

Alkalmazott matematikai lapok

1982/1-2

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

8

KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ

PRÉKOPA ANDRÁS

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTES

ARATÓ MÁTYÁS

A SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG TAGJAI

BENCZUR ANDRÁS, CSISZÁR IMRE, FARKAS MIKLÓS, GYIRES BÉLA,
HATVANI LÁSZLÓ, HEPPES ALADÁR, KÁTAI IMRE, KÍS OTTÓ,
RÉVÉSZ GYÖRGY, SARKADI KÁROLY, TANDORI KÁROLY, VARGA LÁSZLÓ,
SZÁNTAI TAMÁS (TECHNIKAI SZERKESZTŐ)

MUNKATÁRSÁK

BAJCSAY PÁL, BALLA KATALIN, BÉKÉSSY ANDRÁS, CSÁKI PÉTER,
CSIRIK JÁNOS, DEMETROVICS JÁNOS, DÉNES JÓZSEF, DÖMÖLKI BÁLINT,
ELBERT ÁRPÁD, FORGÓ FERENC, GÉCSEG FERENC, GERGELY JÓZSEF,
GESZTELYI ERNŐ, GYÖRFFY LÁSZLÓ, KLAFSZKY EMIL, KÓSA ANDRÁS,
KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA, LÁSZLÓ ZOLTÁN, MIKOLÁS MIKLÓS,
MOGYORÓDI JÓZSEF, NÉMETH GÉZA, NEMETZ TIBOR, RÉVÉSZ PÁL,
RÓZSA PÁL, STAHL JÁNOS, SZÉP JENŐ, TANKÓ JÓZSEF, TOMKÓ JÓZSEF,
TÓKE PÁL, TUSNÁDY GÁBOR, VINCZE ENDRE

VII. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Kiadóhivatal: 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztő bizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Prékopa András, főszerkesztő
1502 Budapest, Kende u. 13—17.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 100 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—11 488), külföldi megrendelések a Kultúra Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

STATISZTIKAI KÖVETKEZTETÉS CENZORÁLT MINTÁKBÓL

CSÖRGŐ SÁNDOR és HORVÁTH LAJOS

Szeged

A dolgozat a leggyakrabban használt nemparametrikus cenzorálási modellekben alkalmazható aszimptotikus eljárásokról ad áttekintést a jelenleg elérhető legpontosabb matematikai eredmények ismertetésével.

1. Bevezetés

Az élettartamra, túlélésvalószínűségekre vonatkozó legtöbb statisztikai minta nem teljes a gyakorlatban. Példaként elég csak arra gondolnunk, hogy bizonyos betegségek túlélésvalószínűségére vonatkozó klinikai, kórházi adatok kiértékelésekor a páciensek egy része szerencsére még él, illetve a már elhaltaknál a halál oka a szóban forgó betegségtől különböző is lehet. Hasonlóan, egy gép meghibásodásáért különböző okok, kockázatok „versenyezhetnek” egymással. Az alkalmazott statisztikus feladata ilyenkor vagy az, hogy e nem teljes, ún. cenzorált mintából egy élettartam változó eloszlásfüggvényére (vagy annak valamely jellemzőjére) következtessen a többi véletlen hatást csupán zavaróként kezelvén és így kiszűrni akarván (ez az ún. *Kaplan—Meier-modell*, I. a 2. fejezetet), vagy pedig az, hogy ebből minden egyes elkülönített „kockázat” eloszlásfüggvényét egyszerre becsülje (ez az ún. kockázat-modell).

Az első cenzorált mintákra vonatkozó feladatot D. BERNOULLI [36] fogalmazta meg 1760-ban. Azt kérdezte, hogy ha az emberi halálokok közül a megfelelő védőoltás bevezetése miatt a himlő majd kiiktatódik, akkor várhatóan mennyivel fog megnőni az ember életének hossza. Pontosabban, azzal a kérdéssel foglalkozott, hogy a korabeli, több európai városban akkor már régebb óta vezetett, és a halál okaként természetesen a himlőt is tartalmazó élettartam táblázatokat (BERNOULLI maga a *Breslau-it* használta) hogyan lehet használni azon későbbi generációk várható élettartamának megbecslésére, amiket a himlő már nem fenyeget. (Mint ismeretes, a himlő elleni vakcinációt BERNOULLI dolgozata után harminchat évvel JENNER végül tényleg felfedezte.) Az élettartam eloszlásfüggvényének, vagy a túlélésfüggvénynek cenzorált klinikai adatokból történő becslésére a múlt század utolsó negyedétől kezdve igen elterjedt az orvosi szakirodalomban egy (bizonyos parametrikus modellt feltételező) eljárás, melyet GOMPERTZ egy 1825-ben írt dolgozata alapján MAKEHAM fejlesztett ki 1860-ban. Bár ugyan már régen világossá vált, hogy ez a parametrikus modell a valódi helyzetet csak igen ritka esetben approximálja jól, még ma is sűrűn alkalmazzák (*“the(?) life table method”*) minden előzetes vizsgálat, teszt nélkül. A XX. század első felének teoretikus érvényre is szert tett munkái közül GREENWOOD [94] dolgozatát lehet kiemelni, aki a „rák természetes tartamát” próbálta becsülni, természetesen cenzorált adatokból. Az ötvenes évek rokon témájú dolgozatai közül BERKSON és GAGE [34], GOODMAN [93], valamint EPSTEIN és SOBEL [65] említhető.

Fordulatot jelent a kérdéskörben KAPLAN és MEIER [108] dolgozata 1958-ból. A cenzorálás egy meglehetősen általános sémáját fogalmazzák meg pontosan, és bevezették az ún. „*product-limit*” becslést (amit mi magyarra egyszerűen *szorzatbecslés-ként* fordítunk). A következő alapvető dolgozat EFRON [64] nevéhez fűződik (1967), aki többek között, megsejtette a legfontosabb aszimptotikus eredményeket, melyeket később (1974, ill. 1976) BRESLOW és CROWLEY [41] és AALEN [25] bizonyított be először. Ez a négy munka azután dolgozatok özönét váltotta ki, úgy az elmélet, mint a gyakorlati alkalmazás terén, több monográfia is született ([50, 32, 37, 89]). Különösen a legutóbbi öt év termése nagy.

A jelen dolgozat célja az, hogy áttekintést adjon a leggyakrabban használt *nemparametrikus* cenzorálási modellekben alkalmazott aszimptotikus eljárásokról. Ezt a választást természetesen saját matematikai érdeklődésünk szabta meg, amit viszont befolyásolt az utóbbi évben a Szegedi Orvostudományi Egyetem I. sz. Sebészeti Klinikája bizonyos (cenzorált) adathalmazainak statisztikai kiértékelése során szerzett gyakorlati tapasztalatunk. Olyan (esetleg egy vagy több társult betegséggel is bíró) páciensek túlélési adatait vizsgáltuk, akik testébe az utóbbi tíz évben pacemaker-t ültettek a klinikán. Semmilyen általunk ismert parametrikus modellt nem lehetett „ráerőszakolni” az adatokra. Ezúton mondunk köszönetet DR. FELKAI BÉLA professzornak, akivel a vizsgálatokat közösen végeztük, hogy erre a kölcsönösen hasznos munkára lehetőséget adott. A klinika nyelőcső-, gyomor- és végbélrákra operált pácienseinek (cenzorált) túlélési adatai, előzetes tájékozódásunk alapján, szintén nem nyújtanak lehetőséget parametrikus modellek használatára.

A dolgozat megírására saját [47, 52—60, 101—104] cikksorozatunk adott alapot. A jelen összefoglalás ugyanakkor alkalmat adott arra, hogy már közölt vagy közlés alatt álló eredményeinket finomítsuk, megjavítsuk és több tekintetben egységesítsük. Bizonyos tételek után álló ($>$) [x] jel azt jelenti, hogy az illető tétel lényegében ugyanaz, mint az [x] dolgozatban található megfelelő eredmény, ugyanakkor annál valamivel jobb, finomabb. A javulás főleg az approximációs ráták konstansaiban és a valószínűségi egyenlőtlenségek külső konstansaiban történt. Ezen ráták, konvergencia-sebességek a konstansokkal együtt való gondos kimunkálására az adott motivációt eredetileg, hogy az aszimptotikus elmélet véges mintákra való hagyományos alkalmazhatóságával kapcsolatban jól megalapozott kételyek merültek fel.

A megfelelő modellek, becslések, használandó tételek és jelölések ismertetése után bizonyítjuk az alapfolyamatok approximációira vonatkozó legfontosabb eredményeket. A 9. fejezetben ezeknek a folyamatoknak hatféle transzformációjával foglalkozunk, különös tekintettel konfidenciasávok szerkesztésére és a tiszta illeszkedésvizsgálatra. Itt több eredmény (a hivatkozási számmal el nem látott tételek, következmények) új. GILL [89]-nek az egész egyenesen való gyenge konvergenciára vonatkozó eredménye után kerül sor a konzisztencia kérdéseinek vizsgálatára a 11. fejezetben. Itteni eredményeink ezeket a kérdéseket, néhánytól eltekintve, lényegében lezárják. Meg kell jegyeznünk, hogy e téren előttünk a legjobb eredményeket FÖLDES ANTONIA és REJTŐ LÍDIA érte el ([49, 74—82, 86, 169]), munkásságuk élénk nemzetközi visszhangot váltott ki. Néhány paraméterbecslésre és összetett hipotézisvizsgálatra vonatkozó eredményt ismerttet a 12. fejezet. Ezek az eredmények újak, itt kerülnek először közlésre, és ezeket a másodikként megnevezett szerző egyedül érte el. Hasonlóan teljesen új eredményeket közöl a 13. fejezet az (életkortól függő) várható élettartam függvény becslésére. A karakterisztikus függvények becslésére, a változó

cenzorálásra és a kétmintás statisztikákra vonatkozó néhány eredmény (14., 15. és 17. fejezetek) vázlatos ismertetése mellett foglalkozunk függő cenzorálási modellekkel. A 17. fejezet a különböző kockázatmodellek azonosíthatóságára vonatkozó alap-tételt általánosítja.

Természetesen még a nemparametrikus módszerek, eredmények áttekintésében sem lehet dolgozatunk teljes. Néhány ilyen eredményre utalunk, csak irodalmi hivatkozással, a 18. szakaszban, néhány más kutatási irány felemlítésével. Az irodalomjegyzék két részre van osztva. Az első rövidebb részbe nem cenzorálási kérdésekkel foglalkozó hivatkozásaink kerültek, a második rész tartalmazza a jelen cikkünkkel rokon témájú dolgozatokat, a *teljesség minden igénye nélkül*. Legalább százra kell tegyük a kimaradt dolgozatok számát. Sok dolgozat létezéséről csak áttételesen van tudomásunk, jónéhány általunk is elérhető dolgozattal még nem tudtunk foglalkozni. Választásunk nyilván így is sokszor esetleges. Néhány dolgozatot egyszerűen kifelejtettünk az irodalomjegyzékből. Ez történt például Horváth Lajos legújabb, sűrűség- és hazádráta függvények cenzorált adatokból történő becslésével foglalkozó dolgozatával is annak ellenére, hogy bevettük viszont az ugyanilyen témájú [43, 46] dolgozatokat.

2. Cenzorálási modellek

a) *A kockázat modell („competing risks”)*

Legyen $k \geq 1$ rögzített természetes szám, és legyenek X^{01}, \dots, X^{0k} teljesen független valószínűségi változók, melyek eloszlásfüggvényei

$$F^{0i}(t) = P\{X^{0i} < t\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Az X^{01}, \dots, X^{0k} változók minimumát jelölje X :

$$X = \min(X^{01}, \dots, X^{0k}),$$

δ^i pedig legyen annak az eseménynek az indikátora, hogy a minimum az i -edik változón vétetett fel, azaz

$$\delta^i = \begin{cases} 1, & \text{ha } X = X^{0i}, \\ 0, & \text{ha } X < X^{0i}. \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy a rendelkezésünkre álló minta

$$(2.1) \quad \{X_i, \delta_i^1, \dots, \delta_i^k\}_{i=1}^n,$$

ahol az $(X_i, \delta_i^1, \dots, \delta_i^k)$ vektorok az $(X, \delta^1, \dots, \delta^k)$ $k+1$ dimenziós vektor független ismétlései ugyanazon a valószínűségi mezőn. Az a feladatunk, hogy a (2.1) mintából megbecsüljük az F^{01}, \dots, F^{0k} eloszlásfüggvényeket (lásd pl. [83, 99, 109, 129, 130, 131, 139]). Nézzünk néhány példát a modell alkalmazására.

2.1. PÉLDA. Tételezzük fel, hogy egy kórházban ápoltságban lévő betegek k különböző ok miatt halhatnak meg és ezek az okok egymástól függetlenek. Mindegyik betegség meghatároz egy véletlen időtartamot, ameddig a beteg élhet, ha csak ebben a betegségben szenved. A beteg abban a betegségben fog meghalni, amelyik a legrövidebb időtartamot engedélyezte. Az előbb bevezetett jelölésekkel X^{01}, \dots, X^{0k} az egyes betegségek által megszabott élethosszak, az X változó pedig a meghalt beteg élet-

kora. A (2.1) mintában ekkor az elhunyt életkora és a betegségei szerepelnek, és arra vagyunk kíváncsiak, hogy az egyes betegségek mennyire korlátozzák az életkort.

2.2. PÉLDA. Az előbbi kórházi modellt könnyen átfogalmazhatjuk felújítási feladattá. Egy gépnek k alkatrésze van, az egyes alkatrészek X^{01}, \dots, X^{0k} ideig működnek meghibásodás nélkül. Ha valamelyik alkatrész elromlik, a gép megáll, és többé nem működtethető. Meghibásodáskor feljegyzik a meghibásodás okait és a gép X működési idejét. Ezekből az adatokból akarjuk az egyes alkatrészek élet-tartamának az eloszlását megbecsülni.

Az eloszlásfüggvények mellett dolgozatunkban fontos szerepet fognak játszani a hazárdfüggvények. Az F^{0i} eloszlásfüggvényhez tartozó hazárdfüggvényt jelölje A^i , melyet a következő integrállal definiálunk:

$$(2.2) \quad A^i(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F^{0i}(s))^{-1} dF^{0i}(s).$$

KOTZ és SHANBHAG [16] megmutatták, hogy a hazárdfüggvény egyértelműen meghatározza az eloszlásfüggvényt, nevezetesen

$$(2.3) \quad 1 - F^{0i}(t) = \left[\prod_{s=t}^{\infty} (1 - \Delta A^i(s)) \right] \exp(-A_c^i(t)),$$

ahol $\Delta A^i(s)$ a A^i függvény s pontbeli ugrását, A_c^i pedig a folytonos részét jelöli. A (2.3) formulából azt kapjuk, [35], hogy ha F^{0i} folytonos eloszlásfüggvény, akkor

$$(2.4) \quad A^i(t) = -\log(1 - F^{0i}(t)).$$

Ha a hazárdfüggvény deriválható, akkor a deriváltját $\lambda^i(t)$ -vel jelöljük és hazárd-rátának vagy halálozási rátának nevezzük. Ha az F^{0i} függvénynek létezik a deriváltja, f^{0i} , akkor

$$\lambda^i(t) = f^{0i}(t)/(1 - F^{0i}(t)).$$

2.3. PÉLDA. A többszörös csökkenési modell („multiple decrement model”) ([25—31], [83, 99, 109]). Tekintsünk egy *Markov-láncot*, melynek lehetséges állapotai $0, 1, \dots, k$ és ezek közül $1, \dots, k$ elnyelő állapotok. Jelölje $P_i(t)$ annak a valószínűségét, hogy a lánc a t időpontban az i -edik állapotban van, feltéve, hogy a 0 időpillanatban a 0 állapotban volt. A t időpillanatban 0 állapotból az i -edik állapotba való átmenet infinitézimális átmenetvalószínűsége éppen a hazárdráta:

$$\lambda^i(t) = \frac{dP_i(t)}{dt} \bigg/ P_0(t).$$

Az

$$(2.5) \quad 1 - \exp(-A^i(t))$$

mennyiséget parciális átmenetvalószínűségnek nevezzük. Könnyen látható, hogy ez a modell a 2.2. példa egy másik matematikai megfogalmazása.

b) *A Kaplan—Meier-modell*

A *Kaplan—Meier-modell* az előzőleg tárgyalt kockázatmodell speciális esetének tekinthető, amikor $k=2$ [108, 125]. De a kockázatmodellől annyiban mégis eltér, hogy csak az F^{01} eloszlásfüggvény megismerésére törekszünk, és számunkra teljesen közömbös a cenzoráló X^{02} változó eloszlása. Így a (2.1) minta helyett elegendő az

$$(2.6) \quad \{X_i, \delta_i^1\}_{i=1}^n$$

sorozat ismerete.

2.4. PÉLDA. Egy kórház operáció után még kapcsolatot tart a betegekkel, így pontosan tudja, hogy a betegek egy része mikor halt meg. Ezeknek a kapcsolatoknak egy másik része azonban bizonyos idő után megszakadt, tehát a kórház csak annyit tud, hogy ezek a betegek biztosan megérték valamennyi időt. Ha X^{01} jelenti az operációtól a halálig, X^{02} pedig az operációtól az utolsó levélig eltelt időt, akkor a kórház az $X = \min(X^{01}, X^{02})$ időt ismeri, valamint tudja, hogy ekkor élt-e még a beteg. Természetesen, most csak az operáció hatásossága az érdekes, és teljesen közömbös, hogy mikor szakadt meg a kapcsolat a kórházzal. Ez az eset felel meg az 1. fejezetben ismertetett BERNOULLITÓL származó problémának is, hiszen ott is közömbös volt, hogy milyen életkorban halnak meg az emberek a feketehimlőtől.

3. A hazárdbecslés

A hazárdbecslés módszere NELSON [133] dolgozatában szerepelt először, majd AALEN fejlesztette tovább. Azt mondjuk, hogy az X változó i -cenzorálatlan (a *Kaplan—Meier-modellben* elegendő cenzorálatlannak nevezni), ha $\delta^i=1$, különben i -cenzorálatlan nevezük. Az X változó i -cenzorálatlan szub-eloszlásfüggvényét F^i -vel jelöljük. Ez nem más mint

$$F^i(t) = P\{X < t, \delta^i = 1\}.$$

Az F^i függvényre könnyű formulát adni az X^{01}, \dots, X^{0k} változók teljes függetlenségének figyelembevételével:

$$(3.1) \quad F^i(t) = \int_{-\infty}^t \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1 - F^{0j}(s)) dF^{0i}(s).$$

Ha X eloszlásfüggvényét F jelöli, akkor a függetlenség miatt

$$(3.2) \quad 1 - F(t) = \prod_{i=1}^k (1 - F^{0i}(t)).$$

Tehát

$$(3.3) \quad F^i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1 - F(s)}{1 - F^{0i}(s)} dF^{0i}(s)$$

és így a hazárdfüggvény következő előállítását kapjuk

$$(3.4) \quad A^i(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F(s))^{-1} dF^i(s).$$

A hazárdbecslés a (3.4) formulán alapul. Legyen

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \# \{1 \leq j \leq n: X_j < t\}$$

az X_1, \dots, X_n valószínűségi változók közös empirikus eloszlásfüggvénye, a megfelelő cenzorált empirikus eloszlásfüggvényekre pedig vezessük be az

$$F_n^i(t) = \frac{1}{n} \# \{1 \leq j \leq n: X_j < t \text{ és } \delta_j^i = 1\}, \quad i = 1, \dots, k,$$

jelölést. Az F_n, F_n^1, \dots, F_n^k véletlen függvények viselkedésével részletesen foglalkozunk majd az 5. fejezetben. Az empirikus hazárdfüggvényt ezekután úgy definiáljuk, hogy a (3.4) formulában az F és F^i függvényt az empirikus megfelelőjével helyettesítjük,

$$(3.5) \quad A_n^i(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F_n(s))^{-1} dF_n^i(s).$$

A A_n^i függvényt persze összeg alakban is felírhatjuk. Elvégezve az integrálást,

$$A_n^i(t) = \frac{1}{n} \sum_{X_j < t} \delta_j^i / (1 - F_n(X_j)) = \sum_{X_j < t} \delta_j^i / N_{j:n},$$

ahol

$$N_{j:n} = \# \{1 \leq i \leq n: X_j \leq X_i\}.$$

Vezessük be a hazárd folyamatot is, amely vektorváltozós, vektorértékű (röviden: vektor-vektor) folyamat:

$$\mathbf{H}_n(\mathbf{x}) = (H_n^1(x_1), \dots, H_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

$$H_n^i(x_i) = n^{1/2} (A_n^i(x_i) - A^i(x_i)).$$

A 2.3. példában definiált parciális átmenetvalószínűség becslésére az

$$(3.6) \quad 1 - \exp(-A_n^i(t))$$

függvényt is használhatjuk. A következő fejezetben egy másik lehetséges becslésről lesz szó, a szorzatbecslésről. A 8. fejezetben majd megmutatjuk, hogy a szorzatbecslés és a (3.6) becslés aszimptotikus tulajdonságai ugyanazok.

4. A szorzatbecslés

Rendezzük az $X_i, i=1, \dots, n$ mintaelemeket nagyság szerinti monoton növekvő sorozatba. Ez a sorbarendezés csak akkor egyértelmű, ha nincsenek az X_i -k között azonosak. Ha vannak megegyező elemek, akkor az i -módon cenzorálatlan előzze meg a vele egyenlő i -módon cenzoráltat. Ha két mintaelem egyenlő és i -módon ugyanúgy cenzorált, akkor a sorrendjük tetszőleges. Az így kapott rendezés j -edik elemét $Z_{j:n}^i$ -vel jelöljük, $\delta_{j:n}^i$ pedig azt jelölje, hogy ez a mintaelem i -módon cenzorált vagy nem. KAPLAN és MEIER [108] a következő módon definiálták az i -edik szorzat-

becslést (*product-limit estimator*):

$$(4.1) \quad 1 - \hat{F}_n^{0i}(t) = \begin{cases} \prod_{Z_{j:n}^i < t} \left(\frac{n-j}{n-j+1} \right)^{\delta_{j:n}^i}, & \text{ha } t \leq X_{n:n}, \\ 0, & \text{ha } t > X_{n:n}, \end{cases}$$

ahol $X_{n:n} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Igaz a következő tétel.

4.1. TÉTEL. (KAPLAN, MEIER [108], JOHANSEN [106]). *Minden rögzített t -re az $\hat{F}_n^{0i}(t)$ szorzatbecslés maximum likelihood becslése az $F^{0i}(t)$ értéknek.*

EFRON [64] dolgozatában algoritmust adott a szorzatbecslés kiszámítására. A (4.1) formula kiszámítása se jelent bonyolult feladatot, de az *Efron-féle algoritmust* mégis érdemes ismertetni, mivel sokat elárul a becslés alapgondolatából.

4.2. TÉTEL. (EFRON [64]). *Az \hat{F}_n^{0i} szorzatbecslés a következő algoritmussal számítható ki:*

(i) *Minden egyes $Z_{j:n}^i$, $j=1, \dots, n$ ponthoz rendeljünk hozzá $1/n$ súlyt.*

(ii) *Ezután (szukcesszív módon $j=1, 2, \dots, (n-1)$ -re) végezzük a következőket:*

ha $\delta_{j:n}^i = 1$ ne tegyünk semmit,

ha $\delta_{j:n}^i = 0$, akkor a $Z_{j:n}^i$ ponthoz az algoritmus által hozzárendelt súlyt vegyük el, azaz nulla súlyt rendeljünk hozzá, és az elvett súlyt egyenlően osszuk el a még hátralevő $Z_{j+1:n}^i, \dots, Z_{n:n}^i$ pontok között.

(iii) *Ekkor \hat{F}_n^{0i} az a balról folytonos, tiszta ugró eloszlásfüggvény, amely a $Z_{j:n}^i$, $j=1, \dots, n$ pontokhoz az (ii)-ben meghatározott súlyokat rendeli.*

EFRON bebizonyította, hogy a szorzatbecslés „ön-konzisztens”. Ezt a fogalmat itt most nem vezetjük be. Durván annyit jelent, hogy ha egy t pontban kiindulunk $F^{0i}(t)$ egy tetszőleges becsléséből, akkor bizonyos önjavító algoritmussal véges sok lépésben $\hat{F}_n^{0i}(t)$ -hez jutunk.

AALLEN [25] bebizonyította, hogy a (2.1) minimálisan szükséges és elégséges statisztika a folytonos kárházrával rendelkező eloszlásfüggvények osztályán. Ebben a dolgozatban a szorzatbecslés aszimptotikus tulajdonságaival kívánunk foglalkozni. Vezessük be a kárházrához hasonló módon a szorzatbecslés folyamatot is:

$$\mathbf{L}_n(\mathbf{x}) = (L_n^1(x_1), \dots, L_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

$$L_n^i(x_i) = n^{1/2}(\hat{F}_n^{0i}(x_i) - F^{0i}(x_i)).$$

A 8. és 9. fejezetben az $\mathbf{L}_n(\mathbf{x})$ vektor-vektor folyamat konvergencia-tulajdonságait vizsgáljuk és példákat mutatunk ezeknek a tulajdonságoknak a felhasználására.

5. Felhasznált tételek és jelölések

A dolgozatban *Wiener-folyamat*on mindig a *standard Brown-féle mozgást* értjük, azaz olyan $W(t)$, $t \geq 0$, *Gauss-folyamatot*, melyre $W(0)=0$, $EW(t)=0$, $EW(t)W(s) = \min(t, s)$. *Brown-húdnak* nevezünk olyan B *Gauss-folyamatot* a $[0, 1]$ intervallumon, melyre $B(0)=B(1)=0$, $EB(t)=0$, $EB(t)B(s) = \min(t, s) - ts$. Nyilvánvaló,

hogy $B(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \leq t \leq 1$, *Brown-híd*. Egy $K(t, u)$, $0 \leq t \leq 1$, $u \geq 0$, kétváltozós *Gauss-folyamatot Kiefer-folyamatnak* nevezünk akkor, ha $K(0, u) = K(1, u) = K(t, 0) = 0$, $EK(t, u) = 0$ és $EK(t, u)K(s, v) = \min(u, v)[\min(t, s) - ts]$. Az általánosság megszorítása nélkül minden előforduló sztochasztikus folyamatról fel fogjuk tenni, hogy szeparábilis.

5.1. TÉTEL. (KOMLÓS, MAJOR és TUSNÁDY [15]). *Legyen ξ_1, ξ_2, \dots független, a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, és $\tilde{\alpha}_n(t) = n^{-1/2}(\tilde{G}_n(t) - t)$, $0 \leq t \leq 1$, ahol $\tilde{G}_n(t)$ a sorozat első n eleméhez tartozó empirikus eloszlásfüggvény. Ha az alapul vett valószínűségi mező „éleg bő”, akkor létezik Brown-hidak egy $\tilde{B}_n(\cdot)$ sorozata és egy $K(\cdot, \cdot)$ Kiefer-folyamat, melyre*

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\tilde{\alpha}_n(t) - \tilde{B}_n(t)| > n^{-1/2}(A_1 \log n + z)\right\} \leq A_2 \exp(-A_3 z)$$

és

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\tilde{\alpha}_n(t) - n^{-1/2}K(t, n)| > n^{-1/2}(A_4(\log n)^2 + z)\right\} \leq A_5 \exp(-A_6 z)$$

minden valós z -re, ahol A_1, \dots, A_6 abszolút konstansok.

TUSNÁDY [22] disszertációjában új bizonyítást adott az 5.1. Tételre, és bebizonyította, hogy a tétel igaz $A_1 = 100$, $A_2 = 10$, $A_3 = 1/50$ konstansokkal.

5.2. TÉTEL. (DVORETZKY, KIEFER és WOLFOWITZ [10]). *Ha $\tilde{\alpha}_n$ az 5.1. Tételben definiált empirikus folyamat, akkor minden $z \geq 0$ és $n = 1, 2, \dots$ esetén*

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\tilde{\alpha}_n(t)| > z\right\} \leq D \exp(-2z^2),$$

ahol D abszolút konstans.

Az eddigi legjobb korlátot a D konstansra DEVROYE és WISE [8] publikálták, megmutatván, hogy $D \leq 611$.

A gyakorlatban feltehetően különösebb veszély nélkül alkalmazhatjuk azt a jólismert sejtést, hogy $D = 2$.

A következő tétel egyenes következménye a [6] dolgozat 1.1.1 lemmájának, melyben a *Wiener-folyamat* növekményeire bizonyítottak egy ugyanilyen típusú egyenlőtlenséget.

5.3. TÉTEL. (CSÖRGŐ M. és RÉVÉSZ P. [6]). *Ha $0 < h < 1$ és $v, \eta > 0$, akkor*

$$P\left\{\sup_{0 \leq s \leq 1-h} \sup_{0 \leq t \leq h} |B(s+t) - B(s)| > vh^{1/2}\right\} \leq \left(8 + \frac{32}{\eta^2}\right) h^{-1} \exp(-v^2/(2+\eta)),$$

ahol $B(\cdot)$ egy *Brown-hidat* jelöl.

Dolgozatunkban $\|\mathbf{x}\|_k$ a k dimenziós maximum normát jelöli, tehát $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ esetén $\|\mathbf{x}\|_k = \max(|x_1|, \dots, |x_k|)$. Két mennyiség (s, t) minimumát a továbbiakban $s \wedge t = \min(s, t)$ jellel fogjuk jelölni. Tetszőleges $F(t)$ függvény esetén $F(t+)$ a függvény t pontban vett jobb oldali, $F(t-)$ pedig a bal oldali határértékét jelenti. Ha két sztochasztikus folyamat ξ, η véges dimenziós eloszlásai megegyeznek, akkor röviden azt írjuk, hogy $\xi \stackrel{\mathcal{D}}{=} \eta$. Két tetszőleges $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ valószínűségi változó sorozat esetén $\xi_n \stackrel{m.m.}{\leq} \eta_n$ azt jelenti, hogy majdnem minden

ω elemi eseményhez van olyan $n_0(\omega)$ küszöbszám, hogy ha $n \geq n_0$, akkor $\xi_n(\omega) \leq \eta_n(\omega)$. Ha $a(n) \geq 0$ számsorozat, akkor a $|\xi_n| \stackrel{m.m.}{\leq} O(a(n))$ jelölésen azt értjük; hogy létezik olyan C konstans, melyre $|\xi_n| \stackrel{m.m.}{\leq} Ca(n)$. Ahogyan eddig is a dolgozatban, a következőkben is az

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_{[a,b)} f(t) dg(t)$$

megállapodással élünk.

Az 5.1. tétel feltételei között szerepel, hogy az alapul vett valószínűségi mező elég bő. A továbbiakban minden approximációs tételt ilyen mezőn értünk.

A sztochasztikus konvergenciát a szokásos \xrightarrow{P} jelöli. A O jel mellett használjuk a o jelet, azaz $b(n) = o(a(n))$, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} |b(n)/a(n)| = 0$. $X(\cdot)$, $X_1(\cdot)$, $X_2(\cdot)$, ... sztochasztikus folyamatok esetén $X_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} X(\cdot)$ fogja jelölni a folyamatok gyenge konvergenciáját. Ez leggyakrabban $\mathcal{D}[a, b]$ alakú terekben fog történni, amely az $[a, b]$ (véges vagy végtelen) intervallumon értelmezett, másodfajú szakadással nem bíró függvények *Szkorohod terét* jelöli.

6. Cenzorált empirikus folyamatok approximációja

Az előző fejezetben bevezetett *Kaplan—Meier*-, illetve *kockázatmodellben* az X valószínűségi változó megfigyelése mellett azt is ismerjük, hogy ezt a minimumot melyik változó éri el. Ez azt jelenti, hogy az eseményteret az X^{01}, \dots, X^{0k} valószínűségi változók segítségével események uniójára bontottuk, és tudjuk, hogy valamelyik esemény bekövetkezése esetén mennyi az X értéke. A véletlen cenzorálás egy általánosabb modelljét a következő módon írhatjuk le. Legyen X valós értékű valószínűségi változó, $F(t) = P\{X < t\}$, $t \in \mathbb{R}^1$, eloszlásfüggvénnyel. Jelöljön k egy rögzített természetes számot, és tekintsük az eseménytér A^1, \dots, A^k eseményekre való felbontását, mely események egymást páronként sztochasztikusan kizárják,

$$(6.1) \quad P\{A^i \cap A^j\} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, k,$$

és együttes bekövetkezésük egy nulla valószínűségű eseménytől eltekintve a biztos esemény, $P\{A^1 \cup \dots \cup A^k\} = 1$. Vezessük be az $F^i(t) = P\{X < t, A^i\}$, $i = 1, \dots, k$ szub-eloszlásfüggvényeket. Ekkor $F(t) = \sum_{i=1}^k F^i(t)$. Ha a $t_0 \in \mathbb{R}^1$ pontban az F eloszlásfüggvény folytonos, akkor ebben a pontban mindegyik szub-eloszlásfüggvény is folytonos, mivel tetszőleges $\Delta t > 0$ szám esetén

$$0 \leq F^i(t_0 + \Delta t) - F^i(t_0) = P\{t_0 \leq X < t_0 + \Delta t, A^i\} \leq P\{t_0 \leq X < t_0 + \Delta t\}.$$

Tegyük fel, hogy az $\{X_n, A_n^1, \dots, A_n^k\}_{n=1}^\infty$ sorozat ugyanazon (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn van értelmezve, mint $\{X, A^1, \dots, A^k\}$ és elemei az $\{X, A^1, \dots, A^k\}$ sorozat független ismétlései. Jelölje F_n az X_1, \dots, X_n valószínűségi változók empirikus eloszlásfüggvényét

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \# \{m : 1 \leq m \leq n : X_m < t\},$$

és vezessük be az empirikus szub-eloszlásfüggvényeket

$$F_n^i(t) = \frac{1}{n} \# \{m: 1 \leq m \leq n: X_m < t \text{ és } A_m^i \text{ teljesül}\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Definiáljuk a következő vektor-vektor folyamatot:

$$\alpha_n(\mathbf{x}) = (\alpha_n^0(x_0), \alpha_n^1(x_1), \dots, \alpha_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_k),$$

ahol

$$\alpha_n^0(x_0) = n^{1/2}(F_n(x_0) - F(x_0)), \quad x_0 \in R^1$$

a közönséges empirikus folyamatot,

$$\alpha_n^i(x_i) = n^{1/2}(F_n^i(x_i) - F^i(x_i)), \quad x_i \in R^1, \quad i = 1, \dots, k$$

pedig a cenzorált empirikus folyamatokat jelöli.

A következő tétel, az $\alpha_n(\mathbf{x})$ folyamat erős approximációja, $k=1$ esetben (amikor is nincs cenzorálás) KOMLÓS, MAJOR és TUSNÁDY [15] ismert, az előbb 5.1. tételként idézett eredményét adja, így ennek az általánosítása.

6.1. TÉTEL (>[47]). *Tegyük fel, hogy F folytonos eloszlásfüggvény. Létezik Gauss-folyamatoknak olyan $k+1$ sorozata, $B_n^0, B_n^1, \dots, B_n^k$ ($n=1, 2, \dots$), hogy $\mathbf{B}_n(\mathbf{x}) = (B_n^0(x_0), B_n^1(x_1), \dots, B_n^k(x_k))$ esetén*

$$P\left\{ \sup_{\mathbf{x} \in R^{k+1}} \|\alpha_n(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_n(\mathbf{x})\|_{k+1} > n^{-1/2}(K_1 \log n + z) \right\} \leq K_2 \exp(-K_3 z)$$

minden valós z értékre fennáll, ahol $K_1 = (2k-1)A_1$, $K_2 = A_2$ és $K_3 = A_3/(2k-1)$ és A_1, A_2, A_3 az 5.1. tételben szereplő konstansok. Továbbá a $\mathbf{B}_n(\mathbf{x})$ $k+1$ dimenziós vektor-vektor folyamat kovariancia struktúrája megegyezik az $\alpha_n(\mathbf{x})$ folyamat kovariancia struktúrájával, azaz

$$EB_n^i(t) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

$$EB_n^0(t)B_n^0(s) = F(t) \wedge F(s) - F(t)F(s),$$

$i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j$ esetén

$$EB_n^i(t)B_n^i(s) = F^i(t) \wedge F^i(s) - F^i(t)F^i(s),$$

$$EB_n^i(t)B_n^j(s) = -F^i(t)F^j(s),$$

$$EB_n^i(t)B_n^0(s) = F^i(t) \wedge F^i(s) - F^i(t)F(s).$$

Bizonyítás. Vezessük be az $F^i(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} F^i(t)$, $i=1, \dots, k$ jelölést. Tetszőleges $i=1, \dots, k$ esetén jelölje $U_1^i, \dots, U_{n_i}^i$ azokat az X -re vonatkozó megfigyeléseket, ahol A^i is teljesült. Formálisan ez azt jelenti, hogy $U_1^i, \dots, U_{n_i}^i$ jelöli azokat a mintaelemeket az X_1, \dots, X_n mintából a megfigyelés sorrendjében, melyek az i -módon nem voltak cenzorálva. Ha δ_j^i az A_j^i esemény indikátorát jelöli, akkor $n_i = \sum_{j=1}^n \delta_j^i$. A (6.1) feltevés alapján $P\{n_1 + \dots + n_k = n\} = 1$. Az $F^i(U_1^i), \dots, F^i(U_{n_i}^i)$ valószínűségi változók függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $(0, F^i(\infty))$ intervallumon ($i=1, \dots, k$).

Tekintsük az 5.1. tételben definiált, független, a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók ξ_1, ξ_2, \dots sorozatát, és a megfelelően választott *Brown-hidak* $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots$ sorozatát. A \tilde{B}_n sorozatból készítsük el *Gauss-folyamatok*-nak a következő sorozatait:

$$\begin{aligned}\hat{B}_n^1(t) &= \tilde{B}_n(F^1(t)), \\ \hat{B}_n^2(t) &= \tilde{B}_n(F^2(t) + F^1(\infty)) - \tilde{B}_n(F^1(\infty)), \\ &\vdots \\ \hat{B}_n^k(t) &= \tilde{B}_n(F^k(t) + F^1(\infty) + \dots + F^{k-1}(\infty)) - \tilde{B}_n(F^1(\infty) + \dots + F^{k-1}(\infty)), \\ \hat{B}_n^0(t) &= \hat{B}_n^1(t) + \dots + \hat{B}_n^k(t),\end{aligned}$$

és ezek empirikus megfelelőit is:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_n^1(t) &= \tilde{\alpha}_n(F^1(t)), \\ \hat{\alpha}_n^2(t) &= \tilde{\alpha}_n(F^2(t) + F^1(\infty)) - \tilde{\alpha}_n(F^1(\infty)), \\ &\vdots \\ \hat{\alpha}_n^k(t) &= \tilde{\alpha}_n(F^k(t) + F^1(\infty) + \dots + F^{k-1}(\infty)) - \tilde{\alpha}_n(F^1(\infty) + \dots + F^{k-1}(\infty)), \\ \hat{\alpha}_n^0(t) &= \hat{\alpha}_n^1(t) + \dots + \hat{\alpha}_n^k(t).\end{aligned}$$

A most bevezetett folyamatok legyenek az $\hat{\alpha}_n(\mathbf{x}) = (\hat{\alpha}_n^0(x_0), \hat{\alpha}_n^1(x_1), \dots, \hat{\alpha}_n^k(x_k))$ és a $\hat{B}_n(\mathbf{x}) = (\hat{B}_n^0(x_0), \hat{B}_n^1(x_1), \dots, \hat{B}_n^k(x_k))$, $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_k)$, vektor-vektor folyamatok megfelelő komponensei.

Tekintsük az

$$\{\omega: \sup_{0 \leq t \leq 1} |\tilde{\alpha}_n(t) - \alpha_n(t)| \leq \mu = \tilde{B}n^{-1/2}(A_1 \log n + z)\}$$

eseményt, melynek valószínűsége legalább $1 - A_2 \exp(-A_3 z)$. Ha ez az esemény bekövetkezik, akkor minden $t \in R^1$ esetén

$$\begin{aligned}|\hat{\alpha}_n^1(t) - \hat{B}_n^1(t)| &= |\tilde{\alpha}_n(F^1(t)) - \tilde{B}_n(F^1(t))| \leq \mu, \\ |\hat{\alpha}_n^2(t) - \hat{B}_n^2(t)| &\leq |\tilde{\alpha}_n(F^2(t) + F^1(\infty)) - \tilde{B}_n(F^2(t) + F^1(\infty))| + \\ &\quad + |\tilde{\alpha}_n(F^1(\infty)) - \tilde{B}_n(F^1(\infty))| \leq 2\mu, \\ &\vdots \\ |\hat{\alpha}_n^k(t) - \hat{B}_n^k(t)| &\leq 2\mu, \\ |\hat{\alpha}_n^0(t) - \hat{B}_n^0(t)| &\leq |\hat{\alpha}_n^1(t) - \hat{B}_n^1(t)| + \dots + |\hat{\alpha}_n^k(t) - \hat{B}_n^k(t)| \leq (2k-1)\mu.\end{aligned}$$

A fentiek alapján

$$P\left\{ \sup_{-\infty < t < \infty} |\hat{\alpha}_n^i(t) - \hat{B}_n^i(t)| \leq (2k-1)\mu, \quad i = 0, 1, \dots, k \right\} \geq 1 - A_2 \exp(-A_3 z),$$

és így

$$\begin{aligned}P\left\{ \max_{0 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t < \infty} |\hat{\alpha}_n^i(t) - \hat{B}_n^i(t)| > n^{-1/2}((2k-1)A_1 \log n + z) \right\} &\leq \\ &\leq A_2 \exp(-A_3 z / (2k-1)).\end{aligned}$$

A definíciókból következik, hogy $\hat{B}_n^0, \dots, \hat{B}_n^k$ együttes kovarianciája megegyezik a tétel állításában szereplő B_n^0, \dots, B_n^k folyamatok együttes kovarianciájával. A második észrevételünk az, hogy ha $j_1 \leq n_1, \dots, j_k \leq n_k$, akkor

$$\{\xi_{j_1}, \xi_{j_2} - F^1(\infty), \dots, \xi_{j_k} - F^1(\infty) - \dots - F^{k-1}(\infty):$$

$$\xi_{j_1} \leq F^1(\infty), F^1(\infty) < \xi_{j_2} \leq F^1(\infty) + F^2(\infty), \dots, F^1(\infty) + \dots + F^{k-1}(\infty) <$$

$$< \xi_{j_k} \leq F^1(\infty) + \dots + F^k(\infty) = 1\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{F^1(U_{j_1}^1), \dots, F^k(U_{j_k}^k)\},$$

és így

$$\{\alpha_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in R^{k+1}\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{\hat{\alpha}_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in R^{k+1}\}.$$

A Gauss-folyamatok kovarianciájára tett megfigyelésünk alapján

$$\{\mathbf{B}_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in R^{k+1}\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{\hat{\mathbf{B}}_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in R^{k+1}\},$$

és ezzel a tétel állítását teljesen bebizonyítottuk.

Ha a bizonyítás során az 5.1. tétel másik állítását használjuk, akkor a következő állítást kapjuk:

6.2. TÉTEL (\supseteq [47]). *Tegyük fel, hogy az F eloszlásfüggvény folytonos. Ekkor definiálható egy $\mathbf{K}(\mathbf{x}, n) = (K^0(x_0, n), K^1(x_1, n), \dots, K^k(x_k, n))$ vektor-vektor Gauss-folyamat úgy, hogy*

$$P\left\{\sup_{\mathbf{x} \in R^{k+1}} \|\alpha_n(\mathbf{x}) - n^{-1/2}\mathbf{K}(\mathbf{x}, n)\|_{k+1} > n^{-1/2}(K_4 \log^2 n + z)\right\} \leq K_5 \exp(-K_6 z)$$

minden valós z esetén, ahol $K_4 = (2k-1)A_4$, $K_5 = A_5$ és $K_6 = A_6/(2k-1)$, A_4, A_5, A_6 az 5.1. tételben szereplő konstansok. Továbbá a $\mathbf{K}(\mathbf{x}, n)$ folyamat kovariancia struktúrájára fennáll, hogy

$$EK^i(t, n) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

$$EK^0(t, m)K^0(s, n) = \min(m \wedge n)(F(t)F(s) - F(t)F(s))$$

$i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$ esetén

$$EK^i(t, m)K^i(s, n) = (m \wedge n)(F^i(t) \wedge F^i(s) - F^i(t)F^i(s)),$$

$$EK^i(t, m)K^j(s, n) = (m \wedge n)(-F^i(t)F^j(s)),$$

$$EK^i(t, m)K^0(s, n) = (m \wedge n)(F^i(t) \wedge F^i(s) - F^i(t)F(s)).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám és írjunk $z = (\varepsilon/K_3) \log n$ -t a 6.1. tétel valószínűségi egyenlőtlenségébe. Az így nyert következmény

$$(6.2) \quad P\left\{\sup_{\mathbf{x} \in R^{k+1}} \|\alpha_n(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_n(\mathbf{x})\| > Cn^{-1/2} \log n\right\} \leq K_2 n^{-\varepsilon},$$

ahol $C = K_1 + \varepsilon/K_3$, és ezt fogjuk gyakran használni a továbbiakban.

A [103] dolgozatban megmutattuk, hogy a 6.1. és 6.2. tételek tetszőleges F eloszlásfüggvény mellett is igazak.

7. A hazard folyamat

A 3. fejezetben bevezetett hazard folyamatot a [47] dolgozatban használt módszerrel fogjuk vizsgálni, így a jelen szakasz teljesen erre a dolgozatra épül. Igyekezünk azonban a bizonyításokat egyszerűsíteni, és a rátákat javítani. Így a [47] dolgozat 4.1. lemmájára is új bizonyítást adunk. Vezessük be az

$$a(x) = x(\log x - 1) + 1$$

függvényt és az F eloszlásfüggvény tartójának felső határára a

$$T_F = \inf \{t: F(t) = 1\}$$

jelölést. Legyen T_n egy tetszőleges számsorozat, mely eleget tesz a következő feltételeknek

$$(7.1) \quad T_n < T_F \quad \text{és} \quad 1 - F(T_n) \cong \frac{\varepsilon}{a(1/\delta)} \frac{\log n}{n},$$

ahol $\delta > 1$ tetszőleges szám.

7.1. LEMMA ($>$ [47]). *Legyen F folytonos eloszlásfüggvény. Ha T_n teljesíti a (7.1) feltételt, akkor*

$$P\left\{ \sup_{-\infty < t \leq T_n} (1 - F(t)) / (1 - F_n(t)) > \delta \right\} \cong n^{-\varepsilon}$$

és

$$P\left\{ \sup_{-\infty < t \leq T_n} (1 - F_n(t))^{-1} > \delta (1 - F(T_n))^{-1} \right\} \cong n^{-\varepsilon}.$$

Bizonyítás. Fennáll

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{-\infty < t \leq T_n} \frac{1 - F(T_n)}{1 - F_n(t)} > \delta \right\} &\cong P\left\{ \sup_{-\infty < t \leq T_n} \frac{1 - F(t)}{1 - F_n(t)} > \delta \right\} = \\ &= P\left\{ \sup_{0 \leq u \leq F(T_n)} \frac{1 - u}{1 - \Gamma_n(u)} > \delta \right\}, \end{aligned}$$

ahol $\Gamma_n(u) = \frac{1}{n} \# \{1 \leq k \leq n: F(X_k) < t\}$. Az F függvény folytonossága miatt $F(X_k)$ a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, így WELLNER [23] 1. lemmájának alkalmazásával

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{0 \leq u \leq F(T_n)} \frac{1 - u}{1 - \Gamma_n(u)} > \delta \right\} &= P\left\{ \sup_{1 - F(T_n) \leq u \leq 1} \frac{u}{\Gamma_n(u)} > \delta \right\} \cong \\ &\cong \exp\{-n(1 - F(T_n))a(1/\delta)\} = n^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Példaképpen megemlítjük, hogy $1/a(\frac{1}{2}) = 6,67$, $1/a(1/1,005) = 8100$.

Vezessük be a következő Gauss-folyamat-sorozatokat

$$(7.2) \quad G_n^i(t) = \int_{-\infty}^t B_n^0(s)(1-F(s))^{-2} dF^i(s) + B_n^i(t)(1-F(t))^{-1} - \\ - \int_{-\infty}^t B_n^i(s)(1-F(s))^{-2} dF(s), \quad i = 1, \dots, k.$$

A 6.1. tételben szereplő kovariancia struktúra felhasználásával igazolható ([47], [25]), hogy

$$(7.3) \quad EG_n^i(t) = 0, \\ EG_n^i(t)G_n^i(s) = d^i(t \wedge s) = \int_{-\infty}^{t \wedge s} (1-F(u))^{-2} dF^i(u), \\ EG_n^i(t)G_n^j(s) = 0, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j.$$

Az utóbbi reláció igen fontos, hiszen azt jelenti, hogy a G_n^1, \dots, G_n^k folyamatok minden n -re függetlenek.

Vezessük be a következő rátsorozatot:

$$r_1(n) = r_{11}(n) + \dots + r_{17}(n),$$

ahol $b_n = (1-F(T_n))^{-1}$, és

$$r_{11}(n) = 3Cn^{-1/2}b_n \log n, \\ r_{12}(n) = \left(2C + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon\delta}{2}\right)n^{-1/2}b_n^2 \log n, \\ r_{13}(n) = \frac{\varepsilon\delta}{2}n^{-1/2}b_n^3 \log n, \\ r_{14}(n) = 2(3\varepsilon)^{1/2}n^{-1/3}b_n^2(\log n)^{1/2}, \\ r_{15}(n) = (2\varepsilon)^{1/2}Cn^{-1/3}b_n^2(\log n)^{3/2}, \\ r_{16}(n) = \varepsilon n^{-1/2}b_n^3 \log n, \\ r_{17}(n) = \left(\varepsilon + \left(\frac{4}{3}\varepsilon + \varepsilon^2\right)^{1/2}\right)n^{-1/2}b_n^2 \log n.$$

Vezessük végül be a

$$\mathbf{G}_n(\mathbf{x}) = (G_n^1(x_1), \dots, G_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

vektor-vektor folyamatot.

7.2. TÉTEL ($>$ [47]). Legyen F folytonos eloszlásfüggvény. Ha T_n kielégíti a (7.1) feltételt, akkor

$$P\left\{\sup_{\mathbf{x} \in (-\infty, T_n]^k} \|\mathbf{H}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{G}_n(\mathbf{x})\|_k > r_1(n)\right\} \leq C_1 n^{-\varepsilon},$$

ahol $C_1 = K_2 + D + 3 + k(42 + D)$.

Bizonyítás. A hazárdfolyamatot bontsuk fel BRESLOW és CROWLEY [41] cikkéből ismert módon. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} H_n^i(t) - G_n^i(t) &= \int_{-\infty}^t \frac{\alpha_n^0(s) - B_n^0(s)}{(1-F(s))^2} dF^i(s) + \frac{\alpha_n^i(t) - B_n^i(t)}{1-F(t)} - \\ &- \int_{-\infty}^t \frac{\alpha_n^i(s) - B_n^i(s)}{(1-F(s))^2} dF(s) + n^{-1/2} \int_{-\infty}^t \frac{(\alpha_n^0(s))^2}{(1-F(s))^2(1-F_n(s))} dF^i(s) + \\ &+ n^{-1/2} \int_{-\infty}^t \frac{\alpha_n^0(s)}{(1-F(s))(1-F_n(s))} d\alpha_n^i(s). \end{aligned}$$

Az utolsó tagot a következő módon alakítjuk át:

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \int_{-\infty}^t \frac{\alpha_n^0(s)}{(1-F(s))(1-F_n(s))} d\alpha_n^i(s) &= n^{-1/2} \int_{-\infty}^t \frac{(\alpha_n^0(s))^2}{(1-F_n(s))(1-F(s))^2} dF^i(s) + \\ &+ n^{-1/2} \int_{-\infty}^t \frac{(\alpha_n^0(s))^2}{(1-F(s))^2(1-F_n(s))} dF_n^i(s) + n^{-1/2} \frac{\alpha_n^0(t)\alpha_n^i(t)}{(1-F(t))^2} + \\ &+ n^{-1/2} \int_{-\infty}^t (B_n^i(s) - \alpha_n^i(s)) d \frac{\alpha_n^0(s)}{(1-F(s))^2} - n^{-1/2} \int_{-\infty}^t B_n^i(s) d \frac{\alpha_n^0(s)}{(1-F(s))^2}. \end{aligned}$$

Vezessük be a következő eseményeket

$$\begin{aligned} A^* &= \left\{ \omega : \sup_{\mathbf{x} \in R^{k+1}} \|\alpha_n(\mathbf{x}) - B_n(\mathbf{x})\|_{k+1} \leq Cn^{-1/2} \log n \right\}, \\ A^{**} &= \left\{ \omega : \sup_{-\infty < t < \infty} |\alpha_n^0(t)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \log n \right) \right\}. \end{aligned}$$

A (6.2) egyenlőtlenség alapján $P(\overline{A^*}) \leq A_2 n^{-\varepsilon}$, illetve az 5.2. tétel alapján $P(\overline{A^{**}}) \leq Dn^{-\varepsilon}$. Integrálással könnyen igazolható, hogy

$$(7.4) \quad \int_{-\infty}^t (1-F(s))^{-\alpha} dF^i(s) \leq \frac{1}{\alpha-1} (1-F(t))^{1-\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

így minden A^* -beli elemi eseményen

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} \left| \int_{-\infty}^t \frac{\alpha_n^0(s) - B_n^0(s)}{(1-F(s))^2} dF^i(s) \right| &\leq Cn^{-1/2} b_n \log n, \\ \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} \left| \frac{\alpha_n^i(t) - B_n^i(t)}{1-F(t)} \right| &\leq Cn^{-1/2} b_n \log n, \\ \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} \left| \int_{-\infty}^t \frac{\alpha_n^i(s) - B_n^i(s)}{(1-F(s))^2} dF(s) \right| &\leq Cn^{-1/2} b_n \log n, \\ \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} n^{-1/2} \left| \int_{-\infty}^t (B_n^i(s) - \alpha_n^i(s)) d \frac{\alpha_n^0(s)}{(1-F(s))^2} \right| &\leq 2Cn^{-1/2} b_n^2 \log n. \end{aligned}$$

A 7.1. lemma alkalmazásával

$$P\left\{A^{**}, 2n^{-1/2} \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} \left| \int_{-\infty}^t \frac{(\alpha_n^0(s))^2}{(1-F(s))^2(1-F_n(s))} dF^i(s) \right| > \frac{\varepsilon\delta}{2} n^{-1/2} b_n^2 \log n, \right. \\ \left. n^{-1/2} \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} \left| \int_{-\infty}^t \frac{(\alpha_n^0(s))^2}{(1-F(s))^2(1-F_n(s))} dF_n^i(s) \right| > \frac{\varepsilon\delta}{2} n^{-1/2} b_n^3 \log n \right\} \leq n^{-\varepsilon}.$$

Az eddigi eredményeket foglaljuk össze egy egyenlőtlenségbe:

$$P\left\{ \sup_{x \in (-\infty, T_n]^k} \|H_n(x) - G_n(x)\|_k > r_1(n) \right\} \leq A_2 n^{-\varepsilon} + D n^{-\varepsilon} + n^{-\varepsilon} + \\ + P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t < \infty} |\alpha_n^i(t)| > \left(\frac{\varepsilon}{2} \log n\right)^{1/2} \right\} + \\ + P\left\{ A^*, A^{**}, \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} n^{-1/2} \left| \int_{-\infty}^t B_n^i(s) d \frac{\alpha_n^0(s)}{(1-F(s))^2} \right| > r_{14}(n) + \dots + r_{17}(n) \right\}.$$

Ha visszaemlékezünk a 6.1. tétel bizonyítására, akkor látjuk, hogy a cenzorált empirikus folyamat szuprémuma nem lehet nagyobb a közönséges empirikus folyamat szuprémumánál, és így

$$P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t < \infty} |\alpha_n^i(t)| > \left(\frac{\varepsilon}{2} \log n\right)^{1/2} \right\} \leq k D n^{-\varepsilon}.$$

A B_n^i folyamatot egy tiszta ugró folyamattal fogjuk közelíteni. Vágjuk fel a számegeyenest $[n^{2/3}]$ részre (\cdot az egészrész függvényt jelöli) a

$$t_j = \inf \{s: F(s) \cong j/[n^{2/3}]\}, \quad j = 0, 1, \dots, [n^{2/3}] - 1$$

pontokkal. Az $F(t) - F^i(t) = P\{X < t, A^2 \cup \dots \cup A^k\}$ nem-csökkenő függvény, ezért

$$F^i(t_{j+1}) - F^i(t_j) \leq F(t_{j+1}) - F(t_j) \leq 1/[n^{2/3}].$$

Definiáljuk \bar{B}_n^i -t a következő módon:

$$\bar{B}_n^i(t) = B_n^i(t_j), \quad t_j \leq t < t_{j+1}.$$

A 6.1. tételben megadott kovariancia miatt

$$(7.5) \quad \{B_n^i(t), -\infty < t < \infty\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{B(F^i(u)), -\infty < u < \infty\},$$

ahol B egy Brown-féle hidat jelöl. Alkalmazzuk az 5.3. tételt az $\eta=1$ választással.

$$P\left\{ \sup_{-\infty < t < \infty} |B_n^i(t) - \bar{B}_n^i(t)| > (3\varepsilon)^{1/2} n^{-1/3} (\log n)^{1/2} \right\} = \\ = P\left\{ \max_j \sup_{0 \leq t \leq t_{j+1} - t_j} |B_n^i(t_j) - B_n^i(t_j + t)| > (3\varepsilon)^{1/2} n^{-1/3} (\log n)^{1/2} \right\} \leq \\ \leq P\left\{ \sup_{0 \leq s \leq 1 - [n^{2/3}]^{-1}} \sup_{0 \leq t \leq [n^{2/3}]^{-1}} |B(s) - B(s+t)| > (3\varepsilon)^{1/2} n^{-1/3} (\log n)^{1/2} \right\} \leq 40n^{-\varepsilon}.$$

A (7.5) (eloszlásbani) egyenlőség alapján

$$P\left\{\sup_{-\infty < t < \infty} |\bar{B}_n^i(t)| > z\right\} \leq 2 \exp(-2z^2).$$

Az $\int_{-\infty}^t B_n^i(s) d \frac{\alpha_n^0(s)}{(1-F(s))^2}$ integrálban B_n^i -t cseréljük ki a tiszta ugró folyamatra. Így az új integrált összegként tudjuk felírni:

$$P\left\{A^*, A^{**}, \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} n^{-1/2} \left| \int_{-\infty}^t B_n^i(s) d \frac{\alpha_n^0(s)}{(1-F(s))^2} \right| > r_{14}(n) + \dots + r_{17}(n)\right\} \leq \\ \leq (40k + 2k)n^{-\varepsilon} + \\ + P\left\{A^*, A^{**}, n^{-1/2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \log n\right)^{1/2} \sum_j \left| \frac{\alpha_n^0(t_{j+1})}{(1-F(t_{j+1}))^2} - \frac{\alpha_n^0(t_j)}{(1-F(t_j))^2} \right| > r_{15}(n) + \dots + r_{17}(n)\right\}.$$

A^*, A^{**} definícióját felhasználva a következő átalakításokat célszerű elvégezni:

$$P\left\{A^*, A^{**}, n^{-1/2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \log n\right)^{1/2} \sum_j \left| \frac{\alpha_n^0(t_{j+1})}{(1-F(t_{j+1}))^2} - \frac{\alpha_n^0(t_j)}{(1-F(t_j))^2} \right| > r_{15}(n) + r_{16}(n) + r_{17}(n)\right\} \leq P\left\{A^*, n^{-1/2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \log n\right)^{1/2} 2b_n^2 \sum_j |\alpha_n^0(t_j) - B_n^0(t_j)| > r_{15}(n) + r_{16}(n) + r_{17}(n)\right\} \\ > (2\varepsilon)^{1/2} C n^{-1/3} b_n^2 (\log n)^{3/2} \left\} + P\left\{n^{-1/2} \frac{\varepsilon}{2} \log n \sum_j ((1-F(t_j))^{-2} - (1-F(t_{j+1}))^{-2}) > r_{15}(n) + r_{16}(n) + r_{17}(n)\right\} \\ > \varepsilon n^{-1/2} b_n^3 \log n \left\} + P\left\{\left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n\right)^{1/2} \sum_j |B_n^0(t_{j+1}) - B_n^0(t_j)| > r_{17}(n)\right\},$$

mivel így az első két valószínűség az egyenlőtlenség jobb oldalán nullával egyenlő. Az 5. fejezet elején említettük, hogy a *Brown-féle híd*nek $W(t) - tW(1)$ alakú eloszlásbani reprezentációja létezik, ahol $W(\cdot)$ *Wiener-folyamat*. Így

$$P\left\{\left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n\right)^{1/2} \sum_j |B_n^0(t_{j+1}) - B_n^0(t_j)| > r_{17}(n)\right\} \leq \\ \leq P\left\{\sum_{j=1}^{\lfloor n^{2/3} \rfloor} |N_j| > \left(\frac{4}{3} + \varepsilon\right)^{1/2} (\log n)^{1/2}\right\} + P\{|N| > (2\varepsilon \log n)^{1/2}\} \leq 2n^{-\varepsilon},$$

ahol N standard normális, az N_j -k pedig független normális eloszlású valószínűségi változók, melyekre $EN_j = 0$ és $EN_j^2 \leq 1/\lfloor n^{2/3} \rfloor$. Az eddigi becslések összegyűjtésével a tétel már adódik.

A most bebizonyított tételből megkapjuk AALEN [25], valamint BRESLOW és CROWLEY [41] eredményét is.

7.3. KÖVETKEZMÉNY (AALEN [25], BRESLOW és CROWLEY [41]). *Legyen F folytonos eloszlásfüggvény és $F(T) < 1$. Ekkor a $\mathcal{D}(-\infty, T]$ térben*

$$H_n^i(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{D}} G_1^i(\cdot).$$

A gyenge konvergenciából következik, hogy ha ψ a $(-\infty, T]$ -n értelmezett függvényeken definiált $\mathcal{D}(-\infty, T]$ térben folytonos funkcionál, akkor

$$P\{\psi(H_n^i) < t\} \rightarrow P\{\psi(G_1^i) < t\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

sőt, ha ψ eleget tesz néhány regularitási feltételnek (lásd [15], [7]), akkor a 7.2. tétel alapján a konvergencia sebességére is tudunk becslést adni. Nevezetesen

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |P\{\psi(H_n^i) < t\} - P\{\psi(G_1^i) < t\}| = O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2}).$$

Az O szimbólumban a konstans is ki tudnánk számolni. Ez az $(1 - F(T))^{-1}$ konstanstól és a ψ funkcionáltól függ.

A G_1^i folyamatok funkcionáljainak (mint pl. a szuprémum, négyzetintegrál) eloszlása ismeretlen. A 9. fejezetben a hazard (és a következő fejezetben tárgyalandó szorzatbecslés) folyamat olyan transzformációit fogjuk tárgyalni, melyeknél az adódó új határfolyamatok bizonyos vagy akár minden funkcionáljának eloszlása nem függ az F, F^1, \dots, F^k függvényektől.

A 7.2. tétel bizonyításánál a 6.1. tételt használtuk. Analóg állítást kapunk, ha helyette a 6.2. tételt alkalmazzuk. Vezessük be a

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, n) = (G^1(x_1, n), \dots, G^k(x_k, n)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$$

folyamatot, amely a $\mathbf{G}_n(\mathbf{x})$ folyamattól abban tér el, hogy a $B_n^i(\cdot)$ folyamat helyébe mindenütt $K^i(\cdot, n)$ -t írunk, $i=0, 1, \dots, k$. Természetesen a rátát is módosítani kell, $r_1(n)$ definíciójában C helyébe írjunk mindenütt $(K_4 + \varepsilon/K_6)$ -ot, az így kapott sorozatot jelöljük $\hat{r}_1(n)$ -nel.

7.4. TÉTEL (>[47]). *Legyen F folytonos eloszlásfüggvény. Ha T_n kielégíti a (7.1) feltételt, akkor*

$$P\left\{ \sup_{\mathbf{x} \in (-\infty, T_n)^k} \|\mathbf{H}_n(\mathbf{x}) - n^{-1/2} \mathbf{G}(\mathbf{x}, n)\|_k > \hat{r}_1(n) \log n \right\} \leq \hat{C}_1 n^{-\varepsilon},$$

ahol $\hat{C}_1 = K_5 + D + 3 + k(42 + D)$.

Bizonyítás. $\mathbf{G}(\mathbf{x}, n)$ definíciója alapján minden n pozitív egész számra teljesül

$$\{n^{-1/2} \mathbf{G}(\mathbf{x}, n), \mathbf{x} \in R^k\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{\mathbf{G}_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in R^k\}.$$

Így a 7.4. tétel bizonyítása csak annyiban különbözik a 7.2. tételétől, hogy a 6.1. tétel helyett mindenütt a 6.2. tételt kell használni.

Az előző fejezet végén megemlítettük, hogy a 6.1. és 6.2. tételek tetszőleges F eloszlásfüggvény esetén is igazak. Ennek alapján bebizonyítottuk [103]-ban, hogy a 7.2. és 7.4. tételek feltételei közül elhagyható F folytonossága, és a rátát is csak kicsit kell módosítani, nevezetesen csak a konstansok változnak benne.

Néhány megjegyzést szeretnénk fűzni a hazardfüggvény értelmezéséhez. A kockázatmodellben

$$A^i = \{\omega: X(\omega) = X^i(\omega)\},$$

tehát a (6.1) feltétel azt jelenti, hogy a beteg halálát egy betegség okozta, illetve a gép-leállás mindig egyetlen okra vezethető vissza. Ezt a gondolatot más módon is megfogalmazhatjuk. Jelölje X egy gép meghibásodásának az idejét, A^1, \dots, A^k pedig

a k lehetséges okot, ami miatt a meghibásodás bekövetkezhet. Tegyük fel, hogy A^i deriválható, és deriváltja legyen λ^i . Ekkor

$$(\Delta t)\lambda^i(t) \approx P\{t < X \leq t + \Delta t, A^i | X > t\},$$

tehát $\Delta t\lambda^i(t)$ az a feltételes valószínűség, hogy a gép még működött a t időpontban, majd a $(t, t + \Delta t]$ időintervallumban az i -edik ok miatt hibásodott meg. Természetes most már az a kívánság, hogy a (6.1) feltételt el kell hagyni, tehát a rendszer leállásakor egyszerre több ok is bekövetkezhet. Ezt az általánosítást könnyű visszavezetni a már vizsgált esetre. Az A^1, \dots, A^k eseményrendszer helyett áttérhetünk a A^{*1}, \dots, A^{*m} eseményekre, melyek már sztochasztikusan kizárják egymást, és bármely A^i előáll a $*$ -gal jelölt rendszer bizonyos elemeinek az egyesítéseként. A hazard függvény additív, így A^i az A^{*1}, \dots, A^{*m} -hez definiált, megfelelő hazard függvények összege. A 7.2. tétel azonban alkalmazható a diszjunkt A^{*1}, \dots, A^{*m} eseményekre. Ezzel bebizonyítottuk (rátával) H_n gyenge konvergenciáját, de a limeszfolyamat G_n komponensei már nem függetlenek, hanem

$$EG_n^i(t)G_n^j(s) = \int_{-\infty}^{t \wedge s} (1 - F(u))^{-2} dP\{X < u, A^i \cap A^j\}.$$

A 16. fejezetben még visszatérünk a most tárgyalt általánosabb esetre és további kapcsolatot keresünk a kockázatmodellel.

8. A szorzatbecslés folyamata

A (2.4) képlet és az előző fejezetben bebizonyított tétel alapján természetes az a sejtésünk, hogy folytonos F^{0i} eloszlásfüggvény esetén $\exp(-A_n^i(t))$ az $1 - F^{0i}(t)$ függvényt fogja becsülni. Ha a szorzatbecslés \hat{F}_n^{0i} szintén F^{0i} becslése, akkor a két empirikus mennyiség különbsége is kicsi kell legyen. Ezt a heurisztikus gondolatot pontosította BRESLOW és CROWLEY egy lemmája.

8.1. LEMMA (BRESLOW, CROWLEY [41]). *Legyen F folytonos eloszlásfüggvény, ekkor*

$$0 < -\log(1 - \hat{F}_n^{0i}(t)) - A_n^i(t) < \frac{1}{n} F_n(t)(1 - F_n(t))^{-1}$$

1 valószínűséggel teljesül minden n -re.

Az $L_n(x)$ folyamat vizsgálatát a hazard folyamat approximációjára fogjuk visszavezetni. A bizonyítás során szükségünk lesz a hazard folyamat szuprémumának becslésére.

8.2. LEMMA. ($>$ [47]). *Legyen F folytonos eloszlásfüggvény. Ha T_n kielégíti a (7.1) feltételt, akkor*

$$P\left\{\max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} |A_n^i(t) - A^i(t)| > 3\delta b_n \left(\frac{\epsilon}{2n} \log n\right)^{1/2}\right\} \leq (1 + D + kD)n^{-\epsilon}.$$

Bizonyítás. A 7.2. tétel bizonyításánál látott módon parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^t (1 - F_n(s))^{-1} dF_n^i(s) - \int_{-\infty}^t (1 - F(s))^{-1} dF^i(s) = \int_{-\infty}^t \frac{F_n(s) - F(s)}{(1 - F_n(s))(1 - F(s))} dF^i(s) + \frac{F_n^i(t) - F^i(t)}{1 - F_n(t)} - \int_{-\infty}^t (F_n^i(s+) - F^i(s)) d \frac{1}{1 - F_n(s)}.$$

Az állítás ezekután már következik a 7.1. lemmából és az 5.2. tételből.

Vezessük be a következő sorozatot

$$r_2(n) = r_1(n) + \delta n^{-1/2} b_n + \frac{9}{4} \delta^2 \varepsilon n^{-1/2} b_n^2 (\log n) \exp \left(3\delta b_n \left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n \right)^{1/2} \right),$$

és a szorzatbecslés folyamat határfolyamatának következő kópiáit:

$$Q_n^i(t) = -\exp(-A^i(t)) G_n^i(t),$$

$$Q_n(\mathbf{x}) = (Q_n^1(x_1), \dots, Q_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k).$$

Az előző fejezetben kiszámítottuk G_n kovarianciáját. Eszerint folytonos F eloszlásfüggvény esetén Q_n komponensei függetlenek, várható értékük 0 és

$$(8.1) \quad EQ_n^i(t) Q_n^i(s) = \exp(-A^i(t) - A^i(s)) d^i(t \wedge s).$$

8.3. TÉTEL (>[47]). *Legyen F folytonos eloszlásfüggvény. Ha T_n kielégíti a (7.1) feltételt, akkor*

$$P \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in (-\infty, T_n]^k} \|L_n(\mathbf{x}) - Q_n(\mathbf{x})\|_k > r_2(n) \right\} \leq C_2 n^{-\varepsilon},$$

ahol $C_2 = K_2 + 5 + 2D + k(42 + 2D)$.

Bizonyítás. A 8.1. lemmában szereplő egyenlőtlenséget a *Lagrange-féle középértéktétel* alkalmazásával

$$(8.2) \quad 0 < 1 - \hat{F}_n^{0i}(t) - \exp(-A_n^i(t)) < \frac{1}{n} F_n(t) (1 - F_n(t))^{-1}$$

alakba írhatjuk. A szorzatbecslés folyamatban \hat{F}_n^{0i} helyére írjunk $\exp(-A_n^i(t))$ -t, majd alkalmazzuk a kéttagú *Taylor-formulát*. Azt kapjuk, hogy

$$(8.3) \quad \hat{F}_n^{0i}(t) - F^{0i}(t) = \exp(-A_n^i(t)) - (1 - \hat{F}_n^{0i}(t)) - \exp(-A^i(t)) (A_n^i(t) - A^i(t)) - \frac{1}{2} \exp(-\xi^i(t)) (A_n^i(t) - A^i(t))^2,$$

ahol $\xi^i(t)$ a $A^i(t)$ és a $A_n^i(t)$ közé eső szám. A felbontás utolsó tagját felülről becsljük:

$$\frac{1}{2} \exp(-\xi^i(t)) (A_n^i(t) - A^i(t))^2 \leq \frac{1}{2} \exp(-A^i(t)) (A_n^i(t) - A^i(t))^2 \exp(|A_n^i(t) - A^i(t)|).$$

A tétel állítása ezután már egyszerű következménye a (7.4) egyenlőtlenségnek, a 8.1. és 8.2. lemmáknak, valamint a 7.2. tételnek, mivel $\exp(-A^i(t)) < 1$.

A tétel bizonyítása során nem használtuk ki, hogy a hazárdfolyamat $\exp(-A^i(t))$ -vel van megszorozva, mivel olyan rátát kerestünk, mely nem függ i -től. Ha csak az egyes komponensek eltéréseinek a nagyságát akarjuk megbecsülni, az eredmény élesíthető. A tételt a *Kaplan—Meier-modellre* mondjuk csak ki, melyben egyetlen függvényt akarunk becsülni, de ez az alkalmazások miatt igen fontos. Az $r_2(n)$ sorozat helyett tekintsük az

$$\begin{aligned} r_3(n) = & 9(A_1 + \varepsilon/A_3)n^{-1/2}b_n^* \log n + \\ & + \left(\left(\frac{4}{3} \varepsilon + \varepsilon^2 \right)^{1/2} + 6A_1 + 6\varepsilon/A_3 + \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{\varepsilon\delta}{2} \right) n^{-1/2}b_n^*b_n \log n + \\ & + \left(\frac{\varepsilon\delta}{2} + \varepsilon \right) n^{-1/2}b_n^*b_n^2 \log n + (2\varepsilon)^{1/2}n^{-1/3}b_n^*b_n (\log n)^{3/2} + \\ & + (3\varepsilon)^{1/2}n^{-1/3}b_n^*b_n (\log n)^{1/2} + \frac{9}{4} \delta^2 \varepsilon n^{-1/2}b_n^*b_n (\log n) \exp \left(3\delta b_n \left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n \right)^{1/2} \right) + \\ & + \delta n^{-1/2}b_n \end{aligned}$$

sorozatot, ahol $b_n^* = (1 - F^{02}(T_n))^{-1}$.

8.4. TÉTEL ($>$ [47]). *Tegyük fel, hogy F^{01} és F^{02} folytonos eloszlásfüggvények. Ha T_n kielégíti a (7.1) feltételt, akkor a Kaplan—Meier-modellben*

$$P\left\{ \sup_{-\infty < t \leq T_n} |L_n^1(t) - Q_n^1(t)| > r_3(n) \right\} \leq C_3 n^{-\varepsilon},$$

ahol $C_3 = A_2 + 87 + 6D$.

Bizonyítás. A (8.3) átalakítást használjuk, így a 7.2. tétel bizonyításánál alkalmazott *Breslow—Crowley-féle felbontás* mindegyik tagja $1 - F^{01}(t)$ -vel szorozódik. Az átalakítások során így egyszerűsíthetünk $1 - F^{01}(t)$ -vel, mivel a *Kaplan—Meier esetben*

$$1 - F(t) = (1 - F^{01}(t))(1 - F^{02}(t)).$$

Az előző fejezetben említett ψ funkcionálokra ismét megfogalmazhatjuk a megfelelő határeloszlástételeket:

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |P\{\psi(L_n^i) < t\} - P\{\psi(Q_n^i) < t\}| = O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2}).$$

A 11. fejezetben szükségünk lesz a következő tételre. A 7.4. tételnél látottak szerint vezessük be a

$$Q(\mathbf{x}, n) = ((1 - F^{01}(x_1))H^1(x_1, n), \dots, (1 - F^{0k}(x_k))H^k(x_k, n)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$$

folyamatot, valamint az $\hat{r}_2(n)$ függvényt, amely $r_2(n)$ -től csak annyiban különbözik, hogy C helyett mindenütt $K_4 + \varepsilon/K_6$ áll. A hazárd folyamatra vonatkozó analóg 7.4. tételből az előzőekhez hasonlóan vezethető le a következő eredmény.

8.5. TÉTEL (\Rightarrow [47]). Legyen F folytonos eloszlásfüggvény. Ha T_n kielégíti a (7.1) feltételt, akkor

$$P\left\{\sup_{x \in (-\infty, T_n]^k} \|L_n(x) - n^{-1/2}Q(x, n)\|_k > \hat{r}_2(n) \log n\right\} \cong \hat{C}_2 n^{-\varepsilon},$$

ahol $\hat{C}_2 = K_5 + 5 + 2D + k(42 + 2D)$.

A [103] dolgozatban élesítettük a 8.4. tétel állítását. Megmutattuk, hogy elegendő F^{01} folytonosságát feltenni F folytonossága helyett, és az így adódó ráta-sorozat se romlik lényegesen. Ha a 8.5. tételt csak a *Kaplan—Meier-modell* esetére mondjuk ki, itt is elegendő csak F^{01} folytonosságát feltenni.

9. A hazard- és a szorzatbecslés folyamat transzformációi

A fejezetben a hazard- és szorzatbecslés folyamatok olyan transzformációit tárgyaljuk, melyeknél a limeszfolyamat a *standard Wiener-folyamat*, illetve a *Brown-híd* lesz. Ezek nevezetes funkcionáljainak az eloszlása ismert. Vezessük be a Φ_1, Φ_2 jelölést a *Wiener-folyamat* szuprémumának és négyzetintegráljának az eloszlására.

$$(9.1) \quad \Phi_1(x) = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |W(t)| < x\right\} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left(-\frac{\pi^2(2k+1)^2}{8x^2}\right),$$

$$(9.2) \quad \Phi_2(x) = P\left\{\int_0^1 W^2(t) dt < x\right\} = 2^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} \left\{1 - \Phi\left(\frac{4k+1}{2x^{1/2}}\right)\right\},$$

ahol $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ *Wiener-folyamat*, Φ pedig a standard normális eloszlásfüggvény. A (9.1) formula bizonyítása FELLER [11] 330. oldalán található, (9.2)-t pedig CAMERON és MARTIN [4] bizonyította be először. A Φ_1, Φ_2 függvényekről készített táblázatok az [58], illetve az [54] dolgozatokban publikáltuk. Ha $\{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$ *Brown-híd*, akkor

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \Phi_3(x, T) &= P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |B(t)| < x\right\} = \\ &= \Phi(x(T(1-T))^{1/2}) - 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 x^2} \left[\Phi\left(x \left(\frac{1-T}{T}\right)^{1/2} \left(2k - \frac{1}{1-T}\right)\right) - \right. \\ &\quad \left. - \Phi\left(x \left(\frac{1-T}{T}\right)^{1/2} \left(2k + \frac{1}{1-T}\right)\right) \right], \end{aligned}$$

$$(9.4) \quad \Phi_4(x, T) = P\left\{\int_0^T B^2(t) dt < x\right\},$$

ahol $0 < T < 1$. Gyakorlati fontosságuk miatt a $\Phi_3(x, 1), \Phi_4(x, 1)$ függvények táblázatai majdnem minden könyvben megtalálhatóak, így [18a] és [2]-ben is. A $\Phi_3(x, T)$ függvényről készített táblázatot, különböző T értékek esetére tartalmaz KOZIOŁ és BYAR [116] dolgozata. További táblázat található [115]-ben.

A következő jólismert lemma kapcsolatot teremt a *Wiener-folyamat* és a *Brown-híd* között. A lemma második része (a *Wiener-folyamat* skála transzformációja) választ ad arra, hogy miért elegendő mindig (9.1) és (9.2) ismerete, míg a *Brown-híd* esetén nem tudjuk visszavezetni a megfelelő funkcionálokat a $[0, 1]$ intervallumra.

9.1. LEMMA (DOOB). Legyen $\{W(t), 0 \leq t < \infty\}$ *Wiener-folyamat*, ekkor

$$\left\{ (1-t)W\left(\frac{t}{1-t}\right), 0 \leq t \leq 1 \right\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$$

és

$$\{(T)^{-1/2}W(t), 0 \leq t \leq T\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{W(t), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Sokszor lesz szükségünk a d^i függvények empirikus megfelelőjére. Ez

$$d_n^i(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F_n(s))^{-2} dF_n^i(s) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < t} \delta_i / (1 - F_n(x_i))^2,$$

melyről bebizonyítjuk, hogy d^i erősen konzisztens becslése.

9.2. LEMMA (>[47]). Legyen F folytonos eloszlásfüggvény és T_n tegyen eleget a (7.1) feltételnek. Ekkor

$$P\left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T_n} |d_n^i(t) - d^i(t)| > (\delta^3 + 2\delta^2) \left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n\right)^{1/2} b_n^2 \right\} \leq (1 + D + kD)n^{-\varepsilon}.$$

Bizonyítás. A 8.2. lemma bizonyításához hasonló módon

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^t (1 - F_n(s))^{-2} dF_n^i(s) - \int_{-\infty}^t (1 - F(s))^{-2} dF^i(s) = \\ &= \int_{-\infty}^t [(1 - F_n(s))^{-2} - (1 - F(s))^{-2}] dF^i(s) + \frac{F_n^i(t) - F^i(t)}{(1 - F_n(t))^2} - \\ & \quad - \int_{-\infty}^t (F_n^i(s+) - F^i(s)) d\left(\frac{1}{1 - F_n(s)}\right)^2. \end{aligned}$$

A *Lagrange-tételt*, majd a 7.1. lemmát alkalmazzuk az első integranduszra, így

$$P\left\{ |(1 - F_n(s))^{-2} - (1 - F(s))^{-2}| \geq 2\delta^3(1 - F(s))^{-3}|F_n(s) - F(s)|, -\infty < t \leq T_n \right\} \leq n^{-\varepsilon}.$$

Ha a (7.4) egyenlőtlenséget alkalmazzuk az első tagra, akkor a 7.1. lemma és az 5.1. tétel alapján a szokott módon fejezhetjük be a bizonyítást.

a) *Az Efron-transzformáció*

A transzformáció alapötletét a (7.3) kovariancia alakja adta. A limeszfolyamat

$$G_n^i(t) = W_n^i(d^i(t)), \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\mathbf{G}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_n(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = (W_n^1(d^1(x_1)), \dots, W_n^k(d^k(x_k))), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

alakban állítható elő, ahol a \mathbf{W}_n vektor komponensei független *Wiener-folyamatok*.

Ha a d^i -függvény inverzét a^i -vel jelöljük, akkor a \mathbf{H}_n folyamat *Efron-transzformáltján* ([64], vö. [47]) a

$${}^E\mathbf{H}_n(\mathbf{x}) = (H_n^1(a^1(x_1)), \dots, H_n^k(a^k(x_k))), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

folyamatot értjük. A transzformáció a $(-\infty, T_n]^k$ téglatestet a

$$D_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k): 0 \leq x_1 \leq d^1(T_n), \dots, 0 \leq x_k \leq d^k(T_n)\}$$

téglatestbe viszi át. A 7.2. tétel *Efron-transzformációs alakja* a következő:

9.3. TÉTEL ($>$ [47]). *Legyen F folytonos eloszlásfüggvény. Ha T_n kielégíti a (7.1) feltételt, akkor*

$$P\left\{\sup_{\mathbf{x} \in D_n} \|{}^E\mathbf{H}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{W}_n(\mathbf{x})\|_k > r_1(n)\right\} \leq C_1 n^{-\varepsilon}$$

ahol $C_1 = K_2 + D + 3 + k(42 + D)$.

A 9.3. tétel és a 9.1. lemma összekapcsolásával meg tudjuk határozni a hazard-folyamat szupremumának a határeloszlását.

9.4. KÖVETKEZMÉNY ($>$ [47]). *Legyen F folytonos eloszlásfüggvény és $F(T) < 1$. Ekkor*

$$\sup_{\mathbf{x} \in R^k} \left| P\left\{\bigcap_{i=1}^k \left(\sup_{-\infty < t < \infty} |H_n^i(t)| < x_i\right)\right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_1((d^i(T))^{-1/2}x_i)\right| = O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2})$$

és

$$\sup_{\mathbf{x} \in R^k} \left| P\left\{\bigcap_{i=1}^k \left(\sup_{0 \leq t \leq T^*} |{}^E H_n^i(t)| < x_i\right)\right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_1((T^*)^{-1/2}x_i)\right| = O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2}),$$

ahol $0 \leq T^* < \infty$.

Vezessük be a szorzatbecslés folyamat *Efron-transzformáltját* is:

$${}^E\mathbf{L}_n(\mathbf{x}) = \left(\frac{L_n^1(a^1(x_1))}{1 - F^{01}(a^1(x_1))}, \dots, \frac{L_n^k(a^k(x_k))}{1 - F^{0k}(a^k(x_k))} \right), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

valamint az

$$r_4(n) = r_2(n) - \delta n^{-1/2} b_n + \delta n^{-1/2} b_n^2$$

sorozatot.

9.5. TÉTEL ($>$ [47]). *Ha F folytonos és T_n kielégíti a (7.1) feltételt, akkor*

$$P\left\{\sup_{\mathbf{x} \in D_n} \|{}^E\mathbf{L}_n(\mathbf{x}) - \mathbf{W}_n(\mathbf{x})\|_k > r_4(n)\right\} \leq C_4 n^{-\varepsilon},$$

ahol $C_4 = K_2 + 5 + 2D + k(42 + 2D)$.

Bizonyítás. A 8.3. tétel bizonyítását módosítjuk a következő módon:

$$\begin{aligned} \left| \frac{L_n^i(t)}{1 - F^{0i}(t)} + G_n^i(t) \right| &\leq n^{1/2} (\exp(-A_n^i(t)) - (1 - \hat{F}_n^{0i}(t))(1 - F^{0i}(t))^{-1} + \\ &+ |G_n^i(t) - H_n^i(t)| + \frac{1}{2} n^{-1/2} (H_n^i(t))^2 \exp(n^{-1/2}|H_n^i(t)|). \end{aligned}$$

Innen az $(1-F(t))^{-1} \cong (1-F^{0i}(t))^{-1}$ egyenlőtlenség felhasználásával a 8.3. tétel bizonyításánál látott módon folytathatjuk tovább.

Az *Efron-transzformált* szorzatbecslés folyamatra szintén igaz a 9.4. következmény, ha ${}^E\mathbf{H}_n$ -t az ${}^E\mathbf{L}_n$ folyamattal cseréljük ki. A 9.5. tétel következményeként példát mutatunk nem aszimptotikus konfidenciasávok szerkesztésére. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$b = (1-F(T))^{-1}, \quad F(T) < 1,$$

$${}^E C_n^i(T) = \left\{ \omega : \left(\hat{F}_n^{0i}(t) - \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right) \left(1 - \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right)^{-1} < F^{0i}(t) < \left(\hat{F}_n^{0i}(t) + \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right) \left(1 + \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right)^{-1}, \right.$$

$$\left. -\infty < t \leq T \right\}, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Az $r_4^*(n)$ sorozatot az $r_4(n)$ sorozatból úgy kapjuk, hogy b_n helyére mindenütt b -t írunk.

9.6. KÖVETKEZMÉNY. Ha F folytonos, $F(T) < 1$ és $n/\log n \cong \frac{\varepsilon}{a(1/\delta)} b$, akkor

$$-C_4 n^{-\varepsilon} + \prod_{i=1}^k \Phi_1((d^i(T))^{-1/2}(\lambda_i - r_4^*(n))) \cong P \left\{ \bigcap_{i=1}^k {}^E C_n^i(T) \right\} \cong$$

$$\cong \prod_{i=1}^k \Phi_1((d^i(T))^{-1/2}(\lambda_i + r_4^*(n))) + C_4 n^{-\varepsilon},$$

ahol $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, k$ tetszőleges számok.

A 9.6. következményben előforduló $d^i(T)$ mennyiségek ugyan általában nem ismertek a gyakorlatban, de a 9.2. lemma alapján konzisztensen becsülhetők. Így, $d_n^i(T)$ -vel helyettesítve $d^i(T)$ -t, mód nyílik ugyan R^k -beli konfidenciasávok szerkesztésére, azonban ezek pontosságáról a „limeszben történt” külön becslés miatt kevés állítható. Ugyanez a megjegyzés a következő pontban ismertetett *Gillespie—Fisher-sávokra* is érvényes.

b) *A Gillespie—Fisher-féle konfidenciasávok*

A Gillespie—Fisher-féle sávok a szorzatbecslés folyamat *Efron-transzformáltján* alapulnak. Ezt a sáv szerkesztési módszert különösen azért érdemes külön ismertetni, mivel az irodalomban gyakran hivatkoznak rá, az első példa volt arra, hogy cenzorlás esetén kis elemszámú mintából az aszimptotikus elmélet alkalmazásával általában nem lehet megbízhatóan konfidenciasávokat szerkeszteni.

A Gillespie—Fisher-sávok szerkesztéséhez szükség lesz a

$$\Phi_5(\lambda_1, \lambda_2, d^i(T)) = P \{ -(\lambda_1 + \lambda_2 t) \leq W(t) \leq \lambda_1 + \lambda_2 t, 0 \leq t \leq d^i(T) \}$$

valószínűség ismeretéhez. A Φ_5 függvényt ANDERSON [1] határozta meg.

$$\Phi_5(\lambda_1, \lambda_2, d^i(T)) = 2\Phi \left(\frac{\lambda_2 d^i(T) + \lambda_1}{(d^i(T))^{1/2}} \right) - 1 +$$

$$+ 2 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s e^{-2\lambda_1 \lambda_2 s^2} \left[\Phi \left(\frac{\lambda_2 d^i(T) + 2s\lambda_1 + \lambda_1}{(d^i(T))^{1/2}} \right) - \Phi \left(\frac{-\lambda_2 d^i(T) + 2s\lambda_1 - \lambda_1}{(d^i(T))^{1/2}} \right) \right],$$

ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvényt jelöli.

Tekintsük a következő sávokat

$${}^G C_n^i(T) = \left\{ \omega : \frac{\hat{F}_n^{oi}(t)}{1 + \frac{\lambda_1^i + \lambda_2^i d_n^i(t)}{n^{1/2}}} \leq F^{oi}(t) \leq \frac{\hat{F}_n^{oi}(t)}{1 - \frac{\lambda_1^i + \lambda_2^i d_n^i(t)}{n^{1/2}}}, -\infty < t \leq T \right\}.$$

9.7. KÖVETKEZMÉNY (>[47]). Ha F folytonos és $n/\log n \cong \frac{\varepsilon}{a(1/\delta)} b$, akkor

$$\begin{aligned} & -(C_4 + 1 + D + kD)n^{-\varepsilon} + \prod_{i=1}^k \Phi_5 \left(\lambda_1^i - r_4^*(n) - \lambda_2^i(\delta^3 + 2\delta^2) b^2 \left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n \right)^{1/2}, \lambda_2^i, d(T) \right) \cong \\ & \cong P \left\{ \bigcap_{i=1}^k {}^G C_n^i(T) \right\} \cong (C_4 + 1 + D + kD)n^{-\varepsilon} + \\ & + \prod_{i=1}^k \Phi_5 \left(\lambda_1^i + r_4^*(n) + \lambda_2^i(\delta^3 + 2\delta^2) b^2 \left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n \right)^{1/2}, \lambda_2^i, d^i(T) \right), \end{aligned}$$

ahol $\lambda_1^i > 0$, $\lambda_2^i > 0$, $i = 1, \dots, k$.

Bizonyítás. Egyszerű algebrai átalakításokkal látható, hogy

$${}^G C_n^i(T) = \left\{ \omega : -(\lambda_1^i + \lambda_2^i d_n^i(t)) \leq \frac{n^{1/2}(\hat{F}_n^{oi}(t) - F^{oi}(t))}{1 - F^{oi}(t)} \leq \lambda_1^i + \lambda_2^i d_n^i(t), -\infty < t \leq T \right\},$$

és így az állítás következik a 9.2. lemmából és a 9.5. tételből.

GILLESPIE és FISHER [67] $n=200$ darab 1 várható értékű exponenciális eloszlású véletlen számot ($F^{01}(t) = 1 - e^{-t}$) cenzorált 200 darab a $[0, x]$, $x=1, 2, 3, 4$, intervallumon egyenletes eloszlású véletlen számmal. Szimulációs eljárásukat ezerszer megismételve azt kapták, hogy a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{{}^G C_n^1(T)\} = \Phi_5(\lambda_1^1, \lambda_2^1, d^1(T))$$

határértékreáció az adott példánál nem helyettesíthető a

$$P\{{}^G C_{200}^1(T)\} \approx \Phi_5(\lambda_1^1, \lambda_2^1, d^1(T))$$

„közel egyenlőséggel”, mivel az utóbbi alapján megrajzolt sávokból F^{01} sokkal többször nyúlik ki, mint ahogy azt ez az „egyenlőség” megengedné. Hasonló eredményekről számol be GILLESPIE [92], ugyanennél a példánál, még $n=500$ esetén is.

Éppen ez a konvergenciasebesség „lassúságára” utaló *Monte Carlo-módszeres* kísérleti tapasztalat készítetett bennünket arra, hogy mint az előző a) és a jelen b) részben is tettük, a későbbi c), e) és f) pontokban tárgyalandó transzformációk esetén is megfogalmazzuk approximációs tételeinknek a sávszerkesztésre vezető, pontos egyenlőtlenségeket tartalmazó következményeit. Ezen egyenlőtlenségeknek mindig csak az alsó felére van szükség ahhoz, hogy egzakt konzervatív sávokat szerkesszünk. Ehhez természetesen megfelelően nagy mintaméretre van mindig szükség. Hogy ennek a különböző transzformációk és sávok esetén mennyinek kell lenni, azt részletesebben tárgyaljuk [53] dolgozatunkban. Az eredmények egyelőre meglehetősen kiábrándítóak, bár javulhatnak, ha a *Komlós—Major—Tusnady-féle* A_1, A_2, A_3 konstansokat későbbi kutatások javítani tudják (lásd [53]). Egy kvalitatív jellegű,

de igen fontos tapasztalat (mely, ahogy az előző mondatban jeleztük, kvantitatívva is válhat később) mindenestre világossá vált vizsgálatainkból. Ez az, hogy cenzorált minták esetén nem létezik olyan univerzális n_0 küszöbszám, hogy efeletti mintaméret esetén az aszimptotikus elmélet már alkalmazható. Ez az n_0 minden egyes konkrét esetben a cenzorálás erősségétől és annak az intervallumnak a hosszától függ, amelyen következtetéseinket az adatokból le akarjuk vonni. Egészen pontosan, ez a küszöbszám a rátorozatainkban levő $b=(1-F(T))^{-1}$ -nek, vagy még pontosabban, b az ezen sorozatokban levő, különböző fokszámú polinomjainak monoton növvő függvénye.

Megjegyezzük, hogy b a Gillespie—Fisher-féle szimulációnál meglehetősen nagy, dominálja az $n=200$, ill. 500-hoz tartozó r_4^* rátát, így eredményük ezek után nem meglepő.

A fenti körülményre a konkrét alkalmazások (sávszerkesztés, tesztelés) során mindig figyelemmel kell lenni. A konkrét gyakorlati alkalmazás során eddig szerzett tapasztalataink alapján azt a tanácsot tudjuk adni, hogy $n=1000$ -et nem meghaladó mintaméret esetén az aszimptotikus eredményeket csak akkor alkalmazhatjuk aránylag megbízhatóan, ha $b=(1-F(T))^{-1}<3$. b -t persze a gyakorlatban megintcsak nem ismerjük, de $(1-F_n(T))^{-1}$ erősen konzisztens becsléséből következtethetünk rá.

c) Az Aalen—Nair-transzformáció

Az Aalen—Nair-transzformáció bevezetése előtt bebizonyítottunk egy lemmát, amely hasznos segédeszköz lesz a további bizonyításokban.

9.8. LEMMA. Ha F folytonos eloszlásfüggvény és a (7.1) feltétel teljesül, akkor

$$P\left\{\sup_{x \in (-\infty, T_n]^k} \|G_n(\mathbf{x})\| > 3\left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n\right)^{1/2} b_n\right\} \leq 2(k+1)n^{-\varepsilon}.$$

Bizonyítás. A (7.5) összefüggés alapján

$$(9.5) \quad P\left\{\sup_{-\infty < t < \infty} |B_n^i(t)| > z\right\} \leq P\left\{\sup_{-\infty < t < \infty} |B_n^0(t)| > z\right\} \leq 2 \exp(-2z^2).$$

A G_n^i folyamatok (7.2) reprezentációja és a (9.5) és a (7.4) egyenlőtlenségek alapján a tétel állítása egyszerű számolással igazolható.

Az Aalen—Nair-transzformáció alapját ([25], [132], vö. [53], [56]) a Wiener-folyamat skála-transzformációja jelenti, melyet a 9.1. lemmában ismertettünk. Legyen T tetszőleges valós szám, melyre $F(T)<1$. Vezessük be az

$${}^A H_n(\mathbf{x}) = (H_n^1(x_1)(d_n^1(T))^{-1/2}, \dots, H_n^k(x_k)(d_n^k(T))^{-1/2}),$$

$${}^A L_n(\mathbf{x}) = \left(\frac{L_n^1(x_1)}{1-F^{01}(x_1)}(d_n^1(T))^{-1/2}, \dots, \frac{L_n^k(x_k)}{1-F^{0k}(x_k)}(d_n^k(T))^{-1/2}\right), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

folyamatokat, a hazard- és a szorzatbecslés folyamat Aalen—Nair-transzformáltjait.

Az új rátsorozatok

$$r_5^*(n) = 2^{1/2} r_1^*(n) c^{1/2} + \frac{3}{2} 2^{1/2} \varepsilon (\delta^3 + 2\delta^2) b^3 a^{3/2} n^{-1/2} \log n,$$

$$r_6^*(n) = 2^{1/2} r_4^*(n) c^{1/2} + \frac{3}{2} 2^{1/2} \varepsilon (\delta^3 + 2\delta^2) b^3 a^{3/2} n^{-1/2} \log n,$$

$$c = \max_{1 \leq i \leq k} (d^i(T))^{-1},$$

ahol a * -gal jelölt sorozatokat úgy kaptuk az eredetiektől, hogy b_n -t mindenütt $b = (1 - F(T))^{-1}$ -nel helyettesítettük.

9.9. TÉTEL (>[53], [56]). Ha F folytonos eloszlásfüggvény és

$$n/\log n \cong \max \left(\frac{\varepsilon}{a(1/\delta)} b, 2\varepsilon(\delta^3 + 2\delta^2)b^4c^2 \right),$$

akkor

$$P \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in (-\infty, T]^k} \| {}^A H_n(\mathbf{x}) - {}^A W_n(\mathbf{x}) \|_k > r_5^*(n) \right\} \cong C_5 n^{-\varepsilon}$$

és

$$P \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in (-\infty, T]^k} \| {}^A L_n(\mathbf{x}) - {}^A W_n(\mathbf{x}) \|_k > r_6^*(n) \right\} \cong C_6 n^{-\varepsilon},$$

ahol

$${}^A W_n(\mathbf{x}) = \left(W_n^1 \left(\frac{d^1(x_1)}{d^1(T)} \right), \dots, W_n^k \left(\frac{d^k(x_k)}{d^k(T)} \right) \right), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

és $C_5 = K_2 + 6 + 2D + 44k + 2kD$, $C_6 = K_2 + 8 + 3D + 44k + 3kD$.

Bizonyítás. Az Aalen—Nair-transzformáció definíciója alapján

$$\begin{aligned} & \left| {}^A H_n^i(t) - W_n^i \left(\frac{d^i(t)}{d^i(T)} \right) \right| \cong (d_n^i(T))^{-1/2} |H_n^i(t) - W_n^i(d^i(t))| + \\ & + |W_n^i(d^i(t))| \left| (d_n^i(T))^{-1/2} - (d^i(T))^{-1/2} \right| \cong \\ & \cong (d_n^i(T))^{-1/2} |H_n^i(t) - W_n^i(d^i(t))| + \\ & + |W_n^i(d^i(t))| \cdot |d_n^i(T) - d^i(T)| \frac{1}{2} (\min(d_n^i(T), d^i(T)))^{-3/2}, \end{aligned}$$

a Lagrange-tétel alkalmazásával. Minden olyan elemi eseményre, melyre teljesül az

$$|d_n^i(T) - d^i(T)| \cong (\delta^3 + 2\delta^2) b^2 \left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n \right)^{1/2}$$

egyenlőtlenség következik, hogy

$$\frac{1}{2} d^i(T) \cong d_n^i(T),$$

ha

$$(\delta^3 + 2\delta^2) b^2 \left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n \right)^{1/2} \cong \frac{1}{2} d^i(T).$$

Ismét a 7.2. tételt alkalmazzuk. A 9.2. lemma és a fenti megjegyzések figyelembevételével

$$\begin{aligned}
 & P \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T} (d_n^i(T))^{-1/2} |H_n^i(t) - W_n^i(d^i(t))| > (2c)^{1/2} I_1^*(n), \right. \\
 & \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq k} \sup_{-\infty < t \leq T} |W_n^i(d^i(t))| |d_n^i(T) - d^i(T)| (\min(d_n^i(T), d^i(T)))^{-3/2} > \\
 & \left. > \frac{1}{2} (2c)^{3/2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \log n \right)^{1/2} b(\delta^3 + 2\delta^2) \left(\frac{\varepsilon}{2n} \log n \right)^{1/2} \right\} \leq C_5 n^{-\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

A szorzatbecslés folyamat *Aalen—Nair-transzformáltjára* a bizonyítás ugyanígy történik, csak a 7.2. tétel helyett a 9.5. tételt kell használni.

A most vizsgált transzformáció alkalmazásaként elsőként egy tiszta illeszkedés-vizsgálatot mutatunk be. Az ellenőrizendő H_0 nullhipotézisünk az, hogy X^{01}, \dots, X^{0k} eloszlásfüggvényei valóban az F^{01}, \dots, F^{0k} eloszlásfüggvényekkel egyeznek meg rendre. (Természetesen választható olyan H_0 nullhipotézis is, amelyben nem mindegyik F^{01}, \dots, F^{0k} függvényre teszünk hipotézist.) Az *Aalen—Nair-transzformáción* alapuló *Kolmogorov—Szmirnov-statisztikák* a

$$K_n^i(T) = \sup_{-\infty < t \leq T} \left(\frac{n}{d_n^i(T)} \right)^{1/2} |\hat{F}_n^{0i}(t) - F^{0i}(t)|,$$

a megfelelő *Cramér—von Mises-típusú statisztikák* pedig az

$$\begin{aligned}
 \omega_n^i(T) &= \frac{n}{d_n^i(T)} \int_{-\infty}^T \left(\frac{\hat{F}_n^{0i}(t) - F^{0i}(t)}{1 - F^{0i}(t)} \right)^2 d \left(\frac{d_n^i(t)}{d_n^i(T)} \right) = \\
 &= (d_n^i(T))^{-2} \sum_{X_j < t} \delta_j^i \left(\frac{\hat{F}_n^{0i}(X_j) - F^{0i}(X_j)}{(1 - F^{0i}(X_j))(1 - F_n(X_j))} \right)^2
 \end{aligned}$$

alakban írhatók fel. Az eddigi tételek alapján nem csak a statisztikák konvergenciáját bizonyítjuk be, hanem a konvergenciák sebességét is megbecsüljük.

9.10. KÖVETKEZMÉNY. *Ha F folytonos eloszlásfüggvény és $F(T) < 1$, akkor*

$$\sup_{x \in R^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k (K_n^i(T) < x_i) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_1(x_i) \right| = O(n^{-1/3} (\log n)^{3/2})$$

és

$$\sup_{x \in R^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k (\omega_n^i(T) < x_i) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_2(x_i) \right| = O(n^{-1/3} (\log n)^{3/2}).$$

Bizonyítás. A *Kolmogorov—Szmirnov-statisztika* konvergencia sebességére vonatkozó becslés a 9.9. tétel alapján nyilvánvaló.

A Cramér—von Mises-statisztika bizonyítása egy kicsit hosszabb, de első lépésként itt is a 9.9. tételt alkalmazzuk:

$$\left| \int_{-\infty}^T \left(\frac{n^{1/2}(\hat{F}_n^{0i}(t) - F^{0i}(t))}{1 - F^{0i}(t)} \right) (d_n^i(T)(1 - F_n(t))^{-1})^2 dF_n^i(t) - \int_{-\infty}^T \left(\frac{W_n^i(d^i(t))}{d^i(T)(1 - F(t))} \right)^2 dF_n^i(t) \right| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2}).$$

Így

$$\left| \omega_n^i(T) - \int_0^1 (W_n^i(t))^2 dt \right| \stackrel{\text{m.m.}}{=} n^{-1/2} \left| \int_{-\infty}^T \left(\frac{W_n^i(d^i(t))}{d^i(T)(1 - F(t))} \right)^2 dB_n^i(t) \right| + O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2}).$$

A továbbiakban a 7.2. tétel bizonyításának befejező részét követjük; az itt definiált beosztás felhasználásával vezessük be a \bar{W}_n^i tiszta ugró folyamatot $(-\infty, T]$ -n:

$$\bar{W}_n^i(t) = W_n^i(d^i(t_j))(d^i(T)(1 - F(t_j)))^{-1}, \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad t \leq T.$$

A beosztás definíciója alapján nyilvánvaló, hogy

$$d^i(t_{j+1}) - d^i(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (1 - F(u))^{-2} dF^i(u) \leq b^2(F^i(t_{j+1}) - F^i(t_j)) \leq b^2/[n^{2/3}].$$

Az 5.3. tétel alkalmazásával megbecsüljük az ugró folyamattól való eltérést:

$$\sup_{-\infty < t \leq T} |\bar{W}_n^i(t) - W_n^i(d^i(t))(d^i(T)(1 - F(t)))^{-1}| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O(n^{-1/3}(\log n)^{1/2}).$$

A bizonyítás további része a (7.4) egyenlőtlenség alapján szó szerint megegyezik a 7.2. tétel bizonyításának befejező részével, ezért

$$n^{-1/2} \left| \int_{-\infty}^T (\bar{W}_n^i(t))^2 dB_n^i(t) \right| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2}).$$

A 9.9. tétel szintén módot nyújt konfidencia sávok szerkesztésére. Vezessük be a következő eseményeket:

$$\begin{aligned} {}^A C_n^i(T) &= \left\{ \omega : \left(\hat{F}_n^{0i}(t) - \lambda_i \left(\frac{d_n^i(T)}{n} \right)^{1/2} \right) \left(1 - \lambda_i \left(\frac{d_n^i(T)}{n} \right)^{1/2} \right)^{-1} \leq F^{0i}(t) \leq \right. \\ &\left. \left(\hat{F}_n^{0i}(t) + \lambda_i \left(\frac{d_n^i(T)}{n} \right)^{1/2} \right) \left(1 + \lambda_i \left(\frac{d_n^i(T)}{n} \right)^{1/2} \right)^{-1}, \quad -\infty < t \leq T \right\}, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

9.11. KÖVETKEZMÉNY. Ha F folytonos eloszlásfüggvény és

$$n/\log n \geq \max \left(\frac{\varepsilon}{a(1/\delta)} b, 2\varepsilon(\delta^3 + 2\delta^2)b_4 c^2 \right),$$

akkor

$$-C_6 n^{-\varepsilon} + \prod_{i=1}^k \Phi_1(\lambda_i - r_6^*(n)) \cong P \left\{ \bigcap_{i=1}^k {}^A C_n^i(T) \right\} \cong \\ \cong \prod_{i=1}^k \Phi_1(\lambda_i + r_6^*(n)) + C_6 n^{-\varepsilon},$$

ahol $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, k$ tetszőleges számok.

Bizonyítás. Egyszerű átrendezéssel kapjuk a 9.9. tételből.

d) A Fleming—Harrington-transzformáció

A Fleming—Harrington-transzformáció az itt ismertetésre kerülő transzformációk közül a legnehezebben kiszámítható, csak Kolmogorov—Szmirnov-típusú tesztek készítésére célszerű felhasználni, de tartalmaz egy szabadon választható paramétert, ami segítséget jelenthet hipotézisvizsgálásnál. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\hat{S}_n^i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1 - \hat{F}_n^{0j}(t)), \quad S^i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1 - F^{0j}(t)) = (1 - F(t))(1 - F^{0i}(t))^{-1},$$

$${}^F H_n^i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{2} [(1 - F^{0i}(s))^\alpha + (1 - \hat{F}_n^{0i}(s))^\alpha] (\hat{S}_n^i(s))^{1/2} dH_n^i(s),$$

$$\sigma_{\alpha, i}^2(t) = \begin{cases} (2\alpha - 1)^{-1} (1 - (1 - F^{0i}(t))^{2\alpha - 1}), & \text{ha } \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ -\log(1 - F^{0i}(t)), & \text{ha } \alpha = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A ${}^F \mathbf{H}_n(\mathbf{x}) = ({}^F H_n^1(x_1), \dots, {}^F H_n^k(x_k))$ folyamat definíciója alapján a limeszfolyamatként a ${}^F \mathbf{G}_n(\mathbf{x}) = ({}^F G_n^1(x_1), \dots, {}^F G_n^k(x_k))$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$, Gauss-folyamatot sejtjük, melynek

$${}^F G_n^i(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F^{0i}(s))^{\alpha - \frac{1}{2}} (1 - F(s)) dG_n^i(s)$$

komponensei függetlenek, független növekményűek és szórásuk $\sigma_{\alpha, i}(t)$. A szórásnégyzet mintából való becslésére FLEMING és HARRINGTON [71] a

$$\hat{\sigma}_{\alpha, i}^2(t) = \int_{-\infty}^t \left[\frac{1}{2} (1 - \hat{F}_n^{0i}(s))^\alpha + \frac{1}{2} (1 - F^{0i}(s))^\alpha \right] (1 - \hat{F}_n^{0i}(s))^{-1} d\lambda_n^{0i}(s)$$

függvényt javasolta, de természetesen ugyanígy használható a

$$\hat{\sigma}_{\alpha, i}^2(t) = \begin{cases} (2\alpha - 1)^{-1} [1 - (1 - \hat{F}_n^{0i}(t))^{2\alpha - 1}], & \text{ha } \alpha \neq \frac{1}{2}, \\ \Lambda_n^{0i}(t), & \text{ha } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

függvény is. A *Fleming—Harrington-transzformáció* alapján nem lehet konfidencia sávokat szerkeszteni, ezért most az approximációs tételt nem valószínűségi egyenlőtlenség alakban mondjuk ki, mivel így a bizonyítás lényegesen rövidebb lesz. Megjegyezzük, hogy FLEMING és HARRINGTON [71] csak hézagos vázlatot adtak (a *Kaplan—Meier-modellben*) az alábbi tétel gyenge-konvergencia következményére. Az ő bizonyításuk egészen más vonalat követ.

