív hatással volt a spekulatív kutatásra. Gondoljuk el pl., hogy némi tapogatódzással sikerült megállapítanunk, hogy egy jelenségkörben fellépő mennyiségek milyen jellegű tenzorok. A rájuk vonatkozó természettörvények baloldalai tehát az előbbiek szerint nem lehetnek mások, mint belőlük képezett újabb tenzorok. Nem kell mást tennünk, mint — a tenzoralgebra és tenzoralízis kitűnően kidolgozott módszereit igénybe véve — a térmennyiségek tenzoraiból újabb tenzorokat alkotni és ezeket a téregyenletek baloldalainak tekinteni. De a fák nem nőnek az égig. A kapott differenciálegyenletek legtöbbször oly komplikáltak, hogy megoldásuk nem sikerül. Pedig csak így válnék lehetővé a tapasztalattal való összehasonlításuk. A módszer néhány esetben mégis megmutatta rendkívüli teljesítőképességét. Így születtek meg az Einstein-féle gravitációs egyenletek, a Dirac-féle elektronegyenlet és a Proca-féle mezonegyenletek. A módszer jelentősége éppen napjainkban ébredt fel újból, mikor az elméleti fizikusok igyekezete arra irányul, hogy szingularitásoktól mentes kvantumelméletet építsenek ki. Ennek a fáradságos munkának első eredményeként elkönnyelhetjük, hogy *Tomonaganak* és *Schwingernek* sikerült mind a csererelációkat, mind a hullámeqyenletet szembeszökően kovariáns alakra hozni. Meg vagyok győződve, hogy az út fáradságosabb második szakaszán a tenzorkalkulus ugyancsak jelentős szerepet fog játszani.

*Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Fizikai Intézete.*

MATEMATIKAI MÓDSZEREK A MOLEKULA-FIZIKA EGYES TERÜLETEIN

BUDÓ ÁGOSTON lev. tag.

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

A molekulák szerkezetére vonatkozó legfontosabb felvilágosításokat a *molekulaszínképek* szolgáltatják, amelyek kielégítő értelmezése csak a kvantummechanika felállításával vált lehetségessé. Azok a matematikai módszerek tehát, amelyeket a molekulaszpektrumok értelmezésénél használunk, a kvantummechanika elveinek a molekulákra való alkalmazásával kapcsolatosak. A kvantummechanika szerint valamely atomi rendszer tulajdonságait a rendszer hullámegyenlete — általános alakban a szokásos jelölésekkel a

$$(H - E)\psi = 0 \quad (1)$$

parciális differenciálegyenlet — szabja meg. Ezért a következőkben először a molekula, és pedig egyszerűség kedvéért a kétatomos molekulák hullámegyenletét fogjuk felírni, ezzel az egyenlettel kapcsolatban azután egészen röviden és nagy vonásokban vázolunk néhány olyan kérdést, amely a spektrumok szempontjából, de más területen is igen fontos.

Hogy a molekula hullámegyenletét felírhassuk, meg kell állapodnunk a molekula helyzetét jellemző koordinátákban. A koordináta-rendszer kezdőpontját a molekula súlypontjával egybeesőnek vehetjük, és ezt a térben nyugvónak tekinthetjük, mivel a molekula transzlációs mozgása a spektrum szempontjából nem lényeges. Így a magok helyzetét megadhatjuk az r magtávolsággal és a molekulatengely irányát megszabó ϑ , φ szögekkel. Az elektronok helyzetét legalkalmasabb a molekulatengelyhez rögzített, tehát a magokkal együttmozgó koordináta-rendszerben jellemezni, f számú elektron esetében az x_1, y_1, \dots, z_f koordinátákkal. Ezekben a koordinátákban a *molekula hullámegyenlete* a következőképpen írható: ¹

$$\left\{ H_0(x_1, \dots, z_f; r) - \frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \operatorname{ctg} \vartheta \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} - iP_x \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} - iP_x \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \sin \vartheta P_y - i \cos \vartheta P_z \right)^2 \right] - E \right\} \psi = 0 \quad (2)$$

Itt a H_0 Hamilton-operátor az elektron-koordinátákon kívül az r magtávolságtól, mint paramétertől függ, vagyis H_0 nem más, mint a térben rögzítve gondolt magokkal bíró molekulában az elektronokhoz tartozó Hamilton-operátor;

P_x, P_y, P_z az elektronok teljes impulzusmomentumának komponensei a molekulához rögzített koordináta-rendszerben, tehát pl.

$$P_x = -i \sum_k \left(y_k \frac{\partial}{\partial z_k} - z_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \quad (3)$$

végül $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ a két mag m_1, m_2 tömegével meghatározott, ú. n. redukált tömeg. Megjegyezzük, hogy részletesebb megfontolások szerint a hullámegyenlet lényegében akkor is a (2) alakot ölti, ha az elektronspint is figyelembe vesszük². Ebben az esetben H_0 -ban és P_x -ekben a Dirac-féle elméletből, ill. az egyszerűbb Pauli-féle elméletből ismert spin-operátorok is fellépnek, a ψ hullámfüggvény helyett pedig — mivel mindegyik elektron spinje a molekulatengellyel párhuzamosan (α_k), ill. antiparallel (β_k) állhat be — a

$$\psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_f, \dots, \beta_1, \dots, \beta_f} \quad (4)$$

2^f számú hullámfüggvény szerepel, úgyhogy (2) tulajdonképpen 2^f számú szimultán hullámegyenletet jelent.

A (2) hullámegyenletnek exakt megoldása — az E sajátértékek és a ψ sajátfüggvények meghatározása — matematikai természetű nehézségek miatt még a legegyszerűbb molekuláknál sem sikerült. Ennek ellenére is lehetséges azonban számos általános érvényű és a spektrum értelmezése szempontjából igen fontos és szemléletes megállapítást tenni a következőképpen. Ha a (2) hullámegyenletben bizonyos viszonylag kicsiny tagokat elhagyunk, az egyenlet separálható három részre, nevezetesen (2) a

$$\psi = \Phi(x_1, \dots, z_f; r) \cdot R(r) \cdot u(\vartheta, \varphi) \quad (5)$$

feltevéssel a következő három egyenletre bomlik:

$$[H_0 - V_{el}(r)] \Phi = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \Omega \cos \vartheta \right)^2 \right] u + E_{rot} u = 0, \quad (7)$$

$$\left[\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + E - V_{el}(r) - E_{rot}(r) \right] R = 0. \quad (8)$$

A (7) egyenletnél felhasználtuk a $P_z \psi = \Omega \psi$ összefüggést, amely annyit jelent, hogy az elektronok impulzusmomentumának a molekulatengelyre való vetülete állandó Ω kvantált értékkel bír.

A molekula teljes E energiáját, amelynek meghatározásán a spektrum értelmezése alapszik, a három egyenlet közül a (8) tartalmazza. Ebben a potenciális energia szerepét a $V_{el}(r) + E_{rot}(r)$ függvény tölti be, melyet a (6) és (7) egyenletekből kell meghatároznunk.

Az utóbbi a »szimmetrikus pörgetyű« hullámegyenlete, amely szigorúan megoldható³. A sajátértékek:

$$E_{rot}(r) = \frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu r^2} [J(J+1) - \Omega^2], \quad (9)$$

ahol $J = \Omega, \Omega + 1, \Omega + 2, \dots$ (10)

az u . n. rotációs kvantumszám, a sajátfüggvények pedig, az $e^{iM\varphi}$ faktortól eltekintve, lényegében Jacobi-féle polinomok, melyek az $\Omega = 0$ speciális esetben — amikor (7) a térbeli rotátor általánosan ismert differenciálegyenletére redukálódik — a hozzárendelt gömbfüggvényekbe mennek át.

A (6) egyenletnél, a »kétcentrum-rendszer« differenciálegyenleténél, már sokkal nehezebb problémával állunk szemben, amelyre még visszatérünk; a $V_{el}(r)$ -et nem tudjuk általánosan és áttekinthető alakban megadni, márpedig (8) megoldásához $V_{el}(r)$ -nek legalább is az r -től való függésére szükség van. Ennek a függésnek a jellegéről fizikailag annyi közvetlenül megállapítható, hogy stabilis molekulák esetében $V_{el}(r)$ -nek bizonyos r_e magtávolság mellett minimummal kell bírnia, továbbá, hogy $V_{el}(r)$ -nek igen kis értékekre csökkenő r -nél a magok elektrosztatikus taszítása következtében erősen növekednie kell, végül igen nagy értékek felé növekvő magtávolságnál $V_{el}(r)$ -nek az egyre csökkenő erőhatás miatt állandó értékhez kell közelednie. Ha tehát általános eredményre akarunk jutni, nem tehetünk mást, minthogy a fenti típusú függvényre valamilyen analitikai alakot választunk, lehetőleg olyant, amelynél (8) megoldása egyszerű lesz. Ilyen függvény pl a Morse-féle⁴:

$$V_{el}(r) = E_{el} + D[1 - e^{-\alpha(r-r_e)}]^2, \quad (11)$$

ahol az állandók közül $E_{el} = V_{el}(r_e)$ az r_e egyensúlyi helyzetnek megfelelő energia, D pedig a molekulának az E_{el} nivótól számított disszociációs energiája.

A $V_{el}(r)$ és $E_{rot}(r)$ fenti kifejezéseivel a (8) egyenlet sajátértékei és sajátfüggvényei meghatározhatók; eredményül adódik:

$$E = E_{el} + \omega_e(v + \frac{1}{2}) - \omega_e x_e(v + \frac{1}{2})^2 + B_v J(J+1) - D_v J^2(J+1)^2, \quad (12)$$

ahol $v = 0, 1, 2, \dots$ az u . n. rezgési kvantumszám, ω_e, x_e, B_v, D_v pedig állandók, melyek a (7), (8) egyenletben, ill. a (11) feltevésben előforduló r_e, D állandókkal és v -vel, itt nem részletezendő módon kifejezhetők.

A (12) eredmény első közelítésben azt a fizikailag várható, szemléletes tényt fejezi ki, hogy a molekula teljes energiája az elektronenergia, a rezgési energia és a forgási energia összege, azáltal azonban, hogy a B_v, D_v mennyiségeknek a v rezgési kvantumszámtól való függését is megadja, modellszerűen szólva a rezgés és forgás közti kölcsönhatást is tartalmazza.

Spektroszkópiai szempontból az E meghatározása után a másik alapvető kérdés, hogy két állapot:

$$(E'_{el}, v', J') \text{ és } (E''_{el}, v'', J'') \quad (13)$$

között lehetséges-e átmenet, és milyen valószínűséggel. Erre a kvantummechanika szerint a két állapot sajátfüggvényeinek segítségével kiszámítható bizonyos integrálok adnak választ; így pl. az egyik fő eredmény, ú. n. kiválasztási szabály az, hogy $J'' - J' = 0, \pm 1$ lehet.

A (12) energiaformula és a kiválasztási szabályok figyelembevételével a molekulaszínképek legszembeötlőbb tulajdonságairól — a vonalaknak egyik oldalon élesen határolt sávokba, a sávoknak sávrendszerekbe való sorakozásáról — számot lehet adni, a fent szereplő ω_e, B_v, D_v állandóknak a spektrum kiértékelése útján való meghatározásából pedig a molekula több fontos adatára lehet következtetni, így pl. a magtávolságra, a rezgési és forgási frekvenciákra, a potenciálgörbe menetére és a disszociációs energiára.

A spektrum finomabb vonásainak értelmezését azonban a fenti egyszerű energiaformulától nem is várhatjuk, mert hiszen erre úgy jutottunk, hogy a hullámegyenletben bizonyos tagokat elhanyagoltunk. Az elhanyagolt tagoknak befolyását azonban a sajátértékek és sajátfüggvények közelítő ismeretének birtokában a kvantummechanikai *perturbációszámítás* módszereivel figyelembe lehet venni. Ezeknek a sok esetben meglehetősen bonyolult számításoknak a segítségével sikerült a legtöbb ismert kétatomos molekula sávjainak rotációs szerkezetét, mondhatni legapróbb részletekig is, értelmezni és a molekulák felépítésére vonatkozólag számos következtetést vonni. Sok ide tartozó kérdés tisztázásához, amelyeknek felsorolása azonban itt messze vezetne, a budapesti Spektroszkópiai Intézet munkatársai is hozzájárultak.

A molekulaszínképek fent vázolt értelmezése természetesen még nem teljesen kielégítő, mert hiszen a (12) alapformulában az E_{el} elektronenergiákat — a molekula energiájának túlnyomó s így legfontosabb részét — továbbá az ω, B, D állandókat (ill. az r_e egyensúlyi magtávolságot) a színképből empirikusan kell meghatározni, holott a cél az volna, hogy mindezeket a mennyiségeket tisztán elméleti úton ki tudjuk számítani, vagyis a színkép szerkezetét empirikus állandók felhasználása nélkül le tudjuk írni, mint ez a hidrogénatomnál sikerült. Ennek a célnak elérésére elsősorban a kétcentrumrendszer (6) hullámegyenletének — többatomos molekuláknál a »többcentrum-rendszer« analóg hullámegyenletének — $V_{el}(r)$ sajátértékeit és Φ sajátfüggvényeit kellene meghatározni. A probléma a molekula-fizika igen nagy részében alapvető fontosságú, mert hiszen a molekulák energiaállapotainak ismerete nemcsak a színképeknél jelentős, hanem a *kémiai kötés* értelmezésénél is, amely lényegében nem más, mint az alapállapot (legkisebb energiájú állapot) energiájának és stabilitásának kérdése.

Ezen a nagy területen a matematikai módszert tekintve — mivel az említett hullámegyenlet szigorú megoldása már a H_2 molekulánál sem lehetséges — szintén a perturbációszámítás a túlnyomó. Az energiák kiszámítá-

sára két fő eljárás alakult ki, amelyek a kiindulásul szolgáló perturbátlan állapotoknak bizonyos fizikai megfontolások alapján való megválasztásában különböznek egymástól; ezeket röviden a H_2 esetében említjük meg. A H_2 hullámegyenlete, ha a és b a két magot, 1 és 2 a két elektront jelölik, atomi egységekben a következő:

$$-\left(\frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{r_{a_1}} + \frac{1}{r_{a_2}} + \frac{1}{r_{b_1}} + \frac{1}{r_{b_2}} - \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{ab}}\right)\psi = E\psi, \quad (14)$$

ahol Δ_1 és Δ_2 az 1 és 2 elektrorra vonatkozó Laplace-operátorok és pl. r_{a_1} az 1 elektronnak az a magtól való távolsága. Mármost az említett két eljárás egyike, a Heitler—London-féle módszer⁶ az egymástól végtelen nagy távolságban képzelt neutrális atomokból indul ki és az atomoknak véges távolságban fellépő kölcsönhatását tekinti perturbációnak. Végtelen nagy magtávolságnál, azaz két különálló H -atom esetén vagy az 1 elektron van az a magnál és 2 a b -nél, vagy pedig megfordítva. Ezen két állapothoz tartozó sajátfüggvények:

$$\psi_a(1)\psi_b(2), \text{ ill. } \psi_a(2)\psi_b(1), \quad (15)$$

ahol ψ_a , ill. ψ_b a H -atom alapállapotának sajátfüggvénye. A kiindulásul szolgáló sajátfüggvények ezek helyett célszerűbben mindjárt a Pauli-féle elv figyelembevételével nyerhető lineáris kombinációk lehetnek:

$$\psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1) \quad (16a), \quad \psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1). \quad (16b)$$

A perturbációszámítás keresztülvitele azt mutatja, hogy csak (16a) vezet molekulaképződéshez: (16a) a H_2 alapállapotához tartozó sajátfüggvény, míg (16b) a két H -atom taszításának felel meg.

A másik eljárás, a »molekulapálya módszer«⁷ a H_2 problémájánál a H_2^+ molekula-ionból indul ki és a két elektron kölcsönhatását tekinti perturbációnak. A H_2^+ ion sajátfüggvényeit közelítésben a legáttekinthetőbb módon a H -atom sajátfüggvényeinek lineáris kombinációjaként adhatjuk meg, és pedig részletesebb megfontolások szerint a H_2^+ alapállapotához a fenti jelölésekkel a $\psi_a(1) + \psi_b(1)$ sajátfüggvény tartozik. Mivel ebben az állapotban a Pauli-elv szerint két elektron lehet, azért a H_2 alapállapotához rendelhető perturbátlan (tehát a két elektron kölcsönhatását nem tartalmazó) sajátfüggvény a következő:

$$[\psi_a(1) + \psi_b(1)][\psi_a(2) + \psi_b(2)]. \quad (17)$$

Ez a sajátfüggvény, mint beszorzás után látjuk, (16a)-tól a $\psi_a(1)\psi_a(2)$, $\psi_b(1)\psi_b(2)$ »ion-tagok« (mindkét elektron ugyanazon mag környezetében van) fellépésében különbözik. Ennek megfelelően a két módszer általában különböző eredményekre vezet, egyes esetekben, mint pl. a H_2 -nél, a Heitler—London-módszer, más esetekben viszont a molekulapálya-módszer ad a tapasztalattal jobban megegyező eredményt.

Matematikai szempontból említésre méltó, hogy a fenti két módszerre kapcsolatban vált szükségessé a kvantummechanikai perturbációszámítás általánosítása. Eredetileg ez a számítás egy perturbálatlan rendszernek teljes ortogonális függvényrendszert alkotó sajátfüggvényeiből indult ki, a fenti két eljárásnál azonban a kiindulásul szolgáló sajátfüggvények véges magtávolságnál nem ortogonálisak. Közelfekvő tehát azt az általánosabb problémát felvetni,⁸ hogyan lehet egy kvantummechanikai rendszer bizonyos állapotának sajátfüggvényét véges sok megadott függvénnyel a legjobban megközelíteni. Ha ez az n számú függvény ψ_1, \dots, ψ_n , amelyek a $(H - E)\psi = 0$ hullámegyenletnek kisebb-nagyobb mértékben közelítő megoldásai, akkor ezekből megkísérlünk olyan $\sum c_k \psi_k$ lineáris kombinációkat alkotni, amelyek jobb közelítések. Ez a feltevés (mint azt $\sum c_k \psi_k$ -nak a hullámegyenletbe való behelyettesítésével, ψ_i^* -gal való szorzással és integrálással könnyen lehetne látni), egy, a szokásosnál általánosabb szekuláris egyenlethez vezet, amely a

$$H_{ik} = \int \psi_i^* H \psi_k d\tau, \quad S_{ik} = \int \psi_i^* \psi_k d\tau \quad (18)$$

jelölésekkel a következő :

$$\begin{vmatrix} H_{11} - ES_{11} & \dots & H_{1n} - ES_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{n1} - ES_{n1} & \dots & H_{nn} - ES_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Ebből az egyenletből határozhatók meg a jobb közelítést jelentő E sajátértékek, amelyek mindegyikéhez egy-egy c_k -értékrendszer tartozik.

Közelítő eljárásaként a perturbációszámítás helyett a Ritz-féle variációs-módszer is tekintetbe jöhet.⁹ A $(H - E)\psi = 0$ hullámegyenlet megoldása ugyanis egyenértékű azzal a variációs feladattal, hogy az

$$\int \psi^* H \psi d\tau \quad (20)$$

integrált az

$$\int \psi^* \psi d\tau = 1 \quad (21)$$

mellékfeltétel betartásával extremummá tegyük ; itt a (20) integrál szélső érték e nem mások, mint a rendszer E sajátértékei. A módszer abban áll, hogy a ψ függvény gyanánt egy ismert (fizikai megfontolások alapján plauzibilis alakú függvényt választunk, amely egyelőre önkényes paramétereket tartalmaz $\psi = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$). Ekkor a (20) integrál nyilván csak a $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ paraméterek függvénye és ezeket [(21) betartásával] abból a feltevésből határozzuk meg, hogy (20) szélső érték legyen, ami már közönséges szélsőértékfeladat. A (20)-nak így kapott legkisebb értéke adja közelítőleg az alapállapot energiáját. Jóllehet a variációs eljárás segítségével (a ψ ügyes megválasztása és elegendő számú paraméter esetén) közelíthetjük meg a sajátértékeket és sajátfüggvényeket a legnagyobb pontossággal, ez a módszer a vele járó nagy számítási munka és igen bonyolult formulák miatt molekulák esetében általános problémák megoldására

alig alkalmas. Az ilyen problémák tárgyalásánál sokkal célravezetőbb a végeredményben egy-elektron sajátfüggvényekkel dolgozó Heitler—London-féle módszer, vagy a molekula-pálya módszer, amely — noha általában nem ad kvantitatíve kielégítő eredményeket — számos molekula-fizikai, ill. kémiai vonatkozású tapasztalat fél-quantitatív értelmezésénél a bonyolultabb szerkezetű molekulák esetében is jól bevált és a legújabb vizsgálatoknál is egyre többször szerepel.

Végezetül néhány szót szólnunk a csoportelmélet alkalmazásáról, amely többek között a molekula-állapotok exakt osztályozásánál és a fent említett, részleteiben igen bonyolult perturbációszámítások egyszerűsítésénél szinte nélkülözhetetlennek bizonyult. Általános tárgyalás helyett vegyük a kétatomos molekulák elektronállapotainak igen egyszerű példáját. A kétcentrumrendszer (6) hullámegyenlete invariáns a koordinátarendszernek a z molekulatengely körüli elforgatásaival és egy, a z tengelyen átmenő síkon való tükrözéssel szemben. Ezek az operációk egy csoportot alkotnak (a kétdimenziós forgási-tükrözési csoportot). Tartozzanak a hullámegyenlet (k -szorosán degenerált) sajátértékéhez a $\psi_{i1}, \dots, \psi_{ik}$ sajátfüggvények. Ha ezek közül ψ_{i1} -re a csoport valamely A operációját alkalmazzuk (ψ_{i1} -ben a koordinátákat az A -nak megfelelő transzformációnak vetjük alá), akkor az így nyert $A\psi_{i1}$ -nek a hullámegyenlet A -val szemben való invarianciája miatt ismét ugyanahhoz az E_i -hez tartozó sajátfüggvénynek kell lennie, vagyis a ψ_{ij} -kből lineárisan kell összetevődnie :

$$A \psi_{i1} = \sum_{j=1}^k a_{j1} \psi_{ij} . \tag{22}$$

Ha a csoport egy másik B operációjának a (b_{jl}) matrix felel meg, akkor igen könnyű kimutatni, hogy az AB »szorzat«-hoz az (a_{jl}) és (b_{jl}) matrixok sorozata tartozik : az (a_{jl}), (b_{jl}), ... matrixok a csoport egy előállítását alkotják, melynek bázisa a $\psi_{i1}, \dots, \psi_{ik}$ függvényrendszer. Mármost tisztán csoportelméleti megfontolásokkal meghatározható a szóbanforgó forgási-tükrözési csoport valamennyi (irreducibilis) előállítása, nevezetesen, ha F_φ φ szögű forrást, T tükrözést jelöl, az irreducibilis matrix-előállítások a következők :

F_φ	T	
(1)	(1)	Σ^+
(1)	(-1)	Σ^-
$\begin{pmatrix} e^{i\Lambda\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda\varphi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\Lambda\varphi} \\ e^{i\Lambda\varphi} & 0 \end{pmatrix}$	Π, Δ, \dots

(23)

ahol $\Lambda = 1, 2, 3, \dots$. Ezzel lehetővé válik a kétatomos molekula összes lehetséges elektronállapotainak osztályozása, mert a lehetséges sajátfüggvényeknek a fenti előállítások bázisait kell alkotniok, vagyis az F_φ és T operációkkal szemben a (23) séma szerint kell transzformálódniok. Részletezve, (23) egymásra

következő sorainak megfelelően lehetséges: 1. Olyan nem degenerált állapot, melynek sajátfüggvénye mind forgással, mind tükrözéssel szemben invariáns; az ilyen ($A = 0$ -nak megfelelő) állapotot Σ^+ -szal jelöljük. 2. Olyan nem degenerált állapot, melynek sajátfüggvénye forgással szemben invariáns, tükrözéssel szemben előjelet vált; ez a Σ^- állapot. 3. Olyan kétszeresen degenerált állapot, amelynek egyik sajátfüggvénye az $e^{iA\varphi}$, a másik az $e^{-iA\varphi}$ tényezőt tartalmazza; $A = 1, 2, \dots$ szerint ezeket az állapotokat Π_A, \dots állapotoknak hívjuk. Két egyenlő atomból álló molekulánál az elektronállapotok további osztályozása is lehetséges, mert az ilyen molekuláknál a hullámegyenlet a magtávolságot merőlegesen felező síkra való tükrözéssel szemben is invariáns.

A molekula energiaállapotainak a szimmetriatulajdonságokon alapuló és a fenti egyszerű példán bemutatott osztályozása további csoportelméleti megfontolások segítségével a (19)-nél említett és különösen a kémiai kötés értelmezésénél alkalmazott perturbációszámítást sokszor jelentékenyen egyszerűsíti. Kimutatható ugyanis, hogy a perturbációszámításban szereplő $\int \psi_i^* H \psi_k d\tau$ típusú integrálok, ha a H operátor a csoport operációival szemben invariáns, csak akkor különböznek zérustól, ha a ψ_i és ψ_k sajátfüggvények ugyanahhoz az irreducibilis előállításhoz tartoznak. Ezen az alapon, a sajátfüggvények alkalmas lineáris kombinációinak bevezetésével, a megoldandó szekuláris egyenlet fokszáma gyakran lényegesen csökkenthető. Hasonló a helyzet a többatomos molekulák rezgéseinek problémájánál is, ahol szintén (19) alakú egyenletek lépnek fel, és ahol a Rayleigh-féle normálkoordináták alkotják a molekula szimmetriacsoportja irreducibilis előállításainak bázisait. A csoportelmélet alapján egyszerűen meg lehet állapítani a normálrezgésekre vonatkozó kiválasztási szabályokat, nevezetesen azt, hogy a normálfrekvenciák közül melyek fordulnak elő az ultravörös és melyek a Raman-színképben.

Ennek a rövid előadásnak a keretében természetesen mindenütt csak felületes tárgyalásra szorítkozhattunk, de talán így is kialakulhatott valamelyes kép arról a jelentős szerepről, amelyet a matematika a molekulafizika hatalmas területén betölt.

Szegedi Tudományegyetem,
Kísérleti Fizikai Intézete.

IRODALOM

- ¹ Kronig de L. R.: Zs. f. Phys. 50 (1928), 347.
- ² Van Vleck J. H.: Phys. Rev. 33 (1929), 467.
- ³ Reiche F. und Rademacher H.: Zs. f. Phys. 39 (1927), 444; Kronig R. and Rabi I.: Phys. Rev. 29 (1927), 262.
- ⁴ Morse P. M.: Phys. Rev. 34 (1929), 57.
- ⁵ Budó A.: Zs. f. Phys. 96 (1935), 219; 98 (1936), 437; 105 (1937), 73; 105 (1937), 579; — Kovács I.: Zs. f. Phys. 106 (1937), 431; 109 (1938), 387; 111 (1939), 640; Hung. Acta Phys. 2 (1950). — Budó A., Kovács I.: Zs. f. Phys. 109 (1938), 393; 111 (1939), 633; 116 (1940), 693; 117 (1941), 612; Phys. ZS. 45 (1944), 122; Journ. Chem. Phys. 15 (1947), 166; Phys. Rev. 73 (1948), 1120; Hung. Acta Phys. 7, No. 4. (1949); 2 (1950).
- ⁶ Heitler W. und London F.: Zs. f. Phys. 44 (1927), 455.
- ⁷ Az első erre vonatkozó munkák: Mulliken R. S.: Phys. Rev. 32 (1928), 186, 761; Hund F.: Zs. f. Phys. 51 (1928), 759; Herzberg G.: ZS. f. Phys. 57 (1929), 601.
- ⁸ Slater J. C.: Phys. Rev. 38 (1931), 1109.
- ⁹ Első alkalmazása a kvantummechanikában: Kellner G. W.: ZS. f. Phys. 44 (1927), 91.

HARMADFOKÚ SZEKULÁRIS EGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSÁNAK FIZIKAI ALKALMAZÁSAI

KOVÁCS ISTVÁN lev. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

1. § Ismeretes, hogy a fizikai problémák kvantummechanikai tárgyalására felállított Schrödinger-féle differenciálegyenletek matematikailag exakt módon csak néhány speciális esetben oldhatók meg. Olyan esetben, mikor az exakt megoldás nem lehetséges, úgy járunk el, hogy konstruálunk egy az eredeti egyenlettől lehetőleg kevésbé eltérő, de matematikailag exakt módon kezelhető másik egyenletet, s ennek megoldásait, valamint a megoldásokhoz tartozó sajátértékeket az eredeti egyenlet megoldásai (vagyis sajátfüggvényei) és sajátértékei (vagyis energiaértékei) nulladik közelítéseinek tekintjük. Ez utóbbi sajátfüggvényeket és energiaértékeket a megoldandó probléma perturbátlan sajátfüggvényeinek és perturbátlan energiaértékeinek nevezzük. A konkrét fizikai problémára felállított és exakt módon meg nem oldható hullámgömb egyenlet sajátfüggvényeit és energiaértékeit azután — a perturbátlan értékeknek kiindulópontul választása mellett — az elhanyagolt tagoknak a kvantummechanikai perturbációszámítás szerint való figyelembevételével számítjuk ki. Ez az eljárás sok esetben a perturbált energiaértékek kiszámítására egy szekuláris egyenlethez vezet, melynek diagonálisában az említett nulladik közelítésű perturbátlan energiaértékek, egyéb helyein pedig a hullámgömb egyenletben elhanyagolt tagok és a perturbátlan sajátfüggvények segítségével kiszámítható $u. n.$ perturbációs matrix elemei állanak. Mind a perturbátlan energiaértékek, mind pedig a perturbációs matrix-elemek különböző paraméterek függvényei lehetnek úgy, hogy a szekuláris egyenlet megoldása nem egyetlen numerikus egyenlet megoldásának problémája. A főkérdés, amire a megoldásnál kíváncsiak vagyunk, az, hogy a megoldások milyen függvényei azoknak a paramétereknek, melyektől a perturbátlan energiák és a perturbációs matrix elemei, más szóval a szekuláris egyenlet együtthatói függenek.

A probléma igen egyszerű akkor, amikor a szekuláris egyenlet másodfokú: ilyenkor az exakt megoldás jól áttekinthető módon, egyszerű zárt alakban adható meg. Bonyolódik a helyzet azonban, amikor másodfokúnál magasabb fokszámú egyenlet áll előttünk. Ilyenkor a legtöbb esetben exakt megoldás nem is adható meg, amikor pedig megadható (mint harmad- és negyedfokú egyenlet esetében), akkor ez a megoldás olyan bonyolult, hogy a fizikus gyakorlatilag nem is tudja felhasználni. Ilyenkor inkább megelégszünk közelítő megoldásokkal, csak hogy további következtetésekre alkalmas formulát

nyerjük. Ezek a közelítések azonban többnyire a vizsgált probléma sajátos természetéhez hozzáidomított »ad hoc« megoldások voltak, és éppen ezért alkalmazásuk csak olyan, vagy hasonló esetekben volt lehetséges, amelyekre éppen készültek, kielégítő eredményekre azonban itt sem vezettek¹.

Kívánatosnak látszott tehát — legalább is harmadfokú szekuláris egyenlet esetében — olyan általános megoldást keresni, amely egyrészt nem függ a tárgyalt probléma sajátos természetétől, másrészt pedig pontossága tetszés szerinti módon fokozható, más szóval az exakt megoldást tetszés szerint megközelítő, ugyanakkor azonban a fizikus számára mégis könnyen kezelhető kifejezéseket ad.

2. § *Általános megoldás.* A harmadfokú szekuláris egyenlet megoldását az eddigiekben úgy szokták megkerülni, hogy többé-kevésbé indokolt elhanyagolásokkal másodfokú egyenletre vezetik vissza, melynek megoldása azután zárt alakban adható meg, vagy pedig bizonyos paraméterek szerint sorbafejtik. Az ilyen sorfejtés pontossága a paraméterek különböző értékénél más és más, és vannak olyan tartományok, ahol egyáltalában nem használható. Ebben a munkában a harmadfokú szekuláris egyenlet megoldására olyan sorfejtést fogunk alkalmazni², amely a paraméterek különböző értékeinél is kielégítő közelítést ad.

A szekuláris egyenlet általános alakja :

$$\begin{vmatrix} W_1 - W & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & W_2 - W & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & W_3 - W \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

ahol $H_{ik} = H^*_{ki}$. Helyettesítsük be a gyökök helyébe a következő kifejezést

$$W = w + \frac{W_1 + W_2 + W_3}{3} \quad (2)$$

Ezzel kettős célt érünk el: egyfelől azt, hogy a szekuláris determinánsban a perturbálatlan értékeknek csak a *különbségei* fordulnak elő, másfelől pedig azt, hogy a kifejtett harmadfokú egyenletben másodfokú tag nem szerepel. Így nyerjük, hogy

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}(W_{12} + W_{13}) - w & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & \frac{1}{3}(W_{23} + W_{21}) - w & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & \frac{1}{3}(W_{31} + W_{32}) - w \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

ahol

$$W_{ik} = W_i - W_k \quad (4)$$

A determináns kifejtése után egyenletünk a következő alakot ölti :

$$w^3 - aw + b = 0, \quad (5)$$

ahol

$$a = \sum_{ik} \left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2 \right] \quad (i,k) = (1,2), (2,3), (3,1)$$

$$b = \frac{1}{3} \sum_{ikl} \left\{ \left[\left(\frac{W_{ik}}{3} \right)^2 + |H_{ik}|^2 \right] (W_{li} + W_{lk}) - 2 R(H_{ik} H_{kl} H_{li}) \right\} \quad (6)$$

$(i,k,l) = (1,2,3) (2,3,1) (3,1,2)$

és $R(H_{ik} H_{kl} H_{li})$ a $H_{ik} H_{kl} H_{li}$ szorzat reális részét jelenti.

Tegyük fel, hogy (7)

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n y^n, \text{ és } b = b_1 y \quad (8)$$

Behelyettesítve ezen értékeket (5)-be, a megoldandó harmadfokú egyenlet y polinomjává alakul át:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} w_{n-(k+l)} w_k w_l - a w_n \right] y^n + b_1 y = 0 \quad (9)$$

Ez az egyenlőség y minden értékénél csak akkor lehet zérus, ha y minden hatványának együtthatója külön-külön eltűnik. E feltételek rekurziós formulákra vezetnek, melyekből

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= -a^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2a} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{2n} \binom{\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}}{n-1} \frac{b^n}{a^{\frac{1}{2}} (3n-1)} \\ w_2 &= \frac{b}{a} + \sum_{n=2}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{3}{2n} \binom{\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}}{n-1} \frac{b^n}{a^{\frac{1}{2}} (3n-1)} \\ w_3 &= a^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2a} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2n} \binom{\frac{3}{2}n - \frac{5}{2}}{n-1} \frac{b^n}{a^{\frac{1}{2}} (3n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

A (10) sor konvergenciájának vizsgálata azt mutatja, hogy a sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\left| \frac{3^{\frac{3}{2}} - b}{2 a^{\frac{1}{2}}} \right| \leq 1 \quad (11)$$

Szekuláris egyenlet esetében ez a feltétel mindig ki van elégítve, mivel (11) identikus a

$$\frac{b^2}{4} + \frac{(-a)^3}{27} \leq 0 \quad (12)$$

egyenlőtlenséggel, amely a gyökök valós voltának feltétele. Szekuláris egyenletnek pedig, mint ismeretes, csak valós megoldásai vannak. A (10) sor tehát szekuláris egyenlet esetében mindig konvergens.

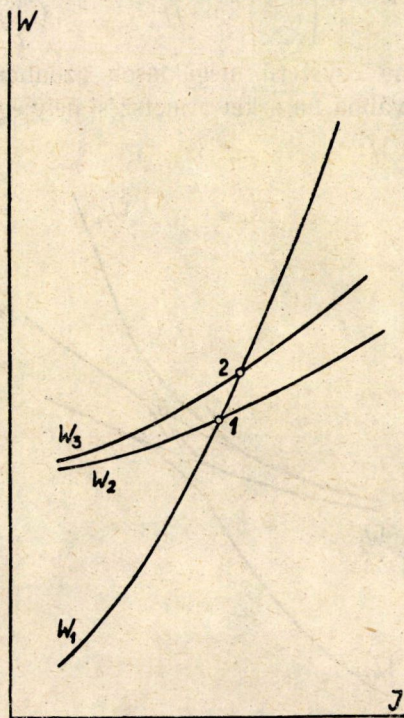
Megtartva (10)-nek az első két tagját, és felhasználva a (6) és a (2) egyenletet, a kiindulásul szolgáló (1) szekuláris egyenlet közelítő megoldására a következő kifejezések adódnak:

$$\begin{aligned}
 W_1' &= \frac{1}{3} \sum_i W_i - \sqrt{\sum_{ik} \left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2 \right]} - \\
 &\frac{\frac{1}{6} \sum_{ikl} \left\{ \left[\left(\frac{W_{ik}}{3} \right)^2 + |H_{ik}|^2 \right] (W_{li} + W_{lk}) - 2R (H_{ik} H_{kl} H_{li}) \right\}}{\sum_{ik} \left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2 \right]} \\
 W_2' &= \frac{1}{3} \sum_i W_i + \\
 &+ \frac{\frac{1}{6} \sum_{ikl} \left\{ \left[\left(\frac{W_{ik}}{3} \right)^2 + |H_{ik}|^2 \right] (W_{li} + W_{lk}) - 2R (H_{ik} H_{kl} H_{li}) \right\}}{\sum_{ik} \left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2 \right]} \\
 W_3' &= \frac{1}{3} \sum_i W_i + \sqrt{\sum_{ik} \left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2 \right]} - \\
 &\frac{\frac{1}{6} \sum_{ikl} \left\{ \left[\left(\frac{W_{ik}}{3} \right)^2 + |H_{ik}|^2 \right] (W_{li} + W_{lk}) - 2R (H_{ik} H_{kl} H_{li}) \right\}}{\sum_{ik} \left[\frac{W_{ik}^2}{6} + |H_{ik}|^2 \right]}
 \end{aligned} \tag{13}$$

ahol $(i, k, l) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ lehet.

Ezen általános formulák a tárgyalt probléma speciális természetétől függetlenek, ami nemcsak a levezetésből tűnik ki, hanem az egyes determináns elemeknek a formulákban való szimmetrikus előfordulásából is; a formulákban semmiféle kölcsönhatást nem tüntettünk ki. A formulák pontossága további tagok figyelembevételével tetszés szerinti módon fokozható. Ha a (13) formulákat valóban új tagokkal óhajtjuk kiegészíteni, nem kell új kifejezéseket kiszámítani: az újabb tagok számlálójában és nevezőjében ugyanazok a kifejezések fordulnak elő, mint a (13) formula utolsó tagjában, csak más kitevővel és más numerikus faktoriall.

Az így nyert megoldásról könnyen ki lehet mutatni, hogy az nem más, mint a harmadfokú egyenlet trigonometrikus megoldásának Mac—Laurin-sora.² Az itt közölt eljárás azonban minden további nélkül alkalmazható magasabb fokszámú általános egyenletek esetére is, ahol már a trigonometrikus megoldások nincsenek.^{2a} Magasabb fokszámú egyenleteknél esetenként kell eldönteni, miszerint fejtsünk sorba ahhoz, hogy a nyert rekurziós egyenletek egy-



1. ábra.

A perturbálatlan termek menete két átmetszési pont esetén.

szerűen megoldhatók legyenek. Negyedfokú egyenlet eseténél pl. az elsőfokú tag együtthatója mutatkozik e célra legmegfelelőbbnek.

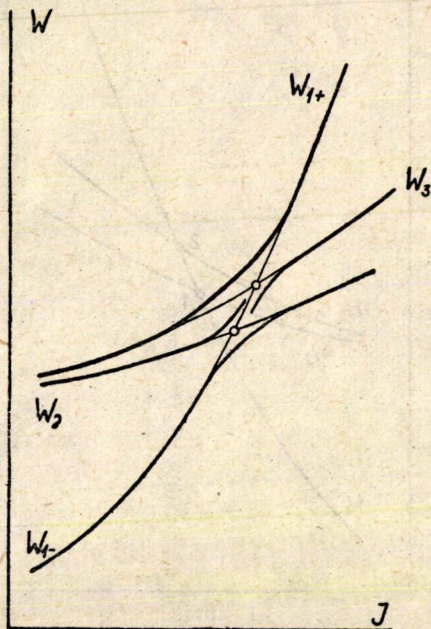
3. §. *Alkalmazások.* A (13) megoldások alkalmazhatóságát egy molekulaspektroszkópiai példán fogjuk illusztrálni, ahol a három perturbálatlan term és a matrix-elemek a J rotációs kvantumszám függvényei. A példa arra is alkalmas lesz, hogy az eddig használt eljárások hátrányait bemutassuk. Tekintsük azt az esetet, amikor ugyanazon multipllett-term két komponensét egy harmadik tetszés szerint futó term perturbálja. (l. 1. ábra) Ilyen probléma lép fel többek között például a ${}^1\Pi - {}^3\Sigma^\pm$ perturbációnál az azonos szimmetriájú komponensek között. Ebben az esetben a szekuláris egyenlet alakja a következő:

$$\begin{vmatrix} W_1 - W & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & W_2 - W & 0 \\ H_{31} & 0 & W_3 - W \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

Az eddigiekben szokásos legegyszerűbb megoldási módszer abban állt, hogy a (W_1, W_2) átmetszés környezetében a H_{13} matrixelemet, a (W_1, W_3) átmetszés környezetében a H_{12} matrixelemet elhanyagoljuk. Így a perturbált termék értékei az első, illetve a második átmetszés helye környezetében első közelítésben egy-egy másodfokú egyenlet megoldásából adódnak.³ Lesz tehát

$$\frac{W'_i}{W'_k} = \frac{W_i + W_k}{2} + \sqrt{\left(\frac{W_{ik}}{2}\right)^2 + |H_{ik}|^2} \quad (i,k) = (1,2) \text{ ill. } (3,1) \quad (15)$$

Ezek a viszonylag egyszerű megoldások azonban nem minden helyen adnak jó közelítést. Továbbá, ha a két átmetszési hely egymáshoz közel fekszik,



2. ábra.

A perturbált termék menete a (15) formulák szerint. W'_{1+} ill. W'_{1-} termék a (15) formulákból adódó W'_1 értékeknek felelnek meg, ha ott $+$ ill. $-$ előjeleket vesszük figyelembe.

a (15) kifejezések a közbenső tartományban egyáltalában nem használhatók, mert az elhanyagolások, amelyek alapján e kifejezéseket nyertük, ott nincsenek megengedve. A W_i termék menetét a (15) formula alapján a második ábrán sematikusán ábráztuk.

Látható, hogy a W_2 és a W_3 görbék nem futnak össze egyetlen görbébe, ami azt eredményezi, hogy a két átmetszés közötti tartományban a perturbált termre két értéket is kapunk, melyek közül bizonyos, hogy egyik sem jó. Mindez egybehangzásban van a közbenső tartományt illető fenti megjegyzésünkkel.

A harmadfokú szekuláris egyenletet még más módon is visszavezethetjük másodfokúra. Jobb közelítést érhetünk ugyanis el, ha az összes matrix-

elemet megtartjuk ugyan, de közelítőleg W_3-W helyett W_3-W_1 -et írunk a (W_1, W_2) átmetszés helye környékén, illetve W_2-W helyett W_2-W_1 -et írunk a (W_1, W_3) átmetszés helye környékén.

Ez a módszer még tovább finomítható oly módon, hogy W értékét mindig azon W_1 értékkel pótoljuk, amelyről már előre tudjuk, hogy a keresett W értékhez a legközelebb esik.⁴ W értéke tehát az átmetszés helye előtt és után mindig más és más értékkel helyettesítendő. Így nyerjük a következő közelítő megoldásokat:

$$W'_i = \frac{W_i + W_k}{2} - \frac{|H_{il}|^2}{2W_{lr}} + \sqrt{\left[\frac{W_{ki}}{2} + \frac{|H_{il}|^2}{2W_{lr}} \right]^2 + |H_{ik}|^2} \quad (16)$$

ahol $(i, k, l) = (1, 2, 3)$. Ha $(i, k, l) = (1, 3, 2)$, akkor a \mp jel \pm jellel pótlendő. Aszerint, hogy a perturbált term W_i , ill. W_k -hoz fekszik közelebb, $r = i$ ill. k .

Ennek az eljárásnak két hátránya van: először is nyolc formulát ad, melyek közül a perturbáció különböző tartományaiban mindig a három legjobb kell kiválasztanunk, másfelől ehhez a kiválasztáshoz a perturbált term menetének előzetes ismerete szükséges, amit pedig éppen a (14) egyenlet megoldásából kell kapnunk. Megtehetjük azt is, hogy állandóan $r = i$ -t írunk, ekkor csak négy formulát kapunk, azonban az így nyert formulák kevésbé alkalmasak a használatra, mivel szingularitások (pólusok) lépnek fel, ami a szinguláris helyektől még viszonylag nagy távolságban is csökkenti a pontosságot.

Egy harmadik megoldási módszer abban áll, hogy egyenletünket az algebrai egyenletek megoldására szolgáló jólismert Newton—Fourier-módszer alapján tárgyaljuk, azzal a különbséggel, hogy a közelítő görbéül szolgáló érintők helyett minden gyökre egy oszkuláló parabolát alkalmazunk.² Ha a szokásos módon érintőket alkalmaznánk, akkor a Schrödinger-féle perturbációs formula második közelítését kapnók, amely, mint ismeretes, éppen olyan esetekben mondja fel a szolgálatot, amikor a termértékek egymás közelébe kerülnek, vagy éppen átmetszik egymást.

Az említett módon nyert formulák lényegében ugyanolyan szerkezetet mutatnak, mint (16). Itt hat gyök közül kell kiválasztani az éppen odaillőt és a kiválasztás itt is függ J értékétől s többek között az átmetszés helye előtt és után más és más formula veendő. Ezenkívül, eltekintve attól, hogy a formulák (16)-nál valamivel bonyolultabbak, nem adnak annál nagyobb pontosságot.

Ha azonban megoldásul a (13)-as formulákat választjuk (melyek alakja $H_{23} = 0$ miatt most valamivel egyszerűbb lesz), akkor itt minden ágnak egyetlen formula felel meg, úgy, hogy a perturbált termék menetéhez azoknak előzetes ismerete nem szükséges. Annak kimutatására, hogy itt a perturbált termék a perturbálatlanokhoz helyesen vannak hozzárendelve, alkalmazzuk a következő közelítéseket:

Az első átmetszési helytől balra nagy távolságban nyilván írható

$$|W_{13}| \sim |W_{12}| \gg |W_{23}| \sim 0 \quad (17)$$

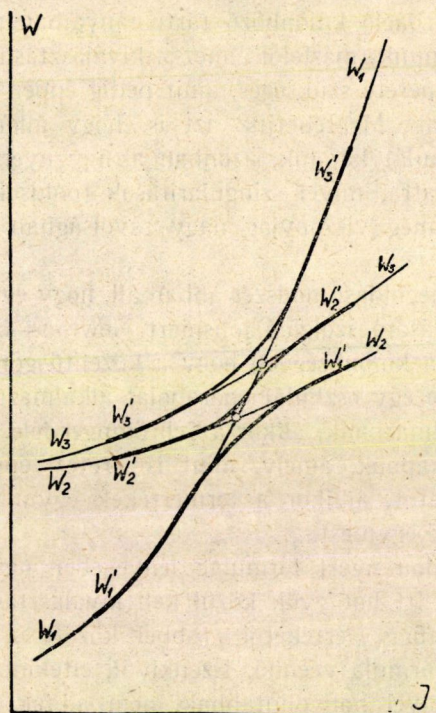
$$|H_{12}|^2 \sim |H_{31}|^2 \ll |W_{13}|^2 \sim |W_{12}|^2$$

Ha ezenkívül a gyökök kifejezésében előforduló egyik 3-as helyett $81/25$ -öt írunk, akkor az említett tartományra nézve ezt kapjuk:

$$W_1' \sim \frac{W_1 + 2W_3}{3} - \sqrt{\frac{(W_3 - W_1)^2}{\frac{81}{25}} - \frac{(W_3 - W_1)}{9}} = W_1 \quad (18)$$

$$W_2' \sim \frac{W_1 + 2W_3}{3} + \frac{2(W_3 - W_1)}{9} = W_3 + \frac{W_1 - W_3}{9} \sim W_3$$

$$W_3' \sim \frac{W_1 + 2W_3}{3} + \sqrt{\frac{(W_3 - W_1)^2}{\frac{81}{25}} - \frac{W_3 - W_1}{9}} = W_3 - \frac{W_1 - W_3}{9} \sim W_3$$



3. ábra.

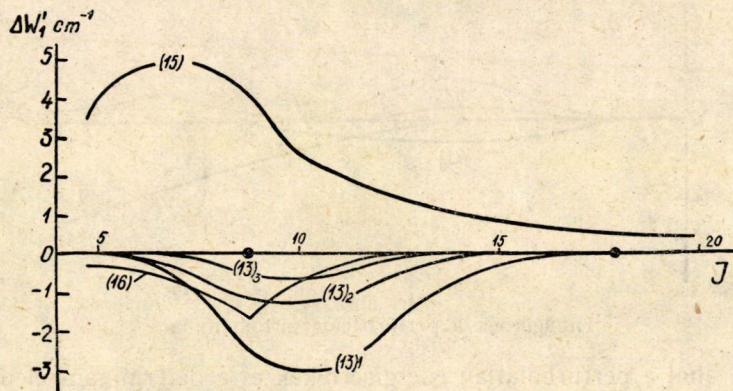
A perturbált termek menete a (16) formulák szerint.

(Mivel $W_2 \sim W_3$ -at írtunk, természetesen W_2' és W_3' ugyanazon közelítő értékekhez vezet.) Hasonló módon a második átmetszési helytől nagy távolságban jobbra nyerjük a következőket:

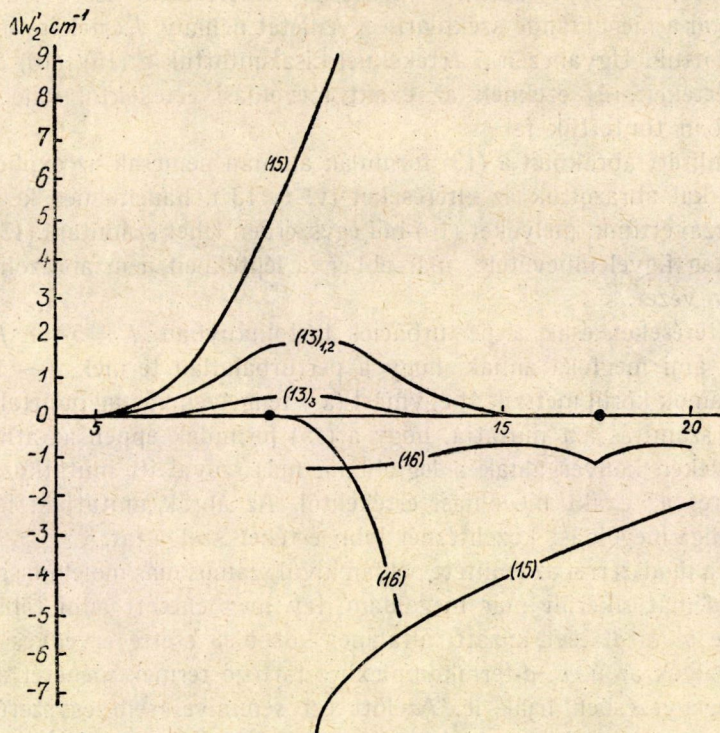
$$W_1' \sim W_3 ; W_2' \sim W_3 ; W_3' \sim W_1 \quad (19)$$

Ezek a hozzárendelések azt mutatják, hogy a (13)-as formulából nyert megoldások a termék menetét a valóságos viszonyoknak megfelelően állítják elő, amint ez a 3. ábrából is látható.

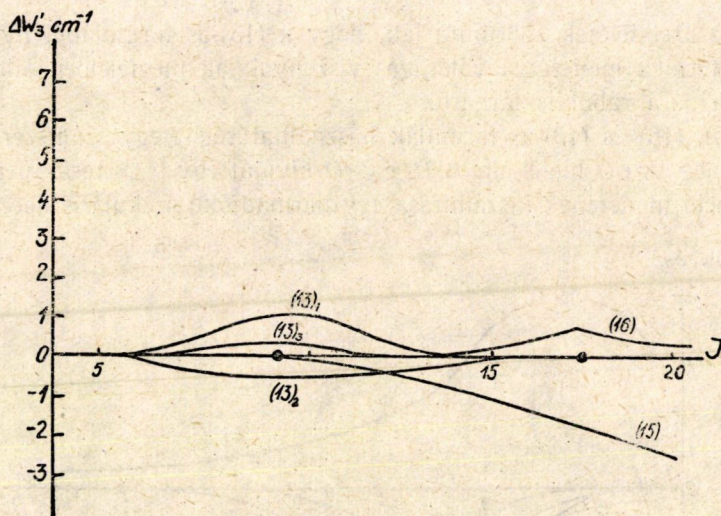
A (15), (16) és (13)-as formulák használhatóságát egy számszerű példán mutatjuk meg. A CO molekula $A^1\Pi$, $v = 0$ nivóját egy ${}^3\Sigma^-$ term perturbálja. A perturbáció menetének kiszámítása egy harmadfokú szekuláris determináns-



4a. ábra.



4b. ábra.



4c. ábra.
Hibagörbék a perturbációs tartományban.

hoz vezet, ahol a perturbálatlan energiaértékek és a determináns elemek J -tól való függése elméletileg pontosan megadható. Az itt szereplő egyéb állandók pedig spektroszkópiai mérésekből pontosan ismeretesek. Ezen adatok felhasználásával a megoldandó szekuláris egyenletet néhány J értékre numerikusan megoldottuk. Ugyanezen J értékeknél kiszámítottuk a (15), (16) és (13)-as formulák értékeit, és ezeknek az exakt megoldási értékektől való eltérését a 4. ábrákban tüntettük fel.

Az említett ábrákban a (13) formulák alapján nemcsak az explicit megadott tagokkal ábrázoltuk az eltéréseket (v. ö. 13_1), hanem még két további tagot is hozzávettünk, melyeket (10)-ből egyszerűen lehet számítani (13_2 és 13_3). Még több tag figyelembevétele már ebben a léptékben nem ábrázolható kis eltérésekhez vezet.

Az eltéréseket csak a perturbációs tartományban $J = 5$ -től $J = 20$ -ig ábrázoltuk, ami megfelel annak, hogy a perturbálatlan termek $J \sim 9$, ill. 18 kvantumszámok körül metszik át egymást (a J tengelyen vastag ponttal jelölve). A részletes számítás azt mutatja, hogy a (15) formulák éppen az átmetszések helye környékén konvergálnak a legjobban, más szóval itt mutatkozik a legkisebb eltérés az exakt megoldási értékektől. Az ábrák mutatják, hogy (13) minden eddigi megoldási közelítésnél jobb értéket szolgáltat.

Ezzel a módszerrel az említett példán kívül számos más molekuláspetrozkópiai problémát sikerült már megoldani. Így meg lehetett adni többek közt a Hund-féle b' és d' eset közötti általános közbülső esetre érvényes termformulákat, melyek az ú. n. d -termkomplexhez tartozó termek menetét a tapasztalással megegyezésben írják le. Azelőtt ezt semmivel sem egyszerűbb más formulákkal számították, amelyek egyike csak a b' , másika pedig csak a d' eset

közvetlen közelében volt érvényes. A termértékek ismeretében meg lehetett adni az intenzitáseloszlásra érvényes explicit formulákat, amelyek addig szintén nem voltak ismeretesek. Ugyancsak sikerült kiszámítani az említett közbülső esethez tartozó termek Zeeman-effektusát is, amely addig szintén csak a b' és d' esetek közvetlen közelében érvényes bonyolult formulák alapján volt tárgyalható. Mindez a He_2 molekula $4d$ -termkomplexén került bemutatásra, ahol a kísérleti adatokkal igen jól mondható megegyezés mutatkozott.⁵ Ezeken kívül még számos más probléma esetén bizonyult a módszer alkalmazhatónak.

Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézete,
Spektroszkópiai Osztálya.

IRODALOM

¹ Hill E. L., Van Vleck J. H. : Phys. Rev. 32 (1928), 261 ; Dieke G. H. : ZS. f. Phys. 57 (1929), 77. — Kronig, de L., R. Fujioka Y. : ZS. f. Phys. 63 (1930), 172. — Fujioka Y. : ZS. f. Phys. 63 (1930), 182. — Knipp J. K. : Phys. Rev. 47 (1935), 674. — Ittmann G. P. : ZS. f. Phys. 71 (1931), 622. — Stepanov B. I. : Journ. of Phys. (U. S. S. R.), 2 (1940), 89 ; 2 (1940), 382. — Nevin T. E. : Proc. of Roy. Irish Ac. 50 (A) (1945), 124.

² Kovács I. és Singer S. : Phys. ZS. 43 (1942), 362—371.

^{2a} I. pl. Pólya G., Szegő G. : Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. (1924). 301.

³ Ittmann G. P. : Zs. f. Phys. 71 (1931), 616. — Budó A. és Kovács I. : ZS. f. Phys. 109 (1938), 393 ; 111 (1939), 633. — Kovács I. : ZS. f. Phys. 111 (1939), 640.

⁴ Stepanov B. I. : Journ. of Phys. (U S S R) 2 (1940), (1), 89.

⁵ Kovács I. és Budó A. : Hung. Act. Phys. 7 (1949), (4), 1.

AZ INTEGRÁLGEOMETRIA ALKALMAZÁSA A GEOMETRIAI OPTIKÁBAN

VARGA OTTÓ lev. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

Fejtegetéseinknek az a célja, hogy az integrálgeometriát a Finsler-féle geometrián belül tárgyaljuk, és hogy rámutassunk kapott eredményeink alkalmazhatóságára a geometriai optikában. E két feladat közül a súlypont az elsősé esik. Ugyanis teljes alapossággal kitérünk az integrálgeometria alapjainak tisztázására, ismertetni fogjuk a Finsler-féle geometria legegyszerűbb fogalmait és különösképpen rá fogunk mutatni arra a fontos szerepre, amelyet az integrálgeometria a Finsler-féle sokaságokban játszik. Ez a fontos szerep ugyanis *Blaschke* dolgozataiból — véleményünk szerint — nem világlik ki eléggé. A fizikai alkalmazások közül csak a tökéletes optikai műszer kérdésével fogunk foglalkozni, de úgy, hogy csupán az eredményekre mutatunk rá, a bizonyításokat illetően pedig *Blaschke* cikkeire* fogunk hivatkozni.

A geometriai optika a fénysugár pályáját meghatározó Fermat-féle elven¹¹ alapszik. Ha a tér koordinátáit x^i -vel, az irány koordinátáit pedig az \dot{x}^i számok arányával határozzuk meg, akkor a Fermat-féle elv alapján a fénysugár pályáját egy inhomogén és anizotrop közegben az

$$(a) \quad \int L(x, \dot{x}) dt$$

variációs probléma extremálisa határozza meg, ha az $L(x, \dot{x})$ függvényt az

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{c} n(x, \dot{x}) \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2}$$

kifejezés határozza meg; itt $n(x, \dot{x})$ az ú. n. törési index. Ezt az

$$n(x, \dot{x}) = \frac{c}{v(x, \dot{x})}$$

egyenlet adja meg, amelyben $v(x, \dot{x})$ az úttól és iránytól függő fénysebesség, c pedig a vákuumbeli állandó fénysebesség. Mivel $n(x, \dot{x})$ az x^i irányban zérusfokú homogén kifejezés, arra a fontos megállapításra juthatunk, hogy $L(x, \dot{x})$ az \dot{x}^i -ben elsőfokú homogén függvény. Ez a tény az adott görbének a paraméterelőállításától való függetlenségét biztosítja. A Fermat-féle elv alapján — amint arra első ízben *Hamilton*¹³ mutatott rá — a geometriai optika a variációszámítás egyik fejezetévé válik. Ha homogén és izotrop közegre szorítkozunk, akkor az $L(x, \dot{x})$ függvénynek erre az esetre felvett alakja azt mutatja, hogy a fénysugarak egyenesek lesznek.

* Lásd: 2, 3, 4, 5.

A geometriai optika egyik fontos fejezete az optikai leképezés. E leképezés egy első közegnek, az ú. n. tárgyternek minden sugarához hozzárendeli egy utolsó közegnek, az ú. n. képtérnek egy és csakis egy sugarát, és megfordítva. Homogén és izotrop közegben ez az euklidesi geometriának egy egyenes transzformációját jelenti. A legtöbb esetben adott ponton áthaladó sugarak közül egy sugárnak csak a szomszédos sugarait szoktuk tekinteni. Pl. egy csillagból kiinduló sugarak közül csak azokat tekintjük, amelyek valamely távcsövön áthaladnak. Így alkalmazásokban a vonalgeometriának csak az ú. n. differenciálgeometriáját használják fel. Azonban a távcsőnek most említett példája már sejtetheti azt, hogy nagy jelentősége lesz annak, ha a távcsövön áthaladó sugarakra nézve valamilyen mértéket sikerül majd bevezetnünk. A jelen esetben tehát lényegében arról van szó, hogy egy egyenessereg mértéket állítsunk fel. És éppen az integrálgeometria az a diszciplína, amelyben a pontmértéken kívül a lineáris sokaságokra is — tehát háromméretű térben az egyenesre és síkra — vezetnek be mértéket.

1. §. Lineáris sokaságok mértéke

Bár előadásomban csak az egyenes mértékére lesz szükségem, mégis az n -méretű euklidesi tér r -dimenziós E_r lineáris alakzatai bizonyos halmazának mértékét fogom bevezetni. Az erre vonatkozó szabatos definíció megadása semmivel sem jelent nagyobb fáradságot, mintha csak az egyenesek mértékét definiálnám, viszont nagy előnye, hogy fogalmakat általánosabb szempontból tudunk majd tekinteni.

Az E_r r -dimenziós lineáris alakzatot (röviden r -dimenziós síkot) egy x helyzetvektorral és pl. r számú ortogonális a^1, \dots, a^r egységvektorral az

$$X^i = x^i + t_q a^i \quad (q = 1, \dots, r) \quad (1,1)$$

képlet segítségével határozhatjuk meg. Ha figyelembe vesszük az a^i vektorok

között fennálló kapcsolatokat, valamint azt, hogy az x^i helyzetvektor helyett más helyzetvektorok is választhatók ugyanannak az E_r -nek előállításában, megállapíthatjuk, hogy az E_r sík $q = (r + 1)(n - r)$ számú független paraméter függvénye. E paramétereket az E_r koordinátáinak tekinthetjük. Jelöljük ezeket u_1, \dots, u_q módon. Ezekkel a koordinátákkal meghatározott számteret röviden U térnek nevezzük. Az r -dimenziós síkoknak legnagyobb dimenziójú halmazát akkor kapjuk, ha az U térben egy q -dimenziós T tartományt tekintünk. A T tartományt úgy választjuk meg, hogy az mérhető legyen. E T tartományban n -dimenziós terünkben az E_r -eknek egy H halmaza felel meg. Ha az n -dimenziós térben mozgást végzünk, akkor a H halmazt képező E_r -ek új helyzetükben egy E'_r -ből álló H' halmazt fognak alkotni. Ha most már az E_r -nek megfelelő E'_r -t az U térben az u'_1, \dots, u'_q koordináták jellemzik, akkor a régi és az új koordináták közötti kapcsolatot az

$$\begin{aligned} u_s &= u_s(u') \\ u'_s &= u'_s(u) \quad (s = 1, \dots, q) \end{aligned} \quad (1,2)$$

alakú transzformációkkal fejezhetjük ki. E képletekben még az az $n(n+1)|2$ számú paraméter is szerepel, amelyek a mozgást határozzák meg. Nyilvánvaló, hogy ez a transzformációs sereg csoportot alkot. Könnyen belátható az is, hogy az E_r és u_s közötti hozzárendelés mindig úgy választható meg, hogy az (1,2) transzformációs csoport az összes változók szerint differenciálható legyen. Mozgásunkkal az U térben indukált transzformáció a T tartományt egy T' tartományba viszi át. Ez a T' tartomány természetesen szintén mérhető lesz. Ezek alapján most már az E_r -ekből alkotott H halmaznak mértékén egy olyan

$$\int \dots \int_T f(u_1 \dots u_q) du_1 \dots du_q$$

q -szoros integrált értünk, amelyben

I. $f(u) \geq 0$ és amely

II. az (1,2) transzformációs csoporttal szemben invariáns, azaz

$$\int \dots \int_T f(u_1 \dots u_q) du_1 \dots du_q = \int \dots \int_{T'} f(u'_1 \dots u'_q) du'_1 \dots du'_q. \quad (1,3)$$

Ebből a definícióból, a többszörös integrálok transzformációs képletéből, valamint abból, hogy a mérhető T tartomány tetszőlegesen választható és végül, mivel a mozgások a síkokat tranzitíve felcserélik, következik, hogy amennyiben az $f(u)$ létezik, egy állandó tényezőtől eltekintve egyértelműen van meghatározva. Tényleges meghatározására a folytonos transzformációs csoportelmélet segítségével az $f(u)$ -ra nézve parciális differenciálegyenlet állítható fel. De az előbb mondottak szerint úgy is célhoz érhetünk, ha egy olyan $f(u)$ függvényt sikerül megadni, amelyről kimutatható, hogy a mértékre vonatkozó I. és II. tulajdonsággal rendelkezik. Ezen az úton oldotta meg először ezt a kérdést *W. Blaschke*⁴. Mielőtt *Blaschke* eredményét ismertetnénk, először egy megjegyzést teszünk. Az (1.3) integráljel alatt szereplő

$$dE_r = f(u_1 \dots u_q) du_1 \dots du_q$$

kifejezést az E_r síkok sűrűségének szokás nevezni. Mivel állandóan többszörös integrálokat kell transzformálnunk, előnyösnek mutatkozik a differenciáloknak ú. n. alternáló, nem pedig közönséges szorzatával operálni. Éppen *H. Poincaré*¹⁷ és *E. Cartan*⁷, alkalmazták az alternáló differenciálformákat az integrálinvariáns elméletben, tehát hasonló célokra, mint mi.

Ennek az az előnye, hogy a szubsztitúció formálisan ugyanúgy végezhető többszörös integráloknál is, mint az egyszeres integráloknál. Ezekután megadhatjuk a sűrűségnek *Blaschke*től származó képletét. Ha az E_r -et az (1,1) képlettel adjuk meg, akkor az ebben a képletben szereplő x_i helyzetvektor,

valamint az a^i vektorok az u_q -nak függvényei. Egészítsük ki az E_r -et meghatározó a^i vektorokat az ezekre és egymásra is merőleges b^i , ..., b^i vektorokkal ortogonális n -éllé. Ha ezeknek a vektoroknak segítségével az $(r + 1)(n - r)$ számú

$$\omega_h = \left[dx^i \underset{(h)}{b^i} \right] \quad h = 1, \dots, (n-r)$$

$$\omega_{jk} = \left[da^i \underset{(j)}{\underset{(k)}}{b^i} \right] \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, r \\ k = 1, \dots, (n-r) \end{matrix}$$

Pfaff-féle formákat képezzük, akkor az ezekből alkotott

$$dE_r = \left| \prod \omega_b \prod \omega_{jk} \right| \tag{1,4}$$

alternáló szorzat adja meg a dE_r sűrűségét. E képletben az abszolútjellel azt kívánjuk kifejezni, hogy a Pfaff-féle formák alternáló szorzatából nyert $\varphi(u_1 \dots u_q) du_1 \dots du_q$ kifejezésben a $\varphi(u)$ függvény abszolútértékét kell venni. Megjegyezzük, hogy ahhoz, hogy (1,4) a sűrűséget adja, az I. és II. tulajdonságokon kívül még a következő Blaschke részéről kiválasztási invarianciának nevezett két tulajdonságot kell kimutatnunk: (1,4) változatlan marad, ha 1) az E_r -ben az x^i pontot más ponttal helyettesítjük, 2) az a^i és b_i vektorokból álló ortogonális n -élt egy másik ortogonális n -éllé helyettesítjük, és e másik ortogonális n -élt meghatározó vektorok közül az a^i vektorok az eredeti a^i vektoroknak lineáris kombinációi.

1) §. Az egyenesmértékről

Szorítkozzunk a síkra és határozzuk meg a síkban az egyenes sűrűségét. H halmazunk most egy kétparaméteres egyenesseregből áll. Az egyenessereg bármely egyenesét egy pontját jellemző x^i helyzetvektorral és az irányát megszabó a^i ($\cos \varphi, \sin \varphi$) egységvektorral adjuk meg. Az előbbiek szerint ezekhez még hozzávesszük az a^i vektorra merőleges b^i ($-\sin \varphi, \cos \varphi$) egységvektort. E vektorok az előbbiek értelmében természetesen az egyenessereget meghatározó paraméterek függvényei. Az (1,4) képlet alapján mostmár az egyenes sűrűségére a

$$dg = (dx^i b^i) (da^i b^i) \tag{2,1}$$

kifejezést kapjuk. Ha az alternáló szorzásokat a (2,1)-ben elvégezzük, és az a^i és b^i vektorok közötti összefüggést is figyelembe vesszük, akkor az egyenes sűrűségét még a

$$dg = dx^i da^i = dx^1 d\cos\varphi + dx^2 d\sin\varphi \tag{2,2}$$

alakban is előállíthatjuk.

Az egyenes sűrűsége segítségével *Crofton* következő eredményéhez juthatunk.* Azoknak az egyeneseknek a mértéke, amelyek egy l hosszúságú c görbét metszenek, egyenlő $2l$ -lel, ha minden egyenest annyiszor veszünk számításba, ahányszor a görbét metszi. Ha a g egyenesnek a c görbével alkotott metszés-számát $n(g)$ -vel jelöljük, akkor előbbi eredményünket a

$$2l = \int n(g)dg \quad (2,3)$$

képlet fejezi ki. Megjegyzendő, hogy a (2,3) alatti integrál akkor is létezik, amikor a görbe nem rektifikálható. Így a (2,3) kifejezés segítségével a rektifikálhatóságnak általánosabb értelmezéséhez jutunk. Erre először *H. Lebesgue*¹⁵ és *J. Favard* mutatott rá.¹⁰

Az egyenessűrűség nevezetes optikai invarianciával rendelkezik. Erre a következőképp jutunk: tekintsünk olyan görbét, amelynek mentén a sugarak a Snellius-féle törvénynek megfelelően törnek meg, azaz minden a c görbét metsző olyan g_1 egyenesnek, amely a metszési ponthoz tartozó görbenormálissal a ϑ_1 »beesési« szöveget zárja be, olyan ugyanezen a ponton átmenő g_2 egyenes felel meg, amely a görbenormálissal a

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (2,4)$$

képlettel megadott ϑ_2 »törési« szöveget zárja be. A (2,4)-ben c_1 , illetve c_2 a görbe egyik, illetve másik oldalához tartozó fénysebességet jelenti. Ha a g_1 -gyel, illetve g_2 -vel jelölt egyenesek halmazának sűrűsége dg_1 , illetve dg_2 , akkor ezek a sűrűségek

$$\frac{dg_1}{dg_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (2,5)$$

szerint függenek össze.⁵ Ha a mértékre térünk át, akkor az

$$\frac{\iint dg_1}{\iint dg_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (2,6)$$

kifejezésre jutunk, amely csak akkor exakt, ha a c görbe egy egyenes. Ezt a tényt fejezi ki (2,6)-ban az egyenlőség jel fölé tett pont. Innen következik az, hogy a sűrűség változatlan marad, ha a sugarak optikai műszeren haladnak át. Ekkor ugyanis az első és utolsó közegek azonosak. Ebből a *Crofton*-féle tételből, valamint a sűrűségnek optikai invarianciájából következik már homogén és izotrop közegek esetén egy a tökéletes optikai műszerekkel kapcsolatos eredmény.** Egy optikai leképezés szigmatikus, ha egy pontból kiinduló sugarak a képtérben ismét egy pontban találkoznak. A szigmatikus leképezést adó műszert

* Ezt az eredményt *Crofton* a görbére vonatkozó, a rektifikálhatóságnál erősebb feltételek mellett bizonyította be. Csak a rektifikálhatósági feltétel mellett a képlet helyességét *W. Maak* bizonyította be. Lásd ¹⁶, 109—110. l.

** Az erre vonatkozó irodalmat lásd a 200. l. levő *** l. ábrájában.

tökéletes optikai műszernek nevezzük ; a leképezésnél természetesen csak azokat a sugarakat tekinthetjük, amelyek a műszeren keresztül mennek. Amennyiben az összes sugár átmenne a műszeren, a két idézett tételből már következik, hogy a tárgy és kép hossza megegyezik. Ez a tényállás azonban a mi esetünkben, azaz a homogén és anizotrop esetben akkor is igaz, ha asztigmatikus leképezést azok a sugarak hozzák létre, amelyek a műszeren átmennek. Ez adja éppen a tökéletes optikai műszerekre vonatkozó eredményt.

3. §. A Finsler-féle geometriáról

Amint a bevezetésben említettem, egy inhomogén és anizotrop közegben a fénysugarak pályáját az (a)-hoz tartozó variációs probléma extrémálisai határozzák meg. Ezeket az extrémálisokat a

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \quad (3,1)$$

Euler-féle egyenletek megoldásai adják. Ezek az extrémálisok bizonyos mértékben az egyenesek szerepét veszik át. Mivel a geometriai optikában a fénysugárnak hosszát fényidőben mérik, ezért a metrika nem euklidesi. E geometriának az íveleme az (a) integrál alapján

$$ds = L(x, dx). \quad (3,2)$$

Az e metrikán alapuló geometriát először P. Finsler¹², vizsgálta meg. Ebből a geometriából csak azokra a legelemibb tényekre lesz szükségünk, amelyek nem használják fel az invariáns differenciálkalkulus fogalmát. Mindenekelőtt rá kell mutatnunk arra, hogy a derékszögű koordinátarendszer fogalma itt elveszti értelmét, és így az x^i -k tetszőleges görbevonallú koordinátákat jelentenek. Előbbiekben a mérték meghatározásánál állandóan vektorokkal dolgoztunk. Bár most nem derékszögű koordinátarendszerről van szó, a vektor- és tenzorfogalom mégis értelmezhető. Ugyanis e fogalmak a (metrika nélküli) tenzorszámítás ponttereiére is átvihetők. Amint ismeretes, ezekben a terekben egy ponthoz kétfajta vektor tartozik, egy kontravariáns és egy kovariáns vektor, amelyek a koordinátatranszformációkkal szembeni viselkedésükkel jellemezhetők. A kontravariáns vektor úgy transzformálódik, mint a koordinátadifferenciálok, a kovariáns vektor pedig, mint egy skalárnak gradiense. Ismeretes továbbá az is, hogy egy pontban adott két vektorból koordinátainvariáns skaláris szorzatot csak úgy képezhetünk, ha az egyik vektor kovariáns, a másik kontravariáns. Amennyiben a geometria metrikus, pl. a Riemann-féle,⁹ csak egyfajta vektor létezik, amelynek kovariáns és kontravariáns komponensei vannak. Tudvalevő, hogy ennek az az oka, hogy a g_{ik} metrikus alaptenzor segítségével a tér minden pontjához olyan ferdeszögű Descartes-féle koordinátarendszerre vonatkoztatott euklidesi tér — az ú. n. euklidesi érintőtér — rendelhető hozzá, amelynél tengelyvektorokhoz tartozó skaláriszorzatokat a g_{ik} mennyiségek határozzák

meg. Ilyen térben jól ismert a kétfajta vektor komponensei közötti összefüggés. A Finsler-féle térben a Riemann-féle geometriához hasonlóan fogjuk a tényeket vázolni.* Kiindulópontunk a sokaság egy pontjához tartozó Caratheodory-féle induktrix fogalma. Ezt az induktrixot rögzített x^i mellett az

$$L(x, \dot{x}) = 1 \quad (3,3)$$

képlet határozza meg. Az $L(x, \dot{x})$ függvényről a továbbiakban feltételezzük, hogy az U^i segédváltozókban képezett

$$\frac{\partial (\frac{1}{2} L^2)}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k} U^i U^k \quad (3,4)$$

quadratikus forma pozitív definit. Egy x^i kontravariáns vektorhoz (\dot{x}) hossz-ként a

$$|\dot{x}| = L(x, \dot{x}) \quad (3,5)$$

kifejezést rendeljük hozzá. Ha egy affin segédsíkot vezetünk be, akkor a Caratheodory-féle induktrix nem egyéb, mint a koordinátarendszer kezdőpontjában felmért \dot{x}^i egységvektorok mértani helye. Ez a görbe a (3,4) miatt konvex görbe. Ha \dot{x}^i tetszőleges olyan vektor, amelynek kezdőpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, és végpontja rajta fekszik a Caratheodory-féle induktrixon, akkor létezik egy és csak egy olyan másodrendű görbe, amelynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontjában fekszik, és amely az induktrixot az \dot{x}^i vektor végpontjában másodrendben érinti. E másodrendű görbe egyenletét a V^i futókoordinátákban a

$$g_{ik}(x, \dot{x}) V^i V^k = 1 \quad (3,6)$$

kifejezés határozza meg, ahol

$$g_{ik}(x, \dot{x}) = \frac{\partial (\frac{1}{2} L^2(x, \dot{x}))}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k} \quad (3,7)$$

Így nem egy ponthoz, hanem egy (x, \dot{x}) vonalelemhez tartozik euklidesi érintősík. Ennek alapján a kétdimenziós sokaságot vonalelemsokasággá kell kibővítenünk. Ha egy az (x, \dot{x}) vonalemben értelmezett vektornak kontravariáns komponensei a^i , akkor kovariáns komponenseit az

$$a = g_{ik}(x, \dot{x}) a^k \quad (3,8)$$

határozza meg. Az $L(x, \dot{x})$ függvénynek \dot{x}^i -ben elsőfokú homogenitása miatt

$$g_{ik}(x, \dot{x}) \frac{\dot{x}^i}{L} \frac{\dot{x}^k}{L} = L(x, \frac{\dot{x}}{L}) = 1,$$

azaz

$$l^i = \frac{\dot{x}^i}{L(x, \dot{x})} \quad (3,9)$$

* A Finsler-féle geometria felépítésére vonatkozólag részletes összefoglalást ad L. Berwald 1-ben. Itt egyébként további irodalom is található.

egységvektor. E vektor kovariáns komponenseit a

$$l_i = g_{ik} l^k = \frac{\partial L(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i} \quad (3,10)$$

kifejezések határozzák meg. A szögmetrika most már a g_{ik} mennyiségek segítségével úgy értelmezhető, mint az euklidesi geometriában.

4. §. Az extrémális sűrűség

Legyen adva egy kétparaméteres extrémális sereg. Ezt úgy határozhatjuk meg, ha az extrémalist meghatározó x^i, l_i vonalelemet két paraméter függvényeként adjuk meg, azaz

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(u_1, u_2), \\ l_i &= l_i(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (4,1)$$

Ebben az esetben az egyenes irányát meghatározó a^i vektor helyébe az l_i vektor lép. Ennek megfelelően a (2,2) egyenes sűrűségéhez teljesen hasonlóan képezhetjük a

$$dg = dx^i dl_i \quad (4,2)$$

alternáló differenciálformát. Ez az extrémális sűrűségnek nevezett másodrendű alternáló forma a következő tulajdonsággal rendelkezik:*

1. Nem változik koordinátatranszformációkkal szemben.

2. Nem változik, ha az (x^i, l_i) vonalelemet az ezen áthaladó extrémálison eltoljuk.

Az első tulajdonság triviális módon teljesül, mivel a (4,2) Pfaff-féle formák alternáló szorzatából áll. A második tulajdonságnak bizonyításánál használjuk csak fel az extrémális tulajdonságot. Ha fordítva egy kétparaméteres görbesereg van a dva, és ezeknek vonalelemeiből (4,2)-nek megfelelő kifejezést képezve, ez a mindig teljesülő 1. tulajdonságon kívül még a 2. tulajdonsággal is rendelkezik, akkor a sereg görbéi extrémálisok.*

Megjegyezzük, hogy ha a (4,2) jobboldalán szereplő kifejezést kifejtjük, a kapott

$$dg = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u_1} \frac{\partial l_i}{\partial u_2} - \frac{\partial x^i}{\partial u_2} \frac{\partial l_i}{\partial u_1} \right) du_1 du_2 \quad (4,3)$$

kifejezés jobboldalán éppen a geometriai optikában már régebben ismert

$$[u_1, u_2] = \frac{\partial x^i}{\partial u_1} \frac{\partial l_i}{\partial u_2} - \frac{\partial x^i}{\partial u_2} \frac{\partial l_i}{\partial u_1} \quad (4,4)$$

Lagrange-féle zárójelet¹⁴ nyerjük. Ugyancsak a geometriai optikából ismeretes, hogy ez a kifejezés a fénysugár mentén állandó. Ez az extrémális sűrűségnek az előbb említett invariancia-tulajdonságával azonos.

* Lásd 260—262. l.

Amint az egyenessűrűség esetén, úgy itt is fennáll a sűrűség optikai invarianciája törés esetén.*

Legyen adva egy extrémálisan konvex T tartomány, azaz egy rendezett pontpáron át pontosan egy extrémális haladjon át úgy, hogy az extrémális két pontja közötti ív csak a T tartomány pontjaiból álljon. Ha e T tartományban egy l hosszúságú c görbét tekintünk és e c görbének a g extrémálissal való metszéspontjainak számát $n(g)$ -vel jelöljük, akkor az euklidesi geometria esetének megfelelően a c görbét metsző extrémálisok számára:

$$\int n(g)dg = 2l \quad (4,5)$$

kifejezést kapjuk, ha még feltételezzük, hogy

$$L(x, -\dot{x}) = L(x, \dot{x})^{**} \quad (4,6)$$

Ez a feltevés csupán azt jelenti, hogy a görbe hossza független az irányítástól.

Ha a törési invariancia, valamint a Finsler-féle térben is érvényes (4,5) Crofton-féle tétel mellett még feltesszük az $L(x, \dot{x})$ függvényről, hogy \dot{x}^i -ban analitikus, akkor kimutatható,*** hogy tökéletes optikai műszernél a tárgy és kép hossza — Finsler-metrikában mérve — egyenlő. Amikor a homogén és izotrop közegek esetét tárgyaltuk, már említettük, hogy a tökéletes műszerekre vonatkozó tétel igaz. Ez mostani eredményünkéből úgy következik, hogy az $L(x, \dot{x})$ függvényre szabott feltételek teljesülnek. Ugyanis ekkor

$$L(x, \dot{x}) = \kappa \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2} = (\kappa \text{ egy állandó}).$$

Debreceni Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

- ¹ Berwald L.: Über Finslersche und verwandte Räume, Comptes rendus du deuxième congrès de mathématiciens des pays slaves, Praha 1934, 1—15.
- ² Blaschke W.: Integralgeometrie 11. Zur Variationsrechnung, Abh. aus dem math. Sem., Hamburg 11, (1936) 359—366.
- ³ Blaschke W.: Integralgeometrie 12, Über vollkommene optische Instrumente, Abh. aus dem math. Sem., Hamburg, 11 (1936) 409—412.
- ⁴ Blaschke W.: Integralgeometrie 1, Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n , Actualités scientifiques et industrielles, 252, Paris 1935.
- ⁵ Blaschke W.: Vorlesungen über Integralgeometrie, Heft 1, Leipzig-Berlin 1936.
- ⁶ Cartan E.: Leçons sur les invariants intégraux, Paris 1922.
- ⁷ Carton E.: Le principe de dualité et certains intégrales multiples, Bull. de la Soc. math. de France, 24 (1868), 181—199.
- ⁸ Crofton M. W.: ... Philosophical Transactions at the Royal Society, 158 (1868) 181—199.
- ⁹ Duschek A.—Mayer W.: Lehrbuch der Differentialgeometrie, I—II. kötet. Leipzig—Berlin 1930.

* Lásd ² 364. l. és ³ 410. l.

** Lásd ² 363. l.

*** E problémával a kérdést 1858-ban felvető J. C. Maxwell óta több fizikus és matematikus, így H. Bruns, F. Klein, H. Liebmann, C. Carathéodory, W. Lenz és W. Blaschke foglalkozott. E dolgozat a Blaschke-féle bizonyítás alapján áll. Lásd ³ 409—412. lapokat. Ugyanítt erre a kérdésre vonatkozó részletes irodalom is található

- ¹⁰ *Favard J.* : Une définition de la longueur et de l'aire, C. R. 194 (1932), 344—346.
- ¹¹ *Fermat P.* : Oeuvres, I—III. köt. Paris, Gauthier Villars, 1891—1896.
- ¹² *Finsler P.* : Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Diss. Göttingen, 1918.
- ¹³ *Hamilton W. R.* : Trans. Irish Acad., 15 (1828), 69—178.
- ¹⁴ *Lagrange J. L.* : Oeuvres 6, (1808) 771—805.
- ¹⁵ *Lebesgue H.* : Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton, Nouv. Ann., 4 (1912) 12, 481—502.
- ¹⁶ *Maak W.* : Integralgeometrie, 18, Grundlagen der ebenen Integralgeometrie, Abh. aus dem math. Sem., Hamburg, 11, (1936) 83—110.
- ¹⁷ *Poincaré H.* : Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3. köt. Paris, Gauthier-Villars (1899).