9.12. TÉTEL. Ha F folytonos eloszlásfüggvény és $F(T) < 1$, akkor

$$\sup_{x \in (-\infty, T]^k} \| {}^F H_n(x) - {}^F G_n(x) \|_k \stackrel{\text{m.m.}}{=} O(n^{-5/18} (\log n)^{3/2}).$$

Bizonyítás. A 11. fejezetben bebizonyítjuk a szorzatbecslés erős konzisztenciáját (11.2. tétel), amelyből következik, hogy

$$\sup_{-\infty < t \leq T} \left| \frac{1 - F^{0i}(t)}{1 - \hat{F}_n^{0i}(t)} \right| \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} 2.$$

A 8.3. tétel és a fenti egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sup_{-\infty < t \leq T} | {}^F H_n^i(t) - {}^F G_n^i(t) | \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} \sup_{-\infty < t \leq T} n^{-1/2} \left| \int_{-\infty}^t (1 - F^{0i}(s))^{\alpha-1} B_n(s) dH_n^i(s) \right| + \\ & + \sup_{-\infty < t \leq T} n^{-1} \left| \left(\frac{\alpha}{2} - 1 \right) \int_{-\infty}^t (1 - F(s))(1 - F^{0i}(s))^{\alpha-1} G_n^i(s) dH_n^i(s) \right| + \\ & + \sup_{-\infty < t \leq T} \left| \int_{-\infty}^t (1 - F^{0i}(s))^{\alpha} (S^i(s))^{1/2} d(H_n^i(s) - G_n^i(s)) \right| + O(n^{-1/3} (\log n)^{3/2}). \end{aligned}$$

Az első két tag becslése a 7.2. tételnél és a 9.10. következménynél látott módon történik, csak az egyenest most $[n^{5/9}]$ részre kell bontani, hogy optimális rátát kapjunk. A harmadik tag becslése parciális integrálással következik a 7.2. tételből.

A megfelelő *Kolmogorov—Szmürnov-statisztikákat* úgy kapjuk, hogy vagy a szórással vagy valamelyik empirikus szórással visszaosztjuk a transzformált folyamatot:

$$\tilde{K}_n^i(T) = (\sigma_{\alpha, i}(T))^{-1} \sup_{-\infty < t \leq T} | {}^F H_n^i(t) |,$$

$$\hat{K}_n^i(T) = (\hat{\sigma}_{\alpha, i}(T))^{-1} \sup_{-\infty < t \leq T} | {}^F H_n^i(t) |,$$

$$\hat{\hat{K}}_n^i(T) = (\hat{\hat{\sigma}}_{\alpha, i}(T))^{-1} \sup_{-\infty < t \leq T} | {}^F H_n^i(t) |.$$

9.13. KÖVETKEZMÉNY. Ha F folytonos eloszlásfüggvény és $F(T) < 1$, akkor

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k (\tilde{K}_n^i < x_i) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_1(x_i) \right| = O(n^{-5/18} (\log n)^{3/2}),$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k (\hat{K}_n^i < x_i) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_1(x_i) \right| = O(n^{-5/18} (\log n)^{3/2}),$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k (\hat{\hat{K}}_n^i < x_i) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_1(x_i) \right| = O(n^{-5/18} (\log n)^{3/2}).$$

Bizonyítás. A később bebizonyítandó 11.2. tétel alapján

$$|(\hat{\sigma}_{\alpha,i}(T))^{-1} - (\sigma_{\alpha,i}(T))^{-1}| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O\left(\left(\frac{\log \log n}{n}\right)^{1/2}\right),$$

$$|(\hat{\hat{\sigma}}_{\alpha,i}(T))^{-1} - (\sigma_{\alpha,i}(T))^{-1}| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O\left(\left(\frac{\log \log n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

Ezért, elvégezve a következő átalakításokat

$$\begin{aligned} & \sup_{-\infty < t \leq T} |(\hat{\sigma}_{\alpha,i}(T))^{-1} {}^F H_n^i(t) - (\sigma_{\alpha,i}(T))^{-1} {}^F G_n^i(t)| \cong \\ & \cong \sup_{-\infty < t \leq T} |(\sigma_{\alpha,i}(T))^{-1} |{}^F H_n^i(t) - {}^F G_n^i(t)| + \\ & + \sup_{-\infty < t \leq T} |(\hat{\sigma}_{\alpha,i}(T))^{-1} - (\sigma_{\alpha,i}(T))^{-1}| \cdot |{}^F H_n^i(t) - {}^F G_n^i(t)| + \\ & + |(\hat{\sigma}_{\alpha,i}(T))^{-1} - (\sigma_{\alpha,i}(T))^{-1}| \sigma_{\alpha,i}(T) \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} |W(t)|, \end{aligned}$$

az állítás következik a 9.12. tételből.

FLEMING és HARRINGTON [71] azt javasolják gyakorlati tapasztalataik alapján, hogy ha a H_0 hipotézistől való eltérés távoli pontokban várható és éppen ezt szeretnénk ellenőrizni (vagyis T -t nagynak választjuk és T közelében várható a H_0 -tól való eltérés), akkor célszerű α -t kicsinek választani. Pontosabban, ekkor a $0 \leq \alpha \leq 1$ választást tanácsolják. Ha a távoli pontokra nem vagyunk kíváncsiak, tehát T kicsi, akkor α -t növeljük, vagyis ekkor az $\alpha > 1$ választást ajánlják.

Az $\alpha=0$ esetet FLEMING, O'FALLON, O'BRIEN és HARRINGTON [73] külön dolgozatban részletesen vizsgálta. Ebben az esetben

$$\sigma_{0,i}^2(t) = \frac{F^{0i}(t)}{1 - F^{0i}(t)},$$

ezért a

$${}^0G_n(\mathbf{x}) = ((1 - F^{01}(x_1))^F G_n^1(x_1), \dots, (1 - F^{0k}(x_k))^F G_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$$

folyamat komponensei függetlenek és

$$(1 - F^{0i}(x_i))^F G_n^i(x_i) \stackrel{\mathcal{D}}{=} B(F^{0i}(x_i)),$$

ahol $\{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$ *Brown-híd*. Vezessük be a ${}^0G_n(\mathbf{x})$ folyamat empirikus megfelelőjét:

$${}^0H_n^i(t) = \frac{1}{2} [1 - F^{0i}(t) + 1 - \hat{F}_n^{0i}(t)] \int_{-\infty}^t (\hat{S}_n^i(s))^{1/2} dH_n^i(s), \quad 1 \leq i \leq k,$$

$${}^0H_n(\mathbf{x}) = ({}^0H_n^1(x_1), \dots, {}^0H_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k).$$

9.14. TÉTEL. *Ha F folytonos eloszlásfüggvény és $F(T) < 1$, akkor*

$$\sup_{\mathbf{x} \in (-\infty, T]^k} \|{}^0H_n(\mathbf{x}) - {}^0G_n(\mathbf{x})\|_k \stackrel{\text{m.m.}}{=} O(n^{-5/18} (\log n)^{3/2}).$$

Bizonyítás. A szorzatbecslés erős konzisztenciájára vonatkozó iterált logaritmus tétel (11.2. tétel) és a 9.12. tétel összekapcsolásával az állítás könnyen belátható.

A bebizonyított tételből következik a szuprénum statisztikák konvergencia-rendjének egy becslése.

9.15. KÖVETKEZMÉNY. *Ha F folytonos eloszlásfüggvény és $F(T) < 1$, akkor*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\sup_{-\infty < t \leq T} |{}^o H_n^i(t)| < x_i \right) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_3(x_i, F^{0i}(T)) \right| = O(n^{-5/18} (\log n)^{3/2}).$$

e) *A Hall—Wellner-transzformáció*

A hazard folyamat *Hall—Wellner-transzformáltján* a

$${}^H \mathbf{H}_n(\mathbf{x}) = ({}^H H_n^1(x_1), \dots, {}^H H_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$$

$${}^H H_n^i(t) = (1 + d_n^i(t))^{-1} H_n^i(t), \quad i = 1, \dots, k$$

folyamatot, míg a szorzatbecslésén az

$${}^H \mathbf{L}_n(\mathbf{x}) = ({}^H L_n^1(x_1), \dots, {}^H L_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

$${}^H L_n^i(t) = (1 + d_n^i(t))^{-1} (1 - F^{0i}(t))^{-1} L_n^i(t), \quad i = 1, \dots, k$$

folyamatot értjük. Vezessük be a következő sorozatokat:

$$r_7(n) = r_1(n) + \frac{3}{2} \varepsilon (\delta^3 + 2\delta^2) n^{-1/2} b_n^3 \log n,$$

$$r_8(n) = r_4(n) + \frac{3}{2} \varepsilon (\delta^3 + 2\delta^2) n^{-1/2} b_n^3 \log n.$$

9.16. TÉTEL (>[53], [56]). *Ha F folytonos eloszlásfüggvény és (7.1) teljesül, akkor*

$$P \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in (-\infty, T_n]^k} \|{}^H \mathbf{H}_n(\mathbf{x}) - {}^H \mathbf{B}_n(\mathbf{x})\|_k > r_7(n) \right\} \leq C_7 n^{-\varepsilon}$$

és

$$P \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in (-\infty, T_n]^k} \|{}^H \mathbf{L}_n(\mathbf{x}) - {}^H \mathbf{B}_n(\mathbf{x})\|_k > r_8(n) \right\} \leq C_8 n^{-\varepsilon},$$

ahol

$${}^H \mathbf{B}^n(\mathbf{x}) = ((1 + d^1(x_1))^{-1} W_n^1(d^1(x_1)), \dots, (1 + d^k(x_k))^{-1} W_n^k(d^k(x_k))), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

és $C_7 = K_2 + 6 + 2D + k(44 + 2D)$, $C_8 = K_2 + 8 + 3D + k(44 + 3D)$.

Bizonyítás. Ha elvégezzük a

$$\begin{aligned} & \left| (1 + d_n^i(t))^{-1} H_n^i(t) - (1 + d^i(t)) W_n^i(d^i(t)) \right| \leq \\ & \leq |H_n^i(t) - G_n^i(t)| + |d_n^i(t) - d^i(t)| \cdot |G_n^i(t)| \end{aligned}$$

felső becslést, akkor a 7.2. tétel, a 9.2. és a 9.8. lemmák alapján az állítás már közvetlenül adódik a hazard folyamatra.

A szorzatbecslés folyamatra a bizonyítás hasonló:

$$\begin{aligned} & |(1 + d_n^i(t))^{-1}(1 - F^{0i}(t))^{-1}L_n^i(t) - (1 + d^i(t))^{-1}W_n^i(d^i(t))| \cong \\ & \cong |(1 - F^{0i}(t))^{-1}L_n^i(t) - G_n^i(t)| + |d_n^i(t) - d^i(t)| \cdot |G_n^i(t)|, \end{aligned}$$

csak a 7.2. tétel helyett a 9.5. tételt használjuk.

A most bevezetett transzformációhoz tartozó *Kolmogorov—Szmirnov-* és *Cramér—von Mises-típusú statisztikákra* a következő eredmények adódnak, messze-
mögben megjavítva KOZIOI [114] eredményeit.

9.17. KÖVETKEZMÉNY. *Ha F folytonos eloszlásfüggvény és F(T) < 1, akkor*

- (i)
$$\sup_{x \in R^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\sup_{-\infty < t \leq T} |{}^H H_n^i(t)| < x_i \right) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_3 \left(x_i, \frac{d^i(T)}{1 + d^i(T)} \right) \right| = O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2}),$$
- (ii)
$$\sup_{x \in R^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\int_{-\infty}^T ({}^H H_n^i(t))^2 d \left(\frac{d_n^i(t)}{1 + d_n^i(t)} \right) < x_i \right) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_4 \left(x_i, \frac{d^i(T)}{1 + d^i(T)} \right) \right| = O(n^{-5/18}(\log n)^{3/2}),$$
- (iii)
$$\sup_{x \in R^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\sup_{-\infty < t \leq T} |{}^H L_n^i(t)| < x_i \right) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_3 \left(x_i, \frac{d^i(T)}{1 + d^i(T)} \right) \right| = O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2}),$$
- (iv)
$$\sup_{x \in R^k} \left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\int_{-\infty}^T ({}^H L_n^i(t))^2 d \left(\frac{d_n^i(t)}{1 + d_n^i(t)} \right) < x_i \right) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_4 \left(x_i, \frac{d^i(T)}{1 + d^i(T)} \right) \right| = O(n^{-5/18}(\log n)^{3/2}).$$

Továbbá, ha $n \rightarrow \infty$ esetén T_n oly módon tart T_F -hez, hogy $r_7(n) \rightarrow 0$ és $r_8(n) \rightarrow 0$ is teljesülnek, akkor

- (v)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\sup_{-\infty < t \leq T_n} |{}^H H_n^i(t)| < x_i \right) \right\} = \prod_{i=1}^k \Phi_3(x_i, 1),$$
- (vi)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\int_{-\infty}^{T_n} ({}^H H_n^i(t))^2 d \left(\frac{d_n^i(t)}{1 + d_n^i(t)} \right) < x_i \right) \right\} = \prod_{i=1}^k \Phi_4(x_i, 1),$$
- (vii)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\sup_{-\infty < t \leq T_n} |{}^H L_n^i(t)| < x_i \right) \right\} = \prod_{i=1}^k \Phi_3(x_i, 1),$$
- (viii)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\int_{-\infty}^{T_n} ({}^H L_n^i(t))^2 d \left(\frac{d_n^i(t)}{1 + d_n^i(t)} \right) < x_i \right) \right\} = \prod_{i=1}^k \Phi_4(x_i, 1).$$

Bizonyítás. A (i) és (iii) összefüggések a 9.16. tétel direkt következményei. A (ii) és (iv) bizonyítása hosszabb, de nem végezzük el, mivel lényegileg nem különbözik a 9.12. tétel bizonyításától.

Az (v)—(viii) relációk bebizonyításához vegyük észre, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^i(T_n) = \infty,$$

és ezért

$$(9.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^i(T_n)}{1 + d^i(T_n)} = 1.$$

Az 5.2. tétel és a (9.6) reláció miatt így

$$\sup_{\substack{d^i(T_n) \\ 1 + d^i(T_n) < t \leq 1}} |B(t)| \xrightarrow{\text{m.m.}} 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Ezzel az (v)—(viii) határeloszlásokat is bebizonyítottuk.

A 9.17. következmény (i)—(iv) részének alkalmazásához a $d^i(T)/(1 + d^i(T))$ mennyiségeket kell ismerni, de ezeket a mintából konzisztens módon becsülhetjük $d_n^i(T)/(1 + d_n^i(T))$ -vel a 9.2. lemma alapján. Más módon is elkerülhetjük ezt a kellemetlenséget, ha felhasználjuk a

$$(9.7) \quad \Phi_3\left(t, \frac{d^i(T)}{1 + d^i(T)}\right) \cong \Phi_3(t, 1),$$

$$(9.8) \quad \Phi_4\left(t, \frac{d^i(T)}{1 + d^i(T)}\right) \cong \Phi_4(t, 1)$$

egyenlőtlenségeket, és a $\Phi_3(t, 1)$, $\Phi_4(t, 1)$ függvényekből számítjuk ki hipotézis tesztelésnél a megfelelő szignifikancia szintekhez tartozó „percentage” pontokat (vö. [96]). De ez azzal jár, hogy nagyobb valószínűséggel fogadjuk el a nullhipotézist, amikor nem igaz, tehát nagyobb lesz a másodfajú hiba valószínűsége. A (9.4) egyenlőtlenséget felhasználjuk a konfidencia sávok szerkesztésére is. Vezessük be a következő eseményeket:

$${}^H C_n^i(T) = \left\{ \omega : \frac{\hat{F}_n^{oi} - 1}{1 - \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}(1 + d_n^i(t))} + 1 \cong F^{oi} \cong \frac{\hat{F}_n^{oi} - 1}{1 + \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}(1 + d_n^i(t))} + 1, \quad -\infty < t \leq T \right\},$$

$i = 1, \dots, k.$

Az $r_8^*(n)$ sorozat ismét csak annyiban különbözik $r_8(n)$ -től, hogy b -t írunk b_n helyébe.

9.18. KÖVETKEZMÉNY (>[56]). Ha F folytonos és $n/\log n \cong \epsilon b/a(1/\delta)$, akkor

$$\begin{aligned} -C_8 n^{-\epsilon} + \prod_{i=1}^k \Phi_3(\lambda_i - r_8^*(n), 1) &\cong -C_8 n^{-\epsilon} + \prod_{i=1}^k \Phi_3\left(\lambda_i - r_8^*(n), \frac{d^i(T)}{1 + d^i(T)}\right) \cong \\ &\cong P\left\{ \bigcap_{i=1}^k {}^H C_n^i(T) \right\} \cong C_8 n^{-\epsilon} + \prod_{i=1}^k \Phi_3\left(\lambda_i + r_8^*(n), \frac{d^i(T)}{1 + d^i(T)}\right). \end{aligned}$$

Sávrajzoláshoz persze a fenti egyenlőtlenségnek csak a bal oldalára van szükség, és így a teljesen ismert $\Phi_3(t, 1)$ függvény segítségével is szerkeszthetjük a sávokat.

f) Az empirikus Efron-transzformáció

Az Efron-transzformációt az a^i , $i=1, \dots, k$ függvényekkel végeztük, amelyek általában nem ismertek. A 9.6. következmény után megjegyeztük, hogy amikor az Efron-transzformációt használjuk sávyszerkesztésre, a $d^i(T)$ mennyiségeket valamilyen módon becsülni kell, ez azonban a pontosságot csökkentheti. Célszerű lenne valamilyen módon az a^i függvényeket a mintából megbecsülni. Ezt a gondolatot az [54], [55] dolgozatokban alkalmaztuk először egy speciális esetben, az ún. *Koziol—Green-modellben* (vö. [100], [117]). Az általános esetet a [60] dolgozatban vizsgáltuk, mely a jelen dolgozattal egyidőben született.

Vezessük be a d_n^i függvények inverzeit:

$$d_n^i(t) = \inf \{u: d_n^i(u) \cong t\}.$$

Ezek általánosított kvantilis folyamatok, melyeknek az értékei a d_n^i folyamatok ugráspontjai. A hazard- és a szorzatbecslés folyamat *empirikus Efron-transzformáltjai* ekkor

$${}^cH_n(\mathbf{x}) = ({}^cH_n^1(x_1), \dots, {}^cH_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

$${}^cH_n^i(t) = H_n^i(a_n^i(t)), \quad i = 1, \dots, k,$$

$${}^cL_n(\mathbf{x}) = ({}^cL_n^1(x_1), \dots, {}^cL_n^k(x_k)), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

$${}^cL_n^i(t) = (1 - F^{0i}(a_n^i(t)))^{-1} L_n^i(a_n^i(t)), \quad i = 1, \dots, k.$$

A cH_n és cL_n folyamatokat a $[0, M_1]^k$ kockán fogjuk approximálni, ahol

$$0 < M_1 < \min_{1 \leq i \leq k} d^i(T_F -) \cong \infty.$$

Az M_2 számot úgy választjuk meg, hogy

$$M_1 < M_2 < \min_{1 \leq i \leq k} d^i(T_F -) \cong \infty.$$

Ekkor létezik két olyan \bar{M}_1, \bar{M}_2 szám, melyekre $\bar{M}_1 < \bar{M}_2 < T_F$ és $M_1 \cong d^i(\bar{M}_1)$, $M_2 \cong d^i(\bar{M}_2)$, $1 \leq i \leq k$. Az $r_1(n)$ és $r_4(n)$ sorozatokban T_n helyett írjunk mindenhol \bar{M}_1 -et, az így kapott sorozatokat jelöljük $\bar{r}_1(n)$ és $\bar{r}_4(n)$ -nel. Vezessük be az

$$r_9(n) = \bar{r}_1(n) + r_{91}(n),$$

$$r_{10}(n) = \bar{r}_4(n) + r_{91}(n)$$

rátasorozatokat, ahol

$$r_{91}(n) = \frac{1}{M_2} \left\{ 3 \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \right) r_{92}(n) \log n \right\}^{1/2},$$

$$r_{92}(n) = (\delta^3 + 2\delta^2)(1 - F(\bar{M}_2))^{-2} n^{-1/2} (\log n)^{1/2}.$$

9.18. TÉTEL ([60]). Ha F folytonos eloszlásfüggvény és

$$\frac{\varepsilon}{a(1/\delta)} \frac{\log n}{n} \cong 1 - F(\bar{M}_2), \quad r_{92}(n) \cong M_2 - M_1,$$

akkor

$$P\left\{\sup_{x \in [0, M_1]^k} \|{}^C H_n(x) - W_n(x)\|_k > r_9(n)\right\} \leq C_9 n^{-\varepsilon}$$

és

$$P\left\{\sup_{x \in [0, M_1]^k} \|{}^C L_n(x) - W_n(x)\|_k > r_{10}(n)\right\} \leq C_{10} n^{-\varepsilon},$$

ahol C_9, C_{10} konstansok, melyek M_1, ε és F -től függenek.

Bizonyítás. A bizonyítás mindkét folyamatra ugyanúgy történik, ezért csak a szorzatbecslés folyamatra fogjuk elvégezni. A tétel bizonyítását öt egyszerű lépésre bontjuk. Az első lépés ötlete SANDER [144] dolgozatából származik.

1. *Lépés.* Szimmetria okok miatt

$$\sup_{0 \leq t \leq d_n^i(T)} |d^i(a_n^i(t)) - t| \leq \sup_{0 \leq t \leq d^i(T)} |d_n^i(a^i(t)) - t|.$$

2. *Lépés.* $p_{101}(n) = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq M_1} |d^i(a_n^i(t)) - t| > r_{92}(n)\right\} \leq 2(1 + D + kD)n^{-\varepsilon}$. Valóban az 1. lépést és az n választását felhasználva

$$\begin{aligned} p_{101}(n) &\leq P\left\{\sup_{0 \leq t \leq d_n^i(\bar{M}_2)} |d^i(a_n^i(t)) - t| > r_{92}(n)\right\} + P\{M_1 \geq d_n^i(\bar{M}_2)\} \leq \\ &\leq P\left\{\sup_{0 \leq t \leq d^i(\bar{M}_2)} |d_n^i(a^i(t)) - t| > r_{92}(n)\right\} + P\{M_1 \geq d_n^i(\bar{M}_2)\} \leq \\ &\leq P\left\{\sup_{-\infty < t \leq \bar{M}_2} |d_n^i(t) - d^i(t)| > r_{92}(n)\right\} + P\{d^i(\bar{M}_1) \geq d_n^i(\bar{M}_2)\} \leq \\ &\leq 2P\left\{\sup_{-\infty < t \leq \bar{M}_2} |d_n^i(t) - d^i(t)| > r_{92}(n)\right\} \leq 2(1 + D + kD)n^{-\varepsilon}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben a 9.2. lemmát használtuk.

3. *Lépés.* Ha W egy Wiener-folyamat, akkor

$$p_{102}(n) = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq M_1} |W(d^i(a_n^i(t))) - W(t)| > r_{91}(n)\right\} \leq C_{101} n^{-\varepsilon},$$

ahol $C_{101} = C_{101}(M_1, \varepsilon, F)$ konstans. Az állítás bizonyítása a szokott módon történik az előző lépések és az 5.3. tétel alkalmazásával. Az 5.3. tétel a *Brown-híd* növekményeinek a nagyságára vonatkozik, de az állítás igaz a konstansok kis változtatásával a *Wiener-folyamatra* is (Lemma 1.2.1 CSÖRGŐ M. és RÉVÉSZ P. [6] könyvében).

4. *Lépés.* $p_{103}(n) = P\{a_n^i(M_1) \geq \bar{M}_2\} \leq (1 + kD + D)n^{-\varepsilon}$. Valóban a 9.2. lemma alapján a feltételnek eleget tevő n -re

$$\begin{aligned} p_{103}(n) &= P\{d_n^i(\bar{M}_2) \leq M_1\} \leq (1 + kD + D)n^{-\varepsilon} + P\{M_2 - M_1 \leq r_{92}(n)\} = \\ &= (1 + kD + D)n^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

5. Lépés. A 9.5. tétel és az előző lépések alkalmazásával

$$\begin{aligned} & P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq M_1} |{}^c L_n^i(t) - W_n^i(t)| > r_{10}(n) \right\} \cong \\ & \cong P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq M_1} |{}^c L_n^i(t) - W_n^i(d^i(a_n^i(t)))| > \bar{r}_4(n) \right\} + p_{102}(n) \cong \\ & \cong P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq a_n^i(M_1)} \left| \frac{L_n^i(t)}{1 - F^{0i}(t)} - W_n^i(d(t)) \right| > \bar{r}_4(n) \right\} + p_{102}(n) \cong \\ & \cong P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq a^i(M_2)} \left| \frac{L_n^i(t)}{1 - F^{0i}(t)} - W_n^i(d^i(t)) \right| > \bar{r}_4(n) \right\} + p_{102}(n) + p_{103}(n), \end{aligned}$$

amiből a tétel azonnal adódik.

A most bebizonyított tételben az M_1 konstansot tetszőlegesen választhatjuk, így elkerüljük az Efron-transzformációnál említett nehézséget. Vezessük be a következő sávokat

$$\begin{aligned} {}^c C_n^i(M_1) &= \left\{ \omega : \left(\hat{F}_n^{0i}(t) - \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right) / \left(1 - \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right) < F^{0i}(t) < \right. \\ &< \left. \left(\hat{F}_n^{0i}(t) + \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right) / \left(1 + \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right), -\infty < t \leq a_n^i(M_1) \right\}, \end{aligned}$$

illetve a transzformációnak megfelelő Kolmogorov—Szmirnov, Cramér—von Mises-statisztikákat:

$$\sup_{0 \leq t \leq M_1} |{}^c L_n^i(t)|, \quad \int_0^{M_1} ({}^c L_n^i(t))^2 dt.$$

9.19. KÖVETKEZMÉNY. Ha F folytonos eloszlásfüggvény és

$$M_1 < \min_{1 \leq i \leq k} d^i(T_F -) \cong \infty,$$

akkor

$$\left| P\left\{ \bigcap_{i=1}^k {}^c C_n^i(M_1) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_1(\lambda_i(M_1)^{-1/2}) \right| = O(n^{1/4}(\log n)^{3/4}),$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^k} \left| P\left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\sup_{0 \leq t \leq M_1} |{}^c L_n^i(t)| < x_i \right) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_1(x_i(M_1)^{-1/2}) \right| = O(n^{-1/4}(\log n)^{3/4}),$$

és

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^k} \left| P\left\{ \bigcap_{i=1}^k \left(\int_0^{M_1} ({}^c L_n^i(t))^2 dt < x_i \right) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_2(x_i(M_1)^{-2}) \right| = O(n^{1/4}(\log n)^{3/4}).$$

A 9.19. következményben ${}^c L_n^i$ helyett mindenhol ${}^c H_n^i$ -t is írhatunk, az állítások továbbra is igazak maradnak.

Ha a szorzatbecslés folyamatot az $1 - F^{0i}(t)$ helyett az $1 - \hat{F}_n^{0i}(t)$ becsléssel súlyozzuk, akkor az ennek megfelelő empirikus Efron-transzformálton az

$$\begin{aligned} {}^v L_n^i(t) &= (1 - \hat{F}_n^{0i}(a_n^i(t)))^{-1} L_n^i(a_n^i(t)), \quad i = 1, \dots, k, \\ {}^v L_n(x) &= ({}^v L_n^1(x_1), \dots, {}^v L_n^k(x_k)), \quad x = (x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

folyamatot értjük. Nem nehéz bebizonyítani, hogy a 9.18. tétel továbbra is érvényben marad, ha az cL_n folyamatot az vL_n folyamattal helyettesítjük, csak a tételben szereplő konstansokat kell módosítani. Az approximáció rendje nem változik. Így egy másik sávszerkesztési módszert is tudunk javasolni:

$$\begin{aligned} {}^vC_n^i(M_1) &= \left\{ \omega: \hat{F}_n^{0i} \left(1 + \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \cong F^{0i}(t) \cong \right. \\ &\left. \cong \hat{F}_n^{0i}(t) \left(1 - \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} \right) + \frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}, \quad -\infty < t \cong a_n^i(M_1) \right\}. \end{aligned}$$

9.20. KÖVETKEZMÉNY. Ha F folytonos eloszlásfüggvény és

$$M_1 < \min_{1 \leq i \leq k} d^i(T_F -) \cong \infty,$$

akkor

$$\left| P \left\{ \bigcap_{i=1}^k {}^vC_n^i(M_1) \right\} - \prod_{i=1}^k \Phi_1(\lambda_i(M_1)^{1/2}) \right| = O(n^{-1/4}(\log n)^{3/4}).$$

g) Diskusszió

Ebben a fejezetben sok lehetőséget, módszert mutattunk konfidenciasávok szerkesztésére és hipotézisellenőrzésre. Kevés szó esett azonban arról, hogy mikor melyik módszert, transzformációt érdemes alkalmazni. Az irodalomban nem találtunk olyan eredményt, amely matematikailag szabatos módon hasonlítana össze két módszert, így csak a gyakorlati tapasztalatra hagyatkozhatunk.

A *Fleming—Harrington-módszer* csak hipotézisellenőrzésre használható és csak az általunk is ismertetett *Kolmogorov—Szmirnov-típusú statisztikát* érdemes használni, lévén, hogy pl. a megfelelő *Cramér—von Mises-statisztikák* kiszámolása rendkívül nehézkes. Kétségtelen hátránya a transzformációnak, hogy még a *Kolmogorov—Szmirnov-statisztikát* is nehéz kiszámítani (bár [71]-ben erre algoritmus található), de előnyt jelent a tetszőlegesen választható α paraméter, mellyel a teszt érzékenységet bizonyos esetekben növelhetjük. Sokkal könnyebben kezelhetőek az *Aalen—Nair-transzformáció*n alapuló eljárások. Ezekben az esetekben olyan táblázatokat készítettünk, melyekben különböző T értékek esetén megadjuk a statisztika értékét. A táblázat alapján meghatározhatjuk azt az intervallumot, amelyen még teljesül a nullhipotézis, illetve melyen már nem. Illusztrációként az [58] dolgozatra utalunk. Az *Aalen—Nair-transzformációnak*, a *Fleming—Harrington-féléhez* hasonlóan hátránya, a végpontbeli szórás becslésével történő visszaosztás kényyszerűsége. Ennek torzító hatása úgy hipotézisellenőrzésnél, mint sávszerkesztésnél megmutatkozhat.

A *Hall—Wellner-transzformációt* kényelmesen tudjuk használni, ha a (9.7) és (9.8) egyenlőtlenségek két oldala között az eltérés kicsi, tehát T közel van T_F -hez. Azt sejtjük, hogy a *Hall—Wellner-eljárás* ebben az esetben hatékonyabb, mint az *Aalen—Nair*. (Itt jegyezzük meg, hogy a [33, 63, 136, 147, 159] dolgozatokban a fenti eljárások alkalmazásait részletesen tárgyalják.)

Úgy érezzük, hogy az általunk javasolt *empirikus Efron-transzformáció* minden más transzformációnál hasznosabb lesz. Először is jegyezzük meg, hogy a szorzat-

becslés folyamatnak a túlélésfüggvényekkel, vagy azok becsléseivel történő súlyozása RÉNYI [18b] gondolatainak tükrében a legtermészetesebbnek tűnik. Hogy ennek révén a *Wiener-folyamathoz* jutunk határátmenet után a *Brown-féle hid* helyett, az a jelen cenzorált esetben a lehető legtermészetesebb, hiszen külön feltétel nélkül itt sosem „mehetünk ki” T_F -ig, tehát a szorzatbecslés, vagy hazárdfolyamat jobbról sosem lehet lekötve a nullához. A *Hall—Wellner-transzformációval* szemben nyilvánvaló előnye transzformációknak az, hogy teljesen eloszlásmentes eljárásokra vezet, az *Aalen—Nair-* és *Fleming—Harrington-félékkel* szemben pedig az, hogy ezt külön súlyozás nélkül érjük el. Úgy hisszük tehát, hogy úgy hipotézistesztesztel, mint aszimptotikus sávszerkesztés esetén az *empirikus Efron-transzformáció*n alapuló eljárások lesznek a leghatékonyabbak. (Megjegyezzük, hogy egyedül a mi eljárásunk az, aminél a sáv szélesség előre meghatározható.) Természetesen konkrét szimulációs tanulmányokkal ezt a véleményünket legalábbis a legfontosabb eloszlástípusok esetén ellenőrizni kell, az erre vonatkozó számológépes vizsgálatok folyamatban vannak.

A 7. és 8. fejezetek végén tett megjegyzésekhez csatlakozva itt is a következő észrevétel tehető. Ha a jelen 9. fejezet akármelyik állításának azt a speciális esetét tekintjük, amely a szóban forgó vektorfolyamatoknak csak az i -edik, $1 \leq i \leq k$, komponensére vonatkozik, akkor HORVÁTH [103] dolgozata alapján az F folytonossága helyett elég csak az F^i folytonosságát megkívánni. Speciálisan, a *Kaplan—Meier-modellben* nincs szükség F^{0i} folytonosságára, csak az F^{0i} -ére.

10. Gyenge konvergencia az egész $[-\infty, T_F]$ intervallumon

Az eddigi eredményekben a szorzatbecslés folyamat eltérését a limeszfolyamat megfelelően választott kópiáitól vagy a $(-\infty, T]$, $F(T) < 1$, rögzített vagy a $(-\infty, T_n]$ növekvő félegyenesen néztük, feltételt szabva az utóbbi esetben arra, hogy T_n legfeljebb milyen gyorsan tarthat T_F -hez. Most arra vagyunk kíváncsiak, hogy az elképzelhető legnagyobb intervallumon a szorzatbecslés folyamat eddig vizsgált tulajdonságai megmaradnak-e. A kérdés legfeljebb a $(-\infty, T_F]$ -en lehet érdekes, hiszen ezen az intervallumon kívül egy valószínűséggel egyetlen egy mintaelem se esik. A definíció alapján $\tilde{F}_n^{0i}(T_F) = 1$, ha F folytonos, ezért ekkor

$$(10.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2}(\tilde{F}_n^{0i}(T_F) - F^{0i}(T_F)) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } T_F < T_{F^{0i}}, \\ 0, & \text{ha } T_F = T_{F^{0i}}. \end{cases}$$

Itt, a T_F felső tartó definíciójához hasonlóan, $T_{F^{0i}}$ az F^{0i} függvény felső tartóját jelöli, azaz

$$T_{F^{0i}} = \inf \{t: F^{0i}(t) = 1\}.$$

A most felvetett kérdésekkel GILL [89]—[91] foglalkozott, a jelen fejezetben az ő eredményeit fogjuk ismertetni.

GILL tételeit a *Kaplan—Meier-modell* esetén bizonyította be, tehát az F^{01} eloszlásfüggvényt akarta becsülni a cenzoráló változó F^{02} eloszlásfüggvényét „zavaró paraméterként” kezelve.

A szorzatbecslés definícióját úgy módosította, hogy az jobbról legyen folytonos és ne szükségképpen eggyel egyenlő a legnagyobb mintaelem után. A *Gill-féle szorzat-*

becslés a következő:

$$(10.2) \quad \tilde{F}_n^{01}(t) = 1 - \prod_{s \leq t} \left(1 - \frac{\Delta F_n^1(s)}{1 - F_n(s)} \right),$$

ahol $\Delta F_n^1(s)$ jelöli az F_n^1 függvény s pontbeli ugrását. A definíció alapján $\tilde{F}_n^{01}(X_{n:n})=1$ akkor és csak akkor teljesül, ha a legnagyobb mintaelem cenzorálatlan. Az \tilde{F}_n^{01} kiszámításánál, amikor a mintaelemeket sorbarendeztük, a cenzorálatlanok megelőzték a velük egyenlő cenzoráltakat, így egyszerű számolással belátható, hogy

$$(10.3) \quad \tilde{F}_n^{01}(t-) = \hat{F}_n^{01}(t), \quad t \leq X_{n:n};$$

$$(10.4) \quad \tilde{F}_n^{01}(t) = \hat{F}_n^{01}(t+), \quad t < X_{n:n}.$$

A két szorzatbecslés így legfeljebb az ugráspontokban és a legnagyobb mintaelem után térhet el egymástól. Eddig valójában közömbös volt \tilde{F}_n^{01} -nek az $X_{n:n}$ utáni definíciója, hiszen ha egy ráta 0-hoz tartott valamelyik eddigi tételünkben, akkor T_n olyan lassan nőhetett csak, hogy a legnagyobb mintaelem 1 valószínűséggel nagyobb, mint T_n .

A maximális intervallumon való gyenge konvergencia tétele előtt feltétlenül meg kell említenünk a *Breslow—Crowley-tétel* következő, szintén GILL-től származó általánosítását. Vezessük be az

$$\tilde{L}_n^1(t) = n^{1/2}(\tilde{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t+))$$

jobbról folytonos szorzatbecslés folyamatot. A tételben az az új, hogy még F^{01} folytonossága sincs feltételezve.

10.1. TÉTEL (GILL [89]). Ha $F(0)=0$, $F(T+)<1$, akkor létezik Gauss-folyamatoknak olyan \tilde{Q}_0^1 sorozata, melyre

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{L}_n^1(t) - \tilde{Q}_n^1(t)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

1 valószínűséggel, továbbá

$$(10.5) \quad E\tilde{Q}_n^1(t) = 0,$$

$$E\tilde{Q}_n^1(t)\tilde{Q}_n^1(s) = (1 - F^{01}(t))(1 - F^{01}(s)) \int_{[0, s \wedge t]} (1 - F^{01}(u+))(1 - F(u))^{-1} dF^{01}(u+).$$

A tétel bizonyítása a szorzatbecslés, pontosabban az $(1 - \tilde{F}_n^{01}(t \wedge X_{n:n})) \cdot (1 - F^{01}(t \wedge X_{n:n}+))^{-1}$ folyamat t -beni (n rögzített) martingál mivoltát használja fel, így a technikája teljesen különbözik az ebben a cikkben alkalmazott erős approximációétól. A martingáltulajdonság alapján az első lépésként az \tilde{L}_n^1 folyamat gyenge konvergenciáját bizonyítja be. Ebből a 10.1. tétel állítása *Szkorohod ismert konstrukciójával* következik.

A transzformációkkal foglalkozó 9. fejezetben több módszert mutattunk konfidenciasávok szerkesztésére. Megemlítettük, hogy ha csak F^{01} folytonos, már akkor is alkalmazhatóak ezek az eljárások, ha F^{01} -et akarjuk sávval lefedni. Ezek nem aszimptotikus eljárások voltak, de ha a sávok szerkesztésében előforduló rátákat nullának vesszük ($n \rightarrow \infty$), akkor megkapjuk az aszimptotikus eljárásokat. A 10.1.

tétel alapján az *Aalen--Nair-transzformációt* tetszőleges F^{01} esetén is elvégezhetjük. Vezessük be a (10.5) empirikus megfelelőjét:

$$\tilde{d}_n^1(t) = \int_{[0,t]} \frac{\chi(F_n(s+) < 1)}{(1 - F_n(s))(1 - F_n(s+))} dF_n^1(s+),$$

ahol $\chi(A)$ az A esemény indikátora. A $\tilde{d}_n^1(t)$ -t összeg alakban is felírhatjuk:

$$\tilde{d}_n^1(t) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{X_i \leq t \\ X_i < X_{n:n}}} \frac{\delta_i^1}{(1 - F_n(X_i))(1 - F_n(X_i+))}.$$

10.2. KÖVETKEZMÉNY. Ha $F(0)=0$ és $F(T+) < 1$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{L}_n^1(t)(1 - F^{01}(t+))^{-1}(\tilde{d}_n^1(T))^{1/2}| < x \right\} \cong \Phi_1(x).$$

Bizonyítás. A tétel feltételei mellett könnyen belátható, hogy \tilde{d}_n^1 a \tilde{d}^1 függvény konzisztens becslése, \tilde{F}_n^{01} erős konzisztenciájára vonatkozó állítást a 11. fejezetben pontosan megfogalmazzuk (lásd a 11.5. tételt). Így a 10.1. tételből a már ismert módon, ahogy az *Aalen--Nair-transzformációnál* láttuk, következik az állítás.

A 10.2. következményt fogjuk alkalmazni aszimptotikus, konzervatív konfidencia sáv szerkesztésére. A 9.10. következményhez hasonlóan legyen

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n(T) &= \left\{ \omega : \left(\tilde{F}_n^{01}(t) - \lambda \left(\frac{\tilde{d}_n^1(T)}{n} \right)^{1/2} \right) \left(1 - \lambda \left(\frac{\tilde{d}_n^1(T)}{n} \right)^{1/2} \right) \cong F^{01}(t) \cong \right. \\ &\quad \left. \cong \left(\tilde{F}_n^{01}(t) + \lambda \left(\frac{\tilde{d}_n^1(T)}{n} \right)^{1/2} \right) \left(1 + \lambda \left(\frac{\tilde{d}_n^1(T)}{n} \right)^{1/2} \right), \quad 0 \cong t \cong T \right\}. \end{aligned}$$

10.3. KÖVETKEZMÉNY. Ha $F(0)=0$ és $F(T+) < 1$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\tilde{C}_n(T)\} \cong \Phi_1(\lambda).$$

Vezessük be a következő folyamatokat

$$\hat{L}_n^1(t) = n^{1/2} \frac{1 - F^{01}(t+)}{1 - F^{01}((t \wedge X_{n:n})+)} (\tilde{F}_n^{01}(t) - F^{01}((t \wedge X_{n:n})+)),$$

$$\hat{Q}^1(t) = \chi(t \in [0, T_F])(1 - F^{01}(t+))\tilde{Q}_1^1(t) + \chi(t = T_F) \cdot U,$$

ahol

$$U = \begin{cases} (1 - F^{01}(T_F+))\tilde{Q}_1^1(T_F), & \text{ha } F(T_F) < 1, \\ \lim_{t \uparrow T_F} (1 - F^{01}(t+))\tilde{Q}_1^1(t), & \text{ha } F(T_F) = 1. \end{cases}$$

Bizonyítás nélkül közöljük GILL [89] tételét (Theorem 4.23), majd azután néhány példát mutatunk, amikor a tétel feltételei teljesülnek, tehát amikor a teljes $[0, T_F]$ intervallum tudunk gyenge konvergenciát állítani.

10.4. TÉTEL (GILL [89]). *Tegyük fel, hogy a*

$$\lim_{t \uparrow T_F} (F^{01}(T_F+) - F^{01}(t+))^2 \int_{[0,t]} (1 - F^{01}(s+))(1 - F(s))^{-1} dF^{01}(s+) = 0$$

és a

$$\lim_{t \uparrow T_F} \int_{(t, T_F)} (1 - F^{02}(s)) dF^{01}(s+) = 0$$

feltételek teljesülnek.

Ekkor a $\hat{Q}^1(t)$ folyamat 1 valószínűséggel létezik, és megadható Gauss-folyamatoknak egy \hat{Q}_n^1 sorozata, melyre

$$\sup_{0 \leq t \leq T_F} |\hat{L}_n^1(t) - \hat{Q}_n^1(t)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

1 valószínűséggel és $\hat{Q}_n^1 \stackrel{p}{\rightarrow} \hat{Q}^1$, $n=1, 2, \dots$. Ha $F(T_F)=1$ és $F^{01}(T_F)=1$, akkor $U=0$.

10.1. PÉLDA. Tegyük fel, hogy F^{01} folytonos és $F^0(T_F)=1$. Ha $1 - F^{02}(t) \geq c(1 - F^{01}(t))^\alpha$ valamilyen $c > 0$, $\alpha < 1$ konstansokkal $[T_F - \Delta t, T_F]$ -en fennáll, ahol $\Delta t > 0$ tetszőleges, akkor a 10.4. tétel feltételei teljesülnek. Ebben az esetben $U=0$ is teljesül.

10.2. PÉLDA. Tegyük fel, hogy F^{01} konstans a T_F pont egy nem üres környezetében. Ebben a környezetben F^{01} teljes változása 0, így a tételben szereplő feltételek teljesülnek. Természetesen ebben az esetben $T_{F02} = T_F < T_{F01}$, de gyenge konvergencia mégis van $[0, T_F]$ -en, bár a cenzorálás olyan erős, hogy például a legnagyobb mintaelem 1 valószínűséggel cenzorált. Valóban a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\delta_{n:n}^1 = 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_F} n(1 - F^{02}(u)) dF^{01}(u) = \int_0^{T_F} (1 - F(u))^2 dF^{01}(u)$$

összeg véges, és így az első Borel—Cantelli-lemma miatt majdnem minden elemi eseményhez van egy olyan $n_0(\omega)$ küszöbszám, hogy ha $n \geq n_0(\omega)$, akkor $\delta_{n:n}^1 = 0$. Hasonló számolással megmutatható, hogy minden m rögzített természetes számra az utolsó m mintaelem majdnem biztosan cenzorált.

10.3. PÉLDA. Ha $T_{F01} < T_{F02}$, akkor

$$\begin{aligned} (1 - F^{01}(t+))^2 \int_{[0, t]} (1 - F^{01}(s+))(1 - F(s))^{-1} dF^{01}(s+) &\leq \\ &\leq (1 - F^{02}(T_{F01}))^{-1} F^{01}(t+)(1 - F^{01}(t+)), \end{aligned}$$

így a 10.4. tétel mindkét feltétele teljesül.

11. A szorzatbecslés erős egyenletes konzisztenciája

A 8.2. lemmában a házárdbecslés maximális eltérésére adtunk felső korlátot valószínűségi egyenlőtlenség alakjában. Az első Borel—Cantelli-lemma alkalmazásával az egyenlőtlenségből nem csak a házárdbecslés erős egyenletes konzisztenciáját kapjuk $(-\infty, T] - n$, $F(T) < 1$, hanem a konvergencia sebességére is becslést nyerünk valamilyen M pozitív konstanssal:

$$(11.1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{1/2} \Delta_n^*(T) \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} M, \quad F(T) < 1,$$

ahol

$$(11.2) \quad \Delta_n^*(T) = \sup_{-\infty < t \leq T} |\Lambda_n^1(t) - \Lambda^1(t)|.$$

A továbbiakban a (11.1) egyenlőtlenséget fogjuk javítani és a szorzatbecslésre is hasonló állítást bizonyítunk be. A (11.2) eltéréshez hasonlóan vezessük be a szorzatbecslés maximális eltérését a nem teljes tartón:

$$(11.3) \quad \Delta_n(T) = \sup_{-\infty < t \leq T} |\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t)|, \quad F(T) < 1.$$

A másik valószínűségi változó, amelynek nagyságrendjét keressük, a szorzatbecslés maximális eltérése a teljes tartón:

$$(11.4) \quad \Delta_n = \sup_{-\infty < t < T_F} |\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t)|.$$

A 7.4. tétel alapján pontosan meg tudjuk határozni $\Delta_n^*(T)$ nagyságát is. Jelöljük \mathcal{F} -vel a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett abszolút folytonos függvényeknek azt a halmazát, melynek elemeire $f(0)=0$ és $\int_0^1 (f'(u))^2 du \leq 1$ teljesülnek.

11.1. TÉTEL. Ha $F(T) < 1$, akkor a

$$\left(\frac{n}{2 \log \log n} \right)^{1/2} (\Lambda_n^1(t) - \Lambda^1(t)), \quad -\infty < t \leq T$$

folyamat sorozat 1 valószínűséggel relatív kompakt a szupremum metrikában és limeszpontjainak halmaza a

$$\left\{ (d^1(T))^{1/2} f \left(\frac{d^1(t)}{d^1(T)} \right), \quad -\infty < t \leq T; f \in \mathcal{F} \right\}$$

halmaz. Ebből következik, hogy 1 valószínűséggel

$$(i) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 \log \log n} \right)^{1/2} \Delta_n^*(T) = (d^1(T))^{1/2}$$

és

$$(ii) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \log \log n} \int_{-\infty}^T (\Lambda_n^1(t) - \Lambda^1(t))^2 d d^1(t) = (d^1(T)/\pi)^2.$$

Bizonyítás. A 7.4. tétel és a 7. fejezet végén tett megjegyzés szerint 1 valószínűséggel

$$\sup_{-\infty < t \leq T} |\Lambda_n^1(t) - n^{-1/2} G^1(t; n)| = O(n^{-1/3} (\log n)^{5/2}).$$

A $G^1(t; n)$ kétparaméteres folyamat kovariancia struktúrájából következik, hogy

$$\{G^1(t; n), \quad -\infty < t \leq T, \quad n \geq 1\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ (d^1(T))^{1/2} W \left(\frac{d^1(t)}{d^1(T)}; n \right), \quad -\infty < t \leq T, \quad n \geq 1 \right\},$$

ahol $\{W(t; n), 0 \leq t \leq 1, n \geq 1\}$ kétparaméteres Wiener-folyamat. Az erős approximáció rátáját $(\log \log n)^{1/2}$ -nel elosztva, persze méginkább nullához tartó sorozatot

kapunk, ezért elegendő az approximáló *Gauss-folyamat* limeszpontjait meghatározni. Esetünkben a kétparaméteres idő transzformált *Wiener-folyamat* limeszét kell vizsgálni, így a tétel első fele következik Csörgő M. és Révész P. [6] Theorem 1.19.1-ből. A funkcionális iterált logaritmus tételből következik, hogy 1 valószínűséggel

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 \log \log n} \right)^{1/2} \Delta_n^*(T) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (d^1(T))^{1/2} \left(\frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq 1} |W(t; n)|$$

és

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \log \log n} \int_{-\infty}^T (\Lambda_n^1(t) - \Lambda^1(t))^2 d\Lambda^1(t) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(d^1(T))^2}{2n \log \log n} \int_0^1 (W(t; n))^2 dt.$$

Így (i) és (ii) következik a *Wiener-folyamatra* vonatkozó ismert eredményekből. A 8.5. tétel felhasználásával $\Delta_n(T)$ nagyságrendjét is pontosan megadjuk.

11.2. TÉTEL. Ha F^{01} folytonos eloszlásfüggvény és $F(T) < 1$, akkor a

$$\left(\frac{n}{2 \log \log n} \right)^{1/2} (\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t)), \quad -\infty < t \leq T$$

folyamat sorozat egy valószínűséggel relatív kompakt a szupremum metrikában és limeszpontjainak halmaza a

$$\left\{ (d^1(T))^{1/2} (1 - F^{01}(t)) f\left(\frac{d^1(t)}{d^1(T)}\right), \quad -\infty < t \leq T; f \in \mathcal{C} \right\}$$

halmaz. Ebből következik, hogy 1 valószínűséggel

$$(i) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 \log \log n} \right)^{1/2} \Delta_n(T) = \sup_{-\infty < t \leq T} ((1 - F^{01}(t))(d^1(t))^{1/2})$$

és

$$(ii) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \log \log n} \int_{-\infty}^T \left(\frac{\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t)}{1 - F^{01}(t)} \right)^2 d\Lambda^1(t) = (d^1(T)/\pi)^2.$$

Bizonyítás. A funkcionális iterált logaritmus tétel bizonyítása megegyezik az előző tétel bizonyításával, csak a 7.4. tétel helyett a 8.5. tételt kell használni, és a

$$\{Q^1(t; n), \quad -\infty < t \leq T, \quad n \geq 1\} \stackrel{\mathcal{D}}{=}$$

$$\stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ (d^1(T))^{1/2} (1 - F^{01}(t)) W\left(\frac{d^1(t)}{d^1(T)}; n\right), \quad -\infty < t \leq T, \quad n \geq 1 \right\}$$

reprezentációt. A tétel első feléből következik, hogy

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 \log \log n} \right)^{1/2} \Delta_n(T) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d^1(T)}{2n \log \log n} \right)^{1/2} \sup_{-\infty < t \leq T} \left| (1 - F^{01}(t)) W\left(\frac{d^1(t)}{d^1(T)}; n\right) \right|$$

és

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \log \log n} \int_{-\infty}^T \left(\frac{\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t)}{1 - F^{01}(t)} \right)^2 d\Lambda^1(t) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(d^1(T))^2}{2n \log \log n} \int_0^1 (W(t; n))^2 dt$$

1 valószínűséggel fennáll, tehát (ii) azonnal következik. Ha t_0 , $-\infty < t_0 \leq T$ rögzített pont, akkor az iterált logaritmus tétel alapján

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} |Q^1(t_0; n)| \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} (1 - F^{01}(t_0))(d^1(t_0))^{1/2},$$

tehát

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} \sup_{-\infty < t \leq T} |Q^1(t; n)| \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} \sup_{-\infty < t \leq T} |(1 - F^{01}(t))(d^1(t))^{1/2}|.$$

A funkcionális iterált logaritmus tétel alkalmazásával viszont

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} \sup_{-\infty < t \leq T} |Q^1(t; n)| \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} \sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{-\infty < t \leq T} \left| (d^1(T))^{1/2} (1 - F^{01}(t)) f \left(\frac{d^1(t)}{d^1(T)} \right) \right|.$$

Alkalmazva *Riesz lemmáját* (Lemma 1.3.1 [6]-ban), mely szerint

$$|f(t)| \leq \sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad f \in \mathcal{F},$$

azt kapjuk, hogy

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} \sup_{-\infty < t \leq T} |Q^1(t; n)| \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} \sup_{-\infty < t \leq T} (1 - F^{01}(t))(d^1(t))^{1/2}.$$

Így az (i) állítást is teljesen bebizonyítottuk.

A Δ_n nagyságrendjét nagyon sokan vizsgálták ([75], [78]–[82], [86], [137], [191]–[153], [155]), FÖLDES és REJTŐ [78] bizonyított be először iterált logaritmus rátát abban az esetben, amikor F^{01} folytonos és $T_{F^{01}} < T_{F^{02}}$:

$$(11.5) \quad \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} O \left(\left(\frac{\log \log n}{n} \right)^{1/2} \right).$$

GHORAI, REJTŐ és SUSARLA [86] (11.5)-ben a konstanst is meg tudták becsülni, ha a feltételekhez még hozzávették, hogy F^{02} folytonos $T_{F^{01}}$ egy nyitott bal oldali környezetében:

$$(11.6) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{\log \log n} \right)^{1/2} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} \frac{d}{1 - F^{02}(T_{F^{01}})},$$

$d=24,9$. Továbbá bebizonyították, hogy ha $T_{F^{01}} \leq T_{F^{02}}$, F^{02} folytonos $T_{F^{01}}$ valamely bal oldali nyitott környezetében és ebben a környezetben teljesül, hogy $c(1 - F^{01})^\alpha \leq 1 - F^{02}$, valamilyen $0 < c \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ konstansokkal, akkor

$$(11.7) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{\log \log n} \right)^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} dc^{-\frac{1}{1+\alpha}},$$

$d=24,9$. Ha $\alpha=0$, akkor (11.7) a (11.6) egyenlőtlenségre redukálódik (természetesen $T_{F^{01}} < T_{F^{02}}$ automatikusan következik $\alpha=0$ -ból).

Ebben a fejezetben Δ_n nagyságrendjét akarjuk meghatározni a $T_{F^{01}}$, $T_{F^{02}}$ tartókra tett bármiféle feltétel nélkül. Csak F^{01} folytonosságát tételezzük fel.

A (11.6) és (11.7) egyenlőtlenségek következni fognak valamivel jobb d konstanssal, és elhagyjuk az $\alpha \leq 1$ megszorítást. A tétel bizonyítása előtt néhány érdekes példát fogunk ismertetni. A tétel bizonyítása a $(-\infty, T_F)$ intervallum felbontásán alapul, az $F_n^{01} - F^{01}$ eltérést a $(-\infty, T_n), (T_n, T_F)$ intervallumokon egyenként vizsgáljuk. A bizonyításnak ez az ötlete a [47] dolgozatból származik.

11.3. TÉTEL ([59]). *Tegyük fel, hogy F^{01} folytonos eloszlásfüggvény. Ekkor minden $\lambda > 1$ esetén*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{1 - F^{01}(T_n(\lambda))} \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} v(\lambda),$$

ahol

$$T_n(\lambda) = \sup \left\{ t : 1 - F(t) \geq \lambda \left(\frac{\log \log n}{2n} \right)^{1/2} \right\}$$

és

$$v(\lambda) = 1 + \frac{3}{\lambda - 1} \left\{ 1 + \frac{3}{2(\lambda - 1)} \exp \left(\frac{3}{\lambda - 1} \right) \right\}.$$

Ha a $T_{F_{01}}, T_{F_{02}}$ tartókra megfelelő feltevést teszünk, akkor a 11.3. tételből megkapjuk az előzőekben említett tételeket.

11.4. KÖVETKEZMÉNY ([59]). *Tegyük fel, hogy F^{01} folytonos eloszlásfüggvény*

(i) *Ha $T_{F_{02}} < T_{F_{01}}$ és $F^{02}(T_{F_{02}}) = 1$, akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 1 - F^{01}(T_{F_{02}}) > 0.$$

(ii) *Ha $T_{F_{01}} \leq T_{F_{02}}$, akkor a becslés erősen konzisztens, és a konzisztencia rátája $1 - F^{01}(T_n(\lambda)) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).*

(iii) *Ha $T_{F_{01}} < T_{F_{02}}$, akkor*

$$1 \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{\log \log n} \right)^{1/2} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} d,$$

ahol $d = \min \{ \lambda v(\lambda) : \lambda > 1 \} = \lambda_0 v(\lambda_0) = 11,54 \dots, \lambda_0 = 5,67 \dots$

(iv) *Ha $T_{F_{01}} \leq T_{F_{02}}$ és F^{02} folytonos $T_{F_{01}}$ valamely bal oldali nem üres $(T, T_{F_{01}})$ környezetében (F^{02} -nek lehet ugrása a $T_{F_{01}}$ pontban, ha $T_{F_{01}} < \infty$), akkor*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1 - F^{02}(T_n(\lambda))) \left(\frac{2n}{\log \log n} \right)^{1/2} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} v(\lambda).$$

(v) *Tegyük fel, hogy a (iv) eset feltételei teljesülnek. Ha létezik továbbá olyan $a [0, 1 - F(T)]$ intervallumon értelmezett γ függvény, melyre $\gamma(x) \geq x$, $\gamma(x) \downarrow \gamma(0)$, ha $x \downarrow 0$ és*

$$1 - F^{01}(t) \leq \gamma(1 - F(t)), \quad t \in (T, T_{F_{01}}),$$

akkor

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_n / \gamma \left(\lambda \left(\frac{\log \log n}{2n} \right)^{1/2} \right) \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} v(\lambda).$$

A tételből következik ((i) eset), hogy \hat{F}_n^{01} nem mindig konzisztens, és a problémát az $X_{n:n}$ utáni definiálása jelenti. A fejezet végén megmutatjuk, hogy néhány esetben \hat{F}_n^{01} még konzisztens, amikor F_n^{01} nem az.

11.1. PÉLDA. Legyen $\gamma(x) = (x/c)^{1/(1+\alpha)}$, $0 < c \leq 1$, $\alpha \geq 0$. A 11.4. következmény (v) pontjából következik a (11.7) egyenlőtlenség a jobb $d = d(\alpha)$ konstanssal, ahol $d(\alpha) = \min \{ \lambda^{1/(1+\alpha)} \nu(\lambda) : \lambda > 1 \}$. A hatványfüggvény tulajdonságaiból következik, hogy $d(\alpha)$ monoton csökkenő függvénye α -nak és

$$1 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} d(\alpha) \cong d(\alpha) \cong d(0) = 11, 54 \dots$$

Ha mindkét eloszlás exponenciális $1 - F^{01}(t) = \exp(-t/\theta)$, $1 - F^{02}(t) = \exp(-t/\vartheta)$, akkor $\gamma(x) = x^{1/(1+\alpha)}$, $\alpha = \theta/\vartheta$. Így ebben az esetben a (11.7) egyenlőtlenségben a korlát $d(\theta/\vartheta)$.

11.2. PÉLDA. Legyen $\gamma(x) = c(\exp(\theta x) - 1)$, ahol $c, \theta > 0$ és $c\theta > 1$. Ez az eset a „gyenge” cenzorálásnak felel meg. Alkalmazzuk a $\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x)/x = c\theta$ összefüggést, így az előző tétel alapján

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{\log \log n} \right)^{1/2} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} d(0)c\theta = c\theta 11, 54 \dots$$

11.3. PÉLDA. Legyen $\gamma(x) = 1/|\log|\log|\dots|\log x|\dots|$, ahol a logaritmus c -szer van iterálva, $c \geq 1$ egész. Ebben az esetben a cenzorálás „heves” a T_F közelében. Ismét alkalmazható az (v) állítás:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\log_c n) \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} 1,$$

ahol \log_c a c -szer iterált logaritmust jelöli.

A 11.3. Tétel bizonyítása. Az F eloszlásfüggvény nem feltétlenül folytonos, ezért az F_n függvénynek pozitív valószínűséggel $1/n$ -nél nagyobb ugrásai is lehetnek. Ezt a lehetőséget is figyelembe véve, az empirikus eloszlásfüggvények bal oldali folytonosságát használva a Breslow—Crowley-féle 8.1. lemmát a következően lehet módosítani:

$$(11.8) \quad 0 < -\log(1 - \hat{F}_n^{01}(t)) - A_n^1(t) < q_{1n}(t),$$

ahol

$$q_{1n}(t) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^t \left(1 - F_n(s) - \frac{1}{n} \right)^2 dF_n^1(s).$$

Egyszerű átalakításokkal belátható ($T_n = T_n(\lambda)$ jelölést használjuk a bizonyítás további részében), hogy

$$(11.9) \quad \Delta_n \cong \Delta_n(T_n) + 1 - F^{01}(T_n).$$

A $\Delta_n(T_n)$ tag becslésénél először az $x = \exp(\log x)$ azonosságot alkalmazzuk, majd $\exp(-A_n(t))$ -t kivonunk és hozzáadunk. A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazása után a 8.3. tétel bizonyításánál látott módon alkalmazzuk az egy-, ill. kéttagú

Taylor-formulát, így a következő tagokat kapjuk:

$$(11.10) \quad A_n(T_n) \cong \sup_{-\infty < t \leq T_n} q_{2n}(t) + \sup_{-\infty < t \leq T_n} q_{3n}(t) + \sup_{-\infty < t \leq T_n} q_{4n}(t),$$

ahol

$$q_{2n}(t) = |-\log(1 - \hat{F}_n^{01}(t)) - A_n^1(t)|,$$

$$q_{3n}(t) = (1 - F^{01}(t)) |A_n^1(t) - A^1(t)|,$$

$$q_{4n}(t) = \frac{1}{2} (1 - F^{01}(t)) |A_n^1(t) - A^1(t)| \exp(|A_n^1(t) - A^1(t)|).$$

Parciális integrálás után:

$$\begin{aligned} |A_n^1(t) - A^1(t)| &\cong \left| \int_{-\infty}^t \frac{F_n(s) - F(s)}{(1 - F_n(s))(1 - F(s))} dF_n^1(s) \right| + \\ &+ \left| \int_{-\infty}^t (F_n^1(s+) - F^1(s+)) d(1/1 - F(s)) \right| + \\ &+ |F_n^1(t) - F^1(t)|(1 - F(t))^{-1}. \end{aligned}$$

Legyen $0 < \varepsilon < \lambda - 1$ tetszőleges valós szám. A jólismert *Chung—Szmirnov-féle iterált logaritmus tétel* és a *Kiefer-féle* [14] *iterált logaritmus tételek* alapján majdnem minden ω elemi eseményhez létezik olyan $n_1 = n_1(\varepsilon, \omega)$ küszöbszám, hogy ha $n \geq n_1$, akkor

$$(11.11) \quad |A_n^1(t) - A^1(t)| \cong (1 + \varepsilon) \mu_n q_{5n}(t) + 2(1 + \varepsilon) \mu_n (1 - F(t))^{-1},$$

ahol

$$\mu_n = (\log \log n / 2n)^{1/2}$$

és

$$q_{5n}(t) = \left| \int_{-\infty}^t (1 - F_n(s))^{-1} (1 - F(s))^{-1} dF_n^1(s) \right|.$$

Az előbb említett *Chung—Szmirnov-tételből* az is következik, hogy

$$q_{5n}(t) \cong \frac{\lambda}{\lambda - (1 + \varepsilon)} \left| \int_{-\infty}^t (1 - F(s))^{-2} dF_n^1(s) \right|,$$

ha $n \geq n_2(\varepsilon, \omega)$. Az $F_n^1 = (F_n^1 - F^1) + F^1$ elemi átalakítással, parciális integrálással, valamint a (7.4) formula felhasználásával kapjuk, hogy

$$q_{5n}(t) \cong \frac{2\lambda(1 + \varepsilon)}{\lambda - (1 + \varepsilon)} \frac{\mu_n}{(1 - F(t))^2} + \frac{\lambda}{\lambda - (1 + \varepsilon)} \frac{1}{1 - F(t)}$$

minden $n \geq \max(n_1, n_2)$ egész számra. Helyettesítsük ezt be a (11.11) jobb oldalába, így minden $n \geq \max(n_1, n_2)$ -re teljesül, hogy

$$(11.15) \quad \begin{aligned} |A_n^1(t) - A^1(t)| &\cong \frac{2(1 + \varepsilon)}{1 - F(t)} \mu_n + \frac{2\lambda(1 + \varepsilon)^2}{\lambda - (1 + \varepsilon)} \frac{\mu_n^2}{(1 - F(t))^2} + \\ &+ \frac{\lambda(1 + \varepsilon)}{\lambda - (1 + \varepsilon)} \frac{\mu_n}{1 - F(t)}. \end{aligned}$$

Vezessük be a következő függvényeket:

$$\psi(\varepsilon, \lambda) = \frac{2(1+\varepsilon)}{\lambda} + \frac{2(1+\varepsilon)^2}{\lambda(\lambda-(1+\varepsilon))} + \frac{1+\varepsilon}{\lambda-(1+\varepsilon)},$$

$$\chi(x) = x \{1 + (x/2) \exp(x)\}.$$

Ha $t \leq T_n = T_n(\lambda)$, akkor μ_n definíciója miatt

$$(11.16) \quad \mu_n(1-F(t))^{-1} \leq 1/\lambda, \quad t \leq T_n = T_n(\lambda),$$

így (11.15) alapján

$$(11.17) \quad q_{4n}(t) \leq (1-F^{01}(t)) |A_n^1(t) - A^1(t)| \frac{1}{2} \psi(\varepsilon, \lambda) \exp(\psi(\varepsilon, \lambda))$$

minden $-\infty < t \leq T_n$ és $n \geq \max(n_1, n_2)$ esetén. Az eddigiekhez hasonló módon, a Chung—Szmirnov-tétel alkalmazásával látható, hogy

$$(11.18) \quad q_{1n}(t) \leq \frac{4}{n} \int_{-\infty}^t (1-F(s))^{-2} dF_n^1(s),$$

ha $n \geq n_3(\varepsilon, \omega) \geq n_2(\varepsilon, \omega)$ és $-\infty < t \leq T_n$. Alkalmazzuk a (11.18), (11.15) és (11.16) egyenlőtlenséget. Így ha $n \geq n_0 = \max(n_1, n_3)$, akkor

$$(11.19) \quad \Delta(T_n) \leq 4 \left(\frac{2(1+\varepsilon)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{2}{n \log \log n} \right)^{1/2} + \sup_{-\infty < t \leq T_n} \frac{1-F^{01}(t)}{1-F(t)} \mu_n \lambda \chi(\psi(\varepsilon, \lambda)).$$

A következő átalakítás nagyon egyszerű, de alapvetően fontos a ráta meghatározásában. Minden $-\infty < t \leq T_n$ esetén

$$(11.20) \quad \frac{1-F^{01}(t)}{1-F(t)} \mu_n = \frac{\mu_n}{1-F^{02}(t)} \leq \frac{\mu_n}{1-F^{02}(T_n)} \leq$$

$$\leq \frac{1-F(T_n)}{\lambda(1-F^{02}(T_n))} = \frac{1}{\lambda} (1-F^{01}(T_n)).$$

Így (11.19) és (11.9)-ből azt kapjuk, hogy

$$\Delta_n \leq 4 \left(\frac{2(1+\varepsilon)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{2}{n \log \log n} \right)^{1/2} + (1 + \chi(\psi(\varepsilon, \lambda))) (1 - F^{01}(T_n)),$$

ha $n \geq n_0(\varepsilon, \omega)$, továbbá $1 + \chi(\psi(\varepsilon, \lambda)) \rightarrow v(\lambda)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

A 11.4. Következmény bizonyítása. (i) Mivel

$$\Delta_n \leq |F_n^{01}(X_{n:n}+) - F^{01}(X_{n:n}+)| = 1 - F^{01}(X_{n:n}) \leq 1 - F^{01}(T_{F^{02}}),$$

ezért, ha $T_{F^{02}} < T_{F^{01}}$ és $F^{02}(T_{F^{02}}) = 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} 1 - F^{01}(T_{F^{02}})$, másrészt a 11.3. tétel alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\leq} v(\lambda) (1 - F^{01}(T_{F^{02}})).$$

Az állítást $\lambda \rightarrow \infty$ határátmenettel kapjuk meg.

(iii) Legyen $\delta > 0$ tetszőleges valós szám és definiáljuk a T_n^0 számsorozatot a következő módon:

$$1 - F^{01}(T_n^0) = \frac{\lambda(1+\delta)}{1 - F^{02}(T_{F01})} \mu_n.$$

Ekkor $T_n^0 \rightarrow T_{F01}$, ha $n \rightarrow \infty$. Így $1 - F^{02}(T_n^0) \rightarrow 1 - F^{02}(T_{F01})$, $n \rightarrow \infty$, az F^{02} eloszlásfüggvény bal oldali folytonossága miatt, továbbá $1 - F(T_n^0)/(\lambda\mu_n) \rightarrow 1 + \delta$, $n \rightarrow \infty$. Ezért $T_n^0 \cong T_n(\lambda)$ elég nagy n -re, tehát

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_n \frac{1 - F^{02}(T_{F01})}{\lambda(1+\delta)\mu_n} \cong \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{1 - F^{01}(T_n(\lambda))} \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} v(\lambda).$$

Az egyenlőtlenség másik oldalát a 11.2. tétel bizonyításánál látott módszerrel fogjuk belátni. Ha $t_0 < T_F$ tetszőleges rögzített pont, akkor

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2 \log \log n} \right)^{1/2} |F_n^{01}(t_0) - F^{01}(t_0)| \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} (1 - F^{01}(t_0))(d^1(t_0))^{1/2}.$$

Elemi átalakítással látható, hogy

$$(1 - F^{01}(t_0))(d^1(t_0))^{1/2} \cong (F^{01}(t_0)(1 - F^{01}(t_0)))^{1/2},$$

ezért

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{\log \log n} \right)^{1/2} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} 2 \sup_{-\infty < t_0 < \infty} (F^{01}(t_0)(1 - F^{01}(t_0)))^{1/2} = 1.$$

Az [59] dolgozatban folytonos F^{01} eloszlásfüggvény esetén az egybeeső adatok különböző csoportosításán alapuló szorzatbecslések egy egész osztályát vezettük be. Megmutattuk, hogy erre az osztályra is igaz a 11.3. tétel és a 11.4. következmény.

Tetszőleges F^{01} és F^{02} eloszlásfüggvények esetén csak *Glivenko—Cantelli-típusú tételeket* sikerült bebizonyítani eddig. WINTER, FÖLDES és REJTŐ [169] bizonyították be a következő tételt.

Legyen

$$\tilde{\Delta}_n(T) = \sup_{-\infty < t \leq T} |\tilde{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t+)|$$

és

$$\tilde{\Delta}_n = \sup_{-\infty < t < \infty} |\tilde{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t+)|.$$

11.5 TÉTEL. (WINTER, FÖLDES, REJTŐ [169]). Ha $F(T) < 1$, akkor

(i) $\tilde{\Delta}_n(T) \xrightarrow{\text{m.m.}} 0$, $n \rightarrow \infty$.

(ii) Ha $T_{F01} < T_{F02}$, akkor

$$\tilde{\Delta}_n \xrightarrow{\text{m.m.}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(iii) Ha $T_{F01} = T_{F02}$, akkor

$$\tilde{\Delta}_n \xrightarrow{\text{m.m.}} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

kivéve azt az esetet, amikor $F^{02}(T_{F01}) = 1$ és $F^{01}(T_{F01}) < 1$, tehát T_{F01} az F^{02} függvény folytonossági pontja, az F^{01} függvénynek pedig szakadási pontja.

12. Paraméterbecslési módszerek és a becsült paraméterű hazárd- és szorzatbecslés folyamatok konvergenciája¹

Paraméterbecslési eljárásainkat csak $k=2$ esetén a $H_n(\mathbf{x})$ és az $L_n(\mathbf{x})$ folyamatok első komponensére dolgoztuk ki, mert tetszőleges k és tetszőleges sok komponens esetén a módszer szó szerint megegyezik az egy komponens becslésére adottal, de a leírás jóval bonyolultabbá válna. Így csak egy példát mutatunk arra, amikor az $L_n(\mathbf{x})$ folyamat mindkét komponensében paraméterbecslést végzünk. Példánk legelőször a *Kaplan—Meier-modellre* vonatkozik, de példát mutatunk a kockázatmodellben történő paraméterbecslésre is.

Cenzorált adatokon alapuló paraméterbecslést eddig még kevesen végeztek és csak speciális alakú F^{0i} eloszlásfüggvények esetén. A legáltalánosabb módszert BURKE [45] ismertette, az első részben az ő eredményeit fejlesztjük tovább. Nem az a célunk, hogy a legáltalánosabb feltételek mellett bizonyítsuk be tételeinket, inkább példákat igyekszünk mutatni arra, hogy azok hogyan alkalmazhatók bizonyos speciális eloszlás-családokra.

Jelölje $\{F^{0i}(t; \Theta), t \in R, \Theta \in R^p\}$ eloszlásfüggvényeknek egy családját, ahol Θ a család paramétervektora. A Θ paramétervektort a (2.1) mintából becsüljük valamely Θ_n vektorral. Vezessük be a paraméterbecsült hazárd- és szorzatbecslés folyamatokat:

$$(12.1) \quad H_n^1(t; \Theta_n) = n^{1/2}(A_n^1(t) - A^1(t; \Theta_n))$$

és

$$(12.2) \quad L_n^1(t; \Theta_n) = n^{1/2}(\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t; \Theta_n)).$$

A módszereket úgy csoportosítottuk, ahogy az igaz paraméter Θ_0 becslése történik a Θ_n vektorral. A paraméterbecsült folyamatokat a következő módon alakíthatjuk át a *Taylor-féle formulával*:

$$(12.3) \quad H_n^1(t; \Theta_n) = n^{1/2}(A_n^1(t) - A^1(t; \Theta_0) - n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0) \bar{V}_{\Theta_0} A^1(t; \Theta_0) + \\ + n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0) \bar{V}_{\Theta_0} A^1(t; \Theta_n^*),$$

ahol $\|\Theta_n^* - \Theta_0\|_p \leq \|\Theta_n - \Theta_0\|_p$ és $\bar{V}_{\Theta_0} A^1(t; \Theta_0)$ a A^1 hazárdfüggvény paraméter szerinti deriváltjának a transzponáltja. Hasonló módon átalakítjuk az $L_n^1(t; \Theta_n)$ folyamatot is:

$$(12.4) \quad L_n^1(t; \Theta_n) = n^{1/2}(\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t; \Theta_0)) - \\ - n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0) \bar{V}_{\Theta_0} F^{01}(t; \Theta_0) + n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0) \bar{V}_{\Theta_0} F^{01}(t; \Theta_n^{**}),$$

ahol $\|\Theta_n^{**} - \Theta_0\|_p \leq \|\Theta_n - \Theta_0\|_p$.

a) A momentum módszer

A becslés alap gondolata BURKE, CSÖRGŐ M., CSÖRGŐ S. és RÉVÉSZ [3] dolgozatából származik, ahol a közönséges (nem cenzorált) becsült paraméterű empirikus folyamatot vizsgálták. Tegyük fel, hogy a $\hat{\Theta}_n$ becslés olyan, hogy teljesül rá a következő,

¹ Ez a fejezet kizárólag HORVÁTH LAJOS által egyedül elért, máshol még nem publikált eredményeket tartalmaz.

lényegében a becslés aszimptotikus normalitását megkívánó felbontás

$$n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{l}(X_j) - E\mathbf{l}(X_j)) + \\ + n^{-1/2} \sum_{j=1}^n (\delta_j^1 \mathbf{h}(X_j) - E\delta_j^1 \mathbf{h}(X_j)) + \varepsilon_{1n},$$

ahol \mathbf{l} és \mathbf{h} vektorértékű függvények és $\varepsilon_{1n} \rightarrow 0$ sztochasztikusan vagy 1 valószínűséggel. Az α_n^1 cenzorált és az α_n empirikus folyamattal a következő alakba írhatjuk át ezt a feltételt:

$$(12.5) \quad n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{l}(u) d\alpha_n(u) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(u) d\alpha_n^1(u) + \varepsilon_{1n}.$$

A 6.1. tétel alapján természetes az a sejtés, hogy bizonyos \mathbf{l} és \mathbf{h} függvények esetén $n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0)$ sztochasztikusan vagy 1 valószínűséggel konvergálni fog a

$$(12.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{l}(u) dB_1(u) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(u) dB_1^1(u)$$

valószínűségi változóhoz vagy approximálható ennek egy kópiasorozatával. Vezessük be a következő folyamatokat:

$$(12.7) \quad \hat{G}_n^1(t) = G_n^1(t) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{l}(u) dB_n(u) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(u) dB_n^1(u) \right) \bar{V}_{\Theta} A^1(t; \Theta_0),$$

$$(12.8) \quad \hat{Q}_n^1(t) = Q_n^1(t) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{l}(u) dB_n(u) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(u) dB_n^1(u) \right) \bar{V}_{\Theta} F^{01}(t; \Theta_0),$$

ahol B_n és B_n^1 a 6.1. tételbeli folyamatsorozatok. A definíció alapján $E\hat{G}_n^1(t) = \hat{Q}_n^1(t) = 0$.

12.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy $F(T) < 1$ és teljesülnek a következő feltételek:

$$(i) \quad \varepsilon_{1n} \xrightarrow{p} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{l}(u) dF(u) < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(u) dF^1(u) < \infty,$$

$$(iii) \quad \sigma_1 = E \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{l}(u) dB_n(u) \right)^2 < \infty,$$

$$\sigma_2 = E \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(u) dB_n^1(u) \right)^2 < \infty.$$

(iv) $\nabla_{\Theta} F^{01}(t; \Theta)$ egyenletesen folytonos t -ben és Θ -ban, ahol $-\infty < t \leq T$ és Θ a Θ_0 egy adott, zárt, nem üres környezetében van.

(v) Az $l(t)$ és $h(t)$ függvények minden komponense korlátos változású minden véges intervallumon.

Ekkor

$$\sup_{-\infty < t \leq T} |H_n^1(t; \hat{\Theta}_n) - \hat{G}_n^1(t)| \xrightarrow{p} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

és

$$\sup_{-\infty < t \leq T} |L_n^1(t; \hat{\Theta}_n) - \hat{Q}_n^1(t)| \xrightarrow{p} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. A (12.3) és a (12.4) felbontásokat használjuk. Például a hazárd-bebecslés folyamat esetén

$$\begin{aligned} \sup_{-\infty < t \leq T} |H_n^1(t; \hat{\Theta}_n) - \hat{G}_n^1(t)| &\leq \sup_{-\infty < t \leq T} |H_n^1(t) - G_n^1(t)| + \\ &+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{l}(u) d(\alpha_n(u) - B_n(u)) \right| \sup_{-\infty < t \leq T} |\bar{V}_{\Theta} \Lambda^1(t; \Theta_0)| + \\ &+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(u) d(\alpha_n^1(u) - B_n^1(u)) \right| \sup_{-\infty < t \leq T} |\bar{V}_{\Theta} \Lambda^1(t; \Theta_0)| + \\ &+ \sup_{-\infty < t \leq T} |n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) \bar{V}_{\Theta} \Lambda^1(t; \Theta_n^*)| + \varepsilon_{1n}. \end{aligned}$$

Az első tag sztochasztikus 0-hoz tartása következik a 7.2. tételből. A másik három tag vizsgálata ugyanúgy történik, ahogyan a [3] dolgozatban, a Theorem 3.1 a) pontjának bizonyításánál.

Ha az F^{01} és F^{02} eloszlásfüggvények folytonosak, akkor a \hat{G}_n^1 és \hat{Q}_n^1 kovarianciáját is meg tudjuk határozni. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1(u) &= \int_{-\infty}^u \mathbf{l}(s) dF(s), \\ \mathbf{l}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{l}(s) dF(s) = E\mathbf{l}(X_1), \\ \mathbf{h}_1(u) &= \int_{-\infty}^u \mathbf{h}(s) dF^1(s), \\ \mathbf{h}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(s) dF^1(s) = E\delta_1^1 \mathbf{h}(X_1), \\ \mathbf{l}_2(u) &= \int_{-\infty}^u \left(\frac{\mathbf{l}_1(s) - \mathbf{l}_1}{1 - F(s)} + \mathbf{l}(s) \right) d\Lambda^1(s), \\ \mathbf{h}_2(u) &= \int_{-\infty}^u \left(\frac{\mathbf{h}_1(s) - \mathbf{h}_1}{1 - F(s)} + \mathbf{h}(s) \right) d\Lambda^1(s), \\ \sigma_{12} &= E \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{l}(u) dB_n(u) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(u) dB_n^1(u). \end{aligned}$$

A bevezetett függvények a $(-\infty, T]$ intervallumon végesek, továbbá a $\sigma_{12} \cong \sigma_1 \sigma_2$ egyenlőtlenség miatt σ_{12} is véges. A most bevezetett jelölésekkel a kovarianciára azt kapjuk, hogy

$$(12.9) \quad E\hat{G}_n^1(t)\hat{G}_n^1(s) = E \frac{\hat{Q}_n^1(t)}{1-F^{01}(t)} \frac{\hat{Q}_n^1(s)}{1-F^{01}(s)} = d^1(t \wedge s) - \\ - (\mathbf{1}_2(s) + \mathbf{h}_2(s)) \bar{V}_\Theta A^1(t; \Theta_0) - (\mathbf{1}_2(t) + \mathbf{h}_2(t)) \bar{V}_\Theta A^1(s; \Theta_0) + \\ + V_\Theta A^1(s; \Theta_0)(\sigma_1 + 2\sigma_{12} + \sigma_2) \bar{V}_\Theta A^1(t; \Theta_0).$$

A 12.1. tételben a sztochasztikus konvergencia helyett majdnem mindenütt való konvergenciát is lehet bizonyítani, ha a tétel (iv) és (v) feltételeit a [3] dolgozatban látott módon erősebb feltételekkel helyettesítjük.

12.1. PÉLDA. Tegyük fel, hogy F^{01} az exponenciális eloszlásfüggvény:

$$F^{01}(t; \Theta_0) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{1}{\Theta_0} t\right), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ekkor a hazárfüggvény

$$\lambda^1(t; \Theta_0) = \begin{cases} \frac{1}{\Theta_0}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Az

$$\frac{f^{01}(t)}{1-F^{01}(t)} = \frac{1}{\Theta_0}$$

egyenletet szorozzuk meg $1-F(t)$ -vel, majd integráljunk 0-tól ∞ -ig:

$$\int_0^\infty (1-F^{02}(t)) dF^{01}(t) = \frac{1}{\Theta_0} \int_0^\infty (1-F(t)) dt.$$

Így azt kaptuk, hogy

$$(12.10) \quad \Theta_0 = \frac{EX_1}{E\delta_1^1},$$

függetlenül az F^{02} eloszlástól. A Θ_0 paraméter becslésére így a

$$\hat{\Theta}_n = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^1 \right)$$

valószínűségi változót használjuk. Egyszerű számolással megmutatható, hogy az

$$l(t) = t/E\delta_1^1 \quad \text{és} \quad h(t) = -EX_1/(E\delta_1^1)^2$$

függvényekkel teljesülnek a tétel feltételei.

12.2. PÉLDA. Az exponenciális eloszláshoz hasonló módon becsülhetjük az élettartam vizsgálatoknál ugyancsak fontos Weibull- és a kettős exponenciális-eloszlás

paraméterét is. Ha F^{01} Weibull-eloszlású, azaz

$$F^{01}(t; \Theta_0) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{1}{\Theta_0} t^m\right), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad m \text{ adott pozitív szám,}$$

akkor

$$(12.11) \quad \lambda^1(t; \Theta_0) = \frac{1}{\Theta_0} m t^{m-1}, \quad t \geq 0,$$

és így

$$\hat{\Theta}_n = \left(\sum_{i=1}^n X_i^m \right) / \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^1 \right)$$

alkalmazható a Θ_0 paraméter becslésére.

Hasonló a helyzet a kettős exponenciális esetében is:

$$F^{01}(t; \Theta_0) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\Theta_0} e^t\right), \quad \Theta_0 > 0,$$

$$(12.12) \quad \lambda^1(t; \Theta_0) = \frac{1}{\Theta_0} e^t,$$

$$\hat{\Theta}_n = \left(\sum_{i=1}^n \exp(X_i) \right) / \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^1 \right).$$

12.3. PÉLDA. A kockázatmodellben azt akarjuk tesztelni, hogy mindkét eloszlásfüggvény, F^{01} és F^{02} is, exponenciális. Ha valóban így van, F^{01} a 12.1. példabeli és

$$F^{02}(t; \mu_0) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{1}{\mu_0} t\right), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

akkor a μ_0 paramétert a 12.1. példában látottak szerint a

$$\hat{\mu}_n = \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \right)$$

valószínűségi változóval becsüljük. Ebben az esetben a (12.9) kovarianciafüggvényt egyszerűbb alakra tudjuk hozni:

$$(12.13) \quad E \frac{\hat{Q}_n^1(t)}{1 - F^{01}(t)} \frac{\hat{Q}_n^1(s)}{1 - F^{01}(s)} = d^1(t \wedge s) - \left(\frac{1}{\Theta_0^2} + \frac{1}{\Theta_0 \mu_0} \right) st, \quad 0 \leq t, s < \infty.$$

BURKE [45] a (12.13) kovariancia alakját használta fel, hogy az L_n^1 folyamat határ-eloszlását visszavezesse egy ismert eloszlásra. Mindkét függvény exponenciális, ezért

$$d^1(t) = \left(\frac{\mu_0}{\Theta_0 + \mu_0} \right) \frac{F(t; \Theta_0, \mu_0)}{1 - F(t; \Theta_0, \mu_0)}$$

és

$$E\delta_1^1 = \frac{\mu_0}{\Theta_0 + \mu_0}.$$

Az

$$(12.14) \quad L_n^1(t; \hat{\Theta}_n) \exp(-t/\hat{\mu}_n) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^1 \right)^{-1/2}$$

folyamat gyengén konvergál a

$$\hat{Q}^*(t) = \hat{Q}_1^1(t) (1 - F^{02}(t)) \left(\frac{\Theta_0 + \mu_0}{\mu_0} \right)^{1/2}$$

folyamathoz $(-\infty, T] - n$, mivel

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\exp(-t/\hat{\mu}_n) - \exp(-t/\mu)| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O\left(\left(\frac{\log \log n}{n}\right)^{1/2}\right),$$

és

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^1 - \frac{1}{\Theta_0} \right| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O\left(\left(\frac{\log \log n}{n}\right)^{1/2}\right).$$

Ugyanekkor a (12.13) formula alapján

$$(12.15) \quad E\hat{Q}^*(t)\hat{Q}^*(s) = F(s) \wedge F(t) - F(s)F(t) - (1 - F(s)) \log(1 - F(s)) \cdot \\ \cdot (1 - F(t)) \log(1 - F(t)).$$

A (12.14) folyamaton alapuló *Cramér—von Mises* és *Kolmogorov—Szmirnov-statisztikák* aszimptotikus szignifikancia pontjait STEPHENS [21] és DURBIN [9] dolgozataiból meg tudjuk határozni, mivel a \hat{Q}^* kovarianciája megegyezik egy közönséges (nem cenzorált) empirikus folyamat határfolyamatának kovarianciájával, melyet az exponencialitás hagyományos ellenőrzésére használnak.

A most látott módszer csak arra ad lehetőséget, hogy egymástól függetlenül ellenőrizzük F^{01} és F^{02} exponencialitását, továbbá a határfolyamat persze függ a Θ_0, μ_0 paraméterektől. Egy újabb módszert mutatunk most be, a nem cenzorált empirikus folyamatok esetén is használt felezési módszert. Ez az eljárás, a minta felezésénél bevezetett külön randomizáció miatt, ugyanúgy vitatható, mint a nemcenzorált esetben. Mindenesetre érdekes látni, hogy most is ugyanúgy működik. Tegyük fel, hogy $n=2m$ és függetlenül osszuk a mintát két csoportba, az első csoport alapján kapjuk a $\hat{\Theta}_m$, a második alapján pedig a $\hat{\mu}_m$ becslést. A független szétosztás miatt $\hat{\Theta}_m$ és $\hat{\mu}_m$ függetlenek. Az F^{01} és F^{02} függvények becslését a teljes mintából végezzük. Tekintsük így a

$$(12.16) \quad \left(\frac{n}{d_n^1(T_1)} \right)^{1/2} \frac{\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t; \hat{\Theta}_m)}{1 - F^{01}(t; \hat{\Theta}_m)}, \quad F(T_1) < 1,$$

és

$$(12.17) \quad \left(\frac{n}{d_n^2(T_2)} \right)^{1/2} \frac{\hat{F}_n^{02}(t) - F^{02}(t; \hat{\mu}_m)}{1 - F^{02}(t; \hat{\mu}_m)}, \quad F(T_2) < 1$$

folyamatokat. A 8.5. tétel, valamint a szorzatbecslés folyamat 8. fejezetben használt reprezentációja és (12.5) felhasználásával megmutatható, hogy (12.16) és (12.17)

folyamatok gyengén konvergálnak két független *Wiener-folyamathoz*, és így például

$$P\left\{\sup_{-\infty < t \leq T_1} \left(\frac{n}{d_n^1(T_1)}\right)^{1/2} \left| \frac{\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t; \hat{\Theta}_m)}{1 - F^{01}(t; \hat{\Theta}_m)} \right| < x, \right. \\ \left. \sup_{-\infty < t \leq T_2} \left(\frac{n}{d_n^2(T_2)}\right)^{1/2} \left| \frac{\hat{F}_n^{02}(t) - F^{02}(t; \hat{\mu}_m)}{1 - F^{02}(t; \hat{\mu}_m)} \right| < y \right\} \rightarrow \Phi_1(x) \Phi_1(y),$$

ha $n \rightarrow \infty$.

12.4. PÉLDA. A következőkben $\Theta_0 = (\Theta_{01}, \Theta_{02})$ vektorértékű paramétert becsüljük, amikor F^{01} *Pareto-eloszlású*, vagyis

$$(12.18) \quad \lambda^1(t; \Theta_0) = \begin{cases} \Theta_{01} + \frac{\Theta_{02}}{t + \Theta_{03}}, & t \geq 0, \quad \Theta_{03} > 0, \text{ adott,} \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

A fenti egyenlőséget ismét szorozzuk meg $1 - F(t)$ -vel és integráljuk 0-tól ∞ -ig, illetve $t(1 - F(t))$ -vel szorozzuk meg és ugyancsak az előző félegyenesen integráljuk. Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$(12.19) \quad \Theta_{03} E\delta_1^1 + E\delta_1^1 X_1 = \Theta_{01} \left\{ \frac{1}{2} EX_1^2 + \Theta_{03} EX_1 \right\} + \Theta_{02} EX_1, \\ \Theta_{03} E\delta_1^1 X_1 + E\delta_1^1 X_1^2 = \Theta_{01} \left\{ \frac{1}{3} EX_1^3 + \frac{1}{2} \Theta_{03} EX_1^2 \right\} + \frac{1}{2} \Theta_{02} EX_1^2.$$

A (12.19) egyenletrendszernek mindig van egyértelmű megoldása, mert a rendszer determinánsa

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} EX_1^2 + \Theta_{03} EX_1 & EX_1 \\ \frac{1}{3} EX_1^3 + \frac{1}{2} \Theta_{03} EX_1^2 & \frac{1}{2} EX_1^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left\{ E^2(X_1^{1/2} X_1^{3/2}) - \frac{4}{3} EX_1 EX_1^3 \right\}$$

mindig negatív a *Cauchy—Schwartz—Bunyakovszkij-egyenlőtlenség* alapján. A (12.19) egyenletrendszer mindegyik együtthatóját a mintából becsüljük, így a

$$(12.20) \quad \Theta_{03} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^1 X_i = \hat{\Theta}_{n1} \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{\Theta_{03}}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right\} + \hat{\Theta}_{n2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \Theta_{03} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^1 X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^1 X_i^2 = \hat{\Theta}_{n1} \left\{ \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n X_i^3 + \frac{\Theta_{03}}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right\} + \hat{\Theta}_{n2} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $\hat{\Theta}_n = (\hat{\Theta}_{n1}, \hat{\Theta}_{n2})$. Az $n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0)$ különbség (12.5) alakban írható fel, mivel $\Theta_0 = \Phi(y_0)$,

$$y_0 = (y_{01}, \dots, y_{06}) = (E\delta_1^1, E\delta_1^1 X_1, E\delta_1^1 X_1^2, EX_1, EX_1^2, EX_1^3), \\ \hat{\Theta}_n = \Phi(\hat{y}_{n1}, \dots, \hat{y}_{n6}) = \Phi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^1, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3\right)$$

valamely φ függvénnyel. Az egyenletrendszer megoldhatósága miatt φ az y_0 pont egy környezetében *Taylor-sorba* fejthető, de nekünk elég lesz csak az egytagú formula:

$$(12.21) \quad n^{1/2}(\varphi(y_0) - \varphi(\hat{y}_n)) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=y_0} n^{1/2}(y_{0i} - \hat{y}_{ni}) + \\ + \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=y^*} - \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=y_0} \right) n^{1/2}(y_{0i} - \hat{y}_{ni}),$$

ahol $\|y^* - y_0\|_6 \equiv \|\hat{y}_n - y_0\|_6$. A φ függvény folytonosan deriválható, így a nagy számok törvénye és $n^{1/2}(y_{0i} - \hat{y}_{ni})$ aszimptotikus normalitása miatt $\varepsilon_{1n} \xrightarrow{p} 0$. A *Pareto-eloszlásnak* akárhányadik momentuma létezik, ezért a 12.1. tétel minden feltétele teljesül.

12.5. PÉLDA. Legyen $m \geq 1$ rögzített egész, és $X^{01}(\Theta_0, m)$ paraméterű gamma eloszlás

$$f^{01}(t) = \begin{cases} \Theta_0^m \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1} \exp(-\Theta_0 t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, ahol $\Gamma(m)$ a gamma függvény. A hazárdráta ebben az esetben

$$(12.22) \quad \frac{1}{\lambda^1(t; \Theta_0)} = \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(j)} \Theta_0^{j-1-m} t^{j-m}.$$

Szorozzuk meg ezt $m^{m-1}(1 - F^{02}(t))f^{01}(t)$ -vel és integráljuk a pozitív félegyenesen. Eredményül az

$$(12.23) \quad EX_1^m = \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(j)} \Theta_0^{j-1-m} E\delta_1^j X_1^{j-1}$$

egyenletet kapjuk, melyben EX_1^m -t $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_1^m$ -mel, $E\delta_1^j X_1^{j-1}$ -t pedig $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_1^j X_1^{j-1}$ -nel, $j=1, \dots, m$, helyettesítve az így kapott egyenlet pozitív gyökét használjuk Θ_0 becslésére. A 12.1. tétel feltételei is teljesülnek, ezt a 12.4. példa végén látottak szerint ellenőrizhetjük.

12.6. PÉLDA. Tegyük fel, hogy

$$F^{01}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \left(\frac{\Theta_{02} - t}{\Theta_{02}} \right)^{\Theta_{01}}, & 0 \leq t \leq \Theta_{02}, \\ 1, & t > \Theta_{02}, \end{cases}$$

ahol Θ_{02} ismert. Ekkor

$$\lambda^1(t) = \frac{\Theta_{01}}{\Theta_{02} - t}, \quad 0 \leq t \leq \Theta_{02}.$$

A szokott eljárással a

$$\Theta_{02} E\delta_1^1 - E\delta_1^1 X_1 = \Theta_{01} EX_1$$

egyenletet kapjuk, melyből a

$$\hat{\Theta}_{n1} = \frac{\Theta_{02} \sum_{i=1}^n \delta_i^1 - \sum_{i=1}^n \delta_i^1 X_i}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

becslés adódik, melyre ismét teljesülnek a 12.1. tétel feltételei.

A példákon most bemutatott módszer alkalmazható minden olyan esetben, amikor a $\lambda^1(t)$ hazárdráta, vagy a reciproka

$$\sum_{i=1}^p \varphi_{i1}(\Theta_{0i}) \varphi_{i2}(t)$$

alakú, ahol a $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}$ függvények az argumentumukban nem szereplő paraméter-értékektől függetlenek és bizonyos simasági feltételeknek eleget tesznek.

A 12.1. tétel feltételei között csak (ii) és (iii) függ F^{02} -től, ha azonban $l(X^{01}), h(X^{01})$ szórása véges, akkor (i) és (ii) mindig teljesül, bármi is az F^{02} eloszlásfüggvény.

b) *A szorzatbecslésen alapuló paraméterbecslés*

A módszerünk GILL 10.4. tételén alapul, ezért ebben a pontban feltételezzük, hogy X^{01} 1 valószínűséggel pozitív valószínűségi változó. A becslés alapötlete az, hogy ha az ismeretlen paraméter

$$(12.24) \quad \Theta_0 = \int_0^\infty h(t) dF^{01}(t)$$

alakban állítható elő, akkor a

$$(12.25) \quad \hat{\Theta}_n = \int_0^\infty h(t) d\tilde{F}_n^{01}(t)$$

valószínűségi változó használható lesz Θ_0 becslésére. Ha

$$(12.26) \quad h(0+) = 0$$

és

$$(12.27) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)(1 - F^{01}(t)) = 0,$$

akkor (12.24) helyett írható, hogy

$$\Theta_0 = \int_0^\infty (1 - F^{01}(t+)) dh(t)$$

és (12.25) is ugyanúgy átalakítható:

$$\hat{\Theta}_n = \int_0^\infty (1 - \tilde{F}_n^{01}(t)) dh(t).$$

A 10. fejezetben bevezetett jelölésekkel

$$n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) = - \int_0^{\infty} \tilde{L}_n^1(t) dh(t),$$

így azt sejtjük, hogy az

$$\varepsilon_{2n} = n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) + \int_0^{\infty} \tilde{Q}_n^1(t) dh(t)$$

különbség nullához tart majd, ha h elég szabályos függvény. GILL azonban megmutatta, hogy a $h(t)=t$ függvény esetén se teljesül mindig $\varepsilon_{2n} \xrightarrow{p} 0, n \rightarrow \infty$. Vezessük be a következő folyamatsorozatot:

$$\hat{Q}_n^1(t) = Q_n^1(t) + \int_0^{\infty} \tilde{Q}_n^1(s) dh(s) \bar{\nabla}_{\Theta} F^{01}(t; \Theta_0).$$

12.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy $F(T) < 1, F(0+) = 0$ és teljesül (12.26), (12.27) és

(i) $\varepsilon_{2n} \xrightarrow{p} 0, n \rightarrow \infty,$

(ii) $E \left(\int_0^{\infty} \tilde{Q}_1^1(t) dh(t) \right)^2 < \infty,$

(iii) $\nabla_{\Theta} F^{01}(t; \Theta)$ egyenletesen folytonos t -ben és Θ -ban, ahol $-\infty < t \leq T$ és Θ a Θ_0 egy adott, zárt, nem üres környezetében van. Ekkor

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |L_n^1(t; \hat{\Theta}_n) - \hat{Q}_n^1(t)| \xrightarrow{p} 0, n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Megegyezik a 12.1. tétel bizonyításával.

Folytonos F függvény esetén a \hat{Q}_1^1 Gauss-folyamat kovarianciája a következő:

$$E \hat{Q}_1^1(t) = 0,$$

$$E \frac{\hat{Q}_1^1(t)}{1 - F^{01}(t)} \frac{\hat{Q}_1^1(s)}{1 - F^{01}(s)} = d^1(t \wedge s) - \int_0^t \hat{h}(u) dd^1(u) \bar{\nabla}_{\Theta} \Lambda^1(s; \Theta_0) - \\ - \int_0^s \hat{h}(u) dd^1(u) \bar{\nabla}_{\Theta} \Lambda^1(t, \Theta_0) + \nabla_{\Theta} \Lambda^1(t; \Theta_0) \int_0^{\infty} (\hat{h}(u))^2 dd^1(u) \bar{\nabla}_{\Theta} \Lambda^1(s; \Theta_0),$$

ahol

$$\hat{h}(u) = \int_u^{\infty} (1 - F^{01}(s)) dh(s).$$

A 12.2. tétel feltételei közül ε_{2n} sztochasztikus nullához tartása jelent erős feltételt, és ez megszabja, hogy milyen erős lehet a cenzorálás. Ez a 12.1. tétel esetén nem jelentkezett. Néhány példát mutatunk, amikor a tétel feltételei teljesülnek.

12.7. PÉLDA. Ha $T_{F^{01}} < \infty$ és $h(t)$ korlátos változású $[0, T_{F^{01}}]$ -en, valamint ha a 10.4. tétel feltételei teljesülnek, akkor $\varepsilon_{2n} \rightarrow 0$. A 12.6. példánál láttuk, hogy momentum módszerrel becsülve a paramétert, a kapott becslést a jelenlegi körülmények

között tetszőleges F^{02} eloszlásfüggvény mellett használhattuk, míg a mostani paraméterbecslésnél megszorítást kell tennünk F^{02} T_{F01} körüli viselkedésére.

12.8. PÉLDA. Abban az esetben, amikor a Θ_0 paraméter az X^{01} valószínűségi változó várható értéke, tehát ha $h(t) \equiv t$, GILL részletesen megvizsgálta a problémát. Az

$$(12.28) \quad e_n^1(0) = \int_0^{\infty} (1 - \tilde{F}_n^{01}(u)) du = \int_0^{X_{n:n}} (1 - \tilde{F}_n^{01}(u)) du$$

függvénnyel a 13. fejezetben még részletesen fogunk foglalkozni. A (12.28) definícióban az integrálás a $[0, X_{n:n}]$ véletlen intervallumon történik, így az

$$e^1(0) = \int_0^{\infty} (1 - F^{01}(u)) du$$

függvény mellett vezessük be az

$$\hat{e}_{(n)}^1(0) = \int_{[0, X_{n:n}]} (1 - F^{01}(u)) du$$

valószínűségi változót is. GILL bebizonyította, hogy ha

$$(12.29) \quad \lim_{t \rightarrow T_F} \left(\int_t^{\infty} (1 - F^{01}(u)) du \right)^2 d^1(t) = 0$$

és

$$(12.30) \quad \int_0^{\infty} \left(\int_t^{\infty} (1 - F^{01}(u)) du \right)^2 dd^1(t) < \infty,$$

akkor

$$(12.31) \quad n^{1/2}(e_n^1(0) - \hat{e}_{(n)}^1(0)) + \int_0^{\infty} \tilde{Q}_n^1(u) du \xrightarrow{p} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Az utóbbi (12.31) konvergencia még nem biztosítja, hogy $\varepsilon_{2n} \xrightarrow{p} 0$ fennálljon, ez akkor és csak akkor teljesül, ha $n^{1/2} \int_{X_{n:n}}^{\infty} (1 - F^{01}(u)) du \xrightarrow{p} 0$. Ha léteznek olyan $0 < \alpha < 2$ és $\beta > 0$ konstansok, hogy

$$(12.32) \quad 1 - F(t) \geq \beta \left(\int_t^{\infty} (1 - F^{01}(u)) du \right)^\alpha$$

elégg nagy t -re fennáll, akkor $\varepsilon_{2n} \xrightarrow{p} 0, n \rightarrow \infty$. Ha azonban léteznek olyan $\alpha > 2$ és $\beta > 0$ konstansok, hogy

$$(12.33) \quad 1 - F(t) < \beta \left(\int_t^{\infty} (1 - F^{01}(u)) du \right)^\alpha,$$

akkor ε_{2n} nem tart sztochasztikusan nullához. Az utóbbi két állítás GILLTŐL SZÁRMAZIK, BIZONYÍTÁSSAL EGYÜTT EGY HOZZÁNK ÍRT LEVELÉBEN TALÁLHATÓ.

Ha F^{01} és F^{02} mindkettő exponenciális Θ_0 , ill. μ_0 paraméterekkel, akkor a szorzatbecslésen alapuló módszer csak $\Theta_0 < \mu_0$ esetben használható. Így most általában nem létezik olyan teszt, amellyel F^{01} és F^{02} együttes exponencialitását ellenőrizhetnénk.

c) *Normális eloszlás várható értékének és szórásának a becslése*

Ha az X^{01} normális eloszlású valószínűségi változó és $EX^{01} = \sigma_{01}$, $E(X^{01} - \sigma_{01})^2 = \sigma_{02}^2$, akkor

$$F^{01}(\sigma_{01}) = \frac{1}{2}, \quad F^{01}(\sigma_{01} - 0,6745\sigma_{02}) = \frac{1}{4}.$$

Az empirikus cenzorált kvantilis folyamatra vonatkozó SANDER-féle [144]—[146] tételek alapján belátható, hogy a

$$\sigma_{n1} = \inf \left\{ t: \hat{F}_n^{01}(t) \cong \frac{1}{2} \right\},$$

$$\sigma_{n2} = \frac{\sigma_{n1} - \inf \left\{ t: \hat{F}_n^{01}(t) \cong \frac{1}{4} \right\}}{0,6745}$$

valószínűségi változók a $(\sigma_{01}, \sigma_{02})$ paraméterek olyan becslései, hogy $n^{1/2}(\sigma_{n1} - \sigma_{01})$ és $n^{1/2}(\sigma_{n2} - \sigma_{02})$ határértékben normális eloszlású valószínűségi változók, feltéve, hogy $F^{01}(T_F) > \frac{1}{2}$.

13. A várható élettartam függvény becslése cenzorált mintából

Az X^{0i} valószínűségi változó eloszlásának sok lehetséges jellemzői közül az egyik, az alkalmazásokban is fontos

$$(13.1) \quad e^i(t) = E(X^{0i} - t | X^{0i} \cong t)$$

feltételes várható érték, melyet várható élettartam függvénynek nevezünk. Az F^{0i} eloszlásfüggvény egyértelműen meghatározza e^i -t:

$$(13.2) \quad e^i(t) = \left(\int_t^{\infty} (1 - F^{0i}(u)) du \right) / (1 - F^{0i}(t)),$$

KOTZ és SHANBHAG [16] pedig bebizonyították, hogy ez fordítva is igaz:

$$\frac{1 - F^{0i}(t)}{1 - F^{0i}(s)} = \frac{e^i(s)}{e^i(t)} \exp \left(- \int_s^t \frac{1}{e^i(u)} du \right).$$

Ebben a fejezetben feltesszük, hogy $F(0+) = 0$, tehát az X^{0i} -k pozitív valószínűségi változók, és F folytonos eloszlásfüggvény. Jelöljük I -vel azon $1 \cong i \cong k$ egész

számok halmazát, melyekre az

$$(13.3) \quad EX^{0i} < \infty,$$

$$(13.4) \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{1-F^{0i}(u)}{1-F(u)} e^i(u) \right)^2 dF^i(u) < \infty$$

feltételek teljesülnek. A (13.2) formula alapján $e^i(t)$ egyik lehetséges becslése

$$(13.5) \quad e_n^i(t) = \left(\int_t^{\infty} (1-\tilde{F}_n^i(u)) du \right) / (1-\tilde{F}_n^i(t)).$$

A 12.8. példa alapján általában nem várható el, hogy $|e_n^i(0) - e^i(0)| \xrightarrow{p} 0$ fennálljon, ezért nem az e^i függvényt becsüljük, hanem a csonkítottját:

$$(13.6) \quad \bar{e}_{(n)}^i(t) = \left(\int_t^{T_n} (1-F^{0i}(u)) du \right) / (1-F^{0i}(t)).$$

Hasonló módon csonkítjuk az e_n^i véletlen függvényt:

$$(13.7) \quad \bar{e}_n^i(t) = \left(\int_t^{T_n} (1-\hat{F}_n^{0i}(u)) du \right) / (1-\hat{F}_n^{0i}(t)).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $I = \{1, 2, \dots, k_1\}$, a $k_1 = 0$ jelölésen az $I = \emptyset$ esetet értjük. Vezessük be a következő folyamatokat:

$$\bar{\mathbf{E}}_n(\mathbf{x}) = (\bar{E}_n^1(x_1), \dots, \bar{E}_n^{k_1}(x_{k_1})), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{k_1}),$$

$$\bar{E}_n^i(t) = n^{1/2}(\bar{e}_n^i(t) - \bar{e}_{(n)}^i(t)), \quad i = 1, \dots, k_1,$$

$$\mathbf{J}_n(\mathbf{x}) = (J_n^1(x_1), \dots, J_n^{k_1}(x_{k_1})),$$

$$J_n^i(t) = \left(- \int_t^{\infty} Q_n^i(u) du \right) (1-F^{0i}(t))^{-1} + \left(\int_t^{\infty} (1-F^{0i}(u)) du \right) \frac{Q_n^i(t)}{(1-F^{0i}(t))^2}.$$

A Q_n^i folyamatok kovarianciastruktúrája miatt \mathbf{J}_n olyan Gauss-folyamat, melynek komponensei függetlenek és $EJ_n^i(t) = 0$, valamint

$$(13.8) \quad EJ_n^i(t) J_n^j(s) = (1-F^{0i}(t))^{-1} (1-F^{0i}(s))^{-1} \times \\ \times \left(\int_t^{\infty} \left(\frac{1-F^{0i}(u)}{1-F(u)} e^i(u) \right)^2 dF^i(u) \wedge \int_s^{\infty} \left(\frac{1-F^{0j}(u)}{1-F(u)} e^j(u) \right)^2 dF^j(u) \right).$$

A (13.8) formulát először GHORAI, SUSARLA, SUSARLA és VAN RYZIN [87] (vö. [156], [111]) bizonyította be más módszerrel. A következőkben a [87] dolgozat főtételére adunk új, egyszerű bizonyítást más feltételek esetén. Feltételünk egyszerűbb, könnyebben kezelhető, és az esetek nagyobb részében gyorsabban növekvő T_n sorozatot enged meg, mint a [87] dolgozat két (igen bonyolult) feltétele.

13.1. TÉTEL. Ha $F(T) < 1$ és

- (i) $T_n r_2(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$,
 (ii) $T_n \rightarrow T_F = T_{F^i}$, $i = 1, \dots, k_1$,

akkor

$$\sup_{x \in [0, T]^{k_1}} \|\bar{E}_n(x) - J_n(x)\|_{k_1} \xrightarrow{p} 0.$$

Bizonyítás. Elemi átalakításokkal belátható a következő azonosság:

$$\begin{aligned} \bar{E}_n^i(t) - J_n^i(t) &= \left(- \int_t^{T_n} (L_n^i(u) - Q_n^i(u)) du \right) (1 - F^{0i}(t))^{-1} + \\ &+ \left(\int_t^{T_n} (1 - F^{0i}(u)) du \right) (L_n^i(t) - Q_n^i(t)) (1 - F^{0i}(t))^{-2} - \\ &- n^{-1/2} \left(\int_t^{T_n} L_n^i(u) du \right) L_n^i(t) (1 - \hat{F}_n^{0i}(t))^{-1} (1 - F^{0i}(t))^{-1} + \\ &+ n^{1/2} \left(\int_t^{T_n} (1 - F^{0i}(u)) du \right) (L_n^i(t))^2 (1 - \hat{F}_n^{0i}(t))^{-1} (1 - F^{0i}(t))^{-2} - \\ &- \left(\int_{T_n}^{\infty} Q_n^i(u) du \right) (1 - F^{0i}(t))^{-1} + \left(\int_{T_n}^{\infty} (1 - F^{0i}(u)) du \right) Q_n^i(t) (1 - F^{0i}(t))^{-2} = \\ &= q_{6n}^i(t) + \dots + q_{11n}^i(t). \end{aligned}$$

A q_{6n}^i és q_{11n}^i tagok becslésénél a 8.3. tételt használjuk. Az ott bebizonyított egyenlőtlenség következménye, hogy

$$\sup_{x \in [0, T]^{k_1}} \max_{1 \leq i \leq k_1} |q_{6n}^i(x_i)| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O(T_n r_2(n))$$

és

$$\sup_{x \in [0, T]^{k_1}} \max_{1 \leq i \leq k_1} |q_{11n}^i(x_i)| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O(r_2(n)).$$

A q_{8n}^i tagot alakítsuk át:

$$\begin{aligned} q_{8n}^i(t) &= n^{-1/2} \left(\int_t^{T_n} (Q_n^i(u) - L_n^i(u)) du \right) L_n^i(t) (1 - \hat{F}_n^{0i}(t))^{-1} (1 - F^{0i}(t))^{-1} - \\ &- n^{-1/2} \left(\int_t^{T_n} Q_n^i(u) du \right) L_n^i(t) (1 - \hat{F}_n^{0i}(t))^{-1} (1 - F^{0i}(t))^{-1}. \end{aligned}$$

Ismét a 8.3. tételt, valamint a 11.2. tételt és a Q_n^i Gauss-folyamat integrál reprezentációját használva

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, T]^{k_1}} \max_{1 \leq i \leq k_1} |q_{8n}^i(x_i)| &\stackrel{\text{m.m.}}{=} O(n^{-1/2} T_n r_2(n) (\log \log n)^{1/2}) + \\ &+ O(n^{-1/2} T_n (\log \log n) b_n^2). \end{aligned}$$

A 11.2. tétel alkalmazásával

$$\sup_{\mathbf{x} \in [0, T]^{k_1}} \max_{1 \leq i \leq k_1} |q_{0n}^i(x_i)| \stackrel{m.m.}{=} O(n^{-1/2} \log \log n).$$

Az utolsó két tag sztochasztikus nullához tartása a *Csebisev-egyenlőtlenségből* következik, mivel

$$P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |q_{10n}^i(t)| > \varepsilon (1 - F^{0i}(T))^{-1} \right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\left(\int_{T_n}^{\infty} Q_n^i(u) du \right)^2$$

és $E\left(\int_{T_n}^{\infty} Q_n^i(u) du \right)^2 \rightarrow 0$ a (13.4) feltétel alapján. Hasonló módon intézhető el a $q_{11n}^i(t)$ tag is:

$$\begin{aligned} P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{T_n}^{\infty} (1 - F^{0i}(u)) du \frac{(d^i(T))^{1/2}}{1 - F^{0i}(t)} \cdot \left| \frac{Q_n^i(t)}{(1 - F^{0i}(t))(d^i(T))^{1/2}} \right| > \varepsilon \right\} &\leq \\ &\leq 1 - \Phi_1 \left(\frac{\varepsilon}{\int_{T_n}^{\infty} (1 - F^{0i}(u)) du} \cdot \frac{1 - F^{0i}(T)}{(d^i(T))^{1/2}} \right). \end{aligned}$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A 13.1. tétel alkalmazhatóságához csak azt kell észrevenni, hogy

$$(13.9) \quad \{J_n(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in [0, T]^{k_1}\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ (1 - F^{01}(x_1))^{-1} W^1(q_1(x_1)), \dots \right. \\ \left. \dots, (1 - F^{0k_1}(x_{k_1}))^{-1} W^{k_1}(q_{k_1}(x_{k_1})), \mathbf{x} \in [0, T]^{k_1} \right\},$$

ahol

$$q_j(t) = \int_t^{\infty} \left(\frac{1 - F^{0j}}{1 - F(u)} e^j(u) \right)^2 dF^j(u),$$

és W^1, \dots, W^{k_1} független *Wiener-folyamatok*. A (13.9) reprezentáció miatt a 9. fejezetben látott transzformációs módszerek az $\bar{E}_n(\mathbf{x})$ folyamatra is alkalmazhatók, így lehetőség van konfidenciasávok szerkesztésére és a tiszta illeszkedés vizsgálatára is.

A 13.1. tétel feltétele azt követeli, hogy a T_n sorozat ne túl gyorsan menjen a T_F értékhez. Ha megszabjuk azt is, hogy T_n legalább milyen gyorsan tartson T_F -hez, akkor meg tudjuk határozni

$$\sup_{0 \leq x_i \leq T} \max_{1 \leq i \leq k_1} |\bar{e}_n^i(x_i) - e_{(n)}^i(x_i)|, \quad F(T) < 1$$

pontos nagyságrendjét is.

13.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy $F(T) < 1$ és

- (i) $T_n \hat{f}_2(n) (\log n)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$
 (ii) $T_n \rightarrow T_F = T_{F^i}, \quad i = 1, \dots, k_1, \quad n \rightarrow \infty,$
 (iii) $(\log n)^2 \int_{T_n}^{\infty} (1 - F^{0i}(u)) du \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, k_1, \quad n \rightarrow \infty,$
 (iv) $n^{1/2 + \varepsilon_0} \int_{T_n}^{\infty} \left(\frac{1 - F^{0i}(u)}{1 - F(u)} e^i(u) \right)^2 dF^i(u) \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, k_1, \quad n \rightarrow \infty,$

valamilyen $\varepsilon_0 > 0$ szám esetén.

Ekkor megadható egy olyan $\mathbf{J}(\mathbf{x}, n)$ vektor-vektor Gauss-folyamat, $\mathbf{J}(\mathbf{x}, n) = (J^1(x_1, n), \dots, J^{k_1}(x_{k_1}, n))$, melynek komponensei függetlenek, $EJ^i(t, n) = 0, i = 1, \dots, k_1,$

$$EJ^i(t, m) J^j(s, n) = (m \wedge n) (1 - F^{0i}(t))^{-1} (1 - F^{0i}(s))^{-1} (q_i(t) \wedge q_i(s)),$$

továbbá

$$\sup_{\mathbf{x} \in [0, T]^{k_1}} \|\bar{\mathbf{E}}_n(\mathbf{x}) - n^{-1/2} \mathbf{J}(\mathbf{x}, n)\|_{k_1} \stackrel{\text{m.m.}}{=} O((\log n)^{-1})$$

és

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n \log \log n} \right)^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{e}_n^i(t) - \bar{e}_{(n)}^i(t)| = \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{(q_i(t))^{1/2}}{1 - F^{0i}(t)}, \quad 1 \leq i \leq k_1.$$

Bizonyítás. A bizonyítás alapja a

$$\left\{ \mathbf{J}(\mathbf{x}, n), \mathbf{x} \in [0, T]^{k_1}, n \geq 1 \right\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ \left(- \int_{x_i}^{\infty} Q^i(u, n) du \right) (1 - F^{0i}(x_i))^{-1} + \int_{x_i}^{\infty} (1 - F^{0i}(u)) du \frac{Q^i(x_i, n)}{(1 - F^{0i}(x_i))^2}, \quad i = 1, \dots, k_1, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{k_1}), \quad n \geq 1 \right\}$$

azonosság. Így a 13.1. tétel bizonyítását csak néhány helyen kell módosítani. Természetesen a 8.3. tétel helyett a 8.5. tételt kell használni, így a $q_{6n}^i, \dots, q_{9n}^i$ tagoknak megfelelő $\bar{q}_{6n}^i, \dots, \bar{q}_{9n}^i$ tagokra adódik:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{q}_{jn}^i| \stackrel{\text{m.m.}}{=} O(T_n \hat{f}_2(n) (\log n)^2), \quad j = 6, \dots, 9, \quad i = 1, \dots, k_1.$$

A felbontásban szereplő utolsó két tag becslése ugyanúgy történik a *Csebisev-egyenlőtlenséggel*, csak ε helyébe $\log n$ -t írunk. Az (iii) és (iv) feltételek biztosítják, hogy a felső korlátokból alkotott két sor konvergens, tehát alkalmazható az első *Borel—Cantelli-lemma*.

A tétel első fele miatt a $[0, T]$ -n való maximális eltérés meghatározásához elegendő a $\mathbf{J}(\mathbf{x}, n)$ folyamat vizsgálata. A (13.9) reprezentáció alapján

$$\left\{ J^i(t, n), \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1 \right\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{ \frac{(q_i(0))^{1/2}}{1 - F^{0i}(t)} W \left(\frac{q_i(t)}{q_i(0)}, n \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad n \geq 1 \right\},$$

$$i = 1, \dots, k_1,$$

ahol $\{W(u, n), 0 \leq u \leq 1, n > 1\}$ kétparaméteres *Wiener-folyamat*. A 11.2. tétel bizonyításánál látott módszerrel nem nehéz belátni, hogy

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n \log \log n} \right)^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{(q_i(0))^{1/2}}{1 - F^{0i}(t)} \left| W \left(\frac{q_i(t)}{q_i(0)}, n \right) \right| \stackrel{\text{m.m.}}{=} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{(q_i(t))^{1/2}}{1 - F^{0i}(t)}.$$

Természetesen most is érvényes a funkcionális iterált logaritmus tétel, amely szerint az

$$\left(\frac{n}{2 \log \log n} \right)^{1/2} (\bar{e}_n^i(t) - \bar{e}_{(n)}^i(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, k_1$$

sorozat 1 valószínűséggel relatív kompakt a szupremum metrikában és limeszpontjainak halmaza az

$$\left\{ \frac{(q_i(0))^{1/2}}{1 - F^{0i}(t)} f \left(\frac{q_i(t)}{q_i(0)} \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad f \in \mathcal{C} \right\}$$

függvényhalmaz.

A 13.2. tétel feltételei a T_n sorozat növekedését alulról és felülről is korlátozzák, a cenzorálástól is függ, hogy mikor létezik a feltételeknek eleget tevő sorozat.

13.1. PÉLDA. Tegyük fel, hogy $k=2, T_F = \infty$ és $t \rightarrow \infty$ esetén

$$1 - F^{01}(t) \approx t^{-\theta}, \quad \theta > 1,$$

$$1 - F^{02}(t) \approx t^{-\mu}, \quad \mu > 0.$$

Számolással igazolható, hogy $\theta > \max \left(2, \frac{5}{4} + \frac{\mu}{2} \right)$ esetén a $T_n = Q(n^q)$ választással $k_1=1$ -re teljesülnek a tétel feltételei, ahol $q < (3(1+2\theta+2\mu))^{-1}$.

13.2. PÉLDA. Ha F^{01} és F^{02} is exponenciális

$$1 - F^{01}(t) = \begin{cases} \exp(-\theta t), & t \geq 0, \\ 1, & t < 0, \end{cases}$$

$$1 - F^{02}(t) = \begin{cases} \exp(-\mu t), & t \geq 0, \\ 1, & t < 0, \end{cases}$$

akkor a $\theta > \frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}$ esetben a T_n sorozat $\log n$ rendben tarthat a ∞ -be és az iterált logaritmus tétel teljesül $k_1=1$ -re.

A most bebizonyított tételeinkben nem az e^i függvényeket, hanem az $e_{(n)}^i$ csonkítottjukat tudtuk csak becsülni. Természetesen a T_n sorozatot a lehető legnagyobbra választjuk, de még így is előfordulhat, hogy e^i és $e_{(n)}^i$ „messze vannak” egymástól. Abban a speciális esetben, amikor $T_F = T_{F^1}$, jobb eredményt tudunk bebizonyítani. Legyen

$$E_n^1(t) = n^{1/2}(e_n^1(t) - e^1(t)),$$

és továbbra is tegyük fel, hogy $I \neq \emptyset, 1 \in I$.

13.3. TÉTEL. Ha $F(T) < 1$, $T_F = T_{F1} < \infty$, és teljesülnek a 10.4. tétel feltételei, akkor

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |E_n^1(t) - J_n^1(t)| \xrightarrow{\text{m.m.}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. A 13.1. tétel bizonyításánál alkalmazott felbontást használjuk, a 10.4. tétel alkalmazásával $T_F = T_{F1} < \infty$ miatt az állítás könnyen belátható.

A 12.8. példa azt mutatta, hogy $n^{1/2}(e_n^1(0) - e^1(0))$ aszimptotikusan végtelen is lehet, míg $n^{1/2}(e_n^1(0) - \hat{e}_{(n)}^1(0))$ aszimptotikusan normális eloszlást követ. Így most csak az e^1 függvényt csonkítsuk felülről az $X_{n:n}$ valószínűségi változóval (azaz, a legnagyobb megfigyeléssel):

$$(13.10) \quad \hat{e}_n^1(t) = \left(\int_t^{X_{n:n}} (1 - F^{01}(u)) du \right) (1 - F^{01}(t))^{-1}.$$

Vezessük be a megfelelő várható élettartam folyamatot:

$$\hat{E}_n^1(t) = n^{1/2}(e_n^1(t) - \hat{e}_{(n)}^1(t)).$$

A következő tétel azt mutatja, hogy (12.31)-ből következik \hat{E}_n^1 gyenge konvergenciája is.

13.4. TÉTEL. Ha $F(T) < 1$ és

$$(i) \quad \lim_{t \uparrow T_F} ((1 - F^{01}(t))e^1(t))^2 d^1(t) = 0,$$

$$(ii) \quad \int_0^\infty \left(\frac{1 - F^{01}(t)}{1 - F(t)} e^1(t) \right)^2 dF^1(t) < \infty,$$

$$(iii) \quad T_F = T_{F1} \cong \infty,$$

akkor

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\hat{E}_n^1(t) - J_n^1(t)| \xrightarrow{p} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. A 12.8. példa alapján

$$n^{1/2} \int_{T_1}^{X_{n:n}} (\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t)) dt$$

aszimptotikusan normális 0 várható értékkel és

$$(13.11) \quad \int_{T_1}^\infty \left(\frac{1 - F^{01}(t)}{1 - F(t)} e^1(t) \right)^2 dF^1(t)$$

szórásnégyzettel. Ha $T_1 \rightarrow T_{F1}$, akkor a (13.11) integrál 0-hoz tart. Legyen ε és η két, tetszőlegesen kicsi pozitív szám. A T_1 számot úgy választjuk meg, hogy

$$(13.12) \quad T_1 > T,$$

$$(13.13) \quad P \left\{ (1 - F^{01}(T))^{-2} \int_{T_1}^\infty (1 - F^{01}(u)) du \sup_{0 \leq t \leq T} |Q_1^1(t)| > \frac{\varepsilon}{32} \right\} < \frac{\eta}{12}$$

és

$$(13.14) \quad P\left\{(1-F^{01}(T))^{-1}\left|\int_{T_1}^{\infty} Q_1^1(u) du\right| > \frac{\varepsilon}{32}\right\} < \frac{\eta}{12}.$$

A 13.1. tétel bizonyításánál alkalmazott felbontás felhasználásával

$$\begin{aligned} & P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\hat{E}_n^1(t) - J_n^1(t)| > \varepsilon\right\} \cong \\ & \cong P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} (1-F^{01}(t))^{-1}\left|\int_t^{T_1} (L_n^1(u) - Q_n^1(u)) du\right| > \frac{\varepsilon}{8}\right\} + \\ & + P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \int_t^{T_1} (1-F^{01}(u)) du (1-F^{01}(t))^{-2} |L_n^1(t) - Q_n^1(t)| > \frac{\varepsilon}{8}\right\} + \\ & + P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} n^{-1/2}\left|\int_t^{T_1} L_n^1(u) du L_n^1(t) (1-\hat{F}_n^{01}(t))^{-1} (1-F^{01}(t))^{-1}\right| > \frac{\varepsilon}{8}\right\} + \\ & + P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} n^{-1/2}\left|\int_t^{T_1} (1-F^{01}(u)) du (L_n^1(t))^2 (1-\hat{F}_n^{01}(t))^{-1} (1-F^{01}(t))^{-2}\right| > \frac{\varepsilon}{8}\right\} + \\ & + P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} (1-F^{01}(t))^{-1}\left|\int_{T_1}^{\infty} Q_n^1(u) du\right| > \frac{\varepsilon}{8}\right\} + \\ & + P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\left(\int_{T_1}^{\infty} (1-F^{01}(u)) du\right) Q_n^1(t) (1-F^{01}(t))^{-2}\right| > \frac{\varepsilon}{8}\right\} + \\ & + P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} (1-\hat{F}_n^{01}(t))^{-1} \int_{T_1}^{X_{n:n}} L_n^1(u) du\right\} > \frac{\varepsilon}{8}\right\} + \\ & + P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} n^{-1/2} \left|Q_n^1(t) \int_{T_1}^{X_{n:n}} L_n^1(u) du (1-\hat{F}_n^{01}(t))^{-1} (1-F^{01}(t))^{-1}\right| > \frac{\varepsilon}{8}\right\} = \\ & = q_{12n} + \dots + q_{19n}. \end{aligned}$$

A 13.1. tétel bizonyítása alapján, ha $n \geq n_1$, akkor

$$q_{12n} + \dots + q_{15n} \cong \frac{\eta}{2}.$$

Az $\int_{T_1}^{X_{n:n}} L_n^1(u) du$ aszimptotikus normalitása miatt, ha $n \geq n_2$, akkor

$$q_{18n} \cong \frac{\eta}{12} + P\left\{\frac{2}{1-F^{01}(T)} \left|\int_{T_1}^{\infty} Q_1^1(u) du\right| > \frac{\varepsilon}{16}\right\}$$

és

$$q_{19n} \cong \frac{\eta}{12} + P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{2n^{-1/2}}{(1-F^{01}(t))^2} \left|Q_1^1(t) \cdot \int_{T_1}^{\infty} Q_1^1(u) du\right| > \frac{\varepsilon}{16}\right\}.$$

A T_1 definíciója miatt a (13.13) és (13.14) egyenlőtlenségek felhasználásával, ha $n \cong n_2$, akkor

$$q_{16n} + \dots + q_{19n} \cong \frac{\eta}{2}.$$

A fejezet lezárásaként feltétlenül meg kell említenünk YANG ([24] és [171]) nevét, aki dolgozatában elsőként foglalkozott a várható élettartam függvények becslésével cenzorált esetben. A nem cenzorált esetben felmerült kérdéseket HALL és WELLNER [23] dolgozata lényegében lezárta, míg a cenzorált esetben, ahogy a fejezetben láttuk, még sok nyitott kérdés maradt. Ehelyt talán megengedhető az a személyes természetű megjegyzés is, hogy mi, a jelen két szerző, YANG [171] hatására kezdtünk egyáltalán a cenzorált minták statisztikai problémáival foglalkozni két és fél évvel ezelőtt.

14. Karakterisztikus függvények becslése cenzorált mintából

Az X^{01} valószínűségi változó eloszlásának egy másik lehetséges jellemzője az eloszlásfüggvény, a kumulációs függvény, és a várható élettartam függvény mellett a karakterisztikus függvény:

$$(14.1) \quad \varphi^1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itu) dF^{01}(u).$$

Ennek egyik lehetséges becslése

$$(14.2) \quad \varphi_n^1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itu) d\hat{F}_n^{01}(u).$$

A cenzorált mintából történő karakterisztikus függvénybecslést CSÖRGŐ [52] vizsgálta, a *Kaplan—Meier-modellben* bebizonyította a φ_n^1 becslés erős egyenletes konzisztenciáját.

14.1. TÉTEL ([52]). Ha $T_{F01} = T_F$ és F^{01} folytonos eloszlásfüggvény és $T_n = o((1 - F^{01}(T_n(\lambda)))^{-1})$, ahol $\lambda > 1$ tetszőleges valós szám, akkor

$$\sup_{|t| \leq T_n(\lambda)} |\varphi_n^1(t) - \varphi^1(t)| \xrightarrow{m.m.} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

A várható élettartam függvény becsléséhez hasonlóan vezessük be (14.1) és (14.2) csonkított változatait, ha X^{01} nem-negatív valószínűségi változó:

$$(14.3) \quad \bar{\varphi}^1(t) = \int_0^{T_n} \exp(itu) dF^{01}(u)$$

és

$$(14.4) \quad \bar{\varphi}_n^1(t) = \int_0^{T_n} \exp(itu) d\hat{F}_n^{01}(u).$$

A csonkított várható élettartam folyamathoz hasonlóan legyen

$$\bar{Y}_n^1(t) = n^{1/2}(\bar{\varphi}_n^1(t) - \bar{\varphi}^1(t)) = \int_0^{T_n} \exp(itu) dL_n^1(u).$$

Vezessük be komplex *Gauss-folyamatok* következő sorozatát

$$K_n^1(t) = \int_0^\infty \exp(itu) dQ_n^1(u),$$

$$EK_n^1(t) = 0,$$

$$EK_n^1(t)K_n^1(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(i(tu-sv)) d((1-F^{01}(u))(1-F^{01}(v))(d^1(u) \wedge d^1(v))).$$

A K_n^1 folyamatok akkor és csak akkor jól definiáltak, ha $(1-F^{01}(u))(1-F^{01}(v)) \cdot (d^1(u) \wedge d^1(v))$ korlátos változása a $[0, \infty)^2$ negyedsíkon.

14.2. TÉTEL ([52]). Ha F^{01} abszolút folytonos eloszlásfüggvény f^{01} sűrűségfüggvénnyel, $F^{01}(0)=0$, és

(i) $T_n \rightarrow T_F = T_{F^{01}}$ és $T_n r_2(n) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$,

(ii) $\int_0^{1/2} \left(\frac{\int_0^{1/u} \left(\int_v^\infty f^{01}(t)(1-F^{02}(t))^{-1} dt \right) dv}{u \log 1/u} \right)^{1/2} du < \infty$,

akkor

$$\sup_{T_1 \leq t \leq T_2} \|\bar{Y}_n^1(t) - K_n^1(t)\| \xrightarrow{p} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol $[T_1, T_2]$ tetszőleges véges intervallum.

Az (ii) feltétel biztosítja, hogy a K_n^1 folyamatok mintafüggvényei folytonosak legyenek. Ha $T_{F^{01}} = T_F < \infty$, akkor az (ii) feltétel automatikusan teljesül, feltéve, hogy

$$\int_0^\infty f^{01}(t)(1-F^{02}(t))^{-1} dt < \infty.$$

Ebben az esetben az \bar{Y}_n^1 folyamat helyett az

$$Y_n^1(t) = n^{1/2}(\varphi_n^1(t) - \varphi^1(t))$$

folyamatot is vizsgálhatjuk. A tartók végeességét kihasználva, a 10.4. tétel alapján könnyen belátható a következő állítás.

14.3. TÉTEL ([52]). Ha F^{01} abszolút folytonos eloszlásfüggvény f^{01} sűrűségfüggvénnyel és

(i) $T_{F^{01}} = T_F < \infty$,

(ii) teljesülnek a 10.4. tétel feltételei, akkor

$$\sup_{T_1 \leq t \leq T_2} \|Y_n^1(t) - K_n^1(t)\| \xrightarrow{p} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol $[T_1, T_2]$ tetszőleges véges intervallum.

15. Változó cenzorálás

Az eddig vizsgált *Kaplan—Meier-modellben* feltételeztük, hogy a cenzoráló valószínűségi változók $\{X_j^{02}\}_{j=1}^{\infty}$ azonos F^{02} eloszlásúak. Azokat a modelleket, amelyekben a cenzorálók nem feltétlenül azonos eloszlásúak, tehát az

$$F_{(j)}^{02}(t) = P\{X_j^{02} < t\}$$

eloszlásfüggvények különbözőek is lehetnek, változó cenzorálási modelleknek nevezük. Az első eredményeket MEIER [125] érte el, majd ezeket a vizsgálatokat folytatta SUSARLA és VAN RYZIN [154]. GILL [89] a 10.1. 10.4., tételket általánosította a változó cenzorálás esetére is.

Az $X_j = \min(X_j^{01}, X_j^{02})$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F_{(j)}$ -vel jelölve, most is teljesül az

$$(15.1) \quad 1 - F_{(j)}(t) = (1 - F^{01}(t))(1 - F_{(j)}^{02}(t))$$

összefüggés. Vezessük be az eloszlásfüggvények számtani közepeit

$$F_{[n]}^{02} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F_{(j)}^{02},$$

$$F_{[n]} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F_{(j)},$$

valamint a számtani közepek pontonkénti limesz szuperior függvényeit:

$$F^{02}(t) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{[n]}^{02}(t),$$

$$F(t) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_{[n]}(t).$$

A limesz szuperiorokat F^{02} -vel és F -fel jelöltük, mivel ezek fogják játszani a következő tételekben a már vizsgált esetek közös eloszlásfüggvényeinek szerepét.

15.1. TÉTEL (GILL [89]). *Tegyük fel, hogy $F_{[n]}$ egyenletesen konvergál $[0, \infty)$ -en egy F eloszlásfüggvényhez, $F(0+) = 0$.*

(i) *Ekkor \hat{L}_n^1 gyengén konvergál $[0, T] - n$, $F(T+) < 1$, a Q^∞ Gauss-folyamathoz, ahol*

$$EQ^\infty(t) = 0,$$

$$EQ^\infty(t)Q^\infty(s) = (1 - F^{01}(t))(1 - F^{01}(s)) \int_{[0, t \wedge s]} (1 - F^{01}(u+))(1 - F(u))^{-1} dF^{01}(u+),$$

(ii) *Ha*

$$\lim_{t \uparrow T_F} (F^{01}(T_F+) - F^{01}(t+))^2 \int_{[0, t]} (1 - F^{01}(u+))(1 - F(u))^{-1} dF^{01}(u+) = 0$$

és

$$\lim_{t \uparrow T_F} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_t^{T_F \wedge T} F_{(n)}^{02} (1 - F_{(n)}^{02}(u))^{-1} dF^{01}(u+) = 0,$$

akkor \hat{L}_n^1 gyengén konvergál $[0, T_F] - n$ a $Q^\infty + \chi\{T_F\}U$ Gauss folyamathoz, ahol

$$U = \begin{cases} (1 - F^{01}(T_F+))Q^\infty(T_F), & \text{ha } F(T_F) < 1, \\ \lim_{t \uparrow T_F} (1 - F^{01}(t+))Q^\infty(t), & \text{ha } F(T_F) = 1, \end{cases}$$

$$\chi\{T_F\} = \begin{cases} 1, & \text{ha } t = T_F, \\ 0, & \text{ha } t \neq T_F. \end{cases}$$

E tétel bizonyítására nem térünk ki. Az erős konzisztenciátételek is majdnem szó szerint átvihetők a változó cenzorálás esetére (vö. [74], [76]).

15.2. TÉTEL ([59]). *Tegyük fel, hogy F^{01} folytonos eloszlásfüggvény. Ekkor minden $\lambda > 1$ szám esetén*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{1 - F^{01}(T_n^*(\lambda))} \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} v(\lambda),$$

ahol

$$T_n^*(\lambda) = \sup \left\{ t : 1 - F_{[n]}(t) \cong \lambda \left(\frac{\log n}{\lambda^* n} \right)^{1/2} \right\},$$

és λ^* egy 3/4-nél nagyobb konstans.

Bizonyítás. Az X_j^{01} és X_j^{02} valószínűségi változók függetlensége miatt

$$F_{(j)}^1(t) = P\{X_j < t, \delta_j^1 = 1\} = \int_{-\infty}^t (1 - F_{(j)}^{02}(u)) dF^{01}(u),$$

tehát

$$(15.2) \quad F_{[n]}^1(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F_{(j)}^1(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F_{[n]}^{02}(u)) dF^{01}(u).$$

Ha $A_{[n]}^1$ jelöli az átlagos hazard függvényt,

$$A_{[n]}^1(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^t (1 - F_{(j)}(u))^{-1} dF_{(j)}^1(u),$$

akkor (15.1) és (15.2) alapján látható, hogy

$$A_{[n]}^1(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F^{01}(u))^{-1} dF^{01}(u)$$

függetlenül a cenzoráló változók eloszlásától. A bizonyítás további részét a 11.3. tétel bizonyítására vezetjük vissza. A 11.3. tétel bizonyításában mindenütt írjunk $F, F^1, T_n(\lambda)$ és μ_n helyett rendre $F_{[n]}, F_{[n]}^1, T_n^*(\lambda)$ és μ_n^* -t, ahol $\mu_n^* = (\log n / (\lambda^* n))^{1/2}$. Az egész bizonyítás így szó szerint megismételhető, ha a

$$(15.3) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < t < \infty} |F_n(t) - F_{[n]}(t)| / \mu_n^* \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} 1,$$

$$(15.4) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < t < \infty} |F_n^1(t) - F_{[n]}^1(t)| / \mu_n^* \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} 1$$

egyenlőtlenségeket bebizonyítjuk, amelyekkel a *Chung—Szmirnov*, illetve a *Kiefer-féle iterált logaritmus tételeket* helyettesítjük. De (15.3) egyszerű számolással következik SINGH [20] lemmájából. SINGH eredményéből (15.4) is következik, ha figyelembe vesszük, hogy $\{(X_j, \delta_j^1 = 1)\}_{j=1}^{\infty}$ eloszlásban megegyezik az $\{\tilde{F}_{(j)}^1(\xi_j)\}_{j=1}^{\infty}$ sorozattal, ahol $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ független, $(0, 1)$ -n egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, $\tilde{F}_{(j)}^1$ az $F_{(j)}^1$ folytonos függvény inverzét jelöli.

A 11.4. következményhez hasonlóan, a 15.2. tételből is könnyen levezethetők a következő állítások:

15.3. KÖVETKEZMÉNY ([59]). *Tegyük fel, hogy F^{01} folytonos eloszlásfüggvény.*

(i) *Ha létezik egy olyan T szám, hogy végtelen sok n -re $T_{F_{[n]}^{02}} \cong T < T_{F^{01}}$ és $F_{[n]}^{02}(T_{F_{[n]}^{02}}) = 1$, akkor*

$$0 < 1 - F^{01}(T) \cong \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} 1 - F^{01}(T_{F^{02}}).$$

(ii) *Ha $T_{F^{01}} \cong T_{F^{02}}$, akkor $1 - F^{01}(T_n^*(\lambda)) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.*

(iii) *Ha $T_{F^{01}} < T_{F^{02}}$, akkor*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda^* n}{\log n} \right)^{1/2} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} d.$$

(iv) *Ha $T_{F^{01}} \cong T_{F^{02}}$ és $F_{(1)}^{02}, F_{(2)}^{02}, \dots$ folytonosak $T_{F^{01}}$ valamely nem üres, bal oldali $(T, T_{F^{01}})$ környezetében ($F_{(j)}^{02}$ -nek lehet ugrása $T_{F^{01}}$ -ben, ha $T_{F^{01}} < \infty$), akkor*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1 - F_{[n]}^{02}(T_n^*(\lambda))) \left(\frac{\lambda^* n}{\log n} \right)^{1/2} \Delta_n \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} \lambda v(\lambda).$$

(v) *Tegyük fel, hogy a (iv) eset feltételei teljesülnek. Ha létezik olyan a $[0, 1 - F(T)]$ intervallumon értelmezett γ függvény, melyre $\gamma(x) \cong x$, $\gamma(x) \downarrow \gamma(0)$, ha $x \downarrow 0$ és*

$$1 - F^{01}(t) \cong \gamma(1 - F_{[n]}(t)), \quad t \in (T, T_{F^{01}}),$$

akkor

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_n / \gamma \left(\lambda \left(\frac{\log n}{\lambda^* n} \right)^{1/2} \right) \stackrel{\text{m.m.}}{\cong} v(\lambda).$$

A 15.3. következmény (i) pontja a $T_{F^{02}} < T_{F^{01}}$ esetnek csak egy részére állítja, hogy a becslés nem konzisztens. A $T_{F^{02}} < T_{F^{02}}$ esetben a konzisztencia attól függ, hogy az eloszlásfüggvények hogyan viselkednek a tartójukhoz közeli pontokban. Ezzel a kérdéssel is foglalkozik FÖLDES [74] és [75] dolgozata.

Hasonló módon vizsgálhatók a változó cenzorálási modellben a várható élet-tartam függvény és a karakterisztikus függvény becslései és a paraméterbecslési módszerek is. A most bebizonyított tételek alapján az előző fejezetek eredményeink egy része a most vizsgált modellben is igaz. Hangsúlyozzuk, hogy ez a megjegyzés arra a fontos, a gyakorlatban sűrűn előforduló speciális esetre is érvényes, amikor az $F_{(j)}^{02}$ függvények különböző pontokban elfajultak, vagyis amikor a cenzorálást különböző, nem véletlen konstansok végzik. Ezeket az eredményeket nem részletezzük, és a dolgozat hátralevő részében továbbra is az eddigi nemváltozó cenzorálási modellekkel foglalkozunk.

16. Függő cenzorálási modellek

A 6. fejezetben bevezetett általános modellt fogjuk a továbbiakban vizsgálni, kapcsolatot keresve az eddigi kockázatmodell, függő változók kockázatmodellje és az általános cenzorálási modell között. Jelöljön A^1, \dots, A^k továbbra is tetszőleges eseményeket, melyek egyesítése egy nulla valószínűségű eseménytől eltekintve kiadja az Ω eseményteret, X az Ω -n értelmezett valós értékű valószínűségi változó

$$(16.1) \quad F(t) = P\{X < t\}$$

eloszlásfüggvénnyel. Az egyes eseményekhez tartozó szub-eloszlásfüggvények

$$(16.2) \quad F^i(t) = P\{X < t, A^i\}.$$

A továbbiakban azt mondjuk, hogy az (X, A^1, \dots, A^k) rendszer ekvivalens az $(X^* = \min(X^{*1}, \dots, X^{*k}), X^{*1}, \dots, X^{*k})$ kockázatmodellel, ha

$$P\{X < t, A^{i_1} \cap \dots \cap A^{i_j}\} = P\{X^* < t, X^* = X^{*i_1} = \dots = X^{*i_j}\}$$

minden $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k$ esetén teljesül. A 7. fejezetben megmutattuk, hogy egy tetszőleges A^1, \dots, A^k eseményrendszerrel mindig át tudunk térni egy olyan A^{*1}, \dots, A^{*m} eseményrendszerre, melynek elemei sztochasztikusan kizárják egymást:

$$(16.3) \quad P\{A^{*i} \cap A^{*j}\} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

A megfelelő szub-eloszlásfüggvényeket jelölje

$$(16.5) \quad F^{*i}(t) = P\{X < t, A^{*i}\}.$$

A (3.4) formula alapján minden A^{*i} eseményhez rendeljük hozzá a

$$A^{*i} = \int_{-\infty}^t (1 - F(u))^{-1} dF^{*i}(u)$$

függvényt. Az integrálfüggvény tulajdonságai alapján A^{*i} nem-csökkenő, balról folytonos, létezik a jobb oldali határértéke és szakadási pontjainak halmaza megegyezik F^{*i} szakadási pontjainak a halmazával. A A^{*i} függvény felbontható

$$A^{*i}(t) = A_c^{*i}(t) + \sum_{x < t} \Delta A^{*i}(x)$$

alakban, ahol A_c^{*i} folytonos függvény, $\Delta A^{*i}(x)$ pedig a A^{*i} függvény x pontbeli ugrása. Az

$$(16.6) \quad 1 - G^{*i}(t) = \left[\prod_{x < t} (1 - \Delta A^{*i}(x)) \right] \exp(-A_c^{*i}(t))$$

formulával definiált G^{*i} függvény szub-eloszlásfüggvény $(-\infty, T_F)$ -en. A (16.6) definíció alapján könnyen látható, hogy G^{*i} nem-csökkenő, balról folytonos függvény, melynek minden pontban létezik a jobb oldali határértéke. Ha $T_F < \infty$, akkor G^{*i} -t eloszlásfüggvényként folytathatjuk, mivel a (16.6) formula csak $(-\infty, T_F)$ -en definiálja, és $G^{*i}(T_F -) \leq 1$. Ha $T_F = +\infty$, G^{*i} akkor és csak akkor lesz eloszlásfüggvény, ha $A^{*i}(\infty) = \infty$. KOTZ és SHANBHAG (2.3) formulája alapján a G^{*i} függvényhez tartozó házárdfüggvény $(-\infty, T_F)$ -en megegyezik A^{*i} -vel.

Ha Λ jelöli az F függvényhez tartozó hazárfüggvényt, akkor (16.3) miatt

$$\Lambda(t) = \sum_{i=1}^m \Lambda^{*i}(t)$$

és

$$\Delta\Lambda(x) = \sum_{i=1}^m \Delta\Lambda^{*i}(x).$$

Ismét a (2.3) formulát kell használni, hogy észrevegyük az

$$(16.7) \quad 1 - F(t) = \prod_{i=1}^m (1 - G^{*i}(t)), \quad -\infty < t < T_F$$

egyenlőség teljesülését. Ha X^{*01}, \dots, X^{*0m} független, esetleg a ∞ értéket is felvevő valószínűségi változókat jelölnek, melyek eloszlásfüggvényei G^{*1}, \dots, G^{*m} , akkor $X^* = \min(X^{*01}, \dots, X^{*0m})$ eloszlásfüggvénye F . Az eloszlásfüggvények definíciója alapján könnyen ki tudjuk számítani, hogy

$$\begin{aligned} P\{X^* < t, X^{*0i} = X^*\} &= \int_{-\infty}^t (1 - F(u))(1 - G^{*i}(u))^{-1} dG^{*i}(u) = \\ &= \int_{-\infty}^t (1 - F(u)) d\Lambda^{*i}(u) = \int_{-\infty}^t dF^{*i}(u), \end{aligned}$$

tehát

$$(16.8) \quad F^{*i}(t) = P\{X^* < t, X^{*0i} = X^*\}.$$

Az X^{*0i} és X^{*0j} valószínűségi változók függetlensége miatt

$$(16.9) \quad P\{X^{*0i} = X^{*0j}\} = 0, \quad i \neq j,$$

akkor és csak akkor teljesül, ha G^{*i} és G^{*j} szakadási pontjainak a halmazai diszjunkt halmazok. De ezek a halmazok (16.6) miatt megegyeznek F^{*i} , illetve F^{*j} szakadási pontjainak a halmazaival. Így általánosabban bizonyítottuk a kockázatmodellek azonosítására vonatkozó fontos tételt, melyet egymástól függetlenül MILLER [127], TSIATIS [160], [161], LANGBERG, PROSCHAN és QUINZI [120]—[122] fedezett fel. (Érdekes példák találhatók a [68, 95, 110] dolgozatokban.)

16.1. TÉTEL. *Az $(X, A^{*1}, \dots, A^{*m})$, $P(A^{*i} \cap A^{*j}) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, m$, modellhez akkor és csak akkor található vele ekvivalens kockázatmodell, ha F^{*1}, \dots, F^{*m} szakadási pontjaiból álló halmazok diszjunktak.*

Bizonyítás. Az állítás egyik felét már bebizonyítottuk. A szükségességhez csak azt kell észrevenni, hogy a kockázatmodellben

$$P\{X^{*0i} = X^{*0j}\} = 0, \quad i \neq j,$$

akkor és csak akkor teljesül, ha a megfelelő cenzorálatlan valószínűségi változóhoz tartozó szub-eloszlásfüggvények szakadási pontjai diszjunkt halmazt alkotnak.

Térjünk vissza az eredeti (X, A^1, \dots, A^k) modellhez. A felbontás definíciója alapján

$$P\{A^i \Delta (A^{*i_1} \cup \dots \cup A^{*i_j})\} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

valamilyen $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq m$ indexekkel. Tegyük fel, hogy az F^{*1}, \dots, F^{*m} szub-eloszlásfüggvények teljesítik a 16.1. tételben megkívánt regularitási feltételt. Ekkor az

$$(16.10) \quad (X^*, Y^1, \dots, Y^k)$$

kockázatmodell ekvivalens az (X, A^1, \dots, A^k) modellel, ahol

$$(16.11) \quad Y^i = \min (X^{*0i}, \dots, X^{*0i_j}).$$

Így a modell egy olyan „kockázatmodellel” ekvivalens, melyben az egyes kockázatok nem függetlenek, de független változók minimumaként állnak elő. A kockázatmodellel eddig és a következőkben is független okokon alapuló rendszert értünk, ha ez nem teljesül, akkor használjuk a „ ” jelet. A konstrukcióból és a bizonyításból következik, hogy a 16.1. tételben szereplő kockázatmodell eloszlásban egyértelműen meghatározott.

16.1. PÉLDA. Legyen (T, T^1, \dots, T^k) egy függő „kockázatmodell”. Ekkor létezik egy vele ekvivalens (16.10) modell, melynek megvan a (16.11) tulajdonsága. Ha a szorzatbecslést vagy a házárdbecslést használjuk, akkor nem T^i eloszlását fogjuk becsülni, hanem Y^i eloszlását. Természetesen a két eloszlás általában nem egyezik meg.

De ha például a (T^1, T^2) vektor eloszlása kétváltozós *Marshall—Olkin-típusú exponenciális eloszlás*, [17], azaz

$$P\{T^1 \geq x_1, T^2 \geq x_2\} = \exp(-\Theta_1 x_1 - \Theta_2 x_2 - \Theta_{12} \max(x_1, x_2)), \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$\Theta_i > 0, \quad i = 1, 2, 12,$$

akkor

$$P\{Y^1 \geq x_1\} = \exp(-(\Theta_1 + \Theta_{12})x_1) = P\{T^1 \geq x_1\},$$

$$P\{Y^2 \geq x_2\} = \exp(-(\Theta_2 + \Theta_{12})x_2) = P\{T^2 \geq x_2\}.$$

A Marshall—Olkin-eloszlás mutatja, hogy függő kockázatmodellben is van lehetőség a szorzatbecslés használatára. Vizsgáljuk meg most, hogy mekkora lehet ez a függőség. Az egyszerűség kedvéért tekintsük csak a *Kaplan—Meier-modellt*. A cenzorálatlan változó szub-eloszlásfüggvénye függő változók esetén

$$P\{X < t, X = X^{01}\} = \int_{-\infty}^t P\{X^{02} \geq u | X^{01} = u\} dF^{01}(u).$$

Függő változók esetén a házárdbecsléssel közelített függvény

$$\int_{-\infty}^t \frac{1}{P\{X \geq u\}} dP\{X < u, X = X^{01}\} = \int_{-\infty}^t \frac{P\{X^{02} \geq u | X^{01} = u\}}{P\{X^{01} \geq u, X^{02} \geq u\}} dF^{01}(u)$$

akkor és csak akkor egyezik meg az F^{01} eloszlásfüggvényhez tartozó házárdfüggvénnyel, ha

$$\frac{P\{X^{02} \geq u | X^{01} = u\}}{P\{X^{01} \geq u, X^{02} \geq u\}} = (P\{X^{01} \geq u\})^{-1}$$

F^{01} -majdnem mindenütt az egyenesen, tehát ha teljesül

$$(16.12) \quad P\{X^{02} \cong u | X^{01} = u\} = P\{X^{02} \cong u | X^{01} \cong u\}.$$

Egyszerű számolással megmutatható, hogy a 16.1. példában látott kétváltozós Marshall—Olkin-típusú exponenciális eloszlás kielégíti a (16.12) feltételt.

17. Kétmintás statisztikák

Legyen az X^{01} változó eloszlásfüggvénye továbbra is F^{01} , az \bar{X}^{01} valószínűségi változó eloszlásfüggvényét pedig jelölje \bar{F}^{01} . A

$$H_0: F^{01} = \bar{F}^{01}$$

nullhipotézist akarjuk ellenőrizni, de csak az n_1 elemű (2.6) és a tőle független

$$(17.1) \quad \{\bar{X}_i, \bar{\delta}_i^1\}_{i=1}^{n_2}$$

cenzorált minták állnak a rendelkezésünkre. Minden olyan függvényt, amely (17.1)-hez kapcsolódik (eloszlásfüggvények, empirikus eloszlásfüggvények) a — jellel látjuk el. GILL [89] a tesztstatisztikák

$$S_{n_1, n_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(t)}{1 - F_{n_1}(t)} dF_{n_1}^1(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(t)}{1 - \bar{F}_{n_2}(t)} d\bar{F}_{n_2}^1(t)$$

osztályát vizsgálta. A K függvényre és a cenzorálás erősségére tett feltevések mellett bebizonyította az S_{n_1, n_2} statisztika aszimptotikus normalitását, ha

$$(17.2) \quad (n_1 \wedge n_2) \rightarrow \infty$$

és

$$(17.3) \quad \frac{n_i}{n_1 + n_2} \rightarrow \varrho_i, \quad i = 1, 2, \quad (n_1 \wedge n_2) \rightarrow \infty.$$

Azt az esetet, amikor

$$(17.4) \quad K(t) = K_G(t) = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right)^{1/2} (1 - F_{n_1}(t))(1 - \bar{F}_{n_2}(t))$$

GEHAN [84], [85] és GILBERT [87] vizsgálták először, az aszimptotikus normalitást bizonyítva. COX [51] vezette be a

$$(17.5) \quad K(t) = K_C(t) = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right)^{1/2} (1 - F_{n_1}(t))(1 - \bar{F}_{n_2}(t)) \times \\ \times \left[\frac{n_1}{n_1 + n_2} (1 - F_{n_1}(t)) + \frac{n_2}{n_1 + n_2} (1 - \bar{F}_{n_2}(t)) \right]^{-1}$$

függvényhez tartozó statisztikát. EFRON [64] dolgozatából származó tesztstatisztika a szorzatbecslésen alapul. Ez a

$$K(t) = K_E(t) = \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right)^{1/2} (1 - \hat{F}_{n_1}^{01}(t))(1 - \hat{\bar{F}}_{n_2}^{01}(t)) \chi\{X_{n_1: n_1} > t\} \chi\{X_{n_2: n_2} > t\}$$

függvényhez tartozik, ahol $\chi\{A\}$ az A halmaz indikátor függvénye. A *Gehan—Gilbert-statisztika* normalitását sikerült bebizonyítani tetszőlegesen erős cenzorálás esetén is, míg a *Cox* és az *Efron-statisztikák* vizsgálatokor megszorítást kellett tenni a cenzorálás hevességére. Mind a három próba a *Wilcoxon-próba* általánosítása cenzorált mintákra. A *Cox* és az *Efron-statisztika* a *Gehan—Gilbert-statisztika* vizsgálatokor jött létre, bevezetésükkel a próba erejét bizonyos esetekben növelni tudták.

Egy másik lehetséges mód tesztstatisztikák konstruálására a *Chernoff—Savage-statisztikák* általánosítása cenzorált minták esetére. Vezessük be az

$$(17.6) \quad A_{n_1, n_2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(F_{n_1}^1, F_{n_1}^2) dR_2(\bar{F}_{n_2}^1, \bar{F}_{n_2}^2)$$

valószínűségi változót, ahol R_1, R_2 az egységnégyzeten értelmezett valós értékű függvények. Könnyen megmutatható, hogy a (17.4) és (17.5) alatti függvényekhez tartozó statisztikák is előállíthatók (17.6) alakban megfelelően választott R_1, R_2 függvényekkel. A [101] dolgozatban bebizonyítottuk, hogy ha R_1, R_2 másodrendű parciális deriváltjai léteznek, folytonosak és korlátosak az egységnégyzeten, akkor megadható 0 várható értékű, normális valószínűségi változók ξ_{n_1, n_2} sorozata,

melyre $\delta < \frac{n_1}{n_1 + n_2} < 1 - \delta, 0 < \delta < 1$, úgy hogy

$$\left| \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right)^{1/2} (A_{n_1, n_2} - a_{n_1, n_2}) - \xi_{n_1, n_2} \right| \stackrel{m.m.}{=} O((n_1 + n_2)^{-1/3} (\log(n_1 + n_2))^{3/2}),$$

ahol

$$a_{n_1, n_2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_1(F^1, F^2) dR_2(\bar{F}^1, \bar{F}^2).$$

Ha a mintából készített Θ_{n_1, n_2} a ξ_{n_1, n_2} valószínűségi változó szórásának a becslései akkor

$$\begin{aligned} \sup_{-\infty < x < \infty} \left| P \left\{ \left(\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \right)^{1/2} \frac{A_{n_1, n_2} - a_{n_1, n_2}}{\Theta_{n_1, n_2}} < x \right\} - \Phi(x) \right| = \\ = O((n_1 + n_2)^{-1/3} (\log(n_1 + n_2))^{3/2}), \end{aligned}$$

ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvény. A ξ_{n_1, n_2} normális valószínűségi változó szórását explicit módon is ki tudjuk számolni, és az csak az $F^1, F^2, \bar{F}^1, \bar{F}^2$ szub-eloszlásfüggvényektől függ. A kapott formulába mindegyik függvény helyébe az empirikus megfelelőjét tettük, az így kapott Θ_{n_1, n_2} a szórás megfelelő becslése lesz.

Az általánosított *Chernoff—Savage-statisztikák* más esetben is használhatók. Ha a *kockázat-* vagy a *Kaplan—Meier-modellben* azt a hipotézist akarjuk tesztelni a (2.6) minta alapján, hogy két vagy több szub-eloszlásfüggvény megegyezik, akkor a (17.5) integrálban $\bar{F}_{n_2}^1$ és $\bar{F}_{n_2}^2$ helyébe is írjunk $F_{n_1}^1$ és $F_{n_1}^2$ -t, és az így kapott statisztika ugyanúgy használható, mint az előbbi.

A kockázatmodellben hasonló módon adhatók meg a megfelelő statisztikák eloszlásfüggvények egyenlőségének tesztelésére. A fejezetben bemutatott mód-

szerekhez tartozó eredmények bizonyításai részletesen megtalálhatók a [89] és [101] dolgozatokban. A *Gehan—Gilbert-teszt* alkalmazása függetlenség ellenőrzésére a [42] dolgozat érdekes eredménye. További két-, illetve többmintás statisztikák és ezek alkalmazásai találhatók a [38, 97, 113, 157, 158] dolgozatokban.

18. További eredmények és kutatási irányok

Dolgozatunkban a cenzorálási modellek egy csoportjával foglalkoztunk csak, amit jobboldali cenzorálásnak is neveznek. Az irodalomban a jobb oldali cenzorálás mellett más cenzorálási modellekkel is találkozunk.

A jobboldali cenzoráláshoz legközelebb a baloldali cenzorálási modell áll. A két modell közötti különbség csak annyi, hogy a változók minimuma helyett a maximumukat tudjuk megfigyelni és azt, hogy melyik változó érte el a maximumot. Az [57] dolgozatban megmutattuk, hogy minden a jobboldali cenzorálási modellben igaz eredmény egyszerű módon átvihető a baloldali modellre. A baloldali cenzorálás problémáját a [166] dolgozat etológiai megfigyelései vetették fel, ezeket az adatokat vizsgálják a [167] és [58] dolgozatok is.

A jobb- és baloldali cenzorálási modell közös általánosítása a kétoldali cenzorálás, melyet HYDE [105] és TURNBULL [163] vezetett be. A kétoldali cenzorálási modellben az X^{01} változót csak akkor tudjuk megfigyelni, ha egy véletlen intervallumba esik, különben csak annyit tudunk, hogy az intervallum bal végpontjánál kisebb vagy a jobb végpontjánál nagyobb. Ezekből az adatokból akarjuk F^{01} eloszlását megbecsülni. A kétoldali cenzoráláshoz tartozó szorzatbecslés aszimptotikus tulajdonságaival a [102] dolgozatban foglalkoztunk.

Az eddigi vizsgálatainkban mindig feltettük, hogy az előforduló valószínűségi változók számértékűek. HANLEY és PARNES [98] a *Kaplan—Meier-modellt* vektorértékű X^{01} , X^{02} változókra általánosította (lásd még [48]). A többváltozós szorzatbecslés erős egyenletes konzisztenciájával CAMPBELL és FÖLDES [49] foglalkozott először, majd HORVÁTH [49] megmutatta, hogy a 11. fejezet minden eredménye igaz a többváltozós szorzatbecslésre is.

A jelen dolgozatban tekintett statisztikák mellett többen foglalkoztak rang [107, 138, 140, 170] és más [164, 165, 142, 143, 126] statisztikák aszimptotikus viselkedésével. A már említett sűrűségfüggvény becslés [43, 46] mellett a [44, 112, 128, 134] dolgozatok a regressziófüggvény becslésével foglalkoznak. Érdekesek a [42, 58, 62, 124] dolgozatokban tárgyalt konkrét alkalmazások. A sorzatbecslés robusztus tulajdonságai vizsgálja REID [141] a [135]-beli felbontásból kiindulva, míg WELLNER [168] bebizonyítja, hogy a szorzatbecslés *Beran-értelemben optimális*. A szorzatbecslés bayesiánus általánosításával foglalkozik [66, 153, 155].

Több dolgozat foglalkozik olyan általánosítással, amikor az alapsorozatok nem függetlenek, és a számlálásuk révén generált, bizonyos Markov-tulajdonságoknak elegendő pontfolyamatok cenzorálják egymást [27, 30, 31, 69, 70, 90, 118, 119].

Cox [51] regressziós modelljének vizsgálata különösen az utóbbi egy-két évben vált népszerűvé. Az erre vonatkozó [149, 162] dolgozatok irodalomjegyzékéből a korábbi vizsgálatok felderíthetők. Egyéb parametrikus modelleket vizsgálnak a [61, 39, 40, 123, 149, 172, 173] dolgozatok.

A cenzorálásnak létezik egy az itt tárgyalttól teljesen eltérő változata, az ún. progresszív cenzorálás. Az erre vonatkozó eredmények részletesebb áttekintése található a [148, 150] dolgozatokban.

19. Köszönetnyilvánítás

Hálás köszönetünket fejezzük ki HATVANI LÁSZLÓNAK, aki a szerkesztő bizottság tagjaként felfigyelt a cenzorált adatokkal végzett munkálkodásunkra. Ő vetette fel a jelen összefoglaló dolgozat megírásának gondolatát. Az írás során sok újat tanultunk, néhány új eredményt bizonyítottunk, és munkánk befejeztével magunk is világosabban látjuk a területet. Mindez nem történt volna meg Hatvani László figyelme nélkül. CSÁKI ENDRE, RICHARD D. GILL és JON A. WELLNER több értékes megjegyzést tettek e téren írt korábbi dolgozatainkkal kapcsolatban. Ezek közül néhányat a jelen dolgozatba beépítettünk. Ezúton mondunk köszönetet mindhármuknak.

IRODALOM

- [1] ANDERSON, T. W., "A modification of the sequential probability ratio test to reduce the sample size", *Ann. Math. Statist.* **31** (1960) 165—197.
- [2] ANDERSON, T. W. and DARLING, D. A., "Asymptotic theory of certain 'goodness of fit' criteria based on stochastic processes", *Ann. Math. Statist.* **23** (1952) 193—212.
- [3] BURKE, M. D., CSÖRGŐ, M., CSÖRGŐ, S. and RÉVÉSZ, P., "Approximations of the empirical process when parameters are estimated", *Ann. Probability* **5** (1978) 790—810.
- [4] CAMERON, R. H. and MARTIN, W. T., "The Wiener measure of Hilbert neighborhoods in the space of real continuous functions", *J. Math. Phys.* **23** (1944) 195—209.
- [5] CHERNOFF, H. and SAVAGE, I. R., "Asymptotic normality and efficiency of certain non-parametric test statistics", *Ann. Math. Statist.* **29** (1958) 972—997.
- [6] CSÖRGŐ, M. and RÉVÉSZ, P., *Strong Approximations in Probability and Statistics* (Akadémiai Kiadó, Budapest and Academic Press, New York—London—Sydney, 1981).
- [7] CSÖRGŐ, S., "Limit behaviour of the empirical characteristic function", *Ann. Probability* **9** (1981) 130—144.
- [8] DEVROYE, L. P. and WISE, G. L., "On the recovery of discrete probability densities from imperfect measurements", *J. Franklin Inst.* **307** (1979) 1—20.
- [9] DURBIN, J., "Kolmogorov—Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests on spacings", *Biometrika* **62** (1975) 5—22.
- [10] DVORETZKY, A., KIEFER, J. and WOLFOWITZ, J., "Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the multinomial estimator", *Ann. Math. Statist.* **27** (1956) 642—669.
- [11] FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol. 2. (Wiley, New York—London—Sydney, 1966).
- [12] HALL, W. J. and WELLNER, J. A., "Mean residual life", *J. Appl. Probability*. To appear.
- [13] HALL, W. J. and WELLNER, J. A., "Estimation of mean residual life", In: *Statistics and Related Topics* (M. Csörgő, D. A. Dawson, J. N. K. Rao and A. K. Md. E. Saleh eds.), pp. 169—184 (North-Holland, Amsterdam, 1981).
- [14] KIEFER, J., "On large deviations of the empiric d.f. of vector chance variables and a law of the iterated logarithm", *Pacific J. Math.* **11** (1961) 649—660.
- [15] KOMLÓS, J., MAJOR, P. and TUSNÁDY, G., "An approximation of partial sums of independent r.v.'s and the sample d.f.l.", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **32** (1975) 111—132.
- [16] KOTZ, S. and SHANBHAG, O. N., "Some new approaches to probability distributions", *Adv. Appl. Prob.* **12** (1980) 903—921.
- [17] MARSHALL, A. W. and OLKIN, I., "A multivariate exponential distribution", *J. Amer. Statist. Assoc.* **66** (1967) 30—44.
- [18a] RÉNYI, A., *Valószínűségszámítás* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1966).
- [18b] RÉNYI, A., "On the theory of order statistics", *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953) 191—232.
- [19] ROTHMAN, E. D. and WOODROOFE, M., "A Cramér—von Mises type statistic for testing symmetry", *Ann. Math. Statist.* **43** (1972) 2035—2038.
- [20] SINGH, R. S., "On the Glivenko—Cantelli theorem for weighted empiricals based on independent random variables", *Ann. Probability* **3** (1975) 371—374.

- [21] STEPHENS, M. A., "Asymptotic results and percentage points for goodness - of - fit statistics with unknown parameters", *Ann. Statist.* 4 (1976) 357—369.
- [22] TUSNÁDY, G. Statisztikai hipotézisek vizsgálata, Kandidátusi értekezés, 1977.
- [23] WELLNER, J. A., "Limit theorems for the ratio of the empirical distribution function to the true distribution function", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* 45 (1978) 73—88.
- [24] YANG, G. L., "Estimation of a biometric function", *Ann. Statist.* 6 (1978) 112—116.

*

- [25] AALEN, O., "Nonparametric inference in connection with multiple decrement models", *Scand. J. Statist.* 3 (1976) 15—27.
- [26] AALEN, O., "Nonparametric estimation of partial transition probabilities in multiple decrement models", *Ann. Statist.* 6 (1978) 534—545.
- [27] AALEN, O., "Nonparametric inference for a family of counting process", *Ann. Statist.* 6 (1978) 701—726.
- [28] AALEN, O., "A model for nonparametric regression for counting processes", Preprint, University of Tromsø (1978).
- [29] AALEN, O., "Book review", *Scand. Actuarial J.* 62 (1979) 241—244.
- [30] AALEN, O. and JOHANSEN, S., "An empirical transition matrix for non-homogeneous Markov chains based on censored observations", *Scand. J. Statist.* 5 (1978) 141—150.
- [31] AALEN, O., BORGAN Ø., KEIDING, N. and THORMAN, J., "Interaction between life history events. Non-parametric analysis for prospective and retrospective data in the presence of censoring", *Scand. J. Statist.* 7 (1980) 161—171.
- [32] BARLOW, R. E. and PROSCHAN, F., *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975).
- [33] BARR, O. R. and DAVIDSON, T., "A Kolmogorov—Smirnov test for censored samples", *Technometrics* 15 (1973) 739—757.
- [34] BERKSON, J. and GAGE, R. P., "Survival curve for cancer patients following treatment" *J. Amer. Statist. Assoc.* 47 (1952) 270—286.
- [35] BERMAN, S. M., "A note on extreme values, competing risks and semi-Markov processes", *Ann. Math. Statist.* 34 (1963) 1104—1106.
- [36] BERNOULLI, D., "Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite verole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir", *Académie des Sciences, Paris. Historie avec les Mémoires*, (1760) 1—45.
- [37] BIRNBAUM, Z. W., "On the mathematics of competing risks", DHEW Publication No (PHS) 19—1351. *Vital and Health Statistics, Series 2: Data Evaluation and Methods Research*, 77. National Center for Health Statistics, Hyattsville, Md. 1979.
- [38] BRESLOW, N., "A generalized Kruskal—Wallis test for comparing K samples subject to unequal patterns of censorship", *Biometrika* 57 (1970) 579—594.
- [39] BRESLOW, N., "Covariance analysis of censored survival data", *Biometrics* 30 (1974) 89—99.
- [40] BRESLOW, N., "Analysis of survival data under the proportional hazards model", *Int. Stat. Rev.* 43 (1975) 45—58.
- [41] BRESLOW, N. and CROWLEY, J., "A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship", *Ann. Statist.* 2 (1974) 437—453.
- [42] BROWN, B. W., HOLLANDER, M. and KORWAR, R. M., "Nonparametric tests for censored data, with application to heart transplant studies", *Reliability and Biometry* Ed. F. Proschan and R. J. Serfling (Philadelphia, SIAM, 1974) 327—354.
- [43] BLUM, J. R. and SUSARLA, V., "Maximal deviation theory of density and failure rate function estimates based on censored data", *Multivariate Analysis-V.* Ed. P. R. Krishnaiah (North-Holland, 1980) 213—222.
- [44] BUCKLEY, J. and JAMES, I., "Linear regression with censored data", *Biometrika*, 66 (1979) 429—436.
- [45] BURKE, M. D., "Tests for exponentiality based on randomly censored data", *Transaction of the Colloquium on Nonparametric Statistical Inference, June 23—28, 1980, Budapest.* Ed. I. Vincze (Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, No. 32 North-Holland).
- [46] BURKE, M. D., "Approximations of some hazard rate estimators in a competing risks model", *Carleton Mathematical Lecture Note No. 30* (1981), 277—300.
- [47] BURKE, M. D., CSÖRGŐ, S. and HORVÁTH, L., "Strong approximations of some biometric estimates under random censorship", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* 56 (1981) 87—112.

- [48] CAMPBELL, G., "Nonparametric bivariate estimation with randomly censored data", *Biometrika* **68** (1981) 417—422.
- [49] CAMPBELL, G. and FÖLDES, A., "Large-sample properties of nonparametric bivariate estimators with censored data", Purdue University, Department of Statistics Mimeoseries 80—100 (1980).
- [50] CHIANG, C. L., *Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics* (Wiley, New York, 1968).
- [51] COX, D. R., "Regression models and life tables (with discussion)", *J. Roy. Statist. Soc. B.* **34** (1972) 187—220.
- [52] CSÖRGŐ, S., "Estimating characteristic functions under random censorship", *Teor. Verоятnost. i Primenen.* **28** (1983) To appear.
- [53] CSÖRGŐ, S. and HORVÁTH, L., "On cumulative hazard processes under random censorship", *Scand. J. Statist.* **9** (1982) 13—21.
- [54] CSÖRGŐ, S. and HORVÁTH, L., "On the Koziol—Green model for random censorship", *Biometrika* **68** (1981) 391—401.
- [55] CSÖRGŐ, S. and HORVÁTH, L., "On the Koziol—Green model for random censorship II", *Studia Sci. Math. Hung.* To appear.
- [57] CSÖRGŐ, S. and HORVÁTH, L., "Random censorship from the left", *Studia Sci. Math. Hung.* To appear.
- [56] CSÖRGŐ, S. and HORVÁTH, L., "On random censorship from the right", *Acta Sci. Math. (Szeged)* **44** (1982) 23—23.
- [58] CSÖRGŐ, S. and HORVÁTH, L., "The baboons come down from the trees quite normally", *Carleton Mathematical Lecture Note* No. **30** (1981), 184—205.
- [59] CSÖRGŐ, S. and HORVÁTH, L., "The rate of strong uniform consistency for the product-limit estimator", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* To appear.
- [60] CSÖRGŐ, S. and HORVÁTH, L., "Empirical Efron transforms of the product-limit process", *Ann. Statist.* Submitted.
- [61] DAVID, H. A., "Parametric approaches to the theory of competing risks", *Reliability and Biometry* Ed. F. Proschan and R. J. Serfling (SIAM, Philadelphia, 1974), 275—290.
- [62] DESU, M. M. and NARULA, S. C., "Reliability estimation under competing causes of failure." *The Theory and Applications of Reliability I.* Ed. I. Shimi and C. P. Tsokos (Academic Press, New York, 1977).
- [63] DUFOUR, R. and MAAG, U. R., "Distribution results for modified Kolmogorov—Smirnov statistics for truncated or censored samples", *Technometrics* **20** (1978) 29—32.
- [64] EFRON, B., "The two-sample problem with censored data", *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.* **4** (1967) 831—853.
- [65] EPSTEIN, B. and SOBEL, M., "Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution", *Ann. Math. Statist.* **25** (1954) 373—381.
- [66] FERGUSON, T. S. and PHADIA, E. G., "Bayesian nonparametric estimation based on censored data", *Ann. Statist.* **7** (1979) 163—186.
- [67] FISHER, L. and GILLESPIE, M. J., "Confidence bands for the Kaplan—Meier survival curve estimate", *Ann. Statist.* **7** (1979) 920—924.
- [68] FISHER, L. and KANAREK, P., "Presenting censored survival data when censoring and survival times may not be independent", *Reliability and Biometry* Ed. F. Proschan and R. J. Serfling (SIAM, Philadelphia, 1974) 291—302.
- [69] FLEMING, T. R., "Nonparametric estimation for nonhomogeneous Markov processes in the problem of competing risks", *Ann. Statist.* **6** (1978) 1057—1070.
- [70] FLEMING, T. R., "Asymptotic distribution results in competing risks estimation", *Ann. Statist.* **6** (1978) 1071—1079.
- [71] FLEMING, T. R. and HARRINGTON, D. P., "A class of hypothesis tests for one and two sample censored survival data", *Comm. Statist. A.* **10** (1981).
- [72] FLEMING, T. R. and HARRINGTON, D. P., "Nonparametric estimation of the survival distribution in censored data", Technical Report Series No. 8. Section of Medical Research Statistics, Mayo Clinic (1979).
- [73] FLEMING, T. R., O'FALLON, J. R., O'BRIEN, P. C. and HARRINGTON, D. P., "Modified Kolmogorov—Smirnov test procedures with application to arbitrarily right-censored data", *Biometrics* **36** (1980) 607—625.
- [74] FÖLDES, A., "Strong uniform consistency of the product limit estimator under variable censoring", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **58** (1981) 95—107.
- [75] FÖLDES, A., Cenzorált minta empirikus eloszlásának tulajdonságai, Kandidátusi értekezés, 1980.

- [76] FÖLDES, A. and REJTŐ, L., "Asymptotic properties of the nonparametric survival curve estimators under variable censoring", *Proceedings of the Pannon Conference in Statistics, Bad Tatzmannsdorf* (1979).
- [77] FÖLDES, A. and REJTŐ, L., "A remark on the convergence rate of the product-limit estimator", *Periodica Math. Hung.* **11** (1980) 251—254.
- [78] FÖLDES, A. and REJTŐ, L., "Strong uniform consistency for nonparametric survival estimators from randomly censored data", *Ann. Statist.* **9** (1981) 122—129.
- [79] FÖLDES, A. and REJTŐ, L., "A LIL type result for the product limit estimator", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **56** (1981) 75—86.
- [80] FÖLDES, A., REJTŐ, L. and WINTER, B. B., "Glivenko—Cantelli theorems for the product-limit estimate", *Problems of Control and Information Theory* **7** (1978) 213—225.
- [81] FÖLDES, A., REJTŐ, L. and WINTER, B. B., "Strong consistency properties of nonparametric estimators for randomly censored data", *Trans. Eight Prague Conference on Information Theory etc. Vol. C* (Academia, Prague, 1979) 105—121.
- [82] FÖLDES, A., REJTŐ, L. and WINTER, B. B., "Strong consistency properties of nonparametric estimators for randomly censored data", *Periodica Math. Hung.* **11** (1980) 233—250.
- [83] GAIL, M., "A review and critique of some models used in competing risk analysis", *Biometrics* **31** (1975) 209—222.
- [84] GEHAN, E. A., "A generalized Wilcoxon test for comparing arbitrarily singly-censored samples", *Biometrika* **52** (1965) 203—223.
- [85] GEHAN, E. A., "A generalized two-sample Wilcoxon test for doubly censored data", *Biometrika* **52** (1965) 650—653.
- [86] GHORAI, J. K., REJTŐ, L. and SUSARLA, V., "LIL type properties (on the whole line) of the PL and the Bayes estimators", Preprint (1980).
- [87] GHORAI, J., SUSARLA, A., SUSARLA, V. and VAN RYZIN, J., "Nonparametric estimation of mean residual life time with censored data", Preprint (1980).
- [88] GILBERT, J. P., Random censorship, Ph. D. thesis, Univ. of Chicago, 1962.
- [89] GILL, R. D., *Censoring and Stochastic Integrals* (Math. Centre Tracts, Amsterdam, 1980).
- [90] GILL, R. D., "Nonparametric estimation based on censored observations of a Markov renewal process", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **53** (1980) 97—116.
- [91] GILL, R. D., "Testing with replacement and the product limit estimator", *Ann. Statist.* **9** (1981) 853—860.
- [92] GILLESPIE, M. J., An investigation of the small sample behaviour of asymptotic confidence bands for censored survival data, Master of Sci. Thesis, Univ. Washington, Seattle, 1975.
- [93] GOODMAN, L. A., "Methods of measuring useful life of equipment under operational conditions", *J. Amer. Statist. Assoc.* **48** (1953) 503—530.
- [94] GREENWOOD, M., The natural duration of cancer, Reports on Public Health and Medical Subjects No. 33 (1926). H. M. Stationery Office, London.
- [95] HAKULINEN, T. and RAHALA, N., "An example on the risk dependence and additivity of intensities in the theory of competing risks", *Biometrics* **33** (1977) 557—560.
- [96] HALL, W. J. and WELLNER, J. A., "Confidence bands for a survival curve from censored data", *Biometrika* **67** (1980) 133—143.
- [97] HALPERIN, M., "Extension of the Wilcoxon—Mann—Whitney test to samples censored at the same fixed point", *J. Amer. Statist. Assoc.* **55** (1960) 125—138.
- [98] HANLEY, I. A. and PARNES, M. N., "Estimation of a multivariate distribution in the presence of censoring", *Biometrics* **37** (1981).
- [99] HOEL, D. G., "A representation of mortality data by competing risks", *Biometrics* **28** (1972) 475—488.
- [100] HOLLANDER, M. and PROSCHAN, F., "Testing to determine the underlying distribution using randomly censored data", *Biometrics* **35** (1979) 393—401.
- [101] HORVÁTH, L., "Two sample problems under random censorship", *Transactions of the Colloquium on Nonparametric Statistical Inference, June 23—28, 1980, Budapest*. Ed. I. Vincze (Colloquia Math. Soc. J. Bolyai No. 32. North-Holland).
- [102] HORVÁTH, L., "On random censorship from both sides", *Carleton Mathematical Lecture Note No. 30*. (1981). 206—224.
- [103] HORVÁTH, L., "Dropping continuity and independence assumptions in random censorship models", *Studia Sci. Math. Hung.* To appear.
- [104] HORVÁTH, L., "The rate of strong uniform consistency for the multivariate product-limit estimator", *J. Multivariate Analysis*. To appear.

- [105] HYDE, J., "Testing survival under right censoring and left truncation", *Biometrika* **64** (1977) 225—230.
- [106] JOHANSEN, S., The product limit estimator as maximum likelihood estimator, *Scand. J. Statist.* **5** (1978). 195—199.
- [107] JONES, D. and WHITEHEAD, J., "Sequential forms of the log rank and modified Wilcoxon tests for censored data", *Biometrika* **66** (1978) 105—113.
- [108] KAPLAN, E. L. and MEIER, P., "Nonparametric estimation from incomplete observations", *J. Amer. Statist. Assoc.* **53** (1958) 457—481.
- [109] KIMBALL, A. W., "Models for estimating competing risks from grouped data", *Biometrics* **25** (1969) 329—337.
- [110] KITCHIN, J., A general method for estimating life distribution from incomplete data with applications in reliability analysis and competing risks, Florida State University. Thesis. 1980.
- [111] KOUL, H., SUSARLA, V., "Testing for new better then used in expectation with incomplete data", *J. Amer. Statist. Assoc.* (1981). In press.
- [112] KOUL, H., SUSARLA, V. and VAN RYZIN, J., "Regression analysis with randomly right censored data", *Ann. Statist.* **9** (1981) 1276—1288.
- [113] KOZIOL, J. A., "A two sample Cramér—von Mises test for randomly censored data", *Biom. J.* **20** (1979) 603—608.
- [114] KOZIOL, J. A., "Goodness-of-fit tests for randomly censored data", *Biometrika* **67** (1980) 693—696.
- [115] KOZIOL, J. A., "Percentage points of the asymptotic distributions of one and two sample Kuiper statistics for truncated or censored data", *Technometrics*, **22** (1981).
- [116] KOZIOL, J. A. and BYAR, D. P., "Percentage points of the asymptotic distributions of one and two sample $K-S$ statistics for truncated or censored data", *Technometrics* **16** (1975) 507—510.
- [117] KOZIOL, J. A. and GREEN, S. B., "A Cramér—vonMises statistics for randomly censored data", *Biometrika* **63** (1976) 465—474.
- [118] LAGAKOS, S. W., A stochastic model for censored survival data in the presence of an auxiliary variable, "*Biometrics*" **32** (1976). 551—559.
- [119] LAGAKOS, S. W., SOMMOR, C. J. and ZELEN, M., "Semi-Markov models for censored data", *Biometrika* **65** (1978) 311—317.
- [120] LANGBERG, N., PROSCHAN, F. and QUINZI, A. J., "Converting dependent models into independent ones with applications in reliability", *The Theory and Applications of Reliability I*. Ed. I. Shimi and C. P. Tsokos (Academic Press, New York, 1977). 259—276.
- [121] LANGBERG, N., PROSCHAN, F. and QUINZI, A. J., "Converting dependent models into independent ones, preserving essential features," *Ann. Probability* **6** (1978) 174—181.
- [122] LANGBERG, N., PROSCHAN, F. and QUINZI, A. J., "Estimating dependent life lengths, with applications to the theory of competing risks", *Ann. Statist.* **9** (1981) 157—167.
- [123] LEE, L. and THOMPSON, W. A., "Results on failure time and pattern for the series system", *Reliability and Biometry* Ed. F. Proschan and R. J. Serfling (SIAM, Philadelphia, 1974). 291—302.
- [124] MCCABE, G. P. and SAMUELS, M. L., "Random censoring and dendritic trees", *Biometrics* **33** (1977). 69—84.
- [125] MEIER, P., "Estimation of a distribution function from incomplete observations", *Perspectives in Probability and Statistics* Ed. J. Gani (Applied Prob. Trust, Sheffield, 1976) 67—87.
- [126] MICHAEL, J. R. and SCHUCANY, W. R., "A new approach to testing goodness of fit for censored samples", *Technometrics* **21** (1979). 436—442.
- [127] MILLER, D. R., "A note on independence of multivariate lifetimes in competing risks models", *Ann. Statist.* **5** (1977) 576—579.
- [128] MILLER, R. G., "Least squares regression with censored data", *Biometrika* **63**(1976)449—464.
- [129] MODE, C. J., "A large sample investigation of a multiple decrement life table estimator", *Math. Biosciences* **32** (1976) 111—123.
- [130] MODE, C. J., "Nonparametric estimation of functions in a model of competing risks from incomplete longitudinal data", *Math. Biosciences* **45** (1979) 1—20.
- [131] MOESCHBERGER, M. L. and DAVID, H., "Life tests under competing causes of failure and the theory of competing risks", *Biometrics* **27** (1971) 909—933.
- [132] NAIR, V. N., "Plots and tests for goodness of fit with randomly censored data", *Biometrika* **68** (1981) 99—104.
- [133] NELSON, W., "Theory and applications of hazard plotting for censored failure data", *Technometrics* **14** (1972). 945—966.

- [134] O'BRIEN, P. C., "A nonparametric tests for association with censored data", *Biometrics* 34 (1978) 243—250.
- [135] PETERSON, A. V., "Expressing the Kaplan—Meier estimator as a function of empirical sub-survival functions", *J. Amer. Statist. Assoc.* 72 (1977). 854—858.
- [136] PETTIT, A. N. and STEPHENS, M. A., "Modified Cramér—von Mises statistics for censored data", *Biometrika* 63 (1976) 291—298.
- [137] PHADIA, E. G. and VAN RYZIN, J., "A note on convergence rates for the product limit estimator", *Ann. Statist.* 8 (1980). 673—678.
- [138] PRENTICE, R. L., "Linear rank tests with right censored data", *Biometrika* 65 (1978) 167—179.
- [139] PRENTICE, R. L., KALBFLEISCH, J. D., PETERSON, A. V., FLOURNOY, N., FAREWELL, V. T. and BRESLOW, N. E., "The analysis of failure times in the presence of competing risks", *Biometrics* 34 (1978) 541—554.
- [140] PRENTICE, R. L. and MAREK, P., "A qualitative discrepancy between censored data rank tests", *Biometrics* 35 (1979) 861—869.
- [141] REID, N., "Influence functions for censored data", *Ann. Statist.* 9 (1981) 78—92.
- [142] ROBERTS, H. R., "Life test experiments with hypercensored samples", *Rochester Society for Quality Control Conference Transaction* (1962) 84—93.
- [143] SAMPFORD, M. R. and TAYLOR, J., "Censored observations in randomized block experiments", *J. Royal Statist. Soc. B.* 21 (1959) 214—237.
- [144] SANDER, J. M., "The weak convergence of quantiles of the product-limit estimator", Stanford University Technical Report No. 5. (1975).
- [145] SANDER, J. M., "Asymptotic normality of linear combinations of functions of order statistics with censored data", Stanford University Technical Report No. 8. (1975).
- [146] SANDER, J. M., "A comparison of three estimators derived from the Kaplan—Meier estimator", Stanford University Technical Report. No. 11. (1975).
- [147] SCHEY, H. M., "The asymptotic distribution of the one-sided Kolmogorov—Smirnov statistics for truncated data", *Comm. Statist. A.* 6 (1977) 1361—1366.
- [148] SEN, P. K., "Weak convergence of some quantile processes arising in progressively censored tests", *Ann. Statist.* 7 (1979) 414—431.
- [149] SEN, P. K., "The Cox regression model, invariance principles for some induced quantile processes and some repeated significance tests", *Ann. Statist.* 9 (1981) 109—121.
- [150] SINHA, A. N. and SEN, P. K., "Progressively censored tests for clinical experiments and life testing problems based on weighted empirical distributions", *Comm. Statist. A.* 8 (1979) 871—897.
- [151] SUSARLA, V. and VAN RYZIN, J., "Nonparametric estimation of survival curves from incomplete observations", *J. Amer. Statist. Assoc.* 71 (1976) 897—902.
- [152] SUSARLA, V. and VAN RYZIN, J., "Empirical Bayes estimation of a distribution (survival) function from right censored observations", *Ann. Statist.* 6 (1978) 740—754.
- [153] SUSARLA, V. and VAN RYZIN, J., "Large sample theory for a Bayesian nonparametric survival curve estimator based on censored samples", *Ann. Statist.* 6 (1978) 755—768.
- [154] SUSARLA, V. and VAN RYZIN, J., "Large sample theory for survival curve estimates under variable censoring", *Optimization Methods in Statistics* (Academic Press, New York, 1979) 475—508.
- [155] SUSARLA, V. and VAN RYZIN, J., Addendum to "Large sample theory for a Bayesian nonparametric survival curve estimator based on censored samples", *Ann. Statist.* 8 (1980) 693.
- [156] SUSARLA, V. and VAN RYZIN, J., "Large sample theory for an estimator of the mean survival time from censored samples," *Ann. Statist.* 8 (1980) 1002—1016.
- [157] THOMAS, D. R., "Conditionally locally most powerful rank tests for the two-sample problem with arbitrarily censored data", Dept. of Statistics, Oregon State University, Technical Report No. 7. (1969).
- [158] THOMAS, D. R., "On a generalized Savage statistic for comparing two arbitrarily censored samples", Dept. of Statistics, Oregon State University, Technical Report No. 11. (1975).
- [159] THOMAS, D. R. and GRUNKEMEIER, G. L., "Confidence interval estimation of survival probabilities for censored data", *J. Amer. Statist. Assoc.* 70 (1970) 865—871.
- [160] TSIATIS, A. A., "A nonidentifiability aspect of the problem of competing risks", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 72 (1975) 20—22.
- [161] TSIATIS, A. A., "An example of nonidentifiability in competing risks", *Scand. Actuarial J.* (1978) 235—239.
- [162] TSIATIS, A. A., "A large sample study of Cox's regression model", *Ann. Statist.* 9 (1981) 93—108.

- [163] TURNBULL, B. W., "Nonparametric estimation of a survivorship function with doubly censored data", *J. Amer. Statist. Assoc.* **69** (1974) 169—173.
- [164] TURNBULL, B. W., "The empirical distribution function with arbitrarily grouped, censored, and truncated data", *J. Royal Statist. Soc. B.* **38** (1976) 290—295.
- [165] TURNBULL, B. W. and WEISS, L. L., "A likelihood ratio statistic for testing goodness of fit with randomly censored data", *Biometrics* **34** (1978). 367—375.
- [166] WAGNER, S. S. and ALTMANN, S. A., "What time do the baboons come down from the trees? (An estimation problem)", *Biometrics* **29** (1973) 623—635.
- [167] WARE, J. H. and DE MEETS, D. S., "Reanalysis of some baboon descent data", *Biometrics* **32** (1976) 459—463.
- [168] WELLNER, J. A., "Estimating a distribution function with random censorship", *Ann. Statist.* **10** (1982) 595—602.
- [169] WINTER, B. B., FÖLDES, A. and REJTŐ, L., "Glivenko—Cantelli theorems for the product limit estimate", *Problems of Control and Information Theory* **7** (1978) 213—225.
- [170] WOODSON, R. F. and LACHENBRUCH, P. A., "Rank tests for censored matched pairs", *Biometrika* **67** (1980) 579—606.
- [171] YANG, G., "Life expectancy under random censorship", *Stochastic Process. Appl.* **6** (1977) 33—39.
- [172] YANG, G. and SIRVANCI, M., "Estimation of time-truncated exponential parameter used in life testing", *J. Amer. Statist. Assoc.* **72** (1977) 444—447.
- [173] ZIPPEN, C. and ARMITAGE, P., "Use of concomitant variables and incomplete survival information in the estimation of an exponential survival parameter", *Biometrics* **22** (1966) 665—672.

(Beérkezett: 1981. december 28.)

Megjegyzés korrektúra-olvasáskor: A 15.2 Tétellel kapcsolatban megemlítjük, hogy időközben, [59] dolgozatunk javított, sajtó alatt levő változatában sikerült bebizonyítanunk, hogy a szóban forgó eredmények valóban szó szerint átvihetők a változó cenzorálás esetére. Így $T_n^*(\lambda)$ definíciójában $\lambda((\log n)/\lambda^*n)^{1/2}$ helyettesíthető $\lambda((\log \log n)/2n)^{1/2}$ -el. Ennek megfelelően javulnak a 15.3 Következmény (ii)—(v) állításai is. A javítást azáltal sikerült elérnünk, hogy beláttuk azt az önmagában is érdekes tényt (Lemma [59]-ben), miszerint a (15.3) és (15.4) egyenlőtlenségekben μ_n^* helyettesíthető $\mu_n = ((\log \log n)/2n)^{1/2}$ -el.

CSÖRGŐ SÁNDOR ÉS HORVÁTH LAJOS
JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM, BOLYAI INTÉZET
6720 SZEGED, ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

STATISTICAL INFERENCE FROM CENSORED SAMPLES

S. Csörgő and L. Horváth

By presenting the presently available sharpest mathematical results, the paper gives an overview of asymptotic procedures applicable in the most frequently used nonparametric random censorship models.



TARTÓZKODÁSI IDŐPROBLÉMÁK MARKOV-LÁNCOKRA

TOMKÓ JÓZSEF

Debrecen/Budapest

Folytonos idejű Markov-láncnak az állapotter adott H részhalmazában való tartózkodási idejével foglalkozik a jelen dolgozat. Ha az adott részhalmazból megfelelően indítjuk a láncot, akkor a H részhalmazban való tartózkodási idők erős stacionárius sorozatot alkotnak. A dolgozat fő célja e stacionárius sorozat közös várható értékére vonatkozó (9.9) formula bizonyítása.

1. Bevezetés

A tömegkiszolgálási, a megbízhatósági, és más alkalmazási problémák gyakran modellezhetők a *Markov-láncok* segítségével. Eközben az érdeklődés központjában álló karakterisztikák a figyelembe veendő *Markov-láncnak* az állapotter valamely részhalmazában való tartózkodási idejével kapcsolatosak. A mondottakat jól illusztrálja a [2] dolgozatban tárgyalt inhomogén gépkiszolgálási probléma. A jelen dolgozat célja éppen a [2]-ben felhasznált elméleti eredmények ismertetése.

A tárgyalásra kerülő tartózkodási időprobléma vizsgálata a *Markov-láncoknál* bonyolultabb folyamatokra is mind elméleti, mind alkalmazási szempontból érdekes. Véges állapotterű *fél-Markov-folyamatokra* [3]-ban algoritmus található az állapotter egy részhalmazában való tartózkodási idő eloszlásának meghatározására, feltételezve, hogy e részhalmazban való tartózkodás kiindulási állapota ismert. Ez az algoritmus lényegében a (9.7) egyenletrendszerünknek felel meg. A jelen dolgozat legfontosabb eredménye a 3. tétel (9.9) formulája. Véges állapotteret feltételezve a (9.9) formula a *fél-Markov-folyamatokra* is érvényes, s ennek bizonyításához a jelen dolgozat megfontolásai teljesen elégségesek. Végtelen állapotterű *fél-Markov-folyamatokra* a (9.9) formula kiterjesztésével egy későbbi dolgozatban szándékozik a szerző foglalkozni.

A véletlen indexű sorozatokra vonatkozó két elemi lemma bizonyításával kezdjük a dolgozatot. Ezekre a későbbiekben többször hivatkozunk majd. A *Markov-láncok* legalapvetőbb fogalmainak, a folytonos idejű lánc beágyazott láncának ismertetése után a pozitív visszatérő láncokra bebizonyítjuk a nagy számok erős törvényét (1. tétel). E tétel speciális esete (lásd a 3. megjegyzést) kulcs szerepet játszik a dolgozatban. Ezután a *Markov-láncoknak* az állapotter adott részhalmazára vonatkozó szűkítéseit tárgyaljuk, majd a „tartózkodási idők”-re vonatkozó egyenletrendszereket ismertetjük. A (9.9) formula bizonyításával, s néhány megjegyzéssel zárjuk a dolgozatot.

2. Véletlen indexű sorozatok

Legyen $\{\eta_n, n \geq 0\}$ valószínűségi változóknak egy sorozata, amely 1 valószínűséggel konvergál. Más szóval létezzon az

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n$$

határérték majdnem mindenütt (m.m.). Tetszőleges $t > 0$ -ra legyen v_t nem negatív egész értékű valószínűségi változó.

1. LEMMA. Ha $t \rightarrow \infty$ esetén $v_t \rightarrow \infty$ -hez 1 valószínűséggel, akkor a véletlen indexű $\{\eta_{v_t}, t \geq 0\}$ sorozatra

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta_{v_t} = \eta \quad \text{m.m.}$$

Bizonyítás. Legyen $\bar{\eta}_t = \eta_{v_t} - \eta$. Megmutatjuk, hogy a $\sup_{t > T} |\bar{\eta}_t|$, $T \rightarrow \infty$ esetén sztochasztikusan 0-hoz tart. Vegyük először észre, hogy

$$(2.1) \quad |\bar{\eta}_t| = \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n - \eta| \chi_{\{v_t=n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{\eta}_n| \chi_{\{v_t=n\}} \leq \sup_{n \geq 0} |\bar{\eta}_n|,$$

ahol χ_C a C esemény indikátora. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $T > 0$, $N > 0$ és $\varepsilon > 0$ -ra

$$\left\{ \sup_{t \geq T} |\bar{\eta}_t| > \varepsilon \right\} \subset \left\{ \sup_{t \geq T} |\bar{\eta}_t| > \varepsilon \right\} \cap \left\{ \inf_{t \geq T} v_t \geq N \right\} \cup \left\{ \inf_{t \geq T} v_t < N \right\}.$$

A (2.1) egyenlőtlenség alapján viszont

$$\left\{ \sup_{t \geq T} |\bar{\eta}_t| > \varepsilon \right\} \cap \left\{ \inf_{t \geq T} v_t \geq N \right\} \subset \left\{ \sup_{n \geq N} |\bar{\eta}_n| > \varepsilon \right\},$$

s így állításunk a feltételekből valóban következik.

1. *Megjegyzés.* A lemma alkalmazása elsősorban olyan esetekben fordul elő az irodalomban, amikor η_n valószínűségi változók számtani közepe, s a nagy számok erős törvényének véletlen indexre való kiterjesztéséről van szó. Az állításra bizonyítás nélkül szoktak hivatkozni.

2. LEMMA. Teljesüljön a $\{\xi_n, n \geq 1\}$ valószínűségi változók sorozatára a nagy számok erős törvénye, s a $\{v_t, t \geq 0\}$ sereg legyen olyan mint az 1. lemmában. Ekkor $t \rightarrow \infty$ esetén

$$\frac{\xi_{v_t}}{v_t} \rightarrow 0 \quad \text{m.m.}$$

Bizonyítás. Legyen $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Minthogy

$$\frac{\xi_{v_t}}{v_t} = \frac{S_{v_t}}{v_t} - \frac{S_{v_t-1}}{v_t} = \frac{S_{v_t}}{v_t} - \frac{v_t-1}{v_t} \frac{S_{v_t-1}}{v_t-1},$$

az állítás az 1. lemmára hivatkozva következik.

3. A Markov-láncok alapfogalmai

Legyen $\{\xi_t, t \geq 0\}$ homogén *Markov-lánc* E állapottérrel. Az E állapottér megszámlálható, s az egyszerűség kedvéért a nem-negatív egész számok halmazának választjuk. Minthogy a [2] dolgozatban előforduló láncok mindig véges állapottérűek, ezért állításaink többségét csak ilyen esetre bizonyítjuk. Az ismertetésre kerülő eredmények igazak sokkal bonyolultabb (nem megszámlálható) állapottér esetén is, de ilyen esetre a tárgyalás lényegesen mélyebb elméletét kívánja a sztochasztikus folyamatoknak.

Két esetet kell megkülönböztetnünk. A diszkrét idő esete, amikor t lehetséges értékei a nem negatív egész számok. A folytonos idő esete, amikor t a nem negatív, valós (idő) tengelyt futja be. A diszkrét idő hangsúlyozása érdekében a paramétert n -nel fogjuk jelölni. Ha nem teszünk említést a paramétertér jellegére, úgy ez azt fogja jelenteni, hogy mind a diszkrét, mind a folytonos eset szóba jöhet.

Mint ismeretes, diszkrét idő esetén a lánc kezdeti eloszlása, és a

$$P = (p_{ij}) = (P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\})$$

átmeneti valószínűségek mátrixa egyértelműen meghatározzák a lánc végesdimenziós eloszlásait, következésképpen a lánc viselkedésére vonatkozó kérdésekre ezek ismeretében feleletet adhatunk.

Folytonos idő esetén a végesdimenziós eloszlásokat a

$$p_{ij}(t) = P\{\xi_{t+\tau} = j | \xi_t = i\}, \quad (i, j \in E; t \geq 0)$$

valószínűségek birtokában írhatjuk fel. Ha feltételezzük, hogy a $\{\xi_t; t \geq 0\}$ folytonos idejű lánc sztochasztikusan folytonos, aminek szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{máskor,} \end{cases}$$

akkor véges állapottér esetén létezik a lánc

$$A = (a_{ij}) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \chi_{(i \neq j)} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \chi_{(i=j)} \right)$$

infinitézimális mátrixa, s a lánc egyúttal konzervatív, $\sum_{j \in E} a_{ij} = 0$. Sztochasztikusan folytonos *Markov-láncok* választhatók szeparábiliseknek s mint ilyenekre az állapotváltozások mechanizmusát az alábbi módon írhatjuk le. A lánc bejutva valamely i állapotba, abban $q_i = -a_{ii}$ paraméterrel rendelkező exponenciális eloszlású ideig tartózkodik. Az i állapotban való tartózkodás után $\frac{a_{ij}}{q_i}$ valószínűséggel megy át a j állapotba, majd a további állapotváltozások az előbb leírtak szerint mennek végbe.

4. Beágyazott Markov-lánc

Legyen $\{\xi_t, t \geq 0\}$ folytonos idejű sztochasztikusan folytonos, szeparábilis *Markov-lánc*, s jelölje $\{\tau_k, k \geq 1\}$ az egymásutáni állapotváltozások pillanatait. Tekintsük az

$$\eta_n = \xi_{\tau_n+0}, \quad (n \geq 1)$$

sorozatot. Feltételezve az erős *Markov-tulajdonságot* a $\{\xi_t, t \geq 0\}$ folyamatra, $\{\eta_n, n \geq 1\}$ diszkrét idejű *Markov-láncot* alkot, melyet szokás beágyazott *Markov-láncnak* nevezni. Az $\{\eta_n; n \geq 1\}$ beágyazott lánc átmeneti mátrixa

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ q_i \end{pmatrix}, \quad (p_{ii} = 0),$$

ahol (a_{ij}) a kiindulási folytonos idejű folyamat infinitézimális mátrixa.

Tegyük fel, hogy mind a kiindulási, mind a beágyazott láncnak létezik egyértelmű stacionárius eloszlása. Jelölje $\mathbf{p}^* = (p_0, p_1, \dots)$ a folytonos $\mathbf{r}^* = (r_0, r_1, \dots)$ a beágyazott lánc stacionárius eloszlását.¹ E két eloszlás között fennáll

$$(4.1) \quad p_i = \frac{r_i \frac{1}{q_i}}{\sum_0^{\infty} r_k \frac{1}{q_k}}$$

hacsak $\sum_0^{\infty} r_k \frac{1}{q_k} < \infty$. A (4.1) reláció könnyen verifikálható, ha figyelembe vesszük, hogy a p eloszlás vektorra

$$\mathbf{A}^* \mathbf{p} = \mathbf{0},$$

az \mathbf{r} eloszlás vektorra pedig

$$\mathbf{r} = \mathbf{P}^* \mathbf{r}, \quad (\text{avagy } \mathbf{r}^* = \mathbf{r}^* \mathbf{P}).$$

5. A nagy számok erős törvénye Markov-láncokra

Legyen $\{\xi_t, t > 0\}$ sztochasztikus folyamat E állapottérrel. Legyen g E -t $(-\infty, \infty)$ -be képező függvény, G ilyen függvényeknek egy osztálya.

Azt mondjuk, hogy a $\{\xi_t, t \geq 0\}$ folyamat eleget tesz a nagy számok erős törvényének a G függvényosztályon, ha bármely $g \in G$ -re, folytonos idő esetén a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(\xi_t) dt,$$

diszkrét idő esetén a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N g(\xi_t)$$

1 valószínűséggel létezik és konstans.

¹ \mathbf{A}^* jel felső állásban a transzpozíció műveletét fogja jelölni.

Folytonos idő esetén ahhoz, hogy e fogalom értelemmel bírjon, a folyamatnak mérhetőnek kell lenni. Miután mi a *Markov-láncok* sztochasztikus folytonosságát mindig feltételezzük, így a sztochasztikus folyamatok általános elméletéből következően az ilyen láncokhoz létezik, teljesen szeparábilis és mérhető modifikáció.

Az alábbiakban felújításméleti megfontolásokat fogunk alkalmazni, s lényeges szerepet fog játszani az a tény, hogy a diszkrét állapotterű *Markov-láncok* regenerációs folyamatok. Pontosabban, legyen $\{\xi_t, t \geq 0\}$ diszkrét, E állapotterű *irreducibilis Markov-lánc*. Legyen i tetszőleges állapot, s tekintsük az i állapotba az egymásutáni érkezések $u_1^{(i)} < u_2^{(i)} < \dots$ időpont sorozatát. Az $\{u_k^{(i)}, k \geq 1\}$ sorozat a $\{\xi_t, t \geq 0\}$ *Markov-láncre* regenerációs időpontosorozat, s a lánc regenerációs időközzeit a $\tau_{ii}^{(k)} = u_{k+1}^{(i)} - u_k^{(i)}$ ($k \geq 1$) változók alkotják. A $\tau_{ii}^{(0)} = u_1^{(i)}$ változó eloszlása függ a lánc kezdeti eloszlásától, a $\{\tau_{ii}^{(k)}, k \geq 0\}$ sorozat ún. késleltetett felújítási folyamat.

Alapvető feltételünk lesz, hogy

$$(5.1) \quad m_{ii} = M\tau_{ii}^{(1)} < \infty$$

(pozitív visszatérőség).

1. TÉTEL. *Pozitív visszatérő Markov-láncokra* érvényes a nagy számok erős törvénye a lánc stacionárius eloszlása szerint integrálható függvények osztályán.

Bizonyítás. A folytonos idő esetére végezzük el a bizonyítást. Legyen tehát $\{\xi_t, t \geq 0\}$ folytonos idejű pozitív visszatérő lánc, s i tetszőleges állapota, továbbá g az E -t $(-\infty, \infty)$ -be képező olyan függvény, amelyre $\sum_{i \in E} |g(i)| p_i < \infty$. Az általánosságot nem szűkítjük, ha feltesszük, hogy $g(i) \geq 0$ minden $i \in E$ -re.

A lánc k -adik ($k \geq 1$) ciklusa alatt a $\zeta_k = \{\xi_t, u_k^{(i)} \leq t < u_{k+1}^{(i)}\}$ folyamatot fogjuk érteni. A 0-adik cikluson a $\zeta_0 = \{\xi_t, 0 \leq t < u_1^{(i)}\}$ folyamatot értjük. A k -adik ciklushoz rendeljük hozzá a

$$\beta_k = \int_{u_k^{(i)}}^{u_{k+1}^{(i)}} g(\xi_t) dt, \quad (k \geq 0)$$

változót. Nyilvánvaló, hogy ha a g függvény korlátos, akkor $M\beta_k < \infty$. Legyen g_K a g -nek a $K > 0$ konstanssal való levágása: $g_K(x) = g(x)$, ha $g(x) \leq K$, $g_K(x) = K$, ha $g(x) > K$. A g_K függvénynek megfelelő β_k változót jelöljük $\beta_k(K)$ -val. Most $\beta_k(K)$ monoton növekvőleg tart β_k -hoz 1 valószínűséggel. Minthogy $M\beta_k(K) < \infty$ minden $K > 0$ -ra, így $M\beta_k$ végessége attól függ, hogy véges-e a $\lim_{K \rightarrow \infty} M\beta_k(K)$ határérték. Látni fogjuk, hogy minden olyan g -re, amelyre $M\beta_k < \infty$,

$$M\beta_k = m_{ii} \sum_{j \in E} g(j) p_j.$$

Így $M\beta_k(K) = m_{ii} \sum_{j \in E} g_K(j) p_j$ $K \rightarrow \infty$ esetén véges értékhez konvergál, hacsak $\sum_{j \in E} g(j) p_j < \infty$.

Vezessük be ezután a

$$v_T = \max \{k; u_k^{(i)} < T\}$$

változót, s tekintsük az

$$\int_0^T g(\xi_t) dt = \beta_0 + \sum_1^{v_T-1} \beta_k + \delta_T$$

felbontást. Most

$$\delta_T \equiv \int_{u_{v_T}^{(i)}}^{u_{v_T+1}^{(i)}} g(\xi_t) dt = \beta_{v_T}.$$

Feltételezve, hogy $M\beta_1 < \infty$, a 2. lemmának a $\{\beta_k, k \geq 1\}$ sorozatra és a $\{v_T, T \geq 0\}$ seregére való alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\frac{1}{T} \delta_T \rightarrow 0 \quad \text{m. m.},$$

hiszen $v_T/T \rightarrow \frac{1}{m_{ii}}$ m.m. Az, hogy $\delta_0/T \rightarrow 0$ m.m. nyilvánvaló, minthogy $P(\delta_0 < \infty) = 1$.

Végül az 1. lemma alkalmazásával az $\eta_n = \frac{1}{n} \sum_1^n \beta_k$, ($n \geq 1$) sorozatra kapjuk, hogy

$$(5.2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(\xi_t) dt = \frac{1}{m_{ii}} M\beta_1 \quad \text{m.m.}$$

A tétel bizonyításának teljességéhez még néhány megjegyzést kell fűznünk. Látható, hogy az (5.2) határérték független a folyamat kezdeti eloszlásától. Ha viszont a kezdeti eloszlásnak a folyamat stacionárius eloszlását választjuk, akkor a $\{\xi_t, t \geq 0\}$ lánc erős stacionárius folyamatot alkot, s (5.2) éppen azt jelenti, hogy a láncunk metrikusan tranzitív. Következésképpen az (5.2) határérték meg kell, hogy egyezzen a stacionárius eloszlás szerinti

$$Mg(\xi_0) = \sum_{j \in E} g(j) p_j = \bar{g}$$

várható értékkel. Nyertük egyúttal, hogy valóban $M\beta_1 = m_{ii} \bar{g}$.

2. *Megjegyzés.* [1]-ben (87. oldal) diszkrét idő esetére bizonyítva van egy a tételünkkel lényegében megegyező állítás. A bizonyítás alap gondolata ugyanaz, mint amelyet mi is követtünk. [1] az 1. tételt folytonos időre nem tárgyalja, kimondását és igazolását az olvasóra bízta.

3. *Megjegyzés.* Legyen H az E állapotter egy részhalmaza, s tekintsük a H -beli tartózkodási

$$Z_H^{(T)} = \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{\{\xi_t \in H\}} dt,$$

illetve a

$$Z_H^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{\{\xi_n \in H\}}$$

időátlagot. Az 1. tétel értelmében ez az időátlag az idő növekedésével a H -ban való tartózkodás (stacionárius)

$$P_H = \sum_{j \in H} p_j$$

valószínűségéhez tart m.m.

6. Markov-lánckok szűkítései, az állapotter egy részhalmazára

Legyen $\{\xi_n, n \geq 0\}$ diszkrét idejű *Markov-lánc*, H az állapotter egy részhalmaza. Az $\{n_k, k \geq 1\}$ sorozat elemei legyenek a H -ba való egymásutáni érkezések időpillanatai ($\xi_{n_k} \in H, k \geq 1$).

Az

$$(6.1) \quad \{X_k = \xi_{n_k}, k \geq 1\}$$

sorozat H állapotterű *Markov-lánc*, melyet a $\{\xi_n, n \geq 0\}$ lánc első szűkítésének (a H részhalmazra) fogunk nevezni.

Tekintsük az E állapotter egy olyan rendezését, amikor H elemei mind megelőzik a $\bar{H} = E \setminus H$ komplementer elemeit. Egy ilyen rendezésnek megfelelő P átmeneti mátrix

$$P = \begin{pmatrix} P_{HH} & P_{H\bar{H}} \\ P_{\bar{H}H} & P_{\bar{H}\bar{H}} \end{pmatrix}$$

hipermátrix alakzatban írható fel, ahol az előforduló indexelt mátrixok nem szorulnak bővebb magyarázatra.

2. TÉTEL. Legyen $\{\xi_n, n \geq 0\}$ diszkrét idejű *irreducibilis Markov-lánc*. Ekkor a H részhalmazra való (6.1) első szűkítés átmeneti mátrixa

$$(6.2) \quad \tilde{P} = P_{HH} + P_{H\bar{H}}(I - P_{\bar{H}\bar{H}})^{-1}P_{\bar{H}H},$$

továbbá, ha a $\{\xi_n, n \geq 0\}$ láncnak létezik egyértelmű $\mathbf{p}^* = (p_0, p_1, \dots)$ stacionárius eloszlása, akkor a (6.1) szűkítésnek is létezik egyértelmű stacionárius eloszlása, mely

$$\tilde{p}_i = \frac{p_i}{p_H}, \quad (i \in H, P_H = \sum_{j \in H} p_j).$$

Bizonyítás. Egy H -beli állapotból a következő lépés vezethet ismét H -beli állapothoz, ezért fordul elő (6.2) jobb oldalán az első tag. A második tag annak az esetnek felel meg, amikor egy H -beli állapotból a következő lépés \bar{H} -beli állapothoz vezet, majd még néhány lépés ismételt \bar{H} -beli állapotot eredményez, míg végül H -beli állapotot vesz fel a lánc. Az irreducibilitás és $H \subset E$ következtében $(I - P_{\bar{H}\bar{H}})^{-1}$ létezik, s $P_{H\bar{H}}$ és $P_{\bar{H}H}$ nem zérusak.