Valószínűségszámítás és alkalmazásai

A POISSON-ELOSZLÁS PROBLÉMAKÖRÉRŐL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

A valószínűségszámítás az elmúlt néhány évtizedben hatalmas fejlődésen ment keresztül. Elsősorban szovjet matematikusoknak, Sz. N. Bernsteinnek, A. J. Hincsinnek, A. N. Kolmogorovnak és követőinek köszönhetjük, hogy az orosz valószínűségszámítási iskola, továbbfejlesztve P. L. Csebisev, A. A. Markov és A. M. Ljapunov hagyományait, a valószínűségszámítás szilárd elvi alapjait megteremtette, és átfogó horderejű módszereket dolgozott ki. Munkásságuk nyomán, amely világszerte nagyszámú követőre talált, a valószínűségszámítás elszigetelt részleteredmények összességéből összefüggő, mély elméletté alakult. A valószínűségszámítás ma is rohamosan fejlődik tovább, és minden újabb eredménye a megoldatlan problémák tucatját veti fel, de már jelenlegi fejlődési fokán is a matematika egyik legfontosabb fejezetévé vált általános elvi szempontból is, különösen pedig gyakorlati alkalmazásainak széleskörű skálája folytán, és jelentősége egyre növekszik. Az anyagi világ megismerésére és megváltoztatására irányuló törekvéseknek, a természettudományoknak, a valószínűségszámítás felbecsülhetetlen segédeszköze. Éppen ott nyújt segítséget, ahol más módszerek csődöt mondanak, a véletlen jelenségek területén. A valószínűségszámítás alkalmazhatósági köre azokat a természeti és társadalmi jelenségeket öleli fel, amelyeknél igen nagyszámú, külön-külön a véletlentől függő esemény összességében pontos és szigorú érvényű törvényszerűségeket mutat fel. Ilyen jelenségekkel találkozunk a fizikában, a kinetikus gázelméletben, a Brown-féle mozgás vizsgálatánál, a rádióaktív bomlás, a kozmikus sugárzás, az elektroncsövek tanulmányozásánál, de ugyanúgy találkozunk ilyen jelenségekkel a csillagászatban a csillagoknak a térben való elhelyezkedésének, a napfoltoknak a vizsgálatánál, a geológiában, az időjárás és a csapadék ingadozásainak vizsgálatánál, a meteorológiában, a hidrológiában, és a természettudományok más területein. Ilyen jelenségekkel találkozunk az ipari tömegtermelés minőségi ellenőrzésével, a tűzérési tűz irányításával kapcsolatban, a távközlés, a közlekedés problémáinak vizsgálatánál, és a társadalmi élet legkülönbözőbb jelenségeinek statisztikai feldolgozásával kapcsolatban. A laboratóriumi orvosi, biológiai kísérletezésnek, a mezőgazdasági kísérleteknek is nélkülözhetetlen segédeszköze a valószínűségszámítás. A valószínűségszámítás általános módszerei és eredményei a gyakorlati problémák százaiból, azok közös matematikai tartalmának kihámozása útján fejlődtek ki. Nincs még egy

ága a matematikának, amelynek a gyakorlattal való szoros kapcsolata, termékeny kölcsönhatása, az emberiség szükségleteiből való kifejlődése olyan nyilvánvaló volna, mint a valószínűségszámítás. A valószínűségszámítás fejlődését hosszú ideig hátráltatta alapfogalmainak tisztázatlansága. Több kísérlet történt a valószínűségszámítás elvi alapjainak tisztázására. Azok a kísérletek, amelyek a valószínűség fogalmának hamis, szubjektív idealista, felfogását vették alapul mint például *B. de Finetti*, vagy machista értelmezéséből indultak ki, mint például *R. v. Mises* és követői, szükségképpen zsákutcába vezettek.^{1,2} A valószínűségszámítás elvi kérdéseinek objektív, materialista tisztázását és a valószínűségszámítás matematikailag exakt megalapozását *Kolmogorov* korszakalkotó munkásságának köszönhetjük.³ *Kolmogorov* és a szovjet valószínűségszámítási iskola eredményei következtében ez a probléma ma már lényegében megoldottnak tekinthető, és az alapok tisztázása lehetővé tette a valószínűségszámítás zavartalan fejlődését. Mint ismeretes, a valószínűségszámítás matematikailag szabatos megalapozása a valós függvénytan és a halmazelmélet, pontosabban a mértékelmélet segítségével sikerült. Az ezirányú kutatások oly mértékben magukra vonták a matematikusok figyelmét, hogy sokan a valószínűségszámítás »belső« problémái felé fordultak, és ezáltal elfordultak a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásainak aktuális problémáitól. Ez kétségtelenül szükséges folyamat volt, és bár még ma is sok megoldatlan »belső« problémája van a valószínűségszámításnak, nem volna helyes, és nem vinné előre a fejlődést, ha ez a helyzet állandósulna, és a kutatók továbbra is a valószínűségszámítás matematikai alapjainak csiszolására helyeznék a fő súlyt. A valószínűségszámítás további fejlődését — amint azt *A. N. Kolmogorov* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában kifejtette — az viszi leginkább előre, ha a valószínűségszámítás művelői fordulatot hajtanak végre a gyakorlati problémák felé. Valóban az a helyzet, hogy bár egy átfogó valószínűségszámítási elmélet alapjai és körvonalai ma már teljesen tisztán állnak előttünk, a gyakorlati alkalmazások terén még igen gyakran elavult, vagy az általános elmélettől elszakadt, ad hoc módszereket használnak, és az átfogó egységes szempontok hiányoznak. Legjobb példa erre a statisztikus fizika (beleértve mind a klasszikus, mind a kvantumstatisztikát), ahol a legutóbbi időkig fogalmilag zavaros és matematikailag kezdetleges módszerekkel operáltak, amíg a legutóbbi években *A. J. Hincsin*^{4,5} meg nem mutatta hogyan lehet ezeket a kérdéseket a valószínűségszámítás mai fejlett módszereivel teljesen világos és matematikailag szabatos módon tárgyalni. Ezzel kapcsolatban röviden ki kell térnem a matematikai statisztika mai helyzetére is. A nyugati, különösen az angolszász államokban a matematikai statisztika hangadó képviselői a matematikai statisztikát a valószínűségszámítástól elválasztva igyekeznek fejleszteni. Bár kétségtelenül sok értékes részleteredményt értek el, eredményeik megbízhatóságát nagymértékben csökkenti az elvi tisztázatlanság, különösen az egyes módszerek alkalmaz-

hatósági határai vizsgálatának szinte teljes elhanyagolása. A zavart még fokozza, hogy azokat a szakembereket, orvosokat, biológusokat, akik a matematikai statisztika módszereit a maguk területén alkalmazzák, a matematikai statisztikának ezek a szakemberei nemcsak hogy nem intik óvatosságra, hanem inkább bátorítják az elvi kérdések elhanyagolására. Ez pedig arra vezet, hogy a matematikai statisztika módszereit igen gyakran kritika nélkül, kontár módra alkalmazzák, és így helytelen következtetésekre jutnak, ami e tudományok fejlődését gátolja. Hogy csak egy közismert példát említsek, az úgynevezett »szignifikáns differencia« módszere, amely annak eldöntésére szolgál, hogy egy kísérletsorozat eredményei közötti eltérés véletlen vagy szisztematikus jellegű, az orvostudományi kutatásnak hazánkban is mindennapi kenyérévé vált, de csak kevesen tudják és veszik figyelembe, hogy ez a módszer csak normális, vagy legalábbis közelítőleg normális eloszlás és független kísérletek esetében jogosult. Általában a leggyakoribb hibák közé tartozik a matematikai statisztika gyakorlati alkalmazásai terén az, hogy nem vizsgálják meg kellő körültekintéssel, vajjon a vizsgált eloszlás normálisnak tekinthető-e, a normális eloszlás fogalmát misztifikálják és ott is alkalmazzák, ahol ez nem indokolt. Hasonlóképpen nem vizsgálják meg elég alaposan, hogy a függetlenség feltevése hol és milyen mértékben jogosult és kevés számú adatból indokolatlanul messzemenő következtetéseket vonnak le (”kis minták” elmélete.) A Szovjetunióban kialakult matematikai statisztikai iskola mentes ezektől a hibáktól, és mentes attól a hamis, tudománytalan felfogástól, amely a matematikai statisztikát különválasztja a valószínűségszámítástól. Nem kisorszban ennek tulajdoníthatók a szovjet matematikusok ragyogó eredményei ezen a területen. Valójában az a helyzet, hogy a matematikai statisztika nem önálló tudomány, hanem a valószínűségszámítás szerves része, nem állhat meg az általános elmélet nélkül, amely éppen arra szolgál, hogy az egyes statisztikai módszerek alkalmazhatósági körét és érvényességi határait tisztázza; a valószínűségszámítástól elszakítva a matematikai statisztika csak kontársághoz, tudományhamisításhoz vezethet. Amikor *Kolmogorov* útmutatását követve azt hangsúlyoztam, hogy a valószínűségszámítás kutatói előtt ma az a feladat áll, hogy a megteremtett szilárd matematikai alapokat elsajátítva és azokból kiindulva a gyakorlati alkalmazások irányába forduljanak, és az ott alkalmazott módszereket igyekezzenek kritikailag felülvizsgálni, rendszerezni és továbbfejleszteni, ez a program magában foglalja a matematikai statisztika és a valószínűségszámítás között emelt mesterséges fal ledöntését is. Széles perspektívájú, nagy és komoly munkát kívánó program az, amely a valószínűségszámítás terén dolgozó matematikusok előtt áll. Megvalósításában az élenjáró szovjet valószínűségszámítási iskola oldalára fel kell sorakozni a valószínűségszámítás hazai művelőinek is, különös tekintettel arra, hogy öt éves tervünk megvalósítása, iparunk, természettudományi kutatásunk fejlesztése hazánkban is tömegével veti fel a valószínűségszámítási módszereket igénylő problémákat.

Ezekkel a kérdésekkel ma még csak egy kislétszámú csoport foglalkozik, a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetében. Ennek a csoportnak ki kell bővülnie, és fiatal kutatókkal kiegészülve, tudását elmélyítve kell dolgoznia, hogy a rá váró feladatokat eredményesen tudja megoldani.

A valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásai terén két problémakör válik el egymástól meglehetősen élesen, bár természetesen ezt a két problémakört számtalan szál fűzi egymáshoz. Az első problémakör, amelyben a normális (Gauss—Laplace-féle) eloszlás játszik központi szerepet, véletlentől függő folytonos mennyiségekkel, folytonos valószínűségi változókkal foglalkozik. A másik problémakör, amelyben a megfelelő központi szerepet a Poisson-féle eloszlás tölti be, véletlen eseményekkel, azok bekövetkezésének számával, tehát egész értékű, diszkrét valószínűségi változókkal foglalkozik. Elméleti szempontból a két fejezet közül az első sokkal kidolgozottabb, de éppen ezért fontos a második említett problémakör fejlesztése, különös tekintettel annak gyakorlati alkalmazásaira. Mai előadásom célja képet adni erről a problémaköréről, legalábbis néhány alapvető kérdéséről, érintve azok egynéhány gyakorlati alkalmazását is.

Amint mondtam, az említett két problémakört sok szál kapcsolja össze, így például mind a Gauss-Laplace-féle, mind a Poisson-féle eloszlás történetileg először a binomiális eloszlás határeseteként léptek fel. Mint ismeretes, ha ξ -vel jelöljük azt, hogy egy p valószínűségű A esemény n független kísérlet közül hányszor következett be, annak a valószínűségét, hogy a ξ valószínűségi változó értéke egy k egész szám legyen ($k = 0, 1, 2, \dots$) a

$$B_n(k, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (1)$$

képlet adja meg, ahol $q = 1 - p$; a ξ változóról azt mondjuk, hogy binomiális eloszlással bír. Könnyen belátható, hogy ξ középértéke (várható értéke) np , szórása \sqrt{npq} . Ez azt jelenti, hogy ξ -nek np -től való eltérése igen nagy n mellett \sqrt{npq} nagyságrendű. Ezt az állítást még precízebbé lehet tenni és egyszerű számolással ki lehet mutatni, hogy annak a valószínűsége, hogy ξ értéke $np + a\sqrt{npq}$ és $np + b\sqrt{npq}$ közé essék, konvergál a

$$G(b) - G(a) \quad (2)$$

határértékhez, ahol

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3)$$

az ú. n. Gauss-Laplace-féle vagy normális eloszlásfüggvény. Másszóval

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{a \leq \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \leq b} B_n(k, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (4)$$

Ez az állítás a legrégebben ismeretes és legegyszerűbb speciális esete a valószínűségszámítás ú. n. centrális középértéktételének. Ebben a formában A. Moivre⁶-tól származik. A centrális középértéktételnek e globális formája mellett ismeretes egy lokális formája is, mégpedig

$$B_n(k, p) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} \quad (5)$$

Kevésbé ismeretes, hogy (4) akkor is érvényes, ha ugyanakkor, amikor $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, de oly módon, hogy $np \rightarrow \infty$. Ha azonban p úgy tart zérushoz, miközben n minden határon túl nő, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} np = \lambda$ egy pozitív λ számmal egyenlő,

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(k, p) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(k, \lambda) \quad (6)$$

Az így határértékként nyert eloszlást nevezik Poisson-féle eloszlásnak. A binomiális eloszlás középértéke np és szórásnégyzete $npq = np - np^2$ is konvergálnak a Poisson-eloszlás középértékéhez, illetve szórásnégyzetéhez, és mindkettőnek értéke λ . Ez egyébként a Poisson-eloszlásnak egy jellemző (bár önmagában természetesen távolról sem elégséges) ismertetőjele, hogy tudniillik a középérték és szórásnégyzet számértékben megegyeznek.

A Poisson-féle eloszlást a fenti módon, mint a binomiális eloszlás határ-esetét Poisson fedezte fel⁷, jelentőségét azonban nem ismerte fel. Ez első sorban L. v. Bortkiewitz⁸ érdeme, aki rámutatott a Poisson-eloszlás széleskörű alkalmazhatóságára a ritka jelenségek statisztikájánál. Bortkiewitz a Poisson-féle határértéktételt a kis számok törvényének nevezte el, szembeállítva a centrális középértéktétellel, amelyet régebben a nagy számok törvényének neveztek — ma ez az elnevezés egy Bernouillitól származó és lényegesen kevesebbet mondó tételecsoportra szállt át, azokra a tételekre, amelyek a gyakoriságnak a valószínűséghez való konvergenciájára vonatkoznak. Ez az elnevezés meglehetősen szerencsétlen. Itt valóban ritka eseményekről van szó ($p \rightarrow 0$), amelyek ennél fogva a kísérletek közül csak kis számban következnek be, azonban természetesen a Poisson-féle határelosztás éppen úgy, mint a Moivre-féle, csak a kísérletek igen nagy száma mellett tekinthető jó közelítésnek (hiszen feltettük, hogy $m \rightarrow \infty$). A Poisson-eloszlás problémakörét később R. v. Mises⁹, H. Polaczek-Geiringer¹⁰, Pólya György¹¹, A. J. Hincsin¹², és mások fejlesztették tovább. Ma már tudjuk, hogy a Poisson-eloszlás jelentősége messze túlnő a binomiális eloszlás határesetenkénti fellépésén, továbbá, hogy csak speciális esete egy általánosabb diszkrét eloszláscsaládnak, amelyre vonatkozólag nemrégiben Aczél Jánossal és Jánossy Lajossal együtt folytattunk vizsgálatokat. Ezek eredményéről más alkalommal számolunk be.*

* Megjelenik az Acta Mathematica Acad. Sci. Hung. I. 2. számában.

A Poisson-eloszlásnak egy gyakori alkalmazását szeretném bemutatni, illetőleg megmutatni azt, hogy egy konkrét problémában hogyan lép fel a fent vázolt valószínűségszámítási séma. A probléma a telefontechnikából származik. Egy telefonközpontba változó, a t időtől függő időbeli sűrűséggel előre meg nem határozható, a véletlentől függő időpontokban érkeznek hívások. A hívások időbeli eloszlásáról a következő feltevéseket tesszük: annak a valószínűsége, hogy t és $t + \Delta t$ időpontok között hívás érkezzék, legyen $p(t) \Delta t + o(\Delta t)$.^{*} Annak a valószínűsége, hogy t és $t + \Delta t$ között 1-nél több hívás történjék, legyen Δt -nél kisebb nagyságrendű. Feltesszük továbbá, hogy a különböző időintervallumok alatt történő hívások egymástól függetlenek. Ezek a feltevések általánosabbak a telefontechnika irodalmában használatosaknál, ahol ugyanis fel szokták tenni, hogy a hívások időbeli sűrűsége az u . n. csúcsgazdálkodási időben állandó. Keressük annak a valószínűségét, hogy 0 és t időpontok között pontosan k hívás érkezzék a központba; ezt a valószínűséget $P_k(t)$ -vel fogjuk jelölni. Hogy ezt kiszámítsuk, osszuk fel a $(0, t)$ időszakot n egyenlő részre. Annak a valószínűsége, hogy az r -edik szakaszon hívás történjék, feltevéssünk szerint $\sim p\left(\frac{rt}{n}\right) \frac{t}{n}$. Annak a valószínűsége, hogy az r -edik szakaszon ne történjék hívás, $\sim 1 - p\left(\frac{st}{n}\right) \frac{t}{n}$. Ennélfogva annak a valószínűségét, hogy 0 és t között pontosan k hívás történik, közelítőleg a

$$\sum \left(\frac{t}{n}\right)^k p\left(\frac{r_1 t}{n}\right) p\left(\frac{r_2 t}{n}\right) \dots p\left(\frac{r_k t}{n}\right) \cdot \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq r_i (i=1, 2, \dots, k)}}^n \left(1 - p\left(\frac{st}{n}\right) \frac{t}{n}\right) \quad (7)$$

összeg adja meg, ahol az összegezés kiterjed az összes, az

$$1, 2, \dots, n$$

számok közül kiválasztható k tagú (r_1, r_2, \dots, r_k) kombinációkra. A (7) kifejezés azért csak közelítőleg egyenlő a keresett valószínűséggel, mert nem vettük figyelembe, hogy a részintervallumokon egynél több hívás is történhet. Ha azonban elvégezzük az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet, akkor feltevéseink értelmében az ebből származó hiba 0-hoz tart, és így nyerjük, hogy a keresett valószínűség

$$P_k(t) = \frac{\left(\int_0^t p(x) dx\right)^k}{k!} e^{-\int_0^t p(x) dx} \quad (8)$$

másképp, annak a valószínűsége, hogy a $(0, t)$ időtartamban pontosan k hívás történjék, Poisson-eloszlást követ. Ha a hívások időbeli sűrűsége állandó,

* $o(\Delta t)$ olyan függvényt jelöl, amelyre $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

$$p(x) \equiv p, \text{ akkor } \int_0^t p(x) dx = pt \text{ és így} \quad (9)$$

$$P_k(t) = \frac{(pt)^k}{k!} e^{-pt}$$

ez a közismert Poisson-féle sztohasztikus folyamat. Amennyiben már eleve feltesszük, hogy $p(x) \equiv p$, akkor a (7) összeg a következő alakú

$$\binom{n}{k} \left(\frac{pt}{n}\right)^k \left(1 - \frac{pt}{n}\right)^{n-k} \quad (10)$$

vagyis itt a Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás határeseteként lép fel. Mielőtt tovább mennénk, megemlítem, hogy a Poisson-féle sztohasztikus folyamat alkalmazásaiban az idő szerepét a térfogat is átveheti, és ebben az interpretációban a Poisson-eloszlás egyrészt a csillagok térbeli eloszlását, másrészt kolloid oldatok sűrűségingadozásait írja le. Hasonlóképpen Poisson-eloszlást követnek a radioaktív bomlások, a katódból kilépő elektronok, a textilgépek fonalszakadásai is. Visszatérve a telefonhálózat kérdéseihez, a hálózatok és központok tervezésénél nemcsak a beszélgetések számát, hanem azok időtartamát is figyelembe kell venni. Ezzel kapcsolatban felmerül a következő probléma: ha a telefonközpontban a fent tárgyalt eloszlással érkeznek hívások, amelyeket a központ a rendelkezésre álló korlátlan számú szabad vonalakra irányít, ismerve a beszélgetések időtartamának (amely szintén valószínűségi változónak tekintendő) az eloszlását, meghatározandó annak valószínűsége, hogy a központ működésbe lépése után t idővel egyidejűleg pontosan k beszélgetés legyen folyamatban. A telefontechnikában általában azt szokták feltenni, hogy a beszélgetések időtartama exponenciális eloszlású, azaz, annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés tartama τ -t ne haladja meg $F(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$. Ezt a feltevést a tapasztalatok csak bizonyos közelítéssel igazolják. Távolsági beszélgetéseknél pl. egyáltalán nem felel meg a tényeknek. A feltevés jogosultságát illetőleg figyelemreméltó, hogy ezt a feltevést gyakorlati szakemberek általában elméletileg igyekeznek igazolni, olyan más feltevésekből, amelyeknek teljesülése szintén meglehetősen kérdéses. A helyzet valójában az, hogy a beszélgetések tartamának exponenciális eloszlására vonatkozó feltevést nem annyira a tapasztalatok, mint inkább az a meggondolás indokolja (már amennyire ezt indokolásnak lehet tekinteni), hogy a feltevés a valószínűségszámítási meggondolásokat matematikailag egyszerűbbé teszi. A következőkben az említett problémák tetszőleges beszélgetési eloszlásra fogjuk megoldani, a megoldás ilyen általánosságban tudomásom szerint az irodalomban nem ismeretes. A kapott képletek, exponenciális eloszlás feltevése mellett, speciális esetként tartalmazzák *T. Erlang* és *A. Jensen*¹³, *T. C. Fry*¹⁴, *C. Palm*¹⁵ és

mások eredményeit; ezek a szerzők az exponenciális eloszlást tételezik fel. Megjegyzendő, hogy az említett szerzők a problémát egy differenciálegyenlet-rendszerre vezetik vissza, és módszerük az általános esetben nem alkalmazható, ezzel szemben az alább közölt módszer teljesen elemi és ugyanakkor általános.

Jelentse $Q_k(t)$ annak a valószínűségét, hogy t időpontban pontosan k beszélgetés van folyamatban. A hívások időbeli eloszlására vonatkozólag ugyanazokat a feltevéseket tesszük, mint fentebb, és így a hívások Poisson-eloszlást követnek. Jelölje $F(x)$ annak a valószínűségét, hogy egy beszélgetés időtartama legfeljebb x , és legyen $\varphi(x) = 1 - F(x)$. Ugyanúgy, mint az előbbi bizonyításban, osszuk fel a $(0, t)$ intervallumot n egyenlő részre. Annak a valószínűsége, hogy t időpontban folyamatban legyen egy olyan beszélgetés, amely az r -edik részintervallumban (azaz $\frac{(r-1)t}{n}$ és $\frac{rt}{n}$ között) kezdődött, közelítőleg

$$p \left(\frac{rt}{n} \right) \varphi \left(t - \frac{rt}{n} \right) \frac{t}{n}, \quad (11)$$

míg annak a valószínűsége, hogy t időpontban nincsen folyamatban oly beszélgetés, amely az s -edik részint intervallumban kezdődött

$$1 - p \left(\frac{st}{n} \right) \varphi \left(t - \frac{st}{n} \right) \frac{t}{n}. \quad (12)$$

Így tehát annak a valószínűsége, hogy t időpontban pontosan k beszélgetés legyen folyamatban, közelítőleg

$$\sum \left(\frac{t}{n} \right)^k \prod_{i=1}^k p \left(\frac{r_i t}{n} \right) \varphi \left(t - \frac{r_i t}{n} \right) \prod_{s=1}^n \left(1 - p \left(\frac{st}{n} \right) \varphi \left(t - \frac{st}{n} \right) \frac{t}{n} \right) \quad (13)$$

$s \neq r_i; i = 1, 2, \dots, k$

ahol az összegezés az összes, az $1, 2, \dots, n$ elemek közül kiválasztható (r_1, r_2, \dots, r_k) k -adrendű kombinációkra terjed ki. Mint előbb, itt is azért csak közelítőleg adja meg a (13) a keresett valószínűséget, mert nem vettük figyelembe, hogy egy részintervallumban több beszélgetés is kezdődhet, azonban itt is az ebből származó hiba 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$ és így nyerjük, hogy

$$Q_k(t) = \frac{\left(\int_0^t p(x) \varphi(t-x) dx \right)^k}{k!} e^{-\int_0^t p(x) \varphi(t-x) dx} \quad (14)$$

Vagyis a t időben folyamatban levő beszélgetések száma is Poisson-eloszlást követ. A fenti levezetésben azt is feltehetjük volna, hogy a beszélgetések időtartamának eloszlásfüggvénye függ a beszélgetés kezdetének időpontjától.

Ez esetben $\varphi(x)$ helyett egy $\varphi(x, t)$ függvényt kell bevezetnünk, amely annak a valószínűségét adja meg, hogy egy x időpontban kezdődő beszélgetés tartama $\geq t$. Ez esetben a (14) képlet a következőképpen módosul:

$$Q_k(t) = \frac{\left(\int_0^t p(x) \varphi(x, t-x) dx \right)^k}{k!} e^{-\int_0^t p(x) \varphi(x, t-x) dx} \quad (15)$$

Mással az abban az esetben is Poisson-eloszlást kapunk, ha nem tesszük fel, hogy a beszélgetés kezdetének időpontja és a beszélgetés tartama függetlenek.

Amint ez (14)-ből leolvasható, az eloszlás függ a t időponttól, azaz attól, hogy a központot a bekapcsolás után mennyi idővel vizsgáljuk. Ha $p(x)$ állandó, vagy legalábbis $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x)$ létezik, és a központ már elég hosszú ideje

működik, kialakul egy egyensúlyi állapot, mely már az időtől független. Ez matematikailag abban fejeződik ki, hogy ha $t \rightarrow \infty$, akkor $Q_k(t)$ konvergál a

$$Q_k = \frac{(pm)^k}{k!} e^{-pm} \quad (16)$$

határértékéhez, ahol

$$m = \int_0^{\infty} x dF(x) \quad (17)$$

a beszélgetések átlagos hossza, melyről feltesszük, hogy véges.

Meg kell még jegyeznünk, hogy ha a $p(x)$ függvény igen erős fluktuációkat mutat, akkor nem alakul ki »egyensúlyi állapot« ha $t \rightarrow \infty$. Pontosabban, ha

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^{\infty} p(x) e^{-sx} dx \quad \text{nem létezik és} \quad \lambda(t) = \int_0^t p(x) \varphi(t-x) dx$$

akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)$ sem létezhet.

Ugyanis legyen

$$\int_0^{\infty} \lambda(t) e^{-st} dt = \Lambda(s),$$

$$\int_0^{\infty} p(x) e^{-sx} dx = \pi(s) \quad (18)$$

és

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-sx} dx = \Phi(s),$$

akkor

$$\Lambda(s) = \Phi(s) \cdot \pi(s).$$

Mivel

$$\Phi(0) = \int_0^{\infty} x dF(x) = m,$$

tehát

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\Lambda(s) = m. \quad \lim_{s \rightarrow 0} s\pi(s),$$

Ha tehát a $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda$ határérték létezne, akkor

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^{\infty} \lambda(t) e^{-st} dt = \lambda \quad \text{volna, és így} \quad \lim_{s \rightarrow 0} s\pi(s) = \frac{\lambda}{m} \quad \text{határérték}$$

szintén léteznék. Amennyiben $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, azaz a beszélgetések hossza exponenciális eloszlást mutat és $p(x) \equiv p$ állandó, úgy

$$Q_k(t) = \frac{\left(p \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)^k}{k!} e^{-p \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)}, \quad (19)$$

és a $t \rightarrow \infty$ határesetben

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_k(t) = Q_k = \frac{(p/\lambda)^k}{k!} e^{-p/\lambda} \quad (\text{azaz itt } m = \frac{1}{\lambda}). \quad (20)$$

Megjegyzendő, hogy ha (19)-ben $\lambda \rightarrow 0$, akkor

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q_k(t) = \frac{(pt)^k}{k!} e^{-pt} = P_k(t). \quad (21)$$

Ennek értelmezése a következő: Mivel $\frac{1}{\lambda}$ a beszélgetések átlagos időtartama,

ha $\lambda \rightarrow 0$, akkor $\frac{1}{\lambda} \rightarrow \infty$, és végtelen hosszú beszélgetési idő esetében nyilván a t időben folyamatban levő beszélgetések száma megegyezik a 0 és t közötti hívások számával, hiszen minden 0 és t közt megkezdett beszélgetés a t időpontban is folyamatban van.

Fenti eredményeink nemcsak telefonproblémáknál alkalmazhatók, hanem más esetekben is. Még csak egy másik alkalmazást említek meg: elektroncsöveknél a katódból kilépő elektronok száma Poisson-eloszlást mutat, a kilépő elektronok sebességeloszlása szintén ismeretes. A kilépő elektron sebességétől, a cső geometriai adataitól és az anódfeszültségtől függ, hogy mennyi ideig tartózkodik az elektron a térben (az egyszerűség kedvéért diódák esetére szorítkozunk). Ezen adatok ismeretében kiszámítható annak az időtartamnak, mint

valószínűségi változónak az eloszlása is, ameddig az elektron a katód és anód közti térben tartózkodik (futásidő). Ha most azt kérdezzük, hogy az elektroncső bekapcsolása után t idővel hány elektron lesz a katód és anód közötti térben, az előbb tárgyalt problémával matematikailag azonos problémára jutunk, és így fenti eredményeink erre a kérdésre is választ adnak, mégpedig a legáltalánosabb feltételek mellett.

Az elmondottakkal képet kívántam adni a valószínűségszámítás néhány gyakorlati alkalmazásáról és ezen belül a Poisson-féle eloszlással kapcsolatos kérdésekről. Az idő rövidsége miatt természetesen csak néhány kiragadott, de jellemző példa vázolására szorítkozhattam.¹⁶

*Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

IRODALOM

¹ Гнеденко Б. В.: Теория вероятностей и познание реального мира. Успехи математических наук V. 1. (1950) 1–23.

² Rényi A.: A szovjet matematika 30 éve. I. A valószínűségszámítás megalapozásáról. Matematikai Lapok. I. (1) 27–64.

³ Kolmogorov, A.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse d. Math. u. Grenzgebiete II. (3) Berlin, 1933.

⁴ Хинчин А. Я.: Математические основы статистической механики, Москва-Ленинград, 1943.

⁵ Хинчин А. Я.: Об аналитическом аппарате физической статистики Труд. Мат. Инст. им. В. А. Стеклова, 33 (1950). 1–54. Статистическая механика как задача теории вероятностей, Успехи математических наук. V. 3. (1950) 3–46. Ez a két munka magyar fordításban is megjelent »Hincsin: A statisztikai mechanika analitikus módszereiről« címen (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951, 96. o.)

⁶ de Moivre A.: De Mensura Sortis, Phil. trans. 27. (1711) 213–264.

⁷ Poisson S. D.: Recherches sur la probabilité des jugements. 1837.

⁸ Bortkiewicz L. v.: Das Gesetz der kleinen Zahlen, Leipzig, 1898.

⁹ Mises R. v.: Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. Zeitschrift f. angewandte Math. u. Mech. 7. (1921) 121–124.

¹⁰ Pollaczek—Geiringer H.: Zeitschrift f. angewandte Math. u. Mech. 8. (1928) 292–309. 1.

¹¹ Eggenberger F. u. Pólya G.: Zeitschrift f. angewandte Math. u. Mech. 3. (1923) 279–289.

¹² Khintchine A.: Ergebnisse d. Math. u. Grenzgebiete, Berlin. II, 4. (1933)

¹³ Jensen A.: An elucidation of Erlang's statistical works through the theory of stochastic processes (The Life and Works of A. K. Erlang) Copenhagen, (1948) 23–1000.

¹⁴ Fry T. C.: Probability and its Engineering Uses, New York 1928.

¹⁵ Palm C.: Ericsson Technics, Stockholm, 44 6943, 1–1890.

¹⁶ A fenti előadásban vázolt eredmények részletes bizonyítását a Publicationes Mathematicae, Debrecen c. folyóiratban fogom közölni.

A KASZKÁDFOLYAMATOK EGY STATISZTIKAI PROBLÉMÁJÁRÓL

JÁNOSSY LAJOS r. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésein

1. §. Bevezetés

Előadásom célja egy példát adni a matematikai statisztika alkalmazásairól a kísérleti fizika egyik problémakörében.

A kozmikus sugárzás terén találkozunk ú. n. kaszkádfolyamatokkal. A legismertebb példa az ú. n. elektron-foton-kaszkad. Ha egy elektron abszorbens rétegre esik, energiáját elveszíti, részben ionizáció alakjában, de főleg úgy, hogy nagy energiájú fotonokat bocsát ki. A fotonok azután az atommagok elektromos terében elnyelődnek, és pozitív-negatív elektronpárokat hoznak létre. Ezek az elektronok folytatják a folyamatot mindaddig, amíg az elektronok számával arányosan növekvő ionizáció végülis az egész energiát a folyamatból kivonja és a folyamat végére jut. Meg kell jegyeznünk, hogy a kaszkád nemcsak elektronnal, hanem fotonnal is kezdődhet.

A másik fontos kaszkádfolyamat a nukleonok kaszkádja. Nukleonnak nevezzük közös néven a protont és a neutron. Itt egy gyorsan mozgó nukleon egy nyugvó nukleonnal ütközik. Az ütközés eredménye egy mezon kibocsátása, és ezenkívül az eredetileg nyugvó nukleon ütközés által impulzust vesz fel, az ütköző nukleon energiája pedig csökken. A mezon szerepe a további folyamatban nem lényeges. Ezzel szemben a két nukleon (az eredeti és meglökött) tovább fejleszti a kaszkádot. A kaszkád akkor ér véget, amikor az energia nagyobb része a mezonok és a lassú nukleonok között széteszlik.

A nukleon-kaszkádnál matematikailag és fizikailag kétféle probléma merül fel. A hidrogén kivételével a nukleonok nem egyenként lépnek fel, hanem csoportosan, atommagokban összefogva. A nukleon-kaszkad egyetlen atommagban is kifejlődhet. Erre a folyamatra *Heitlerrel*¹ együtt mutattunk rá pár évvel ezelőtt. Azóta azt is megmutattuk, hogy a fotografikus emulziókban található ú. n. áthatoló csillagok e folyamat alapján jól magyarázhatók. A mi felfogásunk éles ellentétben áll *Heisenberg* felfogásával, aki szerint a »csillagok« egyetlen nukleon-nukleon ütközésből keletkeznek, melynek során egy nukleon majdnem összes energiáját elveszíti és sok mezont bocsát ki egyszerre. Meg vagyunk győződve arról, hogy az általunk feltételezett folyamat (amit mi plurális mezon-keltésnek nevezünk) helyesen írja le a tényeket. A fenti példát annak bizonyítására hoztam fel ilyen részletesen, hogy ezen keresztül is megmutassam a kasz-

kádfolyamatok statisztikai elemzésének fontosságát elvi jelentőségű kérdések tisztázásánál.

Azok a nukleonok, amelyek az atommagból kiszabadulnak, képesek további atommagokkal ütközni és újból egy-mag-kaszkádot létre hozni. Ilyen módon több egy-mag-kaszkádból újabb folyamat keletkezik, melyet összetett kaszkádnak nevezünk. Az összetett kaszkádfolyamatot például számláló csövekkel figyelhetjük meg.

2. §. A kaszkád statisztikai megfogalmazása

A kaszkád folyamatok ütközései valószínűségi törvények szerint történnek, és ezért a folyamat maga nagy ingadozásokat mutat. Egyszerű példa : egy nagy energiájú elektron egy bizonyos rétegben átlagosan mondjuk egy millió részecskét vált ki. De megtörténhetik az is, hogy az első részecske útja során nem jut egy atommag közelébe sem. Ebben a kivételes esetben kaszkád nem keletkezik és millió részecske helyett csak egy részecskét találunk (a primér részecskét).

Azon diffúziós egyenleteket, melyekből az átlagokra következtetéseket lehet levonni, *Bhabha* és *Heitler* állították fel 1937-ben. Később *Landau* és *Rumer* szovjet tudósok kimutatták, hogy ezen egyenletek megoldásait a *Laplace*-féle transzformáció segítségével kényelmes alakban lehet megadni. *Tamm* és *Bjelenky* módszereket dolgoztak ki arra, hogyan lehet az ionizációs energiaveszteséget is pontosan bevezetni a számolásokba. Sok más tudós is közreműködött a probléma megoldásában, mint pl. *Bhabha* és *Csakrabarty* indus matematikusok.

Kiderült azonban, hogy nem elég csak az átlagokra érvényes diffúziós egyenleteket megadni. Mint már előbb említettük, az ingadozások igen fontosak és ezért olyan általánosabb egyenletek kívánatosak, amelyek a valószínűségi eloszlásokra vonatkoznak.

Uhlenbeck és munkatársai olyan egyenleteket állítottak fel, melyek segítségével a másodrendű momentumokat is meg lehet állapítani.

Az eredeti egyenletek alakja a következő :

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{N}(x) = L(\bar{N}(x)). \quad (1)$$

$\bar{N}(x)$ a részecskék átlagos száma x vastagságú abszorbens után ; L egy adott lineáris operátor. Az *Uhlenbeck*-típusú egyenlet alakja a következő :

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{N}^2(x) = L^{(1)}(\bar{N}^2(x)) + M(\bar{N}(x)). \quad (2)$$

Most $\bar{N}^2(x)$ a részecskék száma négyzetének átlaga (másodrendű momentum); $L^{(1)}$ és M megadott operátorok, melyek közül $L^{(1)}$ lineáris.

Bhabha, tovább általánosítva a fenti egyenleteket, a következő alakú egyenletrendszerhez jutott :

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{N}^k(x) = L^{(k-1)}(\bar{N}^k(x)) + M(\bar{N}(x), \bar{N}^2(x), \dots, \bar{N}^{k-1}(x)) \quad (3)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

A (3) egyenletek alapján $\bar{N}(x)$, $\bar{N}^2(x)$, ... stb. rendre kiszámíthatók, és ezekből a momentumokból, legalábbis elvben, a valószínűségi eloszlást ki lehet számítani. Gyakorlatban már a második momentum kiszámítása is igen sok munkát igényel, és így ez az eljárás mód nem sok sikerrel kecsegtet.

Egy évvel ezelőtt sikerült egy egyenletet felállítanom, melyben maga a valószínűségi eloszlás szerepel ismeretlenként. Az (1), (2), (3) egyenletek mind speciális esetei ezen általánosabb egyenletnek, melyeket a továbbiakban G -egyenleteknek fogunk nevezni. Ennek származtatását és sajátosságait részletesen megadtam² és Akadémiánk májusi ülésén elő is adtam. Ezért itt csak az egyenletek felírására szorítkozhatom. Az egyszerűség kedvéért ehelyütt csak a nukleon-kaskád egyenletét írom fel.

Jelöljük $\varphi(\varepsilon, n; x)$ -szel annak a valószínűségét, hogy x vastagságú réteg után pontosan n olyan nukleon legyen található, melynek energiája nagyobb, mint εE_0 , ahol E_0 a primér nukleon energiája. Bevezetjük a következő generátorfüggvényt

$$G(\varepsilon, x; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi(\varepsilon, n; x). \quad (4)$$

(Később G -nek csak azokat a változóit fogjuk feltüntetni, amelyek a kérdéses összefüggésben lényegesek.) A nukleon-kaskádra vonatkozó G -egyenlet a következő:

$$\frac{\partial G(\varepsilon)}{\partial x} = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ G\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) G\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon''}\right) - G(\varepsilon) \right\} w(\varepsilon', \varepsilon'') d\varepsilon' d\varepsilon'' \quad (5)$$

$w(\varepsilon', \varepsilon'') d\varepsilon' d\varepsilon'' dx$ a valószínűsége annak, hogy egy E energiájú nukleon egyetlen ütközést szenvedjen dx úton, és az ütközés utáni két nukleon energiája $\varepsilon' E$, $(\varepsilon' + d\varepsilon') E$ és $\varepsilon'' E$, $(\varepsilon'' + d\varepsilon'') E$ intervallumokba essen. Itt fölteszük, hogy az ütközési hatáskeresztmetszet csak a primér és szekundér energiák viszonyától függ.

$\lambda = 1$ esetében (4) jobboldala a teljes valószínűséget fejezi ki és értéke ezért az egység. Tehát

$$G(\varepsilon, x; \lambda = 1) = 1 \quad (6)$$

azonkívül

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=1} = \bar{N}(\varepsilon, x), \quad \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}\right)_{\lambda=1} = \bar{N}^2(\varepsilon, x) - \bar{N}(\varepsilon, x),$$

és általában

$$\left(\frac{\partial^k G(\varepsilon, x)}{\partial (\log \lambda)^k} \right)_{\lambda=1} = \overline{N^k}(\varepsilon, x). \quad (7)$$

Differenciáljuk (5)-t λ -szerint k -szor és utána helyettesítsük $\lambda = 1-t$. Így (7) segítségével megkapjuk a (3) egyenlet explicit alakját.

A G -egyenlet numerikus megoldása részleteiben egyelőre ismeretlen. (5)-t mindenestre numerikus integráció útján lépésről-lépésre lehet megoldani. A megoldások részletesen számot adnának a kaszkádeloszlás alakjáról.

Megjegyezzük, hogy

$$\varphi(n, \varepsilon; x) = \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n G}{\partial \lambda^n} \right)_{\lambda=0}. \quad (8)$$

Kis n értékek esetében $\left(\frac{\partial^n G}{\partial \lambda^n} \right)_{\lambda=0}$ rekurziós módszerrel kiszámítható. Nagy n értékek számára pedig célszerű komplex integrációt használni, éspedig

$$\varphi(n, \varepsilon; x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lambda=0} \lambda^{-n-1} G(x) d\lambda. \quad (9)$$

A komplex integrál kiszámítását a nyeregpontról integrációs módszer szerint hajtjuk végre.

*

A G -egyenletet komplikáltabb folyamatokra is lehet általánosítani. Nemrég megmutattam *Messel* volt munkatársammal együtt, hogy a G -egyenletet összetett nukleon-kaszkádokra is lehet általánosítani.

Ebben az esetben, ha most Γ -t írunk G helyett, kapjuk a következőket:

$$\frac{\partial \Gamma(\varepsilon)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left\{ \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right) \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_n}\right) - \Gamma(\varepsilon) \right\} w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_n, \quad (10)$$

ahol $w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n dx$ annak a valószínűsége, hogy egy E energiájú nukleon dx úton egy maggal ütközik, és ott egy olyan kaszkádot hozzon létre, amelynél a magból n olyan nukleon lép ki, melyek mindegyike $\varepsilon_i E$, $(\varepsilon_i + d\varepsilon_i) E$ (ahol $i = 1, 2, \dots, n$) intervallumok egyikébe esik.

A $w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ függvényt összefüggésbe lehet hozni $w(\varepsilon', \varepsilon'')$ -vel. Erre a célra az egy-mag-kaszkádot kell megvizsgálni. Ha nem kívánjuk a Γ -kat megállapítani, hanem megelégszünk csupán a momentumokkal, t. i.

$$\left(\frac{\partial^k \Gamma(\varepsilon, x)}{\partial (\log \lambda)^k} \right)_{\lambda=1} = \overline{H^k}(\varepsilon_1, x), \quad (11)$$

akkor nem szükséges a bonyolult w_n -függvények explicit ismerete, mint ezt a következőkben megmutatjuk.

Ha $\lambda = 1$ -t helyettesítünk be (10)-be, akkor látjuk, hogy, mivel $\Gamma(\varepsilon, x; \lambda = 1) = 1$ következésképpen $\partial \Gamma(\varepsilon, x; \lambda) / \partial x|_{\lambda=1} = 0$, és (10)-nek λ -szerinti deriváltja ilyen alakú:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \Gamma(\varepsilon)}{\partial x} \right) \right\}_{\lambda=1} = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \Gamma(\varepsilon/\varepsilon_1)}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 \dots \int_0^1 w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Gamma(\varepsilon)}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n \right\} d\varepsilon_1. \quad (12)$$

Egyszerűen lehet meggyőződni arról, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 \dots \int_0^1 w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n = \bar{N}(\varepsilon) \quad (13) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 w_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_n = \alpha,$$

ahol $\bar{N}(\varepsilon) d\varepsilon$ azon nukleonok átlagos száma, melyek az εE , $(\varepsilon + d\varepsilon) E$ energia-intervallumba esnek, és amelyek egy E energiával kezdődő egy-mag-kaskádból származnak. Továbbá α a teljes ütközési hatáskeresztmetszete egy-mag-nukleon ütközésnek (11), (12), (13) segítségével a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{\partial \bar{H}(\varepsilon)}{\partial x} = \int_0^1 \left\{ \bar{H} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \right) \bar{N}(\varepsilon_1) - \alpha \bar{H}(\varepsilon) \right\} d\varepsilon_1 \quad (14)$$

A (14) egyenletből látjuk, hogy a \bar{H} átlagos az egy egyenletet nyerünk, ha $\bar{N}(\varepsilon)$ -t, t. i. az egy-mag-kaskád átlagos részecske számát ismerjük.

Ilyen módon ki lehet mutatni továbbá, hogy $\bar{H}^k(\varepsilon, x)$ egyenletében a bonyolult w_n kifejezhető az egyszerűbb $\bar{N}^k(\varepsilon)$ függvények segítségével. Ez annyit jelent, hogy az összetett kaskád momentumai visszavezethetők az egy-mag-kaskád megfelelő momentumaira.

*Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézete,
Kozmikus Sugárzási Osztálya.*

IRODALOM

¹ Heitler W. és Jánossy L.: Proc. Phys. Soc. A 62 (1949), 669, A 62 (1949), 374. Helvetica, Phys. Acta 23 (1950), 417.

² Jánossy L.: Proc. Phys. Soc. A, 63 (1950), 241, Messel H.: Proc. Ir. Ac. és Proc. Phys. Soc. A, 63 (1950), 1101.

KÖVETKEZTETÉSEK STATISZTIKAI ÉSZLELÉSEKBŐL

JORDAN KÁROLY lev. tag

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésen

Tekintve, hogy még mindig nagyon eltérő nézetek vannak elterjedve a valószínűség fogalmával kapcsolatban, szükséges tisztázni azt, hogy mit értünk valószínűségen.

Valamely esemény valószínűsége annak várhatóságáról ad felvilágosítást. Ha azt mondjuk, hogy valaminek a valószínűsége p , akkor azt várjuk, hogy n észlelésnél körülbelül np -szer forduljon elő. Ez az Ellis-féle empirikus posztulátum.¹

Ha n észlelésnél a kedvező esetek száma ν_i volt, vagyis az észlelt relatív gyakoriság ν_i/n , és ha az észlelési sorozatot N -szer megismételjük, rendszerint különböző ν_i/n értékeket nyerünk. Ha azt mondjuk, hogy a $p = \nu/n$ arány valószínűsége ω , ez azt jelenti, hogy az N számú sorozatokban $N\omega$ -szor fordul elő.

Egy esemény valószínűségét meghatározhatjuk először is elméleti megfontolással: ha több eshetőség fordulhat elő, melyeket egyenlően lehetségesnek tekintünk, és amelyek részben kedvezők, részben kedvezőtlenek, minél nagyobb az elsők relatív száma, annál valószínűbbnek tekintjük az eseményt. Végül azt mondjuk, hogy az esemény valószínűségét az a tört méri, melynek számlálója a kedvező eshetőségek száma, nevezője pedig az összes eshetőségeké, feltéve, hogy valamennyi eshetőség egyenlően lehetségesnek tekinthető. Későbbi észlelések mutathatják, hogy az eshetőségeket helyesen tételeztük-e fel egyformán lehetségesnek.

Másodszor egy esemény valószínűségét tapasztalati észlelésekből határozhatjuk meg. Az esemény n észlelésnél ν -szor fordult elő, ekkor azt mondjuk, az empirikus posztulátumra támaszkodva, hogy a jelenség valószínűségének legvalószínűbb értéke ν/n , vagyis azt várjuk, hogy nagyszámú észlelésnél az esemény a jövőben is körülbelül ebben az arányban fog előfordulni. Ha későbbi észlelések ezt nem igazolnák, akkor azt mondjuk, hogy az eseményt kísérő körülmények megváltoztak.

Ha azonban a ν/n észlelt értékből az esemény valamely p_1 valószínűségének valószínűségére kívánnánk következtetni, akkor valamely hipotézist kell elfogadni a p valószínűségeknek az észlelések előtti lehetőségeire vonatkozólag: például azt mondjuk, hogy p a priori valószínűsége $\omega(p) dp$; ezt elfogadva p a posteriori valószínűségét Bayes tételével meghatározhatjuk. Sokszor azonban nem lehet az $\omega(p)$ függvényt elfogadható módon megállapítani, ilyenkor a

meglepőség fogalmának bevezetésével nyerhetünk kritériumot bizonyos p_i valószínűség elfogadhatóságára vonatkozólag.

Valamely esemény, melynek valószínűsége nagyon kicsiny, *nem várható*, de ha bekövetkezett, nem szükségképpen *meglepő*. Ha egy E eseményt észleltünk, melynek valószínűsége, valamely H hipotézis alapján $P(E)$, továbbá ugyanazon hipotézis alapján a legvalószínűbb esemény, E_m valószínűsége $P(E_m)$, akkor a *jelenség meglepőségét* az

$$S = 1 - \frac{P(E)}{P(E_m)}$$

törttel mérjük. A meglepőség mérésére tehát nem elegendő az esemény valószínűségét ismerni, a többi lehető esemény valószínűségének ismeretére is szükség van. Ha S közel nulla, az esemény nem meglepő és a H hipotézis elfogadható; ha ellenben közel egy, akkor az esemény túlságosan meglepő volna a H hipotézis esetén, úgyhogy az elejtendő.

Néha másképp is járhatunk el: Az E esemény megtörtént, legyen $H(p_1) dp$ a p_1 hipotézis valószínűsége, és ugyancsak E esetén $H(p_m) dp$ a legvalószínűbb p_m hipotézis valószínűsége. Ekkor a p_1 hipotézis meglepőségét $S' = 1 - \frac{H(p_1)}{H(p_m)}$ fogja mérni.

Ha azt mondjuk, hogy a p_1 hipotézis meglepő az E esemény esetén, vagy hogy az E esemény meglepő a p_1 hipotézis esetén — az ugyanazt jelenti; ennél fogva S' -nek körülbelül egyenlőnek kell lennie S -sel. Így, ha a p hipotézisek valószínűségét nem ismerjük, az első eljárásához fordulhatunk.

Ha a p hipotézis valószínűségét $H(p) dp$ -t, az E esemény esetén arányosnak fogadjuk el az esemény $P(E)$, valószínűségével a p hipotézis esetén, akkor az *Bayes* tételére vezet.

Az a *posteriori valószínűségi ítélet* egyes események esetén azok *meglepőségéről* ad felvilágosítást.

Sokszor látunk rendkívül kis valószínűségű eseményeket előfordulni, de gyakorlatilag úgyszólván soha olyanokat, melyek meglepősége nagy; ha látszólag ilyenek előfordulnának, biztosak lehetünk abban, hogy az alapul vett hipotézis elfogadhatatlan.

A kutató feladata kétféle lehet, *először* is meghatározni adott változó különböző értékeinek gyakoriságát, és abból levezetni a változó valószínűségi függvényét, mely a változó értékeinek megoszlásáról jó képet ad; *másodszor* két vagy több változó közötti kapcsolatot valamely függvénnyel kifejezni, mely a jelenség törvényszerűségét állapítja meg.

Az első esetben vagy elméleti, vagy tapasztalati meggondolások vezethetik. Elméleti meggondolásra szolgáljon első például *Bessel* és *Kapteyn* megállapítása, mely szerint ha egy sokaság elemeit, melyek kezdetben körülbelül egyenlőek, sok különböző ok növeli, ha az okok hatása egyenként kicsiny a hatások összegéhez képest, továbbá ha az okok hatása független az elemek nagyságától,

vagyis az előző okok hatásától, akkor a sokaság végül *normális menetet* fog mutatni. Ezen azt kell érteni, hogy ha u -val jelöljük a változó értékeit, m -mel azok átlagát és σ^2 -tel azok szórását végül $x = (u - m)/\sigma$, akkor u valószínűségét *Laplace* formulája adja :

$$H(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 x^2} dx, \quad (1)$$

ebből annak a valószínűsége, hogy $u < u_1$ legyen, vagyis $x < x_1 = (u_1 - m)/\sigma$:

$$L(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-1/2 x^2} dx. \quad (2)$$

Ennélfogva normális megoszlás esetén nem u tesz eleget a (2) formulának, hanem az $x = (u - m)/\sigma$ változó. *Quetelet* kimutatta ezt ujoncok magassága, bizonyos hely évi középhőmérséklete, csapadékmennyisége, légnyomása, gyümölcsfák virágzásának időponja megoszlásánál, és még sok más esetben.

Egy másik példája az elméleti meggondolás révén nyert valószínűségi függvénynek, több változó esetén a következő: Ha a lehetséges esetekből álló sokaság az E_1, E_2, \dots, E_s elemekből áll, és ha n észlelésnél az E_i tulajdonság u_i -szer fordul elő, $u_1 + u_2 + \dots + u_s = n$, és következtetni akarunk az E_i tulajdonságok p_i valószínűségeire ($p_1 + p_2 + \dots + p_s = 1$), akkor ismét valamely hipotézishez kell fordulnunk. Ha elfogadjuk, hogy $H(p_1, p_2, \dots, p_s) = \lambda P(u_1, u_2, \dots, u_s)$, akkor, a jobboldali valószínűséget *Bernoulli* $s - 1$ változós formulája adja,

$$P(u_1, \dots, u_s) = \frac{n!}{u_1! u_2! \dots u_s!} p_1^{u_1} \dots p_s^{u_s}, \quad (3)$$

továbbá λ értékét meghatározhatjuk, ha az egyenlet jobboldalát p_1, p_2, \dots, p_{s-1} szerint integráljuk nullától egyig; megjegyezve, hogy az eredménynek az összetett valószínűségi tétel értelmében egyet kell adni; s így végül a p_1, p_2, \dots, p_s hipotézis a posteriori valószínűsége

$$H(p_1, \dots, p_s) dp_1 \dots dp_{s-1} = \frac{(n + s - 1)!}{u_1! \dots u_s!} p_1^{u_1} \dots p_s^{u_s} dp_1 \dots dp_{s-1} \quad (4)$$

lesz. Ez *Bernoulli* $s - 1$ változós inverz formulája. Ebből kiszámíthatjuk a p_1, \dots, p_s hipotézis meglepőségét :

$$S' = 1 - \left(\frac{np_1}{u_1}\right)^{u_1} \dots \left(\frac{np_s}{u_s}\right)^{u_s}.$$

Ha n nagy és ha az u_i/n mennyiségek nem túlságosan kicsinyek, akkor a (3) formulának jó megközelítését adja *Bravais* inverz formulája, melyet a momentumok elvével határozunk meg. A formulában a p_i mennyiségek átlaga

$m_i = \frac{u_i + 1}{n + 2}$ és azok átlagtól való eltérése $\varepsilon_i = p_i - m_i$: Ekkor a p_1, \dots, p_s valószínűségek, vagy az $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ elterések valószínűsége, az u_1, \dots, u_s észlelések esetén

$$H(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_{s-1} = \sqrt{\left(\frac{n+s+1}{2\pi}\right)^{s-1} \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_s} e^{-1/2 \chi^2}} \cdot d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon_{s-1} \quad (5)$$

ahol

$$\chi^2 = (n + s + 1) \left| \frac{\varepsilon_1^2}{m_1} + \dots + \frac{\varepsilon_s^2}{m_s} \right|; \quad (6)$$

$\varepsilon_i / \sqrt{m_i}$ a Borel által definiált relatív eltérés.

Az (5) formulából következik, hogy a p_1, p_2, \dots, p_s hipotézis meglepőse az u_1, \dots, u_s észlelések esetén

$$s' = 1 - e^{-1/2 \chi^2}$$

Minél nagyobb a χ^2 annál meglepőbb a hipotézis, ha χ^2 túl nagy, akkor a hipotézis elejtendő. Ez Pearson χ^2 -tételének lényege.

Az (5) formulával még kiszámíthatjuk a χ^2 valószínűségét, összegezve az (5) valószínűséget minden olyan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$, értékrendszerre, amelyben az ε_i eltérések eleget tesznek a (6) egyenletnek; de miután az (5) formulában $\varepsilon_s = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_{s-1}$ az így nyert kvadratikus alakot át kell alakítani négyzetösszeggé. ($\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{s-1}^2$), hogy az x_i változók bevezetése révén az azok szerinti integráció egyszerűen keresztülvihető legyen.

A változók bevezetése az ismert módon történik, az eredmény

$$x_v = \varepsilon_v \sqrt{\frac{(n+s+1)(m_s + m_1 + \dots + m_v)}{m_v(m_s + m_1 + \dots + m_{v-1})}} + (\varepsilon_{v+1} + \dots + \varepsilon_{s-1}) \sqrt{\frac{(n+s+1)m_v}{m_1 m_2 \dots m_{v-1} (m_s + m_1 + \dots + m_v)}} \quad (7)$$

végül a p_1, p_2, \dots, p_s valószínűségek valószínűsége, az új változókban kifejezve

$$H(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_{s-1} = C \cdot e^{-1/2 \chi^2} dx_1 \dots dx_{s-1}.$$

Ha e valószínűséget összegezzük valamennyi x_i -re, melyek eleget tesznek az $\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{s-1}^2$ egyenletnek, akkor az eredmény

$$P(\chi) d\chi = 2^{-1/2(s-3)} \chi^{s-2} e^{-1/2 \chi^2} d\chi / \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right); \quad (8)$$

ez Pearson χ^2 -megoszlása $s - 1$ szabadsági fok esetén. A (8) formula azoknak a p_1, p_2, \dots, p_s mennyiségeknek valószínűségét adja, melyeknek egy adott

χ^2 érték felel meg. De azért nem a p_1, p_2, \dots, p_s értékrendszer megoszlása χ^2 -megoszlás, hanem azok (7) függvényeie, miután (8) annak a valószínűségét adja, hogy az x_i változók négyzetösszege χ^2 legyen.

A (8) formulából kiindulva kiszámíthatjuk annak a valószínűségét, hogy $\chi^2 < \chi_1^2$ legyen. Az eredmény

$$\mathfrak{P}(\chi_1^2) = I\left(\frac{\chi_1^2}{\sqrt{2s-2}}, \frac{s-3}{2}\right). \quad (9)$$

A jobboldali mennyiség egy nemteljes gamma függvény osztva a megfelelő teljes függvénnyel. I-re vannak jó táblázatok², fölöslegessé téve a kis χ^2 táblázatokat, melyek $1 - \mathfrak{P}(\chi^2)$ értékét adják, χ^2 és s argumentumokkal.

Pearson χ^2 -tételének eredeti alakja a következő volt: Ha a hipotézis alapján számítva a kérdéses értékrendszerrel valószínűbb rendszer valószínűsége nagy, akkor a hipotézis elejtendő; ez azonos azzal, hogy a hipotézist el kell ejteni, ha χ^2 túl nagy.

Az előzőekben a valószínűségi függvényekhez elméleti okoskodással jutottunk; most azokat tapasztalati észlelésekből fogjuk levezetni.

Egy változó esete. Mindenekelőtt kiszámítjuk az u változó $f(u)$ gyakoriságát minden u esetére, azután a változó átlagát, $m = \sum uf(u) / \sum f(u)$, és az átlagtól való eltéréseket $\varepsilon = u - m$. Végül az eltérések négyzetének átlagát, és amennyiben szükséges az eltérések magasabb momentumait $\sum \varepsilon^n f(u) / \sum f(u)$.

Fölrajzoljuk az $x = \varepsilon$ és $y = f(u)$ koordinátáknak megfelelő pontokat és azokat síma görbével közelítjük meg; választunk egy függvényt, amely a görbéhez hasonló menetet mutat, és amely néhány rendelkezésre álló paramétert tartalmaz $\Theta = \Theta(x, a, b, \dots)$, melyek felett a momentumok elve szerint úgy rendelkezünk, hogy a függvény a pontokat lehetőleg jól közelítse meg.

A Θ függvény lesz a választott hipotézis, a változók valószínűségi sűrűségfüggvénye, mely azok megoszlását adja. Kiszámíthatjuk a $\Theta(x, a, b, \dots)$ függvénynek megfelelő legvalószínűbb x értéket, vagyis azt az x_m -et, mely Θ értékét maximummá teszi. Ekkor adott x érték meglepőssége:

$$S = 1 - \bar{\Theta}(x, a, b, \dots) / \Theta(x_m, a, b, \dots).$$

A statisztikusok sok ilyen függvényt vezettek be, kis táblázatokat készítve hozzájuk. E függvények áttekintése eléggé hosszadalmas volna, azonban csaknem valamennyit vissza lehet vezetni két valószínűségi függvényre, vagy megoszlásra; a nemteljes gamma és nemteljes béta függvényekre, melyekre nagy táblázatokkal rendelkezünk, fölöslegessé téve a többi függvényre vonatkozó sok, kis, hiányos táblázatot. Ez tehát a két legfontosabb valószínűségi függvény; röviden gamma- és béta-megoszlásnak fogjuk őket nevezni.

Kapteyn módszerét általánosítva alkalmazhatjuk a megoszlások megvizsgálására. Az u változó értékeit n -szer meghatározva (ahol n nagy) megszámloljuk, hogy hányszor fordult elő $u < u_1$. A nyert számot n -nel osztva kapjuk

a $\mathfrak{P}(u_i)$ észlelt valószínűségét $u < u_i$ -nak. Ezt a számítást megismételjük $i = 1, 2, 3, \dots$ -re. Ha e valószínűségeket $\Theta(x_i)$ -vel próbáljuk interpretálni, akkor a

$$\mathfrak{P}(u_i) = \Theta(x_i)$$

egyenletből kiindulva kiszámítjuk, minden i esetére, az u_i -nak megfelelő x_i számot, a $\Theta(x)$ függvény táblázatából visszakeresve. Ha a nyert, x_i, u_i koordinátáknak megfelelő pontokat jól meg lehet közelíteni egy *monoton növekvő* $x = F(u)$ görbével, akkor elfogadhatjuk, hogy az u változó $F(u)$ függvényének megoszlása Θ megoszlás.

Ha a jelenséget az u változó bizonyos értéke jellemzi, és ha $F(u)$ monoton növekvő függvény, továbbá, ha $x = F(u)$ jól követi Laplace (2) formuláját, akkor a jelenséget a véletlennek tulajdoníthatjuk. Sokszor felmerül az a kérdés, hogy valamely jelenséget a véletlen hozta-e létre vagy pedig valamely oknak köszönhető-e.

A *gamma-megoszlás*. Gamma megoszlásnak nevezzük azt a megoszlást, amelyben a változó m értékének valószínűségét

$$H(m) dm = \frac{m^\nu}{\nu!} e^{-m} dm \quad (10)$$

adja. Miután $H(m)$ maximális, ha $m = \nu$; következőleg az m hipotézis meglepőségét

$$S' = 1 - \left(\frac{m}{\nu}\right) e^{\nu-m}$$

méri.

Az m változó karakterisztikus függvénye

$$U(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{m^\nu}{\nu!} e^{-m+i\omega m} dm = (1-i\omega)^{-\nu-1}, \text{ ahol } i = \sqrt{-1}.$$

Ennélfogva az m változó hatványmomentumai lesznek:

$$M_0 = 1 \text{ és } M_n = \frac{1}{i^n} [D^n U(\omega)]_{\omega=0} = (\nu+n)(\nu+n-1)\dots(\nu+1),$$

továbbá az n -edrendű semi-invariáns:

$$\lambda_n = \frac{1}{i^n} [D^n \log U(\omega)] = (n-1)!(\nu+1).$$

Ennélfogva m átlaga $M_1 = \tilde{\lambda}_1 = \nu+1$, és szorása $\lambda_2 = M_2 - M_1^2 = \nu+1$.

Továbbá (10)-ből következik annak a valószínűsége, hogy $m < m_1$ legyen:

$$\mathfrak{P}(m_1) = \int_0^{m_1} e^{-m} \frac{m^\nu}{\nu!} dm = I\left(\frac{m_1}{\nu+1}, \nu\right). \quad (11)$$

Végül az m értékek M mediánját $\mathfrak{P}(M) = \frac{1}{2}$ adja; sorba fejtve:

$$M = v + \frac{2}{3} + \frac{0,02}{v+1} + \frac{0,0072}{(v+1)^2} \dots$$

Ebből következik a statisztikusok által sokszor észlelt érdekes reláció

$$M_1 - m_m = 3(M_1 - M),$$

ahol m_m a maximumnak megfelelő m -érték. Ennélfogva a medián és a maximum az átlagnak ugyanazon oldalán fekszik, továbbá a maximum távolsága az átlagtól körülbelül háromszorosa a medián átlagtól való távolságának. A reláció gyakoriságát magyarázza az, hogy a gamma-megoszlással kapcsolatos sok megoszlásra érvényes.

A gamma-megoszlás főbb partikuláris esetei

1. Normális megoszlás, melyben $x < x_1$ valószínűségét $L(x_1)$ adja és

$$L(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} I \left(\frac{x_1^2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right) \quad (\text{ha } x_1 > 0).$$

2. χ^2 -megoszlás $s - 1$ szabadsági fokkal:

$$\mathfrak{P}(x) = I \left(\frac{\chi^2}{\sqrt{2s-2}}, \frac{s-3}{2} \right).$$

3. Logaritmikus megoszlás. Ha az u változó megoszlása nem normális, de ha $x = a \log \frac{u}{m}$ normálisan oszlik meg, akkor az u megoszlást logaritmikus megoszlásnak mondjuk. Ez is elég gyakori. Ennélfogva annak a valószínűségét, hogy $u < u_1$ vagyis $x < x_1 = a \log \frac{u_1}{m}$, $L(x_1)$ adja, vagy a megfelelő nem-teljes gamma-függvény.

4. A béta-megoszlás, valamint az azzal kapcsolatos megoszlások *határértéke* bizonyos körülmények között a gamma-megoszlás.

Béta megoszlásnak nevezzük a megoszlást, ha adott v és u értékek mellett p valószínűsége a következő:

$$H(p) dp = \frac{p^u (1-p)^v}{B(u+1, v+1)} dp; \quad (12)$$

ebből következik annak a valószínűsége, hogy $p < p_1$ legyen

$$\mathfrak{P}(p_1) = J_{p_1}(u+1, v+1); \quad (13)$$

a jobboldal, nemteljes béta függvény osztva a megfelelő teljes függvénnyel. Erre is vannak nagy táblázatok.³

A (12) függvény s -edrendű hatványmomentuma

$$M_0 = 1, M_s = (u + s) \dots (u + 2)(u + 1) / (u + v + s + 1) \dots (u + v + 2),$$

ebből p átlaga $\bar{p} = M_1 = \frac{u + 1}{u + v + 2}$ továbbá p szórása

$$M_2 - M_1^2 = \frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{u + v + 3}. \quad (14)$$

Ha egy függvény nulladrendű momentuma 1, első és másodrendű momentumai M_1 és M_2 , akkor azt megkísérelhetjük megközelíteni a (12) függvénnyel;

ekkor a momentumok elve szerint e formulában $u = \frac{2M_1^2 - M_2(1 + M_1)}{M_2 - M_1^2}$

és $v = \frac{M_1 - (2 - M_1)M_2}{M_2 - M_1^2}$ mennyiségeket kell írni.

A béta-megoszlás főbb partikuláris esetei

1. *Bernoulli inverz valószínűségi függvényét* megkapjuk, ha (12)-ben $n = v$ és $v = n - v$ értékeket írunk.

2. *A Fisher-féle F megoszlást* úgy nyerjük, ha (12)-ben $u = \frac{1}{2}n_1$ és $v = \frac{1}{2}n_2$

3. *Student t megoszlását* (12)-ből $u = \frac{1}{2}$ és $v = \frac{1}{2}n$ helyettesítéssel kapjuk.

4. Ha a béta-megoszlásban $p = m/n$ és $v = n$ akkor $n = \infty$ -re *határértéke* az (1) alatti gamma-megoszlás lesz.

Fisher F megoszlása. Tegyük fel, hogy az x, y független változók eleget tesznek az alábbi követelményeknek: Mindegyik átlaga nulla, szórása az egység, továbbá mindkettő megoszlása normális; n_1 -szer észleltük az x változó értékeit, n_2 -szer az y változóét; x észlelt szórása $\chi_1^2/n_1 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n_1}^2)/n_1$ volt, y észlelt szórása pedig $\chi_2^2/n_2 = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n_2}^2)/n_2$. Meghatározandó annak a valószínűsége, hogy x észlelt szórása osztva y észlelt szórásával egyenlő legyen F -fel:

$$\frac{n_2 \chi_1^2}{n_1 \chi_2^2} = F. \quad (15)$$

Annak a valószínűsége, hogy x észlelt szórása χ_1^2/n_1 legyen, a (9) formula értelmében

$$P(\chi_1^2) dx_1 = c \cdot \chi_1^{n_1-1} e^{-\frac{1}{2}\chi_1^2} d\chi_1$$

y észlelt szórásának valószínűsége hasonló kifejezés, $P(\chi_2^2) d\chi_2$. Végül mindkét esemény valószínűsége

$$P(\chi_1^2) P(\chi_2^2) d\chi_1 d\chi_2.$$

Ezt a valószínűséget összegezni kell minden olyan χ_1 és χ_2 értékre, melyek eleget tesznek a (15) egyenletnek. Ennek keresztülvitelére vezessünk be polár-

koordinátákat. Legyen $\chi_1^2 = \varrho \sin \alpha$ és $\chi_2^2 = \varrho \cos \alpha$. Ebből következik $\frac{n_2}{n_1} \operatorname{tg} \alpha = F$, tehát, ha α állandó, akkor F is állandó, s így a valószínűséget állandó α mellett minden ϱ -ra összegezzük. Az eredmény

$$H(F) dF = \lambda \sin^{n_1-1} \alpha \cos^{n_2-1} \alpha d\alpha,$$

végül ha $\sin^2 \alpha = p$ akkor

$$H(F) dF = \frac{p^{\frac{1}{2}n_1-1} (1-p)^{\frac{1}{2}n_2-1}}{B(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2)} dp, \text{ ahol } p = \frac{n_1 F}{n_2 + n_1 F}, \quad (16)$$

következőleg az F megoszlás partikuláris esete a béta-megoszlásnak, melyben $u = \frac{1}{2} n_1 - 1$ és $v = \frac{1}{2} n_2 - 1$, de nem az F mennyiség követi a formulát, hanem annak függvénye, p .

A formula akkor hasznos, ha kevés próbából akarunk következtetni. Például, ha adva van x néhány megfigyelésnél észlelt szórása, és meg akarjuk határozni annak a valószínűségét, hogy y észlelt szórása n_2 megfigyelésnél F -szer kisebb legyen; ez a valószínűség azonos F valószínűségével.

A (16) egyenlettől levezethetjük még annak a valószínűségét, hogy $F < F_1$

vagy $p < p_1 = \frac{n_1 F_1}{n_2 + n_1 F_1}$ legyen:

$$\mathfrak{P}(F_1) = J_p(\frac{1}{2}n_1, \frac{1}{2}n_2). \quad (17)$$

Az F megoszlásra is vannak kis táblázatok, melyek adott n_1 , n_2 és F esetén megadják a (17) valószínűséget; de a nemteljes béta táblázatok előnyösebbek.

Ha n_2 végtelenül növekszik, az F megoszlás határértéke a χ megoszlás; ugyanis ez esetben χ_2^2/n_2 határértéke egy, úgyhogy $F = \chi_1^2/n_1$, vagyis F valószínűsége azonos χ_1 valószínűségével, azaz $\chi_1^2 + \chi_2^2 + \dots + \chi_s^2 = n_1 F$ valószínűségével.

Student (Gosset)-féle t megoszlás. Ha x és y független változók, és ha eleget tesznek az F megoszlásnál felsorolt feltételeknek, akkor annak a valószínűsége, hogy

$$\frac{nx^2}{y_1^2 + \dots + y_n^2} = t^2$$

legyen, partikuláris esete a Fisher-féle F megoszlásnak, melyben $n_1 = 1$ és $n_2 = n$ és ennél fogva partikuláris esete a béta-megoszlásnak is, melyben $u = -\frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}n$ és $p = t^2/(n + t^2)$. Következőleg t valószínűsége:

$$H(t) dt = \frac{p^{-\frac{1}{2}} (1-p)^{\frac{1}{2}n-1}}{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n)} dp. \quad (18)$$

E törvényt tehát nem t követi, hanem annak függvénye p .

Annak a valószínűsége, hogy $t < t_1$ legyen, illetve $p < p_1 = t_1^2 / (n + t_1^2)$ legyen,

$$\mathfrak{B}(t_1) = J_{p_1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n) = 1 - J_{1-p_1}(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}). \quad (19)$$

Vannak kis táblázatok, melyek $1 - \mathfrak{B}$ értékét adják n és t függvénye gyanánt; de ez esetben is célszerűbb a nemteljes béta függvényt blázat.

Miután a t megoszlás béta-megoszlás, ezért ha n minden határon túl növekszik és ha $t = 2m$, illetve $p = 2m/(n + 2m)$ -et írunk, gamma-megoszlást kapunk.

A formula akkor hasznos, ha adott n és x_2 esetén következtetni akarunk $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_s^2 = nx^2/t^2$ valószínűségére, ami azonos t valószínűségével. Például ha annak a valószínűségét kívánjuk meghatározni, hogy n -szeres észlelésnél az y mennyiségek négyzeteinek átlaga kisebb legyen, mint x^2 akkor $t^2 = n$ és $p = \frac{1}{2}$, úgyhogy

$$\mathfrak{B}(t_1) = 1 - J_{0.5}(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}).$$

Budapest.

IRODALOM

¹ Ellis Robert Leslie: Trans. of the Camb. Phil. Society, (1842).

² Pearson K.: Tables of the Incomplete F -Function, London 1922.

³ Pearson K.: Tables of the Incomplete Beta-Function, Cambridge University press, 1934.

GÉP EGYÜTTÁLLÁSOK VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI TÁRGYALÁSA TEKINTETTEL A VÁRAKOZÁSI IDŐKRE

TAKÁCS LAJOS

Előadta az 1950. november 30-án tartott osztályülésein

Ez a munka olyan problémákkal foglalkozik, melyek a gyakorlatban gépek együttállásánál fordulnak elő, ezenkívül a telefonbeszélgetések egy bizonyos kérdésénél is alkalmazhatók.

A probléma a következőképp hangzik :

Több működő gépet egyetlen kezelő szolgál ki. Ha valamelyik gépen hiba keletkezik, a gép leáll, és mindaddig nem indul meg, amíg a hibát ki nem javították. A kezelő a leállás után azonnal hozzákezd a javításhoz, és addig folytatja, míg csak álló gép van.

Ha egyetlen személy több gép kezelésével foglalkozik, akkor az egy gépre jutó állási idő nagyobb, mint egy gép kezelése esetén, mivel a javítási idő alatt leálló újabb gépeknek addig kell várakozniok, amíg a javítás az előző gépeken befejeződik, és sor kerül rájuk.

A kérdés, melyre feleletet fogunk adni, a következő :

m számú gépnél mennyi lesz a gyártási idő alatt, $(0, t)$ időközben a *javításra fordított átlagos (várható) idő* : $\bar{\vartheta}_m$, a *leállások átlagos száma* : \bar{x}_m , a *gépállások átlagos időtartama* : $\bar{\tau}_m$.

Legyen annak a valószínűsége, hogy egy működő gép t és $t + dt$ időpontok között leálljon : dt/λ , azaz legyen minden időpont a gépleállásra egyenlően valószínű. Egyetlen hiba javítási ideje legyen : 1. állandó α időtartamú, 2. bármely ξ és $\xi + d\xi$ közé eső időtartamú : $e^{-\xi/\alpha} \frac{d\xi}{\alpha}$ valószínűséggel.

Tárgyalásunk konkrétizálására gondoljunk a következő példákra :

1. A szövőgépeknél egyetlen személy m számú gépet kezel, ha valamelyik gépen fonalszakadás történik, a gép leáll. Annak a valószínűsége, hogy egy működő gép t és $t + dt$ időpontok között leálljon : dt/λ . A kezelő leállás után azonnal hozzákezd a kötéshez és addig folytatja, míg álló gép van. Egy kötés α ideig tart.

2. Telefonbeszélgetéseknél előfordul az az eset, hogy valamely háziközpont m számú készüléke hívásait egy külső vonal továbbítja. Annak a valószínűsége, hogy valaki egy készüléken t és $t + dt$ időpontok között hívást akar kezdeni, legyen dt/λ . Ha a külső vonal nem szabad, úgy a hívó addig vár, amíg sor kerül

rá. A kiszolgálás történéjk hívási sorrendben. Legyen annak a valószínűsége, hogy egy beszélgetés időtartama ξ és $\xi + d\xi$ közé essék: $e^{-\xi/\alpha} \frac{d\xi}{\alpha}$. Ez a probléma megegyezik a gépek együttállásának problémájával, csupán a leállás helyére híváskezdés, a javítási idő helyére pedig beszélgetési idő lép.

A feladat tárgyalása a valószínűségszámításban a stohasztikus folyamatok körébe esik.

Jelöljük $f(t, x)$ -szel annak a valószínűségét, hogy t időpontban éppen x gép álljon. Ha $x \geq 1$, úgy a gépek közül egy javítás alatt van. Ekkor:

A javításra fordított átlagos idő $(0, t)$ időközben:

$$\bar{\vartheta}_m = \int_0^t [1 - f(t, 0)] dt. \quad (1)$$

Ugyanis $f(t, 0)$ jelenti annak a valószínűségét, hogy t időpontban egyetlen gép se álljon, $1 - f(t, 0)$ annak a valószínűsége, hogy legalább egy gép álljon. Ha legalább egy gép áll, akkor egy közülük éppen javítás alatt van, ennélfogva $1 - f(t, 0)$ integrálja a gyártási időtartamra szolgáltatja a javításra fordított átlagos időt.

A leállások átlagos száma $(0, t)$ időközben: Annak a valószínűsége, hogy t és $t + dt$ időpontok között leálljon egy gép:

$$g(t) dt = \sum_{x=0}^m f(t, x) \frac{(m-x) dt}{\lambda} = \frac{[m - a(t)]}{\lambda} dt,$$

ahol

$$a(t) = \sum_{x=0}^m x f(t, x)$$

jelenti a t időpontban álló gépek átlagos számát. Ugyanis t és $t + dt$ időpontok között leállhat egy gép úgy, hogy t időpontban x gép áll, aminek a valószínűsége $f(t, x)$ és a működő $(m-x)$ gép közül dt idő alatt egy gép leáll, aminek a valószínűsége: $\frac{(m-x) dt}{\lambda}$. Az összetett esemény valószínűsége a kettő szorzata

és ezt összegezve minden x -re kapjuk a keresett valószínűséget.

Következésképpen a leállások átlagos száma:

$$\bar{x}_m = \int_0^t g(t) dt = \frac{mt}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_0^t a(t) dt. \quad (2)$$

A gépállások átlagos időtartama $(0, t)$ időközben: Az x -szeres állások átlagos időtartama: $\int_0^t f(t, x) dt$. Ez okoz $x \int_0^t f(t, x) dt$ időtartamú gépállást. A gépállások összes időtartama egyenlő ezek összegével, minden x -re, azaz:

$$\bar{\tau}_m = \sum_{x=0}^m x \int_0^t f(t, x) dt = \int_0^t a(t) dt. \quad (3)$$

Ezt az előzővel összevetve :

$$\bar{\tau}_m + \lambda \bar{x}_m = mt$$

-re jutunk, ami egyszerű összefüggést fejez ki a gépállások átlagos időtartama és száma között.

Meghatározandó tehát $f(t, x)$. Jelentse $g(t, x) dt$ ($x = 1, 2, \dots, m$) annak a valószínűségét, hogy t időpontban x gép álljon és azok közül egynek a javítása t és $t + dt$ időpontok között befejeződjék. Ebben az esetben $f(t, x)$ -re az alábbi differencia-differenciál egyenletet írhatjuk fel :

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda} [(m-x)f(t, x) - (m-x+1)f(t, x-1)] + g(t, x+1) - g(t, x). \quad (4)$$

Ugyanis :

$$f(t + dt, x) = f(t, x-1) \frac{(m-x+1) dt}{\lambda} + [f(t, x) - g(t, x) dt] \left[1 - \frac{(m-x) dt}{\lambda} \right] + g(t, x+1) dt.$$

Annak a valószínűsége, hogy $t + dt$ időpontban x gép álljon, úgy jöhet létre, hogy t időpontban $x-1$ gép áll, és a működő gépek közül dt idő alatt egy leáll ; vagy t időpontban x gép áll és dt idő alatt nem fejeződik be javítás, és a működő gépek közül nem áll le egy sem ; vagy t időpontban $x+1$ gép áll és dt idő alatt egynek közülük befejeződik a javítása. Az elsónél magasabbrendű végtelen kis mennyiségeket elhagytuk.

$f(t, x)$ átlagára $a(t)$ -re, mely formuláinkban explicite szerepel, a következő egyenletet írhatjuk fel :

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{m}{\lambda} - \frac{a(t)}{\lambda} - \sum_{x=1}^m g(t, x) \quad (5)$$

Ugyanis fennáll :

$$a(t + dt) = a(t) + \frac{[m-a(t)]}{\lambda} dt - \sum_{x=1}^m g(t, x) dt$$

A $t + dt$ időpontban álló gépek átlagos számát megkapjuk, ha a t időpontban álló gépek átlagos számához hozzáadjuk a dt idő alatt leálló gépek átlagos számát, és levonjuk a kijavított gépek átlagos számát.

A $g(t, x)$ meghatározására szolgáló egyenlet a speciális javítási időtől függ.

1. α időtartamú javítási idők esetén :

$$g(t, x) = f(t - \alpha, 0) \frac{m}{\lambda} \binom{m-1}{x-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda} x-1}\right) e^{-\frac{\alpha}{\lambda} (m-x)} + \sum_{j=2}^{x+1} g(t - \alpha, j).$$

$$\binom{m-j+1}{x-j+1} (1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}})^{x-j+1} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(m-x)} \quad \text{ha } t \geq \alpha \quad (6)$$

és

$$g(t, x) = 0, \quad \text{ha } t < \alpha.$$

Ugyanis annak a valószínűsége, hogy t időpontban x gép álljon, és közülük egynek a javítása befejeződjék dt idő múlva, úgy jöhet létre, hogy vagy $t - \alpha$ időpontban nem áll gép, és a következő dt idő alatt leáll egy gép, és a következő α idő alatt még $x - 1$; vagy $t - \alpha$ időpontban áll j ($j = 2, \dots, x + 1 \leq m$) gép, azok közül egynek a javítása befejeződik dt idő elteltével, és a működő $m - j + 1$ gép közül α idő alatt leáll $x - j + 1$. Itt annak a valószínűsége, hogy egy működő gép α időtartam alatt nem áll le: $e^{-\alpha/\lambda}$, hogy leáll: $1 - e^{-\alpha/\lambda}$.

2. $e^{-\xi/\alpha} \frac{d\xi}{\alpha}$ valószínűségi eloszlású javítási idők esetén:

$$g(t, x) dt = f(t, x) \frac{dt}{\alpha}. \quad (7)$$

Ekkor ugyanis annak a valószínűsége, hogy egy esemény (javítás, beszélgetés) dt időtartam alatt befejeződjék, függetlenül az esemény kezdőpontjától, mint azt A. K. Erlang először észrevette: $\frac{dt}{\alpha}$.

Az átlagokra a következő összefüggéseket írhatjuk fel, kihasználva a speciális javítási időket.

1. esetben:

$$a(t) = a(t - \alpha) + \int_{t-\alpha}^t \frac{[m - a(t)]}{\lambda} dt - [1 - f(t - \alpha, 0)], \quad \text{ha } t \geq \alpha \quad (8)$$

és

$$a(t) = m(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}), \quad \text{ha } t \leq \alpha.$$

Ugyanis, ha $t - \alpha$ időpontban átlagosan $a(t - \alpha)$ gép áll, úgy $a(t)$ -t megkapjuk, ha hozzáadjuk a leálló gépek átlagos számát: $\int_{t-\alpha}^t g(t) dt$ és kivonjuk a kijavított gépek átlagos számát, ami $1 - f(t - \alpha, 0)$, mert ha $t - \alpha$ időpontban egyetlen gép sem áll, úgy nem is lesz kijavítva egy sem $(t - \alpha, t)$ közben, míg ha legalább egy gép áll, úgy az biztosan ki lesz javítva.

2. esetben

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{[m - a(t)]}{\lambda} - \frac{1}{\alpha} [1 - f(t, 0)] \quad (9)$$

Ez az általános (5) egyenletből nyerhető, ha abban a következő helyettesítéssel élünk

$$\sum_{x=1}^m g(t, x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{x=1}^m f(t, x) = \frac{1 - f(t, 0)}{\alpha}$$

A probléma tárgyalása az 1. esetben differencia-differenciál egyenletrendszer megoldására vezet, a 2. esetben m -edrendű lineáris differenciálegyenlet megoldására.

Amint láthatjuk, a minket érdeklő: $\bar{\vartheta}_m$, \bar{x}_m , $\bar{\tau}_m$ mennyiségek kiszámításához csupán $f(t, 0)$ és $a(t)$ ismeretére van szükségünk. Ha $f(t, 0)$ ismeretes, úgy az átlagokra vonatkozó egyenlet segítségével meghatározható $a(t)$, mégpedig az 1. esetben egy differenciál- és egy differenciaegyenlet megoldásával, a 2. esetben egy differenciálegyenlet megoldásával.

Ha feltételezzük, hogy a gépek végtelen hosszú idő óta, $(-\infty, t)$ intervallumban működnek, és a $(0, t)$ intervallumban számítjuk a fenti mennyiségeket, úgy $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, x) = f(x)$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t, x) = g(x)$ -szel számolhatunk. Ekkor azt mondjuk, hogy stacionárius állapot (egyensúlyi állapot) jött létre. Ekkor az álló gépek átlagos száma:

$$a = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \sum_{x=0}^m x f(x)$$

Ha $\lambda \ll t$, azaz a gyártási időtartam sokkal nagyobb λ -nál, úgy nem követünk el durva hibát, ha stacionárius állapottal számolunk. A különbség annyi, hogy most az időszámítás kezdetén van a álló gép, míg az előző szerint nincs álló gép. Tekintve, hogy a konvergencia exponenciális jellegű, ha t elég nagy, úgy a különbség rendkívül kicsiny.

Stacionárius állapottal számolva:

$$\bar{\vartheta}_m = [1 - f(0)] t, \quad (10)$$

$$\bar{x}_m = \frac{(m - a) t}{\lambda}, \quad (11)$$

$$\bar{\tau}_m = at, \quad (12)$$

ahol a számára (8) és (9) egyenletekből mind az első, mind a második esetben:

$$\frac{(m - a)}{\lambda} = \frac{[1 - f(0)]}{a} \quad (13)$$

adódik. Ekkor ugyanis a függvények konstansok lesznek, idő szerinti deriváltak pedig zérusok.

Elegendő tehát $f(0)$ meghatározása az 1. és 2. esetben:

1. Legyen

$$g(x) = \frac{m}{\lambda} f(0) \varphi(x) \text{ és } e^{\frac{\alpha}{\lambda}} = u,$$

úgy (6) egyenlet stacionárius esetben :

$$\varphi(x) = \binom{m-1}{x-1} \left(\frac{u-1}{u}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{u}\right)^{m-x} + \sum_{j=2}^{x+1} \varphi(j) \binom{m-j+1}{x-j+1} \left(\frac{u-1}{u}\right)^{x-j+1} \left(\frac{1}{u}\right)^{m-x}$$

$$(x = 1, 2, \dots, m)$$

Mindkét oldalt összegezve x -re, 1-től m -ig, azt nyerjük, hogy $\varphi(1) = 1$, melynek segítségével sorjában meghatározható : $\varphi(2), \dots, \varphi(m)$.

$$\sum_{x=1}^m g(x) = \frac{m}{\lambda} f(0) \sum_{x=1}^m \varphi(x) = \frac{(m-a)}{\lambda} = \frac{[1-f(0)]}{a}$$

(5) és (13) fennállása következtében. Innen $\sum_{x=1}^m \varphi(x) = G_m(u)$ jelöléssel:

$$f(0) = \frac{1}{1 + \frac{m\alpha}{\lambda} G_m(u)} \tag{14}$$

Speciálisan :

$$G_1(u) = 1$$

$$G_2(u) = u$$

$$G_3(u) = u^3 - u^2 + u$$

$$G_4(u) = u^6 - u^5 - u^4 + 3u^3 - 2u^2 + u$$

$$G_5(u) = u^{10} - u^9 - u^8 + 4u^6 - 2u^5 - 4u^4 + 6u^3 - 3u^2 + u$$

2. $g(x) = f(x) \frac{1}{\alpha}$ folytán a (4) egyenlet stacionárius esetben :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} f(1) &= \frac{m}{\lambda} f(0) \\ \frac{1}{\alpha} f(x+1) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{m-x}{\lambda}\right) f(x) + \frac{(m-x+1)}{\lambda} f(x-1) &= 0 \quad (x = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right.$$

Ennek megoldása :

$$f(x) = x! \binom{m}{x} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^x f(0)$$

$\sum_{x=0}^m f(x) = 1$ következtében :

$$f(0) = \frac{1}{\sum_{x=0}^m x! \binom{m}{x} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^x} \tag{15}$$

Mindkét esetben :

$$\overline{\vartheta}_m = [1 - f(0)] t, \tag{16}$$

$$\overline{x_m} = \frac{[1 - f(0)]}{\alpha} t, \quad (17)$$

$$\overline{\tau_m} = \left[m - \lambda \frac{(1 - f(0))}{\alpha} \right] t \quad (18)$$

ahol $f(0)$ -t az első esetben (14), a második esetben (15) egyenlet definiálja.

Hincsin »O szrednyem vremenyi prosztvoja sztankova« című cikkében* általános eljárást ad a gépek átlagos várakozási idejének kiszámítására, bármilyen javítási idők mellett, stacionárius állapotot feltételezve. *Hincsintől* általános esetben levezetett γ várakozási idő a mi speciális eseteinkben:

1. és 2. esetben egyaránt:

$$\gamma = \frac{m \alpha}{1 - f(0)} - (\alpha + \lambda) \quad (19)$$

γ segítségével $\overline{\vartheta_m}$, $\overline{x_m}$, $\overline{\tau_m}$ könnyen kiszámíthatók.

Amíg *Hincsin* stacionárius állapot esetén általános eljárást ad a várakozási idő kiszámítására, addig tárgyalásunkban nem stacionárius állapotra vonatkozó olyan egyenletekből indulunk ki, melyek kihasználják a javítási idő speciális tulajdonságát. Ezekből határátmenet segítségével számítjuk ki a stacionárius állapotra vonatkozó $\overline{\vartheta_m}$, $\overline{x_m}$, $\overline{\tau_m}$ értékeket.

A fenti adatok birtokában, ismerve a gyártásra vonatkozó költségeket, eldönthető, hogy hány gépet gazdaságos egyetlen kezelőre bízni, illetve, hogy háziközpontoknál hány készüléket szabad egy külső vonalra kapcsolni, ha azt akarjuk, hogy a várható várakozási idő egy bizonyos értéken alul maradjon.

*Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

* А. Я. Хинчин: Математический Сборник 40 (1933) 119.

A VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSAI A CSILLAGÁSZATBAN

FÖLDES ISTVÁN

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésein

A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika módszerei széleskörű alkalmazásra találnak a csillagászati problémák hosszú sorának diszkussziójánál. Ezek a problémák fizikai természetük alapján is igen széles skálát ölelnek fel, és nem kevésbé változatos képet kapunk, ha a megoldásokat a matematikai metodika szempontjából tekintjük át. E rövid referátumnak tehát nem lehet célja, hogy kimerítően felsorolja a statisztikus módszer összes csillagászati alkalmazásait. Ehelyett csupán egyes olyan alkalmazások felemlítésére és rövid jellemzésére kell szorítkoznom, melyek nevezetes eredményeket adnak, és a módszer szempontjából nézve is jellegzetesek és tipikusak.

A problémák egyik csoportja az égitestek valamely rendszeréhez tartozó individuumok helyzeti, illetve sebességi eloszlásának megállapításában áll, olyan esetekben, amikor ez az eloszlás nem állapítható meg közvetlen megfigyelésekből, azonban megállapítható egy másik mennyiség eloszlása, amely a vizsgált eloszlással összefüggésbe hozható. A klasszikus paradigmát erre a típusra a stellárstatisztika Schwarzschild-féle alapegyenlete szolgáltatja.