Az állítás második részének igazolása céljából vezessük be az alábbi jelöléseket:

$${}_H\mathbf{p}^* = (p_i, i \in H), \quad {}_{\bar{H}}\mathbf{p}^* = (p_i, i \in \bar{H}).$$

Megmutatjuk, hogy ${}_H\mathbf{P}^* = {}_H\mathbf{P}^*\hat{\mathbf{P}}$. Minthogy \mathbf{p} stacionárius eloszlásvektora \mathbf{P} -nek, ezért

$${}_H\mathbf{P}^* = {}_H\mathbf{P}^*\mathbf{P}_{HH} + {}_H\mathbf{P}^*\mathbf{P}_{HH},$$

$${}_H\mathbf{P}^* = {}_H\mathbf{P}^*\mathbf{P}_{HH} + {}_H\mathbf{P}^*\mathbf{P}_{HH}.$$

Innen

(6.3)

$${}_H\mathbf{P}^*\mathbf{P}_{HH} = {}_H\mathbf{P}^*(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{HH}).$$

Így valóban

$$\begin{aligned} {}_H\mathbf{P}^*\hat{\mathbf{P}} &= {}_H\mathbf{P}^*\mathbf{P}_{HH} + {}_H\mathbf{P}^*\mathbf{P}_{HH}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{HH})^{-1}\mathbf{P}_{HH} \\ &= {}_H\mathbf{P}^*\mathbf{P}_{HH} + {}_H\mathbf{P}^*\mathbf{P}_{HH} = {}_H\mathbf{P}^*. \end{aligned}$$

Végül tegyük fel, hogy $\hat{\mathbf{P}}$ -nak van egy másik stacionárius eloszlásvektora ${}_H\alpha$. (6.3) bal oldalán elvégezve a ${}_H\mathbf{P}^* = {}_H\alpha^*$ helyettesítést ${}_H\mathbf{P}^* = (p_i, i \in \bar{H})$ -re, lineáris inhomogén egyenletrendszert kapunk, mely $|\mathbf{I} - \mathbf{P}_{HH}| \neq 0$ -ra való tekintettel egyértelműen megoldható (hallgatólagosan feltételeztük, hogy az állapottér véges). Jelöljük ezt a megoldást ${}_H\alpha^*$ -val. Most $\alpha^* = ({}_H\alpha^*, {}_H\alpha^*)$ kielégíti az $\alpha^* = \alpha^*\mathbf{P}$ stacionaritási egyenletet is. Kaptuk tehát, hogy ha $\hat{\mathbf{P}}$ -nak a stacionárius eloszlásvektora nem egyértelmű, akkor nem létezhet \mathbf{P} -re sem egyértelmű stacionárius eloszlás.

Markov-láncok egy másik szűkítésére is szükségünk lesz, mely az első szűkítésnek egy bizonyos részsorozat. A $H \subset E$ halmazbeli bolyongás $\{n_k, k \geq 1\}$ időpont sorozatából tekintsük azokat az $s_k, (k \geq 1)$ időpontokat, amelyeket közvetlenül megelőző, azaz az $s_k - 1$ időpillanatban a lánc a \bar{H} komplementer halmazban tartózkodik ($\xi_{s_k-1} \in \bar{H}, \xi_{s_k} \in H$). Az

$$(6.4) \quad \{Y_k = \xi_{s_k}, k \geq 1\}$$

sorozat *Markov-lánc* H állapottérrel, melyet második szűkítésnek (a H részhalmazra) nevezünk. A (6.2) formula indoklásához hasonlóan beláthatjuk, hogy a (6.4) szűkítés átmeneti mátrixa

$$\hat{\mathbf{P}} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{HH})^{-1}\mathbf{P}_{HH}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{HH})^{-1}\mathbf{P}_{HH}.$$

Most is érvényes, hogy ha a $\{\xi_n, n \geq 0\}$ lánc egyértelmű stacionárius eloszlása $\mathbf{p}^* = (p_i, i \in E)$, akkor az $\{Y_k, k \geq 1\}$ szűkítés is rendelkezik egyértelmű stacionárius eloszlással, mely most

$$(6.5) \quad \hat{p}_i = c^{-1} \sum_{k \in \bar{H}} p_k p_{ki}, \quad (i \in H, c = \sum_{r \in \bar{H}} \sum_{k \in \bar{H}} p_k p_{kr}).$$

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy a második szűkítés felfogható első szűkítésnek, s így az előző állítás lévén a 2. tétel második része nem szorul bizonyításra.

7. Lépdelő lánc

Legyen a $\{\xi_n, n \geq 0\}$ diszkrét idejű Markov-lánc, s tekintsük a

$$\{\zeta_n = (\xi_n, \xi_{n+1}), n \geq 0\}$$

két dimenziós folyamatot. A $\{\zeta_n, n \geq 0\}$ diszkrét idejű *Markov-lánc* $E \times E$ állapottérrel, melyet lépdelő láncnak fogunk nevezni. Ennek a láncnak az átmeneti való-

színűségei:

$$P\{\zeta_{n+1} = (i, j) | \zeta_n = (k, l)\} = \begin{cases} p_{kl}, & \text{ha } j = k, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

A lépdelő $\{\zeta_n, n \geq 0\}$ lánc stacionárius eloszlása

$$h_{ij} = p_i p_{ij}, \quad (i, j \in E).$$

Legyen $H \subset E$, s tekintsük a $\bar{H} \times H \subset E \times E$ részhalmazt. Jelölje $\{Z_k, k \geq 1\}$ a $\{\zeta_n, n \geq 0\}$ lánc első szűkítését a $\bar{H} \times H$ részhalmazra. Az (5.4) (második) szűkítés nem más, mint a kétdimenziós $\{Z_k = (Z'_k, Z''_k), k \geq 1\}$ folyamat második komponense. A (6.5) formula ezekután nyilvánvaló.²

8. Folytonos idejű láncok szűkítése

Folytonos idő esetén a szűkítés algoritmus a állapotteről valamely részhalmazára hasonló a diszkrét idő esetéhez. A diszkrét idejű szűkítések nem mások, mint a beágyazott (diszkrét idejű) lánc megfelelő szűkítései. Az alábbiakban folytonos idejű szűkítéseket vezetünk be, melyek a *Markov-tulajdonsággal* már nem rendelkeznek, de a *fél-Markov-jellegzetességet* megőrzik. Csak a második jellegű szűkítésre lesz szükségünk, így az első szűkítést figyelmen kívül hagyva, csak szűkítésről fogunk beszélni.

Legyen tehát $\{\xi_t, t \geq 0\}$ folytonos idejű sztochasztikusan folytonos teljesen szeparábilis irreducibilis Markov-lánc véges E állapotterrel. Legyen H az E állapotternek egy valódi részhalmaza, s jelölje $\{s_k, k \geq 1\}$ azon egymásutáni időpontok sorozatát, amelyekben a lánc a \bar{H} komplementer halmazból a H halmazba jut, azaz

$$\xi_{s_k-0} \in \bar{H}, \quad \xi_{s_k+0} \in H, \quad (k \geq 1).$$

Legyen ezután

$$v_t = \max \{k; s_k \leq t\}.$$

Az $\{s_1 > t\}$ halmazon $v_t = 0$. A

$$(8.1) \quad \{Z_t = \xi_{s_{v_t+0}} + 0, \quad t \geq s_1\}$$

H állapotterű folytonos idejű folyamatot a $\{\xi_t, t \geq 0\}$ lánc szűkítésének (a H részhalmazra) nevezzük. A (8.1) szűkítés *fél-Markov-folyamat*, mely szerkezetének részletesebb megvilágítására most kitérünk.

Legyen $\{\eta_n, n \geq 1\}$ a beágyazott lánc, $\{Y_k, k \geq 1\}$ ennek második szűkítése H -ra. Az $\{(Y_k, s_k); k \geq 1\}$ kétdimenziós sorozat H állapotterű *Markov-felújítási folyamat*, s a (8.1) szűkítés e *Markov-felújítási folyamatnak* megfelelő

$$Z_t = Y_{v_t}, \quad (t \geq s_1)$$

fél-Markov-folyamat. A H -ból \bar{H} érintésével H -ba való sorozatos visszaérkezések időközzei

$$(8.2) \quad V_k = s_k - s_{k-1}, \quad (k \geq 2), \quad V_1 = s_1.$$

² A lépdelő lánc bevezetésére, hasznosságára E. ARJAS (Oulu, Finnország) hívta fel a szerző figyelmét személyes találkozásuk során.

Az, hogy az $\{Y_k, s_k; k \geq 1\}$ Markov-felújítási folyamat, azt jelenti, hogy az $\{Y_k, V_k; k \geq 1\}$ sorozat Markov-folyamat, amelyre $j \in H, x \geq 0$ esetén

$$P\{Y_{k+1} = j, V_{k+1} \leq x | \mathcal{P}_k\} = P\{Y_{k+1} = j, V_{k+1} \leq x | Y_k\},$$

ahol \mathcal{P}_k az $(Y_1, V_1), (Y_2, V_2), \dots, (Y_k, V_k)$ vektorok által generált σ -algebrát jelöli.

A továbbiakban szükségünk lesz az $\{\eta_n, n \geq 1\}$ beágyazott láncnak a \bar{H} komplementer halmazra való

$$\{\bar{Y}_k, k \geq 1\}$$

második szűkítésére. E láncot az $\bar{s}_1 > s_1$ pillanathoz tartozó $\bar{Y}_1 = \zeta_{\bar{s}_1+0}$ változóval indítjuk.

Vegyük észre, hogy az $\{(Y_k, \bar{Y}_k), k \geq 1\}$ kétdimenziós sorozat Markov-lánc $H \times \bar{H}$ állapottérrel. E lánc átmeneti valószínűségei

$$P\{Y_{k+1} = r, \bar{Y}_{k+1} = s | Y_k = i, \bar{Y}_k = j\} = \bar{q}_{jr} q_{rs},$$

a stacionárius eloszlása

$$\hat{p}_r q_{rs}, \quad (r \in H, s \in \bar{H}),$$

ahol

$$(q_{rs}) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{HH})^{-1} \mathbf{P}_{H\bar{H}}, \quad (\bar{q}_{jr}) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\bar{H}\bar{H}})^{-1} \mathbf{P}_{\bar{H}H},$$

$\hat{p}_r, (r \in H)$ az $(Y_k, k \geq 1)$ szűkítésnek a (6.5) formulával adott stacionárius eloszlása.

9. Tartózkodási idők az állapottér egy részalmazában

Az $\{s_k, k \geq 1\}, \{\bar{s}_k, k \geq 1\}$ sorozatokra fennáll a

$$0 \leq s_1 < \bar{s}_1 < s_2 < \bar{s}_2 < \dots$$

egyenlőtlenség sorozat.

A $\{V_k, k \geq 2\}$ időközsorozat elemei felbonthatók

$$V_k = v_k^{(H)} + v_k^{(\bar{H})}$$

összegre, ahol $v_k^{(H)} = \bar{s}_{k-1} - s_{k-1}$ a $\{\xi_t, t \geq 0\}$ láncnak a H halmazban való k -adik tartózkodási ideje, s hasonló értelme van $v_k^{(\bar{H})} = s_k - \bar{s}_{k-1}$ -nak.

A $\{\xi_t, t \geq 0\}$ ($\{\eta_n, n \geq 1\}$) lánc pozitív visszatérősége esetén az $\{(Y_k, \bar{Y}_k), k \geq 1\}$ sorozatban adott (i, j) elem pár ($i \in H, j \in \bar{H}$) végtelen sokszor előfordul. Más szóval a $\{\xi_t, t \geq 0\}$ lánc bármely realizációja tartalmaz végtelen sok olyan szakaszt, amely kezdő pontjában a realizáció értéke $i \in H$, majd H -beli értékeket vesz fel, s az első nem H -beli elem $j \in \bar{H}$. Az egymásutáni ilyen szakaszok hosszait jelöljük az $\{\alpha_{ij}^{(l)}, l \geq 1\}$ sorozat elemei. Nyilvánvaló, hogy adott $i \in H, j \in \bar{H}$ -ra az $\{\alpha_{ij}^{(l)}, l \geq 1\}$ sorozat elemei függetlenek, s azonos eloszlásúak. Most $v_k^{(H)}, (k \geq 2)$ reprezentálható

$$(9.1) \quad v_{k+1}^{(H)} = \alpha_{Y_k Y_k}^{(l_k)}$$

alakban, ahol l_k az (Y_k, \bar{Y}_k) gyakorisága az $(Y_1, \bar{Y}_1), \dots, (Y_k, \bar{Y}_k)$ sorozatban.

Teljesen hasonló módon értelmezzük adott $j \in \bar{H}$ és $k \in H$ -ra a $\{\beta_{jk}^{(l)}, l \geq 1\}$ független, azonos eloszlású változók sorozatát (a $j \in \bar{H}$ állapotból kiindulva az első

nem \bar{H} -beli k állapot elérési ideje). A (9.1)-hez hasonlóan $v_k^{(H)}$, ($k \geq 2$) reprezentálható

$$(9.2) \quad v_k^{(H)} = \beta_{Y_{k-1} Y_k}^{(Y_k)}$$

alakban. Itt az $\{(\bar{Y}_k, Y_{k+1}), k \geq 1\}$ sorozat $\bar{H} \times H$ állapotterű *Markov-lánc*, melynek átmeneti valószínűségeit, stacionárius eloszlását most már az olvasó is könnyedén felírhatja.

Az alábbiakban felírunk egy rekurzív összefüggést, az $\{\alpha_{ij}, i \in H, j \in \bar{H}\}$ mennyiségekre. A felső indexet elhagyjuk, minthogy a továbbiakban e változók lényegében csak az eloszlásukat lesznek hivatottak jelölni.

Néhány jelölést kell még bevezetnünk. Az $\{\varepsilon_{qi}, i \in E\}$ független exponenciális (megfelelően $q_i = -a_{ii}$ paraméterű) eloszlású változók seregét fogja jelölni. $\{i \rightarrow j\}$ -vel jelöljük azt az eseményt, hogy az i állapotot közvetlenül a j állapot követ, $\{iH_j\}$ pedig jelölje azt az eseményt, hogy az $i \in H$ állapotból kiindulva a láncnak a H halmazbeli tartózkodása $j \in \bar{H}$ állapotba kerüléssel fejeződik be. A korábban bevezetett jelöléssel összhangban:

$$P(\{iH_j\}) = q_{ij}, \quad P(\{j\bar{H}_k\}) = q_{jk}.$$

Lényegében a folytonos idejű láncok állapotváltozásai mechanizmusának (melyre már korábban utaltunk) következtében, az $\{iH_j\}$ eseményt feltételezve, fennáll az

$$(9.3) \quad \alpha_{ij} \doteq \sum_{\varepsilon \in H} \chi_{\{i-1\}}(\varepsilon_{qi} + \alpha_{1j}) + \chi_{\{i-j\}} \varepsilon_{qi}$$

„rekurzív” reláció, ahol a \doteq jel azt jelöli, hogy a két oldalon szereplő változó eloszlása megegyezik.

Hasonlóan érvelve, feltételezve a $\{j\bar{H}_k\}$ eseményt, kapjuk, hogy

$$(9.4) \quad \beta_{jk} \doteq \sum_{\varepsilon \in \bar{H}} \chi_{\{j-1\}}(\varepsilon_{qj} + \beta_{1k}) + \chi_{\{j-k\}} \varepsilon_{qj}.$$

Vezessük be a

$$\varphi_{ij}(s) = M(\bar{e}^{\alpha_{ij}} | \{iH_j\}), \quad (i \in H, j \in \bar{H}),$$

$$\psi_{jk}(s) = M(\bar{e}^{\beta_{jk}} | \{j\bar{H}_k\}), \quad (j \in \bar{H}, k \in H)$$

Laplace—Stieltjes ($L-S$) *transzformáltakat*. Ezekre a (9.3), (9.4) relációk a

$$\varphi_{ij}(s) = \frac{q_i}{q_i + s} \left(\sum_{l \in \bar{H}} \varphi_{lj}(s) \frac{p_{il} q_{lj}}{q_{ij}} + \frac{p_{ij}}{q_{ij}} \right), \quad (i \in H, j \in \bar{H})$$

$$\psi_{jk}(s) = \frac{q_j}{q_j + s} \left(\sum_{l \in \bar{H}} \psi_{lk}(s) \frac{p_{jl} \bar{q}_{lk}}{\bar{q}_{jk}} + \frac{p_{jk}}{\bar{q}_{jk}} \right), \quad (j \in \bar{H}, k \in H)$$

egyenleteket eredményezik. Valamivel egyszerűbb alakba mennek át egyenleteink a

$$\tilde{\varphi}_{ij}(s) = \varphi_{ij}(s) q_{ij}, \quad \tilde{\psi}_{jk}(s) = \psi_{jk}(s) \bar{q}_{jk}$$

mennyiségekre:

$$(9.5) \quad \tilde{\varphi}_{ij} = \frac{q_i}{q_i + s} \left(\sum_{l \in H} \tilde{\varphi}_{lj}(s) p_{il} + p_{ik} \right),$$

$$(9.6) \quad \tilde{\psi}_{jk} = \frac{q_j}{q_j + s} \left(\sum_{l \in H} \tilde{\psi}_{lk}(s) p_{jl} + p_{jk} \right).$$

Jelölje most $\gamma_i(H)$ az $i \in H$ kezdeti állapot esetén a H halmazbeli tartózkodás idejét. Ekkor

$$\gamma_i(H) \doteq \sum_{j \in H} \chi_{(ij)} \alpha_{ij},$$

s következésképpen

$$g_i(s, H) = M \bar{e}^{s \gamma_i(H)} = \sum_{j \in H} \tilde{\varphi}_{ij}(s).$$

Felírhatjuk a

$$\gamma_i(H) = \sum_{r \in H} \chi_{(i-r)} (\gamma_r(H) + \varepsilon_{qi}) + \sum_{r \in H} \chi_{(i-r)} \varepsilon_{qi}$$

rekurzív relációt is, melyből a

$$(9.7) \quad g_i(s, H) = \frac{q_i}{q_i + s} \left(\sum_{r \in H} g_r(s, H) p_{ir} + \sum_{r \in H} p_{ir} \right), \quad (i \in H)$$

egyenletrendszert kapjuk.

A (9.5), a (9.6), ill. a (9.7) egyenletrendszerek egyértelműen meghatározzák a $\tilde{\varphi}_{ij}(s)$, ($i \in H, j \in \bar{H}$) a $\tilde{\psi}_{jk}(s)$, ($j \in \bar{H}, k \in H$), ill. a $g_i(s, H)$, ($i \in H$) *L.S. transzformáltakat*. Deriváljunk s -szerint ezen egyenletek mindkét oldalán, majd az így kapott egyenlőségeket tekintsük az $s=0$ helyen. Így lineáris egyenletrendszerekhez jutunk az

$$a_{ij} = q_{ij} M \alpha_{ij} = \tilde{\varphi}_{ij}(0), \quad (i \in H, j \in \bar{H}),$$

a

$$b_{jk} = \bar{q}_{jk} M \beta_{jk} = \tilde{\psi}_{jk}(0), \quad (j \in \bar{H}, k \in H),$$

illetve a

$$C_i = M \gamma_i(H) = g'_i(0, H), \quad (i \in H)$$

mennyiségekre, melyekből a felsorolt mennyiségek egyértelműen meghatározhatók.

Indítsuk a $\{\xi_r, r \geq 0\}$ láncot a H halmazból ($\xi_0 \in H$) az $\{Y_k, k \geq 1\}$ szűkítés ((6.5) alakú) stacionárius eloszlásával. Ekkor az $\{Y_k, k \geq 1\}$ az $\{\bar{Y}_k, k \geq 1\}$ az $\{(Y_k, \bar{Y}_k), k \geq 1\}$ és az $\{(\bar{Y}_k, Y_{k+1}), k \geq 1\}$ láncok erős stacionárius sorozatok. A (9.1) és a (9.2) reprezentációk és a felsorolt láncok erős stacionaritásából kifolyólag a

$$(9.8) \quad \{v_k^{(H)}, k \geq 1\}, \quad \{v_k^{(H)}, k \geq 1\}, \quad \{V_k, k \geq 1\}$$

sorozatok is erős stacionárius sorozatok.

A $\{v_k^{(H)}, k \geq 1\}$ sorozat tagjai közös eloszlásának *L—S transzformáltja*

$$v(s, H) = M \bar{e}^{sv^{(H)}} = \sum_{i \in H} \hat{p}_i g_i(s, H),$$

a közös várhatóértékük (a H halmazbeli átlagos tartózkodási idő)

$$W_H = \sum_{i \in H} \hat{p}_i M \gamma_i(H) = \sum_{i \in H} \hat{p}_i c_i.$$

A stacionárius $\{v_k^{(H)}, k \geq 1\}$ sorozat közös eloszlásának $L-S$ transzformáltja

$$v(s, \bar{H}) = M\bar{e}^{sv_1^{(H)}} = \sum_{j \in \bar{H}} \hat{p}_j g_j(s, \bar{H}),$$

ahol $\{\hat{p}_j, j \in \bar{H}\}$ (6.5)-höz hasonló szerkezetű,

$$g_j(s, \bar{H}) = \sum_{k \in \bar{H}} \tilde{\psi}_{jk}(s), \quad (j \in \bar{H}),$$

ill. (9.7)-hez hasonló egyenletrendszer egyértelmű megoldása. A megfelelő közös (a \bar{H} halmazbeli tartózkodási idő) várhatóérték

$$W_H = \sum_{j \in \bar{H}} \hat{p}_j M\gamma_j(\bar{H}) = \sum_{j \in \bar{H}} \hat{p}_j \bar{c}_j.$$

Végül a stacionárius $\{V_k, k \geq 1\}$ sorozat elemeinek közös $L-S$ transzformáltja

$$v(s) = M\bar{e}^{sV_1} = \sum_{i \in H} \hat{p}_i \sum_{j \in H} \sum_{k \in H} \tilde{\varphi}_{ij}(s) \tilde{\psi}_{jk}(s),$$

$$MV_1 = W_H + W_H$$

közös várhatóértékkel.

4. *Megjegyzés.* A (8.1) szűkítés

$$G_{ij}(x) = P\{Y_{k+1} = j, V_{k+1} \leq x | Y_k = i\}$$

átmeneti eloszlásfüggvényeinek $L-S$ transzformáltja

$$\int_0^\infty \bar{e}^{sx} dG_{ij}(x) = \sum_{r \in H} \tilde{\varphi}_{ir}(s) \tilde{\psi}_{rj}(s).$$

A vázolt algoritmusok sorozatának elvégzésével tanulmányozhatjuk egy *Markov-láncnak* az állapottér valamely részhalmazában való tartózkodási idejét (eloszlását, momentumait). Most bebizonyítunk egy egyszerű összefüggést az első momentumra, melyből bizonyos esetekben az első momentum kényelmesen meghatározható.

3. TÉTEL. Legyen $\{\xi_t, t \geq 0\}$ véges E állapotterű, szeparábilis, irreducibilis, pozitív visszatérő, folytonos idejű *Markov-lánc*. Legyen H az állapottér egy valódi részhalmaza. Ekkor

$$(9.9) \quad \frac{W_H}{W_H + W_H} = P_H,$$

ahol $P_H = \sum_{i \in H} P_i$, $\{P_i, i \in E\}$ a (folytonos idejű) lánc stacionárius eloszlása.

Bizonyítás. Először bebizonyítjuk, hogy bármilyen legyen is a lánc kezdeti eloszlása, a (9.8) sorozatokra igaz a nagy számok erős törvénye. Az igazolást csak a $\{v_k^{(H)}, k \geq 1\}$ sorozatra végezzük el, hasonló megfontolás alkalmazható a másik két sorozatra is.

Legyen tetszőleges pozitív egész $n > 0$ -ra, $i \in H$ és $j \in \bar{H}$ -re

$$v_n(i, j) = \sum_{k=1}^n \chi_{(Y_k=i, \bar{Y}_k=j)}$$

(az (i, j) pár gyakorisága az (Y_k, \bar{Y}_k) , $k=1, \dots, n$ realizációban). A 3. megjegyzés értelmében

$$\frac{v_n(i, j)}{n} \rightarrow \hat{p}_i q_{ij} \quad \text{m.m.}$$

Figyelembe véve az

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k^{(H)} = \sum_{i \in H, j \in \bar{H}} \frac{v_n(i, j)}{n} \frac{1}{v_n(i, j)} \sum_I^{v_n(i, j)} \alpha_{ij}^{(e)}$$

felbontást, valóban nyerjük, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_I^n v_k^{(H)} = \sum_{i \in H, j \in \bar{H}} \hat{p}_i q_{ij} M \alpha_{ij} = \sum_{i \in H} \hat{p}_i c_i = W_H \quad \text{m.m.}$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_I^n v_k^{(H)} = W_H \quad \text{m.m.}$$

A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_I^n V_k = W_H + W_H \quad \text{m.m.}$$

már az előzőekből következik.

Tekintsük ezután a 4. megjegyzésben szereplő

$$Z_H^{(T)} = \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{(\xi_t \in H)} dt$$

időátlagot. Mintmár említettük

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Z_H^{(T)} = P_H \quad \text{m.m.}$$

Vegyük észre, hogy az $\int_0^T \chi_{(\xi_t \in H)} dt$ felírható

$$(9.10) \quad v_0 + \sum_I^T v_k^{(H)} + v_T$$

alakban, ahol v_0 a kezdeti ξ_0 értéktől függő egy (nulladik) H -beli tartózkodási idő,

$$v_T = \max \{k, s_{k+1} < T\},$$

v_T az (s_{v_T+1}, T) időköz alatti esetleges H -beli tartózkodási időtartam.

Most

$$v_T \equiv v_{v_T+1}^{(H)}$$

s alkalmazható a 2. lemma, melynek következtében

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v_T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v_T + 1}{T} \frac{v_{v_T+1}^{(H)}}{v_T + 1} = 0 \quad \text{m.m.}$$

Itt a $v_T/T \rightarrow (W_H + W_H)^{-1}$ 1 valószínűséggel reláció ugyanúgy adódik, mint a klasszikus felújítás-elmélet megfelelő állítása. Tekintsük ugyanis a

$$\frac{v_T}{T} = \frac{v_T}{V_0 + \sum_1^{v_T} V_k + V_T}$$

felbontást (V_0 és V_T értelmezése világos kell hogy legyen). $v_T \rightarrow \infty$ m.m. midőn $T \rightarrow \infty$, hiszen $s_k \rightarrow \infty$ m.m., midőn $k \rightarrow 0$. Így

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V_0}{v_T} = 0 \quad \text{m.m.}$$

mivel $P(V_0 < \infty) = 1$. A 2. lemma alkalmazásával

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V_T}{v_T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V_{v_T+1}}{v_T+1} \frac{v_T+1}{v_T} = 0 \quad \text{m.m.}$$

Végül $\sum_1^{v_T} V_k / v_T \rightarrow (W_H + W_H)^{-1}$ 1 valószínűséggel, hiszen alkalmazható az 1. lemma,

az $\left\{ \eta_n = \frac{1}{n} \sum_1^n V_k, n \geq 1 \right\}$ sorozatra és a $\{v_T, T > 0\}$ seregire.

Visszatérve a (9.10) összeghez, azt osztva T -vel, nyerjük, hogy

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{\{t_i \in H\}} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{v_T}{T} \frac{1}{v_T} \sum_1^{v_T} v_k^{(H)} = \frac{W_H}{W_H + W_H}.$$

Így a 3. tétel bizonyítása teljes.

5. *Megjegyzés.* A (9.9) formula különösen akkor előnyös, amikor a W_H, W_H várhatóértékek közül valamelyik ismert. Ez az eset fordul elő [2]-ben, s ennek következtében a gépek átlagos várakozási ideje a rendszert leíró *Markov-lánc* stacionárius eloszlásának ismeretében igen egyszerűen meghatározható.

6. *Megjegyzés.* A (9.9) formula az alternáló folyamatra vonatkozó $P_a = a/(a+b)$ képlet (l. [4], (52) formula) általánosításának tekinthető.

7. *Megjegyzés.* A W_H, W_H mennyiségekre felírható egy másik összefüggés is, mely a folytonos idejű láncokra az átmenetintenzitások és a stacionárius eloszlás terminológiájában

$$W_H + W_H = \lambda_H^{-1},$$

ahol

$$\lambda_H = \sum_{j \in H} \sum_{i \in H} P_i a_{ij}.$$

E formula részletesebb tárgyalására az általános fázisterű *fél-Markov-folyamatok* vizsgálatakor térünk ki. Előzetes tájékozódás céljából felhívjuk a figyelmet az [5] „abstract”-ra.

IRODALOM

- [1] CHUNG, K. L., *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960).
- [2] CSIGE, L. és TOMKÓ, J., „A gépkiszolgálási probléma exponenciális eloszlások esetén”, *Alkalmazott Matematikai Lapok*.
- [3] KOROLJUK, V. S., “Time of semi-Markov processes in a fixed set of states”, *Ukraine Mathematical Journal*, Tom 17, No. 3, pp. 123—128 (1965) (orosz nyelven).
- [4] TAKÁCS, L., „Tartózkodási időproblémákról” *MTA III. Osztály Közleményei* 7 (1957) 371—395.
- [5] TOMKÓ, J., “On sojourn times for semi-Markov processes”, 14th European Meeting of Statisticians, Wrocław August 31—September 4, (1981), Abstracts, p. 297.

(Beérkezett: 1981. december 7.)

TOMKÓ JÓZSEF

KLTE MATEMATIKAI INTÉZET

4010 DEBRECEN, PF. 12.

MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET

1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

SOJOURN TIME PROBLEMS FOR MARKOV CHAINS

J. TOMKÓ

The paper deals with sojourn times spent by a continuous time *Markov Chain* in a subset H of the state space. The main goal is to derive the formulae (9.9) for the expected sojourn times.

A GÉPKISZOLGÁLÁSI PROBLÉMA EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁSOK ESETÉN

CSIGE LÁSZLÓ — TOMKÓ JÓZSEF

Debrecen

Debrecen/Budapest

Adott n számú gép meghibásodásainak felderítését és javításait végezze egyetlen javító (egység). A gépek inhomogének, azaz a működési idő és a javítási idő eloszlása gépenként változhat, s feltételezzük, hogy ezek az eloszlások mind exponenciálisak. Különböző javítási (kiszolgálási) sorrendek (FIFO, processor sharing, prioritások) esetére tanulmányozzuk a hibás gépek számának eloszlását, a javító foglaltsági viszonyát és a gépkihasznátságokat. Elkészítettük a vonatkozó algoritmusok számológépi programjait, melyek alapján néhány konkrét esetre numerikus eredményeket is felsorolunk.

1. Bevezetés

Legyen adott n számú gép, amelyek működőképes állapotukban bizonyos funkció végzésére hivatottak. Véletlen okokból kifolyólag a gépek meghibásodhatnak, s így időszakonként javításra szorulnak. Álljon a rendelkezésre m számú javító egység (munkás, készülék), melyek bizonyos előre meghatározott (kiszolgálási) sorrend szerint végzik a javításokat. A probléma matematikai modellezésekor a gépek működőképességi időtartamait, javítási idejeit valószínűségi változóknak tekintjük, s ezek függőségi és eloszlási viszonyainak specializálása mellett a sztochasztikus (elsősorban a *Markov-típusú*) folyamatok elmélete segítségével válaszolhatjuk meg a felvetődő kérdéseket. Az adott gépkiszolgálási rendszerre vonatkozóan a működőképes gépek számának eloszlása, a javítóegységek foglaltsági viszonya, és a gépek kihasználtsága áll rendszerint az érdeklődés központjában.

Homogén gépkiszolgálási problémáról beszélünk, ha a működőképesség és a javítási idő szempontjából nem teszünk különbséget a gépek között. A klasszikus eredmény ([4], [7]) arra az esetre vonatkozik, amikor a működési időtartamok, a javítási idők összességükben függetlenek és exponenciális eloszlásúak.

Általános eloszlású működési időtartamok, exponenciális eloszlású javítási idők és $m=1$ javító egység esetén a működőképes gépek számának eloszlását az *Erlang-formulák* írják le. Elég könnyű, bár az irodalomban a szerzők tudomása szerint ez nem szerepel, általánosítani ezeket a formulákat $m>1$ számú javító egység esetére. A fordított esetben, amikor tehát a működési időtartamok exponenciális eloszlásúak, a javítási idők általános eloszlásúak, és $m=1$, az ún. *Takács-formulák* írják le a működőképes gépek számának eloszlását. E formulák általánosítása az $m>1$ esetre már sokkal nehezebb kérdés, s analitikus eredmények ez irányban még ismeretlenek.

Jelölje $m(T)$, ($T>0$) egy javító egységnek a $(0, T)$ időszakasz alatti összmunka idejét. Elég általános feltételek mellett az

$$(1.1) \quad f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{m(T)}{T}$$

határérték 1 valószínűséggel létezik és állandó. E határértéket szokás a javító egység foglaltsági viszonyán érteni. Egy gép kihasználtságán az

$$(1.2) \quad u = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u(T)}{T}$$

1 valószínűséggel létező állandót értjük, ahol $u(T)$, ($T > 0$) most egy gépnek a $(0, T)$ időköz alatti összműködési idejét jelöli. E karakterisztikákra a felsorolt esetekben formulák ismereteseek.

Lényegesen kevesebb figyelem fordult ezideig az irodalomban az inhomogén eset tárgyalására. Az inhomogén eset tanulmányozását a korábbi alkalmazási területek mellett az elektronikus számológép(rendszer)ek matematikai leírása, hatékonysági vizsgálata is indokolja. Ezen alkalmazási terület szolgáltat nagyobb nyomatókat az elsőbbségi (a prioritásos) kiszolgálási elvnek, s e terület vetette fel az idő-osztásos, s ennek határesetet, a processor-sharing (a javítóegység megosztása) kiszolgálási diszciplinát, [1], [2], [5], [9], [12], [13].

Dolgozatunk főcélja az inhomogén eset tanulmányozása exponenciális eloszlások esetén egyetlen ($m=1$) javítóegységre. Feltételezzük tehát, hogy a gépek működési időtartama exponenciális eloszlású, az i -edik gépre $\lambda_i > 0$ paraméterrel, s a javítási idő is exponenciális eloszlású, megfelelően $\mu_i > 0$ paraméterrel. Mind a működési, mind a javítási idők összességükben függetlenek.

A 2. pontban vázoljuk annak a folytonos idejű *Markov-láncnak* a konstrukcióját, amely leírja a működőképes gépek számát, azok indexeit.

A 3., 4., 5. pontokban konkrétan jellemezzük e *Markov-láncot* az egyes kiszolgálási elveknek megfelelően. Ismertetjük a stacionárius eloszlások meghatározásának algoritmusát, s tárgyaljuk a várakozási időket, ill. a működés alóli kiesések időtartamait.

Az utóbbiak átlagértékével az (1.1) és az (1.2) karakterisztika könnyedén meghatározható.

A 6. pontban röviden ismertetjük a számológépi programokat, s numerikus eredményeket mutatunk be.

A dolgozat elméleti alapjait a [15] dolgozat tárgyalja. Ennek ismerete elengedhetetlen a jelen dolgozat megértéséhez.

2. A gépkiszolgálási modell Markov-lánca

Tetszőleges $t \geq 0$ pillanatban az n gép közül néhány működhet, s a többi vagy javítás alatt van, vagy javításra várakozik. Jelölje $v(t)$, ($t \geq 0$) a t pillanatban nem működő gépek számát. Az inhomogén esetben a $\{v(t), t \geq 0\}$ folyamattal nem jellemezhetjük kimerítően a gépkiszolgálási rendszert. Meg kell mondanunk azt is, hogy melyek a nem működő gépek, s ezek közül melyiknek folyik a javítása. Tetszőleges $t \geq 0$ -ra egy $v(t)$ -dimenziójú $(x_1(t), \dots, x_{v(t)}(t))$ vektort vezetünk be, melynek komponensei a nem működő gépek indexeit jelölik. Előbb romlott el, előbb kerül javításra, (FIFO)-elv követése esetén megállapodunk abban, hogy a nem működő gépek felsorolása meghibásodásuk sorrendjének felel meg. Így $v(t) > 0$ -ra $x_1(t)$ a javítás alatt levő gép indexét jelöli. A processor sharing elv követésekor, amikor is a hibás gépek mindegyike javítás alatt van, s e javítások mindegyike $v(t) = k$ esetén $1/k$

intenzitással folyik, az $(x_1(t), \dots, x_{v(t)}(t))$ vektor rendezése tetszőleges lehet. Ilyen esetben a nagyság szerinti $(x_1(t) < x_2(t) < \dots < x_{v(t)}(t))$ rendezésben állapodunk meg. Az elsőbbségi kiszolgálás esetén, minthogy megállapodás szerint az alacsonyabb indexű gép elsőbbséggel bír a javításra a magasabb indexű gépekkel szemben, a hibás gépeket indexük nagyságrendje szerint soroljuk fel.

A gépkiszolgálás *Markov-lánca* alatt a

$$(2.1) \quad \xi(t) = (v(t); x_1(t), \dots, x_{v(t)}(t)), \quad (t \geq 0)$$

vektorfolyamatot értjük, ahol $x_1(t), \dots, x_{v(t)}(t)$ rendezését a különböző kiszolgálási sorrendekre az előbb mondottak szerint kell érteni.

Az előforduló összes eloszlás exponenciálítása következtében a (2.1) folyamat folytonos idejű sztochasztikusan folytonos *Markov-lánc*. Feltételezhetjük, hogy e folyamat teljesen szeparábilis és mérhető. Ha a $\lambda_i, \mu_i, (1 \leq i \leq n)$ paraméterek mind pozitívak, akkor nyilvánvalóan a (2.1) lánc irreducibilis. Az, hogy (2.1) pozitív visszatérő több módon is belátható. Ennek részletesebb indoklására nem térünk ki.

Hivatkozni fogunk a (2.1) folytonos idejű, láncnak az állapotváltozások (kiszolgálás befejeződések vagy gép meghibásodások) $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots$ pillanataira vonatkozó

$$(2.2) \quad \eta_n = \xi(\tau_n + 0), \quad (n \geq 1)$$

beágyazott láncra. Az említett kiszolgálási elvek bármelyikére (2.2) irreducibilis, 2 periódusú, pozitív visszatérő lánc.

3. Javítás a meghibásodás sorrendjében

Történjenek a gépek javításai meghibásodásuk sorrendjében. A tömegkiszolgálás-elméletben e kiszolgálási diszciplinára „előbb érkezett előbb távozik” szókapcsolat angol nyelvű (first in first out) megfelelőjének „FIFO” rövidítésével szokás (és fogunk mi is) hivatkozni. Ilyen javítási sorrend esetén a (2.1) folyamat állapotterét, n elem összes $1 \leq k \leq n$ -ad rendű ismétlés nélküli variációi alkotják, amelyekhez még a 0-pontot is csatolni kell (a 0-pont azon esetnek megfelelő állapot, amikor mindegyik gép működőképes).

A (2.1) lánc $t, (t \geq 0)$ pillanatbeli eloszlására vezessük be az alábbi függvényeket:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= P(v(t) = 0), \\ p_{i_1 \dots i_k}(t) &= P(v(t) = k, x_1(t) = i_1, \dots, x_k(t) = i_k) \\ &(1 \leq k \leq n), \quad (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n). \end{aligned}$$

E függvények kielégítik a következő differenciálegyenlet-rendszert (*Kolmogorov-egyenletek*):

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) p_0(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(t), \\ p_{i_1 \dots i_k}'(t) &= \lambda_{i_k} p_{i_1 \dots i_{k-1}}(t) - (\mu_{i_k} + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \lambda_r) p_{i_1 \dots i_k}(t) + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \mu_r p_{r i_1 \dots i_k}(t). \end{aligned}$$

Ezekből az egyenletekből könnyen leolvashatók a (2.1) lánc infinitézimális mátrixának elemei. Rendezzük az állapototteret a következőképpen. A 0 állapot legyen az első. Egy alacsonyabb osztályú variáció mindig előzze a magasabb osztályú variációkat. Az azonos osztályú variációk a lexikografikus rendezésben kövessék egymást. Egy tetszőleges i_1, \dots, i_k variációnak e rendezés szerinti sorszámát jelöljük $\text{idv}(i_1, \dots, i_k)$ -val. Ezek után a (2.1) lánc A infinitézimális mátrixának az $\text{idv}(i_1, \dots, i_k)$ sorban levő elemei; az $\text{idv}(i_2, \dots, i_k)$ helyen μ_{i_1} , e sor indexével megegyező helyen $-(\mu_{i_1} + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \lambda_r)$, majd az $\text{idv}(i_1, \dots, i_k, r)$, ($r \neq i_1, \dots, i_k$) helyeken λ_r . A fel nem sorolt helyeken nullák állanak.

A stacionárius eloszlás, mely azonos a

$$p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t),$$

$$p_{i_1 \dots i_k} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i_1 \dots i_k}(t)$$

ergodikus eloszlással, a

$$(3.1) \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) p_0 = \sum_{i=1}^n \mu_i p_i$$

$$(\mu_{i_1} + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \lambda_r) p_{i_1 \dots i_k} = \lambda_{i_k} p_{i_1 \dots i_{k-1}} + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \mu_r p_{r i_1 \dots i_k}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek a normalizáló $p_0 + \sum p_{i_1 \dots i_k} = 1$ feltételt kielégítő egyértelmű megoldása. A (3.1) rendszer egyenleteinek száma $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k!$ mely n -nel rohamosan nő. A stacionaritási (3.1) egyenletrendszer könnyebben kezelhetővé, áttekinthetőbbé válik, ha bevezetjük az alábbi vektorváltozókat; legyen tetszőleges $1 \leq k \leq n$ -re $Z^{(k)}$ V_n^k -dimenziós $\left(V_n^k = \binom{n}{k} k! \right)$ vektor, melynek komponensei az $1, 2, \dots, n$ számok k -ad osztályú, lexikografikusan rendezett i_1, \dots, i_k variációihoz tartozó $p_{i_1 \dots i_k}$ valószínűségek. Ekkor (3.1) a következő differencia egyenletrendszerbe megy át:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} p_0 &= \mathbf{B}_0 \mathbf{Z}^{(1)} \\ \mathbf{Z}^{(1)} &= \mathbf{A}_1 \mathbf{p}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{Z}^{(2)} \\ \mathbf{Z}^{(k)} &= \mathbf{A}_k \mathbf{Z}^{(k-1)} + \mathbf{B}_k \mathbf{Z}^{(k+1)} \\ \mathbf{Z}^{(n)} &= \mathbf{A}_n \mathbf{Z}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Itt most $1 \leq k \leq n$ -re \mathbf{A}_k $V_n^k \times V_{k-1}^n$ -es mátrix, $0 \leq k < n$ -re \mathbf{B}_k $V_n^k \times V_{k+1}^n$ -es mátrix, s elemeik könnyen kiolvashatók a (3.1) egyenletrendszerből.

Legyen $\mathbf{F}_n = \mathbf{A}_n$ és tetszőleges $1 \leq k < n$ esetén $\mathbf{F}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_k \mathbf{F}_{k+1})^{-1} \mathbf{A}_k$. Ekkor

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{F}_k \mathbf{Z}^{(k-1)}, \quad (1 \leq k \leq n),$$

ahol $\mathbf{Z}^{(0)}$ alatt p_0 -t kell érteni. Kiindulva egy tetszőleges p_0 értékből (pl. $p_0=1$) a $\mathbf{Z}^{(k)}$, ($1 \leq k \leq n$) vektorok rendre meghatározhatók. A $p_{i_1 \dots i_k}$ valószínűségeket a normalizáló feltétel figyelembe vétele után e vektorok komponensei szolgáltatják.

A (2.1) *Markov-láncnak* az adott kiszolgálási (FIFO) elvnek megfelelő stacionárius eloszlása ismeretében [15] (9.9) formulája alapján több középértéket könnyedén meghatározhatunk.

A javító foglaltsági periódusainak időtartamait a (2.1) folyamatnak az állapot-tér 0-állapotát nem tartalmazó részhalmazban való tartózkodási időszakaszai alkotják. Így ha δ a javító egy foglaltsági időtartamát jelöli, akkor [15], (9.9) formulája értelmében

$$\frac{M\delta}{M\delta + \left(\sum_1^n \lambda_i\right)^{-1}} = 1 - p_0.$$

Tekintsük tetszőleges $1 \leq i \leq n$ -re az i -edik gép várakozási időtartamait. Ezek az időtartamok a (2.1) láncnak az alábbi \hat{H}_i részhalmazban való tartózkodási időszakaszaihoz azonosak;

\hat{H}_i azon i_1, \dots, i_k variációkból áll, amelyekre $i_j = i$ valamilyen $2 \leq j \leq k \leq n$ -re. Jelölje \hat{P}_i a \hat{H}_i részhalmazban való tartózkodás stacionárius valószínűségét. Ha most megfelelően indítjuk a (2.1) láncot, akkor az i -edik gép várakozási idejei stacionárius sorozatot alkotnak, s közös \hat{W}_i várhatóértékükre [15], (9.9) értelmében

$$\frac{\hat{W}_i}{\hat{W}_i + (\lambda_i^{-1} + \mu_i^{-1})} = \hat{P}_i.$$

Jelölje H_i a (2.1) lánc állapotterének azon részhalmazát, mely az i -t (bármely helyen) tartalmazó variációkból áll. A H_i halmazban való tartózkodási időszakaszok az i -edik gép hibás (működésképtelen) állapotbeli tartózkodási idejeit írják le. Ezen időtartamoknak a stacionárius esetre vonatkozó W_i közös átlagértékére:

$$\frac{W_i}{W_i + \lambda_i^{-1}} = P_i.$$

Nyilván $W_i = \hat{W}_i + \mu_i^{-1}$. Különösebb indoklás nélkül is világos ezután, hogy

$$\frac{\mu_i^{-1}}{\mu_i^{-1} + (\lambda_i^{-1} + \hat{W}_i)} = \bar{P}_i,$$

ahol \bar{P}_i annak a (stacionárius) valószínűsége, hogy az i -edik gép javítás alatt van;

$$\bar{P}_i = \sum_{i_1, \dots, i_k \neq i} P_{ii_1 \dots i_k}.$$

Legyen tetszőleges i -re $\chi_i(t) = 1$, ha a t pillanatban az i -edik gép hibás, $\chi_i(t) = 0$, ha működőképes. Az i -edik gép kihasználtsága [15], 3. megjegyzése alapján

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u_i(T)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [1 - \chi_i(t)] dt = 1 - P_i.$$

A $\sum_{i=1}^n \chi_i(t)$ összeg tetszőleges t mellett megadja a hibás gépek számát. Stacionárius esetben így a hibás gépek számának várható értéke $\sum_1^n P_i$.

Ahhoz, hogy az i -edik gép $v^{(i)}$ várakozási idejéről több információt nyújtsunk, meghatározhatjuk [15]

$$v(s, H) = \sum_{j \in H} \hat{p}_j g_j(s, H)$$

formulája alapján az $M\bar{e}^{sv^{(i)}}$ Laplace—Stieltjes transzformáltat. Most H szerepét, a \hat{H}_i halmaz játssza, s az összegben több tag nulla, minthogy a \hat{H}_i halmazba ennek komplementeréből csak az (i_1, \dots, i_k, i) , $(0 \leq k < n)$ variációkon keresztül juthatunk. Ha tetszőleges i_1, \dots, i_k variációra $g_{i_1 \dots i_k}$ jelöli a (2.1) folytonos idejű lánc beágyazott láncának stacionárius eloszlását, akkor

$$\hat{p}_{i_1 \dots i_k i} = \frac{q_{i_1 \dots i_k} \frac{\lambda_i}{\mu_{i_1} + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \lambda_r}}{Q^{(i)}},$$

ahol $Q^{(i)}$ a számlálóhoz hasonló szerkezetű összes lehetséges tagok összege. Adott i_1, \dots, i_k, i -re most

$$g_{i_1 \dots i_k i}(s, \hat{H}_i) = \prod_{r=1}^k \frac{\mu_{i_k}}{\mu_{i_k} + s},$$

s így

$$v(s, i) = M e^{-sv^{(i)}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i_1, \dots, i_k \neq i} \hat{p}_{i_1 \dots i_k i} \prod_{r=1}^k \frac{\mu_{i_r}}{\mu_{i_r} + s}.$$

E formulából kiindulva a $v^{(i)}$ várakozási idő tetszőleges momentuma meghatározható. A beágyazott lánc $\{q_{i_1 \dots i_k}\}$ stacionárius valószínűségeire a (3.2)-höz hasonló egyenletrendszer írható fel. Ha viszont már meghatároztuk a folytonos idejű lánc $\{p_{i_1 \dots i_k}\}$ stacionárius valószínűségeit, akkor a $\{q_{i_1 \dots i_k}\}$ valószínűségek [15], (4.1) összefüggése alapján is kiszámíthatók.

Már említettük, hogyan számítható ki a javító foglaltsági periódus-hosszának átlagértéke. Most rámutatunk, hogyan határozható meg e periódus-hossz magasabb momentumai. Először felelevenítjük a [13] és a [14]-ben bevezetett jelöléseket. Bármely $v > 0$ -ra η_v legyen v -paraméterű exponenciális eloszlású változó. Egyszerű tény, hogy ha η_v, η_μ függetlenek, akkor $\min(\eta_v, \eta_\mu)$ -re $\eta_{v+\mu}$ -vel hivatkozhatunk. Tetszőleges pozitív v_1, \dots, v_s mellett az $\{\eta_{v_i} = \eta_{v_1 + \dots + v_s}\}$ esemény azt fogja jelölni, hogy az $\eta_{v_1}, \dots, \eta_{v_s}$ független változók minimuma az η_{v_i} változó. Az állapottér tetszőleges i_1, \dots, i_k variációjára legyen $\delta_{i_1 \dots i_k}$ a javító olyan foglaltsági periódusának hossza, amely az i_1 -edik gép javításával kezdődik úgy, hogy ekkor már az i_2, \dots, i_k indexű gépek is hibásak, s felsorolásuk a meghibásodásuk sorrendjének felel meg. Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be tetszőleges i_1, \dots, i_k variációra a $v_{i_1 \dots i_k} = \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \lambda_r$ mennyiségeket. A [15] (9.7) formuláját megelőző rekurzív relációk esetünkben a következők:

$$\delta_i \doteq \eta_{\mu_i + v_i} + \sum \delta_{ij} \chi_{(\eta_{\lambda_j} = \eta_{\mu_i + v_i})},$$

tetszőleges (i_1, \dots, i_k) , $(1 \leq k < n)$ variációra

$$\delta_{i_1 \dots i_k} \doteq \eta_{\mu_{i_1} + v_{i_1 \dots i_k}} + \delta_{i_2 \dots i_k} \chi_{(\eta_{\mu_{i_1}} = \eta_{\mu_{i_1} + v_{i_1 \dots i_k}})} + \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} \delta_{i_1 \dots i_k j} \chi_{(\eta_{\lambda_j} = \eta_{\mu_{i_1} + v_{i_1 \dots i_k}})},$$

s bármely (i_1, \dots, i_n) variációra

$$\delta_{i_1 \dots i_n} \doteq \eta_{\mu_{i_1}} + \delta_{i_2 \dots i_n}.$$

Ezek az összefüggések az $Me^{-s\delta_{i_1 \dots i_k}} = g_{i_1 \dots i_k}(s)$ L — S transzformáltakra az alábbi lineáris inhomogén egyenletrendszerbe mennek át ([15], (9.7))

$$g_i(s) = \frac{\mu_i + v_i}{\mu_i + v_i + s} \left(\sum_{j \neq i} g_{ij}(s) \frac{\lambda_j}{\mu_i + v_i} + \frac{\mu_i}{\mu_i + v_i} \right);$$

tetszőleges (i_1, \dots, i_k) , $(1 \leq k < n)$ variációra

(3.3)

$$g_{i_1 \dots i_k}(s) = \frac{\mu_{i_1} + v_{i_1 \dots i_k}}{\mu_{i_1} + v_{i_1 \dots i_k} + s} \left(g_{i_2 \dots i_k}(s) \frac{\mu_{i_1}}{\mu_{i_1} + v_{i_1 \dots i_k}} + \sum_{j=i_1, \dots, i_k} g_{i_1 \dots i_k j}(s) \frac{\lambda_j}{\mu_{i_1} + v_{i_1 \dots i_k}} \right);$$

s bármely (i_1, \dots, i_n) variációra

$$g_{i_1 \dots i_n}(s) = \frac{\mu_{i_1}}{\mu_{i_1} + s} g_{i_2 \dots i_n}(s).$$

A (3.3) egyenletrendszer jelentősége valójában az, hogy ismételt s -szerinti deriválások után lineáris egyenletrendszert nyerhetünk az $M\delta_{i_1 \dots i_k}^k$ k -ad rendű momentumokra, melyek ismerete alapján a javító foglaltsági periódushosszának k -adik momentuma

$$M\delta^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_1^n \lambda_r \right)^{-1} M\delta_i^k$$

is meghatározható. Ezen utat követve $k=1$ -re a [14] dolgozat foglalkozik a megfelelő lineáris egyenletrendszer megoldásával. Ez az egyenletrendszer (3.2)-höz hasonló szerkezetű, s megoldása a blokkos szerkezet figyelembe vétele után viszonylag egyszerű számológépi algoritmussal meghatározható. Könnyű észrevenni, hogy tetszőleges k -ra, az $\{M\delta_{i_1 \dots i_k}^k\}$ momentumokra vonatkozó lineáris egyenletrendszer együttható mátrixa független k -tól, az alacsonyabb kitevőjű momentumok csak a konstans tagokban fordulnak elő.

4. A processor-sharing kiszolgálás esete

A bevezetésben már említettük, hogy a gépkiszolgálás matematikai modellje gyakran alkalmazható a számológép(rendszer)ekben lejátszódó folyamatok modellezésekor. Ezzel kapcsolatosan a részletesebb ismeretszerzés céljából az [5], [9], [12], [14] dolgozatokat ajánljuk az olvasó figyelmébe. Az említett alkalmazási terület egyúttal egy újabb kiszolgálási diszciplínát is felvetett, melyre „proceszor-sharing”-ként fogunk hivatkozni. A gépkiszolgálási problémára ez a diszciplína azt jelenti, hogy a gépeknek elromlásuk esetén nyomban elkezdődik a javításuk, melynek inten-

zítása azonban függ a mindenkori hibás gépek számától, attól fordítottan arányos. Tehát, ha egy gép javítás alatt van egy olyan Δt idő alatt, amikor még rajta kívül $k-1$ más gép hibás, akkor ezen Δt idő alatt a javítási ideje csak $\Delta t/k$ mennyiséggel halad előre.

A processor-sharing kiszolgálási elv esetén a (2.1) folyamat állapotterét az $1, 2, \dots, n$ számok (i_1, \dots, i_k) ($1 \leq k \leq n$) kombinációi alkotják, s ezekhez hozzá kell még venni a 0-pontot (a gépek mind működőképeseek). Rendezzük az állapotteret alkotó kombinációkat a lexikografikus sorrendben, s legyen i_{dk} (i_1, \dots, i_k) az (i_1, \dots, i_k) kombinációnak e rendezés szerinti sorszáma. Legyenek most is $p_{i_1, \dots, i_k}(t)$, ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) a (2.1) lánc $t \geq 0$ pillanatbeli eloszlását leíró függvények ($k=0$ -ra a $p_0(t)$ függvény veendő figyelembe). A Kolmogorov-egyenletek most a következők:

$$p_0'(t) = -\left(\sum_1^n \lambda_i\right) p_0(t) + \sum_1^n \mu_i p_i(t),$$

$$p_{i_1, \dots, i_k}'(t) = \sum_{r=1}^k \lambda_{i_r} p_{i_1, \dots, i_{r-1} i_{r+1}, \dots, i_k}(t) - \left(v_{i_1, \dots, i_k} + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \mu_{i_r}\right) p_{i_1, \dots, i_k}(t) +$$

$$+ \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \frac{\mu_r}{k+1} p_{i_1' i_2' \dots i_{k+1}'}(t),$$

ahol i_1', \dots, i_{k+1}' az i_1, \dots, i_k , r egészeknek a nagyság szerinti rendezése.

A jelen esetben a (2.1) folyamat infinitezimális mátrixának elemei a következők: az i_{dk} (i_1, \dots, i_k) sorban az i_{dk} ($i_1, \dots, i_{r-1}, i_{r+1}, \dots, i_k$), ($1 \leq r \leq k$) helyeken $\frac{1}{k} \mu_r$, e sor indexével megegyező helyen $-\left(v_{i_1, \dots, i_k} + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \mu_r\right)$, majd az i_{dk} (i_1, \dots, i_k, r) = $=i_{dk}$ (i_1', \dots, i_{k+1}'), ($r \neq i_1, \dots, i_k$) helyeken λ_r . A fel nem sorolt helyekre nullák írandók.

Jelöljük $\tilde{p}_0, \tilde{p}_{i_1, \dots, i_k}$, ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$) a megfelelő stacionárius valószínűségeket. Ekkor

$$(4.1) \quad \left(\sum_1^n \lambda_i\right) \tilde{p}_0 = \sum_1^n \mu_i p_i,$$

$$\left(v_{i_1, \dots, i_k} + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \mu_r\right) \tilde{p}_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{r=1}^k \lambda_{i_r} \tilde{p}_{i_1, \dots, i_{r-1} i_{r+1}, \dots, i_k} + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \frac{\mu_r}{k+1} \tilde{p}_{i_1' \dots i_{k+1}'}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy a (4.1) egyenletrendszer megoldása:

$$\tilde{p}_{i_1, \dots, i_k} = Ck! \prod_{r=1}^k \frac{\lambda_{i_r}}{\mu_{i_r}},$$

ahol C a $\tilde{p}_0 + \sum \tilde{p}_{i_1, \dots, i_k} = 1$ normalizáló feltételből határozható meg.

Ha most δ a javító foglaltsági periódushosszát jelöli a processor-sharing kiszolgálás esetére, akkor

$$\frac{M\delta}{M\delta + \left(\sum_1^n \lambda_i\right)^{-1}} = 1 - \tilde{p}_0.$$

Tetszőleges $1 \leq i \leq n$ -re $\tilde{v}^{(i)}$ jelölje az i -edik gép hibás állapotbeli tartózkodási idejét (egy elromlása után a kijavításáig eltelt időtartam).

Ennek \tilde{W}_i várható értéke a

$$\frac{\tilde{W}_i}{\tilde{W}_i + \lambda_i^{-1}} = \tilde{p}_i$$

összefüggés írható fel, ahol most \tilde{P}_i azon \tilde{H}_i részhalmazbeli tartózkodás stacionárius valószínűsége, mely az i -t mint elemet tartalmazó kombinációk összességéből áll. Az előző ponthoz hasonlóan a hibás gépek számának átlagértéke

$$\sum_1^n \tilde{p}_i.$$

A $\tilde{v}(s, i) = M\tilde{e}^{(s\tilde{v}i)}$ $L-S$ transzformáltra vonatkozó algoritmus most bonyolultabb, mint az előző pontbeli $v(s, i)$ esetén. Jelöljék most $\hat{r}_{i_1 \dots i_k}^{(i)}$ ($i_1 \neq i, \dots, i_k \neq i, 0 \leq k < n$) a [15], (6.5)-nek megfelelő, esetünkre vonatkozó valószínűségeket; $\hat{r}_{i_1 \dots i_k}^{(i)}$ annak a valószínűsége, hogy az i -edik gép meghibásodása pillanatában az i_1, \dots, i_k indexű gépek hibásak, javításuk folyik. A kényelmesebb írásmód kedvéért legyen tetszőleges (i_1, \dots, i_k) kombinációra $\mu_{i_1 \dots i_k} = \sum_1^k \mu_{i_r}$. A (2.1) lánc processor-sharing esetre vonatkozó beágyazott láncának a stacionárius eloszlása legyen $\{\tilde{q}_{i_1 \dots i_k}\}$. Ekkor

$$\hat{r}_0^{(i)} = \tilde{q}_0 \lambda_i \left(\sum_1^n \lambda_l \right)^{-1} \cdot \tilde{Q}^{(i)},$$

$$\hat{r}_{i_1 \dots i_k}^{(i)} = \tilde{q}_{i_1 \dots i_k} \frac{\lambda_i}{v_{i_1 \dots i_k} + \frac{1}{k} \mu_{i_1 \dots i_k}} \tilde{Q}^{(i)},$$

ahol $\tilde{Q}^{(i)}$ -t az $\hat{r}_0^{(i)} + \sum \hat{r}_{i_1 \dots i_k}^{(i)} = 1$ normalizáló feltétel határozza meg. A $\tilde{v}(s, i)$ meghatározását az teszi nehézkesé, hogy most a megfelelő

$$\tilde{g}_{i_1 \dots i_k}^{(i)}(s, \tilde{H}_i)$$

transzformáltakra nincsenek egzakt formuláink. Ezért [15] 2.3 pontját követve bevezetjük a

$$\gamma_{i_1 \dots i_k}^{(i)}, \quad (1 \leq i \leq n; i_1 \neq i, \dots, i_k \neq i; 0 \leq k < n)$$

változókat. $\gamma_{i_1 \dots i_k}^{(i)}$ jelöli az i -edik gép javítási idejét, ha meghibásodása pillanatában k számú gép hibás, melyek indexei i_1, \dots, i_k . A [15] (9.7) formuláját megelőző rekurzív relációk most a következőképpen írhatók fel:

$$\gamma_0^{(i)} \doteq \eta_{\mu_i + v_i} + \sum \gamma_j^{(i)} \chi_{(\eta_{\lambda_j} = \eta_{\mu_i + v_i})},$$

tetszőleges $i_1 \neq i, \dots, i_k \neq i$ kombinációra

$$\begin{aligned} \gamma_{i_1 \dots i_k}^{(i)} \doteq & \eta_{\frac{1}{k+1}(\mu_i + \mu_{i_1 \dots i_k}) + v_{i_1 \dots i_k}} + \sum_{j=1}^k \gamma_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_k}^{(i)} \chi_{\left\{ \eta_{\mu_{i_j}} = \eta_{\mu_{i_1 \dots i_k} + v_{i_1 \dots i_k}} \right\}} + \\ & + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \gamma_{i_1 \dots i_{k+1}}^{(i)} \chi_{\left\{ \eta_{\lambda_r} = \eta_{\mu_{i_1 \dots i_k} + v_{i_1 \dots i_k}} \right\}}, \end{aligned}$$

ahol i'_1, \dots, i'_{k+1} az i_1, i_2, \dots, i_k , r egészeknek a nagyság szerinti rendezése. Ezek a relációk a

$$\tilde{g}_{i_1 \dots i_k}^{(i)}(s) = M e^{-s y(i)}_{i_1 \dots i_k}, \quad (i_1 \neq i, \dots, i_k \neq i)$$

L - S transzformáltakra az alábbi inhomogén lineáris egyenletrendszert eredményezik:

$$\tilde{g}_0^{(i)}(s) = \frac{\mu_i + \nu_i}{\mu_i + \nu_i + s} \left(\sum_{j \neq i} \tilde{g}_j^{(i)}(s) \frac{\lambda_j}{\mu_i + \nu_i} + \frac{\mu_i}{\mu_i + \nu_i} \right),$$

tetszőleges $i_1 \neq i, \dots, i_k \neq i$ kombinációra, bevezetve a $\sigma_{i_1 \dots i_k, i} = \mu_i + \mu_{i_1 \dots i_k} + (k+1)\nu_{i_1 \dots i_k}$ jelölést,

$$(4.2) \quad \tilde{g}_{i_1 \dots i_k}^{(i)}(s) = \frac{\sigma_{i_1 \dots i_k, i}}{\sigma_{i_1 \dots i_k, i} + s} \left(\sum_{j=1}^k \tilde{g}_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_k}^{(i)}(s) \frac{\mu_{i_j}}{\sigma_{i_1 \dots i_k, i}} + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k, i} \tilde{g}_{i'_1 \dots i'_{k+1}}^{(i)}(s) \frac{(k+1)\lambda_r}{\sigma_{i_1 \dots i_k, i}} \right).$$

A $\tilde{v}(i, s)$ transzformált ezekután a

$$\tilde{v}(i, s) = \sum_{\substack{i_1 \neq i, \dots, i_k = i \\ 0 \leq k < n}} r_{i_1 \dots i_k}^{(i)} \tilde{g}_{i_1 \dots i_k}^{(i)}(s)$$

összeg alakjában írható fel. Az $M(\tilde{v}^{(i)})^k$, ($k \geq 1$) momentumok egymásután a megfelelő inhomogén lineáris egyenletrendszerekből (melyeket a (4.2) sorozatos differenciálásával származtatunk) határozhatók meg. A $\tilde{W}_i = M\tilde{v}^{(i)}$ első momentum meghatározása éppen ezen utat követve történik [3]-ben.

Ami az $M\tilde{\delta}^{(k)}$, ($k \geq 1$) momentumokat illeti, ugyanazon utat követhetjük, mint az előző pontban az $M\delta^k$, ($k \geq 1$) momentumok esetén. Bevezetve a

$$\tilde{\delta}_{i_1 \dots i_k}^{(i)} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \quad 1 \leq k \leq n)$$

változókat, (melyek az $(i_1 \dots i_k)$ kiindulási állapotból a javító foglaltsági szakaszait jelölik) az alábbi rekurzív relációk írhatók fel:

$$\tilde{\delta}_i \doteq \eta_{\mu_i + \nu_i} + \sum_{j \neq i} \tilde{\delta}_{ij} \chi(\eta_{\lambda_j} = \eta_{\mu_i + \nu_i});$$

s tetszőleges (i_1, \dots, i_k) kombinációra

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{i_1 \dots i_k} \doteq & \eta_{\frac{\mu_{i_1 \dots i_k} + \nu_{i_1 \dots i_k}}{k}} + \sum_{j=1}^k \tilde{\delta}_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_k} \chi(\eta_{\frac{\mu_{i_j}}{k}} = \eta_{\frac{\mu_{i_1 \dots i_k} + \nu_{i_1 \dots i_k}}{k}}) + \\ & + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \tilde{\delta}_{i'_1 \dots i'_{k+1}} \chi(\eta_{\frac{\lambda_r}{k}} = \eta_{\frac{\mu_{i_1 \dots i_k} + \nu_{i_1 \dots i_k}}{k}}), \end{aligned}$$

ahol most is i'_1, \dots, i'_{k+1} az i_1, \dots, i_k , r egészeknek a nagyság szerinti rendezése. A

$$\tilde{g}_{i_1 \dots i_k}(s) = M e^{-s \delta_{i_1 \dots i_k}} \quad (1 \leq k \leq n)$$

transzformáltakra vonatkozó inhomogén lineáris egyenletrendszer:

$$\tilde{g}_i(s) = \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{\sigma}_i + s} \left(\sum_{j \neq i} \tilde{g}_{ij}(s) \frac{\lambda_j}{\bar{\sigma}_i} + \frac{\mu_i}{\bar{\sigma}_i} \right);$$

s tetszőleges (i_1, \dots, i_k) kombinációra

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{i_1 \dots i_k}(s) &= \frac{\bar{\sigma}_{i_1 \dots i_k}}{\bar{\sigma}_{i_1 \dots i_k} + s} \left(\sum_{j=1}^k \tilde{g}_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_k}(s) \frac{\mu_{i_j}}{\bar{\sigma}_{i_1 \dots i_k}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r \neq i_1, \dots, i_k} \tilde{g}_{i_1' \dots i_{k+1}'}(s) \frac{k \lambda_r}{\bar{\sigma}_{i_1 \dots i_k}} \right); \end{aligned}$$

ahol most $\bar{\sigma}_{i_1 \dots i_k} = \mu_{i_1 \dots i_k} + k \nu_{i_1 \dots i_k}$.

Ezekután

$$M \bar{e}^{s\delta} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{r=1}^n \lambda_r \right)^{-1} \tilde{g}_i(s).$$

5. Prioritások a javításokra

Több alkalmazási terület, jelentős mértékben a számológép(rendszer)ek vizsgálata, felveti a prioritásos (elsőbbségi) kiszolgálás elvét. Eszerint az i -edik gép ($1 \cong i \cong n$) meghibásodása esetén minden az i -nél magasabb indexű géppel szemben elsőbbséget élvez a javítást illetően. Az elsőbbség abszolút, ami azt jelenti, hogy ha az i -edik gép meghibásodásakor olyan gép javítása folyik, amelynek indexe $j > i$, akkor ez a javítás félbeszakad, s csak akkor folytatódhat, ha mindegyik j -nél alacsonyabb indexű gép működőképes. A prioritásos kiszolgálási rendszerek elmélete meglehetősen fejlett, ami a [6], [8] hivatkozásokból is kitűnik. Ezek a monográfiák elég általános kiszolgálási rendszereket vizsgálnak, s eredményeik speciális esetként tartalmazzák a minket érdeklő karakterisztikák többségét. Az általánosabb esetre vonatkozó eredmények természetesen bonyolultabb matematikai módszereket, megfontolásokat igényelnek, s nem mindig egyszerű dolog ezekből a speciális esetre vonatkozó összefüggések legegyszerűbb formáinak a megtalálása.

A szóban forgó gépkiszolgálási modellre a prioritásos javítások esetén több karakterisztika (a gépek számára, n -re nézve) rekurzív úton származtatható. Ez azt jelenti, hogy elegendő összefüggéseket felfedezni a csupán két gépből álló rendszerre, s az n -számú gépből álló rendszerre a megfelelő karakterisztikák ezek alapján már könnyen felírhatók.

Legyen tehát most adott két gép, melyeket A , ill. B -vel fogunk jelölni. Tegyük fel, hogy A abszolút prioritással rendelkezik B -vel szemben. Az A -gép működési ideje (exponenciális) eloszlásának paramétere legyen α , ugyanez a B -re legyen β . Mindkét gép javítási ideje most lehet általános eloszlású, az A -gépre legyen $A(x)$, ($x \cong 0$), a B -re legyen $B(x)$, ($x \cong 0$). Ezen eloszlásfüggvények L — S transzformáltjai legyenek $a(s)$, ill. $b(s)$, ($\text{Re } s \cong 0$), várható értékeik a , ill. b . Jelöljük δ_A -val a javító foglalt-

sági periódushosszát, ha az az A -gép javításával kezdődik, miközben a B -gép működőképes. Hasonlóan értelmezzük δ_B -t; — mint a javító azon foglaltsági periódus-hosszát, mely a B -gép javításával kezdődik, miközben az A -gép működőképes. X , ill. a független közös $A(x)$ eloszlású változókat tartalmazó $\{X_i, i \geq 1\}$ sorozat elemei az A -gép javítási idejeit fogják jelölni. Hasonló jelentése lesz Y -nak, ill. az $\{Y_i, i \geq 1\}$ független azonos $B(x)$ eloszlású sorozatnak a B -gépre vonatkozóan. Mint korábban, most is $\mu > 0$ -ra η_μ μ -paraméterű exponenciális eloszlású változót fog jelölni. Most a δ_A, δ_B periódus-hosszakat a

$$(5.1) \quad \delta_A \doteq \begin{cases} X, & \text{ha } X \leq \eta_\beta, \\ X + \delta_B, & \text{ha } X > \eta_\beta; \end{cases}$$

$$\delta_B \doteq \sum_1^v X_i + Y$$

szerkezet jellemzi, ahol

$$v \doteq \max \left\{ k, \sum_1^k \eta_x^{(i)} \leq Y \right\},$$

($\{\eta_x^{(i)}, i \geq 1\}$ független α -paraméterű exponenciális eloszlású változók). Az (5.1) szerkezet alapján a teljes várhatóérték tétel felhasználásával nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} M\bar{e}^{s\delta_B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (a(s))^{n-sy} \frac{(\alpha y)^n}{n!} e^{-\alpha y} dB(y) = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha(1-a(s)))y} dB(y) = \\ &= b(s+\alpha(1-a(s))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\bar{e}^{s\delta_A} &= \int_0^{\infty} e^{-sx-\beta x} dA(x) + M^{-s\delta_B} \int_0^{\infty} e^{-sx}(1-e^{-\beta x}) dA(x) = \\ &= a(s+\beta) + b(s+\alpha(1-a(s)))[a(s)-a(s+\beta)]. \end{aligned}$$

A javító adott esetre vonatkozó δ foglaltsági időtartamának L — S transzformáltja

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \varphi(s) &= M^{-s\delta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} M^{-s\delta_A} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} M^{-s\delta_B} = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \{a(s+\beta) + b(s+\alpha(1-a(s)))[a(s)-a(s+\beta)]\} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} b(s+\alpha(1-a(s))). \end{aligned}$$

Ezekután n -gép prioritásos kiszolgálása esetére a javító $\delta^{(n)}$ foglaltsági időtartamának L — S transzformáltja, $\varphi_n(s)$, a következőképpen származtatható. Tekintsük az első $n-1$ gépet egyetlen gépnek, melyet jelöljünk A -val. Ez az A gép működik, ha az első $n-1$ gép mind működőképes, javítása folyik, ha közülük legalább egy hibás, s a hibások közül mindig a legalacsonyabb indexűvel foglalkozik a javító. Így ezen A -gép működési időtartamának paramétere $m_{n-1} = \sum_1^{n-1} \lambda_i$, javítási idejének L — S transzformáltja $\varphi_{n-1}(s)$. Az n -edik gép játssza a B -gép szerepét. Erre a működési idő paramétere λ_n , a javítási idejének L — S transzformáltja $\mu_n/(\mu_n+s)$. Nyilván $\varphi_n(s)$ megegyezik a javító azon foglaltsági időtartamának L — S transzformáltjával, mely ezen két gép prioritásos (A -nak van elsőbbsége

B -vel szemben) javítása következtében adódik. Így (5.2) alapján kapjuk, hogy

$$(5.3) \quad \varphi_n(s) = \frac{m_{n-1}}{m_n} \left\{ \varphi_{n-1}(s + \lambda_n) + \frac{\mu_n [\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-1}(s + \lambda_n)]}{\mu_n + s + m_{n-1}(1 - \varphi_{n-1}(s))} \right\} + \frac{\lambda_n}{m_n} \frac{\mu_n}{\mu_n + s + m_{n-1}(1 - \varphi_{n-1}(s))}.$$

Az $M\delta^{(n)}$ várható értékre (5.3) s -szerinti deriválása után az

$$(5.4) \quad M\delta^{(n)} = \frac{m_{n-1}}{m_n} \left\{ M\delta^{(n-1)} + \frac{1}{\mu_n} (1 - \varphi_{n-1}(\lambda_n))(1 + m_{n-1}M\delta^{(n-1)}) \right\} + \frac{\lambda_n}{m_n} \frac{1}{\mu_n} (1 + m_{n-1}M\delta^{(n-1)})$$

rekurzív formulát kapjuk. Kiindulva az $M\delta^{(1)} = \frac{1}{\mu_1}$, a $\varphi_1(\lambda_2) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda_2}$ értékekből váltakozva alkalmazva (5.4) és (5.3)-at az $M\delta^{(i)}$, ($1 \leq i \leq n$) átlagértékeket rendre meghatározhatjuk. Az (5.3) többszöri deriválásával algoritmust adhatunk a magasabb rendű $M(\delta^{(i)})^k$, ($k \geq 1$) momentumok kiszámítására is. Ennek részletezésével most nem foglalkozunk.

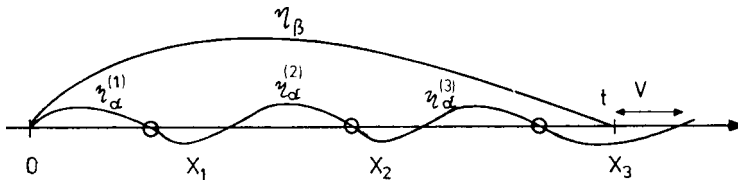
Térjünk át ezután a gépek hibás állapotbeli idejének vizsgálatára. Az 1-es gépre ez az időtartam megegyezik a javítási idővel. Legyen $i > 1$. Ekkor az i -edik gép hibás állapotbeli ideje a javítási időből és azon időszakosokból tevődik össze, amelyek alatt a javító, kénytelen az i -edik gép javítását felfüggeszteni, miután az alacsonyabb indexű gépek elromlása következtében azok javítását kell végeznie. Megint elegendő, az (5.2) formula levezetéséhez hasonlóan, csak a két gép esetét vizsgálni. Ismét jelöljük a két gépet A -val és B -vel, s legyenek érvényben a rájuk korábban bevezetett jelölések is. A - B gép hibás állapotbeli idejét a fentebb említettektől kicsit eltérően két időtartam összegére bontjuk. Amikor a B -gép elromlik, előfordulhat, hogy az A -gép hibás, s ekkor várakoznia kell. Ezen várakozási időt jelöljük V -vel. A V várakozási idő (mely lehet 0 is) eltelte után elkezdődhet a B -gép javítása. Könnyű észrevenni, hogy a B gép javításának kezdeti pillanatától a teljes kijavításáig számított időtartam ekvivalens egy δ_B periódushosszal. Így ha v_B jelöli a B -gép egy hibás állapotbeli idejét, akkor

$$v_B = V + \delta_B.$$

Mínt hogy V és δ_B függetlenek, így

$$(5.5) \quad v(s, B) = M^{-sv_B} = M^{-sV} \cdot M^{-s\delta_B} = v(s) b(s + \alpha(1 - a(s))).$$

Ahhoz, hogy $v(s)$ alakját felírjuk, tekintsük a következő ábrát:



1. ábra

A B gép javítása csak olyan pillanatban érhet véget, amikor az A gép működőképes, az ábrán a 0 egy ilyen pillanatnak felel meg. A B gép a következő elromlása után várakozni kénytelen, ha a működési ideje alatt az A gép legalább egyszer elromlott és az utolsó elromlását követő javítása a B gép meghibásodásáig nem fejeződik be. Az ábrán a karikával jelölt pontok az A gép meghibásodási pillanatait jelölik. Ezek a véletlen időpontok egy (késleltetett) felújítási folyamatot értelmeznek, s ha $H(t)$ jelöli e felújítási folyamat felújítási függvényét, akkor

$$\int_0^{\infty} e^{-su} dH(u) = \frac{\alpha}{\alpha+s} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\alpha+s} a(s)} = \frac{\alpha}{s + \alpha(1-a(s))}.$$

Az ábrából is világos kell hogy legyen a

$$P(V > x) = \beta \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \int_0^t [1 - A(t-u+x)] dH(u) dt$$

formula, melynek indoklásakor a teljes valószínűség tételére kétszer kell hivatkozni. Ezekután már elég egyszerű számolásokkal adódik, hogy

$$(5.6) \quad v(s) = P(V=0) - \int_0^{\infty} e^{-sx} dP(V > x) = \\ = P(V=0) + \beta \frac{a(s) - a(\beta)}{\beta - s} \frac{\alpha}{\beta + \alpha(1-a(\beta))}.$$

Nyilván

$$P(V=0) = \beta / (\beta + \alpha(1-a(\beta))).$$

(5.5) és (5.6) alapján s -szerinti deriválás után nyerjük, hogy

$$Mv_B = b(1 + \alpha a) + \left(a - \frac{1-a(\beta)}{\beta} \right) \frac{\alpha}{\beta + \alpha(1-a(\beta))}.$$

Nyilván (5.5) és (5.6) lehetővé teszik, hogy v_B magasabb momentumait is kiszámíthassuk.

Visszatérve most a több gép esetére, az i indexű gép v_i -hibás állapotbeli idejének L - S transzformáltja

$$v(i, s) = \frac{\mu_i}{\mu_i + s + m_{i-1}(1 - \varphi_{i-1}(s))} \times \\ \times \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + m_{i-1}(1 - \varphi_{i-1}(\lambda_i))} + \lambda_i \frac{\varphi_{i-1}(s) - \varphi_{i-1}(\lambda_i)}{\lambda_i - s} \frac{m_{i-1}}{\lambda_i + m_{i-1}(1 - \varphi_{i-1}(\lambda_i))} \right),$$

s várható értéke

$$Mv_i = \frac{1}{\mu_i} (1 + m_{i-1} M\delta^{(i-1)}) + \left(M\delta^{(i-1)} - \frac{1 - \varphi_{i-1}(\lambda_i)}{\lambda_i} \right) \frac{m_{i-1}}{\lambda_i + m_{i-1}(1 - \varphi_{i-1}(\lambda_i))}.$$

Igen egyszerű formában írható fel az i -gép működőképességének Q_i stacionárius valószínűsége. Ugyanis

$$Q_i = \frac{\frac{1}{\lambda_i}}{\frac{1}{\lambda_i} + Mv_i},$$

mely a $p_0^{(i)} = 1/(1 + m_i M \delta^{(i)})$ (mindegyik gép működőképes) valószínűségekkel a

$$(5.7) \quad Q_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} (p_0^{(i-1)} - p_0^{(i)})$$

alakba írható át.

Természetesen a prioritásos javítások esetén is követhető az előző két pontban alkalmazott módszer. Adott esetben a (2.1) folyamat állapotterét ismét a kombinációk alkotják. Az infinitézimális mátrix elemei az alábbiak szerint sorolhatók fel: az idk (i_1, \dots, i_k) sorban az idk (i_2, \dots, i_k) helyen μ_{i_1} , e sor indexével megegyező helyen $-(v_{i_1 \dots i_k} + \mu_{i_1})$, majd az idk $(i_1, \dots, i_k, r) = \text{idk}(i'_1, \dots, i'_{k+1})$, $(r \neq i_1, \dots, i_k)$ helyeken λ_r . A fel nem sorolt helyeken nullák értendők.

A stacionárius $p_0, p_{i_1 \dots i_k}$, $(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n)$ valószínűségekre vonatkozó lineáris egyenletrendszer:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} (\sum \lambda_i) p_0 &= \sum_1^n \mu_i p_0, \\ (v_{i_1 \dots i_k} + \mu_{i_1}) p_{i_1 \dots i_k} &= \sum_{r=1}^k \lambda_{i_r} p_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots i_k} + \sum_{r=1}^{i_1-1} \mu_r p_{r i_1 \dots i_k}. \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer (3.2)-höz hasonló differencia egyenletrendszerbe írható át az $\{Y^{(k)}, 0 \leq k \leq n\}$ ($Y^{(0)} = p_0$) vektorokra nézve. $Y^{(k)}$, $(k \geq 1)$ $C_k^n = \binom{n}{k}$ elemű vektor, melynek komponensei a lexikografikusan rendezett kombinációkhoz tartozó $p_{i_1 \dots i_k}$ valószínűségek. A megfelelő A_k mátrix $C_k^n \times C_{k-1}^n$ a B_k mátrix $C_k^n \times C_{k+1}^n$ terjedelmű. (5.8) megoldása tehát a (3.1), ill. a (3.2) megoldásához hasonló módon történhet.

Könnyű észrevenni, hogy ha valamely $n > 1$ -re adott $(\lambda_i, \mu_i; 1 \leq i \leq n)$ paraméterek mellett megoldottuk az (5.8) egyenletrendszert, akkor ennek a megoldásából a kevesebb számú gépből álló $(\lambda_i, \mu_i; 1 \leq i \leq r < n)$ rendszer stacionárius $p_{i_1 \dots i_k}^{(r)}$, $(0 \leq k \leq r)$ valószínűségei meghatározhatók. Ugyanis bármely $j > 1$ -re és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq j - 1$ -re

$$p_{i_1 \dots i_k}^{(j-1)} = p_{i_1 \dots i_k}^{(j)} + p_{i_1 \dots i_k j}^{(j)}.$$

Speciálisan

$$p_0^{(j-1)} = p_0^{(j)} + p_j^{(j)}.$$

Innen (5.7)-re való tekintettel kapjuk, hogy

$$Q_j = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k < j \\ 0 \leq k \leq j-1}} p_{i_1 \dots i_k j}^{(j)} = \frac{\mu_j}{\lambda_j} p_j^{(j)}.$$

A stacionárius $\{p_{i_1 \dots i_k}^{(n)}\}$ valószínűségekből az $M\delta^{(i)}$, $(1 \leq i \leq n)$ átlagértékek, a Q_i , $(1 \leq i \leq n)$ valószínűségek, s úgyszintén az Mv_i , $(1 \leq i \leq n)$ középértékek rendre meghatározhatók. A magasabb rendű $M(\delta^{(i)})^k M(v_i)^k$, $(k > 1)$ momentumok a már említett módon, avagy az előző két pontban vázolt inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldása során nyerhetők. Érdekes feladat megvizsgálni, mely út előnyösebb, bár az „előnyösebség” többféleképpen is értelmezhető.

6. Számológépi programok és numerikus eredmények

Az előző pontokból látható, hogy adott bemenő paraméterek (a gépek száma, a működési és javítási idők eloszlásának paraméterei, a kiszolgálási sorrend) megadása után a keresendő karakterisztikákhoz hosszadalmas számításokon keresztül juthatunk el. Ezek a számítások inhomogén esetben csak számológép segítségével végezhetők el. Megkíséreljük most a számológépi program szerkezetét, s annak néhány összetevőjét röviden ismertetni.

A FIFO, de bizonyos karakterisztikákhoz a prioritásos kiszolgálási sorrend esetén is szükség van egy olyan eljárásra, amely az $1, 2, \dots, n$ számok ismétlés nélküli variációit szolgáltatja lexikografikus sorrendben. Ez a számológépi programunkban a

$$\text{VARI}(n, k, \text{IN}, Z)$$

eljárás, mely egyszeri behívásakor a Z tömbben elhelyezett i_1, \dots, i_k variációt kicseréli ezen variációt a lexikografikus sorrendben követő variációra. Egy, a Z tömbben elhelyezett i_1, \dots, i_k variációnak a lexikografikus rendezés szerinti sorszámát az

$$\text{INDV}(n, k, Z, i)$$

eljárás határozza meg.

Ahhoz, hogy a (3.2) egyenletrendszert az említett rekurzív módon megoldhassuk, rögzített k , $(0 \leq k \leq n)$ esetén meg kell adnunk a szóban forgó *Markov-lánc* infinitézimális mátrixának elemeit tartalmazó A_k, B_k mátrixokat. E mátrixok kitöltését az infinitézimális mátrix elemeinek képzési szabálya szerint a VARI és az INDV felhasználásával az

$$\text{AB}(k, A, \text{IX}, \text{LX})$$

eljárás hajtja végre. Itt A egy $V_k^n \times V_{k-1}^n$ -es tömb. A B_k mátrixok teljes tárolása (0-elemeivel együtt) nem szükséges. Elegendő megmondani, hogy az egyes soraiban mely elemek különböznek zérustól, és hogy mik ezek az elemek. Ezek az adatok az eljárás behívása után az $\text{IX } V_k^n \times k$ -s egészértékű, ill. az ugyanilyen méretű LX valós tömbben keletkeznek. A (3.2) egyenletrendszer megoldása ezek után az említett rekurziót követve mátrixszorzások és invertálások megfelelő számú végrehajtása után adódik. A javítóegység és a gépek kihasználtsága a stacionárius eloszlásból a VARI eljárás felhasználásával könnyen kiszámítható. Ezen kihasználtságokból viszont a javító foglaltsági periódushosszának, illetve a gépek munka alóli kiesése idejének várható értékei a megfelelő formulák alapján számíthatók. A számológépi program PL1 nyelven készült. Az $n=4$ eset még számítható az R-30-as gépen, az $n=5$ eset viszont már nem.

Most néhány numerikus eredménnyel szemléltetjük a szóban forgó karakterisztikák változásait. A stacionárius valószínűségeket nem soroljuk fel.

Bemenő paraméterek
 FIFO a javító — a gépek kihasználtsága
 PROC-SHAR PRIORITÁSOS

| $n=3$ | | | | | | | |
|------------------------|-------------|------|------|------|------|------|------|
| $\lambda_1=0,3$ | $\mu_1=0,7$ | 0,57 | | 0,57 | | 0,70 | |
| $\lambda_2=0,3$ | $\mu_2=0,7$ | 0,75 | 0,57 | 0,74 | 0,57 | 0,74 | 0,58 |
| $\lambda_3=0,3$ | $\mu_3=0,7$ | | 0,57 | | 0,57 | | 0,44 |
| összegp kihasználtság: | | 1,72 | | 1,72 | | 1,72 | |

| $n=3$ | | | | | | | |
|------------------------|-------------|-------|------|-------|------|-------|------|
| $\lambda_1=0,5$ | $\mu_1=0,9$ | 0,48 | | 0,51 | | 0,64 | |
| $\lambda_2=0,3$ | $\mu_2=0,7$ | 0,75 | 0,56 | 0,76 | 0,56 | 0,77 | 0,56 |
| $\lambda_3=0,2$ | $\mu_3=0,5$ | | 0,62 | | 0,58 | | 0,44 |
| összegp kihasználtság: | | 1,669 | | 1,666 | | 1,656 | |

| $n=4$ | | | | | | | |
|------------------------|-------------|-------|--|-------|--|-------|--|
| $\lambda_1=0,5$ | $\mu_1=0,9$ | 0,38 | | 0,429 | | 0,64 | |
| $\lambda_2=0,4$ | $\mu_2=0,7$ | 0,41 | | 0,423 | | 0,49 | |
| | | 0,903 | | 0,906 | | 0,922 | |
| $\lambda_3=0,3$ | $\mu_3=0,6$ | 0,46 | | 0,451 | | 0,36 | |
| $\lambda_4=0,2$ | $\mu_4=0,5$ | 0,54 | | 0,500 | | 0,24 | |
| összegp kihasználtság: | | 1,814 | | 1,804 | | 1,751 | |

Az összegp kihasználtság sorban a gépek kihasználtságainak összege áll. Homogén esetben ez az összeg független a kiszolgálási sorrendtől. Mint sejthető, inhomogén esetben ez az összeg függ a kiszolgálási diszciplinától. Úgy tűnik, hogy a nagyobb javítókihasználtságot eredményező diszciplína az összegpkihasználtságot csökkenti. Ha a gépek inhomogénitása az egységnyi idő alatti munkájuk hatékonyságában is megmutatkozik, akkor már homogén esetben is eltérhet a különböző kiszolgálási sorrendekre a rendszer összhatékonysági mutatója.

IRODALOM

- [1] ASZTALOS, D., „Véges forrású tömegkiszolgálási modellek számítógépes rendszerekre”, *Alk. Mat. Lapok* 5 (1979) 89—103.
- [2] COHEN, J. W., „The multiple phase service network with generalized processor sharing”, *Acta Informatica* 12 (1979) 245—284.
- [3] CSIGE, L., „Multiprogramozásban együtt futó programok futási idejének várható értékéről”, Tudományos diákköri dolgozat, Debrecen, 1978.
- [4] DESCLOUX, A., *Delay Tables* (New York, McGraw Hill Book Com., 1962).
- [5] GAVER, D. P., „Probability models for multiprogramming computer systems”, *J. ACM* 14 (1967) 423—438.
- [6] GNYEDENKO, B. V., DANIELJAN, E. A., MATVEJEV, V. F., *Prioritetnue szisztemü obszluzsivaniija* (Moszkva, MGU, 1973).
- [7] HINCŠIN, A. JA., *Rabotü po matematiceszkaj teorij masszovovo obszluzsivaniija* (Moszkva, 1963).

- [8] JAISWAL, N. K., *Priority Queues* (Academic Press, New York, 1968).
- [9] KLEINROCK, L., *Queueing Systems, 2. vol.* (Computer appls., New York, 1976).
- [10] TAKÁCS, L., „Gép együttállások valószínűségszámítási tárgyalása tekintettel a várakozási időkre”, *MTA Mat.-Fiz. Oszt. Közl.* **1** (1951) 228—234.
- [11] TAKÁCS, L., „Bizonyos várakozási idő problémákról”, *MTA Mat.-Fiz. Oszt. Közl.* **7** (1957) 184—197.
- [12] TOMKÓ, J., „Processor utilization study”, *Comp. and Maths. with Appl.* **1** (1975) 337—344.
- [13] TOMKÓ, J., „Számológépek központi egységének kihasználtságáról, I.”, *Alk. Mat. Lapok* **1** (1975) 319—331.
- [14] TOMKÓ, J., „Számológépek központi egységének kihasználtságáról, II.”, *Alk. Mat. Lapok* **3** (1977) 83—96.
- [15] TOMKÓ, J., „Tartózkodási időproblémák Markov-láncokra”, *Alk. Mat. Lapok* **8** (1982)

(Beérkezett: 1982. január 22.)

CSIGE LÁSZLÓ
MAGYAR GÖRDÜLŐCSAPÁGY MŰVEK
4011 DEBRECEN, SZABADSÁG ÚTJA 113. PF. 4.

TOMKÓ JÓZSEF
KLTE MATEMATIKAI INTÉZET
4010 DEBRECEN, PF. 12.
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI. KENDE U. 13—17.

THE MASHINE INTERFERENCE FOR EXPONENTIALLY DISTRIBUTED OPERATING AND REPAIR TIMES

L. CSIGE and J. TOMKÓ

Let n mashines served by a single repairman. It is assumed that the mashines are inhomogeneous, i.e. their operating time and repair time distributions may differ for different mashines. These distributions are chosen to be exponential. For different service principles (FIFO, processor sharing, priority) we study the probability distribution of the number of mashines subject to failure, the utility for repairman as well as for mashines. A computer program package is written for calculating the characteristics involved and thus numerical results are presented for some particular cases.

A QRPS-TRANSZFORMÁCIÓ: A QR-ALGORITMUS ÁLTALÁNOSÍTÁSA VALÓS TÉGLALAPMÁTRIXOK SZINGULÁRIS FELBONTÁSÁRA

BOLLA MARIANNA

Budapest

A leírásra kerülő algoritmus valós téglalappátrixok szinguláris felbontására ad közvetlen geometriailag is szemléletes eljárást. Ismertetem az *SVD* eljárást is (l. [5]), ami az irodalomban található, e célra szolgáló módszer. Ez a mátrixot előbb bidiagonális alakra hozza, majd egy olyan sorozatot képez, ami nem más, mint a transzponáltakkal vett szorzatok eltolásos *QR*-transzformációja.

Az eljárás során azonban nem látszik, hogy eredeti mátrixunkat milyen ortogonális transzformációknak vetettük alá, míg a *QRPS*-transzformáció szemléletesen a hatványiteráció általánosítása. Ez egyes feladatokban (pl. kovarianciastruktúrák vizsgálatánál) rögtön sugallja a *QRPS* alkalmazását, és a transzformációk végrehajtásával párhuzamosan nyomon követhetjük a mátrixstruktúra alakulását is.

A *QRPS*-transzformáció konvergenciájának bizonyításán túl bidiagonális mátrixok esetén összehasonlítom a két algoritmust (bizonyos feltételek mellett ugyanahhoz a diagonális mátrixhoz konvergálnak), nem cél azonban a két módszer egzakt numerikus összehasonlítása (a két eljárás konvergenciájának gyorsasága kb. úgy viszonylik egymáshoz, mint a közönséges- és az eltolásos *QR*-transzformáció gyorsasága).

1. Bevezetés

Legyen A tetszőleges valós mátrix.

1.1. TÉTEL (Szinguláris felbontási tétel):

Az A $m \times n$ -es valós mátrix előáll

$$(1.1) \quad A = VAU'$$

alakban, ahol V $m \times m$ -es, U $n \times n$ -es ortonormált mátrix, A pedig $m \times n$ -es diagonális mátrix, melynek diagonálisában a

$$(1.2) \quad \lambda_1 \cong \lambda_2 \cong \dots \cong \lambda_l \cong 0$$

számok állnak, ahol $l = \min \{m, n\}$ (' a mátrixtranszponálást jelenti).

Bebizonyítható az is, hogy a $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ számok egyértelműen meg vannak határozva. A tétel bizonyítása és az U, V mátrixok egyértelműségének tárgyalása pl. TUSNÁDY [9]-ben található.

1.1. DEFINÍCIÓ: Az A mátrix (1.1) felbontása által meghatározott $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ nem-negatív valós számokat az A mátrix *szinguláris értékeinek* nevezzük.

Jelen dolgozatban a szinguláris értékek numerikus meghatározására ismertetünk két hatékony eljárást, melyek közül az utóbbi az U és V mátrixok előállítását is rögtön adja.

Az (1.1) felbontás V , ill. U mátrixai persze az AA' , ill. az $A'A$ mátrixok spektrálfelbontásából is nyerhetők, A szinguláris értékei pedig e szimmetrikus, pozitív definit mátrixok sajátértékeinek nem-negatív gyökei közül kerülnek ki.

Az ismertetésre kerülő módszerekkel tetszőleges valós mátrix szinguláris értékeit meg tudjuk határozni az AA' és $A'A$ mátrixszorzatok képzése nélkül. Mindkét algoritmus később definiálandó mátrixtranszformációk iteratív alkalmazásán alapszik, melyek során a konstruált mátrixsorozat az (1.1) felbontás A mátrixához konvergál, a $QRPS$ eljárás pedig közvetlenül approximálja az U és V mátrixokat is.

Valós mátrixok szinguláris felbontásának fontos szerepe van adatmátrixok és kovarianciastruktúrák elemzésében (pl. faktoranalízis, kanonikus korrelációanalízis), mátrixok általánosított inverzének meghatározásában, továbbá speciális minimumkereső feladatok (pl. hipergráfok euklideszi térbe történő beágyazása) megoldásában.

2. Mátrixok QR -felbontása és a QR -transzformáció

2.1. TÉTEL: Legyen A tetszőleges $m \times n$ -es valós mátrix. Ehhez megadható olyan Q $m \times m$ -es ortonormált- és R $m \times n$ -es felső háromszög mátrix (diagonálisa alatt zérus elemek állnak), melyekkel

$$(2.1) \quad A = QR$$

teljesül.

Bizonyítás: Megjegyezzük, hogy az $m \times n$ -es A mátrix tekinthető az E_n térnek az E_m térbe való lineáris leképezésének, ahol E_n az n -dimenziós euklideszi tér. Jelölje $R(A)$ az A leképezés képterét, $^\perp$ az ortogonális kiegészítő alteret, $\{\dots\}$ pedig a szereplő vektorok által kifeszített lineáris alteret az E_m térben.

Most konstruáljunk olyan Q és R mátrixokat, melyek a (2.1) összefüggést kielégítik! Ehhez jelölje $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ az A mátrix, $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ a Q mátrix oszlopvektorait, $\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_m$ pedig az R mátrix sorvektorait (a koordinátákat a második index jelöli). Ezekkel

$$(2.2) \quad A = \sum_{i=1}^m \mathbf{q}_i \mathbf{r}'_i = \left(\sum_{i=1}^m r_{i1} \mathbf{q}_i \quad \sum_{i=1}^m r_{i2} \mathbf{q}_i \quad \dots \quad \sum_{i=1}^m r_{in} \mathbf{q}_i \right).$$

Mivel az R felső háromszög alakú, a (2.2) összefüggésekből

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= r_{11} \mathbf{q}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_j &= \sum_{i=1}^{\min\{j, l\}} r_{ij} \mathbf{q}_i \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_n &= \sum_{i=1}^l r_{in} \mathbf{q}_i \end{aligned}$$

következik, ahol $l = \min\{m, n\}$.

Jelölje k az A mátrix rangját. Mivel $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ ortonormált rendszert alkot, az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszerben pedig legfeljebb k db lineárisan független vektor van ($k \leq l$), a konstrukció a következő:

Legyen $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_k}$ az A mátrix k lineárisan független oszlopa. Ezek kiválaszthatók úgy, hogy normájuk pozitív. A $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ vektorokat ezekből *Schmidt-ortogonalizációval* nyerjük, melynek során az

$$r_{p,j_i} \quad (p = 1, \dots, i; i = 1, \dots, k)$$

együtthatók a (2.3) összefüggésekből adódnak. Az is látható, hogy

$$r_{i,j_i} = \|\mathbf{a}_{j_i}\| > 0 \quad (i = 1, \dots, k),$$

ahol $\|\cdot\|$ a vektornormát jelöli.

Az R mátrix első j_k oszlopa közül a még meg nem választottakat úgy határozzuk meg, hogy a (2.3) összefüggések közül az első j_k teljesüljön:

Ha $\mathbf{a}_{j_{i-1}}, \mathbf{a}_{j_i}$ nem szomszédos oszlopai A -nak ($i=2, \dots, k$), akkor az R mátrix q -adik oszlopának a választása a következő:

$$r_{iq} = 0 \quad (q = j_{i-1} + 1, \dots, j_i - 1),$$

hiszen \mathbf{a}_q lineárisan függ az $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_{i-1}}$ vektoroktól, így a $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{i-1}$ vektoroktól is. Az r_{pq} ($p=1, \dots, i-1$) együtthatók éppen ennek a lineáris függőségnek az együtthatói.

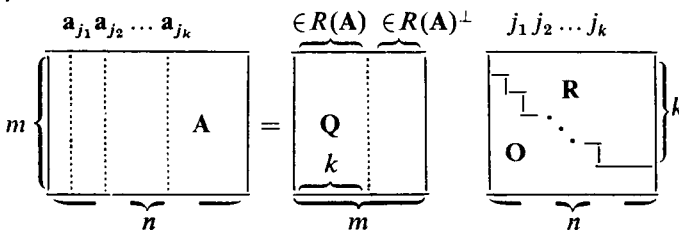
A Q mátrix utolsó $m-k$ oszlopát tetszőlegesen választjuk az $R(A)^\perp$ altérben úgy, hogy ott ortonormált rendszert alkossanak. Ez lehetséges, mert $R(A)$ dimenziója éppen $m-k$, és $k < m$ esetén $\mathbf{q}_{k+1}, \dots, \mathbf{q}_m$ ortogonális a $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ vektorokra is, mivel ezek benne vannak $R(A)$ -ban.

$j_k < n$ esetén az R mátrix utolsó $n-j_k$ oszlopát szintén a (2.3) összefüggések alapján határozzuk meg. Mivel ekkor \mathbf{a}_q ($q=j_k+1, \dots, n$) lineárisan függ az $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_k}$ vektoroktól, így a $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ vektoroktól is, ezért

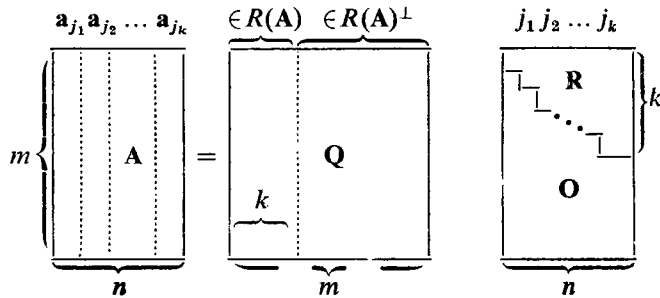
$$r_{pq} = 0 \quad (p = k+1, \dots, q).$$

Ezzel egy lehetséges konstrukciót megadtunk, amivel a tétel bizonyítását befejeztük. Szemléletesen a felbontás a következőképpen néz ki:

$m < n$ esetén:



$m \geq n$ esetén:



A fenti konstrukció szerint a Q mátrix első k oszlopának választása előjeltől eltekintve egyértelmű (a *Schmidt-ortogonalizáció* miatt), a többi oszlop pedig $R(A)^\perp$ -ben tetszőlegesen elforgatható. $k < n$ esetén az R mátrix választása attól is függ, hogyan jelölöm ki az A mátrix k lineárisan független oszlopát. Ha vesszük az első pozitív normájú oszlopot, majd mindig a legkisebb indexű olyat, amely az előzőtől lineárisan független, akkor az R mátrix olyan lépcsős mátrix, melyben a lehető legkevesebb zérus elem található.

A 2.1. tételben szereplő felbontás egyértelműségére nézve a következőket mondhatjuk: ha

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$$

két különböző, a tételben szereplő előállítás, akkor mivel Q_1 és Q_2 ortonormált mátrixok,

$$Q_2 = Q_1 T,$$

megfelelő T ortonormált mátrixszal, következésképpen

$$R_2 = T' R_1.$$

Tehát egy partikuláris $A=QR$ felbontásból (pl. a konstrukció szerintiből) kiindulva a Q mátrix tetszőleges olyan T ortonormált mátrixszal elforgatható (hátról szorozható), melyre a $T'R$ mátrix felső háromszög alakú. A fenti szemléltetés és

$$r_{ij} > 0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

miatt a Q mátrix első k oszlopa csak 180° -os szögekkel forgatható el (azaz előjeltől eltekintve egyértelmű). Azaz T olyan elemi forgatások szorzata, melyek csak az utolsó $m-k$ koordináta síkjában forgatnak $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ szöggel.

2.1. DEFINÍCIÓ: Egy valós mátrix (2.1) szerinti felbontását a mátrix *QR-felbontásának* nevezzük.

A *QR-felbontás* alapján FRANCIS [3] négyzetes mátrixokra a következő sorozatot konstruálta:

Legyen A tetszőleges valós négyzetes mátrix, $A_0 = A$ és $Q_0 R_0$ ennek *QR-felbontása*. Ha

$$(2.4) \quad A_{k-1} = Q_{k-1} R_{k-1}$$

QR -felbontás, akkor legyen

$$(2.5) \quad A_k = R_{k-1} Q_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Az $A_k = Q'_{k-1} A_{k-1} Q_{k-1}$ összefüggés miatt látható, hogy a sorozat tagjainak szinguláris értékei megegyeznek (a szinguláris felbontás definíciója és a szinguláris értékek egyértelműsége miatt).

Mielőtt a sorozat konvergenciájára vonatkozó tételt kimondanánk, szükség lesz néhány fogalomra:

2.2. DEFINÍCIÓ: Az A négyzetes mátrixot *egyszerű struktúrájúnak* nevezzük, ha *Jordan-féle kanonikus alakja* szigorúan diagonális.

Egy egyszerű struktúrájú mátrix szinguláris értékei a sajátértékek abszolút értékei, szinguláris felbontásának ortonormált mátrixai pedig a baloldali-, ill. jobboldali sajátvektorokat tartalmazzák oszlopaikban.

2.2. TÉTEL: Ha A egyszerű struktúrájú négyzetes mátrix, akkor

$$P_k = Q_0 Q_1 \dots Q_k$$

jelöléssel

$$(2.6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = X,$$

ahol $X\Psi X'$ az A spektrálfelbontása.

Az is igaz továbbá, hogy

$$(2.7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \Psi.$$

A tétel bizonyítására l. [10].

2.3. DEFINÍCIÓ: A (2.4), (2.5) összefüggések által meghatározott transzformációsorozat az A négyzetes mátrix *közönséges QR-transzformációjának* nevezzük.

A képzett mátrixsorozat konvergenciájának gyorsasága a szomszédos szinguláris értékek hányadosától függ, és gyorsítható a következő eltolások megfelelő választásával:

Legyen $A_0 = A$, $A_0 = Q_0 R_0$ QR -felbontás, $s_0 = 0$. Képezzük a következő sorozatot! Ha

$$(2.8) \quad A_{k-1} - s_{k-1} I = Q_{k-1} R_{k-1}$$

QR -felbontás, akkor legyen

$$(2.9) \quad A_k = R_{k-1} Q_{k-1} + s_{k-1} I \quad (k = 1, 2, \dots),$$

ahol I jelöli az identitás-mátrixot és s_1, s_2, \dots tetszőleges valós számok.

Könnyen látható, hogy itt is $A_k = Q'_{k-1} A_{k-1} Q_{k-1}$, és a 2.2. tétel is igaz ugyanazokkal a jelölésekkel, ha az s_i valós számok nem egyeznek meg pontosan az A mátrix valamely sajátértékével.

2.4. DEFINÍCIÓ: A (2.8), (2.9) összefüggésekkel meghatározott transzformációsorozat az A négyzetes mátrix *eltolósos QR-transzformációjának* nevezzük.

3. A QRPS-transzformáció

A 2.1. tétel alapján kézenfekvő a QR -transzformáció következő általánosítása. Az A $m \times n$ -es valós mátrix és transzponáltja felírható

$$A = QR, \quad A' = PS$$

alakban, ahol tehát Q $m \times m$ -es, P $n \times n$ -es ortonormált-, R $m \times n$ -es, S pedig $n \times m$ -es felső háromszög mátrixok. Legyen

$$A_0 = A, \quad Q_0 = Q, \quad R_0 = R, \quad P_0 = P, \quad S_0 = S.$$

Ezekkel képezzük a következő sorozatot! Ha

$$(3.1) \quad A_{k-1} = Q_{k-1} R_{k-1}, \quad A'_{k-1} = P_{k-1} S_{k-1}$$

QR -felbontások, akkor legyen

$$(3.2) \quad A_k = R_{k-1} P_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

következésképpen

$$A'_k = S_{k-1} Q_{k-1}.$$

Könnyen látható, hogy

$$A_k = Q'_{k-1} A_{k-1} P_{k-1},$$

így a sorozat tagjainak szinguláris értékei megegyeznek (a szinguláris felbontás definíciója és a szinguláris értékek egyértelműsége miatt).

3.1. TÉTEL: $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$, ahol $A = V \Lambda U'$ szinguláris felbontás.

Bizonyítás: Legyen

$$(3.3) \quad V_k = Q_0 Q_1 \dots Q_k, \quad U_k = P_0 P_1 \dots P_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ezekkel

$$(3.4) \quad A_k = Q'_{k-1} A_{k-1} P_{k-1} = Q'_{k-1} Q'_{k-2} A_{k-2} P_{k-2} P_{k-1} = \dots = V'_{k-1} A U_{k-1}.$$

Mivel $A = V \Lambda U'$ szinguláris felbontás, a $\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = U$ és $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = V$ összefüggésekből $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$ már következik (3.4) alapján.

Most belátjuk a V_k sorozat konvergenciáját:

3.1. LEMMA: $AA' \rightarrow A_2 A'_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{2k} A'_{2k} \rightarrow \dots$ közösleges QR -transzformáció. Hasonló igaz az $A_1 A'_1 \rightarrow A_3 A'_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_{2k+1} A'_{2k+1} \rightarrow \dots$ sorozatra is.

A lemma bizonyítása: A k -edik lépés után ($k=0, 1, 2, \dots$):

$$(3.5) \quad A_{2k} A'_{2k} = Q_{2k} R_{2k} P_{2k} S_{2k} = Q_{2k} A_{2k+1} S_{2k} = (Q_{2k} Q_{2k+1}) (R_{2k+1} S_{2k}),$$

ahol $Q_{2k} Q_{2k+1}$ ortonormált, $R_{2k+1} S_{2k}$ pedig felső háromszög mátrix. (3.5)-ben a jobb oldali szorzat tényezőit felcserélve:

$$\begin{aligned} R_{2k+1} S_{2k} Q_{2k} Q_{2k+1} &= R_{2k+1} A'_{2k+1} Q_{2k+1} = \\ &= R_{2k+1} P_{2k+1} S_{2k+1} Q_{2k+1} = A_{2k+2} A'_{2k+2}, \end{aligned}$$

azaz a sorozat $k+1$ -edik tagját kapjuk.

Az $A_1A'_1 \rightarrow A_3A'_3 \rightarrow \dots \rightarrow A_{2k+1}A'_{2k+1} \rightarrow \dots$ sorozatról is hasonlóan látható, hogy a sorozat egymást követő tagjai a közöséges QR -transzformáció sorozat képzési szabályát követik, ahol a sorozat tagjainak QR -felbontása

$$(3.6) \quad A_{2k+1}A'_{2k+1} = (Q_{2k+1}Q_{2k+2})(R_{2k+2}S_{2k+1}).$$

Ezzel a lemmát beláttuk.

Az $AA' \rightarrow A_2A'_2 \rightarrow \dots$ sorozat tagjainak QR -felbontásában szereplő első $k+1$ ortonormált mátrix szorzatáról viszont a 2.2. tétel alapján tudjuk, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Q_0Q_1)(Q_2Q_3) \dots (Q_{2k}Q_{2k+1}) = V,$$

ugyanis AA' szinguláris felbontása $V\Lambda^2V'$, ami — mivel AA' szimmetrikus — egyben spektrálfelbontás is. Azaz $\lim_{k \rightarrow \infty} V_{2k+1} = V$.

A V_k sorozat páros indexű tagjainak konvergenciája a 3.1. lemma második része alapján bizonyítható. Mivel $A_1A'_1$ spektrálfelbontása $(Q'_0V)\Lambda^2(V'Q_0)$, a 2.2. tétel és a (3.6) összefüggés miatt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Q_1Q_2)(Q_3Q_4) \dots (Q_{2k-1}Q_{2k}) = Q'_0V,$$

amiből — mivel Q_0 nem-szinguláris — következik, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_0Q_1 \dots Q_{2k} = V,$$

így $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = V$.

A $\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = U$ összefüggés hasonlóan igazolható az $A'A \rightarrow A'_2A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A'_{2k}A_{2k} \rightarrow \dots$ és az $A'_1A_1 \rightarrow A'_3A_3 \rightarrow \dots \rightarrow A'_{2k+1}A_{2k+1} \rightarrow \dots$ közöséges QR -transzformációkra való visszavezetéssel. Ezzel a tételt bebizonyítottuk, sőt melléktermékként megkaptuk az U_k és V_k sorozat konvergenciáját is.

3.1. DEFINÍCIÓ: A (3.1) és (3.2) összefüggésekkel meghatározott transzformációsorozatot az A általános valós mátrix $QRPS$ -transzformációjának nevezzük.

A $QRPS$ -transzformáció geometriailag is szemléltethető. Tekintsük ugyanis az $A \ m \times n$ -es mátrixot, mint egy $E_n \rightarrow E_m$ lineáris transzformáció $e_1, \dots, e_n \in E_n$, ill. $f_1, \dots, f_m \in E_m$ bázisokra vonatkozó mátrixát. A Q és P ortonormált mátrixok az Ae_1, \dots, Ae_n , ill. $A'f_1, \dots, A'f_m$ vektorrendszert ortogonalizálják E_m -ben, ill. E_n -ben, így $Q'AP$ éppen a fenti $E_n \rightarrow E_m$ transzformáció mátrixát jelenti az új bázisokban felírva. Az iteráció során az új báziselemek A -, ill. A' -képeit ismét ortogonalizáljuk, mindkét térben egyidejűleg. A 3.1. tétel szerint $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_0 \dots Q_k = V$, $\lim_{k \rightarrow \infty} P_0 \dots P_k = U$, azaz ezeknek a bázistranszformációknak az egymásutáni alkalmazásával a transzformált bázisvektorok a V , ill. U mátrix oszlopvektoraihoz konvergálnak az E_n , ill. E_m térben. Ezt fel lehet fogni a hatványiteráció általánosításának téglalap alakú mátrixokra.

Legyen φ_2 egyelőre tetszőleges. A szögeket $\vartheta_2, \varphi_3, \vartheta_3, \dots, \varphi_n, \vartheta_n$ sorrendben választjuk meg pusztán arra ügyelve, hogy az $S'AT = \tilde{A}$ mátrix is bidiagonális maradjon. Mivel

$$AT_2 = \begin{bmatrix} q_1 \cos \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2 & -q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2 & 0 & & & \\ & q_2 \sin \varphi_2 & q_2 \cos \varphi_2 & e_3 & & \\ & & & q_3 & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots & e_n \\ & & & & & q_n \end{bmatrix},$$

ϑ_2 -t úgy választjuk, hogy az $S_2'AT_2$ mátrixban a diagonális alatt mindenütt zérus elemek álljanak, azaz

$$(4.1) \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{q_2 \sin \varphi_2}{q_1 \cos \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2}.$$

ϑ_2 választása miatt

$$S_2'AT_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2(q_1 \cos \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2) & \cos \vartheta_2(-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2) & & & & \\ & + \sin \vartheta_2(q_2 \sin \varphi_2) & + \sin \vartheta_2(q_2 \cos \varphi_2) & e_3 \sin \vartheta_2 & & 0 \\ & & - \sin \vartheta_2(-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2) & & & \\ & 0 & + \cos \vartheta_2(q_2 \cos \varphi_2) & e_3 \cos \varphi_2 & & \\ & \vdots & 0 & & q_3 & e_4 \\ & & \vdots & & & \ddots \\ & & & 0 & & & e_n \\ & 0 & 0 & & & & q_n \end{bmatrix}.$$

Ezután φ_3 -at úgy választjuk meg, hogy $S_2'AT_2T_3$ -ban az első sor harmadik eleme zérus legyen, azaz

$$(4.2) \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{e_3 \sin \vartheta_2}{\cos \vartheta_2(-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2) + \sin \vartheta_2(q_2 \cos \varphi_2)}$$

... s.í.t. S_i eltünteti az $(i, i-1)$ pozícióbeli elemet, de az $(i-1, i+1)$ pozícióba egy nemkívánatos elemet hoz be, amit T_{i+1} tüntet el ($i=2, \dots, n-1$). Végül S_n eltünteti az $(n, n-1)$ pozícióban álló elemet és csak e_n -t változtatja meg. Vegyük észre, hogy T_i csak az $i-1$ és i -edik sorban és oszlopban, míg S_i az $i-1$ és i -edik sorban, ill. az $i-1, i, i+1$ -edik oszlopban okoz változást ($i=2, 3, \dots, n-1$).

Most megválasztjuk φ_2 -t úgy, hogy $A'A \rightarrow \tilde{A}'\tilde{A}$ egy eltolásos QR -transzformáció első lépése legyen. A feltételeket, melyeknek ehhez teljesülniük kell, a következő — FRANCISTÓL származó — tételből olvashatjuk ki:

4.1. TÉTEL: Legyen az M szimmetrikus, tridiagonális mátrix (azaz nem-zérus elemek csak a diagonálisban és közvetlenül a diagonális alatt, ill. fölött található) tetszőleges, de most rögzített s valós számmal képzett eltolásos QR -transzformáltja M_s (azaz, ha az $M-sI$ mátrix QR -felbontása Q_sR_s , akkor

$$M_s = R_sQ_s + sI = Q_s'MQ_s).$$

Legyen T tetszőleges olyan ortonormált mátrix, melynek első oszlopa megegyezik Q_s első oszlopával és $T'MT$ szintén tridiagonális. Ekkor van olyan D diagonális mátrix, diagonálisában ± 1 -ekkel, hogy

$$T = Q_s D.$$

Bizonyítás: Tekintsük azokat a $T = (t_1 t_2 \dots t_n)$ ortonormált mátrixokat, melyeknek első oszlopa, t_1 egyelőre tetszőlegesen rögzített és a $T'MT = \tilde{M} = (\tilde{m}_{ij})_{i,j=1}^n$ mátrix tridiagonális. Belátjuk, hogy ekkor t_2, \dots, t_n előjeltől eltekintve egyértelműen határozott, vagyis az ilyen tulajdonságú mátrixok egy, a megfelelő előjeleket tartalmazó diagonális mátrixszal való szorzás útján kaphatók egymásból.

Mivel T ortonormált,

$$(4.3) \quad MT = \tilde{M}T.$$

A két oldalon az első oszlopokat egyenlővé téve

$$Mt_1 = \tilde{m}_{11}t_1 + \tilde{m}_{21}t_2$$

adódik. Ebből, mivel t_1, \dots, t_n ortonormált rendszer,

$$(4.4) \quad t_1' Mt_1 = \tilde{m}_{11}$$

és

$$(4.5) \quad \tilde{m}_{21}t_2 = Mt_1 - \tilde{m}_{11}t_1,$$

amiből $|\tilde{m}_{21}| = \|Mt_1 - \tilde{m}_{11}t_1\|$ a T mátrix fenti választása mellett konstans. Így (4.5) miatt t_2 egy ± 1 -es szorzótól eltekintve egyértelműen meghatározott. Most (4.3) két oldalán a második oszlopokat egyenlővé téve, M tridiagonalitása miatt

$$Mt_2 = \tilde{m}_{12}t_1 + \tilde{m}_{22}t_2 + \tilde{m}_{32}t_3$$

és, mivel T ortonormált,

$$(4.6) \quad \tilde{m}_{12} = t_1' Mt_2,$$

$$(4.7) \quad \tilde{m}_{22} = t_2' Mt_2,$$

$$(4.8) \quad \tilde{m}_{32}t_3 = Mt_2 - \tilde{m}_{12}t_1 - \tilde{m}_{22}t_2,$$

melyekből $|\tilde{m}_{32}| = \|Mt_2 - \tilde{m}_{12}t_1 - \tilde{m}_{22}t_2\|$ a T mátrix fenti választása mellett konstans. Így (4.8) miatt t_3 is ± 1 -es szorzótól eltekintve egyértelműen meghatározott. Hasonlóan látható be az állítás t_4, \dots, t_n -re is.

Legyen most t_1 a Q_s mátrix első oszlopa. Már csak azt kell megmutatni, hogy $M_s = Q_s' M Q_s$ is tridiagonális, hiszen ekkor az előbbiek alapján a tétel állításában szereplő T mátrix $Q_s D$ alakban áll elő.

Ugyanis az $M - sI = Q_s R_s$ szimmetrikus, tridiagonális mátrix QR -felbontásában szereplő Q_s mátrix előállítható $n-1$ elemi forgatás szorzataként, melyek a diagonális alatti elemeket tüntetik el. Pl. $Q_s = F_1^{(s)} \dots F_{n-1}^{(s)}$, ahol $F_i^{(s)}$ az $(i, i+1)$ síkbeli forgatás ($i=1, \dots, n-1$). Akkor

$$(4.9) \quad Q_s' M Q_s = \underbrace{F_{n-1}^{(s)'} \dots F_2^{(s)'} F_1^{(s)'} M F_1^{(s)} F_2^{(s)} \dots F_{n-1}^{(s)}}_{\text{---}}$$

Könnyen látható, hogy M szimmetrikus volta miatt a kapcsos zárójelekben álló mátrixok tridiagonálisak maradnak (ui. elemi forgatásokat hajtunk végre rajtuk, mindig a megfelelő helyen két szomszédos koordináta síkjában). A bővebb leírást l. [8]-ban. Ez úgy is fogalmazható, hogy szimmetrikus, tridiagonális mátrix alakja QR -transzformációval szemben invariáns.

Az eredeti feladatban φ_2 választására visszatérve, legyen s tetszőleges ($s \neq q_1^2$) valós szám, jelölje M az $A'A$ szimmetrikus tridiagonális mátrixot, M_s pedig ennek az s valós számmal képzett eltolásos QR -transzformáltját (az előbbieket miatt az M_s mátrix is tridiagonális alakú).

Mivel M tridiagonális, φ_2 megválasztható úgy, hogy T_2 első oszlopa $M-sI$ első oszlopának legyen skalárszorosa:

$$(4.10) \quad \text{tg } \varphi_2 = \frac{q_1 e_2}{q_1^2 - s}.$$

Mivel a T_3, \dots, T_n mátrixok definíciójuknál fogva $M-sI$ első oszlopát már nem változtatják meg, így $T=T_2 \dots T_n$ első oszlopa is $M-sI$ első oszlopának skalárszorosa. De $M-sI=Q_s R_s$ miatt ez skalárszorosa Q_s első oszlopának is (mivel a 2.1. tétel bizonyításában adott konstrukció szerint ez az $M-sI$ tridiagonális mátrix első oszlopának a normáltja).

\tilde{A} bidiagonalitása miatt (ezt csak a $\vartheta_2, \varphi_3, \vartheta_3, \dots, \varphi_n, \vartheta_n$ szögek választásával értük el),

$$\tilde{A}'\tilde{A} = T'A'AT = T'MT$$

is tridiagonális. A 4.1. tétel alkalmazásával $T=Q_s D$, ahol D diagonális mátrix, diagonálisában ± 1 -ekkel. Az $M-sI$ mátrix QR -felbontásában Q_s oszlopaikat megfelelően előjelezve $T=Q_s$, azaz $\tilde{A}'\tilde{A}=M_s$. Így $A'A \rightarrow \tilde{A}'\tilde{A}$ valóban egy eltolásos QR -transzformáció első lépése, ahol az eltolás s paraméterének értékére tetszőleges, q_1^2 -től különböző valós számot választhatunk. WILKINSON [10] megmutatta, hogy a konvergencia akkor a leggyorsabb, ha s az M mátrix alsó 2×2 -es sarokminorának a kisebbik sajátértéke. Ezen alapszik az [5]-ben leírt program is.

5. A QRPS-transzformáció bidiagonális mátrixokra

Legyen az A $m \times n$ -es bidiagonális mátrix

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} q_1 & e_2 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ & & e_n \\ 0 & & q_n \end{array} \right]}_n \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \\ \\ \\ m-n \end{array}$$

alakú. Feltehető, hogy $m \geq n$.

Mivel az A egyben felső háromszög mátrix is, QR -felbontása $A=I_m A$. Legyen az A' mátrix QR -felbontása PS , ahol P $n \times n$ -es ortonormált mátrix (A oszlopaikat ortogonalizálja), S pedig $n \times m$ -es felső háromszög mátrix. A sorozat képzési sza-

gonális mátrixokra előbb ismertetett *QRPS*-transzformáció mátrixaira:

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{P}_i \text{ és } \mathbf{S}_i = \mathbf{Q}_i \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Bizonyítás: A (4.10) képlet alapján, ha $s=0$ értéket választunk, $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{e_2}{q_1}$ adódik, ami éppen a \mathbf{P}_2 -beli forgatás szöge, tehát $\mathbf{T}_2 = \mathbf{P}_2$. A (4.1) képlet alapján \mathbf{S}_2 -t éppen úgy fejezhetjük ki φ_2 -vel, mint \mathbf{Q}_2 -t. Ez nem meglepő, hisz \mathbf{Q}_2 az AP mátrix első oszlopát ortogonalizálja, az viszont csak \mathbf{P}_2 -től függ. Így $\mathbf{S}_2 = \mathbf{Q}_2$.

\mathbf{T}_3 esetében φ_3 közvetlenül φ_2 függvénye, hisz először a \mathbf{P}_i ($i=2, \dots, n$) transzformációkat választjuk meg. Az *SVD* algoritmusban \mathbf{S}_i -ket és \mathbf{T}_i -ket változtatva határozzuk meg. A (4.2) képletben $\cos \vartheta_2$ -vel leosztva, és $\operatorname{tg} \vartheta_2$ -re a (4.1) kifejezést behelyettesítve:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{e_3 \operatorname{tg} \vartheta_2}{-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2 + \operatorname{tg} \vartheta_2 q_2 \cos \varphi_2}.$$

φ_2 választása miatt azonban $-q_1 \sin \varphi_2 + e_2 \cos \varphi_2 = 0$, így $\operatorname{tg} \vartheta_2$ -vel leosztva:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{e_3}{q_2 \cos \varphi_2}$$

adódik, ami megegyezik az (5.2) képletben $\operatorname{tg} \varphi_3$ értékével. Így $\mathbf{T}_3 = \mathbf{P}_3 \dots$ s.i.t. az $\mathbf{S}_i = \mathbf{Q}_i$ egyenlőségek közvetlenül a megfelelő képletek összehasonlításával láthatók, hisz a \mathbf{Q}_i mátrixokban ϑ_i épp úgy függ a $\varphi_2, \dots, \varphi_{i-1}$ ($i=3, \dots, n$) szögektől, mint az \mathbf{S}_i mátrixokban. A $\mathbf{T}_i = \mathbf{P}_i$ egyenlőségek kis számolással (ϑ_{i-1} -et φ_{i-1} -gyel, majd φ_{i-1} -et ϑ_{i-2} -vel ... stb. kifejezve) láthatók.

6. Néhány gyakorlati megjegyzés

Általános téglalapmátrixok esetén az *SVD* eljárás a mátrixot először bidiagonális alakra hozza, ami a módszert lelassítja. A *QRPS*-transzformáció közvetlenül alkalmazható tetszőleges téglalapmátrixra. A szükséges *QR*-felbontásoknál természetesen nem a *Schmidt-ortogonalizációt* használjuk (ami az elméleti konstrukciót adja), hanem az ennél sokkal gyorsabb és stabilabb *Givens-módszert*, melynek lényege, hogy elemi forgatásokkal egyenként teszi zérussá a diagonális alatti elemeket. Ha mátrixunk teljes rangú, ez a *Schmidt-ortogonalizálásával* azonos eredményt adja, különben pedig a 2.1. tétel bizonyításánál adott elméleti konstrukciót, az ott leírt forgatási bizonytalanságoktól eltekintve.

A *QRPS*- és az *SVD* eljárás konvergenciájának gyorsasága (ha a bidiagonalizálás lassító hatásától eltekintünk) megegyezik a közönséges- és az eltolásos *QR*-transzformáció gyorsaságával (hisz a konvergenciabizonyításokban ilyenekre vezettük őket vissza). WILKINSON megmutatta, hogy a közönséges *QR*-transzformáció globálisan konvergens és aszimptotikusan majdnem mindig harmadrendű a konvergenciája, míg az eltolásos *QR*-transzformáció konvergenciája (az eltolás megfelelő választása esetén) globálisan harmadrendű. Ez azt jelenti, hogy ha a szinguláris értékek jól elkülönülnek, a két módszer gyorsaságában gyakorlatilag nincs nagy különbség, ha figyelembe vesszük még a bidiagonalizálás lassító hatását is az *SVD* eljárás esetén. Azonos (többszörös szinguláris értéket nem tartalmazó) mátrixokon végrehajtott párhuzamos programfuttatások is ezt mutatták.

Köszönetnyilvánítás

Végül köszönetet mondok TUSNÁDY GÁBORNAK a dolgozat megírásában nyújtott segítségéért és CSÁKI PÉTERNEK értékes tanácsaiért.

IRODALOM

- [1] BJÖRCK, A. and GOLUB, G. H., "Numerical methods for computing angles between linear subspaces", *Math. of Computation* 27 (1973) 579—594.
- [2] FARRELL, ROGER H., *Techniques of Multivariate Calculation* (Lecture Notes in Mathematics, 520, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1976).
- [3] FRANCIS, J., "The QR transformation. A unitary analogue to the LR transformation", *Comput. J.* 4 (1961—62) 265—271.
- [4] GOLUB, G. H. and KAHAN, W., "Calculating the singular values and pseudoinverse of a matrix", *J. SIAM Numer. Anal. Ser. B* 2 (1965) 205—224.
- [5] GOLUB, G. H. and REINSCH, C., "Singular values decompositions and least squares solutions" *Numer. Math.* 14 (1970) 403—420.
- [6] GOLUB, G. H. and WILKINSON, J. H., "Ill-conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form", STAN-CS-75-478, February 1975.
- [7] LENGYEL, T., „A kanonikus korrelációanalízis és néhány kapcsolódó probléma”, *Alk. Mat. Lapok* 5 (1979) 385—393.
- [8] RÓZSA PÁL, *Lineáris algebra és alkalmazásai* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976).
- [9] TUSNÁDY, G., „Mátrixok szinguláris felbontása”, *Alk. Mat. Lapok* 5 (1979) 375—384.
- [10] WILKINSON, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem* (Clarendon Press, Oxford, 1965).

(Beérkezett: 1982. január 6.)

BOLLA MARIANNA
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1052 BUDAPEST, KENDE U. 13—17.

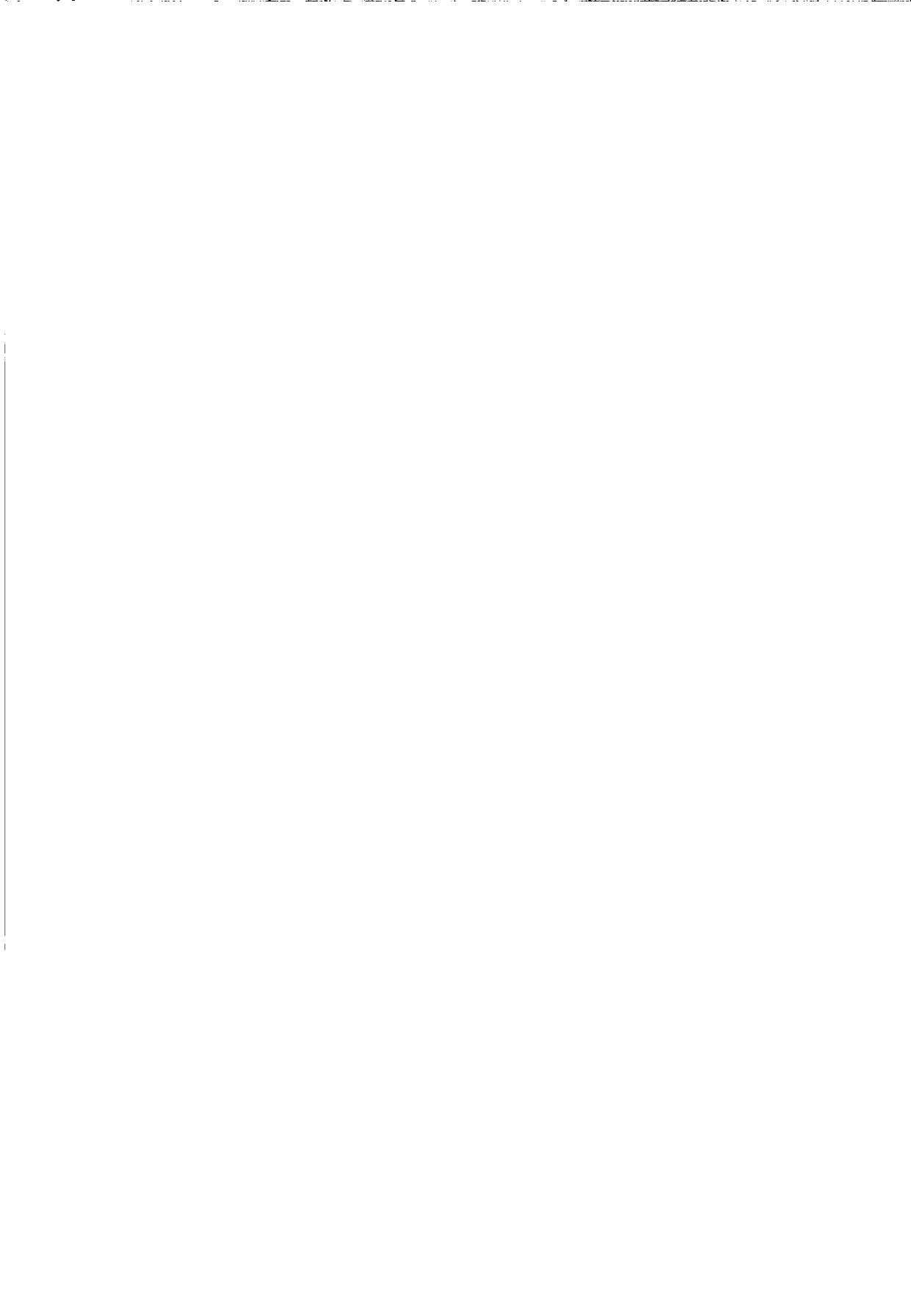
THE QRPS TRANSFORMATION:
THE GENERALIZATION OF THE QR ALGORITHM FOR SINGULAR VALUES
DECOMPOSITION OF RECTANGULAR REAL MATRICES

M. BOLLA

The algorithm to be described gives a direct, easily interpretable method for singular values decomposition of rectangular real matrices. We shall write about the *SVD* procedure too, well-known from the literature [5] for this purpose. This first transforms the matrix into bidiagonal form, then constructs a series which is just the *QR* transformation with translation of the original matrix premultiplied with its transpose.

However, it can not be seen during the procedure what kind of orthogonal transformations we performed on the original matrix, while the *QRPS* transformation intuitively is the generalization of the power-iteration. In case of some practical problems (e.g. analysis of covariance-structures) this fact immediately suggests the application of the *QRPS*, and performing the transformations we can follow the change of the matrix-structure.

Above the proof of the convergence of *QRPS* we shall compare the two algorithms for bidiagonal matrices (under certain circumstances they converge to the same diagonal matrix), but the exact numerical comparison is beyond my object (the speed of the convergence of the two methods is related like the speed of the ordinary *QR* transformation and that of with translation).



AZ ÉRINTŐHIPERBOLÁKKAL GENERÁLT MINDIG KONVERGENS EGYENLETMEGOLDÓ ITERÁCIÓRÓL

KONTOR ISTVÁNNÉ

Miskolc

A dolgozat nemlineáris egyenletek valós gyökeinek meghatározására alkalmas módszert mutat be. A függvénnyel generált iterációs eljárások közül az érintőhiperbola-módszert vizsgáljuk. Ez a módszer mindig konvergens.

Elégséges feltételt vezetünk le a konvergenciához, eljárást adunk az optimális érintőhiperbola megkereséséhez, kimutatjuk, hogy egyszeres gyök esetén az iteráció másodrendű. Végül néhány példát adunk a módszer alkalmazására.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban valós egyenlet valós gyökének meghatározására szolgáló mindig konvergens közelítő eljárással foglalkozunk.

Az iterációs eljárások egy része bizonyos esetekben nem konvergens. Ezért nagy jelentőségűek azok a módszerek, amelyek mindig konvergens. Ilyen eljárásokat dolgozott ki többek között SZABÓ ZOLTÁN: az úgynevezett érintőkúpszeletek módszerét. Ezeket a módszereket általánosította olyan értelemben, hogy a kúpszeletek helyett konkáv (vagy konvex) görbétet használt, illetve alaptérnek \mathbf{R} , (illetve \mathbf{C}) helyett normált vektorhálót tekintett, továbbá ezeket a módszereket kombinálta más, ismert módszerekkel [5, 6]. Ezekhez kapcsolódóan további alkalmazások és általánosítások jelentek meg [2, 3, 1, 7].

Az [5, 6] dolgozatokban a

$$-x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hiperbola $h(x) = b \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ ($b > 0$) ágát illesztette a Szerző alkalmas eltolással az $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ $x \in I$ függvény görbéjéhez, ennek $(x_n, f(x_n))$ pontjába ($f(x_n) > 0$) úgy, hogy az érintse a görbét. A b paramétert úgy határozta meg, hogy a

$$D(x) = f(x) - h(x)$$

különbség ne legyen negatív. Arra az eredményre jutott, hogy ehhez elegendő olyan b értéket venni, amely kielégíti a

$$(b^2 - M_1^2)^3 \leq 4b^4 M_2^2$$

egyenlőtlenséget, ahol $|f'(x)| \leq M_1$ és $|f''(x)| \leq M_2$, $x \in I$ ($I \subset \mathbf{R}$ kompakt intervallum).

Ilyen b értéket az

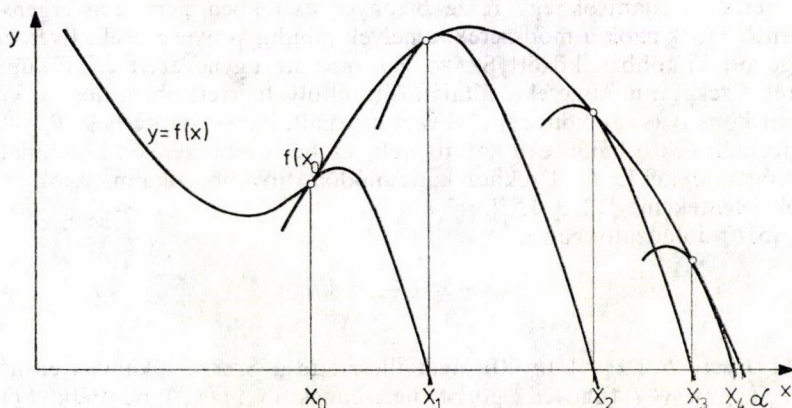
$$(1.1) \quad b^2 = 2M_1^2 + \frac{16}{3} M_2^2$$

egyenlőség alapján választott.

A következőkben általánosítjuk ezt a módszert oly módon, hogy

- a $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolát illesztjük a görbéhez;
- a $\frac{b}{a}$ paraméter becslésére az (1.1) formula általánosítása mellett egy másik formulát is megadunk, a kettőt összehasonlítjuk;
- a $\frac{b}{a}$ paraméter becslését az eljárás konvergenciasebességének növelése céljából optimalizáljuk;
- a hibabecslést erre az általánosabb esetre végezzük el.

Az eljárás konvergenciája azon alapszik, hogy — miközben az approximáló függvények az ismeretlen zérushellyel rendelkező, valós, az I intervallumban értelmezett $f(x)$ függvényt az $(x_n, f(x_n))$ pontjában (első rendben) érintik —, egy alkalmasan választott konstans paraméter biztosítja azt, hogy az érintő függvények abszolút értékben nem haladják meg $|f(x)|$ értékeit I felett. A módszer konvergenciáját ezenkívül az biztosítja, hogy az approximáló függvények zérushelyeinek sorozata — az [1, 5, 6] eredményekhez hasonlóan — monoton (1. ábra).



1. ábra

2. Az érintőhiperbola-módszer

Tekintsük az I korlátos, zárt intervallumon kétszer differenciálható $f(x)$ függvényt, amelyre minden $x \in I$ esetén

$$(2.1) \quad |f'(x)| \leq M_1,$$

$$(2.2) \quad |f''(x)| \leq M_2.$$

Legyen az $f(x)$ zérushelye α .

Feladatunk az $f(x)=0$ egyenlet megoldására olyan, egy pontra támaszkodó stationárius iterációs —

$$(2.3) \quad x_{n+1} = F(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

— alakú eljárás megalkotása, amely az $x_0 \in I$ pontból kiindulva mindig konvergens lesz.

Legyen $f(x_0) > 0$ és $\alpha > x_0$. (Ha ugyanis $f(x_0) < 0$, akkor $f(x)$ helyett a $-f(x)$ függvényt véve $-f(x_0) > 0$ miatt az előző eset áll fenn. Ha pedig $\alpha < x_0$, akkor $f(x)$ helyett az $f(-x)$ függvényt véve $-x_0$ és $-\alpha$ értékekkel szintén az előző esetre jutunk.)

Vegyük a

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

hiperbolának az

$$y = -b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}$$

konkáv ívét. Toljuk el ezt a görbét úgy, hogy az $(x_0, f(x_0))$ pontban érintse $f(x)$ görbéjét. E görbe egyenlete legyen

$$(2.4) \quad h(x) = \lambda - b \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}(x - \mu)^2 + 1}.$$

Abból a feltételből, hogy $f(x_0) = h(x_0)$ és $f'(x_0) = h'(x_0)$ adódik

$$(2.5) \quad \lambda = A + \frac{b^2}{\omega}, \quad \mu = x_0 + \frac{a^2 B}{\omega},$$

ahol $A = f(x_0)$, $B = f'(x_0)$, $\omega = \sqrt{b^2 - a^2 B^2} > 0$. A $h(x)$ függvényben szereplő a és b paramétereket úgy határozzuk meg, hogy $h(x)$ értéke az I intervallumban ne legyen nagyobb, mint $f(x)$ értéke.

2.1. LEMMA. Ha az $f(x)$ függvényre teljesülnek a (2.1) és (2.2) feltételek és $f(x_0) > 0$ ($x_0 \in I$ fix), akkor

$$(2.6) \quad \left(\frac{b^2}{a^2} - M_1^2\right)^{3/2} \cong 2 \frac{b^2}{a} M_2, \quad \frac{b}{a} \cong M_1$$

esetén az I intervallumban $f(x) - h(x) \cong 0$, ahol $h(x)$ a (2.4) és (2.5) által definiált függvény.

Bizonyítás. Legyen $D(x) = f(x) - h(x) = f(x) - \lambda + b \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}(x - \mu)^2 + 1}$. Ha $x = x_0$, akkor az állítás igaz, mert $D(x_0) = 0$. Ha $x \neq x_0$, akkor a *Lagrange-féle középérték-tételt* alkalmazva

$$D(x) = (x - x_0) f'(\xi) - \frac{b^2}{\omega} + b \sqrt{\frac{1}{a^2}(x - \mu)^2 + 1}, \quad \text{ahol } \xi \in (x_0, x).$$

Itt felhasználtuk azt, hogy $A = f(x_0)$.

Be kell látnunk, hogy $D(x) \geq 0$, azaz

$$b \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}(x-\mu)^2 + 1} \geq \frac{b^2}{\omega} - (x-x_0) \cdot f'(\xi).$$

Ha a jobb oldal nem pozitív, akkor a lemmát bebizonyítottuk. Ha igen, akkor négyzetre emelve mindkét oldalt, az

$$\omega(x-x_0) \left(\frac{b^2}{a^2} - f'^2(\xi) \right) \geq 2b^2(f'(x_0) - f'(\xi))$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Alkalmazzuk a jobb oldalon ismét a *Lagrange-féle középértéktételt* és osszuk el mindkét oldalt $(x-x_0)$ -lal:

$$\omega \left(\frac{b^2}{a^2} - f'^2(\xi) \right) \geq 2b^2 \frac{\xi - x_0}{x - x_0} [-f''(\eta)], \text{ ahol } \eta \in (x_0, \xi).$$

Ha $f''(\eta) \geq 0$, akkor a bizonyítás kész, függetlenül attól, hogy (2.6) teljesül-e vagy sem, ugyanis

$$0 < \frac{\xi - x_0}{x - x_0} < 1.$$

Ha $f''(\eta) < 0$, akkor az egyenlőtlenség

$$\omega \left(\frac{b^2}{a^2} - f'^2(\xi) \right) \geq 2b^2 |f''(\eta)|$$

esetén teljesül. Ehhez viszont elegendő, ha

$$\left(\frac{b^2}{a^2} - M_1^2 \right)^{3/2} \geq 2 \frac{b^2}{a} M_2.$$

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A $h(x)$ függvény jobb oldali zérushelyét, x_1 -et az $f(x)=0$ egyenlet $\alpha \in I$ gyökének közelítésére használjuk ($x_0 < \alpha$). Megoldva a $h(x)=0$ egyenletet, a jobb oldali zérushely

$$x_1 = \mu + a \sqrt{\frac{\lambda^2}{b^2} - 1},$$

ahol λ és μ a (2.5) által meghatározott mennyiségek. Ezeket felhasználva

$$(2.7) \quad x_1 = x_0 + a^2 \frac{f'(x_0)}{\sqrt{b^2 - a^2 f'^2(x_0)}} + a \sqrt{\frac{1}{b^2} \left(f(x_0) + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2 f'^2(x_0)}} \right)^2 - 1}.$$

Mivel a lemma alapján $f(x) - h(x) \geq 0$ ($x \in I$), ezért

$$x_0 < x_1 \leq \alpha.$$

Ha $f(x_1) \neq 0$, akkor az eljárást az x_1 pontból kiindulva megismételjük. Ekkor kapjuk az új $h(x)$ függvény x_2 zérushelyét. Mindezt továbbfolytatva, az

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

monoton növekvő sorozatot kapjuk, melyre

$$x_i \leq \alpha \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Ennek az iterációs sorozatnak az elemeit — az x_0 pontból kiindulva — a (2.7) alapján képezzük, és így egy

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

alakú eljáráshoz jutunk; ahol

$$(2.8) \quad F(x) = x + a^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{b^2 - a^2 f'^2(x)}} + a \sqrt{\frac{1}{b^2} \left(f(x) + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2 f'^2(x)}} \right)^2 - 1}.$$

A (2.8) iterációs alapfüggvénnyel generált $\{x_n\}$ sorozat tehát monoton növekvő és korlátos, következésképpen konvergens. $F(x)$ folytonossága miatt e sorozat határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(\alpha),$$

vagyis α az $F(x)$ függvénynek fixpontja. Figyelembe véve (2.8)-at, ez csak úgy lehetséges, ha $f(\alpha) = 0$. Ezek alapján kimondhatjuk a következő tételt.

2.1. TÉTEL. Legyen $f(x)$ az I intervallumban kétszer differenciálható függvény, teljesüljenek rá a (2.1), (2.2) feltételek, legyen továbbá $f(x_0) > 0$ és $f(\alpha) = 0$, ahol $\alpha > x_0$ az $f(x)$ függvény x_0 -hoz legközelebb eső zérushelye ($\alpha, x_0 \in I$). Ha érvényes (2.6), akkor a (2.8) iterációs alapfüggvénnyel

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

módon generált $\{x_n\}$ sorozat monoton növekvő, konvergens, és határértéke α .

3. Az érintőhiperbola-módszer minőségi jellemzése

Egy iterációs eljárás megítélésénél lényeges szempont a konvergencia sebessége. Ennek jellemzésére szolgál az iteráció rendje.

DEFINÍCIÓ: Legyen az $\{x_n\}$ sorozat konvergens, és legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.

Ha van olyan $p \geq 1$ szám, amelyre létezik a

$$(3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az iteráció rendje p , vagy az iteráció p -ed rendben konvergál. A C számot aszimptotikus hibakonstansnak nevezzük.

Egy p -ed rendű stacionárius iterációs eljárás további jellemzésére TRAUB [8] az információs hatékonyság fogalmát vezette be. Ennek mértéke az $E_{ff} = \frac{p}{q}$ mennyi-

ség, ahol q az egy iterációs lépésben kiszámítandó új $f^{(j)}(x_i)$ ($j=0, 1, \dots, p-1$) függvényértékek száma.

Ha $E_{ff}=1$, akkor azt mondjuk, hogy az iterációs eljárás optimális.

Ezzel kapcsolatban meg kell említeni TRAUB tételét [8]:

- I. Minden (2.3) alakú iteráció információs hatékonysága: $E_{ff} \leq 1$;
- II. Tetszőleges p természetes számhoz található olyan (2.3) alakú iteráció, amelynek konvergenciarendje p , információs hatékonysága: $E_{ff}=1$;
- III. Minden p -ed rendű (2.3) alakú iteráció $F(x)$ alapfüggvénye implicit módon tartalmazza az $f, f', \dots, f^{(p-1)}$ függvények mindegyikét.

3.1. TÉTEL. A 2. pontban megkonstruált, egy pontra támaszkodó, stacionárius iterációs eljárás egyszeres zérushely esetén másodrendben konvergal.

Bizonyítás. Elegendő azt igazolni, hogy $F'(\alpha)=0$ (l. [4, 8]). Ekkor ugyanis $F(x)$ Taylor-sorba fejtésével kimutatható, hogy

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{(x_n - \alpha)^2}{2!} F''(\xi), \quad \xi \in (x_n, \alpha),$$

ahonnan

$$(3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} = \frac{1}{2} F''(\alpha) = C \neq 0,$$

ami a (3.1) figyelembevételével éppen azt jelenti, hogy az eljárás konvergenciarendje: $p=2$.

A (2.8) függvényben legyen most $\omega = \sqrt{b^2 - a^2 f'^2(x)}$. Ekkor

$$F(x) = x + a^2 \frac{f'(x)}{\omega} + a \sqrt{\frac{1}{b^2} \left(f(x) + \frac{b^2}{\omega} \right)^2 - 1}.$$

Innen

$$F'(x) = 1 + a^2 \frac{f''\omega - f'\omega'}{\omega^2} + \frac{\frac{a}{b^2} \left(f + \frac{b^2}{\omega} \right) \left(f' - \frac{b^2\omega'}{\omega^2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{b^2} \left(f + \frac{b^2}{\omega} \right)^2 - 1}}.$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\omega' = -\frac{a^2 f' f''}{\omega},$$

továbbá azt, hogy $f'(\alpha) < 0$ ($f(x)$ ugyanis csökken az α helyen, mivel $f(x_0) > 0$, $x_0 < \alpha$). Mivel $f(\alpha) = 0$, ezért

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= 1 + a^2 \frac{f''\omega - f'\omega'}{\omega^2} + \frac{a}{b^2} \cdot \frac{b^2}{\omega} \left(f' - \frac{b^2\omega'}{\omega^2} \right) \cdot \frac{\omega}{a \cdot |f'|} = \\ &= 1 + \frac{f'}{|f'|} + \frac{1}{\omega^3} \left(a^2 f'' \omega^2 + a^4 f'^2 f'' + \frac{a^2 b^2 f' f''}{|f'|} \right) = \\ &= \frac{1}{\omega^3} \left(a^2 b^2 f'' - a^4 f'^2 f'' + a^4 f'^2 f'' + a^2 b^2 f'' \frac{f'}{|f'|} \right) = 0. \end{aligned}$$

(Itt kihasználtuk, hogy $\frac{f'}{|f'|} = \frac{f'(\alpha)}{|f'(\alpha)|} = -1$.) Ezzel igazoltuk, hogy az eljárás másodrendben konvergál.

3.2. TÉTEL. Az érintőhiperbola-módszer aszimptotikus hibakonstansa:

$$C = \frac{1}{2} \left| \frac{b^{-2}\delta^{3/2} + \text{sign}(f(x_0)) \cdot a^2 f''(\alpha)}{a^2 f'(\alpha)} + \frac{a^2 b^2 f'(\alpha) f''^2(\alpha) \cdot (a^2 - 1)}{\delta^{5/2}} \right|,$$

ahol $\delta = b^2 - a^2 f'^2(\alpha)$.

Bizonyítás. Ismeretes, hogy bármely (2.3) alakú, p -ed rendű iterációs eljárás aszimptotikus hibakonstansának értéke

$$C = \frac{1}{p!} |F^{(p)}(\alpha)|,$$

így a 3.1. tétel alapján

$$C = \frac{1}{2} |F''(\alpha)|.$$

Vezessük be az

$$s = \text{sign}(f(x_0))$$

jelölést! Tekintettel arra, hogy

$$\text{sign}(f'(\alpha)) = -s,$$

fennáll $|f'(\alpha)| = -s \cdot f'(\alpha)$. Az érintőhiperbola-módszer alapfüggvénye

$$F(x) = x + s \cdot a^2 \frac{g'(x)}{H(x)} + a \cdot G(x),$$

ahol

$$G(x) = \sqrt{\left[|g(x)| + \frac{1}{H(x)} \right]^2 - 1},$$

$$H(x) = \sqrt{1 - a^2 g'^2(x)},$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{b}.$$

Képezzük az

$$F'(x) = 1 + s \cdot a^2 \frac{g''H - g'H'}{H^2} + a \cdot G',$$

$$F''(x) = s \cdot a^2 H^{-3} [H(g'''H - g'H'') - 2H'(g''H - g'H')] + a \cdot G''$$

deriváltakat, ahol

$$G' = \frac{1}{G} \left(|g| + \frac{1}{H} \right) \left(sg' - \frac{H'}{H^2} \right)$$

és

$$G''(\alpha) = \left[\frac{H^2}{a^2 g'^2} \left\{ \frac{a \cdot |g'|}{H} \left[\left(sg' - \frac{H'}{H^2} \right)^2 + \left(\frac{sg''}{H} + \frac{2H'^2 - HH''}{H^4} \right) \right] - \frac{G'}{H} \left(sg' - \frac{H'}{H^2} \right) \right\} \right]_{x=\alpha} =$$

$$= \left[\frac{s}{a \cdot g'} \left(\frac{H^3}{a^2} + sg'' - \frac{a^2 g' g'''}{H^3} + \frac{a^2 g'^2 g''^2}{H^5} (-2a^2 - 1) \right) \right]_{x=\alpha}.$$

Mindezeket figyelembe véve kapjuk, hogy

$$F''(\alpha) = \frac{s \cdot a^2}{H^2} \left(g''' H + \frac{a^2 g'^2 g'''}{H} + \frac{3a^2 g' g''^2}{H^3} \right) +$$

$$+ \frac{s}{g'} \left(\frac{H^3}{a^2} + s \cdot g'' - \frac{a^2 g' g'''}{H^3} - \frac{a^2 g'^2 g''^2}{H^5} (2a^2 + 1) \right) =$$

$$= \frac{s \cdot H^3 + a^2 g''}{a^2 g'} + \frac{s \cdot a^2 g' g''^2}{H^5} (a^2 - 1),$$

így

$$s \cdot F''(\alpha) = \left[\frac{H^3 + s \cdot a^2 g''}{a^2 g'} + \frac{a^2 g' g''^2}{H^5} (a^2 - 1) \right]_{x=\alpha}.$$

Tehát a hibakonstans értéke

$$C = \frac{1}{2} F''(\alpha) = \frac{1}{2} \left| \frac{b^{-2}(b^2 - a^2 f'^2)^{3/2} + s \cdot a^2 f''}{a^2 f'} + \frac{a^2 b^2 f' f'' (a^2 - 1)}{(b^2 - a^2 f'^2)^{5/2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{b^{-2} \delta^{3/2} + \text{sign}(f(x_0)) \cdot a^2 f''(\alpha)}{a^2 f'(\alpha)} + \frac{a^2 b^2 f'(\alpha) f''(\alpha) (a^2 - 1)}{\delta^{5/2}} \right|,$$

$$\delta = b^2 - a^2 f'^2(\alpha).$$

A módszer hibájának becslésére vonatkozik a következő.

3.3. TÉTEL. Legyen M_1 és M_2 a (2.1) és (2.2) feltételben szereplő felső korlátok, m_1 pedig a

$$0 < m_1 \leq |f'(x)|, \quad x \in [x_0, \alpha] \subset I$$

relációknak eleget tevő alsó korlát!

Ha a (2.8) iterációs alapfüggvénnyel képezett $\{x_n\}$ pontsorozat konvergál az $f(x)$ függvény α zérushelyéhez, akkor

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K |x_n - \alpha|^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq K_1 |x_{n+1} - x_n|^2 + K_2 |x_{n+1} - x_n|^3, \quad n = 0, 1, \dots,$$

ahol

$$K = \frac{1}{m_1} \left(\frac{b}{2a^2} + M_2 \right),$$

$$K_1 = \frac{1}{m_1} \left(\frac{b}{2a^2} + \frac{M_1 M_2}{m_1} \right),$$

$$K_2 = \frac{b \cdot M_2}{2a^2 m_1^2}$$

állandók.

Bizonyítás. Csak azt az esetet vegyük, amikor

$$f'(x) < 0, \quad x \in I.$$

Legyen

$$\alpha - x_n = e_n, \quad x_{n+1} - x_n = d_n.$$

Tekintsük az $f(x)$ függvény görbéjét az x_n pontban érintő (2.4) alakú hiperbolát! Ennek x_{n+1} lesz a zérushelye, azaz

$$h(x_{n+1}) = 0 = f(x_n) + \frac{b^2}{\omega} - b \sqrt{\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{a} - \frac{af'(x_n)}{\omega} \right)^2 + 1},$$

ahol $\omega = \sqrt{b^2 - a^2 f'^2(x_n)}$. Innen

$$f(x_n) = -\frac{b^2}{\omega} + b \sqrt{\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{a} - \frac{a \cdot f'(x_n)}{\omega} \right)^2 + 1} = g(x_{n+1}).$$

Írjuk fel a $g(x_{n+1})$ függvény x_n helyen vett *Taylor-polinomját* a *Lagrange-féle maradéktaggal* együtt!

$$f(x_n) = g(x_{n+1}) = g(x_n) + g'(x_n) d_n + \frac{1}{2!} g''(\eta) d_n^2, \quad x_n < \eta < x_{n+1}.$$

Tekintettel arra, hogy

$$g(x_n) = 0, \quad \text{és} \quad g'(x_n) = -f'(x_n)$$

— ami a $g(x)$ függvény értelmezéséből nyilvánvaló —,

$$f(x_n) = -f'(x_n) d_n + \frac{1}{2} g''(\eta) d_n^2.$$

Mivel

$$-f(x_n) = f(\alpha) - f(x_n) = (\alpha - x_n) f'(\xi) = e_n f'(\xi), \quad x_n < \xi < \alpha,$$

ezért

$$(3.3) \quad e_{n+1} = e_n - d_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)} - d_n = \frac{f'(x_n)}{f'(\xi)} d_n - \frac{1}{2} \frac{g''(\eta)}{f'(\xi)} d_n^2 - d_n.$$

Használjuk fel most azt, hogy

$$(3.4) \quad g''(\eta) = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\eta - x_n}{a} - \frac{a \cdot f'(x_n)}{\omega} \right)^2 + 1}} < \frac{b}{a^2}$$

és

$$\frac{f'(x_n)}{f'(\xi)} - 1 \cong \left| \frac{f''(\xi_1)}{f'(\xi)} \right| (\xi - x_n) \quad x_n < \xi_1 < \xi.$$

Ekkor

$$(3.5) \quad e_{n+1} \cong \frac{b}{2a^2} \frac{1}{|f'(\xi)|} d_n^2 + \left| \frac{f''(\xi_1)}{f'(\xi)} \right| (\xi - x_n) d_n.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$|d_n| \cong |e_n| \quad \text{és} \quad |\xi - x_n| < |e_n|,$$

akkor azt kapjuk, hogy

$$(3.6) \quad |e_{n+1}| \cong \frac{1}{|f'(\xi)|} \left(\frac{b}{2a^2} + |f''(\xi_1)| \right) e_n^2 \cong \frac{1}{m_1} \left(\frac{b}{2a^2} + M_2 \right) e_n^2 = K \cdot e_n^2,$$

amivel a tétel állításának első részét bebizonyítottuk.

A (3.3) átrendezésével az

$$e_{n+1} + d_n = e_n = \frac{f'(x_n)}{f'(\xi)} d_n - \frac{1}{2} \frac{g''(\eta)}{f'(\xi)} d_n^2$$

egyenlőséghez jutunk.

A (3.4) reláció felhasználásával felírhatjuk, hogy

$$|\xi - x_n| < |e_n| \cong \frac{1}{|f'(\xi)|} \cdot \left[|f'(x_n)| \cdot |d_n| + \frac{b}{2a^2} \cdot d_n^2 \right] \cong \frac{1}{m_1} \left[M_1 |d_n| + \frac{b}{2a^2} d_n^2 \right],$$

így (3.5) figyelembevételével adódik az

$$|e_{n+1}| \cong \frac{b}{2a^2} \cdot \frac{d_n^2}{m_1} + \frac{M_2}{m_1^2} \left[M_1 d_n^2 + \frac{b}{2a^2} \cdot |d_n|^3 \right] = K_1 d_n^2 + K_2 |d_n|^3$$

becslés. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A fenti megállapítások akkor érvényesek, ha α az $f(x)=0$ egyenletnek egyszerű gyöke.

Ha α többszörös gyök, akkor az $f(x)$ függvény helyett tekintsük az

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

függvényt. Ekkor α az $u(x)$ függvénynek egyszerű gyöke. Az α gyök meghatározásához az érintőhiperbola-módszert az $u(x)$ függvényre alkalmazva ismét másodrendű eljárásához jutunk.

Az eljárás konvergenciarendje lényeges minőségi jellemzője a konvergencia gyorsaságának. Ugyanolyan rendű eljárások közül azt minősítjük jobbnak, amelyiknek kisebb az aszimptotikus hibakonstansa. Szemléletesen: esetünkben a gyorsabb konvergenciát az a hiperbola biztosítja, amelynél rögzített a esetén $\frac{b}{a}$ a lehető legkisebb, vagyis amelyik hiperbola a „legkövérebb”. Ugyanakkor minden $x \in I$ -re

teljesülnie kell az $f(x) - h(x) \cong 0$ egyenlőtlenségnek. Ehhez elegendő a (2.6) teljesülése, azaz ha

$$(3.7) \quad \left(\frac{b^2}{a^2} - M_1^2\right)^3 \cong \frac{4b^4}{a^2} M_2^2 = 4a^2 \frac{b^4}{a^4} M_2^2 \quad \text{és} \quad \frac{b}{a} > M_1.$$

Célunk tehát az a lehető legkisebb $\frac{b}{a}$ érték meghatározása, amely kielégíti (3.7)-et.

A továbbiakban nevezzük ezt a legkisebb $\frac{b}{a}$ értéket, illetve az ehhez tartozó érintőhiperbolát optimálisnak! Erre vonatkozik a következő

3.4. TÉTEL. A (2.8) iterációs alapfüggvénnyel meghatározott eljárásához rögzített $a (> 0)$ érték esetén létezik optimális érintőhiperbola, és ez az egyetlen.

Bizonyítás. Azt kell bebizonyítani, hogy létezik olyan (egyetlen) legkisebb $\frac{b}{a}$ érték, amely a (3.7) egyenlőtlenséget — rögzített a esetén — kielégíti. Vezessük be a

$$Z = \frac{b^2}{a^2}, \quad X = M_1^2 \quad \text{és} \quad Y = M_2^2$$

jelöléseket. Ekkor a (3.7) egyenlőtlenség így módosul:

$$(Z - X)^3 \cong 4a^2 Z^2 Y, \quad X > 0, \quad Y > 0, \quad Z > 0.$$

Belátjuk, hogy a $q(Z) = (Z - X)^3 - 4a^2 Z^2 Y$ függvénynek egyetlen zérushelye van (Z_{\min}). Fölösleges vizsgálatot folytatni $(-\infty, x)$ felett $\frac{b}{a} > M_1$ miatt.

Jelöljük Z_1 -gyel és Z_2 -vel q szélsőérték helyeit ($Z_2 < Z_1$). Lássuk be, hogy

$$Z_2 < X < Z_1 \quad \text{és} \quad q(X) < 0.$$

A $q'(Z) = 3Z^2 - (6X + 8a^2 Y)Z + 3X^2 = 0$ egyenletből

$$Z_{1,2} = \frac{6X + 8a^2 Y \pm \sqrt{96a^2 XY + 64a^4 Y^2}}{6}.$$

Mivel $\lim_{Z \rightarrow \infty} q(Z) = \infty$, Z_2 maximumhely, $Z_1 (> Z_2)$ pedig minimumhely.

Világos, hogy

$$Z_2 = \frac{6X + 8a^2 Y - \sqrt{96a^2 XY + 64a^4 Y^2}}{6} < X \quad \text{és} \quad X < \frac{6X + 8a^2 Y + \sqrt{96a^2 XY + 64a^4 Y^2}}{6} = Z_1$$

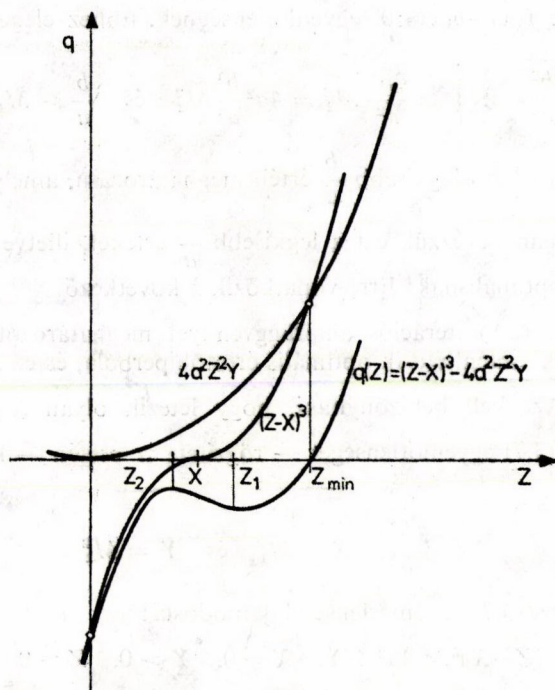
vagyis $Z_2 < X < Z_1$.

Be kell még látni, hogy a helyettesítési értékek negatívak.

A $q(Z)$ függvény az X helyen negatív:

$$q(X) = (X - X)^3 - 4a^2 X^2 Y < 0.$$

Z_1 minimumhely, így a $q(Z)$ függvény az $[X, Z_1]$ fölött negatív. Mivel (Z_1, ∞)



2. ábra

intervallumban q szigorúan monoton növekvő, van pontosan egy $Z_{\min} > Z_1$ zérushelye.

Mindezekből következik, hogy a (3.5) egyenlőtlenséget kielégítő $\frac{b}{a}$ értékek közül a $\frac{b}{a} = \sqrt{Z_{\min}}$ a legkisebb.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Mivel az optimális $\frac{b}{a}$ meghatározása tehát egy harmadfokú egyenlet megoldását teszi szükségessé, egy — az optimálishoz közel eső — $\frac{b}{a}$ érték megadása kényelmesebb teheti munkánkat.

Egyszerű helyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a (3.6) egyenlőtlenséget egyaránt kielégítik a

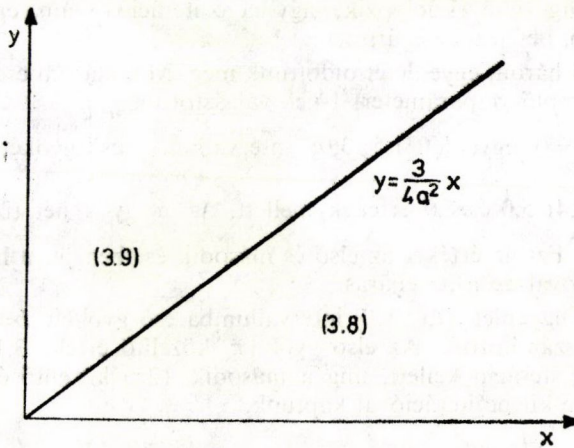
$$(3.8) \quad Z = 2X + \frac{16}{3} a^2 Y$$

és

$$(3.9) \quad Z = 3X + 4a^2 Y$$

értékek is.

A (3.8) és (3.9) formulák közül azt célszerű használni, amelyik kisebb Z értéket ad. A 3. ábrán feltüntettük azt a tartományt, ahol célszerű ezeket a formulákat használni állandó a értékek mellett.



3. ábra

$$Z = \min \left(2X + \frac{16}{3} a^2 Y; 3X + 4a^2 Y \right).$$

Megjegyezzük, hogy a (2.6) becslés a $\frac{b}{a}$ paraméterre sokszor indokolatlanul nagy értéket ad, még akkor is, ha azt optimálisan igyekszünk meghatározni. Egy konkrét $f(x)$ ismeretében esetleg finomabb becslésre is lehetőségünk van, ami a konvergenciát lényegesen gyorsíthatja.

4. Az érintőhiperbola-módszer gyakorlati alkalmazása, példák

Az előzőekben vázolt egyenletmegoldó eljárás gyakorlati alkalmazása könnyű, gépesítése egyszerű. Az a tény, hogy mindig konvergens, biztonságot ad a felhasználónak.

A gyakorlati eljárást célszerű úgy megkonstruálni, hogy az egy adott intervallumba eső összes valós gyököt határozza meg; illetve állapítsa meg, hogy az egyenletnek az adott intervallumban nincs gyöke. Ezt a két célt egy FORTRAN nyelvű program segítségével sikerült elérni. E program jellegzetességei a következők:

1. Az $f(x)$, $f'(x)$ és $F(x)$ függvényeket FUNCTION szegmensek segítségével definiáltuk.
2. Az eljárás az intervallum bal oldali végpontjából indul. Adott pontossággal kiszámítja a legkisebb gyököt. Ezután adott lépéstávolsággal továbblépve kezdi az eljárást előlről, kiszámítva a következő gyököt, majd az eljárást tovább folytatja, míg csak ki nem lép az intervallumból.

3. Kiírja a gyököket, az iterációs lépések számát, az iterációk során kapott közelítő értékeket, esetleg kiírja, hogy nincs gyök.

4. Néhány olyan utasítást tartalmaz, amelyet a felhasználónak nem feltétlenül szükséges tudnia, de amelyek a helyes működéshez szükségesek. (Pl. ha $f(x) < 0$, akkor a $-f(x)$ függvénnyel dolgozik, vagy ha az iterációk száma egy meghatározott számnál nagyobb, befejezi az eljárást.)

Példaképpen három egyenletet oldottunk meg. Mindhárom esetben a hiperbola egyenletében szereplő a paramétert 1-nek választottuk.

A $\sin x - \frac{x}{2} = 0$ egyenlet $[1,5; 3,0]$ intervallumba eső gyökét határoztuk meg rendre $b = \frac{b}{a} = 3,4; 5,0$ és $7,0$ értékek mellett. Az α gyök hét tizedesjegyre kerekítve $1,8954943$. Ezt az értéket az első és második esetben öt, a harmadik esetben pedig hat iterációval adta az eljárás.

A $\sin x = 0$ egyenlet $[1,0; 8,0]$ intervallumba eső gyökeit $b = 2,7$ és $4,0$ paraméterek mellett számítottuk. Az első gyök π közelítő értéke $3,1415927$, amihez hét, illetve nyolc iteráció kellett, míg a második (2π) közelítő értéke $6,2831853$, amit nyolc, illetve kilenc iterációval kaptunk.

A három számítás eredményeit az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

| Az egyenlet $f(x)=0$ | $a=1$ $b=$ | A gyökök | Az iterációs lépések száma |
|----------------------------|---------------|--------------|-------------------------------|
| $\sin x - \frac{x}{2} = 0$ | 3,4 | 1,895 494 3 | 5 |
| $\sin x - \frac{x}{2} = 0$ | 5,0 | 1,895 494 3 | 5 |
| $\sin x - \frac{x}{2} = 0$ | 7,0 | 1,895 494 3 | 6 |
| $\sin x = 0$ | 2,7 | 3,141 592 7 | 7 |
| $\sin x = 0$ | 2,7 | 6,283 185 3 | 8 |
| $\sin x = 0$ | 4,0 | 3,141 592 7 | 8 |
| $\sin x = 0$ | 4,0 | 6,283 185 3 | 9 |
| $x^4 - x^2 = 0$ | 3,0 | -1,000 000 0 | 5 |
| $x^4 - x^2 = 0$ | 3,0 | -0,000 02 | 33 |
| $x^4 - x^2 = 0$ | 3,0 | 1,000 000 0 | 9 |
| $x^4 - x^2 = 0$ | 15,0 | -1,000 000 0 | 6 |
| $x^4 - x^2 = 0$ | 15,0 | -0,000 05 | 60 |
| $x^4 - x^2 = 0$ | 15,0 | 1,000 000 0 | 19 |

Harmadik példaként az $x^4 - x^2 = 0$ egyenlet $[-1, 1; 1, 1]$ intervallumba eső gyökeit közelítettük $b=3,0$ és $15,0$ paraméterek mellett. A három gyök: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$ és $\alpha_3 = 1$. Az $\alpha_2 = 0$ gyök kétszeres. Az α_1 gyök hét tizedesjegy pontossággal való számításához öt, illetve hat iteráció, míg az α_3 -hoz kilenc, illetve tizenkilenc iteráció kellett. Ez utóbbi sok iterációnak az az oka, hogy az $\alpha_2 = 0$ kétszeres gyök közeléből lassabban tud „elszakadni” az eljárás. Az $\alpha_3 = 1$ gyököt tehát jobb lett volna jobbról közelíteni. Az $\alpha_2 = 0$ kétszeres gyök négy tizedesjegy pontosságú meghatározásához viszont 33, illetve 60 iteráció kellett. Kétszeres gyök esetén tehát az eljárás — mint ahogy az várható is —, lassan konvergál.

IRODALOM

- [1] DEUTSCH, M. és SZABÓ, Z., „Érintőellipszisekkel generált mindig konvergens egyenletmegoldó iterációkról”, *Mat. Lapok* **24** (1973) 397—408.
- [2] KÁLOVICS, F., „Kizárási tételek többváltozós polinom zérushelyeinek kereséséhez”, *NME Közleményei Miskolc*, 4. sorozat **1** (1979) 31—40.
- [3] KÁLOVICS, F., „Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása érintőparaboloid módszerrel”, *NME Közleményei Miskolc*, 4. sorozat **1** (1977) 19—33.
- [4] RALSTON, A., *Bevezetés a numerikus analízisbe* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969).
- [5] SZABÓ, Z., Mindig konvergens iterációs eljárások nemlineáris egyenletek megoldására, Kandidátusi értekezés KLTE Mat. Int., Debrecen—Budapest (1979).
- [6] SZABÓ, Z., „Über gleichungslösende Iteration ohne Divergenzpunkt I—III“, *Publ. Math. Debrecen*, **20** (1973) 223—233; **21** (1974) 285—293; **27** (1980) 185—200.
- [7] TÓTH, B., „Polinom összes zérushelyének érintőparaboloid-módszerrel való meghatározása”, *NME Közleményei Miskolc*, 4. sorozat **3** (1980) 131—140.
- [8] TRAUB, J. F., *Iterative Methods for the Solution of Equations* (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964).

(Beérkezett: 1981. december 11.)

KONTOR ISTVÁNNÉ
NME ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIAI TANSZÉK
3515 MISKOLC-EGYETEMVÁROS

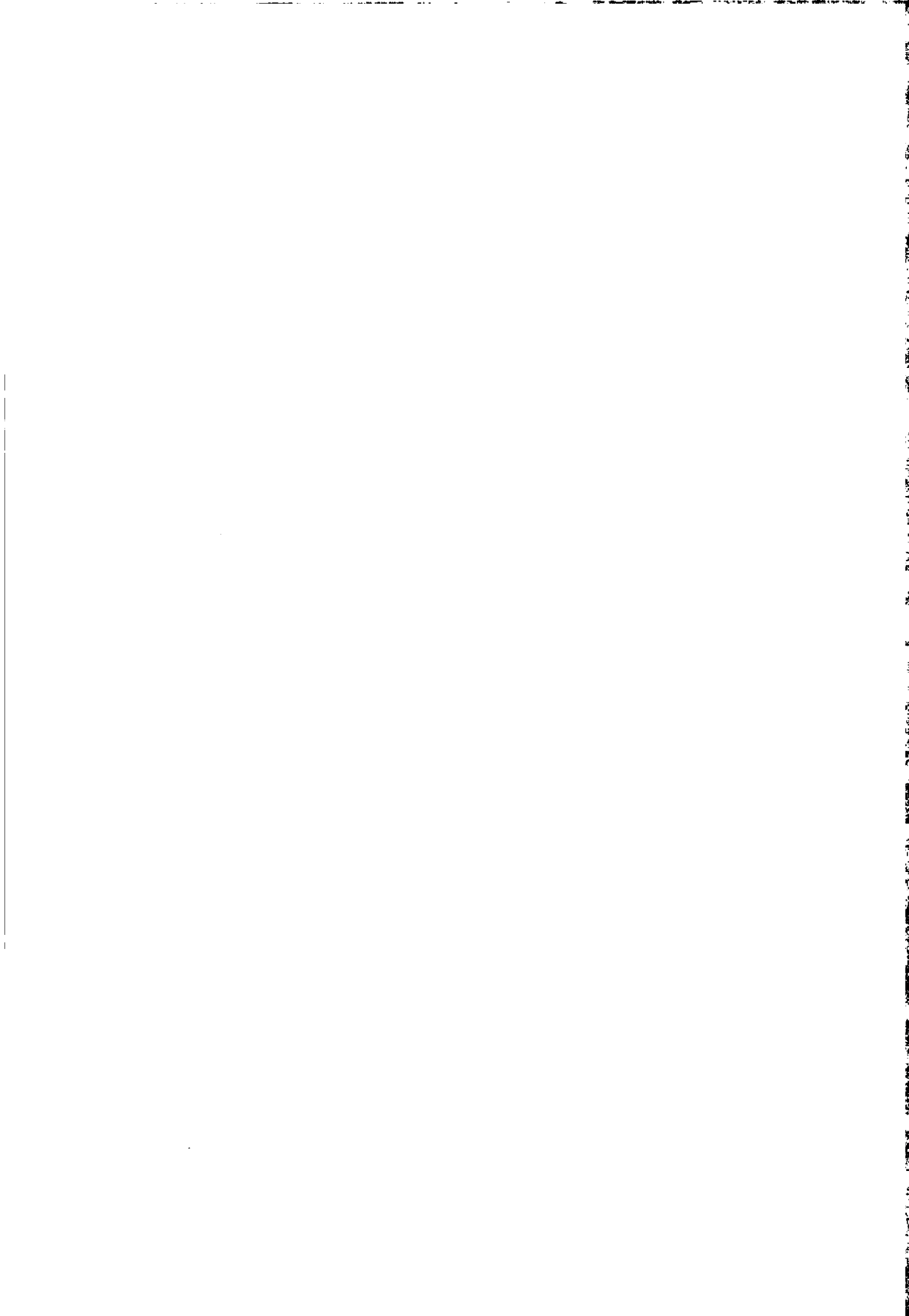
ÜBER DAS BERÜHRUNGSHYPERBEL-VERFAHREN ZUR BESTIMMUNG REELLE WURZELN VON NICHTLINEAREN GLEICHUNGEN

I. KONTOR

Die Arbeit stellt ein Verfahren zur Bestimmung reeller Wurzeln von nichtlinearen Gleichungen dar. Von den durch Funktionen erzeugten Iterationsverfahren wird diesmal das Berührungshyperbel-Verfahren untersucht. Dieses Verfahren ist immer monoton.

Es werden hinreichende Bedingungen zur Konvergenz und auch Fehlerabschätzungen hergeleitet; es wird ein Verfahren zur Aufsuchung einer optimalen Berührungshyperbel angegeben; es wird gezeigt, dass bei einer einfachen Wurzel die Iteration von zweiter Ordnung ist.

Zuletzt werden einige Beispiele für die Anwendung des betreffenden Verfahrens angeführt.



GYORS ALGORITMUS TOEPLITZ-TÍPUSÚ SZALAGMÁTRIX EGYÜTTTHATÓJÚ LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA

BECK GYÖRGY

Budapest

Nagyméretű *Toeplitz-típusú szalagmátrixok* igen sok gyakorlati alkalmazási területen felmerülnek. A dolgozatban olyan lineáris egyenletrendszerek megoldásával foglalkozunk, amelyek együtthatómátrixa *Toeplitz-típusú szalagmátrix*. Megmutatjuk, hogy az együttható cirkuláris kiterjesztésével az ilyen egyenletrendszerek — a jelenleg alkalmazott $O(n^3)$ műveletigényű eljárásokkal szemben — $O(n \log_2 n)$ művelettel megoldhatók. Az eljárás abban az esetben nyújt jelentős hatékonyságnövekedést, ha a megoldandó lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa nagyméretű és ritka. Az eljárásban alkalmazott *gyors Fourier-transzformációk* hardware úton történő végrehajtása esetén a műveletigény $O(n)$ értékre redukálódik.

1. Bevezetés

A dolgozatban olyan

$$Tx = y$$

alakú lineáris egyenletrendszerek megoldásával foglalkozunk, amelyeknek *együtthatómátrixa* kvadratikus, *Toeplitz-típusú szalagmátrix*.

Ilyen mátrixok igen sok gyakorlati alkalmazási területen felmerülnek. Néhány alapvető fizikai és matematikai felhasználási terület:

- jelfeldolgozás [11],
- képfeldolgozás [7],
- digitális szűrők tervezése [5],
- parciális differenciálegyenletek megoldása [2].

Ezekon a területeken nagy számban kell megoldani olyan lineáris egyenletrendszereket, amelyekben az együttható nagyméretű *Toeplitz-típusú szalagmátrix*.

Jelenleg a felmerülő gyakorlati alkalmazások esetén az ilyen egyenletrendszerek megoldására — az általános lineáris egyenletrendszerek megoldására is alkalmas — *Gauss-eliminációs algoritmust* [10], vagy pedig a speciálisan a *Toeplitz-egyenletrendszerek* megoldására kidolgozott ún. *Levinson—Trench—Zohar-* (a továbbiakban *L—T—Z algoritmust* [9, 13, 15] használják.

Egy n egyenletből álló egyenletrendszer esetén a *Gauss-elimináció* műveletigénye $O(n^3)$, míg az *L—T—Z algoritmusé* $O(n^2)$, azaz a két eljárás esetén a műveletigény az egyenletszám harmadik, ill. második hatványával arányos. (Egy műveletnek egy szorzást és egy összeadást tekintünk.)

A továbbiakban megmutatjuk, hogy megadható olyan — az együtthatómátrix cirkuláris kiterjesztésén alapuló — eljárás, amelynek a műveletigénye csak

$O(n \cdot \log_2 n)$. A műveletigény értékek közötti különbség nagy n esetén már igen jelentős lesz, ezért az eljárás nagyméretű egyenletrendszerek megoldásakor komoly műveletidő megtakarítást eredményez.

A feladat cirkuláris kiterjesztéssel történő megoldásának gondolatát először K. JAIN vetette fel 1978-ban [8]. Azonban az általa adott megoldás csak a kiindulási problémánknál lényegesen speciálisabb esetben alkalmazható. A most bemutatásra kerülő eljárás JAIN algoritmusának javítása, ill. általánosítása.

Az eljárás kialakításában jelentős szerepet játszik a *diszkrét Fourier-transzformáció*, ill. a transzformáció végrehajtására alkalmazott ún. gyors Fourier-transzformációs algoritmus [3] (a továbbiakban FFT), sőt a transzformációnak az elért hatékonyság növekedésben játszott alapvető szerepe miatt, a kidolgozott módszert a gyors Fourier-transzformáció egy újabb érdekes gyakorlati alkalmazásának tekinthetjük.

A dolgozatban bemutatásra kerülő eljárásban a kiindulási egyenletrendszer megoldásának meghatározásához szinte kizárólag csak FFT-k és inverz FFT-k végrehajtása szükséges. Azonban jelenleg az FFT-t egyre inkább hardware úton hajtják végre [4, 14] és ebben az esetben a műveletigény $O(n)$ -re redukálódik, az eljárás hatékonysága pedig igen jelentős mértékben tovább növekszik.

2. A felhasznált jelölések és legfontosabb fogalmak definíciója

A dolgozatban az egyes fogalmak világosabb megkülönböztetése céljából egymástól eltérő betűtípusokat alkalmazunk. A mátrixokat félkövér nagybetűkkel, a skaláris mennyiségeket kisbetűkkel, a vektorokat pedig félkövér kisbetűkkel jelöljük. Ezenkívül a következő jeleket és rövidítéseket használjuk:

| | |
|---|-----------------------|
| a diszkrét cirkuláris konvolúció jele: | ** |
| két vektor komponensenként képzett szorzatának a jele: | * |
| két vektor komponensenként képzett hányadosának a jele: | ‡ |
| az \mathbf{a} vektor <i>diszkrét Fourier-transzformáltja</i> : | DFT (\mathbf{a}) |
| az \mathbf{a} vektor <i>inverz diszkrét Fourier-transzformáltja</i> : | IDFT (\mathbf{a}) |

A dolgozatban gyakran előfordul, hogy egy különbséget valamilyen modulus szerint kell képeznünk. Erre a különbségképzésre a szokásos:

$$i - j \pmod{m}$$

jelölés mellett az

$$\underline{i - j}_m$$

jelölést is alkalmazzuk abban az esetben, ha a különbség egy indexkifejezésben szerepel. Ha a különbséget \pmod{n} kell tekintenünk, akkor az $\underline{i - j}_n$ helyett csak $\underline{i - j}$ -t írunk.

A továbbiakban a $\log n$ mindig a kettes alapú logaritmust jelöli, azaz a $\log_2 n$ -t helyettesíti.

2.1. DEFINÍCIÓ. Egy n -edrendű \mathbf{T} mátrixot *Toeplitz-típusúnak* nevezünk, ha elemei csak az oszlop- és sorindexük különbségétől függenek, azaz

$$(2.1) \quad t_{ij} = t_{i-j}, \quad 0 < i, j \leq n.$$

A definíció szemléletesen azt jelenti, hogy egy *Toeplitz-mátrixban* a főátló és minden a főátlóval párhuzamos „ferde sor” csupa azonos elemből áll [12].

2.2. DEFINÍCIÓ. Egy n -edrendű kvadratikus C mátrixot *cirkuláris* — vagy ciklikus — *mátrixnak* nevezzük, ha elemeire teljesül:

$$(2.2) \quad c_{ij} = c_{i-j},$$

azaz

$$c_{ij} = c_{i-j \pm kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a mátrixot az első sor vagy az első oszlop elemei egyértelműen meghatározzák, továbbá, hogy *minden cirkuláris mátrix* egyben *Toeplitz-típusú* is. (Az állítás fordítottja nem érvényes.)

2.3. DEFINÍCIÓ. Legyen

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}), \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{és} \quad w = \exp(2\pi i/n).$$

A \mathbf{b} és \mathbf{c} n -elemű vektorokat, melyeknek j -edik komponense:

$$(2.3) \quad b_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{jk}, \quad 0 \leq j < n$$

és

$$(2.4) \quad c_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-jk}, \quad 0 \leq j < n$$

az \mathbf{a} vektor *diszkrét Fourier-transzformáltjának*, ill. *inverz diszkrét Fourier-transzformáltjának* nevezzük [3].

2.4. DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathbf{a}=(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ és $\mathbf{b}=(b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ két n -elemű vektor. *Diszkrét cirkuláris konvolúciójuk* — $\mathbf{a} ** \mathbf{b}$ — egy n -elemű vektor lesz, melynek komponenseire teljesül:

$$(2.5) \quad c_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{i-j}, \quad 0 \leq i < n.$$

3. Általános tételek

Ebben a részben néhány olyan általános tételt ismertetünk, amelyeknek alapvető szerepük van a későbbiekben megadandó algoritmus elméleti megalapozásában. Ezen tételek egy része jól ismert a *cirkuláris- és Toeplitz-mátrixok* elméletéből, ezért ezek bizonyítását nem ismertetjük.

3.1. LEMMA. A cirkuláris mátrixok szorzása kommutatív és a szorzat mátrix is cirkuláris. (A bizonyítás megtalálható [6]-ban.)

3.2. LEMMA. Egy nemszinguláris cirkuláris mátrix inverze is cirkuláris [6].

3.3. LEMMA. *Toeplitz-típusú mátrixok* összege és különbsége is *Toeplitz-típusú mátrix* [6].

3.4. LEMMA. A cirkuláris konvolúció kommutatív, azaz

$$(3.1) \quad \mathbf{a} ** \mathbf{b} = \mathbf{b} ** \mathbf{a}.$$

3.1. KOROLLÁRIUM. Legyen \mathbf{C} egy n -edrendű cirkuláris mátrix és jelölje \mathbf{c} a \mathbf{C} első oszlopvektorát. Ha \mathbf{a} egy n -elemű oszlopvektor, akkor

$$(3.2) \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} ** \mathbf{a}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}$, azaz

$$r_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_{kj} a_j, \quad 0 \leq k < n.$$

Mivel \mathbf{C} cirkuláris, ezért $c_{kj} = c_{k-j}$ és így

$$r_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_{k-j} a_j \stackrel{\text{D2.4}}{=} [\mathbf{a} ** \mathbf{c}]_k \stackrel{\text{L3.4}}{=} [\mathbf{c} ** \mathbf{a}]_k.$$

3.5. LEMMA Tetszőleges \mathbf{a} vektor esetén

$$(3.3) \quad \text{IDFT}(\text{DFT}(\mathbf{a})) = \text{DFT}(\text{IDFT}(\mathbf{a})) = \mathbf{a} [1].$$

3.6. LEMMA. (Cirkuláris konvolúciós tétel.) Legyen \mathbf{a} és \mathbf{b} két n -elemű vektor, ekkor

$$(3.4) \quad \mathbf{a} ** \mathbf{b} = \text{IDFT}(\text{DFT}(\mathbf{a}) * \text{DFT}(\mathbf{b}))$$

azaz két vektor cirkuláris konvolúcióját megkaphatjuk a vektorok *diszkrét Fourier-transzformáltjai* komponensenkénti szorzatának *inverz diszkrét Fourier-transzformáltjaként*.

Bizonyítás. Legyen $0 \leq s < n$

$$(3.5) \quad [\text{DFT}(\mathbf{a}) * \text{DFT}(\mathbf{b})]_s = \sum_{j=0}^{n-1} a_j w^{sj} \sum_{k=0}^{n-1} b_k w^{sk} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_j b_k w^{s(j+k)},$$

$$(3.6) \quad [\text{DFT}(\mathbf{a} ** \mathbf{b})]_s = \sum_{p=0}^{n-1} [\mathbf{a} ** \mathbf{b}]_p \cdot w^{sp} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{p-j} w^{sp}.$$

A (3.6)-ban végezzük el a $k = p - j$ helyettesítést és cseréljük fel az összegzés sorrendjét.

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_j b_{p-j} w^{sp} &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=-j}^{n-1-j} a_j b_k w^{s(j+k)} = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=-j}^{-1} a_j b_k w^{s(j+k)} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1-j} a_j b_k w^{s(j+k)}. \end{aligned}$$

(3.7) jobb oldalának első tagjában legyen k helyett $(n+k)$ az új indexváltozó, így

$$(3.8) \quad \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=-j}^{-1} a_j b_k w^{s(j+k)} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=n-j}^{n-1} a_j b_{\underline{k-n}} w^{s(j+k-n)}.$$

Azonban

$$w^{s(j+k-n)} = \exp(2\pi i s(j+k-n)/n) = \exp(2\pi i s(j+k)/n) \cdot \exp(-2\pi i s n/n) = \exp(2\pi i s(j+k)/n) = w^{s(j+k)}.$$

Ezért a (3.8) a következő alakban írható fel:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=n-j}^{n-1} a_j b_k w^{s(j+k)}$$

és a (3.7) pedig

$$(3.9) \quad \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=n-j}^{n-1} a_j b_k w^{s(j+k)} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-j-1} a_j b_k w^{s(j+k)} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_j b_k w^{s(j+k)}.$$

A (3.5) és (3.9) alapján felírható a következő egyenlőség:

$$(3.10) \quad [\text{DFT}(\mathbf{a}) * \text{DFT}(\mathbf{b})]_s = [\text{DFT}(\mathbf{a} ** \mathbf{b})]_s, \quad 0 \leq s < n.$$

Ez viszont a 3.5. lemma miatt

$$[\text{IDFT}(\text{DFT}(\mathbf{a}) * \text{DFT}(\mathbf{b}))]_s = [\mathbf{a} ** \mathbf{b}]_s, \quad 0 \leq s < n$$

alakban is felírható, ami pedig éppen a cirkuláris konvolúciós tétel érvényességét bizonyítja.

3.7. LEMMA. Egy cirkuláris mátrix inverze létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a mátrix első oszlopvektorának *diszkrét Fourier-transzformáltja* ne tartalmazzon egyetlen nulla komponenst sem.

Bizonyítás:

i) *Szükségesség.* Legyen **A** egy cirkuláris mátrix, **a** pedig az **A** első oszlopvektora. Tegyük fel, hogy

a) $\exists \mathbf{A}^{-1}$

és

b) $\exists i, \quad 0 \leq i < n, \quad [\text{DFT}(\mathbf{a})]_i = 0.$

Jelölje **E** az egységmátrixot, **e** és **b** pedig az **E** és \mathbf{A}^{-1} első oszlopvektorát. Ekkor felírhatjuk a következő egyenlőséget

$$(3.11) \quad \mathbf{e} = \mathbf{A} \mathbf{b} \stackrel{\text{K3.1}}{=} \mathbf{a} ** \mathbf{b} \stackrel{\text{L3.6}}{=} \text{IDFT}(\text{DFT}(\mathbf{a}) * \text{DFT}(\mathbf{b})).$$

A 3.5. lemma felhasználásával (3.11) a következő alakban írható:

$$\text{DFT}(\mathbf{e}) = \text{DFT}(\mathbf{a}) * \text{DFT}(\mathbf{b}).$$

Az *i*-edik komponensekre pedig

$$(3.12) \quad [\text{DFT}(\mathbf{e})]_i = [\text{DFT}(\mathbf{a}) * \text{DFT}(\mathbf{b})]_i.$$

Mivel $\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0)$ így

$$[\text{DFT}(\mathbf{e})]_i = \sum_j e_j w^{ij} = 1$$

és így (3.12) alapján

$$(3.13) \quad [\text{DFT}(\mathbf{a}) * \text{DFT}(\mathbf{b})]_i = [\text{DFT}(\mathbf{a})]_i [\text{DFT}(\mathbf{b})]_i = 1.$$

Így azonban a kezdeti feltevással — $[\text{DFT}(\mathbf{a})]_i = 0$ — ellentmondásba kerültünk.

(ii) *Elégesség.* Tegyük fel, hogy az \mathbf{A} cirkuláris mátrix első oszlopának *diszkrét Fourier-transzformáltja* nem tartalmaz nulla komponenset. Készítsük el a

$$(3.14) \quad \mathbf{b} = \text{IDFT}(\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{a}))$$

vektort. A 3.6. lemma felhasználásával az előbbi egyenlőség

$$(3.15) \quad \text{DFT}(\mathbf{b}) = \mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{a})$$

alakra hozható. A *diszkrét Fourier-transzformáció* definíciója alapján az $\mathbf{1}$ vektor helyett írhatunk $\text{DFT}(\mathbf{e})$ -t és így a (3.15) új alakja:

$$\text{DFT}(\mathbf{b}) = \text{DFT}(\mathbf{e}) * \text{DFT}(\mathbf{a})$$

és ezért

$$(3.16) \quad \text{DFT}(\mathbf{e}) = \text{DFT}(\mathbf{a}) * \text{DFT}(\mathbf{b}).$$

A 3.5. és a 3.6. lemma alapján a (3.16) fennállása miatt érvényes az

$$(3.17) \quad \mathbf{e} = \mathbf{a} * \mathbf{b}$$

egyenlőség.

Legyen \mathbf{B} olyan cirkuláris mátrix, melynek első oszlopvektora \mathbf{b} . A 3.1. lemma alapján $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{C}$ és a \mathbf{C} cirkuláris mátrix.

Jelölje \mathbf{c} a \mathbf{C} első oszlopát. Ekkor

$$\mathbf{c} = \mathbf{Ab} \stackrel{\text{L3.1}}{=} \mathbf{a} * \mathbf{b} \stackrel{(3.17)}{=} \mathbf{e}.$$

Tehát a \mathbf{C} olyan cirkuláris mátrix, amelynek első oszlopvektora \mathbf{e} , azaz éppen az egységmátrix, vagyis

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$$

ami viszont éppen azt bizonyítja, hogy a \mathbf{B} mátrix az \mathbf{A} inverze.

3.2. KOROLLÁRIUM. Egy cirkuláris mátrix akkor és csak akkor nonszinguláris, ha első oszlopvektorának *diszkrét Fourier-transzformáltja* nem tartalmaz nulla komponenset.

3.3. KOROLLÁRIUM. Ha \mathbf{A} egy nonszinguláris cirkuláris mátrix, melynek első oszlopa \mathbf{a} , akkor az \mathbf{A} inverze az a \mathbf{B} cirkuláris mátrix lesz, amelynek első oszlopvektora a következő képlettel határozható meg:

$$(3.18) \quad \mathbf{b} = \text{IDFT}(\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{a})).$$

Bizonyítás. A 3.2. lemma miatt az inverz mátrix valóban cirkuláris lesz és a (3.18) képlet érvényességét a 3.7. lemma bizonyításának második részében mutatuk meg.

4. Az eljárás elméleti kidolgozása

Legyen megadva tehát a

(4.1) $Tx = y$

lineáris egyenletrendszer, ahol T egy n -edrendű nonszinguláris Toeplitz-típusú szalagmátrix, azaz

$t_{i,j} = t_{i-j}, \quad 0 < i, j \leq n,$

$\exists p, q < n, \quad t_q \neq 0, \quad t_{-p} \neq 0$

és

$t_k = 0$ minden $k > q$ vagy $k < -p$ esetén.

A T mátrix a következő lesz:

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-p} & 0 & \dots & 0 \\ & t_1 & & & & & \vdots \\ & \vdots & & & & & 0 \\ & t_q & & & & & t_{-p} \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & t_q & \dots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

A következőkben az együttthatómátrix cirkuláris kiterjesztésével a (4.1) egyenletrendszert két egyenletrendszerre bontjuk. Ezek közül az egyik egy n -edrendű cirkuláris mátrix együtttható jű lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldása — a később megadandó tételek alapján — $O(n \log n)$ művelettel meghatározható. A másik pedig egy $O((p+q)^2)$ művelettel megoldható $(p+q) \times (p+q)$ -s Toeplitz-egyenletrendszer lesz.

Legyen T_c a T mátrix n -edrendű cirkuláris kiterjesztése, azaz olyan n -edrendű mátrix, amely tartalmazza a T nem nulla elemeit és cirkuláris. (A kiterjeszthetőségnek az a feltétele, hogy $p+q < n$ teljesüljön. Ha ez a feltétel nem teljesül — ami szemléletesen azt jelenti, hogy a T mátrix nem elég ritka — akkor az L—T—Z algoritmust alkalmazzuk.)

A T mátrix n -edrendű cirkuláris kiterjesztésével keletkezett T_c a következő lesz:

$$T_c = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-p} & 0 & t_q & \dots & t_1 \\ & t_1 & & & & & & \vdots \\ & \vdots & & & & & & \vdots \\ & t_q & & & & & & t_q \\ & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ t_{-p} & & & & & & & t_{-p} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ t_{-1} & \dots & t_{-p} & 0 & t_q & \dots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

A T_b mátrix legyen olyan, hogy a

$$T_b = T_c - T$$

egyenletet kielégítse. Így a kiindulási egyenletrendszer alapján felírhatjuk a következő egyenlőséget:

$$(4.2) \quad T_c x = y + T_b x.$$

Tegyük fel, hogy a T_c nonszinguláris. Ezen feltétel mellett a (4.2) a következő alakra hozható:

$$(4.3) \quad x = T_c^{-1} y + T_c^{-1} T_b x.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$(4.4) \quad B = T_c^{-1}; \quad z = T_c^{-1} y.$$

Ezen jelölések mellett a (4.3) a következő lesz

$$(4.5) \quad x = z + B T_b x.$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg a (4.5) jobb oldalán szereplő $T_b x$ szorzatot.

$$T_b x = \begin{bmatrix} & & & & t_q \dots t_1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & t_q \\ & & 0 & & \\ t_{-p} & & & & \\ \vdots & & & & \\ t_{-1} \dots t_{-p} & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Jelölje F a T_b jobb felső sarkában álló q -adrendű felső trianguláris mátrixot, G pedig a bal alsó sarokban levő p -adrendű alsó trianguláris mátrixot. x^i és x^t legyen az x első p és utolsó q komponenséből álló oszlopvektor. Ezen jelölésekkel a szorzat:

$$T_b x = \begin{bmatrix} & F \\ & 0 \\ G & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^i \\ x^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F x^i \\ 0 \\ G x^i \end{bmatrix}.$$

Legyenek u, v és c a következő p -, q -, ill. n -elemű vektorok:

$$(4.6) \quad u = F x^i, \quad v = G x^i \quad \text{és} \quad c = (u^T, 0, v^T)^T.$$

Így a (4.5) egyenlet új alakja:

$$(4.7) \quad x = z + B T_b x = z + B \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ v \end{bmatrix} = z + B c.$$

Az egyenlethől jól látszik, hogy ha az u és v értékét ismernénk, akkor az x megoldásvektort a (4.7) alapján már könnyen meghatározhatnánk.

Az \mathbf{u} és \mathbf{v} meghatározása érdekében particionáljuk a \mathbf{B} mátrixot és a \mathbf{z} vektort a következőképpen:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{ii} & \mathbf{B}^{im} & \mathbf{B}^{it} \\ \mathbf{B}^{mi} & \mathbf{B}^{mm} & \mathbf{B}^{mt} \\ \mathbf{B}^{ti} & \mathbf{B}^{tm} & \mathbf{B}^{tt} \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ p \\ q \end{matrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^i \\ \mathbf{z}^m \\ \mathbf{z}^t \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ p \\ q \end{matrix}.$$

Így a (4.7) alapján \mathbf{x}^i -re és \mathbf{x}^t -re a következő egyenletek kaphatók:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}^i &= \mathbf{B}^{ii}\mathbf{u} + \mathbf{B}^{it}\mathbf{v} + \mathbf{z}^i \\ \mathbf{x}^t &= \mathbf{B}^{ti}\mathbf{u} + \mathbf{B}^{tt}\mathbf{v} + \mathbf{z}^t. \end{aligned}$$

Azonban az \mathbf{x}^i és \mathbf{x}^t a (4.6) egyenletekből is kifejezhetők, ugyanis a \mathbf{T}_b mátrix alapján látszik, hogy az \mathbf{F} olyan trianguláris mátrix, amelynek főátlójában minden elem t_q -val egyenlő, s így a $t_q \neq 0$ kezdeti feltevéssé miatt az \mathbf{F} mátrixnak létezik az inverze. Hasonló okok miatt — $t_{-p} \neq 0$ — létezik a \mathbf{G}^{-1} is. Ezért a (4.6) alapján:

$$(4.9) \quad \mathbf{x}^t = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} \quad \text{és} \quad \mathbf{x}^i = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{v}.$$

A (4.8) és (4.9) szerint:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}^t &= \mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{B}^{ti}\mathbf{u} + \mathbf{B}^{tt}\mathbf{v} + \mathbf{z}^t, \\ \mathbf{x}^i &= \mathbf{G}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^{ii}\mathbf{u} + \mathbf{B}^{it}\mathbf{v} + \mathbf{z}^i. \end{aligned}$$

Az egyenleteket átrendezve kapjuk:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} -\mathbf{B}^{it}\mathbf{v} + (\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{B}^{ti})\mathbf{u} &= \mathbf{z}^t, \\ (\mathbf{G}^{-1} - \mathbf{B}^{ii})\mathbf{v} + \mathbf{B}^{ii}\mathbf{u} &= \mathbf{z}^i. \end{aligned}$$

Legyen

$$(4.12) \quad \mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{F}^{-1} \\ \mathbf{G}^{-1} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{matrix} q \\ p \end{matrix}; \quad \mathbf{N} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{it} & \mathbf{B}^{ti} \\ \mathbf{B}^{ii} & \mathbf{B}^{ii} \end{array} \right] \begin{matrix} q \\ p \end{matrix}; \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \begin{matrix} q \\ p \end{matrix}; \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^t \\ \mathbf{z}^i \end{bmatrix} \begin{matrix} q \\ p \end{matrix}$$

és

$$\mathbf{R} = \mathbf{M} - \mathbf{N}.$$

Ezekkel a jelölésekkel a (4.11)-nek megfelelő mátrixegyenlet:

$$(4.13) \quad \mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{s}.$$

A (4.13) mátrixegyenlet nem más, mint egy $(p+q)$ egyenletből álló lineáris egyenletrendszer a \mathbf{v} és \mathbf{u} vektorokra, vagyis a $v_0, v_1, \dots, v_{p-1}, u_0, u_1, \dots, u_{q-1}$ ismeretlenekre. Mivel a (4.1) rendszerben \mathbf{T} -ről feltettük, hogy nonsinguláris, így ez biztosítja, hogy a kiindulási egyenletrendszernek létezik egyértelmű \mathbf{x} megoldásvektora. Természetesen így az \mathbf{x} első p és utolsó q komponense — $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^t$ — is egyértelműen meghatározható, ami viszont az eredeti egyenletrendszerből származtatott (4.10) alapján azt biztosítja, hogy a (4.13) egyenletrendszer \mathbf{R} együtthatómátrixa sem lehet szinguláris és így létezik egyértelmű megoldás \mathbf{v} -re és \mathbf{u} -ra.

5. A megoldási algoritmus leírása

A (4.1) kiindulási egyenletrendszernek az előző részben ismertetett dekomponálásával és az ott kapott eredmények felhasználásával összeállíthatunk egy algoritmust az egyenletrendszer x megoldásvektorának a meghatározására. Az algoritmus fő lépései:

- I. B meghatározása (4.4) alapján
- II. z kiszámítása (4.4) alapján
- III. M meghatározása (4.12) alapján
- IV. N meghatározása (4.12) alapján
- V. w kiszámítása (4.13) alapján
- VI. x meghatározása (4.7) alapján

Ha az egyes lépésekhez a gyakorlatban általánosan használt eljárásokat alkalmazzuk, azaz a mátrix invertáláshoz és a (4.13) lineáris egyenletrendszer megoldásához a *Jordan- és Gauss-eliminációt* használjuk és a mátrix-vektor szorzást is hagyományosan végezzük, akkor a teljes műveletigény jóval a jelenleg használt L—T—Z algoritmus műveletszükséglete fölötti érték lesz. Azonban a T_c mátrix cirkuláris voltának a kihasználásával és a *gyors Fourier-transzformációs algoritmus* használatával a műveletigény jelentősen redukálható.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy az összeállított eljárás egyes lépéseiben milyen tevékenységeket kell végeznünk és ezek végrehajtásában milyen hatékonyságnövelő algoritmusok alkalmazhatók.

I. $A B$ mátrix meghatározása

Mivel a B nem más, mint a T_c n -edrendű cirkuláris mátrix inverze, így a 3.3. korollárium alapján a B első oszlopvektorát a következő képlettel kaphatjuk meg:

$$(5.1) \quad \mathbf{b} = \text{IDFT}(\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{t})),$$

ahol t -vel jelöltük a T_c mátrix első oszlopát.

Mivel a B cirkuláris, így az első oszlop egyértelműen meghatározza a teljes mátrixot.

Ha az (5.1) képlettel megadott \mathbf{b} vektor meghatározásához szükséges *diszkrét Fourier-transzformációt* és inverzét a *gyors Fourier-transzformációs algoritmussal* számítjuk ki, amely egy n -edrendű vektor (*inverz*) *diszkrét Fourier-transzformáltját* $n \log n$ művelettel határozza meg [3], akkor a szükséges műveletek száma:

DFT (\mathbf{t}) számítására $n \log n$

$(\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{t}))$ számítására n

IDFT ($\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{t})$) számítására $n \log n$

azaz

a teljes műveletigény $2n \log n + n$

lesz. Ez az érték — elég nagy n esetén — jóval kisebb az általános mátrix inverziós eljárások $O(n^3)$ műveletszükségleténél.

II. Az z vektor meghatározása

A z vektort a $\mathbf{B}y$ szorzattal definiáltuk. A \mathbf{B} mátrix cirkuláris tulajdonságát kihasználva és a korábbi segédtételek eredményeit felhasználva ebben a lépésben is tudunk egy — a hagyományos n^2 műveletigényű mátrix-vektor szorzásnál — hatékonyabb eljárást alkalmazni.

Legyen \mathbf{b} az I. lépésben már meghatározott \mathbf{B} mátrix első oszlopvektora. Ekkor

$$(5.2) \quad z = \mathbf{B}y \stackrel{\text{K3.1}}{=} \mathbf{b} ** y \stackrel{\text{L3.6}}{=} \text{IDFT}(\text{DFT}(\mathbf{b}) * \text{DFT}(y)).$$

Ha ebben a képletben a szükséges DFT-k és IDFT végrehajtására az FFT algoritmust használjuk, akkor a z szorzatvektor meghatározásához szükséges műveletigény $3n \log n + n$ lesz.

III. A \mathbf{M} mátrix meghatározása

A (4.12) szerint definiált \mathbf{M} mátrix meghatározásához a \mathbf{G} és \mathbf{F} Toeplitz-típusú alsó-, ill. felső trianguláris mátrixok inverzét kell kiszámítanunk. A két mátrix speciális tulajdonságait kihasználva, az általános mátrixinverziós eljárásnál hatékonyabb algoritmussal tudjuk meghatározni az \mathbf{F} és a \mathbf{G} inverzét a következő tétel eredményeinek a felhasználásával.

5.1. TÉTEL. Legyen \mathbf{G} egy nonsinguláris n -edrendű Toeplitz-típusú alsó trianguláris mátrix, \mathbf{H} pedig a \mathbf{G} inverze. Jelölje \mathbf{g} és \mathbf{h} a \mathbf{G} ill. \mathbf{H} első oszlopvektorát. Ekkor

- (i) \mathbf{H} is Toeplitz-típusú alsó trianguláris mátrix lesz.
- (ii) A \mathbf{h} -t a következő rekurziós képlettel kaphatjuk meg:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} h_0 &= 1/g_0, \\ h_m &= -h_0 \sum_{k=1}^m g_k h_{m-k}, \quad 0 < m < n. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Ha \mathbf{E} az n -edrendű egységmátrix és \mathbf{h}^i -vel és \mathbf{e}^i -vel jelöljük a \mathbf{H} és \mathbf{E} i -edik oszlopvektorát, akkor érvényes a következő egyenlet:

$$(5.4) \quad \mathbf{G}\mathbf{h}^i = \mathbf{e}^i, \quad 0 < i \leq n.$$

Az (5.4)-et részletesen felírva — kihasználva, hogy a \mathbf{G} alsó trianguláris és Toeplitz-típusú — az (5.5) egyenletrendszert kapjuk:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} g_0 h_{1i} + 0 & & = 0 \\ g_1 h_{1i} + g_0 h_{2i} + 0 & & = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ g_{i-1} h_{1i} + g_{i-2} h_{2i} + \dots + g_0 h_{ii} + 0 & & = 1 \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n-1} h_{1i} + g_{n-2} h_{2i} + \dots + g_{n-i} h_{ii} + \dots + g_0 h_{ni} & = 0. \end{aligned}$$

Mivel \mathbf{G} -ről feltettük, hogy nonsinguláris, így a determinánsa $(g_0)^n$ nem lehet nulla, s ezért az (5.5) első egyenlete alapján minden $1 < i \leq n$ esetén

$$h_{1i} = 0.$$

Tegyük fel, hogy $0 < j-1 < i \leq n$ esetén

$$h_{1i} = h_{2i} = \dots = h_{j-1,i} = 0$$

és tekintsük a h_{ji} elemet:

a) $j < i$.

Az (5.5) j -edik egyenlete és az indukciós feltevés alapján érvényes a

$$g_0 h_{ji} = 0$$

egyenlőség. Viszont a g_0 -ról már korábban láttuk, hogy nem lehet nulla, így tehát

$$(5.7) \quad h_{ji} = 0, \quad 0 < j < i \leq n \text{ esetén.}$$

Az (5.7) feltétel teljesülése éppen azt bizonyítja, hogy a \mathbf{H} alsó trianguláris mátrix.

b) $j = i$.

Az (5.5) i -edik egyenlete és (5.7) alapján $g_0 h_{ii} = 1$, vagyis

$$(5.8) \quad h_{ii} = 1/g_0,$$

c) $j > i$.

Az (5.5) j -edik egyenlete alapján az (5.7) és (5.8) eredmények felhasználásával felírhatjuk a következő egyenlőséget:

$$g_{j-i}/g_0 + g_{j-i-1}h_{i+1,i} + \dots + g_0 h_{ji} = 0.$$

Ezen egyenlet alapján a h_{ji} -t a kisebb sorindexű i -edik oszlopbeli elemekkel a következő képlettel tudjuk kifejezni:

$$(5.9) \quad h_{ji} = (-1/g_0) \sum_{k=1}^{j-i} g_k h_{j-k,i}.$$

Tehát a \mathbf{H} mátrix i -edik oszlopának az elemei:

$$(5.10) \quad h_{ji} = \begin{cases} 0, & 0 < j < i \leq n, \\ 1/g_0, & 0 < j = i \leq n, \\ -1/g_0 \sum_{k=1}^{j-i} g_k h_{j-k,i}, & 0 < i < j \leq n. \end{cases}$$

A 2.1. definíció értelmében a \mathbf{H} mátrix abban az esetben *Toeplitz-típusú*, ha tetszőleges $0 < i, j, t, s \leq n$ esetén

$$j-i = t-s \Rightarrow h_{ji} = h_{ts}.$$

Legyen $0 < i, j, t, s \leq n$ és

1. $j-i = t-s < 0$, ekkor az (5.10) alapján

$$h_{ji} = 0 = h_{ts}.$$

2. $j-i = t-s = 0$,

$$h_{ji} \stackrel{(5.10)}{=} 1/g_0 \stackrel{(5.10)}{=} h_{ts},$$

3. $j-i = t-s = 1$, ekkor alkalmazzuk újra az (5.10) eredményeit

$$\begin{aligned} h_{ji} &= (-1/g_0) g_1 h_{j-1,i} = (-1/g_0) g_1 h_{ii} = (-1/g_0) g_1/g_0 = \\ &= (-1/g_0) g_1 h_{ss} = (-1/g_0) g_1 h_{t-1,s} = h_{ts}. \end{aligned}$$

4. Tegyük fel, hogy $0 < j - i = t - s = r - 1$ esetén

$$h_{ji} = h_{ts}.$$

5. $0 < j - i = t - s = r$.

Alkalmazzuk az indukciós feltevést és az (5.10)-et:

$$\begin{aligned} h_{ji} &= (-1/g_0) \sum_{k=1}^{j-i} g_k h_{j-k,i} = (-1/g_0) \left(\sum_{k=1}^{j-i-1} g_k h_{j-k,i} + g_{j-i} h_{ii} \right) = \\ &= (-1/g_0) \left(\sum_{k=1}^{t-s-1} g_k h_{t-k,s} + g_{t-s} h_{ss} \right) = h_{ts}. \end{aligned}$$

Így tehát a **H** mátrix valóban *Toeplitz-típusú* és ezért az (5.10) képletben a h_{ji} helyett h_{j-i} -t is írhatunk:

$$(5.11) \quad h_{j-i} = \begin{cases} 0, & 0 < j < i \leq n, \\ 1/g_0, & 0 < j = i \leq n, \\ -1/g_0 \sum_{k=1}^{j-i} g_k h_{j-k-i}, & 0 < i < j \leq n. \end{cases}$$

Ha az (5.11) képletben a $(j-i)$ helyett egy m indexváltozót alkalmazunk:

$$\begin{aligned} h_0 &= 1/g_0 \\ h_m &= -h_0 \sum_{k=1}^m g_k h_{m-k}, \quad 0 < m < n, \end{aligned}$$

akkor éppen a bizonyítandó (5.3) rekurziós képletet kapjuk.

5.1. KOROLLÁRIUM. Egy n -edrendű nonszinguláris *Toeplitz-típusú felső trianguláris mátrix* inverze is *Toeplitz-típusú felső trianguláris mátrix* lesz és az inverz mátrix első sorának elemeit a mátrix első sorának elemeiből az 5.1. tételben megadott (5.3) rekurziós képlet alapján számíthatjuk ki.

Mivel az **F** egy q -adrendű *nonszinguláris Toeplitz-típusú felső trianguláris mátrix*, a **G** pedig egy p -edrendű *nonszinguláris Toeplitz-típusú alsó trianguláris mátrix*, így az 5.1. tétel és 5.1. korollárium alapján az inverzeik is hasonló tulajdonságúak és elemeiket az (5.3) képlet felhasználásával határozhatjuk meg. Ha **h** és **s** jelöli a **G**⁻¹, ill. **F**⁻¹ mátrixok első oszlopát, ill. sorát, akkor az **M** mátrixot a következőképpen ábrázolhatjuk:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} & & \begin{matrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{q-1} \end{matrix} \\ & 0 & \begin{matrix} \diagdown & & & \\ & \diagdown & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & s_1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{p-1} \end{matrix} & \begin{matrix} \diagdown & & & \\ & \diagdown & & \\ & & \diagdown & \\ & & & \diagdown & \\ & & & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ 0 \end{matrix} \\ \hline & & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right] \begin{matrix} q \\ p \\ q \end{matrix}$$

Jól látható, hogy az M egy $(p+q)$ -adrendű *Toeplitz-típusú mátrix*.

Ha a (4.1) kiindulási egyenletrendszert megoldó „hatlépéses” eljárásnak ebben a III. lépésében az M mátrix meghatározásakor az (5.3) rekurziós képletet alkalmazzuk, akkor a mátrix kiszámításának teljes műveletszükséglete:

$$p(p+1)/2 + q(q+1)/2 = (p^2 + q^2)/2 + (p+q)/2.$$

IV. Az N mátrix meghatározása

A (4.12)-ben definiált N mátrix a B cirkuláris mátrix particionálása alapján egyszerűen meghatározható. Azonban a következő tétel alapján az is belátható, hogy a létrejött N mátrix *Toeplitz-típusú*.

5.2. TÉTEL. Legyen C egy n -edrendű cirkuláris mátrix és p , valamint q olyan pozitív egész számok, hogy $(p+q) < n$ teljesüljön. Particionáljuk a C -t a következőképpen:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & C_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_3 & & C_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ \\ q \end{matrix}$$

$q \quad p$

és készítsük el a

$$T = \begin{bmatrix} C_4 & C_3 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} q \\ p \end{matrix}$$

$p \quad q$

$(p+q)$ -adrendű mátrixot. Ekkor a kapott T mátrix *Toeplitz-típusú mátrix* lesz.