Jelentse $A(m)dm$ azon csillagok számát egy ω térszögben, amelyeknek látszólagos magnitudoí m és $m + dm$ közé esnek; jelentse továbbá $\varphi(M)dM$ azon csillagok viszonylagos számát, melyeknek abszolút magnitudoí M és $M + dM$ közé esnek. A $\varphi(M)$ függvényt fényességi függvénynek nevezzük, és feltesszük, hogy a következőképpen van normálva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(M) dM = 1;$$

$\varphi(M) dM$ eszerint annak a valószínűségét jelenti, hogy egy tetszőlegesen kiszemelt csillag abszolút magnitudoja M és $M + dM$ közé essék. Jelentse végül $D(r)$ a térfogategységben levő csillagok számát a Naptól r parszeknyi távolságban. Mivel valamely csillag m látszólagos és M abszolút magnitudoja között az $M = m - 5 \log r + 5$ összefüggés áll fenn, azért valamely r távolságra levő csillag látszólagos magnitudoja akkor és csak akkor esik m és $m + dm$ közé, ha abszolút magnitudoja $m - 5 \log r + 5$ és $m - 5 \log r + 5 + dm$ közé esik; eszerint annak valószínűsége, hogy az r távolságra levő $\omega r^2 dr$ térfogatú térelemben levő tetszőlegesen kiszemelt csillag látszólagos magnitudoja

m és $m + dm$ közé essék, $\varphi(m - 5 \log r + 5) dm$ -mel egyenlő és következésképp az ebben a tételemben levő olyan csillagok várható száma, melyeknek látszólagos magnitudoja m és $m + dm$ közé esik, $D(r) \omega r^2 dr \varphi(m - 5 \log r + 5) dm$ -mel egyenlő. Ebből r -re integrálva kapjuk a Schwarzschild-féle egyenletet: ¹

$$A(m) = \omega \int_0^{\infty} D(r) \varphi(m - 5 \log r + 5) r^2 dr$$

Ha $A(m)$ és $\varphi(M)$ ismertek, akkor ebből az integrálegyenletből a $D(r)$ függvény kiszámítható.

További, ehhez a kategóriához tartozó problémák a következők: valamely csillagrendszer csillagai saját mozgásainak és radiális sebességeinek észlelt eloszlásából meghatározni a térbeli sebességek eloszlását; az extragalaktikai ködök észlelt látszólagos elliptikus alakjai excentricitásainak eloszlásából meghatározni a (forgási ellipszoid alakú) ködök meridiánmetszetei excentricitásainak eloszlását; valamely centrálisan szimmetrikus gömbhalmaz távcsőben észlelt képének sűrűségi eloszlásából meghatározni a térbeli sűrűségi eloszlást. ² Tágabb értelemben ide sorolhatók *Laplace*, illetve *Schiaparelli* annak a valószínűségére vonatkozó vizsgálatai, hogy egy megfigyelhető üstökös, mely a térnek valamely meghatározott pontján át tetszőleges sebességgel halad keresztül, elliptikus, illetve hiperbolikus pályán mozogjon. A válasz, melyet az égi mechanika kéttestproblémájának eredményei erre a kérdésre adnak, attól függ, hogy a kérdéses pontban a sebességeknek milyen eloszlását tételezzük fel abban a rajban, melyhez a megfigyelt üstökösök tartoznak; ezért tehát az elliptikus pályák észlelt viszonylagos gyakoriságából visszakövetkeztethetünk a tényleges sebességeloszlásra. Ez fényt derít az üstökösök eredetének kérdésére. ³

Egy meteorraj radiánsának megállapításával kapcsolatban ⁴ a problémák egy másik típusához jutunk:

Ha k egyenlő területű tartomány felett n pontot találomra osztunk el, akkor mekkora lesz azon tartományok várható száma, melyek m ($0 \leq m \leq n$) pontot tartalmaznak? Ez a várható érték $\binom{n}{m} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-m} \frac{1}{k}$.

Kozmogóniai vonatkozása miatt szeretnék kissé részletesebben kitérni egy csillag legközelebbi szomszédja távolságának eloszlására. ⁵

Tegyük fel, hogy a térfogategységbe eső csillagok átlagos száma egyenlő n -nel, és jelentse $w(r) dr$ annak a valószínűségét, hogy egy csillag távolsága legközelebbi szomszédjától r és $r + dr$ közé essék. Ez egyenlő annak a valószínűségével, hogy egy csillag sincs a vizsgált csillag körül írt r sugarú gömbön belül, megszorozva annak a valószínűségével, hogy az r és $r + dr$ sugarú gömbök között van csillag. Ezért tehát

$$w(r) dr = \left(1 - \int_0^r w(r) dr\right) 4\pi r^2 n dr,$$

ahol n a térfogategységbe eső csillagok átlagos száma. Innen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{w(r)}{4\pi r^2 n} \right) &= -w(r) = -4\pi r^2 n \frac{w(r)}{4\pi r^2 n}, \\ \frac{d}{dr} \log \frac{w(r)}{4\pi r^2 n} &= -4\pi r^2 n, \\ \frac{w(r)}{4\pi r^2 n} &= e^{-\frac{4\pi r^2 n}{3}} \cdot C; \end{aligned}$$

azonban $\frac{w(r)}{4\pi r^2 n} \rightarrow 1$, ha $r \rightarrow 0$; ezért tehát $C = 1$ és

$$w(r) = 4\pi r^2 n e^{-\frac{4\pi r^2 n}{3}}.$$

Ez a formula arra való hivatkozással is belátható, hogy adott n átlagos sűrűség mellett egy v térfogatú térrészben foglalt csillagok száma Poisson-féle eloszlást mutat a $\lambda = vn$ paraméterrel,⁵ tehát annak a valószínűsége, hogy ebben a térrészben ne legyen csillag, $\lambda^0 \frac{e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-vn}$; az r sugarú gömbre alkalmazva ez egyenlő $e^{-\frac{4\pi r^2 n}{3}}$ -nel.

Az a kritika, melyet *Ogorodnyikov* a Naprendszer keletkezésének *Jeans—Chamberlin—Moulton*-féle elmélete felett gyakorolt,⁶ lényegében szintén a legközelebbi szomszéd távolsága eloszlásának most tárgyalt kérdésével függ össze. Jelöljük a Tejútrendszer alkotó csillagközeg sűrűségét megint n -nel. Tegyük fel, hogy ebben a közegben egy C csillag mozog. Ha eltekintünk a perturbációs hatásoktól, ezt a mozgást egyenesvonalúnak tekinthetjük. Jelentse $w(r) dr$ annak a valószínűségét, hogy az a legkisebb távolság, melyre C egy s hosszúságú út megtétele folyamán a közeg valamely csillagát megközelíti, r és $r + dr$ közé essék. Ha C kezdeti és véghelyzetén, valamint az e pontokat összekötő s hosszúságú egyenesdarabnak a C kezdeti helyzetétől egész számú egységnyi távolságra levő pontjain át erre az egyenesdarabra merőleges síkokkal a közegből s számú, egységnyi vastagságú szeletet hasítunk ki (s -et az egyszerűség kedvéért egész számnak véve), és minden egyes szeletbe eső csillagokat az illető szelet valamelyik határoló síkjára vetítjük, akkor ezen a síkon a vetületek sűrűsége egyenlő lesz n -nel; ha pedig mind az s szelet összes csillagait egyazon, az említett határoló lapokkal párhuzamos síkra vetítjük, akkor ezen a síkon a vetületek sűrűsége egyenlő lesz ns -sel és a $w(r) dr$ valószínűség egyúttal annak a valószínűsége is lesz, hogy e síkon találomra felvett pontnak a legközelebbi csillagvetülettől mért távolságra r és $r + dr$ közé essék. Így tehát az előbbi háromdimenziós probléma kétdimenziós analogijára jutunk. A $w(r)$ függvény számára a

$$w(r) dr = \left[1 - \int_0^r w(r) dr \right] 2\pi r n s dr$$

egyenlet adódik, ahonnan

$$w(r) = 2\pi n s r e^{-\pi n s r^2};$$

Ez az eredmény szintén belátható a következőképpen is: $w(r) dr$ annak valószínűségével egyenlő, hogy az s magasságú és r sugarú hengerben ne legyen csillag (ez a valószínűség a Poisson-eloszlásra való hivatkozással egyenlő $e^{-\pi n s r^2}$ -nel), megszorozva annak a valószínűségével, hogy az ezen hengert burkoló dr vastagságú hengergyűrűben legyen csillag (ennek valószínűsége $n 2\pi r s dr$).

Nyilván

$$P(r \leq a) = \int_0^a w(r) dr = \left[-e^{-\pi n s r^2} \right]_0^a = 1 - e^{-\pi n s a^2};$$

ha azt akarjuk, hogy $P(r \leq a) \geq 10^{-k}$ legyen, akkor tehát kell, hogy

$$1 - e^{-\pi n s a^2} \sim \pi n s a^2 \geq 10^{-k}$$

legyen. (A közelítő formula használata jogosult, mert a lejjebb közölt adatok alapján $n s a^2 \ll 1$).

a -nak a Jeans-féle elmélet szerint a bolygóképződéshez megkövetelt értéke $6,4 \cdot 10^{13}$ cm; s legyen a Tejútrendszer átmérője, vagyis 25 kiloparszek = $7,7 \cdot 10^{22}$ cm; a Nap környezetében a csillagok tényleges sűrűsége $n_0 = 0,1$ parszek⁻³ = $3,4 \cdot 10^{-57}$ cm⁻³. Az előbbi feltétel ekkor a következőképp írható:

$$\frac{n}{n_0} \geq 3 \cdot 10^{5-k}$$

Ha $k = 2$ -t írunk, akkor tehát az aktuális sűrűségnél 3000-szer nagyobb sűrűségnek kellene fennállnia ahhoz, hogy a Galaktika egész átmérőjén való keresztülhaladás alkalmával egy bolygórendszer keletkezésének valószínűsége legalább

$\frac{1}{100}$ legyen. A Jeans-féle elmélet szerint tehát egy bolygórendszer egészen kivételes jelenség volna a Tejútrendszerben, mivel a csillagok relatív sebességeinek

átlagos értékét tekintve világos, hogy a Tejútrendszer létezésének ideje (néhány milliárd év) alatt a csillagok zöme legfeljebb csak a Tejútrendszer átmérőjével egyenlő nagyságrendű utat futhatott be. Ez a konklúzió pedig ellentmond annak a ténynek, hogy az utóbbi időben sikerült egyes közeli csillagoknál a saját mozgások periodikus változásaiból bolygók jelenlétét megállapítani. A Jeans-féle ú. n. planetezimális kozmogóniai elmélet tehát tarthatatlan.

Ennek az eredménynek mélyreható ideológiai jelentőségére is szeretnék néhány szóval kitérni. A Föld kitüntetett helyzetére vonatkozó vallásos tanévszázadok óta egyik központi kérdése volt annak a harcnak, melyet a tudomány az egyház reakciós filozófiája ellen folytatott. *Kopernikus* és *Galilei* eszméit háromszáz évig azért üldözték, mert cáfolták azt a dogmát, hogy a Föld, az ember teremtésének és megváltásának színhelye, szükségszerűen a világ közepe.

A Föld megkülönböztetett szerepének ezt az idealista téveszméjét támasztotta fel új alakban a planetézimális kozmogóniai hipotézis, mely arra a következményre vezet, hogy a Föld csaknem az egyedüli égitest, amely élőlények által lakható. A tudomány és az egyház harcának másik központi kérdésére, a világ egyetlen kreatív aktussal való teremtésének dogmájára *Ambarcumian* vizsgálatai adják meg a választ. Ezeket előadásom végén fogom röviden vázolni.

A legközelebbi szomszéd távolságának eloszlásából azonnal meghatározhatjuk azt a $W(|F|)$ eloszlási függvényt, amely annak a valószínűségét adja meg, hogy valamely csillagra valamely pillanatban a csillagközeg legközelebbi csillagának gravitációs vonzása következtében ható F erő nagysága $|F|$ és $|F| + d|F|$ közé essék.⁵ Ennek az erőnek abszolút értéke $|F| = GMr^{-2}$, ahol G a gravitáció állandója, r a legközelebbi szomszéd távolsága, M pedig a tömege (egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a közegcsillagok mind egyenlő tömegűek). Az imént azt találtuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szomszéd távolsága r és $r + dr$ közé essék,

$$w(r) dr = 4\pi r^2 n e^{-\frac{4\pi r^3 n}{3}} dr$$

(n az átlagos sűrűséget jelenti); az $|F|$ mennyiség eloszlását nyilván úgy kapjuk meg, hogy ebben a kifejezésben r -et $|F|$ -fel és dr -t $d|F|$ -fel fejezzük ki:

$$r = \left(\frac{GM}{|F|} \right)^{1/2},$$

$$dr = \frac{1}{2} \frac{(GM)^{1/2}}{|F|^{3/2}} d|F|,$$

ahonnan

$$W(|F|) d|F| = 2\pi (GM)^{3/2} n |F|^{-3/2} e^{\frac{4\pi (GM)^{3/2} n}{3|F|^{3/2}}} d|F|;$$

nyilván

$$W(|F|) \sim 2\pi (GM)^{3/2} n |F|^{-3/2},$$

ha $|F| \rightarrow \infty$.

Ha nem csupán a legközelebbi szomszédot vesszük tekintetbe, hanem a közeg összes csillagainak együttes hatását vizsgáljuk, akkor a sztochasztikus problémák egy másik nevezetes típusát kapjuk. Ezt azzal jellemezhetjük, hogy egy olyan valószínűségi változó eloszlását keressük, amely igen nagyszámú független valószínűségi változó szuperpozíciójának eredménye.⁵

A vizsgált csillag tömegegységére az egész csillagközeg összes csillagainak vonzása folytán ható \mathfrak{F} gravitációs erőt úgy tekinthetjük, hogy két részből tevődik össze: az egyik a közeg csillagainak rendszerétől, mint egésztől, a másik a csillag közvetlen környezetétől származik. Az előbbi levezethető egy

$\mathfrak{B}(\mathbf{r}, t)$ potenciálból, mely a közegecsillagok »kisímitott« térbeli eloszlását reprezentálja; a vizsgált csillag tömegegységére ennek folytán ható erő

$$K(\mathbf{r}, t) = \text{grad } \mathfrak{B}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathfrak{B}(\mathbf{r}, t) = G \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{M n(\mathbf{r}_1, M, t)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} dM d\mathbf{r}_1,$$

ahol $n(\mathbf{r}_1, M, t) dM$ az M és $M + dM$ közé eső tömegű csillagok sűrűségét adja, mint az \mathbf{r}_1 helyzetvektor és a t idő függvényét. Ez az erő lassan változó folytonos függvénye a helynek és időnek. Ehhez járul a csillag közeli szomszédaitól származó (szintén a csillag tömegegységére vonatkoztatott) $F(t)$ fluktuáló erő, amely azt eredményezi, hogy a csillagra ható aktuális erő eltér a $\text{grad } \mathfrak{B}$ értéktől. Könnyűszerrel elvégezhető egy durva becslés ezen erő fluktuációinak sebességét illetően; ezek a csillagközeg sűrűségének a vizsgált csillag környezetében mutatkozó fluktuációival függnek össze. Ha e csillag körül egy nem túl nagy σ térfogatelemet tekintünk, melyben csak viszonylag kevés közegecsillag van, akkor az ebben foglalt csillagok számának az $n\sigma$ átlagos érték körüli ingadozásai egy Poisson-féle eloszlás által vannak szabályozva. Egy fluktuáció átlagos tartama nyilván olyan nagyságrendű, mint az az átlagos T idő, amely alatt két csillag a csillagok közti átlagos \bar{r} távolságra távolodik el egymástól:

$$T = \frac{\bar{r}}{\bar{V}},$$

ahol \bar{V} a két csillag közti relatív sebességek átlaga. Nyilván

$$\bar{r} = \int_0^{\infty} r w(r) dr = \int_0^{\infty} 4 \pi r^3 n e^{-\frac{4 \pi r^3 n}{3}} dr$$

$$= \frac{1}{(4 \pi n / 3)^{1/3}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{1/3} dx = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{4 \pi n}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = 0,55396 n^{-\frac{1}{3}};$$

eszerint

$$T = \frac{0,55 n^{-\frac{1}{3}}}{\bar{V}};$$

beírva \bar{V} -nek és n -nek a stellárstatisztikából ismert, a Nap környezetére vonatkozó értékeit:

$$\bar{V} = 50 \text{ km/sec}, \quad n = 0,1 \text{ parsec}^{-3},$$

kapjuk, hogy

$$T = 6 \cdot 10^4 \text{ év.}$$

Ez igen kicsiny idő a galaktikai rotáció periódusához (kb 200 millió évhez) képest; a közegecsillagok sűrűségi fluktuációi és ennél fogva a csillagra ható erő ingadozásai is igen gyorsan változnak a többi fizikai paraméterek változásainak sebességeihez képest. Vannak tehát olyan Δt időközök, melyeknek folyamán $K(\mathbf{r}, t)$ csak infinitezimálisan kis értékkel változik, azonban ugyanakkor igen nagyok az $F(t)$ fluktuációinak T átlagos tartamához képest, úgyhogy $F(t)$ és $F(t + \Delta t)$ között nem lesz semmiféle korreláció. Ha tehát a csillag tömegegységére ható F erő kifejezését a következő alakban írjuk:

$$\mathfrak{F} = K(\mathbf{r}, t) + F(t),$$

ez a reláció teljesen analóg lesz a Brown-féle mozgás Langevin-féle egyenletével; itt is $K(\mathbf{r}, t)$ egy szisztematikus tag, mely a kisimított térbeli eloszlás gravitációs terétől származik, $F(t)$ pedig a közeli szomszédok hatását feltüntető sztochasztikus tag, mely $K(\mathbf{r}, t)$ -hez képest igen gyorsan változik. A csillag sebességének egy az előbbi jelentésű Δt időköz alatt bekövetkezett megváltozása számára a következő kifejezést írhatjuk fel:

$$F \Delta t = K \Delta t + \delta(t + \Delta t; t),$$

ahol

$$\delta(t + \Delta t; t) = \int_t^{t + \Delta t} F(u) du$$

és az előbb mondottakból következik, hogy $\delta(t + \Delta t; t)$ és $\delta(t + 2\Delta t; t + \Delta t)$ között nincs korreláció. Ahhoz, hogy a sebesség ilyen megváltozásának értékét kiszámíthassuk, szükség van az

$$F(t) = G \sum \frac{M_i \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3}$$

erő statisztikus tulajdonságainak, vagyis a $W(F)$ eloszlási függvénynek az ismeretére. (Mivel F a különböző irányok közt egyenletesen oszlik el, azért a $W(F)$ és a $W(|F|)$ eloszlási függvények a következőképp függenek össze egymással: $W(|F|) = 4\pi |F|^2 W(F)$.) Az $F(t)$ kifejezésében az összegezés a vizsgált csillag egy bizonyos környezetéhez, pl. egy R sugarú gömbhöz tartozó összes közegecsillagokra terjesztendő ki; mivel azonban csak a közeli csillagok játszanak számottevő szerepet, azért a csillag környezetében észlelt sűrűséget formálisan a végtelenig extrapolálhatjuk és az összegezést az egész térre terjeszthetjük ki. Így a keresett $W(|F|)$ eloszlás, az ú. n. Holtsmark-eloszlás végtelen sok független változó ismert eloszlásából számítható egy Markovtól származó általános módszer⁷ alkalmazásával. Az így nyert eredmény nagy $|F|$ -ekre ugyanazt az aszimptotikát adja, mint a fenti eljárás, melynél csak a legközelebbi szomszéd hatását vettük figyelembe (ha az ottani eredményünkben az

egyenlő tömegűeknek feltételezett közegecsillagok közös M tömege helyébe az átlagos tömeget írjuk). Valószínűnek látszik, hogy ha a két legközelebbi szomszédot vesszük figyelembe, akkor már kisebb $|F|$ -ekre is a Holtsmark-eloszlásnak egy elég jó közelítését kapjuk.

Ilyen típusú és az előbbivel rokon természetű probléma a csillagrendszerek relaxációs idejének kiszámítása is, vagyis azon időtartamé, melynek folyamán a rendszer csillagai közti közeli találkozások sztochasztikus kumulatív hatása a mozgások irányának eltérítése, illetve az energiakicserélődés, vagyis a végső »termodinamikai« egyensúlyi állapothoz való közeledés szempontjából már nem hanyagolható el a kisimitott sűrűségi eloszlásnak megfelelő, skaláris potenciálból leszármaztatható gravitációs tér szisztematikus hatása mellett, vagyis amikor az e potenciál alapján számított pálya, illetve az energia állandóságát kifejező integrál már közelítőleg sem lesz érvényes. Ennek a problémának leg-exaktabb megoldása *Chandrasekhar*tól származik⁸, a Tejútrendszer relaxációs ideje 10^{14} év nagyságrendű. *Ogorodnyikov* rámutatott arra, hogy a relaxációs idő egyúttal a Tejútrendszer szétesésének felezési idejét is jelenti.⁹

A sztochasztikus problémáknak egy további nevezetes típusához jutunk, ha az előbbinél pontosabb fogalmazásban vetjük fel az F erő fluktuációi sebességének, vagyis egy fluktuációs állapot átlagos tartamának kérdését. Tegyük fel, hogy F -nek valamely adott t_0 időpontban egy meghatározott értéke van. Ha a dt idő elég rövid, akkor F -nek a $t_0 + dt$ időbeli értéke nyilván erősen függni fog a t_0 -beli értékétől; ezt a jelenséget nevezte *Smoluchowski* valószínűségi utóhatásnak.¹⁰ Kérdés, hogy átlagosan mekkora időnek kell eltelnie, míg az F erő értéke már nem lesz számottevő korrelációban a t_0 időpontban észlelt értékével? Ez az időtartam, a fluktuáció átlagos tartama jellemzi azt, hogy az egyes fluktuációs állapotok milyen gyorsan váltakoznak. Hogy ezt az időtartamot kiszámíthassuk, ismernünk kell az

$$W\left(F, \frac{dF}{dt}\right)$$

kettős eloszlási függvényt. *Chandrasekhar* és *Neumann* megmutatták,¹¹ hogy ez is meghatározható a Markov-féle módszerrel.

Az izolált csillagrendszerek általános dinamikájának problémája a következő: adva van egy t_0 időpontban a rendszer csillagainak térbeli eloszlása és a tér minden pontjában a sebességek eloszlása az $f(x, y, z, u, v, w, t_0)$ függvénnyel; meghatározandó bármely t időpontra vonatkozólag az $f(x, y, z, u, v, w, t)$ eloszlás. Az f függvénynek ki kell elégítenie a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

egyenletet¹²; ez a Liouville-tétel egyszerű folyománya és azonos a gázelmélet Boltzmann-egyenletével, ha abban a közeli szomszédok kölcsönhatását kifejező

tagokat, az úgynevezett átmeneti és ütközési függvényeket elhagyjuk, ami a rendkívül hosszú relaxációs időt figyelembevéve, jogosnak tekinthető; ebben az egyenletben u , v és w a sebesség komponenseit jelentik, \mathfrak{B} pedig a gravitációs potenciál, mely egy izolált rendszer esetében kizárólag a rendszer tagjaitól származik, tehát eleget kell tennie a

$$\nabla^2 \mathfrak{B} = -4\pi G M \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int f(x, y, z, u, v, w, t) du dv dw$$

Poisson-egyenletnek (egyszerűség kedvéért itt a csillagok tömegeit megint egyenlőknek vettük és M -mel jelöltük). A stellárdinamika alapproblémájában tehát egy eloszlásnak az időtől való függését kell meghatározni, ha ismerjük az eloszlást valamely kezdeti időpontra vonatkozólag. Az így megfogalmazott probléma teljes megoldása tetszőleges $f(x, y, z, u, v, w, t_0)$ függvény esetében eddig még nem sikerült.

Végül lépten-nyomon alkalmazzák az asztrofizikában és a stellárdinamikában a statisztikus mechanikának a termodinamikai egyensúlyi állapot meghatározására szolgáló egyenleteit¹³ (pl. a molekuláknak egy atmoszférából, valamint egy csillagnak egy csillaghalmazból való kifutásának és az atmoszféra elvesztésének, illetve a halmaz felbomlásának kérdései; az in tersztelláris anyag egy csillag által történő »befogásának« (kaptációjának) problémája *Smidt* kozmogóniai elméletével kapcsolatban; az elemi részek ütközéseinek és a szubatomás energiának az ütközések alkalmával való felszabadulásának, vagyis a csillagok energiatermelésének kérdései stb.). Ebben az összefüggésben elsősorban a disszociatív egyensúlyi állapot feltételét kifejező egyenleteknek (speciálisan a Saha-egyenletnek) nagyjelentőségű alkalmazásait kell említenem: a spektráltípusok Fowler-féle elméletét, mely az egyes típusokra jellemző színképvonalak fellépését az ionizáció különböző fokaiival magyarázza meg; *Eddington* és *Strömgren* vizsgálatait a csillagok vegyi összetételére vonatkozólag; végül a kettős csillagok és nyílt halmazok disszociatív egyensúlya kérdéseinek döntő szerep jut *Ambarcumian* kozmogóniai vizsgálataiban.¹⁴ A disszociatív egyensúly egyenletéből kiszámítható, hogy a Tejútrendszerben jelenleg az egyes csillagok számához viszonyítva kb. 1 milliószerosa több kettős csillag van, mint amennyi volna akkor, ha a kettős csillagok felbomlásának és összeállásának ellentétes folyamatai között egyensúly állna fent; ebből következik, hogy a kettős csillagok zöme nem keletkezhetett véletlen találkozások alkalmával a már meglévő csillagokból való összeállítás által, mert ebben az esetben százalékos előfordulási gyakoriságuk nem haladhatná meg a disszociatív egyensúlyi állapotnak megfelelő értékét. A nyílt halmazokra és az *Ambarcumian* által felfedezett ú. n. csillagtársulásokra ez a fortiori érvényes; mivel pedig másrészt ezek a társulások nagymértékben instabilisek: életkoruk legfeljebb néhány millió év, azért ebből következik, hogy a társulások tagjaiként szereplő csillagok

maguk sem lehetnek ennél idősebbek, következésképp a Galaktika csillagai nem keletkeztek mindannyian egy időben.

Befejezésül megemlítem, hogy *Ogorodnyikov*⁹ a Gibbs-féle statisztikus mechanikát úgy általánosította, hogy közvetlenül alkalmazható legyen egy forgó stacionárius galaktikát alkotó csillaggázra, és kimutatta, hogy valamely pont környezetében a lokális centroidhoz viszonyított csillagsebességek ellipszoidális, ú. n. Schwarzschild-féle eloszlása azonos a kanonikus eloszlással.

*Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem,
Csillagászati Intézete.*

IRODALOM

- ¹ *Waldmeier M.*: Einführung in die Astrophysik, Basel 1948, 235.
- ² *Zeipel H. v.*: Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires XXV., F 29, (1908).
- ³ *Charlier C. V. L.*: Application de la théorie des probabilités à l'astronomie, Paris 1931, 1. fejezet.
- ⁴ *Hoffmeister C.*: Meteorströme, Leipzig 1948.
- ⁵ *Chandrasekhar S.*: Reviews of Modern Physics, 15. 1 (1943).
- ⁶ *Ogorodnyikov K. Ф.*: Доклады Академии Наук СССР. LXVI. (1949). 3.
- ⁷ *Markov A. A.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1912, 16. és 33. §.
- ⁸ *Chandrasekhar S.*: Astrophysical Journal 93. (1941).
- ⁹ *Ogorodnyikov K. Ф!*: Успехи Астрономических Наук IV. (1948).
- ¹⁰ *Smoluchowski M. v.*: Phys. Zeitschrift 17, 557 (1916).
- ¹¹ *Chandrasekhar S. és Neumann, J. v.*: Astroph. J. 95 (1942), I. II. ib., 97 (1943).
- ¹² *Chandrasekhar S.*: Principles of Stellar Dynamics, Chicago 1942, 85.
- ¹³ *Fowler R. H.*: Statistical Mechanics, 2. kiadás, Cambridge, 1936, XV. és XVII. fejezet.
- ¹⁴ *Амбарцумян В. А.*: Эволюция звезд и астрофизика, Ереван 1947. I. függelék.

A KÖTÖRÉS VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁSI TÁRGYALÁSÁHOZ

SZÉKELY GÁBOR

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen

A. N. Kolmogorov szovjet matematikus egy 1941-ben megjelent dolgozatában¹ az aprítási folyamatoknál keletkező szemcsék logaritmikus normális megoszlását igazolta. Kolmogorov elméletét speciálisan a kötőrésre Rényi Alfréd² alkalmazta. Bizonyos egyszerűsítő, de a lényegen nem változtató feltevések mellett kimutatta, hogy gépileg zúzott kő szemnagyság szerinti eloszlása közelítően logaritmikusan normális, és meghatározta a zúzási folyamathoz szükséges energiamennyiséget.

Mindkét szerző feltételezi, hogy adott anyagban a meghatározott arányban való törés valószínűsége független a nagyságtól. Tárgyalási módjuk között az eltérés az, hogy Kolmogorov a zúzást folytonos stochasztikus Markov-folyamatként interpretálja, Rényi Alfréd viszont diszkrét stochasztikus Markov-folyamatnak tekinti. Diszkrét Markov-folyamaton a következőt értjük: adva van egy rendszer, melynek állapota lépésenként változik, a változás a véletlentől függ, és annak a valószínűsége, hogy az n -edik lépésnél a rendszer egy bizonyos állapotba kerüljön, kizárólag attól függ, hogy az $(n - 1)$ -edik lépésnél melyik állapotban volt. A kötőrés is ilyen Markov-folyamat. Továbbá ismeretes az, hogy ha nagyszámú egymástól független véletlen ok hatása összeadódik, és ha az egyes okok hatása az összeghez képest kicsiny, a centrális középértéktétel értelmében az összeg megoszlása közelítőleg normális. A kötőrés esetében e véletlen okok hatásai szorozódnak, tehát a logaritmusaik összegeződnek, és ezért jön létre közelítőleg logaritmikusan normális eloszlás.

Érdekes lenne megvizsgálni a zúzást azon hipotézis mellett — különös tekintettel a golyósmalmok őrlési folyamatára — hogy a nagyobb szemcsé törésének valószínűsége nagyobb, mint a kisebb szemcséé. Ebben az esetben a folyamat ugyanis nem Markov-féle, és tárgyalásmódja az előbbinél bonyolultabbá válik. Kérdés, hogy a szemcsék nagyság szerinti eloszlása logaritmikusan normális lesz-e az új hipotézis mellett is?

Jelen dolgozat célja, hogy a zúzás folyamatának olyan tárgyalási módját mutassa be, amely lehetővé teszi az előbb felvetett hipotézis megvizsgálását. Ez utóbbiról, amelynek kidolgozása még folyamatban van, itt nem kívánok beszámolni, a dolgozat csupán a Rényi Alfréd cikkében tárgyalt problémára szorítkozik, azonos hipotézis mellett, de más tárgyalásmódban, amennyiben a törési mozzanatot másképpen definiálom. A valóságban lejátszódó törés más

elemi törési mozzanatok sorozatára való felbontása a végeredményen nem változtat, viszont a problémának bizonyos szempontból előnyös interpretálását teszi lehetővé.

Valamely anyag összetörése által milyen lesz a szemcsék nagyság szerinti eloszlása? Induljunk ki egy egységnyi élű kockából. A törés műveletét a következő séma szerint képzelhetjük el: az első törési mozzanatnál a kocka szétesik nyolc $\frac{1}{2}$ élhosszúságú kockára. A további törési mozzanatoknál mindig egy kockát választunk ki taláalomra, és azt nyolcadoljuk a már ismertetett módon. A valószínűségszámítási tárgyalás azt mutatja, hogy a zúzás útján nyert szemcsék nagyság szerinti eloszlása messzemenően független mind a zúzási folyamat elkezdése előtti kezdeti eloszlástól, mind a szemcsék alakjától. Így válik lehetővé egy ilyen egyszerű törési modell választása, mely a felvetett probléma teljesen elemi valószínűségszámítási tárgyalására vezet. Kérdés, hogy N törési mozzanat után mi lesz a szemcseátmérők valószínűségi eloszlása, ha egyenlően valószínűnek tekintjük bármely szemcse kiválasztását?

Jelöljük az $\frac{1}{2^k}$ élhosszúságú kocka előfordulási valószínűségét $W_N(k)$ -val, az N -edik törési mozzanatnál.

Az $\frac{1}{2^k}$ átmérőjű kocka gyakoriságának várható értéke az $(N + 1)$ -edik törési mozzanatnál a következőképpen fejezhető ki az N -edik lépésnél fellehető várható értékkel:

$$\begin{aligned} (7N + 1) W_{N+1}(k) &= W_N(k-1) [(7N - 6) W_N(k) + 8] + \\ &+ W_N(k) [(7N - 6) W_N(k) - 1] + \\ &+ [1 - W_N(k-1) - W_N(k)] (7N - 6) W_N(k) = \\ &= 7(N - 1) W_N(k) + 8 W_N(k-1). \end{aligned} \quad (1)$$

Ugyanis az első törési mozzanat után 8 kockánk van, a második után 15, az N -edik után $7N + 1$; továbbá az $\frac{1}{2^n}$ átmérőjű kocka gyakoriságának várható értéke az $(N + 1)$ -edik törési mozzanatnál attól függ, hogy mit húztam az N -edik törési mozzanatnál: ez a várható érték N -nél $(7N - 6) W_N(k)$, és ha $\frac{1}{2^{n-1}}$ átmérőjűt húztam, hozzá kell még adnom nyolc $\frac{1}{2^k}$ átmérőjűt, ha $\frac{1}{2^n}$ átmérőjűt húztam, egyet le kell vonnom, és végül ha sem $\frac{1}{2^k}$ sem $\frac{1}{2^{k-1}}$ átmérőjűt nem húztam, ez a várható érték nem változik; ezek a megfelelő húzási valószínűségekkel szorozva és összegezve, szolgáltatják az $\frac{1}{2^k}$ átmérőjű kocka gyakoriságának várható értékét az $(N + 1)$ -edik törési mozzanatnál.

Vezessük be a $W_N(k)$ valószínűségek generátorfüggvényét :

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N(k) t^k = U_N(t). \quad (2)$$

1) és (2)-ből következik, hogy

$$(7N+1)U_{N+1}(t) = 7(N-1)U_N(t) + 8tU_N(t), \quad (3)$$

és így

$$U_{N+1}(t) = \frac{7(N-1) + 8t}{7N+1} U_N(t) = \left(1 + \frac{8(t-1)}{7N+1}\right) U_N(t);$$

$U_1(t) = 1$ kezdeti feltételre megoldva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} U_N(t) &= \left(1 + \frac{8(t-1)}{7(N-1)+1}\right) \left(1 + \frac{8(t-1)}{7(N-2)+1}\right) \dots \left(1 + \frac{8(t-1)}{8}\right) = \\ &= \prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{8(t-1)}{7j+1}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Ha ezt t hatványai szerint sorba fejtjük, a keresett valószínűségeket nyerjük.

Az $U_N(t)$ generátorfüggvény logaritmusában $t = e^x$ -et helyettesítve, annak x szerinti első, illetve második deriváltja az $x = 0$ helyen szolgáltatja az átlagot (m), illetve a szórásnégyzetet (σ^2).

Kiszámítva nyerjük :

$$m = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{8}{7j+1} \quad \text{és} \quad \sigma^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{8}{7j+1} - \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{8}{7j+1}\right)^2.$$

Az eloszlásfüggvény aszimptotikus értékét akarjuk kiszámítani, $N \rightarrow \infty$ -re. Generátorfüggvényünket írjuk át karakterisztikus függvényé.

Legyen

$$U_N(e^{ix}) = F_N(x) = \sum_k W_N(k) e^{ixk} = \prod_{j=1}^{N-1} \left(1 + \frac{8(e^{ix}-1)}{7j+1}\right), \quad (5)$$

és vezessük be a z aszimptotikusan normalizált változót :

$$z = \frac{k - \frac{\sum_1^{N-1} 8}{7}}{\sqrt{\frac{\sum_1^{N-1} 8}{7}}}$$

A z változó karakterisztikus függvénye :

$$\begin{aligned}
 G_N(x) &= e^{-ix\sqrt{\sum_{j=1}^N \frac{8}{7j+1}}} F_N\left[\frac{x}{\sqrt{\sum_{j=1}^N \frac{8}{7j+1}}}\right] = \\
 &= e^{-ix\sqrt{\sum_{j=1}^N \frac{8}{7j+1}}} \prod_{j=1}^{N-1} \left[1 + \frac{8\left(\exp\left(\frac{ix}{\sqrt{\sum_{j=1}^N \frac{8}{7j+1}}}\right) - 1\right)}{7j+1} \right]. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Ebből némi számolással adódik :

$$\log G_N(x) = -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{x^3}{\log N}\right), \quad (7)$$

tehát, ha N elég nagy, a szemcseátmérők logaritmusainak eloszlásfüggvénye közelítőleg normális lesz.

*Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

IRODALOM

¹ Колмогоров А. Н.: Доклады Академии Наук СССР. 37 (1941). 99—101.

² Rényi A.: Épitőanyag 2. (1950) 177—183.

Számológépek és közelítő számolási eljárások

ELEKTRONIKUS SZÁMOLÓGÉPEK

TARJÁN REZSŐ

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen

A korszerű elektronikus számológépek, amelyek ma a haladó tudománynak és technikának rendkívül fontos és hatásos segítségei, nem maguktól, véletlenül, mindentől függetlenül jelentek meg.

A számológépek fejlődése szoros összefüggésben van a termelési módszerekkel és a társadalom fejlődésével. A számológépek akkor fejlődtek ki, később pedig a korszerűbb, teljesítőképesebb számológépek mindig akkor jelentek meg, amikor a bonyolultabbá váló termelési folyamatok és a belőlük következő problémák nagyobb teljesítőképességű számológépeket követeltek. A rabszolgatársadalomban, vagy később, a feudális társadalomban elegendő volt a ma már gyermekjátékszernek használt golyós számológép: az abakusz; de a tengeri hajózás nagymérvű kifejlődésével már megjelennek a logaritmustáblák, a számolás akkor korszerű segédeszközei. Ahogy az ember egyre jobban megismeri a természetet, és kifejlődik az ipar, a műszaki tudományok — megjelennek az első mai értelemben vett számológépek is. A polgári társadalom kifejlődésének korszakában, a felfelé menő kapitalizmus idején a termelést elsősorban a mechanika alkalmazása jellemezte. Ennek megfelelően a számológépek is mechanikus számológépek voltak. Az első mechanikus szorzógépet *Leibnitz* konstruálta, a közismert tizedesátvitelt pedig valószínűleg *Pascal* mechanizálta — mindkettő a kifejlődő polgári társadalom tudósai.

Az első világháború után a termelésben egyre jobban tért hódít az elektromosság, és ezzel párhuzamosan megjelennek az elektromos számológépek is. Ezek azonban egyelőre csak annyiban elektromosak, hogy a meghajtó erőt egy kis elektromotor szolgáltatja. A döntő fordulatot az 1930-as évek jelentik: megszületnek az első mozgó alkatrész nélküli, elektronikus számológépek, amelyek már nemcsak a négy alapműveletet, hanem a differenciálást és integrálást is el tudják végezni, tehát megfelelő elrendezésben differenciálegyenletek megoldására is alkalmasak.

Ezzel körülbelül egyidőben a kifejlődő atomfizikai kutatások szükségessé tették olyan számolószerkezetek kifejlesztését, amelyek alkalmasak voltak az atomokból igen rövid időközökben kiváló partikulák megszámlálására. Így jelentek meg a különböző elektronikus számláló-szerkezetek, amelyekből a mai digitális számológépóriások kifejlődtek.

Az elektromos differenciálás és integrálás, illetve a nagy működési sebességű számlálószerkezet a számológépek történetében *nemcsak mennyiségi, hanem*

minőségi változást is jelentett és döntő módon befolyásolta a műszaki fejlődést. Megoldhatókká váltak olyan matematikai problémák, amelyeket addig csak egész irodák hónapokig tartó numerikus munkája tudott egy-egy konkrét esetre megoldani. Ezeknek a korszerű számológépeknek az alkalmazása éppen úgy jellemző a mi korunkra — egyrészt a tartós és egyre mélyülő válságba jutott imperializmus, másrészt az épülő kommunizmus és szocializmus korára, — mint ahogy a felfelé menő kapitalizmust a mechanikus gépek és ezen belül a mechanikus számológépek alkalmazása is jellemezte.

I.

Ahhoz, hogy valamely számítási műveletet elvégezzünk, mindenekelőtt arra van szükség, hogy a számítás során fellépő mennyiségeket valahogyan megjelöljük. A mechanikus számológépeknél az egyes számjegyeket rendszeren egy tengelynek az elfordulása jelöli. Ha a számításokat elektromossággal akarjuk végezni, a legelső tennivaló az, hogy meghatározzuk, melyek azok az elektromos mennyiségek, amelyek az egyes mennyiségeket jelölik. Aszerint, hogy ezt az alapvető kérdést a számológép hogyan oldja meg, kétféle rendszerű számológépről szokás beszélni:

- a) analóg számológépekről és
- b) digitális számológépekről.

A két rendszer működési alapelve egymástól tökéletesen különböző.

Az analóg számológépeknél az egyes mennyiségek reprezentálására valamilyen elektromos mennyiséget, pl. a feszültséget, vagy az áramerősséget, vagy az anyagnak valamilyen elektromos szempontból jelentős tulajdonságát, pl. az ellenállást választjuk. Ezért az analóg számológépeket elsősorban *folyamatosan változó függvények* reprezentálására, illetve a matematikai problémák *folyamatos* megoldására használjuk fel.

Az eredmények leolvasása a folyamatosan változó elektromos mennyiség nagyságának az érzékelésével, tehát végeredményben *méréssel* történik. Ebből viszont rögtön következik az analóg rendszerű számológépeknek egyik jellegzetes tulajdonsága: a leolvasott értékek pontossága függ a mérési módszerek pontosságától. A mérési pontosság általában 1%; jó esetben 0,1% lehet. Látjuk tehát, hogy az analóg számológép ugyan rendkívül kényelmes, gyors számítást tesz lehetővé, de általában csak 1%-os, tehát legfeljebb 3 jegyig terjedő pontosságot ad.

Ezt a látszólagos hátrányt kompenzálja a számolásnak *folyamatos* volta. Ez az utóbbi tulajdonság az, amelyik az elektronikus számológépek felhasználását elsősorban az automatika terén rendkívül elterjedtté tette.

Működésüket egy példával fogjuk illusztrálni, amely egyszersmind arra is jó, hogy az automatizálási lehetőségek széleskörű alkalmazására is például szolgáljon.

Vegyük a szorzás esetét a következő formában :

$$a = b \cdot c$$

Ennek a feladatnak a megoldására egy sor lehetőség kínálkozik : ezek közül a Wheatstone-híd elvén alapuló megoldást fogjuk ismertetni (1. ábra).

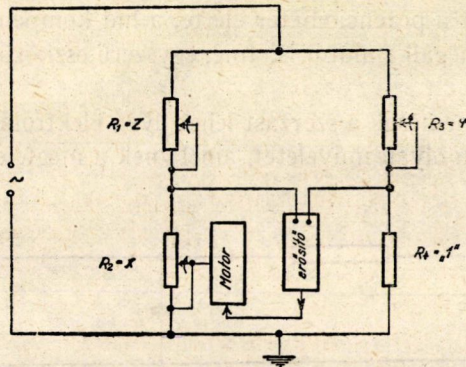
Az 1. ábra szerinti Wheatston-hídnál az egyes ágakat tekintsük változtatható ohmikus ellenállásokból felépítettnek. Ismeretes, hogy a híd akkor lesz egyensúlyban, ha teljesül a következő feltétel :

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_4,$$

amiből

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}.$$

Ezzel meg is van a szorzásnak az elektromos analógja. Ha t. i. az R_2 ellenálláson a b mennyiséget, az R_3 ellenálláson a c mennyiséget állítjuk be, akkor



1. ábra.

az a mennyiségnek megfelelő R_1 ellenállás egyenlő lesz az R_2 , R_3 ellenállások szorzatával. A nevezőben szereplő R_4 ellenállás értékét rendszeren kerek értékek, pl. 100, vagy 1000 ohmra szokták megválasztani : ekkor egyszerűen mint egy skálafaktor szerepel, amelyet csak a kalibrálásnál kell figyelembe venni. Ahhoz, hogy egy ilyen berendezéssel szorozni lehessen, mindössze az szükséges, hogy a b és a c mennyiségeket az R_2 és R_3 ellenállások skáláin beállítsuk és utána az R_1 -es ellenállással a hidat 0-ra kompenzáljuk. Ha a híd kompenzálása megtörtént, akkor az R_1 ellenállás skáláján leolvasott a érték egyenlő lesz az $R_2 R_3$ ellenállások szorzatával, tehát a $b \cdot c$ szorzattal. Kis változtatással ezt a berendezést hatványozásra, illetve szorzatok hatványozására is alkalmassá lehet tenni.

Ha most ezt a berendezést automatizálni akarjuk, akkor a következőképpen járunk el :

A hídnak a kimenő feszültségét (amelynek nullára kell állni) alkalmas erősítőre visszük. Ilyen módon kikompenzálatlan állásban a híd kimenő feszült-

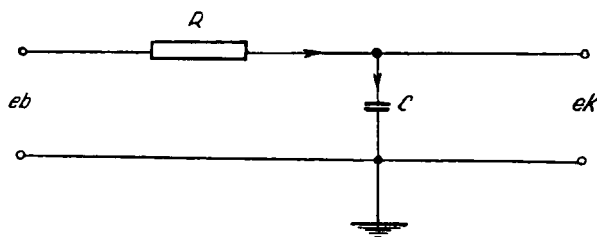
sége, az ú. n. hibajel, az erősítő után felerősített formában jelenik meg. Az erősítővel egy kis motort hajtunk meg. A motor tengelyével mechanikusan kapcsoljuk a kompenzáló, tehát az a potenciométernek a tengelyét. A működés a következő: kikapcsolt állapotban beállítjuk az R_2 , R_3 ellenállásokon a b és a c szorzandó mennyiség értékét. (Az R_1 ellenállás értéke egyelőre a nulla állásban van.) Ezután bekapcsoljuk a hidat. Minthogy a híd kezdeti állásában nincs kiegyenlítő, a híd kimenetén hibajel fog megjelenni. Ez a hibajel az erősítő után erősített mértékben jelentkezik, amire a motor megindul, és elforgatja a vele kapcsolatban levő potenciométer tengelyét. Ha már most a motor forgási irányát úgy választjuk meg, hogy a vele kapcsolt potenciométer tengelye a hibajel csökkentésének az irányában mozog, nyilvánvaló, hogy a motor csak addig fog forogni, ameddig a potenciométernek a karján hibajel van, amíg tehát

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

lesz.

Ha ezt az állást a potenciométer elérte, a híd kompenzálva van, a hibajel megszűnik, és ezzel megáll a motor is. Íme, egyszerű eszközökkel automatizáltuk a szorzást.

Természetesen nemcsak a szorzást lehet ilyen elektromos eszközökkel megoldani, ha nem minden olyan műveletet, amelynél a megfelelő elektromos, vagy



2. ábra.

mechanikus modelljét elő tudjuk állítani. Ha már most az egyes elemeket olyan rendszerbe foglaljuk össze, amilyen sorrendet a megoldandó egyenlet előír, akkor lényegében véve eljutottunk az analóg egyenlet-megoldóhoz.

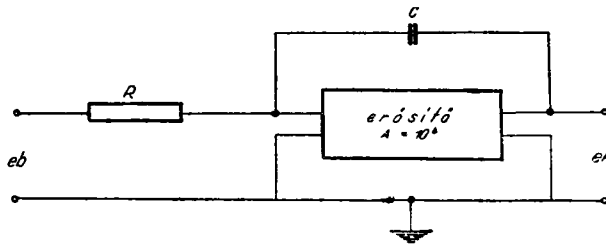
Differenciálegyenletek megoldásához célszerűen olyan elemeket használunk, amely az alapvető műveleteket, tehát a differenciálást, illetve integrálást elvégzik. A leggyakrabban használt összeállítás azon alapszik, hogy ha egy C kapacitású kondenzátort R ellenálláson keresztül e_b feszültségre kapcsolunk, (2. ábra) akkor a kondenzator sarkain fellépő e_k kimenő feszültség

$$e_k = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = \frac{1}{RC} \cdot \int_0^t e_b(t) dt, \quad (1)$$

ahol $i = \frac{e_b(t)}{R}$ a töltőáram. Minthogy az elrendezés csak passzív elemekből

(R és C) áll, egyrészt az időállandója kicsi (sec nagyságrendű), másrészt a bekapcsolási jelenségek exponenciális volta miatt nonlinearis torzítások lépnek fel. Ezért a teljes elrendezésnél, mint aktív elemet, még egy nagy erősítésű ($A \sim 2 \cdot 10^4$) erősítőt kapcsolunk közbe. A tényleges integrátor a 3. ábra szerint van felépítve. Minthogy az erősítőn a kondenzátor negatív visszacsatolást létesít, az egész rendszer viselkedését a következő differenciálegyenlet írja le :

$$\frac{de_k}{dt} = - \frac{e_b}{RC} \cdot \frac{A}{A+1} - \frac{1}{A+1} \cdot \frac{e_k}{RC} . \quad (2)$$



3. ábra.

Ha már most $A \gg 1$, akkor $\frac{e_k}{(A+1)RC}$ jó közelítéssel elhanyagolható, $\frac{A}{A+1}$ pedig $\rightarrow 1$, tehát közelítőleg

$$\frac{de_k}{dt} = - \frac{e_b}{RC} , \quad (3)$$

ahonnan

$$e_k = - \frac{1}{RC} \cdot \int_0^t e_b dt + C . \quad (4)$$

Vagyis a kimenő feszültség a bemenő feszültség integrálja lesz, a relatív hiba pedig

$$\delta = \frac{t}{(A+1)RC} . \quad (5)$$

Az erősítő tehát úgy hat, mintha az elrendezés RC időállandója az A -szorosára növekedett volna. Ha a relatív hibát csökkenteni akarjuk, akkor a következő lehetőségek állnak rendelkezésre :

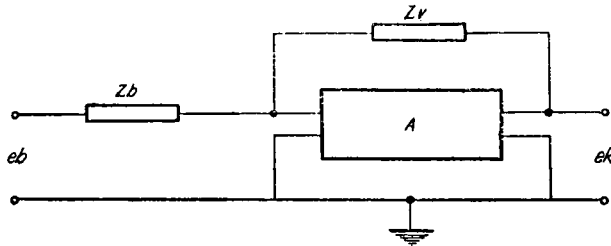
a) Nagy időállandó választása (RC lehetőleg nagy). A gyakorlatban $R = 1 \text{ MOhm}$, $C = 1 \mu\text{F}$, tehát $RC = 1 \text{ sec}$ szokott lenni. Ennél nagyobb időállandók alkalmazása főképpen a kondenzátoroknál túlságosan nagy méretekhez vezet.

b) Nagy erősítés. A figyelembejövő egyenáramú erősítőknél egyszerű eszközökkel 10^4 nagyságrendű erősítést lehet elérni, ami gyakorlatilag kielégítő.

c) A műveleti időt lehetőleg rövidre kell venni. Egy-egy »menet« tartama lehetőleg ne legyen több, mint 60 sec.

Stabil feszültségeket, 1 sec időállandót, 10^4 erősítést és 60 sec működési időt feltételezve, a berendezés véghibája (a működési idő végén) cca 0,5%.

A most leírt elrendezés általánosított alakja a következőképpen ábrázolható (4. ábra) :



4. ábra.

Itt A az erősítőt és egyszersmind az erősítés mértékét, Z_b az erősítő bemenetére kapcsolt impedanciát, Z_v pedig az erősítő bemenete és kimenete közé kapcsolt, visszacsatoló impedanciát jelenti. Minthogy *impedanciákkal* dolgozunk, ezek általában frekvenciafüggő, tehát operátorjellegű függvények. Ebben az értelemben használva az impedancia kifejezést, a bemenő és kimenő feszültségek között a következő általános összefüggés áll fenn :

$$e_k = \frac{Z_v}{Z_b} \cdot e_b ,$$

vagy általánosabban, minthogy mind a számlálóban, mind pedig a nevezőben álló operátor több részoperátor összege is lehet :

$$e_k = \frac{Z_{v1} + Z_{v2} + \dots + Z_{vi}}{Z_{b1} + Z_{b2} + \dots + Z_{bi}} e_b .$$

Látjuk, hogy az előbb tárgyalt integrátor a most tárgyalt esetnek egy speciális esete : mindkét impedancia csak egy tagból áll ; a bemenő impedancia tisztán ohmikus ellenállás, a visszacsatoló impedancia pedig egy kondenzátor.

Semmi sem korlátoz azonban abban, hogy — a műszaki lehetőségek határán belül — ne kombináljunk össze tetszőleges fajtájú és mennyiségű impedanciát. Ha pl. az iménti példában az ellenállást és a kondenzátort felcseréljük egymással, akkor az operátor erősítő által végzett művelet is az integrálás inverz művelete, tehát a differenciálás lesz. (Ezt a formát különböző műszaki zavaró okok miatt, amikre itt nem szükséges kitérni, általában nem használják.)

Fontosabb azonban az az eset, amikor mind a bemenő, mind pedig a visszacsatoló impedancia tisztán ohmikus ellenállás, mégpedig olyan elrendezésben, vagy a bemenet két, vagy több ellenállás fekszik párhuzamosan, és az

egyes bemenő ellenállásokra különböző feszültségek vannak kapcsolva. Ebben az esetben az operátor egyenlete

$$e_k = \frac{R_{v1}}{R_{b1}} e_{b1} + \dots + \frac{R_{vi}}{R_{bi}} e_{bi} .$$

Ha már most az egyes ellenállások egymással egyenlők ($R_v = R_b$), akkor a kimenő feszültség a bemenő feszültségek összege lesz :

$$e_k = e_1 + e_2 + \dots + e_i$$

Differenciálegyenletek megoldásához több ilyen operátor szintézisére van szükség. Induljunk ki példaként a következő egyszerű differenciálegyenletből :

$$y''(t) + Ay'(t) + By(t) = 0 .$$

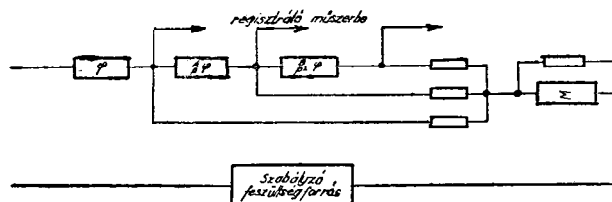
Képezzük ennek az egyenletnek a Laplace-transzformáltját :

$$p^2 y(p) + Apy(p) + By(p) = 0$$

p^2 -al átosztva, az eredmény

$$y(p) + \frac{A}{p} y(p) + \frac{B}{p^2} y(p) = 0 .$$

Ebben a formában a differenciálásokat integrálásokat helyettesítik ; így az egyenlet megfelelő számú operátorral szintetizálható. Az elrendezés a következő (5. ábra) :



5. ábra.

Működése a következő : a szabályzó feszültségforrás a bekapcsolás pillanatában $y = y_0$ kezdőfeltételnek megfelelő feszültséget kapcsol az y -nal jelzett egységnyi erősítésű választó erősítő bemenetére. Az $\frac{A}{p} y$ és $\frac{B}{p^2} y$ jelű integrátorok képezik az első, illetve második differenciálhányadosoknak megfelelő egyszeres és kétszeres integrálókat, az E -vel jelzett összegező erősítő pedig megfelelő előjellel összegezi az egyes feszültségeket. Az összegező erősítő kimeneten jelentkező feszültség, amelynek nullának kell lenni, a szabályzó erősítőbe kerül, amely a hibajelnek megfelelően növeli vagy csökkenti az (y) erősítő bemenő feszültségét. Az (y) erősítő kimenete pedig a regisztráló műszert vezérli. A rendszer tehát a differenciálegyenlet megoldását kalibrált papíron grafikusán szolgáltatja — amint az az 5. ábrán jelezve is van — ha kell, a differenciálhányadosok értékével együtt.

A rendszer természetesen nemcsak másodrendű és nemcsak lineáris differenciálegyenletek megoldására alkalmas, hanem elegendő számú integrátor és szorzásra alkalmas szervrendszer felhasználásával differenciálegyenletrendszerek és nemlineáris differenciálegyenletek is megoldhatók.

Az előbb elmondottak alapján most már világos, hogy miért hívjuk ezeket a számológépeket *analóg* számológépeknek: arról van ugyanis szó, hogy különböző elektromos kapcsolási elemekből olyan rendszert állítunk össze, amelyet ha feszültség alá helyezünk, a feszültség és az áram között ugyanaz a matematikai összefüggés áll fenn, mint amilyen egyenlet megoldására van szükség. Lényegében véve tehát megépítettük a probléma elektromos modelljét.

Mint hogy az egyes matematikai műveletek leképezésére igen nagy és még korántsem kimerített választék áll rendelkezésre, lehetőség nyílik arra, hogy a legváltozatosabb problémákat az algebrai egyenletekből a nemlineáris differenciálegyenletekig fizikai modell formájában — szaknyelven szólva — instrumentáljuk. Így az egyenlet megoldása egyszerű mérési feladattá egyszerűsödik. Nagy előnye, hogy folyamatosan változó mennyiségekkel dologozik, tehát függvények felrajzolására alkalmas, sőt a *függvények értékét megfelelő automatikával különböző folyamatok szabályozására is szokták felhasználni*.

Ezen a ponton külön alá kell húzni a Szovjetunió vezető szerepét: a Szovjetunióban rendkívül korán felfedezték az analóg számológépek döntő fontosságát a tudományos kutatás és a termelés automatizálása szempontjából. A szovjet tudósok, elsősorban *Gutenmaher* és munkatársai már a harmincas évek elején részletesen foglalkoztak ezeknek a gépeknek a gyakorlati kivitelezésével és a matematikai elméletével. Már 1935-ben megépült egy olyan számológép, amely *parciális* differenciálegyenletek rendszerét képes megoldani. Az 1946-ban elkészült modellért pedig a Szovjetunió kormánya *Gutenmahert*, *Korolkovot*, *Lebegyevet* és *Volinszkijt* 1948-ban Sztálin-díjjal tüntette ki.

II.

Digitális gépek

A digitális rendszerű számológépek gyakorlatilag mozgó alkatrész nélkül, elektroncsövekből (esetleg jelfogókból) felépített számológépek. Bonyolultságuknál fogva csak akkor lehet ezeket a gépeket jól kihasználni, ha elegendő számú berendezésegységgel vannak felszerelve ahhoz, hogy ne csak egyszerűen a négy alapműveletet, hanem azok bármely kombinációját is elvégezhessek. Hogy konkrét példát említsek, az amerikaiak híres, de már elavult berendezése, amelyik még a tízes számrendszerrel dolgozik, 18 000 rádiócsőből áll, összesen 60 kW áramot fogyaszt, és jó nagy termet foglal el. A modern konstrukciójú gépek már nem tízes, hanem kettes számrendszerrel dolgoznak; ennek következtében a szükséges csőszám is kb. 2500—3000 csőre korlátozódik. A rendkívüli bonyolultság viszont azzal az előnnyel jár, hogy a gép majdnem teljes mértékben

automatikus, és megoldja mindazokat a számításokat, amelyek a négy alapművelet véges számú kombinációjára visszavezethetők. Az automatizálás feladata rendkívül érdekes logikai problémákat vet fel. Nem kevesebbről van szó, mint arról, hogy az egyes logikai konceptusokat és a gondolkodás elemi funkcióit kell műszakilag realizálni.

Hogy a gép működését megérthessük, képzeljük el, hogy egy emberi számolónak rendes asztali számológépen két számjegyet össze kell adni. Nézzük meg, hogy ez a folyamat milyen munkafázisokra bomlik :

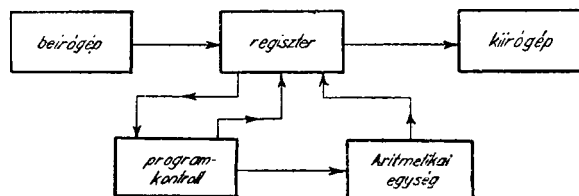
1. Megnézi az egyik számot a papíron.
2. Beforgatja a számot a gépbe, ahol az az összeadás végleges elvégzéséig tárolva marad. (A gép »emlékszik« a számra.)
3. Megnézi a másik számot a papíron.
4. Beforgatja a másik számot a gépbe. (Ez jelenti magát az összeadást.)
5. Kiírja a gépből az eredményt.

Ha ezt az egyszerű műveletet gépesíteni (de egyelőre még nem automatizálni) akarjuk, lényegében véve a következő szerkezetekre van szükség :

- a) olyan gépre, amelyik magát az összeadást végzi el ;
- b) olyan berendezésre, amellyel az összeadandó számokat be tudja vinni a gépbe ;
- c) olyan berendezésre, amellyel az eredményt ki tudja venni a gépből és végül

d) egy olyan szerkezetre, amely »emlékszik« a gépbe bevitt számokra. Másszóval, hogy plasztikusan fejezzük ki, — »emlékezőtehetségre« van szükség, amely a beadott számokra, illetve az eredményre mindaddig »emlékszik«, amíg azt ki nem töröljük, vagy másképp fel nem használjuk. (Ennél a felsorolásnál természetesen figyelmen kívül hagytuk azt, hogy a beadó szerkezetet kívülről működtetik.)

Ha most ezt a berendezést automatizálni akarjuk, még egy szervre van szükség, amely a gép egyes elemeit a megfelelő időben a szükséges utasításokkal ellátja. Ez a berendezés a számológépeknek az »agyveleje« : a programvezérlő berendezés. Ha ezt is figyelembe vesszük, akkor számológép-automatánknak a logikai felépítése a következő :



6. ábra.

III.

Beszélni kell néhány szót arról, hogyan reprezentáljuk a digitális gépekben magukat a számokat.

A természetes számsornak a legjellegzetesebb tulajdonsága a diszkrét volta. Ez annyit jelent, hogy akármilyen formában is történik a számoknak az ábrázolása, két szám között mindig üres tér van. Az elektronikus számológépeknél az egyes számokat egymásután következő impulzusok jelenléte, vagy jelen nem léte ábrázolja. Nyilvánvaló, hogy ha nincs impulzus, akkor a szám nullát, ha van impulzus, akkor egyet jelent. Ebből a két állapotból tetszőleges számokat lehet megfelelő ismétlésekkel előállítani. Most már látjuk azt is, hogy a számlálás lényegében véve olyan szerkezetek felhasználását jelenti, amelyek csak kétféle állapotra képesek: pl. egy doboz, amelyen egy lámpa van, és ez a lámpa vagy ég, vagy nem. Természetesen lehet olyan berendezéseket is konstruálni, amelyek nemcsak két, hanem több — elvileg tetszőleges számú — diszkrét és egymásba ugrásszerűen átmenő állapottal rendelkeznek. A gyakorlatban azonban bebizonyosodott, hogy a leggazdaságosabban két diszkrét állapottal bíró berendezésekkel lehet dolgozni.

A modern konstrukciójú gépek a két állapotra képes elemekből kiindulva áttértek a kettes számrendszerre. Ez a következő két lényeges előnnyel járt:

*Először: Lényegesen kevesebb kétállapotú elemre van szükség, mint a dekadikus rendszer használatánál. Bihovszkij egy összefoglaló referátumában kimutatta, hogy a kétállapotú elemekből felépített számológépeknél a felhasználandó elemek száma akkor minimum, ha a számrendszer alapja e , vagyis a természetes logaritmus rendszer alapja. Így pl. ahhoz, hogy az 1 millióig terjedő összesen 10^6 számot ábrázolni tudjuk, a kettes számrendszerben csak 40, a hármas számrendszerben pedig 38 elemre van szükség. Minthogy a hármas számrendszer technikailag komplikáltabb, használata tehát *költségesebb*, mint a kettes számrendszeré, ezért végeredményben a tízes számrendszer helyett a kettes számrendszer használatánál kötöttek ki. Ez a tízes számrendszerhez képest a szükséges elemek számában kereken másfélszeres megtakarítást nyújt. A gyakorlatban még ezt a megtakarítást is a kétszeresére lehet növelni, mert hiszen egy-egy elem kétféle állapotra képes, és mind a két állapotát fel lehet használni számjegyek előállítására.*

A kettes számrendszer használatának másik nagy előnye az, hogy a szorzás, amely a numerikus számításoknál cca 25% gyakorisággal szokott előfordulni, igen egyszerűen végezhető el.

A szorzás elvégzésére kétféle lehetőség is kínálkozik. Az egyik az ismételt összeadások módszere. Ez a módszer műszakilag egyszerű, de aránylag hosszú időt vesz igénybe. A szorzási idő rövidítése viszont megköveteli, hogy a gép $u. n.$ szorzótáblával rendelkezzen, tehát egy olyan berendezéssel, amely előre elkészített formában tartalmazza a kis egyszeregyet. Ha ilyen gépesített szorzó-

tábla van, a szorzás időben megrövidül, viszont műszakilag komplikáltabb. Arra van ugyanis szükség, hogy a gép »emlékező«-kapacitása a rendesnél nagyobb legyen, kiválassza a szorzótáblából a megfelelő pozíciókat, az eredményt pedig az eredménygyűjtő megfelelő helyére vigye. Az időbeli megrövidítés tehát a vezérlő berendezés komplikáltabbá tételét jelenti.

Mindezek a komplikációk esznek akkor, ha a szorzást a kettes számrendszerben végezzük el. Minthogy a nullával való szorzás nullát, az eggyel való szorzás pedig magát a szorzandó számot jelenti, a szorzás a kettes számrendszerben a következőkre egyszerűsödik le: ha a szorzó helyén egyes áll, akkor a szorzandót a maga helyén egyszerűen ismétli; ha viszont a szorzó helyén nulla áll, akkor a szorzót egy helyértékkel egyszerűen eltolja.

A kettes számrendszer használata ellen fel lehetne hozni azt, hogy a tízes számrendszerrel szemben lényegesen több helyértéket igényel. Szükség van ezenkívül egy ú. n. code-oló, illetve decode-oló berendezésre is, tehát olyan berendezésre, amely a decimális számrendszerben felírt számokat automatikusan átteszi a kettes számrendszerre és viszont. Ezek használatát azonban semmiképpen sem tudjuk elkerülni, mert a gép kétállapotú elemekből van felépítve, ezek részére tehát nemcsak a számokat (bármely számrendszerben), hanem a szükséges parancsokat is valamiféle formában érzékelhetővé kell tenni.

IV.

A regiszter

Rendkívül fontos része a digitális számológépeknek a regiszter, a gép »emlékező-tehetsége«. Feladata, hogy a kapott utasításokat és a számokat, amelyeken a műveleteket el kell végezni, elraktározza (»emlékezzen rájuk«) addig, amíg felhasználásukra sor nem kerül. Mind az utasításokat, mind pedig a számokat kaphatjuk kívülről, a főprogram-szalagról, vagy pedig a gép más részeitől. Az ideális regiszterrel szemben a következő fő követelményeket kell támasztani:

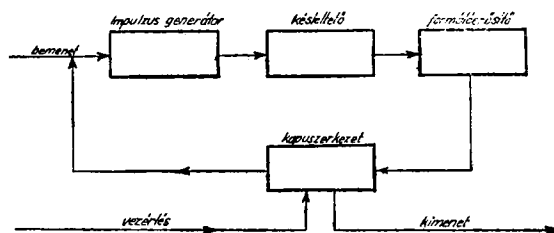
- a) legyen tárolóképes a szükséges időre,
- b) a »beírás«, illetve a »kivétel« elegendő gyorsan történjék,
- c) legyen alkalmas arra, hogy egy számra, vagy utasításra többször is »visszaemlékezzen« (tehát a tartalmának egyszeri felhasználása ne »űritse ki«),
- d) a törlés gyorsan és tökéletesen történjék,
- e) legyen elegendő nagy ahhoz, hogy a gép kapacitása teljes mértékben kihasználható legyen.

Ezeknek a követelményeknek a műszaki megvalósítása rendkívül érdekes, de egyszerűs mind rendkívül nehéz feladat, amire itt nem térhetünk ki. Elég annyit elmondani, hogy ha az ideális regisztert még nem is sikerült megvalósítani, gyakorlatilag mégis jól használható módszerek állnak rendelkezésre.

Az egyik az ú. n. sztatikus regiszter. Ez a még ezután említendő számológépyűrűkhöz hasonló felépítésű számlánc, amely a beadott számokat (és számokban

kifejezett utasításokat) mindaddig tartja, amíg ki nem írítik onnan. Hátránya, hogy nagyszámú csövet igényel.

Másik, igen gyakran használt és rendkívül szellemes megoldás a dinamikus regiszter. Ez azon az elven alapszik, hogy a hang szilárd v. folyékony közegekben



7. ábra.

is meghatározott sebességgel terjed, tehát egy l hosszúságú testen való végigterjedéshez meghatározott idő kell. Ennek a rendszernek a működési elve a következő (7. ábra):

A beérkező impulzus-sorozat piezo-elektromos kvarckristályra kerül, amely az impulzusok hatására mechanikus rezgésbe jön. A kvarckristály a mechanikus rezgéseit valamilyen folyadéknak — legtöbbször higanynak — adja át, amelyben ezek c sebességgel terjednek tova. Ha a higanyoszlop hossza

l , akkor az impulzus $t = \frac{l}{c}$ idő múlva ér a higanyoszlop végére. Itt a bemenethez

hasonló kvarckristály fogadja, visszaalakítja elektromos rezgéssé és egy A erősítőre vezeti. Az erősítő felerősíti az impulzust az eredeti nivóra (mert a higanyoszlopban való terjedés a jelet gyengíti), utána pedig egy kapuáramkörre kerül, amiről még szó lesz. Ez az áramkör normális körülmények között a jelet a bemenetre vezeti vissza; a jel tehát mindaddig a (bemenet — kvarc — higanyoszlop — kvarc — erősítő — kapuáramkör — bemenet) zárt körben fog kerülni (a rendszer »emlékezik« a jelre), amíg a megfelelő időben a kapuáramkörre érkező impulzus onnan ki nem engedi. A higanyoszlop hosszával egy-egy cella befogadóképessége beállítható, a megfelelő számú cella beépítésével pedig a szükséges összes regiszterkapacitást ki lehet építeni.

V.

A logikai elemek

A tényleges számolás elvégzése 3-féle alapelem felhasználásával történik. Ezek a következők:

- a) kétállapotú elemekből felépített számlánc,
- b) a logikai »VAGY« funkcióját megvalósító elem és
- c) a logikai »ÉS« funkcióját megvalósító (koincidencia) elem.

Számlánc. Az egyszerűség kedvéért képzeljük el, hogy egy-egy kétállapotú elem egy doboz, amelyen egy piros és egy zöld lámpa van. Nyugalmi állapotban

a piros lámpa ég, — ez a »nulla« állapotot jelzi. Ha az elem a bemenő vezetéken impulzust kap, a piros lámpa kialszik, és a zöld lámpa gyullad meg. Ez jelzi az »1« állapotot. Minthogy a kettes számrendszerben minden egyes helyértéken vagy »0« vagy »1« áll, az ilyen elem alkalmas arra, hogy vele a számokat érzékeltesük. Hogy a számológépnél felhasználhassuk, a nyilvánvalóan szükséges bemeneten és kimeneten felül az elemnek a következő két lényeges tulajdonsággal kell rendelkezni:

a) ha a bemeneten impulzus jelentkezik, az elemnek az éppen elfoglalt állapotából az ellenkező állapotba kell átmenni. Ha pl. a »0« állapotban van, az impulzusra az »1« állapotba kell átmenni és fordítva;

b) valahányszor az elem »1« állapotban van és impulzust fogad, nemcsak a »0« állapotba kell visszamenni, hanem ugyanakkor a kapott impulzust továbbítani is kell a következő elem felé.

Minthogy 10 decimális számjegy ábrázolására a kettes számrendszerben összesen 34 bináris helyre van szükség, az előjellel együtt összesen 35 ilyen elemnek a sorbakapcsolására van szükség.

A *logikai* »VAGY« olyan elem, amelynek két vagy több bemenete van, és mindegyik ugyanarra a kimenőkapocsra dolgozik. Bármelyik bemeneten megjelenő impulzus továbbítódik a kimenetre. Az elem tehát működik »VAGY« az egyik »VAGY« a másik, »VAGY« az n -edik bemenő kapcson jelentkező impulzusra. Az elem tehát a logikai »VAGY« konceptusát valósítja meg.

Nehezebb dolog a *logikai* »ÉS« konceptusának a megvalósítása. Ez az elem szintén két bemenettel és egy kimenő vezetékkel rendelkezik; de csak akkor működik, ha a két bemeneten *egyidejűleg* jelentkezik a megfelelő impulzus. Mászóval: az impulzusnak jelen kell lenni az egyik »ÉS« a másik bemeneten is.

VI.

A digitális gépek logikai funkciói

A most ismertetett három logikai elemnek a segítségével például az összeadást a kettes számrendszerben a következőképpen lehet megoldani:

Minthogy a kettes számrendszerben csak kétféle jegy, a »0« és az »1« fordul elő, az összeadás szabályait a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

A	B	Eredmény	Átvitel
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Látjuk tehát, hogy az összeadás végeredményben a következő négy esetre korlátozódik:

Ha mindkét szám nulla: az eredmény nulla, átvitel nulla.

Ha »VAGY« az egyik, »VAGY« a másik szám »1«, az eredmény »1«, az átvitel »0«.

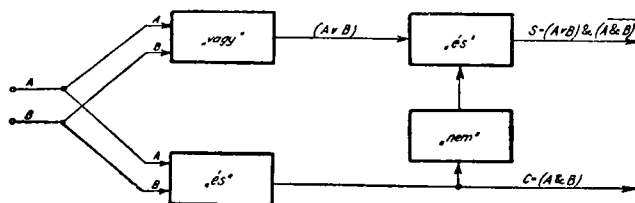
Ha az egyik »ÉS« a másik szám »1«, az eredmény »0«, az átvitel pedig »1«.

A logikai »VAGY«, »ÉS« és »NEM« szokásos definíciói alapján a bemenet és kimenet között tehát a következő logikai összefüggés áll fenn :

$$\text{összeg} = (A \vee B) \& \overline{(A \& B)}$$

$$\text{átvitel} = (A \& B)$$

Ennek alapján a bináris összeadást a következőképpen lehet instrumentálni :



8. ábra.

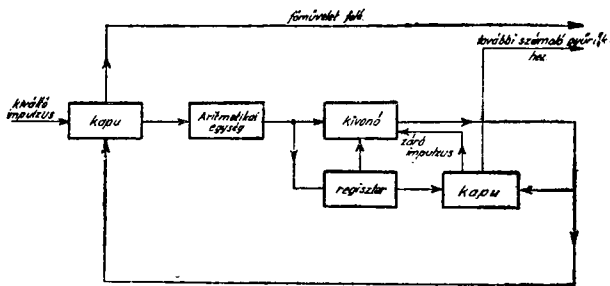
a két összeadandó számot (A , B) egyidejűleg egy »VAGY«, valamint »ÉS« egységre vezetjük. Az »ÉS« egység kimenetén csak akkor jelenik meg »0«, ha mindkét összeadandó értéke »0«, egyébként mindig »1«-es fog jelentkezni. Ezzel fedve van a táblázat első három esete. A negyedik esetben a helyesbítésről a logikai »ÉS« egység gondoskodik. Ez az egység, ha két bemenetén egyidejűleg »1«-es jegy jelentkezik, egyrészt továbbadja azt mint átvitelt, másrészt pedig ugyanezt az impulzust mint *záró-impulzust* (negáció) adja egy második »ÉS« egységre. Mint-hogy ennek a második »ÉS« egységnek az első bemenetére egyidejűleg a »VAGY« egység kimenetén megjelenő jel is rákerül, a záró impulzus a »VAGY« egységből jövő »1«-es jelet *nem* engedi tovább, tehát a második »ÉS« egység kimenetén az átvittel egyidejűleg a »0« jegy fog megjelenni.

Ez a berendezés még nem veszi figyelembe azt, hogy a két összeadandón kívül az előző helyértékről még átvitel is jelentkezhet ; az összeadás műveletét tehát csak félig végzi el. Ezért fél-összeadónak is hívják. Az átvittel együtt a teljes összeadást két ilyen fél-összeadó kombinációja végzi el.

Ha már most a korábban említett regisztert (memória-elemet) és a most említett logikai egységeket *zárt szervo-rendszerben* értelemszerűen kombináljuk, a gép *feltételes parancsokat* is végre tud hajtani, vagyis — ami ezzel egyértelmű — *választani (diszkriminálni) is tud*. Végeredményben tehát nem kevesebbről van szó, minthogy a digitális számológép bizonyos feltételek mellett a gondolkodás egy elemi funkcióját látja el : egyszerű alternatíva felett dönt.

A feltételes parancsok végrehajtására mellékszámítások esetében van szükség. Ehhez tudni kell azt, hogy a gépbe az egyszerűbb programozás kedvéért ú. n. szubrutinokat építenek be. Ezek olyan sokszor és azonos módon ismétlődő műveletek, amelyeket nem érdemes minden egyes alkalomkor külön-

külön programozni, hanem a fixen beépített szubrutint »egyszavas« code-dal indítják, és az eredmény kiszámítása után a gép visszatér a főművelethez. Ilyen pl. a négyzetgyökvonás. Más esetben a gép attól függően választja ki a főműveletek folytatását, hogy mi volt az előző művelet eredménye. Az Éniac-nál még az volt a rendszer, hogy ezeket a számításokhoz használt segédfüggvényeket a gépben a megfelelő emlékező rendszerben táblázatos formában előre elraktározták, és amikor erre szükség volt, a gép a számításokhoz szükséges értékeket onnan kikereste. A modernebb kiadású, lényegesen gyorsabb gépeknél azonban ezeknek a segéd táblázatoknak a beépítésétől eltekintettek. Egyszerűbb és rövidebb dolog ugyanis egy-egy konkrét értéket (pl. $\sqrt{2}$) kiszámítani a megfelelő sorfejtés segítségével, mint a gépbe bedolgozott táblából kikeresni.



9. ábra.

Tételezzük fel, hogy $\sqrt{2}$ értékre van szükség. Ezt az értéket a gép iterációval számítja ki. Az utasítás, amit a gépnek adni kell, így hangzik: »számtsá ki $\sqrt{2}$ -t 6 tizedes pontossággal: — amíg nem érted el a hat jegyet, folytasd az iterációt — azután folytasd a főműveletet«.

Ez így látszólag nagyon misztikusan hangzik, a valóságban azonban nagyon józan (ha nem is egyszerű) berendezésről van szó. Ez a szubrutin a következő elv szerint működik (9. ábra).

Az »iterációval« jelzett kocka magában foglalja az egész iterálva számoló berendezést. Eléje egy n . kapuáramkör, tehát az »ÉS« elem kerül. Az »ÉS« elemnek a bemenetén periódikusan — olyan időközökben, amennyi ideig egy-egy iterációs számítási szakasz tart — megjelenik a főművelet továbbfolytatását kiváltó impulzus. Az iterációs egységből az eredmény egyrészt egy regiszterbe, tehát az »emlékezőt«-be, másrészt pedig n . kivonó-gyűrűbe kerül. A regiszterben az $(n-1)$ iteráció eredménye annyi ideig tartózkodik, mint egy iterációs periódusnak a hossza. Utána a kivonó-gyűrűbe kerül, ahol vele egyidejűleg megjelenik a következő, n -edik sorszámú iteráció eredménye is. A kivonó áramkör az $(n-1)$ és n -edik iterációs szakasz eredményeit kivonja egymásból. Ha a kívánt pontosságot az iteráció során a gép még nem érte el, akkor az utolsó jegyen egyes jelenik meg; ez visszakerül a rendszernek az elejére, az »ÉS« elembe. Minthogy ez úgy van megszerkesztve, hogy csak akkor engedi tovább

a főműveleti impulzust, ha a második bemeneten egyidejűleg nulla jelenik meg, a gép a főműveletet nem tudja folytatni, mert a főműveleti impulzus nem megy tovább. Ha azonban az iteráció a kívánt pontosságot elérte, a kivonó-gyűrűben az n -edik és $(n-1)$ fokozat különbsége nullát ad. Ilyen esetben a főműveletet kiváltó impulzussal egyidejűleg az »ÉS« elemhez a másik bemeneten nulla impulzus érkezik. Így a főműveleti impulzus akadálytalanul tovább jut a megfelelő számológýúrúkhöz. Ugyanakkor megfelelő kiváltó impulzust is küld egy erre a célra beépített segédberendezésen keresztül az iterációs egység felé, amely annak a működését leállítja. A gép tehát végrehajtja a kívánt segédszámítást és amikor a meghatározott feltétel (t. i. az előírt pontosság) bekövetkezik, ezt érzékeli, abbahagyja a segédszámítást és visszatér a főművelethez.

* * *

Befejezésül szólni kell arról is, hogy miért fontos most nekünk, a szocializmust építő Magyarországon, hogy az elektronikus számológépekkel foglalkozzunk.

Természetesen nemcsak azért, mert valami új dologról van szó, ami pillanatnyilag a *tudományos divat* középpontjában van. *Lenin* elvtárs 30 évvel ezelőtt azt mondta, hogy a szovjet hatalom + az ország villamosítása egyenlő a kommunizmussal. *1950-ben* rövidlátás volna a villamosításon kizárólag a villamos energiaszolgáltatást érteni. *Ami részünkre, akik 1950-ben építjük a szocializmust, elengedhetetlen, hogy a villamosítás minden olyan formájával foglalkozzunk, amely a szocializmus építését megkönnyíti.* Ebből a szempontból van az elektronikus számológépeknek döntő jelentősége. *Az elektronikus számológépek ugyanis tartalmazták az automatikának új és fontos alapelemeit is.* Márpedig a szocializmust építeni nemcsak azt jelenti, hogy fokozatosan gépesíteni kell azokat a munkafolyamatokat, amelyeket idáig kézzel végeztek, hanem azt is, hogy automatizálni kell azokat a munkafolyamatokat, amelyeket idáig géppel végeztek. Így tudjuk majd gyorsabban megteremteni a munka magasabb termelékenységi fokát, amely országunkon belül is egyik biztosítéka lesz a szocializmus győzelmének. Az elektronikus számológépek döntő elvi jelentősége abban van, hogy egyszersmind a teljes automatika elvi alapjait is magukban foglalják.

A digitális számológépeket jelenleg Magyarországon nem tudnánk jól kihasználni: tervezésük és építésük — még akkor is, ha megfelelő káderek állnak rendelkezésre — két-három évet venne igénybe, kapacitásukat pedig csak alig tudnánk kihasználni.

Ezzel szemben fontos volna, hogy a Szovjetunió tapasztalatainak átvételével analóg-rendszerű algebrai- és differenciálegyenlet-megoldó berendezések álljanak rendelkezésre.

Ezek a gépek rendkívül flexibilisek és a határozatlan tartószerkezetekben fellépő determináns számításoktól az előfeszített vasbeton szerkezetek differenciálegyenleteinek numerikus megoldásáig a műszaki tervezés legkülönbözőbb területein lehet felhasználni őket.

Megvalósításuk nem köt le túlságosan nagyszámú kádert, és ötéves tervünk jó végrehajtása, nem utolsó sorban pedig tervező kádereink jobb kihasználása végett szükséges volna ilyen berendezések mielőbbi megépítése.

Felállításuk a tervező munkaórák tízezreit tudná népgazdaságunk részére megtakarítani, és ezáltal jelentősen hozzájárulna tervgazdaságunk egyik szűk keresztmetszetének, a káderekérdésnek kibővítéséhez.

*Postakísérleti Állomás,
Budapest.*

KÖZVETLEN ÉS KÖZVETETT ANALÓGIARENDSZEREK*

NÁRAY ZSOLT

Az analógia-számológépek kifejlesztésére irányuló törekvésben központi kérdés, hogy a megoldandó matematikai probléma leképezésére megfelelő fizikai rendszert állítsunk elő. Ez utóbbi akkor lesz analógia-rendszerként *közvetlenül* használható, ha az állapotjelzői között fennálló összefüggés formailag megegyezik a megoldandó matematikai problémával. Analógia-rendszert — számológépet — keresve, szem előtt kell tartani azonban azt, hogy egy fizikai rendszer egyes állapotjelzői közötti kapcsolatnak matematikai kifejezés formájába öntése általában egy matematikai egyenlettípus specializált alakjához vezet, tehát egy ilyen rendszer által leképezett matematikai egyenlet is specializált lesz.

Rendszerint azonban nem vagyunk abban a helyzetben, hogy egy általános matematikai egyenlettípus leképezését több ugyanolyan típusú, de specializált analóg-rendszerrel tegyük teljessé. Kétségtől igaz viszont az, hogy ha egy analóg-rendszer egy igen gyakran előforduló specializált egyenlettípust képez le, akkor ez az eljárás mind pontosság, mind egyszerűség szempontjából igen kedvező sajátságokkal rendelkezik.

Az analóg-rendszertől általában megkövetelt általánosság sokszor csak úgy érhető el, ha a megoldandó problémát előbb egy matematikai eljárással transzformáljuk, és ezt a transzformált alakot tekintjük leképezendő problémának. Ez az eljárás lehet közelítő, vagy szukcesszív közelítő eljárás is. Az ily módon előálló analógia-rendszert, az eredeti probléma *közvetett analógiájának* nevezhetjük. A közvetett analógia-rendszer alkalmazását nemcsak általánosítási, hanem célszerűségi szempontok is indokoltá tehetik. Ez utóbbi jutott kifejezésre midőn a kvantummechanikai többtest-probléma megoldására irányuló törekvésben V. Bush által kidolgozott mechanikus differenciálanalizátor segítségével D. R. Hartree, illetve V. Fock iterációs eljárást képezett le. A közvetett analógiák használatakor természetesen meg kell vizsgálni, hogy az általánosításból származó előny nincs-e a közelítésből, illetve konvergenciából eredő hátrányokkal lerontva.

A fenti gondolatmenetnek megfelelően lineáris egyenletrendszerek leképezését a Gauss-Seidel iterációs eljárás közbeiktatásával végeztem el. Ily módon lehetővé vált tetszőleges valós homogén és inhomogén egyenletrendszerek leképezése. A konvergencia elégséges feltétele az egyenletrendszer transzformációjával mindig kielégíthető. A konvergencia szempontjából többnyire megfelelő eredményeket kapunk az egyenletek sorrendjének megváltoztatásával is. A berendezés megépítésére vonatkozó előkísérletek kedvező eredménnyel

* Hozzászólás Tarján Rezső előadásához.

zárultak. A fenti analógia számológép segítségével nemcsak homogén és inhomogén egyenletrendszerek, de szekuláris determinánsok és n -edfokú egyenletek is automatikusan oldhatók meg.

Általában az iterációs eljárással — nehézségei ellenére — elért eredmény jól érzékelhető, ha *D. R. Hartree* nyomán megállapítjuk, hogy a mai legnagyobb kapacitású digitális számológépek a *Cu* atom közvetlen megoldására még mindig a szükségesnél kb. 10^{10} -szer kisebb kapacitással rendelkeznek. Ugyanakkor a *Cu* atom problémája iterációval és differenciálanalizátorral már régebben megoldást nyert.

Tervbevettük egy közvetlen rendszer felállítását is differenciálegyenletek vizsgálatára. Ezesetben a matematikai problémát eredeti alakjában megtartjuk, de azt nem egyetlen állandó rendszerrel, hanem több kisebb egységgel képezzük le, melyek mindegyike általában csak egy operációt végez el. Az egyes egységek által elvégzett operációk összessége a kérdéses egyenlet megoldásához szükséges operációt adja. Előnye ez utóbbi rendszernek a nagyfokú hajlékonyság, hátránya az előbbiekhöz képest kétségtelenül komplikáltabb felépítése, valamint az egyes elemeknek a kapcsolástól függő egymásrahatása. Az a tény azonban, hogy az egyes egységek megfelelő kombinációjából a legváltozatosabb egyenlettípusok állíthatók elő, kétségtelenül nagy jelentőséget biztosít ez utóbbi analógia számológépek számára.

Egy közös differenciálegyenlet leképezésére a következő típusú elemek szükségesek: integrátor, függvény-generátor, összegezőmű és vezérlő-berendezés. A szorzás ugyanis visszavezethető az integrálásra az

$$xy = \int x dy + \int y dx$$

egyenlet alapján feltéve, hogy nemcsak egy meghatározott változó (pl. idő) szerint tudunk integrálni. Ez utóbbi kikötés az integrátor megtervezésében kétségtelen nehézségeket jelent, megvalósítása azonban a szükséges elemek számát négyre korlátozza. A potenciométeres szorzás a fenti eljárással szemben feltétlenül hátrányban van. Egyrészt a tényezőfüggvények előállítását különlegesen teker-cselt potenciométerekkel is csak egyszerű függvények esetében tudjuk elvégezni. Másrészt a szorzatfüggvények helyes értékét csak a híd kiegyenlített állapotában kapjuk, tehát a szorzás, precízen véve, szakaszos és nem folytonos műveletté vált.

A fentieket figyelembevéve első problémám egy elektronikus generátor építése volt, amely egy tetszőleges függvényábra leképezését végzi teljesen automatikusan. Működése az egyes alkatrészek elektromos karakteristikájától nagy mértékben független. A függvénygenerátor tervezése befejeződött. Jelenleg az integrátor tervezésén dolgozom. A berendezés segítségével elsősorban differenciálegyenletek megoldása, lesz elvégezhető.

*Műszaki Egyetem
Fizikai Intézete, Budapest.*

A NOMOGRÁFIA ALKALMAZHATÓSÁGÁNAK HATÁRAIRÓL

HAJÓS GYÖRGY lev. tag

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen

A matematika alkalmazásai között különleges helyet foglal el a nomográfia. A nomográfia három- vagy többváltozós kapcsolatok grafikus ábrázolásával foglalkozik. Az alkalmazott matematika e fejezetének elsősorban az a különlegessége, hogy a nomogramok használata rendkívül gyors és áttekinthető. Nem állítjuk azonban, hogy a nomogramok elkészítése is könnyű és gyors munka. A nomogramok előnyeinek tulajdonítható, hogy a matematikát alkalmazó tudományoknál — itt elsősorban a műszaki alkalmazásokra gondolunk — újabban is egyre gyakrabban használják a nomogramokat. Hazai irodalmunkban ez a jelenség nem annyira szembeszökő. Ennek oka az, hogy egyrészt a matematikát alkalmazók nem ismerik eléggé a nomográfia hatóképességét, másrészt a matematika művelői közül kevesen foglalkoztak ezzel a tudományággal. Ennek az előadásnak célja e tényeknek megfelelően kettős: egyrészt részleteket kíván ismertetni a nomográfia alkalmazhatóságára vonatkozólag, másrészt szeretné a matematikusok figyelmét a nomográfiára s annak problémái felé terelni. E nagy célokat egy rövid előadás keretében lehetetlen elérni, s így megelégszünk néhány olyan gondolat közlésével, amely kitűzött célunk felé vezet.

A nomográfia hátrányai között első helyen azt kell említenünk, hogy sok egyszerű kapcsolatnak nomografikus ábrázolása nehéz, sőt sokszor lehetetlen. A »lehetetlen« szót a később mondandók fogják pontosabban körvonalazni. Éppen ezért a nomográfia kutatóinak elsődleges területe annak vizsgálata, hogy milyen kapcsolatokat hogyan ábrázolhatunk nomogramm segítségével. Előadásunk is ezt a kérdést tárgyalja. Az ismertetés és kedvkeltés céljával soroljuk fel azokat a kutatási irányokat, amelyek e kérdés megoldása felé vezetnek. A szakirodalom közhelyeit fogjuk ily módon rendszerbe, azokat legfeljebb néhány egyéni gondolattal megtoldva.

A nomográfia alkalmazhatóságának határaitra vonatkozó kutatási irányok közül a következőket soroljuk fel: 1. Adott nomogrammfajtánál megállapítandó az ilyen nomogrammal ábrázolható kapcsolatok normálalakja. 2. Kereshetjük annak feltételét, hogy egy kapcsolat mikor ábrázolható adott nomogrammfajtával. 3. Ugyanezt a kérdést felvethetjük a kapcsolatoknak egy szűkebb osztályán belül (pl. algebrai kapcsolatokra). 4. Egy nomogrammfajtával ábrázolható ismert kapcsolattípusra példákat kereshetünk a valóban gyakorlati

területeken. 5. Ha már tudjuk, hogy egy kapcsolat adott nomogram-fajttal ábrázolható, kérdezhetjük, hogy milyen elrendezés mellett lesz ez az ábrázolás a legjobb. 6. Ha tudjuk, hogy egy kapcsolat adott nomogram-fajttal nem ábrázolható, felvethetjük a kérdést, hogy vajjon mégis mi a kapcsolatnak legjobb közelítő ábrázolása ilyen nomogrammal.

Mindezeknél a vizsgálati irányoknál nomogram-fajtákról beszéltünk. Ismeretes, hogy a nomogramoknak igen sokféle fajtájuk van, sőt nehéz volna úgy körülhatárolni a nomográfiát, hogy e körülhatároláson belül minden ábrázolásmódot felsorolhassunk. Itt még a legszokottabb nomogram-fajtnak leírásával sem foglalkozunk. Legfeljebb megemlítjük, hogy nem kívánjuk tárgyalásunkat elvileg valamilyen nomogram-fajttára, vagy a nomogram-fajtnak egy csoportjára korlátozni. Így nem foglalunk állást a görbesereges és pontsoros nomogramoknak ismeretes vitájában sem. Ha mégis többet szólnunk a pontsoros nomogramokról, ez csak azért van, mert ezeknek problematikája gazdagabb és az ilyenek általánosításával előálló pont-sereges nomogramok alkalmazhatósági határa sokváltozós kapcsolatoknál határozottan tágabb.

A továbbiakban röviden szólnunk a felsorolt hat irány mindegyikéről. Nem módszeres tárgyalásról, hanem inkább ismertetésről lesz szó. E szempontokat annál is inkább hasznos sorra venni, mert a nomográfia irodalma sajnálatos módon vegyíti ezeket a szempontokat. A nomográfia kutatóinak, alkalmazóinak és használóinak szempontjai sokszor igen különbözők. Talán elmondhatjuk, hogy a nomográfia irodalmának sajnálatos áttekinthetetlensége a sokféle szemponttal közeledők együttműködésének hiányából ered.

1. *Adott nomogram-fajtnál kereshetjük azoknak a kapcsolatoknak normálalakját, amelyek ilyen nomogrammal ábrázolhatók, azaz kereshetünk olyan általános kapcsolattípust, amely magában foglalja az adott nomogram-fajttal ábrázolható kapcsolatoknak mindegyikét, de csak ezeket.*

Ennek a feladatnak elvégzése ritkán okoz nagyobb nehézséget, s az ismert egyszerűbb nomogram-fajttákra közismertek az eredmények. Itt ízelítőt akarva adni a nomográfia hatóerejéről, csak felsorolunk néhány idevágó eredményt. Párhuzamos egyenesereges, valamint sugársoros Descartes-féle nomogramokra s egyben három párhuzamos egyenestartójú pontsoros, valamint három egymással nem párhuzamos egyenestartójú pontsoros nomogramra a keresett normálalak a következőknek bármelyike:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0, \quad f_1 f_2 f_3 = 0, \quad f_1 + f_2 + f_3 = f_1 f_2 f_3.$$

Itt és a következőkben a nomográfia jelölésmódjának megfelelően az indexek azt jelölik, hogy a függvény mely változóktól függ. Többváltozós függvényre több index utal. Ha ugyanazt a betűt különféle indexekkel szerepeltetjük, akkor e függvények között semminemű rokonságot nem feltételezünk. Tehát közönséges jelöléssel a mondott normálalakok közül az elsőt így írjuk:

$$f(z_1) + g(z_2) + h(z_3) = 0.$$

Ezek s az ilyen alakra hozható kapcsolatok ábrázolhatók csak a fentebb felsorolt nomogramm-fajtákkal.

Általános egyenessereges nomogrammal s egyben általános pontsoros nomogrammal ábrázolható kapcsolatok normálalakja

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & 1 \\ g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Egyenestartójú pontsorral egymáshoz kapcsolt pontsoros nomogrammból összetett nomogrammal ábrázolható kapcsolatok normálalakja

$$\frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \frac{f_3 + f_4}{g_3 + g_4}.$$

Ezek ábrázolásánál tehát már négy (általában görbetartójú) pontsort használunk s egy kottázatlan egyenest.

Pontseregnek nevezzük a kétkottás pontoknak egy összességét. Ilyen pontsereget azokkal a vonalakkal adhatunk meg, amelyeknek mentén az egyik kotta nem változik, tehát két görbesereggel. Két pontsereggel és egy egyenestartójú pontsorral ábrázolható kapcsolatok normálalakja

$$f_5 = \frac{f_{12} + f_{34}}{g_{12} + g_{34}}.$$

Ha két ilyen nomogramot közös egyenestartóval egyesítünk, akkor már nyolcváltozós kapcsolatok ábrázolására alkalmas nomogramot kapunk. Az ilyen nomogrammal ábrázolható kapcsolatok normálalakja

$$\frac{f_{12} + f_{34}}{g_{12} + g_{34}} = \frac{f_{56} + f_{78}}{g_{56} + g_{78}}.$$

2. *Kereshetjük annak feltételét, hogy egy kapcsolat ábrázolható-e adott nomogramm-fajtával.* Tehát olyan differenciálegyenleteket állíthatunk fel, amelyek teljesülése az ábrázolhatóságnak szükséges és elégséges feltétele.

Ez a vizsgálati irány rendkívül nehéz problémákat vet fel. Elég itt a pontsoros nomogrammal ábrázolható háromváltozós kapcsolatokra felvetett kérdésre utalnunk. Másrészt viszont az ilyen vizsgálatok alig nyújtanak gyakorlatilag hasznos adalékot a nomográfiának. Rendkívül hosszadalmas, magasrendű parciális differenciálegyenletek adódnak, s így a próbálkozás többnyire sokkal hamarabb vezet eredményhez, mint az ilyen egyenletekbe való helyettesítés. Elvileg természetesen nem kifogásolható a megfelelő differenciálegyenletek keresése, csupán gyakorlati jelentőségük csekély. Az ilyen természetű vizsgálatról itt nem is szólunk, többet.

3. *Kereshetjük annak feltételét, hogy egy szűkebb csoportba tartozó kapcsolat mikor ábrázolható megadott nomogramm-fajtával.* Tehát az előző kérdést vetjük

fel, de nem nagy általánosságban, hanem a kapcsolatoknak egy szűkebb osztályára. Az ilyen vizsgálatok már gyakorlati szempontból is hasznosabbnak mutatkozhatnak.

Ilyen természetű vizsgálat vezetett a nomográfia egyik legtetszetősebb eredményéhez: Ha csak linearizált háromváltozós kapcsolatokkal foglalkozunk, tehát olyan $F_{123} = 0$ alakú kapcsolatokkal, melyeknél bármely z_i változóra nézve az F_{123} függvény

$$F_{123} = f_i F_{jk} + g_i G_{jk} + h_i H_{jk}^{(3)}$$

alakban írható, akkor az említett eredmény azt mondja ki, hogy minden olyan linearizált kapcsolat ábrázolható pontsoros nomogrammal, amelynek nomografikus rendszáma (*Soreau* terminológiáját használva) négy, azaz amelyiknél a fentebbi előállításban két változó esetében is csak két tag lép fel (pl. $H_{13} = H_{23} = 0$).

Az ilyen típusú eredmények vezetnek el olyan vizsgálatokhoz, hogy vajjon hogyan dönthető el, hogy egy kapcsolat beletartozik-e abba a szűkebb osztályba, amelyről vizsgálatunk szólt. Így pl. kérdezhetjük, hogy egy kapcsolatról hogyan dönthető el, hogy vajjon linearizált-e, vagy pedig linearizálható-e. Az ilyen vizsgálat már visszakanyarodik az előző pontban említett irányhoz, s az ott mondottakat itt is elismételhetnők. Megemlítjük mégis — egyben a fellépő parciális differenciálegyenletek bonyolult voltára is példát nyújtva — hogy pl. annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy kétváltozós F függvény $f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2$ alakban legyen írható, a következő tizenkettedrendű parciális differenciálegyenlet teljesülése (ahol az indexek parciális deriváltakat jelölnek):

$$\begin{vmatrix} F & F_1 & F_{11} & F_{111} \\ F_2 & F_{12} & F_{112} & F_{1112} \\ F_{22} & F_{122} & F_{1122} & F_{11122} \\ F_{222} & F_{1222} & F_{11222} & F_{111222} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Adott nomogramm-fajttal ábrázolható kapcsolatok között a gyakorlati életben is kereshetünk hasznos példákat. Illetőleg inkább: a gyakorlati élet által nyújtott kapcsolatokat vizsgálhatjuk, hogyan tudjuk ábrázolni azokat, s így példákat kereshetünk a különféle nomogramm-fajtákra.

Talán különösnek tűnik ebben az elméleti szempontokat is kidomborító előadásban egy ilyenféle vizsgálati iránynak még a megemlítése is. Viszont gyakorlatilag ez az irány rendkívül hasznos. Kétségtelen tény, hogy a nomográfia elméleti felkészültsége még nem elégíti ki a gyakorlatot, viszont sok olyan elméletileg gyártott kapcsolatfajttát tud ábrázolni, amilyenre a gyakorlati életből még nem, vagy csak alig találtak példákat. S ennek a ténynek okát nem annyira a példák valódi hiányában, hanem inkább abban sejtjük, hogy kevés elméletileg is felkészült ember találkozik a gyakorlatban felmerülő példákkal, illetőleg a valóban gyakorlati példák ismerői nem ismerik a nomográfia elméleti felkészültségét.

Természetesen — éppen a mondott ok miatt — az ilyen vizsgálat többek együttműködését kívánja meg és sok munkával jár. Itt említjük meg, hogy az ilyen vizsgálat Tudományos Akadémiánk Alkalmazott Matematikai Intézetének programjában szerepel.

5. *Ha már tudjuk, hogy egy kapcsolat egy nomogrammfajttal ábrázolható, kérdezhetjük, hogy vajon milyen elrendezés mellett lesz az ábrázolás a legjobb.* Ugyanis projektív transzformáció még a pontsoros nomogrammoknak sem árt, s így az elrendezésnek valóban nagy sokféleségével állunk szemben. Viszont sokféle elrendezés válik gyakorlatilag haszontalanná azért, hogy a leolvasás a leolvasott skála sűrűsége, vagy a metsző egyenes hajlásszögének kicsinyisége miatt nagyon pontatlan.

Ezt a feladatot a nomogrammok szerkesztői próbálkozással szokták megoldani. Felvilágosítást kapunk e kérdés megoldására, ha meggondoljuk, hogy valójában v vastagságú egyenesek metszésénél a két egyenes áthatása egy rombusz, s ennek hossza az egyik egyenes irányában mérve $v \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, ahol α az egyenesek hajlásszögét jelöli. A leolvasás pontosságát az az érték szolgáltatja, amely ennek a hosszának a leolvasott skálán megfelel. Így arra az eredményre jutunk, hogy a nomogramra fektetett egyenesnek a leolvasott skálával való hajlásszögét α -val jelölve, s a leolvasott skálán kellő kis értékváltozásnak megfelelő elmozdulást t -vel jelölve, az elrendezés jóságát

$$t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

méri, legjobb elrendezésnél ezt az értéket kell maximálisnak választani. Ennek a megválasztásnak határt szab a nomogramm nagysága. Korlátozott papírtérjedelem mellett az optimális elrendezés megkeresése nem könnyű, de mindenképpen hasznos feladat.

6. *Ha már tudjuk, hogy egy kapcsolat nem ábrázolható adott nomogrammfajttal, kereshetjük a kapcsolatnak ilyen nomogrammal való legjobb közelítő ábrázolását.* Ez a feladat természetesen akkor lép fel elsősorban, amikor a kapcsolatot nemcsak éppen egy bizonyos kiszemelt nomogrammfajttal, hanem egyáltalában nem tudtuk ábrázolni. Ez a helyzet sok olyan kapcsolatnál, amelyet a gyakorlat ábrázolni kíván. Viszont a gyakorlatot tökéletesen kielégíti az olyan ábrázolás, amelyik ugyan elvileg kifogásolható, de csak a gyakorlat által megkövetelt pontosságot nem zavaró csekély hibát követ el. Sőt sokszor jól alkalmazható az olyan ábrázolás is, amelyik ugyan korántsem szolgáltat pontos értéket, még gyakorlati szempontból sem, viszont gyorsan felvilágosítást nyújt a keresett érték nagyságrendjére vonatkozólag. Egy másik terület, ahol a közelítő nomogrammok alkalmazása szükséges, a tapasztalati függvények ábrázolása.

Ha még a közelítő nomogramokat is a nomográfiába soroljuk, akkor elmondhatjuk, hogy a nomográfia nem ismer »lehetetlent«. Viszont a közelítő nomogramok megválasztása igen körülményes és nehézkes feladat. Ha csak háromváltozós kapcsolatoknak egyenestartójú pontsoros nomogramokkal való közelítő ábrázolásával akarunk foglalkozni (vagy ami ugyanazt a kérdést veti fel: egyenessereges nomogramokkal való közelítő ábrázolással), már akkor is nehéz problémával találkozunk. Itt csak ez utóbbi kérdés geometriai hátterét kívánjuk megvilágítani.

Egy háromváltozós kapcsolat a térben egy felülettel ábrázolható. Ennek a felületnek a gyakorlat megkívánta korlátok egy darabját jelölik ki. Ezt a felületdarabot kell olyan felülettel megközelítenünk, amely a jelzett módon ábrázolható kapcsolatoknak felel meg. Az $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ alakú egyenlettel bíró felületek jönnek itt szóba, s ezeknek sokasága korántsem tekinthető át egyszerűen. Hiszen ebbe a sokaságba tartoznak pl. a koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű másodrendű felületek is. A mondott közelítő nomogramfajtáknak egy csoportjához tehát úgy juthatunk el, hogy az ábrázolandó kapcsolatot szemléltető felületdarabot megközelítjük egy hozzá simuló, tengelyekkel párhuzamos főtengelyű másodrendű felülettel.

Nem akartuk a sokféle vizsgálati irányynak egyikét sem részleteiben tárgyalni, ezt a keret nem is engedte volna. Megelégedtünk a szempontok felsorolásával s a módszerek ismertetésével. Ilyen módon igyekeztünk a bevezetőben említett célokat legalább kis részben megvalósítani.

*Magyar Tudományos Akadémia,
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

AZ ELMÉLETI FIZIKA ÉS TECHNIKA SORFEJTÉSEI ÁLTAL ELÉRHETŐ MEGKÖZELÍTÉSEK NAGYSÁGRENDJÉRŐL

ALEXITS GYÖRGY r. tag

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen

Az elméleti fizika és a technika számos problémájának alapja a következő, hullámegyenlet néven ismert másodrendű parciális differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Ennek a differenciálegyenletnek megfelelő kerületi feltételek melletti megoldása teszi lehetővé a húrok, hártyák, pálcák, lemezek, héjszerkezetek rezgéseinek leírását, nagy szerepet játszik továbbá a rezgőkörök elméletében, de a kvantummechanikában is alapvető jelentőségű. Mindebből világos, hogy a hullámegyenlet matematikai tárgyalása számos, elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontos kérdés megoldásánál alapvető jelentőségű.

A hullámegyenlet megoldásának szokásos módszere abban áll, hogy az

$$u(t, x, y, z) = T(t) X(x) Y(y) Z(z)$$

előállításból kiindulva, a T , X , Y , Z függvényekről kimutatjuk, hogy azok megfelelő másodrendű, lineáris, közönséges differenciálegyenleteknek tesznek eleget, s az $u(t, x, y, z)$ függvény pedig ezek sajátfüggvényei szerint haladó sorba fejthető. Az említett fizikai és technikai problémák megoldása tehát megkívánja a következő matematikai probléma tárgyalását:

Legyenek $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ egy másodrendű, lineáris, homogén differenciálegyenlet sajátfüggvényei; a megfelelő tulajdonságokkal rendelkező, adott $f(x)$ függvény a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = f(x)$$

egyenletesen és abszolút konvergencia sorba fejthető. A sorfejtés c_n együtthatói *elvileg* könnyen kiszámíthatók a

$$c_n = k_n^{-1} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx$$

képlet alapján, ahol

$$k_n = \int_a^b \varphi_n^2(x) dx.$$

A számítás *tényleges* keresztülvitele általában nehéz és hosszadalmas, ezért igyekszünk a sorból minél kevesebb tagot kiszámítani. Ahhoz azonban, hogy exakt módszerrel megállapíthassuk, hányadik tag után szabad megállnunk anélkül, hogy a gyakorlati probléma természetéből adódó hibakorlátot túllép-nénk, meg kell tudnunk becsülni a hátralevő tagok ki nem számítása követke-zésében elkövetett hibát. Az említett elméleti és gyakorlati problémák tehát a következő matematikai kérdés megoldását követelik tőlünk:

Bevezetve az

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$$

jelölést, megállapítandó az $|f(x) - s_n(x)|$ hibakorlátja bármely n index mellett.

Bármennyire fontos is ez a probléma, ma még az a helyzet, hogy teljesen kielégítő, gyakorlatilag is használható eredmények csupán abban az esetben állnak rendelkezésünkre, ha a $\varphi_n(x)$ sajátfüggvények $\sin nx$ vagy $\cos nx$ alakúak, illetőleg bizonyos feltételeknek eleget tevő ortogonális polinomok. Pedig gyakorlati szempontból fontos volna hasonló eredményeket elérni akkor is, ha a $\varphi_n(x)$ sajátfüggvények rendszerét a Bessel-függvények, vagy a Laguerre-, illetve Hermite-polinomok alkotják.

A trigonometrikus függvények esetében

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

alakú, ahol a_k és b_k a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény Fourier-együtthatói. Ennek az esetnek rendkívül kiterjedt irodalmából kiemeljük a következő szerzők műveit: *Lebesgue, Bernstein, Jackson, De la Vallée-Poussin, Krilov, Kolmogorov, Ahiezer, Krein, Favard, Nyikolszkij, Sz.-Nagy Béla*. A számos ismert eredmény közül példaként bemutatjuk a következő, gyakorlatilag talán leghasználhatóbb tételt:

Ha a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény r -edik deriváltja minden pontban eleget tesz az

$$|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x)| \leq M |x' - x|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

Lipschitz-feltételnek, akkor

$$\text{Max } |f(x) - s_n(x)| \leq \frac{AM \log n}{n^{r+\alpha}},$$

ahol A explicite megadható abszolút állandó.

E tétel és a még ismert többi eredmény alapján felmerül a következő megfordított probléma: ha ismeretes a $\text{Max } |f(x) - s_n(x)|$ hibakorlát n -től függő nagyságrendje, milyen következtetéseket lehet ebből levonni a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény és deriváltjai folytonossági viszonyaira vonatkozóan? Ez a kérdés nemcsak elméletileg igen fontos, hanem gyakorlati szempontból is

érdekes, mert előfordulhat, hogy az $f(x)$ függvény tulajdonságait egyáltalában nem ismerjük, csupán $f(x)$ explicite megadott Fourier-sorát; ha pedig ebből a sorfejtésből $f(x)$ és deriváltjai folytonossági viszonyaira tudunk következtetni, akkor ezzel felvilágosítást kaphatunk a vizsgált fizikai vagy technikai jelenség természetére is. Így pl. $f(x)$ deriváltjának esetlegesen nem-folytonos volta jelenthet törést vagy szakadást a vizsgált anyagi folyamatban.

A probléma felvetése és a legfontosabb idevágó eredmények *Bernsteintől* származnak. E tárgykörben ismert eredményeik vannak a következő szerzőknek: *Bernstein, De la Vallée-Poussin, Natanszon, Krilov, Alexits, Zygmund, Zamansky*. A problémára vonatkozó számos ismert tétel közül bemutatjuk a következőt:

Ha van olyan $f(x)$ -hez konvergáló $T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x), \dots$ trigonometrikus polinomsorozat, melyben $T_n(x)$ pontosan n -edrendű, és ha

$$\text{Max } |f(x) - T_n(x)| \leq \frac{K}{n^{r+\alpha}} \quad (K = \text{konst.}, 0 < \alpha < 1),$$

akkor a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvénynek van r -edik deriváltja, és az eleget tesz egy

$$|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x)| \leq M |x' - x|^\alpha$$

alakú Lipschitz-feltételnek.

A trigonometrikus függvények mellett még aránylag elég messzemenő eredményeket ismerünk akkor, ha $\varphi_n(x)$ egy teljes ortogonális és normált polinomrendszer n -edik tagja. Ez annyit jelent, hogy egy alapintervallumban, amely az egyszerűség kedvéért legyen $-1 \leq x \leq 1$, adva van egy $w(x) > 0$ súlyfüggvény, ez egyértelműen meghatároz egy $p_n(x)$ n -ed fokú polinomot, ha kikötjük, hogy x^n együtthatója legyen pozitív és teljesüljön a

$$\int_{-1}^{+1} w(x) p_i(x) p_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

ortogonalitási és normálási feltétel. Ez esetben

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x),$$

ahol

$$c_k = \int_{-1}^{+1} w(x) f(x) p_k(x) dx.$$

Ilyen típusú speciális polinomokra *Bernsteinnek* van számos eredménye; az újabb irodalomból elsősorban *Szegő* és *Geronimusz* munkáit kell megemlítenünk. Az általános esetben *Alexits* kezdte meg a kérdés vizsgálatát; módszerét *Sz.-Nagy Béla* javította meg, ennek felhasználásával sikerült a következő

jól használható és teljesen általános eredményt elérni (Alexits, I. Magyar Matematikai Kongresszus):

Ha $f(x)$ a $-1 \leq x \leq 1$ intervallumban r -szer differenciálható és r -edik deriváltja egy α -ad rendű Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor a

$$\text{Max}_{-1+h \leq x \leq 1-h} \left| f(x) - s_n(x) \right| \leq \frac{K_h \log n}{n^{r+\alpha}} \quad (K_h = \text{konst.})$$

hibabecslés érvényes minden olyan $-1 + h \leq x \leq 1 - h$ belső részintervallumban, ahol $w(x)$ is korlátos, és a $p_n(x)$ polinomok is egyenletesen korlátosak.

Eszerint tehát az ortogonális polinomsorokkal elérhető megközelítés az alapintervallum belsejében nagyjából ugyanolyan jó, mint amilyen a Fourier-soré. Ezzel azonban egyelőre el is értük erre a problémakörre vonatkozó, gyakorlatilag is használható ismereteink határát, ami azért jelent nagy hiányt, mert éppen a technikus számára legfontosabb Bessel-függvények, valamint a Laguerre- és Hermite-polinomok szerint haladó sorfejtésekkel való megközelítésekre vonatkozóan az eddigiek alapján semmit sem tudunk mondani. Igaz ugyan, hogy Jackson és tanítványai a Sturm-Liouville-függvények szerinti kifejtésekre vonatkozóan bebizonyították azt, hogy ha $f(x)$ és deriváltjai bizonyos feltételeknek tesznek eleget, akkor a megközelítés nagyságrendje ez esetben Bn^{-r} , de e tételek csupán a B állandó létezését bizonyítják be anélkül, hogy annak nagyságát az adott feltételek alapján explicite meg lehetne határozni. Az ilyen, elméletileg egyáltalában nem érdektelen eredmény a gyakorlat számára semmit sem használ, mert ha B nagyságát explicite nem ismerjük, nem állapíthatjuk meg, hogy az n -edik taggal befejezve a sorfejtés kiszámítását, nem követünk-e el a megengedettnél nagyobb hibát.

A további kutatások számára talán útmutatóul szolgálhat a következő, Lebesgue-tól származó módszer:

Legyen az $a \leq x \leq b$ intervallumban definiált $\varphi_n(x)$ ortogonális és normált függvények rendszere olyan, hogy minden n -re létezzék egy

$$\Phi_n(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$$

függvény, mely eleget tesz a

$$\text{Max} |f(x) - \Phi_n(x)| \leq \text{Max} |f(x) - \Psi_n(x)|$$

egyenlőtlenségnek bármilyen lineáris kombinációja is $\Psi_n(x)$ az első $n + 1$ φ -függvénynek. Első teendőnk megállapítani, hogy az $f(x)$ függvények egy C osztályára nézve mekkora az

$$E_n(f) = \text{Max} |f(x) - \Phi_n(x)|$$

érték. Ha ez sikerült, mint ahogy Bernsteinnek polinomok esetében sikerült,

akkor megállapítandó az ortogonális és normált $\varphi_n(x)$ függvények rendszeréhez tartozó

$$L_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right| dt,$$

úgynevezett Lebesgue-függvények felső korlátja, melyet λ_n -nel fogunk jelölni. Figyelemmel arra, hogy

$$\text{Max} \left| \Phi_n(x) - s_n(x) \right| \leq \text{Max} \int_a^b \left| \Phi_n(t) - f(t) \right| \left| \sum_{k=0}^n \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right| dt \leq E_n(f) \lambda_n,$$

azonnal következik, hogy

$$\text{Max} |f(x) - s_n(x)| \leq \text{Max} |f(x) - \Phi_n(x)| + \text{Max} |\Phi_n(x) - s_n(x)| \leq E_n(f) (1 + \lambda_n).$$

Ez a módszer vezetett sikerre a $-1 \leq x \leq 1$ intervallumban definiált ortogonális polinomok szerint haladó sorfejtések maradéktagjának hibabecslésénél, és remélhető, hogy ilyen módon sikert érhetünk el akkor is, ha a végtelen intervallumban definiált Laguerre- vagy Hermite-polinomok szerint haladó sorfejtéseket vizsgáljuk.

Műszaki Egyetem

III. Matematikai Tanszéke, Budapest.

IRODALOM

A tárgyalt kérdés-komplexus irodalma igen nagy, ezért e helyen még a legfontosabb eredeti művek felsorolására sem vállalkozhatunk. Az egyes kérdésekről jó tájékoztatót nyújtanak a következő művek:

Ахнезер Н. М. : Лекции по теории аппроксимации. Москва, 1947.

Jackson D. The theory of approximation. New-York, 1930.

Натансон И. П. : Конструктивная теория функции. Москва, 1950.

Николский С. М. : Математика в СССР за тридцать лет. Москва, 1948. 288—318 l.

MAGASABBFOKÚ ALGEBRAI EGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSÁRÓL

TURÁN PÁL lev. tag

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen

Magasabbfokú algebrai egyenletek megoldásának szükségességére a geometria, a csillagászat, a statisztika, az elméleti fizika és gyakorlati technika számos kérdése vezet. Az elsőre vonatkozólag elég a másodrendű felületek főtengelei irányának meghatározására utalnom. A csillagászati alkalmazásokra már az a tény is utal, hogy az olyan n -edfokú algebrai egyenleteket, melyek egy számokból álló n -edrendű determinánsból úgy keletkeznek, hogy az átlós elemek mindegyikéből x -et levonunk, szekuláris egyenleteknek nevezzük. A statisztikára vonatkozólag csak *Gumbel* német statisztikus vizsgálataira utalok, a népesedés statisztikájára vonatkozólag. Jól ismert a mechanikából, hogy egy véges sok tömegpontból álló rendszert egyensúlyi helyzetéből kissé kimozdítva, a mozgás meghatározására egy magasabbfokú algebrai egyenlet megoldása szükséges, ahol a komplex gyökök is lényeges szerepet játszanak. A technikai fizikából vett két igen érdekes példát köszönhetek *Egerváry* professzor közlésének. Az első egy tengelyen forgó n darab kerékre vonatkozik. Az u . n. kritikus szögsebességek meghatározása egy $2n$ -edfokú algebrai egyenletből történik. A későbbiek szempontjából nem érdektelen már most megjegyeznünk, hogy itt gyakorlatilag legfontosabb a *legkisebb* kritikus szögsebesség értéke, ami a megfelelő algebrai egyenlet *legkisebb* gyökének meghatározását kívánja. A másik példa n számú induktíve kapcsolt rezgőkörre vonatkozik, ami sok technikai problémában jön elő; a jelenség leírása itt is $2n$ -edfokú algebrai egyenletre vezet, ahol természetesen éppen a komplex gyökök meghatározása a fontos. Hogy e kérdés valóban foglalkoztatja a fizikusokat, azt pl. *Schäpfke* német fizikus értekezése is mutatja, mely 1948-ban jelent meg a *Mathematische Nachrichten* c. berlini akadémiai folyóiratban; ebben a két rezgőkör esetét részletesen tárgyalja. A spektroszkópiából jól ismert, hogy egy vonalas színekép mágneses térben egyszerű vonalakra esik szét, és így a multiplétt termék szétbomlásának vizsgálata magasabbfokú algebrai egyenlethez vezet. Mindezen tények és a matematika sok belső teoretikus kérdése érthetővé teszik azt a sok erőfeszítést, mely a babilóniaiak óta történt az algebrai egyenletek megoldására. Nem lehet itt céloom, hogy e fejlődést még csak nagy vonalaiban is vázoljam; már eleve csak azokra a megoldási módokra szűkítem mondanivalóimat, melyek numerikus kiszámításra alkalmas közelítő módszerekkel foglalkoznak. Ezek nagyjából három csoportra oszthatók. Az elsőbe a *Newton*nal kezdődő iterációs módszerek tartoz-

nak. Maga a Newton-féle eljárás abban áll, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet megoldására kiindulunk az $y = f(x)$ görbe egy $(x_1, f(x_1))$ pontjából, és itt meghúzzuk az érintőt. Ha az érintő $x = x_2$ -ben metszi az abszcissa-tengelyt, akkor azt az eljárást az $(x_2, f(x_2))$ pontra alkalmazzuk és így tovább. Ennek az eljárásnak — és az összes többi iterációs eljárásnak — több hátránya van. Az első az, hogy az eljárás általában nem konvergens a kezdőérték tetszőleges megválasztása esetén. Ez áll elő pl. minden olyan valós együtthatós polinomnál valós kezdőérték mellett, melynek nincs valós gyöke, amit persze a megoldandó egyenletből nem lehet előre tudni. Itt tehát nem egyes polinomok extravaganciáiról van szó. És, ha az eljárás valós gyök esetén esetleg konvergál is, általában nem lehet megmondani egy bizonyos k -számú lépés után, hogy a gyök a k -adik lépés eredményétől legfeljebb milyen távol van. Reménytelen feladat ezt az eljárást úgy módosítani, hogy adott ε precíziót előírva ettől függően fix számú lépésben vagy egy valós gyöknek ε -nyi környezetébe jussunk, vagy állíthassuk, hogy nincsen valós gyök. Komplex gyökök esetén mindeme nehézségek még lényegesen fokozódnak. A második típusúak egyike, mely már komplex gyökök meghatározására is alkalmas, *Melentyev* szovjet matematikustól való — én *Hajós* professzor közléséből ismerem. Ez abban áll, hogy a megoldandó $f(z) = 0$ egyenletbe z helyett $(x_0 + iy)$ -t írunk valamilyen fix x_0 -val és az euklidesi algoritmussal megkeressük a

$$Rf(x_0 + iy)$$

$$If(x_0 + iy)$$

legnagyobb közös osztóját. Ha van ilyen, és az $(y - y_0)^k$ alakú, akkor $(x_0 + iy_0)$ $f(z)$ -nek épp k -szoros gyöke. Ha a legnagyobb közös osztó nem ilyen egyszerű alakú, akkor tehát egy újabb egyenlet valós gyökeinek meghatározására van szükség. Ha a legnagyobb közös osztó nulladfokú, akkor más x_0 értékekkel ismételendő az eljárás, és interpolációval olyan x_0 -t kell keresni, melynél az euklidesi algoritmus utolsó maradéka 0. A fellépő operációk egyszerűsége mellett azonban egy adott ε precízióhoz tartozó operációk száma itt sem korlátozható, és így a közelítőérték approximációjának foka általában nem ítéhető meg. A módszerek harmadik csoportja, melyet itt kissé részletesebben óhajtok diszkutálni, *Bernoulli* *Dánieltől* indult ki. Az ő gondolatát a XIX. század elején egymástól függetlenül és kb. egyidőben lényegesen továbbfejlesztették *Dandelin*, *Lobacevszkij* és *Graeffe*; az irodalomban a módszer *Graeffe*—*Bernoulli* módszer néven ismert. Ha a megoldandó egyenlet $f_0(z) = 0$, és gyökei z_1, z_2, \dots, z_n , akkor e módszer első lépése abban áll, hogy képezi rekurzív az

$$f_{l+1}(z) = (-1)^n f_l(\sqrt{z})f_l(-\sqrt{z})$$

kifejezéseket, az ú. n. Graeffe-transzformáltakat $l = 0, 1, \dots, (v-1)$ -re. Könnyen belátható, hogy \sqrt{z} fellépése csak látszólagos, minden Graeffe-transzformált n -edfokú polinom, melynek együtthatóit tehát ismerjük és a v -edik transzformált gyökei éppen

$$z_1^{2^v}, z_2^{2^v}, \dots, z_n^{2^v}.$$

Ekkor, ha

$$f_\nu(z) = a_{0,\nu} + a_{1,\nu}z + \dots + a_{n,\nu}z^n \quad (1)$$

és pl.

$$|z_1| < |z_2| < \dots < |z_n|, \quad (2)$$

akkor

$$|z_j| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j-1,\nu}}{a_{j,\nu}} \right|^{2^{-\nu}}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Ily módon a gyökök *abszolút értékei* elvben meg volnának határozva; magukat a gyököket meghatározhatjuk, ha olyan h helyet találunk, hogy

$$|z_1 - h| < |z_2 - h| < \dots < |z_n - h| \quad (4)$$

legyen; ekkor a $\varphi(\xi) = f_\nu(\xi + h) = 0$ gyökei $\xi_\nu = z_\nu - h$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$), (2) teljesül, azaz $\varphi(\xi)$ ν -edik Graeffe-transzformáltját

$$\varphi_\nu(\xi) = \sum_{j=0}^n b_{j,\nu} \xi^j$$

-vel jelölve

$$|z_j - h| = |\xi_j| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{j-1,\nu}}{b_{j,\nu}} \right|^{2^{-\nu}} \quad (5)$$

Tehát a z_j gyökök csak a (3) és (5) alatti megfelelő körök metszéspontjai lehetnek; hogy ezek közül melyik felel meg, az *elvileg* helyettesítéssel nyerhető.

A fenti eljárással kapcsolatban, mely eléggé átment a gyakorlatba, rögtön több kérdés adódik. Először is nincs módszerünk annak eldöntésére, hogy (2) teljesül-e, tehát a módszer hogyan alkalmazható. E kifogás érdekes módon explicite csak 1939-ben merült fel *San-Juan* egy dolgozatában; *Runge* enciklopédia-cikkében még egy szó sincs a módszer érvényességi korlátozásáról és még *Fricke* 1924-ben megjelent algebraja a *Graeffe-Bernoulli*-módszert ismertetve óvatosan bár, de úgy ír, a (2) feltevésről, mintha azt el lehetne hagyni. Pedig könnyű olyan polinomot találni, melyre a módszer kimondottan rossz eredményre vezet. Legyen $f_0(z) = z^3 - 1$. Ennek minden Graeffe-transzformáltja önmaga, azaz a (3) alatti límeszek vagy értelmetlenek, vagy értékük 0 a helyes 1 helyett. Másrészt fenti h meghatározására sincs módszerünk. Továbbá a (3) és (5) alatti formulák gyakorlati számításra már csak azért sem alkalmasak, mert bennük límesz szerepel. Gyakorlati számításra csak úgy lehetnének alkalmasak, ha adott ε precízióhoz meg lehetne adni ε -tól és akár az egyenlettől függő olyan ν -t, hogy ν Graeffe-lépéssel már egy gyök ε -nyi pontossággal meghatározható.

Az előbbi példa szerint még az sem várható az általános esetben, hogy ilyen módon a gyökök *abszolút értékei* approximálhatók legyenek a mondott értelemben. Az előző példa kézenfekvő módosításával könnyű tetszőlegesen nagy ν -höz oly egyenletet konstruálni, melyre (2) teljesül, és mégis ν Graeffe-lépés után a kapott

$\left| \frac{a_{j-1,\nu}}{a_{j,\nu}} \right|^{2^{-\nu}}$ számok $|z_j|$ -től $\frac{1}{10}$ -nél messzebb vannak; vagyis még (2) teljesülése esetén sem elégíti ki a módszer a gyakorlati számolásra vonatkozó elvi követelésünket.

A Graeffe-Bernoulli-módszer olyan módosítása, mellyel az összes gyökök a fenti értelemben approximálhatók, mindmáig nem ismert. Ha ellenben a gyökök *abszolút értékeinek* approximációjára szorítkozunk, akkor e feladatot *San-Juan* első eredményei után *Ostrovski* oldotta meg tőle függetlenül, 1940-ben, egy 160 oldalas dolgozatban. Ez persze egyben megoldja a valós gyökök approximációjának hasonló alakban felvetett kérdését is. *Ostrovski* eljárása a Newton-majoráns fogalmán alapszik. Egy $f(z) = c_0 + \dots + c_n z^n$ polinom Newton-féle majoránsán azon pozitív együtthatós

$$M(f) = \sum_{j=0}^n T_j z^j$$

polinomot érti, mely pl. grafikusán a következőkép szerkeszthető meg: Képezzük a

$$P_j \equiv (j, \log |c_j|) \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (6)$$

pontokat és ezek legkisebb konvex majoránsát. Ez úgy történik, hogy $(0, \log |c_0|)$ -ből kiindulva meghúzzuk a pozitív abszcissza-tengellyel legkisebb, esetleg negatív szöveget alkotó olyan félsugarat, hogy az összes P_j -k még ez alatt legyenek, de már legalább egy P_{j_1} ezen rajta legyen. Ha a rajtalevő P_j -k közül a legkisebb abszcisszájú ($j_1, \log |c_{j_1}|$), akkor az ebből kiinduló félsugarak közül vegyünk megint olyat, hogy az összes j_1 -nél nagyobb indexű P_j -k ez alatt fekszenek, de legalább egy P_{j_2} rajta legyen s. i. t. Ez a processzus véges sok lépésben befejeződik, a kapott törtvonal felülről konvex, P_0 -ból indul ki, és P_n -ben végződik. Akkor ezen törtvonalnak a j abszcisszához tartozó ordinátája lesz $\log T_j$ (azaz $|c_0| = T_0, |c_n| = T_n$). Ezen T -k segítségével tudja *Ostrovski* az $f_0(z) = a_0 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = 0$ egyenlet z_1, z_2, \dots, z_n gyökeinek abszolút értékeit közelítőleg meghatározni. Ismertessük eredményét rövidség kedvéért csak a legnagyobb abszolút értékű $|z_n|$ esetében. $f_0(z)$ -nek első ν Graeffe-transzformáltját képezve legyen

$$M(f_\nu) = \sum_{j=0}^n T_{j,\nu} z^j$$

az $f_\nu(z)$ ν -edik Graeffe-transzformált Newton-majoránsa, ahol persze $T_{n,\nu} = 1$

Ekkor $|z_n|$ közelítő értéke egyszerűen $T_{n-1, \nu}^{2-\nu}$ lesz, éspedig úgy, hogy

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\nu} \leq \frac{|z_n|}{T_{n-1, \nu}^{2-\nu}} \leq 2^{2-\nu} \quad (7)$$

A többi gyökökre hasonló egyenlőtlenségeket adott meg. Ezek jelentősége nemcsak abban áll, hogy az approximáció foka ebben az elméletben először volt becsülhető, hanem, hogy az alsó és felső becslések függetlenül $f_0(z)$ együtthatóitól, csak a fokától és ν -tól függenek. Ha pl. egy hetedfokú egyenletnél $|z_7|$ -et 1%-nyi pontossáig akarjuk megközelíteni — ami praktikus célokra megfelel —, ez elérhető, ha 8 Graeffe-lépést teszünk, függetlenül attól, hogy milyenek az egyenlet együtthatói; a szükséges elemi operációk száma persze szintén *előre megadható*.

Az eljárás keresztülvitelénél hibaforrás a rajzolás is. Ennek kiküszöbölésére *Ostrowski* tisztán aritmetikus módszert is megad. Nyilván elég az előbbi poligon csúcsait ismerni; ezek abszcisszáit nevezi főindexeknek. Egy $(j, \log |a_j|)$ pont $0 < j < n$ mellett akkor és csak akkor lesz csúcsa a poligonnak, azaz j akkor és csak akkor lesz főindex, ha

$$\min_{0 < \mu \leq n-j} \left| \frac{a_j}{a_{j+\mu}} \right|^{\frac{1}{\mu}} > \max_{0 < \mu \leq j} \left| \frac{a_{j-\mu}}{a_j} \right|^{\frac{1}{\mu}}$$

Ez az eljárás legkellemetlenebb része; a gyökvonások a közönséges típusú számológépekkel direkt nem végezhetőek el, és az eljárás legalább n és legfeljebb n^2 számú gyökvonást tesz szükségessé. Tehát annak ellenére, hogy az eljárás elméletileg már semmi kívánnivalót nem hagy maga után, szükség van olyan eljárásra, mely a kívánt elméleti előnyök mellett kevesebb gyökvonást igényel, és így gyakorlatilag jobban használható.

Egészen másirányú vizsgálatok kapcsán, *Ostrowski* eredményeinek ismerete előtt, vettem észre, hogy ilyen eljárás valóban található, sőt ilyen eljárások egész skálája adható meg. Bizonyítások nélkül csak egy ilyen szabály megadására fogok szorítkozni, mely azonban karakterisztikus, és ennek numerikus keresztülvételére vonatkozó megjegyzésekre, összehasonlítva azt *Ostrowski* módszerével. Ha ismét $f_0(z) = 0$ n -edfokú egyenlet a megoldandó, melyben az n -edfokú tag együtthatója 1, és melynek z_1, \dots, z_n gyökeire $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$, akkor $|z_n|$ approximációjára készítsük el most is először $f_0(z)$ első ν Graeffe-transzformáltját. Ha az utolsó

$$\tilde{f}_\nu(z) = a_{0\nu} z^\nu + a_{1\nu} z^{\nu-1} + \dots + a_{n-1\nu} z^{n-1} + a_{n\nu} z^n, \quad a_{n\nu} = 1,$$

akkor képezzük az S_1, S_2, \dots, S_{2n} mennyiségeket az

$$\begin{aligned}
 S_1 + a_{n-1, \nu} &= 0 \\
 S_2 + a_{n-1, \nu} S_1 + 2a_{n-2, \nu} &= 0 \\
 &\dots \\
 S_n + a_{n-1, \nu} S_{n-1} + \dots + na_{0, \nu} &= 0 \\
 &\dots \\
 S_{2n} + a_{n-1, \nu} S_{2n-1} + \dots + a_{0, \nu} S_n &= 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

rekurzív formulák alapján. Ekkor $|z_n|$ közelítő értéke $\left(\max_{1 \leq j \leq 2n} |S_j| \frac{1}{j}\right)^{2^{-\nu}}$ lesz ;

pontosabban szólva

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2^{-\nu}} \leq \frac{|z_n|}{\left(\max_{1 \leq j \leq 2n} |S_j| \frac{1}{j}\right)^{2^{-\nu}}} \leq 2^{-\nu} \tag{10}$$

Ami a hibakorlátokat illeti, a határok (10)-ben pontosan megegyeznek az Ostrovski-féle határokkal ; nagyon valószínű azonban, hogy (10)-ben a felső korlát 1-gyel pótolható. Ezt abban a speciális esetben, mikor $f_0(z)$ valós együtt-hatós, és ennek maximális abszolút értékű gyökei között van valós is, valóban be is lehetett bizonyítani a nácik által 22 éves korában meggyilkolt, rendkívül tehetséges barátom, *Schweitzer Miklós* egy gondolata segítségével, melyet velem 1942-ben közölt levélben. Az a skálája az ilyen szabályoknak, melyekre céloztam,

abban áll, hogy a $|z_n|$ -et approkszimáló kifejezést $\left(\max_{1 \leq j \leq cn} |S_j| \frac{1}{j}\right)^{2^{-\nu}}$ alakban

vesszük fel, ahol c egy numerikus állandó, mely ≥ 1 ; a felső hibakorlát (10)-ben növekvő c -vel valószínűleg csökkenthető.

Térjünk át a számítási eljárás elemzésére és Ostrovski módszerével való praktikussági összehasonlításra. $G(x) = \sum_{\nu=0}^n d_{\nu} x^{\nu}$ polinom Graeffe-transzformáltjának képzése a $G(x) G(-x)$ szorzás elvégzéséből áll, ami $\binom{n+2}{2}$ számú

szorzást jelent számológépen. Ez a szám rögtön csökkenthető azon észrevétel által, hogy e szorzat a páros és páratlan kitevőjű hatványok szétválasztásával

$$\left(\sum_{\substack{\nu \\ 2\nu \leq n}} d_{2\nu} x^{2\nu} + \sum_{\substack{\nu \\ 2\nu+1 \leq n}} d_{2\nu+1} x^{2\nu+1}\right) \left(\sum_{\substack{\nu \\ 2\nu \leq n}} d_{2\nu} x^{2\nu} - \sum_{\substack{\nu \\ 2\nu+1 \leq n}} d_{2\nu+1} x^{2\nu+1}\right)$$

alakba írható, azaz

$$\left(\sum_{2\nu \leq n} d_{2\nu} x^{2\nu}\right)^2 - \left(\sum_{2\nu+1 \leq n} d_{2\nu+1} x^{2\nu+1}\right)^2$$

ami csak $\left(2 + \left[\frac{n}{2}\right]\right) + \left(2 + \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$ számú szorzást jelent, tehát kb. felét az

előbbinek. Bizonyos körülmények között lényegesen megrövidíti a Graeffe-transzformált meghatározását Pál Sándornak, az Alkalmazott Matematikai Intézet tagjának egy szellemes megjegyzése, amellyel ez a meghatározás számok szorzására vezethető vissza azon egyetlen feltevés mellett, hogy az együtthatók véges tizedestörtek. Ez persze rögtön maga után vonja azt, hogy alkalmas számmal való szorzással minden együttható egész lesz. A polinomot mindjárt ebben az alakban felvéve, a Graeffe-transzformált képzése nyilván négy olyan szorzás elvégzését jelenti, melyben pozitív együtthatós polinomokat kell összeszorozni; elég tehát pozitív együtthatós polinomok szorzására szorítkozni.

Ha ezek

$$\sum_{\nu=0}^{m_1} r_{\nu}' x^{\nu}, \quad \sum_{\nu=0}^{m_2} r_{\nu}'' x^{\nu}, \quad 0 \leq r_{\nu}' \leq K, \quad 0 \leq r_{\nu}'' \leq K, \tag{11}$$

akkor először is határozzuk meg azon legkisebb egész k -t, melyre

$$10^k > (m_1 + 1)(m_2 + 1)K^2. \tag{12}$$

Pál gondolata abban áll, hogy a két összeszorozandó (11) alatti polinomba x helyett 10^k -t tesz, és egyszerűen a kapott számokat szorozza össze számológépen. A (12) feltétel teljesülése biztosítja, hogy a kapott szorzatban a legkisebb helyiértékű k jegy alkotta szám lesz a szorzatpolinom konstans tagja, a következő k jegy alkotta szám a szorzatpolinomban x együtthatója s i. t.

A módszer következő lépése az S_{ν} -k számítása a (9) alatti rekurzív képletekből. Mivel itt csak összeadásokról és szorzásokról van szó, számológéppel dolgozva e lépés nem okoz elvi nehézséget. Itt legfeljebb arról lehet szó, hogy vajjon nem elég-e már az első n -darab S értékének ismerete ahhoz, hogy egy (10)-hez hasonló szabály legyen felállítható, ami a számítás lényeges rövidítését jelentené. Ilyen szabályt valóban találtam; azonban $|z_n|$ közelítő-értéke

gyanánt $\left(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| \frac{1}{j}\right)^{2^{-\nu}}$ -t véve a (10) alatti helyett, jelenleg csak a $\left\{\frac{1}{\log 2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right\}^{2^{-\nu}}$ mennyiséget tudom biztosítani, mint felső relatív hibakorlátot. Nagyon valószínű, hogy ez is helyettesíthető $2^{2^{-\nu}}$ -vel, sőt esetleg $c^{2^{-\nu}}$ -vel, ahol c egy n -től független numerikus állandó, mely < 2 .

A befejező lépés az egyetlen, ahol gyökvonás kell. Ezek száma a (10) alatti szabály alkalmazásával $2n$, ami az előbb mondottak szerint n -re is csök-

kenthető, míg *Ostrovski* módszerével e szám a legkedvezőbb esetben $n + 1$, és a legkedvezőtlenebb esetben $n^2 + 1$, ami tehát lényegesen nagyobb lehet. Ez annál is inkább esik a latba, mert mind a Graeffe-transzformáltak együtthatói, mind az S_ν számok igen nagyok, tehát a logaritlussal való gyökkvonás komoly hibaforrás, a számológép pedig nem tud direkte közelítő k -adik gyököt vonni egy a számból, csak az

$$x_{e+1} = \frac{1}{k} \left\{ (k-1) x_e + \frac{a}{x_e^{k-1}} \right\}$$

iteráció segítségével. Egyáltalán az a tény, hogy olyan nagy számok lépnek fel a Graeffe-transzformáltak képzésénél, mind *Ostrovski* módszerét, mind a (10) alatti szabály alkalmazását csak igen nagy kapacitású számológépeknél teszi praktikussá. Az együttható-kerekítésnek természetes módszere, mint *Ostrovski* kimutatta, a Graeffe-transzformáltak képzésénél igen nagy hibákra vezet. *Ostrovski* példája

$$\Phi(z) = (z-1)^4, \quad \Lambda(z) = \Phi(z) - 4 \cdot 9 \cdot 10^{-5} z^2.$$

Ekkor $\Phi(z)$, ill. $\Lambda(z)$ 5-ik Graeffe-transzformáltjai

$$\Phi_5(z) = (z-1)^4, \quad \Lambda_5(z) = z^4 - 12,8z^3 + 24,1z^2 - 12,8z + 1,$$

melyek eltérése szemlátomást lényeges. Tehát a Graeffe-transzformáltak pontosan számolandók, legfeljebb az utolsót kivéve. Más a helyzet az S_j -k számításánál. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy valós együtthatós $f_\nu(z)$ -ről van szó. (9) első egyenletéből $a_{n-1,\nu}$ megfelelő kerekítésével S_1 -re alsó és felső becslés nyerhető. Ezek segítségével (9) második egyenletéből S_2 -re nyerünk alsó és felső becslést; pl. az alsó becslést úgy, hogy S_1 helyébe az előbb nyert $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{alsó} \\ \text{felső} \end{smallmatrix} \right\}$ becslést írjuk, aszerint, hogy $a_{n-1,\nu} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{negatív} \\ \text{pozitív} \end{smallmatrix} \right\}$. Ezt folytatva, minden S_j -re egyszerűen kezelhető alsó és felső közelítő értékeket nyerhetünk hibakorlátokkal, azaz a

$$\max_{1 \leq j \leq 2n} |S_j|^{\bar{J}}$$

-re alsó és felső becslés nyerhető. Ez persze az $|z_n|$ -re (10) által adott korlátokat valamivel rontja, de még mindig *explicité megadható* korlátokat ad számára.

A módszernek egy további előnye is lehet *Ostrovskiéval* szemben. Mint tudjuk, a szpektroszkópiában fellépő csupa valós gyökű szekuláris egyenletek olyanok, hogy az együtthatók nem számok, hanem bizonyos paraméterek függvényei. Tegyük fel, pl. hogy az együtthatók egy t paraméter racionális függvényei. Ekkor, *Ostrovski* módszerét követve, a paraméter különböző értékei mellett a Newton-poligonok egészen mások lehetnek, úgy, hogy a gyököknek t -től való függése egyáltalán nem áttekinthető. A (10) alatti módszert alkalmazva mind a Graeffe-transzformáltak együtthatói, mind az S_ν -k, t -nek *explicité meg-*

adott racionális függvényeiként jelentkeznek. Vagyis az $|S_n|^{\frac{1}{n}}$ mennyiségek, mint t -nek egyszerű alakú függvényei állanak előttünk, és ezek felső burkolója adja a maximális abszolút értékű gyök függését t -től *uralható hibával*.

Távol áll tőlem, hogy fenti eredmények gyakorlati alkalmazhatóságát túlbecsüljem, bár kétségtelen, hogy bizonyos esetekben jól használhatók lesznek és az alapelv esetleg egy megoldógép konstrukciójának alapjául szolgálhat. Arról sem akarok itt beszélni, hogy az a módszer, mellyel ezeket a megállapításokat nyertem, a matematika milyen más részeiben ad új és érdekes eredményeket. Csak arról akarnék még néhány szót szólni, hogy milyen célkitűzések vezettek ehhez a módszerhez. A célkitűzések lényegileg a prímszámok eloszlására vonatkoztak, ezt pedig az, aki a tiszta és az alkalmazott matematika éles elválasztását tartani akarná, feltétlenül a tiszta matematika körébe sorolná. Még jobban körülhatároltan a Riemann-féle zeta-függvényre vonatkoztak, mely már eddig is az analízis oly sok fejezetének adott erős impulzusokat; gondoljunk csak *Hadamard*, *Lindelöf* és *H. Bohr* munkáira. Az előbb vázolt eredmények mégis azt mutatják, hogy az e célkitűzések által létrehozott módszerek oly kérdéseknél is tudnak új szempontokat és eredményeket produkálni, melyeket a technikai gyakorlat vet fel. Ezen eredmények tehát újabb szerény alátámasztást adnak ahhoz az állításhoz, hogy a tiszta és alkalmazott tudomány közti határ egyáltalán nem éles. És itt nem is arra gondolok, amit legtöbbször érvül szoktak felhozni, hogy a tiszta matematika egyes alkotásait, mint pl. a csoportelméletet, csak jóval felfedeztetésük után alkalmazták direkte a fizikában. Senki sem gondol arra, hogy egy hidrogénatom energianívói közül a prímszám indexűek valamilyen fizikai sajátsággal vannak kitüntetve. De arra igenis lehet gondolni — mint ahogy az jelen esetben is történt —, hogy *módszerek*, melyeket pl. prímszámelméleti kérdések megoldására csináltak, alkalmazhatók lesznek gyakorlati kérdések, vagy olyan elméleti kérdések megoldásában, melyek a gyakorlathoz közelebb állanak. Van erre a magaménál sokkal jobb példa is. *Vinogradov* szintén prímszámproblémák, elsősorban a nevezetes Goldbach-sejtés megoldására alkotta meg hatalmas erejű trigonometrikus-szita módszerét, és *Linnik* alkalmazni tudta a *módszert* a valószínűségszámításban, a matematikának abban a fejezetében, melyben minden tétel predesztinálva van gyakorlati alkalmazásra. De e gondolatokkal tulajdonképp nyitott kapukat döngetek. Bővebb fejtegetésük teljesen felesleges; a tények önmagukért beszélnek.

*Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.*

SAJÁTÉRTÉK-FELADATOK PERTURBÁCIÓSZÁMÍTÁSA

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA lev. tag

Előadta az 1950. december 1-én tartott osztályülésen.

A perturbációszámítás azzal a kérdéssel foglalkozik, miképpen változnak meg az $A_0\varphi = \lambda\varphi$ sajátértékprobléma megoldásai: a λ sajátértékek és a φ sajátfüggvények vagy sajátvektorok, ha az A_0 operátort perturbáljuk, azaz egy tőle kevésbé különböző $A(\varepsilon)$ operátorral helyettesítjük; ε itt egy valós paraméter, $A(0) = A_0$. Természetesen mind az eredeti, mind a perturbált operátorról feltesszük, hogy rájuk nézve a sajátértékprobléma megoldható, azaz hogy a Hilbert-tér Hermite-féle, pontosabban: *önadjungált* operátorai. A Rayleigh által az akusztikában, Schrödinger által pedig a kvantummechanikában alkalmazott perturbációszámítás abból az alapfeltevésekből indul ki, hogy ha a perturbált operátor az ε paraméter kis értékeire az

$$A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$$

hatványsorral állítható elő, azaz ha a perturbáció *reguláris*, akkor az $A(\varepsilon)$ sajátértékei és sajátvektorai is az ε hatványsoraival állíthatók elő, azaz szintén regulárisak. Pontosabban, az alapfeltevés az, hogy ha λ_0 az A_0 operátor elszigetelt m -szeres sajátértéke, akkor kis ε -ra az $A(\varepsilon)$ -nak a λ_0 környezetében a megfelelő multiplicitásokkal számítva ugyancsak m darab sajátértéke van, és ezek, valamint a hozzájuk tartozó m ortogonális normált sajátvektor az ε hatványsoraival állíthatók elő az ε paraméter kis értékeire. Ha ez az alapfeltevés teljesül, akkor e hatványsorok együtthatóit (melyek számok, ill. vektorok), egy rekurzív egyenletrendszer segítségével számíthatjuk ki, amelyet úgy nyerünk, hogy az

$$A(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon), \quad (\varphi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)) = 1$$

egyenletekbe behelyettesítjük az $A(\varepsilon)$ adott és a $\lambda(\varepsilon)$ és $\varphi(\varepsilon)$ keresett hatványsorait és az ε egyenlő hatványainak együtthatóit összehasonlítjuk.

Nem szándékszem ezeket a számításokat most elismételni, hiszen minden kvantummechanikával foglalkozó tankönyvben megtalálhatók. Ezek a számítások azonban formálisak, azaz nem vetik fel azt a kérdést, hogy az így együtthatóról együtthatóra kiszámított hatványsorok egyáltalán konvergensek-e, vagy hogy a sorok első-, másod- stb. rendű tagjainál megállva, a kapott közelítések milyen pontosságúak. Ez az ilyen számítások megbízhatóságát kérdésessé teszi. Szükséges tehát a perturbációszámítás pontosabb matematikai

analizise. Szükséges elsősorban annak a fentemlített alapfeltevésnek az igazolása, hogy az operátor reguláris perturbációja a sajátértékek és sajátvektorok reguláris felhasadását eredményezi. De ezenfelül szükséges az is, hogy az illető hatványsorok konvergenciájának gyorsaságára is felvilágosítást nyerjünk, explicit hibabecslésekkel az első, második stb. közelítésre vonatkozólag.

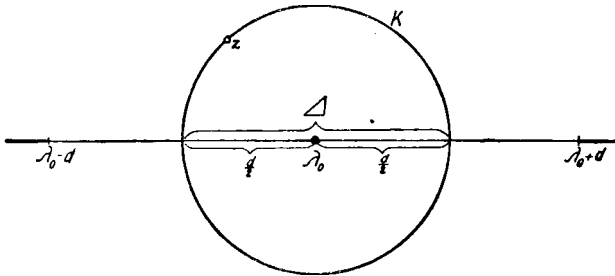
Ilyen irányú matematikai vizsgálatokat *F. Rellich* kezdeményezett, s 1936 és 1942 közt megjelent dolgozataiban¹ az említett problémákra először adott kielégítő választ. Előadó sokkal egyszerűbb módszerrel építette fel később az elméletet², módszere pontosabb hibabecsléseket szolgáltat és a Rellichétől eltérően, alkalmazható a spektrum³ tetszőleges elszigetelt darabja perturbációjának a vizsgálatára. A következőkben vázolni fogom e módszer lényegét; előadásom rövidre szabott keretei miatt szükségképpen főleg a kvalitatív vonatkozásokra szorítok és a hibabecsléseknek csupán a lehetőségére mutatok rá.

Az $A(\varepsilon)$ perturbált operátor hatványsorfejtésében szereplő A_k együttműködők legyenek a Hilbert-tér korlátos, vagy nem korlátos önadjungált operátorai, melyek értelmezve vannak a Hilbert-tér minden olyan f elemére, amelyre az eredeti A_0 operátor értelmezve van. Tegyük fel továbbá, hogy léteznek olyan nem negatív a, b, p állandók, hogy minden ilyen f -re:

$$\|A_k f\| \leq p^{k-1} (a \|f\| + b \|A_0 f\|) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Ezek a feltételek nem önkényesek; meg lehet ugyanis mutatni, hogy minden olyan esetben, amikor a perturbált operátor értelmezési tartománya az ε -tól független (tehát ugyanaz, mint az A_0 operátoré), ilyen a, b, p állandók léteznek. Jegyezzük meg, hogy abban az egyszerű esetben, amikor $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1$ (azaz, amikor $A_2 = A_3 = \dots = 0$), a p választható 0-nak.

Tegyük fel, hogy a λ_0 valós szám az A_0 -nak egy elszigetelt sajátértéke, azaz, hogy ennek valamely $(\lambda_0 - d, \lambda_0 + d)$ környezetébe az A_0 spektrumának más pontja nem esik. Ha K jelenti a komplex síkban a λ_0 körül $\frac{d}{2}$ sugárral írt



kört, akkor a K kör minden z pontja az A_0 spektrumától legalább $\frac{d}{2}$ távolságra van; következésképpen létezik az

$$R_{z0} = \frac{1}{A_0 - z}$$

operátor és korlátos: $\|R_{z_0}\| \leq \frac{2}{d}$. Felhasználva az

$$A(\varepsilon) - z = (A_0 - z) + (A(\varepsilon) - A_0) = [1 + (A(\varepsilon) - A_0)R_{z_0}](A_0 - z)$$

azonosságot és hivatkozva az (1) alatt feltett egyenlőtlenségekre, belátható, hogy az ε megadhatóan kis értékeire létezik

$$R_z(\varepsilon) = \frac{1}{A(\varepsilon) - z}$$

is, sőt hogy az ε szerint hatványsorba fejthető:

$$R_z(\varepsilon) = R_{z_0} + \varepsilon R_{z_1} + \varepsilon^2 R_{z_2} + \dots; \quad (2)$$

az R_{z_k} együtthatók folytonosan függnek a K körön változó z ponttól, normáik azonban a z -től függetlenül megbecsülhetők a megfelelően szerkesztett, numerikus együtthatókkal bíró hatványsor együtthatóival.

Ha $A(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda(\varepsilon)$ az $A(\varepsilon)$ spektrálfelbontása, akkor

$$R_z(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} dE_\lambda(\varepsilon),$$

és így a

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint_K R_z(\varepsilon) dz \quad (3)$$

konturintegrál egyenlő a K kör által a λ -tengelyből kivágott $\Delta = \left(\lambda_0 - \frac{d}{2}, \lambda_0 + \frac{d}{2}\right)$

intervallumhoz tartozó $P(\varepsilon) = E_{\lambda_0 + \frac{d}{2}}(\varepsilon) - E_{\lambda_0 - \frac{d}{2}}(\varepsilon)$ spektrálprojektorral.

Behelyettesítve a (3) alatti integrálba a (2) alatti hatványsorfejtést és tagonként integrálva (ami szabad), adódik e spektrálprojektor sorfejtése:

$$P(\varepsilon) = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots,$$

ismét egyszerű becslésekkel a P_k együtthatók (amelyek a P_0 kivételével általában nem projektorok) normáira.

A $P_0 = P(0)$, ill. a $P(\varepsilon)$ spektrálprojektorhoz tartozó spektrálintért jelöljük M_0 -al, ill. $M(\varepsilon)$ -nal. A_0 spektrumának Δ -ban egyetlen pontja a λ_0 lévén, az M_0 alteret az A_0 -nak a λ_0 sajátértékéhez tartozó sajátvektorai alkotják.

Mármost a P_k együtthatók normáira kapott becslések alapján meg tudjuk adni az $\varepsilon = 0$ egy olyan kis környezetét, amelyben levő ε -okra

$$\|P(\varepsilon) - P_0\| < 1,$$

s amelyekre ennél fogva képezhető az

$$U(\varepsilon) = P(\varepsilon) [1 + P_0(P(\varepsilon) - P_0)P_0]^{-\frac{1}{2}} P_0$$

operátor. Kis ε -okra $U(\varepsilon)$ is az ε hatványsorába fejthető, s vele együtt az $U^*(\varepsilon)$ adjungált operátor is. Kimutatható, hogy $U(\varepsilon)$ az adjungáltjával a következő kapcsolatban van :-

$$U^*(\varepsilon) U(\varepsilon) = P_0, \quad U(\varepsilon) U^*(\varepsilon) = P(\varepsilon),$$

amiből az következik, hogy $U(\varepsilon)$ az M_0 alteret *izometrikusan* az $M(\varepsilon)$ alterre képezi le, $U^*(\varepsilon)$ pedig ennek a leképezésnek az inverzét szolgáltatja. Ennél fogva ezekre a kis ε -okra az $M(\varepsilon)$ alterné dimenziója egyenlő kell, hogy legyen az M_0 alterné dimenziójával, azaz a λ_0 -nak, mint az A_0 sajátértékének a multiplicitásával.

Ha tehát ez a multiplicitás véges, mondjuk m -mel egyenlő, akkor az $M(\varepsilon)$ spektráalter is m -dimenziós, és ebből következik, hogy a szakaszba nem eshet az $A(\varepsilon)$ folytonos spektrumának pontja, hanem csak a pontspektrumának, mégpedig véges sok sajátérték, amelyek multiplicitásainak összege m .

Ha speciálisan λ_0 az A_0 -nak *egyszeres* sajátértéke, akkor így \triangle -ban az $A(\varepsilon)$ -nak is csak egy egyszeres sajátértéke van: $\lambda(\varepsilon)$. Ha φ_0 az A_0 -nak a λ_0 -hoz tartozó normált sajátvektora, akkor $\varphi(\varepsilon) = U(\varepsilon)\varphi_0$ az $A(\varepsilon)$ -nak a $\lambda(\varepsilon)$ -hoz tartozó, ugyancsak normált sajátvektora. $U(\varepsilon)$ -nál együtt ez a $\varphi(\varepsilon)$ vektor is az ε hatványsorával állítható elő, úgyszintén a $\lambda(\varepsilon)$ sajátérték is, hiszen

$$\lambda(\varepsilon) = (A(\varepsilon)\varphi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon));$$

a $\varphi(\varepsilon)$ és a $\lambda(\varepsilon)$ sorának együtthatói explicite megbecsülhetők.

Ezzel *egyszeres* sajátérték esetében a programmunkat végrehajtottuk.

Többszörös sajátérték esetében a bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Feltesszük, hogy az m -nél kisebb multiplicitású elszigetelt sajátértékek a hozzájuk tartozó sajátvektorokkal együtt regulárisan hasadnak fel, s bebizonyítjuk, hogy ez akkor a λ_0 m -szeres sajátértékre is áll.

Tekintsük evégből a

$$C(\varepsilon) = U^*(\varepsilon) A(\varepsilon) U(\varepsilon)$$

operátort. $U(\varepsilon)$ az M_0 alteret az $M(\varepsilon)$ alterbe viszi át, $A(\varepsilon)$ az $M(\varepsilon)$ alteret önmagába képezi le, $U^*(\varepsilon)$ pedig az $M(\varepsilon)$ -t visszaviszi M_0 -ba; ennél fogva $C(\varepsilon)$ az M_0 m -dimenziós alterné önmagába való, nyilván önadjungált leképezése. Az $A(\varepsilon)$ -nal és az $U(\varepsilon)$ -nal együtt $C(\varepsilon)$ is kis ε -ra hatványsorral állítható elő:

$$C(\varepsilon) = C_0 + \varepsilon C_1 + \dots;$$

az első együttható: $C_0 = U^*(0) A_0 U(0) = P_0 A_0 P_0 = \lambda_0 P_0$.

Lehetséges, hogy nemcsak a C_0 , hanem az összes többi C_k együttható is a P_0 -nak skaláris többszöröse, s velük együtt a $C(\varepsilon)$ is, azaz $C(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon) P_0$.

Ebben az esetben akárhogy választunk is M_0 -ban egy $\{\varphi_0^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, m$) teljes normált ortogonális vektorrendszert,

$$C(\varepsilon)\varphi_0^{(i)} = \lambda(\varepsilon)\varphi_0^{(i)}, \text{ és így } A(\varepsilon)U(\varepsilon)\varphi_0^{(i)} = \lambda(\varepsilon)U(\varepsilon)\varphi_0^{(i)}.$$

Eszerint ekkor a

$$\varphi^{(i)}(\varepsilon) = U(\varepsilon)\varphi_0^{(i)} \quad (i = 1, \dots, m)$$

vektorok, melyek az $U(\varepsilon)$ izometrikus tulajdonsága miatt az $M(\varepsilon)$ altérben szintén teljes normált ortogonális rendszert alkotnak, mindannyian az $A(\varepsilon)$ -nak a $\lambda(\varepsilon)$ sajátértékhez tartozó sajátvektorai. Ebben az esetben tehát a λ_0 m -szeres sajátérték a perturbáció következtében nem hasad fel, hanem csupán elmozdul a $\lambda(\varepsilon)$ helyzetbe. $C(\varepsilon)$ -nal és $U(\varepsilon)$ -nal együtt, mint azonnal látható, a $\lambda(\varepsilon)$ sajátérték és a hozzátartozó $\varphi^{(i)}(\varepsilon)$ sajátvektorok is kis ε -ra az ε hatvány-soraival állíthatók elő.

Ezzel elintéztük azt az esetet, amikor mindegyik C_k együttható a P_0 skaláris többszöröse. Marad az az eset, amikor a C_0 és esetleg még a rákövetkező néhány együttható a P_0 skaláris többszöröse, pl.

$$C_1 = \lambda_1 P_0, C_2 = \lambda_2 P_0, \dots, C_{s-1} = \lambda_{s-1} P_0,$$

de már C_s nem ilyen. Ez azt jelenti, hogy a C_s -nek, mint az m -dimenziós M_0 tér önadjungált operátorának, van legalább két különböző sajátértéke, s következésképpen a sajátértékei mind m -nél kisebb multiplicitásúak. Alkalmazhatjuk tehát az indukciós feltevésünket az M_0 térbeli

$$C_s(\varepsilon) = C_s + \varepsilon C_{s+1} + \dots$$

reguláris perturbációproblémára, mégpedig a C_s mindegyik sajátértéke esetében. Így adódik, hogy van $C_s(\varepsilon)$ -nak M_0 -ban egy $\{\psi^{(i)}(\varepsilon)\}$ ($i = 1, \dots, m$) teljes normált ortogonális sajátvektorrendszere, úgyhogy mindegyik sajátvektor és a hozzátartozó $\kappa^{(i)}(\varepsilon)$ sajátérték kis ε -ra az ε hatványsorával állítható elő. De akkor

$$C(\varepsilon)\psi^{(i)}(\varepsilon) = \lambda^{(i)}(\varepsilon)\psi^{(i)}(\varepsilon), \text{ ahol } \lambda^{(i)}(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots + \varepsilon^{s-1}\lambda_{s-1} + \varepsilon^s\kappa^{(i)}(\varepsilon),$$

és így

$$A(\varepsilon)U(\varepsilon)\psi^{(i)}(\varepsilon) = \lambda^{(i)}(\varepsilon)U(\varepsilon)\psi^{(i)}(\varepsilon),$$

azaz ekkor a

$$\varphi^{(i)}(\varepsilon) = U(\varepsilon)\psi^{(i)}(\varepsilon) \quad (i=1, \dots, m)$$

vektorok, melyek az $M(\varepsilon)$ altérben teljes normált ortogonális rendszert alkotnak, az $A(\varepsilon)$ -nak a $\lambda^{(i)}(\varepsilon)$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Az előállításból látható, hogy e sajátvektorok és a sajátértékek az ε paraméternek szintén reguláris függvényei.

Ezzel a többszörös sajátértékek esetére is befejeztük a bizonyítást. Megjegyezzük, hogy a többszörös sajátértékek esetében kapott sorfejtések együtt-hatóinak megbecslése nehezebb, mint az egyszeres sajátértékek esetében.

Abban a leggyakoribb esetben azonban, amikor a többszörös sajátérték már az első közelítésben egyszeresekre hasad szét (azaz, amikor a $C_1 = P_0 A_1 P_0$ operátornak az M_0 térben csupa egyszeres sajátértéke van), sikerül egyszerűen ilyen explicit becsléseket nyerni.

Hogy a most bizonyított tétel egyáltalában nem magától értetődő, az legjobban abból látható, hogy ha a perturbált operátor *több* paraméter reguláris függvénye, akkor általában csak az egyszeres sajátértékek változnak meg szintén reguláris módon, a többszörösek nem. Példa erre a 2-dimenziós térben az az operátor, amelynek a matrixa

$$A(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

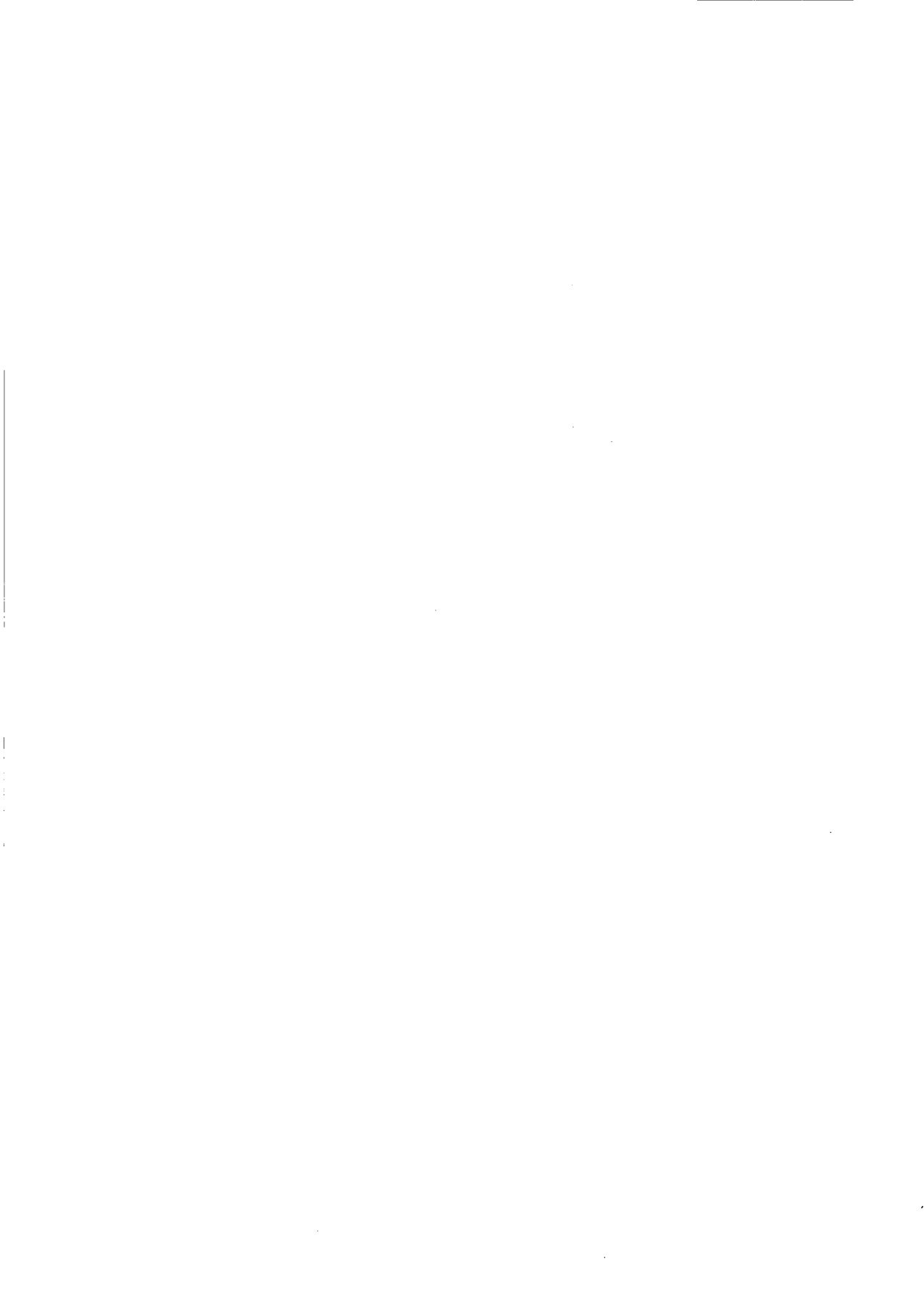
Mint hogy $A(0,0) = 0$, a perturbálatlan operátornak a 0 kétszeres sajátértéke. Ez felhasad az $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ két sajátértékére: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$, amelyek az $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0,0)$ környezetében nem fejthetők hatványsorba az $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ szerint.

A perturbáció-elmélet további feladataihoz tartozik a spektrum nem elszigetelt részei perturbációjának vizsgálata, így pl. a folytonos spektrumra helyezett sajátértékek vizsgálata, amely pl. az Auger-effektus szempontjából nagyfontosságú probléma. Ezek a problémák más módszereket igényelnek és lényegesebben nehezebben foghatók meg matematikailag. Újabban *K. Friedrichs*-nek sikerült e téren is sikereket elérnie³. E vizsgálatok ismertetésére ebben az előadásban nem térhetek ki.

Szegedi Tudományegyetem,
Bolyai-Intézete.

IRODALOM

- ¹ *Rellich F.*: Math. Annalen, 113 (1936) 600—619.; 113 (1936) 677—685.; 116 (1939) 555—570.; 117 (1940) 356—382.; 118 (1942) 462—484.
² *Szőkefalvi-Nagy Béla*: Matematikai és Természettudományi Értesítő, 61 (1942) 755—775.; 62 (1943) 63—79.; Commentarii Math. Helvetici, 19 (1947) 347—366.
³ *Friedrichs K. O.*: Communications on applied mathematics, 7 (1948) 361—406.



TARTALOMJEGYZÉK

ELŐADÁSOK A MODERN FIZIKA KÖRÉBŐL

<i>Jánossy Lajos</i> : A kiterjedt légizapórok jelenlegi problémái	3
<i>Gyulai Zoltán</i> : Kristálynövekedés és határréteg	10
<i>Szigeti György</i> : Lumineszkálás elméletére vonatkozó újabb kutatások	30
<i>Nagy Elemér</i> : A lumineszkálási jelenségek vizsgálatánál alkalmazott új berendezések	47
<i>Gombás Pál</i> : Az alkálifémek állapotegyenletéről	54
<i>Szalay Sándor és Földvári Aladár</i> : Kőzetek radiológiai vizsgálata	60
<i>Neugebauer Tibor</i> : Új összefüggés a gravitáció és mágnesség között	73
<i>Kónya Albert</i> : A Compton-sáv profiljának elméleti meghatározása	89
<i>Fényes Imre</i> : Az irreverzibilis termodinamikai folyamatok kvantitatív leírása	94

ELŐADÁSOK AZ ALKALMAZOTT MATEMATIKA KÖRÉBŐL

<i>Egerváry Jenő</i> : A matematika gyakorlati alkalmazásai különös tekintettel a technika differenciálegyenleteire	101
<i>Vincze István</i> : A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének feladatairól	116
<i>Fenyő István</i> : Az integrálegyenletek egy osztályáról és annak gyakorlati alkalmazásáról	120
<i>Aczél János</i> : Függvényegyenletek az alkalmazott matematikában	131
<i>Pál Sándor</i> : Ellenáramú diffúziós rendszerekről	143

MATEMATIKAI MÓDSZEREK A FIZIKÁBAN

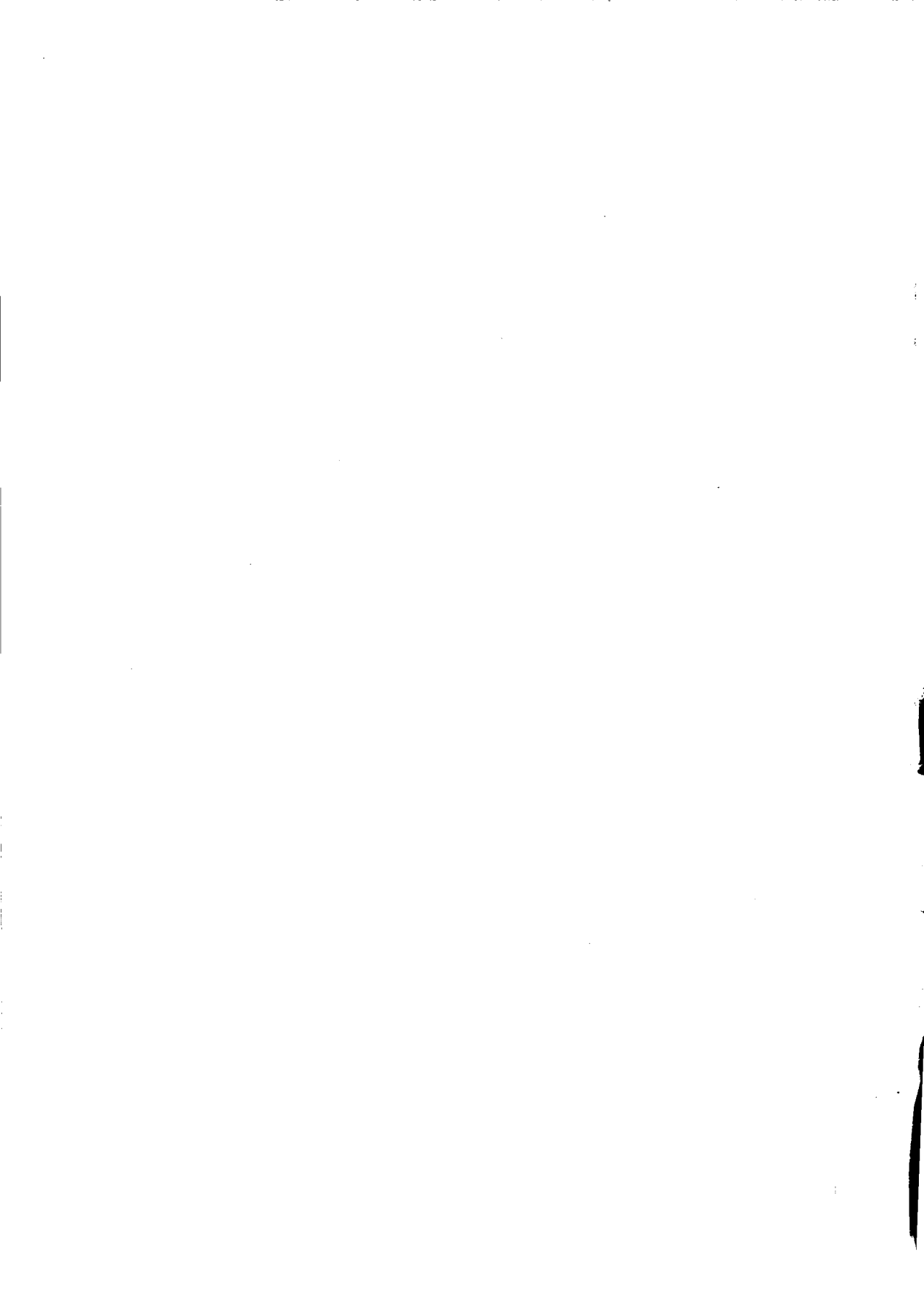
<i>Infeld Leopold</i> : A mozgás problémája	164
<i>Novobátzky Károly</i> : A variációszámítás és tenzorkalkulus fizikai alkalmazásai	168
<i>Budó Ágoston</i> : Matematikai módszerek a molekula-fizika egyes területein	173
<i>Kovács István</i> : Harmadfokú szekuláris egyenletek közelítő megoldásának fizikai alkalmazásai	181
<i>Varga Ottó</i> : Az integrálgeometria alkalmazása a geometriai optikában	192

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS ALKALMAZÁSAI

<i>Rényi Alfréd</i> : A Poisson-eloszlás problémaköréről	202
<i>Jánossy Lajos</i> : A kaszkádfolyamatok egy statisztikai problémájáról	213
<i>Jordán Károly</i> : Következtetések statisztikai észlelésekből	218
<i>Takács Lajos</i> : Gépegyüttállások valószínűségi számítás tárgyalása, tekintettel a várakozási időkre	228
<i>Földes István</i> : A valószínűségi számítás alkalmazásai a csillagászatban	235
<i>Székely Gábor</i> : A körtörés valószínűségi számítás tárgyalásához	245

SZÁMOLÓGÉPEK ÉS KÖZELÍTŐ SZÁMOLÁSI ELJÁRÁSOK

<i>Tarján Rezső</i> : Elektronikus számológépek	249
<i>Náray Zsolt</i> : Közvetlen és közvetett analógiarendszerek	266
<i>Hajós György</i> : A nomográfia alkalmazhatóságának hatáiról	268
<i>Alexits György</i> : Az elméleti fizika és technika sorfejtései által elérhető megközelítések nagyságrendjéről	274
<i>Turán Pál</i> : Magasabbfokú algebrai egyenletek közelítő megoldásáról	279
<i>Szőkefalvi-Nagy Béla</i> : Sajátérték-feladatok perturbációszámítása	288



A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

I. KÖTET 2—4 SZÁM

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:

ALEXITS GYÖRGY, BUDÓ ÁGOSTON,
GYULAI ZOLTÁN, JÁNOSSY LAJOS,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, TURÁN PÁL

SZERKESZTI:

RÉNYI ALFRÉD



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
BUDAPEST, 1951

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI:
ALEXITS GYÖRGY, BUDÓ ÁGOSTON, GYULAI ZOLTÁN, JÁNOSSY LAJOS,
NOVOBÁTZKY KÁROLY, TURÁN PÁL

SZERKESZTI:
RÉNYI ALFRÉD

I. kötet 2–4. szám

Szerkesztőség : Budapest V, Géza-utca 2.
Kiadóhivatal : Budapest V, Alkotmány-u. 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) osztályának közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg és az Akadémia III. osztályának előadóüléseiben bemutatott dolgozatokat tartalmazza. Négy füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

Kéziratok a következő címre küldendők :

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei.
Budapest V, Géza-utca 2.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg, megjelent munkájáért

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért, vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 20 forint, külföldi címre 30 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest V, Alkotmány-u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám : 02-878-111-48), külföldi megrendelések a „Kultúra“ Könyv- és Hírlap külkereskedelmi Vállalat Budapest VIII, Rákóczi-út 5. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám : 45-790-057-50-032) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztálya a következő idegennyelvű folyóiratokat adja ki :

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Acta Physica Hungarica.

Acta Mathematica Hungarica Szerkesztősége, Budapest V, Géza-utca 2.

Acta Physica Hungarica Szerkesztősége, Budapest V, Géza-utca 2.

AZ OSZTÁLYKÖZLEMÉNYEK FELADATAIRÓL

A Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya Osztályközleményei második számának megjelenése alkalmából a Szerkesztőbizottság szükségesnek látja, hogy tájékoztassa az Osztály tagjait és általában az Osztályközlemények olvasóit azokról a feladatokról, amelyeket az Osztályvezetőség a lap számára kijelölt, a folyóirat rendeltetéséről, célkitűzéseiről, elgondolásairól és konkrét terveiről. Az első szám nem nyújtott erre megfelelő alkalmat, tekintettel arra, hogy az rendkívüli ünnepi szám volt, amely az Akadémia fennállásának 125. éves évfordulója alkalmából rendezett ünnepi héten a III. osztály előadó ülésein elhangzott tudományos előadásokat foglalta magában. Az Osztályközlemények feladataira vonatkozó alábbi tájékoztatóját a Szerkesztőbizottság azzal bocsájtja útjára, hogy egyben felkéri olvasóit: juttassák el megjegyzéseiket, esetleges kívánságaikat és bírálatukat a Szerkesztőbizottsághoz, hogy az azokat munkájában fel tudja használni.