Bizonyítás. A T definíciója alapján nyilvánvaló, hogy minden T -beli elemnek van egy — vele megegyező — C -beli megfelelője. Vizsgáljuk meg, hogy mi a hozzárendelési szabály, azaz az egyes T -beli elemeknek mi a C -beli „őse”.

Osszuk fel a T -t négy blokkra a következőképpen:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} q \\ p \end{matrix}$$

$p \quad q$

és tekintsünk egy T -beli t_{ij} elemet.

A T mátrix definíciója alapján:

— ha a t_{ij} az 1. blokkban van ($0 < i \leq q, 0 < j \leq p$), akkor az eredeti C mátrixban $(i+n-q, j+n-p)$ volt az indexe, azaz

$$t_{ij} = c_{i+n-q, j+n-p}.$$

Mivel azonban a C cirkuláris, így a C -beli elem további C -beli elemekkel egyenlő, s ezért érvényes a következő képlet:

$$t_{ij} = c_{i+n-q, j+n-p} = c_{i+n-q-j-n+p} = c_{i-j+p-q},$$

— ha a t_{ij} a 2. blokkban van ($q < i \leq p+q, 0 < j \leq p$), akkor az előzőekhez hasonlóan felírhatjuk a következő egyenlőséget:

$$t_{ij} = c_{i-q, j+n-p} = c_{i-q-j-n+p} = c_{i-j+p-q},$$

— ha t_{ij} a 3. blokkbeli ($q < i \leq p+q, p < j \leq p+q$)

$$t_{ij} = c_{i-q, j-p} = c_{i-j+p-q},$$

— ha pedig t_{ij} a 4. blokkban van ($0 < i \leq q, p < j \leq p+q$)

$$t_{ij} = c_{i+n-q, j-p} = c_{i-j+p-q}.$$

Tehát függetlenül attól, hogy t_{ij} melyik blokkban van, érvényes a

$$(5.12) \quad t_{ij} = c_{i-j+p-q}$$

képlet.

Legyen $0 < i, j, k, l \leq p+q$ és

$$(5.13) \quad i-j = k-l.$$

Ekkor

$$(5.14) \quad t_{ij} \stackrel{(5.12)}{=} c_{i-j+p-q} \stackrel{(5.13)}{=} c_{k-l+p-q} \stackrel{(5.12)}{=} t_{kl}.$$

Az (5.14) egyenlőség azonban éppen azt bizonyítja, hogy a T Toeplitz-típusú mátrix.

A most bebizonyított 5.2. tétel alapján az N mátrix Toeplitz-típusú, mert kielégíti a tétel feltételeit. (Az N a (4.12) alapján a cirkuláris B mátrixból pontosan úgy keletkezik, mint az 5.2. tételben a T mátrix a C -ből.)

V. $A w$ kiszámítása

A w -t a (4.13) képlettel megadott $Rw = s$ lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. A korábbiakban már beláttuk, hogy az R együtthatómátrix nonszinguláris, és így a w -t egyszerűen megkaphatjuk a Gauss-eliminációs algoritmus alkalmazásával $O((p+q)^3)$ művelet végrehajtásával.

Azonban az eljárásunknak ebben a részében is tudunk egy hatékonyságot javító algoritmust alkalmazni, ugyanis a III. és IV. lépésben meghatározott M és N mátrixokról beláttuk, hogy $(p+q)$ -adrendű Toeplitz-típusú mátrixok, így a 3.3. lemma alapján az M és N mátrixok különbségeként definiált R mátrix is Toeplitz-típusú lesz.

Így a (4.13) egy olyan lineáris egyenletrendszer a w -re, melynek együttható-mátrixa nonszinguláris Toeplitz-típusú mátrix, s ezért a — bevezetésben említett és jelenleg az egész (4.1) egyenletrendszer megoldására használt — L—T—Z algoritmus felhasználásával a megoldásvektor $3(p+q)^2$ művelettel megkapható.

VI. Az \mathbf{x} megoldásvektor meghatározása

A (4.7) képlet alapján ebben a lépésben már csak a \mathbf{Bc} mátrix-vektor szorzást kell elvégeznünk. A kapott szorzatvektor és a \mathbf{z} összegeként a kiindulási (4.1) egyenletrendszer megoldását kapjuk.

A \mathbf{B} cirkuláris voltát kihasználva, a \mathbf{Bc} szorzást is egyszerűsíthetjük. Ugyanis

$$\mathbf{Bc} \stackrel{K^{3.1}}{=} \mathbf{b} ** \mathbf{c} \stackrel{L^{3.6}}{=} \text{IDFT}(\text{DFT}(\mathbf{b}) * \text{DFT}(\mathbf{c})).$$

A kapott képlet alapján — az FFT algoritmus alkalmazásával — a \mathbf{Bc} szorzat meghatározásának teljes műveletigénye $3n \log n + n$ lesz.

Ezek után már csak n összeadást kell végrehajtanunk az \mathbf{x} megoldásvektor meghatározásához.

Így, ha a „hatlépéses” eljárás egyes lépéseiben a most megadott algoritmusokat alkalmazzuk, akkor teljesülnek a következő tétel állításai:

5.3. TÉTEL.

(i) Az eljárás a $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nonszinguláris *Toeplitz-típusú szalagmátrix* együtthatójú lineáris egyenletrendszer megoldását számítja ki.

(ii) A megoldáshoz szükséges műveletek száma:

$$8n \log n + 3(p+q)^2 + (p^2 + q^2)/2 + O(n).$$

(iii) Az eljárás helyigénye $O(n)$.

A helyigény azért lesz csak $O(n)$, mert az eljárás során egyetlen mátrix teljes tárolására sincs szükség, minden esetben elegendő egyetlen oszlop vagy egy sor és egy oszlop elemeinek tárolása.

Az eljárás „gyorsaságát”, azaz a viszonylag kis műveletigényt az biztosítja, hogy a szükséges *diszkrét Fourier-transzformációkat* és az inverz transzformációkat is a *gyors Fourier-transzformációs algoritmussal* végezzük. Ezen eljárás alkalmazhatóságának szükséges feltétele, hogy a transzformálandó vektor komponenseinek a száma kettő hatványa legyen, azaz a megoldandó egyenletrendszer egyenleteinek a számát kettő-hatványnak kell választani. Ez azonban a felmerülő gyakorlati alkalmazások esetén nem jelent erős megkötést. (Pl. különböző mintavételeknél a minták számát tetszőlegesen választhatjuk meg.)

6. További műveletigény csökkentés minimális helyigény növeléssel

A most megadott eljárásban — nem túl jelentős memóriaigény növeléssel — a megoldáshoz szükséges műveletek számát mintegy 25%-kal tovább tudjuk csökkenteni a következőkben ismertetett módon.

Az eljárás I. lépésében a \mathbf{B} inverz mátrix meghatározása a feladat. A cirkularitás miatt csupán az első oszlopot számítjuk ki a

$$\mathbf{b} = \text{IDFT}(\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{t}))$$

képlettel három lépésben:

- a) $\text{DFT}(\mathbf{t})$ kiszámítása,
- b) $\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{t})$ meghatározása,
- c) $\text{IDFT}(\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{t}))$ kiszámítása.

A b) lépés után kapott érték a 3.5. lemma alapján nem más, mint a DFT (**b**), ugyanis

$$\mathbf{b} = \text{IDFT}(\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{t})) \stackrel{\text{L3,5}}{\Leftrightarrow} \text{DFT}(\mathbf{b}) = \mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{t}).$$

Ezen észrevétel alapján érthetjük el a műveletigény csökkentését a következő módon: Az eljárás I. lépésének végrehajtása közben helyezzük el egy n -elemű tömbbe az

$$\mathbf{1} * \text{DFT}(\mathbf{t}) [= \text{DFT}(\mathbf{b})]$$

vektor elemeit.

Az eljárás II. lépésében a \mathbf{z} vektort kell meghatározoznunk a

$$\mathbf{z} = \text{IDFT}(\text{DFT}(\mathbf{y}) * \text{DFT}(\mathbf{b}))$$

képlet alapján. Mivel azonban a korábbi számítások során már meghatározott és eltárolt DFT (**b**) érték a rendelkezésünkre áll, így a \mathbf{z} meghatározásának menete során a DFT (**b**) érték kiszámításától eltekinthetünk, s így a szükséges műveletigény az eljárás II. lépésében nem $3n \log n + n$, hanem csak $2n \log n + n$ lesz.

Teljesen hasonlóan tudunk a VI. pont végrehajtásakor is — szintén a rendelkezésre álló DFT (**b**) segítségével — további $n \log n$ műveletigény csökkentést elérni. Így tehát a megoldási algoritmus teljes műveletigényét $8n \log n + 3(p+q)^2 + (p^2+q^2)/2 + O(n)$ -ről

$$(6.1) \quad 6n \log n + 3(p+q)^2 + (p^2+q^2)/2 + O(n)$$

értékre tudtuk redukálni a tárolóigény minimális (n -szóval történő) növelésével

7. A jelenleg használt algoritmusok és a bemutatott eljárás összehasonlítása

A $\mathbf{T}\mathbf{x}=\mathbf{y}$ Toeplitz-típusú szalagmátrix együtthatójú lineáris egyenletrendszerek megoldására jelenleg a Gauss-eliminációt vagy az L—T—Z algoritmust használják. Hasonlítsuk most össze ezeket az algoritmusokat a most megadott eljárással a szükséges műveletigény alapján. Az egyes értékek a következők:

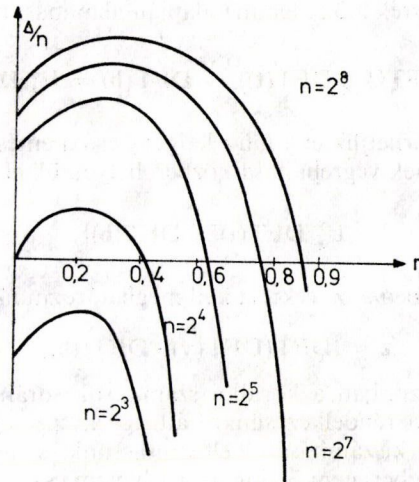
$$(7.1) \quad \text{Gauss elimináció: } npq,$$

$$(7.2) \quad \text{L-T-Z algoritmus: } 1,5n^2 - 1,5(p+q)^2/4 + 3n(p+q)/2 + O(n),$$

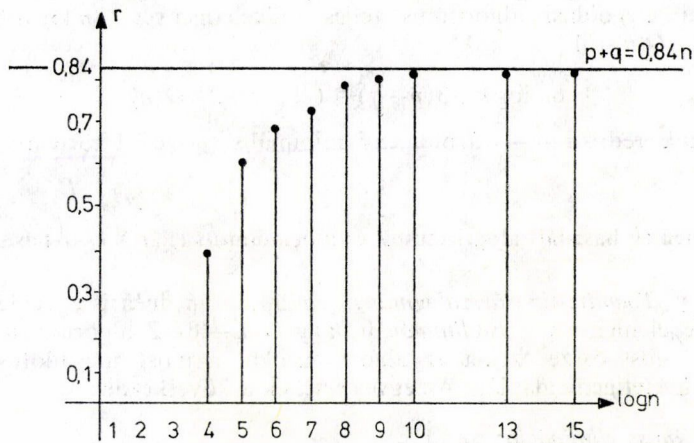
$$(7.3) \quad \text{a bemutatott eljárás: } 6n \log n + 3(p+q)^2 + (p^2+q^2)/2 + O(n).$$

Jelöljük d -vel a \mathbf{T} együtthatómátrix szalagszélességét $(p+q)$ -t, valamint r -rel a relatív szalagszélességet (d/n) -t és vizsgáljuk meg, hogy milyen n és d értékek mellett lesz a bemutatott eljárásunk hatékonyabb az L—T—Z algoritmusnál.

A 1. ábrán a megadott eljárásunk és az L—T—Z algoritmus relatív műveletigény különbségét ábrázoltuk a relatív sávszélesség függvényében különböző n értékek esetén. Az ábráról jól látszik, hogy az $n=16$ -hoz tartozik az első olyan különbség görbe, amelynek már vannak pozitív értékei is, azaz $n=2^4$ esetén már van olyan p és q , amelyekre az eljárásunk hatékonyabb lesz az L—T—Z algoritmusnál.



1. ábra



2. ábra

A 2. ábrán az egyes n értékekhez tartozó „megfelelő” relatív sávzélességeket ábrázoltuk, azaz az egyes n , ill. $\log n$ pontokhoz tartozó függőleges szakaszok olyan intervallumokat jelölnek, amelyekbe ha beleesik a $(p+q)/n$ értéke, akkor az eljárásunkat már érdemes alkalmazni. Erről az ábráról jól látszik, hogy $n=2^4$ -hez tartozik az első függőleges szakasz, mégpedig olyan, hogy az $r=0$ és $r=0,4$ közötti pontok tartoznak bele, tehát ha $0 < p+q \leq 6$, akkor már érdemes az új módszert használni. A 12. ábra függőleges szakaszainak végpontjait a (7.3) és (7.2) műveletigény-értékek különbsége alapján származtatott

$$(7.4) \quad y(n) = \frac{6 + 2\sqrt{6(21 - 62 \log n/n)}}{31}$$

függvény értékei szolgáltatják. Mind a (7.4) képlet, mind pedig a 2. ábra alapján látható, hogy az n növekedésével a „megfelelő” p és q értékek is nőnek egészen $r=0,84$ -ig, azaz ha n elég nagy, akkor minden $0 < p+q \leq 0,84 n$ esetén érdemes a dolgozatban megadott eljárást alkalmazni.

A (7.3) és (7.2) értékek alapján az is látszik, hogy ha n elég nagy és p, q kicsi, akkor igen jelentős lesz a műveletigények eltérése, ugyanis

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \ll n}} \frac{1,5n^2 - 1,5d^2/4 + 1,5nd}{6n \log n + 7d^2/2} = \infty.$$

Így például, ha $n=2^{12}$ és $p=q=2^7$, akkor a (7.1), (7.2) és (7.3) érték 2^{26} , $3 \cdot 2^{23}$ és 2^{19} lesz, tehát az eljárásunk a Gauss-eliminációnál mintegy 120-szor az L—T—Z algoritmusnál pedig kb. 50-szer gyorsabb ebben az esetben.

Az eljárásnak — a korábbiaknál kisebb műveletidő szükséglete mellett — további előnye az általános (eliminációs, iterációs) eljárásokkal szemben, hogy kihasználja az együtthatómátrix *Toeplitz-tulajdonságát* és nem tárolja az egész mátrixot csupán annak első sorát és oszlopát, és így igen komoly tárolóigény csökkentést biztosít. Ez azért jelentős, mert nagyméretű egyenletrendszerek esetén az egész együtthatómátrix már „nem fér el” az operatív memóriában, ezért általában az eliminációs és iterációs eljárások csak disc terület igénybevételével hajthatók végre, viszont a disc-hez fordulások miatt lényegesen lassul a megoldás meghatározásának menete. A helyigény az eliminációs és iterációs eljárásoknál $O(n^2)$, míg algoritmusunk esetében ez az érték csak $O(n)$ lesz.

A most megadott eljárás komoly korlátjának tűnhet, hogy szemben a korábbi algoritmusokkal a kiindulási egyenletrendszer megoldhatóságához most nem csak a T együtthatómátrix nonszingularitása szükséges, hanem a T cirkuláris kiterjesztésével keletkezett T_c mátrixnak is nonsingulárisnak kell lenni, és annak eldöntése, hogy egy mátrix szinguláris-e vagy sem, nem egyszerű feladat. Azonban a 3. részben megadott 3.7. lemma hatékony eszközt ad a probléma megoldására. Mivel a T_c cirkuláris, így a lemma eredményei alapján egyetlen FFT végrehajtásával el tudjuk végezni a T_c tesztelését.

A bemutatott eljárás egyes lépéseinek a leírása alapján látszik, hogy a szükséges műveletvégzés szinte kizárólag csak FFT-k és inverz FFT-k végrehajtásából áll. Ez azért kedvező és azért teszi még indokoltabbá az eljárás alkalmazását, mert az FFT-ket egyre gyakrabban a hardware segítségével hajtják végre [4, 14] és így a műveletszám további jelentős redukálása érhető el.

8. Az eljárás számítógépes implementációja

Mivel elkészült a dolgozatban bemutatott eljárás FORTRAN nyelvű implementációja és rendelkezésre állt az L—T—Z algoritmus S. ZOHAR által közölt programja [16], így lehetőség nyílt az eredmények gyakorlati ellenőrzésére is.

A következő táblázat — IBM 370/145 gépen futtatott — programok különböző méretű (4.1) típusú egyenletrendszerek megoldásához szükséges kerekített műveletidőit (CPU idő) tartalmazza.

1. TÁBLÁZAT

| N ($p=q=12$) | Gauss-elimináció | | L—T—Z algoritmus | | A bemutatott eljárás | |
|-------------------|------------------|----|------------------|----|----------------------|----|
| | perc | mp | perc | mp | perc | mp |
| 32 | | 4 | | 1 | | 1 |
| 128 | 2 | 59 | | 9 | | 2 |
| 256 | 23 | 11 | | 32 | | 3 |
| 512 | | | 2 | 01 | | 6 |
| 1024 | | | 8 | 03 | | 11 |

IRODALOM

- [1] AHO, V., HOPCROFT, E. and ULLMANN, J., *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, (Addison Wesley, 1975).
- [2] ANGEL, E. and BELLMANN, R., *Dynamic Programming and Partial Differential Equations*, (New York, Academic, 1971).
- [3] BRIGHAM, E. O., *The Fast Fourier Transform* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974).
- [4] DESPAIN, A. M., "Very fast Fourier transform algorithms hardware for implementation", *IEEE Trans. on Computers* 1979, 333—341.
- [5] FARDEN, D. C. and SCHARF, L. L., "Statistical design of digital filter", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing* 1970, 188—198.
- [6] GRAY, R. M., "Toeplitz and circulant matrices: A review", *Stanford University, Stanford, CA, Tech. Rep.*, 1970.
- [7] JAIN, A. K., "An operator factorisation method for restoration of blurred images", *IEEE Trans. on Computers* 1977, 1061—1071.
- [8] JAIN, A. K., "Fast inversion of banded Toeplitz matrices by circular decompositions", *IEEE Trans. Acoust, Speech, Signal Processing* 1978, 121—126.
- [9] LEVINSON, N., "The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction", *J. Math. Phys.* 1947, 261—278.
- [10] MÓRICZ, F., *Numerikus analízis II. Egyetemi jegyzet* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1975).
- [11] PREIS, D., "The Toeplitz matrix: its occurrence in antenna problems and a rapid inversion algorithm", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* 1972, 204—207.
- [12] RÓZSA, P., *Lineáris algebra és alkalmazásai*, (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974).
- [13] TRENCH, W. F., "Inversion of Toeplitz band matrices" *Math. Comp.* 1974, 1089—1095.
- [14] WHITEHOUSE, H. J., MEANS, R. W. and SPEISER, J. M., "Signal processing using transversal filter technology" *Naval Undersea Center, San Diego, CA, Tech. Rep.*, 1975.
- [15] ZOHAR, S., "The solution of a Toeplitz set of linear equations", *J. ACM* 1974, 272—276.
- [16] ZOHAR, S., "Fortran subrutines for the solution of Toeplitz sets of linear equations", *IEEE Trans. Acoust, Speech, Signal Processing* 1979, 656—657.

(Beérkezett: 1982. január 15.)

BECK GYÖRGY
SZÁMÍTÁSTECHNIKA-ALKALMAZÁSI VÁLLALAT
1015 BUDAPEST I., CSALOGÁNY U. 30—32.

FAST ALGORITHM FOR THE SOLUTION OF BANDER TOEPLITZ SETS OF LINEAR EQUATIONS

GY. BECK

Banded Toeplitz matrices of large size occur in many practical problems. Here the problem of solving linear equations of the type $Tx=y$ when T is a *banded Toeplitz matrix*, is considered. It is shown by circular extension of T that such equations may be solved in $O(n \log_2 n)$ computations in comparison with $O(n^2)$ computations of the algorithms known up to the present. In particular the advantage of the presented algorithm is realized for those applications where the coefficient matrix of the linear equations is large scale, sparse Toeplitz matrix. With hardware implementation of the *fast Fourier transform* algorithm applied in our method the computation time becomes proportional to n rather than $n \log_2 n$.

MEGJEGYZÉSEK A RELÁCIÓS ADATBÁZIS MODELLEKBEŒ ÉRTELMEZETT FÜGGŐSÉGI RELÁCIÓKHOZ

SCHMIDT E. TAMÁS

Budapest

Az E. F. CODD által bevezetett funkcionális függőséggel az utóbbi időben több hazai szerző is foglalkozott (lásd pl. BÉKÉSSY ANDRÁS—DEMETROVICS JÁNOS [1], CZÉDLI GÁBOR [2, 3], DEMETROVICS JÁNOS [4, 5]). Több figyelemre méltó új eredmény mellett a témakör összesítését nyújtja DEMETROVICS JÁNOS cikke. Ez utóbbi keltette fel érdeklődésemet és arra sarkallt, hogy néhány általánosítási lehetőségre rámutassak. Remélhetőleg e megjegyzéseim az alkalmazások szempontjából sem lesznek érdektelenek. Mindenekelőtt egy célszerű segédeszköz bevezetésével kezdem, ez az ún. lezárási operátor.

1. Lezárási operátorokról általában

Legyen Ω egy tetszőleges véges halmaz, az ún. attributum halmaz. Ennek bizonyos részhalmazából álló rendszert röviden halmazrendszernek szokás nevezni. Ezek közül az egyik legfontosabb, amely Ω összes részhalmazát tartalmazza, neve hatványhalmaz és leggyakoribb jelölése $P(\Omega)$. Ezen két kétváltozós műveletet a halmazelméleti metszetet, $X \cap Y$ és egyesítést $X \cup Y$, továbbá egy egyváltozós műveletet a komplementumképzést, X' szokás értelmezni. Ezekre nézve $P(\Omega)$ egy algebrai struktúra, ún. *Boole-algebra*.

A halmazrendszerek között fontosak azok az F halmazrendszerek, amelyek egyrészt tartalmazzák Ω -t és zártak a halmazelméleti metszésre nézve, azaz ha $X, Y \in F$, úgy $X \cap Y \in F$. (Ha Ω végtelen, úgy megköveteljük, hogy tetszőleges sok F -beli X_i részhalmaz metszete, $\cap X_i$ is legyen F -ben.) Ezen tulajdonsággal rendelkező halmazrendszereket *lezárási rendszernek* nevezzük. Ha X az Ω egy tetszőleges részhalmaza és F egy lezárási rendszer Ω -án, úgy tekinthetjük mindazon $Y_i \in F$ halmazokat, amelyekre $X \subseteq Y_i$. Mivel F a metszésre nézve zárt, ezek metszete $\bar{X} = \cap Y_i$ ugyancsak eleme F -nek és tartalmazza X -et. \bar{X} nyilván a legszűkebb ilyen tulajdonságú részhalmaz és az X által egyértelműen meghatározott. Az $X \rightarrow \bar{X}$ megfeleltetés tekinthető tehát egy operátornak, amely az $X \subseteq \Omega$ -hoz az Ω -nak egy \bar{X} részhalmazát rendeli hozzá, azaz $X \rightarrow \bar{X}$ a $P(\Omega)$ -n egy művelet. Ez a hozzárendelés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- (i) $X \subseteq \bar{X}$ (extenzív),
- (ii) ha $X \subseteq Y$ úgy $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$ (monoton),
- (iii) $\bar{\bar{X}} = X$ (idempotens).

•Megfordítva, tegyük fel, hogy van egy $X \rightarrow \bar{X}$ operátorunk, amely az Ω X részhalmazához az \bar{X} részhalmazt rendeli hozzá oly módon, hogy a fenti (i)—(iii) tulajdonságok teljesülnek. Állítjuk, hogy ekkor ez az operátor meghatároz egy

F lezárási rendszert, amelyhez a fenti módon rendelt lezárási operátor az adott operátor. Álljon F mindazon X részhalmazokból, amelyekre $\bar{X}=X$, ezek az ún. zárt halmazok. Belátjuk, hogy ez lezárási rendszer. (i) miatt $\Omega \subseteq \bar{\Omega}$, azaz $\bar{\Omega}=\Omega$ és így $\Omega \in F$. Legyenek $X_i \in F$, azaz $\bar{X}_i=X_i$. Ekkor $\cap X_i$ -re a következőt kapjuk. Egyrészt az (ii) tulajdonság miatt $\cap X_i \subseteq \overline{\cap X_i}$. Másrészt nyilván $\cap X_i \subseteq X_i$, így (ii) alapján $\overline{\cap X_i} \subseteq \bar{X}_i=X_i$ (ez utóbbi az $X_i \in F$ feltevés miatt). Ez teljesül minden i -re, azaz $\overline{\cap X_i} \subseteq \cap X_i$. A két tartalmazás összetevéséből adódik $\overline{\cap X_i}=\cap X_i$, azaz $\cap X_i \in F$.

Legyen F egy lezárási rendszer. Ennek elemei (tehát a zárt részhalmazok) a halmazelméleti tartalmazásra nézve egy részben rendezett halmazt alkotnak. Ha $A, B \in F$, úgy $A \cap B$ eleme F -nek, ami azt jelenti, hogy ezen részben rendezett halmazban bármely két elemnek létezik legnagyobb alsó korlátja, azaz infimuma, (az A és B infimuma $A \cap B$). Állítjuk, hogy bármely két elemének, A -nak és B -nek létezik legkisebb felső korlátja (ún. supremuma) is. (Ez általában nem egyezik meg $A \cup B$ -vel. Álljon F a sík konvex részhalmazából, akkor $A \cup B$ nyilván nem szűkségképp konvex.) Könnyű látni, hogy $A \cup B$ lezártja, azaz $\overline{A \cup B}$ nem más, mint az A és B supremuma, amit az \cup -tól való megkülönböztetés érdekében $A \vee B$ -vel jelölünk. Azt kaptuk, hogy F egy olyan részben rendezett halmaz, amely bármely két elemének létezik infimuma és supremuma. Az ilyen részben rendezett halmazt *hálónak* nevezik. Könnyű kimutatni, hogy minden véges háló egy alkalmas Ω halmazon értelmezett lezárási rendszer: legyen L egy háló, minden a eleméhez rendeljük hozzá L -nek azt az $\langle a \rangle$ részhalmazát, amely az a -nál kisebb vagy egyenlő elemekből áll (ún. főideál). Ezek egy lezárási rendszert alkotnak.

Speciális lezárási rendszer, amely zárt az egyesítésre nézve, az illet topologikus lezárási rendszernek nevezzük. Ezek a legkönnyebben kezelhetők és azzal jellemezhetők, hogy eleget tesznek az ún. disztributivitásnak, azaz

$$A \vee (B \cap C) = (A \vee B) \cap (A \vee C).$$

2. Relációk által indukált lezárási operátorok

Induljunk ki ismét az Ω halmazból, amelynek elemeit célszerű az $1, 2, \dots, n$ számokkal jelölni. Ennek az az előnye, hogy ily módon az Ω elemeit rendezettnek tekinthetjük. Tegyük fel, hogy minden $i \in \Omega$ -hoz hozzárendelve egy T_i halmaz és képezzük ezek ún. *Descartes-szorzatát*, $\prod T_i = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n$ -et, ami azon (a_1, \dots, a_n) elem n -esek (vektorok) halmaza, amelyekre $a_i \in T_i$. Ω -feletti relációk a $\prod T_i$ részhalmazai. Egy $R \subseteq \prod T_i$ Ω feletti reláció tehát bizonyos (a_1, \dots, a_n) vektorok halmaza. (Szokás e vektorokat mint függvényeket felfogni, értelmezési tartomány Ω , és $i \in \Omega$ helyen a függvény értéke a_i .) Egy adott R relációhoz többféleképpen rendelhetünk hozzá Ω -n lezárási operátort. Ezek közül kétségtelenül az egyik legegyszerűbb az E. F. CODD által bevezetett ún. *funkcionális függés* (lásd [5], 5. old.), amelyet itt rögtön a lezárási operátor fogalmával adunk meg.

1. DEFINÍCIÓ. Ha $A \subseteq \Omega$, úgy $\bar{A} = \{x \in \Omega; (\forall f, g \in R)((\forall a \in A)(h(a) = g(a))) \Rightarrow (h(x) = g(x))\}$.

Szóban: Ha f és g az R -nek mindazon elempárjain végigfut, amelyek az A -n megegyeznek, úgy az \bar{A} a legnagyobb olyan halmaz, amelyen ezen f, g párok megegyeznek.

Nyilvánvaló, hogy az $A \rightarrow \bar{A}$ megfeleltetés rendelkezik a (i)—(iii) tulajdonságokkal, azaz lezárási operátor.

Első kézenfekvő kérdés, hogy rendelkezik-e ez az operátor valamilyen speciális tulajdonsággal? A válasz nemleges. Legyen ugyanis F egy tetszőleges lezárási rendszer Ω -n. Feltehetjük, hogy minden T_i kételemű, és elemeit jelölje 0, ill. 1. (Pontosabban 0_i , ill. 1_i -vel kellene jelölnünk, de az hogy ezek a vektorban hányadik helyen — ti. az i -edik helyen — állnak megadja, hogy mely T_i -hez tartoznak.) A $\prod T_i$ szorzat tehát 0, ill. 1-et tartalmazó n -esek összessége. Ha $A \in F$, úgy vegyük ennek úgynevezett karakterisztikus függvényét, $h(A) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ -t, ahol $a_i = 1$, ha $i \in A$ és $a_i = 0$, ha $i \notin A$. Álljon az R reláció az összes $A \in F$ -hez tartozó $h(A)$ karakterisztikus függvényekből és az azonosan 1 vektorból, $((1, 1, \dots, 1))$. Ezen relációhoz tartozó lezárási operátornál a zárt halmazok éppen az F halmazrendszer elemei lesznek.

1. ÁLLÍTÁS. Bármely F véges hálózathoz található olyan n természetes szám és $R \subseteq 2^n$ reláció, hogy az R által indukált lezárási rendszer éppen F .

A fentiekben tehát egy módszert adtunk meg arra, hogyan lehet adott lezárási rendszerhez olyan R Ω -feletti relációt találni, amelyhez a *Codd-féle függőségi reláció* épp az adott lezárási rendszert rendeli hozzá. Természetesen a T_i halmazok tetszőlegesen változtathatók és ez alkalmazásoknál néha célszerű is.

Néhány további megjegyzést teszünk a függőségi relációval kapcsolatban. Egy $A \rightarrow \bar{A}$ lezárási operátort nyilván jellemezhetünk azáltal is, hogy megmondjuk mely (A, B) párokra lesz $B \subseteq \bar{A}$. Ezen (A, B) halmazpárokat azután jellemezhetjük axiomatikusan. Egy ilyen jellemzést ad meg W. W. ARMSTRONG, amelyet *φ -axiómarendszernek* nevezünk:

2. DEFINÍCIÓ: Az F' halmazrendszer akkor elégíti ki a φ -axiómarendszert, ha a következők teljesülnek:

$$(F1) \quad (A, A) \in F',$$

$$(F2) \quad \text{ha } (A, B) \in F', (B, C) \in F', \text{ úgy } (A, C) \in F',$$

$$(F3) \quad \text{ha } (A, B) \in F', C \supseteq A, D \subseteq B, \text{ akkor } (C, D) \in F',$$

$$(F4) \quad \text{ha } (A, B) \in F' \text{ és } (C, D) \in F', \text{ úgy } (A \cup C, B \cup D) \in F'.$$

2. ÁLLÍTÁS. Legyen $A \rightarrow \bar{A}$ egy egyváltozós függvény $P(\Omega)$ -n és legyen F' mindazon (A, B) párok összessége, amelyre $B \subseteq \bar{A}$. Ekkor $A \rightarrow \bar{A}$ pontosan akkor lezárási operátor, ha F' eleget tesz az (F1)—(F4) axiómáknak.

Az állítás igen egyszerűen igazolható:

Legyen ugyanis $A \rightarrow \bar{A}$ egy tetszőleges lezárási operátor Ω -n, és jelölje F' mindazon (A, B) párok összességét, amelyekre $B \subseteq \bar{A}$. Ekkor (i) miatt $(A, A) \in F'$, tehát teljesül (F1). Ha $(A, B), (B, C) \in F'$, azaz $B \subseteq \bar{A}$ és $C \subseteq \bar{B}$, (ii) és (iii) felhasználásával kapjuk, hogy $C \subseteq \bar{B} \subseteq \bar{\bar{A}} = \bar{A}$, azaz $(A, C) \in F'$, miként azt (F2) állítja. Legyen $(A, B) \in F'$ és $C \supseteq A, D \subseteq B$. Ekkor (ii) miatt $C \supseteq A$ -ból $\bar{C} \supseteq \bar{A}$ adódik, tehát $D \subseteq B$ figyelembevételével egyben $D \subseteq \bar{A}$ és $\bar{A} \subseteq \bar{C}$, így $D \subseteq \bar{C}$, azaz $(C, D) \in F'$; teljesül (F3) is. Végül (F4)-et igazolandó legyen $(A, B) \in F', (C, D) \in F'$, azaz $B \subseteq \bar{A}$ és $D \subseteq \bar{C}$. Ekkor $B \subseteq \bar{A} \subseteq \overline{A \cup C}$ az (ii) miatt. Hasonlóan $D \subseteq \overline{A \cup C}$,

azaz $B \cup D \subseteq \overline{A \cup C}$, ami ekvivalens az $(A \cup C, B \cup D) \in F'$ állítással. Megfordítva, tegyük fel, hogy valamely $—: P(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$ operátorra az $F' = \{(A, B) | B \subseteq \bar{A}\}$ φ -rendszer. Mivel (F1) szerint $(A, A) \in F'$, definíció szerint $A \subseteq \bar{A}$, azaz (i) teljesül.

Ha $A \subseteq B$, $(A, \bar{A}) \in F'$, így (F3) miatt $(B, \bar{A}) \in F'$, amit \bar{B} definíciójával egybevetve kapjuk, hogy $\bar{A} \subseteq \bar{B}$, tehát teljesül (ii). Végül (iii) az (F2) átfogalmazása. Ezzel igazoltuk *Armstrong tételét*.

Relációk egyenlőség-halmazát gyakran használjuk algebrai vizsgálatokban (pl. *Boole-hatvány*) és ugyancsak előfordul DEMETROVICS JÁNOS értekezésében is. Ennek értelmezése a következő: ha $h, g \in R$, úgy

$$E(h, g) = \{i \in \Omega; h(i) = g(i)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az egyenlőség-halmazok zárt halmazok az R által indukált lezárási operátornál, azaz a funkcionális függőségnél. A megfordítás azonban nem igaz, nem minden zárt halmaz egyenlőség-halmaz, amit a következő példa mutat: $\Omega = 3$ és R elemei $h_1 = (1, 1, 1)$, $h_2 = (1, 1, 0)$, $h_3 = (1, 0, 0)$, $h_4 = (0, 0, 0)$, ekkor $E(h_1, h_2) = \{1, 2\}$, $E(h_3, h_4) = \{2, 3\}$, így $E(h_1, h_2) \cap E(h_3, h_4) = \{2\}$ zárt, de ez nem egyenlőség-halmaz. Természetesen az R bővíthető úgy, hogy minden zárt halmaz egyenlőség-halmaz legyen, ha valamely A zárt halmazhoz definiálunk két h, g vektort, amelyek pontosan az A -n egyeznek meg.

Térjünk vissza funkcionális függés definíciójára (1. definíció), akkor láthatjuk, hogy

$A \subseteq \Omega$ pontosan akkor zárt, ha $\forall x \notin A$ -hoz létezik olyan $h_x, g_x \in R$, amelyekre $h_x(x) \neq g_x(x)$, de $h_x(a) = g_x(a) \forall a \in A$ -ra.

Ebből nyilvánvaló, hogy $x \notin E(h_x, g_x)$ és $A \subseteq E(h_x, g_x)$, tehát $E(h_x, g_x)$ „szeparálja” A -t és x -et. Ezzel bizonyítottuk a következő állítást:

3. ÁLLÍTÁS. Minden A zárt halmaz előállítható $A = \bigcap_{x \notin A} E(h_x, g_x)$ alakban, azaz az egyenlőség-halmazok a metszet művelettel generálják az összes zárt halmazt.

Tekintettel arra, hogy az $E(h_x, g_x)$ halmazok maguk is zártak, kapjuk a következőt:

4. ÁLLÍTÁS. Ha A metszet — irreducibilis zárt halmaz (azaz nem állítható elő két tőle különböző zárt halmaz metszeteként), úgy A egyenlőség-halmaz, azaz léteznek olyan $f, g \in R$ vektorok, amelyekre $A = E(f, g)$.

Legyen F az Ω -án értelmezett lezárási rendszer. Mint láttuk, az egy háló.

5. ÁLLÍTÁS. Tetszőleges E halmazrendszerre, melyre $\emptyset \in E \subseteq P(\Omega)$ létezik olyan R Ω -feletti reláció, hogy az egyenlőség-halmazok pontosan az E elemei.

Bizonyítás. Egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy minden T_i $2k$ -elemű, $T_i = \{1, 2, \dots, 2k\}$, ahol k az E elemeinek a száma. Indexeljük meg az E elemeit: A_1, \dots, A_k . Legyen $g_j \in \Pi T_i$ az azonosan j függvény. Legyen $g_{A_j} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ a következő: $a_i = j$, ha $i \in A_j$ és $a_i = j+k$, ha $i \notin A_j$. Így $E(g_j, g_{A_j}) = A_j$ és $E(g_{A_i}, g_{A_j}) = \emptyset$, ha $i \neq j$.

[5] alapján egy \mathcal{A} halmazrendszert Δ -rendszernek nevezünk, ha bármely $A, B, C, D \in \mathcal{A}$, $A \neq B$, $C \neq D$ esetén $A \cap B = C \cap D$. Ennek megfelelően egy háromelemű halmazrendszer $\{A, B, C\}$ Δ -rendszer, ha $A \cap B = A \cap C = B \cap C$. Ilyen például az $\{E(h, g), E(h, f), E(g, f)\}$ rendszer ([5], 2.2. tétel). Legyen E egy lezárási rendszer,

amely legnagyobb elemét jelölje l . Belátjuk, hogy ekkor E elemét elláthatjuk kettős indexekkel $E_{i,j}$ $1 \leq i < j \leq k$ úgy, hogy minden $1 \leq i < j < l \leq k$ indexekre $\{E_{ij}, E_{ii}, E_{jj}\}$ Δ -rendszer. Számozzuk meg az E elemeit úgy, hogy l mellé 1-et írunk és a többi elem $2, 3, \dots, n$. Az $i \wedge j$ elemet jelölje E_{ij} ($i \neq j$).

Így minden az l -től különböző elemhez hozzárendelhetünk legalább egy E_{ij} jelet, ahol $1 \leq i < j \leq n$. Legyen $i < j < l$, ekkor $E_{i,j} \wedge E_{i,l} = (i \wedge j) \wedge (i \wedge l) = i \wedge (j \wedge l) \cong E_{j,l}$, azaz Δ -rendszer.

Megjegyzés. Az F lezárási rendszer elemei, tehát az \bar{A} alakú halmazok pontosan azok, amelyekre — [5] terminológiáját használva — (A, \bar{A}) maximális függése az F rendszernek. A maximális jobb oldalak $I(F)$ halmaza pontosan az F . Az A halmaz az F kulcsa azt jelenti, hogy $\bar{A} = \Omega$.

Különösen szemléletes az egyenlőség-halmaz, ha a T_i halmazok valamennyien kételeműek. Ekkor tehát a 0, 1-esekből álló elem n -eseket tekintjük, amelyek száma 2^n , és egy *Boole-algebrát* alkotnak. Az Ω i elemét azonosíthatjuk azzal az elem n -essel, amelyben csak az i -edik helyen áll 1. Legyen $g, h \in 2^n$, ekkor

$$E(g, h) = (g \wedge h) \vee (g' \wedge h'),$$

ahol \wedge, \vee a *Boole-algebra* műveletei (pl. $n=3$, $g=(1, 1, 0)$, $h=(0, 1, 1)$). Így $g'=(0, 0, 1)$, $h'=(1, 0, 0)$ és $E(g, h)=(0, 1, 0) \vee (0, 0, 0)=(0, 1, 0)$. Speciálisan, ha $g=h$, úgy $E(g, g)=(g \wedge g) \vee (g' \wedge g')=g \vee g'=\Omega$.

CZÉDLI GÁBOR [3] dolgozatában vezette be a d -függést: $A \xrightarrow{d} B$ akkor és csakis akkor, ha minden $f, h \in R$ -re

$$(\exists a \in A)(g(a) = h(a)) \Rightarrow (\exists b \in B)(g(b) = h(b)).$$

Tekinthetjük ismét azon (A, B) párokat, amelyekre $B \xrightarrow{d} A$. Mint azt CZÉDLI kimutatta, e párok ugyanazokkal az axiómákkal jellemezhetők, mint a funkcionális függés eset, kiegészítve azzal, hogy (\emptyset, A) esetén $A = \emptyset$, azaz, hogy $\bar{\emptyset} = \emptyset$. Így ez a függés is tárgyalható a lezárási operátor segítségével.

3. Általános funkcionális függés

Az előbbieken halmazok $T_1 \times \dots \times T_n$ *Descartes-szorzatát* képeztük és a funkcionális függés megállapításánál azt vizsgáltuk, hogy $f, g \in T_1 \times \dots \times T_n$ vektorok, mely i komponenseken egyeznek meg. Itt tehát a T_i -n az egyenlőség relációit tekintettük és ezek határozták meg az $R \subseteq T_1 \times \dots \times T_n$ relációval együtt az $A \rightarrow \bar{A}$ lezárási operátort. Nos, az általánosítás kézenfekvő: tekintsünk a T_i -halmazokon tetszőleges ϱ_i binér relációkat. Pl. ϱ_i lehet a rendezés, ekvivalencia stb. Így kapjuk a következőt:

3. DEFINÍCIÓ. Legyen minden $1 \leq i \leq n$ -re ϱ_i valamely a T_i halmazon értelmezett binér reláció. Legyen továbbá $R \subseteq \prod T_i$ egy reláció Ω felett. Ha $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, úgy legyen

$$\bar{A} = \{i; i \in n, (f, g \in R)((\forall j \in A; h(j) \varrho_j g(j)) \Rightarrow h(i) \varrho_i g(i))\}.$$

Amennyiben a ϱ_i -k ekvivalenciarelációk, úgy képezhetjük a T_i/ϱ_i faktorhalmazokat, illetve értelmezhetünk ΠT_i -n egy ekvivalenciarelációt:

$$(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)\varrho(b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n)$$

akkor és csakis akkor, ha $a_i\varrho_i n_i$ minden i -re.

Ekkor $\Pi T_i/\varrho_i$ megegyezik a $\Pi T_i/\varrho$ faktorhalmazzal, pontosabban létezik egy természetes bijekció. Mivel R a ΠT_i részhalmaza, tehát képezhető R/ϱ is. Nyilvánvaló, hogy az R által indukált lezárási rendszer megegyezik az R/ϱ által indukálttal.

Gyakorlati alkalmazások szempontjából érdekesnek tűnik, ha a ϱ_i relációk rendezési relációk vagyis, ha a T_i halmazok részben rendezett halmazok.

Más lehetőség, ha az egyes T_i -k algebrai struktúrák, vagy parciális struktúrák, ekkor olyan ϱ_i relációkat tekinthetünk, amelyek a műveletekkel kompatibilisek, tehát ha $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ egy művelet T_i -n és $x_1\varrho_i y_1, x_2\varrho_i y_2, \dots$; akkor egyszersmind $f(x_1, \dots, x_k)\varrho_i f(y_1, \dots, y_k)$.

IRODALOM

- [1] BÉKÉSSY, A. and DEMETROVICS, J., "Contribution to the theory of data base relation", *Discrete Math.* 27 (1979) 1—10.
- [2] CZÉDLI, G., „Függőségek relációs adatbázis modellben”, *Alk. Mat. Lapok* 6 (1980).
- [3] CZÉDLI, G., „ d -dependency structures in the relational model of data”, *Acta Cybernetica* 5 (1980) 49—57.
- [4] DEMETROVICS, J., „Relációs adatbázis modell”, *MTA SZTAKI Közlemények* 20 (1980) 21—33.
- [5] DEMETROVICS, J., Relációs adatmodell logikai és strukturális vizsgálata, Doktori értekezés, 1980.

(Beérkezett: 1981. november 26.)

SCHMIDT E. TAMÁS
MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET
1053 BUDAPEST, REÁLTANODA U. 13—15.

REMARKS ON DEPENDENCE RELATIONS IN RELATIONAL DATABASE MODELS

E. T. SCHMIDT

Nowadays many authors in Hungary (A. BÉKÉSSY and J. DEMETROVICS [1], G. CZÉDLI [2, 3], J. DEMETROVICS [4, 5]) deal with the functional dependence introduced by E. F. CODD. The paper by J. DEMETROVICS in addition to many new remarkable results gives the summary of the theme. I was stimulated by this paper to show some possibilities of the generalizations. I hope my remarks shall have some importance in point of view of the applications, too.

A RELÁCIÓS ADATBÁZIS EXTREMÁLIS PROBLÉMÁI

DEMETROVICS JÁNOS és KATONA GYULA

Budapest

A dolgozatban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy mit lehet mondani egy mátrix funkcionális függéseinek kombinatorikus bonyolultságáról.

Bebizonyítjuk, hogy a minimális kulcsok rendszere *Sperner-rendszer* és hogy minden *Sperner-rendszer* reprezentálható egy mátrixszal, mint minimális kulcsok rendszere. Becsléseket adunk adott *Sperner-rendszert* reprezentáló reláció sorainak a számára, valamint aszimptotikusan pontosan meghatározzuk a „lényeges” funkcionális függések maximális számát.

1. Bevezetés

Egy adatbázis struktúrájának a felhasználó számára legfontosabb jellemzője az, hogy a tárolt adatok közti összefüggések milyen formában vannak jelen az adatbázisban. Mivel egy adatbázis struktúráját a rekordtípusok és a rekordtípusok közti kapcsolatok alkotják, azért az adatmodelleket aszerint osztályozzuk, hogy a rekordtípusok között milyen kapcsolat definiálása megengedett. Első látásra talán meglepőnek hangzik, de ennek alapján két adatmodellt különböztethetünk meg:

- az egyik az ún. *hálózatos adatmodell*, melyben rekordtípusok között tetszőleges, pointerezéssel megadható kapcsolat létesíthető;
- a másik az ún. *relációs adatmodell*, melyben a rekordtípusok között semmilyen kapcsolat nem létesíthető.

A relációs adatbázisokban tehát a rekordtípus az egyetlen kapcsolatteremtő eszköz az adatbázis entitásai között.

Rekordtípus megadása matematikai szempontból nem más, mint egy „értelmezési tartomány” és egy „értékkészlet” definiálása; az így adott rekordtípus előfordulásai az adott értelmezési tartományon értelmezett, értékeit az adott értékkészletből felvevő függvények. Az értelmezési tartomány elemeit attributumoknak nevezik. Egy adatbázis egy rekordtípusának egy adott pillanatban létező előfordulásai tehát egy mátrixot alkotnak. Ennek sorai az egyes előfordulások, oszlopai pedig az egyes attributumokon az előfordulások értékei.

Az adatbázisstervezés során az adatbázis struktúrájának megadása utáni lépés azon feltételek előírása, melyeket a leendő adatbázisnak minden pillanatban teljesítenie kell. Például, ha egy prímszámokat kereső program eredményeit kívánjuk egy adatbázisban tárolni, akkor a „minden érték prímszám” egy ilyen feltétel.

Az előírható feltételek formája természetesen függ az adatbázis struktúrájától. Ezért az adatmodell kutatásának egyik fontos területe megtalálni az adott adatmodellben azokat a „feltételféleket”, amelyek egyrészt kielégítik a gyakorlatban fel-

merülő igényeket, másrészt bizonyos tulajdonságaik matematikailag elég jól vizsgálhatók ahhoz, hogy hatékony adatbáziskezelő rendszerek legyenek kiépíthetők.

A relációs adatbázisokban az egyik legfontosabb „feltételféle” az E. F. CODD [1] által definiált funkcionális függés. A fentiekben megállapítottuk, hogy egy relációs adatbázis pillanatnyi tartalmát mint mátrixokat képzelhetjük, ezért a funkcionális függést mátrixokra definiáljuk. Ha A és B a mátrix értelmezési tartományának (azaz az attributumok halmazának) részhalmazai és M a mátrix, akkor azt mondjuk, hogy B funkcionálisan függ A -tól az M mátrixban, ha M bármely két olyan sora, amelyek A minden elemén egyenlő értékeket vesznek fel, B minden elemén is megegyeznek.

A funkcionális függéssel kapcsolatos problémák két csoportra oszthatók. Az egyik problémakör gyakorlati motivációja a következő: relációs adatbázis tervezése során a felhasználó által megadott feltételek a leendő adatbázisra általában nem teljesek; azaz bizonyos, meg nem fogalmazott újabb feltételek következnek belőlük. Ezek ismerete gyakran fontos a felhasználó számára, tehát szükséges olyan algoritmusok kidolgozása, melyekkel adott feltételrendszerből következő feltételek megtalálhatók. Ennek a problémának matematikai logikai és algoritmuselméleti vonatkozásai vannak.

Ebben a cikkben a másik, nem kevésbé fontos problémakörrel foglalkozunk, amelynek alapkérdése röviden így fogalmazható:

mit mondhatunk egy mátrix funkcionális függéseinek kombinatorikus bonyolultságáról.

A 2. pontban az ún. minimális kulcsok rendszerének struktúráját vizsgáljuk. Bizonyítjuk, hogy a minimális kulcsok rendszere *Sperner-rendszer* és hogy minden *Sperner-rendszer* reprezentálható egy mátrixszal, mint minimális kulcsok rendszere.

A 3. pontban adott *Sperner-rendszert* reprezentáló reláció sorainak számára adunk becsléseket.

A 4. pontban aszimptotikusan pontosan meghatározzuk a „lényeges” funkcionális függések maximális számát.

2. A minimális kulcsok maximális száma

Legyen M egy nem negatív egész értékeket tartalmazó, különböző sorokból álló $m \times n$ -es mátrix. M oszlopainak egy K részhalmazát *kulcsnak* nevezzük, ha az ezen oszlopok által meghatározott almátrix sorai különbözők. Ez a feltétel azt jelenti, hogy egy sort már az ezen oszlopokban álló értékei meghatározzák. Vagyis, ha egy sort akarunk megtalálni, elég megadni a K -hoz tartozó oszlopokban álló értékeket.

Ha K_1 egy kulcs és $K_1 \subset K_2$, akkor K_2 nyilvánvalóan szintén kulcs. Azok tehát az érdekes kulcsok, melyekhez nem található „kisebb” kulcs. Az olyan K kulcsokat, melyekben nem található $K' \subsetneq K$ kulcs, *minimális kulcsoknak* nevezzük. A minimális kulcsok halmazát \mathcal{K} -val jelöljük.

A modellben eddig 4 lényeges paraméter van: 1. az oszlopok száma, n ; 2. a sorok száma, m ; 3. a mátrixban álló legnagyobb egész szám, N ; 4. a minimális kulcsok száma, $|\mathcal{K}|$. A legáltalánosabb probléma az lehetne, hogy hármat ismerve a fenti paraméterek közül, milyen határok közé lehet szorítani a negyediket. E feje-

zetben egy ennél szerényebb cél irányába törekszünk. Két, illetve 3 paraméter közötti egyenlőtlenségeket vizsgálunk.

Az első probléma az n és $|\mathcal{K}|$ közötti kapcsolat felderítése. A következő tétel ezt a problémát egy halmazrendszerekre vonatkozó ismert tételre redukálja.

2.1. TÉTEL [3]: *Egy n -elemű halmaz részhalmazainak egy \mathcal{K} rendszeréhez akkor és csak akkor található egy $n \times m$ -es mátrix, melyben a minimális kulcsok rendszere éppen \mathcal{K} , ha \mathcal{K} elemeire a*

$$(2.1) \quad K_1, K_2 \in \mathcal{K}, \quad K_1 \neq K_2 \Rightarrow K_1 \not\subset K_2$$

feltétel teljesül.

Bizonyítás. Vezessük be a következő jelölést: $\mathcal{K}^{-1} = \{B : B \text{ nem tartalmaz } \mathcal{K}\text{-beli részhalmazt és maximális az ilyen tulajdonságú halmazok között}\}$. Legyen $\mathcal{K}^{-1} = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$. A megkonstruálandó M mátrixnak $m+1$ sora lesz. A 0-adik sor legyen a csupa 0-ból álló sor; az i -edik sor ($1 \leq i \leq m$) j -edik eleme legyen 0 vagy 1, aszerint, hogy $j \in B_i$ vagy sem. Világos, hogy ha $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ olyan halmaz, amely nem tartalmaz \mathcal{K} -beli részhalmazt, akkor van olyan i , hogy $A \subseteq B_i$ és így A -n megegyezik a 0-adik és i -edik sor, tehát A nem kulcs. Ha viszont $K \in \mathcal{K}$, akkor minden i -re ($1 \leq i \leq m$) $K \setminus B_i \neq \emptyset$, és így az i -edik sor egy K -beli oszlopában 1 áll, emiatt K kulcs. Tehát M minimális kulcsainak a rendszere éppen \mathcal{K} . A bizonyítást befejeztük.

Nézzünk egy illusztratív példát. Legyen $n=5$, $\mathcal{K} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$. Ekkor $\mathcal{K}^{-1} = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 5\}\}$ és a megfelelő M mátrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Eredeti célunk az n oszloppal rendelkező mátrix minimális kulcsai száma felső határának megállapítása volt (az alsó határ érdektelen). Az első tétel alapján ez arra a problémára redukálódott, hogy hány egymást nem tartalmazó részhalmaza van egy n elemű halmaznak. E kérdést SPERNER [2] tétele válaszolja meg, mely szerint ez a maximum

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \quad (\lfloor x \rfloor \text{ az } x \text{ egész részét jelöli):$$

2.2. TÉTEL [3]: *Egy n oszloppal rendelkező M mátrixban legfeljebb*

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

minimális kulcs van.

3. Adott kulcsokhoz individuumok minimális száma

A 2.1. tétel szerint minden \mathcal{K} Sperner-rendszerhez található olyan \mathbf{M} mátrix, amely minimális kulcsainak rendszere \mathcal{K} . Azonban ott nem foglalkoztunk azzal, hogy mennyi a sorok minimális száma. Jelölje tehát $s(\mathcal{K})$ ezt a minimális sor-számot. E fejezetben $s(\mathcal{K})$ értékeivel foglalkozunk különféle \mathcal{K} Sperner-rendszerek esetére. A 2.1. tétel bizonyítása ad becslést $s(\mathcal{K})$ -ra.

Látható, hogy \mathcal{K}^{-1} Sperner-rendszer, azaz a Sperner-tétel alapján kimondható a

3.1. TÉTEL.

$$s(\mathcal{K}) \leq 1 + |\mathcal{K}^{-1}| \leq 1 + \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

A következő tétel azt mutatja meg, hogy van olyan \mathcal{K} , amelyre $s(\mathcal{K})$ „közel” jut e felső korláthoz.

3.2. TÉTEL [5]: Minden n természetes szám esetén található olyan \mathcal{K} Sperner-rendszer n elemen, melyre

$$(3.1) \quad \frac{1}{n^2} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq s(\mathcal{K}).$$

Bizonyítás. Legyen $s(n) = \max_{\mathcal{K}} \{s(\mathcal{K})\}$, ahol a maximumot az n elemen készíthető Sperner-rendszerekre vesszük. Azt mondjuk, hogy az \mathbf{M} mátrix realizálja \mathcal{K} -t, ha \mathbf{M} minimális kulcsainak rendszere \mathcal{K} . A fenti definíciók szerint bármely n elemen felvett \mathcal{K} realizálható egy $m \times n$ -es mátrixszal, ahol $m \leq s(n)$. Ha az $(m+1)$ -edik, $(m+2)$ -edik, ..., $s(n)$ -edik sorba csupa $(m+1)$ -est, $(m+2)$ -est, ..., $s(n)$ -est írunk, a kibővített mátrix is \mathcal{K} -t realizálja. Azaz bármely \mathcal{K} realizálható egy $s(n) \times n$ -es mátrixszal. (Feltehető, hogy az eredeti mátrixban csak $1, 2, \dots, m$ van, lásd alább.)

Tekintsük egy ilyen \mathbf{M} első oszlopában álló elemeket nagyság szerint rendezve: $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, $(1 \leq r \leq s(n))$, és cseréljük ki i_j -t j -re. Könnyen látható, hogy ez a változtatás nem változtatja meg a minimális kulcsok rendszerét. Ugyanezt a változtatást elvégezve az összes oszlopban, egy olyan \mathbf{M} -hez jutunk, amelyben minden elem $1, \dots, s(n)$. Az ilyen mátrixok száma $s(n)^{ns(n)}$. Így

$$(3.2) \quad s(n)^{ns(n)} \geq \mathcal{K}\text{-k száma.}$$

Mivel valahány $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -elemű halmazból álló rendszer mindig Sperner-rendszer, (3.2) jobb oldalát csökkentve a

$$(3.3) \quad s(n)^{ns(n)} > 2^{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. (3.3)-at átalakítva a

$$(3.4) \quad s(n) \log_2 s(n) > \frac{1}{n} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ha (3.4)-ben $s(n)$ helyére $\frac{1}{n^2} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ -öt írunk, akkor (3.4)

jobb oldalánál kisebbet kapunk, azaz (3.4)-ből következik $s(n) > \frac{1}{n^2} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, ami

éppen a bizonyítandó állítás.

A következőkben néhány egyszerű \mathcal{X} Sperner-rendszerre próbáljuk $s(\mathcal{X})$ -t meghatározni. Jelölje \mathcal{F}_k^n az n elemű halmaz összes k -elemű halmazainak rendszerét. \mathcal{F}_k^n nyilvánvalóan Sperner-rendszer. Legelőször következzenek egy $s(\mathcal{F}_k^n)$ -ra vonatkozó egyszerű lemma.

3.1. LEMMA [6].

$$\binom{s(\mathcal{F}_k^n)}{2} \cong \binom{n}{k-1}, \quad 0 < k \leq n.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy $m \times n$ -es \mathbf{M} mátrix realizálja \mathcal{F}_k^n -et. Bármely $k-1$ különböző oszlophoz található egy sor-pár, amelyek ezen oszlopokban megegyeznek. Másrészt $k-1$ oszlop egy másik rendszeréhez másik pár kell, hogy tartozzék. Így $\binom{m}{2} \cong \binom{n}{k-1}$, a bizonyítást befejeztük.

E lemmából $s(\mathcal{F}_1^n) \cong 2$ következik. A következő konstrukció bizonyítja, hogy $s(\mathcal{F}_1^n) = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg most $s(\mathcal{F}_2^n)$ -et. Ha $m \times n$ -es mátrix realizálja \mathcal{F}_2^n -et, akkor a 3.1. lemma szerint

$$(3.5) \quad n \cong \binom{m}{2}.$$

Másrészt, ha (3.5) fennáll, az alábbiakban megmutatjuk, hogy lehet egy $m \times n$ -es mátrixot konstruálni, mely \mathcal{F}_2^n -et realizálja. \mathbf{M} minden oszlopa két nullát tartalmaz, különböző oszlopokban a nulla-pár különböző helyeken áll. Az i -edik sor többi eleme legyen i . A konstrukció megvalósíthatósága (3.5)-ön múlik. Könnyen látható, hogy 1 oszlopban van két egyforma sor, míg 2 oszlopban már nincs. Így $s(\mathcal{F}_2^n)$ a (3.5)-öt m -ben kielégítő legkisebb egész szám.

Alkalmazzuk most a lemmát $k = n-1$ -re:

$$s(\mathcal{F}_{n-1}^n) \cong n.$$

A következő konstrukció biztosítja az egyenlőséget:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$s(\mathcal{F}_n^n)$ meghatározása egy kicsit bonyolultabb. Egy újabb lemma szükséges. Ha \mathbf{M} egy $m \times n$ -es mátrix, $G(\mathbf{M})$ legyen az a gráf, melynek szögpontjai \mathbf{M} sorai, két szögpont össze van kötve, ha a két sor legalább egy helyen megegyezik. Az élre ráírjuk a közös helyek A halmazát.

3.2. LEMMA [6]: *Legyen \mathbf{M} egy mátrix és legyenek $G(\mathbf{M})$ egy körére az A_1, \dots, A_r halmazok írva. Ekkor*

$$(3.6) \quad \text{minden } 1 \leq j \leq r \text{-re } \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r A_i - A_j = \emptyset.$$

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy (3.6) nem üres, azaz létezik egy oszlop, mondjuk az u -adik, amely minden A_i -ben benne van, kivéve A_j -t. Legyenek a kör mentén levő szögpontok k_1, \dots, k_r úgy, hogy (k_i, k_{i+1}) -re van A_i írva ($1 \leq i < r$), és (k_r, k_1) -re A_r . $u \in A_{j+1}$ -ből következik, hogy a k_{j+1} -edik és k_{j+2} -edik értékek az u -adik sorban egyenlők. Ugyanez mondható el a k_{j+2} -edik és k_{j+3} -adik értékről is stb. Tehát a k_{j+1} -edik, k_{j+2} -edik, \dots, k_r -edik, k_1 -edik, \dots, k_j -edik értékek az u -adik oszlopban megegyeznek. Ebből $u \in A_j$ következik, ellentmondásban a feltevéssel. A bizonyítás teljes.

Most már meg tudjuk határozni $s(\mathcal{F}_n^n)$ -et. Tegyük fel, hogy egy $m \times n$ -es \mathbf{M} adatbázis realizálja \mathcal{F}_n^n -et. Mivel egy $n-1$ oszlopból álló halmaz nem kulcs, szerepelnie kell $G(\mathbf{M})$ valamelyik élére írva. Tehát $G(\mathbf{M})$ -nek van n különböző éle, melyekre a különböző $(n-1)$ -elemű halmazok vannak írva. Ezek az élek a 3.2. lemma miatt nem alkothatnak kört, mert (3.6)-ot nem elégíti ki $(n-1)$ -elemű halmazok együttese. Ezek az élek tehát fát alkotnak, következésképpen $G(\mathbf{M})$ -nek legalább $n+1$ szögpontja van: $m \geq n+1$. A következő $(n+1) \times n$ -es mátrix realizálja $s(\mathcal{F}_n^n)$ -et:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Az eddigi eredményeket a következő tételben foglaljuk össze:

3.3. TÉTEL [6]:

$$s(\mathcal{F}_1^n) = 2, \quad s(\mathcal{F}_2^n) = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 + 8n}}{2} \right\rfloor,$$

$$s(\mathcal{F}_3^n) = n + 1, \quad s(\mathcal{F}_{n-1}^n) = n.$$

A 3.1. lemmából $s(\mathcal{F}_3^n) \geq n$ is következik.

Sejtés. $s(\mathcal{F}_3^n) = n$, ha $n \geq 7$.

Bizonyos esetekben ez a sejtés bizonyítást nyert.

3.4. TÉTEL (FÜREDI):

$$s(\mathcal{F}_3^n) = n, \quad \text{ha } n = 4^r.$$

Bizonyítás. Konstruálni fogunk egy $4^r \times 4^r$ -es mátrixot, mely \mathcal{F}_3^n -et realizálja. A módszer a *Sperner-rendszerek* irodalmának egy bevált módszere.

Tekintsük a $2r$ dimenziós 0-kból és 1-ekből álló 4^r vektor V halmazát. Be fogjuk látni — teljes indukcióval —, hogy ez a halmaz a csupa-nulla vektort leszámítva, beosztható 3-elemű $A_1, \dots, A_{(4^r-1)/3}$ részhalmazokba úgy, hogy az egy részhalmazba eső három vektorra, v_1, v_2, v_3 -ra $v_1 + v_2 = v_3$ teljesül a koordinátánkénti mod 2 összeadásra nézve (ekkor $v_1 + v_3 = v_2$, $v_2 + v_3 = v_1$ már következik). $r=1$ -re az állítás igaz: $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1)$. Tegyük fel, hogy r -re már igaz, és bizonyítsuk $r+1$ -re. Az r -re készített minden $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ halmazból 4 újat fogunk csinálni:

1. v_1, v_2, v_3 mindegyike végére 00-t írunk;
2. v_i, v_{i+1}, v_{i+2} után 01-et, 10-át és 11-et írunk $i=1, 2, 3$ -ra.
($v_4 = v_1, v_5 = v_2$).

Ezenkívül a $2r$ hosszúságú csupa-nulla vektorból is csinálunk egy 3-elemű halmazt 01, 10 és 11 utánaírásával. Könnyen látható, hogy így minden $2(r+1)$ -dimenziós 0, 1 vektort pontosan egyszer kaptuk meg, azaz ez a kívánt felbontást adja.

Igazoltuk tehát, hogy létezik a következő felbontás:

$$(3.7) \quad V = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{(4^r-1)/3}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (0 \leq i < j \leq (4^r-1)/3),$$

$$A_0 = \{(0, \dots, 0)\},$$

$$|A_i| = 3 \quad (1 \leq i \leq (4^r-1)/3);$$

A_i bármely két elemének összege a harmadikat adja. ($1 \leq i \leq (4^r-1)/3$).

Legyen $v \in V$. $A+v$ jelentse az $a+v$ (koordinátánként mod 2) vektorok halmazát, ahol $a \in A$. Az M mátrix sorait és oszlopait egyaránt V elemeivel számozzuk meg (mondhatjuk ezt úgy is, hogy azokkal az egészekkel számozzuk meg, amelyeknek a fenti vektorok a kettes számrendszerbeli alakjaik). M v_1 -edik sorának v_2 -edik eleme legyen a

$$(3.8) \quad v_1 + v_2 \in A_i$$

reláció által meghatározott i szám. (3.7) alapján ilyen i létezik és egyértelműen meg van határozva. Így például a v_1 -edik sor v_1 -edik eleme 0. (v_1 a 0-vektor.)

M -ről először azt kell bizonyítani, hogy benne semmilyen 2 oszlop sem kulcs, azaz a tetszőlegesen választott v_2 és $v'_2 \neq v_2$ oszlopokhoz található v_1 és $v'_1 \neq v_1$ sorok, melyek a v_2 és v'_2 oszlopokban megegyeznek. (3.7) miatt valamilyen $i \neq 0$ egészre $v_2 + v'_2 \in A_i$ teljesül. Legyen A_i egy további eleme a , továbbá legyen

$$v_1 = a + v_2 \quad \text{és} \quad v'_1 = a + v'_2.$$

Innen

$$v_1 + v_2 = a, \quad v'_1 + v'_2 = a,$$

$$v_1 + v'_2 = a + v_2 + v'_2, \quad v'_1 + v_2 = a + v_2 + v'_2.$$

Mivel a és $a+v_2+v_2' \in A_i$, így a (3.8) definíció alapján a v_1, v_1' sorok és v_2, v_2' oszlopok metszéspontjaiban csupa i áll \mathbf{M} -ben. A v_2 és v_2' oszlopok valóban nem alkotnak kulcsot.

Vegyünk most 3 különböző oszlopot, v_2 -t, v_2' -t és v_2'' -t. Tegyük fel indirekte, hogy valamilyen v_1 és $v_1' \neq v_1$ sorok ezekben az oszlopokban megegyeznek, azaz a (3.8) definíció alapján

$$(3.9) \quad v_1 + v_2 \in A_i, \quad v_1' + v_2 \in A_i,$$

$$(3.10) \quad v_1 + v_2' \in A_j, \quad v_1' + v_2' \in A_j,$$

$$(3.11) \quad v_1 + v_2'' \in A_k, \quad v_1' + v_2'' \in A_k$$

teljesül valamilyen i, j, k ($\neq 0$)-ra. (3.9) miatt $v_1 + v_2 + v_1' + v_2 = v_1 + v_1' \in A_i$. (3.10)-ből és (3.11)-ből hasonlóan következik $v_1 + v_1' \in A_j$ és $v_1 + v_1' \in A_k$. Azaz $A_i = A_j = A_k$, vagyis $i = j = k$. Mivel v_2, v_2' és v_2'' különbözők, így $a = v_1 + v_2$, $b = v_1 + v_2'$ és $c = v_1 + v_2''$ is különböző elemei A_i -nek. Hasonlóan következik, hogy $v_1' + v_2, v_1' + v_2'$ és $v_1' + v_2''$ is különbözők. Mivel $v_1' + v_2 \neq v_1 + v_2$, így vagy $v_1' + v_2 = b$ vagy $v_1' + v_2 = c$. Az első esetben $v_1' + v_2'$ nem lehet a , mert akkor $v_1' + v_2''$ csak c lehetne, ami a $v_1 + v_2'' = v_1' + v_2''$ ellentmondásra vezetne. Így $v_1' + v_2 = c$. Tehát ez esetben $v_1' + v_2 = b$, $v_1' + v_2' = c$, $v_1' + v_2'' = a$. A végső ellentmondás a

$$c = a + b = (v_1 + v_2) + (v_1' + v_2) = v_1 + v_1',$$

$$a = b + c = (v_1 + v_2') + (v_1' + v_2') = v_1 + v_1'$$

egyenlőségből következik. A második esetben a fentihez hasonlóan nyerhető az ellentmondás. Tehát nem lehetséges, hogy eredeti feltevésünk teljesüljön, hogy 3 oszlop nem alkot kulcsot. A bizonyítást befejeztük.

FÜREDINEK sikerült a sejtést az $n = 12k + 1$ és $n = 12k + 4$ alakú számokra is bizonyítani, HANANI [7] eredményeit felhasználva.

4. A függőségek számáról

Egy újabb fogalmat kell még bevezetnünk. Az oszlopok egyik halmazának egy másik halmazától való függősége fogalmát. Heurisztikus megfogalmazásban akkor mondjuk, hogy A -tól függ B (A és B egy \mathbf{M} mátrix oszlopainak halmazai), ha \mathbf{M} bármely sorának A -ba eső elemei egyértelműen meghatározzák a B -be eső elemeket. Pontosabban tehát \mathbf{M} oszlophalmazainak egy (A, B) párját *függőségnek* nevezzük, ha \mathbf{M} bármely két sora, amelyek megegyeznek az A -nak megfelelő helyeken, megegyeznek a B -nek megfelelő helyeken is. Az $A \rightarrow B$ jelölést használjuk annak jelölésére, hogy (A, B) egy függőség. A definíciókból látható, hogy az $A \rightarrow (\mathbf{M}$ összes oszlopa) feltétel pontosan azt jelenti, hogy A kulcs.

Mint a kulcsok esetében, itt is csak bizonyos „meghatározó” vagy „lényeges” függőségeket fogunk figyelembe venni. Könnyen látható, hogy

$$(4.1) \quad A \rightarrow A.$$

$$(4.2) \quad \text{Ha } A \rightarrow B \text{ és } A \subset A', \text{ akkor } A' \rightarrow B.$$

$$(4.3) \quad \text{Ha } A \rightarrow B \text{ és } B' \subset B, \text{ akkor } A \rightarrow B'.$$

Az ezek alapján „felesleges” függőségektől eltekintve *lényeges függőségek* nevezzük az $A \rightarrow B$ függőséget, ha

$$(4.4) \quad A \neq B,$$

$$(4.5) \quad \text{nincs } A' \subset A, \quad A' \neq A \text{ úgy, hogy } A' \rightarrow B,$$

$$(4.6) \quad \text{nincs } B' \supset B, \quad B' \neq B \text{ úgy, hogy } A \rightarrow B'.$$

Mivel a lényeges függőségekből levezethetők az összes további függőségek (4.1)–(4.3) alapján, a lényeges függőségek számát tekinthetjük a mátrix egy bonyolultságának. A továbbiakban az n oszloppal rendelkező mátrixok ilyen értelemben vett bonyolultságának maximumával foglalkozunk. Legyen $N(n)$ tehát az n oszlopú mátrixok lényeges függőségeinek maximális száma. Könnyű konstruálni egy olyan mátrixot, amelyben a lényeges függőségek mind $A \rightarrow A \cup \{x\}$ alakúak, ahol x az utolsó oszlop, és $x \notin A$. Ebben a lényeges függőségek száma 2^{n-1} . Azonban ennél több is lehet, mint látni fogjuk.

4.1. TÉTEL [4]:

$$(4.7) \quad 2^n \left(1 - \frac{4}{\log e} \cdot \frac{\log \log n}{\log n} (1 + o(1)) \right) \cong N(n) \cong 2^n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right),$$

ahol a $\log 2$ -alapú.

Bizonyítás. Alsó becslés. Legyenek q_1, \dots, q_k pozitív egészek, $\sum_{i=1}^k q_i = n$. A $\left(\binom{q_i}{2} + 1 \right) \times q_i$ méretű Q_i mátrixot a következőképpen definiáljuk. Q_i első sora 1-esekből áll. A többi sor $q_i - 2$ 1-est tartalmaz az összes lehetséges módon. Az i -edik sor maradék két helyére i -t írunk $\left(2 \leq i \leq \binom{q_i}{2} + 1 \right)$. Az $M = Q_1 \times \dots \times Q_k$ mátrix sorait a Q_i mátrixok sorainak összes lehetséges egymásután való írásával képezzük. Azaz M egy sorát úgy nyerjük, hogy Q_1 egy tetszőleges sora után Q_2 egy tetszőleges sorát, majd Q_3 egy tetszőleges sorát írjuk stb. Világos, hogy M oszlopainak száma $\sum_{i=1}^k q_i = n$. Az $n=5, k=2, q_1=3, q_2=2$ esetre lássuk példaként a konstrukciót:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jelölje Q_i^* azon oszlopok indexeit M -ben, amelyek Q_i -nak felelnek meg, azaz $Q_i^* = \{q_1 + \dots + q_{i-1} + 1, \dots, q_1 + \dots + q_i\}$. Könnyen látható, hogy a lényeges $A \rightarrow B$

függőségek azok, melyekre

$$\min (q_i - |A \cap Q_i^*|) = 1,$$

$$B = A \cup \bigcup Q_i^*,$$

ahol az \bigcup azon i -ken fut végig, melyekre $|A \cap Q_i^*| = q_i - 1$ teljesül. Az ilyen $A \rightarrow B$ párok száma

$$(4.8) \quad \prod_{i=1}^k (2^{q_i} - 1) - \prod_{i=1}^k (2^{q_i} - q_i - 1).$$

Ez $N(n)$ -re egy alsó becslést ad. Például a fenti példa esetében $17 \leq N(5)$, ami jobb mint a triviális $2^4 = 16$ becslés. Nagy n -ekre a

$$q = q(n) = \left\lfloor \log n - \log \left(\frac{1}{\log e} (\log \log n - \log \log \log n - \log \log e - 1) \right) \right\rfloor$$

értéket válasszuk. $k(n)$ -et, $r(n)$ -et az $n = q(n)k(n) + r(n)$, $0 \leq r(n) < q(n)$ maradékos osztással definiáljuk. Végül legyen

$$q_1 = q_2 = \dots = q_r = q + 1,$$

$$q_{r+1} = \dots = q_k = q.$$

Ezekkel az értékekkel (4.8) éppen a (4.7) bal oldalát adja némi elemi, de bonyolult számolás után (lásd [4]).

Felső becslés. Legyen \mathcal{F} azon A halmazok családja, melyekhez tartozik egy B halmaz, melyre $A \rightarrow B$ lényeges függőség. Ha $A \rightarrow B$ egy lényeges függőség, akkor

$$A \subset B, \text{ de } A \neq B \text{ ((4.4) és (4.6) alapján).}$$

Vegyünk egy tetszőleges, de az $A \subset C \subset B$, $|C| = |A| + 1$ feltételeket kielégítő halmazt. Könnyen látható, hogy $C \notin \mathcal{F}$. Ellenkező esetben ugyanis $C \rightarrow D$ lényeges függőség volna. Ez minden esetben ellentmondásra vezet. Mivel egy ilyen C \mathcal{F} -nek legfeljebb n tagjából keletkezhet, van legalább $|\mathcal{F}|/n$ halmaz, ami \mathcal{F} -nek nem eleme.

Innen az $|\mathcal{F}| + \frac{|\mathcal{F}|}{n} \leq 2^n$ egyenlőtlenség következik. Ez ekvivalens (4.7) jobb oldalával.

A bizonyítást befejeztük.

(4.7) jobb oldalán az $\frac{1}{n+1}$ tag nagyságrendileg $2/n$ -re könnyen javítható, hisz \mathcal{F} elemeinek túlnyomó többsége $n/2$ körüli elemmel bír, így a megfelelő C halmazok elemszáma is közelítőleg ennyi. Azonban a felső becslés valószínűleg ennél sokkal jobban is javítható. (4.7)-ben a második tagok között még igen nagy a különbség.

IRODALOM

- [1] CODD, E. F., "A relational model of data for large shared data banks", *Comm. ACM* 13 (1970) 377—387.
 [2] SPERNER, E., „Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge“, *Math. Z.* 27 (1928) 544—548.

- [3] DEMETROVICS, J., "On the equivalence of candidate keys with Sperner systems", *Acta Cybernetica* 4 (1979) 247—252.
- [4] BÉKÉSSY, J., DEMETROVICS, J., HANNÁK, L., FRANKL, P. and KATONA, G. O. H., "On the number of maximal dependencies in a data base relation of fixed order", *Disc. Math.* 30 (1980) 83—88.
- [5] DEMETROVICS, J. and GYEPESI, GY., "On the functional dependency and some generalization of it", *Acta Cybernetica* 5 (1981) 296—305.
- [6] DEMETROVICS, J. and KATONA, G. O. H., "Extremal combinatorial problems in relational data base", *Fundamentals of Computation Theory, Lecture Notes in Computer Science* 117, (1981) 110—119.
- [7] HANANI, H., "The existence and construction of balanced incomplete block designs", *Ann. Math. Statist.* 32 (1961) 361—386.

(Beérkezett: 1981. november 26.)

DEMETROVICS JÁNOS
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U. 18.

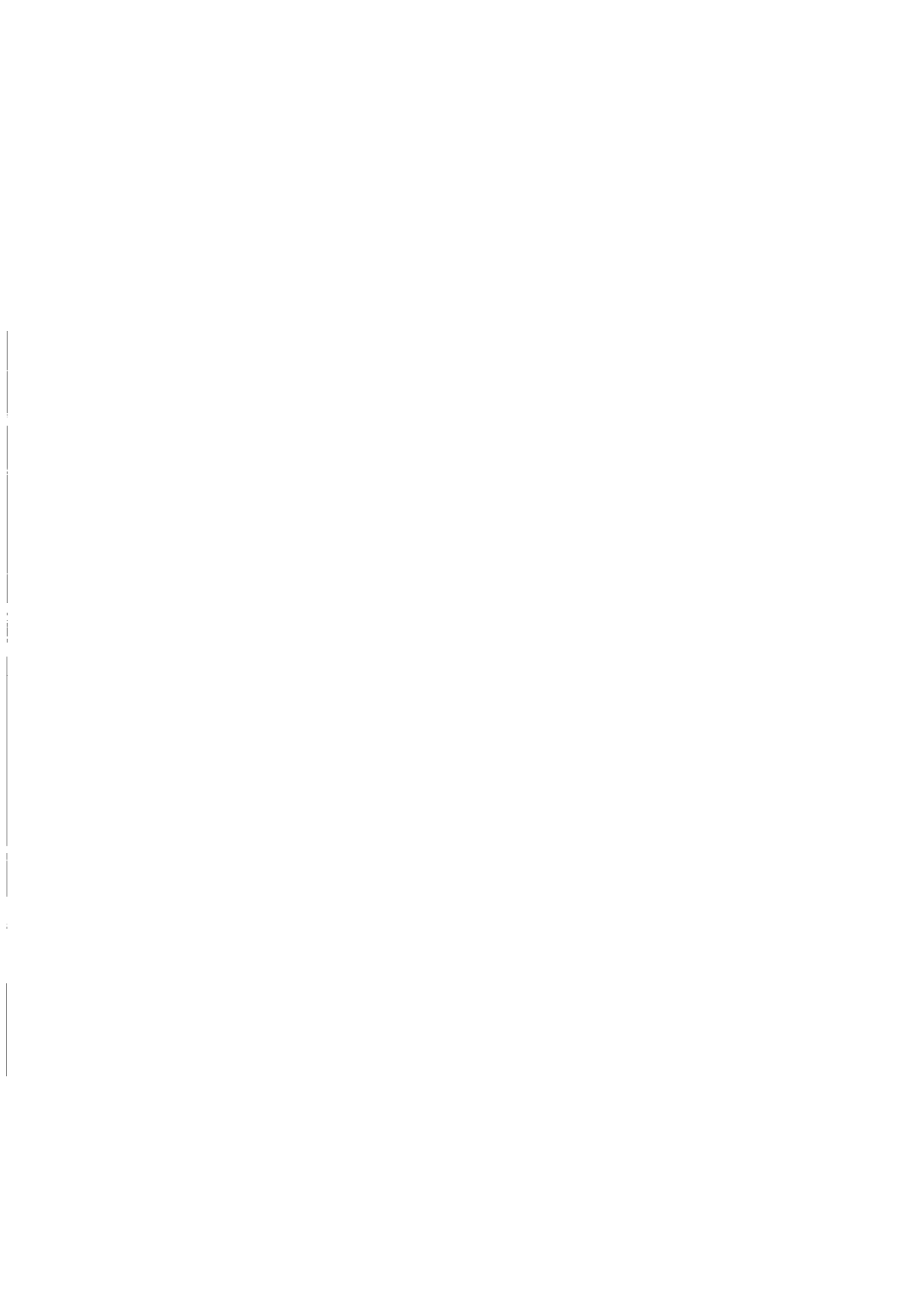
KATONA GYULA
MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET
1053 BUDAPEST, REÁLTANODA U. 13—15.

EXTREMAL PROBLEMS OF THE RELATIONAL DATA BASES

J. DEMETROVICS and GY. KATONA

In our paper we investigate the problem how complicated can be combinatorically the functional dependencies of a matrix.

We prove that the system of minimal keys is a *Sperner-system* and every *Sperner-system* can be represented by a matrix as a system of minimal keys. We give estimations on the number of rows of the relation which represents a given *Sperner-system* and determine the asymptotically exact maximal number of the "essential" functional dependencies.



A LINEÁRIS KOMPLEMENTARITÁSI PROBLÉMA TÖBB MEGOLDÁSÁNAK A MEGHATÁROZÁSÁRÓL

BERNAU HEINZ

Budapest

A cikkben a *Lemke-módszerre* olyan módosítást adunk, amellyel a lineáris komplementaritási probléma több mint egy megoldását lehet megkeresni.

1. Bevezetés

A dolgozatban a lineáris komplementaritási probléma megoldására szolgáló *Lemke-módszerre* olyan módosítást adunk meg, amely több megoldás meghatározását is lehetővé teszi.

A lineáris komplementaritási probléma (LKP) egy adott $(n \times n)$ -es \mathbf{M} -mátrix és egy n -dimenziós \mathbf{q} vektor mellett az

$$(1.1) \quad \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q} \cong \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \cong \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q})^T \mathbf{x} = 0$$

rendszer megoldásából áll.

Jellemző erre a problémára, hogy számos matematikai és alkalmazási feladat erre vezethető vissza [10], [13]. A lineáris komplementaritási probléma egyik legismertebb megoldási módszere a LEMKE által kidolgozott algoritmus [11], [13].

De a módszernek sikeres alkalmazhatósága az \mathbf{M} -mátrix tulajdonságaitól függ [6], [12], és a legkedvezőbb esetben is csak egy megoldást nyújt. Néhány feladatnál azonban (nemkonvex, kvadratikus optimalizálási feladatoknál, gazdasági egyensúlyi feladatoknál és bimátrix játékoknál) a megfelelő lineáris komplementaritási probléma egész megoldási halmazának az ismerete nagyon kívánatos és lényeges. Erre különféle módszereket dolgoztak ki [1], [7], [8]. Ezek a módszerek nagyon munkaigényesek vagy számítástechnikailag nehezen megvalósíthatók.

Ezzel szemben az itt megadott eljárás lehetőséget ad arra, hogy nagyon egyszerű módon, szimplex lépések végrehajtásával több megoldást határozzunk meg.

A módszer nem adja meg minden esetben az összes megoldást. De amint a cikk végén megadott példákban is látszik az egyik fő előnye, hogy olyan problémáknál is megoldásokat tud meghatározni, amelyeknél más módszerek nem eredményesek. Ily módon lehetőséget nyújt egy szélesebb problémakör kezeléséhez. Lineáris cél-függvény esetén a módszer egy jó induló komplementaritási pontot szolgáltat, amely alapján egy célfüggvényes metszet segítségével a megengedett tartományt leszűkíthetjük.

2. Variációs egyenlőtlenségek és komplementaritási problémák

EAVES [5] a komplementaritás főtételéről szóló dolgozatában egy nagyon szoros összefüggést mutatott be a komplementaritási és variációs problémák között.

2.1. DEFINÍCIÓ: Ha C az R^n euklideszi tér konvex részhalma és f a C halmaz egy leképezése az R^n -be, akkor egy C -beli \bar{x} pontot az f és C által meghatározott (f, C) variációs probléma stacionárius pontjának nevezzük, ha \bar{x} -re a következő egyenlőtlenség igaz

$$(2.1) \quad (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T f(\bar{\mathbf{x}}) \cong 0, \quad \forall \mathbf{x} \in C\text{-re.}$$

HARTMANN, STAMPACCHIA [14] és KARAMARDIAN [9] bebizonyították, hogy ha a C halmaz nem üres, kompakt és az f leképezés folytonos, akkor az (f, C) variációs problémának mindig van stacionárius pontja.

2.1. Megjegyzés. Ha C_1 és C_2 két konvex halmaz, úgy hogy $C_1 \subset C_2$ és $\bar{x} \in C_1$ az (f, C_2) probléma stacionárius pontja, akkor nyilvánvalóan \bar{x} az (f, C_1) problémának is stacionárius pontja.

A komplementaritási probléma és a stacionárius pontok között ad meg egy fontos kapcsolatot a következő lemma [13].

2.1. LEMMA: Legyen f a pozitív ortans $R_+^n = \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{x} \cong \mathbf{0}\}$ folytonos leképezése az R^n -térbe. Akkor az \bar{x} pont az

$$(2.2) \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\cong \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \cong \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}^T f(\mathbf{x}) &= 0, \end{aligned}$$

nemlineáris komplementaritási problémának (NLKP) akkor és csak akkor a megoldása, ha \bar{x} az (f, R_+^n) variációs probléma stacionárius pontja, azaz ha

$$(2.3) \quad (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T f(\bar{\mathbf{x}}) \cong 0, \quad \forall \mathbf{x} \in R_+^n\text{-re.}$$

EAVES $\alpha \cong 0$ -ra a következő halmazokat vezette be

$$(2.4) \quad D_\alpha = \{\mathbf{x} \in R_+^n | \mathbf{d}^T \mathbf{x} \cong \alpha\},$$

ahol $\mathbf{d} > \mathbf{0}$ fixen választott n -dimenziós vektor. Jelölje S_α az (f, D_α) probléma stacionárius pontjainak halmazát. Mivel a D_α -halmazok minden $\alpha \cong 0$ -ra nem üresek, konvexek és kompaktok, az S_α halmazok nem üresek. Legyen

$$S = \bigcup_{\alpha \cong 0} S_\alpha.$$

Akkor a 2.1. lemma és a 2.1. megjegyzés alapján a (2.2) komplementaritási probléma minden megoldása az S halmaz eleme, mivel ha \bar{x} a (2.2) rendszer megoldása, akkor \bar{x} az (f, R_+^n) probléma stacionárius pontja és ezért minden $\alpha \cong \bar{\alpha} = \mathbf{d}^T \bar{x}$ -ra az (f, D_α) variációs problémáknak is stacionárius pontja.

Emiatt a komplementaritási probléma megoldásainak keresésénél az S halmazra korlátozhatjuk.

A BROWDETTŐL [3] származó dinamikus fixpont tétel alkalmazásával az S halmazról EAVES megmutatta, hogy létezik egy összefüggő zárt \hat{S} részhalma a következő tulajdonságokkal

- a) $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ az S halmaz eleme,
- b) minden \mathbf{x} pont az S halmazból az (f, D_α) probléma stacionárius pontja $\alpha=\mathbf{d}^T \mathbf{x}-c$,
- c) minden $\alpha \geq 0$ -hoz létezik egy \mathbf{x} pont az S halmazból, amely az (f, D_α) probléma stacionárius pontja.

Könnyen bebizonyítható [13], hogy ha az S halmaz korlátos, akkor a (2.2) probléma legalább egy megoldását tartalmazza.

Ezt a tulajdonságot különféle egzisztencia kritériumok felállításához és egyidejűleg a (2.2) probléma megoldására szolgáló triangularizációs módszerek kifejlesztésére használták ki [13]. Ezek a megoldási eljárások az $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ pontból kiindulva approximativén követik az S halmazt, és így a (2.2) probléma megoldására alkalmazhatók, ha ez a halmaz korlátos.

A lineáris komplementaritási problémáknál a *Lemke-módszer* hasonló tulajdonságú.

Az S halmazról megmutatható [2], hogy

$$(2.5) \quad \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{f_i(\mathbf{x})}{d_i} \right\} = \mu(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S$$

igaz. Ebből az

$$U = \{ \mathbf{x} \in R_+^n \mid f_i(\mathbf{x}) > 0, i = 1, \dots, n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \}$$

halmazra következik, hogy

$$(2.6) \quad S \cap U = \emptyset.$$

Emiatt a (2.2) probléma megoldásai általában az S halmaz különböző nem összefüggő részalmazaihoz tartoznak, és így az S halmaz több megoldás meghatározásához nem használható.

Egy „jobbán” összefüggő halmazt, amely az S halmazhoz képest hasonló tulajdonságú a következő módon lehet megadni [2]:

A D_α halmazok helyett az

$$(2.7) \quad F_\alpha = \{ \mathbf{x} \in R_+^n \mid \mathbf{d}^T \mathbf{x} = \alpha \}$$

halmazokat tekinthetjük.

Legyen T_α az (f, F_α) variációs probléma stacionárius pontjainak a halmaza, akkor minden $\alpha \geq 0$ -ra a T_α halmazok nem üresek, mivel az F_α halmazok nem üresek és kompaktok $\alpha \geq 0$ -ra. Legyen továbbá

$$T = \bigcup_{\alpha \geq 0} T_\alpha.$$

Az S és T halmazok leírhatók a következő formában [2]:

$$(2.8) \quad S = \left\{ \mathbf{x} \in R_+^n \mid \frac{f_i(\mathbf{x})}{d_i} = \mu(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I(\mathbf{x}) \right\}$$

és

$$(2.9) \quad T = \left\{ \mathbf{x} \in R_+^n \mid \frac{f_i(\mathbf{x})}{d_i} = \mu(\mathbf{x}), i \in I(\mathbf{x}) \right\},$$

ahol

$$I(\mathbf{x}) = \{i | x_i > 0\},$$

és $\mu(\mathbf{x})$ a (2.5) relációnak megfelelően van értelmezve.

Ebből azonnal következik, hogy az U halmazon kívül az S és a T halmazok megegyeznek, ezért figyelembe véve a (2.6) relációt, a T halmazt az S halmaznak az U halmazra való természetes kiterjesztésének tekinthetjük.

Hasonlóan, mint az S halmaznál, a *Browder-féle fixpont tétel* alkalmazásából adódik, hogy a T halmazban létezik egy összefüggő, zárt \hat{T} részhalmaz a következő tulajdonságokkal [2]:

- a) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a \hat{T} halmaz eleme,
- b) minden \mathbf{x} pont a \hat{T} halmazból az (f, F_α) probléma stacionárius pontja $\alpha = d^T \mathbf{x}$ -re,
- c) minden $\alpha > 0$ -hoz létezik egy \mathbf{x} pont a \hat{T} halmazban, amely az (f, F_α) probléma stacionárius pontja.

2.2. Megjegyzés: A \hat{T} halmaz c) tulajdonságából következik, hogy ez a halmaz ellentétben az S halmazzal, sohasem korlátos, mivel minden $\alpha \geq 0$ -hoz létezik egy $\bar{\mathbf{x}}$ pont a \hat{T} halmazban, amelyre $d^T \bar{\mathbf{x}} = \alpha$.

2.3. Megjegyzés: Könnyen ellenőrizhető, hogy egy R_+^n -beli pont $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ a (2.2) nemlineáris komplementaritási problémának akkor és csak akkor megoldása, ha $\bar{\mathbf{x}} \in T$ és $\mu(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

A $\mu(\mathbf{x})$ függvény folytonosságából akkor a következő általános, elégséges egzisztencia feltétel adódik [2]:

2.2. LEMMA: Ha a \hat{T} halmaz valamelyik $\bar{\mathbf{x}}$ pontjában $\mu(\bar{\mathbf{x}}) > 0$, akkor \hat{T} a (2.2) probléma legalább egy megoldását tartalmazza.

Egy további kritériumot lehet megadni, amelynek a КОИЖМА [13] által felállított elégséges feltétel egy közvetlen következménye [2].

2.3. LEMMA: Ha a \hat{T} halmaz valamelyik $\bar{\mathbf{x}}$ pontjához létezik egy R_+^n -beli $\hat{\mathbf{x}}$ pont, amelyre

$$d^T \hat{\mathbf{x}} < d^T \bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{x}}^T f(\bar{\mathbf{x}}) \cong \hat{\mathbf{x}}^T f(\hat{\mathbf{x}})$$

teljesül, akkor a \hat{T} halmaz a (2.2) probléma legalább egy megoldását tartalmazza. A fejezet befejezéséként a T halmaznak egy további jellemzési lehetőségére szeretnénk utalni.

Ehhez bevezetjük $i=1, \dots, n$ -re a következő halmazokat:

$$V_i = \left\{ \mathbf{x} \in R_+^n \mid \frac{f_i(\mathbf{x})}{d_i} = \mu(\mathbf{x}) \right\}.$$

Akkor a T halmazra $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén a következő állítás könnyen belátható

$$(2.10) \quad \mathbf{x} \in T \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad \mathbf{x} \in \bigcap_{i \in I(\mathbf{x})} V_i.$$

3. A T halmaz felhasználása a lineáris komplementaritási probléma esetén

A lineáris komplementaritás problémánál az f leképezés affin, azaz $f = Mx + q$, ahol M ($n \times n$)-es mátrix és q n -dimenziós vektor. Így a lineáris komplementaritási probléma (LKP) az

$$(3.1) \quad \begin{aligned} Mx + q &\geq 0, & x &\geq 0, \\ (Mx + q)^T x &= 0 \end{aligned}$$

rendszer megoldásából áll.

A probléma megoldására különféle eljárásokat dolgoztak ki, de ezek gyakran csak akkor alkalmazhatók, ha bizonyos feltételek teljesülnek az M mátrixra.

Ahogy a bevezetőben említettük, egy lényeges probléma a (3.1) LKP összes megoldásának a meghatározása. A következőkben megmutatjuk, hogyan lehet a T halmaz tulajdonságait több megoldás keresésére felhasználni.

Ehhez a *Lemke-módszerből* indulunk ki, ami az egyik legjobban elterjedt és vizsgált módszer a (3.1) LKP megoldására [4], [6], [12]. Ismert, hogy ebben a módszerben (nemdegenerálás esetén) az \hat{S} halmazt algoritmikusan állítjuk elő. Itt felmerül a kérdés, lehet-e ezt az eljárást úgy módosítani, hogy a \hat{T} halmazt generálja és így esetleg több megoldást szolgáltatson. Ez egyszerűen megvalósítható, sőt azt is megmutatjuk, hogyan lehet a T halmaz további \hat{T} -től különböző részalmazzaiban megoldásokat keresni.

Először a lineáris komplementaritási probléma esetén a T halmaz néhány speciális tulajdonságát adjuk meg.

Legyen Σ az R_+^n halmaz belseje vagy valamelyik nyílt oldallapja. Akkor egyértelműen létezik egy $I(\Sigma)$ indexhalmaz úgy, hogy Σ -ra a következő reláció érvényes

$$\Sigma = \{x \in R_+^n \mid x_i > 0, i \in I(\Sigma), x_j = 0, j \notin I(\Sigma)\}.$$

Ebből a $T \cap \Sigma$ metszetre (2.9)-ből adódik

$$(3.2) \quad T \cap \Sigma = \left\{ x \in R_+^n \mid \frac{f_i(x)}{d_i} = \mu(x), i \in I(\Sigma) \right\}.$$

Mivel a lineáris komplementaritási probléma esetén az f_i függvények affinak, ezért közvetlenül belátható, hogy a $T \cap \Sigma$ halmazok összefüggőek és így a (3.1) LKP-ra a következő lemmát nyertük.

3.1. LEMMA: Ha Σ az R_+^n belseje vagy nyílt oldallapja, akkor a Σ halmaznak a T halmaz legfeljebb egy összefüggő részalmazzával van nem üres metszete.

3.1. DEFINÍCIÓ: Egy négyzetes M mátrixot nemdegeneráltnak nevezünk, ha minden főminora nullától különböző [12].

Erre a mátrixosztályra a következő állítás igaz [2]:

3.2. LEMMA: Ha a (3.1) LKP-ban az M mátrix nemdegenerált és Σ az R_+^n belseje vagy egy nyílt oldallapja, akkor a $\Sigma \cap T$ halmaz vagy üres, vagy egy összefüggő halmaz, amelynek a dimenziója maximálisan egy lehet, azaz egy pont vagy egy egyenes szakasz.

Ezekután a *Lemke-módszer* és az S halmaz kapcsolatára térünk át. A *Lemke-módszerben* [11] a (3.1) LKP helyett a

$$(3.3) \quad \mathbf{w} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{q} + \lambda \mathbf{d},$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \lambda \geq 0$$

rendszer vizsgáljuk, ahol \mathbf{w} n -dimenziós vektor, λ paraméter és $\mathbf{d} > \mathbf{0}$ fixen választott n -dimenziós vektor. (Az előző fejezetben adott eredményekkel való összehasonlítás céljából feltételezzük, hogy a \mathbf{d} vektor a D_α , illetve F_α halmazok definíciójában szereplő \mathbf{d} vektorral megegyezik). Az $(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \lambda)$ pontok, amelyek a (3.3) rendszernek eleget tesznek, egy poliédert határoznak meg, amelyet P -vel jelöljük. A P poliéder és a (3.1) LKP között az összefüggés a következő:

az $\bar{\mathbf{x}}$ pont a (3.1) LKP-nak akkor és csak akkor megoldása, ha létezik $\bar{\mathbf{w}} \geq \mathbf{0}$; úgy, hogy $\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{w}} = 0$ és $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{w}}, 0) \in P$.

A *Lemke-módszer* a P poliédernek a következő nem korlátos élétől

$$\hat{\tau} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \lambda) \in R_+^{2n+1} \mid \mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{w} = \mathbf{q} + \lambda \mathbf{d}, \lambda \geq \bar{\lambda}\}$$

indul ki, ahol

$$\bar{\lambda} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ 0, \frac{-q_i}{d_i} \right\}.$$

Ha $\bar{\lambda} = 0$, azaz $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a (3.1) LKP megoldása és az eljárás befejeződik.

Ha pedig $\bar{\lambda} > 0$, akkor a $\hat{\tau}$ élen $\lambda = \bar{\lambda}$ -ra a (3.3) rendszer megengedett bázismegoldását kapjuk.

3.2. DEFINÍCIÓ: Az $(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \lambda)$ P -beli pontot majdnem komplementárisnak nevezzük, ha $\mathbf{x}^T \mathbf{w} = 0$.

Akkor az $(\mathbf{x}, \mathbf{w}, \lambda) = (\mathbf{0}, \mathbf{q} + \bar{\lambda} \mathbf{d}, \bar{\lambda})$ megengedett bázismegoldás nyilvánvalóan a P poliéder majdnem komplementáris pontja.

Ebből a pontból kiindulva, a következő pivotszabály alkalmazásával bázismegoldások sorozatát generáljuk.

Pivotszabály. Ha w_i elhagyta a bázist, akkor x_i a következő bemenő változó és fordítva.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az így keletkező bázismegoldások majdnem komplementárisak és két egymás után következő bázismegoldást összekötő élek szintén majdnem komplementáris pontokból állnak. A szimplexlépések végrehajtásánál mindig a következő három eset egyike áll fenn.

- λ -tól különböző változó cserélődik ki a bázisból. Ebben az esetben egy további majdnem komplementáris bázismegoldás adódik és az eljárást a pivotszabály szerint folytatjuk.
- λ lép ki a bázisból. Az így adódó bázismegoldás x -komponense a (3.1) LKP megoldása, mivel $\lambda = 0$ és ez a pont majdnem komplementáris.
- A szimplexlépést nem lehet végrehajtani és az eljárás egy $\hat{\tau}$ -től különböző nem korlátos élen végződik.

Néhány mátrioxsztályra be lehet bizonyítani, hogy a fenti c) esetben a (3.1) LKP-nak nincs megoldása [6], [12].

Ha a bázismegoldások nem degeneráltak, akkor ez az eljárás véges sok lépés után a b) vagy c) eset előfordulásával végződik.

Az S halmaz pontjai és a P poliéder majdnem komplementáris pontjai között a következő összefüggés áll fenn [2].

3.3. LEMMA: Egy R_+^n -beli x pont akkor és csak akkor az S halmaz eleme, ha létezik $\lambda \geq 0$ úgy, hogy az $(x, w, \lambda) = (x, Mx + q + \lambda d, \lambda)$ pont a P poliéder majdnem komplementáris pontja.

Mivel a *Lemke-módszerben* generált élsorozat nyilvánvalóan egy összefüggő ponthalmaz és minden pont majdnem komplementáris pont, figyelembe véve, hogy az induló pontban $x=0$, a következő állítást kapjuk.

3.4. LEMMA: Legyen L a *Lemke-módszerben* generált ponthalmaz x -komponense. Akkor $L \subseteq \hat{S}$.

3.1. Megjegyzés: A 3.2. lemmából következik, ha a (3.1) LKP-ban az M mátrix nem degenerált, akkor $L = \hat{S}$.

Az S és T halmazok, valamint az \hat{S} és \hat{T} halmazok közötti összefüggésből a *Lemke-módszer* módosítására a következő lehetőség adódik:

Ha λ -ra a nemnegativitási feltételt elhagyjuk, akkor elvárható, hogy az ennek megfelelően módosított eljárás $x=0$ -ból kiindulva a \hat{T} halmazt generálja.

Tehát a (3.3) rendszer helyett a (3.1) LKP-ra a következő rendszert vizsgáljuk

$$(3.4) \quad \begin{aligned} w &= Mx + q + \lambda d \\ w &\geq 0, \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

és az így meghatározott poliédert \bar{P} -sal jelöljük. Hasonlóan a P poliéderhez, egy x pont akkor és csak akkor a (3.1) LKP megoldása, ha egy $w \geq 0$ létezik, amelyre $x^T w = 0$ és $(x, w, 0) \in \bar{P}$. De ellentétben a P poliéderrel, ez a pont általában a \bar{P} poliédernek nem csúcspontja.

Legyen

$$\hat{\lambda} = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{-q_i}{d_i} \right\}.$$

Akkor

$$\hat{\epsilon} = \{(x, w, \lambda) \in R^{2n+1} \mid x = 0, w = q + \lambda d, \lambda \geq \hat{\lambda}\}$$

a \bar{P} poliéder nem korlátos éle, és $\lambda = \hat{\lambda}$ -ra a (3.4) rendszer megengedett bázismegoldását kapjuk, amely a \bar{P} poliéder majdnem komplementáris pontja, azaz $x^T w = 0$. Az előbb megadott pivotszabály alkalmazásával lehet akkor az $(x, w, \lambda) = (0, q + \hat{\lambda}d, \hat{\lambda})$ pontból kiindulva bázismegoldások sorozatát generálni, amelyben minden bázismegoldás és az átmeneti élek is a \bar{P} poliéder majdnem komplementáris pontjaiból állnak.

Mivel λ -ra a nemnegativitási feltételt elhagytuk, a *Lemke-módszer* b) esete mint befejezés nem fordulhat elő, azaz a sorozat mindig egy nem korlátos éllel végződik. (Megemlítjük, hogy a 2.2. megjegyzés alapján a \hat{T} halmaz nem korlátos.)

Az S halmazhoz hasonlóan a T halmaz és a \bar{P} poliéder között a következő összefüggés áll fenn [2].

3.5. LEMMA: Egy R_+^n -beli x pont akkor és csak akkor a T halmaz eleme, ha létezik olyan λ , hogy az $(x, w, \lambda) = (x, Mx + q + \lambda d, \lambda)$ pont a \bar{P} poliéder majdnem komplementáris pontja.

Jelölje \hat{L} a módosított eljárásban generált ponthalmaz x -komponensét. Akkor hasonlóan, mint az L halmaznál a következő állítás igaz [2].

3.6. LEMMA: A módosított eljárásban generált \hat{L} halmazra

$$\hat{L} \subseteq \hat{T}$$

áll fenn, és ha a (3.1) LKP mátrixa nem degenerált, akkor

$$\hat{L} = \hat{T}.$$

3.2. *Megjegyzés:* Ha a módosított eljárásban egy szimplex lépés végrehajtásánál a λ változó előjele változik, akkor a \bar{P} poliéder megfelelő élén létezik egy $(\bar{x}, \bar{w}, \bar{\lambda})$ pont, amelyben $\bar{\lambda} = 0$ és így \bar{x} a (3.1) LKP megoldása. Ez a pont a szimplextáblából meghatározható. Hasonlóan lehet a nem korlátos éleken megoldási pontok létezését ellenőrizni.

3.3. *Megjegyzés:* Ha $\hat{\lambda} \leq 0$, akkor $x = 0$ a (3.1) LKP megoldása, és a módosított eljárásban megpróbálunk a \hat{T} halmazban további megoldásokat találni. Az eredeti *Lemke-módszer* pedig ebben az esetben befejeződik.

3.4. *Megjegyzés:* Ha $\hat{\lambda} > 0$, akkor a módosított eljárás a λ változó előjelváltásáig megegyezik az eredeti *Lemke-módszerrel*. Ha egy megoldás adódik, akkor a *Lemke-módszer* befejeződik, míg a módosított módszer a keresést a \hat{T} halmazban folytatja.

Ebből a megjegyzésből következik, hogy minden problémánál, amelyre a *Lemke-módszer* egy megoldást határoz meg, a módosított módszerrel szintén ez a megoldás adódik.

Ezekután felmerül a kérdés, lehet-e a T halmaz \hat{T} -től különböző részalmazait is megoldási pontok keresésére használni. Ehhez a T halmaz (2.9)-ben adott jellemzésére utalunk. Eszerint könnyen eldönthető, hogy az R_+^n halmaz koordináta tengelyein vannak-e T -beli pontok.

Legyen $\bar{x} \in T$, és $I(\bar{x}) = \{i\}$ vagyis az \bar{x} pont az i -edik tengelyen fekszik. Akkor (2.9)-ből következik, hogy

$$\frac{f_i(\bar{x})}{d_i} \leq \frac{f_j(\bar{x})}{d_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq i.$$

Kihasználva, hogy $f(x) = Mx + q$ és $\bar{x}_j = 0$, $\forall j \neq i$ -re következik \bar{x} -re

$$\frac{m_{ii}\bar{x}_i + q_i}{d_i} \leq \frac{m_{ji}\bar{x}_i + q_j}{d_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad j \neq i,$$

ahol m_j az M mátrix elemei. Következésképpen a következő relációk teljesülnek:

$$\bar{x}_i \cong \frac{q_j d_i - q_i d_j}{m_{ii} d_j - m_{ji} d_i} = r_j, \quad \text{ha } m_{ii} d_j - m_{ji} d_i > 0,$$

$$0 \cong q_j d_i - q_i d_j = s_j, \quad \text{ha } m_{ii} d_j - m_{ji} d_i = 0,$$

$$\bar{x}_i \cong \frac{q_j d_i - q_i d_j}{m_{ii} d_j - m_{ji} d_i} = t_j, \quad \text{ha } m_{ii} d_j - m_{ji} d_i < 0.$$

Ha ennek megfelelően definiáljuk a J_1, J_2, J_3 indexhalmazokat

$$J_1 = \{j \mid m_{ii} d_j - m_{ji} d_i > 0\},$$

$$J_2 = \{j \mid m_{ii} d_j - m_{ji} d_i = 0\},$$

$$J_3 = \{j \mid m_{ii} d_j - m_{ji} d_i < 0\},$$

akkor az i -edik koordináta tengelyen akkor és csak akkor létezik a T halmaznak egy pontja, ha

$$(3.5) \quad \min_{j \in J_1} r_j \cong 0, \quad \min_{j \in J_2} s_j \cong 0, \quad \max_{j \in J_3} t_j \cong \min_{j \in J_1} r_j,$$

ahol megállapodás szerint $\min \{\emptyset\} = \infty$ és $\max \{\emptyset\} = -\infty$.

E kritérium alapján könnyen ellenőrizhető, hogy melyik tengelyen található a T halmaz pontjai.