Az Osztályközlemények az Akadémia III. osztályának egyetlen magyar nyelvű folyóirata, ennek következtében nem szorítkozik egy tudományágra, hanem közöl tudományos cikkeket a III. osztályhoz tartozó összes tudományágak, így a matematika, a fizika, a csillagászat és a meteorológia köréből. Ugyanakkor az Osztályközlemények nemcsak önálló tudományos dolgozatokat közöl, hanem beszámol az Osztály tudományterületének jelentősebb eseményeiről, így elsősorban az Osztály munkájáról, az Osztályhoz tartozó három kutató intézet működéséről, elért eredményeiről és az Osztályhoz tartozó tudományok terén folyó kutatómunkával kapcsolatos elvi és módszertani kérdésekről is. Ezen közleményekkel kapcsolatos célkitűzéseinket az alábbiakban részletezzük.

Nézzük először a tudományos közlemények kérdését. Először is annak a jelentőségét kívánjuk aláhuzni, hogy az Osztályközlemények helyet biztosít magyar nyelvű tudományos dolgozatoknak. Az Osztály kiad idegennyelvű tudományos folyóiratokat is: az Acta Mathematicát és az Acta Physicát, amely folyóiratoknak meg van a maguk nagy jelentőségű feladata, azonban nem pótolják és nem teszik feleslegessé az Osztályközleményeket. A múltban a magyar tudósok közül egyeseknek az volt az álláspontjuk, hogy eredményeiket csak idegen nyelven teszik közzé, egyrészt, hogy eredményeikről más országok tudósai is tudomást szerezzenek, másrészt azért, mert nem tartották érdemesnek magyarul közölni munkáikat, arra való hivatkozással, hogy ide-

haza csak igen szűk kör érdeklődik azok iránt és ennek a körnek a tagjai maguk is jól birják a különböző világnyelveket. A felszabadulás előtt ez az álláspont még úgy ahogy elfogadható volt, ma azonban teljesen helytelen volna, ezt az álláspontot továbbra is fenntartani, és ezen a téren gyökeres fordulatra van szükség. Ezt a fordulatot az teszi szükségessé, hogy a felszabadulás után Pártunk irányításával megindított kulturforradalom egyre szélesebb kibontakozása folytán hazánkban óriási mértékben megnövekedett a tudás iránti vágy, a tudomány iránti szenvedélyes érdeklődés, és az a dolgozók egyre szélesebb tömegeire terjed ki. A szocializmus építésének nagyszerű perspektívái, felémelt ötéves tervünk hatalmas feladatai, követelően előírják az összes tudományok és ezen belül döntő súllyal a műszaki tudományok, és az azoknak alapul szolgáló természettudományok és a műszaki- és természettudományokban egyaránt nélkülözhetetlen matematika hatalmas ütemű fejlesztését. Műszaki értelmiségünk és a munkásosztály legjobbjai, sztahanovisták, újítók, élmunkások egyre nagyobb érdeklődéssel fordulnak ezen tudományok felé, és a matematika és a természettudományok iránt érdeklődők táborát a megnövekedett feladatokkal lépést tartani igyekvő egyetemek évente tizezer számra szaporodó hallgatósága évről-évre tovább szélesíti. Ilyen körülmények között a szocializmus építésének korszakában a magyar tudósok munkája — ellentétben a multtal — nem közönnnyel és érdektelenséggel, hanem egyre fokozódó érdeklődéssel, és mind mennyiségi, mind minőségi tekintetben egyre magasabb igényekkel találkozik hazánkban. Ilyen módon ma nemcsak, hogy nem felesleges, hanem a legmesszebbmenően szükséges és fontos, hogy a magyar tudósok elsősorban a hazai olvasókhöz forduljanak munkáikkal és eredményeiket magyar nyelven közzé tegyék; ezzel kötelességüket teljesítik dolgozó népünkkel szemben és kulturforradalmunk fejlődését segítik elő. A magyar nyelven való publikáció jelentőségének lebecsülése, a kozmopolitizmus egyik megnyilvánulása, amellyel szemben fel kell vennünk a harcot. Ugyanakkor nem mulaszthatjuk el hangsúlyozni, hogy az eredmények magyar nyelven való közlése nem teszi feleslegessé az idegen nyelven való közlést, az Osztályközlemények az Actákat. Helyes és szükséges, hogy elért eredményeinkről tájékoztassuk elsősorban a Szovjetunió és a népi demokráciák tudósait, de a nyugati tudományos közvéleményt is, és megmutassuk, hogy az a hatalmas támogatás, amelyet Népköztársaságunkban a tudományos kutatás élvez, meg is hozza gyümölcsseit. Ilyen módon meg van a létjogosultsága annak, hogy ugyanaz a dolgozat orosz, francia, német, vagy angol nyelven valamelyik Actában és ugyanakkor magyar nyelven az Osztályközleményekben is megjelenjék. Sok esetben azonban kívánatos, hogy a két szöveg ne legyen szó szerinti azonos. Arra gondolunk, hogy egyes olyan idegen nyelvű tudományos közlemények esetében, amelyekben a szerző sok előismeretet tételez fel, amelyekben előző közleményeire utal és azok ismeretét feltételezi, különösen ha az említett előző közlemények maguk is idegen nyelven jelentek meg, helyes

ha az Osztályközleményekben közzé teendő magyar verziót a szerző részletesebben írja meg, utalások helyett részletesebben kifejtve a szóbanforgó dolgozat előzményeit is. Ezzel elősegítjük azt, hogy a dolgozatot a szakemberek minél szélesebb köre értse meg, és gyarapítsa belőle tudását. Ez azonban nem jelenti azt, hogy minden dolgozat egyidejűleg két nyelven jelenjék meg, hiszen valóban lehetnek dolgozatok, amelyek ma még kevesebbet érdekelnek idehaza, és így indokolt, ha csak idegen nyelven vagy legalább is magyarul csak lerövidítve jelennek meg. Ugyanakkor lehetségesek olyan meggondolások, hogy egyes munkák csak magyar nyelven, vagy egyenlőre csak magyar nyelven jelenjenek meg: gondolok itt elsősorban főként hazai vonatkozású munkákra, vagy olyan írásokra, amelyeknek célja elsősorban egy kérdés felvetése, a vita megindítása. E mellett az Osztályközlemények terjedelmének korlátozott volta is szükségessé tesz bizonyos kiválasztást. Ezzel kapcsolatban egy igen fontos szempontra kell rámutatnunk: a tudomány fejlődésével egyre újabb jelenségek válnak tudományos vizsgálat tárgyává, új elméletek keletkeznek és ez együttjár nagyszámú új szak kifejezés kialakulásával. Tudományos életünk fejlődésének fontos előfeltétele, hogy tudományos szaknyelvünk fejlődése a tudomány minden ágában lépést tartson az illető tudományág fejlődésével; hiszen e nélkül hova-tovább magyar tudósok nem is tudnák egymással gondolataikat magyarul kicserélni. Ilyen módon azzal, hogy tudósaink munkáikat magyar nyelven, vagy magyar nyelven is közlik, magyar nyelvünket fejlesztjük. A magyar nyelv fejlesztését Akadémiánk megalakulásakor is egyik központi feladatának tekintette és annak tekinti ma is, és ennek a feladatnak jelentős részét képezi az egyes tudományok szaknyelvének fejlesztése. Nem szabad természetesen a szaknyelv fejlesztését az erőszakos és mesterkéltszerű „magyarosítással“ összetéveszteni; az olyan kísérletek mint a differenciálhányados helyett a „különbségi hánylat“ kifejezés, mesterkéltségünkönél fogva lomtárba kerültek, nem sokkal jobb az erőltetett „levezetés“ kifejezés sem (a német „Ableitung“ szolgai fordítása). Sok olyan idegen eredetű szakkifejezés van, amely a magyar szaknyelvben meggyökeresedett és teljesen megfelel a célnak: gondolunk olyan kifejezésekre mint például transzformáció, vektor, konvergencia, stb. A magyar szaknyelv megteremtése nem azt jelenti, hogy az ilyen meghonosodott szakkifejezéseket erőszakosan magyarosítsuk, hanem azt, hogy kialakítsuk azon szakkifejezéseket, amelyek eddig a magyar szaknyelvben általánosan elfogadott alakot nem nyertek. Gondolunk itt olyan kérdésekre, mint például hosszú éveken át a ma már általánosan elfogadott szórás és szórásnégyzet kifejezés helyett különböző szerzők a következő kifejezéseket használták: szóródás, diszperzió, standard deviáció, négyzetes eltérés, középhiba stb. Hasonlóképpen a valószínűségi sűrűségfüggvény ma már elfogadott kifejezés helyett, használatban volt sok más, nem igen sikeres kifejezés, a már elfogadott rotáció kifejezés helyett sokan használták a „rotor“, „örvénylés“, „forgás“ stb. kifejezéseket is. A magyar matematikai és fizikai terminológia egységes kialakítását is kívánjuk szolgálni Osztályközleményeinkkel.

Térjünk át ezután arra a kérdésre, hogy az Osztályközlemények nem egy tudományág lapja. A tudomány fejlődése szükségképen bizonyos specializálódásra vezet. Míg a XVIII. és a XIX. században még lehetséges volt, hogy egy Euler, egy Laplace, egy Lomonoszov, egy Gauss, vagy egy Mengyelejev a matematika és a természettudományok, sőt a technikai tudományok szinte minden ágában egyidejűleg átfogó és mélyreható tudással rendelkeztek és nagyot alkotson, addig ma az egyre kevésbé lehetséges, és minden tudós legfeljebb egy tudományágban, sőt általában szaktudományának is csak bizonyos fejezeteiben tudja a tudomány rohamosan növekvő ismeretanyagát minden részletében áttekinteni és ennek következtében általában csak egy vonalon tud jelentőset alkotni, míg a rokon tudományágakat illetőleg általában arra kénytelen szorítkozni, hogy nagy vonalakban figyelemmel kísérje a fejlődést és felfigyeljen azokra az eredményekre, amelyek az ő kutatási iránya szempontjából közvetlen jelentőséggel bírnak. A fejlődés ezen jellegzetességének a következményeképpen a század eleje óta egyre nagyobb mértékben megindult a tudományos folyóiratok specializálódása és külön matematikai, külön fizikai, külön csillagászati stb. szakfolyóiratok és egyéb időszak kiadványok megindítása. Még a XVIII. században az ezen a téren vezető folyóiratok, így a lipcei *Acta Eruditorum*, a pétervári, párizsi, berlini, turini akadémiák közleményei, a londoni *Philosophical Transaction*, a göttingeni tudományos társaság folyóirata stb. vegyesen közöltek filozófiai, matematikai, fizikai, kémiai, csillagászati, geológiai, geodéziai stb. dolgozatokat, addig ma a specializálódásban ott tartunk, hogy még az egyes tudományágakon belül is speciális profilu folyóiratok alakultak, mint például a lengyel *Fundamenta Mathematicae*, az *Acta Arithmetica*, az ez évben Japánban „Tensor“ néven az ugyanilyen nevű társulat által kiadott folyóirat, speciális elektronikai, kristallográfiai, asztrofizikai folyóiratok stb. Sok olyan folyóirat, amelyeknek címe általános jellegű, az idők folyamán többé-kevésbé specializálódott egy szűkebb területre. Bár szükségszerűnek kell tekintenünk a matematika és az egyes természettudományok, és azok egyes fejezeteinek önállóságát és ezen tudományok kutatóinak specializálódását, ugyanakkor azonban fel kell figyelni arra a veszélyre, amelyet ez a specializálódás magában foglal. Az említett tudományok tárgyköre ugyanis csak látszólag válik el egymástól élesen: végeredményben mind a matematika, mind az exakt tudományok ugyanazt az anyagi világot és annak alapvető, kvantitativ is megfogható törvényeit vizsgálják különböző nézőpontokból és különböző célkitűzésekkel. A világ anyagi voltában rejlő egysége és objektív összefüggései tükröződnek vissza abban, hogy az említett tudományágak számtalan szállal kapcsolódnak egymáshoz, hol ösztönzést és perspektívát adva, hol pedig segédeszközként szolgálva egymásnak. Ezeknek a kapcsolatoknak és összefüggéseknek döntő jelentőségük van ezen tudományágak fejlődésében. Az anyagi világ dialektikus összefüggései a matematika és a természettudományok fejlődésében ezek összefonó-

dásában és fejlődésük bonyolult dialektikájában jutnak kifejezésre. A matematika és természettudományok kölcsönhatásait és ezeknek a fejlődést előbbre vivő hatását nem elég, mint tényt megállapítani, ezen tudományok tervszerű fejlesztése érdekében azt tudatosan ápolnunk és fejleszteniünk kell. Ebből a szempontból az egyes tudományágakra, vagy azok egyes fejezeteire szorító folyóiratok *mellett* (ezek létjogosultsága vitán felül áll) fontos szerepük van olyan folyóiratoknak, amelyek több rokon tudomány területét ölelik fel. Ez a magyarázata annak, hogy az említett specializálódási tendencia mellett fennmaradtak és fontos szerepet visznek a tudományos életben különböző országok akadémiáinak olyan folyóiratai, mint például a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának Dokladi Akademii Nauk c. folyóirata, a párisi Akadémia Comptes Rendus-ja, vagy mint az angol Nature stb. Osztályközleményeink szerkesztésében döntő szempontként kívánjuk szem előtt tartani azt a törekvést, hogy fejlesszük és erősítsük az Akadémia III. osztályához tartozó tudományok együttműködését. Ezt a szempontot igyekeztünk érvényesíteni már jelen szám összeállításánál is. Ugy gondoltuk azonban, hogy ezt a célt csak formálisan szolgálná az a, ha válogatás nélkül vegyesen közölnénk matematikai és fizikai, csillagászati és meteorológiai cikkeket. E helyett azt a megoldást választottuk, hogy a rendelkezésre álló anyagból úgy válogattunk össze ezen szám részére dolgozatokat, hogy azok mintegy dokumentálják a matematika és a fizika kapcsolatát, matematikusok és fizikusok együttműködésének termékenyítő hatását. Ez a törekvés vezette az Osztályközlemények Szerkesztőbizottságát, amikor ezen szám anyagát a valószínűségszámítás és annak fizikai alkalmazásaira vonatkozó dolgozatokból válogatta össze. A közölt dolgozatok az említett együttműködés termékeny voltát igen kézzelfogható módon bizonyítják: jelen szám tartalmazza két matematikus fizikai tárgyú dolgozatát, egy fizikus két matematikai tárgyú munkáját, ahhoz két matematikus hozzászólását, egy fizikus és két matematikus közös dolgozatát stb. Helytelen volna azonban ebből azt a tanulságot levonni, mintha a fizikusok és matematikusok együttműködésének terén meg lehetnének elégedve a jelenlegi helyzettel hazánkban. Valójában az a helyzet, hogy ez az együttműködés a valószínűségszámítás vonalán igen szépen kialakult, más vonalakon azonban az együttműködés ma még távolról sem olyan szoros és állandó, mint lehetne, és törekednünk kell, hogy ez az alkotó együttműködés más vonalakon is kiépüljön, és ahol már kiépült, ott még jobban elmélyüljön. Hasonlóképpen még nem alakult ki az együttműködés nálunk eléggé a meteorológia és a csillagászat vonalán a matematikával és a fizikával, bár ezen a téren is történtek már kezdeményezések, amelyek eredményeiről Osztályközleményeink következő számai fognak tanuskodni. A jövőben is törekedni fogunk arra, hogy az Osztályközleményekkel is elősegítsük a különböző tudományok művelőinek alkotó együttműködését, és ezen keresztül az elmélet és gyakorlat egységének, a tudomány egészséges fejlődése döntő előfeltételének még fokozottabb kifejlődését.

Már utaltunk arra, hogy az Osztályközlemények feladata nem merül ki tudományos dolgozatok közlésében, hanem feladata az is, hogy beszámoljon az Osztály tudományterületének jelentősebb eseményeiről. Ezt a célt szolgálja például jelen számban az Osztály két akadémiai intézetének munkájáról szóló beszámoló. Ezzel kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy az Osztály harmadik akadémiai intézetéről ötéves tudományos tervünk egyik legfontosabb létesítményéről, a Központi Fizikai Kutató Intézetről lapunk következő számában fogunk beszámolni. Ma még egyébként is korai volna ennek az intézetnek a munkájáról beszámolót adni, hiszen csak nemrég készült el az intézet első új épülete. Egy további épület építkezése is megindult, és ma már ott tartunk, hogy a Központi Fizikai Kutató Intézet minden már felállított osztályán — és így elsősorban a Kozmikus Sugárzási Osztály vonalán, amely az új épületben elhelyezést nyert — megtörténtek az előkészületek, a műszerek beszerzése, a kutatócsoportok kialakítása, és most a kutatómunka megindítása és kiterjesztése a központi feladat.

Jelen számunkban külön cikkben számolunk be az Osztály könyvkiadási tervének állásáról, továbbá néhány jelentősebb, ez évben megjelent munkáról. Szándékunk, hogy könyvismertetéseinkkel lépést tartsunk gyors ütemben fejlődő könyvkiadásunkkal. Figyelemmel kívánja tovább kísérni az Osztályközlemények az Osztály tudományterületén működő tudományos társulatok munkáját is: jelen számunk is már két ilyen tárgyú közleményt tartalmaz. A következő számok az Akadémia III. osztályának egyéb irányú tevékenységéről is be fognak számolni, így az akadémiai ösztöndíjakról, az aspiránsok munkájáról, az Osztály állandó bizottságainak munkájáról stb. Végül pedig a szerkesztőbizottság tervbe vette, hogy az osztály vonalán beszámol ötéves tudományos tervünk egyes súlyponti kérdéseiről és mozgósítja az előttünk álló feladatok megoldására a lap olvasóit. Közvetlenül vagy közvetve a lapban közölt minden cikk és egyéb közlemény végső fokon ezt a célt kívánja szolgálni, és az Osztályközlemények célkitűzését egy mondatban így foglalhatjuk össze: Célunk minden rendelkezésre álló eszközzel elősegíteni ötéves tudományos tervünk sikerét, és ezen keresztül a szocializmus felépítését és a béke megvédését szolgálni. Ezeknek a céloknak érdekében kérjük olvasóink minél aktívabb közreműködését, segítségét és építő bírálatát.

A Szerkesztőbizottság

A KINETIKUS GÁZELMÉLET BIZONYOS KÉRDÉSEIRŐL

EGERVÁRY JENŐ r. tag és TURÁN PÁL lev. tag

König Dénes és Szűcs Adolf emlékének

Előadva az 1951 márc. 5.-én tartott osztályülésen

I. Mint jólismert, a kinetikus gázelmélet a gázokat igen nagy n számú (10^{23} nagyságrendű pro dm^3) mozgó részecske összességének fogja fel. Ha ezek

$$x_{r,0}, y_{r,0}, z_{r,0} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

kezdeti koordinátáit és

$$\dot{x}_{r,0}, \dot{y}_{r,0}, \dot{z}_{r,0} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

kezdősebességeit megadottnak vesszük, akkor a mechanika alapelvei szerint a rendszer $t > 0$ időpontokban már meg van határozva. De ilyen módon levezetni a gázok legegyszerűbb tulajdonságait a legnagyobb nehézségekbe ütközött mindmáig. Egy ilyen tulajdonság pl. az, hogy egyáltalán beszélhetünk a gáz sűrűségéről, mely külső behatások nélkül nem függ az időtől „kevés“ időponttól eltekintve. Ez azt jelenti, a természet a gázcseppképződését csak kevés időpontban engedi meg; ha pl. egy ilyen időpontot választunk kezdeti időpontnak, akkor ebből kiindulva „rövid“ időn belül helyreáll az egyensúly, a részecskék „egyenletes“ eloszlása a gáztérben. Ezt azonban levezetni a mechanika alapelveiből nem sikerült. Az első ezirányú eredmény *H. Steinhaus** lengyel matematikustól származik, aki egy egyszerű modell esetén vizsgálta a kérdést. A részecskék az ő modelljében pontszerűek, egyenlő tömegűek, köztük vonzó vagy taszító erőt nem vesz figyelembe, részecskék közti ütközések nincsenek; a részecskék egy kocka alakú mozdulatlan edénybe vannak bezárva és annak falain a rugalmas ütközés szabályai szerint verődnek vissza. Ezen esetben a részecskék a falon való ütközéstől eltekintve egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek; *Steinhaus* modelljében ezen sebességek lineáris függetlenségét is felteszi még. Ezen modellre *Steinhaus* szigorúan ki tudta mutatni, hogy legalább a részek tömegközéppontja a kocka középpontjának „közelében“ marad a $0 < t < T$ időtartam alatt, kivéve „aránylag kevés“ időt. Ezen állítás a részecskék egyenletes eloszlásánál kevesebbet állít, abból levezethető; belőle azonban a részecskék egyenletes eloszlása nyilván nem következik. *Steinhaus* eredménye mégis jelentős, mert megcáfolja azt a hiedelmet, hogy a kinetikus gázelmélet alap-

* *H. Steinhaus: Sur les fonctions independantes (VII.) Studia Math. T. X (1948) p. 1—20.* Szerzők figyelme e tárgyra *Rényi Alfrédnek* „A valószínűségszámítás megalapozásáról“ c. dolgozata alapján irányult, mely a Matematikai Lapok 1949. I. évfolyamában jelent meg. Ehelyütt fejezzük ki köszönetünket úgy neki, mint *Jánossy Lajos* és *H. Steinhaus* professzoroknak értékes megjegyzéseikért.

kérdéseiben a mechanika alapelvei a részecskék nagy száma miatt nem alkalmazhatók, újabb alapfeltevésekre van szükség. Vagy, ahogy ő még találóbban kifejezi „...notre exemple peut donc servir pour réfuter un préjugé assez répandu, a savoir que l'ignorance de l'état initial ait la force magique nécessaire pour engendrer les formules désirées et qu'on ne peut pas faire de statistique sinon au dépens de la connaissance des trajectoires individuelles. ...“.

2. A következőkben egyik hasonló modell esetén a részecskék egyenletes eloszlását fogjuk kimutatni, (persze „kis“ összhosszú időintervallumoktól eltekintve). A **3.** pontban ismertetni fogjuk a tárgyalásunk alapjául szolgáló modellt; ezt azon kettős követelmény szem előtt tartásával értelmeztük, hogy egyrészt a számítások technikai része ne legyen túltengő, másrészt a fizikai realitásnak minél több vonatkozásban megfeleljen. A **4.** pontban a modellre vonatkozó megjegyzések lesznek éspedig arra vonatkozólag is, hogy a modell milyen megkövetéseitől lehetne megszabadulni a számítások komplikálása árán, az **5.** pontban a dolgozat eredményét egy előbbi dolgozatunkéval hasonlítjuk¹ össze. A **6. 7. és 8.** pontok a tétel kimondását, a bizonyításhoz szükséges segédfogalmakat ill. a *Koksma—Szűsz és König—Szűcs*-féle segédteteleket fogják tartalmazni és végül a **9. 10. 11. 12.** pontok a tétel bizonyítását.

3. A részecskék legyenek most is pontszerűek egyenlő tömegűek, melyek között vonzó vagy taszító erők nem lépnek fel és melyek egy π -oldalú mozdulatlan kockaalakú edénybe vannak zárva. A falon az ütközések most is rugalmas ütközésnek megfelelőek; ha a beesés egy élre, vagy éppen egy csúcsba történik, akkor értelmezzük őket folytonossági megfontolások alapján. A részecskék közötti rugalmasnak feltételezett binár ütközéseket minden további nélkül megengedjük; a ternár vagy magasabbrendű ütközéseknél, melyek száma „kicsi“ a binár-ekhez képest, tegyük fel, hogy minden részecske egyszerűen folytatja útját, mint ahogy azt a csillagászatban fel szokták tenni. A részecskék kezdeti helyzetére vonatkozólag nem teszünk fel semmit; a kezdősebességeket viszont vegyük fel

$$\begin{aligned}x_{j,0} &= a(n)(1 + jb(n)) \\ y_{j,0} &= a(n)(1 + jb(n))\sqrt{2} \quad j = 1, 2, \dots, n \\ z_{j,0} &= a(n)(1 + jb(n))\sqrt{3}\end{aligned} \quad (3.1)$$

alakban, ahol

$$a(n) = n^{\frac{2}{3}} \quad b(n) = n^{\frac{101}{100}} \quad (3.2)$$

4. A binár és ternár ütközések közötti megkülönböztetés csak látszólagos. Ha ugyanis pontosan két egyenlő tömegű részecske rugalmasan ütközik, akkor, mint ismeretes, azok egyszerűen felcserélik irányukat és sebességeiket; azaz ha a részecskék indexeit felcseréljük az ütközés pillanatában, akkor mondhatjuk, hogy a két részecske folytatja útját, mintha mi sem történt volna. Vagyis a jelzett körülmények között a mozgás tényleg olyan, mintha ütközés esetén

önáthatók volnának és így az ütközésektől látszólag teljesen eltekinthetünk éppúgy, mint *Steinhaus* modelljében. Modellünk azonban épp ezért egyben hátrányban van *Steinhaus* modelljéhez képest, mint azt *H. Steinhaus* megjegyezte. Az ő modelljénél minden részecske helyzete minden időpontban megadható, azaz az ő modellje egy teljesen determinisztikus modell. A mi modellünkben ez nem áll teljesen; megmarad azonban egy hasonló, gyengébb tulajdonsága, melyet gyenge determinizmusnak nevezhetünk. Nevezzünk két részecskét a $t = t_1$ pillanatban konjugáltkak, ha ők már előbb összeütköztek és terjeszszük ki e kapcsolatot tranzitívvá azáltal, hogy, ha a_1 részecske a_2 -vel konjugált, a_2 pedig a_3 -al a $t = t_1$ pillanatban, akkor a_1 -et a_3 -al is konjugáltkak tekintjük. Ezen fogalom bevezetésével modellünk gyenge-determinisztikus volta abban áll, hogy egy fix a_1 részecskére és $t = t_2$ időpontra csupán egy olyan (ξ, η, ζ) térbeli pontot tudunk megadni, melyen vagy a_1 vagy valamelyik konjugáltja áll.

Modellünk legkevésbé természetes vonása kétségtelenül a (3.1)—(3.2) kezdősebességeloszlás. Ehhez két dolgot jegyezhetünk meg. Az első az, hogy eleddig az is kétséges volt, hogy egy szigorú matematikai kép tudja-e egyáltalán imitálni a természetet abban, hogy benne részecskék tetszőleges kaotikus kezdeti rendezetlenségéből „hosszú” időn át egyenletesen eloszlottba menjenek át „kevés” idő híján. Tehát a következők jelentősége abban áll, hogy valamelyest alátámasszák azt a véleményt, hogy *elvileg* a kinetikus gázelmélet alaptényei *tisztán mechanikailag* nyerhetők; a valószínűségi megfontolások csupán a matematikai nehézségek áthidalására valók, melyek már a kockától különböző alakú edény esetén fellépnek e problémában is. A másik az, hogy a bizonyítás kis módosításával kiadódna az is, hogy a (3.1)—(3.2) sebességeloszlásnak a $6n$ -dimenziós sebességtérben *egy egész környezete* adható meg úgy, hogy azok mellett a részecskék egyenletes eloszlására mondottak lényeges változás nélkül fennmaradjanak. Ezen környezetet megkaphatjuk, ha a (3.1)—(3.2)-ben szereplő $1, \sqrt{2}$ ill. $|\sqrt{3}|$ tényezőket oly $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ -al helyettesítjük, melyekre

$$|\vartheta_1 - 1| \leq n^{-10}, \quad |\vartheta_2 - \sqrt{2}| \leq n^{-10}, \quad |\vartheta_3 - |\sqrt{3}|| \leq n^{-10} \quad (4.1)$$

Hasonló a *Steinhaus* által megadott kezdősebességekre nem állhat fenn, mert a $6n$ -dimenziós sebességtér bármely pontjának tetszőleges kis környezete tartalmaz csupa racionális koordinátájú pontot, ami nyilván nem egy *Steinhaus* által megadott pont. A megadott sebességek olyanok, hogy kb. egyenlők, a realitásnak megfelelően és értékeik is reálisak; ilyen kezdeti sebességeloszlások nagyobb osztályait is ki lehetne jelölni, de ezzel sem foglalkozunk itt. *Rényi* és *Steinhaus* azon kérdésére azonban, hogy a hosszú ideig egyenletes eloszlást biztosító kezdősebességek bizonyos értelemben mindenütt sűrűn vannak-e eloszolva a sebességtérben, ezideig nem tudunk válaszolni.

A részecskék pontszerűségére vonatkozó feltevés a szereplő időtartam végeessége miatt *elvileg* elejthető. Ha u. i. a részecskék „elég kicsik”, akkor a kezdőhelyzet alkalmas választása mellett még az is elérhető, hogy a modell

az előre kijelölt időtartamon belül ütközésmentes legyen. Ezzel sem fogunk foglalkozni itt.

5. E dolgozat a ¹ alattinak bizonyos értelemben folytatása. A ¹ alatti dolgozatban a matematikai lényeg lehető kidomborítására helyeztük a fősúlyt, a becslések minimumra csökkentésével. Ennek megfelelően a választott kezdeti sebességek abnormisan nagyok voltak. E dolgozat becslései komplikáltabbak; ezen az áron vihető keresztül a módszer reálisabb kezdősebességek mellett. A javítás a (11.9) formulában mutatkozik meg; az itt szereplő \bar{m} -faktor ott $m^{3/2}$ volt. A modellel kapcsolatos több megjegyzés ¹-ben nem szerepelt. Viszont az ottani ütközésmentes és nem-ütközésmentes A és B modellek helyett itt csak az utóbbit tárgyaljuk. Ennek oka az, hogy a modellnek nem a determinisztikus voltát tartjuk leglényegesebbnek, hanem azt a követelményt, hogy az egyenletes eloszlás ténye a mechanika alapelveiből levezethető legyen.

6. Mielőtt kimondanánk tételünket pontosan, mondjuk meg, mit értünk a részecskék egyenletes eloszlásán a $t = t_0$ időpontban az E -kockában, ahol E legyen az

$$x = 0, \pi \quad y = 0, \pi \quad z = 0, \pi \quad (6.1)$$

síkok által behatárolva. Legyen K az

$$\alpha_1 \leq x \leq \beta_1, \quad \alpha_2 \leq y \leq \beta_2, \quad \alpha_3 \leq z \leq \beta_3 \quad (6.2)$$

által értelmezett téglá és K^* a K köbtartalma; jelöljük továbbá $N(t_0, K)$ -val a részecskék számát K -ban a $t = t_0$ időpontban. Az n részecskét akkor és csak akkor fogjuk E -ben egyenletesen eloszlottnak nevezni $t = t_0$ -ra, ha minden K -ra

$$\left| \frac{N(t_0, K)}{n} - \frac{K^*}{\pi^3} \right| \leq n^{-\frac{1}{10}}. \quad (6.3)$$

A valóságban n^{10} 10^{-2} -nagyságrendű, ami 10^{-20} -os ingadozásnak felel meg.

Ennek segítségével most már kimondhatjuk tételünket.

A 3.-ban értelmezett gázmodell részecskéi a

$$0 < t < n^{-\frac{1}{4}} \quad (6.4)$$

időközben a (6.3) értelemben egyenletesen vannak eloszolva, kivéve oly időintervallumokat, melyek összhossza

$$< c_1 n^{\frac{41}{300}} \log n, \quad (6.5)$$

ahol c_1 (és később c_2, c_3, \dots) n -től független numerikus állandó.*

7. Milyen módon lehet a kérdést analitikailag megfogni? Ehhez König Dénes és Szűcs Adolf ² egy gondolata segít hozzá. Ez arra az esetre vonat-

* A tétel ebben a formájában csupán *matematikai* tétel, mert a c_1 állandó numerikus értékét nem adja meg, csupán az n -től való függésre nyújt felvilágosítást. Annak persze nincs akadálya, hogy a becsléseket numerikusan vigyük keresztül, ami azonban a dolgozat terjedelmét megkétszerezné.

kozik, mikor egyetlen P pontról van szó, mely E -ben mozog (x_0, y_0, z_0) kezdőhelyzetből kiindulva, $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ kezdősebességgel és a falakon rugalmasan visszaverődik és kritériumot ad meg arra vonatkozólag, hogy az így mozgó pont milyen t' időpontokban tartózkodik E -nek egy előre adott K téglájában. Kritériumuk, mely elegáns geometriai okoskodással nyerhető, a következő. Jelentse E' azon kockát, melyet az

$$x = 0, 2\pi \quad y = 0, 2\pi \quad z = 0, 2\pi \tag{7.1}$$

síkok határolnak és két téglát K' -t és K'' -t, melyek élei $< 2\pi$ és melyek az

$$\alpha'_1 \leq x \leq \beta'_1 \quad \alpha'_2 \leq y \leq \beta'_2 \quad \alpha'_3 \leq z \leq \beta'_3$$

ill.

$$\alpha''_1 \leq x \leq \beta''_1 \quad \alpha''_2 \leq y \leq \beta''_2 \quad \alpha''_3 \leq z \leq \beta''_3$$

által vannak határolva, akkor nevezzünk kongruensnek mod E' , ha a szó közönséges értelmében

$$\alpha'_j \equiv \alpha''_j \pmod{2\pi}, \quad \beta'_j \equiv \beta''_j \pmod{2\pi}, \quad \gamma'_j \equiv \gamma''_j \pmod{2\pi}$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Egy fix K' téglával ilyen értelemben kongruens téglák összességét jelöljük $Q(K')$ -vel. Ha adva van a (6.1) alatti E kockában egy K téglá, azt *König* és *Szűcs* tükrözik az

$$x = \pi, \quad y = \pi, \quad z = \pi$$

síkokra, az

$$(x = \pi, y = \pi), \quad (x = \pi, z = \pi), \quad (y = \pi, z = \pi)$$

élekre és a

$$(\pi, \pi, \pi)$$

pontra vonatkozólag; ezáltal a (7.1) alatti E' kockában nyerik a

$$K_1 (\equiv K), K_2, K_3, \dots, K_8 \tag{7.2}$$

téglákat, melyek egymáshoz idegenek. Mármost ahelyett, hogy N pontnak E -ben a valóságban lefolyó mozgását tekintenék, tekintik ehelyett az

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t, \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t$$

által adott mozgást; kritériumuk egyszerűen azt mondja ki, hogy P akkor és csak akkor van K' -ban a $t = t'$ időpontban, ha az

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t', \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t', \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t'$$

által adott pont benne van a

$$Q(K_1) (\equiv Q(K)), Q(K_2), \dots, Q(K_8)$$

halmazok valamelyikében, vagyis a

$$\sum_{j=1}^8 Q(K_j) \tag{7.3}$$

halmazban.

Mivel modellünk előbbi szerint olyan, hogy az ütközésektől eltekinthetünk a részecskék eloszlása szempontjából, ez rögtön redukálja részecskéinknek a

$t = t'$ időpontba való eloszlásának kérdését arra, hogy — az (1.1) és (1.2) alatti jelöléssel élve — az

$$x_r = x_{r,0} + \dot{x}_{r,0}t', \quad y_r = y_{r,0} + \dot{y}_{r,0}t', \quad z_r = z_{r,0} + \dot{z}_{r,0}t' \quad (7.4)$$

$$r = 1, 2, \dots, n$$

pontok közül hány esik bele a (7.3) halmazba. Ezek $F(n, Q)$ száma nyilván könnyen nyerhető lesz, ha ismerjük azok számát, melyek $Q(K)$ -ba esnek; elég tehát ezt vizsgálni. Jelöljük ezt $F(n, K)$ -val.

8. Ha (7.4) véges pontsorozat helyett végtelen sorozat áll, akkor e kérdés vizsgálata *H. Weyl*³ szerint

$$\sum_{j=1}^N e^{i(r_1 x_j + r_2 y_j + r_3 z_j)}$$

alakú összegek becslésére vezethető vissza, ahol r_1, r_2, r_3 fix egészek és az összeg viselkedése $N \rightarrow \infty$ -re vizsgálandó. Véges pontsorozat esetén *Weyl* kritériumában a limeszt nyilván egyenlőtlenséggel kell valami módon pótolni. Először *Van der Corput* és *Koksma* találtak ilyen tételt; ennek bizonyítását⁴ csak az egydimenziós esetre vázolták, a k -dimenziós eset bizonyítását nem publikálták. 1948-ban egészen más kérdésekkel kapcsolatban jutottunk⁵ ugyan-ehhez a kérdéshez *Van der Corput* és *Koksma* eredményéről való tudomás nélkül; módszerünket azóta egymástól függetlenül kiterjesztették a k -dimenziós esetre *Koksma*⁶ és *Szűsz Péter** disszertációjában. Eredményük az itt egyedül szükséges három-dimenziós esetben kis módosítással a következő.

Az előző pont jelöléseivel, ha m egész és $\geq c_3$, akkor megfelelő numerikus c_2 -vel

$$\left| F(n, K) - \frac{K^*}{(2\pi)^3} n \right| \leq c_2 \left(\frac{n}{m+1} + \sum_{|h_1| \leq m} \sum_{|h_2| \leq m} \sum_{|h_3| \leq m} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \left| \sum_{j=1}^n e^{i(h_1 x_j + h_2 y_j + h_3 z_j)} \right| \right) \quad (8.1)$$

9. Most rátérhetünk (6.4)–(6.5) alatti állításunk bebizonyítására.

A 7. végén említett $F(n, K)$ gyanánt azon részecskéket véve, melyek az edényben $t = t_0$ időpontban K -ba esnek, adódik (8.1)-ből, ha $m = m(n)$ egész, akkor

$$\left| F(n, K) - \frac{K^*}{(2\pi)^3} n \right| < c_2 \left(\frac{n}{m+1} + \sum_{|h_1| \leq m} \sum_{|h_2| \leq m} \sum_{|h_3| \leq m} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \cdot \left| \sum_{j=1}^n e^{i(h_1 x_{j,0} + h_2 y_{j,0} + h_3 z_{j,0} + t_0 a(n)(1+j b(n))(h_1 + h_2)^2 + h_3)^2} \right| \right)$$

* Ennek egy rövid kivonata meg fog jelenni az I. Magyar Mat. Kongresszus kiadványában „Az egyenletes eloszlás egy problémájáról“ címen. Ebből a (8.1) alatti c_2 könnyebben becsülhető meg.

ill.

$$\left| F(n, Q) - \frac{K^*}{\pi^3} n \right| < 8c_2 \left(\frac{n}{m+1} + \sum_{|h_1| \leq m} \sum_{|h_2| \leq m} \sum_{|h_3| \leq m} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \cdot \left| \sum_{j=1}^n e^{i\{h_1 x_{j,0} + h_2 y_{j,0} + h_3 z_{j,0} + t_0 a(n)(1+jb(n))(h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3})\}} \right| \right).$$

Bevezetve a rövidebb

$$\sum_{j=1}^n e^{i\{h_1 x_{j,0} + h_2 y_{j,0} + h_3 z_{j,0} + t_0 a(n)(1+jb(n))(h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3})\}} = \psi(t, h_1, h_2, h_3)$$

jelölést és $F(n, Q)$ helyett az időtől való függést kifejező $N(t, Q)$ -t használva fenti egyenlőtlenség a következőbe megy át

$$\left| N(t, Q) - \frac{K^*}{\pi^3} n \right| < 8c_2 \left(\frac{n}{m+1} + \sum_{\substack{|h_j| \leq m, j=1, 2, 3 \\ h_1 h_2 h_3 \neq 0}} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \right) |\psi(t, h_1, h_2, h_3)|,$$

ahol $m = m(n) > c_3$, függését pontosan később fogjuk meghatározni. Ha még $T = T(n)$ -ről is csak később diszponálunk véglegesen, t -szerinti integrációval adódik

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T) \equiv & \int_0^T \left| N(t, K) - \frac{K^*}{\pi^3} n \right| dt \leq 8c_2 \left\{ \frac{nT}{m+1} + \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{|h_1| \leq m \\ h_1 h_2 h_3 \neq 0}} \sum_{|h_2| \leq m} \sum_{|h_3| \leq m} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \int_0^T |\psi(t, h_1, h_2, h_3)| dt \right\}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

De a *Cauchy*-féle egyenlőtlenségből

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T |\psi(t, h_1, h_2, h_3)| dt \right)^2 & \leq T \int_0^T |\psi(t, h_1, h_2, h_3)|^2 dt \leq T^2 n + \\ & + T \sum_{\substack{1 \leq j_1, j_2 \leq n \\ j_1 \neq j_2}} \left| \int_0^T e^{i a(n)t(j_1-j_2)b(n)(h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3})} dt \right| < T^2 n + \\ & + 4T \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} \frac{1}{a(n)(j_2-j_1)b(n)|h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3}|} < nT^2 + \\ & + \frac{1}{a(n)b(n)|h_1+h_2\sqrt{2}+h_3\sqrt{3}|} 4Tn \log n, \end{aligned}$$

azaz

$$\int_0^T |\psi(t, h_1, h_2, h_3)| dt \leq T\sqrt{\bar{n}} + 2\sqrt{\frac{Tn \log n}{a(n)b(n) |h_1 + h_2| |2 + |3|}}.$$

Ezt (9.1)-be téve adódik

$$\begin{aligned} J(T) < 8c_2 \left\{ \frac{nT}{m+1} + 9T\sqrt{\bar{n}} \log^3 m + \right. \\ \left. + 2\sqrt{\frac{Tn \log n}{a(n)b(n)}} \sum_{|h_1| \leq m} \sum_{\substack{|h_2| \leq m \\ h_1 h_2 h_3 \neq 0}} \sum_{|h_3| \leq m} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{1}{| |h_1 + h_2| \sqrt{2 + |h_3|} \sqrt{3} |} \right\}. \quad (9.2) \end{aligned}$$

10. (9.2) jobboldalán álló összeg legyen S és foglalkozzunk ennek megbecslésével. Előbb kimutatjuk, hogy, ha a_1 és a_2 az 1, 2, 3 számok közül vett két különböző és

$$Z = \sum_{\substack{|h_1| \leq m \\ h_1 \neq 0}} \sum_{\substack{|h_2| \leq m \\ h_1 h_2 \neq 0}} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)} \frac{1}{| |h_1| \sqrt{a_1 + h_2} \sqrt{a_2} |}, \quad (10.1)$$

akkor*

$$Z < c_4 \sqrt{\bar{m}} \log m. \quad (10.2)$$

U. i. a $h_1 = 0$ -nak megfelelő részösszeg

$$< \sum_{\substack{|h| \leq m \\ h \neq 0}} \frac{1}{1+|h|} \frac{1}{\sqrt{|h|}} < 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(1+h)\sqrt{h}} = c_5$$

és ugyanez áll a $h_2 = 0$ -nak megfelelően. Vagyis

$$Z < 2c_5 + \sum_{\substack{|h_1| \leq m \\ h_1 \neq 0}} \sum_{\substack{|h_2| \leq m \\ h_2 \neq 0}} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)} \frac{1}{| |h_1| \sqrt{a_1 + h_2} \sqrt{a_2} |}.$$

De

$$|h_1 \sqrt{a_1} + h_2 \sqrt{a_2}| |h_1 \sqrt{a_1} - h_2 \sqrt{a_2}| = |a_1 h_1^2 - a_2 h_2^2| = \text{nemnegatív egész}, \quad (10.3)$$

mivel

$$a_1 h_1^2 - a_2 h_2^2 = 0$$

-ből

$$\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \frac{h_2}{h_1} \text{ racionális}$$

* A becslés módosításával kimutatható lenne, hogy Z egy m -től független korlát alatt marad, de ez a lényeges S összeg jobb becslésére nem vezet.

volna. Így következik, hogy (10.3) jobboldala ≥ 1 , azaz

$$\frac{1}{|h_1 \sqrt{a_1 + h_2} \sqrt{a_2}|} < \sqrt{|h_1 \sqrt{a_1 - h_2}| |a_2|} < \max(|\sqrt{h_1}|, |\sqrt{h_2}|) \sqrt{2 + \sqrt{3}} < < 1.8 \max(\sqrt{|h_1|}, \sqrt{|h_2|})$$

és így

$$Z < 2c_5 + 7.2 \sum_{h_1=1}^m \sum_{h_2=1}^m \frac{\max(\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2})}{(1+h_1)(1+h_2)}. \tag{10.4}$$

Tekintve, hogy

$$\sum_{h_1=1}^m \sum_{h_2=1}^m \frac{\max(\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2})}{(1+h_1)(1+h_2)} < 2 \sum_{h_1=1}^m \frac{\sqrt{h_1}}{1+h_1} \sum_{h_2=1}^m \frac{1}{1+h_2} < < 2 \sum_{h_1=1}^m \frac{1}{\sqrt{h_1}} \log h_1 < c_6 \sqrt{m} \log m.$$

(10.4)-ből (10.2) következik.

11. Ezután rátérhetünk a (9.2)-ben szereplő S összeg becslésére és kimutatjuk, hogy

$$S < c_7 \sqrt{m} \log m. \tag{11.1}$$

Becsüljük előbb azon tagok adalékát, melyekre $h_1 = 0$. Ez (10.2)-vel becslhető. Teljesen ugyanígy becslhető azon tagok adaléka is, melyekre $h_2 = 0$ ill. $h_3 = 0$. Így adódik

$$S < 3c_4 \sqrt{m} \log m + \sum_{h_j=0, m, j=1,2,3} \sum_{h_1, h_2, h_3 \neq 0} \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \frac{1}{|h_1 + h_2| \sqrt{2 + h_3} \sqrt{3}}. \tag{11.2}$$

Nézzük a megmaradt összegben azon tagok adalékát, melyekre

$$h_1 > 0, h_2 > 0, h_3 > 0.$$

Ez nyilván

$$< \sum_{h_1=1}^m \sum_{h_2=1}^m \sum_{h_3=1}^m \frac{1}{(1+h_1)(1+h_2)(1+h_3)} \frac{1}{|\max(h_1, h_2, h_3)|} < < 6 \sum_{h_1=1}^m \frac{1}{(1+h_1)\sqrt{h_1}} \sum_{h_2=1}^{h_1} \frac{1}{1+h_2} \sum_{h_3=1}^{h_2} \frac{1}{1+h_3} < 3 \sum_{h_1=1}^m \frac{\log^2(h_1+1)}{(1+h_1)\sqrt{h_1}} = c_8.$$

Ugyanez áll azon tagok adalékára is, ahol minden h_j negatív. A megmaradt összegben tehát pontosan két h_j egyenlő előjelű. Tehát

$$S < c_9 \sqrt{m} \log m + 6 \max_{a_1, a_2, a_3} \sum_{h_1=1}^m \sum_{h_2=1}^m \sum_{h_3=1}^m \frac{1}{(1+|h_1|)(1+|h_2|)(1+|h_3|)} \frac{1}{|h_1 \sqrt{a_1} + h_2 \sqrt{a_2 - h_3} \sqrt{a_3}|} \tag{11.3}$$

ahol a_1, a_2, a_3 az 1, 2, 3 elemek valamilyen permutációját jelöli. A max jele mögötti összeg legyen S' ; ha röviden

$$h_1\sqrt{a_1} + h_2\sqrt{a_2} = \omega, \quad (11.4)$$

akkor S' az

$$\sum_{h_1=1}^m \frac{1}{1+h_1} \sum_{h_2=1}^m \frac{1}{1+h_2} \sum_{h_3=1}^m \frac{1}{(1+h_3) \left| \omega - h_3\sqrt{a_3} \right|} \quad (11.5)$$

alakba is írható. Rögzítve h_1 és h_2 -t vizsgáljuk a h_3 szerinti összegezést, melyet bontsunk szét az

$$\begin{aligned} S'_1 &= \sum_{\left| a_3 \leq h_3 \right| \left| a_3 \leq \omega - \frac{1}{4}\sqrt{a_3} \right|} \frac{1}{(1+h_3) \left| \omega - h_3\sqrt{a_3} \right|} \\ S'_2 &= \sum_{\left| h_3 \right| \left| a_3 - \omega \right| \leq \frac{1}{4}\sqrt{a_3}} \frac{1}{(1+h_3) \left| \omega - h_3\sqrt{a_3} \right|} \\ S'_3 &= \sum_{\omega + \frac{1}{4}\sqrt{a_3} \leq h_3\sqrt{a_3} \leq m\sqrt{a_3}} \frac{1}{(1+h_3) \left| h_3\sqrt{a_3} - \omega \right|} \end{aligned} \quad (11.6)$$

tagok összegére; egyes összegek lehetnek üresek, mikoris értékük 0. Ekkor nyilván

$$S'_1 < \frac{2}{\sqrt{a_3}} \sum_{1 \leq h \leq m} \frac{1}{1+h}, \quad S'_3 < \frac{2}{\sqrt{a_3}} \sum_{1 \leq h \leq m} \frac{1}{1+h}$$

azaz

$$S'_1 + S'_3 < 4 \log(m+1). \quad (11.7)$$

S'_2 becslésére jegyezzük meg, hogy

$$\begin{aligned} & \left| h_1\sqrt{a_1} + h_2\sqrt{a_2} + h_3\sqrt{a_3} \right| \left| h_1\sqrt{a_1} + h_2\sqrt{a_2} - h_3\sqrt{a_3} \right| \left| h_1\sqrt{a_1} - h_2\sqrt{a_2} + h_3\sqrt{a_3} \right| \cdot \\ & \cdot \left| h_1\sqrt{a_1} - h_2\sqrt{a_2} - h_3\sqrt{a_3} \right| = \left| (a_1h_1^2 + a_2h_2^2 - a_3h_3^2)^2 - 4a_1a_2h_1^2h_2^2 \right| \end{aligned} \quad (11.8)$$

tehát racionális egész. Ez 0 nem lehet, mert $h_1h_2 \neq 0$ miatt ez esetben

$$0 < \sqrt{a_1a_2} = \frac{a_1h_1^2 + a_2h_2^2 - a_3h_3^2}{2h_1h_2} = \text{racionális}$$

volna; tehát (11.8) jobboldala legalább 1 és így

$$\left| h_1\sqrt{a_1} + h_2\sqrt{a_2} - h_3\sqrt{a_3} \right| \geq \frac{1}{(h_1\sqrt{a_1} + h_2\sqrt{a_2} + h_3\sqrt{a_3})^3}$$

ill.

$$\frac{1}{\left| \omega - h_3\sqrt{a_3} \right|} \leq (\omega + h_3\sqrt{a_3})^3.$$

Mivel S'_2 legfeljebb egy tagot tartalmazhat, tehát

$$S'_2 < \frac{\left(2\omega + \frac{1}{4}\sqrt{a_3}\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{\omega}{\sqrt{a_3}} - \frac{1}{4}} < \frac{\left(2\omega + \frac{1}{4}\sqrt{a_3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\omega}{\sqrt{a_3}} + \frac{1}{8}} = 2\sqrt{a_3} \left(2\omega + \frac{1}{4}\sqrt{a_3}\right)^{\frac{1}{2}} < < c_{10}(\sqrt{h_1+1} + \sqrt{h_2+1}).$$

Ebből, (11.7)-ből, (11.6)-ból és (11.5)-ből következik, hogy

$$S' < \sum_{h_1=1}^m \frac{1}{1+h_1} \sum_{h_2=1}^m \frac{1}{1+h_2} \{4 \log(m+1) + c_{10}\sqrt{h_1+1} + c_{10}\sqrt{h_2+1}\} < < c_{11} \left\{ \log^3 m + \sum_{h_1=1}^m \frac{1}{1+h_1} \sum_{h_2=1}^m \frac{1}{1+h_2} \right\} < c_{12} \sqrt{m} \log m \tag{11.9}$$

12. Ezután a (6.4)—(6.5) alatti állítás bizonyítása gyorsan befejezhető. (9.2)-ből

$$J(T) < c_{13} \left\{ \frac{nT}{m+1} + T\sqrt{n} \log^3 m + \log m \sqrt{\frac{Tnm \log n}{a(n)b(n)}} \right\}. \tag{12.1}$$

Ha mármost R jelenti azon időpontok halmazát $[0, T]$ -ben, melyekre

$$\left| N(t, K) - \frac{K^*}{\pi^3} n \right| \geq n^{\frac{9}{10}},$$

és R^* ennek méretét, akkor nyilván

$$J(T) \geq R^* n^{\frac{9}{10}},$$

azaz ebből és (12.1)-ből

$$R^* \leq c_{13} n^{-\frac{2}{5}} \sqrt{T} \left\{ \frac{\sqrt{nT}}{m+1} + \sqrt{T} \log^3 n + \sqrt{m} n^{\frac{61}{200}} \log^{\frac{3}{2}} n \right\}.$$

Legyen

$$T = n^{\frac{1}{4}} \text{ sec},$$

ami kb. 1 nap és

$$m = \left\lfloor \frac{n^{\frac{16}{75}}}{\log n} \right\rfloor.$$

Ekkor

$$R^* < c_{14} n^{\frac{41}{300}} \log n.$$

Q. e. d.

Megjegyzés a korrekturánál. A (9. 1) alatti $J(T)$ integrál vizsgálata helyett az

$$\int_0^T \left| N(t, K) - \frac{K^*}{\pi^3} n \right|^2 dt$$

értéket vizsgálva a becslések egyszerűbbek és jobbakké lettek volna.

A Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.
Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.

IRODALOM

¹ *E. Egerváry* and *P. Turán*: On a certain point of kinetic theory of gases. *Studia Math.* sajtó alatt.

² Lásd "Sur le mouvement d'un point abandonné a l'intérieur d'un cube", c. dolgozatukat (*Rendic. del Circ. Mat. di Palermo*) 36 (1913) 79–83.

³ Über Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Ann.* 77 (1916) 313–352.

⁴ Lásd *Koksma* „Diophantische Approximationen“ (1936) c. könyvét (IX. Satz 4. p, 101). Mint *Koksma* állítja ⁵ alatti dolgozatának 7. oldalán, az általános esetre szóló bizonyításuk, „quite complicated“ igen komplikált volt.

⁵ *P. Erdős* and *P. Turán*: On a problem in the theory of uniform distribution. *Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. Amsterdam Proc.* 51 1146–1154, 1262–1269. (1948).

⁶ *J. F. Koksma*: Some theorems on Diophantine inequalities, *Scriptum* 5. of the *Math. Center Amsterdam* 1950.

ÖSSZETETT POISSON-ELOSZLÁSOKRÓL I.

JÁNOSSY L. r. tag, RÉNYI A. lev. tag és ACZÉL J.

Előadták az 1959 dec. 12-én tartott osztályülésen

BEVEZETÉS

E dolgozat négy részből áll. Az első részben (1. §) a klasszikus Poisson-féle sztochasztikus folyamatot a szokásosnál lényegesen kevesebb feltevésből vezetjük le. A $W_k(t)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) függvények differenciálhatóságát [$W_k(t)$ annak valószínűségét jelenti, hogy pontosan k esemény következék be egy t -hosszúságú időintervallumban], nem tételeztük fel; a vizsgált események "ritkaságát" a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_1(t)}{1 - W_0(t)} = 1 \quad (1)$$

feltétellel vezetjük be (a jóval nagyobb megszorítást jelentő $W'_0(0) + W'_1(0) = 0$ feltétel helyett). A bizonyítás az általában használatos differenciálegyenletek helyett függvényegyenletek segítségével történik.

A második rész (2. §) a nemfolytonos, egész értékű Markov-féle additív folyamat legáltalánosabb alakjának származtatását tartalmazza. A következő folyamatokat vizsgáljuk: a folyamat időben homogén, az egymást nem fedő időintervallumokban történő események számai független valószínűségi változók. Az események ritkaságára vonatkozólag semmit sem tételezünk fel. Az ilyen folyamatok általános alakját ugyanazokkal a módszerekkel nyerjük, mint az 1. §-ban. Kimutatjuk, hogy a legáltalánosabb ilyen típusú folyamat megszámlálható sok független \mathfrak{S}_k ($k=1, 2, \dots$) folyamat összege, ahol \mathfrak{S}_k egy közönséges Poisson-folyamat, ahol azonban egy "eseményen" k esemény egyidejű bekövetkezését értjük. Más szavakkal, ha

$$f(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) e^{i k u} \quad (2)$$

a folyamat karakterisztikus függvényét jelenti, akkor

$$f(u, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp(t c_k (e^{i k u} - 1)) \quad (3)$$

ahol $c_k \geq 0$ és $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$. Ilyen diszkrét $\{W_k(t)\}$ eloszlásokat, ha $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k$ véges, *összetett Poisson-eloszlásoknak* fogunk nevezni.

A harmadik rész (3. §) ezeknek az összetett Poisson-eloszlásoknak elemibb uton való származtatását tartalmazza, az időparaméter bevezetése nélkül. Ki-

mutatjuk, hogy ha egy egyetlen p paramétertől függő diszkrét (egész értékű) eloszlásfüggvényekből álló halmaz a kompozíció műveletére nézve zárt (vagyis ha két a halmazhoz tartozó eloszlásfüggvény kompozíciója is a halmazhoz tartozik), akkor a halmaz összetett Poisson-eloszlások egy halmaza. Bizonyítjuk azt is, hogy e halmaz bármely tagjának a szórása nem kisebb, mint a középértéke s egyenlőség csakis közönséges Poisson-eloszlás esetében áll fenn. Ez azt jelenti, hogy a Poisson-eloszlások halmazát — az események „ritkasága” helyett — úgy jellemezhetjük, hogy az oly egész értékű eloszlásfüggvények halmaza, amelyek közül bármely kettő kompozíciója is a halmazhoz tartozik, továbbá adott középérték mellett a szórás minimális. Ez utóbbi feltevés az események ritkaságára vonatkozó feltevést helyettesíti.

A negyedik rész (4. §) néhány, az összetett Poisson-eloszlásra vonatkozó megjegyzést tartalmaz. Kimutatjuk, hogy ezek $A. Hincsin^2$ általánosított Poisson-eloszlásaiban benne foglaltatnak, továbbá, hogy az összetett Poisson-eloszlások halmaza $Pólya-Eggenberger^3$ és $I. Neyman^4$ „ragályos” eloszlásait, valamint $H. Pollaczek-Geiringernek^5$ a Poisson-eloszlásra adott általánosítását is tartalmazza.

Az 1. § módszerei és eredményei Rényi A.-tól származnak. Ezekből kiindulva Aczél J. a 2 §. eredményeit nyerte. A 2 §.-ban tárgyalt általánosított Poisson-folyamatok értelmezésére k független esemény egyidejű bekövetkezéséből álló független Poisson-folyamatok szuperpozíciójaként $A. N. Kolmogorov$ hívta fel a fentemlített két szerző figyelmét*, akik ez uton mondanak köszönetet ezért az értékes megjegyzésért. A 3 §. eredményei (beleértve ezeknek az eloszlásoknak megszámlálható sok k -szoros eseményekből álló Poisson-folyamatok kompozíciójaként való értelmezését) teljes egészükben Jánošsy L.-tól származnak, aki függetlenül néhány hónappal előbb találta őket. A szerzők köszönetet mondanak Császár Ákosnak egy értékes megjegyzéséért.

1. § *A klasszikus Poisson-féle sztochasztikus folyamat*

Tekintsünk időben történő eseményeket (pl. részecskék becsapódását, telefonhívásokat, stb.) és tegyük fel a következőket:

A.) A folyamat időben homogén, vagyis annak a valószínűsége, hogy egy (t_1, t_2) időintervallumban pontosan k esemény történik, csak az intervallum hosszától: $t = t_2 - t_1$ -től és k -tól függ. E valószínűséget $W_k(t)$ -vel jelöljük ($k = 0, 1, 2, \dots$). Nyilvánvalóan

$$W_k(t) \geq 0 \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) = 1, \text{ ha } t \geq 0, \quad (1.1)$$

továbbá

$$W_0(0) = 1 \text{ és innen } W_k(0) = 0, k = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

B.) A folyamat Markov-féle, vagyis a (t_1, t_2) időintervallumban történő esemé-

* Személyes közlés az I. Magyar Matematikai Kongresszuson (1950. szept. 1.)

nyek száma független a (t_2, t_4) időintervallumban történő események számától, ha csak $t_1 < t_2 \leq t_3 \leq t_4$.

C.) Az események ritkák. Ezen a következőt értjük:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_1(t)}{1 - W_0(t)} = 1 \tag{1.3}$$

másszóval, hogy annak a valószínűsége, hogy a $(0, t)$ intervallumban pontosan egy esemény történjék $t \rightarrow 0$ -ra aszimptotikusan egyenlő annak a valószínűségével, hogy ugyanebben az intervallumban legalább egy esemény történjék. Ez ekvivalens

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=2}^{\infty} W_k(t)}{W_1(t)} = 0. \tag{1.4}$$

fennállásával, ami azt jelenti, hogy két vagy több esemény valószínűsége egy elég rövid időintervallumban egy esemény valószínűségéhez képest tetszőlegesen kicsiny. (1.3) helyett, — mint az a bizonyításból látszani fog — elegendő volna a (1.3)-nál nyilvánvalóan gyengébb

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{W_1(t)}{1 - W_0(t)} = 1 \tag{1.3a}$$

feltevés is.

Azt állítjuk, hogy A), B) és C)-ből következik, hogy

$$W_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \tag{1.5}$$

vagyis Poisson-eloszlással van dolgunk: $\lambda > 0$ az időegység alatt történő események számának várható értéke, (az események „időbeli sűrűsége“).

Bizonyítás:

B)-ből következik, hogy annak a valószínűsége, hogy a $(0, t+s)$ időintervallumban nem történik esemény, egyenlő annak a valószínűségnek, hogy $(0, t)$ -ben nem történik esemény és annak a valószínűségnek, hogy $(t, t+s)$ -ben nem történik esemény, a szorzatával. Innen A)-ből

$$W_0(t+s) = W_0(t) W_0(s) \tag{1.6}$$

(1.1) és $0 \leq W_0(t) \leq 1$ miatt, miután az (1.6) függvényegyenlet korlátos megoldásai mind q^t alakúak ($0 \leq q \leq 1$) kapjuk, hogy

$$W_0(t) = e^{-\lambda t} \text{ ahol } \lambda > 0 \tag{1.7}$$

Hasonlóképpen: ha a $(0, t+s)$ időintervallumban pontosan egy esemény történik, ez kétféleképpen lehetséges: vagy $(0, t)$ -ben történik egy esemény és $(t, t+s)$ -ben nem, vagy $(0, t)$ -ben nem történik esemény és $(t, t+s)$ -ben egy esemény történik. Ezért A)-ből és B)-ből

$$W_1(t+s) = W_1(t) W_0(s) + W_0(t) W_1(s) \tag{1.8}$$

Innen és (1.7)-ből

$$W_1(t+s) = W_1(t) e^{-\lambda s} + W_1(s) e^{-\lambda t} \tag{1.9}$$

Legyen

$$f(t) = e^{\lambda t} W_1(t) \quad (1.10)$$

akkor

$$f(t+s) = f(t) + f(s). \quad (1.11)$$

Ismeretes, hogy e függvényegyenlet korlátos megoldásai

$$f(t) = c_1 t \quad (1.12)$$

alakuak; ezért

$$W_1(t) = C_1 t e^{-\lambda t} \quad (1.13)$$

$W_0(t)$ -t és $W_1(t)$ -t (1.7), illetve (1.13) segítségével kifejezve és (1.13)-ba írva

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{C_1 t e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}} = \frac{C_1}{\lambda} = 1. \quad (1.14)$$

adódik és így nyerjük, hogy

$$C_1 = \lambda.$$

(1.5) tehát $k=0$ -ra és $k=1$ -re van bizonyítva.

Tegyük fel, hogy (1.5) $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ -re igaz; behatározzuk, hogy akkor igaz n -re is. Nyilvánvalóan

$$W_n(t+s) = \sum_{k=0}^n W_k(t) W_{n-k}(s) \quad (1.15)$$

Az indukciós feltevés miatt

$$W_n(t+s) = W_n(t) e^{\lambda s} + W_n(s) e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^n e^{\lambda(t+s)}}{n!} ((t+s)^n - t^n - s^n) \quad (1.16)$$

Legyen

$$f(t) = e^{\lambda t} W_n(t) - \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (1.17)$$

akkor

$$f(t+s) = f(t) + f(s) \quad (1.18)$$

(1.17) értelmében $f(t)$ korlátos⁶, ezért $f(t) = c_n t$ és

$$W_n(t) = \left(\frac{(\lambda t)^n}{n!} + c_n t \right) e^{-\lambda t} \quad (1.19)$$

(1.19) értelmében $W_n(t)$ differenciálható és

$$W'_n(0) = c_n \quad (1.20)$$

Azonban (1.4)-ből következik, hogy $W'_n(0) = 0$ ($n \geq 2$), ezért $c_n = 0$. Innen (1.19) és (1.20)-ból következik, hogy (1.5) n -re is igaz, ha $k=0, 1, \dots, (n-1)$ -re igaz. Így tételünket teljes indukcióval bebizonyítottuk.

2. § A véletlen események általános additív Markov-féle folyamata

Ebben a §-ban az események ritkaságára vonatkozó feltevést elejtjük, vagyis csak A) és B) érvényességét tesszük fel, C)-t nem. Pontosán ugyanugy, mint az 1. §-ban kapjuk, hogy

$$W_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{2.1}$$

és

$$W_1(t) = c_1 t e^{-\lambda t} \tag{2.2}$$

innen azonban most nem következik $c_1 = \lambda$. Teljes indukcióval befogjuk bizonyítani, hogy

$$W_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{\substack{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k \\ r_i \geq 0, (i=1, 2, \dots, k)}} \frac{(c_1 t)^{r_1} (c_2 t)^{r_2} \dots (c_k t)^{r_k}}{r_1! r_2! \dots r_k!} \tag{2.3}$$

(2.3) $k = 1$ -re (2.2.) érvényessége miatt igaz; $k = 2$ -re (1.15) miatt

$$W_2(t+s) = W_2(t)e^{-\lambda s} + W_2(s)e^{-\lambda t} + c_1^2 t s e^{-\lambda(t+s)}$$

Legyen
$$f(t) = e^{\lambda t} W_2(t) - \frac{c_1^2 t^2}{2}$$

akkor $f(t+s) = f(t) + f(s)$. Mivel $f(t)$ korlátos, kapjuk, hogy $f(t) = c_2 t$ és így $W_2(t) = \left(\frac{c_1^2 t^2}{2} + c_2 t \right) e^{-\lambda t}$ Hasonlóképpen kaphatjuk meg $W_k(t)$ kifejezését $k = 2, 3, \dots$ értékeire. Tegyük fel, hogy (2.3) $k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$ -re fennáll. (2.3)-at (1.15)-be helyettesítve

$$W_n(t+s) = W_n(t)e^{-\lambda s} + W_n(s)e^{-\lambda t} + e^{-\lambda(t+s)} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k \\ q_1+2q_2+\dots+(n-k)q_{n-k}=n-k}} \frac{(c_1 t)^{r_1} \dots (c_k t)^{r_k} (c_1 s)^{q_1} \dots (c_{n-k} s)^{q_{n-k}}}{r_1! \dots r_k! q_1! \dots q_{n-k}!} \tag{2.4}$$

Legyen

$$f(t) = e^{\lambda t} W_n(t) - \sum_{r_1+2r_2+\dots+(n-1)r_{n-1}=n} \frac{(c_1 t)^{r_1} (c_2 t)^{r_2} \dots (c_{n-1} t)^{r_{n-1}}}{r_1! r_2! \dots r_{n-1}!} \tag{2.5}$$

akkor (2.4)-ből következik, hogy

$$f(t+s) = f(t) + f(s) \tag{2.6}$$

tehát

$$f(t) = c_n t \tag{2.7}$$

amivel (2.3) $k = n$ -re is be van bizonyítva. (2.3)-ból nyilvánvalóan következik, hogy

$$c_k = W'_k(0) \quad (k \geq 1) \tag{2.8}$$

Miután $W_k(0) = 0$ és $W_k(t) \geq 0$ ($t > 0$), következik

$$W'_k(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_k(t)}{t} \geq 0 \tag{2.9}$$

és ezért

$$c_k \geq 0 \quad (2.10)$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergens és összege egyenlő λ -val. (2.3)-ból

$$e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^M \left(\sum_{r=0}^N \frac{(c_k t)^r}{r!} \right) < \sum_{k=0}^n W_k(t) \leq 1 \quad (2.11)$$

ha $n > NM^2$ és innen

$$\prod_{k=1}^M \left(\sum_{r=0}^N \frac{(c_k t)^r}{r!} \right) \leq e^{\lambda t} \quad (2.12)$$

Miután (2.12) N minden értékére igaz,

$$\exp \left(t \sum_{k=1}^M c_k \right) \leq e^{\lambda t} \quad (2.13)$$

és innen

$$\sum_{k=1}^M c_k \leq \lambda \quad (2.14)$$

és (2.10) miatt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergens. Legyen

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad (2.15)$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) = e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(c_k t)^r}{r!} \right) = e^{(\mu-\lambda)t} \quad (2.16)$$

és így

$$\mu = \lambda = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad (2.17)$$

(2.3)-ban λ helyébe ezt az értéket írva kapjuk a végleges képletet

$$W_k(t) = \exp \left(-t \sum_{k=1}^{\infty} c_k \right) \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \frac{(c_1 t)^{r_1} (c_2 t)^{r_2} \dots (c_k t)^{r_k}}{r_1! r_2! \dots r_k!} \quad (2.18)$$

Ez a véletlen események legáltalánosabb additív Markov-féle folyamata, amely egy nem negatív számokból álló tetszőleges konvergens összegű c_n sorozattól függ. Egy t hosszúságú időintervallumban k esemény valószínűségét a (2.18) formula adja meg.

(2.18)-ból könnyen belátható, hogy bevezetve a

$$v_k^{(n)}(t) = \frac{(c_n t)^k}{k!} e^{-c_n t} \quad (k = 0, 1, \dots; n = 1, 2, \dots) \quad (2.19)$$

jelölést

$$W_k(t) = \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} v_{r_1}^{(1)}(t) v_{r_2}^{(2)}(t) \dots v_{r_k}^{(k)}(t) \prod_{n=k+1}^{\infty} v_0^{(n)}(t) \quad (2.20)$$

Ezt a következőképpen értelmezhetjük: legyenek $\xi_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots; t > 0$)

független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, legyen $c_n t$ a $\xi_n(t)$ változó várható értéke és

$$\xi(t) = \xi_1(t) + 2\xi_2(t) + \dots + n\xi_n(t) + \dots \tag{2.21}$$

(2.20) nyilvánvalóan azt fejezi ki, hogy $\xi(t)$ k valószínűségét (2.18) adja meg. Miután $n\xi_n(t)$ egy Poisson-féle folyamat, amelyben egy „esemény“-en n esemény egyidejű bekövetkezését értjük, eredményünket úgy fejezhetjük ki, hogy a legáltalánosabb homogén Markov-féle folyamat végtelen sok oly független Poisson-folyamat összege, amelynél az n -edik folyamatban „eseményen“ n esemény egyidejű bekövetkezését értjük és amelynek várható értéke $c_n t$ ($c_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$). Másképpen, $W_k(t)$ a következőképpen fejezhető ki:

$$W_k(t) = \exp\left(-t \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right) \sum_{\substack{h_1+h_2+\dots+h_n=\dots=k \\ h_i \geq 1; i=1, 2, \dots, n}} \frac{c_{h_1} c_{h_2} \dots c_{h_n} t^n}{n!} \tag{2.22}$$

ahol az összegezés valamennyi oly egész pozitív h_i -re terjesztendő ki, amelynek összege $\leq k$. Ezt úgy láthatjuk be, hogy a (2.18) összegben összefoglaljuk azokat a tagokat, amelyekben t ugyanazon a hatványon szerepel, azaz amelyekre $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

Tekintsük most (2.18) karakterisztikus függvényét

$$f(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(t) e^{iuk} \tag{2.23}$$

innen

$$f(u, t) = \exp\left(t \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e^{iuk} - 1)\right) \tag{2.24}$$

$$f(u, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp(tc_k (e^{iuk} - 1)) \tag{2.25}$$

Jelölje $\varphi(u, \lambda)$ a közönséges Poisson-folyamat karakterisztikus függvényét:

$$\varphi(u, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda} e^{iuk}}{k!} = \exp(\lambda(e^{iu} - 1)) \tag{2.26}$$

E jelöléssel (2.25)-öt a következő alakban írhatjuk:

$$f(u, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \varphi(ku, tc_k), \tag{2.27}$$

ami valójában azt fejezi ki, hogy (2.8), (2.21) eloszlása. (2.24) alapján látjuk, hogy a (2.18) alakú eloszlások a karakterisztikus függvények következő tulajdonságával jellemezhetők: egy ilyen eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényének a logaritmus $g(e^{iu})$ alakú, ahol $g(z)$ egy az egységkörben reguláris függvény, amely a következő feltételeknek is eleget tesz:

$$g^{(n)}(0) \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ és} \\ \lim_{z \rightarrow 1} g(z) = 0$$

Egy t hosszúságú időintervallumban történő események számának várható értékét

$$M(t) = t \sum_{k=1}^{\infty} kc_k \quad (2.24)$$

adja meg. $M(t)$ tehát véges, vagy nem, aszerint, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} kc_k$ konvergál, vagy sem. Bennünket természetesen csak az első eset érdekel. Ebben az esetben (2.18)-at *összetett Poisson-eloszlásnak* fogjuk nevezni.

3. § Az összetett Poisson-eloszlások jellemzése karakterisztikus tulajdonságaik alapján

Tekintsünk egy ξ valószínűségi változót, amely csak nem-negatív egész értékeket vesz fel, ezek eloszlását egész értékű eloszlásnak fogjuk nevezni. Vizsgáljuk az egész értékű eloszlásoknak azt a „családját“, amelyek egyetlen p paramétertől, az eloszlás várható értékétől függenek.

Jelöljük $P(k, p)$ -vel a k érték valószínűségét ($k = 0, 1, 2, \dots$) és $\{P(k, p)\}$ -vel magát az eloszlást.

Tegyük fel, hogy e család a kompozíció műveletére nézve zárt. Ezen azt értjük, hogy két, a családhoz tartozó valószínűségi változó, ξ_1 és ξ_2 összege is a családhoz tartozik. Ha p_1 ξ_1 -nek, p_2 pedig ξ_2 -nek a várható értékét jelenti, akkor nyilvánvalóan $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$ várható értéke $p_3 = p_1 + p_2$.

A Poisson-eloszlások ismert családja, amelyre

$$P(k, p) = \frac{p^k e^{-p}}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3.1)$$

nyilvánvalóan ezzel a tulajdonsággal bír.

Felmerül mármost a kérdés, vajjon van-e ezenkívül más eloszlás-család is, amely e tulajdonsággal bír?

A következőkben erre a kérdésre fogunk válaszolni:

Tétel: Legyen $\{P(k, p)\}$ egész értékű eloszlásoknak egy családja, amely a kompozíció műveletére nézve zárt, ahol p , amely az eloszlás várható értékét jelenti, végigfut a valós nemnegatív számokon. Akkor $P(k, p)$ egy összetett Poisson-eloszlás, vagyis

$$P(k, p) = \exp\left(-p \sum_{n=1}^{\infty} d_n\right) \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \frac{(pd_1)^{r_1} (pd_2)^{r_2} \dots (pd_k)^{r_k}}{r_1! r_2! \dots r_k!} \quad (3.2)$$

ahol

$$\sum_{k=1}^{\infty} kd_k = 1 \quad (3.3)$$

A Poisson-eloszlások családját a következő tulajdonságokkal jellemezhetjük: p minden rögzített értékére az eloszlás szórása a (3.2) család többi eloszlásához képest a legkisebb.

Jelölje $H(z, p)$ a $\{P(k, p)\}$ eloszlás generátorfüggvényét, vagyis legyen

$$H(z, p) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k, p)z^k \quad (z \text{ komplex, } |z| \leq 1) \quad (3.4)$$

Miután feltételeztük, hogy a család a kompozíció műveletére nézve zárt,

$$H(z, p_1)H(z, p_2) = H(z, p_1 + p_2) \quad (3.5)$$

amiből következik, ha bevezetjük a $H(z, 1) = f(z)$ jelölést,

$$H(z, p) = H(z, 1)^p = f(z)^p. \quad (3.6)$$

Miután nyilvánvalóan

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k, p) = 1 \quad (3.7)$$

és

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP(k, p) = p, \quad (3.8)$$

ezért

$$f(1) = f'(1) = 1 \quad (3.9)$$

Most bebizonyítjuk, hogy $H(z, p)$ az egységkörben nem tűnhetik el, hacsak $p < \frac{1}{2}$.

(3.7) és (3.8)-ből következik

$$P(0, p) = 1 - p + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)P(k, p), \quad (3.10)$$

ezért

$$P(0, p) \geq 1 - p \quad (3.11)$$

és így (3.8) miatt

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(k, p) \leq p, \quad (3.12)$$

innen $|z| \leq 1$ -re

$$|H(z, p)| \geq P(0, p) - \sum_{k=1}^{\infty} P(k, p) \geq 1 - 2p, \quad (3.13)$$

ezért $|H(z, p)| > 0$, ha $p < \frac{1}{2}$. Azonban ha egy analitikus függvény a zárt egységkörben nem tűnik el, akkor a logaritmus is ugyanott szintén analitikus, ezért

$$g(z) = \frac{1}{p} \log H(z, p) = \log f(z) \quad (3.14)$$

is analitikus függvény és

$$H(z, p) = e^{pg(z)}, \quad (3.15)$$

ahol

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \quad (|z| \leq 1) \quad (3.16)$$

Nyilvánvaló, hogy ha (3.15) igaz $p < \frac{1}{2}$ -re, akkor — (3.6)-re való tekintettel —

igaz p minden pozitív értékére. (3.9)-ből következik, hogy $g(1) = 0$, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = 0 \quad (3.17)$$

és ezért

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z^n - 1) \quad (3.18)$$

Ki fogjuk mutatni, hogy a d_n együtthatók valóságosak és

$$d_n \geq 0 \text{ ha } n \geq 1 \quad (3.19)$$

Ennek bizonyítása a következőképpen történhetik: legyen

$$M = \max_{|z| \leq 1} |g(z)|. \quad (3.20)$$

(3.16)-ből következik

$$H(z, p) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k, p) z^k = 1 + pg(z) + \frac{p^2 g^2(z)}{2!} + \dots \quad (3.21)$$

Differenciáljuk mindkét oldalt n -szer és helyettesítsük $z = 0$ -t. Akkor kapjuk, hogy

$$n! P(n, p) = n! p d_n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p^k D_{k,n}}{k!}, \quad (3.22)$$

ahol

$$D_{k,n} = \left(\frac{d^n g^k(z)}{dz^n} \right)_{z=0} \quad (3.23)$$

A hatványosorok együtthatóira vonatkozó Cauchy-féle egyenlőtlenség miatt

$$|D_{k,n}| \leq n! M^k \quad (3.24)$$

(3.22) mindkét oldalát $n! p$ -vel osztva adódik

$$\left| \frac{P(n, p)}{p} - d_n \right| \leq p M^2 e^{M p}, \quad (3.25)$$

innen

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{P(n, p)}{p} = d_n \quad (3.26)$$

Miután $\frac{P(n, p)}{p}$ nem-negatív, (3.19) érvényes. z helyébe e^{it} -t írva és (3.19) és (3.20)-at tekintetbe véve

$$\sum_{n=1}^{\infty} n d_n = g'(1) = 1 \quad (3.27)$$

miatt $P(k, p)$ (3.2) alakú, vagyis egy összetett Poisson-eloszlás $\{P(k, p)\}$ karakterisztikus függvénye

$$H(z, p) = \exp \left(p \sum_{k=1}^{\infty} d_n (z^n - 1) \right), \quad (3.28)$$

ahol $d_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} n d_n = 1$

A d_n együtthatók különben tetszőlegesek. Ezért végtelen sok család van, amely e § tételének feltételeit kielégíti. Minden eloszlás, amely ehhez a családdhoz tartozik, egy összetett Poisson-eloszlás. (3.28) értelmében

$$P(0, p) = e^{-p}$$

(hasonlítsuk ezt össze a (3.11) egyenlőséggel)! Számítsuk ki a $\{P(k, p)\}$ eloszlás szórásnégyzetét. Nyilvánvalóan

$$\sigma^2 = p \sum_{n=1}^{\infty} n^2 d_n, \tag{3.29}$$

innen

$$\sigma^2 = p \sum_{n=1}^{\infty} n^2 d_n \geq p \sum_{n=1}^{\infty} n d_n = p; \tag{3.30}$$

egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $d_1 = 1$ és ezért $d_2 = d_3 = \dots = 0$. Így fenti tételünk második állítását, amely szerint a Poisson-eloszlást az jellemzi, hogy szórásnégyzete a legkisebb (az átlagával egyenlő) az összes feltételeket kielégítő $\{P(k, p)\}$ között, (p rögzített), igazoltuk.

4. § Speciális összetett Poisson-eloszlások

Tekintsünk egy összetett Poisson-eloszlást, amelynek a generátorfüggvénye

$$g(z) = \exp\left(p \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z^k - 1)\right), \tag{4.1}$$

ahol

$$d_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} k d_k = 1 \tag{4.2}$$

Legyen $\sum_{k=1}^{\infty} d_k = d$ és $\frac{d_k}{d} = e_k$

akkor

$$g(z) = \exp\left(p d \sum_{k=1}^{\infty} e_k (z^k - 1)\right), \tag{4.3}$$

ahol

$$e_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} e_k = 1. \tag{4.4}$$

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, amelyek mindegyike az $1, 2, \dots$ értékeket veszi fel e_1, e_2, \dots valószínűséggel. Jelöljük $\Phi_n(k)$ -val $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = k$ valószínűségét, legyen $\Phi_0(0) = 1$ és $\Phi_0(k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Nyilvánvalóan $\Phi_1(k) = e_k$ és

$$\Phi_n(k) = \sum_{j=0}^k \Phi_{n-1}(j) e_{k-j}$$

$$g_0(z) = 1 \text{ és } g_n(z) = \sum_{k=1}^n \Phi_n(k) z^k \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{4.6}$$

jelöléssel adódik, hogy

$$g_n(z) = (g_1(z))^n \quad (4.7)$$

(4.7) és (4.1)-ből következik, hogy

$$g(z) = e^{-pd} e^{pdg(z)} = e^{-pd} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pd)^k (g_1(z))^k}{k!} = e^{-pd} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pd)^k g_k(z)}{k!} \quad (4.8)$$

(4.6) két oldala együtthatóinak összehasonlítása útján következik, hogy

$$P(k, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(pd)^n e^{-pd}}{n!} \phi_n(k) \quad (4.9)$$

Vagyis azt találjuk, hogy az előző §-okban tárgyalt összetett Poisson-eloszlások $Hincsin^2$ általánosított Poisson-eloszlásainak speciális esetei. A (4.9) formula a $P(k, p)$ valószínűségek kiszámítására (a (3.3) formula helyett) szintén használható; különösen $P(k, p)$ aszimptotikus kifejezésének levezetésére, $p \rightarrow \infty$ esetén. Tekintsünk most néhány speciális összetett Poisson-eloszlást.

a). *Pólya-Eggenberger*³ „ragályos eloszlásának” határesetete (a negatívbinomiális eloszlás). Ebben az esetben

$$P(k, p) = (1 + p\delta)^{-\frac{1}{\delta}} \left(-\frac{1}{\delta}\right) \binom{\frac{p\delta}{1+p\delta}}{k} (-1)^k \quad (\delta > 0) \quad (4.10)$$

és

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k, p) z^k = \exp \left(p \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z^n - 1) \right), \quad (4.11)$$

ahol

$$d_n = \frac{1}{p\delta n} \left(\frac{p\delta}{1+p\delta} \right)^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.12)$$

Figyelemre méltó, hogy $\delta \rightarrow 0$ esetén ez az eloszlás a közönséges Poisson-eloszláshoz tart.

b). *I. Neyman* „ragályos eloszlása”. A *Neyman*⁴ által bevezetett „ragályos” eloszlás karakterisztikus függvénye

$$g(z) = \exp \left(p \int \int_A \left[\sum_{n=1}^{\infty} p_n (F(\xi, \eta) z + 1 - F(\xi, \eta))^n \right] d\xi d\eta - A \right) \quad (4.13)$$

alakú, ahol A , a ξ, η sík egy tartományát, illetve annak területét jelenti; e tartományban $0 \leq F(\xi, \eta) \leq 1$, továbbá $p > 0$, $p_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

Egyszerű számolással adódik.

$$g(z) = \exp \left(p \sum_{k=1}^{\infty} d_k (z^k - 1) \right), \quad (4.14)$$

ahol

$$d_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \int \int_A F^k(\xi, \eta) (1 - F(\xi, \eta))^{n-k} d\xi d\eta. \quad (4.15)$$

Miután nyilvánvalóan $d_n \geq 0$, ezek az eloszlások szintén benne foglaltatnak az összetett Poisson-eloszlások osztályában.

c). *Pollaczek-Geiringer*⁵ általánosított Poisson-eloszlásai. Ezek az eloszlások azok az összetett Poisson-eloszlások, amelyekre $c_n = 0$, ha $n \geq N$, vagyis amelyekre a generátorfüggvény logaritmususa egy polinom.

Végül megemlítjük, hogy az összetett Poisson-eloszlások azok a diszkrét, korlátlanul osztható eloszlások, amelyeknek csak az $1, 2, \dots$ helyeken van ugrásuk. *B. de Finetti*⁷ jólismert általános képlete (amely *A. N. Kolmogorov*⁸, *P. Lévy*⁹ és *Lévy-Hincsin* képleteinek speciális esete).

$$\log f(u) = p \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i u x} - 1) d\Phi(x) \tag{4.16}$$

$$\log f(u) = p \sum_{n=1}^{\infty} d_n (e^{i u n} - 1) \tag{4.17}$$

-ra redukálódik, ha $\Phi(x)$ egy lépcsősfüggvény, az $n = 1, 2, \dots$ szakadási helyekkel és $d_n = \Phi(n+0) - \Phi(n-0)$ ugrásokkal.

Az a.)—c.) példák mutatják, hogy az összetett Poisson-eloszlások különböző típusú eloszlásoknak sok változatát szolgálják. Természetesen igen bonyolult probléma megtalálni azt az elosztást, amely adott statisztikai adatokhoz a legjobban illeszkedik. Ha tudjuk, hogy egy elméletileg adott eloszlás az összetett Poisson-eloszlások osztályába tartozik, d_n értékei az eloszlásból egymásután kiszámíthatók a fél-invariánsokra vonatkozó jólismert formulák segítségével.

Bevezetve a

$$\begin{aligned} a_k &= k! P(k, p) e^p \quad (k = 0, 1, \dots) \text{ és} \\ H_k &= k! d_k p \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \tag{4.18}$$

jelöléseket, következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!} = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k z^k}{k!} \right) \tag{4.19}$$

és innen

$$\begin{aligned} H_1 &= a_1 \\ H_2 &= a_2 - a_1^2 \\ H_3 &= a_3 - 3a_1 a_2 - 2a_1^3 \\ H_4 &= a_4 - 3a_2^2 - 4a_1 a_3 + 12a_1^2 a_2 - 6a_1^4 \end{aligned} \tag{4.20}$$

stb.

Figyelembevéve, hogy $p = \log \frac{1}{P(0, p)}$, d_k értékei meghatározhatók.

*Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézete és
Alkalmazott Matematikai Intézete.
Nehézipari Műszaki Egyetem
Matematikai Intézete, Miskolc.*

IRODALOM

¹ A. *Khintchine*: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse d. Math. II. 4 (1933).

² *Loc. cit.*¹ pp. 21–24. Cf és a következők: *F. E. Sathertwaite*: Generalized Poisson distribution, Annals of Math. Stat., 13 (1942). 410–417 o.; *W. Feller*, On a general class of contagious distributions, Annals of Math. Stat., 14 (1943) 389–400 o.; és *E. Cansado Maceda*, On the composed and generalized Poisson distributions, Annals of Math. Stat., 19 (1948) 414–416.

³ *G. Pólya—F. Eggenberger*: Über die Statistik verketteter Vorgänge, Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech., 3 (1923) 279–289.

⁴ *I. Neyman*: On a new class of „contagious“ distributions applicable in entomology and bacteriology, Annals of Math. Stat. 10 (1939) 35–37.

⁵ *H. Pollaczek—Geiringer*: Über die Poissonsche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen, Zeitschrift J. angewandte Math. u. Mech., 8 (1928) 292–309.

⁶ *C. J. L. W. V. Jensen*: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math. 30 (1906) 189., ahol be van bizonyítva, hogy a $f(x+y) = f(x) + f(y)$ egyenlet egyedüli egyoldalról korlátos megoldásai $f(x) = cx$, c konstans. Ez magában foglalja azt, hogy $f(x+y) = f(x)f(y)$ egyenlet egyedüli korlátos megoldásai $f(x) = q^x$ alaknak.

⁷ *B. de Finetti*: Sulla possibilita di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori, Atti d. R. Accademia Naz. dei Lincei, Rendiconti, Cl. sc. fis. mat., 10 (1929) 325–330.

⁸ *A. Kolmogoroff*: Sulla forme generale di un processo stocastico omogeneo (Un problema di *Bruno de Finetti*), Atti d. R. Accademia Naz. dei Lincei, Rendiconti, Cl. sc. fis. mat., 15 (1932), 805–808.

⁹ *P. Lévy*: Théorie de l'addition des variables aléatoires (Paris 1937).

ÖSSZETETT POISSON ELOSZLÁSOKRÓL II.