3.5. *Megjegyzés:* $\bar{x}_i = \max r_j$ -re és $\bar{x}_i = \min r_j$ -re a (3.4) rendszer majdnem komplementáris bázismegoldásai adódnak, ha ezek az értékek végesek és (3.5) teljesül.

Kiindulva ezekből a bázismegoldásokból, a pivotszabály alkalmazásával majdnem komplementáris bázismegoldások sorozatát lehet generálni, amely vagy egy nem korlátos élen végződik, vagy az induló ponthoz visszavezet. Ily módon \hat{T} -től különböző részhalmazokat is lehet vizsgálni.

Összefoglalva a következő eljárást lehet javasolni:

a) Az $(x, w, \lambda) = (0, q + \hat{\lambda}d, \hat{\lambda})$ bázismegoldásból kiindulva a *módosított Lemke-módszerrel* vizsgáljuk a \hat{T} részhalmazt.

b) Kiválasztunk egy koordináta tengelyt, amelyet az előző fázisokban még nem értünk el és ellenőrizzük található-e rajta a T halmaz pontjai. Ha igen, akkor a 3.5. megjegyzés alapján létező bázismegoldás(ok) lesz(nek) az új kiindulási pont(ok). Ezt addig ismételjük, amíg minden koordináta tengelyt, amely T -beli pontokat tartalmaz vagy egy fázison belül elértünk, vagy induló tengelyként választottunk.

3.6. *Megjegyzés:* Az induló tengelyek választásából következik, hogy a b) lépés egyes fázisaiban a T halmaz különböző részhalmazait vizsgáljuk, mivel a 3.1. lemma szerint minden koordináta tengelynek legfeljebb egy részhalmazzal lehet nem üres metszete.

3.7. *Megjegyzés:* A b) pontban választandó kiindulási bázismegoldások az esetleg nem megengedett $(x, w, \lambda) = (0, q, 0)$ bázismegoldásból két szimplex lépéssel állíthatók elő, és így közbeneső megoldások tárolása nem szükséges. Ez a módszer implementálására nézve egy jelentős előny.

A javasolt módszerrel [2]-ben két tesztfeladatot oldottunk meg:

a) Az első problémát JAHANSHALOU és MITRA [8] mutatták be. Ebben a problémában

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

és se az eredeti *Lemke-módszer*, se a *Cottle—Dantzig-féle „Principal Pivot” módszer* [4] nem ad megoldást, annak ellenére, hogy a problémának két megoldása van.

A módosított eljárásunkkal hat szimplex lépéssel mindkét megoldást megtaláltuk.

b) A második probléma egy nemkonvex (konkáv) kvadratikus optimalizálási feladat, amelyet GIANESSI és TOMASIN [7] a vágási módszerük illusztrálására adták. A feladat a következő:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} (y_1 + y_2 - y_1^2 - y_2^2), \\ & -2y_1 - y_2 \cong -6, \\ & y_1 \cong 0, \quad y_2 \cong 0. \end{aligned}$$

A problémának 7 *Kuhn—Tucker-pontja* van, és így a megfelelő lineáris komplementaritási problémának is hét megoldása van. Az eljárásunk ezt a hét megoldást nyolc szimplex lépésben határozta meg. Az eredeti *Lemke-módszer* csak az $y_1=0, y_2=0$ lokális minimumhoz tartozó megoldást adja.

IRODALOM

- [1] BALAS, E., "Nonconvex quadratic programming via generalized polars", Carnegia-Mellon Univ. Pittsburgh, Pennsylvania (1972), Managem. Sci. Rep. No. 278.
- [2] BERNAU, H., „Eine Modifizierung des Hauptsatzes der Komplementarität“, *Mathematische Operationsforschung und Statistik, Ser. Optimization* (elfogadva).
- [3] BROWDER, F. E., "On continuity of fixed points under deformations of continuous mapping", *Summa Brasil Math.* 4 (1960) 183—190.
- [4] COTTLE, R. W. and DANTZIG, G. B., "Complementarity pivot theory of mathematical programming", in *Math. of Decision Sci. Part I. Eds. Dantzig G. B. and Veinott, A. F.* (1968) 11—136.
- [5] EAVES, B. C., "On the basic theorem of complementarity", *Math. Prog.* 1 (1971) 68—75.
- [6] EAVES, B. C., "The linear complementarity problem", *Manag. Sci.* 17 (1971) 612—634.
- [7] GIANESSI, F. and TOMASIN, G., "Nonconvex quadratic programs, linear complementarity problems and integer linear programs", in *Math. Prog. in Theory and Practice, ed. Hammer, P. L. and Zoutendijk, G.* (North Holland, Amsterdam, 1974), 162—201.
- [8] JAHANSHALOU, G. R. and MITRA, G., "Linear complementarity problem and a tree search algorithms for its solution", in *Survey of Math. Programming Vol. 2., Ed. Prékopa, A.*, (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979), 35—55.
- [9] KARAMARDIAN, S., "The nonlinear complementarity problem with applications, Part. I., II.", *Journ. Opt. Theory and Appl.* 4 (1969) 87—98, 167—181.

- [10] LE VAN PHI, „Über das lineare Komplementaritätsproblem”, Dissertation A, Bergakademie Freiberg, 1976.
- [11] LEMKE, C. E., „Bimatrix equilibrium point and mathematical programming”, *Manag. Sci.* **11** (1965) 681—689.
- [12] LEMKE, C. E., „Recent results on complementarity problems”, in *Nonlinear Programming*, Eds. Rosen, J. B. Mangasarian, O. L., Ritter, K. (Academic Press, 1970), 349—384.
- [13] LÜTHI, H. J., „Komplementaritäts- und Fixpunkt-algorithmen in der mathematischen Programmierung“, *Spieltheorie und Ökonomie, Lecture Notes in Economics and Math. Systems* **129** (Springer-Verlag, Berlin, 1976).
- [14] STAMPACCHIA, G. and HARTMANN, P., „On some nonlinear differential-functional equations”, *Acta Math.* **115** (1966) 271—310.

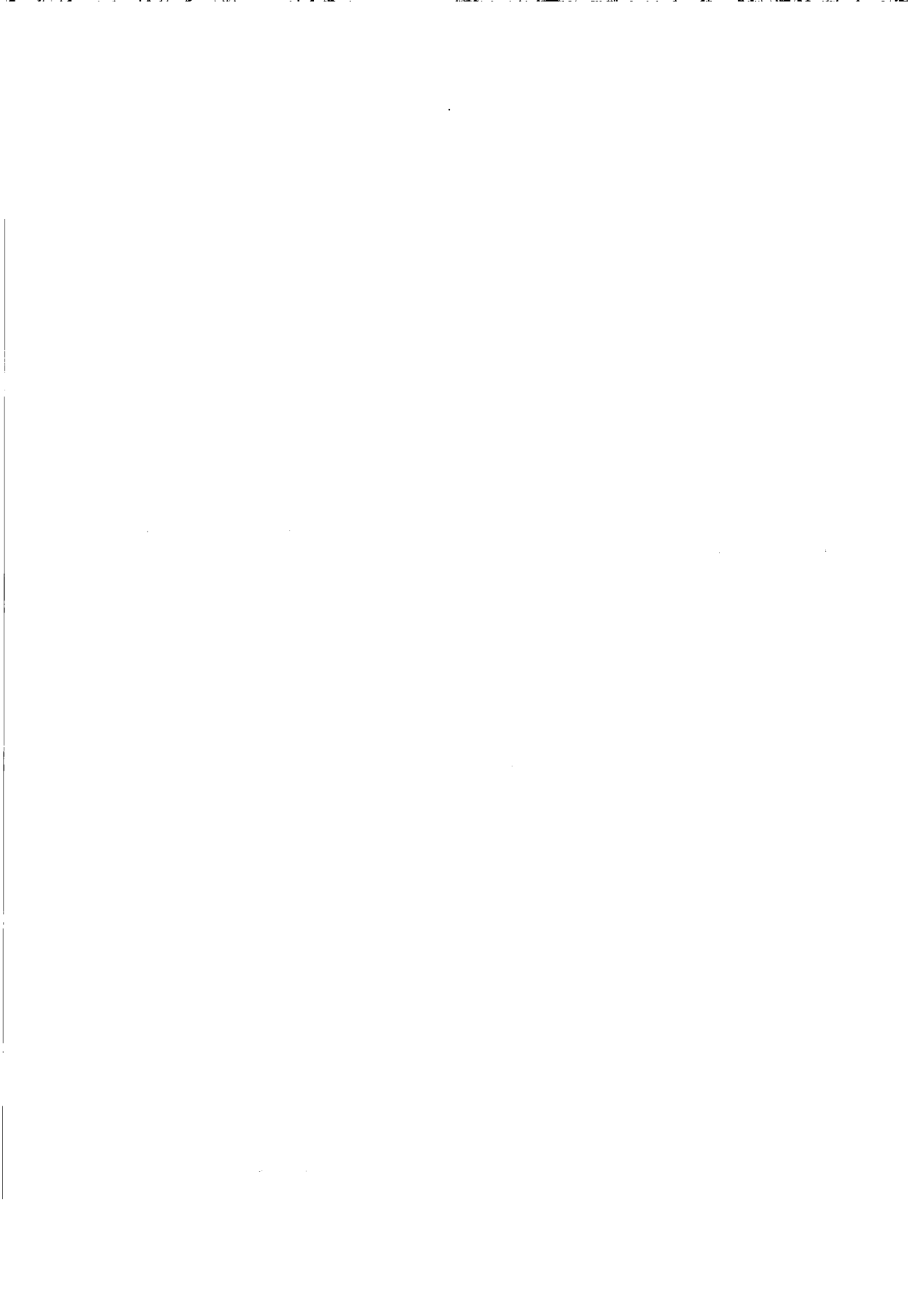
(Beérkezett: 1982. január 5.)

BERNAU HEINZ
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1111 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

ON THE DETERMINATION OF MORE THAN ONE SOLUTION OF THE LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEM

H. BERNAU

An extension of *Lemke's method* is given, which can be used for the search of more than one solution of the linear complementarity problem.



OPTIMÁLIS VEZÉRLÉS ELOSZTOTT PARAMÉTERŰ RENDSZERBEN

SZELEZSÁN JÁNOS

Budapest

Dolgozatunkban egy speciális eljárást adunk meg, mely kvadratikus funkcionálok adott halmazon történő minimalizálására szolgál. A módszer lényege, hogy a kvadratikus funkcionált visszavezeti lineáris funkcionálra, és a lineáris funkcionált minimalizálja a vezérlőfüggvények tulajdonságait figyelembe vevő módszerrel. A módszert egy parabolikus differenciálegyenlettel kapcsolatos optimalizálási feladat megoldásával mutatjuk be.

1. A kvadratikus funkcionál visszavezetése lineáris funkcionálra

Legyen

$$(1.1) \quad J(f) = (Af - g, Af - g),$$

ahol A Fredholm-, illetve Volterra-típusú operátor, azaz

$$(Af)(t) = \int_a^b A(t, s)f(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

illetve

$$(Af)(t) = \int_0^t A(t, s)f(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

g adott függvény, f pedig valamilyen megadott F halmazból vett vezérlőfüggvény.

Dolgozatunkban az (1.1) kvadratikus funkcionál minimalizálásával foglalkozunk. A feladatot egy speciális F halmazra oldjuk meg.

1.1. TÉTEL. Legyen $F \subset \mathcal{H}$ (\mathcal{H} valós Hilbert-tér) egy konvex halmaz. Az $f^* \in F$ akkor és csak akkor minimalizálja az (1.1) funkcionált, ha minimalizálja az F halmazon az

$$(1.2) \quad \mathcal{L}(f) = (A^*Af^* - A^*g, f)$$

lineáris funkcionált, ahol A^* az A adjungáltja.

Bizonyítás. Az (1.1) funkcionál az $A^*A=B$, és $-2A^*g=h$ jelöléssel

$$J(f) = (Bf, f) + (h, f) + (g, g)$$

alakba írható át, ebből a minimalizálás szempontjából (g, g) elhagyható, tehát a továbbiakban elegendő a

$$J^{(1)}(f) = (Bf, f) + (h, f)$$

funkcionált vizsgálni.

Tegyük fel, hogy f^* minimalizálja $J^{(1)}(f)$ -et az F halmazon. Legyen $f \in F$ egy az f^* -tól különböző függvény, és vegyük az

$$f_\lambda = (1-\lambda)f^* + \lambda f, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

függvényt. Feltevéünk szerint F konvex, tehát $f_\lambda \in F$.

Tekintsük a következő függvényt

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= J^{(1)}(f_\lambda) = (B[(1-\lambda)f^* + \lambda f], (1-\lambda)f^* + \lambda f) + (h, (1-\lambda)f^* + \lambda f) = \\ &= J(f^*) + (2Bf^* + h, f - f^*)\lambda + (B(f - f^*), f - f^*)\lambda^2. \end{aligned}$$

Mivel $f^* \in F$ optimális megoldás, ezért a $\varphi(\lambda)$ függvény a $0 \leq \lambda \leq 1$ intervallumban minimumot vesz fel a $\lambda = 0$ pontban. Ez azt jelenti, hogy

$$(1.3) \quad 0 \leq \varphi'(0) = (2Bf^* + h, f - f^*)$$

ezért

$$(2Bf^* + h, f^*) \leq (2Bf^* + h, f)$$

azaz $f^* \in F$ minimalizálja az (1.2) funkcionált.

Megmutatjuk, hogy fordítva is igaz. Tegyük fel, hogy f^* minimalizálja a $(2Bf^* + h, f)$ funkcionált, azaz

$$(2Bf^* + h, f - f^*) \geq 0,$$

ahol $f \in F$ tetszőleges függvény.

Mivel $z = f - f^*$ -ra

$$\begin{aligned} J^{(1)}(f) &= J^{(1)}(f^* + z) = (B(f^* + z), f^* + z) + (f^* + z, h) = \\ &= J^{(1)}(f^*) + (2Bf^* + h, z) + (Bz, z) \end{aligned}$$

és a feltevés szerint $(2Bf^* + h, z) \geq 0$, valamint $(Bz, z) \geq 0$, ezért

$$J^{(1)}(f) - J^{(1)}(f^*) \geq 0.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

2. Optimalizálás a vezérlőfüggvények egy speciális halmazán

Legyen $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\alpha, \beta)$, és legyen a vezérlőfüggvények F^0 halmaza a következő:

$F^0 = \{f(t):$ 1. szakaszonként folytonos $[\alpha, \beta]$ -ban,

2. $a(t) \leq f(t) \leq b(t)$, ahol $a(t) < b(t)$ adott folytonos függvények, $t \in [\alpha, \beta]$,

3. $\int_\alpha^\beta f(t)r(t)dt = q$, ahol $r(t)$ adott, differenciálható, monoton függvény $[\alpha, \beta]$ -ban és q adott, az $\int_\alpha^\beta a(t)r(t)dt < q < \int_\alpha^\beta b(t)r(t)dt$

vagy az $\int_{\alpha}^{\beta} a(t)r(t)dt > q > \int_{\alpha}^{\beta} b(t)r(t)dt$ feltételnek eleget tevő
konstans.}

Legyen:

$$f_1^{(\xi)}(t) = \begin{cases} a(t), & \text{ha } \alpha \leq t \leq \xi, \\ b(t), & \text{ha } \xi < t \leq \beta \end{cases}$$

és legyen ξ_1 , az

$$(2.1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f_1^{(\xi)}(t)r(t)dt = q$$

egyenlet gyöke; legyen

$$f_2^{(\xi)}(t) = \begin{cases} b(t), & \text{ha } \alpha \leq t \leq \xi, \\ a(t), & \text{ha } \xi < t \leq \beta \end{cases}$$

és legyen ξ_2 az

$$(2.2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f_2^{(\xi)}(t)r(t)dt = q \quad \text{egyenlet gyöke.}$$

Világos, hogy $f_1^{(\xi)} \in F^0$, $f_2^{(\xi)}(t) = F^0$.

2.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy $r(t)$ -nek legfeljebb egy valós gyöke van az $[\alpha, \beta]$ intervallumban. Akkor a (2.1), ill. (2.2) egyenletnek egyetlen valós gyöke van az $\alpha \leq \xi \leq \beta$ intervallumban.

Bizonyítás. A bizonyítást a (2.1) egyenletre mutatjuk meg. Világos, hogy a

$$\mathcal{F}(\xi) = \int_{\alpha}^{\beta} f_1^{(\xi)}(t)r(t)dt$$

függvény folytonos, és a feltevés alapján

$$(2.3) \quad \mathcal{F}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} b(t)r(t)dt < q < \int_{\alpha}^{\beta} a(t)r(t)dt = \mathcal{F}(\beta),$$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} b(t)r(t)dt > q > \int_{\alpha}^{\beta} a(t)r(t)dt = \mathcal{F}(\beta)$$

ezért az $\mathcal{F}(\xi) = q$ egyenletnek van valós megoldása.

Mivel

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left[\int_{\alpha}^{\xi} a(t)r(t)dt + \int_{\xi}^{\beta} b(t)r(t)dt \right] = r(\xi)(a(\xi) - b(\xi)) \neq 0,$$

ha $r(\xi) \neq 0$, ezért $\mathcal{F}(\xi)$ szigorúan monoton, tehát egyetlen gyöke van az $[\alpha, \beta]$ intervallumban. Ha $r(t_0) = 0$, akkor $\left. \frac{d\mathcal{F}}{d\xi} \right|_{\xi=t_0} = 0$. De akkor sem lehet az $\mathcal{F}(\xi)$

függvénynek két metszéspontja az $\mathcal{F} = q$ egyenessel, mert akkor (2.3) miatt még egy lokális szélsőértékkel kellene rendelkeznie. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése mellett $f_1^{(\xi_1)}$, ill. $f_2^{(\xi_2)}$ minimalizálja a (1.1) funkcionált az F^0 halmazon.

Vezessük be a

$$G_{f^*}(t) = (A^*Af)(t) - (A^*g)(t), \quad f \in F^0$$

jelölést.

2.2. TÉTEL.

a) Ha az $[\alpha, \beta]$ intervallumon $G_{f^*}(t)$ monoton csökken és

$$1. \quad r(\alpha) \frac{dr}{dt} > 0; \quad G_{f^*}(t) > 0$$

vagy

$$2. \quad r(\beta) \frac{dr}{dt} < 0; \quad G_{f^*}(t) < 0,$$

akkor az $f^{(\xi_1)}(t)$ függvény

b) ha $G_{f^*}(t)$ monoton nő és

$$1. \quad r(\alpha) \frac{dr}{dt} > 0; \quad G_{f^*}(t) < 0$$

vagy

$$2. \quad r(\beta) \frac{dr}{dt} < 0; \quad G_{f^*}(t) > 0,$$

akkor az $f^{(\xi_2)}(t)$ függvény minimalizálja az (1.1) funkcionált az F^0 halmazon.

Bizonyítás. A bizonyítást az a) esetre mutatjuk meg, a b) eset hasonlóan bizonyítható.

A 2.1. tétel alapján elegendő megmutatni, hogy $f^{(\xi_1)}$ minimalizálja az

$$\mathcal{L}(f) = (G_{f^*}, f)$$

funkcionált.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $f^0 \in F^0$, amelyre

$$\mathcal{L}(f^0) \cong \mathcal{L}(f^{(\xi_1)})$$

azaz

$$(2.4) \quad \int_{\alpha}^{\beta} G_{f^*}(t) [f^{(\xi_1)}(t) - f^0(t)] dt \cong 0.$$

Először megmutatjuk, hogy (2.4)-ből $G_{f^*}(\alpha) \cong G_{f^*}(t) \cong G_{f^*}(\beta)$ miatt $G_{f^*}(t) > 0$ esetén

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(t) - f^0(t)) dt \cong 0,$$

$G_{f^*}(t) < 0$ esetén pedig

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(t) - f^0(t)) dt \cong 0$$

adódik.

Valóban $f^{(\xi_1)}$ -et (2.4)-be írva azt kapjuk, hogy

$$0 \cong \int_{\alpha}^{\xi_1} G_{f^*}(t)(a(t)-f^0(t)) dt + \int_{\xi_1}^{\beta} G_{f^*}(t)(b(t)-f^0(t)) dt,$$

azaz

$$\int_{\alpha}^{\xi_1} G_{f^*}(t)(f^0(t)-a(t)) dt \cong \int_{\xi_1}^{\beta} G_{f^*}(t)(b(t)-f^0(t)) dt.$$

Mindkét integrálra alkalmazva az integrálszámítás középértéktételét és felhasználva, hogy $G(t)$ monoton csökken, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G_{f^*}(\xi_1) \int_{\alpha}^{\xi_1} (f^0(t)-a(t)) dt &\cong G_{f^*}(\eta_1) \int_{\alpha}^{\xi_1} (f^0(t)-a(t)) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\xi_1} G_{f^*}(t)(f^0(t)-a(t)) dt \cong \int_{\xi_1}^{\beta} G_{f^*}(t)(b(t)-f^0(t)) dt = \\ &= G_{f^*}(\eta_2) \int_{\xi_1}^{\beta} (b(t)-f^0(t)) dt \cong G_{f^*}(\xi_1) \int_{\xi_1}^{\beta} (b(t)-f^0(t)) dt. \end{aligned}$$

Ebből ha $G_{f^*}(\xi_1) > 0$, akkor

$$\int_{\alpha}^{\xi_1} (f^0(t)-a(t)) dt \cong \int_{\xi_1}^{\beta} (b(t)-f^0(t)) dt$$

azaz

$$(2.5) \quad \int_{\alpha}^{\xi_1} (a(t)-f^0(t)) dt + \int_{\xi_1}^{\beta} (b(t)-f^0(t)) dt \cong 0.$$

Ha viszont $G_{f^*}(\xi_1) < 0$, akkor

$$(2.6) \quad \int_{\alpha}^{\xi_1} (a(t)-f^0(t)) dt + \int_{\xi_1}^{\beta} (b(t)-f^0(t)) dt \cong 0.$$

Felhasználva, hogy

$$\int_{\alpha}^{\xi_1} (a(t)-f^0(t)) dt \cong 0 \quad \text{és} \quad \int_{\xi_1}^{\beta} (b(t)-f^0(t)) dt \cong 0$$

(2.5)-ből azt kapjuk, hogy

$$(2.7) \quad \int_{\tau}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(t)-f^0(t)) dt \cong 0, \quad \alpha \cong \tau \cong \beta,$$

(2.6)-ból pedig

$$(2.8) \quad \int_{\tau}^{\alpha} (f^{(\xi_1)}(t)-f^0(t)) dt \cong 0; \quad \alpha \cong \tau \cong \beta.$$

Most megmutatjuk, hogy a fenti két egyenlőtlenségből és az $r(t)$ függvényre tett kikötésektől következik, hogy $f^0 \cong f^{(\xi_1)}$.

Használjuk fel, hogy $f^{(\xi_1)}(t)$ és $f^0(t)$ is megengedett megoldás. Ebből az adódik, hogy

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(t) - f^0(t)) r(t) dt = 0.$$

Integráljuk a bal oldalt parciálisan, először úgy, hogy $f^{(\xi_1)}(t) - f^0(t)$ primitív függvényének az

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(s) - f^0(s)) ds,$$

másodszor pedig az

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(s) - f^0(s)) ds$$

függvényt vesszük. Így az alábbi két kifejezést kapjuk:

$$(2.9) \quad r(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(t) - f^0(t)) dt + \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{dr}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(s) - f^0(s)) ds \right) dt = 0.$$

$$(2.10) \quad r(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(t) - f^0(t)) dt + \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{dr}{dt} \int_{\alpha}^{\alpha} (f^{(\xi_1)}(s) - f^0(s)) ds \right) dt = 0.$$

A feltevés szerint $\left(r(\alpha) \frac{dr}{dt} \right) > 0$, ezért és (2.7) miatt (2.9)-ből következik, hogy

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(t) - f^0(t)) dt = 0 \quad \text{és} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (f^{(\xi_1)}(t) - f^0(t)) dt = 0.$$

tehát

$$f^{(\xi_1)}(t) \equiv f^0(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

ugyanígy $r(\beta) \frac{dr}{dt} < 0$ miatt (2.10)-ből adódik, hogy

$$f^{(\xi_1)}(t) \equiv f^0(t).$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

3. Vezérlés parabolikus differenciálegyenlettel leírt rendszerben

Tegyük fel, hogy a folyamatot a

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

parabolikus típusú parciális differenciálegyenlet írja le az

$$(3.2) \quad u(x, 0) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } 0 \leq x \leq \beta, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \quad x > \beta \end{cases}$$

peremfeltétel mellett.

Ismeretes, hogy (3.1) megoldása a megadott feltétel mellett

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^\beta e^{-(x-s)^2/4t} f(s) ds.$$

Jelentse a vezérlőhatást $f(x)$. Legyen $g(x)$ egy adott függvény. Jelöljük $u_g(x, t)$ -vel a (3.1) differenciálegyenlet megoldását az

$$u(x, 0) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } 0 \leq x \leq \beta, \\ 0, & \text{ha } x < 0, \quad x > \beta, \end{cases}$$

$u_f(x, t)$ -vel pedig a (3.2) feltétel mellett.

Legyen a vezérlőfüggvények halmaza a következő:

$F^0 = \{f(x): 1. \text{ szakaszonként folytonos,}$

$$2. e^{ax} \leq f(x) \leq e^{bx}, \quad 0 \leq x \leq \beta, \quad 0 < a < b$$

$$3. u_f(\beta, \alpha) = u_g(\beta, \alpha)\}.$$

Legyen a minimalizálandó funkcionál

$$(3.3) \quad J(f) = \int_0^\beta (u_f(x, \alpha) - u_g(x, \alpha))^2 dx.$$

Tegyük fel, hogy g -re teljesül a $g(x) < e^{ax}$ feltétel.

Feladatunkat az előzőekben ismertett módszerrel oldjuk meg. Mivel

$$u_f(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \int_0^\beta e^{-(x-s)^2/4\alpha} f(s) ds = (Af)(x),$$

$$u_g(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \int_0^\beta e^{-(x-s)^2/4\alpha} g(s) ds = (Ag)(x),$$

ezért (3.3)

$$J(f) = (Af - Ag, Af - Ag) = (A(f - g), A(f - g))$$

alakban írható.

Az F^0 halmazban a 3. feltétel jelentése:

$$\int_0^\beta e^{-(\beta-s)^2/4\alpha} f(s) ds = \int_0^\beta e^{-(\beta-s)^2/4\alpha} g(s) ds = q,$$

azaz $r(x) = e^{-(\beta-x)^2/4\alpha}$ jelöléssel

$$\int_0^\beta r(x) f(x) dx = q.$$

Mivel a $J(f)$ funkcionál $G(x)$ gradiense:

$$G(x) = 2A^*A(f-g)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \int_0^\beta \left(\int_0^\beta e^{-(x-\tau)^2/4\alpha} e^{-(\tau-s)^2/4\alpha} d\tau \right) (f(s) - g(s)) ds,$$

ezért $G(x) > 0$, $\frac{dG}{dx} < 0$.

Tehát $G(x)$ monoton csökken $r(0) \frac{dr}{dx} > 0$, $G(x) > 0$, ezért a (3.3) funkcionált az F^0 halmazon az

$$f_1(\xi_1) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{ha } 0 \leq x \leq \xi_1 \\ e^{bx}, & \text{ha } \xi_1 < x \leq \beta \end{cases}$$

függvény minimalizálja, ahol ξ_1 az

$$\int_0^{\xi_1} e^{ax} e^{-(\beta-x)^2/4\alpha} + \int_{\xi_1}^\beta e^{bx} e^{-(\beta-x)^2/4\alpha} = \int_0^\beta e^{-(\beta-s)^2/4\alpha} g(s) ds$$

egyenlet gyöke.

IRODALOM

- [1] BALAKRISHNAN, A. V., *Introduction to Optimization Theory in Hilbert Space* (Springer, 1971).
- [2] PONTRJAGIN, L. SZ., BOLTYANSZKI, V. G., GAMKRELIDZE, R. V. és MISCSENKO, E. F., *Optimális folyamatok elmélete* (Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1968).
- [3] WARGA, J., *Optimal Control of Differential and Functional Equations* (Academic Press, London, 1972).
- [4] БУТКОВСКИЙ, А. Т., *Теория оптимального управления систем с распределенными параметрами* (Наука, 1965).
- [5] Мойсеев, Н. Н., *Элементы теории оптимальных систем* (Наука, 1975).

(Béérkezett: 1982. február 10.)

SZELEZSÁN JÁNOS

KSH ÁLLAMIGAZGATÁSI SZÁMÍTÓGÉPES SZOLGÁLAT
1015 BUDAPEST, CSALOGÁNY U. 30–32.
ELTE TTK ANALÍZIS II. TANSZÉK
1088 BUDAPEST, MŰZEUM KRT 6–8.

OPTIMAL CONTROL IN DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

J. SZELEZSÁN

This paper presents a special method for the optimization of a quadratic functional on a given set of control functions. The idea of the method is the transformation of the quadratic functional to a linear one, equivalent to it, and optimizing the linear functional by using the special feature of the set of control functions.

The method is illustrated by solving an optimization problem for a distributed parameter system.

KÖNYVISMERTETÉS

Neumann János: *A kvantummechanika matematikai alapjai*
 Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980, 284 oldal

NEUMANN JÁNOS (1903—1957) sokoldalú életművében, amely a matematikai logikától s az axiomatikus halmazelmélettől a modern algebra és funkcionálanalízis, a geometria és topológia számos problémakörén keresztül az ergodelméletig, a játékelméletig, az ökonometriáig és a számítógéptudomány elméleti és gyakorlati megalapozásáig terjed — különleges helyet foglal el „*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*” című monográfiája, melynek első kiadását a Springer-Verlag 1932-ben publikálta. E könyv jelentősége az elméleti fizika XX. századi fejlődésében kb. ahhoz a hatáshoz hasonlítható, amelyet ABEL, CAUCHY, majd WEIERSTRASS munkássága gyakorolt a matematikai analízis fejlődésére a múlt század első felében. A fizikának a századforduló táján megkezdődött „forradalma”, a kvantumelmélet kialakulása nyomán ugyanis a felfedezések olyan rohamos gyorsasággal követték egymást, hogy évtizedekig háttérbe szorultak a matematikailag szigorú tárgyalásmód követelményei, s csak NEUMANN JÁNOS teremette meg a további fejlődéshez az egységes és szilárd logikai alapot.

A vállalkozás kivételes sikerét mutatja, hogy a könyv egyfelől a matematikán belül is — főleg a Hilbert-tér lineáris operátorainak spektrálméletében — mindmáig tartó viharos fejlődést indított el, másfelől aktualitását a kvantumelmélet művelői számára immár kb. félszáz éve folyamatosan megőrizte. Ennek tulajdonítható, hogy a második világháború óta ismételtelen új kiadásai jelentek meg (így 1955-ben az USA-ban, 1964-ben a Szovjetunióban, 1968-ban az NSZK-ban); s a jelen magyar nyelvű kiadást bizonyára továbbiak követik majd a világ minden táján. Ugyanakkor kiemelendő, hogy a kvantumelméletnek az utolsó húsz évben Neumann tárgyalásmódjára építő ún. axiomatikus iskolái alakultak ki, melyeknek tipikus képviselője a *Wightman-féle „relativisztikus kvantumtérelmélet”*¹. A *Neumann-féle koncepció* fő célkitűzése az alábbiakban foglalható össze.

Mint ismeretes, DIRAC a húszas évek végén közölt cikkeiben és „*Principles of Quantum Mechanics*” c. könyvében (1935) oly módon kísérelte meg a nem sokkal előbb publikált *Heisenberg—Born—Jordan-féle mátrixmechanika* és a *Schrödinger-féle hullámmechanika* egységes kvantumelméletté való alakítását, hogy a

$$H\varphi(q_1, \dots, q_k) = \lambda\varphi(q_1, \dots, q_k)$$

hullámegyenletben szereplő

$$H = H\left(q_1, \dots, q_k; \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}\right)$$

Hamilton-operátort egy fiktív, önellentmondó követelményekkel definiált „ δ -függvény” segítségével az Ω állapotteret vonatkozó

$$\int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} h(q_1, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k) \varphi(q'_1, \dots, q'_k) dq'_1 \dots dq'_k$$

integráloperátorra transzformálta, majd a nyert integrálegyenletnek a *Heisenberg-elmélet* alapjául szolgáló mátrix-sajátértékegyenletet feleltette meg. NEUMANN JÁNOS viszont megmutatta, hogy az említett cél az *absztrakt Hilbert-tér* elméletének megfelelő mélységű kiépítése útján köz-

¹ Vö. pl. *Proc. Int. Cong. Math.* 1962 (Stockholm), 587—595.

vetlenül elérhető; ennek ugyanis a mátrixmechanikában használt l^2 sorozattér és a hullámmechanikában használt L^2 függvényter két, egymással ekvivalens realizációja, melyeknek izomorfiját a *Riesz—Fischer-féle alaptétel* biztosítja.

Ami a tárgyalás részleteit illeti, az általános jellegű, történeti áttekintést is adó I. fejezet után (11—25. o.) a kötetnek mintegy harmadát kitevő II. fejezet (26—114. o.) az *absztrakt Hilbert-tér elméletének* tömör axiomatikus felépítését adja. A III. fejezet (115—172. o.) azzal a kérdéssel foglalkozik, hogyan lehet a kvantumstatistika fogalmait és megállapításait mintegy lefordítani a *Hilbert-tér operátorelméletének* nyelvére. Legyen \mathfrak{R} egy fizikai mennyiség, melyhez az R operátor tartozik, φ pedig egy olyan mechanikai rendszer állapotát jellemző hullámfüggvény, amelyben \mathfrak{R} -re vonatkozó mérés történt. A 119. oldalon található azon megállapítás, hogy „az \mathfrak{R} mennyiség várható értéke a φ állapotban az $(R\varphi, \varphi)$ skaláris szorzattal egyenlő” — alapvető az egész elmélet szempontjából. Ugyancsak kiemelendő az a mély eredmény, hogy „akárhány (véges számú) $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \dots$ mennyiség egyidejű mérhetőségének szükséges és elegendő feltétele a megfelelő R, S, \dots operátorok felcserélhetősége” (132—133. o.). A fejezet két csúcspontja: a *Heisenberg-féle határozatlansági relációnak* egy igen világos és meggyőző diszkussziója (133—143. o.), valamint az ún. *Dirac-féle sugárzselméletnek* új, ezgakt levezetése (147—172. o.), mely utóbbi egyúttal maradéktalanul tisztázza a korai kvantumelmélet egyik legnehezebb paradoxonát: a fény kettős (részint hullámszerű, részint kvantált, azaz fotonokból álló) természetét. A IV. fejezet (173—197. o.) tárgya: annak megmutatása, hogy a várható érték kvantummechanikai használatára vonatkozó fenti eredmény s ezzel együtt az előző fejezetben kiépített egész „kvantumstatisztika” igen kevés axiómából kiindulva tisztán deduktív módon származtatható. Végül a két utolsó fejezet (198—254. o.) az elméletet a kvantummechanikai sokaságok termodinamikájára, valamint a mérési folyamatok különböző aspektusainak tüzetes vizsgálatára alkalmazza. A felsorolt rövid utalások természetesen csak kevésbé tudják érzékeltetni a könyv gazdag és rendkívül gondolatébresztő anyagát.

Az *Akadémiai Kiadó* minden tekintetben magas színvonalú, szép kiállítású kötetben adta közre ezt a standard művet. (Az orosz nyelvű kiadás nyomán készült fordítás SEBESTYÉN ÁKOS, az ellenőrző szerkesztés ABONYI IVÁN munkája.) A magyar kiadás előszavából legfeljebb a világhírű magyar analízis-iskolákra (főleg FEJÉR LIPÓT és RIESZ FRIGYES hatására) való utalás, továbbá a problémákör egyik jelentős későbbi „melléktermékének”: az általánosított függvények modern elméletének megemlézése hiányolható. Az előbbivel kapcsolatban pl. nemcsak a *Riesz—Fischer-tétel* kulcsszerepének kihangsúlyozására gondolunk, hanem arra a (fizikus oldalról gyakran figyelmen kívül hagyott) tényre is, hogy az egész *Neumann-féle elmélet* csak a *modern Lebesgue-féle integrálfogalom* RIESZ FRIGYES által bevezetett és elfogadott kiterjesztésének, az ún. *absztrakt Lebesgue—Stieltjes-integrálnak* alapulvételével érvényes — a *Riemann-integrál* felhasználása távolról sem elegendő!

Évtizedek óta könyvek, tanulmányok, megemlékezések hosszú sora bizonyítja, hogy NEUMANN JÁNOS, aki 18 éves koráig *Budapesten* tanult és FEJÉR LIPÓTNÁL szerezte doktori címét 1926-ban, munkásságával emigrációja után is nagy hatást gyakorolt a magyar tudományos életre.² Remélhető, hogy egyik főművének itthoni megjelentetése nyomán az említett hatás a matematikát *alkalmazó* hazai szakemberek körében is egyre általánosabbá fog válni.

MIKOLÁS MIKLÓS

² L. pl. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA klasszikussá vált „*Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*” c. monográfiáját és MIKOLÁS MIKLÓS: „*Valós függvénytan és ortogonális sorok*” c. könyvének (Bp. 1978) 14.3 fejezetét.

ÜTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban kell beküldeni.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezésekképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segéd tételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától függetlenül, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerinti alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

- [1] Farkas, J., »Über die Theorie der einfachen Ungleichungen«, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 124 (1902) 1—27.
- [2] Kéri, G., „DUALSIMP”, rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertető 2. 1973. május) 19—20.
- [3] Prékopa, A., „Sztóhasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról”, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
- [4] Prabhu, N. U., “Recent research on the ruin problem of collective risk theory”, in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.
- [5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak, ezek költsége — nyomott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terheli.

TARTALOMJEGYZÉK

Csőrgő Sándor és Horváth Lajos: Statisztikai következtetés cenzorált mintákból 1
Tomkó József: Tartózkodási időproblémák Markov-láncokra 91
Csige László és Tomkó József: A gépkiszolgálási probléma exponenciális eloszlások esetén 107
Bolla Mariann: A QRPS-transzformáció: a QR algoritmus általánosítása valós téglalap-
mátrixok szinguláris felbontására 125
Kontor Istvánné: Az érintőhiperbolákkal generált mindig konvergens egyenletmegoldó iterá-
cióról 141
Beck György: Gyors algoritmus Toeplitz-típusú szalagmátrix együtthatójú lineáris
egyenletrendszerek megoldására 157
Schmidt E. Tamás: Megjegyzések a relációs adatbázis modellekben értelmezett függőségi
relációkhoz 177
Demetrovics János és Katona Gyula: A relációs adatbázis extrémális problémái 183
Bernau Heinz: A lineáris komplementaritási probléma több megoldásának a meghatározá-
sáról 195
Szelezsán János: Optimális vezérlés elosztott paraméterű rendszerben 207
Könyvismertetés 215

INDEX

Csőrgő, S. and Horváth, L., Statistical inference from censored samples 1
Tomkó, J., Sojourn time problems for Markov chains 91
Csige, L. and Tomkó, J., The machine interference for exponentially distributed operating
and repair times 107
Bolla, M., The QRPS transformation: The generalization of the QR algorithm for singular
values decomposition of rectangular real matrices 125
Kontor, I., Über das Berührungshyperbel-Verfahren zur Bestimmung reelle Wurzeln von
nichtlinearen Gleichungen 141
Beck, Gy., Fast algorithm for the solution of banded Toeplitz sets of linear equations 157
Schmidt, E. T., Remarks on dependence relations in relational database models 177
Demetrovics, J. and Katona, Gy., Extremal problems of the relational data bases 183
Bernau, H., On determination of more than one solution of the linear complementarity
problem 195
Szelezsán, J., Optimal control in distributed parameter systems 207
Book reviews 215

Alkalmazott matematikai lapok

1982/3-4

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

8

KÖTET

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI
TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ

PRÉKOPA ANDRÁS

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTES

ARATÓ MÁTYÁS

A SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG TAGJAI

BENCZUR ANDRÁS, CSISZÁR IMRE, FARKAS MIKLÓS, GYIRES BÉLA,
HATVANI LÁSZLÓ, HEPPES ALADÁR, KÁTAI IMRE, KIS OTTÓ,
SARKADI KÁROLY, TANDORI KÁROLY, VARGA LÁSZLÓ,
SZANTAI TAMÁS (TECHNIKAI SZERKESZTŐ)

MUNKATÁRSÁK

BAJCSAY PÁL, BALLA KATALIN, BÉKÉSSY ANDRÁS, CSÁKI PÉTER,
CSIRIK JÁNOS, DEMETROVICS JÁNOS, DÉNES JÓZSEF, DÖMÖLKI BÁLINT,
ELBERT ÁRPÁD, FORGÓ FERENC, GÉCSEG FERENC, GERGELY JÓZSEF,
GESZTELYI ERNŐ, GYÓRFFY LÁSZLÓ, KLAFSZKY EMIL KÓSA ANDRÁS,
KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA, LÁSZLÓ ZOLTÁN, MIKOLÁS MIKLÓS,
MOGYORÓDI JÓZSEF, NÉMETH GÉZA, NEMETZ TIBOR, RÉVÉSZ PÁL,
RÓZSA PÁL, STAHL JÁNOS, SZÉP JENŐ, TANKÓ JÓZSEF, TOMKÓ JÓZSEF,
TÓKE PÁL, TUSNÁDY GÁBOR, VINCZE ENDRE

VIII. kötet 3—4. szám

Szerkesztőség: 1502 Budapest XI., Kende u. 13—17.

Kiadóhivatal: 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztő bizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Prékopa András, főszerkesztő
1502 Budapest, Kende u. 13—17.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 100 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, 1055 Budapest V., Alkotmány u. 21. címen (pénzforgalmi jelzőszám 215—11 488), külföldi megrendelések a Kultúra Kúkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest, Pf. 149. címen (pénzforgalmi jelzőszám 218—10 990) lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Acta Physica Hungaricae,
3. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

ÚJRAINVERTÁLÁSI STRATÉGIÁK DINAMIKUSAN SÚLYOZOTT ÉRDEMSZÁMOK ALAPJÁN

KÉRI GERZSON

Budapest

Több lineáris programozási programcsomag újrainvertálási eljárása a *Markowitz-féle stratégia* olyan közelítéseit alkalmazza a szorzat formájú bázis inverz előállítására, amelyek az oszlopvektorok bázisba vonási sorrendjének érdemszámok segítségével történő *a priori* meghatározásával kezdődnek. Ilyenkor a tényleges invertálási eljárás lépései során már csak az egymás után választandó pivotelemek sorai felől dönthetünk szabadon. E dolgozatban rámutatok az eddig alkalmazott érdemszám-típusok elvi hibáira és javaslatot teszek helyettük olyan, valószínűségi megfontolás alapján értelmezett érdemszámok alkalmazására, amelyek az eddig használt érdemszámokhoz hasonlóan könnyen meghatározhatók, gyorsan kiszámíthatók, azonban mentesek az azoknál észlelt elvi hibáktól, tehát jobb újrainvertálási stratégiát eredményeznek.

1. Az újrainvertálás fogalma és célja

A lineáris programozásban újrainvertálás alatt közismerten az értendő, hogy nagyméretű, ritka mátrixú problémák megoldása során bizonyos időközönként vagy lépésközönként, vagy egyszerűen szükség esetén újra meg újra előállítjuk a szorzat formában vagy eliminációs formában tárolt bázis inverzet elemi mátrixok szorzataként. E cikkben csak a szorzat formában történő újrainvertálással foglalkozunk.

Röviden megfogalmazzuk az eljárás lényegét: Jelöljük az invertálandó mátrixot A -val, oszlopvektorait a_i -vel (ezekről feltesszük, hogy együtt egy lineáris programozási probléma bázisát alkotják, tehát lineárisan függetlenek), elemeit a_{ij} -vel. Az újrainvertálás során úgy járunk el, mintha a szimplex módszerrel a

$$B^{(0)} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

egységmátrix-bázisból kiindulva először kicserélnénk az e_{p_1} egységvektort az a_{q_1} vektorra, majd e_{p_2} -t az a_{q_2} vektorra és így tovább. Utoljára az e_{p_m} egységvektort cseréljük ki az a_{q_m} vektorra. Itt p_1, p_2, \dots, p_m , ill. q_1, q_2, \dots, q_m egyaránt az $1, 2, \dots, m$ számok valamilyen, egyelőre tetszőleges permutációja. A különböző újrainvertálási stratégiák e permutációknak (vagyis a pivotálási sorrendnek) az ügyes megválasztásával igyekeznek az eljárást minél hatékonyabbá tenni.

A fentiek szerint eljárva, r lépés után a

$$B^{(r)} = B^{(0)} \cup \{a_{q_1}, a_{q_2}, \dots, a_{q_r}\} \setminus \{e_{p_1}, e_{p_2}, \dots, e_{p_r}\}$$

bázisba jutunk, az utolsó $B^{(m)}$ bázis tehát az A mátrix a_1, a_2, \dots, a_m oszlopvektorai-ból fog állni, de általában a megadottól eltérő sorrendben tartalmazva ezeket. A $B^{(m)}$ bázisban az oszlopvektorok sorrendjét egyértelműen meghatározza a p_i és q_i szá-

végzi, hogy az $A^{(r)}$ mátrix nem triviális része minél kevesebb helyen változzék az $A^{(r-1)}$ mátrix azonos részéhez képest. Mivel

$$A^{(r)} = F^{(r-1)} A^{(r-1)},$$

vagyis elemenként felírva

$$a_{ih}^{(r)} = \begin{cases} a_{ih}^{(r-1)} - \frac{a_{iq_r}^{(r-1)}}{a_{p_r q_r}^{(r-1)}} \cdot a_{p_r h}^{(r-1)}, & \text{ha } i \neq p_r, \\ \frac{a_{ih}^{(r-1)}}{a_{p_r q_r}^{(r-1)}}, & \text{ha } i = p_r, \end{cases}$$

ezért a p_r, q_r indexek választásához azt vizsgáljuk, hogy hány olyan $i \neq p_r, h \neq q_r$ indexpár van, melyekre

$$a_{iq_r}^{(r-1)} \cdot a_{p_r h}^{(r-1)} \neq 0.$$

Tetszőleges

$$r \in \{1, 2, \dots, m-1\},$$

$$j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_{r-1}\},$$

$$k \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_{r-1}\}$$

esetén jelöljük $R_j^{(r-1)}$ -gyel az $A^{(r-1)}$ mátrix j -edik sorában levő nemnullák számát, $C_k^{(r-1)}$ -gyel pedig az $A^{(r-1)}$ mátrix k -adik oszlopában levő nemnullák számát. E jelölésekkel a kérdéses (i, h) indexpárok számát az

$$(R_{p_r}^{(r-1)} - 1) \cdot (C_{q_r}^{(r-1)} - 1)$$

szorzat adja meg, hiszen azt kell összeszámolnunk, hogy az

$$i \neq p_r,$$

$$a_{iq_r}^{(r-1)} \neq 0$$

tulajdonsággal rendelkező i indexekhez tartozó sorok és a

$$h \neq q_r,$$

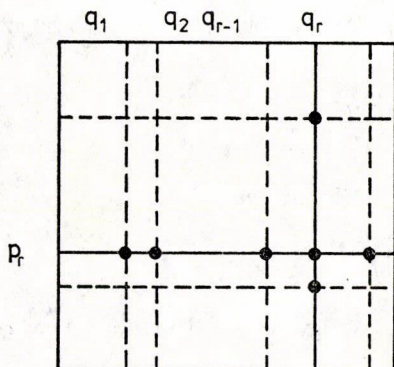
$$a_{p_r h}^{(r-1)} \neq 0$$

tulajdonsággal rendelkező h indexekhez tartozó oszlopok hány helyen keresztezik egymást.

A fenti gondolatmenetet az 1. ábrával illusztráljuk. Az ábrán kövér pontokkal jelöltük a mátrix p_r, q_r indexű elemével egy sorban és vele egy oszlopban levő nemnullák helyét az $A^{(r-1)}$ mátrixban. A szaggatott vonalak kereszteződéseiben változik az $A^{(r)}$ mátrixnak a p_r -edik soron és a q_1, q_2, \dots, q_r -edik oszlopokon kívüli része, az $A^{(r-1)}$ mátrix hasonló részéhez képest. A p_r -edik sornak egyetlen nemnulla eleme sem lehet a q_1, q_2, \dots, q_{r-1} -edik oszlopban, mivel ezekbe az oszlopokba már egy-szvektorok kerültek.

A megfogalmazott gondolatmenet alapján az alábbi újrainvertálási stratégia kínálkozik; ez a *Markowitz-féle stratégia*: Az utolsót kivéve minden lépésben (tehát $r=1, 2, \dots, m-1$ esetén) határozzuk meg az

$$R_j^{(r-1)} \quad (j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_{r-1}\})$$



1. ábra

A *Markowitz-féle újrainvertálási stratégiának* az alkalmazhatóságát korlátozza, hogy minden r esetén szükség van az $A^{(r)}$ mátrix szerkezetének az ismeretére. Az összes ilyen mátrix szerkezetére vonatkozó információk tárolása nagyméretű feladat és szerényebb méretű számítógép esetén nemigen oldható meg a gép belső memóriájában. Ha viszont külső tárolót vennénk igénybe e mátrixok szerkezetének a nyilvántartására, az túlságosan sok adatmozgatást vonna maga után az újrainvertálások folyamán. Ezért a *Markowitz-féle újrainvertálási stratégia* helyett sok esetben praktikusabb olyan egyszerűbb eljárásokat alkalmazni, melyeknél csak magára az A mátrixra kell meghatározni az egyes sorokban és egyes oszlopokban levő nemnullák számát, nem pedig valamennyi $A^{(r)}$ mátrixra. Az ilyen eljárásokat a *Markowitz-féle újrainvertálási stratégia* közelítéseinek lehet tekinteni.

3. Érdemszámok meghatározásán alapuló újrainvertálási stratégiák mint a Markowitz-féle stratégia közelítései

A *Markowitz-féle újrainvertálási stratégia* r -edik lépése során kiválasztjuk az $a_{p_r, q_r}^{(r-1)}$ pivotemet, ezáltal a már korábban meghatározott p_1, p_2, \dots, p_{r-1} , ill. q_1, q_2, \dots, q_{r-1} indexeken kívül a p_r, q_r indexek értéke is ismertté válik. Amíg $r < m$, addig a $p_{r+1}, p_{r+2}, \dots, p_m$ és $q_{r+1}, q_{r+2}, \dots, q_m$ indexek viszont még ismeretlenek az aktuális újrainvertálási eljárás során.

A most tárgyalásra kerülő egyszerűbb, közelítő módszerek már abban is eltérnek a *Markowitz-féle újrainvertálási stratégiától*, hogy e módszerek alkalmazása esetén előre, a tulajdonképpeni újrainvertálási lépések előtt kijelöljük valamennyi q_1, q_2, \dots, q_m oszlopindexet. Először az egyes oszlopokhoz érdemszámokat rendelünk, arra törekedve, hogy az érdemszámok nagyságrendje szerint kijelölendő q_r indexekhez minden lépésben található legyen olyan alkalmas p_r index, hogy az e két indexhez tartozó

$$(R_{p_r}^{(r-1)} - 1) \cdot (C_{q_r}^{(r-1)} - 1)$$

szorzat többé-kevésbé a *Markowitz-módszernél* értelmezett minimum közelében legyen. Mivel azonban most nem törekszünk az $A^{(r)}$ mátrixok szerkezetének a nyil-

és

$$C_k^{(r-1)} \quad (k \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_{r-1}\})$$

számokat és keressük meg az

$$(R_j^{(r-1)} - 1) \cdot (C_k^{(r-1)} - 1)$$

szorzat minimumát a fenti j, k indexek közül azokra, melyekre fennáll

$$|a_{jk}^{(r-1)}| > \varepsilon,$$

ahol ε egy kicsiny pozitív szám (az úgynevezett pivot tűrési). Ezután a p_r, q_r indexek értékének válasszuk a szóban forgó minimumhoz tartozó j, k indexeket.

vántartására, azért nagyvonalú közelítéssel a

$$q_{jk} = (R_j - 1) \cdot (C_k - 1)$$

szorzatokat vesszük alapul az érdemszámok meghatározásához, ahol R_j , ill C_k az A mátrix j -edik sorában, ill. k -adik oszlopában levő nemnullák számát jelöli. Mivel pedig nem tudhatjuk előre, hogy a későbbi lépések során milyen j indexek jöhetnek még számításba a p_r sorindexek kiválasztásához, azért vagy a q_{jk} mennyiségek j szerinti minimumát, vagy pedig az ilyen mennyiségek számtani középértékét választjuk az érdemszámok értékéül, azonban a minimumnak vagy a középértéknek a képzésekor csak olyan j indexekre szorítkozunk, melyekre $a_{jk} \neq 0$.

Néhány, a gyakorlatban leginkább alkalmazott érdemszám-típus a következő:

a) *Optimista érdemszámok:*

$$M_1(k) = \min_{j:a_{jk} \neq 0} q_{jk} = (C_k - 1) \cdot \min_{j:a_{jk} \neq 0} (R_j - 1).$$

Az oszlopindexeknek e kifejezések alapján történő rangsorolása azon az elváráson alapul, hogy az itt minimumot adó j indexek később választhatók a p_r indexek értékéül.

b) *Átlagoló érdemszámok:*

$$\frac{1}{C_k} \cdot \sum_{j:a_{jk} \neq 0} q_{jk} = \frac{C_k - 1}{C_k} \cdot \sum_{j:a_{jk} \neq 0} (R_j - 1).$$

Ezek meghatározásához tehát számtani közepek képzését alkalmazzuk.

c) *Közelítő átlagoló érdemszámok:*

$$\sum_{j:a_{jk} \neq 0} R_j.$$

Ez az összeg adódik, ha $(R_j - 1) \cdot (C_k - 1)$ helyett az $R_j C_k$ szorzatok számtani közepét képezzük.

Az alkalmazni kívánt érdemszámok kiszámítása után rendezzük el őket növekvő sorrendben, s ennek alapján jelöljük ki az oszlopvektorok bázisba vonásának a sorrendjét meghatározó q_1, q_2, \dots, q_m indexeket úgy, hogy a q_1 indexhez tartozzék a legkisebb, q_m -hez pedig a legnagyobb értékű érdemszám.

A q_i indexeknek az érdemszámok segítségével történő a priori meghatározása után az újrainvertálási stratégia további részeként az alábbi eljárást alkalmazzuk a p_i indexek meghatározására: A p_1, p_2, \dots, p_{r-1} indexeknek, s ezek alapján az $F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(r-2)}$ elemi mátrixoknak a meghatározása után, a soron következő r -edik ($1 \leq r \leq m$) lépésben számítsuk ki az

$$a_{q_r}^{(r-1)} = F^{(r-2)} \dots F^{(1)} F^{(0)} a_{q_r}$$

vektort. Ezután a p_r indexnek válasszuk a

$$j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_{r-1}\},$$

$$|a_{jq_r}^{(r-1)}| > \varepsilon$$

feltételeknek elegendő j indexek közül azt, melyre R_j értéke a lehető legkisebb. E módszer egy továbbfejlesztett változatánál valószínűségi megfontolást alkalmaznak az $R_j^{(r-1)}$ számok becslésére, s a becsült értékek alapján határozzák meg a p_r indexeket. Ez az úgynevezett *Tewarson-féle valószínűségi szabály*.

4. Az eddig említett érdemszámokkal szemben felmerülő kifogások

Az optimista érdemszámok meghatározásához külön-külön az egyes oszlopokra minimalizáljuk az $(R_j - 1) \cdot (C_k - 1)$ szorzatot a várhatóan szóba jövő j indexekre. Ez a módszer teljesen csődöt mond abban az esetben, ha minden k esetén véletlenül ugyanabban a néhány sorban van a minimális értéket adó ilyen kifejezés. De az általános esetre is elmondhatjuk, hogy a lépések előrehaladtával egyre valószínűbbé válik, hogy a minimumhoz tartozó j index az eddigi p_i -k között van, tehát a j, k indexpárhoz tartozó elem már nem választható pivotelemnek.

Bizonyára az optimista érdemszámok fent körvonalazott hibájának felismerése vezetett arra, hogy azok helyett átlagoló érdemszámok alkalmazását javasolták. Ezek bevezetését a következőképpen lehet megindokolni: Ha — mint azt az előbb már megjegyeztük — az optimista érdemszámok értelmezésével kapcsolatos minimumot adó j indexek nem biztos, hogy minden lépésben választhatók, akkor az elsőként bázisba vont oszlopvektor kivételével a többi oszlop esetében nem tudjuk, hogy végül is mely sorok közül választhatunk később pivotelemet. Ha pedig az elején nem tudhatjuk, hogy később mely sorokat lehet választani, akkor talán az lesz a legjobb eljárás, ha egyenlő esélyt feltételezünk minden olyan sorindex későbbi választására vonatkozóan, melyekben nullától különböző elem van. Ekkor pedig egy számtani középértéket (mint várható értéket) célszerű minimalizálni.

A fenti okoskodás helyessége véleményem szerint erősen vitatható, mivel úgy érzem, hogy az átlagoló érdemszámok módszere sokkal jobban torzítja az eredeti *Markowitz-módszert*, mint ahogy az optimista érdemszámokon alapuló módszer. Először is: nagyméretű mátrixok esetén az első jó néhány lépésben még 1-hez közeli valószínűséggel választható a minimumot adó sorindex. Másodszer: ez a valószínűség csak a lépések felének elvégzése után csökken 1/2 alá. Harmadszer: még a legeslegutolsó lépésnél is a minimumhoz tartozó j index választása a legvalószínűbb, annak ellenére, hogy az utolsó lépések idejére már nagyfokú nivellálódás következik be az ilyen (*likelihood értelmű*) valószínűségek között. Negyedszer: az oszlopokban levő összes nemnulla elem figyelembevétele azért is helytelen, mert annak már egész biztosan rendkívül kicsi a valószínűsége az eljárás vége felé sorra kerülő lépések esetén is, hogy rögzített k -ra pl. az 5 legkisebb vagy a 10 legkisebb q_{jk} közül egyiknek a sora sem választható pivotelemnek valamennyi ilyen sor korábbi lekötése miatt.

Az átlagoló érdemszámokkal szemben felhozott kifogások természetesen vonatkoznak a közelítő átlagoló érdemszámokra is.

5. Valószínűségi megfontoláson alapuló érdemszámok

Tetszőleges k oszlopindexre rendezzük el nagyság szerint nemcsökkenő sorrendben a nullától különböző a_{jk} elemekhez tartozó q_{jk} értékeket. Jelöljük a legkisebb ilyen értékhez tartozó sorindexet j_1 -gyel, a következő legkisebbhez tartozót j_2 -vel és így tovább. Legyen tehát

$$q_{j_1 k} \leq q_{j_2 k} \leq \dots \leq q_{j_t k} \text{ (ahol } t = C_k \text{).}$$

A sorindexek j_1, j_2, \dots, j_t sorozata természetesen minden k -ra más és más, ezek k -tól való függését azonban nem tüntetjük fel a jelölésben, mivel így áttekinthetőbb.

Számítsuk most ki, mi annak a valószínűsége, hogy az újrainvertálás során $r-1$ lépés megtétele, tehát a p_1, p_2, \dots, p_{r-1} sorindexek lekötése után a

$$j \in J_r = \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_{r-1}\}$$

sorindexekre korlátozódva $q_{j,k}$ lesz a minimális, azaz fennáll

$$\min \{q_{j,k} : j \in \{j_1, j_2, \dots, j_i\} \cap J_r\} = q_{j,k},$$

ha feltesszük, hogy a J_r indexhalmaz egyforma valószínűséggel lehet az $\{1, 2, \dots, m\}$ halmaz bármely $m-r+1$ elemű részhalmaza. A keresett valószínűség meghatározása szempontjából kedvezőek azok az esetek, amikor a j_1, j_2, \dots, j_{s-1} indexek J_r -en kívül (azaz valamennyien p_1, p_2, \dots, p_{r-1} közé) esnek, j_s viszont J_r -be esik. Egyszerű számolással adódik, hogy az ilyen kedvező esetek száma

$$(r-1)(r-2)\dots(r-s+1)(m-r+1) = (m-r+1) \cdot \frac{(r-1)!}{(r-s)!},$$

az összes lehetséges eset száma pedig

$$m(m-1)\dots(m-s+1) = \frac{m!}{(m-s)!}.$$

tehát a keresett valószínűség értéke

$$\varphi(m, r, s) = \frac{(r-1)(r-2)\dots(r-s+1)(m-r+1)}{m(m-1)\dots(m-s+1)} = \frac{\binom{m-s}{r-s}}{\binom{m}{r-1}}.$$

A fenti gondolatmenet alapján kézenfekvően kínálkozik az az ötlet, hogy az újrainvertálás r -edik lépésében súlyozzuk a $q_{j,k}$ értékeket ezek választásának $\varphi(m, r, s)$ valószínűségével, s az így súlyozott összegek mint érdemszámok minimalizálásával válasszuk ki a pivotelem sorát. Ily módon az

$$M(k|r) = \sum_{s=1}^r \frac{\binom{m-s}{r-s}}{\binom{m}{r-1}} \cdot q_{j,k}$$

érdemszámokat kapjuk, amelyek használatával egyaránt kiküszöbölhetjük az optimista érdemszámok és az átlagoló érdemszámok hibáit. Ahhoz azonban, hogy a fenti gondolatmenet teljesen korrekt legyen, külön diszkutálnunk kellene azt az esetet, amikor a $q_{j_1,k}, q_{j_2,k}, \dots, q_{j_s,k}$ értékek között azonosak is vannak. Ezenkívül $M(k|r)$ definíciója is egy kis módosításra szorul abban az esetben, ha $r > C_k$. Ha az utóbbi esetben egyszerűen figyelmen kívül hagynánk (vagyis nullának tekintenénk) azokat a tagokat, melyek a futó index C_k -nál nagyobb értékeihez tartoznak, akkor az alkalmazott súlyok összege 1-nél kisebb lenne, így pl. csupa azonos $q_{j_1,k} = q_{j_2,k} = \dots = q_{j_t,k}$ érték esetén $M(k|r) < q_{j_1,k}$ adódna, pedig ilyenkor azt várnánk, hogy

$M(k|r)$ értéke is azonos legyen a q_{jk} mennyiségek közös értékével. (Ehhez az érvhez figyelembe vettük a

$$\sum_{s=1}^r \binom{m-s}{r-s} = \binom{m}{r-1}$$

kombinatorikai azonosságot, amely a *Pascal-háromszög* egyik jól ismert tulajdonságát fejezi ki.)

A részletes diszkusziót mellőzzük, mivel a gondolatmenet egészében véve már úgyszólván sok közelítést, elhanyagolást tartalmazott, így indokolatlan volna egyes aprólékos részletekben teljes precíziségre törekedni.

6. Az optimista érdemszámok általánosítása

Tényleges használatra nem javaslom az előző szakaszban definiált $M(k|r)$ érdemszámokat sem, mivel egy ilyen, állandóan hosszabbodó összegnek újrainvertálási érdemszámként való alkalmazását nem tartom praktikusnak. Gondoljunk azonban megint arra, hogy alkalmas p szám választása esetén a p számú legkisebb q_{jk} érték valamelyike mindig nagy valószínűséggel választható a pivotelem sorának a korábbi értelemben vett kijelölésére. Ezért azt javaslom, hogy minden k oszlopindexre csak a p számú legkisebb q_{jk} értéket vegyük figyelembe az érdemszámok meghatározásához. Ennek megfelelően értelmezzük az $M(k|r)$ összeg p -edrendű szeletét a következőképpen:

$$M_p(k|r) = \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\binom{m-s}{r-s}}{\binom{m}{r-1}} \cdot q_{j_s k} + \frac{\sum_{s=p}^r \binom{m-s}{r-s}}{\binom{m}{r-1}} \cdot q_{j_p k}.$$

A $q_{j_p k}$ -nál is kedvezőtlenebb q_{jk} mennyiségeket tehát most nem vesszük figyelembe, és úgy tekintjük, mintha ezek valamennyien a p -edik legkisebbel azonos értékűek lennének. Ily módon az $M_p(k|r)$ értékét definiáló összegben szereplő együtthatók összegét is sikerül megőrizni 1 értékűnek.

$p=1$ -re $M_p(k|r)$ értéke nem függ az r lépésszámlálótól és éppen az optimista érdemszámokat adja. Ezért $M_p(k|r)$ az optimista érdemszámok általánosításának tekinthető, s ezt most $p=2$ -re és $p=3$ -ra külön is megadjuk:

$$M_2(k|r) = \frac{m-r+1}{m} \cdot q_{j_1 k} + \frac{r-1}{m} \cdot q_{j_2 k},$$

$$M_3(k|r) = \frac{m-r+1}{m} \cdot q_{j_1 k} + \frac{(r-1)(m-r+1)}{m(m-1)} \cdot q_{j_2 k} + \frac{(r-1)(r-2)}{m(m-1)} \cdot q_{j_3 k}.$$

Véleményem szerint feltétlenül megéri legalább ezek valamelyikével számolni. Hogy érdemes-e továbbmenni a p értékével, és meddig, arra csak a későbbi tapasztalatok adhatnak választ.

Végül röviden megfogalmazzuk a $p=3$ választáshoz tartozó újrainvertálási stratégiát. (Más p esetére ez könnyen átfogalmazható.) Megjegyezzük, hogy e stratégiát — mint minden, érdemszámok használatán alapuló újrainvertálási stratégiát —

csak egy triangularizálási eljárás után visszamaradó mátrix-részre érdemes alkalmazni, ezért csak olyan mátrixok esetére fogalmazzuk meg, melyeknek minden sorában és minden oszlopában van legalább két nullától különböző elem. A q_1, q_2, \dots, q_m oszlopindexek a priori kijelölésének általános lépése során q_r -et az adott r -hez tartozó $M_3(k|r)$ érdemszámoknak a $k \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_{r-1}\}$ halmazon való minimalizálásával határozzuk meg. A csak két nullától különböző elemet tartalmazó oszlopokra azonban $M_3(k|r)$ helyett az $M_2(k|r)$ összeget vegyük figyelembe a minimalizáláshoz. A q_1, q_2, \dots, q_m oszlopindexek meghatározása, tehát az oszlopvektorok bázisba vonása sorrendjének a kijelölése után a p_1, p_2, \dots, p_m sorindexek meghatározását és a tulajdonképpeni invertálást a korábban tárgyalt módszerekkel azonos módon végezzük. Hangsúlyozzuk, hogy e módszernél az érdemszámokat menet közben dinamikusan változtatjuk. Ez a vonás a korábban tárgyalt érdemszámoktól eltérő jellegzetessége az $M_p(k|r)$ érdemszámok módszerének.

7. Számítástechnikai tapasztalatok

Véletlenszám generátorral előállított 25×25 , ill. 50×50 méretű ritka (azaz egész pontosan: a kisebbik méret esetén 64 darab, 10-től 40 százalékig terjedő sűrűségű, a nagyobbik méret esetén pedig 27 darab, 5-től 15 százalékig terjedő sűrűségű) mátrix invertálásával próbáltam ki, hogy az előzőekben tárgyalt különböző érdemszámok hogyan válnak be a gyakorlatban.

Jöjjenek először a rideg statisztikai adatok.

a) 25×25 méretű ritka mátrixok invertálása során adódó eta elemek száma (64 esetre összegezve) különböző invertálási stratégiák esetén:

| | Tewarson féle korrekció nélkül | Tewarson féle korrekcióval |
|---|--------------------------------|----------------------------|
| Optimista érdemszámok | 21 355 | 20 981 |
| Átlagoló érdemszámok | 20 390 | 19 816 |
| Dinamikus érdemszámok | $p = 2$ | 21 339 |
| | $p = 3$ | 21 159 |
| | $p = 10$ | 20 965 |
| Dinamikus érdemszámok részleges alkalmazása | | |
| $p = 10$ | 19 883 | 19 450 |
| Oszlopok nem nulláinak száma mint érdemszám | 20 180 | 19 647 |

b) 50×50 méretű ritka mátrixok invertálása során adódó eta elemek száma hasonlóan (27 esetre összegezve)

| | Tewarson féle korrekció nélkül | Tewarson féle korrekcióval |
|---|--------------------------------|----------------------------|
| Optimista érdemszámok | 26 109 | 24 756 |
| Átlagoló érdemszámok | 24 233 | 22 528 |
| Dinamikus érdemszámok | $p = 2$ | 25 356 |
| | $p = 3$ | 25 102 |
| | $p = 10$ | 24 857 |
| Dinamikus érdemszámok részleges alkalmazása | | |
| $p = 10$ | 23 027 | 20 954 |
| Oszlopok nem nulláinak száma mint érdemszám | 23 890 | 21 157 |

Az eddigi futtatásoknak a fenti táblázatokból is leszűrhető főbb tapasztalatai az alábbiakban foglalhatók össze:

1. Minden egyes érdemszám típushoz tartozó program két változatban: a Tewarson-féle korrekció (valószínűségi szabály) alkalmazása nélküli, ill. annak alkalmazásával történő változatban készült el. Tewarson szabálya (amely az invertálás közben fellépő közbülső transzformált mátrixok soraiban levő nem nullák számának valószínűségi megfontoláson alapuló becslésére vonatkozik) a két táblázat statisztikai adatainak biztonsága szerint minden esetben lényegesen javít az újrainvertálás hatékonyságán.

2. Sajnos a fenti táblázatok szerint nem ennyire egyértelmű az érdemszámoknak valószínűségi megfontoláson alapuló, általam épp e dolgozatban javasolt dinamikus értelmezésének az előnye, ugyanis az eddigi statisztikai adatok kifejezetten ellentmondanak a 4. szakaszban kifejtett valószínűségi gondolatmenet fő következtetésének. Számomra ez olyan paradoxonnak tűnik, melynek nem látom a pontos magyarázatát, de arra gyanakszom, hogy az ellentmondás oka a generált feladatok viszonylag kis méretében és nem elég ritka voltában keresendő. Nagyobb méretek kellene ahhoz, hogy a dinamikus érdemszámok előnye a gyakorlatban is érvényesüljön.

3. Nagyon biztató viszont, hogy ilyen kis méretek esetén is javul az újrainvertálás hatékonysága az eddig használt érdemszámokhoz viszonyítva, ha a dinamikus érdemszámokat részlegesen, csak a kezdeti iterációk során alkalmazzuk. (A folytatásban az oszlopok nem nullái számának növekvő sorrendjében haladunk tovább.) E felismeréshez kapcsolódó további elméleti munkát és gyakorlati kísérleteket igényel annak meghatározása, hogy a mátrix méretétől és sűrűségétől függően hány iterációig érdemes elmenni optimálisan a dinamikus érdemszámok alkalmazásával.

4. A táblázatokból azért hagytuk ki a közelítő átlagoló érdemszámok esetét, mivel a statisztikai adatok szerint az átlagoló érdemszámoktól alig eltérő elemiszámok adódnak. Gyakorlati szempontból nincs szignifikáns különbség az átlagoló, ill. a közelítő átlagoló érdemszámok alkalmazása között.

Az invertáló programok valamennyi változata FORTRAN nyelven készült, a futások IBM 3300 gépen történtek.

IRODALOM

- [1] MARKOWITZ, H. M., "The elimination form of the inverse and its application to linear programming", *Management Science* 3 (1957) 255—269.
- [2] ORCHARD-HAYS, W., *Advanced Linear Programming Computing Techniques* (McGraw-Hill, New York, 1968).
- [3] TEWARSON, R. P., *Sparse Matrices* (Academic Press, New York and London, 1973).
- [4] TOMLIN, J. A., "Pivoting for size and sparsity in linear programming inversion routes", *J. Inst. Maths. Applics.* 10 (1972) 289—295.

(Beérkezett: 1982. június 9.)

KÉRI GERZSON
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓINTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U. 18—22.

REINVERSION STRATEGIES WITH DYNAMICALLY WEIGHTED
MERIT NUMBERS

G. KÉRI

Many linear programming systems apply such approaches of *Markowitz's method* for building the product form of the inverse that start with the *a priori* selection of the column-order of pivoting by the help of merit numbers. Some critical remarks on the presently applied, known merit numbers are given in this paper. Also some other new alternatives are proposed for the calculation of the merit numbers, which eliminate the deficiency of the old merit numbers and still are easy to compute. The merit numbers of this type are deduced by a probabilistic chain of thoughts and, contrary to the old merit numbers, they are dynamically modified during the determination of the column-order of pivoting. They result in better reinversion strategies than the old merit numbers do.

EGY ÚJ, SZIMPLEXFELBONTÁSON ALAPULÓ ALGORITMUS STACIONÁRIUS PONT MEGHATÁROZÁSÁRA

SOÓS ZSOLT

Budapest

Ebben a dolgozatban adott függvény stacionárius pontját meghatározó algoritmust fogunk ismertetni. Az algoritmus bizonyos feltételezések mellett a stacionárius pont környezetét diszjunkt szimplexek uniójára bontja fel, és a szimplexek csúcspontjait címkével látja el. Az adott szimplexfelbontásban meghatároz egy jól indexezett szimplexet, azaz egy olyat, amelyeknek minden csúcspontja különböző címkével van ellátva. Végtelenül finomodó szimplexfelbontássorozat esetén a jól indexezett szimplexek csúcspontjaiból alkotott sorozatok torlódási pontjai a függvény stacionárius pontjai lesznek.

1. Bevezetés

A szimplexfelbontáson alapuló, címkézési technikát alkalmazó algoritmusok eddig többnyire a fixpontszámításban voltak használatosak. TODD [6] részletes, alapos fixpontszámítási tanulmányában több oldalról is megmutatta, hogy van kapcsolat a nemlineáris programozás és a fixpontszámítás között. FISCHER és GOULD [1] egy ilyen típusú algoritmust dolgoztak ki a nemlineáris komplementaritási probléma megoldására. Ezek a tanulmányok, cikkek inspiráltak arra, hogy vizsgáljam, lehetséges-e ilyen típusú algoritmust kifejleszteni a nemlineáris programozási feladat megoldására. Először a feltétel nélküli minimalizálási feladat megoldásával foglalkoztam. Itt a jól indexezett részsziimplexet meghatározó algoritmusokkal nem foglalkozunk, mivel abból igen sok ismert, és algoritmusunkba bármelyik beépíthető. A legismertebbek ezek közül H. SCARF [5] módszere, KUHN és MACKINNON [2] ún. szendvics módszere, valamint VAN DER LAAN és TALMAN [3], [4] változó dimenziós módszere. A következő fejezetben megfogalmazzuk a feladatot, majd pedig az algoritmusban igen fontos szerepet játszó címkézési szabályt. Az algoritmus ismeretése után az utolsó fejezetben bebizonyítjuk, hogy a jól indexezett részsziimplexek csúcspontjaiból alkotott sorozatok torlódási pontjai megegyeznek az adott függvény stacionárius pontjaival.

2. A feladat megfogalmazása

A továbbiakban tegyük fel, hogy adott az n -dimenziós euklideszi téren értelmezett $f: R^n \rightarrow R$ függvény. Feltesszük, hogy folytonosan differenciálható, így létezik a parciális deriváltjaiból álló gradiensvektora minden pontban. Keressük az f stacionárius pontját, azaz olyan $\bar{x} \in R^n$ pontot, amelyre

$$(2.1) \quad \nabla f(\bar{x}) = 0$$

A feltétel nélküli minimalizálási feladat esetén a (2.1) feltétel teljesülése a lokális minimum szükséges feltétele, konvex és pszeudokonvex függvény esetén a stacionárius pont meghatározása ekvivalens a globális minimumhely meghatározásával.

Az f függvényről bizonyos feltételek teljesülését fogjuk megkívánni. A feltétel megfogalmazása érdekében definiáljuk a következő halmazokat:

$$D_\alpha = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in R^n, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq \alpha \right\}, \alpha > 0.$$

A D_α halmazra vonatkozóan feltételezzük, hogy az α pozitív szám úgy van meghatározva, hogy f -nek létezik stacionárius pontja D_α -ban. Amennyiben ez nem áll fenn, és a stacionárius pont helyére vonatkozóan előzetes információk állnak rendelkezésünkre, akkor eltolással mindig elérhető, hogy a stacionárius pont becsült környezete a nemnegatív ortánsba kerüljön. Az α értékét elég nagyoknak választva D_α rendelkezni fog a kívánt tulajdonsággal.

Definiáljuk a $D_{\alpha 0}$, $D_{\alpha 1}$, $D_{\alpha 2}$ halmazokat a következőképpen:

$$D_{\alpha 0} = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D_\alpha, \text{létezik } i \text{ index, hogy } x_i = 0 \}$$

$$D_{\alpha 1} = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D_\alpha, x_i > 0 \text{ minden } i\text{-re, } \sum_{i=1}^n x_i = \alpha \}$$

$$D_{\alpha 2} = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D_\alpha, x_i > 0 \text{ minden } i\text{-re} \}.$$

Nyilvánvalóan látszik, hogy a $D_{\alpha 0}$ és a $D_{\alpha 1}$ halmazok úniója a D_α halmaz határával, míg a $D_{\alpha 0}$ és a $D_{\alpha 2}$ halmazok úniója magával a D_α halmazzal egyezik meg. Az f függvényre vonatkozó feltételezésnek a D_α halmaz határán kell teljesülnie:

1F: Ha $\bar{\mathbf{x}} \in D_{\alpha 0}$ és $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$, akkor létezik olyan i index, hogy $\bar{x}_i \nabla_i f(\bar{\mathbf{x}}) > 0$, ahol $\nabla_i f$ az f gradiensének i -edik koordinátáját jelöli.

2F: Ha $\bar{\mathbf{x}} \in D_{\alpha 1}$, akkor létezik olyan i index, hogy $\nabla_i f(\bar{\mathbf{x}}) > 0$. (Ezzel ekvivalens: $\bar{x}_i \nabla_i f(\bar{\mathbf{x}}) > 0$.)

Az 1F és 2F feltételezések azt kívánják meg az f függvénytől, hogy a

$$\min_{\mathbf{x} \in D_\alpha} f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \in D_\alpha$$

feltételes nemlineáris programozási feladatnak ne legyen D_α határán *Kuhn—Tucker értelemben vett stacionárius pontja*.

A továbbiakban a D_α halmaz helyett a vele homeomorf S^n n -dimenziós egység-szimplexet fogjuk vizsgálni, amely a következőképpen van definiálva:

$$S^n = \left\{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in R^{n+1}, y_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} y_i = 1 \right\}$$

Az S^n egységsszimplex felbontható n -dimenziós részszimplexek úniójára, ahol a részszimplexek belsejei diszjunktak és úniójuk kiadja az egész egységsszimplexet. Minden részszimplex $n+1$ csúcspont konvex burka. Az S^n többféle felbontási eljárás-

rása is ismert [6], ezek ismertetésével most nem foglalkozunk, csupán annyit tételezünk fel, hogy egy rögzített k pozitív egész szám esetén az S^n egységszimplex úgy van n -dimenziós részszimplexekre felbontva, hogy a részszimplexek átmérőinek maximuma kisebb vagy egyenlő, mint $\delta_k > 0$. Végtelenül finomodó szimplexfelbontáson azt a felosztássorozatot értjük, amely esetén $\delta_k \rightarrow 0$, midőn $k \rightarrow \infty$.

Az S^n egységszimplex és a D_α halmaz (mely szintén egy n -dimenziós szimplex) között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést lehet létesíteni. A leképezés olyan, hogy S^n egy szimplexfelbontása a D_α halmazon is egy szimplexfelbontást generál. A két halmaz közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a következő függvény biztosítja:

$$F: D_\alpha \rightarrow S^n$$

$$F(\mathbf{x})^T = \left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\alpha}, \dots, \frac{x_n}{\alpha}, 1 - \left(\frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\alpha} + \dots + \frac{x_n}{\alpha} \right) \right)$$

és a visszafelé való leképezés a következő:

$$F^{-1}: S^n \rightarrow D_\alpha$$

$$F^{-1}(\mathbf{y})^T = (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_n)$$

A továbbiakban a D_α és S^n halmazok közötti kapcsolatot igen sokszor kihasználjuk, így az S^n elemeit \mathbf{y} -nal, a D_α elemeit \mathbf{x} -szel fogjuk jelölni, és a kettő közötti összefüggést az F függvény szolgáltatja: $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$.

2.1. DEFINÍCIÓ. Az S^n egységszimplexen értelmezett L függvényt címkézőfüggvénynek nevezzük, ha L értékkészlete az $\{1, 2, \dots, n+1\}$ halmaz.

Az S^n részszimpleteinek csúcspontjait indexekkel, címkével fogjuk ellátni. Jól indexezettnek nevezünk egy részszimplexet, ha mind az $(n+1)$ csúcspontja különböző, az $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ halmazból választott címkével van ellátva. Felmerül a kérdés, hogy egy δ_k finomságú felosztás esetén, az L címkézőfüggvényt használva létezik-e jól indexezett szimplex. A *Sperner-lemma* [6] azt állítja, ha az L címkézőfüggvény speciális típusú, akkor létezik páratlan számú jól indexezett szimplex. Nevezetesen a következő feltételt kell az L függvénynek kielégítenie: ha $y_i = 0$, akkor $L(\mathbf{y}) \neq i$, azaz ha a csúcspont i -edik koordinátája 0, akkor a pont nem kaphatja az i indexet, címkét. Vegyük észre, hogy a *Sperner-lemma* feltételezése csak az S^n határán tesz megkövetést a címkézőfüggvényre vonatkozóan. A *Sperner-lemma* bizonyítása nem ad algoritmust, eljárást a jól indexezett szimplex meghatározására, mindössze csak annak létezését állítja. Az első fejezetben említett algoritmusok egy rögzített szimplexfelbontás esetén egy jól indexezett részszimplexet határoznak meg.

3. Az algoritmus

Az előző fejezetben bevezettük, ismertettük az összes olyan definíciót, fogalmat, segédesszöveget, amely szükséges az új algoritmus megfogalmazásához.

Készítsük el az S^n egységszimplex egy δ finomságú szimplexfelosztását. A részszimplexek csúcspontjait lássuk el címkével a következő L címkézőfüggvény fel-

használásával:

$$(3.1) \quad L(\mathbf{y}) = \begin{cases} n+1, & \text{ha } \nabla f(\mathbf{x}) \leq 0, \\ i, & \text{ha } \mathbf{x} \in D_{\alpha_2} \text{ és } \nabla f(\mathbf{x}) \not\leq 0 \text{ és} \\ & \nabla_i f(\mathbf{x}) = \max_j \nabla_j f(\mathbf{x}), \\ i, & \text{ha } \mathbf{x} \in D_{\alpha_0} \text{ és } \nabla f(\mathbf{x}) \not\leq 0 \text{ és} \\ & x_i \nabla_i f(\mathbf{x}) = \max_j x_j \nabla_j f(\mathbf{x}), \end{cases}$$

ahol $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ (vagy $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y})$).

Vegyük észre, hogy az S^n pontjait úgy indexezzük, hogy az eredeti D_α halmazon értelmezett ∇f értékeit és a D_α elemeit vesszük figyelembe. A következőkben megmutatjuk, hogy a fenti L címkézőfüggvény kielégíti a *Sperner-lemmában* tett feltevést.

2.1. TÉTEL. A (3.1) módon definiált L címkézőfüggvény kielégíti a *Sperner-lemma* feltevését, azaz ha $\mathbf{y} \in S^n$ esetén $y_i = 0$, akkor $L(\mathbf{y}) \neq i$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $y_{n+1} = 0$. Ekkor viszont $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y})$ a D_{α_1} halmaz eleme. A 2F. feltevés miatt létezik olyan i index, hogy $\nabla_i f(\mathbf{x}) > 0$. Mivel $\nabla f(\mathbf{x}) \not\leq 0$, így $L(\mathbf{y}) \neq n+1$.

Ha létezik i , hogy $y_i = 0$ és $\nabla f(\mathbf{x}) \leq 0$. Ekkor $y_{n+1} > 0$, mivel $\mathbf{x} \in D_{\alpha_0}$, így $L(\mathbf{y}) = n+1$, és így $L(\mathbf{y}) \neq i$.

Ha most $y_i = 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ és $\nabla f(\mathbf{x}) \not\leq 0$, akkor az 1F. feltevés miatt a pont címkéjét meghatározó j indexre fennáll, hogy $x_j \nabla_j f(\mathbf{x}) > 0$. Viszont $i \neq j$, mert $x_i \nabla_i f(\mathbf{x}) = 0$, hiszen $x_i = y_i / \alpha = 0$. Ezzel a tétel állítását beláttuk.

2.1. KÖVETKEZMÉNY. Az S^n δ_k finomságú felosztását elkészítve és a (3.1) módon definiált címkézőfüggvényt alkalmazva, létezik jól indexezett részszimplex.

Bizonyítás. Az L címkézőfüggvény a 2.1. tétel értelmében kielégíti a *Sperner-lemmában* tett feltevést, így létezik jól indexezett szimplex.

Az algoritmus ezek után a következő:

0. lépés: Válasszuk $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$ pozitív elemekből álló nullához tartozó számsorozatot. Legyen $k=1$.
1. lépés: Bontsuk fel az S^n egységsimplexet δ_k finomságú részszimplexekre.
2. lépés: Határozzunk meg egy jól indexezett részszimplexet.
3. lépés: Ha δ_k kisebb, mint egy előre megadott $\varepsilon > 0$ szám (leállítási kritérium), akkor lépünk az 5. lépésre, különben lépünk a következő lépésre.
4. lépés: $\delta_k = \delta_{k+1}$ és folytassuk az algoritmust az 1. lépéssel.
5. lépés: Legyenek az utolsó jól indexezett szimplex csúcspontjai rendre $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^{n+1}$. Legyen

$$\mathbf{y}^* = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \mathbf{y}^i$$

Az \mathbf{y}^* pont lesz az algoritmus befejező pontja.
STOP

A következő fejezetben megmutatjuk, hogy x^* (ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi) az f függvény közelítő stacionárius pontja. Nyilvánvaló, hogy a fent vázolt algoritmus véges sok lépésében véget ér, hiszen $\delta_k \rightarrow 0$, így véges sok lépés után az 5. befejező lépésre jutunk, másrészt a 2. lépésben használható, a bevezetésben említett, jól indexezett szimplexet meghatározó algoritmusok végesek.

4. Az algoritmus konvergenciája

Az algoritmus konvergenciájának bizonyításához szükségünk van két lemmára.

4.1. LEMMA. Vegyük az S^n végtelenül finomodó felosztássorozatát, a k -edik felosztásból válasszunk ki egy szimplexet ($k=1, 2, \dots$) és ennek két különböző y^k, z^k csúcspontját. Ekkor létezik olyan $w \in S^n$ pont, hogy az mind az (y^k) , mind a (z^k) sorozat torlólódási pontja.

Bizonyítás. Az (y^k) sorozat korlátos, így létezik (\bar{y}^k) konvergens részsorozata, úgy, hogy $\bar{y}^k \rightarrow w, k \rightarrow \infty$. A (z^k) sorozatból hagyjuk el azokat az indexű tagokat, amelyeket elhagytunk akkor, amikor az (y^k) sorozatból az (\bar{y}^k) sorozatot készítettük. Jelöljük ezt a részsorozatot (\tilde{z}^k) -val. Mivel ez a sorozat is korlátos, így létezik konvergens részsorozat (\hat{z}^k) , amelyre $\hat{z}^k \rightarrow z, k \rightarrow \infty$ esetén. Hagyjuk el most az (\bar{y}^k) sorozatból azon indexű tagokat, amilyen indexűeket elhagytunk a (\tilde{z}^k) sorozatból a (\hat{z}^k) képzésekor. Jelöljük ezt (\hat{y}^k) -val. Így az alábbiak igazak:

$$\hat{y}^k \rightarrow w \text{ és } \hat{z}^k \rightarrow z \quad k \rightarrow \infty \text{ esetén.}$$

Megmutatjuk, hogy $w=z$. Mivel az azonos indexű \hat{y}^i, \hat{z}^i pontok ugyanazon részszimplex csúcsai, így végtelenül finomodó felosztássorozat esetén

$$\hat{y}^i - \hat{z}^i \rightarrow 0.$$

Mivel az \hat{y}^i, \hat{z}^i sorozatok különbsége a nulla vektorhoz konvergál, így szükség-szerűen $w=z$. Ezzel a lemma állítását bebizonyítottuk.

A következő lemma az előző általánosítása.

4.2. LEMMA. Vegyük az S^n végtelenül finomodó felosztássorozatát. Minden (k -edik) felosztásra válasszunk ki egy részszimplexet és csúcspontjait jelöljük.

$$y^{1k}, y^{2k}, \dots, y^{n+1,k}.$$

Így kapjuk az $(y^{1k}), (y^{2k}), \dots, (y^{n+1,k})$ sorozatokat. Ekkor létezik $w \in S^n$ pont, amely mindegyik sorozat torlódási pontja.

Bizonyítás. A 4.1. lemma bizonyításában $n=2$ esetén végrehajtott eljárást n -szer elvégezve adódik az állítás.

A következő tétel az algoritmus konvergenciáját mondja ki.

4.1. TÉTEL. Tegyük fel, hogy az f függvény és a D_x halmaz kielégíti a korábban említett feltételeket. Legyen S_i egy, az i -edik felosztáshoz tartozó jól indexezett szimplex. Az S_i csúcspontjait jelöljük $x^{1i}, x^{2i}, \dots, x^{n+1,i}$ úgy, hogy $L(y^{ji})=j$.

Ekkor végtelenül finomodó felosztássorozatot véve, az $(x^{1i}), (x^{2i}), \dots, (x^{n+1,i})$ sorozatok torlódási pontja az f stacionárius pontja lesz.

Bizonyítás. A 4.2. lemma értelmében a csúcspontokból alkotott sorozatoknak megfelelő részsorozata konvergál egy x^* ponthoz, és ezekre fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \bar{x}^{1i} &\rightarrow x^*, i \rightarrow \infty \text{ és } L(\bar{y}^{1i}) = 1 \text{ minden } i\text{-re,} \\ \bar{x}^{2i} &\rightarrow x^*, i \rightarrow \infty \text{ és } L(\bar{y}^{2i}) = 2 \text{ minden } i\text{-re,} \\ &\vdots \\ \bar{x}^{n+1,i} &\rightarrow x^*, i \rightarrow \infty \text{ és } L(\bar{y}^{n+1,i}) = n+1 \text{ minden } i\text{-re.} \end{aligned}$$

Az L címkézőfüggvény definíciója miatt $\nabla_1 f(\bar{x}^{1i}) > 0$ minden i -re, így f folytonosan differenciálhatósága miatt $\nabla_1 f(x^*) \equiv 0$. Ugyanígy belátható, hogy $\nabla_i f(x^*) \equiv 0$, $i=2, \dots, n$. Újra kihasználva L definícióját $\nabla f(\bar{x}^{n+1,i}) \equiv 0$ minden i -re, így hasonlóan az előzőekhez $\nabla f(x^*) \equiv 0$ (azaz $\nabla_j f(x^*) \equiv 0$, minden j -re). A korábbiakkal ezt összevetve az x^* pontra kapjuk, hogy

$$\nabla f(x^*) = 0$$

azaz stacionárius pont.

Ezzel a tétellel beláttuk, hogy az előző fejezetben definiált algoritmus egy ε -közelítő stacionárius pontot határoz meg.

Az algoritmust implementáltuk egy IBM 3031-es számítógépre. Az első tesztleleteket a következő alakú függvények esetén végeztük:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n k_i (x_i - a_i)^2, \quad a_i > 0.$$

Ezen függvények esetén az 1F és a 2F feltételek teljesülése könnyen belátható, ha $k_i = 1$. A futási eredmények biztatóak, még nagy n esetén is.

IRODALOM

- [1] FISCHER, M. L. and GOULD, F. J., "A simplicial algorithm for the nonlinear complementarity problem", *Math. Progr.* 6 (1974) 281—300.
- [2] KUHN, H. W. and MACKINNON, J. G., "The sandwich method for finding fixed points", *J. Optimization Theory and Applications* 17 (1975) 189—204.
- [3] VAN DER LAAN, G. and TALMAN, A. J. J., "A restart algorithm for computing fixed points without an extra dimension", *Math. Progr.* 17 (1979) 74—84.
- [4] VAN DER LAAN, G. and TALMAN, A. J. J., "A class of simplicial restart fixed points algorithms without an extra dimension", *Math. Progr.* 20 (1981) 33—48.
- [5] SCARF, H., The approximation of fixed points of a continuous mapping, *SIAM J. Appl. Math.* 15 (1967) 1328—1343.
- [6] TODD, M. J., The Computation of Fixed Points and Applications, *Lecture Notes in Economics and Math. Systems* 124 (1976).

(Beérkezett: 1982. május 17.)

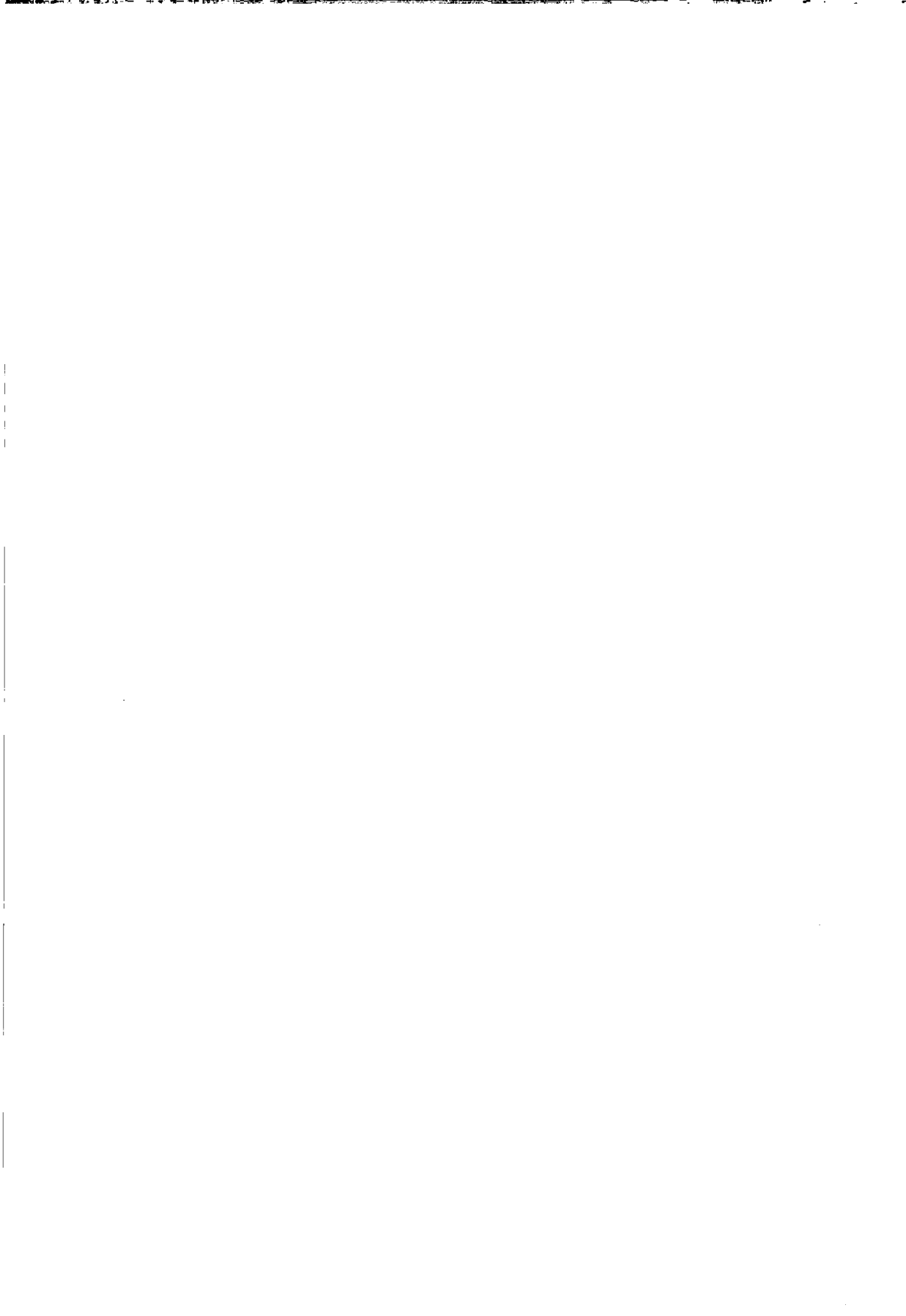
SOÓS ZSOLT

MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓINTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U 18.

A STATIONARY POINT COMPUTING ALGORITHM BASED ON SIMPLICIAL
SUBDIVISION

Zs. Soós

There is a new algorithm presented which is based on the simplicial subdivision of the neighbourhood of a stationary point. The algorithm computes a completely labelled subsimplex in each iteration, and if we use successive grid refinement the accumulation points of the sequences containing the vertices of these subsimplices are the stationary points. The convergence is proved under certain conditions.



MINIMÁLIS SÚLYÚ RÁCSOS TARTÓK MÉRETEZÉSE DEKOMPOZÍCIÓS MÓDSZERREL

RAPCSÁK TAMÁS

Budapest

A dolgozatban két esetben megmutatjuk, hogyan lehet meghatározni egy statikailag határozatlan rácsos tartó globális súlyminimumát.

A tervezést két részre bontjuk. Először elosztjuk a terheket az adott geometriai alakzaton, ami egy lineáris programozási feladat megoldását jelenti, a második lépésben pedig ebből a megoldásból kiindulva lehet megkapni az optimumot.

Így nemkonvex feladatok globális minimumát határozzuk meg. Mivel a dekompozíciós módszer a lineáris programozásra épül, ezért a változók száma gyakorlatilag nincs korlátozva.

1. Bevezetés

A rúdszerkezetek méretezésekor adott külső terhelés esetén több, a funkcionális követelményeknek jól megfelelő szerkezet közül választhatunk. Ezért érdemes valamilyen gazdaságossági kritérium alapján kiválasztani a legmegfelelőbbet. Mi a továbbiakban azzal az esettel foglalkozunk, mikor ez a kritérium a szerkezet súlya.

Ezzel a témakörrel behatóbban a 60-as évek elején kezdtek foglalkozni [18], [19], [20]. A felmerülő problémák megfogalmazására és megoldására több különböző kísérlet történt. Úgy tűnik azonban, hogy az egyik legalapvetőbb nehézséget még nem sikerült leküzdeni. Ez pedig az, hogy az ilyen típusú feladatok olyan nemlineáris programozási modellre vezetnek, amelyben a szerkezet viselkedését leíró függvények implicit módon vannak megadva. Ezenkívül ez a probléma nemkonvex feladatot eredményez.

Sokan próbálkoztak azzal, hogy a nemlineáris programozási feladatot valamilyen lineáris modellel közelítsék. Ennek az előbbieken említett nehézségen túlmenően az egyik fő oka a szimplex módszer széles körű elterjedése volt.

Az eredeti nemlineáris programozási probléma megoldására két fő irányzat alakult ki. Az egyik irányzat az, hogy a megoldás során nemlineáris módszereket kell alkalmazni és minden iterációs lépésben a szükséges értékeket az implicit relációk megoldásával kell meghatározni. Ez igen munkaigényes, mert így minden lépésben vagy egyenletrendszereket kell megoldani, vagy integrálokat kell kiszámítani.

A másik elképzelés szerint az implicit módon megadott függvényeket explicit összefüggésekkel approximálják, s az így keletkezett feladatot vagy feladatokat oldják meg [3, [4], [10], [11], [23]. C. FLEURY és M. GERADIN [7], valamint G. SANDER és C. FLEURY [17] vizsgáltak olyan módszereket, amelyek a két típus lépéseit kombinálják.

Egy másik komoly probléma az ilyen típusú feladatok megoldásánál az, hogy a jelenleg rendelkezésre álló nemlineáris programozási algoritmusok egy bizonyos mérethatáron túl nem nagyon hatékonyak.

Ez adta az ötletet, hogy dekompozíciós módszert alkalmazva lineáris programozási feladatot oldjunk meg először, s ebből kiindulva határozzuk meg a feladat globális optimumát.

Két speciális esetben bebizonyítjuk, hogy a méretezés ilyen módon elvégezhető.

Ennek az a jelentősége, hogy ilyen módon speciális nemkonvex programozási feladatok globális optimumát lehet meghatározni lineáris programozási feladat megoldásával, amiből következik, hogy a változók száma nincs megkötve.

2. Az optimalizálási probléma megfogalmazása

Ha olyan rúdszerkezetekkel foglalkozunk, amelyekre a következő feltételek teljesülnek:

- a) a szerkezet geometriája és a rudak egymáshoz való kapcsolódása adott,
- b) a külső terhelések csak a csomópontban hatnak,
- c) a csomópontok elmozdulásai differenciálisan kicsik és a hatásuk az erő-egyensúlyra elhanyagolható,
- d) a rudak rugalmasak,
- e) a rúdszerkezet statikailag határozatlan,

akkor a szerkezet viselkedését az alábbi egyenletrendszer írja le.

$$(2.1) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ -\mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix},$$

ahol

- \mathbf{R} — $n \times n$ típusú rugalmassági mátrix (n a rudak száma),
 \mathbf{A} — a belső igénybevételekre vonatkozó $m \times n$ ($m < n$) típusú, m rangú együtt-hatómátrix, amelyik a vizsgált szerkezet geometriai adatait tartalmazza,
 \mathbf{A}^T — az \mathbf{A} mátrix transzponáltja,
 \mathbf{X} — a csomóponti elmozdulások m -dimenziós vektora,
 \mathbf{Y} — az ismeretlen rúderők n -dimenziós vektora,
 \mathbf{q} — a külső igénybevételek m -dimenziós vektora.

A (2.1) egyenletrendszer a kompatibilitási egyenleteket és az egyensúlyi egyenleteket tartalmazza. Mivel az egyensúlyi egyenletek függetlenek és rugalmas szerkezetet vizsgálunk, ezért a (2.1) rendszernek pontosan egy megoldása van.

A (2.1) egyenletrendszer által leírható szerkezetek közül azokat nevezzük rácsos tartóknak, amelyeknél a külső erők hatására a rudakban csak húzó-nyomó igénybevételek ébrednek. A továbbiakban ezekkel foglalkozunk.

Jelölje t_1, \dots, t_n azokat a változókat, amelyek egyértelműen meghatározzák a szerkezetet. Mivel esetünkben a szerkezet geometriája adott, ezért a tervezési változók a rudak keresztmetszeti területei lesznek. (A rudak alakját is ismertnek tekezzük fel.)

A kérdés az, hogyan válasszuk meg ezeknek a változóknak az értékeit úgy, hogy a szerkezet súlya minimális legyen, az előzőekben megadott (2.1) egyenletrendszer teljesüljön és a külső terhelésrendszer hatására a szerkezet rúdjaiban ébredő feszültségek ne haladják meg az előírt határfeszültségeket.

Ez az alábbi nemlineáris programozási probléma megoldását jelenti:

$$\begin{aligned} \min \varrho \sum_{i=1}^n l_i t_i \\ \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{q} \\ (2.2) \quad \mathbf{R}(\mathbf{t})\mathbf{Y} - \mathbf{A}^T\mathbf{X} = \mathbf{0} \\ |\sigma_i(\mathbf{t})| = \frac{|Y_i|}{t_i} \leq \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ t_i \geq 0, \quad \text{és ha } t_i = 0, \quad \text{akkor } Y_i = 0, \quad \frac{Y_i}{t_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

ahol l_i , $i=1, 2, \dots, n$ az i -edik rúd hossza, ϱ a szerkezet anyagának a fajsúlya, $\sigma_i(t)$, $i=1, \dots, n$ a rudakban ébredő feszültségek, $\sigma > 0$ a megadott határfeszültség.

3. A nemlineáris programozási probléma visszavezetése lineáris feladatokra

Az előző részben láttuk, hogy ha a szerkezet geometriája adott, akkor az \mathbf{A} mátrix elemei állandók, a (2.2) probléma célfüggvénye lineáris, így csak az $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ mátrix és a $\sigma_i(\mathbf{t})$, $i=1, 2, \dots, n$ feszültségek a tervezési változók nemlineáris függvényei.

Ez adta az ötletet, hogy a tervezést két részre bontsuk. Először osszuk el a terheket az adott geometriai alakzaton, anélkül, hogy figyelembe vennénk azt, hogy itt rúdszerkezetéről van szó. Mivel végtelen sok ilyen elosztás van (az $\mathbf{A}\mathbf{Y}=\mathbf{q}$ egyenletnek végtelen sok megoldása van, ha $m < n$) ezért egy megfelelően választott célfüggvény segítségével próbálunk olyan teherelosztást találni, hogy a tervezés második részében minimális súlyú rúdszerkezetet tudjunk meghatározni.

Két esetet vizsgálunk meg.

4. Statikailag határozatlan rácsos tartó minimális súlyú törzstartójának a meghatározása

Ebben az esetben megengedjük, hogy a szerkezetből a tervezés folyamán rudakat hagyjunk el. Ez matematikailag az alábbi feltételt jelenti: ha $t_i=0$, akkor

$$Y_i = 0, \quad \frac{Y_i}{t_i} = 0.$$

4.1. DEFINÍCIÓ. Az (\mathbf{A}, \mathbf{R}) mátrixokkal megadott statikailag határozatlan szerkezet határozott törzstartójának nevezzük az \mathbf{A} mátrix egy m rangú, reguláris rész-mátrixához tartozó rudak összességét. Ez a definíció összhangban van a [21] könyvvel (l. 132. old.).

A törzstartó egyértelműen megadható a benne szereplő rudak indexeivel. Legyen a teherelosztási feladat a következő:

$$(4.1) \quad \min \frac{\rho}{\sigma} \sum_{i=1}^n l_i |Y_i|$$

$$\mathbf{AY} = \mathbf{q}.$$

Jelölje I_* az optimális bázisváltozók indexeit.

4.2. TÉTEL. Ha a (4.1.) feladatnak van nem degenerált optimális megoldása (azaz $|Y_i^*| > 0$, $i \in I_*$) akkor a

$$(4.2) \quad t_i^* = \frac{1}{\sigma} |Y_i^*|, \quad i \in I_*$$

értékek a (2.2) feladat globális minimumát adják.

Bizonyítás. Vezessük be az $Y_i = Y_i^+ - Y_i^-$, $Y_i^+ \geq 0$, $Y_i^- \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ jelöléseket, ahol Y_i^+ a pozitív részt, Y_i^- pedig a negatív részt jelenti. Ezután a teherelosztási feladatot az alábbi formában fogalmazzuk meg.

$$(4.3) \quad \min \frac{\rho}{\sigma} \sum_{i=1}^n l_i (Y_i^+ + Y_i^-)$$

$$\mathbf{AY}^+ - \mathbf{AY}^- = \mathbf{q}$$

$$Y_i^+ \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$Y_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

A feszültség-egyenlőtlenségekből látható, hogy ha az $|Y_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$ értékek kicsik, akkor a t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ értékek is kisebbre választhatók, tehát a célfüggvény a súlyminimális szerkezet irányában hat.

Ennek a feladatnak mindig van véges optimuma. Azt tudjuk ugyanis, hogy megengedett megoldás van és hogy a célfüggvény bármely értékét tekintve a hozzá tartozó kisebb-egyenlő típusú nívóhalmaz korlátos és zárt. Ebből pedig következik az állítás.

Mivel (4.3) lineáris programozási feladat, ezért az optimumot egy megengedett bázismegoldáson kapjuk. Azonban az \mathbf{A} mátrix rangja m , így egy reguláris részmátrix kiválasztása egyenértékű a szerkezet egyik lehetséges statikailag határozott törzstartójának a megadásával, ami egyben azt is jelenti, hogy a terheket csak ezen osztjuk szét. Ebből az is következik, hogy ha a tervezés során rudakat hagyhatunk el, akkor elég csak az eredeti szerkezet határozott törzstartóival foglalkozni.

Mivel $\frac{Y_i^+ + Y_i^-}{\sigma} \leq t_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ és a (4.3) feladat feltételei részét képezik a (2.2) feladat feltételeinek, ezért biztos, hogy a (4.3) probléma optimális értéke kisebb vagy egyenlő, mint a (2.2) optimum értéke.

A továbbiakban az eredeti szerkezet helyett az optimális törzstartót tekintjük. Mivel a (4.3) feladatnak van nem degenerált optimális megoldása, ezért a t_i , $i \in I_*$

értékek a következőképpen választhatók:

$$(4.4) \quad t_i^* = \frac{1}{\sigma} |Y_i^*|, \quad i \in I_*$$

Ezzel a választással a (4.3) feladatban az eredeti súlyfüggvényt kapjuk, és a feszültség-egyenlőtlenségek pedig egyenlőséggel teljesülnek.

A kompatibilitási feltételek is teljesülnek, ugyanis az A_{I_*} mátrix reguláris, $R_{I_*}(t_{I_*})Y^*$ egy fix vektor, így az

$$(4.5) \quad R_{I_*}(t_{I_*})Y^* = A_{I_*}X^*$$

egyenlet egyértelműen megoldható:

$$(4.6) \quad X^* = (A_{I_*})^{-1}R_{I_*}(t_{I_*})Y^*.$$

Ezzel a 4.2. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyezzük, hogy a 4.2. tételben a nem degeneráltsági feltétel azt jelenti, hogy az adott terhelésnél az optimális törzstartó minden rúdja résztvesz az erőjátékban.