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1951 május 8-án tartott osztályülésen

BEVEZETÉS

Jelen dolgozat *Aczél J., Jánossy L.*, és a szerző közös dolgozatának ¹ folytatása. Négy részből áll. Az 1 §-ban véletlen események inhomogén sztochasztikus folyamatának általános alakját nyerjük (1. tétel). Ez a § az ¹ alatt idézett dolgozat 2. §-ának általánosítása. Jelen dolgozat 2. §-ában a következő problémát oldjuk meg: tegyük fel, hogy egy összetett Poisson-folyamat minden eseménye egy oly „történet” kiindulópontja, amely meghatározott ideig tart és amelynek időtartama szintén valószínűségi változó; tekintetbe vesszük, hogy az időtartam eloszlásfüggvénye függhet az esemény kezdetének időpontjától. Azt kérdezzük, mi az eloszlásfüggvénye azon történetek számának, amelyek valamely t időpontban folyamatban vannak. Ezt η_t -vel jelöljük. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez az eloszlás is összetett Poisson-eloszlás (2. tétel). Ezt a problémát a szerző oldotta meg nemrégén a ² dolgozatban, arra az esetre, ha a szóbanforgó folyamat egy közönséges Poisson-folyamat; ebben a dolgozatban fizikai és technikai alkalmazások (többek között a következő problémáknál: rádióaktív bomlásjelenségek, telefon-hálózatok terhelési problémái, elektroncsövek tértöltése, stb.) is meg vannak említve. Egy másik alkalmazási lehetőség jelen dolgozat 3 §-ában van megemlítve. A 3 §-ban az általános összetett Poisson-eloszlásokat, mint egészértékű független valószínűségi változók összegeinek határeloszlását jellemezzük; mégpedig bebizonyítjuk a következő tételt (3. tétel): Legyenek $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ független, egészértékű valószínűségi változók, amelyek „végtelenül kicsinyek”, vagyis feltételezzük, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} P(\xi_{nk} \neq 0) = 0. \quad (1)$$

Ekkor ha az

$$X_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n} \quad (2)$$

összegek eloszlásai egy nem-elfajuló határeloszláshoz konvergálnak ha $n \rightarrow \infty$, akkor ez a határeloszlás szükségképpen egy összetett Poisson-eloszlás kell, hogy legyen. A (2) összeg konvergenciájára szükséges és elegendő feltételeket adunk *B. V. Gnyegyenko* és *A. N. Kolmogorov* egy tételének ³ felhasználásával. Ez az eredmény szorosan összefügg azzal a 4 §-ban tárgyalt ténnyel (4. tétel), hogy az összetett Poisson-eloszlások osztálya jellemezhető úgy, mint azon korlátlanul osztható nem-negatív egész értékű eloszlások osztálya, amelyek a 0 értéket pozitív valószínűséggel veszik fel.

Az összetett Poisson-eloszlások elmélete, úgy, mint azt I-ben és jelen dolgozatban felépítettük, most már sok tekintetben teljes; azonban még távol állunk attól, hogy ezen eloszlások alkalmazási lehetőségeit kimerítettük volna.

E helyen fejezem ki köszönetemet Császár Ákosnak értékes megjegyzéseiért, amelyeket felhasználtam jelen dolgozat megírásánál.

1. § Az inhomogén összetett Poisson-folyamat

Tegyük fel, hogy a folyamat $t=0$ időpontban kezdődik és jelölje $\zeta_r(t > 0)$ azon események számát, amelyek a $(0, t)$ időintervallumban történnek. A következőket tesszük fel:

a) ha $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots < s_r < t_r$, akkor a $\zeta_{t_1} - \zeta_{s_1}, \zeta_{t_2} - \zeta_{s_2}, \dots, \zeta_{t_r} - \zeta_{s_r}$ valószínűségi változók függetlenek ($r = 2, 3, \dots$).

b) Jelölje $W_k(s, t)$ pontosan k esemény bekövetkezésének valószínűségét az (s, t) időintervallumban, vagyis legyen

$$W_k(s, t) = P(\zeta_t - \zeta_s = k) \quad (s < t; k = 0, 1, 2, \dots); \quad (1.1)$$

fel fogjuk tételezni, hogy tetszőlegesen kis $\varepsilon > 0$ -hoz és tetszőlegesen nagy $T > 0$ -hoz található oly $\delta > 0$, hogy tetszőleges r -re ($r = 1, 2, \dots$) és olyan $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_r < t_r \leq T$ időpontokra, amelyek eleget tesznek a

$$\sum_{j=1}^r (t_j - s_j) < \delta$$

feltételnek, fennáll, hogy

$$\prod_{j=1}^r W_0(s_j, t_j) > 1 - \varepsilon. \quad (1.2)$$

A b) feltevés a folyamatot alkotó események „ritkaságát“ követeli meg abban az értelemben, hogy 1-hez tetszőleges közeli valószínűséggel elegendően kicsiny hossz-összegű időintervallumokban nem történik esemény. 1-ben egy másik „ritkasági“ feltevés szerepel (C feltevés) amely többszörös események lehetőségét zárja ki; e feltevést jelen dolgozatban nem alkalmazzuk.

A következő tételt fogjuk bebizonyítani:

1. tétel: Az a) és b) feltevések teljesülése mellett, ha

$$\varphi(s, t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(s, t) z^k \quad (1.3)$$

jelöli a folyamat generátorfüggvényét, akkor $\log \varphi(s, t, z)$ előállítható a következő alakban:

$$\log \varphi(s, t, z) = \sum_{r=1}^{\infty} (z^r - 1) \int_s^t c_r(\tau) d\tau \quad (1.4)$$

ahol $c_r(\tau)$ nem-negatív integrálható függvény ($r = 1, 2, \dots$) és $\sum_{r=1}^{\infty} c_r(\tau)$ majdnem mindenütt konvergens. Más alakban kifejezve:

$$W_k(s, t) = \exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty} \int_s^t c_r(\tau) d\tau\right) \cdot \sum_{r_1+2r_2+\dots+kr_k=k} \prod_{j=1}^k \frac{\left(\int_s^t c_j(\tau) d\tau\right)^{r_j}}{r_j!}.$$

Vagyis ζ , összetett Poisson-eloszlást követ t minden pozitív értékére.

Bizonyítás: Legyen

$$-\log \varphi(s, t, z) = \psi(s, t, z). \tag{1.5}$$

Nyilvánvalóan

$$\varphi(s, \tau, z) \varphi(\tau, t, z) = \varphi(s, t, z) \tag{1.6}$$

és így

$$\psi(s, \tau, z) + \psi(\tau, t, z) = \psi(s, t, z) \tag{1.7}$$

ha $s < \tau < t$.

Tekintetbe véve, hogy ha z valós és $0 < z < 1$, akkor $0 < \varphi(s, t, z) \leq 1$, következik, hogy

$$\psi(s, t, z) = \psi_z(I) \tag{1.8}$$

nem-negatív, additív függvénye az $I = (s, t)$ intervallumnak, ha $0 \leq z \leq 1$.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ha $s \leq t \leq T$ és $|z| \leq 1$, akkor $\psi_z(I)$ abszolút folytonos. Valóban, tegyük fel, hogy $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_r < t_r \leq T$ és $\sum_{j=1}^r (t_j - s_j) < \delta$, ahol a $\delta > 0$ számot úgy választottuk, hogy (1.2) érvényes legyen valamely megadott $\varepsilon > 0$ mellett. A következőkben fel fogjuk tenni, hogy $\varepsilon < \frac{1}{4}$, és így $W_0(s_j, t_j) > \frac{3}{4}$; ebből következik, hogy

$$|\varphi(s_j, t_j, z)| \geq W_0(s_j, t_j) - \sum_{k=1}^{\infty} W_k(s_j, t_j) = 2W_0(s_j, t_j) - 1 > \frac{1}{2}, \tag{1.9}$$

$\varphi(s_j, t_j, z)$ tehát a $|z| \leq 1$ zárt egységkörben nem tűnik el s ezért $\psi_z(I_j) = -\log \varphi(s_j, t_j, z)$ az egységkörben analitikus. Alkalmazva a

$$\left| \log \frac{1}{1-\alpha} \right| \leq 2|\alpha|$$

egyenlőtlenséget, amely érvényes minden olyan α komplex számra, amelyre $|\alpha| < \frac{1}{2}$, kapjuk, hogy

$$|\psi_z(I_j)| \leq 2|1 - \varphi(s_j, t_j, z)| < 2 \left[1 - W_0(s_j, t_j) + \sum_{k=1}^{\infty} W_k(s_j, t_j) \right]$$

és így, hogy

$$|\psi_z(I_j)| \leq 4(1 - W_0(s_j, t_j)).$$

Felhasználva az $\alpha < \log \frac{1}{1-\alpha}$ (ha $0 < \alpha < 1$) egyenlőtlenséget és (1. 2) segítségével nyerjük, hogy

$$\sum_{j=1}^r |\psi_z(I_j)| \leq 4 \sum_{j=1}^r (1 - W_0(s_j, t_j)) \leq 4 \log \left[\prod_{j=1}^r \frac{1}{W_0(s_j, t_j)} \right] \leq 4 \log \frac{1}{1-\varepsilon}. \quad (1. 10)$$

Mint azt megjegyeztük, $\psi_z(I_j)$ az egységkörben analitikus; ezért írhatjuk, hogy

$$\psi_z(I_j) = B_0(I_j) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(I_j) z^k \quad (1. 11)$$

alakban ahol a $B_k(I_j)$ együtthatók az $I_j = (s_j, t_j)$ intervallum függvényei. A Cauchy-féle formulából következik, hogy

$$B_0(I) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{\psi_{\zeta}(I)}{\zeta} d\zeta$$

és

$$B_k(I) = \frac{-k!}{2\pi i} \int_{\zeta} \frac{\psi_{\zeta}(I)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1. 12)$$

ahol az integráció a $|\zeta| = r < 1$ körön végzendő. Ezért (1. 10)-ből következik, hogy ha $\sum_{j=1}^r (t_j - s_j) < \delta$ és $I_j = (s_j, t_j)$, akkor

$$\sum_{j=1}^r |B_k(I_j)| \leq \frac{\delta k! \varepsilon}{r^k}$$

vagyis $B_k(I)$ is abszolút folytonos intervallumfüggvény. Ezért írhatjuk, hogy

$$B_k(I) = \int_s^t c_k(\tau) d\tau.$$

ahol $c_k(\tau)$ L -integrálható ($k = 0, 1, 2, \dots$). Most megmutatjuk, hogy, $c_k(\tau) \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Ez hasonló módon látható be, mint ahogyan az 1-ben szereplő c_k együtthatók nem-negatív voltát bizonyítottuk; be fogjuk bizonyítani, hogy

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_k(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = c_k(t) \quad (1. 13)$$

majdnem minden t -re és ezért $c_k(t) \geq 0$, ha $k = 1, 2, \dots$. Valóban:

$$\sum_{k=0}^{\infty} W_k(t, t + \Delta t) z^k = e^{-\psi_z(\Delta t)}$$

ahol $\Delta I = (t, t + \Delta t)$. A jobboldalt z szerint k -szor differenciálva $z = 0$ helyettesítésével nyerjük, hogy

$$\left(\frac{d^k (e^{-\psi_z(\Delta I)})}{dz^k} \right)_{z=0} = W_0(t, t + \Delta t) \left(-\psi_0^{(k)}(\Delta I) + \right. \\ \left. + \sum_{j_1+2j_2+\dots+(k-1)j_{k-1}=k} c_{j_1 j_2 \dots j_{k-1}} (\psi_0'(\Delta I))_{j_1} \dots (\psi_0^{(k-1)}(\Delta I))_{j_{k-1}} \right)$$

ahol $c_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}}$ numerikus együtthatók. Miután, ha $|z| \leq 1$, majdnem minden t értékre,

$$|\psi_z(\Delta I)| = O(\Delta I) \quad \text{ha } \Delta I \rightarrow 0$$

ezért

$$|\psi_0^{(m)}(\Delta I)| = \frac{O(\Delta I)m!}{r^m} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

ha $|z| \leq r < 1$, és így

$$\begin{aligned} k! W_k(t, t + \Delta t) &= W_0(t, t + \Delta t) [-\psi_0^{(k)}(\Delta I) + O(\Delta I)^2] = \\ &= W_0(t, t + \Delta t) \left[k! \int_0^{\Delta t} c_k(\tau) d\tau + O(\Delta t)^2 \right] \end{aligned}$$

és ebből következik (1. 13). Vagyis $B_0(I) - \psi_z(I) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(I) z^k$ egy nem-negatív együtthatójú hatványsor. Tekintetbe véve, hogy $\psi_1(I) = 0$ s ezért $\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} B_k(I) z^k = B_0(I)$, és mivel egy nem-negatív tagu Abel-szummábilis sor konvergens, azt kapjuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} B_k(I)$ konvergens és összege egyenlő $B_0(I)$ -vel. Ezért $\psi_z(I)$ a

$$\psi_z(I) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(I) (1 - z^k)$$

alakra hozható.

Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

Ha a folyamat homogén, akkor $c_k(\tau)$ nem függ τ -tól: $c_k(\tau) \equiv c_k$ ($k = 1, 2, \dots$) és a 2. §-ának eredményeit speciális esetként nyerjük. Ha $c_k = 0$ ha $k = 2, 3, \dots$, akkor a közönséges Poisson-folyamatot kapjuk. Megemlítjük, hogy inhomogén közönséges Poisson-folyamat esetén az inhomogénitás nem lényeges, mert az időskála megváltoztatásával kiküszöbölhető. Valóban, a $t' = \int_0^t c_1(\tau) d\tau$ új paraméter bevezetésével ez elérhető. Azonban ez nem lehetséges összetett inhomogén Poisson-folyamat esetén, mert egy új időskála bevezetése esetén egy tetszőlegesen választott $c_k(\tau)$ -t konstanssá tehetünk ugyan, de általában valamennyi együtthatót egyidejűleg nem tehetjük állandóvá. Így tehát léteznek „lényegesen“ inhomogén Poisson-folyamatok.

2. § Az r_t változók eloszlástörvénye

A következő tételt fogjuk bebizonyítani:

2. tétel: *Induljunk ki véletlen eseményeknek egy inhomogén összetett Poisson-féle folyamatából, amelynek karakterisztikus függvényét (1. 3) és (1. 4)*

adja. Feltesszük, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^t c_k(\tau) d\tau$ konvergens, vagyis hogy r_t középértéke

létezik, minden $t > 0$ -ra. Tegyük fel, hogy e folyamat minden eseménye kezdete egy „történésnek“, amelynek időtartama szintén valószínűségi változó. Jelölje $F(t_0, T)$ a t_0 időpontban kezdődő történésnek időtartamának eloszlásfüggvényét és legyen $\Phi(t_0, T) = 1 - F(t_0, T)$, feltesszük, hogy $\Phi(t_0, T)$ folytonos és pozitív, t_0 és T minden értékére. Jelölje r_t a t időpontban folyamatban lévő történések számát. Az r_t valószínűségi változó eloszlása összetett Poisson-eloszlás amelynek generátorfüggvénye

$$\chi(z, t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)(z^k - 1)\right) \quad (2.1)$$

ahol

$$d_k(t) = \int_0^t \left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n(\tau) \binom{n}{k} \Phi^k(\tau, t-\tau) (1 - \Phi(\tau, t-\tau))^{n-k} \right] d\tau \quad (2.2)$$

(Nyilvánvalóan $d_k(t) \geq 0$).

A bizonyítás alap gondolata ugyanaz, mint amelyet 2. §-ában alkalmaztunk.

Bizonyítás. Osszuk a $(0, t)$ intervallumot a $t_k = \frac{kt}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) pontok által n egyenlő részre és jelöljük JI_k -val a (t_{k-1}, t_k) időintervallumot. Legyen továbbá $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ és

$$M_k = \max_{t_{k-1} < \tau \leq t_k} \Phi(\tau, t-\tau) \quad (2.3)$$

$$m_k = \min_{t_{k-1} < \tau \leq t_k} \Phi(\tau, t-\tau)$$

Legyen $V_k(r)$ annak a valószínűsége, hogy a t időpontban pontosan r olyan történés van folyamatban, amely a JI_k időintervallumban kezdődött. Először bebizonyítjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\sum_{s=r}^{\infty} \binom{s}{r} W_s^{(k)} m_k^r (1 - M_k)^{s-r} \leq V_k(r) \leq \sum_{s=r}^{\infty} \binom{s}{r} W_s^{(k)} M_k^r (1 - m_k)^{s-r} \quad (2.4)$$

ahol

$$W_s^{(k)} = W_s(t_{k-1}, t_k).$$

Ha r olyan történés van folyamatban t időpontban, amelyek mind a JI_k időintervallumban kezdődtek, akkor ebben az intervallumban $s \geq r$ eseménynek kellett történnie; ha egy történés a τ időpontban kezdődött ($t_{k-1} < \tau \leq t_k$) akkor annak a valószínűsége, hogy még a t időpontban is tart, $\Phi(\tau, t-\tau)$; miután τ pontos értékét nem ismerjük, csak azt tudjuk, hogy JI_k -ban van, csak azt állíthatjuk, hogy ez a valószínűség m_k és M_k közé esik; hasonlóképpen, annak a valószínűsége, hogy a szóbanforgó történés t időpont előtt befejeződik, egyenlő $F(\tau, t-\tau)$ -val ahol τ valamely a JI_k intervallumba eső érték és így $F(\tau, t-\tau)$ az $1 - M_k$ és $1 - m_k$ határok közé esik.

Vezessük most be a következő függvényeket:

$$\chi^{(k)}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} V_k(r) z^r \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

Feltesszük, hogy $0 \leq z \leq 1$; (2.5)-ből (1.4)-ből és (1.9)-ből következik, hogy

$$\exp \left[\sum_{r=1}^{\infty} B_r(JI_k) ((m_k z + 1 - M_k)^r - 1) \right] < \chi^{(k)}(z) \leq \exp \left[\sum_{r=1}^{\infty} B_r(JI_k) ((M_k z + 1 - m_k)^r - 1) \right] \quad (2.6)$$

(Hogy a (2.6) jobboldalán a kitevőben álló sor konvergenciáját biztosítsuk, n -et oly nagyra választjuk, hogy $M_k < 2m_k$ legyen és feltesszük, hogy $z \leq \frac{1}{2}$). Jelölje

$$\mu_k = \sum_{r=1}^{\infty} r B_r(JI_k) \quad (2.7)$$

$\zeta_{t_k} - \zeta_{t_{k-1}}$ várható értékét (μ_k létezését feltételeztük). Könnyen nyerjük, hogy

$$\chi^{(k)}(z) = \exp [-\psi(t_{k-1}, t_k, m_k z + 1 - M_k) + \mathcal{G} \mu_k (M_k - m_k)] \quad (2.8)$$

ahol $|\mathcal{G}| \leq 1$.

Jelölje most $p_N(t)$ annak a valószínűségét, hogy a t időpontban pontosan N történéis legyen folyamatban.

Nyilvánvalóan

$$p_N(t) = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_n=N} V_1(r_1) V_2(r_2) \dots V_n(r_n) \quad (2.9)$$

ahol az összegezés a pozitív egész számok valamennyi olyan ismétléses n -rendű variációjára terjesztendő ki, amelyekre $r_1 + r_2 + \dots + r_n = N$. Legyen

$$\chi(z, t) = \sum_{N=0}^{\infty} p_N(t) z^N \quad (2.10)$$

$\chi(z, t)$ az η_t valószínűségi változó generátorfüggvénye. (2.9) miatt

$$\chi(z, t) = \prod_{k=1}^n \chi^{(k)}(z) \quad (2.11)$$

és így (2.8)-ra való tekintettel

$$\chi(z, t) = \exp \left[- \sum_{k=1}^n \psi(t_{k-1}, t_k, m_k z + 1 - M_k) + \mathcal{G} \sum_{k=1}^n \mu_k (M_k - m_k) \right] \quad (2.12)$$

ahol $|\mathcal{G}| \leq 1$.

Ha most $n \rightarrow \infty$, akkor (2.12) jobboldalán az exponensben álló második tag 0-hoz tart, míg az első tag határértéke:

$$\pi(z, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^t c_r(\tau) [(\Phi(\tau, t-\tau) z + 1 - \Phi(\tau, t-\tau))^r - 1] d\tau. \quad (2.13)$$

Ezért

$$\chi(z, t) = e^{\pi(z, t)} \quad (2.14)$$

Egyszerű átrendezéssel adódik

$$\pi(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) (z^k - 1) \quad (2.15)$$

ahol a $d_k(t)$ együtthatókat (2.2) definiálja; így a 2. tételt bebizonyítottuk.

Megemlítjük, hogy ha $c_k(\tau) \equiv 0$ ha $k = 2, 3, \dots$ vagyis ha a szóbanforgó folyamat közönséges Poisson-folyamat, akkor (lásd 2)

$$\pi(z, t) = \left(\int_0^t c_1(\tau) \Phi(\tau, t - \tau) d\tau \right) (z - 1) \quad (2.16)$$

s ezért η_t is Poisson-eloszlást követ. Általánosabban, nevezzük az összetett Poisson-eloszlást D -ed fokúnak, ha $c_n(\tau) \equiv 0$, ha $n > D$, akkor η_t eloszlásának a fokszáma egyenlő ζ_t eloszlásának fokszámával, (ez igaz $D = \infty$ -re is!)

3. § Összetett Poisson-eloszlásokhoz való konvergencia

3. tétel: Legyenek $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ nem-negatív, független, egész értékű valószínűségi változók, ($n = 1, 2, \dots$), amelyek „végtelenül kicsinyek“, vagyis tegyük fel, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} P(\xi_{nk} \neq 0) = 0. \quad (3.1)$$

Legyen

$$X_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n} \quad (3.2)$$

és $p_{nk_s} = P(\xi_{nk} = s)$, végül pedig $c_{n,s} = \sum_{k=0}^{k_n} p_{nk_s}$. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az X_n összegek eloszlásai egy határeloszláshoz konvergáljanak az, hogy létezzenek nem-negatív $c_1, c_2, \dots, c_s, \dots$ számoknak egy olyan sorozata, amely a következő tulajdonsággal bír:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{n,s} - c_s| = 0. \quad (3.3)$$

Ha (3.3) teljesül, akkor X_n eloszlásfüggvénye $n \rightarrow \infty$ -re ahhoz az összetett Poisson-eloszláshoz konvergál, amelynek a generátorfüggvénye

$$g(z) = \exp \left[\sum_{s=1}^{\infty} c_s (z^s - 1) \right] \quad (3.4)$$

Bizonyítás: A 3. tételt B. V. Gnnyegyenko és A. N. Kolmogorov következő fontos tételéből (3 25. §-ának 1. tétele) fogjuk levezetni: Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy konstansoknak egy A_n ($n = 1, 2, \dots$) sorozata létezzen, amelyek $X_n - A_n = X'_n$ eloszlásfüggvényének a konvergenciáját biztosítják, ahol X_n (3.2) által van definiálva és a ξ_{nk} változók végtelenül kicsinyek, $F_{n,k}(x)$ -el jelölve ξ_{nk} eloszlásfüggvényét, a következő: létezzenek

oly nem-csökkenő $M(u)$ ($-\infty < u < 0$; $M(-\infty) = 0$) és $N(u)$ ($0 < u < \infty$; $N(\infty) = 0$) függvények, amelyek korlátos ingadozásuak és léteznek egy σ konstans, úgy, hogy

a) $M(u)$ illetve $N(u)$ minden folytonossági pontjában

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(u) = M(u) \quad \text{ha } u < 0 \tag{3.5}$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(u) - 1) = N(u) \quad \text{ha } u > 0$$

$$b) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \left\{ \int_{|x| < \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x| < \varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} = \sigma^2 \tag{3.6}$$

továbbá (3.6) legyen érvényes akkor is ha $\overline{\lim}$ helyet $\underline{\lim}$ -et írunk.

Abban az esetben, ha a fenti feltételek teljesülnek, az A_n konstansokat a következőképpen választhatjuk:

$$A_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \tau} x dF_{nk}(x)$$

ahol τ tetszőleges olyan pozitív szám, hogy $-\tau$ és $+\tau$ az $M(u)$ illetve $N(u)$ függvényeknek folytonossági pontjai. Jelölje $f(t)$ X'_n határeloszlásának karakterisztikus függvényét, akkor

$$\begin{aligned} \log f(t) = & i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \\ & + \int_{-\infty}^0 \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dM(u) + \int_0^{\infty} \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dN(u) \end{aligned} \tag{3.7}$$

(*P. Lévy* formulája), ahol $M(u)$, $N(u)$ és σ jelentése ugyanaz, mint fentebb, míg γ egy valós konstans.

A mi esetünkben az a feltevés, hogy a ξ_{nk} valószínűségi változók „végtelenül kicsinyek“ *equivalens* a $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Min}_{1 \leq k \leq k_n} p_{nk0} = 1$ feltevással. Továbbá $F_{nk}(u) = 0$ ha $u < 0$, vagyis a) első feltétele teljesül ha $M(u) \equiv 0$ és $F_{nk}(u) = \sum_{s < u} p_{nks}$ ha $u > 0$ és ezért $\sum_{s=0}^{\infty} p_{nks} = 1$ miatt

$$\sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(u) - 1) = - \sum_{s \geq u} c_{ns} \tag{3.8}$$

vagyis a) második feltétele *equivalens* a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{nu} = D_u, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0 \tag{3.9}$$

határértékreklációkkal, ahol $D_{nu} = \sum_{s \geq u} c_{ns}$.

(A D_n sorozat nyilvánvalóan nem-növekvő). A b) feltétel esetünkben nyilvánvalóan teljesül és $\sigma = 0$, mert a (3.6)-ban szereplő integrálok eltűnnek, ha

$\varepsilon < 1$. Hasonló meggondolásokból abban az esetben, ha (3.9) feltételei teljesülnek, feltehetjük, hogy $A_n \rightarrow 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Bevezetve a $C_n = D_n - D_{n+1}$ jelölést, (nyilván $c_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens) nyilvánvaló, hogy (3.9)-ből következik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_{n,s} - c_s) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

Ennek megfordítása természetesen nem igaz, azonban helyettesítsük a (3.10) feltételeket a következő egyetlen feltétellel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{n,s} - c_s| = 0. \quad (3.11)$$

Könnyen belátható, hogy (3.11) equivalens a (3.9) feltételekkel. Valóban, bebizonyítjuk, hogy (3.11)-ből következik (3.9) és megfordítva. Ha (3.11) teljesül, akkor

$$|D_{n,u} - D_u| = \left| \sum_{s=u}^{\infty} (c_{n,s} - c_s) \right| < \sum_{s=u}^{\infty} |c_{n,s} - c_s| \quad (3.12)$$

vagyis (3.9) minden $u = 1, 2, \dots$ értékre igaz. Megfordítva (3.9)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} |c_{n,s} - c_s| &= \sum_{s=1}^{\infty} (c_{n,s} - c_s) + \\ &+ 2 \sum_{s=N}^{\infty} (c_s - c_{n,s}) < D_{n,1} - D_1 + 2 \sum_{s=N}^{\infty} c_s + 2N\varepsilon_n^{(N)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ahol $\sum_{s=N}^{\infty}$ mindazon s értékekre terjesztendő ki, amelyekre $c_s - c_{n,s} > 0$ és $\varepsilon_n^{(N)} = \max_{s=N}^{\infty} (c_s - c_{n,s})$ vagyis

$$\sum_{s=1}^{\infty} |c_{n,s} - c_s| < D_{n,1} - D_1 + 2D_N + 2N\varepsilon_n^{(N)} \quad (3.14)$$

Nyilván $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{(N)} = 0$, N minden rögzített értéke mellett, (3.10)-el megegyezően.

Válasszuk most N értéket elég nagyra, úgy, hogy $D_N < \frac{\varepsilon}{6}$ legyen és azután

n_0 értékét oly nagyra, hogy ha $n \geq n_0$, $|D_{n,1} - D_1| < \frac{\varepsilon}{3}$ és $\varepsilon_n^{(N)} < \frac{\varepsilon}{6N}$ legyen; következik, hogy (3.14) jobboldala $< \varepsilon$, ha $n > n_0$ ami (3.11)-el equivalens.

Vagyis, *B. V. Gnyegyenko* és *A. N. Kolmogorov* tételének feltételei $M(u) = 0$ és $N(u) = -\sum_{z \geq u} c_z$ és $\sigma = 0$ mellett akkor és csak akkor teljesülnek, ha (3.3) fennáll s így X_n eloszlása egy olyan határeloszláshoz konvergál, amelynek karakterisztikus függvénye $f(t)$ ahol

$$\begin{aligned} \log f(t) &= i\gamma t + \int_0^{\infty} \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dN(u) + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} c_s (e^{ist} - 1) + it \left(\gamma - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{sc_s}{1+s^2} \right). \end{aligned}$$

Miután X_n csak nem-negatív egész értékeket vesz fel $\gamma = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{sc_s}{1+s^2}$, és így

$$f(t) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} c_s(e^{ist} - 1)\right)$$

ami $f(t) = \varphi(e^{it})$ miatt (3.4)-el equivalens. Ezzel a 3. tételt bebizonyítottuk.

E határértéktétel az összetett Poisson-eloszlás újabb gyakorlati alkalmazásainak felismeréséhez segít hozzá.

Tekintsük két vagy több szemcsés anyagnak a keverékét, amelyeknek a fajsúlyai különbözők. Tegyük fel például, hogy csak két anyag van, amelyek fajsúlyának aránya 1 : 2. A keverék fajsúlyja nyilván a komponensek fajsúlyának súlyozott középértéke, a „súlyok“ arányosak az egyes komponensek mennyiségével (térfogatával). Azonban, ha a keverék kisebb részének térfogatát vizsgáljuk, tekintetbe véve, hogy a keverés általában nem lesz tökéletes, azt fogjuk találni, hogy az említett középérték körül ingadozások vannak. Egy taláalomra kivett térfogatrész fajsúlyja valószínűségi változónak tekintendő, amelynek vizsgálhatjuk eloszlását. Könnyen szerkeszthetünk egy olyan egyszerű urna-modellt, amelyik az említett probléma modelljéül szolgálhat és a 3. tételből következik, hogy a keverék kiválasztott kis térfogatrészének a fajsúlyja összetett Poisson-eloszlást fog követni, amelynek generátorfüggvénye $\exp(c_1(z-1) + c_2(z^2-1))$. Ugyanez a megfontolás alkalmazható két vagy több fémből álló ötvözet részeinek fajsúlyára is.

4. § Az összetett Poisson-eloszlások jellemzése

Végül be fogjuk bizonyítani a következő tételt, amely fényt vet a fenti eredményekre.

4. tétel: Az összetett Poisson-eloszlások osztálya jellemezhető, mint nem-negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változók azon korlátlanul osztható eloszlásainak osztálya, amely változók a 0 értéket pozitív valószínűséggel veszik fel.

Bizonyítás: Kiindulunk egy korlátlanul osztható eloszlás karakterisztikus függvényének kanonikus alakjából:

$$\log f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_{-\infty}^0 \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dM(u) + \int_0^{\infty} \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dN(u) \tag{4.1}$$

ahol γ és σ valós számok, $M(u)$ és $N(u)$ a $(-\infty, 0)$ ill. $(0, +\infty)$ intervallumokban nem csökkenő és korlátos ingadozású függvények, továbbá $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$. Egy Poisson-eloszlás karakterisztikus függvényének a loga-

ritmusa :

$$\log f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{int} - 1) \quad (4.2)$$

alakú, ahol $c_n \geq 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. (4.1)-ban $\sigma = 0$ és $M(u) \equiv 0$ helyettesítéssel,

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nc_n}{1+n^2} \text{ és } N(u) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (u > 0) \text{ mellett, azt kapjuk, hogy minden}$$

összetett Poisson-eloszlás korlátlanul osztható. (Valóban, ez abból is belátható, hogy minden összetett Poisson-eloszlás véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok többszörös Poisson-eloszlás kompozíciója (lásd 1). Megfordítva, tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változó csak nem-negatív egész értékeket vesz fel és eloszlása korlátlanul osztható, vagyis ξ minden $n = 2, 3, \dots$ -ra előállítható

$\xi = \sum_{k=1}^n \eta_k$ alakban, ahol az $\eta_k (k = 1, 2, \dots, n)$ változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Tudjuk, hogy ha $f(t)$ jelöli ξ karakterisztikus függvényét, akkor

$\log f(t)$ a (4.1) alakban állítható elő. Nyilván $\sigma = 0$, mert különben ξ eloszlásfüggvénye folytonos volna. Valóban, legyen $f(t) = f_1(t)f_2(t)$, ahol

$$f_2(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \text{ Mivel } f_2(t) \text{ az } F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \text{ normális eloszlás}$$

karakterisztikus függvénye, ha $F(x)$ ξ eloszlásfüggvényét jelenti és $F_1(x)$ annak a korlátlanul osztható eloszlásnak az eloszlásfüggvényét, amelynek a karakterisztikus függvénye $f_1(t)$, nyerjük, hogy

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x-y) dF_1(y).$$

Tekintetbe véve, hogy $|F_2(a+h) - F_2(a)| \leq \frac{|h|}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ ($-\infty < a < \infty$) következik,

hogy $|F(x+h) - F(x)| \leq \frac{|h|}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, vagyis $F(x)$ folytonos, ami ellentmond annak

a feltevésnek, hogy ξ csak nem-negatív egész értékeket vesz fel. Minthogy azonban

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{ikt} \quad (A_k = P(\xi = k)) \quad (4.3)$$

láthatjuk, hogy $f(2\pi) = 1$ s ezért $\log f(2\pi)$ valós része eltűnik. Ezért

$$\int_{-\infty}^0 (\cos 2\pi u - 1) dM(u) + \int_0^{\infty} (\cos 2\pi u - 1) dN(u) = 0. \quad (4.4)$$

Tekintettel arra, hogy $M(u)$ és $N(u)$ nemcsökkenőek, és $\cos 2\pi u - 1 < 0$, ha $u \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ következik, hogy $M(u)$ ill. $N(u)$ csak negatív, illetve pozitív egész u értékre növekedhetnek. Ezért írhatjuk, hogy

$$\log f(t) = it\gamma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{int} - 1) \quad (4.5)$$

ahol $\sum^{\gamma'}$ azt jelenti, hogy az összegezés nem terjed ki az $n=0$ értékre, és $\gamma' = \gamma - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{nc_n}{1+n^2}$. Azonban könnyen belátható, hogy abban az esetben, ha a $c_{-n} (n=1, 2, \dots)$ együtthatók nem tűnnek el mind, akkor ξ negatív egész értékeket is felvesz: valóban

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{it(n-\gamma')} &= \exp \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (e^{int} - 1) \right) = \\ &= \exp \left(- \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \right)^k}{k!} \end{aligned} \tag{4.6}$$

és miután $c_n \geq 0$ ha $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ha valamely $n > 0$ -ra $c_{-n} \neq 0$ volna, akkor találnánk e^{it} -nek tetszőlegesen nagy negatív hatványát pozitív együtt-hatóval. Ezért $c_{-n} = 0$ ha $n = 1, 2, \dots$. Mivel feltettük, hogy $A_0 \neq 0$ azt kapjuk, hogy (4.6) baloldalán az e^{it} legalacsonyabb hatványát tartalmazó tag $A_0 e^{-it\gamma'}$; mivel (4.6) jobboldalán az e^{it} -ben legalacsonyabb fokú tag konstans, tehát kell hogy $\gamma' = 0$ legyen, s ennek megfelelően

$$\log f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{int} - 1) \tag{4.7}$$

Miután feltételeztük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -N(o)$ véges, következik, hogy (4.6) egy összetett Poisson eloszlás karakterisztikus függvénye; a 4. tételt ezzel bebizonyítottuk. Megemlítjük, a következő korolláriumot: *Ha az $F(x)$ összetett Poisson eloszlás $F_1(x)$ és $F_2(x)$ korlátlanul osztható eloszlások kompozíciója, amelyeknek pozitív ugrása van $x=0$ -nál, akkor ezek is összetett Poisson eloszlások, amelyeknek a fokszáma nem haladja meg $F(x)$ foksámát.* A bizonyítás nyilvánvaló.

Ez egy Poisson eloszlásokra vonatkozó jól ismert tény általánosítása. (lásd ³ 18. §)

Kiemeljük, hogy ¹ 3. §-ának a tétele egyszerű következménye a 4. tételnek.

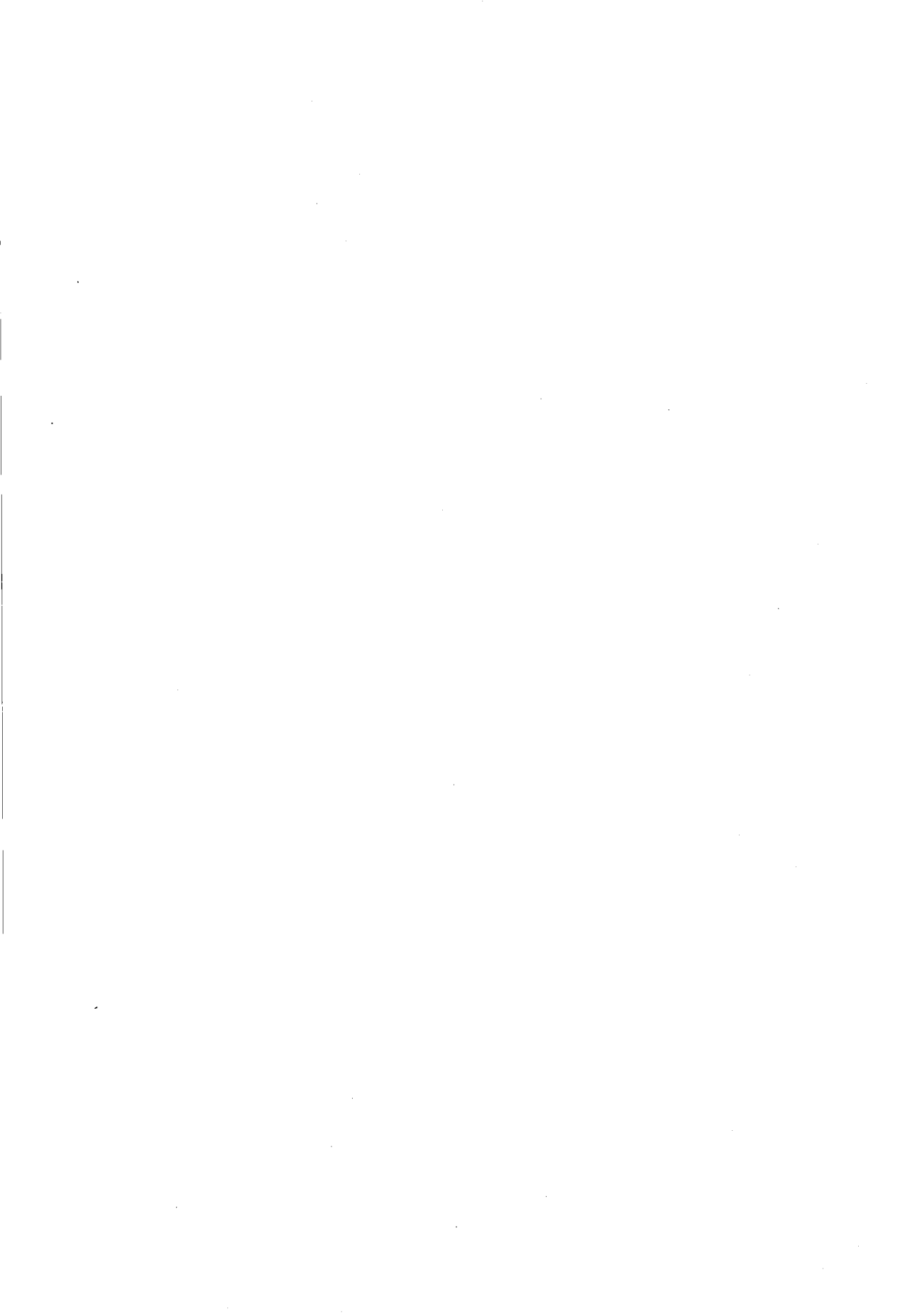
Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

¹ Jánossy L., Rényi A. és Aczél J.: Összetett Poisson eloszlásokról I. (ebben a füzetben 315–328.)

² Rényi A.: On general inhomogeneous Markov processes of random events, Publicationes Mathematicae. 2 (1951). 66–73.

³ B. V. Gnypnyenko és A. N. Kolmogorov: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai, Akadémiai Kiadó 1951.



A LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ ÁLTALÁNOSÍTÁSA A VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁSBAN

JÁNOSSY LAJOS akadémikus

Előadta az 1951. június 11-én tartott osztályülésen

1. § A Laplace-transzformáció előnyösen alkalmazható egyes valószínűségi számítási problémáknál. A következőkben meg fogjuk mutatni, hogy az e transzformációra vonatkozó jólismert módszerek egy általánosabb módszer speciális esetei.

A Laplace-transzformációt független valószínűségi eloszlások szuperpozíciójaként előálló eredő eloszlás meghatározására használják. Tekintsünk k számú eloszlást, melyeknek sűrűségfüggvényei legyenek rendre $a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)$. Tegyük fel, hogy $a(x) = 0$, ha $x < 0$, bár ez a feltevés könnyen elejthető. Most meghatározzuk azt az $A_k(X)$ eloszlást, mely megadja a valószínűségét annak, hogy a k számú eloszlás mindegyike egyidejűleg olyan x_1, x_2, \dots, x_k értékeket ad, hogy

$$X \leq x_1 + x_2 + \dots + x_k < X + dX. \quad (1)$$

Az $A_k(X)$ eloszlás tehát a következő formulával van adva:

$$A_k(X) dX = \int_{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k < X + dX} a_1(x_1) a_2(x_2) \dots a_k(x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_k. \quad (2)$$

A fenti integrál Laplace-transzformáltját könnyen kiszámíthatjuk, azt találjuk, hogy

$$L_{A_k}(\lambda) = L_{a_1}(\lambda) L_{a_2}(\lambda) \dots L_{a_k}(\lambda), \quad (3)$$

ahol

$$L_{A_k}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} A_k(x) dx, \quad L_{a_i}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} a_i(x) dx \quad (4)$$

($i = 1, 2, \dots, k$). A fenti reláció különösen egyszerű lesz, ha az $a_1(x), \dots, a_k(x)$ eloszlásokat egyenlővé tesszük egymással: $a_1(x) = a_2(x) = \dots = a_k(x)$. Ebben az esetben $L_{a_1}(\lambda) = L_1(\lambda)$ és $L_{A_k}(\lambda) = L_k(\lambda)$ jelöléssel egyszerűen azt kapjuk, hogy

$$L_k(\lambda) = [L_1(\lambda)]^k. \quad (5)$$

Az (5)-ből az első és második szemi-invariánsra a következő értéket kapjuk:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L_k(\lambda) \right]_{\lambda=0} = kA,$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L_k(\lambda) \right]_{\lambda=0} = kB,$$

ahol

$$A = -L_1'(0) = \int_0^x x a_1(x) dx,$$

$$B = L_1''(0) = \int_0^x (x-A)^2 a_1(x) dx.$$

Tehát a k -szoros eloszlás átlagértéke és szórása pontosan k -szorosa az egyes eloszlásokénak. A (3) inverz transzformáltja így írható:

$$A_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\lambda x} [L_1(\lambda)]^k d\lambda. \quad (6)$$

k elég nagy értékeire (6) asszimptotikus alakja

$$A_k(x) \sim \frac{1}{2\pi k B} e^{(x-kA)^2/2kB},$$

feltéve, hogy $|x-kA|$ nem nagyon nagy. Így tehát A_k a Laplace-transzformáció segítségével mind k mérsékeltén nagy értékeire, mind a $k \gg 1$ asszimptotikus esetben meghatározható.

Az (5) és (6) egyenletek általánosíthatóak. Az $A_k(x)$ pontosan k esemény szuperpozíciója által előálló eredő eloszlás. Gyakran azonban maga az események száma is valószínűségi eloszlást követ. Tegyük fel, hogy pontosan k esemény bebövetkezésének valószínűsége p_k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Ekkor az eredő eloszlás az A_k -k szuperpozíciója lesz, mégpedig

$$A(x) = \sum_k p_k A_k(x).$$

Az $A(x)$ transzformáltja, $L(\lambda)$, így írható tehát:

$$L(\lambda) = f[L_1(\lambda)], \quad (7)$$

ahol

$$f(u) = \sum_k p_k u^k.$$

$f(u)$ a p_k -eloszlás generátorfüggvénye; az inverziós képletet alkalmazva:

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\lambda x} f[L_1(\lambda)] d\lambda. \quad (8)$$

Fontos különleges eset az, melynél az eloszlások száma Poisson eloszlást követ, azaz

$$p_k = e^{-\nu} \frac{\nu^k}{k!} \text{ és } f(u) = e^{\nu(u-1)}.$$

Ilyenkor

$$L_\nu(\lambda) = e^{\nu[L_1(\lambda)-1]}$$

és az átlagértéket ill. szórást kifejező szemi-invariánsok

$$\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L_p(\lambda) \right]_{\lambda=0} = -pA,$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L_p(\lambda) \right]_{\lambda=0} = p(B + A^2).$$

Maga az inverz transzformáció pedig így írható:

$$A_p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\lambda x + p[L_p(\lambda) - 1]} d\lambda. \tag{9}$$

Az utóbbi eloszlás ismét asszimptotikusan normális, $p \rightarrow \infty$ -re. Szokásos módon azt kapjuk, hogy

$$A_p(x) \sim \frac{e^{-(x-pA)^2/2p(B+A^2)}}{\sqrt{2\pi(B+A^2)p}}. \tag{10}$$

Az összeg szórása tehát nagyobb, mint egy tag szórása szorozva a tagok számának átlagával.

2. § Az utóbbi megfontolások tovább általánosíthatók. Tekintsünk egy k tagból álló stacionér Markov-féle láncot. $a(x, y)$ legyen a valószínűségi-sűrűsége annak, hogy valamelyik lépésnél az $x \rightarrow y$ átmenet történik. k lépésben történő $X \rightarrow Y$ átmenet valószínűsége tehát így írható:

$$A_k(X, Y) = \int \dots \int a(X, x_1) a(x_1, x_2) \dots a(x_{k-1}, Y) dx_1 dx_2 \dots dx_{k-1}. \tag{11}$$

Abban a speciális esetben, amikor

$$a(x, y) = a(x - y), \tag{12}$$

(11) a (2)-re redukálódik. ($a_1 = a_2 = \dots = a$). Ebben az utóbbi esetben az integrál Laplace-transzformáció segítségével számítható ki.

Másrészt azonban, ha $a(x, y)$ nem a speciális (12) alakú, akkor a (11) Laplace-transzformációja nem vezet célhoz. A következőkben azonban megmutatjuk, hogy (11) egy általánosabb transzformációval kiszámítható. Tekintsük $a(x, y)$ -t a következő másodfajú integrálegyenlet magjának:

$$\varphi_s(y) - s \int \varphi_s(x) \cdot a(x, y) dx = 0, \tag{13}$$

vagy a konjugált

$$\psi_s(x) - s \int \psi_s(y) a(x, y) dy = 0 \tag{14}$$

egyenlet magjának.

(13) és (14) sajátfüggvényei felhasználhatók egy „általánosított Laplace-transzformáció“ értelmezésére. Valóban, ha azt írjuk, hogy:

$$\int \varphi_s(X) A_k(X, Y) dX = \Phi_k(s, Y) \tag{15}$$

vagy

$$\int \psi_s(Y) A_k(X, Y) dY = \Psi_k(s, X), \tag{16}$$

akkor (11), (13) és (14) segítségével a

$$\Phi_k(s, Y) = s^{-k} \varphi_s(Y), \text{ ill. } \Psi_k(s, X) = s^{-k} \psi_s(X) \quad (17)$$

egyenletre jutunk. A (17) egyenlet emlékeztet (5)-re. Az analógia még szembe-
szökőbb lesz, ha a φ_k -k és ψ_k -k között fennálló

$$\int \varphi_s(x) \psi_t(x) dx = 0 \quad s \neq t \quad (18)$$

orthogonalitási relációkat felhasználjuk, és feltételezzük legalább is egy pillanatra, hogy

$$\int \varphi_s(x) \psi_s(x) dx = 1. \quad (19)$$

Ebben az esetben (17), (18) és (19)-ből

$$\Phi_k(s) = s^{-k},$$

ahol

$$\Phi_k(s) = \iint \varphi_s(X) \psi_s(Y) A_k(X, Y) dX dY. \quad (20)$$

Így tehát a k tagból álló lánc transzformált eloszlása egyszerű alakban áll elő. (1 s az általános esetben megfelel $L_1(\lambda)$ -nak a speciális esetben).

Ha változó tagszámú láncsal volna dolgunk, és p_k a valószínűsége annak, hogy a lánc pontosan k tagból áll, akkor (18) segítségével (17) vagy (20) helyett azt kapjuk, hogy:

$$\Phi(s, Y) = \varphi_s(Y) \cdot f\left(\frac{1}{s}\right) \quad \Psi(s, X) = \psi_s(X) \cdot f\left(\frac{1}{s}\right) \quad (21)$$

és

$$\Phi_k(s) = f\left(\frac{1}{s}\right). \quad (22)$$

(Hogy visszajussunk a Laplace-transzformáció speciális esetéhez, ismét $f\left(\frac{1}{s}\right)$ -et $f[L_1(\lambda)]$ -val kell helyettesítenünk.)

Hogy az analógiát teljessé tegyük, meg kell találnunk az általánosított transzformáció inverzét. Írjuk le (21)-et explicit alakban, (feltételezve, hogy $f(s) \neq 0$)

$$\varphi_s(Y) - \frac{1}{f\left(\frac{1}{s}\right)} \int \varphi_s(X) A(X, Y) dX = 0$$

vagy

$$\psi_s(X) - \frac{1}{f\left(\frac{1}{s}\right)} \int \psi_s(Y) A(X, Y) dY = 0. \quad (23)$$

Összehasonlítva (23)-at (15)-el és (16)-al, azt látjuk, hogy $A(X, Y)$ olyan mag, melynek sajátfüggvényei ugyanazok mint az $a(x, y)$ mag sajátfüggvényei, de az s sajátértékeket $1/f\left(\frac{1}{s}\right)$ -sel kell helyettesíteni.

Mármost a magfüggvények nagy csoportja sajátfüggvényeinek teljes sorozata segítségével

$$a(x, y) = \sum_s \frac{\psi_s(x) \varphi_s(y)}{s} \tag{24}$$

alakú sorba fejthető. Az összegezés kiterjesztendő az összes s sajátértékekre, ha pedig a spektrum részben vagy egészen folytonos, akkor megfelelő integrációval kell helyettesíteni.

Posztulálva (24)-et, azonnal látjuk, hogy

$$A(X, Y) = \sum_s \psi_s(X) \cdot \varphi_s(Y) f\left(\frac{1}{s}\right), \tag{25}$$

feltéve, hogy (25) konvergál. (25)-öt (23)-ba helyettesítve természetesen azonosságokat kapunk, de (25) úgy is megszerkeszthető, hogy (24)-et (11)-be helyettesítjük és felhasználjuk az orthogonalitási relációkat.

Pontosan k tagból álló lánc különleges esetében

$$A_k(x, y) = \sum_s \frac{\psi_s(x) \varphi_s(y)}{s^k}. \tag{26}$$

Hogy a (26)-nak inverz transzformáció-alakot adhassunk, helyettesítsük be (17)-et (26)-ba és így azt találjuk, hogy

$$A_k(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) \psi_k(s, X). \tag{26a}$$

X -et állandó paraméternek tekinthetjük és (26a) megmutatja, hogyan lehet az $A_k(X, Y)$ függvényt $\psi_k(s, X)$ transzformáltjából kiszámítani. A (6), (8) és (9)-nek megfelelő általánosított inverz transzformációk tehát így írhatók:

$$A_k(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) \frac{1}{s^k} \psi_s(X)$$

és

$$A(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) \cdot f\left(\frac{1}{s}\right) \psi_s(X)$$

és ha a lánc tagjainak száma Poisson-eloszlást mutat, akkor azt kapjuk, hogy

$$A_{\nu}(X, Y) = \sum_s \varphi_s(Y) e^{\nu(1/s-1)} \psi_s(X).$$

Az analógia a fenti egyenletek és (6), (8), (9) között úgy értendő, hogy

$$\sum_s \left[\begin{matrix} \lambda_0 + i\infty \\ \lambda_0 - i\infty \end{matrix} \right], \quad \varphi_s(Y) \leftrightarrow e^{\lambda Y},$$

$$f\left(\frac{1}{s}\right) \leftrightarrow f[L_1(\lambda)]$$

és $\psi_s(X)$ súlyfüggvény, amely azért lép fel, mert a λ szerinti integráció helyett most s -re kell összegezni.

A (26) egyenlet felhasználható arra, hogy $k \rightarrow \infty$ esetében aszimptotikus eloszlást kapjunk. Ezt a következőkben mutatjuk meg. A (14) egyenletnek

mindig van egy triviális megoldása, nevezetesen $s = 1$, $\psi_s(y) \equiv 1$, valóban

$$\int a(x, y) dy \equiv 1 \quad (27)$$

egyszerűen az $a(x, y)$ sűrűségfüggvény szokásos normalálása. Továbbá $s = 1$ az abszolút értékben legkisebb sajátérték. Ez a következőképpen bizonyítható* (azzal a feltétellel, hogy a sajátfüggvények korlátosak): tegyük fel, hogy $|\psi_s(x)| \leq M$ -ben — az $x = x_0$ esetben áll egyenlőség —; (14)-ből

$$|\psi_s(x)| \leq |s| M = |s| |\psi_s(x_0)|.$$

$x = x_0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $|s| \geq 1$. Így tehát (14)-nek nincs $s = 1$ -nél abszolút értékben kisebb sajátértéke. Ha létezik legkisebb sajátérték, akkor az szükségképpen az $s = 1$. (24) szerint ez egyúttal a (13) legkisebb sajátértéke is. A (25) egyenlet tehát így írható (vegyük figyelembe, hogy minden generátorfüggvényénél $f(1) = 1$):

$$A(X, Y) = \varphi_1(Y) + \sum_{s \neq 1} \psi_s(X) \varphi_s(Y) f\left(\frac{1}{s}\right)$$

és abban a különleges esetben, ha $f(s) = s^k$,

$$A_k(X, Y) = \varphi_1(Y) + \sum_{s \neq 1} \frac{\psi_s(X) \varphi_s(Y)}{s^k}.$$

Ha az $s = 1$ izolált sajátérték, akkor k minden határon túl való növekedése esetén az összeg eltűnik és így

$$A_k(X, Y) \rightarrow \varphi_1(Y), \text{ ha } k \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Tehát az aszimptotikus eloszlás a (13) legkisebb sajátértékének megfelelő sajátfüggvény. Ha azonban az $s = 1$ nem izolált, hanem sajátértékek folytonos sávjának határa, akkor az aszimptotikus eloszlást nem szükségképpen a $\varphi_1(s)$ sajátfüggvény adja meg.

3. §. Mármost részletesen megmutatjuk, hogy hogyan áll elő a Laplace-transzformáció mint speciális eset.

A Laplace-transzformáció akkor hasznos, ha a mag (12) alakú, azaz ha a mag csak a változók különbségétől függ. Ebben a különleges esetben (13) így írható:

$$\varphi_s(y) = s \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s(x) a(x-y) dx, \quad (29)$$

$$\psi_s(x) = s \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_s(y) a(x-y) dy. \quad (30)$$

A fenti egyenletek formálisan kielégülnek a

$$\varphi_s(y) = e^{\lambda y}, \quad \psi_s(x) = e^{-\lambda x}, \quad \frac{1}{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda z} a(z) dz. \quad (31)$$

* Ezért a bizonyításért Rényi Alfrédnek kell köszönetet mondanom; hasonló bizonyításokat szoktak használni diszkrét Markov-láncok esetében.

kifejezések helyettesítésével. Ha korlátos sajátfüggvényekre szorítkozunk, akkor λ -t tiszta imaginárius mennyiségnek kell választanunk. Negatív z értékekre azonosan eltűnő $a(z)$ függvényekre szorítkozva azt kapjuk tehát, hogy

$$q_s(y) = e^{i\lambda y}, \quad \psi_s(x) = e^{i\lambda x}, \quad s = \frac{1}{L_1(i\lambda)}. \quad (32)$$

Ha (30)-at a különböző kifejezésekbe behelyettesítjük, világosan látjuk azokat az összefüggéseket, melyekre mint irányjelző analógiákra már rámutattunk. Részletesen:

(1). $L_1(0) = 1$, és mivel $a(z) \geq 0$, ez $L_1(i\lambda)$ maximális értéke, és $\frac{1}{s}$ -é is, így $q_1(x) = 1$ és $s = 1$ a legkisebb sajátérték.

(2). Behelyettesítve (32)-t (26a)-ba — normálástól eltekintve — megkapjuk az inverz Laplace-transzformációt.

(3). A (24), (25), (26) egyenletek azonosak az $a(x)$ -re, $A(x)$ -re és $A_k(\lambda)$ -ra szóló inverz transzformációkkal.

A Laplace-transzformáció esetében a $k \rightarrow \infty$ -re szóló aszimptotikus eloszlást nem $q_1(y)$ adja, mivel $s = 1$ nem izolált érték.

A Laplace-transzformáció esetében különböző $a_1(x), a_2(x) \dots a_k(x)$ valószínűség-sűrűségeket kapcsolhatunk láncná. Ezt azért lehet megtenni, mert a megfelelő sajátfüggvények nem függenek ezeknek a függvényeknek az alakjától, maga az $a(z)$ függvény alakja csak a sajátértékeket határozza meg. Az általános Markov-lánc különböző $a_1(x, y), a_2(x, y)$ s. i. t. átmeneti valószínűségekkel ismét csak akkor tárgyalható egyszerűen, ha ezek a függvények olyan magok, melyekhez pontosan ugyanazok a sajátfüggvények tartoznak. Ez lehetséges, pl. az $a(x, y)$ -nak és az $A_k(x, y)$ -nak azonos a sajátfüggvény-sorozata. Az a megszorítás azonban, hogy az $a_k(x, y), k = 1, 2, 3, \dots$ függvényeknek közös sajátfüggvény-rendszerük kell hogy legyen, általában igen erős.

4. § A Mellin-transzformációt kapjuk, ha azt követeljük, hogy

$$a(x, y) = a\left(\frac{y}{x}\right)$$

legyen. A Mellin-transzformáció esete azonban nem különbözik lényegesen a Laplace-transzformáció esetétől és speciális diszkusszió nem szükséges.

Egyszerű példa az, ahol $a(x, y)$ polinom. Tegyük fel pl., hogy

$$a(x, y) = \begin{cases} \sum_{r, \mu=0}^n a_{r, \mu} x^r y^\mu, & \text{ha } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A normálási feltétel azt adja, hogy $\sum_{\mu=0}^n \frac{a_{r, \mu}}{\mu+1} = \begin{cases} 1, & \text{ha } r = 0 \\ 0, & \text{ha } r \neq 0. \end{cases}$ A sajátfüggvény-párok:

$$q_s(y) = \sum_{r=0}^n q_{sr} y^r, \quad \psi_s(x) = \sum_{r=0}^n \psi_{sr} x^r.$$

Az s_k -k a (32)-nek (13) ill. (14)-be való behelyettesítésével nyert szekuláris egyenlet gyökei.

Egy konkrét példa a következő:

$$a(x, y) = 1 + x - 2xy.$$

A sajátfüggvények és sajátértékek az alábbiak:

s	$q_s(y)$	$\psi_s(x)$	$s \int q_s(y) \psi(y) dy$
1	$5-3y$	1	7
-6	$2y-1$	$7x-3$	7

A fenti példa mutatja az összes, eddig tárgyalt tulajdonságokat:

- (1) Az abszolút értékben legkisebb sajátérték a $\psi_s(x)$ -nek megfelelő $s = 1$.
- (2) $a(x, y)$ sajátfüggvényekből alkotott sorba fejthető:

$$1 + x - 2xy = \frac{5-3y}{7} - \frac{(2y-1)(7x-3)}{7}.$$

Az aszimptotikus eloszlás

$$\frac{5-3y}{7}.$$

Több tagból álló polinomok hasonlóképen tárgyalhatók.

*Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézet
Kozmikus Sugárzási Osztálya.*

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS KÖZPONTI HATÁRÉRTÉKTÉTELENEK EGY ÚJ ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

RÉNYI ALFRÉD lev. tag

Előadta az 1950 június 2-án tartott osztályülésem

(Székfoglaló előadás.)

Előadásomban egy újabb eredményemről fogok beszámolni a valószínűségi számítás köréből. A valószínűségi számítás iránti érdeklődésemet a Szovjetunióban végzett tanulmányaim során *A. N. Kolmogorov* és *Sz. N. Bernstein*, a valószínűségi számítás nagy mesterei keltették fel; a valószínűségi számítás terén az ő tanítványuk vagyok és nagy hálával tartozom nekik. Azok a vizsgálatok, amelyekről itt beszámolok, a valószínűségi számítás *Kolmogorov* által adott elméletéhez¹ kapcsolódnak, maga a kérdés feltevése is csak ennek az elméletnek a keretében lehetséges.

Ismeretes, hogy *Kolmogorov* a valószínűségi számításnak a mértékelméleten alapuló, axiomatikus felépítésével a valószínűségi számítás exakt matematikai elméletté tette és ugyanakkor alkalmazásainak körét is jelentősen kiszélesítette. *Kolmogorov* axiomatikus rendszere egy H alaphalmaz részhalmazainak T halmaztestén értelmezett $\mu(A)$ ($A \in T$) abszolút additív, nemnegatív és a $\mu(H) = 1$ feltételnek eleget tevő halmazfüggvényből indul ki, a T halmaztest elemeit eseményeknek, a $\mu(A)$ számot az A esemény valószínűségének nevezi. A valószínűségi számítás tárgyát olyan változó mennyiségek vizsgálata alkotja, amelyek valamely tömegjelenség jellemző adatait képezik, értékük esetről esetre változik, azonban értékészletük eloszlása ismeretes — az ilyen mennyiségeket valószínűségi változóknak nevezik. *Kolmogorov* elméletében a valószínűségi változó matematikai fogalma igen egyszerűen értelmezhető: valószínűségi változón olyan, a H halmazon értelmezett $\xi = \xi(a)$ ($a \in H$) függvényt értünk, amely μ -re vonatkozólag mérhető. Ugyancsak igen egyszerűen értelmezhető egy ξ valószínűségi változó várható értéke, $M(\xi)$, mint a ξ függvény μ szerinti integrálja:

$$M(\xi) = \int_H \xi d\mu. \quad (1)$$

A következőkben fel fogjuk tenni, hogy μ Lebesgue-mérték, azaz szeparábilis és teljes, továbbá, hogy μ folytonos mérték. Az absztrakt Lebesgue-mérték elméletére itt nem térhetünk ki, csak megemlítjük, hogy a bizonyítás során felhasználjuk *V. A. Rohlin* ezirányú újabb eredményeit².

Emlékeztetbe idézzük a valószínűségi változók függetlenségének definícióját: jelentse $A(x)$ a $\xi < x$ eseményt és $B(y)$ az $\eta < y$ eseményt, ahol x és y valós számok; a ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük függetleneknek,

ha x és y minden értéke mellett fennáll a

$$\mu(A(x)B(y)) = \mu(A(x))\mu(B(y)) \quad (2)$$

egyenlőség. Az $F(x) = \mu(A(x))$ függvényt a ξ változó eloszlásfüggvényének nevezzük; ezek szerint a ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük függetleneknek, ha együttes eloszlásfüggvényük a két változó eloszlásfüggvényének szorzatával egyenlő.

A valószínűségszámításnak a gyakorlati alkalmazások szempontjából rendkívül fontos eredményei egy csoportját a valószínűségszámítás centrális határértéktétele néven szokták összefoglalni. A centrális határértéktétel, amelynek legegyszerűbb eseteit *Moivre* (1730) és *Laplace* (1812) bizonyították be, azután *Csebisev* (1887), *Markov* (1898) és *Ljapunov* (1900) általánosították, az utolsó ötven év folyamán állandóan az érdeklődés középpontjában volt; a centrális határértéktétel különböző irányokba való kiterjesztése és élesítése terén meg kell említenünk *Lindeberg*, *Bernstein*, *Kolmogorov*, *Cramér*, *Doob*, *Feller*, *Hincsin*, *Gnyegyenko*, *Petrovszkij*, *Esseen*, és *Linnik* neveit a kérdés rendkívül gazdag irodalmából. A centrális határértéktétel következő fogalmazásából indulunk ki: ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ valószínűségi változók függetlenek, mindegyik középértéke $M(\xi_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) és

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n}, \quad (3)$$

ahol

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n M(\xi_k^2) \cdot M\left(\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)^2\right) \quad (4)$$

akkor igen általános feltételek mellett (amelyek részletezésére itt nem térhetünk ki, de nem is lesz rá szükségünk) a ζ_n valószínűségi változó eloszlásfüggvénye konvergál a normális (vagy Gauss-féle) eloszláshoz, másszóval, ha $A_n(x)$ jelenti a $\zeta_n < x$ eseményt,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x). \quad (5)$$

Ezek előrebocsátása után rátérek a vizsgálataim tárgyát képező kérdésekre: Ha a H alaphalmazon értelmezett μ mértéket egy másik μ' mértékkel cseréljük fel, hogyan módosul a ζ_n változók határeloszlása, másszóval, ha az $A_n(x)$ halmazok mértékét egy másik μ' mértékkel mérjük, fog-e létezni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(A_n(x)) \quad (6)$$

és mi lesz az értéke, amennyiben létezik? Annak ellenére, hogy a kérdés igen kézenfekvő, tudomásom szerint eddig nem vizsgálták.

Ami a kérdés vizsgálatánál először szembetűnik, az, hogy a μ' mértékre vonatkozólag a ξ_n változók általában nem lesznek többé függetlenek, meg-

változik $M(\xi_n)$ értéke és $M(\xi_n^2)$ értéke is; ezek alapján azt várhatnánk, hogy a (6) határérték létezéséről általában nem lehet beszélni, és azt hihetné valaki, hogy a határeloszlás, még ha létezik is, lényegesen eltérhet a normális eloszlástól. Sikertült azonban kimutatnom, hogy a várakozással ellentétben, igen általános feltételek mellett* a (6) határérték a μ' mérték választásától függetlenül a $\Phi(x)$ normális eloszlásfüggvénygel egyenlő. Ez a tétel tehát nem-független valószínűségi változók összegeire általánosítja a valószínűségszámítás centrális határértéktételét; a nem-független valószínűségi változók bizonyos osztályára a centrális határértéktételeket elsőnek *Bernstein* terjesztette ki.³

Tételünk és *Bernstein* eredményei kapcsolatának megvizsgálására más alkalommal térünk ki. Hogy a fentemlített tételt pontosan megfogalmazhassuk, egy új fogalmat kell bevezetnünk, a maximális sorozatok fogalmát. Tegyük fel, hogy a ξ_n változók mindegyike csak véges sok különböző értéket vesz fel, mégpedig legyen $\xi_n = \xi_n(a) = x_{n,k}$ ha $a \in A_{n,k}$ ($k = 1, 2, \dots, h_n$). A valószínűségi változók $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ sorozatát maximálisnak nevezzük, ha az $\{A_{n,k}\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots; k = 1, 2, \dots, h_n$) halmazrendszer a μ mértékre vonatkozólag bázist alkot a H alaphalmazon; ezzel teljesen ekvivalens a következő definíció: a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ valószínűségi változók sorozatát akkor nevezzük maximálisnak, ha abból, hogy $\xi_n(a) = \xi_n(b)$ n minden pozitív egész értékére, $a = b$ következik. Ha például a H alaphalmaz az $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ valós szám-sorozatok összesége, és a ξ_n valószínűségi változót úgy definiáljuk, hogy $\xi_n(a) = a_n$ (1. pl. *Kolmogorov* idézett munkáját 25. o.), akkor ez a $\{\xi_n\}$ sorozat maximális.

Ezek után megfogalmazhatjuk eredményünket:

Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ valószínűségi változók függetlenek, tegyük fel, hogy minden ξ_n csak véges sok különböző értéket vesz fel, továbbá, hogy $\{\xi_n\}$ maximális sorozat. Legyen $M(\xi_n) = 0$ és $B_n^2 = \sum_{k=1}^{h_n} M(\xi_k^2)$, továbbá

$$\xi_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n};$$

tegyük fel, hogy $B_n \rightarrow \infty$, és hogy ha $A_n(x)$ jelenti a $\xi_n < x$ eseményt, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n(x)) = \Phi(x). \quad (7)$$

Ha a μ' mérték a μ mértékre nézve abszolút folytonos, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu'(A_n(x)) = \Phi(x) \quad (8a)$$

is fennáll.

A fenti tétel bizonyítására nem térek ki részletesen, csak annyit említek meg, hogy a következő segéd-tételen alapszik: Ha A tetszőleges esemény és

* Időközben A. N. *Kolmogorov* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadásában eredményeimet messzemenően általánosította (Megjegyzés a korrekturánál).

(7) érvényes, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(A \cdot A_n(x)) = \mu(A) \cdot \Phi(x) \quad (8b)$$

(feltehetjük, hogy $\mu(A) > 0$ hiszen ha $\mu(A) = 0$, az állítás triviális).

Az ergodikus elméletben az olyan T transzformációt, amelyre fennáll, hogy tetszőleges A és B mérhető halmazokra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(T^n A \cdot B) - \mu(A)\mu(B)] = 0 \quad (9)$$

erősen keverőnek nevezik. Ezen elnevezés mintájára nevezzük a mérhető halmazok egy A_n sorozatát általában erősen keverőnek, ha $\mu(A_n) > \alpha > 0$ és minden B mérhető halmazra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(A_n B) - \mu(A_n)\mu(B)] = 0 \quad (10)$$

fennáll; ezen definíció alapján az említett segédtelet úgy is fogalmazhatjuk, hogy az $A_n(x)$ halmazok sorozata x minden értékére erősen keverő. Ennek a segédteletnek egy másik, talán még meglepőbb fogalmazása a következő: a ξ_n változók sorozata határértékben tetszőleges r valószínűségi változótól független; ezt úgy láthatjuk be, hogy (8)-ban A helyébe helyettesítjük az $r < y$ eseményt.

Hogy egy konkrét példát említsünk, legyen H a $(0, 1)$ intervallum, μ a közös Lebesgue-mérték és $\xi_n(t) = \text{sg} \sin 2^n \pi t$ az n -ik *Rademacher* függvény. Ebben az esetben $B_n = \sqrt[n]{n}$, és a tétel összes feltételei teljesülnek, mert hiszen ismeretes, hogy

$$t = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n(t)}{2^{n+1}}, \quad (11)$$

és így ha $\xi_n(t_1) = \xi_n(t_2)$ ($n = 1, 2, \dots$), akkor $t_1 = t_2$. Ebben az esetben tehát tételünk azt mondja ki, hogy ha $A_n(x)$ a $(0, 1)$ intervallum azon t pontjainak halmazát jelenti, amelyekre

$$\frac{\xi_1(t) + \xi_2(t) + \dots + \xi_n(t)}{\sqrt{n}} < x, \quad (12)$$

(másszóval azon t valós számok összesége, amelyek diadikus kifejtésében az első n jegy között a nullák és egyesek számának különbsége kisebb, mint $x\sqrt{n}$), akkor ha $\mu(A)$ tetszőleges abszolút folytonos mérték, azaz

$$\mu(A) = \int_A \lambda(t) dt \quad (13)$$

ahol a $\lambda(t)$ nemnegatív függvény *Lebesgue* szerint mérhető és

$$\int_0^1 \lambda(t) dt = 1, \quad (14)$$

akkor

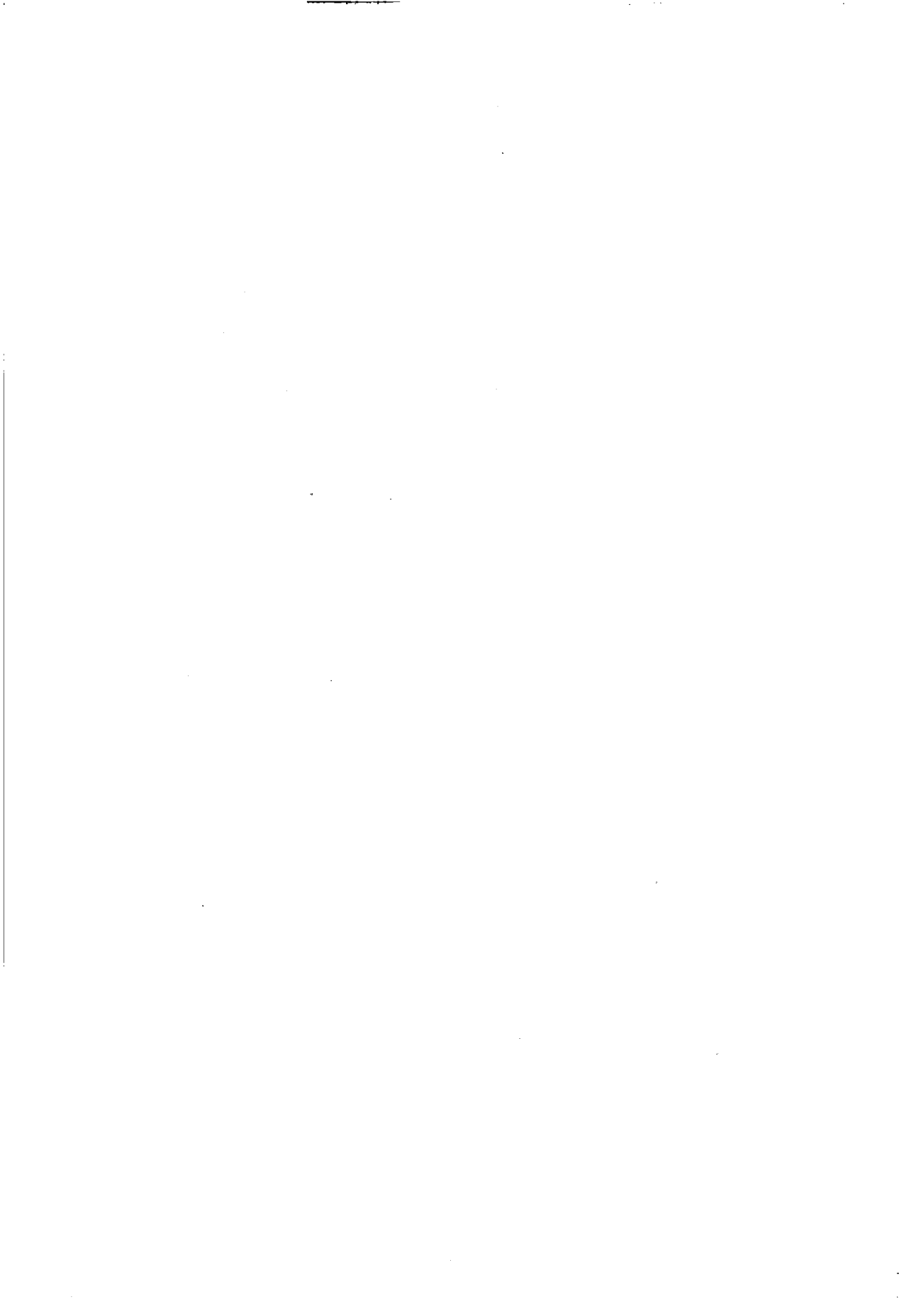
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n(x)) = \Phi(x). \quad (15)$$

Hogy még jobban konkretizáljuk tételünk állítását, legyen (13)-ban $\lambda(t) = \frac{1}{r} t^{\frac{1}{r}-1}$ ahol $r > 0$, akkor azon t valós számok halmazának mértéke, amelyek r -ik hatványát a diadikus számrendszerbe kifejtve az első n jegy között a nullák és egyesek számának különbsége $< x \lfloor \frac{1}{n}$, konvergál $\Phi(x)$ -hez, ha $n \rightarrow \infty$.

Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.

IRODALOM

- ¹ A. N. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1933
² В. А. Рохлин: Об основных понятиях теории меры. Математический Сборник 25 (67): 1 (1949), стр 107—150.
³ S. Bernstein, Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes des quantités dependantes, Math. Ann. 97 (1928) 1—59.



EGY AZ ELEKTRONSOKSZOROZÓ ELMÉLETÉBEN FELLÉPŐ SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATRÓL

JÁNOSSY LAJOS r. tag

Előadta az 1951 június 11.-én tartott osztályülésem

1. § Az elektronkaskád fluktuációja egy elektronsokszorozóban tipikus sztochasztikus folyamat; *Faragó P.* és *Takács L.*¹ és tőlük függetlenül *Frisch** tárgyalta. A probléma a következőképpen fogalmazható meg. A sokszorozó egyik lemezére eső elektron másodlagos elektronokat kelt. k elektron keltésének valószínűsége $p(k)$. Mindegyik elektron ráesik a következő lemezre és mindegyik a többitől függetlenül újabb másodlagos elektronokat kelt. Feladat kiszámítani annak valószínűségét, hogy egy N lemezből álló sokszorozóból ν elektron lép ki. Ezt a valószínűséget jelöljük $p(N, \nu)$ -vel.

A $p(N, \nu)$ eloszlást rekurzió segítségével számíthatjuk ki,

$$p(N, \nu) = \sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = \nu \\ k=0, 1, 2, \dots}} p(N-1, k) p(\nu_1) p(\nu_2) \dots p(\nu_k). \quad (1)$$

Valóban a fenti összeg általános tagja annak valószínűsége, hogy az $N-1$ -ik lépésben k elektron volt és ezek mindegyike rendre $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ elektront keltett. Mindezeknek a valószínűségeknek összege a teljes valószínűsége annak, hogy a N -ik lépésben ν elektront találunk.

Hogy az (1) rekurziós formulát teljessé tegyük, követelnünk kell mint kezdeti feltételt, hogy az első lemez pontosan egy elektront kapjon. Ezt a követelést formailag a következőképpen fejezhetjük ki:

$$p(0, \nu) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \nu \neq 1 \\ 1, & \text{ha } \nu = 1. \end{cases} \quad (2)$$

2. § Az (1) és (2) egyenletek tökéletesen definiálják a $p(N, \nu)$ valószínűségeket, feltéve, hogy $p(\nu)$ adva van. $p(\nu)$ specializálása nélkül csak annyit teszünk fel, hogy $0 < p(0) < 1$, és hogy mind $\sum \nu p(\nu)$, mind $\sum \nu^2 p(\nu)$ létezik. A $p(N, \nu)$ -nek (1)-ből és (2)-ből való kiszámítása azonban gyakorlatilag nagyon nehézkes. A számítás nagyon leegyszerűsíthető generátorfüggvény bevezetésével. Legyen tehát

$$\text{és } \left. \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} u^{\nu} p(N, \nu) &= G_N(u), \quad (N=0, 1, 2, \dots) \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} u^{\nu} p(\nu) &= G(u). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

* Személyes közlés szerint.

A (2) egyenletből

$$G_0(u) = u, \quad (4)$$

behelyettesítve (3)-at (1)-be, a jólismert

$$G_N(u) = G[G_{N-1}(u)] \quad (5)$$

rekurziós formulát kapjuk. Az $N=1$ speciális esetben (4) segítségével

$$G_1(u) = G(u). \quad (6)$$

Az (5) egyenletből kifejezéseket kapunk a szemiiinvariánsokra. Az elektronok számának átlaga

$$p_N = \left(\frac{\partial}{\partial u} \ln G_N(u) \right)_{u=1} = p \cdot p_{N-1},$$

ahol $p = (\partial \ln G(u) / \partial u)_{u=1}$ a másodlagos elektronok számának átlaga; így tehát (6) segítségével azt kapjuk, hogy:

$$p_N = p^N. \quad (7)$$

Hasonlóképpen kapunk rekurziós formulákat a magasabbrendű momentumokra.

Egyszerű számítás (lásd pl. ¹⁾) a szórásnégyzetre a következő kifejezést adja:

$$q_N = q \cdot p^{N-1} \cdot \frac{p^N - 1}{p - 1}, \quad (8)$$

ahol

$$q_N = \left(\frac{\partial^2 \ln G_N(u)}{\partial u^2} \right)_{u=1}, \quad q = q_1.$$

Hasonló kifejezéseket kapunk a magasabbrendű momentumokra is. A következőkben egy a gyakorlatban használható módszert írunk le $p(N, \nu)$ meghatározására és egy számszerű példát is adunk.

3. §. A $G_N(u)$ generátorfüggvényt úgy kapjuk meg, hogy $G(u)$ -t (4) és (5) segítségével iteráljuk. A (3) kifejezésből

$$p(N, \nu) = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial^\nu G_N(u)}{\partial u^\nu} \right)_{u=0}; \quad (9)$$

ν nem túlságosan nagy értékeire tehát $p(N, \nu)$ ilyen módon kiszámítható. Azonban $p \gg 1$ -re főleg $\nu \gg 1$ -hez tartozó valószínűségek érdekelnek bennünket és a közvetlen differenciálás túl nehézkessé válik ahhoz, hogy használható lehessen. ν nagy értékeire célszerű a (8) kifejezést komplex integrállal helyettesíteni, nevezetesen

$$p(N, \nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{u=0} \frac{G_N(u)}{u^{\nu+1}} du, \quad (9a)$$

az integrációs görbe a komplex síkon az $u=0$ körül veendő. Hogy a fenti integrált numerikusan meghatározzuk, vizsgáljuk $G_N(u)$ viselkedését a komplex u síkban.

4. §. Vizsgáljuk a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(u) = g(u) \tag{10}$$

határfüggvényt. Ecélből meg kell találnunk a

$$G(u) = u \tag{11}$$

egyenlet u_k gyökeit. Minden gyökre (5) és (11) alapján igaz, hogy

$$G_N(u_k) = G_{N-1}(u_k)$$

és ezért

$$g(u_k) = u_k.$$

Mínt hogy G generátorfüggvény,

$$G(1) = 1,$$

és így $u_1 = 1$ gyöke (11)-nek és

$$g(1) = 1.$$

Továbbá, ha

$$\left(\frac{\partial G(u)}{\partial u} \right)_{u=1} = p > 1,$$

akkor $G(u) < u$ egy bizonyos $0 < b < u \leq c < 1$ intervallumban. (L. az 1. ábrát.)

Továbbá $G(0) = p(0) > 0$ és ezért létezik egy másik, $0 < u < a < b$ intervallum, amelyben $G(u) > u$. Mivel $G'(u) > 0$, ha csak $0 < G(u) < 1$, a függvény a $(0, 1)$ intervallumban monoton nő, kell, hogy legyen ott egy u_2 gyök,

$$G(u_2) = u_2,$$

ahol

$$0 < a \leq u_2 < b < 1.$$

A $(0, 1)$ intervallumban több gyök nem lehet, $G''(u) > 0$ miatt.

Az $u_2 < u < 1$ intervallumba eső bármely u -ra

$$u > G(u) > u_2.$$

Ha a fenti egyenlőtlenségre $N-1$ -szer egymásután alkalmazzuk a G függvényt, azt kapjuk, hogy

$$G_{N-1}(u) > G_N(u) > u_2.$$

Így a $G_1(u), G_2(u), \dots$ sorozat monoton és korlátos, tehát van határértéke. A határérték maga u_2 kell hogy legyen. Hasonló bizonyítás alkalmazható a $0 < u < u_2$ intervallumra. Eredményünk tehát az, hogy

$$g(u) = \begin{cases} u_2, & \text{ha } 0 < u < 1, \\ 1, & \text{ha } u = 1. \end{cases}$$

Ezt az eredményt kiterjesztjük komplex u értékekre is, ha $|u| < 1$. Mivel $G_N(u)$ kifejtésének $p(N, \nu)$ együtthatói nem negatívak,

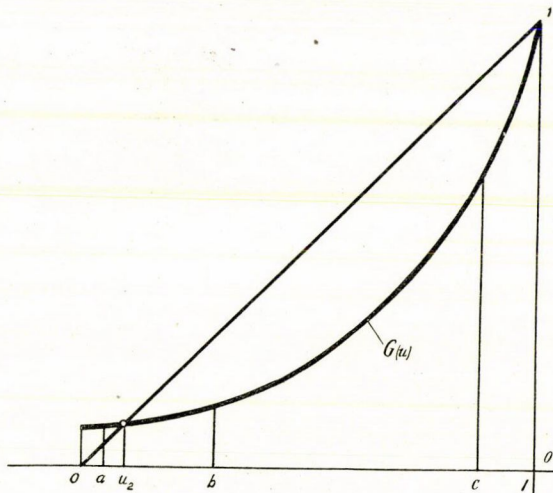
$$|G_N(u) - G_N(0)| \leq |G_N(|u|) - G_N(0)|$$

és feltéve, hogy $|u| < 1$, a jobboldali kifejezés $N \rightarrow \infty$ -re nullához tart, ezért

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(0) = u_2.$$

Így tehát

$$\begin{aligned} g(u) &= u_2, \text{ ha } |u| < 1 \\ g(u) &= 1, \text{ ha } u = 1. \end{aligned} \quad (12)$$



1. ábra. A $G(u)$ függvény vázlatos képe.

A (12) egyenletből mellesleg az az érdekes eredmény következik, hogy a

$$G(u) = u$$

egyenletnek csak egy gyöke van az egységkör belsejében és az valós és pozitív. $G(u)$ -ról pedig csak azt kell feltennünk, hogy $G(u)$ sorfejtésnek együtt-hatói nem negatívak, és $G(1) = 1$.

Valóban, ha volna még egy gyök, mondjuk

$$u_3 \neq 1, u_2 \quad |u_3| < 1,$$

akkor az ebben a pontban alkalmazott iteráció

$$g(u_3) = u_3$$

-at adna, ellentmondásban (12)-vel.

Ezt a tételt, mint Rényi A. megmutatta, tisztán elemi algebrai eszközökkel mint Turán P. megmutatta, függvénytanú úton is be lehet bizonyítani.*

5. §. Mármost folytatjuk a (9a) integrál diszkusszióját és kiszámítását. Mivel $G(u)$ reguláris $|u| \leq 1$ -re, az integráció $\varrho \leq 1$ sugarú kör mentén vehető.

* Lásd a dolgozathoz csatlakozó megjegyzést, „Két bizonyítás Jánosy Lajos egy tételére“ címen.

Így tehát

$$p(N, \nu) = \frac{1}{2\pi\varrho^\nu} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu\varphi + \ln G_N(\varrho e^{i\varphi})} d\varphi. \tag{13}$$

Az $N \rightarrow \infty$ határesetre (12) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\pi(\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} p(N, \nu) = \begin{cases} u_2, & \text{ha } \nu = 0, \\ 0, & \text{ha } 0 < \nu < \infty \end{cases} \tag{14}$$

Tehát a határesetben valamennyi valószínűség eltűnik, kivéve azt az esetet, hogy egy elektron sem lép ki. Ez az eredmény könnyen megérthető. Az elektronlavina bármelyik lépésben megállhat, és ha egyszer megállt, nem indulhat meg ismét. Ennélfogva nem eltűnő valószínűsége van annak, hogy ez megtörténjék, akármilyen nagy is a lépések száma. Másrészt ha a lavina kifejlődik, akkor a kilépő részecskék száma széles határok között változik, és egyre csökken a valószínűsége annak, hogy egy előre meghatározott részecskeszám realizálódjék.

A $p(N, \nu)$ értékek véges de nagy N -re a nyeregpontmódszerrel számíthatók ki. Mérsékeltén nagy N értékekre $G_N(u) \sim u_2$, kivéve az $u = 1$ hely közvetlen környezetét. Ha tehát ϱ -t közelítőleg 1-nek választjuk, akkor a (13) integrál fő része a valós tengely közeléből való járulékoktól származik. ϱ -t úgy választhatjuk, hogy $\varphi = 0$ -ra az integrandusnak maximuma legyen, azután az integrandust egy Gauss-görbével approximáljuk. Azt kapjuk, hogy ϱ -nak a következő feltételt kell kielégítenie:

$$\nu = \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \ln G_N(\varrho); \tag{15}$$

az integrál közelítő értéke pedig:

$$p(N, \nu) = \frac{G_N(\varrho)}{\varrho^{\nu+1} \sqrt{2\pi[\partial^2 \ln G_N(\varrho) \partial \varrho^2 + \nu/\varrho^2]}}. \tag{16}$$

A (15) és (16) egyenletek $p(N, \nu)$ -t paraméteres előállításban adják meg, ahol ϱ a független paraméter.

$\varrho = 1$ -re a (8) és a (15)-ből kapott $\nu = p_N$ egyenlet segítségével a

$$p(N, p_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(q_N + p_N)}}$$

egyenletre jutunk. A (15) egyenletből látjuk, hogy $\nu \leq p_N$, hacsak $\varrho \leq 1$, tehát az egységkörön belüli nyeregpontok a $p(N, \nu)$ eloszlást $\nu = 0$ -tól felfelé az átlagértékeg definiálják. $\nu > p_N$ -re nyeregpontot csak akkor kapunk, ha $G_N(\varrho)$ bizonyos $\varrho > 1$ értékekre is konvergál. Ha $G(\varrho)$ és így $G_N(\varrho)$ konvergenciakörének sugara R , akkor a legnagyobb ν érték, amelyhez nyeregpont található,

$$\nu_{\max} = \limsup_{\varrho=R} \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \ln G_N(\varrho).$$

ν_{\max} lehet végtelen, ekkor nyeregpontokat ν bármely értékére lehet találni. Hogy a nyeregpont-integráció a $\varrho = 1$ körön kívül jogosult-e, még ha $G_N(\varrho)$ konvergens is, azt minden egyes esetben külön kell megvizsgálni.

6. § Látjuk a (15)-ből és a (16)-ból, hogy a $p(N, \nu)$ -k kiszámíthatók, ha $G_N(u)$ és első és második deriváltja ismeretes. Mindezek kiszámíthatók $N = 1, 2, \dots$ szukcessziv helyettesítésével. A G és deriváltjainak kiszámítása azonban nagyon egyszerűsíthető a következőképpen: induljunk ki egy az $u = 1$ -hez közel eső u értékből, és legyen $u = 1 - h$; a G függvény ismételt alkalmazásával a következő értéksorozatot kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} G_1(1-h) &= 1-h_1 \\ G_2(1-h) &= G(1-h_1) = 1-h_2 \\ G_3(1-h) &= G(1-h_2) = 1-h_3 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

A $G_n(1-h)$ értékek egy bizonyos n -ig az 1 közelében maradnak, azután hirtelen lecsökkennek és végülis u_2 felé konvergálnak. $G_N(u)$ definíciójából

$$G_{N+k}(u) = G_N[G_k(u)]$$

tehát ha egyszer a (17) kifejezések számszerű értékei táblázatba vannak foglalva, akkor ebből a táblázatból $G_N(u)$ a következő paraméteres előállításban olvasható le:

$$\left. \begin{aligned} G_N(u) &= G_{N+k}(1-h) \\ u &= G_k(1-h). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Ez az utóbbi előállítás nagyon megjavítható azért, hogy a $G_k(1-h)$ definícióját k nem egész értékeire is kiterjesztjük. Ez különösen könnyen akkor tehető meg, ha $G(u)$ az $u = 1$ körül hatványsorba fejthető, azaz ha $G(u)$ konvergenciakörének sugara egynél nagyobb. Ebben az esetben

$$G(1-h) = 1 - ph + \frac{1}{2} Qh^2 - + \dots$$

Ha végrehajtjuk az n -szeres iterációt, akkor egyszerű számítás eredményeként végülis azt kapjuk, hogy

$$G_n(1-h) = 1 - p^n h + \frac{1}{2} Q \frac{p^{2n} - p^n}{p^2 - p} h^2 - + \dots$$

Ezt a sort $G_n(1-h)$ definíciójaként foghatjuk fel n nem egész értékeire a $0 < n < 1$ intervallumban; nagyobb indexekre pedig $G_{n+k}(1-h) = G_k[G_n(1-h)]$ alapján definiáljuk $G_n(1-h)$ -t, ilymódon tehát $G_n(1-h)$ tetszőleges nem negatív n -ekre értelmezve van.

Mármost k -t folytonos paraméternek tekinthetjük, (18)-at differenciálhatjuk k szerint, és így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_N(u)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dk} &= \frac{\partial G_{N+k}(1-h)}{\partial k}, \\ \frac{du}{dk} &= \frac{\partial G_k(1-h)}{\partial k}, \end{aligned}$$

I. TÁBLÁZAT
 $h = 2,35785 \cdot 10^{-7}$

n	$G_n(1-h)$	$\frac{\partial G_n(1-h)}{\partial n}$	$G_n(1+h)$	$\frac{\partial G_n(1+h)}{\partial n}$
5,0	0,9993	0,0012	1,0007	0,0012
5,2	0,9990	0,0016	1,0010	0,0016
5,4	0,9986	0,0023	1,0014	0,0023
5,6	0,9981	0,0031	1,0019	0,0031
5,8	0,9973	0,0043	1,0027	0,0043
6,0	0,9963	0,0059	1,0037	0,0060
6,2	0,9949	0,0081	1,0051	0,0082
6,4	0,9930	0,0112	1,0070	0,0114
6,6	0,9904	0,0154	1,0097	0,0157
6,8	0,9868	0,0211	1,0135	0,0219
7,0	0,9818	0,0290	1,0186	0,0303
7,2	0,9750	0,0396	1,0258	0,0422
7,4	0,9657	0,0540	1,0358	0,0589
7,6	0,9531	0,0733	1,0499	0,0826
7,8	0,9359	0,0989	1,0696	0,1168
8,0	0,9130	0,1323	1,0976	0,1663
8,2	0,8824	0,1749	1,1378	0,2398
8,4	0,8424	0,2276	1,1963	0,3517
8,6	0,7908	0,2900	1,2831	0,5285
8,8	0,7259	0,3591	1,4173	0,8227
9,0	0,6472	0,4281	1,6294	1,3410
9,2	0,5555	0,4856	1,9917	2,3361
9,4	0,4547	0,5170	2,6681	4,4319
9,6	0,3513	0,5086	4,1195	8,9592
9,8	0,2540	0,4555	8,0150	
10,0	0,1713	0,3666	23,2646	
10,2	0,1083	0,2634	142,3725	
10,4	0,0654	0,1697	4190,2500	
10,6	0,0390	0,0996		
10,8	0,0240	0,0547		
11,0	0,0159	0,0290		
11,2	0,0116	0,0152		
11,4	0,0093	0,0079		
11,6	0,0082	0,0040		
11,8	0,0076	0,0021		
12,0	0,0073	0,0011		
12,2	0,0071	0,0006		
12,4	0,0071	0,0003		
12,6	0,0070	0,0001		
12,8	0,0070			
13,0	0,0070			

A fenti függvények értékei $n < 5$ -re legalább négy jegynyi pontossággal a következő közelítő formulák segítségével számíthatók ki:

$$G_n(1 \pm h) \sim 1 \pm 2,35785 \cdot 10^{-7} \cdot 5^n$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial n}(1 \pm h) \sim 3,79481 \cdot 10^{-7} \cdot 5^n$$

II. TÁBLÁZAT

n	$G_{10}(u)$	$\frac{\partial G_{10}(u)}{\partial u} \cdot 5^{-10}$	$\frac{\partial^2 G_{10}(u)}{\partial u^2} \cdot 5^{-20}$	$G_{10}(v)$	$\frac{\partial G_{10}(v)}{\partial v} \cdot 5^{-10}$	$\frac{\partial^2 G_{10}(v)}{\partial v^2} \cdot 5^{-20}$
	$u \sim 1 - h \cdot 5^{n-10}$			$v \sim 1 - h \cdot 5^{n-10}$		
5,0	0,9993			1,0007		
5,2	0,9990	0,9992		1,0010		
5,4	0,9986	0,9996		1,0014		
5,6	0,9981	0,9980		1,0019	1,0010	
5,8	0,9973	0,9966		1,0027	1,0030	
6,0	0,9963	0,9971		1,0037	1,0042	
6,2	0,9949	0,9936		1,0051	1,0056	
6,4	0,9930	0,9914		1,0070	1,0079	
6,6	0,9904	0,9876		1,0097	1,0109	
6,8	0,9868	0,9837		1,0135	1,0167	
7,0	0,9818	0,9770		1,0186	1,0229	
7,2	0,9750	0,9688		1,0258	1,0316	
7,4	0,9657	0,9571	0,5491	1,0358	1,0438	
7,6	0,9531	0,9415	0,5340	1,0499	1,0610	
7,8	0,9359	0,9205	0,5195	1,0696	1,0870	
8,0	0,9130	0,8924	0,5031	1,0976	1,1219	0,6455
8,2	0,8824	0,8551	0,4785	1,1378	1,1725	0,6811
8,4	0,8424	0,8067	0,4469	1,1963	1,2465	0,7270
8,6	0,7908	0,7449	0,4062	1,2831	1,3573	0,8101
8,8	0,7259	0,6685	0,3596	1,4173	1,5315	0,9209
9,0	0,6472	0,5776	0,3031	1,6294	1,8093	1,0975
9,2	0,5555	0,4749	0,2406	1,9917	2,2844	1,4230
9,4	0,4547	0,3664	0,1769	2,6681	3,1411	
9,6	0,3513	0,2613	0,1182	4,1195	4,6022	
9,8	0,2540	0,1696	0,0704	8,0150		
10,0	0,1713	0,0989	0,0366	23,2646		
10,2	0,1083	0,0515	0,0165	142,3725		
10,4	0,0654	0,0241	0,0064	4190,2500		
10,6	0,0390	0,0102	0,0022			
10,8	0,0240	0,0041	0,0007			
11,0	0,0159	0,0016				
11,2	0,0116	0,0010				
11,4	0,0093	0,0002				
11,6	0,0082	0,0001				
11,8	0,0076					
12,0	0,0073					
12,2	0,0071					
12,4	0,0071					
12,6	0,0070					
12,8						

h -ra vonatkozólag lásd az I. Táblázatot.

tehát

$$\frac{\partial G_N(u)}{\partial u} = \frac{\partial G_{N+k}(1-h)}{\partial k} \bigg/ \frac{\partial G_k(1-h)}{\partial k}, \tag{19}$$

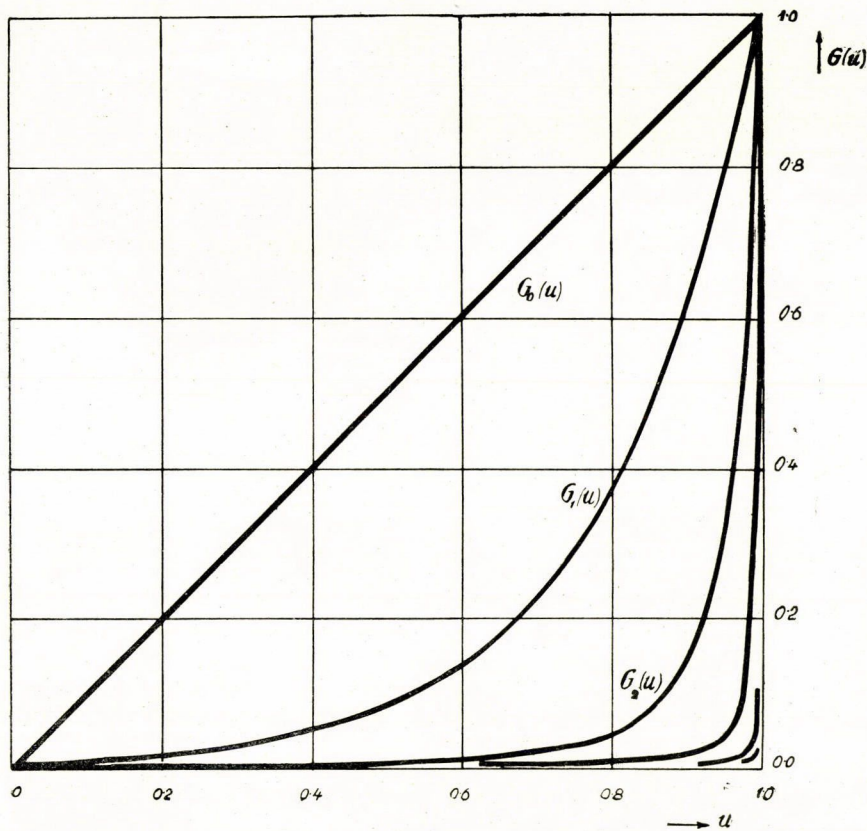
$$u = G_k(1-h).$$

Hasonlóan

$$\frac{\partial^2 G_N(u)}{\partial u^2} = \left\{ \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial G_N(u)}{\partial u} \right) \bigg/ \frac{\partial G_k(u)}{\partial k} \right\}_{k=0}. \tag{20}$$

A (19) és (20) egyenletek nagyon előnyösen használhatók tényleges numerikus számításoknál. Ecélből táblázatba kell foglalnunk $G_n(1-h)$ -t — elég sűrűre választva az n szerinti beosztást — és numerikusan ki kell számítanunk az n szerinti deriváltakat. Megfelelő derivált-párokat elosztva (19) segítségével megkapjuk $\partial G_N(u)/\partial u$ paraméteres előállítását, az eljárás ismétlése után pedig a második deriváltét.

Hasonló módon foglalható táblázatba a $G_n(u)$ -nak és deriváltjainak $u > 1$ -re felvett értékrendszere, ha $u = 1 + h$ -val kezdünk egy sorozatot.



2. ábra. A $G_n(u)$ függvények Poisson-eloszlás esetén, $p = 5$ -re.

Nagy gyakorlati haszna van a $G_n(u)$ nem egész n értékekre való értelmezésének; ennek az eljárásnak jelentőségével egy későbbi cikkben foglalkozunk.

7. §. Számszerű példaként tekintjük a Poisson-eloszlás esetét.

Feltesszük tehát, hogy

$$p(k) = e^{-p} \frac{p^k}{k!} \quad (21)$$

és

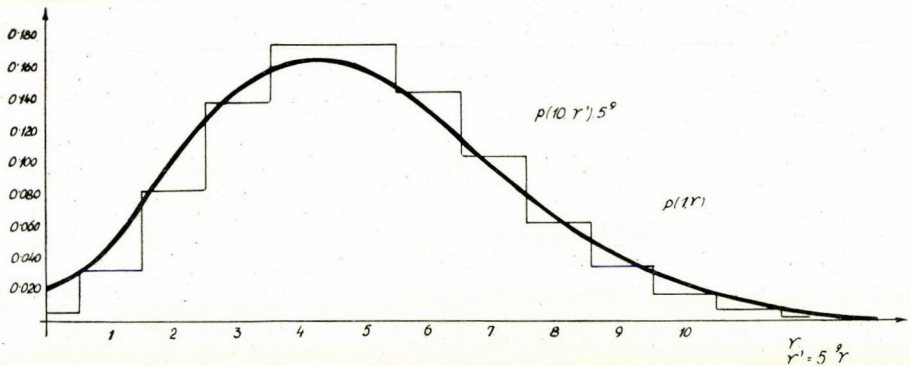
$$G(u) = e^{p(u-1)}. \quad (22)$$

Továbbá $p = 5$ helyettesítéssel

$$u_2 = 0,006977$$

$h = p^{-10}$ helyettesítéssel az I. Táblázatot kaptuk. (18) segítségével leolvashatjuk mondjuk $G_{10}(u)$ értékét különböző u -kra ebből a táblázatból, így kapjuk meg a II. Táblázat első oszlopát. (19) és (20) segítségével megkapjuk $G'_{10}(u)$ -t és $G''_{10}(u)$ -t (lásd ugyancsak a II. Táblázatot). Az I. Táblázatból leolvashatjuk $G_N(u)$ értékeit különböző N -ekre is; így kaptunk egy görbesereget, mely a 2. ábrán látható.

Végül kiszámítottuk $p(10, \nu)$ -t, ezt a 3. ábra mutatja.



3. ábra. A $p(10, \nu)$ és $p(1, \nu)$ eloszlások. (Poisson-eloszlás esetén.)

Az eredeti Poisson-eloszlást is ábrázoltuk a 3. ábrán. A két eloszlás feltűnően hasonló. Az eljárás ellenőrzésére a 3. ábrán látható értékekből numerikus integrációval kiszámítottuk $\sum p(\nu)$ -t, $\sum \nu p(\nu)$ -t és $\sum (\nu - \bar{\nu})^2 p(\nu)$ -t.

Az eredmények az alábbiak:

	$\sum p(\nu)$	$\frac{1}{p^{10}} \sum \nu p_\nu$	$\frac{1}{p^{20}} \sum (\nu - \bar{\nu})^2 p_\nu$
numerikus integrációval	1.029	1.033	0.256
pontosan	1	1	0.25

A momentumokra numerikus integrációval kapott értékek nem különböznek, az exakt értékektől jobban, mint amekkora hiba megmagyarázható a numerikus integráció pontatlanságával. A nyeregpont-módszer alkalmazásából eredő hiba tehát nem lehet nagyságrendekkel nagyobb, hanem valószínűleg ugyanolyan nagyságrendű.

A 3. ábrán mutatkozó eloszlás nem egyezik az elektronsokszorozó lökés-nagyságára vonatkozó *Dallos L.*² által közölt eloszlással.

Ez úgy látszik arra mutat, hogy az az eloszlás, amelyet *Dallos* talált, nem építhető fel Poisson-eloszlásra.

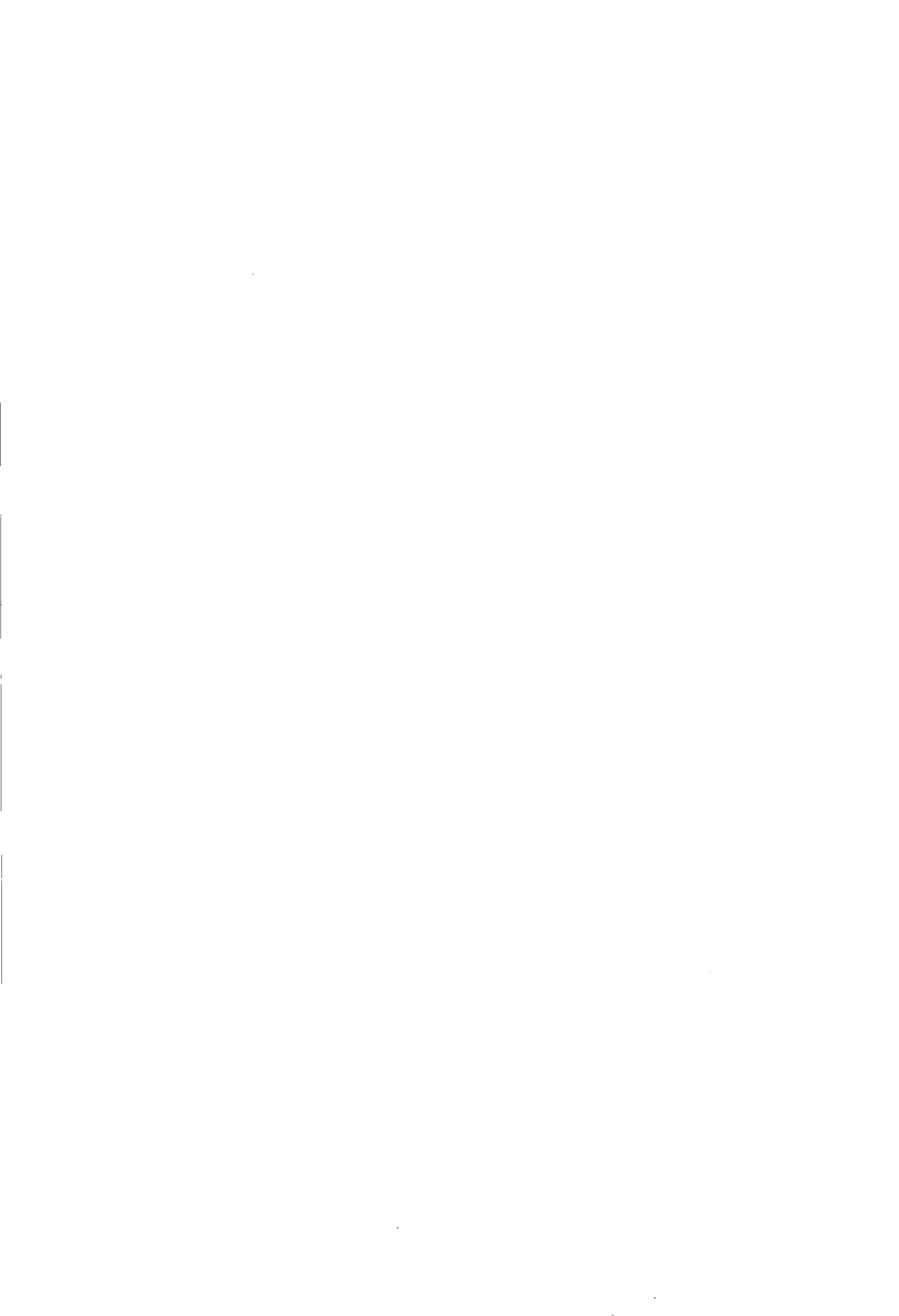
8. §. A nyeregpont-integráció $u > 1$ -re elkerülhető, ha $G_N(u)$ -t kiszámítjuk $|u| = 1$ -re az egységkör mentén, és (13)-at numerikusan integráljuk. Ezt az eljárást kell elfogadni mindenképen, ha $G(u)$ nem konvergál $u > 1$ -re. De ha $G(u)$ konvergál a numerikus integrációnak megvan az a hátránya, hogy az integrandus az integrációs út mentén oscillál. Az integrál értéke tehát a pozitív és negatív részek különbségétől függ. A nyeregpont-módszer elkerüli ezt a nehézséget. Hogy a nyeregpont-integráció $u > 1$ -re jogosult-e, az attól függ, hogy vajjon található-e a nyeregpontra át olyan visszavezető út, amely mentén az integrál elhanyagolhatóan kicsi. A tekintett példánál ez úgy látszik így van és ezért eljárásunk jogosultnak látszik. Azonban $G_N(u)$ komplex u -ra igen bonyolult és ezért ennek részletes vizsgálatát későbbi alkalomra hagyjuk.

*Magyar Tudományos Akadémia
Központi Fizikai Kutató Intézet
Kozmikus Sugárzási Osztálya.*

IRODALOM

¹ *Faragó P.* és *Takács L.*: *Hungarica Acta Physica* I. 6 (1949) 43.

² *Dallos L.*: *Acta Phys.* 1 (1951) 56.



KÉT BIZONYÍTÁS JÁNOSY LAJOS EGY TÉTELÉRE

RÉNYI ALFRÉD lev. tag és TURÁN PÁL

Jánossy Lajos ezen számban közölt dolgozatában bebizonyítja a következő tételt: *Ha*

$$G(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots + p_n z^n + \dots \quad (1)$$

ahol $p_0 > 0$, $p_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots$) és $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = G(1) = 1$ akkor a

$$G(z) = z \quad (2)$$

egyenletnek az egységkör belsejében csak egyetlen gyöke lehet és az valós és pozitív.

Ez a tétel igen egyszerűen adódik ki Jánossy egyéb eredményeiből, azonban a tétel érdekességére való tekintettel felvetődik a kérdés: hogyan lehet ezt a tételt közvetlenül egyszerűen bizonyítani? Alább két egyszerű bizonyítást is adunk: az első pusztán elemi algebrai eszközökkel dolgozik és amellet lehetővé teszi az egységkörtön fekvő gyökök kérdésének tisztázását is, a második Rouché tételére való hivatkozással szinte egycsapásra adja a tétel állítását.

Nézzük az első bizonyítást: Legyen z_0 a (2) egyenlet egyetlen nem-negatív és 1-től különböző gyöke: ennek existenciáját Jánossy Lajos dolgozatában teljesen elemi megfontolásokkal kimutatta, ezek megisméltése felesleges volna. Vizsgáljuk először a $p_0 = 0$ esetet, amikor is $z_0 = 0$; ebben az esetben a (2) egyenlet mindkét oldalát z -vel osztva a

$$p_1 + p_2 z + p_3 z^2 + \dots = 1 \quad (3)$$

egyenletre jutunk, amelynek az egységkör belsejében nem lehet gyöke (eltekintve attól a triviális esettől, amikor $p_1 = 1$, azaz amikor $G(z) = z$) az egységkör területén (3)-nak csak olyan gyöke lehet, amely n -ik egységgyök és viszont abban az esetben, amikor $p_m = 0$ ha $m \neq 1 \pmod n$ valóban az összes n -ik egységgyökök gyökei a (3) és így a (2) egyenletnek. Most vizsgáljuk a $p_0 > 0$ esetet, amikor is $z_0 > 0$; írjuk fel tehát, hogy

$$G(z_0) = z_0. \quad (4)$$

A (4) azonosságot a (2) egyenletből kivonva és $(z - z_0)$ -al osztva azt kapjuk, hogy

$$p_1 + p_2(z + z_0) + p_3(z^2 + z z_0 + z_0^2) + \dots = 1. \quad (5)$$

Azonban ha $|z| \leq 1$ és $z \neq 1$ akkor (5) baloldalának abszolút értéke kisebb, mint ha mindenütt z helyett 1-et írunk és így kapjuk, hogy ha volna az (5) azaz a (2) egyenletnek gyöke az egységkörben vagy annak területén $z = 1$ -en kívül, úgy fennállana, hogy

$$1 < p_1 + p_2(1 + z_0) + p_3(1 + z_0 + z_0^2) + \dots \quad (6)$$

A jobboldalon álló geometriai sorokat összegezve kapnánk, hogy

$$1 < \frac{1}{1 - z_0} (p_1(1 - z_0) + p_2(1 - z_0^2) + \dots) = \frac{1 - z_0}{1 - z_0} = 1 \quad (7)$$

vagyis ellentmondásra jutottunk és így a (2) egyenletnek nem lehet gyöke sem az egységkörben z_0 -on kívül, sem az egységkör kerületén a $z = 1$ -en kívül, ha $p_0 > 0$. Így tehát bebizonyítottuk Jánossy tételét, továbbá annak következő kiegészítését: *ha $p_0 = 0$ akkor a (2) egyenletnek csak abban az esetben lehetnek gyökei az egységkör kerületén $z = 1$ -en kívül, ha létezik olyan m egész szám, hogy $p_m = 0$ ha $m \equiv 1 \pmod{n^*}$, mely esetben az összes n -ik egységgyökök gyökei a (2) egyenletnek; ha $p_0 > 0$ akkor az egységkör kerületén nem fekszik a (2) egyenletnek gyöke $z = 1$ -en kívül.*

Áttérünk a második bizonyításra. Rouché jólismert tétele szerint, ha az $f(z)$ és $g(z)$ analitikus függvények regulárisak a C görbe által határolt D egyszeresen összefüggő tartományban, beleértve annak kerületét, azaz magát a C görbét is, és a C görbén $|f(z)| > |g(z)|$ akkor az $f(z)$ és $f(z) + g(z)$ függvényeknek pontosan ugyanannyi gyöke van a D tartományban, ha a gyököket multiplicitásaikkal számoljuk. Alkalmazzuk Rouché tételét az $f(z) = (1 + \varepsilon)z$ és $g(z) = -G(z)$ függvényekre, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Nyilván a feltétel teljesül, ha a C görbének az egységkört választjuk és így következik, hogy az $(1 + \varepsilon)z - G(z) = 0$ egyenletnek ugyanannyi gyöke van az egységkörben, mint az $(1 + \varepsilon)z = 0$ egyenletnek, azaz pontosan egy gyöke van. Ha most elvégezzük az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenetet, tekintettel arra, hogy az együtthatók folytonos változtatásával az egyenlet gyökei is folytonosan kell, hogy változzanak, következik, hogy a $z - G(z) = 0$ egyenletnek legfeljebb egy gyöke lehet az egységkörben. Azt, hogy ez a gyök valós kell, hogy legyen, úgy láthatjuk be, hogy mivel az egyenlet együtthatói valósak, ha az egyenletnek volna komplex gyöke, úgy annak konjugáltja is gyök volna, azaz nem egy, hanem két gyök volna, míg azt, hogy a gyök nem lehet negatív, a következőképpen láthatjuk be: ha $z = -t$ ($0 < t < 1$) akkor

$$G(z) - z = G(-t) + t \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t + (-1)^k t^k) > 0.$$

A bizonyításból azon általánosabb tény is következik, hogy a (2) egyenletnek az egységkör belsejében pontosan egy gyöke van abban az esetben is, ha az együtthatók nemnegativitása helyett csupán azt tesszük fel, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} |p_k| \leq 1$; ez esetben természetesen az egyetlen gyök nem szükségképpen valós.

A tétel több irányban általánosítható, de erre most nem térünk ki.

*Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.
Budapesti Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete.*

* Nyilván mindig van egy legnagyobb olyan $n = n_0$ szám, amelyre ez teljesül, kivéve a $G(z) \equiv z$ esetet, amikor a feltétel n minden egész értékére teljesül.

BEKÖVETKEZÉSI ÉS KOINCIDENCIA JELENSÉGEK TÁRGYALÁSA IDŐTARTAMBAN TETSZŐLEGES ELOSZLÁSÚ TÖRTÉNÉSEK ESETÉN

TAKÁCS LAJOS

Bemutatta RÉNYI ALFRÉD az 1951 október 1-én tartott osztályülésen

I. BEKÖVETKEZÉSI JELENSÉGEK

1. §. A probléma kitűzése

Tekintsünk egy Poisson-féle sztochasztikus folyamatot. Legyen az események előfordulásának sűrűsége: p . Ekkor annak a valószínűsége, hogy u és $u + \Delta u$ időpontok között *egy (vagy legalább egy) esemény bekövetkezzék* $p \Delta u + o(\Delta u)$, hogy ugyanezen időközben több mint egy esemény következzen be: $o(\Delta u)^*$, és így a bekövetkezések számának várható értéke: $p \Delta u$ ¹. A következőkben a rövidség kedvéért azt fogjuk mondani, hogy annak a valószínűsége, hogy u és $u + du$ időpontok között *egy esemény bekövetkezzék*: $p du$.

Tekintsük a Poisson folyamatot $0 < u < \infty$ időközben és definiáljunk a következőképpen egy újabb folyamatot: A $0 \leq u < \infty$ időközben előforduló események bekövetkezésük időpontjában legyenek egy *történésnek* elindítói (kezdőpontjai), mely történés időtartama, ξ legyen valószínűségi változó, abban az esetben, ha az esemény olyankor következik be, midőn történés nincs. Bármely egy történés alatt bekövetkező esemény nem indít el új történést.

Míg az események folyamata Markov-féle (Poisson-folyamat), addig a történések folyamata nem Markov-féle, mivel a folyamat jövőbeli viselkedése nemcsak a jelen állapottól függ, hanem attól is, hogy hogyan jutott a jelen állapotba.

Tárgyalásunk konkretizálására gondoljunk Geiger—Müller számlálóval számlált korpuszkulákra. A számlálандó korpuszkulák a gáztérben ionokat hoznak létre és ezek az ionok egy lökésszerű kisülést okoznak. Az egyszer megindult lökés lefolyását további érkező korpuszkulák nem befolyásolják. Ennélfogva a lökés időtartama alatt esetleg érkező újabb részecskékre a számolócső érzéketlen. Terminológiánk szerint azt mondjuk, hogy az adott időpontban *egy esemény előfordul*, ha abban az időpillanatban érkezik egy korpuszkula. Az érkező korpuszkulák sok esetben, pl. rádióaktív atomok bomlásánál, Poisson-folyamatot mutatnak. *Történésnek* nevezzük a lökések időtartamát.

* $o(\Delta u)$ olyan függvényt jelöl, melyre $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{o(\Delta u)}{\Delta u} = 0$, míg $O(\Delta u)$ olyan függvényt melyre $\left| \frac{O(\Delta u)}{\Delta u} \right|$ korlátos.

A véletlen események Poisson-folyamatának és a történéseknek fogalmát lásd Rényi Alfréd ² munkájában. A különbség az idézett és jelen tárgyalás között abban van, hogy az idéztnél egy történés időtartama alatt kezdődhetnek újabb történések, míg esetünkben nem.

A következő problémával fogunk foglalkozni: Feltételezzük, hogy csupán $u = 0$ időpont után bekövetkező események indítanak el történéseket, azaz a történések folyamatát $u = 0$ időpontban kezdődőnek tekintjük és feltételezzük, hogy minden egyes történés időtartama ξ ugyanazon $H(x)$ valószínűségi eloszlásfüggvénnyel bír. ($H(x)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy egy történés időtartama $\xi \leq x$ legyen). Jelentse $W(t, n)$ annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ időközben történő történések száma $\leq n$ legyen, jelentse $m(t)$ a $(0, t)$ intervallumban kezdődő történések számának várható értékét, mely ha véges, a következőképpen fejezhető ki:

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - W(t, n)] \quad (1)$$

és $\tau(t)$ a történések $(0, t)$ időközbe eső időtartamának várható értékét. Ezen mennyiségeket fogjuk a következőkben meghatározni.

Az $m(t)$ és $\tau(t)$ várható értékek meghatározása céljából két függvényt vezetünk be: Legyen annak a valószínűsége, hogy u időpontban legyen egy történés: $F(u)$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy u és $u + \Delta u$ időpontok között kezdődjék egy történés:

$$[1 - F(u)] [p \Delta u + o(\Delta u)].$$

Ugyanis annak a valószínűsége, hogy $(u, u + \Delta u)$ időközben kezdődjék egy történés egyenlő a következő két független esemény valószínűségének szorzatával: u időpontban ne legyen történés, aminek a valószínűsége $1 - F(u)$ és $(u, u + \Delta u)$ időközben kezdődjék egy esemény, aminek a valószínűsége $p \Delta u + o(\Delta u)$.

A következőkben annak a valószínűségét, hogy u és $u + \Delta u$ időpontok között kezdődjék egy történés, így jelöljük:

$$f(u) \Delta u + o(\Delta u).$$

Itt

$$f(u) = [1 - F(u)] p. \quad (2)$$

Annak a valószínűsége, hogy $(u, u + \Delta u)$ időközben több mint egy történés kezdődjék, mint könnyen belátható: $o(\Delta u)$.

Ezt a következőkben röviden úgy fejezzük ki, hogy annak a valószínűsége, hogy u és $u + du$ időpontok között kezdődjék egy történés: $f(u) du$.

2. § $f(u)$ és $F(u)$ meghatározása

Tegyük fel, hogy α várható értéke

$$\alpha = \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx \quad (3)$$

létezik és véges.

Mindenekelőtt felírhatjuk, hogy

$$F(u) = \int_0^u f(u-x)[1-H(x)] dx. \quad (4)$$

Ez egyszerűen a következőképpen indokolható: u időpontban akkor van történés, ha $u-x-dx$ és $u-x$ időpontok között kezdődik egy történés, aminek a valószínűsége: $f(u-x)dx$ és ennek a történésnek az időtartama x -nél nagyobb, aminek a valószínűsége: $1-H(x)$. Ennek a két független esemény bekövetkezésének a valószínűsége a kettő szorzata és ezt integrálva minden lehetséges x értékre kapjuk $F(u)$ -t.

(4)-et (2)-be helyettesítve:

$$f(u) = p - p \int_0^u f(u-x)[1-H(x)] dx \quad (5)$$

másodfajú Volterra-féle integrálegyenletre jutunk, mely meghatározza $f(u)$ -t. $f(u)$ ismeretében (2) segítségével megkapható $F(u)$.

1. Tétel: Ha

$$\int_0^{\infty} [1-H(x)] dx$$

integrál értéke véges a szám, úgy az (5) integrálegyenletnek létezik egy és csakis egy nemnegatív, korlátos és folytonos $f(u)$ megoldása.

A másodfajú Volterra-féle integrálegyenletek exisztencia-tétele szerint minden véges $(0, u)$ intervallumban korlátos, mérhető $1-H(x)$ függvény mellett létezik egy és csakis egy korlátos, mérhető $f(u)$ megoldás³. Esetünkben $H(x)$ eloszlásfüggvény nem csökkenő és $0 \leq H(x) \leq 1$ tehát kielégíti a követelményeket és így létezik egy korlátos, mérhető $f(u)$ megoldás. Könnyen bizonyítható, de (2)-ből is nyilvánvaló, hogy

$$0 \leq f(u) < p.$$

Hátra van $f(u)$ folytonosságának bizonyítása. Integrálegyenletünk a következő alakban is írható:

$$f(u) = p - p \int_0^u f(x)[1-H(u-x)] dx. \quad (6)$$

Innen

$$f(u+\Delta u) - f(u) = p \int_0^u f(x)[H(u+\Delta u-x) - H(u-x)] dx - p \int_u^{u+\Delta u} f(x)[1-H(u+\Delta u-x)] dx \quad (7)$$

$H(x)$ nem csökkenő függvény lévén: $H(u+\Delta u-x) - H(u-x) \geq 0$, továbbá

$1 - H(u + \Delta u - x) \geq 0$ és $0 < f(u) \leq p$, következőleg

$$|f(u + \Delta u) - f(u)| \leq p^2 \left[\int_u^{u+\Delta u} H(x) dx - \int_0^{\Delta u} H(x) dx \right] + p^2 \Delta u \leq 2p^2 \Delta u$$

azaz $f(u)$ folytonos.

$f(u)$ explicit meghatározása sokszor könnyen keresztülvihető Laplace-transzformáció segítségével. Legyen

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x) \quad (8)$$

mely $\Re(s) \geq 0$ -ra konvergens és

$$\Psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} [1 - H(x)] dx = \frac{1 - \psi(s)}{s} \quad (9)$$

mely $\Re(s) \geq 0$ -ra ugyancsak konvergens.

A fenti $f(u)$ függvénnyel

$$q(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du \quad (10)$$

konvergens $\Re(s) > 0$ -ra és fennáll

$$q(s) = \frac{p}{s[1 + p\Psi(s)]} = \frac{p}{s + p - p\psi(s)} \quad (11)$$

mely megengedi $f(u)$ egyértelmű meghatározását annak folytonossági pontjaiban, azaz minden u -ra.

$f(u)$ minden u -ra korlátos és folytonos, tehát létezik $q(s)$, $\Re(s) > 0$ -ra és az (5) egyenletből azonnal kapjuk, hogy

$$q(s) + p q(s) \Psi(s) = \frac{p}{s}$$

ahonnan (11) nyerhető. A Laplace-transzformációk elméletéből ismeretes, hogy $q(s)$ -ből $f(u)$ egyértelműen meghatározható annak minden folytonossági helyén.

$f(u)$ és $F(u)$ segítségével a várható értékek egyszerűen meghatározhatók.

3. §. A várható értékek meghatározása

A $(0, t)$ időintervallumban kezdődő történések várható száma:

$$m(t) = \int_0^t f(u) du \quad (12)$$

és a $(0, t)$ időintervallumban kezdődő történések $(0, t)$ időközbe eső várható időtartama:

$$\tau(t) = \int_0^t F(u) du. \quad (13)$$

Bizonyítás: Annak a valószínűsége, hogy $(u, u + \Delta u)$ időintervallumban egy történet kezdődjék: $f(u)\Delta u + o(\Delta u)$. Annak a valószínűsége, hogy egyenél

több történes kezdődjék $o(\Delta u)$. Könnyen belátható, hogy a történések várható számának kifejezését csupán egynél több történesre összegezve a kapott érték: $o(\Delta u)$, ugyanis mint a Poisson-folyamatból ismert az események várható számának kifejezését csupán egynél több eseményre összegezve a kapott érték: $o(\Delta u)$ és méginkább áll ez a történésekre. Következőleg az $(u, u + \Delta u)$ intervallumban kezdődő történések várható száma: $f(u)\Delta u + o(\Delta u)$. Bennünket a $(0, t)$ intervallumban kezdődő történések várható száma érdekel. Osszuk be a $(0, t)$ intervallumot $u_0 = 0, u_1, u_2, \dots, u_n = t$ osztópontokkal n számú $\Delta u = t/n$ nagyságú szakaszra. Az i -edik szakaszon kezdődő események számának várható értéke: $f(u_i)\Delta u + o(\Delta u)$ és a várható érték definíciója szerint:

$$m(t) = \sum_{i=1}^n [f(u_i)\Delta u + o(\Delta u)].$$

Mivel $f(u)$ a $(0, t)$ intervallumban korlátos és folytonos, úgy $n \rightarrow \infty$ esetén a, fenti Riemann-féle közelítő összeg

$$\int_0^t f(u) du$$

integrálhoz konvergál, azaz fennáll (12).

A történések időtartamának $(u, u + \Delta u)$ közbe eső várható értékét a következőképpen határozzuk meg: Három fajta történeset különböztetünk meg: 1) u időpontban folyó olyan történeset, mely nem fejeződik be $(u, u + \Delta u)$ közben, ennek a valószínűsége $F(u) + O(\Delta u)$ és időtartama Δu . 2) u időpontban folyó olyan történeset, mely befejeződik $(u, u + \Delta u)$ közben, ennek a valószínűsége $O(\Delta u)$ és időtartama kisebb Δu -nál. 3) $(u, u + \Delta u)$ közben kezdődő történéseket, melyek várható száma $f(u)\Delta u + o(\Delta u)$ és időtartamuk kisebb Δu -nál.

Ugyanis annak a valószínűsége, hogy egy u időpontban folyó történes $(u, u + \Delta u)$ közben ne fejeződjék be, egyenlő annak valószínűségével, hogy $u + \Delta u$ időpontban legyen történes és ennek a történesnek kezdőpontja $(0, u)$ időközbe essék, azaz ne essék $(u, u + \Delta u)$ közbe. Mivel egy $(u + \Delta u)$ időpontban folyamatban lévő történes két egymást kizáró módon jöhet létre: a történes kezdőpontja vagy $(0, u)$ közbe, vagy $(u, u + \Delta u)$ közbe esik, mely utóbbinak a valószínűsége könnyen beláthatóan $O(\Delta u)$, tehát a keresett valószínűség $F(u + \Delta u) - O(\Delta u)$. Itt $F(u)$ folytonossága miatt $F(u + \Delta u) = F(u) + O(\Delta u)$. Tehát a kérdéses valószínűség $F(u)$ -tól $O(\Delta u)$ -val tér el. Továbbá az, hogy u időpontban legyen történes (aminek valószínűsége $F(u)$) ez két egymást kizáró módon lehetséges, vagy nem fejeződik be $(u, u + \Delta u)$ közben, aminek a valószínűsége mint láttuk: $F(u) - O(\Delta u)$ vagy befejeződik aminek a valószínűsége az előbbiekből következőleg $O(\Delta u)$.

Igy az $(u, u + \Delta u)$ közben folyó történések e közbe eső várható időtartama:

$$F(u)\Delta u + o(\Delta u).$$

Osszuk be a $(0, t)$ intervallumot az előbbi osztópontokkal n részre, úgy a

várható érték definíciója szerint felírhatjuk, hogy

$$\tau(t) = \sum_{i=1}^n [F(u_i) \Delta u + o(\Delta u)].$$

Mivel $F(u)$ a $(0, t)$ intervallumban korlátos ($0 \leq F(u) < 1$) és folytonos, úgy $n \rightarrow \infty$ -re a jobboldal

$$\int_0^t F(u) du$$

integrálhoz konvergál, azaz fennáll (13).

1. *Megjegyzés.* A várható értékek (12) és (13) kifejezése segítségével (2) egyetlenből közvetlenül adódik, hogy $m(t)$ és $\tau(t)$ között fennáll a következő összefüggés:

$$m(t) + p\tau(t) = pt \quad (14)$$

2. *Megjegyzés:* Ha $f(u)$ Laplace-transzformáltja $\varphi(s)$ ismeretes, úgy mint az a Laplace-transzformációk elméletéből ismert, $m(t) = \int_0^t f(u) du$ Laplace-transzformáltja $\varphi(s)/s$, melyből sokszor könnyen meghatározható $m(t)$.

Emlékeztetbe idézve azt, hogy ha $f(u)$ Laplace-transzformáltja

$$\varphi(s) = \sum_{r=0}^n \left(\frac{A_{1,r}}{s-s_r} + \frac{A_{2,r}}{(s-s_r)^2} + \dots + \frac{A_{m_r,r}}{(s-s_r)^{m_r}} \right) e^{s u_0} \quad (15)$$

úgy

$$f(u) = \int_0^u \sum_{r=0}^n \left(A_{1,r} + A_{2,r} \frac{(u-u_0)}{1!} + \dots + A_{m_r,r} \frac{(u-u_0)^{m_r-1}}{(m_r-1)!} \right) e^{s_r(u-u_0)} \quad \text{ha } u \geq u_0 \quad (16)$$

egyébként

könnyen adódnak az alábbi példák eredményei.

1. *Példa.* Legyen $\xi = \alpha$ (konstans). Ekkor $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ és

$$\varphi(s) = \frac{p}{p+s-pe^{-s\alpha}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{j+1} e^{-s\alpha j} \quad (17)$$

ahonnan

$$f(u) = p \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{u}{\alpha} \rfloor} e^{-\nu(u-\alpha j)} \frac{p^j (u-\alpha j)^j}{j!} \quad (18)$$

és

$$m(t) = \left[\frac{t}{\alpha} \right] + 1 + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{\alpha} \rfloor} \sum_{k=0}^j \frac{p^k (t-\alpha j)^k}{k!} e^{-\nu(t-\alpha j)}. \quad (19)$$

2. *Példa.* Legyen ξ eloszlásfüggvénye $H(x) = 1 - e^{-x\alpha}$. Ekkor $\psi(s) = \frac{1}{1+\alpha s}$ és

$$\varphi(s) = \frac{p(1+\alpha s)}{(1+\alpha p)s + \alpha s^2} = \frac{p}{(1+\alpha p)s} + \frac{\alpha^2 p^2}{(1+\alpha p)(1+\alpha p + \alpha s)} \quad (20)$$

ahonnan

$$f(u) = \frac{p}{1 + \alpha p} + \frac{\alpha p^2}{1 + \alpha p} e^{-\frac{1 + \alpha p}{\alpha} u} \quad (21)$$

és

$$m(t) = \frac{p}{1 + \alpha p} t + \frac{\alpha^2 p^2}{(1 + \alpha p)^2} \left(1 - e^{-\frac{1 + \alpha p}{\alpha} t}\right) \quad (22)$$

4. § $f(u)$ aszimptotikus viselkedése

2. Tétel: Ha a történekek időtartamának átlaga

$$\alpha = \int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx \quad (23)$$

véges, úgy fennáll

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \frac{p}{1 + \alpha p}. \quad (24)$$

Bizonyítás: Mindenekelőtt észrevesszük, hogy fennáll a következő nyilvánvaló egyenlőtlenség:

$$[m(t) - 1]\alpha \leq \tau(t) \leq m(t) \cdot \alpha. \quad (25)$$

Ebből (14) tekintetbevételével:

$$\frac{p}{1 + \alpha p} \leq \frac{m(t)}{t} \leq \frac{p}{1 + \alpha p} + \frac{\alpha p}{1 + \alpha p} \frac{1}{t} \quad (26)$$

adódik, azaz fennáll:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(u) du = \frac{p}{1 + \alpha p}. \quad (27)$$

Ha (24) fennáll, úgy ez magával hozza (27) fennállását, de fordítva nem következik (27)-ből (24), csak akkor, ha bebizonyítottuk, hogy $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$ határérték létezik. Tehát csak két lehetőség van, vagy létezik $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$ határérték és ekkor ezt (24) szolgáltatja, vagy $f(u)$ -nak nincs határértéke, midőn $u \rightarrow \infty$.

A bizonyítást Paley-Wiener könyvében⁴ (p. 59, 17. tétel) kimondott következő tétel segítségével végezzük el:

Legyen $f(u)$ minden véges $(0, u)$ intervallumon korlátos és mérhető függvény. $K(x)$ tartozzék $L(0, \infty)$ -hez, azaz legyen

$$\int_0^{\infty} |K(x)| dx < \infty. \quad (28)$$

Legyen ezen függvényekkel

$$f(u) + \int_0^{\infty} K(u-x)f(x) dx \rightarrow C \quad \text{midőn } u \rightarrow \infty \quad (29)$$

ekkor ha

$$\int_0^{\infty} K(x)e^{-sx} dx \neq -1, \quad \Re(s) \geq 0, \quad (30)$$

úgy fennáll

$$f(u) \rightarrow \frac{C}{1 + \int_0^u K(x) dx}, \quad u \rightarrow \infty. \quad (31)$$

És viszont ha $K(x) \in L(0, \infty)$ -hez tartozik, (30) $s \rightarrow 0$ -ra teljesül, és (29)-ből (31) minden feltételünket kielégítő $f(u)$ esetén következik, akkor fennáll (30).

Legyen most $f(u)$ a (6) integrálegyenlet megoldása. $f(u)$ -ról kimutattuk, hogy korlátos és folytonos. Legyen

$$K(x) = p[1 - H(x)] \quad (32)$$

úgy ez, tekintettel (23)-ra, kielégíti a $K(x)$ -re vonatkozó feltevést. Ezen függvényekkel a (6) integrálegyenlet szerint fennáll

$$f(u) + p \int_0^u f(x)[1 - H(u-x)] dx = p \quad (33)$$

azaz $C = p$.

Mivel

$$\int_0^\infty K(x) dx = p \int_0^\infty [1 - H(x)] dx = p\alpha \quad (34)$$

és $C = p$, következőleg fennáll (24) határérték, ha

$$\int_0^\infty K(x)e^{-sx} dx = p \int_0^\infty [1 - H(x)]e^{-sx} dx = p \frac{1 - \psi(s)}{s} \neq -1, \Re(s) \geq 0 \text{-ra.} \quad (35)$$

Ez pedig érvényes, mivel $s \rightarrow 0$ -ra a baloldal $\alpha p \neq -1$ és $s \neq 0$ esetén ha volna olyan s , melyre $\Re(s) \geq 0$ és nem elégítené ki (35) összefüggést, úgy erre fennállna

$$\psi(s) = 1 + \frac{s}{p}.$$

Itt azonban $\Re(s) \geq 0$ -ra $|\psi(s)| \leq 1$ és $s \neq 0$, $\Re(s) > 0$ -ra $\left|1 + \frac{s}{p}\right| > 1$. Következéleg nincs olyan s , $\Re(s) \geq 0$ érték, mely ne elégítené ki (35) összefüggést. Tehát ezzel tételünket bebizonyítottuk.

1. Megjegyzés. A 2. tételt abban az esetben, ha $\alpha p < 1$ Rényi Alfréd elemi módszerekkel bebizonyította. Bizonyítása valószínűleg $\alpha p \geq 1$ esetére is kiterjeszthető, ami lehetővé tenné Paley-Wiener mélyebb tételének elkerülését.

2. Megjegyzés. Mint ismeretes, ha $f(u)$ határérték létezik $u \rightarrow \infty$ esetén, úgy $f(u)$ Laplace transzformáltját $\varphi(s)$ -sel jelölve fennáll

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \lim_{s \rightarrow 0} s\varphi(s). \quad (36)$$

(Lásd pl. Doetsch könyvében⁵ p. 458, 3. tétel). Esetünkben, midőn $f(u)$ a (6) integrálegyenlet megoldása, $\varphi(s)$ -et (11) szolgáltatja és erre fennáll:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\varphi(s) = \frac{p}{1 + p\Psi(0)} = \frac{p}{1 + p\alpha}. \quad (37)$$

A tétel fordítottja általában nem igaz. Az idézett könyv⁵ (p. 488, 1. tétel) azonban kimond egy tételt, melynek segítségével abban az esetben, ha $\varphi(s)$ elegendő tesz bizonyos követelményeknek, megadható $f(u)$ aszimptotikus kifejtése $\varphi(s)$ segítségével. A tárgyalásunkban szereplő $f(u)$ esetén ez az aszimptotikus sor $f(u)$ határértékére redukálódik.

3. *Megjegyzés.* Ha (26)-ban $m(t)$ helyére beírjuk (12) kifejezést, úgy azt kapjuk, hogy

$$0 \leq \int_0^t \left[f(u) - \frac{p}{1 + \alpha p} \right] du \leq \frac{\alpha p}{1 + \alpha p}, \tag{38}$$

amely (27)-nél erősebb becslést jelent.

5. § $W(t, n)$ meghatározása

$W(t, n)$ t -nek folytonos függvénye. Mivel $0 \leq W(t, n) \leq 1$ következésképp

$$\omega_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} W(t, n) dt \tag{39}$$

Laplace transzformáltja konvergens $\Re(s) > 0$ -ra és ha

$$\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x) \tag{40}$$

mely $\Re(s) > 0$ -ra konvergens, úgy fennáll:

$$\omega_n(s) = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{p^{n+1} (\psi(s))^n}{(p+s)^{n+1}} \right] \tag{41}$$

mely megengedi $W(t, n)$ meghatározását annak minden folytonossági helyén, tehát t minden értékére.

Bizonyítás: Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy $W(t, n)$ folytonos. Az az esemény, hogy a $(0, t + \Delta t)$ időközben kezdődő történések száma $< n$, (aminek valószínűségét $W(t + \Delta t, n)$ -el jelöljük) a következő, egymást kizáró módon állítható elő: $(0, t)$ időközben kezdődik n történések és $(t, t + \Delta t)$ közben nem kezdődik történések, aminek a valószínűsége kisebb 1-nél és nagyobb vagy egyenlő azzal, hogy nem kezdődik esemény, aminek a valószínűsége $[1 - p\Delta t - o(\Delta t)]$ vagy $(0, t)$ időközben kezdődik $n - 1$ történések és $(t, t + \Delta t)$ közben egy történések, aminek a valószínűsége kisebb egyenlő annak a valószínűségénél, hogy $(t, t + \Delta t)$ időközben egy esemény bekövetkezzék és ennek a valószínűsége: $p\Delta t + o(\Delta t)$ és nagyobb egyenlő nullánál (pontosabban $o(\Delta t)$) vagy $(0, t)$ közben kevesebb mint $n - 1$ történések kezdődjenek és $(t, t + \Delta t)$ közben több mint egy, aminek a valószínűsége $o(\Delta t)$, azaz

$$W(t + \Delta t, n) < W(t, n) + W(t, n - 1)(p\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)$$

és

$$W(t + \Delta t, n) \geq W(t, n)[1 - p\Delta t - o(\Delta t)] + W(t, n-1)o(\Delta t) + o(\Delta t)$$

ahonnan

$$-p\Delta t + o(\Delta t) \leq W(t + \Delta t, n) - W(t, n) - p\Delta t + o(\Delta t)$$

amiből következik $W(t, n)$ folytonos volta.

Jelöljük az $u = 0$ időpontban kezdődő folyamatban az egymásután következő történések kezdőpontjait rendre u_1, u_2, \dots, u_n -nel. Ekkor annak a valószínűsége, hogy $(0, t)$ intervallumban legfeljebb n számú történet kezdődjék, egyenlő azzal, hogy az $n+1$ -ik történet t -t követő időpontban kezdődjék, azaz

$$W(t, n) = P(t < u_{n+1}). \quad (42)$$

Mivel $P(t < u_{n+1}) + P(u_{n+1} < t) = 1$ tehát

$$W(t, n) = 1 - P(u_{n+1} \leq t). \quad (43)$$

Legyen két egymásután következő történet kezdőpontjainak különbsége: $\xi_i = u_i - u_{i-1}$ ($i = 2, 3, \dots$) és $\xi_1 = u_1$ úgy

$$W(t, n) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t). \quad (44)$$

A $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ valószínűségi változók függetlenek. Konszekutív történések kezdőpontjai különbségének a bevezetése és ezzel a problémának független valószínűségi változók összege eloszlásfüggvényének meghatározására való visszavezetése több szerzőnél megtalálható, pl. Fortet ⁶ munkájában.

ξ_1 sűrűségfüggvénye: $g_1(x) = e^{-px} p$. ξ_2, ξ_3, \dots ugyanazon valószínűségi sűrűségfüggvénnyel bírnak és ez

$$g(x) = p \int_0^x e^{-p(x-r)} dH(r). \quad (45)$$

Ugyanis két konszekutív történet kezdőpontjainak különbsége úgy lehet x értékű, hogy a történet r ideig tart és utána $x-r$ időtartam elteltével bekövetkezik egy esemény, mely egyuttal történet kezdőpontja is.

$g_1(x)$ és $g(x)$ sűrűségfüggvények folytonosak. $g_1(x)$ Laplace-transzformáltja $\gamma_1(s) = \frac{p}{p+s}$ és $g(x)$ Laplace transzformáltja $\gamma(s) = \frac{p}{p+s} \psi(s)$. Mindkettő konvergens, ha $\Re(s) \geq 0$. Mivel $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ valószínűségi változók függetlenek, a $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének Laplace transzformáltja egyenlő az egyes ξ_i változók Laplace transzformáltjainak szorzatával, azaz: $\gamma_1(s) [\gamma(s)]^n$ -nel. Továbbá $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének Laplace transzformáltját s -el való osztással nyerjük és így

$$\omega_n(s) = \frac{1}{s} \frac{\gamma_1(s) [\gamma(s)]^n}{s} = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{p^{n+1} [\psi(s)]^n}{(p+s)^{n+1}} \right] \quad (46)$$

mely konvergens, ha $\Re(s) > 0$.

$\omega_n(s)$ ismeretében $W(t, n)$ meghatározható minden folytonossági helyén s mivel $W(t, n)$ folytonos, tehát minden t értékre.

Megjegyzés: (1)-ből következik, hogy $m(t)$ Laplace transzformáltja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{s} - \omega_n(s) \right] = \frac{\gamma_1(s)}{s} \sum_{n=0}^{\infty} [\gamma(s)]^n = \frac{\gamma_1(s)}{s[1-\gamma(s)]} = \frac{p}{s[p+s-\psi(s)]} \quad (47)$$

ugyanis ha $\Re(s) > 0$ $|\gamma(s)| < 1$ s így a sor konvergens. Ez a formula meg-
egyezik a korábban nyert eredménnyel.

Példák: 1) $\xi = \alpha$ (állandó). Ekkor $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ és

$$\omega_n(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{n+1} e^{-s\alpha n} = \frac{1}{s} - \left[\frac{1}{s} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{p^{j-1}}{(p+s)^j} \right] e^{-s\alpha n} \quad (48)$$

ahonnan

$$W(t, n) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{p^{j-1}(t-n\alpha)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\mu(t-n\alpha)} & \text{ha } n\alpha < t \\ 1 & \text{ha } n\alpha \geq t. \end{cases} \quad (49)$$

2) ξ eloszlásfüggvénye $H(x) = 1 - e^{-x/\alpha}$. Ekkor $\psi(s) = \frac{1}{1+\alpha s}$ és ha $\frac{1}{\alpha} \neq p$

$$\omega_n(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{n+1} \left(\frac{1}{1+\alpha s} \right)^n = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{A_j}{(p+s)^j} + \sum_{j=1}^n \frac{B_j \cdot \alpha^j}{(1+\alpha s)^j} \quad (50)$$

ahol

$$A_j = p^{j-1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-j} \binom{n+k-j}{k-1} \frac{\alpha^{n+2-j} p^{n+1}}{(1-\alpha p)^{n+k-j+1}}$$

és

$$B_j = \frac{1}{\alpha^{j-1}} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+k-j+1}{k-1} \frac{p^{k-1}}{\alpha^{j-k} (1-\alpha p)^{n+k-j}}$$

ha $\frac{1}{\alpha} = p$ úgy

$$\omega_n(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{2n+1} = \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{p^{j-1}}{(p+s)^j} \quad (51)$$

Ennek megfelelően ha $\frac{1}{\alpha} \neq p$ úgy

$$W(t, n) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{A_j \cdot t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\mu t} + \sum_{j=1}^n \frac{B_j \cdot t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-t/\alpha} \quad (52)$$

és ha $\frac{1}{\alpha} = p$, úgy:

$$W(t, n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{(pt)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\mu t}. \quad (53)$$

Érdemes megemlíteni, hogy az (53) eloszlásfüggvény úgy nyerhető a Poisson-eloszlásból, hogy annak tagjait páronként összevonjuk.

Ez a valószínűség közvetlenül visszavezethető Poisson folyamatra. Ugyanis $W(t, n) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t)$ hol ξ_1 sűrűségfüggvénye $g_1(x) = e^{-x} p$, és $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+1}$ sűrűségfüggvénye $g_1(x) * g_1(x)$ azaz $g_1(x)$ -nek önmagával való kompozíciója. Mivel $g_1(x)$ egy p sűrűséggel jellemzett Poisson folyamatban két konsekutív esemény sűrűségfüggvénye, következésképp $P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t)$ annak a valószínűsége, hogy t időtartam alatt legalább $2n + 1$ esemény forduljon elő. Ennek a valószínűsége:

$$P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t) = \int_0^t e^{-pu} \frac{(pu)^{2n}}{(2n)!} p du = 1 - \sum_{j=0}^{2n} e^{-pt} \frac{(pt)^j}{j!} \quad (54)$$

és így ezuton is igazolható (53).

Hasonlóképpen állítható elő (52) is Poisson eloszlások kompozíciójaként.

6. § Stacionárius folyamatok

Az előző paragrafusokban azt az esetet tárgyaltuk, midőn a folyamat $u = 0$ időpontban kezdődött és $(0, t)$ intervallumban vizsgáltuk a történések számának várható értékét és eloszlásfüggvényét. Ha ez a folyamat már végtelen hosszú ideje tart és egy kiszemelt t hosszúságú szakaszban vizsgáljuk a történések számának várható értékét és eloszlásfüggvényét, úgy az függetlennek adódik a vizsgált intervallum kezdőpontjától, csupán a vizsgált szakasz hosszától függ. Ekkor a folyamatot stacionáriusnak nevezzük.

A várható értékek most is egyszerűen meghatározhatók a kezdődési és történési valószínűségekkal (12) és (13) formulák alapján, melyeknek értéke most állandó, és pedig

$$f^* = \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \frac{p}{1 + \alpha p} \quad (55)$$

és

$$F^* = \lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \frac{\alpha p}{1 + \alpha p}. \quad (56)$$

Tehát stacionárius folyamat esetén

$$m^*(t) = \frac{pt}{1 + \alpha p} \quad (57)$$

és

$$v^*(t) = \frac{\alpha pt}{1 + \alpha p}. \quad (58)$$

Jelöljük most $W^*(t, n)$ -el egy t hosszúságú időintervallumban kezdődő történések számának valószínűségi eloszlását.

$W^*(t, n)$ folytonos minden t értékre, következésképpen

$$\omega_n^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} W^*(t, n) dt \quad (59)$$

Laplace-transzformáltja konvergens ha $\Re(s) > 0$ és

$$\omega_n^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \frac{p}{1 + \alpha p} \left(1 - \frac{p\psi(s)}{p+s} \right) \left(\frac{p}{p+s} \right)^n (\psi(s))^n \quad (60)$$

amely lehetővé teszi $W^*(t, n)$ meghatározását minden folytonos t értékre, azaz minden t -re.

Bizonyítás: $W^*(t, n)$ folytonos volta $W(t, n)$ -hez hasonlóan mutatható ki. Az előző paragrafusban követett tárgyaláshoz hasonlóan ugyanazon jelölésekkel felírható

$$W^*(t, n) = 1 - P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n+1} \leq t) \quad (61)$$

hol azonban ξ_i valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az előzőtől eltérően:

$$g_1(x) = \frac{p}{1 + \alpha p} [1 - G(x)]. \quad (62)$$

Ugyanis, ha valamely történéis időtartamának eloszlásfüggvénye $G(x)$ folytonos és átlaga μ úgy annak a valószínűsége, hogy egy adott időpontban éppen folyó történéis legfeljebb x időtartam múlva befejeződjék stacionárius folyamat esetében mint ismeretes ⁷

$$\int_0^x \frac{1 - G(x)}{\mu} dx \quad (63)$$

és ennek sűrűségfüggvénye

$$\frac{1 - G(x)}{\mu}. \quad (64)$$

Esetünkben $G(x)$ a (45) alatt definiált $g(x)$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvény és

$$\mu = \int_0^{\infty} x g(x) dx = \frac{1}{p} + \alpha = \frac{1 + \alpha p}{p} \quad (65)$$

$g_1(x)$ Laplace-transzformáltja, mely $\Re(s) \geq 0$ -ra konvergens

$$\gamma_1(s) = \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{p\psi(s)}{p+s} \right]. \quad (66)$$

Ennek segítségével az előző paragrafusban követett tárgyaláshoz hasonlóan kapjuk (60)-at:

Megjegyzés: A történések várható számának Laplace-transzformáltja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{s} - \omega_n^*(s) \right] = \frac{1}{s^2} \frac{p}{1 + \alpha p} \quad (67)$$

azaz

$$m^*(t) = \frac{pt}{1 + \alpha p}$$

mint előbb nyertük.

Példa: $\xi = \alpha$ (konstans). Ekkor $\psi(s) = e^{-s\alpha}$ és

$$\begin{aligned} \omega_n^*(s) &= \frac{1}{s} - \frac{p}{1 + \alpha p} \frac{1}{s^2} \left(\frac{p}{p+s} \right)^n e^{-s\alpha n} + \frac{p}{1 + \alpha p} \frac{1}{s^2} \left(\frac{p}{p+s} \right)^{n+1} e^{-s\alpha(n+1)} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{n}{p} \right) + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \frac{(n+1-k)p^{k-1}}{(p+s)^k} \right] e^{-s\alpha n} + \\ &+ \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{n+1}{p} \right) + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+2-k)p^{k-1}}{(p+s)^k} \right] e^{-s\alpha(n+1)} \end{aligned} \quad (68)$$

ahonnan

$$\begin{aligned} W^*(t, n) &= 1 - \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\left(t - \frac{n}{p} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n \frac{(n+1-k)p^{k-1}(t-\alpha n)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\rho(t-\alpha n)} \right] \text{ (ha } \alpha n \leq t) + \\ &+ \frac{p}{1 + \alpha p} \left[\left(t - \frac{n+1}{p} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+2-k)p^{k-1}(t-\alpha(n+1))^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\rho(t-\alpha(n+1))} \right] \text{ (ha } \alpha(n+1) < t). \end{aligned} \quad (69)$$

Meglepő, hogy míg stacionárius folyamat esetén a várható érték kiszámítása egyszerűbb mint nem stacionárius folyamatnál, addig maga az eloszlásfüggvény komplikáltabb.

II. KOINCIDENCIA JELENSÉGEK

1. § A probléma kitűzése

Vizsgáljunk egy olyan rendszert, amely s számú az I részben tárgyalt típusú egyidejűleg végbemenő folyamatból áll. Ekkor előfordulhat, hogy az s számú folyamat közül adott u időpontban $0, 1, 2, \dots, s$ számú folyamatban van törtézés. Azt mondjuk, hogy a rendszer (s számú folyamat együttesen) u időpontban E_j állapotban van, ha egyidejűleg j törtézés van abban az időpontban.

Definícióképpen azt mondjuk, hogy u időpontban koincidencia van, ha legalább $k(k=1, 2, \dots, s)$ számú egyidejű törtézés van, azaz a rendszer E_j állapotban van, hol $j \geq k$. Adott időpontban koincidencia kezdődik, ha $E_{k-1} \rightarrow E_k$ átmenet lép fel.

Kérdés, mennyi lesz a $(0, t)$ időközben kezdődő koincidenciák várható száma: $m_{sk}(t)$ és várható időtartama: $\tau_{sk}(t)$.

2. § A várható értékek meghatározása

A várható értékek most is meghatározhatók a következő két valószínűség bevezetésével: Legyen $F_k(u)$ annak a valószínűsége, hogy a rendszer u időpontban E_k, E_{k+1}, \dots, E_s állapotok egyikében legyen. Ekkor annak a valószínűsége, hogyha u időpontban E_{k-1} állapotban van a rendszer, $u + \Delta u$ időpontban E_k állapotban legyen a korábban közölt gondolatmenet szerint könnyen beláthatóan a következőképpen írható: $f_k(u)\Delta u + o(\Delta u)$; röviden annak a feltételes valószínűsége, hogy a rendszer, mely u időpontban E_{k-1} állapotban van, $(u, u + du)$ közben E_k állapotba kerüljön: $f_k(u) du$.

Ennek segítségével

$$m_{sk}(t) = \int_0^t f_k(u) du \tag{70}$$

és

$$\tau_{sk}(t) = \int_0^t F_k(u) du. \tag{71}$$

A bizonyítás (12) és (13) közölt bizonyításához hasonló.

Most

$$f_k(u) du = \binom{s}{k-1} [F(u)]^{k-1} [1-F(u)]^{s-k+1} (s-k+1)p du. \tag{72}$$

Ugyanis az $E_{k-1} \rightarrow E_k$ átmenet valószínűsége $(u, u + du)$ közben egyenlő a következő esemény valószínűségével: u időpontban $k-1$ folyamatban legyen történés és $s-k+1$ -ben ne legyen, amit *Bernoulli* ismétléses valószínűségekre vonatkozó formulája szolgáltat és a szabad $s-k+1$ folyamat egyikében u és $u + du$ időpontok között kezdődjék egy esemény, amelynek a valószínűsége $(s-k+1)p du$, mely egyuttal történés is; azaz

$$f_k(u) = ps \binom{s-1}{k-1} [F(u)]^{k-1} \cdot [1-F(u)]^{s-k+1}. \tag{73}$$

Megjegyezzük, hogy annak a valószínűsége, hogy u és $u + \Delta u$ időpontok között $s-k+1$ szabad folyamat egyikében egy esemény kezdődjék: $\binom{s-k+1}{1} (p\Delta u)(1-p\Delta u)^{s-k} + o(\Delta u) = (s-k+1)p\Delta u + o(\Delta u)$ és hogy több mint egy esemény kezdődjék, $o(\Delta u)$. Innen rövidség kedvéért azt mondjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy $(u, u + du)$ időközben kezdődjék egy esemény $(s-k+1)p du$.

Annak a valószínűsége, hogy u időpontban koincidencia legyen, egyenlő azzal, hogy k vagy annál több folyamatban legyen történés, azaz

$$F_k(u) = \sum_{j=k}^s \binom{s}{j} [F(u)]^j [1-F(u)]^{s-j}. \tag{74}$$

3. § *Stacionárius folyamatokból álló rendszerek*

Az előző két paragrafusban az $u = 0$ időpontban kezdődő folyamatokat vizsgáltuk $(0, t)$ intervallumban. Most tegyük fel, hogy a folyamatok végtelen hosszú ideje tartanak és egy kiszemelt t nagyságú intervallumban vizsgáljuk a jelenséget. Ekkor a várható értékek és valószínűségi eloszlások függetlenek az intervallum kezdőpontjától, csupán annak hosszától függenek és a folyamatokat stacionáriusoknak nevezzük.

Ekkor $f_k(u)$ és $F_k(u)$ értékek állandók lesznek és pedig

$$f_k^* = ps \binom{s-1}{k-1} [F^*]^{k-1} [1-F^*]^{s-k+1} \quad (75)$$

és

$$F_k^* = \sum_{j=k}^s \binom{s}{j} [F^*]^j [1-F^*]^{s-j}. \quad (76)$$

A várható értékek:

$$m_{s,k}^*(t) = ps \binom{s-1}{k-1} \left(\frac{\alpha p}{1+\alpha p} \right)^{k-1} \left(\frac{1}{1+\alpha p} \right)^{s-k+1} t \quad (77)$$

és

$$\sigma_{s,k}^*(t) = \sum_{j=k}^s \binom{s}{j} \left(\frac{\alpha p}{1+\alpha p} \right)^j \left(\frac{1}{1+\alpha p} \right)^{s-j} t. \quad (78)$$

Ha egy folyamatban kezdődő történések sűrűségét a következőképpen jelöljük:

$$\bar{n} = \frac{p}{1+\alpha p} \quad (79)$$

úgy

$$m_{s,k}^*(t) = s \binom{s-1}{k-1} (\alpha n)^{k-1} (1-\alpha \bar{n})^{s-k} \bar{n} t \quad (80)$$

-re jutunk, mely formula a kísérleti fizika koincidencia számlálásainál az $u. n.$ véletlen koincidenciák várható számát szolgáltatja.

Az itt nyert eredmények felhasználhatók a gyakorlatban több gép egyidejű működésénél, telefonközpontok méretezésénél és a kísérleti fizika részecskeszámlálásainál előforduló problémák megoldására.

Végül köszönetemet fejezem ki *Rényi Alfréd*-nek számos értékes megjegyzéséért.

*Magyar Tudományos Akadémia
Alkalmazott Matematikai Intézete.*

IRODALOM.

¹ A. Khintchine: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ergebnisse der Mathematik 2, Berlin, (1939) 19.

² A. Rényi: On some problems concerning Poisson processes. [Publicationes Mathematicae, 2 (1951) 66–73].

³ Volterra: Lecons sur les Equations Intégrales et les Equations Integro—Differentialles, Paris, 1913.

⁴ R. E. A. C. Paley and Wiener: Fourier Transforms in the Complex Domain (New-York, 1934).

⁵ G. Doetsch: Handbuch der Laplace Transformation I (Basel, 1950).

⁶ R. Fortet: Probabilité de perte d'un appel téléphonique [Le calcul des probabilités et ses applications, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1944 pp. 105–113].

⁷ S. Malmquist: A statistical problem connected with the counting of radioactive particles [Annals of Mathematical Statistics, 18 (1947) 255–264].

Az akadémiai intézetek munkájáról

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK MŰKÖDÉSÉRŐL

Felemelt öt éves tervünk hatalmas célkitűzéseinek megvalósítása népgazdaságunkat és tudományos életünket mind többször állítja olyan problémák elé, amelyek megoldásához matematikai módszerek nélkülözhetetlenek, amely kérdések matematikai módszerek segítségével való tárgyalása egyszerűbb, gyorsabb, igen sokszor sok költségnek, fáradságnak megtakarításával jár. A matematikai módszerek továbbá mélyebb betekintést engednek a gyakorlat problémáiba és lehetőséget nyújtanak azok eredményesebb megoldására, ezen keresztül pedig a termelés mennyiségi vagy minőségi emelésére. A termelés és tudomány e problémáinak megoldásához szorosabbá kellett fűzni a kapcsolatot a matematikai tudományos kutatás és a népgazdaság, valamint a tudományos élet között. A Magyar Népköztársaság kormánya mindezek felismeréséből kiindulva hozta létre a múlt év során a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetét, amely Intézet azonban, ha nem is ebben a szervezett formában és szűkebb keretek között, már ezelőtt is közel két évig működött előbb a Magyar Tudományos Tanács, utóbb a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával.

Az Intézet feladata az alkalmazott matematikai tudományok művelése és eredményeinek a népgazdaság, a termelés és a tudományos munka fejlesztésére való felhasználása, továbbá a népgazdaság és a tudományos élet által felvetett problémák megoldása. Ezeknek a feladatoknak megfelelően az Intézet az ipartól, mezőgazdaságtól, tudományos intézetekből kapott matematikai vonatkozású problémák megoldását végzi s emellett távolabbi perspektívájú, önálló tudományos kutatási tervet dolgozott ki és valósít meg.

E külső és belső munkaprogramm természetesen el nem választható munkafolyamatokat jelent, mert egyrészt a termelés, a tudományos élet problémái szabják meg az Intézet belső tudományos kutatási programjának irányát, másrészt a belső munkaprogramm eredményes teljesítése teszi lehetővé, hogy az Intézet a külső feladatokra alaposan felkészüljön és azokat sikeresen tudja megoldani.

Az Intézet feladatainak teljesítésére jelenleg az alábbi osztályokra tagozódik: I. Mechanikai és szilárdságtani osztály, osztályvezető Egerváry Jenő r. tag, II. Vegyipari osztály, osztályvezető Fenyő István, III. Valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztály, osztályvezető Rényi Alfréd lev. tag, IV. Biztosítási és gazdasági matematikai osztály, osztályvezető Vincze István, V. Numerikus és grafikus módszerek osztálya, osztályvezető Hajós György lev. tag.

Az Intézet tervbevette, hogy fejlődése során egy elektrotechnikai, egy függvényapproximációs, egy lengés- és rezgéstani, továbbá egy gépi matematikai osztállyal fog kiegészülni, amely tárgykörökbe vágó kérdések egyre nagyobb számban merülnek fel az Intézet munkája során és amely feladatokat jelenleg az Intézet meglévő osztályai osztanak fel maguk között.

Az utolsó év alatt egyre bővült azoknak az intézményeknek a száma, amelyek problémáikkal az Intézethez fordultak, azonban kétségtelenül nem éri el azoknak az ipari, mezőgazdasági és tudományos intézményeknek a számát, ahol matematikai módszerek alkalmazása kívánatos volna. Megemlítünk néhányat azok közül az intézmények közül, amelyek részére az Intézet működése során matematikai problémákat megoldott. Több minisztérium mellett a Rákosi Mátyás Művek, Ganz Villamossági Gyár, Ganz Árammérő Gyár, Csepeli Autógyár Vállalat, Földalatti Vasutépítő Vállalat, Standard Villamossági Vállalat, Kelenföldi Textilkombinát, Hungária Vegyiművek, Áfort Ásványolajforgalmi Vállalat, Mélyépítéstervező Vállalat, Közlekedésüzemi Építettervező Vállalat, Ipari Minőségellenőrző Intézet, Szakszervezetek Országos Tanácsa; a tudományos kutatóintézetek közül: Vasipari Kutató Intézet, Távközlési Kutató Intézet, Cukoripari Kutató Intézet, Textilipari Központi Kutató Laboratórium, Központi Biokémiai Ipari Kutató Laboratórium, Nagynyomású Kísérleti Intézet, Hőtechnikai Intézet, Építéstudomány Intézet, Gyapotnemesítő Kísérleti Telep, Növénytermelési Kutató Intézet, Országos Mezőgazdasági Kutató Intézet, Egyetemi Gyógyszertani Intézet, Pécsi Anatómiai Intézet, Péterffy Sándor-utcai kórház belgyógyászati osztálya, Szegedi Honvédkórház.

Azok közül a termelési és tudományos problémák közül, amelyek megoldásában az Alkalmazott Matematikai Intézet közreműködött, az alábbiakat említjük meg:

Mechanikai és szilárdságtani problémák: nagy sebességgel forgó, vastag-falu kúpos gyűrűk méretezésének kérdése, nagyfordulatszámú turbogenerátorok forgó vastestében létrejövő feszültségi állapot vizsgálata, tengelyek veszélyes fordulatszámának meghatározása, gyorsvágásnál alkalmazott esztergakések „Vidia“ éleinek szikraforgácsolással való megmunkálásához szükséges berendezések konstruálásánál fellépő számítások, szivattyúgépek alapozásánál fellépő rezgéstani jelenségek vizsgálata.

Hőtani problémák: turbogenerátorok vastestének méretezéséhez szükséges hővezetési számítások, tengelyek lángedzésénél fellépő hőmérsékleteloszlás vizsgálata, azbeszt védőburok hőátbocsátási tulajdonságainak megállapítása.

Elektromosságtani problémák: földelt vasrúd elektromos erőterének számítása, váltóáramu sínáramkör vizsgálata a táviróegyenletek alapján, automatikus berendezések stabilitási vizsgálata, áramkör bekapcsolási jelenségeinek vizsgálata.

Vegyipari problémák: Fermentálók levegőjéből való nikotinelvonás elvégzéséhez szükséges berendezés konstruálására vonatkozó számítások, folya-

dékok extrakciós problémáinál fellépő kérdések matematikai tárgyalása, gáz-kísérletekkel kapcsolatos egyensúlyi kérdések vizsgálata, különböző oldási eljárások elvégzésénél alkalmazott oldótornyok méretezéseire vonatkozó számítások, olaj kifolyási idejének, a melasznak ionkicserélővel történő cukortalánításának matematikai meghatározására vonatkozó számítások, cukoripari diffúziós eljárások matematikai vizsgálata.

A valószínűségszámítás és matematikai statisztika módszereivel tárgyalható problémák közül a következőket említjük meg: Fizikai és kémiai kutatással kapcsolatos problémák, orvosi és biológiai kísérletek statisztikai kiértékelése, betonadalék szemszerkezeti vizsgálata, a különböző zúzógépek segítségével történő kötőrésnél a zúzott kő szemnagyság szerinti megoszlásának és a kötőréshöz szükséges energiának kiszámítása, különböző tömegcikkgyártásnál, pl. csavargyártásnál a minőségi ellenőrzés matematikai statisztikai problémáinak megoldása. Gépalkatrészek szerelésénél az alkatrészek törésének kérdése, gyapotnemesítéssel, lucernanemesítéssel kapcsolatos kísérletek tervezése és statisztikai kiértékelése, bányák elektromos berendezéseinek bányalégrobbanás elleni biztosításával kapcsolatos számítások, bányarobbantással kapcsolatos számítások, telefonhálózatok méretezésének megtervezésére vonatkozó számítások, a textiliparban alkalmazott többgépes rendszernél az optimális fordulatszám meghatározása, gépalkatrészek tartalékolásával kapcsolatos gazdaságossági számítások tekintettel a véletlen törésekre.

Az előforduló problémák természetének és jelentőségének megvilágítására példaképpen ismertetjük a fenti felsorolásban utolsóként említett — gépalkatrészek tartalékolására vonatkozó — kérdést, annak először egy leegyszerűsített esetét fogalmazva meg. Valamely gép egy alkatrésze időnként igen sok körülménytől függően, tehát véletlenszerűen eltörik, egy bizonyos idő után még ha nem is törik el, annyira megkopik, hogy ki kell cserélni. Ha éppen nem áll rendelkezésre és nincs is rendelés alatt tartalékalkatrész a törött vagy elkopott alkatrész kicserélésére, akkor a rendelés beérkeztéig eltelt időben gépleállás, tehát termelési kiesés következik be. De bekövetkezhet termelési kiesés akkor is, ha van bizonyos számú tartalék alkatrész, de azok gyors egymásutánban összetörnek és ugyanakkor még nem érkezett be az utoljára megrendelt mennyiség. Elvileg a termelési kiesést csak igen nagyszámú alkatrész tartalékolásával kerülhetjük el, ami viszont igen nagy összegnek nem rentábilis befektetését jelentené. Feladat bizonyos törési gyakoriság, adott kopási periódus és meghatározott beszerzési idő figyelembevételével a tartalékalkatrészek számát, illetőleg a tartalékolási és utánrendelési tervet úgy meghatározni, hogy a termelési kiesés veszélyével szemben kellő biztonságot nyújtson, ugyanakkor ne vezessen indokolatlanul nagymennyiségű gépalkatrész tartalékolására. — A valóságban természetesen egyazon gépen több helyen fordulhatnak elő azonos és ugyanolyan terhelésnek kitett alkatrészek, sőt ezek még különböző gépeken is előfordulhatnak, tehát több gépen közös tartalék

tartható, továbbá azt is vizsgálni kell, hogy milyen időközönként és milyen mennyiségű rendeléssel érhetjük el a kívánt biztonságot.

A kérdéssel az Intézet a „Kábel“ Szovjet Állami Elektromosipari Rt. Magyarországi Fióktelepe megbízásából foglalkozott, az eredmények azonban szinte az ipar összes ágaiban alkalmazhatók.

Az Intézet munkatársai igen sok esetben üzemi látogatások után ismerkedtek meg a szóbanforgó problémák műszaki vonatkozásaival és állapították meg a számításokhoz szükséges adatokat.

Az Intézet a felsorolt elvi jelentőségű kérdéseken kívül számtalan esetben nyújtott segítséget numerikus számítások elvégzésére, nomogrammok megszerkesztésére, táblázatok elkészítésére.

Általában az Intézet törekszik arra, hogy ahol csak lehetséges és hasznos, nomogramm vagy grafikon formájában bocsássa az ipar rendelkezésére a számítások eredményeit, ami általában megkönnyíti azok egyszerű és gyors alkalmazását. — Az Intézet állami intézmények részére általában díjmentesen áll rendelkezésre matematikai elvi problémáik megoldásában, a nagyobb terjedelmű számolást igénylő munka esetén az Intézet elvi utmutatást ad e számítások elvégzésére, ha azonban a számítások elvégzése maga is matematikai felkészültséget igényel, akkor az Intézet ezt külső munkaerők bevonásával végzi és ez esetben a megbízó félnek kell megtéríteni a különmunka díját.

Az Intézetnek feladatai elvégzéséhez kézi- és elektromos számológépek, planiméterek, integráf, Fourier-analizátor, Stieltjes-planiméter momentumok meghatározására, pantonográf, állanak rendelkezésére; az Intézet tervbevette gépparkjának az ötéves terv során való jelentős kibővítését, egyebek közt olyan elektromos gépekkel, amelyek differenciálegyenletek megoldására alkalmasak, továbbá mechanikai működési elvű matematikai gépek és segédeszközök építése útján.

Az Intézet munkájában jelentős mértékben támaszkodik a szovjet tudomány eredményeire és a szovjet tapasztalatokra. A szovjet matematika legjellemzőbb vonása éppen az elmélet és gyakorlat termékeny egységének megvalósítása. A szovjet matematikusok nemcsak a matematika döntő elvi problémáinak megoldásában értek el világviszonylatban vezető szerepet, hanem az alkalmazott matematika területén is. A Szovjetunió Tudományos Akadémiájának matematikai intézete, a moszkvai Sztjeklov-intézet, a Szovjetunió Akadémiájának Alkalmazott Matematikai Intézete, továbbá a Szövetséges Szovjet Köztársaságok akadémiainak matematikai intézetei rendszeresen foglalkoznak az ipar, a mezőgazdaság, a hatalmas sztálini természetátalakító tervek által felvetett alkalmazott matematikai problémák megoldásával. Szovjet eredményeket használt fel Intézetünk, amikor A. Ja. Hincsinnek a gépegyüttállásokra vonatkozó alapvető matematikai statisztikai vizsgálataira támaszkodva oldotta meg a textiliparban alkalmazott többgépes rendszereknél felmerülő elvi matematikai statisztikai problémákat. A. N. Kolmogorovnak a törési folyamatokra vonatkozó eredményeit használta fel intézetünk a kötöréshez

szükséges energiai mennyiségének és a törési művelet után a zúzott anyag nagyságszerinti eloszlásának meghatározására és még sok más esetben.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkatársai ellátták az Eötvös Lóránd Tudományegyetem Természettudományi Karán folyó alkalmazott matematikai oktatás több előadását, irányították az ezekkel kapcsolatos gyakorlatokat. Az Intézet ez évben az alkalmazott matematikus hallgatók és néhány önként jelentkező matematika-fizika szakos hallgató részére nyári gyakorlatot tartott. A gyakorlatokon résztvevő hallgatók bekapcsolódtak az Intézetben folyó számítások elvégzésébe és az üzemi mérések lebonyolításába. E munkáik során amellet, hogy gyakorlatot nyertek az alkalmazott matematika különböző ágaiban, az Intézet munkájához jelentős segítséggel hozzájárultak. Ugyancsak figyelemmel kísérte az Intézet a matematikai oktatás számos kérdését és résztvett tananyagösszeállításban és tankönyvek elbírálásában az Eötvös Lóránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, a Gazdaságtudományi Egyetemen, a Műszaki és Gazdasági Akadémián, közgazdasági gimnáziumokban.

Egyre fokozódó feladatainak teljesítése szükségessé teszi az Intézet további fejlesztését és jelenlegi működésében még fennálló hiányosságok és hibák felszámolását. Fokozottan kell tanulmányoznunk a szovjet tudomány eredményeit és a Szovjetunió hasonló intézményeinek mintájára sokkal szorosabbra kell fűznünk kapcsolatainkat az iparral. Szükségesnek mutatkozik továbbá új kutatók bekapcsolása és — mint említettük — gépi berendezésünk jelentős bővítése, meglehetősen hiányos könyvtárunk fejlesztése, amit a takarékoság követelményeinek megfelelően és mert sok mű ma már nehezen szerezhető be, fotokópia berendezés felállításával is igyekszünk elősegíteni. Kapcsolatot kell találnunk, illetve meglévő kapcsolatainkat tovább kell fejlesztenünk az egyetemek, különösen a műszaki egyetemek matematikusaival, egyrészt az Intézet működésébe való bekapcsolásuk, másrészt a műszaki oktatás részére az Intézet tapasztalatainak továbbadása céljából.

Fiatal munkatársaink szakmai továbbképzését tervszerűbbé kell tennünk. Az elmúlt év során a valószínűségszámítási és matematikai statisztikai osztály rendszeresen tartott szemináriumszerű előadásokat, amelyre az érintett ipari szakembereket is meghívta; ennek a helyes kezdeményezésnek a többi osztályokra való kiterjesztése ugyancsak a közeljövő feladatai közé tartozik. Több figyelmet kell fordítanunk az alkalmazott matematikusok képzésére, a hallgatók részére időnként meg kell szerveznünk az Intézet látogatását és ennek eredményességéhez demonstrációs eszközök készítését és beszerzését is feladatunkul tűztük ki.

Ezekben kívántuk ismertetni az Intézet működését és azokat a közeli jövőben megvalósítandó feladatokat, amelyeken keresztül még eredményesebben tudjuk betölteni szerepünket és tudjuk a tudomány és gyakorlat egységének megteremtésével a szocializmus építését szolgálni.

Vincze István



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA CSILLAGVIZSGÁLÓ INTÉZETÉNEK MUNKÁJÁRÓL

Népköztársaságunk nagyvonalú tudománypártoló politikája nagymértékben elősegítette a hazai csillagászati kutatómunka fellendülését is. A szabadsághegyi Csillagvizsgáló Intézet az ötéves terv első évében beszerzett új segédműszer révén kiterjeszthette munkakörét a fotoelektromos fotometriára, azonkívül felszerelhetett a napfizikai kutatások céljaira két távcsövet abba a két új észlelőhelyiségbe, amelyeket a MÉMOSZ dolgozói 1949-ben önkéntes rohammunkával építettek. A második tervévben elkészül egy új spektrohélioszkóp is. Az Intézet létszáma, különösen az Intézetnek a Magyar Tudományos Akadémia által ez évben történt átvétele óta lényegesen megnőtt és csak az elmúlt rendszer hibájából még mindig fennálló káderhiány miatt nem lehetett a tudományos kutatók létszámát kellőképpen felemelni. Azonban az egyetemi oktatás színvonalának jelentékeny emelése és az aspirantúra intézményének a csillagászat terén való megindítása révén ez a hiány remélhetőleg hamarosan megszűnik.

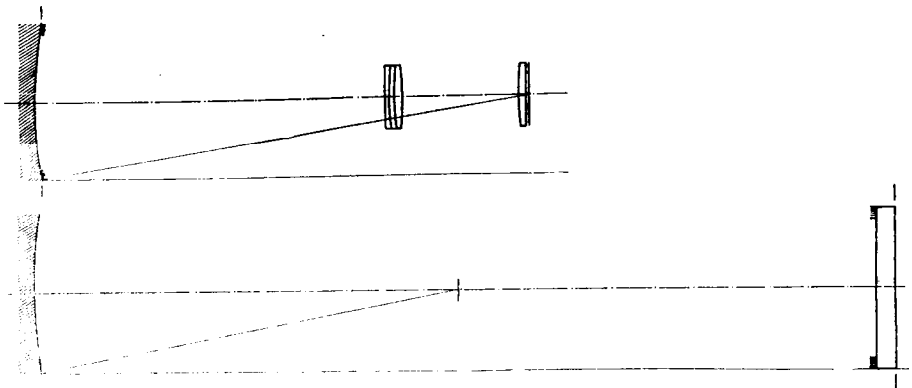
Mindezekon felül azonban a legnagyobb jelentőségű az Intézet jövőjére nézve az, hogy az Intézet az Akadémia támogatása révén az ötéves terv keretében a jénai Zeiss-művektől megrendelhetett egy 90 cm átmérőjű Sonnefeld-típusú tükrörteleszkópot egy ugyanilyen nagyságú objektívprizmával. A műszert négy év múlva szállítják, addig ki kell keresni hazánknak a csillagászati megfigyelések szempontjából legalkalmasabb helyét és ott megépíteni a távcső befogadására szolgáló épületet.

A Sonnefeld-típusú tükrörteleszkóp az aplanatikus tükrörrendszerekhez tartozik. Ezek komoly fejlődése *Bernhardt Schmidt* zseniális felfedezésével 1931-ben indult meg. A Schmidt-féle teleszkóp egy gömbtükröből és ennek görbületi középpontjában elhelyezett korrekciós lemezből áll. *Schmidt*-tel szemben *Ross* már meglevő paraboloid-tükröket igyekezett aplanatikus rendszerűvé tenni a fókuszról nem messze elhelyezett lencserendszerrel. Így sikerült a használható látmezőt néhány ívpercről közel másfél fokig emelni, de ez még erősen alatta marad a Schmidt-féle rendszerben elérhető látómezőnek. *Sonnefeld* 1935-ben kimutatta, hogy a *Ross*-féle elgondolást lényegesen lehet javítani, ha a tükröt szférikusán túlkorrigáljuk. *Pradel* és *Köhler* tovább javították ezt a típust és különösen jelentős, hogy a korrekciós rendszert olyan üvegből tudták előállítani, amely az ultraibolyát egész 300 $m\mu$ -ig átengedi.

A Schmidt- és a Sonnefeld-féle rendszerek vázlatát a mellékelt ábrán láthatjuk. Utóbbi (felső kép) előnye a Schmidt-félével szemben, hogy ugyanolyan

nyílásviszony mellett lényegesen rövidebb és amellet a képfelület, amely a Schmidt-félénél gömb, itt sík.

Az Intézet számára megrendelt Sonnefeld-teleszkóp nyílásviszonya 1:3 és a hibátlan látómező $3^\circ \times 3^\circ$ lesz. Ekkora látómező teljesen elegendő minden szóbajöhető kutatás számára. Összehasonlítául megemlítjük, hogy az Intézet jelenlegi 60 cm-es reflektorának használható látómezeje 200-szor kisebb és természetesen fényereje is gyengébb. Amíg ma egy 60 cm átmérőjű paraboloid-reflektor világviszonylatban jelentéktelen csillagászati berendezésnek számít, addig egy 90 cm nyílású aplanatikus tükörprizmakamara, amilyen az új műszer az objektívprizmával, a legnagyobb ilyenfajta berendezések között lesz. Így a hazai csillagászat most először jut olyan felszereléshez, amellyel a csillagászat igen nagy területén felveheti a versenyt bármely külföldi csillagdával. A Tejútrendszer szerkezetének, az intersztelláris anyagoknak, a szomszédos csillagrendszereknek, a szupergalaktikáknak, valamint gyengefényű égitestek színeképi vizsgálata mind hozzáférhető lesz számunkra, míg a mostani kizárólag kis látómezejű távcsövekből álló berendezéssel csak egyes speciális égitestek vizsgálata lehetséges.



De ezekkel a kisebb teljesítményű műszerekkel is sikerült olyan megfigyelési programokat kidolgoznunk, amelyek a modern asztrofizika fontos kérdéseit érintik. Így különösen a δ Cephei-csillagok vizsgálatában tudtunk szép eredményeket elérni. A δ Cephei-csillagok a változófényű csillagok legfontosabb osztályát képezik, amennyiben egyaránt döntő szerepet játszanak a csillagok belső szerkezetének elméletében és a Világegyetem térbeli felépítésének kikutatásában. A δ Cephei-csillagok rezgő gáztetek, s a rezgések vizsgálata révén sok mindent megtudhatunk a csillagok szerkezetéről, különösen olyan csillagok esetében, amelyekben egyszerre több rezgés van gerjesztve. Ilyenek létezésére a szovjet csillagászok hívták fel a figyelmet. Ennek megfelelően felkutatjuk azokat a csillagokat, amelyek fényváltozásában több periódus mutatkozik és részletesen tanulmányozzuk a rezgések összetevődését. A vizsgálatokat

munkaközösségben négy kutató és két segéderő végzi, a 16 cm-es asztrográfunkon készült felvételek alapján.

Majdnem minden egyes ilyen többperiódusu csillag vizsgálata hoz valami érdekes újat, de az anyag növekedésével mind több általános törvényszerűséget tudunk megállapítani. A legfontosabb ezek közül, hogy a főperiódus minden ilyen csillagnál állandóan nő. Ez a csillagok kozmogóniája szempontjából is fontos megállapítás. Segítségével jól lehet interpretálni azt az eredményünket is, hogy a gömbhalmazokban levő δ Cephei-csillagok statisztikai tulajdonságai halmazról-halmazra változnak.

A gömbhalmazokban levő δ Cephei-csillagokkal egy másik csoport foglalkozik két kutatóval és több segéderővel, az Intézet 60 cm-es reflektorán készített felvételek alapján. Némelyik halmazról már olyan hosszú időre kiterjedő anyag áll rendelkezésünkre, hogy a halmazváltozók periódusváltozását is vizsgálhatjuk, de a munka főcélja inkább pontos adatokat kapni az egyes halmazok közötti eltérésekre.

Egyik munkaprogramunk, amelyben három kutató és egy segéderő vesz részt, a fedési kettős csillagok vizsgálata. Ezeknél a fedésektől előálló fényváltozás vizsgálata lehetővé teszi a kettős csillagok pályájának, valamint a komponensek alakjának és méreteinek megállapítását. Az új fotoelektromos fotométerünk nagy pontossága révén rendkívül alkalmas ezekhez a vizsgálatokhoz.

Fontos eredményekre vezetett egyik kutatónk elméleti vizsgálata a turbulenciának asztrofizikai szerepére vonatkozólag. Kiderült, hogy ionizált gázokban a turbulencia következtében a mágneses permeabilitás olyannyira megváltozik, hogy a ferromágneses anyagokéval lesz összemérhető. Ezzel szemben a közepes elektromos vezetőképesség a milliomodrészére csökken. Így turbulens csillaglégkörök esetén az eddigi asztrofizikai irodalomban használt feltevések teljesen téveseknek bizonyultak. Sikerült megmagyarázni a napfoltok mágneses terének eredetét azon kapcsolat révén, amely az ionizált gáz különböző hőmérsékleti helyei között meginduló elektrondiffúzió következtében a mágneses tér és a turbulencia között fennáll. A számítások a napfoltok mágneses terének erősségére és a napfoltok átmérőjének felső határára a megfigyelésekkel teljesen egyező eredményeket adtak.

Az asztrofizikai osztály még a kettős csillagok fotometriájával, a változó csillagok statisztikájával, csillagfedésekkel és nyílthalmazok Russel-diagrammjának megállapításával foglalkozik, legutóbbival külföldi anyag alapján.

A napfizikai osztály jelenlegi főmunkája egy protuberancia-statisztika, amelynek célja felvilágosítást kapni, hogyan függ össze a protuberancia-tevékenység a napfolttevékenységgel és a geofizikai jelenségekkel. A munkát egy kutató és egy segéderő, több külső munkatárssal együtt végzi, akiket az Akadémiától kapott céltámogatásból lehetett alkalmazni. Azonkívül két kutatónk külföldi koronográf felvételeken vizsgálja a protuberanciák mozgását. Itt elméleti szempontból főleg a gyorsulások megállapítása fontos.

Rövid időn belül sor kerül a III. osztály, az u. n. pozícióasztronómia és stellárstatisztikai osztály felállítására. Ezzel kutatási témáink számát lényegesen növelhetjük, de jövőévi tervünkben a másik két osztály is vett fel új kutatási témákat, mint pl. az üstökösök fizikai vizsgálatát, valamint spektrálfotometriai megfigyeléseket. Jövő évben több súlyt kívánunk helyezni a rokontudományokkal való kooperációra, különösen a geodéziával és a geofizikával való kapcsolatokat kell kiszélesítenünk.

Detre László

AZ I. MAGYAR FIZIKUS VÁNDORGYÜLÉS

1951. május 27—29-ig rendezte az Eötvös Lóránd Fizikai Társulat a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával az I. Magyar Fizikus Vándorgyűlést Pécsen.

Az I. Magyar Fizikus Vándorgyűlést abból az alkalomból rendezte meg a Társulat, hogy *Selényi Pál* nagy szög alatt haladó fénysugarak interferenciaképességét kimutató híres kísérlete 40 éves. A bevezető előadást *Jánossy Lajos* akadémikus tartotta a Selényi-féle interferenciakísérletről. Rámutatott arra, hogy a Selényi-kísérlet a fénynek egy alapvető tulajdonságát mutatja ki. *Selényi* kísérlete az eddig legmeggyőzőbb bizonyíték a fény hullámtermészete mellett és ezenfelül azt is mutatja, hogy a sugárzás leírható, mint egy rezgő dipólus kisugárzása. Alátámasztja ezt a tényt *Selényi*nek 1938-ban végzett újabb vizsgálata, mely azt mutatja, hogy eme sugarakból létesített interferenciarendszer a dipólus sugárzásnak megfelelő polarizációt mutat. Ezeket a kísérleteket különösen fontosá tette a kvantumelmélet kialakulása. Hiszen *Selényi* kísérlete azt bizonyítja, hogy a dipólus által keltett gömbhullám intenzitáseloszlása nem tekinthető egyszerűen a fotonok sűrűségeloszlásának, hanem minden egyes foton egy egész gömbhullámnak felel meg. *Jánossy* akadémikus előadásában rámutatott arra is, hogy ezek a nevezetes eredmények általánosíthatók és diszkrétálta a várható eredmények jelentőségét.

Az előadás után *Ádám András* aspiráns bemutatta a híres kísérletet.

A Magyar Tudományos Akadémia nevében *Rényi Alfréd* lev. tag a III. osztály titkára üdvözölte a vándorgyűlést. Felszólalásában többek között rámutatott arra, hogy a vándorgyűlés az Eötvös Lóránd Fizikai Társulat első olyan akciója, amely azt mutatja, hogy a Társulat magáraeszmélt és meglátta feladatait. „A vándorgyűlés fő feladata” — mondotta — „megtenni az első lépést abba az irányba, hogy a magyar fizikusok megismerjék egymás munkásságát, és sokkal fokozottabban működjenek együtt azoknak a nagy feladatoknak megoldásában, melyeket 5 éves tervünk, a szocializmus építése állít elénk.” Hangsúlyozta a fizika nagy jelentőségét mind a materialista világszemlélet, mind pedig fejlődő iparunk szempontjából és rámutatott, arra, hogy különösen az elméleti és kísérleti fizikai kutatásokat kell a jövőben sokkal jobban összekapcsolni, mert az elméleti és a kísérleti fizikusok sok esetben eddig egymástól elkülönülve, elszakadva végezték munkájukat. Hangsúlyozta a fizikusok és matematikusok együttműködésének fontosságát is és

rámutatott, hogy az Eötvös Lóránd Fizikai Társulat sok tekintetben felhasználhatja a Bolyai János Matematikai Társulat tapasztalatait, amely a magyar matematikusok körében igen aktív és eredményes munkát végzett. „A fizika területén is” — mondotta — „egységes tudományos közvéleményre van szükség, meg kell teremteni a nyílt elvi viták tiszta levegőjét. E tekintetben, ugyanugy mint a kozmopolitizmus leküzdése, a fizikai idealizmus elleni harc, és tudásuknak a dolgozó nép szolgálatába állítása terén a magyar fizikusoknak a szovjet fizikusok nagyszerű példáját kell követniök”. Befejezésül *Rényi Alfréd* a Magyar Tudományos Akadémia nevében sikeres munkát kívánt a vándorgyűlésnek.

A vándorgyűlés első témaköre az erőterek kvantumelmélete volt, mely témakörnek bevezető előadását *Szamosi Géza* tartotta. Az előadásban rámutatott az elmélet fejlődésének újabb irányaira és a terek regularizációjának vizsgálatára új módszert mutatott be. E témakörből tartottak előadást *Marx György Román Pál* és *Neugebauer Tibor*. *Marx György* a terek impulzusmomentumáról, *Román Pál* a kvantumelektrodinamika elfajulásairól beszélt, míg *Neugebauer Tibor* bemutatta, hogyan lehet szingulett mágneses pólusok potenciálját kiszámítani. Egy második előadásában *Neugebauer Tibor* a hidrogénmolekula polarizálhatóságáról beszélt.

A vándorgyűlés második napján a témát az atommagfizika kísérleti módszerei adták. A bevezető előadást *Simonyi Károly* tartotta, aki ismertette a töltött részecskék gyorsítására szolgáló berendezések újabb fejlődését. E témakörhöz kapcsolódva *Szalay Sándor* bemutatta saját tervezésű új impulzus-számláló berendezését, mely az eddig használtaknál — köztük az erősen reklámozott amerikai készülékeknél — jóval nagyobb számlálási sebességgel működik. *Fenyves Ervin* és *Haimann Ottó* a számlálási technika elektromos problémáiról beszéltek, *Simonyi Károly* bemutatta, hogyan lehet a Van de Graff generátort, mint lökésenergiát szigetelők vizsgálatára felhasználni *Erő János* pedig nagyfrekvenciás ionforrással végzett kísérleteiről számolt be. A nap befejező előadását *Faragó Péter* tartotta, aki *Gécs Máriával* és *Mertz Jánossal* való közös kísérleteiről, — melyek atommagok mágneses momentumának mérésére vonatkoztak, — számolt be. Ezután bemutatta a mérést magát is.

A második napon a vándorgyűlés ismét az atommag kísérleti módszereivel foglalkozott. *Szelényi Tibor* ismertette a fotoemulziós módszer felhasználását a magfizikai vizsgálatokban, majd *Menczel Györgygyel* közösen néhány, a sztratoszférában keletkezett magreakció-felvételt mutatott be. *Medveczky László* és *Nagy János* magreakciókra vonatkozó vizsgálataikról számoltak be, majd *Csongor Éva* tartott előadást magreakcióból előidézett gamma-sugárzásról, kísérleti eredményeiről és ennek elméleti értelmezéséről. Ugyanezen napon számoltak be *Bozóki László* és *Makranczi Béla* a rádióaktivitás területén végzett vizsgálataikról.

A harmadik nap programja a szilárd testek fizikája volt. A bevezető előadást *Gombás Pál* akadémikus tartotta volna, aki azonban betegsége miatt ezt kénytelen volt lemondani, s így bevezetésképpen *Szigeti György* beszélt a szilárd testek zónaelméletéről. *Gáspár Rezső* az alumínium fém szerkezetére vonatkozó új eredményeiről számolt be, *Kónya Albert* pedig azokról a számításokról, melyeket a Gombás-féle félmélet alapján az alkáli fémek rugalmas állandóinak meghatározására végzett. *Hoffmann Tibor* a lineáris ötvözetekről beszélt, *Neugebauer Tibor* pedig ismertette újabb eredményeit a szupravezetés elméletére vonatkozóan és beszámolt az újabb kísérleti tényekről, melyek az ő elmélete mellett szólnak. *Gombai Lajos* a félvezetők fotoeffektusáról, *Boros János* az alkáli halogenidek elektromos vezetéséről beszélt, *Bodó Zalán* poralakú anyagok abszorpciójára vonatkozó vizsgálatairól számolt be. *Nagy Elemér* a willemit fizikai tulajdonságaira, *Szalay László* szilárd festékekoldatok fotodichroizmusára vonatkozó vizsgálataikról számoltak be. *Valkó Iván Péter* és *Gergely György* új módszert mutattak be relaxációs jelenségek vizsgálatára, *Selényi Pál* akadémikus pedig a szelénegyenirányító egyes, általa felfedezett törvényszerűségeit ismertette.

A vándorgyűlés befejező előadását *Kovács István* lev. tag tartotta a Központi Fizikai Kutató Intézetéről. Kovács István ismertette ötéves tervünknek ezt az egyik legnagyobb tudományos alkotását, s rámutatott arra, hogy milyen óriási szerepet fog ez az Intézet játszani a magyar tudomány fejlődésében. A Vándorgyűlést *Szigeti György* zárta be.

Láthatjuk tehát a vándorgyűlés témaköreiből, hogy a magyar fizikusok nem esnek az egyoldalúság hibájába. Egyaránt dolgoznak elvi fontosságú problémák és olyan gyakorlati feladatok megoldása terén, melyet ötéves tervünk megvalósításának nagy munkái vetnek fel.

A vándorgyűlés jelentős esemény volt a magyar fizika fejlődésének történetében. Különösen két momentumra szeretnénk rámutatni. Az egyik az, hogy bebizonyosodott: a magyar fizikusok döntő többségükben szakítottak a multban annyira elterjedt kozmopolitizmussal. A vándorgyűlés első napja, melyet *Selényi Pál* 40 éves interferenciakísérlete megünneplésének szenteltünk, mindennél jobban bizonyította a kozmopolita nézetek károságát és helytelenségét. Az egyes előadások azonban ezen túlmenően bebizonyították, hogy azokon a területeken, ahol a magyar fizikusok komolyan dolgoznak, egyáltalában nem vagyunk elmaradva a kapitalista nyugat mögött.

A másik kimagasló eredménynek azt kell tekinteni, hogy a magyar fizikusok egyre inkább támaszkodnak a szovjet fizika hatalmas vívmányaira, egyre jobban felismerjük, hogy a tapasztalatoknak milyen végtelen tárházat jelentí számunkra az élenjáró szovjet tudomány.

A vándorgyűlés komoly eredményének kell tekinteni azt a tényt, hogy a magyar fizikusok közelebből megismerhették egymást, kölcsönösen megbeszélhették problémáikat. Azok a diszkussziók, melyek az előadások után és

különösen a szünetekben folytak, általában eredményeseknek bizonyultak. A résztvevők egyhangú véleménye volt, hogy munkánkat komoly mértékben segíteni fogják a remélhetőleg évenként ismétlődő vándorgyűlések.

A pécsi vándorgyűlés mély benyomásokat hagyott valamennyi résztvevőben. A magyar fizikusok világosan látják fejlődésünk perspektíváit, látják azt az óriási segítséget, melyet kormányzatunk a magyar tudománynak nyújt, mely segítség megnyilvánul hatalmas anyagi áldozatokban — mint például a Központi Fizikai Kutató Intézet felépítése — és magasrendű eszmei támogatásban egyaránt.

A vándorgyűlés is megmutatta a magyar fizikusoknak jelenünk eredményeit, jövőnk hatalmas perspektíváit és ezek megvalósításáért fokozott munkára lelkesít mindannyiunkat.

Ezt kell tekintenünk a vándorgyűlés legfontosabb eredményének.

Szamosi Géza

A TERMÉSZETTUDOMÁNYI TÁRSULAT CSILLAGÁSZATI MUZEUMÁNAK MEGNYITÁSA

A Természettudományi Társulat Uránia bemutató Csillagvizsgálójában (Sánc u. 2.) 1951. május 19-én nyitotta meg Csillagászati Muzeumát. A megnyitáson a Magyar Tudományos Akadémia nevében *Rényi Alfréd* szólalt fel és a következőket mondotta:

A Magyar Tudományos Akadémia nevében örömmel üdvözlöm a Magyar Természettudományi Társulat jelentős kezdeményezését, csillagászati muzeumának megnyitását. Meg vagyok győződve arról, hogy ez a muzeum értékes szolgáltatásokat fog tenni a csillagászati ismeretek terjesztése, a csillagászat népszerűsítése terén a dolgozók széles tömegei között és ezen keresztül a természettudományos gondolkodás a tudományos dialektikus materialista világnézet elmélyítését fogja eredményezni. A természettudományos ismeretek terjesztése, népszerűsítése terén a Természettudományi Társulat Pártunk útmutatásai alapján jelentős feladatot vállalt magára, és ennek a feladatnak a megvalósítása terén a Magyar Tudományos Akadémiától minden szükséges segítséget meg fog kapni. A tudomány népszerűsítése és a tudomány továbbfejlesztése nem választhatók el egymástól mereven, és ezen a téren az Akadémia és a Társulat között a jövőben szorosabb együttműködésre van szükség. A múltban a tudományt és a tudománynépszerűsítést hazánkban áthidalhatatlan szakadék választotta el egymástól. A tudomány művelői kevés kivétellel lebecsülték a tudománynépszerűsítést és ezt a területet átengedték a tudományvulgarizálóknak, sarlatánoknak, népbufitóknak, akik a dolgozók érdeklődésével visszaéltek. Ezeket a „tudománynépszerűsítőket“ nemcsak a népszerűségelhajzás vezette, hanem működésük arra irányult, hogy reakciós, idealista nézeteket csempésszenek be a dolgozók tudatába. Különösen vonatkozik ez a csillagászat területére; a burzsoá népszerűsítő csillagászati könyvek hemzsegnak a misztikus frázisoktól és nyíltan vagy burkoltan a fideizmust, és egyéb reakciós elméleteket terjesztenek. Az asztrológia és a burzsoá idealista kozmológia és kozmogónia között csak formális különbség van, a tartalom és a szándék ugyanaz. Nekünk nem ilyen „tudománynépszerűsítésre“ van szükségünk, hanem arra, hogy a haladó tudomány eredményeit közérthető és mégis színvonalas formában terjesszük dolgozó népünk között és ezzel éppen hogy felvértezzük őket minden reakciós ideológiai maszlaggal szemben. Hogy a színvonal, a tudományos hitelesség követelménye és a közérthetőség, a helyes értelemben vett népszerűség, összeegyeztethetők, arra ragyogó példákat szolgáltat a szovjet tudományos ismeretterjesztő irodalom.

Ezen a téren ugyanúgy mint fejlődő szocialista életünk minden területén a Szovjetunió élenjáró példáját kell követnünk. A csillagászati muzeum ebből a szempontból is követendő példa, mert lényegében helyesen egyezteteti össze a tudományos színvonal, és a szemléletesség, a közérthetőség alapvető követelményeit. Különösen ki szeretném azt emelni, hogy a muzeum helyesen domborítja ki a csillagászat világnézeti jelentőségét, azt hogy a csillagászat a történelem folyamán mindenkor a haladó és reakciós erők, a tudományos materialista felfogás és a tudománytalan népbütítő idealizmus harctere volt. A csillagászat terén a haladó tudomány legnagyobb kerékkötője ős idők óta a klerikális reakció volt. Csak utalok itt röviden *Giordano Bruno* és *Galilei* neveire, akiket mint a haladó csillagászat úttörőit a klerikális reakció máglyával és börtönnel akadályozott meg az igazság hirdetésében. Hogy még egy példát említsek a magyar tudomány történetéből: nem véletlen, hogy a XVII. és XVIII. században az egyház, és elsősorban a jezsuita rend hazánkban rátette a kezét az összes csillagvizsgálókra, monopolizálta a csillagászatot. A haladó és reakciós eszmék harca a csillagászatban napjainkban egyre élesedik. A szovjet csillagászok, *Ambarcumján*, *Ogorodnyikov*, *Smidt* és mások egymás után cáfolják meg a reakciós burzsoá csillagászok, — mint például *Jeans* — áltudományos „elméleteit“ és győzelemre viszik a tudományos materialista világnézetet a csillagászat területén. A csillagászat sehol a világon nem áll olyan magas tudományos színvonalon, mint a Szovjetunióban. Jól tudják ezt az imperialisták is, ezért akadályozták meg, hogy a Nemzetközi Csillagászati Unió a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának meghívására ez évben Leningrádban rendezze meg kongresszusát. Attól féltek a Wall-Street urai és lakájaik, hogy a nyugati csillagászok a Szovjetunióból visszatérve elmondják, hogy milyen hatalmas támogatásban részesül a szovjet tudomány, és milyen nagyszerű eredményeket értek el a szovjet tudósok. Attól féltek, hogy a nyugati tudósok, ha hazatérnek Leningrádból, elmondják, hogyan dolgozik, hogyan harcol a békéért, hogyan építi hatalmas lelkesedéssel a szovjet nép a kommunizmust: ezért akadályozták meg a nemzetközi kongresszus megtartását. Azonban az imperialisták semmilyen mesterkedése sem fordíthatja meg a történelem menetét. *Giordano Brunot* máglyán égették el, *Galileit* börtönbe zárták, de az igazság amit hirdettek nem égett el a máglyán és keresztülhatolt a tömlőc falain; mégis mozog a föld és minden fordulatával közelebb hozza a béke, a haladás, a kommunizmus erőinek végső győzelmét.

BESZÁMOLÓ

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA III. OSZTÁLYÁNAK 1951. ÉVI
KÖNYVKIADÁSI TERVÉNEK VÉGREHAJTÁSÁRÓL

Az a hatalmas támogatás, melyet Népköztársaságunk a tudományos életnek nyújt, lehetővé tette a tudományos könyvkiadás hazánkban eddig még soha nem látott méretekben való megindítását. A tudományos könyvkiadás terén ugyanúgy, mint a tudományos élet sok más területén, évtizedek mulasztásait kell jóvá tennünk. A tudományos könyvkiadásnak óriási jelentősége van a tudományos élet színvonalának emelése, a magyar tudósok kutató munkájának elősegítése és ösztönzése, új fiatal tudományos kutató gárda kiképzése és a tudomány iránt érdeklődő dolgozók széles köreiből való terjesztése, egyszóval kultúrforradalmunk továbbvitele szempontjából. Ezért tudományos könyvek kiadását az Akadémia legfontosabb feladatai egyikének kell tekintenünk. A multban a magyar tudósok munkáit hazájukban csak a legkritkább esetben adhatták ki. Sok esetben külföldön jobban megbecsülték és kiadták a magyar tudósok munkáit, mint idehaza, még több esetben azonban a kéziratok az asztalfiókban maradtak, vagy a kiadás lehetőségének híjában nem is készültek el, és csak rövid közlemények formájában tették közzé a kutatók eredményeiket. Vitán felül áll, hogy új tudományos eredményeknek folyóiratokban való közlése nem teszi feleslegessé tudományos monográfiák írását, hiszen ilyen monográfiák megírása ad lehetőséget a szerzőnek, hogy új eredményeinek részletes közlése mellett kifejtsen és kidolgozza felfogását az általa vizsgált témakör egészéről és eredményeit a tudomány fejlődésének perspektívájába beállítva, az előzmények és hozzákapcsolódó újabb kutatások összefüggéseiben mutassa be. Kétségtelen, hogy a magyar tudósok eredeti munkáinak kiadása kutatásaikat elősegíti, ugyanakkor pedig hozzáférhetővé teszi szakemberek széles köre számára és ezzel a tudományos kutatást nagymértékben elősegíti. Olyan jelentős, de idehaza viszonylag kevesebb számú szakembert érintő tudományos munkáknál, amelyek iránt várhatólag külföldön is igen nagy érdeklődés mutatkozik meg, az Akadémia módot nyújt a magyar szerzőknek, hogy munkáikat nemcsak magyarul, hanem egyidejűleg valamely idegen nyelven, vagy esetleg csak idegen nyelven jelentessék meg. Ezt a lehetőséget felhasználva több magyar szerző, akinek külföldi kiadókkal munkájuk kiadására vonatkozó tárgyalásai már folyamatban voltak, úgy határozott, hogy munkáját az Akadémiának ajánlja fel kiadásra, mert felismerte, hogy ezzel hazai könyvkiadásunkat támogatja. Eltekintve attól, hogy a multban a magyar szerzők csak kényszerűségből fordultak külföldi kiadókhöz, ma amikor Népköztársaságunk nagyvonalú támogatása folytán az

itthoni kiadás lehetősége megnyílt, a magyar tudósok hazafias kötelessége, hogy éljenek is ezzel a lehetőséggel.

A magyar szerzők legjobb munkáinak kiadása mellett, döntő jelentősége van az élenjáró szovjet tudomány legkiemelkedőbb alkotásainak magyar nyelven való kiadásának. Ötéves tervünk hatalmas feladatai igen sok olyan tudományág gyors ütemű fejlesztését kívánják meg, melyek eddig hazánkban teljesen el voltak hanyagolva. De még azokon a területeken is, amelyeknek hazánkban régi hagyományai vannak, feltétlenül szükséges a fejlődés ütemét meggyorsítani. Azonban nemcsak mennyiségi fejlesztésről van szó. Döntő kérdés, hogy a magyar kutatók megismerjék a leghaladóbb, a burzsoá tudomány-hamisítás elleni harc terén is élenjáró, magas elvi színvonalú szovjet tudományt és a szovjet tudósok munkáiból lássák meg, hogyan lehet és kell következetesen alkalmazni a tudományos kutatásban a marxizmus-leninizmus eszméit, a dialektikus materialista világnézetet és ezekből a példákából megállapíthassák, mennyire elengedhetetlen előfeltétele ez annak, hogy a tudományos kutatás ne tévedjen tévutakra. Mindezen célokat hivatott szolgálni szovjet tudósok munkáinak magyar nyelvű kiadása. Már ebben az évben is több nagy jelentőségű szovjet tudományos munkát adott ki az Akadémia és még több ilyen munka kiadása van folyamatban. E mellett tervbe vette az osztály a baráti népi demokráciák tudósainak és egyes haladó nyugati tudósok munkáinak kiadását is.

A tudományos könyvkiadás terén igen fontos szempont a tervszerűség. A tervszerűség alatt nemcsak az értendő, hogy az egyes könyvek kiadása ne ötletszerűen történjék, és hogy időben elő legyen készítve s ütemezve, a tervszerű könyvkiadás ennél sokkal többet jelent. Azt jelenti, hogy a könyvkiadási tervben szereplő könyvek együtt szerves egészet alkossanak, hogy tudományos könyvkiadásunkkal tervszerűen törekedjünk arra, hogy a legrövidebb időn belül mindazon területeken, ahol ennek hiánya a kutatást és a tudományos élet fejlődését gátolja, megfelelően megválasztott, magas színvonalú szakkönyv kerüljön kiadásra. Természetes, hogy ebben az esetben a magasabb értelemben vett tervszerű munkát sokkal könnyebb a fordítások terén megvalósítani, hiszen a Szovjetunió készségesen rendelkezésünkre bocsájtja gazdag tudományos könyvkiadása termékeinek óriási arzenálját, amelyből kiválaszthatjuk mindazokat a munkákat, melyekre szükségünk van. Kevésbé egyszerű, de éppen azért fontos a magasabb értelemben vett tervszerűség megvalósítása a magyar szerzők könyveinek kiadásánál is. Ez elsősorban a jövő feladata, hiszen a fennálló hiányok pótlását célzó könyvek magyar szerzőkkel, vagy magyar szerzőkből álló munkaközösségekkel való megíratása hosszabb időt követel meg. Ötéves könyvkiadási tervében azonban az Osztály ezt egyik legfontosabb feladatának fogja tekinteni. A szovjet szakkönyvek lefordításánál nemcsak az a szempont mérvadó, hogy olyan könyvek kiadását vegyük tervbe, amelyek égető hiányt pótolnak tudományos irodalmunkban és amelyek leginkább alkalmasak arra, hogy megismerjük belőle azt, ami a szovjet tudományban a legértékesebb. A számtalan

kiváló szovjet munka közül a lefordítandók kiválasztásánál az a szempont is közre kell, hogy játszon, hogy a lefordított könyvek kutatóink és szakembereink minél szélesebb köreit érdekeljék és segítsék munkájukban. Olyan munkákat amelyek bármilyen értékesek is, speciális tárgykörüknél fogva, vagy azáltal, hogy igen sok előismeretet tételeznek fel, csak kis számú kutató és szakember számára jelentenének tényleges segítséget, szintén szükséges és helyes lefordítani, azonban nem volna helyes könyv formájában nagy példányszámban kiadni, hanem kis példányszámban sokszorosítani kell. E mellett a könyvkiadási terv elkészítésénél felhasználható az a módszer is, hogy egyes könyvek kiadását más — az illető munka megértéséhez szükséges alapvető ismereteket feldolgozó — munkák kiadásával készítjük elő.

A fenti szempontokat igyekezett a III. Osztály könyvkiadási tervében érvényesíteni, bár meg kell állapítanunk, hogy egyes szempontok maradéktalan érvényesítése kezdeti nehézségek miatt nem sikerült és így a következő években kell az Osztálynak igyekezni, hogy ezeket könyvkiadási munkájában hiánytalanul érvényre juttassa. Az említett kezdeti nehézségek elsősorban onnan származtak, hogy sem az Osztálynak, sem pedig általában az Akadémiának és ezen belül az Akadémiai Kiadónak nem lehettek megfelelő tapasztalatai és így a helyes munkamódszereket menet közben és gyakran a hibákból okulva kellett kialakítani. Az osztály könyvkiadási munkájában más osztályok hasonló nehézségein túlmenően komoly nehézséget okoztak a matematikai képleteket tartalmazó szövegek szedésénél fellépő speciális nyomdatechnikai problémák. A III. Osztály már több mint egy évvel ezelőtt javaslatot tett a Könnyűipari Minisztériumnak arra vonatkozólag, hogy egy nyomdát matematikai képleteket tartalmazó könyvek és folyóiratok szedésére és nyomására profilirozzon és felhívta a figyelmet arra, hogy ennek megvalósítása az Osztály könyv- és folyóirat kiadási programjának sikeres végrehajtásának nélkülözhetetlen előfeltétele. Ez a javaslatunk a Könnyűipari Minisztérium részéről teljes megértésre és támogatásra talált, azonban a gyakorlati végrehajtás szükségképpen bizonyos időt vett igénybe. A szegedi Délmagyarország-nyomdára esett a választás, amelynek vezetői és a matematikai szedésben jártassággal bíró dolgozói lelkesedéssel vállalkoztak ennek a nehéz és fontos feladatnak a megvalósítására. Azonban időbe telttél amíg a Délmagyarország Nyomda betűkészletét ki tudta egészíteni és megfelelő számú nyomdászt tudott beállítani arra, hogy a matematikai szedésben jártasságot szerezzenek. A fiatal nyomdászok betanítása folyamatban van és a nagy tapasztalattal bíró idősebb nyomdászok tapasztalataik átadásával segítik elő fejlődésüket. A jövőben az osztály könyv- és folyóiratkiadási tervében szereplő munkák túlnyomó többségükben a Délmagyarország Nyomdánál fognak készülni. Az átmeneti periódusban több munka más nyomdáknál készült el, így többek között a Budapest Nyomdában, amely azonban nem mindenben volt képes a matematikai képleteket tartalmazó szövegek kifogástalan szedésére.

Menet közben történt meg a lektori és szerkesztői intézmény létesítése is, ami a könyvek minden szempontból kifogástalan formában való megjelenését nagymértékben elősegítette. A lektorok és szerkesztők munkája igen nagy jelentőségű. A hazai szerzők, miután felismerték ennek jelentőségét, örömmel fogadták a lektorok és szerkesztők segítségét, mert tapasztalhatták, hogy ez munkájukat nagymértékben elősegíti. A fordításnál is igen nagy jelentősége van a lektor és a szerkesztő munkájának és a fordító munkáján kívül a lektor és a szerkesztő munkája hivatott biztosítani, hogy a lefordított művek magyar kiadása úgy tudományos, mint nyelvi szempontból teljes hűséggel adja vissza az eredeti szöveget és nyelvében és kiállításban egyaránt kifogástalan legyen. A szovjet munkák magyar nyelven való kiadásánál az Osztály rendszeresítette azt a szokást, hogy a könyv tárgyköréhez közel álló területen dolgozó vezető magyar kutatók egyike a magyar kiadáshoz előszót írjon. Az előszó feladata nem annyira a könyv tartalmi ismertetése — hanem, hogy felhívja a figyelmet a könyv kiemelkedő fejezeteire, a könyv kiadásának jelentőségére a magyar tudományos élet szempontjából, hogy rámutasson arra, hogy kiknek szól a könyv, milyen ismereteket tételez fel és így tanulmányozásához milyen előtanulmányok szükségesek. Ilyen módon a magyar kiadáshoz írt előszavak feladata, hogy elősegítsék, hogy a szovjet szakkönyvek minél több hazai szakembernek, minél hathatósabb segítséget nyújtsanak munkájukhoz.

Rátérünk ezután az eddig megjelent és megjelenés alatt álló könyvek felsorolására.

Ezévi tervünkben szerepel több, magyar szerzők által írandó munka, de ezek kettő kivételével — a szerzők kérésére — csak az 1952. évi könyvkiadási tervben kerülnek kiadásra.

Magyar szerzőtől eddig *Péter Rózsa*: „Rekursive Funktionen“ c. monográfiája jelent meg 1951. márciusában (német nyelven). Nyomdában van és még ebben az évben megjelenik *Riesz Frigyes* és *Szőkefalvi-Nagy Béla*: „Leçons d'analyse fonctionnelle“ című munkája (francia nyelven). Lektorálás alatt van *Turán Pál*: „Az analízis egy új módszeréről és annak alkalmazásairól“ című munkája, mely magyar és német nyelven fog megjelenni.

Az eddig megjelent szovjet könyvek közül egyike a legjelentősebbeknek *P. Sz. Kudrjavcev*: „A fizika története az antik fizikától Mengyelejevig“ című könyve, amely 1951. júniusban jelent meg. Ez a munka marxista-leninista szempontból tárgyalja a fizika történetét és nagy érdeklődésre talált nemcsak a fizikusok, hanem más tudományok művelőinél is.

1951. szeptemberben jelent meg *B. V. Gnyegyenko* és *A. N. Kolmogorov*: „Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai“ című nagyjelentőségű munkája, mely a valószínűségszámítás alapvető jelentőségű fejezetének legújabb eredményeit mesteri összefoglalásban dolgozza fel. Különösen meg kell említeni ennek a könyvnek a gondos és szép kiállítását. A szegedi Dél-magyarország Nyomda dolgozóit, *Keresztúri Jenőt* és munkatársait, az Akadémia

a könyv szedése és nyomása terén végzett jó munkájukért jutalomban részesítette.

Megjelent 1951. májusában *L. I. Gutenmaher*: „Elektromos modellek“ című könyve, amely nemcsak a matematikusokat és fizikusokat, hanem a műszaki szakembereket is érdekli, tekintettel arra, hogy az analógiás elvű elektromos működésű matematikai gépek a Szovjetunióban magas színvonalra fejlesztett elméletét ismerteti, sok konkrét útmutatással ilyen gépek építésére.

1951. folyamán jelent meg *A. Ja. Hincsin*: „A statisztikai mechanika analitikus módszerei“ c. könyv, amely *Hincsin*-nek két alapvető dolgozatát tartalmazza, melyekben a klasszikus statisztikus mechanika és a kvantum statisztika töle származó megalapozását és felépítését tartalmazza a valószínűség-számítás módszerei segítségével. A fordítás és a kiadás azonban nem méltó a könyv tudományos jelentőségéhez: hiányzik az eredeti művek orosz címének és bibliográfiai adatainak feltüntetése, nincs hozzá előszó és tartalomjegyzék és a fordítás is sok kívánnivalót hagy maga után. Ez volt az osztály első kiadványa és a hibák, melyekért az Akadémiai Kiadó és a szerkesztő is felelősek, az Osztály kezdeti tapasztalatlanságát tükrözik vissza. Megjelent továbbá *J. I. Frenkel*: „Bevezetés a fémek elméletébe“ című kiváló munkája, melyhez *Gombás Pál* r. tag írt előszót.

Több könyvünk van nyomdában részben szedés, részben nyomás alatt. Nyomdai munkában van *Riesz Frigyes* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* említett munkáján kívül *N. I. Lobacsevszkij*: „Geometriai vizsgálatok a párhuzamos egyenesekről“, *I. G. Petrovszkij*: „Előadások a közönséges differenciálegyenletekről“ *N. I. Ahijezer*: „Előadások az approximáció elméletéről“* című könyvek és az I. Magyar Matematikai Kongresszus teljes anyaga.

Közvetlenül nyomdába adás előtt állnak, *M. A. Lavrentyev*: „Konform leképezés és alkalmazásai a mechanikában“, *V. Vexler—A. Grosev—B. Isajev*: „Sugárzások mérésének ionizációs módszerei“, *A. M. Boncs—Brujevics*: „Elektroncsövek alkalmazása a kísérleti fizikában“ és *Sz. P. Kromov*: „Szinoptikus meteorológia“ című könyvek.

Fordítás, illetve lektorálás alatt van *Ja. Sz. Umanszkij—B. N. Finkelstein—M. E. Blanter*; „A metallográfia“, *A. A. Vorobjev*: „Töltött részecskék gyorsítására szolgáló berendezések“, *Sz. A. Janovszkaja*: „N. I. Lobacsevszkij élenjáró eszméi — az idealizmus elleni harc eszközei a matematikában“, *L. V. Kantorovics—V. J. Krülov*: „A felsőbb analízis közelítő módszerei“, *I. P. Natanzon*: „Konstruktív függvénytan“, *P. Sz. Alekszandrov*: „Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe“ és *A. M. Dlin*: „Matematikai statisztika a technikában“ című könyvek.

A nyomdába adás előtt lévő, valamint a fordítás és a lektorálás alatt lévő könyvek előreláthatólag 1952. első terjedékében jelenhetnek meg.

* Időközben megjelentek.

A III. osztály 1952. évi könyvkiadási tervéről az osztályközlemények egy későbbi számában számolunk be.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a III. osztály könyvkiadási tervében szereplő munkák közül eddig 6 munka jelent meg és további 17 munka kiadása van előkészületben. Annak oka, hogy 1951. évi könyvkiadási tervünkben szereplő könyvek nagyobbik részének megjelenése 1952. elejére tolódik át, mint már fentebb hangsúlyoztuk az, hogy sem az osztály, sem pedig az Akadémiai Kiadó nem rendelkezett megfelelő tapasztalatokkal és ennek következtében a határidők az esetek többségében nem reálisan lettek megállapítva. E mellett menetközben sok, főként nyomdatechnikai probléma is felmerült és amikor a között kellett választani, hogy a könyvek nem megfelelő kiállításban, nyomdahibáktól hemzsegve jelenjenek-e meg, vagy pedig megjelenésük 1—2 hónappal eltolódjon, az osztály minden esetben az utóbbit választotta. Az osztálynak ezt az álláspontját teljes mértékben osztotta az Akadémia Könyv- és Folyóirat Kiadóbizottsága is, amelytől az osztály a könyvkiadás terén jelentős támogatást és értékes utmutatást kapott. A jövőben felhasználva az ez évben szerzett tapasztalatainkat arra kell törekednünk, hogy a könyvkiadási tervünkben szereplő munkák kifogástalanul és időben jelenjenek meg és az ideihez hasonló lemaradás ne legyen.

Rényi Alfréd
osztálytitkár

B. V. GNYEGYENKO ÉS A. N. KOLMOGOROV „FÜGGETLEN VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÖSSZEGEINEK HATÁRELOSZLÁSAI“ C. KÖNYVÉRŐL

A valószínűségszámítás terén századunk első felében a legnagyobb siker ama vizsgálatokat koronázta, amelyek a *megalapozásra*, a *határátmenet kérdéseire* és a *valószínűségi függvényekre* (sztochasztikus folyamatokra) vonatkoztak. *B. V. Gnyegyenko* és *A. N. Kolmogorovnak* 1949-ben megjelent és ma már magyar fordításban előttünk fekvő könyve: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai* (Akadémiai Kiadó, Budapest 1951. 256. o.) a határátmenet kérdéseinek egy teljesen kifejeződött körét tárgyalja: *független valószínűségi változók normált részlet- és sorozatösszegeinek gyenge határértékével és határeloszlásával* kapcsolatos kérdéseket. A legutóbbi tizenöt év alatt e téren elért eredmények nagyrésze szovjet matematikusoknak köszönhető, akik nemcsak a határátmenet teljes problémakörében, hanem a valószínűségszámítás megalapozásában és a valószínűségi függvények elmélete terén is kimagasló eredményekre jutottak. A szóban forgó könyv tárgykörében maradvá első sorban *A. Ja. Hincsin*, *Kolmogorov* és *Gnyegyenko*, valamint *Sz. N. Bernstein* számos nagyjelentőségű eredményére hivatkozhatunk. De egyes eredmények tekintetében rá kell mutatnunk *Bavli*, *Bobrov*, *Glivenko*, *Grosev*, *Linnik*, *Szluckij* és *Szmirnov* érdemeire is. A Szovjetunió kivül e tárgykörben *H. Cramér*, *W. Feller*, *P. Lévy* és *W. Doebelin* adtak újabban számos fontos kérdésre feleletet.

A valószínűségszámítás e — *Pólya György* kezdeményezésére — *központinak* nevezett problémakörét *Gnyegyenko* és *Kolmogorov* könyve három — a legszükségesebb alapfogalmakat és tételeket ismertető — bevezető fejezet után tárja elénk.

Az első fejezet a valószínűségszámításnak *Kolmogorovtól* eredő megalapozását vázolja *két újabb megszorítással*. A valószínűség e szerint valamely *u elemi események U* terének *A* részalmazáiból, a *véletlen eseményekből* álló \mathfrak{B}_u Borel-halmaztesten értelmezett $P_u(A)$ halmazfüggvény. Mégpedig olyan, mely nemnegatív, véges vagy megszámlálható — közös elem nélküli — részek összegére additív és a teljes \mathfrak{B}_u -testre értéke 1. *Kolmogorov* első újabb megszorítása azt követeli meg, hogy a \mathfrak{B}_u minden zérus mértékű elemével együtt ezeknek részalmazái is a \mathfrak{B}_u elemei legyenek. A valószínűségszámítási vizsgálatok homlokterében álló *valószínűségi változók* e felfogásban a P_u szerint

mérhető valós $\xi(u)$ függvények. Egy-egy ilyen az U teret az R számegegyenesre úgy képezi le, hogy teljes $u(\xi)$ megfordítása nemcsak a \mathfrak{B}_u bármely A elemnek $\xi(u)$ által R -en előállított képét viszi az A -ba vissza, hanem az R minden nyílt halmazához is egy-egy a \mathfrak{B}_u -ba eső halmazt rendel. Ha a nyílt halmaz u -elemekhez rendelt $\xi(u)$ pontokat tartalmaz, akkor az u -elemek halmazát, különben pedig az üres halmazt. A $\xi(u)$ leképezésnél így a \mathfrak{B}_u -n értelmezett P_u -mérték egy a számegegyenesbeli — ennek nyílt halmazait is felölelő — \mathfrak{B}_ξ testen egy P_ξ valószínűségi mértéket „indukál”. Kolmogorov második újabb követelménye az, hogy ez a P_ξ tökéletes mérték legyen. Ez azt jelenti, hogy — a külső mérték jól ismert mintája szerint — a \mathfrak{B}_ξ bármely halmazához rendelt P_ξ értéknek az e halmazt tartalmazó nyílt halmazokra vonatkozó P_ξ értékek alsó határával kell megegyezni.

Annak valószínűségét hogy egy ξ valószínűségi változó értéke x -nél kisebb a $P_\xi(\xi < x) = F_\xi(x)$ eloszlásfüggvény szolgáltatja. Ez szabja meg a változónak pl.

$$\mu = E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) \text{ várható vagy középértékét, } \sigma^2 = D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(\xi)]^2 dF(x)$$

szórásnégyzetét és $F(M-0) \leq \frac{1}{2} \leq F(M+0)$ tulajdonságú M médianját (médianjait). Ha az első és másodikonál az integrálást az $|x| < \varepsilon$ szakaszra korlátozzuk, akkor az $E_\varepsilon, D_\varepsilon^2$ csonkított értékekre jutunk. Az utóbbiakat az orosz A. A. Markov vezette be klasszikus vizsgálataiba és az újabb kutatásokban nagy szerepet játszanak. Végre két ξ, η valószínűségi változó független, ha a fentiekhez hasonló módon értelmezett együttes (kétváltozós) eloszlásfüggvényük $P_{\xi, \eta}(\xi < x, \eta < y) = F_{\xi, \eta}(x, y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$ tulajdonsággal bír.

Már száz évvel ezelőtt is három eloszlásfüggvényt jól ismertek. A minden eloszlásra fennálló $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$ feltételek mellett az $x = 0, 1, \dots, n$ helyeken $0 < p < 1$ értékkel $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ szakadású, különben állandó Bernoulli-féle vagy binomiális eloszlást, a ma normális néven ismert

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \text{ folytonos eloszlást, végül a pozitív } a \text{ és } \lambda, \text{ valamint valós } b$$

mellett az $ax + b$ -hegyeken $x = 0, 1 \dots$ értékek mellett $\frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ szakadású, kü-

lönben állandó értékű eloszlásfüggvénynek $a = 1, b = 0$ mellett Poisson által bevezetett és 1937-ig elszigetelten maradt esetét. Ma ezekhez mint elemi, az analízis és alkalmazásaiban régóta szerepet játszó, csak a μ -helyen 1 szakadású és így különben állandó $I(x-\mu)$ elfajult eloszlást is hozzáveszik. Az utóbbival szemben minden mást valódinak neveznek.

A normális és a Poisson-eloszlások „határeloszlások”. A második fejezet így az eloszlások konvergenciájának értelmezésével kezdődik, mégpedig a gyenge konvergencia fogalmával, melynek a valószínűségi mértéken alapuló — tudvalevően Riesz Frigyesnek köszönhető — értelmezését és egyben három inter-

pretációját is adja. Itt azt emeljük ki, hogy az $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ gyenge konvergencia szükséges és elégséges feltétele $F_n(x) \rightarrow F(x)$ pl. az utóbbi folytonossági pontjaiban.

Alkalmazásként nyomban *Hincsin* következő tétele szolgál. *Lévy* szerint egy *típust* a valamennyi pozitív a és valós b -vel képezett $\eta = a\xi + b$ változók, illetve $F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ eloszlások alkotnak. Így beszélhetünk pl. elfajult típusról, normális típusról, Poisson-típusról (a fentebb említett általánosított Poisson-eloszlások figyelembe vételével). Ha mármost $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ és ez valódi, akkor az $F_n(x)$ -ekkel egy típusú $F_n(a_n x + b_n)$ eloszlások is — ha egyáltalában — gyengén $F(x)$ típusú valódi eloszláshoz tartanak.

A gyenge konvergencia \Rightarrow jelére szerzőket alkalmasint az készítette, hogy eloszlásfüggvények gyenge konvergenciájánál $f_n(t) = E(e^{itx_n})$ illetve

$$f(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

karakterisztikus függvényeik között $f_n(t) \rightarrow f(t)$

állapítható meg *egyenletesen* minden $|t| \leq T$ szakaszon. A második fejezet különben behatóan elemzi az eloszlás és karakterisztikus függvényeik között *Lévy* által megállapított *kölcsönösen egyértelmű és folytonos* megfelelést, ami a *Laplacera* visszavezethető, de a valószínűségszámításban először az orosz *A. M. Ljapunov*nak a századfordulóra eső klasszikus határeloszlási vizsgálataiban fellépő karakterisztikus függvényeket hatalmas segédeszközzé avatta. Különböző tulajdonságaik mellett kétségtelenül azért is, mert független változók $\zeta = \xi + \eta$

összegezésénél eloszlásfüggvényeik nehézkes $F_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\xi(z-y) dF_\eta(y) = F_\xi * F_\eta$ kompozíciója helyett karakterisztikus függvényeik egyszerű $f_\zeta(t) = f_\xi(t)f_\eta(t)$ szorzása, logaritmusaiknak tehát összeadása vált lehetővé. Példaként megemlítjük, hogy az elfajult, a normális és a Poisson-eloszlások karakterisztikus függvényeinek logaritmusai rendre $it\mu$, $it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2$ és $\lambda(e^{it} - 1)$.

A karakterisztikus függvények szép alkalmazásaként a *harmadik* fejezet a későbbiekben oly fontos *korlátlanul osztható* eloszlásokat tárgyalja. Azokat, amelyek változói $\xi = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ módon minden természetes n -re n független, *azonos* eloszlású változó összegeként állíthatók elő. Elnevezésükre kétségtelenül a karakterisztikus függvényeknek $f(t) = [f_n(t)]^n$ kapcsolata vezetett. Ilyenek pl. az elfajult, a normális, a Poisson-eloszlások és a matematikai statisztika x^2 -eloszlásai is. Az ily eloszlások véges kompozíció és gyenge határátmenettel szemben zárt osztályt alkotnak és *Hincsin* tétele szerint *Poisson-eloszlások véges kompozíciójából vagy gyenge határeloszlásaiból állanak*, ami a Poisson-eloszlások több, mint száz éves elkülönültségét egy csapásra megszüntette, sőt ezeket szinte az érdeklődés középpontjába állította. A *harmadik* fejezetben szerzők a korlátlanul osztható eloszlásokhoz tartozó karakterisztikus függvények logarit-

musának *Lévy—Hincsin-féle*

$$i\mu t + \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \left\{ \frac{1+u^2}{u^2} dG(u), \right.$$

illetve *Lévy-féle*

$$i\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dL(u),$$

sőt egy régebbi, véges szórásnál *Kolmogorov* által nyert *kanonikus alakját* is levezetik és az első alapján *Gnyegyenkonak* a korlátlanul osztható eloszlások gyenge konvergenciájára vonatkozó teljes (szükséges és elégséges) $G_n(x) \rightarrow G(x)$, $\mu_n \rightarrow \mu$ feltételeit is előállítják. Az első alakban $G(u)$ nemcsökkenő, korlátos ingadozású, a másodikban, melyben az integrálást a kezdőponttól balra és jobbra külön kell elvégezni, $L(u)$ mindkét részben nemfogyó, $L(-\infty) = L(+\infty) = 0$

és $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u^2 dL(u) < \infty$. Az elfajuló, a normális, sőt a Poisson-eloszlások egy folytonos sokaságának összetevő szerepe a korlátlanul osztható eloszlásoknál e kanonikus alakokból szembeszökő.

Gnyegyenko és *Kolmogorov* könyvének a negyedik fejezettel kezdődő érdelemes tárgyalásáról áttekinthető képet — úgy véljük — csak akkor adhatunk, ha *négy* szempontot élesen kidomborítunk.

A valószínűségszámítás határátmeneti problémáiban I. *határérték-*, II. *határeloszlás-*kérdésekről beszélhetünk. Az előbbieket a változókra, az utóbbiak eloszlásfüggvényeikre vonatkoznak. Amíg — mint az előtünk fekvő könyvben — valamely ζ_n változóknak egy ζ változóhoz való és a minden pozitív ε -ra a

$$P\{|\zeta_n - \zeta| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

feltétellel értelmezett gyenge konvergenciájáról van csupán szó, addig ez a különbség mindenestre elmosódik. Az utóbbi ugyanis azt jelenti, hogy $P(\zeta_n - \zeta < x) \rightarrow 0$ vagy 1 a szerint, amint $x <$ vagy ≥ 0 , szóval azt, hogy $\zeta_n - \zeta$ eloszlásfüggvénye gyengén az $I(x)$ elfajult eloszlásfüggvényhez tart. Történeti szempontból nézve azonban az I. és II. problémakört a gyenge összetartás esetében is el kell különíteni.

Továbbá azt is figyelembe kell venni, hogy a határátmenet alá vett változók két alakban léptek fel:

a) *J. Bernoullira* visszamenően mint ξ_1, ξ_2, \dots változóknak a_n, b_n állandókkal képezett

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{a_n} - b_n$$

normált részletösszegei,

b) *Poissonra* visszavezethetően pedig mint $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nk_n}$ változósorozatoknak b_n állandókkal alkotott

$$\zeta_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nk_n} - b_n$$

sorozatösszegei.

Bár az a) a b)-nek nyilván $k_n = n, \xi_{nk} = \frac{\xi_k}{a_n}$ különleges esete, a kettőt történeti szempontból mindenesetre, tárgyi szempontból pedig esetleg mind a határérték-, mind a határeloszlás kérdéseiben el kell különíteni. Mi így a következőkben rövidség kedvéért Ia, Ib, illetve IIa, IIb problémakörrel beszélünk. Különben általában az I. körben zérushoz tartásra nyert eredményeket a *nagy számok törvényeinek*, a II. körben adódóakat pedig *központi határértéktételeknek* nevezik, bár a *határeloszlás* kifejezés alkalmazása logikusabb volna.

Mind a négy kör fenti alakjában természetesen messzemenő általánosítása annak az *ötnek*, melynek megoldását már száz évvel ezelőtt ismerték. Ezek közül négyet az Ia és IIa két-két egyszerű változataként a *nagy számok t-ernoulli-*, illetve *Poisson-törvényének* és *Moivre—Laplace tételének*, illetve az utóbbi *Poisson-féle általánosításának* neveztek. Az ötödiket pedig a IIb egyik eseteként (félreérthető elnevezéssel) a *ritka események Poisson-törvényeként* éppen csak megemlítették.

Gnyegyenko és *Kolmogorov* könyvük előszavában ezt az öt klasszikus tételt élesen kidomborítják. Könyvük tudományos érdekessége és jelentősége abban áll, hogy a négy problémakörben elért eredményeket nemcsak a maguk teljességében állítják össze, hanem a legújabb és legáltalánosabb eredmények közvetlen levezetése után ezekből kiindulva a korábbiakat visszamenően egyre speciálisabb esetekként nagy könnyedséggel nyerik.

A könyv gerincét képező *negyedik* fejezet így nyomban teljes általánosságban a IIb kör felé fordul. A $\zeta_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nk_n} - b_n$ sorozatösszegek határeloszlásának kérdésében természetesen — a tartalmasságot biztosító — bizonyos megszorítással. Nevezetesen ama — a klasszikus vizsgálatoknál termékenynek bizonyult — megkötéssel, hogy a változók minden rögzített pozitív ε mellett

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} P\{|\xi_{nk}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

módon *maguk* vagy bizonyos b_{nk} állandók mellett, amelyek csak a ξ_{nk} változók $M(\xi_{nk})$ médiánjai lehetnek, a

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} P\{|\xi_{nk} - b_{nk}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$$

szerint legalább *ingadozásukat tekintve aszimptotikusan egyenletesen elhanyagolhatókká* válnak. Szerzők az első esetben a változókat „végtelenül kicsinyeknek”, a második esetben „határértékben állandóknak” nevezik. A IIa körben természetesen a $\xi_{nk} = \frac{\xi_k}{a_n}$ különleges esetnek megfelelő követelményt kell előírni. A IIb kört így uralják a változók várható értékének és szórásának létezése

esetén, illetve enélkül is *Bavli*, illetve *Gnyegyenko* kevéssé ismert összetartási feltételei, és *Hincsin* és *Lévynek* azon eredménye, hogy a határeloszlások korlátlanul oszthatók. *Bavli* tétele a normális, illetve *Poisson-eloszláshoz* tartás különleges feltételeit is szolgáltatja. Ezekből egy csapásra adódik a IIa körben a klasszikus $a_n = D(\xi_1 + \dots + \xi_n)$, $b_n = E(\xi_1 + \dots + \xi_n)$ a_n normálás mellett a normális eloszláshoz tartásnak *Lindeberg—Feller-féle*

$$\frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > \varepsilon a_n} x^2 dF_k(x + E(\xi_k)) \rightarrow 0$$

feltétele. *Gnyegyenko* tételére két levezetést adott. Az itt közölt az Ib problémára, tehát a nagy számok legáltalánosabb gyenge törvényére közvetlenül nyert szükséges és elégséges

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| > 1} dF_{nk}(x + M(\xi_{nk})) \rightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \leq 1} x^2 dF_{nk}(x + M(\xi_{nk})) \rightarrow 0$$

feltételek ismeretében vezet. *Gnyegyenko* tételéből könnyen adódnak a IIb esetben általa és függetlenül *Doebelin* által nyert

$$\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \rightarrow L(x) \quad \text{ha } x < 0, \quad \sum_{k=1}^{k_n} [F_{nk}(x) - 1] \rightarrow L(x), \quad \text{ha } x > 0$$

feltételek a határeloszlás jellemző függvényében szereplő L függvényre ennek folytonossági pontjaiban, valamint az ugyanezen kanonikus alakban fellépő paraméterre

$$\sigma^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_n \sum_{k=1}^{k_n} D_\varepsilon^2(\xi_{nk}),$$

a változók csonkított várható értékeire vonatkozó csonkított szórásnégyzetekkel. Ezek a feltételek uralják a következő fejezetet.

Az ötödik fejezet a normális, a *Poisson-* és az *elfajult eloszláshoz* tartás feltételeivel foglalkozik. Vagyis a II. körrel különleges esetekben, az I. körrel, a nagy számok gyenge törvényeivel pedig teljes egészükben. A normális eloszlás tekintetében egy csapással adódik a IIb körben és $b_n = 0$ esetében *Hincsinnek*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{nk}(x) \rightarrow 0,$$

ha pedig $b_n \neq 0$, e feltételen kívül *Feller* és *Lévynek* $\sum_{k=1}^{k_n} D_\varepsilon^2(\xi_{nk}) \rightarrow 1$ feltétele (a már említett csonkított szórásnégyzetekkel) és végül a IIa körben általános normálás mellett *Fellernek*

$$\sum_{k=1}^n \int_{|x| > c_n} dF_k(x) \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{c_n^2} \sum_{k=1}^n D_{c_n}^2(\xi_k) \rightarrow \infty$$

feltétele alkalmas c_n -ekkel. A λ paraméterű *Poisson-eloszláshoz* tartás feltételeit a IIb körben $b_n = 0$ esetén *Gnyegyenko és Marzinkiewicz* szerint az alapváltozók $|x| < \varepsilon$ szakaszra csonkított várható értékeinek és szórásainak zérushoz tartásán kívül

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \varepsilon, |x-1| \geq \varepsilon} dF_{nk}(x) \rightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1| > \varepsilon} dF_{nk}(x) \rightarrow \lambda$$

szolgáltatják.

Valamennyi ebben az ismertetésben felsorolt feltétel szükséges és elégséges.

Az ötödik fejezetben találjuk a nagy számok legáltalánosabb törvényét illetően *Gnyegyenko* feltételeinek újabb levezetését és egyszerű esetekként az Ia körben általános normálás mellett *Fellernek*

$$\sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{a_n^2 + x^2} dF_k(x + M(\xi_k)) \rightarrow 0$$

és
$$b_n = \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (M(\xi_k)) + \int_{|x| \leq \varepsilon a_n} x dF_k(x + M(\xi_k)),$$

klasszikus $a_n = n$, $b_n = E(\xi_1 + \dots + \xi_n)$ *n normálás* mellett pedig *Kolmogorovnak* következő feltételeit $h = 1, 2$ értékekkel:

$$\sum_{k=1}^n \int_{|x| > n} dF_k(x + E(\xi_k)) \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^h} \int_{|x| > n} x^h dF_k(x + E(\xi_k)) \rightarrow 0.$$

Ezután következnek a *Hincsin* által felvetett $b_n = 1$ esetben *Gnyegyenko*, illetve *Bobrov* összetartási feltételei az Ib, illetve Ia körben. Az ötödik fejezet szellemenesen zárja le az a tétel, mely a IIb körben a *normális* határeloszlás feltételeként az alapváltozók — *Rajkov* szerint teljes, *Gnyegyenko* szerint csonkított — várható értékeitől való négyzetes eltéréseinek összegeire az Ib-be illő megszorítást ír elő $b_n = 1$ értékkel.

A fokozatos specializálás során a *hatodik* fejezet *Hincsin* ama kérdésével foglalkozik, hogy a korlátlanul osztható eloszlások osztályában minő — a szerzők alkalmasint *Lévyre* célzó jelölésével — *L*-alosztályt képeznek a IIa határeloszlásai. A választ erre *Lévy* ama érdekes, a *Poisson-eloszlásokat kirekesztő* tétele adja meg, hogy az melynél a jellemző függvények róla elnevezett kanonikus alakjában fellépő *L(u)* függvénynek negatív, illetve pozitív *u* értékekre vett $-L(e^{-u})$, illetve $L(e^u)$ transzformáltja *y*-ban *konvex*. A hatodik fejezet nemcsak ezt a tételt, hanem *Gnyegyenko* és *Grosev* idevágó összetartási feltételeit s végül *Gnyegyenkonak* ama, *Hincsin* és *Lapin* vizsgálataira támaszkodó tételét közli, hogy az *L*-osztály (sűrűség) függvényei *egycsúcsosak*.

A feltételeket tovább szűkítve a *hetedik* fejezet a IIa kör ama határeloszlásaival foglalkozik, amelyek *azonos F(x)* eloszlású alapváltozók esetén mutatkoznak. A tárgyalást *Lévynek* az a szép tétele nyitja meg, amely szerint ez

esetben a határeloszlások *stabilis típusúak*, vagyis típusukat a típuson belüli függvényekkel való kompozíciónál megtartják. Ezek az L -osztálynak egy szűk alosztályát képezik, mert *Hincsin* és *Lévy* szerint jellemző függvényeik logaritmusa

$$i(\mu t - c |t|^\alpha) \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right\},$$

hol μ valós, $c \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$ és

$$\omega(t, \alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{\pi} \log |t|, \quad \text{ha } \alpha = 1 \quad \text{vagy} \quad \alpha = 2.$$

Az L -osztálybeli különleges $L(u)$ monoton függvény helyett itt már tehát csak az α, β paraméterpár választható. Ebben az alosztályban csak kevés konkrét eloszlás ismeretes. Pl. láthatóan az elfajult a $c=0$, a normális $\alpha=2$ és $\beta=0$, továbbá a Cauchy-féle $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x-M}{\lambda}$ az $\alpha=1$, $\beta=0$ választásnál.

A hetedik fejezet nemcsak a stabilis típusok néhány szembeszököen egyszerű tulajdonságát állapítja meg, hanem tételeket vezet le egy-egy ily típus *vonzási tartományára* is. Vagyis ama $F(x)$ eloszlások összességére is, amelyeknél IIa esetén egy és ugyanaz a típusu határeloszlás adódik. Ha e határeloszlástípus a IIa-beli normált részletösszegeknek *csak egy részsorozatára* biztosítható, akkor *Hincsin* szerint *részleges* vonzási tartományról beszélünk. A fejezet behatóan csak *Hincsin* ama tételével foglalkozik, mely szerint *minden korlátlanul osztható eloszlásnak van részleges vonzási tartománya*. Ily tartományokra vonatkozó egyéb, nagyobbára *Doebelin* és *Gnyegyenkonak* köszönhető tételek közül kilencet e fejezet csak felsorol.

A könyv két záró fejezete már speciálisabb kérdésekkel foglalkozik. A *nyolcadik* a normális eloszláshoz tartás néhány tételének élesítésével, a *kilencedik* pedig a *rácsos*, vagyis egyenlőközű pontokban szaggatott, különben állandó eloszlású függvények esetén lokális határátmenetekkel.

A valószínűségi változók összegeinek határátmeneti tételei tekintetében eddig csak *P. Lévy: Théorie de l'addition des variables aléatoires* monográfiája állt rendelkezésre. Ez ugyan szerény mértékben a *függő* változók esetére és a nagy számok *erős* törvényeire is kiterjedt, de 1937-ben jelent meg és az éppen hogy napfényre került eredmények rendszerbe foglalásával járó nehézségeknek nem egy nyomát mutatta. *Gnyegyenko* és *Kolmogorovnak* munkája tárgykörében a legújabb, igen messzemenő vizsgálatokat és a nehezen hozzáférhető tanulmányok fontos eredményeinek egy egész sorát is felöleli. Lehiggadt, rendszeres, választékos, szigorú és világos. Így igen nagy jelentőségű. A magyar matematikusok és a valószínűségszámítás központi gondolköre iránt nálunk érdeklődők szerencsésnek mondhatók, hogy ezt a kitünő művet *Földes István* kifogástalan és *Rényi Alfréd* szakavatott ellenőrzése alatt megjelent fordításában, mely a világirodalomban első, tanulmányozhatják.

Szentmártony Tibor

L. I. GUTENMAHER: „ELEKTROMOS MODELLEK“ C. KÖNYVÉRŐL

L. I. Gutenmaher: Elektromos modellek c. munkája, mely nemrégén magyar nyelven jelent meg, több okból különleges figyelmet érdemel. Először is tárgyánál fogva rendkívül fontos: tárgyalja a modern számolóberendezések egyik típusát, az u. n. analógiás számolóberendezések elméletét és gyakorlatát. Ezek a berendezések fejlődő műszaki tudományunk és technikánk szempontjából felbecsülhetetlen értékűek, mert a műszaki tevékenység egyik legfárasztóbb és leghosszadalmasabb folyamatát, a számítást gépesítik. A másik, ami e könyvnek nagy jelentőséget tulajdonít, az, hogy az analógiás berendezések elmélete és gyakorlata csaknem teljesen a szovjet tudomány terméke, melynek másutt alig van előde. A könyv beható tanulmányozása éppen ezért éles bepillantást nyújt a szovjet tudomány módszereibe és ezért így metodikai, ideológiai szempontból is rendkívül fontos.

Hogy e könyvben tárgyaltak tudományos és technikai értékét felmérhesük, meg kell jegyeznünk, hogy háromféle elv alapján működő számológépek ismeretesek. Az *első* típusba azokat a gépeket soroljuk, melyek mechanikai elv alapján működnek. Ezek képezik a számológépek legrégebb, legősibb csoportját. Ide tartoznak a különböző jól ismert összeadó- és szorzógépek, a különböző csuklós szerkezetekből álló planiméterek és integrálok, a deriviméterek, ívhosszmérők, logarlécek, stb. Ezek aránylag lassan működnek, kicsi kapacitásuk, úgy hogy a mai kor számítási követelményeinek már sok esetben nem felelnek meg. Bonyolult hidro- és aerodinamikai számítások, ballisztikus kutatások, vagy egyes vasbetonszerkezetek méretezését ilyen gépekkel csak igen fáradságos úton és lassan lehet elvégezni. Ezért a XX. század termelési problémái a tudomány fontos feladatává tették a sokkal gyorsabban működő, nagyobb kapacitású és bonyolultabb matematikai műveleteket is elvégezni tudó berendezések létesítését. Ezeknek a termelési szükségleteknek a kielégítésére jöttek létre a *második* típusba tartozó u. n. digitális elektronikus számológépek. Ezek már nem tartalmazzak (legalábbis lényegükben nem) mechanikai elemeket, hanem elektronikus úton dolgoznak. Ennek következtében működésük hihetetlenül gyors és olyan kapacitásúra méretezhető, hogy az egyes igen bonyolult feladatok is elvégezhetőek legyenek. Ezek a gépek utánozzák az emberi gondolkodás egyes logikai műveleteit és ezeket végzik el. Így tehát a gép kezelőjének minden számolás előtt át kell gondolnia milyen logikai műveletek szükségesek a számítás elvégzéséhez és ezeket kell a megszabott sorrendben a géppel elvégeztetnie.

A digitális gépek azonban a gyakorlatban csak korlátozott mértékben váltak be. Egyrészt a „programozásuk“ fáradtságos és sok időt vesz el, amellet különleges szakismeretet kívánnak. Ezen túlmenően rendkívül nagyméretűek, szobányi nagyságúak, szerkezetük igen bonyolult (ami sok hibának a forrása!), rendkívül drágák, üzemben tartásukhoz sok energiára van szükség. Nem vitás, hogy a digitális-típusú gépek elve haladás, — sőt lényeges haladás — a számológépek történetében, de a felmerült kérdéseket csak igen szűk körben oldották meg. Nyugaton, a kapitalista országokban a digitális-gépek elvének felállításával az ilyen irányú kutatások meg is szüntek, fejlődés ezen a téren nincs, aminek okaira később vissza fogunk térni.

A Szovjetunió élenjáró tudománya a számolóberendezések problémáját óriási léptekkel vitte előre és sehol a világon nem látott magas fokra emelte. Ezt elsősorban a matematikai eszközök *harmadik* típusának, az u. n. analógiás számológép elméletének és praxisának kidolgozásával érte el.

Az analógiás számológépek azon az elven működnek, hogy a természet legkülönbözőbb, *tartalmában* távoleső jelenségei ugyanolyan *formájú* differenciál- vagy integrálegyenlettel írhatók le. Hogy csak egy egészen egyszerű és közismert példát említsünk, vegyük azt az állandó együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletet:

$$\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = f(t) \quad (1)$$

ahol $y = y(t)$ ismeretlen, $f(t)$ adott függvényt jelent. Ez a differenciálegyenlet leírja egy csupa passzív elemből álló (állandó R ohmikus ellenállást, állandó C kapacitást és L önindukciót tartalmazó) rezgőkör viselkedését ha $\alpha = L$, $\beta = R$ és $\gamma = \frac{1}{C}$. De ugyanilyen alakú differenciálegyenlet írja le az m tömegeből, az F rugóból és W csillapítóból álló mechanikai rendszer mozgását is, ha $\alpha = m$, $\beta = W$, $\gamma = \frac{1}{F}$. Ez a felismerés tehát lehetővé teszi azt, hogy ahelyett, hogy egy rugóra erősített tömeg mozgását vizsgáljunk, vizsgáljuk egy, az előbbivel „analóg“, rezgőkörben lejátszódó folyamatot és esetleg fordítva. Általában a mechanikai rendszerekkel analóg elektromos „modellekben“ (jelen esetben a rezgőkör a rugóra erősített tömeg elektromos modellje) lejátszódó jelenség megfigyelése és pontos regisztrálása a könnyebb, ezért ezt az utat szokták követni. Matematikai szempontból viszont az (1) alakú differenciálegyenlet megoldását megtalálni azt jelenti, hogy egy alkalmas rezgőkör egy pontján fellépő feszültséget kell, mint az idő függvényét lemérni és regisztrálni.

Ezzel az egyszerű példával kívántuk érthetővé tenni az analógiás számológépek *elvét*. Természetesen a dolog nem áll meg ilyen egyszerű problémák megoldásánál, igen bonyolult kérdések hihetetlen gyors és egyszerű megoldásának lehetőségei nyílnak meg az elektromos modellezés révén. Így például különböző induktív v. kapacitív módon egymáshoz csatolt rezgőkörök-

ből álló rendszerek segítségével állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszereket lehet megoldani. Különösen érdekesek és értékesek az erősítőket is tartalmazó modellek, melyek ugyancsak differenciálegyenlet-rendszerek megoldására szolgálnak. Ezek a berendezések alkalmasak arra, hogy a differenciálegyenlet-rendszert szinte tetszőleges szöbajóhető kezdeti feltételek mellett megoldhassuk. Külön fejezet foglalkozik az $u. n.$ egydimenziós elektromos modellekkel (lineáris vagy egydimenziós modell lényegében olyan hosszú vezető, melyben a vezetőképesség pontról-pontra változik), melyek segítségével olyan berendezéseket lehet konstruálni, melyek változó együtthatós (homogén, vagy inhomogén) másodrendű differenciálegyenletek megoldására alkalmasak, szinte tetszőleges kezdeti feltételek mellett.

Rendkívül figyelemreméltó, hogy elektromos modellekkel a matematikai fizika legtöbb parciális differenciálegyenlete is kezelhető és megoldásai mérésekkel megállapíthatók. Így például ismeretes, hogy valamely tömör vezetőben az E feszültségeloszlást az E -re vonatkozó Laplace-féle differenciálegyenlet alkalmas megoldása szolgáltatja:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0.$$

Így tehát ennek a differenciálegyenletnek az elektromos modellje egy megfelelő töltésekkel ellátott vezető lehetne, melynek belsejében minden pontban a feszültséget megmérve, megkapjuk a kívánt megoldást.

Gyakorlatilag a tömör test belseje a mérőszonda számára megközelíthetetlen. A könyv ennek a nehézségnek leküzdésére igen szellemes módszereket ismertet. Ezek közül is kiválik egyszerűségével és szellemességével *Gutenmaher* által elektrolitikus módszernek nevezett eljárás, melynek lényege az, hogy megfelelő alakú és töltéssel bíró fémedényt elektrolittal töltünk meg és az elektrolit számára a mérőszonda már hozzáférhető. Azért is ki kell emelnünk ezt a módszert, mert a Laplace-féle differenciálegyenlet nemcsak az elektromosságban, hanem számos termodinamikai, aero- és hidrodinamikai problémában is szerepel. A szovjet technika éppen a leírt elven működő berendezéssel sok bonyolult hő- és hidrotechnikai kérdést old meg.

Ugyancsak külön fel kell figyelni *Sz. A. Gersgorin* a 30-as években megjelent dolgozataira, melyek összefoglalását adja a könyv egyik paragrafusa. *Sz. A. Gersgorin* az előbbtől eltérő, a Laplace egyenletet megoldó gépekre vonatkozó konstrukcióval foglalkozik és dolgozatai számos igen érdekes matematikai maximum és minimumproblémákat is felvetnek.

Gutenmaher könyve foglalkozik olyan gépekkel is, melyek segítségével a Laplace-egyenletnél bonyolultabb parciális differenciálegyenletek is megoldhatók. Így például analógiás berendezésekkel lehet tanulmányozni a fizikus szempontjából olyan fontos Schrödinger-féle differenciálegyenlet megoldásait igen tág határok között, vagy a potenciálmélet, az elektromos és mágneses erők elméletében fellépő egyéb differenciálegyenletek megoldásait. De nem

elégzik meg matematikai példákkal, hanem konkrét példákkal mutat rá arra, hogy a szovjet technikát milyen területeken segítették az analógiás gépek.

Aktiv négy pólusokból (erősítők) álló szerkezetek leírásából az olvasó előtt érthetővé válik a parciális differenciálegyenletrendszer megoldó analógiás gépek működési elve.

Nincsen lehetőség arra, hogy egy ismertetés keretében akár csak vázlatosan ismertessük az integrál és integrodifferenciálegyenletek megoldására szolgáló berendezések elvi működését. Ezenkívül bőven foglalkozik a könyv a különböző típusú sajátérték- és sajátfüggvényt meghatározó gépekkel, valamint valós és komplex algebrai egyenlet- és egyenletrendszereket megoldó gépekkel. Ez utóbbi az egyetlen terület, mellyel a nyugati országok kutatói is foglalkoztak. Gondolunk itt elsősorban a Bode-típusú egyenletrendszer megoldókra. De míg a nyugati kutatók csak az elv felállításáig jutottak el és leírásaikból csak azt veheti ki az olvasó, hogy ezek megépítése rendkívül bonyolult, ha sok egyenletet tartalmazó rendszerről van szó, addig *Gutenmaher* által ismertetett kapcsolások minden eddig leküzdhetetlennek látszó nehézséget megoldanak.

Ebből a rövid leírásból is szembeszökő az analógiás gépek lényeges eltérése a digitális gépekkel szemben: míg a digitális gépek általában univerzális gépek, addig az analógiás elven működők javarésze speciális, csak egy-egy kérdéscsoport megoldására szolgálnak. Valóban az a helyzet, hogy a legtöbb szakterületen elegendő a speciális gép. Tömör betonszerkezetek (mint például hidak, gátak, duzzasztók) méretezését végző mérnök például, vagy a Martin kemencében lejátszódó hőfolyamatokkal foglalkozó mérnök-kutató, a rádióhullámokat vizsgáló elektromérnökök számára elegendő egy-egy speciális funkciót ellátó gép használata is és a szovjet tudomány rengeteg, a legkülönbözőbb szakterületeken használható modellt dolgozott ki. Ezek a számolóberendezések több mint számolóberendezések, mert nemcsak egy-egy egyenletrendszer, vagy differenciálegyenlet megoldását szolgáltatják, hanem lehetővé teszik a modellen az egész folyamat alapos fizikai és technikai tanulmányozását. Ezért ezek a technikai és fizikai kutatásnak is igen értékes segédeszközei.

E mellett természetesen az univerzális gépek használatának szükségszerűsége is fennáll. Szükségesek olyan berendezések, melyek a feladatoknak egy-egy nagyobb csoportját látják el. Ilyen készülékeket elektrointegrátoroknak, ill. számológépeknek nevezünk, aszerint, hogy differenciálegyenletek numerikus megoldására, vagy más egyenletek megoldására használhatók. Ezek is felépíthetők analógiás elven.

Míg a speciális gépek egyszerű elemekből és aránylag olcsón, sok esetben házilag is előállíthatók, addig az univerzális berendezések költségesek és kezelésük is nagyobb szakismeretet igényel. A könyv egy igen terjedelmes fejezete példákat mutat be különböző típusú analógiás elektrointegrátorokra.

A könyv a számológépeket nemcsak ismerteti, hanem lépten-nyomon utal a konkrét műszaki alkalmazásokra és használati területekre. Figyelme kiterjed nemcsak az elvi kérdésekre, hanem a megvalósíthatóság kérdéseire is. Ezzel

függ össze, hogy külön fejezet ismerteti a szokásos gépelemeket, feszültségelosztókat, potenciómétereket és áramforrásokat. Egy másik fejezet leírja a regisztrálás, az eredmény leolvasásának módszereit. Figyelme természetesen kiterjed a pontosság kérdésére is és különösen az elektrointegrátor ismertetésével kapcsolatban konkrét hibabecslési formulákat is megad.

Tárgyalásmódja mindenütt szabatos és világos. Elemi fizikai és matematikai előismereteken kívül mást nem tételez fel az olvasótól. Célkitűzése csupán bevezetőt adni ebbe a tudományba és vázlatosan ismertetni néhány példán az idevágó eredményeket. Ennek ellenére nem egy helyen kész kapcsolási rajzot ad olyan részletes kidolgozásban, hogy annak alapján a gép azonnal meg is építhető. A szovjet tudósokra jellemző módon állandóan figyelemmel van a pedagógiai szempontokra is. Sokszor kiemeli egyik vagy másik gépnek a mérnök- és matematikus-képzésben elfoglalt jelentőségét és *Gutenmaher* ezen gondolataira különösen szeretném felhívni az illetékesek figyelmét.

Gutenmaher könyve nemcsak matematikai szempontból, hanem ideológiai szempontból is rendkívüli. Az egész mű ragyogó példája a materialista tudósok dialektikus gondolkodásának. Kiindulópontjuk *Lenin*: Materializmus és empiriokriticismusának zseniális megállapítása, mely szerint „a jelenségek különböző területeire vonatkozó differenciálegyenletek meglepően analóg voltában a természet egysége mutatkozik meg”. A szovjet tudósoknál ez a lenini tézis „anyagi erővé” változott, hiszen ez alkotja az elektromos modellezés tudományának alapját, ez vezette *A. N. Krülov*-ot, hogy 1926-ban megszerkessze az első analógiás számológépet, ez vezette *N. E. Zsukovszkijt*, hogy aerodinamikai csövekben felfedezze fontos tételeit, ez adta *N. V. Kirpcsevnek* az ideát, hogy bonyolult hőgépekben lejátszódó folyamatokat a modellezés segítségével tisztázzon s. i. t. De a szovjet tudósok nem *akármilyen* modelleken kísérleteztek, nem *valamilyen* típusú differenciál- vagy integrálegyenlet-típusokra szerkesztettek analógiás gépeket, hanem olyanokra, melyek a szovjet népgazdaság igényeit kielégítik, mellyel segítik a sztálini tervek megvalósítását. A könyvön állandóan, vörös fonálként vonul végig a legmélyebb elmélet és a legdöntőbb gyakorlati kérdések szétválaszthatatlan egysége, anélkül azonban, hogy prakticista lenne. Nyilván nem a napi praxist szolgálja az a berendezés, mely a Schrödinger-egyenlet megoldásait adja vagy a Maxwell-egyenletek integrálását végzi el a legkülönbözőbb esetekben. Nem egy helyen utal a könyv a fejlődés, a jövő perspektíváira is és ezek a megjegyzések a továbbkutatás szempontjából különösen értékesek.

Végül pedig meg kell említeni e mű legfontosabb ideológiai konzekvenciáját. Már említettük, hogy a kapitalista államok, de különösen az Egyesült Államok sajtója egészen különleges zajt csap a digitális-gépek, az Eniac-típusú számológépek körül. Ez alól a „komoly” lapok, a szakfolyóiratok sem kivételek. Egészen feltűnő módon aláhúzzák ezeknek a gépóriásoknak a méreteit, azt a tömérdek elektroncsövet, amit egy ilyen gép tartalmaz, és ezek megépítésének csak csillagászati számokkal kifejezhető költségeit. Ennek a

sajtókoncertnek nyilvánvaló célja az, hogy elhitesse a világ népeivel, hogy komoly számolóberendezéseket csak „gazdag“ államokban, csak Amerikában lehet csinálni és ennek következtében fejlett technikával csak ők rendelkezhetnek. El akarják hitetni, hogy ilyen beruházásokra csak ők képesek és csak ők állanak azon a fokon, hogy — ahogyan ők nevezik — elektromos „agyakat“ tudnak konstruálni, pontosan úgy, ahogyan el akarták hitetni, hogy az atomenergia „titka“ az ő egyedüli titkuk. *Gutenmaher* könyve erélyesen megcáfolja ezt a hazug propagandát. Valójában az a helyzet, hogy a Szovjetunió a digitális gépek terén sem marad el bármely más ország mögött, és különösen az analógiás számológéptechnika terén a Szovjetunió mérföldekkel hagyta maga mögött az USA-t és a többi imperialista államot. E könyv minden történelmi megjegyzéséből és egész tárgyalásmódjából megtanulhatjuk, mi ez az erő, mely a modellezés tudományát (és természetesen más tudományt is) kifejlesztette és sose látott magas fokra emelte. Ez az erő a szovjethatalom! Ennek tudásai „készek önként szolgálni a népet“. A kapitalista államokban az analógiás gépek elmélete ki sem fejlődhetett, erre nincs meg a társadalmi alap. Hiszen a drága Eniac jobb exportcikk a gyarmati és félgyarmati országokba, mint az olcsó analógiás gép! Néhány nagyobb Eniac komoly piacot jelent a rádiócsőkonserneknek, árát pedig amugyis kipréselik a dolgozók verejtékéből!

Gutenmaher könyvének útmutatásai alapján nálunk is sürgősen el kell kezdeni az analógiás számológépek tanulmányozását és ezeknek a természet-tudományok és technika szolgálatába való állítását. *Gutenmaher* könyve ehhez nemcsak jó bevezető, hanem a beható, tudományos munkához is értékes támogatást nyújt bőséges bibliografiai anyagával, ami a műnek még külön értéke.

Befejezésül néhány szót a könyv magyar kiadásához. Sajnálatos, hogy a magyar kiadás nem mindenben méltó a mű valóban korszakalkotó tartalmához és ahhoz a megtiszteltetéshez, hogy az Akadémiai Kiadó egy Sztálin-díjas szovjet tudós könyvét kiadhatta. A fordítás nem minden helyen megfelelő és elfogadott magyar műkifejezéseket eltorzít. Így például „saját érték“ és „saját függvény“ olvasható a sajátérték és sajátfüggvény helyett. Az integrálegyenlet „magváról“ beszél a „magja“ helyett, és gyakran használja a „határfeladat“ kifejezést a „kerületiértékfeladat“ helyett. Ezeknél és ehhez hasonló fordítási hibáknál nagyobb hiba a fordítás magyartalan és nehézkes nyelvezete. Érezni, hogy a könyv az eredetinek annyira hű fordítása, hogy sok helyütt a szavak sorrendje is szinte követi az orosz szavak sorrendjét, sokszor a magyar nyelv szabályainak nem megfelelően. A magyar nyelv természetétől idegen hosszú mondatok a szöveget egyes helyeken nehezen érthetővé teszik. A képletekben is találhatók több helyütt sajtóhibák. Ezeket a hiányosságokat egy újabb kiadásban feltétlenül ki kell javítani. Egészében a könyv igen aktuális és kiadásával a Magyar Tudományos Akadémia kulturális és technikai életünket nagy mértékben gazdagította.

Fenyő István

TARTALOMJEGYZÉK

	Oldal
Az Osztályközlemények feladatairól	297

TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

<i>Egerváry Jenő és Turán Pál</i> : A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiről	303
<i>Jánossy Lajos, Rényi Alfréd és Aczél János</i> : Összetett Poisson eloszlásokról I.	315
<i>Rényi Alfréd</i> : Összetett Poisson eloszlásokról II.	329
<i>Jánossy Lajos</i> : A Laplace-transzformáció általánosítása a valószínűségszámításban	343
<i>Rényi Alfréd</i> : A valószínűségszámítás központi határértéktételének egy új általánosításáról	351
<i>Jánossy Lajos</i> : Egy az elektronsokszorozó elméletében fellépő sztochasztikus folyamatról	357
<i>Rényi Alfréd és Turán Pál</i> : Két bizonyítás Jánossy Lajos egy tételére	369
<i>Takács Lajos</i> : Bekövetkezési és koincidencia jelenségek tárgyalása időtartamban tetszőleges eloszlású történések esetén	371

AZ AKADÉMIAI INTÉZETEK MUNKÁJÁRÓL

<i>Vincze István</i> : A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének működéséről	387
<i>Detre László</i> : A Magyar Tudományos Akadémia Csillagvizsgáló Intézetének munkájáról	393

EGYÉB KÖZLEMÉNYEK

<i>Szamosi Géza</i> : Az első Magyar Fizikus Vándorgyűlés	397
A Természettudományi Társulat Csillagászati Múzeumának megnyitása	401

KÖNYVISMERTETÉSEK

Beszámoló a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának 1951. évi könyvkiadási tervének végrehajtásáról	403
<i>Szentmártony Tibor</i> : B. V. Gnyegyenko és A. N. Kolmogorov „Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai“ című könyvéről	409
<i>Fenyő István</i> : L. I. Gutenmaher „Elektromos modellek“ című könyvéről	417

Akadémiai Kiadó (Budapest, V., Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyán János

Délmagyarország nyomda, Szeged 514914

Felelős vezető: Priskin Sándor

Akadémiai Kiadó (Budapest, V., Alkotmány-u. 21.) Felelős: Mestyan János

Délmagyarország nyomda, Szeged 514914

Felelős vezető: Priskin Sándor

Ára : 24 Ft.