5. Minimális súlyú statikailag határozatlan rácsos tartó meghatározása, ha a szerkezet minden rúdja résztvesz az erőjátékban

Ebben a részben feltesszük, hogy az adott geometriájú rácsos tartó minden rúdjában az erő abszolút értéke nagyobb vagy egyenlő mint egy $P_0 > 0$ konstans az adott külső terhelésre nézve. Ez a feltétel azt a célt szolgálja, hogy a rudak minél jobban ki legyenek használva.

Most a (2.2) feladat helyett a

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \min q \quad & \sum_{i=1}^n l_i t_i \\ \mathbf{A}\mathbf{Y} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{R}(\mathbf{t})\mathbf{Y} - \mathbf{A}^T\mathbf{X} &= \mathbf{0} \\ \frac{|Y_i|}{t_i} &\cong \sigma, \quad i = 1, \dots, n \\ |Y_i| &\cong P_0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

feladatot fogalmazzuk meg.

Ehhez rendeljük hozzá a következő segédfeladatot:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \min \frac{q}{\sigma} \quad & \sum_{i=1}^n l_i |Y_i| \\ \mathbf{A}\mathbf{Y} &= \mathbf{q} \\ |Y_i| &\cong P_0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

5.1. TÉTEL. Ha van olyan $\alpha > 0$ érték, amelyre

$$(5.3) \quad \frac{\mu_i^*}{l_i} = \frac{\rho}{\sigma} - \frac{\sigma}{\alpha E}, \quad i = 1, \dots, n,$$

ahol μ_i^* , $i = 1, \dots, n$ az (5.2) feladat optimális duálváltozóit jelentik, akkor a

$$(5.4) \quad t_i^* = \frac{1}{\sigma} |Y_i^*|, \quad i = 1, \dots, n$$

értékek az (5.1) feladat globális minimumát adják.

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi feladatot

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \min \quad & \frac{\rho}{\sigma} \sum_{i=1}^n l_i (Y_i^+ + Y_i^-) \\ & \mathbf{A} \mathbf{Y}^+ - \mathbf{A} \mathbf{Y}^- = \mathbf{q} \\ & Y_i^+ + Y_i^- \cong P_0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & Y_i^+ \cong 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & Y_i^- \cong 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Ugyanúgy, mint az előző részben, itt is megmutatható, hogy az (5.5) feladatnak mindig véges optimuma van. Azonban az optimális megoldásnál minden rúderő abszolút értéke különbözik a nullától.

Az (5.5) feladatot standard formára hozva és megoldva kapjuk az optimális bázist, amit \mathbf{B}_{I^*} jelöl.

Írjuk fel az (5.5) feladat duálját. Ez a következő:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \max \quad & \mathbf{q}^T \mathbf{X} + \sum_{i=1}^n P_0 \mu_i \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \boldsymbol{\mu} \cong \frac{\rho}{\sigma} \mathbf{1} \\ & -\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \boldsymbol{\mu} \cong \frac{\rho}{\sigma} \mathbf{1} \\ & \mu_i \cong 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

ahol a $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{1}$ vektorok a μ_i , l_i , $i = 1, \dots, n$ értékekből állnak.

A lineáris programozás dualitás tétele alapján, ha a primál feladatnak van véges optimuma, akkor van a duál feladatnak is és az optimumértékek egyenlők.

Tehát az (5.6) feladatnak is van véges optimuma és

$$(5.7) \quad (\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\mu}^*)^T = \left(\frac{\rho}{\sigma} \mathbf{1}, \mathbf{0} \right)^T \mathbf{B}_{I^*}^{-1}.$$

Ezek után az (5.1) feladathoz azt a teherelosztási feladatot rendeljük, amelyik az (5.5)-től csak abban különbözik, hogy a célfüggvény az α (> 0) konstanssal van

megszorozva. Ennek és az (5.5) feladatnak ugyanaz lesz az optimális bázis megoldása. Hasonlóan mint az előbb, belátható, hogy a teherelosztási feladat optimális értékének $1/\alpha$ -szorososa kisebb vagy egyenlő, mint az (5.1) feladat optimum értéke.

Felírva a teherelosztási feladat duálját, ugyanazt kapjuk, mintha az (5.6)-ban a feltételei egyenlőtlenségek jobb oldalára az $\frac{\alpha Q}{\sigma} \mathbf{1}$ vektort írjuk. Az (5.7)-ből következik, hogy az optimális duálváltozók értékei az (5.6) optimális duálváltozóinak α -szorosai lesznek.

A duál feladatból kitűnik, hogy az

$$(5.8) \quad \mathbf{R}(\mathbf{t})\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T\mathbf{X}$$

kompatibilitási egyenletek kielégítése, ami az egyik legnehezebb probléma, könnyen elérhető, ha a megfelelő feltételekben az egyenlőtlenségek helyett egyenlőségek állnak.

Azonban a lineáris programozás komplementaritási feltételeiből következik, hogy ha $Y_i^+ > 0$ vagy $Y_i^- > 0$ valamilyen i index esetén, akkor a duál feladatban a megfelelő feltételek egyenlőséggel teljesülnek.

Mivel esetünkben ez minden $i=1, \dots, n$ indexre teljesül, ezért az (5.8) kompatibilitási egyenletek teljesüléséhez elegendő az

$$(5.9) \quad \mathbf{R}(\mathbf{t})|\mathbf{Y}| = \frac{\alpha Q}{\sigma} \mathbf{1} - \alpha \boldsymbol{\mu}$$

egyenletrendszer megoldhatóságát vizsgálni.

Rácsos tartó esetén az $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ rugalmassági mátrix diagonális, azaz a következő alakba írható:

$$(5.10) \quad \mathbf{R}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{Et_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{l_n}{Et_n} \end{pmatrix}.$$

ahol E a szerkezet anyagára jellemző rugalmassági tényezőt jelenti. Így az

$$(5.11) \quad \frac{l_i}{Et_i} |Y_i^*| = \frac{\alpha Q}{\sigma} l_i - \alpha \mu_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

egyenlőségeket kapjuk, amiből a t_i , $i=1, 2, \dots, n$ értékek kifejezhetők.

$$(5.12) \quad t_i^* = \frac{l_i \sigma |Y_i^*|}{E(\alpha Q l_i - \alpha \mu_i^* \sigma)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Felhasználva (5.3)-at kapjuk, hogy

$$(5.13) \quad t_i^* = \frac{1}{\sigma} |Y_i^*|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ez azt jelenti, hogy az (5.1) és (5.5) feladatok célfüggvényei megegyeznek és a feszültség-egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek.

Ezzel az 5.1. tételt bebizonyítottuk.

Látható, hogy mindkét esetben, a tételekben megadott feltételek teljesülése esetén a súlyminimális rácsos tartó teljesen feszített (egyenszilárdságú) szerkezet, azaz a feszültség-egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek.

Az (5.5) feladatból látható, hogy a második esetben a súlyminimális szerkezetnél legalább $n-m$ index esetén

$$(5.14) \quad |Y_i| = P_0.$$

Végül szeretnék köszönetet mondani KLAFSZKY EMILNEK értékes tanácsaiért.

IRODALOM

- [1] ALSPAUGH, D. W. and KUNOO, K., "Optimum configurational and dimensional design of truss structures", *Computers and Structures* 4 (1974) 775—770.
- [2] BALDUR, R., "Structural optimization by inscribed hyperspheres", *Journal of the Engineering Mechanics Division* 6 (1972).
- [3] BERNAU, H. and HALMOS, E., "Dimensioning of statically indeterminate lightweight structures of complex stress on the basis of minimum-weight conditions", *MTA SZTAKI Working paper MO/17/1980*.
- [4] BERNAU, H., HALMOS, E. és Soós, Zs., „Egy új modell optimális rúdszerkezet méretezésére, *Alkalmazott Matematikai Lapok* (sajtó alatt).
- [5] BROWN, D. M. and ANG, A. H. S., "Structural optimization by nonlinear programming", *Journal of the Structural Division* 12 (1966).
- [6] FARSHI, B. and SCHMIT, L. A., "Minimum weight design of stress limited trusses", *Journal of the Structural Division* 1 (1974).
- [7] FLEURY, C. and GERADIN, M., "Optimality criteria and mathematical programming in structural weight optimization", *Computer and Structures* 8 (1978) 7—17.
- [8] GALLANGER, R. M., *Finite element analysis* (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1976).
- [9] GELLATLY, R. A. and GALLAGHER, R. H., "A procedure for automated minimum weight structural design", *Aeronautical Quarterly* 17 (1966).
- [10] HALMOS, E. and RAPCSÁK, T., "Minimum weight design of the statically indeterminate trusses", *Mathematical Programming Study* 9 (1978) 109—119.
- [11] HALMOS, E. és RAPCSÁK, T., „Statikailag határozatlan rácsos tartók minimális súlyra történő méretezése”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 3 (1977) 171—183.
- [12] KARLIE, D. and MOE, J., "Automated design of frame structures", *Journal of the Structural Division* 12 (1966).
- [13] LIPSON, S. L. and AGRAWAL, K. M., "Weight optimization of plane trusses", *Journal of the Structural Division* 5 (1974).
- [14] MOSES, F., "Optimum structural design using linear programming", *Journal of the Structural Division* 12 (1964).
- [15] REINSCHMIDT, K. F. and RUSSEL, A. D., "Application of linear programming in structural layout and optimization", *Computers and Structures* 4 (1974) 855—869.
- [16] ROMSTAD, K. M. and WANG, CHU-KIA, "Optimum design of framed structures", *Journal of the Structural Division* 8 (1963).
- [17] SANDER, G. and FLEURY, C., "A mixed method in structural optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 13 (1978) 385—404.
- [18] SCHMIT, L. A. and MALLETT, H., "Structural synthesis and design parameter hierarchy", *Journal of the Structural Division* 8 (1963).
- [19] SCHMIT, L. A. and FOX, R. L., "An integrated approach to structural synthesis and analysis", *AIAA Journal* 6 (1965).
- [20] SCHMIT, L. A. and FOX, R. L., "Advances in the integrated approach to structural synthesis", *Journal of Spacecraft and Rockets* 6 (1966).

- [21] SZABÓ, J. és ROLLER, B., *Rúdszerkezetek elmélete és számítása* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971).
- [22] VANDERPLAATS, G. N. and MOSES, F., "Automated design of trusses for optimum geometry", *Journal of the Structural Division of the Structural Division* 3 (1972).
- [23] VENHAYYA, V. B., "Structural optimization a review and some recommendations" *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 13 (1978) 203—228.

(Beérkezett: 1982. február 15.)

RAPCSÁK TAMÁS

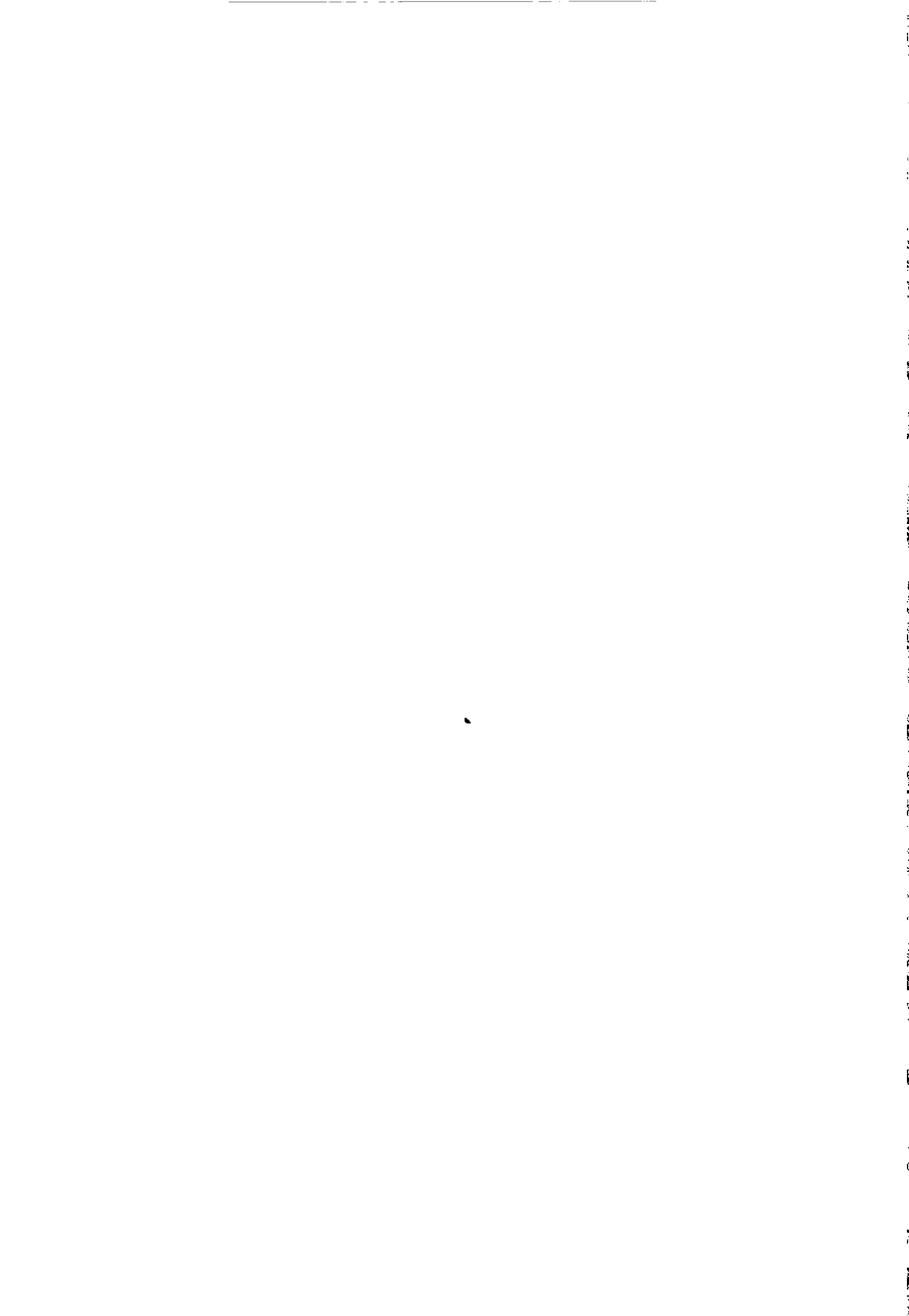
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓINTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U 18.

A DECOMPOSITION METHOD FOR MINIMUM WEIGHT STRUCTURAL DESIGN

T. RAPCSÁK

In this paper it is determined in two cases the global minimum of the weight function of a statically indeterminate truss. First we divide the load conditions on the geometrical figure with linear programming, after the other conditions are satisfied. Thus nonconvex problems are solved with a decomposition method based on the linear programming, therefore the number of the variables practically is not limited.

4



FÜGGETLEN 0-RENDSZER EGZISZTENCIÁJA VÉLETLEN MÁTRIXOKBAN

STEFFLER MIKLÓS

Budapest

A dolgozat $n \times n$ -es véletlen 0, 1 mátrixokkal foglalkozik. Célja azt bizonyítani, hogy a (n elemszámú) független 0-rendszer létezésének valószínűsége n növelésével 1-hez tart. Ehhez bizonyítottunk egy lemmát, mely az egzisztencia szempontjából „tiltott” („1” elemekből álló) konfigurációkat adja meg.

1. Bevezetés

A dolgozat alapötlete a hozzárendelési feladat gazdaságos — számítógépes — megoldásával kapcsolatban merült fel. Bizonyos számítógépidő-eltérések az algoritmusoknál nem magyarázhatók másként, mint a fent említett konvergenciával. (Az [5] disszertációban ezt egy speciális esetre sikerült bizonyítani.)

2. Független 0-rendszer létezésének szükséges és elégséges feltétele

2.1. DEFINÍCIÓ. Egy 0, 1 mátrix zérus elemeinek valamely halmaza független 0-rendszer, ha az elemek különböző sorokból és oszlopokból adódnak.

Az n elemszámú független 0-rendszer létezésének szükséges és elégséges feltételét mondjuk ki az alábbi lemmában:

2.2. LEMMA. Egy A $n \times n$ -es 0, 1 mátrix akkor és csak akkor tartalmaz n elemszámú független 0-rendszert, ha az alábbi n -számú egyenletrendszer egyike sem igaz

- (1) $a_{ik} = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$), valamely i -re
- (2) $\left. \begin{array}{l} a_{i_1 k} = 1 \\ a_{i_2 k} = 1 \end{array} \right\}$ (minden $k \neq i_1$ esetén), valamely i_1, i_2 -re
- (3) $\left. \begin{array}{l} a_{i_1 k} = 1 \\ a_{i_2 k} = 1 \\ a_{i_3 k} = 1 \end{array} \right\}$ (minden $k \neq i_1, i_2$ esetén), valamely i_1, i_2, i_3 -ra
- \vdots
- (n) $a_{jk} = 1$ (valamely k -ra, minden $j = 1, 2, \dots, n$ esetén)

Bizonyítás. A szükségesség triviális a függetlenség definíciója alapján. Az elégségséget n -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$n - 1$ -re a tétel igaz. Feltesszük, hogy igaz a legfeljebb $(n - 1) \times (n - 1)$ -es mátrixokra is. Ha az $n \times n$ -es mátrix nem tartalmaz egyetlen, az $n - 1$ dimenzióknak megfelelő tételbeli alakzatot sem (azaz a most $n - 1$ -számú egyenletrendszer egyike sem teljesül), válasszunk ki egy zérus elemet. Ennek sora és oszlopa törlésével keletkező $(n - 1) \times (n - 1)$ -es mátrix az indukciós feltevés miatt tartalmaz $n - 1$ elemszámú

független 0-rendszert. Ehhez hozzávéve a korábban kiválasztott zérus elemet, kapunk egy keresett 0-rendszert.

Tegyük fel, hogy a mátrixunk tartalmaz egy, az $n-1$ dimenzióknak megfelelő tételbeli alakzatot (azaz valamely $n-1$ dimenzióra felírt egyenletrendszer teljesül).

Ebben az esetben sor és oszlopkerék révén elérhető az alábbi konfiguráció: $\begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{A}' \\ \mathbf{A}'' & \mathbf{B} \end{pmatrix}$, ahol \mathbf{G} — az $n-1$ dimenziós „tiltott” alakzattól — csupa „1” elemekből áll, valamint \mathbf{A}' és \mathbf{A}'' legfeljebb $n-1$ dimenziós négyzetes mátrixok (ugyanis \mathbf{G} egy sor esetén egy, két sor esetén két stb. oszlopot hagy az \mathbf{A}' részmatrix számára az $n \times n$ -es mátrixból). Mármost ha \mathbf{A}' és \mathbf{A}'' tartalmaznak (megfelelő elemszámú) független 0-rendszert, együttesen kiadnák a keresett n elemszámú független 0-rendszert. Ha az \mathbf{A}' (vagy \mathbf{A}'') nem tartalmazná a kívánt 0-rendszert, az indukciós feltevés miatt egy megfelelő dimenziós csupa 1-ekből álló alakzatot tartalmaz. Ehhez hozzávéve a \mathbf{G} -beli 1-eket — megfelelő sorait (illetve oszlopaikat) —, éppen egy n -dimenziós „kritikus” alakzatot kapnánk.

Megjegyzés. A lemma általánosítható n_1 elemszámú független 0-rendszerre, ahol $1 \leq n_1 \leq n$.

(Lemmánk lényegében a *König—Hall-tétel* speciális esete. E tétel szerint ugyanis $m+n$ szögpontú páros gráf esetén m diszjunkt párosítás létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az m szögpont bármely részhalma esetén a szögpontok száma ne legyen nagyobb, mint a velük szomszédos szögpontok száma.)

3. Egzisztencia véletlen mátrixok esetén

A 2.2. lemmánk segítségével bebizonyítjuk az alábbi tételt:

3.1. TÉTEL. Ha \mathbf{A} egy $n \times n$ -es véletlen 0, 1 mátrix, és A_n jelöli azt az eseményt, hogy \mathbf{A} tartalmaz n elemszámú független 0-rendszert, akkor fennáll:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 1.$$

A tételt átfogalmazzuk:

3.2. TÉTEL. Képezzük az összes lehetséges $n \times n$ -es 0, 1 mátrixot. Legyen $p_n = \frac{T_n}{S_n}$, ahol S_n az összes lehetséges ilyen mátrixok száma, T_n pedig ezek közül azok száma, melyek nem tartalmaznak n elemszámú független 0-rendszert. Ekkor fennáll: $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$.

Bizonyítás. Felhasználjuk a 2.2. lemmát: összeszámoljuk az n -féle egyenletrendszer-típust külön-külön kielégítő mátrixokat. (Ezek között természetesen azonosak is lesznek!) Elegendő volna annak bizonyítása, hogy a konvergencia igaz, ha T_n helyett ezen mátrixok együttes számát vesszük figyelembe.

Az (1) típusú alakzatot tartalmazó mátrixok száma legfeljebb $n \cdot 2^{n^2-n}$. Ilyen mátrix előfordulásának relatív gyakorisága:

$$\frac{n \cdot 2^{n^2-n}}{2^{n^2}} = \frac{n}{2^n}.$$

Tételünk bizonyításához elég volna az i -edik típusú alakzatot tartalmazó mátrixok számának monoton csökkenése i növekedésével. Ekkor ugyanis $p_n \cong \frac{n^2}{2^n}$ volna.

Az i -re vonatkozó monotonitás bizonyítása: Az i -edik és az $(i+1)$ -edik típusú alakzatot tartalmazó mátrixok számára az alábbi egyenlőtlenséget állítjuk:

$$\binom{n}{i} \binom{n}{n-i+1} \cdot 2^{n^2-in+i^2-i} \cong \binom{n}{i+1} \binom{n}{n-1} \cdot 2^{n^2-in-n+i^2+i}$$

Átrendezés és egyszerűsítések után:

$$2^{n-2i} \cong \frac{(n-i) \cdot (n-i+1)}{i \cdot (i+1)}$$

Az alakzatok szimmetriája miatt feltehető: $n > 2i$.

Legyen $k = n - 2i$ természetes szám, ekkor

$$2^k \cong \frac{(i+k) \cdot (i+k+1)}{i \cdot (i+1)}$$

az állításunk. Ezt k -ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$k=1$ -re: $2 \cong \frac{i+2}{i}$, ami igaz $i \geq 2$ esetén. (Az $i=1$ esetet alább külön bizonyítjuk!)

k -ról $k+1$ -re: $2^{k+1} \cong \frac{(i+k+1) \cdot (i+k+2)}{i \cdot (i+1)}$ fennáll $2 \cong \frac{i+k+2}{i+k}$ miatt, ugyanis $i+k \geq 2$.

Végül $i=1$ esetén: $2^{n-1} \cong n \cdot (n-1)$ kellene, ami $n=1$ -re igaz. Az n -re vonatkozó teljes indukció pedig $2 \cong \frac{n+1}{n-1}$ miatt megy, $n \geq 3$ feltételezésével.

Megjegyzés. A tételből következik, hogy a konvergencia fennáll, ha csak olyan mátrixokat tekintünk, ahol az elemek fele (pl. $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ -számú elem) zérus.

Megjegyzés. Köszönöm a lektor észrevételét, melyben az [1] cikk egy tételéhez való kapcsolódásra hívta fel a figyelmemet. Az ott szereplő 2. tétel ugyanis az alábbiakat mondja ki:

Ha $M_n(p)$ egy $n \times n$ -es véletlen mátrix, amelynek ε_{ij} elemei független valószínűségi változók és

$$P(\varepsilon_{ij} = 1) = p, \quad P(\varepsilon_{ij} = 0) = 1 - p,$$

valamint $P_n(p)$ annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az $M_n(p)$ mátrix permanense pozitív, ekkor

$$p_n = \frac{\log n + c}{n} + o(1/n)$$

esetén, ahol c egy valós konstans:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(p_n) = e^{-2e^{-c}}.$$

E tételből $P(\varepsilon_{ij}=1)=p$ konstans valószínűség esetén következik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(p) = 1.$$

Ugyanis tetszőleges $p_n=p$ konstans sorozat esetén tetszőleges c -hez található olyan N index, hogy a $\frac{\log n+c}{n}$ sorozat elemei $n > N$ esetén minorálják a konstans sorozat elemeit. Így

$$1 \cong \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(p) \cong \lim_{c \rightarrow \infty} e^{-2e^{-c}} = 1.$$

IRODALOM

- [1] ERDŐS, P. and RÉNYI, A., "On random matrices". *Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 8A (1963) 455—461.
- [2] ERDŐS, P. and RÉNYI, A., "On random matrices II.", *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 3 (1968) 459—464.
- [3] KÖNIG, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Akademik Verlag, Leipzig, 1936).
- [4] RYSER, H. J., *Combinatorial Mathematics* (Carus Mathematical Monographs, No. 14, John Wiley, 1965).
- [5] STEFFLER, M., „A hozzárendelési feladat branch and bound típusú megoldása”, Egyetemi doktori értekezés, ELTE TTK, Budapest, 1979.

(Beérkezett: 1980. szeptember 11.)

(Javítás után beérkezett: 1982. február 23.)

STEFFLER MIKLÓS
ORSZÁGOS VEZETŐKÉPZŐ KÖZPONT
1476 BUDAPEST, KÖNYVES KÁLMÁN KRT. 48—52.

EXISTENCE OF INDEPENDENT 0-SET IN RANDOM MATRICES

M. STEFFLER

In this paper the $n \times n$ random 0, 1 matrices are studied. The following theorem is proved:

Theorem: If A is a $n \times n$ random 0, 1 matrix and there is A_n the event, that A includes independent 0-set by n members then there is:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 1.$$

GRÁFGENERÁTOR-RENDSZEREK ÉS NYELVEK NÉHÁNY ELMÉLETI KÉRDÉSE ÉS ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI A SZÁMÍTÓGÉPES KUTATÁSBAN

BENE BÉLA

Budapest

Rövid áttekintést adunk erről a még alig egy évtizedes kutatási területről. A biológiából származó problémakör matematikai megközelítései különbözőek. Ugyanakkor már a jelenlegi fázisban is hatékony eszközöket szolgáltatnak a modellezés és szimuláció számára. Egy az előzőektől különböző megközelítést adunk, melyhez a számítógépes megvalósítás során jutottunk. A tárgyaláshoz felhasznált algebrai és matematikai-nyelvészeti eszközök kényelmessé teszik a számítógépes realizációt. Bemutatjuk elméleti és gyakorlati oldalról a paralel gráfgenerátor rendszerek szimulációs erejét a rendszermodellezés területén, ill. a gyakorlati feladatok megoldásánál. Végül ismertetjük a kifejlesztett számítógépes programok főbb sajátosságait.

1. Bevezetés

A matematikának kevés olyan ága van, amely kialakulását és fejlődését annyira más tudománynak köszönheti, mint a fejlődő rendszerek és nyelvek elmélete. A hatvanas évek végén A. LINDENMAYER elméleti biológus felvetett olyan kérdéseket, amelyek sem a biológiai, sem pedig a matematikai elméletek nem tudtak kellőképpen magyarázni. Egy az élővilágban megfigyelt változásokat leíró formális eszközre volt szükség. A megjelenés és a háttérben működő irányítási mechanizmus kapcsolatát és ennek adekvát leírását kereste. Szinte azonos vagy legalábbis hasonló problémák merülnek fel az anyagi szerveződés különböző szintjein. Egy sejt DNS molekulájának információt rögzítő és a fehérjeszintézist követve irányító szerepétől egy organizmus differenciálódásáig több helyen vetődnek fel ezek a kérdések. Elképzeléseivel és egyszerű modelljeivel matematikusokhoz fordult, akik, jó érzékkel rátapintva az alapvető sajátosságokra, rövid idő alatt kifejlesztettek egy igen intenzíven művelt és más területeken is jól használható matematikai elméletet. Rövid idő alatt kiderült, hogy az első próbálkozások a formális rendszerekkel és nyelvekkel való modellezés, e a legjobb helyen fogták meg a problémát. Érdemes közben megjegyezni, hogy a kutatást szinte a mai napig biológusoknak és matematikusoknak egy igen intenzív együttműködése jellemzi. Az 1975-ben megjelent első monográfia [5] egy határkőnek tekinthető a kutatás területén. Ekkorra az elmélet alapvető kérdései és kutatásának irányvonalai már világosan körvonalazódtak. Már nevet is adtak a matematikai elméletnek, melyet LINDENMAYER után *L-rendszerek*, ill. *L-nyelvek elméletének* hívnak.

A formális rendszerek és nyelvek elmélete adta a háttérét és módszertanát a kutatásoknak. Különösen jelentősek voltak azok az eredmények amelyek a formális hatványsorokkal, reprezentáció elmélettel és végül a *Kálmán-féle rendszerelmélettel* kapcsolatosak.

Miközben ezek a kutatások folytak természetesen adódtak általánosítási igények, ill. lehetőségek. Ezeknek egyik irányaként fogalmazódott meg a sejtszövetek

és komplex organizmusok egyik matematikai elmélete az *L-gráfrendszerek és nyelvek* elmélete.

Az egész kérdéskörre általánosan jellemző az összetevő részek paralel történő megváltozása. Az osztódási vagy helyettesítési műveletek szinkronizálva vannak.

A témába való rövid betekintés után láthatók azok az elvek és módszerek, amelyek más területek számára is hasznos alkalmazási eredményeket és együttműködést ígérnek. Ha a jelenlegi számítástudomány problémáját tekintjük, akkor az *L-rendszerekre* vonatkozóan azt lehetne mondani, hogy „ha nem volna, ki kellene találni”. A multiprocesszoros gépek, számítógéphálózatok és ezeknek a kihatása a paralel programozásra számos olyan kérdést vetnek fel, melyek analóg, vagy azonos kutatást igényelnek, mint az *L-rendszerek*. Úgy látjuk, hogyha nem a biológiától motiválva, akkor mint az elméleti számítástudomány egyik ága mindenképpen megszületett volna.

Dolgozatunkban a 70-es évek második felében körvonalazott és a későbbiekben kialakult problémakört mutatjuk be. Azok a strukturális összefüggések, amelyek megfogalmazását és modellezését tekintve nem írhatók le lineáris elrendezésű sejt-automatákkal, meghozták ezek általánosítását, a gráf-elrendezésű sejtautomatákból álló paralel gráf-generátor rendszereket, a *GL-rendszereket*. Fogalmi megfeleltetések, és definíciós kérdések után az egyes fejlődési rendszerek tipizálása következett. Néhány alkalmazás megmutatta, hogy az *L-rendszereknek* ilyen irányú általánosítása eredményes.

A kérdéskör eddigi megközelítései nem vették figyelembe annyira a számítógépes alkalmazás lehetőségeit, avagy buktatóit. Megcélözva egy konkrét megvalósítást számos definíciós, ill. algoritmikus problémába ütköztünk. Ezek fokozatos felismerése és a megfelelő út megkeresése után kialakítottunk egy az eddigiektől némileg különböző megközelítést és konstrukciót, melyet ebben a dolgozatban fogunk bemutatni.¹

Az elméleti eszközök kialakítása során elsősorban K. CULIK, A. LINDENMAYER, H. EHRING, J. KREOWSKI és G. ROSENBERG munkáira támaszkodunk. A 2. fejezetben a definíciók és jelölések után bemutatjuk azt az elméleti hátteret, amely a gráfok egymással való összeillesztését, ill. összekapcsolását leírja.

A számítógépes megvalósítás alapvető problémája a paralel helyettesítés szekvenciális úton történő szimulációja. A 3. fejezetben tárgyalt kérdések lényegében véve ezt vizsgálják. Az eredmények elég általánosak és gyakran adódhat alkalmazási lehetőség, mint például bonyolult adatstruktúrák elemeinek manipulálásánál.

A 4. és az 5. fejezetben magával a gráfgenerálás módszerével és ennek a gráf-generátor rendszerekbe való beépítésével foglalkozunk. Az alkalmazási lehetőségek növelése céljából, hogy a modellezésben a véletlen eseményeknek hatását figyelembe lehessen venni, általánosítottuk a *GL-rendszereket* sztochasztikus elemek hozzáadásával.

A 6. fejezetben a korábbiakban bevezetett fogalmi rendszer alapján ismertetjük a *GL-rendszerek* eddigi főbb megközelítéseit. Néhány elméleti eredményt mutatunk be a 7. fejezetben a különböző gráfnyelvekkel való kapcsolatot illetően. Gyakran

¹ Az említett konkrét probléma az MTA Vácrátóti Botanikai Kutató Intézetéből származott. Egy euphorbia fajtának növekedését kellett matematikai módszerekkel modellezni. Mivel az adatok eredetileg nem *L-rendszerrel* történő modellezéshez lettek felvéve, csak nagyon egyszerűsített változatot lehetett alkalmazni.

szükséges becslést adni egy rendszer növekedésére, vagy éppen a növekedési ütemét ismerve megkeresni azt a rendszerosztályt, amelyből kiválasztható a modell. Ezekkel kapcsolatosak a további tételek. Végül megmutatjuk, hogy a nem paralel osztódó gráfrendszerek működése szimulálható *GL-rendszerrel*. A bizonyítás olyan, hogy ennek a rendszernek a konstrukcióját is tartalmazza.

Alkalmazásokkal és alkalmazási lehetőségekkel a 8. fejezetben foglalkozunk. Nem törekszünk bőségre, inkább bemutatjuk azokat a főbb sajátosságokat, amelyek különböző területeken, mint például a közigazgatás vagy a közgazdaság esetében kézenfekvővé teszik az alkalmazást.

Az utolsó fejezetben rövid leírását adjuk a számítógépes programnak. Fő vonalakban ismertetjük azokat a fogalmakat, amelyekkel a szimulációs program dolgozik. A kidolgozott fogalmi rendszer alkalmas más típusú, gráfelméleti vagy számítógép kutatási feladatok leírására is.

Az irodalmi forrásokkal kapcsolatban megjegyezzük, hogy a [14]-ben található M. NAGL-nak egy részletes és igen alaposan értékelő bibliográfiája a gráfrendszerekről. A tájékozódni kívánó olvasónak ezt mindenképpen ajánljuk.

2. Alapvető definíciók és jelölések

A fogalmak meghatározásánál és az alkalmazott jelöléseknél igyekszünk alkalmazkodni az irodalomban szokásosakhoz, de bizonyos esetekben eltérünk ezektől. Némely fogalmak még nem használatosak egységesen és ezért megengedhető számunkra az alkalmasabbnak, vagy kifejezőbbnek tűnő választása.

Általánosan fogjuk használni a „.” pont jelet egy X objektum Y attribútuma, vagy változója esetén. Azaz az „ X -nek az Y -ja” helyett csak röviden $X.Y$ -t írunk.

θ és Ω mindig nem üres címkehalmazokat jelölnek. Az üres halmazra, vagy üres objektumra a \emptyset jelet használjuk.

2.1. DEFINÍCIÓ. A $g=(V, \Phi, E)$ hármast a θ és Ω címkehalmazok feletti irányított gráfnak nevezzük, ha teljesülnek a következők:

- (i) V és E diszjunkt halmazok (kivéve a $V=E=\emptyset$)
- (ii) $\Phi: V \rightarrow \theta$ függvény a csúcsok címkézése
- (iii) $E \subseteq V \times \theta \times V$ az irányított és címkézett élek halmaza.

Amennyiben félreérthető lenne hogy V, Φ, E melyik g gráfhoz tartoznak, úgy a megfelelő $g.V, g.\Phi$ ill. $g.E$ jelölést alkalmazzuk.

θ és Ω lehetnek más címkehalmazok direktszorzatai is. Vannak szerzők [10], akik erre a láncolást használják, de ezt mi nem vettük át.

Nem tesszük semmilyen megkötést az egész tárgyalás során sem az egyes csúcsokra illeszkedő élek, sem pedig két csúcs között haladó élek számára és címkézésére vonatkozóan. Egyedül a végességet követeljük meg. Mivel célunk gyakorlati célokra alkalmas eszközök kialakítása lehetőleg kerülünk minden olyan bonyodalmat, amelyek akár a programozás, akár az elmélet oldaláról nézve bonyolult algoritmusok kialakításához vezetnének. A gráf csúcsainak fokszáma vonatkozó esetleges kikötések technikai ellenőrzése és kezelése igen körülményes lenne.

Szükségünk van egy olyan absztrakt eszközre a gráfok egymásból történő generálásánál, amely egy gráf-gráf megfeleltetést jól ír le. Ehhez majd a gráfmorfizmusok

fogalmát fogjuk használni. Mivel az algebrai fogalmakkal összhangban lehetünk a formális rendszerek és nyelvek terminológiájával, ez egyben nagy könnyebbséget is szolgáltat a programozás és szimuláció számára. Ugyanis éppen manapság kezd kialakulni az az irányzat, amely a programozási nyelvekkel szemben és következésképpen a modellezéssel szemben is az absztrakció irányába hat. Ez a fogalmak objektumokként való szemlélete és ezeknek nem mint attributumok egy halmazának, hanem inkább mint közös viselkedési típusoknak a megragadása [26].

2.2. DEFINÍCIÓ. Legyenek $g_1=(V_1, \Phi_1, E_1)$ és $g_2=(V_2, \Phi_2, E_2)$ θ és Ω -feletti tetszőleges címkézett és irányított gráfok. Egy $q: g_1 \rightarrow g_2$ leképezést gráfmorfizmusnak nevezünk, ha teljesülnek a következő feltételek:

- (i) $q: V_1 \rightarrow V_2$ függvény,
- (ii) $\forall (u, d, v) \in E_1 \Rightarrow (q(u), d, q(v)) \in E_2$,
- (iii) $\Phi_1 = \Phi_2 \circ q$.

Amennyiben (i) esetén q egy-egyértelmű is, úgy q -t gráfizomorfizmusnak, a g_1 és g_2 gráfokat meg izomorf gráfoknak nevezük.

Mint a 2.2. definícióból kitűnik, követeléseink kettősek, úgy a gráfok struktúrájára, mint címkézésére vonatkoznak. q helyett tulajdonképpen $q=(q_V, q_E)$ -t kellene írni, ahol q_V a gráfmorfizmusnak a csúcsokat leképező, míg q_E az éleket leképező komponenseit jelentik. Azaz

$$q_V: g_1 \cdot V \rightarrow g_2 \cdot V, \text{ ill. } q_E: g_1 \cdot E \rightarrow g_2 \cdot E$$

Megadunk egy másik definíciót is a gráfokra, amely az előbbi megjegyzésekkel van összhangban.

2.3. DEFINÍCIÓ. Az $E \neq \emptyset$ halmazon, mint élek halmazán értelmezett

$$g = (l_E: E \rightarrow \Omega, l_V: V \rightarrow \theta, s: E \rightarrow V, t: E \rightarrow V)$$

négystä címkézett gráfnak nevezük, ha l_E, l_V, s és t mind függvények.

Úgy tekinthetjük a g gráfot, hogy élével és a négy leképezéssel generálható csúcsai és címkézései. Ez a felírási mód alkalmas gráfok részgráfjainak gyors kiválasztására és kezelésére. Az s , ill. t függvények az irányított élek kezdő „source” és vég-csúcspontjait „target”, jelölik ki. Mivel nem rendezett (u, d, v) hármasok specifikálják az irányított és címkézett éleket, hanem E egy-egy eleme és a rajta értelmezett függvények, ezért a 2.1. definícióval szemben tetszőleges számú párhuzamos, azonos irányítású és címkézésű él is megengedett a 2.3. definíció szerint. Tehát valóban a 2.3. „modernebb” definícióját adja a gráfoknak, amennyiben inkább az él-objektumokon végrehajtott műveletekre vonatkozó azonos viselkedés szempontjából jellemzi és nem az azonos típusú attributumokkal rendelkező objektumok halmazaként.

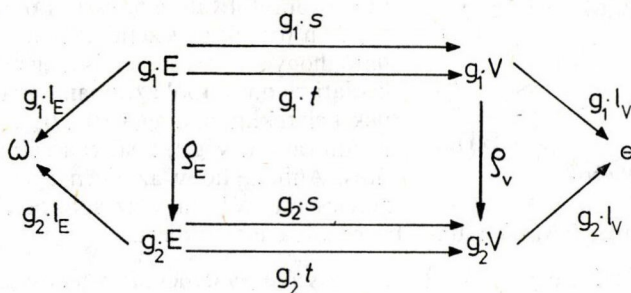
A gráfgenerátor rendszerek leírása formális lesz és a létrehozható gráfok csak a gráfizomorfia erejéig lesznek meghatározottak. A generálás és az ennek megfelelő algoritmus olyan eszközök kialakítását igénylik, amelyek invariánsan viselkednek az ilyen megfeleltetéseknek.

2.4. DEFINÍCIÓ. Legyen g egy tetszőleges θ, Ω feletti irányított gráf. A $[g]$ -t θ, Ω -feletti absztrakt gráfnak nevezük, ha $[g]$ jelöli az összes g -vel izomorf gráfok osztályát.

$[g]$ nyilván egy gráftípust ad meg. Bármely $g' \in [g]$ objektumával reprezentálható. Ezért úgy tekinthetjük, hogy van egy, a konkrét objektumoktól független leírása $[g]$ -nek és az összes $g' \in [g]$ objektum egy-egy $i: g \rightarrow g'$ izomorfizmussal kapcsolódik az osztályhoz. Lehet, hogy több ilyen izomorfizmus is létezik, de mivel a későbbiekben a generálás során csak egyet kell és lehet használni ezek közül, ezért elegendő g -hez minden objektum esetén pontosan egy izomorfizmust figyelembe venni. $[g]$ elemeit konkrét gráfoknak nevezzük. Az összes véges irányított és címkézett konkrét gráfok osztályát $(\theta, \Omega)_*$ -gal jelöljük. Az összes absztrakt gráfok osztályát, azaz $(\theta, \Omega)_*$ -ban a gráfizomorfia által létrehozott ekvivalenciaosztályok összességét $[\theta, \Omega]_*$ -gal jelöljük. Amennyiben $*$ helyett $+$ jelet írunk, úgy a megfelelő osztályból kizártuk \emptyset -t.

Mivel a gráfizomorfia θ, Ω -felett értelmeztük, ezért adott esetben különbséget kell tenni az absztrakt gráfok között, amennyiben csak a címkézésükben különböznek is.

Nézzük meg, hogy mit jelent a gráfomorfizmus a 2.3. definícióval adott gráfok esetében. A $g_1, g_2 \in (\theta, \Omega)_*$ gráfok esetében a $q = (q_V, q_E): g_1 \rightarrow g_2$ leképezés akkor és csak akkor gráfomorfizmus, ha az 1. ábrán látható diagram kommutatív. Azaz bárhogyan is haladva a nyilak mentén ugyanahhoz az eredményhez jutunk.



1. ábra

Alapvető szerepe lesz a helyettesítés fogalma értelmezésének gráfok csúcsaira és éleire, vagy akár tetszőleges részgráfjaira vonatkozóan. A formális leírásokat az absztrakt gráfokon adjuk meg, míg a megvalósítást, egy-egy gráfobjektum kiválasztását a megfelelő osztályból, konkrét gráfokon dolgozó eljárásokkal definiáljuk. Ennek megfelelően határozzuk meg egy csúcs helyettesítésének fogalmát.

2.5. DEFINÍCIÓ. Egy $p: \theta \rightarrow [\theta, \Omega]_*$ leképezést csúcs-utódgráf helyettesítési szabálynak nevezzük.

Amennyiben valamely $t \in \theta$ és $p(t) = [g] \in [\theta, \Omega]_*$, úgy egy tetszőleges $g' \in [g]$ konkrét gráfot tekintve a $(t, [g'])$ párt a $(\theta, \Omega)_*$ -ban alkalmazható helyettesítésnek nevezzük. Hasonló értelemben használjuk a csúcs-utódgráf helyettesítések egy P halmazának a $P \subseteq \theta \times [\theta, \Omega]_*$ jelölését, melyre

$$(t, [g]) \in P \Leftrightarrow \exists p \text{ helyettesítés, hogy } p(t) = [g].$$

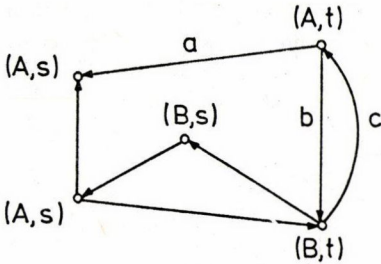
Tulajdonképpen címke-típus és utódgráf helyettesítésről kellene beszélni, de a környezetfüggetlen helyettesítések esetén nem adódik ebből félreértés.

A csúcsokhoz hasonlóan szeretnénk egy élt helyettesítő fogalmat definiálni. Ugyanakkor az éleknek megfelelően struktúra kell hogy tartalmazzon valami specifikust, ami az élekre is jellemző. A 2.3. definíció szerint ez mindenképpen összefüggésben kell hogy legyen az s , ill. t függvények, illetve a függvényértékek általánosításával. Az irányítás megfeleltetése már ezekből adódik. Lényegében véve azt követjük, amit a hipergráfok éleinél is tesznek egy általános irányítás bevezetésekor. A későbbiekben amikor ezeket a struktúrákat az összekötés műveletében felhasználjuk, úgy a „kezdet” és a „vég” részeket hozzuk vonatkozásba a csúcsok helyettesítéseivel.

2.6. DEFINÍCIÓ. Legyen $s, t \in \theta$ két szimbólum. A $g \in (\theta \times \{s, t\}, \Omega)_*$ gráfot stencilnek, vagy általánosított élnek nevezzük.

Az összes konkrét stencilnek osztályát $st(\theta, \Omega)_*$ -gal, míg az absztrakt stencilnek összességét $st[\theta, \Omega]_*$ -gal jelöljük.

Egy $g \in st(\theta, \Omega)_*$ esetén az összes „s”-sel címkézett csúcs a stencil kezdetét, míg az összes „t”-vel címkézett csúcs a stencil végét jelöli. A 2. ábrán mutatunk be egy stencilt.



2. ábra

A 2.3. definícióban az élek az elsődleges terminusok, ezeknek egy a stencilnél is megfelelőbb általánosítását, amely részben rendszerünknek a többitől való eltérését is okozza, a későbbiekben fogjuk bevezetni. A 2.6. definícióból látható, hogy az üres stencil is megengedett. A gyakorlati szempontból azonban ugyanilyen értékűnek kell tekinteni a $g \in st(\theta, \Omega)_*$ stencilt is, ha a kezdő vagy a vég típusú csúcsainak a halmaza üres. Ahhoz, hogy az ilyen speciálisan címkézett csúcsokról, vagy az azokra illeszkedő rész-

gráfok halmazáról beszélhessünk, bevezetünk egy jelölést.

2.7. DEFINÍCIÓ. Legyen $g \in st(\theta, \Omega)_*$ tetszőleges stencil. Egy tetszőleges részgráfját $g.y$ -nal jelöljük, ahol $y \in \{s, t\}$ akkor és csak akkor, ha teljesülnek a következők:

- (i) $\forall v \in g.y.V \Leftrightarrow I_{g.y}(v) = (x, y)$, ahol $x \in \theta$
- (ii) $\forall (u, d, v) \in g.y.E \Rightarrow u, v \in g.y.V$.

2.8. DEFINÍCIÓ. Egy $g \in st(\theta, \Omega)_*$ stencil $g.k$ -val jelölt részgráfját a stencil kötésének nevezzük, ha $g.k$ a

$$g.k.E = g.E - g.s.E - g.t.E$$

élhalmaz által g -ben generált részgráf. Amennyiben $g.k = g$, úgy az ilyen stencilt kötésnek nevezzük.

A definíciónak megfelelően az $st(\theta, \Omega)_*$ stencil kötésait $st(\theta, \Omega).K$ -val, vagy ha nem okoz félreértést, akkor csak röviden $(\theta, \Omega).K$ -val jelöljük. Az absztrakt stencilnek esetében a fogalmak értelemszerűen módosulnak.

Ezek után a 2.5. definícióhoz hasonlóan definiáljuk élek esetére is a helyettesítési szabályokat, illetve az alkalmazható helyettesítés fogalmát.

2.9. DEFINÍCIÓ. Egy $c: \theta \times \Omega \times \theta \rightarrow [\theta, \Omega].K$ leképezést él-kötés helyettesítési szabálynak, vagy összekötési szabálynak nevezzük.

Amennyiben valamely $t_1, t_2 \in \theta$, $d \in \Omega$ -ra teljesül a

$$c((t_1, d, t_2)) = [g] \in [\theta, \Omega].K,$$

úgy véve egy tetszőleges $g' \in [g]$ konkrét gráfot a $((t_1, d, t_2), g')$ rendezett párt a $(\theta, \Omega)_*$ -ban alkalmazható helyettesítésnek nevezzük. Hasonlóan a 2.5. definícióban az él-kötés helyettesítési szabályok megadhatók egy $C \subseteq \theta \times \Omega \times \theta \times [\theta, \Omega].K$ halmazzal is, amelyet a $((t_1, d, t_2), [g]) \in C \Leftrightarrow \exists c((t_1, d, t_2)) = [g]$ feltétel határozza meg.

A 2.9. definícióból látszik, hogy az éleknek megfelleltetett struktúra nem más, mint speciális élék halmaza, vezetésesen a stencil egy vágása. Ezek az élek az absztrakt gráfokon értelmezettek és csak azokkal való összefüggésben lehet róluk mint objektumokról beszélni. Tehát nem speciális absztrakt gráfok definiálásáról van szó, hanem arról, hogy tekintjük az egyik g reprezentációját az absztrakt stencileknek, majd ebben az ekvivalenciaosztályban g -re leképezzük az összes $g' \in [g]$ stencilt és egy további osztályozását végezzük a gráfok csúcsainak és élének aszerint, hogy az egyes i : $g' \rightarrow g$ izomorfizmusok g -nek ugyanarra az élére vagy csúcsára képezik-e le g' e élét és v csúcsát. Az így definiálható csúcs-, illetve élosztályok felett adjuk meg a stencil kötésének éleit.

A gyakorlati számítógépes megvalósítás szempontjából lényeges, hogy a fogalmi rendszer lehetőleg ne tartalmazzon olyan elemeket, amelyek implementációja elkerülhetetlenül bonyolult algoritmusok végrehajtásához vezetne. Azt szeretnénk, hogy a felhasználó az esetleges programfejlesztése során védett legyen olyan bonyodalaktól, amelyeket a definíciós rendszer implikálhat. Ezért, ha talán soknak is tűnik a definíciós rész, a későbbiekben látható lesz, hogy adott helyen milyen előnyökkel jár a fogalmak finomabb megkülönböztetése.

2.10. DEFINÍCIÓ. Legyen $K_{12} \in [\theta, \Omega].K$ egy kötés és tegyük fel, hogy teljesül valamilyen c él-kötés szabályra a $K_{12} = c((t_1, d, t_2))$. Továbbá tekintsünk egy $P \subseteq \theta \times [\theta, \Omega]_*$ csúcs-utódgráf helyettesítési szabályok halmazát. A K_{12} kötéset P -re nézve konzisztensnek nevezzük ha, teljesülnek a következők:

$$\forall (t_1, p(t_1)), (t_2, p(t_2)) \in P,$$

hogy a

$$\varrho_1: K_{12}.s.V \rightarrow p(t_1).V, \text{ ill. } \varrho_2: K_{12}.t.V \rightarrow p(t_2).V$$

leképezések monomorfizmusok, ahol $p(t_x).V$, $x=1, 2$ a $p(t_x)$ absztrakt gráf előbb említett csúcs, ill. él osztályozásából kapott gráfot jelöli.

Ez a bizonyos $p(t_x).V$ csúcsokból álló gráf lényegében a gráf absztrakt típusának leírásából származtatható.

Ha tekintjük él-kötéseknek egy $C \subseteq \theta \times \Omega \times \theta \times [\theta, \Omega].K$ halmazát és minden $c \in C$ konzisztens a $P \subseteq \theta \times [\theta, \Omega]_*$ csúcs-utódgráf helyettesítések halmazával, úgy C -t a P -vel konzisztensnek nevezzük. A konzisztenciának ez a megközelítése biztosítja, hogy P és C bizonyos értelemben teljesek és minimálisak legyenek. Azaz C ne tartalmazzon olyan kötéseket, amelyek nem alkalmazhatók P szabályaira vonatkozóan, ugyanakkor majd megköveteljük, hogy minden számításba jövő él helyettesítésnek legyen megfelelő csúcs-utódgráf helyettesítési szabálya is.

2.11. DEFINÍCIÓ. A $Gr = (P, C)$ rendezett párt gráfgrammatikának nevezzük, ha P csúcs-utódgráf helyettesítések egy halmaza és C a P -vel konzisztens él-kötés helyettesítések halmaza.

A gráfgrammatikák képezik az alapját a gráfgenerálás műveletének. Ezek a szabályok jelölik ki az elvégezhető helyettesítéseket. Az elméleti tárgyalást tekintve a grammatika kapcsolja össze a formális rendszerek és nyelvek eredményeit és módszereit a gyakorlati kérdések megoldásával.

A grammatikáktól még szokás megkövetelni, hogy teljesek is legyenek, azaz $\forall t \in \theta$ -hoz létezzen $(t, p(t)) \in P$. Ezt mi a továbbiakban eleve feltesszük. A $p(t) = \emptyset$ üres helyettesítés a törlés műveletét jelöli ki.

3. Gráfok összeillesztése és összekötése

Amikor egy formálisan megadott gráfgrammatika szabályait alkalmazni szeretnénk egy konkrét $g \in (\theta, \Omega)_*$ gráf esetén, akkor a gyakorlati kivitelezésnél számos probléma merül fel. Ezeket végül is elméletileg kell tárgyalni és tisztázni. Az intuitív megközelítés során érhetőnek és problémamentesnek tűnhetnek az olyan kijelentések, mint „veszünk egy tetszőleges konkrét gráfot” vagy „az utódgráfok és az alkalmazott kötések egyesítése lesz a generált gráf”. Mit jelent azonban egy „tetszőleges” gráf kiválasztása, milyen értelemben lesznek részgráfjai az utódgráfok a generált gráfnak; az egyesítés egyértelmű lesz-e vagy sem; megvalósítható-e egyáltalában elméletileg a párhuzamosan végrehajtott helyettesítés és összekötés? Ilyen és hasonló akárcsak technikainak tűnő problémákat alaposan meg kell vizsgálni és az adekvát eszközöket és módszert kifejleszteni.

Ebben a szakaszban azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy az utódgráfok összekötése milyen algoritmus szerint történjen és ennek parallel végrehajtása az összes összekötendő utódgráfon hogyan valósítható meg. Ettől függ ugyanis, hogy a jelenlegi számítógépeink lehetőségeit is figyelembe véve érdemes-e egyáltalában a paralel gráfgenerálással kísérletezni.

Mint ahogy már a definícióknál utaltunk rá, úgy szeretnénk az utódgráfokat egymással kapcsolatba hozni, hogy a gráfokra jellemző univerzális tulajdonságok megmaradjanak. Ilyenek a csúcsok egymástól való diszjunkt volta, továbbá a csúcsoknak mint az élek közös részének a felfogása.

Amennyiben egy gráf megadását a csúcsainak felsorolásával kezdjük, úgy az éleket a csúcsoknak valamilyen binér relációjával definiálhatjuk. Fordítva, ha az éleket soroljuk fel és ezekből származtatjuk a csúcsokat, úgy a 2.3. definíció szerinti s , illetve t leképezéseket kell definiálni. Amennyiben tehát a gráfgenerálásnál először az utódgráfokat jelöljük ki, úgy az utódgráfok rendezett párpainak összekötéséről kell gondoskodni. Ha azonban az él-stencil helyettesítéseket végezzük el először, úgy az utódgráfokat mint az egymásra helyezett stencilek közös részét kell felfogni. Az általunk kialakított rendszer különbözik némileg a más szerzők [6], [7], [9], [10] által kialakított rendszerektől. CULIK-LINDENMAYER stencillekkel dolgozik, mi meg a kötések használjuk. EHRIG-KREOWSKI-ROSENBERG él-helyettesítés utódél-egymásrillesztésének módszerével szemben a csúcs-helyettesítés utódgráf-összekötést választottuk.

A továbbiakban először halmazok egymásra illesztésével foglalkozunk. Az itteni megfontolásokat általánosítjuk gráfok összeillesztésére és összekötésére.

Adódnak néha olyan összevonásai halmazoknak, amikor a szokásos értelemben vett halmazelméleti egyesítés nem kifejező. Van amikor nemcsak az azonos elemeket akarjuk összevonni, hanem másokat is azonosnak tekintjük valamilyen szem-

pontból. Ilyenkor a halmazok összeillesztéséről, egymásra ragasztásáról (*gluing*) beszélünk.

3.1. DEFINÍCIÓ. Legyenek A_1, A_2 és K tetszőleges halmazok és $p_1: K \rightarrow A_1$, illetve $p_2: K \rightarrow A_2$ két leképezés. Tekintsük az A_1, A_2 diszjunkt egyesítésének $A_1 \dot{\cup} A_2$ halmazát és ebben a p_1 és p_2 által indukált $C = \{(p_1(k), p_2(k)) : \forall k \in K\}$ ekvivalenciarelációt. Azaz $x, y \in A_1 \dot{\cup} A_2, x \equiv_C y$ akkor és csak akkor, ha vagy $x = p_1(k)$ és $y = p_2(k)$ vagy $x = p_2(k)$ és $y = p_1(k)$. Jelöljük G -vel a C által $A_1 \dot{\cup} A_2$ -ben generált osztályozás ekvivalenciaosztályainak halmazát. Ekkor G -t az A_1, A_2 halmazoknak a K halmaz mentén p_1, p_2 leképezésekkel létrehozott egymásra illesztésének nevezzük és $G = A_1 \amalg_K A_2$ -vel jelöljük.

A 3. ábra diagramja mutatja a kapcsolatokat a különböző halmazok között. A $\bar{p}_1: A_2 \rightarrow G$ és a $\bar{p}_2: A_1 \rightarrow G$ leképezések a $\bar{p}_1 := p \circ i_2$ valamint a $\bar{p}_2 := p \circ i_1$ szorzatok által vannak meghatározva. Az $i_1: A_1 \rightarrow A_1 \dot{\cup} A_2$ és az $i_2: A_2 \rightarrow A_1 \dot{\cup} A_2$ injektív leképezések a részhalmaz tartalmazásnak felelnek meg. Erre a fajta diagramra szokták azt mondani, hogy „pushout”. Magyarul a „kilökés”-t használja némely szerző, de mi inkább maradunk a pushout vagy ennek rövidítése p.o. mellett. Az összeillesztés nevezetes tulajdonságát fogalmazza meg a következő lemma.

3.1. LEMMA. Legyen G az A_1, A_2 halmazoknak a K halmaz mentén a p_1, p_2 leképezésekkel egy összeillesztése, p.o.-ja. Ekkor igazak a következők:

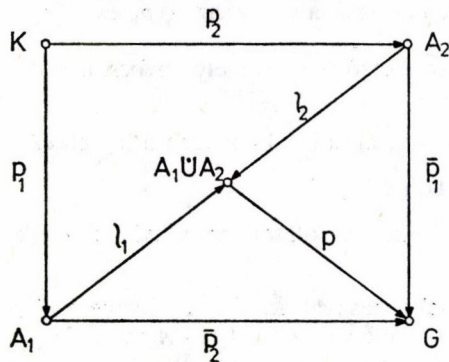
(i) $\bar{p}_1 \circ p_2 = \bar{p}_2 \circ p_1$,

(ii) $\forall X$ halmazra és q_1, q_2 leképezésekre, amelyekre $q_1: A_1 \rightarrow X$ és $q_2: A_2 \rightarrow X$ esetén teljesül a $q_1 \circ p_1 = q_2 \circ p_2$ egyenlőség, egyetlen olyan $q: G \rightarrow X$ leképezés létezik, hogy $q_1 = q \circ \bar{p}_2$ és $q_2 = q \circ \bar{p}_1$ teljesüljön,

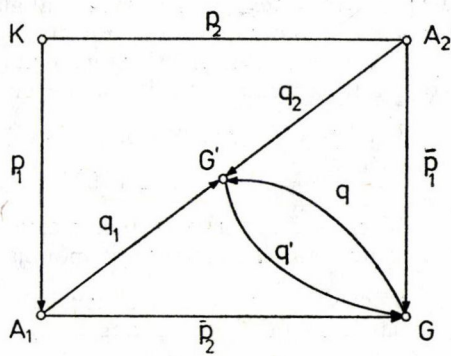
(iii) ha p_1 vagy p_2 injektívek, úgy p_2 vagy p_1 is az.

Mivel ez a tulajdonság általánosabban is jelentkezik a kategória elméletben, ezért szokták a pushout-okat ezzel a követelményrendszerrel definiálni.

Nézzük meg, hogy ha G és G' ugyanazoknak a p_1, p_2 leképezéseknek a p.o.-i, akkor milyen kapcsolat van közöttük. Tekintsük ezért a 4. ábrát. Mivel G' is p.o.-ja p_1, p_2 -nek, ezért a lemma szerint $X = G$ választással kell, hogy egyértelműen létezzon egy olyan $q': G' \rightarrow G$ leképezés, hogy $q' = q_1 \circ \bar{p}_2$ és $q' = q_2 \circ \bar{p}_1$ igazak. Ekkor azonban ezeket behelyettesítve (ii)-be azt kapjuk, hogy $q \circ q' \circ p_1 = q_1$, azaz $q \circ q' = Id_G$ kell, hogy legyen, amiből az következik, hogy $G \cong G'$.



3. ábra



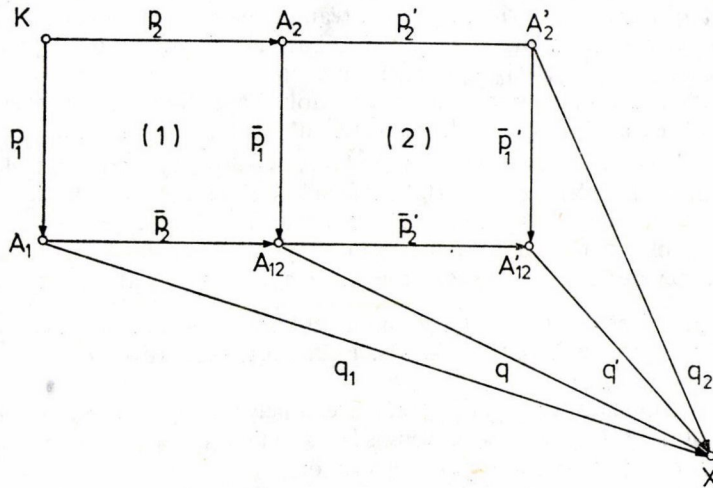
4. ábra

Az imént bizonyítottak azt mutatják, hogy a p.o. csak izomfia erejéig meghatározott.

A további tételek szintén jellegzetes tulajdonságait mondják ki a p.o.-nak.

3.2. TÉTEL. Legyenek az 5. ábrán (1), illetve (2) p.o.-k diagramjai. Ekkor az A'_{12} p.o.-ja a $\bar{p}'_2 \circ \bar{p}_2$ és \bar{p}'_1 leképezésekkel együtt a $p'_2 \circ p_2$ és p_1 leképezéseknek, és

$$A_1 \amalg_K A'_2 \cong A'_{12}.$$



5. ábra

Bizonyítás. Legyenek $q_1: A_1 \rightarrow X$; $q: A'_2 \rightarrow X$ leképezések, amelyek teljesítik a $q_1 \circ p_1 = q_2 \circ p'_2 \circ p_2$ feltételt. (1) miatt egyértelműen kell hogy, létezzen olyan $q: A_{12} \rightarrow X$ leképezés, hogy $q \circ \bar{p}_2 = q_1$ és $q \circ \bar{p}_1 = q_2 \circ p'_2$ igazak legyenek. Mivel (2) is p.o., ezért szintén léteznie kell egyértelműen olyan $q': A'_{12} \rightarrow X$ leképezésének, hogy $q' \circ \bar{p}'_2 = q$ és $q' \circ \bar{p}'_1 = q_2$ teljesülnek. Ezekből azonban az adódik, hogy $q' \circ \bar{p}'_2 \circ \bar{p}_2 = q_1$. Mivel (1) és (2) is p.o., azért q és q' egyértelműen meghatározottak és így A'_{12} a \bar{p}'_1 és $\bar{p}_2 \circ \bar{p}'_2$ leképezésekkel rendelkezik a p.o. általános tulajdonságaival, azaz a p_1 és $p'_2 \circ p_2$ leképezéspár p.o.-ja. Amiből következik, hogy $A_1 \amalg_K A'_2 \cong A'_{12}$.

A 3.2. tétel alapján lehet bizonyítani a következő tételt, amely egyben alapját szolgáltatja a grafok összeköthetőségének.

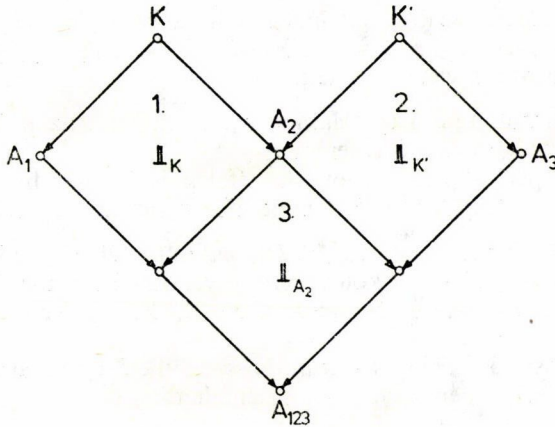
3.3. TÉTEL. Legyenek (1), (2) és (3) p.o.-k a 6. ábrán. Ekkor igaz a következő

$$(A_1 \amalg_K A_2) \amalg_{K'} A_3 \cong A_1 \amalg_K (A_2 \amalg_{K'} A_3)$$

Megjegyzés. A tétel a p.o.-k asszociatív összekapcsolását, azaz halmazoknak asszociatív összeilleszthetőségét mondja ki.

Bizonyítás. Az előző tételnek kétszeri alkalmazásával az (1), (2), illetve a (2), (3) diagramokra, adódik, hogy $A_{12} = A_1 \amalg_K A_2$, illetve $A_{23} = A_2 \amalg_{K'} A_3$ -ből, hogy

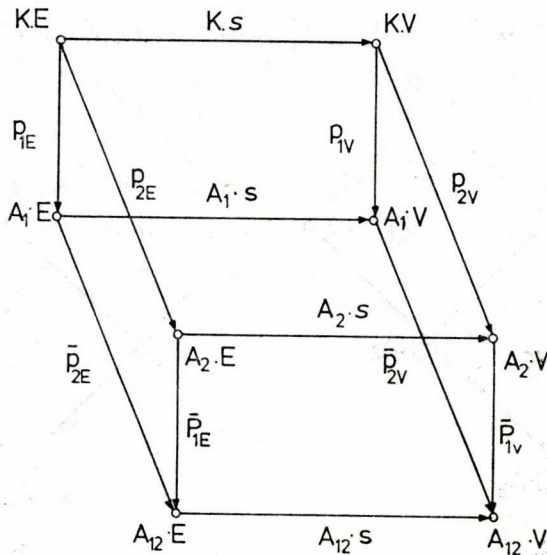
$$(A_1 \amalg_K A_2) \amalg_{K'} A_3 \cong A_{12} \amalg_{K'} A_3 = A_{123} = A_1 \amalg_K (A_2 \amalg_{K'} A_3).$$



6. ábra

Ezek után áttérünk gráfok összeillesztésének műveletére. Ezt úgy valósítjuk meg, hogy csúcsaiknak V , ill. éleiknek E halmazait külön-külön összeillesztjük. Amit meg kell vizsgálni az az, hogy az így keletkező leképezések végül is gráfmorfizmusokat szolgáltatnak-e vagy sem? Evégből a 2.3. definíciót tekintjük. Legyenek A_1, A_2 és $K \in (\theta, \Omega)_*$ gráfok, továbbá legyenek $p_1 = (p_{1E}, p_{1V}): K \rightarrow A_1$ és $p_2 = (p_{2E}, p_{2V}): K \rightarrow A_2$ gráfmorfizmusok a 7. ábra szerint. Ekkor az A_1, A_2 gráfoknak a K gráf mentén p_1, p_2 gráfmorfizmusok által történő összeillesztésén a következőket értjük.

$A_{12} \cdot E = A_1 \cdot E \amalg_{K \cdot E} A_2 \cdot E, A_{12} \cdot V = A_1 \cdot V \amalg_{K \cdot V} A_2 \cdot V$. Előállítjuk az $A_{12} \cdot s$, illetve az $A_{12} \cdot t$ függvényeket. Ekkor $\bar{p}_{1V} \circ A_2 \cdot s \circ p_{2E} = \bar{p}_{2V} \circ A_1 \cdot s \circ p_{1E}$, amiből következik,



7. ábra

hogy $X := A_{12} \cdot V$ választással egyértelműen kell, hogy létezzen egy $A_{12} \cdot s$ leképezés, hogy $A_{12} \cdot s \circ \bar{p}_{2E} = q_1$ és $A_{12} \cdot s \circ \bar{p}_{1E} = q_2$. Ebből adódóan \bar{p}_1 és \bar{p}_2 gráfmorfizmusok. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt.

3.5. TÉTEL. Gráfok összekapcsolására vonatkozóan igaz a 7. ábrán látható diagram kommutativitása és a 3.1. lemma.

Következésképpen a p.o.-ra mondott tételek is igazak, ha a gráfokat mint objektumokat és a gráfmorfizmusokat mint morfizmusokat tekintjük.

3.6. DEFINÍCIÓ. Legyenek $A_1, A_2 \in [\theta, \Omega]_*$ és $K \in [\theta, \Omega]$. K egy kötés. Azt mondjuk, hogy az A_1 és A_2 gráfok a K kötés segítségével összeköthetők, ha léteznek olyan i_1, i_2 injektív leképezések, hogy $i_1: K \cdot V \cdot x \rightarrow A_1 \cdot V$, illetve $i_2: K \cdot V \cdot y \rightarrow A_2 \cdot V$ ahol $x, y \in \{s, t\}$ és $x \neq y$.

Adunk egy másik definíciót is a gráfok összeköthetőségére, amely egyrészt általánosabb és a modellezésben szintén jól használható.

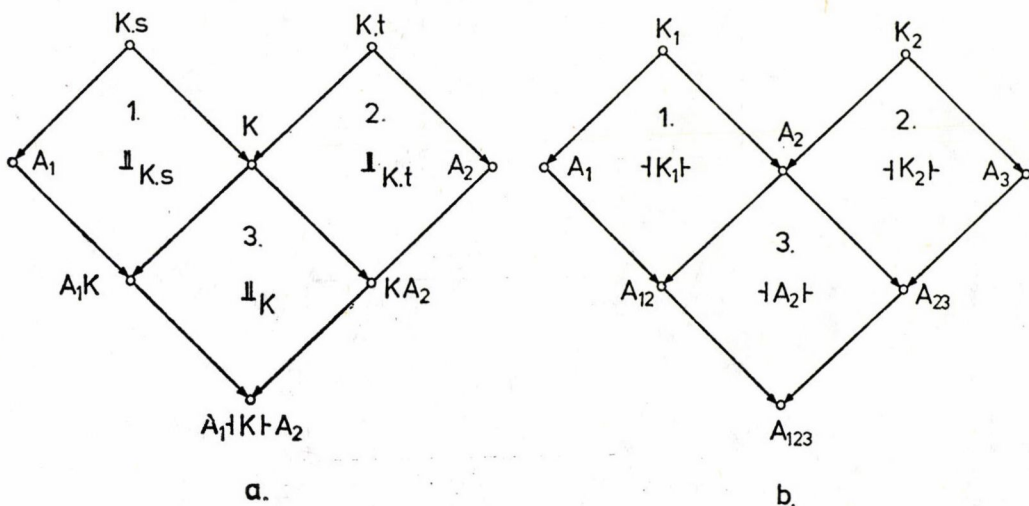
3.7. DEFINÍCIÓ. Az $A_1, A_2 \in [\theta, \Omega]_*$ gráfokat összeköthetőknek nevezzük egy $A \in st[\theta, \Omega]_*$ absztrakt stencillel, ha az egyik alábbi feltétel teljesül:

- (i) $A \cdot s \subseteq A_1$ és $A \cdot t \subseteq A_2$
- vagy
- (ii) $A \cdot t \subseteq A_1$ és $A \cdot s \subseteq A_2$.

Amennyiben a definícióban szereplő A_1, A_2 absztrakt gráfok összeköthetők egy A absztrakt stencillel, úgy ezek egy-egy konkrét $A'_1, A'_2 \in (\theta, \Omega)_*$ gráfrepresentánsát is összeköthetőknek nevezzük. A megfelelő A' stencilrepresentáns kiválasztása a 3.7. definícióval megfelelően történik.

Tekintsük a 6. ábrának megfelelő 8. diagramot, ahol A_1, A_2 az összekötendő gráfokat és K a kötsést jelenti. Ekkor a 3.3. tétel értelmében

$$A_1 K \amalg_K A_2 K \cong (A_1 \amalg_{K,s} K) \amalg_{K,t} A_2 \cong A_1 \amalg_{K,s} (K \amalg_{K,t} A_2)$$



8. ábra

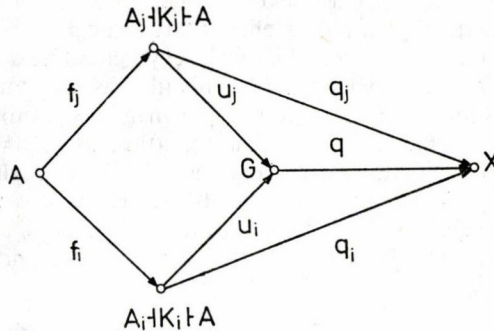
A kapott gráfot az A_1, A_2 gráfok K kötéssel történő összekötésének nevezzük. Megkülönböztetésül az összeillesztés Π_K jelétől $A_1 \dashv K \vdash A_2$ -vel jelöljük.

Ugyancsak a 3.3. tételre hivatkozva bizonyítható, hogy a $\dashv \vdash$ műveletre is igaz az asszociativitás.

3.8. TÉTEL. A 8. b ábrán levő diagramon, ha a pontok a fölöttük levő gráfok összeillesztését jelentik a felső átlóban levő gráf mentén, úgy

$$(A_1 \dashv K_1 \vdash A_2) \dashv K_2 \vdash A_3 \cong A_1 \dashv K_1 \vdash (A_2 \dashv K_2 \vdash A_3).$$

Konkrét gráfok összekötése esetén mindig más és más konkrét kötést alkalmazunk. Ezért az asszociativitás miatt ezeket a kötések szekvenciálisan felhasználva képezhetjük több gráfobjektum összekötését. Legyen $A \in (\theta, \Omega)_*$ egy konkrét gráf és A -hoz a K_1, K_2, \dots, K_n kötésekkel az A_1, A_2, \dots, A_n gráfokat akarjuk hozzákötni, úgy két lehetőségünk van. A 3.8. tételre hivatkozva képezzük az $(\dots((A_1 \dashv K_1 \vdash A) \dashv K_2 \vdash A_2) \dots \dashv K_n \vdash A_n)$ szukcesszív kötések. A másik pedig, hogy elkészítjük az $A_1 \dashv K_1 \vdash A, A_2 \dashv K_2 \vdash A, \dots, A_n \dashv K_n \vdash A$ sorozatot, majd definiálunk $f_j: A \rightarrow A_j \dashv K_j \vdash A$ morfizmusokat úgy, hogy a 9. ábrán látható diagram kommutatív legyen. Amennyiben minden $i, j=1, 2, \dots, n$ -re és bármely X -re és q_i, q_j gráf-morfizmus párra, amelyre $q_i \circ f_i = q_j \circ f_j$ teljesül, egyértelműen létezik egy $q: G \rightarrow X$ gráf-morfizmus, hogy $q \circ u_i = q_i$ és $q \circ u_j = q_j$. Az ilyen tulajdonságú diagramok létezésének következménye, hogy a gráfok akár paralel, akár szekvenciális módon összeillesztve izomorf eredményeket adnak. Az elmélet részletes taglalása a [17]-ben található meg.



9. ábra

4. Gráfok generálása és levezetése adott grammatikával

Gráfoknak egymásból való származtatását generatív úton végezzük. Azaz a csúcsait helyettesítjük valamilyen konzisztens $Gr=(P, C)$ grammatika helyettesítési szabályai szerint páronként diszjunkt utódgráfokkal, majd ezek halmazában a C összekötési szabályoknak megfelelően végrehajtjuk az eredeti gráf élei által kijelölt összekötéseket. Az alábbiakban megadjuk azt az algoritmust, amely egy tetszőleges $A \in (\theta, \Omega)_*$ gráfból egy $Gr=(P, C)$ grammatika alapján egy tetszőleges $A \in (\theta, \Omega)_*$ gráfot generál.

4.1. Gráfgenerálási algoritmus

1. lépés.

Létrehozuk A csúcsainak utódgráfjait. Ezek halmazát $p(A)$ -val és egy $v \in A.V$ csúcs $p(v)$ utódját $v.p$ -vel jelöljük.

- (i) $\forall v \in A.V, v.p \in p(A) \Leftrightarrow v.p \in \{p(\Phi(v))\}$,
- (ii) $\forall v_1, v_2 \in A.V, v_1 \neq v_2$ -re $v_1.p, v_2.p \in p(A)$ -ből következik, hogy $v_1.p \cap v_2.p = \emptyset$.

2. lépés.

Összekötjük $p(A)$ elemeit konzisztens kötésekkel. Az így kapott gráfot $cp(A)$ -val jelöljük.

Tekintsük minden $(v, d, v_2) \in A.E$ élere konzisztens kötéseknek $K = \{(\Phi(v_1), d, \Phi(v_2)), K_{12}\}$ halmazát. Ha $K = \emptyset$, úgy nincs kötés és $A.E$ -nek egy következő élét vesszük. Ha K nem üres, úgy válasszunk ki egy $K_{12} \in K$ kötetést és a 2.10. definíció szerinti q_1 és q_2 monomorfizmusokat a $K_{12}.s$, ill. $K_{12}.t$, valamint a $v_1.p$ és a $v_2.p$ között. Legyenek továbbá $i_1: v_1.p \rightarrow p(v_1)$ és $i_2: v_2.p \rightarrow p(v_2)$ izomorfizmusok. Ezek után minden $(\bar{u}, d, \bar{v}) \in K_{12}.E$ élre legyen $(u, d, v) \in cp(A.E)$, ahol $i_1 \circ q_1(\bar{u}) = u$ és $i_2 \circ q_2(\bar{v}) = v$, vagy $i_1 \circ q_1(\bar{v}) = v$ és $i_2 \circ q_2(\bar{u}) = u$ teljesül.

Megjegyzés. Mindkét lépésben problematikus lehet az absztrakt gráfok egy-egy reprezentánsának kiválasztása. Impliciten feltételezi az algoritmus, hogy valamilyen másik eljárás is létezik, amely másolni tudja a gráftípusokat. Mivel az utódgráfok generálásakor, illetve ezek összekötésekor hivatkozunk az A csúcsaira és éleire, ezért szintén feltételezett, hogy amíg az eljárás tart, ezek a referenciák rendelkezésre állnak. A gyakorlati megvalósításnál bizonyos egyszerűsítések végezhetők és ezért nem szükséges a teljes eljárás befejezéséig a hivatkozásokat tárolni. A paralel kijelölt műveletek szekvenciálisan hajthatók végre megfelelő szinkronizálással. Mivel a műveletek csak izomorfia erejéig meghatározottak, az $A' = cp(A)$ eredmény is csak izomorfia erejéig meghatározott. Tehát az eljárással végül is előállítható az összes A' -vel izomorf gráf, azaz az $[A']$ absztrakt gráf. Ha az egyes utódgráf-objektum kiválasztása helyett magukat az absztrakt gráfokat vennénk, úgy csak igen kevés esetben állíthatnánk elő az $[A']$ absztrakt gráfot. Ugyanis az azonos típusú utódgráfok azonosak lennének.

4.2. DEFINÍCIÓ Legyen $A, A' \in (\theta, \Omega)_*$ két tetszőleges konkrét gráf. Azt mondjuk, hogy az A' az A -ból levezethető egy Gr grammatika szerint \Leftrightarrow ha létezik $A'' \in (\theta, \Omega)$, hogy $cp(A) = A'' \cong A'$. Ha A' levezethető A -ból Gr szerint, úgy $A \Rightarrow_{Gr} A'$ -t vagy röviden $A \Rightarrow A'$ -t írunk. A \Rightarrow reláció reflexív és tranzitív lezárását \Rightarrow^* -gal jelöljük.

5. Paralel gráfgenerátor rendszerek és nyelvek

A formális rendszerek és nyelvek terminológiájával adjuk meg a gráfgenerátor rendszerek definícióját. Egy rendszert általában adottnak tekinthetünk, ha ismerjük a kiindulási leírását, továbbá mindazokat az információkat, amelyekkel egy későbbi leírása megadható. A mi esetünkben a grammatika az egyik fontos információ. Ehhez még hozzávesszük a kiindulási gráfot és a gráfgenerálási eljárást.

5.1. DEFINÍCIÓ. A $G=(\theta, \Omega, P, C, S^0)$ ötöst parallel gráfgenerátor rendszernek, vagy *Lindenmayer gráfgenerátor rendszernek* nevezzük, ha teljesülnek a következők:

- (i) $\theta, \Omega \neq \emptyset$ címkehalmazok,
- (ii) $P \subseteq \theta \times [\theta, \Omega]_*$ csúcs-utódgráf helyettesítési szabályok halmaza,
 $C \subseteq \theta \times \Omega \times \theta \times st[\theta, \Omega]_*$ él-kötés helyettesítési szabályok halmaza,
- (iii) $Gr=(P, C)$ egy konzisztens grammatika,
- (iv) $S^0 \in (\theta, \Omega)_*$ kiindulási gráf, a G axiómája.

Megjegyzések.

1. G — definíciójában θ és Ω explicit megadása nem szükséges. Ugyanis a P produkciók, ill. C összeköttetések leírásánál felsorolhatjuk az összes θ elemet, ill. az összes összeköttetéseket is Ω elemeinek megfelelő sorrendben.

2. A grammatika teljessége sem szükséges mindig. Azáltal, hogy Gr -t a G rendszerhez kötöttük, nem biztos, hogy minden szabályát valaha is fogjuk alkalmazni. Ha ilyen irányú előzetes vizsgálatok pozitív eredménnyel járnak, úgy a gyakorlati megvalósítások szempontjából érdemes a grammatikát redukálni.

Ha a gráfgenerálás eljárását G -re vonatkoztatjuk, úgy S^0 -ból levezethetünk S'_1, S'_2, \dots gráfoknak egy sorozatát:

$$S = S^0 \Rightarrow S'_1 \Rightarrow S'_2 \dots$$

A levezetés lezárásával S^0 -ból S tetszőleges S' gráfja is levezethető $S^0 \xrightarrow{*} S'$.

5.2. DEFINÍCIÓ. Legyen G egy 5.1. definíció szerinti LG -rendszer. Tekintsük az $L(G)=\{S': S^0 \xrightarrow{*} S'\}$ halmazt. $L(G)$ -t paralel gráfnyelvnek, *Lindenmayer-gráfnyelvnek*, vagy röviden *GL-nyelvnek* nevezzük.

Ahhoz, hogy egy GL -rendszert karakterizálni tudjunk, vizsgálhatjuk a különböző levezetési sorozatokat, amelyeket fejlődési sorozatoknak is nevezünk. Más jellemzőit szolgáltatják a G -hez tartozó $L(G)$ gráfnyelv vizsgálatai.

Értelmezünk *GL-rendszerekre* és *nyelvekre* bizonyos osztályozásokat. Ezeket a GL elé tett prefixszel jelöljük. Néhányat felsorolunk rövid definíciójokkal:

- D — determinisztikus: ha minden P és C -beli szabály egyértelmű,
- O — környezet független: ha a P, C szabályok 2.8. és 2.9. definíció szerinti alakúak. Ez a megkülönböztetés akkor szükséges, ha ugyanakkor olyan rendszerrel is van dolgunk, ahol a helyettesítési szabályok függenek a helyettesítendő elem környezetének struktúrájától,
- T — táblázatos: ha a helyettesítési szabályokra több táblázat is rendelkezésre áll, azaz P helyett P_1, P_2, \dots produkciók adottak. Minden egyes lépésben kiválasztunk egy P_i produkciós táblázatot és eszerint hajtjuk végre a helyettesítéseket,
- C — kódolt: ha valamilyen μ kódolás van bevezetve a címkézésben. C helyett W -t írunk, ha a kódolás gyenge, azaz $\mu(t)=\lambda$ is megengedett,
- P — terjeszkedő: amennyiben P minden eleme kielégíti a $\|p(t)\| \geq 1$ feltételt.

A továbbiakban még külön foglalkozunk két másik típusnak a megadásával. A gyakorlatban gyakran merül fel olyan probléma, hogy az egyes pontok helyettesi-

tési szabályai függenek a környezettől. Ekkor a produkciós szabályok nem lehetnek $t \rightarrow A$ alakúak, hanem a t -vel címkézett csúcs környezetének struktúráját is tartalmazniuk kell. Ehhez tekintsünk egy μ kódolást θ -nak egy T címkehalmazra: $\mu: \theta \rightarrow T$. Minden $A \in (\theta, \Omega)_*$ gráfhoz hozzárendelünk egy $A \rightarrow A^0$ gráfot, mely abban különbözik A -tól, hogy egy v csúcsa $\Phi(v) = t$ helyett $\mu \circ \Phi(v) = t^0$ -val van címkézve. Az ilyen konkrét, illetve absztrakt gráfok osztályát $(\theta, \Omega)_*$, ill. $[\theta, \Omega]_*^0$ -al jelöljük. GL definíciójában módosítsuk P -t a most mondottaknak megfelelően, azaz legyen

$$P \subseteq [\theta, \Omega]_*^0 \times [\theta, \Omega]_*.$$

Ez nyilván majd a generálási eljárás módosítását is jelenti. Nevezetesen az 1. lépésben minden $v \in A$ csúcs esetében át kell kódolni $v \rightarrow t$ a $\Phi(v) = t \rightarrow t^0$ szerint, majd megkeresni az $[A^0]$ típushoz tartozó produkciót. Ilyen általánosságban a gyakorlati megvalósítás bonyolult eljárásokat igényelne, ezért csak k -szomszédos részgráfokhoz tartozó produkciókat tekintünk.

Ha a szabályok a most mondottaknak megfelelőek, úgy környezetfüggő, vagy interaktív, *ILG-rendszer*ről beszélünk.

Amennyiben nem determinisztikus a rendszer, úgy felmerül a kérdés, hogy egy konkrét levezetés során az alternatív $(t, p_1(t)), (t, p_2(t)), \dots (t, p_n(t))$ szabályok közül melyiket kell kiválasztani? Hogyan lehet ezt eldönteni? Ez már a konkrét modellezési problémákhoz tartozik. Lehet-e valamilyen különbséget tenni a szabályok használatának gyakorisága között? A legegyszerűbb esetben, amikor nincs semmi információ a gyakoriságokról, akkor ezeket egyenlőnek feltételezve $1/n$ valószínűséggel választunk ki egy szabályt. Ezt egymástól függetlenül tesszük meg minden egyes csúcs helyettesítésénél. Amennyiben a kötések kiválasztásánál is hasonló a helyzet, úgy ennek megfelelően járunk el.

Adódhat olyan feladat is, hogy a produkciós szabályok ismertek — legyenek akár egyértelműek, akár nem —, de a rendszer kezdeti állapota nem teljesen jellemezhető. Azaz több alternatív kiindulási axiómánk van, amelyekhez természetesen azonos grammatika tartozik. A lehetséges kezdeti állapotoknak van valamilyen valószínűségi eloszlásuk és ebből kiválasztunk egy axiómát. Érdekes az a kérdés, ha ismert az axiómák valószínűségi eloszlása, akkor a fejlődési sorozatok, ill. a gráfnyelv hogyan jellemezhető.

Ezzel összhangban az alábbiakban definiáljuk a sztochasztikus, *SGL-rendszereket* és *nyelveket*.

5.3. DEFINÍCIÓ. A $G = (\theta, \Omega, P, \Pi, C, \Gamma, S^0, \Sigma)$ egy *SGL-rendszer*, ha teljesülnek a következők:

- (i) θ, Ω címkehalmazok,
- (ii) P, Π ill. C, Γ rendezett párokban P és C helyettesítési szabályok az 5.1. definíciónak megfelelően, továbbá $\forall t \in \theta \exists \pi, \epsilon \in \Pi$, hogy π, ϵ egy valószínűségi eloszlásfüggvény a $\{(t, p(t)) \in P\}$ halmazon. Hasonlóan $\forall (t_1, d, t_2) \in \theta \times \Omega \times \theta, \exists \gamma, \epsilon \in \Gamma$, hogy γ, ϵ valószínűségi eloszlásfüggvény a $\{(t_1, d, t_2), C((t_1, d, t_2)) \in C\}$ halmazon,
- (iii) $Gr = (P, C)$ teljes és konzisztens grammatika,
 $S^0 = \{S_i^0, i = 1, 2, \dots\}$;
 egy véges gráf-halmaz a lehetséges axiómák halmaza;
 Σ egy valószínűségi eloszlásfüggvény az S halmazon.

A G -hez tartozó $L(G)$ *szochasztikus gráfnyelven* az 5.2. definíciónak megfelelően az S halmazból levezethető összes gráfok halmazát értjük. Megjegyezzük, hogy a generálás során adódó helyettesítési és összekötési szabályok kiválasztása a megfelelő eloszlások szerinti relatív gyakorisággal történnek.

$L(G)$ azonos azoknak az $L(G_i)$ nyelveknek egyesítésével, amelyek G -ből úgy adódnak, hogy először elhagyjuk a függvényeket, továbbá minden $1 \leq i \leq n$ -re $G_i = (\theta, \Omega, P, C, S_i^0)$ és így $L(G) = \bigcup_i L(G_i)$.

Van a sztochasztikus gráfnyelveknek és rendszereknek egy másik megközelítése is [7], mely szerint a gráf éleihez vannak valószínűségek rendelve és ennek megfelelően az utódok kijelölése az elődök valószínűségi eloszlásától függ. Bizonyos esetekben a GL -rendszer szimulálni tudja az ilyen gráfok generálását is.

6. Más megközelítések

Az alábbiakban bemutatott különböző felfogások jól tükrözik az egyes modellezési szempontokat vagy alkalmazási területeket. Nem kívánjuk egyiket sem szembe helyezni a másikkal, hisz mindegyik másra lehet jó. Majd helyenként utalunk azokra a szempontokra, amik a gyakorlati modellezést, számítógépes szimulációt jobban előkészítik.

6.1. e -gráfok

LINDMAYER és CULIK biológiai megfontolásokból gráfgenerátor-rendszereiknek alapfogalmait nem az eddig tárgyalt $(\theta, \Omega)_*$ ill. $[\theta, \Omega]_*$ gráfokra építették, hanem az ún. e -gráfokra. Motivációjuk az volt, hogy bizonyos sejtsztruktúrákban, sejtszövetekben lényeges szerep jut olykor a polarizációnak, a sejtek közötti potenciális aktivitásnak, anyagáramlásoknak stb. Továbbá a sejthalmaz mindig valamilyen környezetben helyezkedik el. Ezzel szintén sajátos kapcsolatai lehetnek, amelyek minőségükben különböznek a sejtek interaktivitásaitól. Az utódok sajátos formája, ill. az összekapcsolódási szabályok kialakítása, ezeknek megfelelően különbözik az általunk tárgyaltaktól. Rendszerük formalizálása a következő sajátosságokkal bír.

Minden címkézett és irányított gráfnak van egy kitüntetett 'e' csúcsa, melynek címkéje #. más csúcs ezt a címkét nem kaphatja. (Tehát egy e -gráf megfelel egy $A \in (\theta \cup \{#\}, \Omega)_*$ gráfnak, ha A -nak 'e'-től különböző többi csúcsa, ill. éle θ , ill. Ω -ból valók.

A stencilek értelmezése a 2.7. definíciónak e -gráfokra való értelmezésével azonos. Szintén értelmezik az $A.s$, ill. $A.t$ részgráfokat, de azzal a különbséggel, hogy $A.s$ -hez hozzáveszik még a következő éleket is:

$E.# = \{(u, d, v) : u=e \text{ vagy } v=e \text{ és } \exists u' \text{ (vagy } v') \in A.t.V, \text{ hogy } (u', d, v) \in A.E \text{ vagy fordítva.}\}$

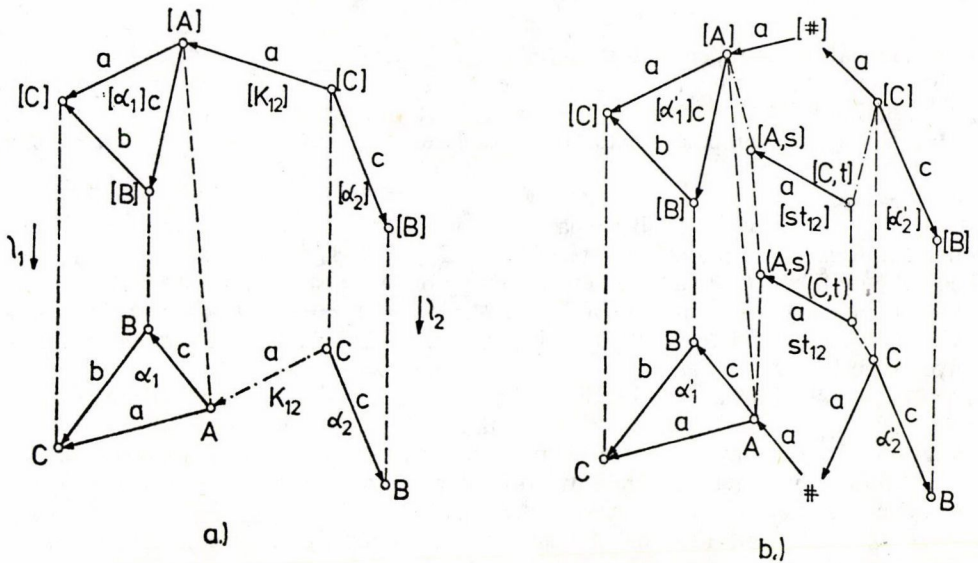
Az utódgráfok összekötésére használják a stencileket úgy, hogy ha A_1, A_2 e -gráfokat egy A stencillel akarunk összekötni, akkor előbb meg kell vizsgálni, hogy léteznek-e A_1 -nek, ill. A_2 -nek olyan $A'_1 \subseteq A_1$, ill. $A'_2 \subseteq A_2$ részgráfjai, hogy $A'_1 \cong A.s$, ill. $A'_2 \cong A.t$ mindegyike teljesüljön. Amennyiben van ilyen, úgy összeköthetők az A stencil segítségével. Ha több stencillel is összeköthető A_1, A_2 , úgy ezek közül a maximálisat választjuk ki.

A gráfgenerátor-rendszer definíciója csúcs-utód, ill. él-stencil helyettesítési szabályokra és egy kiinduló S^0 e -gráfra épül.

Modellezési szempontból az utódgráfok külső élei (e, d, v) vagy (u, d, e) problémát okozhatnak, ha nem kerülnek összeköttetésbe más utódgráfok megfelelő éleivel. Ugyanis a párhuzamosság miatt minden él többször is felhasználható. Az összekötés végén rendelkezni kellene arról, hogy ezen külső élekkel mi legyen. Adott esetben az interpretációt megnehezíti a felgyülemlett sok külső pont.

Mivel a stencilek alkalmazását megfelelő részgráfok keresésére vezetik vissza, a megvalósítás bonyolult, vagy műveletigényes gráfkeresési eljárásokat igényelnének.

Ezek gyakorlati szempontok, amelyek az elméleti tárgyalást nem mindig zavarják. Hisz nem jelent problémát kijelenteni azt, „tekintsük A_1 -nek összes olyan A_1' részgráfját, amely izomorf A .s-sel”. A megvalósítás szempontjából azonban meggondolandó, hogy nem előnyösebb egy másik rendszert kiépíteni, mely eredményét tekintve ezzel azonos, de algoritmikus szempontból előnyösebb. Az alábbi ábrán bemutatunk egy példát, miként lehet rendszerünk és az e -gráfok között megfeleltetéseket tenni.



10. ábra

6.2. Gráflefedések és stencilek összeillesztése

Ide tartoznak azok a megközelítések [9], [10], [21], amelyek nem a csúcs-utódgráf helyettesítési szabályokból szerkesztik meg az összekötési szabályokat, hanem mondhatnánk pont fordítva. A gráf-helyettesítés problematikáját a duális oldalról fogalmazzák meg. Alapelemeknek az éleket tekintik, melyek közös része a csúcsok halmaza. Az él utódjainak kijelölésénél azt tartják szem előtt, hogy az általánosított él (stencil) összeillesztésénél az eredeti csúcsok típusaihoz rendelt csúcskonfigurációt (diszkrét gráfot) kell közös részként lefedniük. Adott esetben számos stencil kerül egymásra ezen a csúcshalmazon.

Gráfgenerátor rendszerünk grammatikájában él-stencil helyettesítési, ill. ezek összeillesztésének, „összeragasztásának” szabályait találjuk. Az összeillesztések a

3. részben leírt eljárásokra épülnek. A konkrét gráfok kategóriájában értelmezett p.o.-k alapján illesztik össze.

Míg CULIK—LINDENMAYER e -gráfjait speciálisabb megközelítésnek tartjuk, addig a stencil helyettesítést rendszerünk duálisának tekintjük. Az alkalmazásokból [14], [20] látszik, hogy ez a felfogás főleg az adatbázisokkal és adatkezelésekkel kapcsolatos problémáknál hatékony.

A gráf-generálásnak az a módja, hogy az utódgráf szigorú megfelelésben marad az előd egyes elemeivel és struktúrájával felvet egy még általánosabb megfogalmazást is. Nevezetesen a gráf generálásnak mint halmazlefedésnek problematikáját.

Legyen G egy gráf és $B_1, \dots, B_n \subseteq G$ részgráfjainak egy olyan rendszere, melyekre $\bigcup_i B_i = G$, ahol \bigcup a csúcsokra és élekre vonatkoztatott halmazelméleti egyesítésnek megfelelő műveletet jelöl. Továbbá legyenek $K_{ij} = B_i \cap B_j$ metszetek. Ha most minden K_{ij} -hez egy $K_{ij} \rightarrow K'_{ij}$ részgráfot hozzárendelünk, a kapott $\bigcup_i K'_{ij}$ részgráfja lesz a G -ből származó G' utódgráfnak. Hasonlóan minden B_i -hez is hozzárendelünk egy B'_i gráfot úgy, hogy teljesüljön a $K'_{ij} = B'_i \cap B'_j$. Ekkor a $P_{ij} = (B_i \leftarrow K_{ij}, B'_i \leftarrow K'_{ij})$ produkciók halmaza lefedi G -t ill. G' -t. Ezt a megközelítést [9] tárgyalja, melynek módszertani része azonban a gráfösszeillesztések p.o.-kra való visszavezetésén alapul.

Gyakorlati alkalmazásukat tekintve ezek is inkább adatkezeléssel kapcsolatosak.

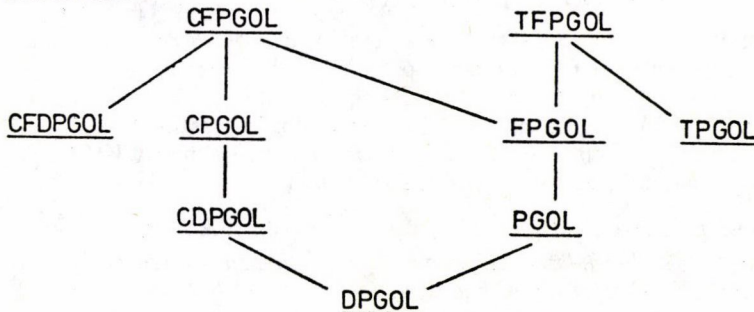
6.3. Csúcs-helyettesítésű paralel gráfgrammatika

Ez a megközelítés EHRIG—ROSENBERG-től származik [10]. Talán ez hasonlít legjobban a mi rendszerünkhöz. Itt is elsődleges szerepe van a csúcs-utódgráf helyettesítésnek. Az utódokat stencillel kötik össze, amelyek a CULIK—LINDENMAYER-től eltérően (A_1, A_2, A) rendezett hármast jelentenek, ahol $A_1, A_2 \in (\theta, \Omega)_*$, $A \in st(\theta, \Omega)_*$ és csúcsai $A_1 \cdot V \cup A_2 \cdot V$, élei meg csak $A_1 \cdot V$, ill. $A_2 \cdot V$ között húzódnak. Ezeket csak konkrét gráfokra értelmezik. A gráfgrammatika csúcs utódgráf él-stencil helyettesítésekkel lesz megadva, melyek konzisztensek. A levezetés a helyettesítések alkalmazásának eljárását jelenti.

7. Néhány elméleti eredmény

Az eredmények egy része az egyes rendszerek által generált nyelvek összehasonlító vizsgálatával kapcsolatos. A bizonyítások az utalt irodalomban található meg.

7.1. TÉTEL. Az alábbi diagramon látható vonalakkal összekötött gráfnyelvek összehasonlíthatók:



Ha valamilyen típusú nyelvek összességét tekintjük, úgy $\mathcal{L}(\)$ -t írunk. A teljes stencilekkel megadott grammatikájú nyelvekhez prefixként f_s -t írva igaz a következő:

7.2. TÉTEL.

$$\mathcal{L}(PGOL) = \mathcal{L}(f_s PGOL).$$

Ezt a tételt azért említjük, mert kiolvasható belőle, hogy a stencileknek különböző felfogásai nem bővítik, ill. nem is szűkítik az általuk generált nyelvcsaládot.

Az *L-rendszerekkel* kapcsolatban fejlődött ki az ún. növekedési függvények elmélete. Ez az egyes fejlődési sorozatokban létrejövő sejtek számának, vagy sejt-típusok számának összességéről ad egy általános leírást, a nyelv grammatikájával összefüggésben. Erről a témáról az első monográfia [13] 1979-ben jelent meg, melyben a problémakör az ún. formális hatványsorok elméletében került tárgyalásra. A különböző nyelvek és rendszerek karakterizálására igen hasznos eszközöket szolgáltat. Példaképpen megemlítjük R. KÁLMÁN és A. LINDENMAYER néhány évvel ezelőtti munkáját [25], melyben megtalálták azokat az összefüggéseket, amelyek a lineáris rendszerelmélet és a determinisztikus *OL-rendszerek* között vannak.

A növekedési függvényeket *GL-rendszerekre* is értelmezhetjük. Itt külön értelmezzük csúcokra, ill. élekre. Amennyiben *DGL-rendszerekkel* van dolgunk, úgy a növekedési függvények az egymás utáni lépésekben generált csúcok, ill. élek számát jelenti. Terjeszkedő, *PDGOL-rendszerekre* bizonyították a következő tételt [15]:

7.3. TÉTEL. Legyen $f: N \rightarrow N$ nemnegatív egész értékű függvény, akkor

1. f — csúcs-növekedési függvénye egy *PDGOL-rendszernek* \Leftrightarrow ,
 f — növekedési függvénye egy *PDOL-rendszernek*,
2. f — él-növekedési függvénye egy *PDGOL-rendszernek* \Leftrightarrow ,
 f — növekedési függvénye egy *WPDOL-rendszernek*.
(W — weak coding.)

Egy gráf *csúcs-Parikh vektorának* a gráfban található azonos címkéjű számosságából álló vektort értjük, a θ -nak megfelelő sorrendben. Hasonlóan lehet élekre is értelmezni a *Parikh-vektort*.

7.4. TÉTEL. Legyen $f: N \rightarrow N^n$, $n > 0$, úgy igazak a következők:

1. f — egy *PDGOL-rendszer csúcs-Parikh függvénye* \Leftrightarrow ha
 f — egy *PDOL-rendszer Parikh függvénye*,
2. f — egy *PDGOL-rendszer él-Parikh függvénye* \Leftrightarrow ha
 f — egy *WPDOL-rendszer Parikh függvénye*.

Nem determinisztikus *GL-rendszerek* esetén a *Parikh-vektor* általánosítása a *Parikh-halmaz*, amely a *GL*-hez tartozó nyelv *Parikh-vektoraiból* áll. Ezzel a gráf generálása során létre jövő mintázatokat jellemezhetjük. (Például valamilyen ökoszisztéma vizsgálatánál entrópia, komplexitás stb. kérdésekkel kapcsolatban.) Ha az egyes lépésekben kialakuló gráfok csúcsszámainak halmazát $V(G)$ -vel, az éleket meg $E(G)$ -vel jelöljük, akkor igazak a következők:

7.5. TÉTEL. Legyen $M \subseteq N$ ill. $M_n \subseteq N^n$, $n > 0$, akkor igaz

1. M — egy *PGOL-rendszer csúcs-számainak halmaza* \Leftrightarrow ha
 M — egy *POL-hosszúságok halmaza*,

2. Ha M - helyett M_n -t írunk, úgy 1-gyel hasonló állítás igaz a *Parikh-halmazokra* is. Az eldönthetőségi problémák közül megemlítjük a következőt:

7.6. TÉTEL. Egy *PGOL-rendszerrel* eldönthető, hogy a hozzá tartozó $V(G)$ véges-e, vagy végtelen. Továbbá a részgráf-tartalmazás problémája is eldönthető.

Végül megmutatjuk, hogy a paralel helyettesítés nem is olyan szigorú megkötés, mint amilyennek első pillanatra látszik. A gráfgenerátor-rendszereknek egy széles osztálya szimulálható megfelelően kódolt *GL-rendszerekkel*. Ahhoz, hogy ezt megmutassuk, először bevezetjük a diszkrét eseményidejű gráfgenerátor-rendszer fogalmát.

Tekintsünk egy $Gr=(P, C)$ konzisztens grammatikát és egy $S^0 \in (\theta, \Omega)_*$ axiómát. Legyen továbbá $T: \theta \rightarrow N$ függvény, amely az egyes csúcsoknak a generálás pillanatától számított élettartamait jelöli. Azaz, ha egy $v \in S^0$. V csúcsra $T(\Phi(v)) = t_v$, úgy a v csúcs változatlan marad $t=0$ -tól $t=t_v$ ideig. Mivel különböző lépésekben különböző csúcsokat kell helyettesíteni, míg mások változatlanok maradnak, így ennek adminisztrálására minden v csúcsához hozzárendelünk egy i_v számlálót, amelynek értékét generálásakor $i_v := T(\Phi(v))$ -re állítunk. A generálási eljárást a következők szerint módosítjuk.

Minden lépésben az aktuális S^t , $t > 0$ gráf minden $v \in S^t$. V csúcsának $v.i$ számlálóját 1-gyel csökkentjük, azaz végrehajtjuk a $v.i := v.i - 1$ utasítást. Ha $v.i = 0$, úgy végrehajtunk egy $p(\Phi(v))$ helyettesítési szabályt. Összekötjük az újonnan generált utódgráfokat egyrészt a megfelelő régi csúcsokkal, másrészt más, szintén most generált gráffal. Ez azt jelenti, hogy Gr -nek tartalmaznia kell ilyen esetben olyan K kötések, melyek élei vagy a $K.s$, vagy $K.t$ -ben csak egy csúcsot tartalmazó absztrakt gráfra utalnak. Azaz, ha $v' \in S^t$, S^{t+1} , $v \in S^t$, $v.i = 0$, úgy ebben az esetben a $(\Phi(v'), d, \Phi(v))$ -re alkalmazható kötést a $p(\Phi(v')) = [\{u\}, \Phi(u) = \Phi(v'), \emptyset]$, $p(\Phi(v))$ absztrakt gráfokat összekötő kötések közül kell választani.

Tekintsük most az így konstruált $G' = (\theta, \Omega, P', C', S^0, T, I)$ rendszert, ahol P', C' a P, C -ből megfelelő bővítéssel kapott helyettesítési szabályokat, T az eseményidőket és $I: \theta \rightarrow \{\text{számlálók}\}$ -at jelöli. Ekkor G' -t diszkrét eseményidejű aszinkron működésű gráfgenerátor-rendszernek, röviden *DAG-rendszernek* nevezzük.

7.7. TÉTEL. Legyen $G = (\theta, \Omega, P, C, S^0, T, I)$ egy *DAG-rendszer*. Ekkor megadható egy $G^* = (\theta^*, \Omega, P^*, C^*, S^0)$ *GL-rendszer* és egy $\mu: \theta^* \rightarrow \theta$ kódolás úgy, hogy $\mu(G^*)$ szimulálja G -t. Azaz minden $S^0 \Rightarrow_G S^1 \Rightarrow_G \dots \Rightarrow_G S^n$ sorozathoz megadható egy $S^0 \Rightarrow_{G^*} S^1 \Rightarrow_{G^*} \dots \Rightarrow_{G^*} S^n$ sorozat, hogy $\mu(S^{*i}) \cong S^i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Ahol $\mu(S^{*i})$ az S^{*i} gráf $S^{*i}.V$ csúcsainak $\mu \circ \Phi(v)$ kódolását jelenti.

Bizonyítás. Megadunk egy eljárást arra, hogy hogyan kell megszerkeszteni a G^* -rendszert. Annak belátása, hogy ez valóban G -t szimulálja azon alapul, hogy minden G -beli lépéshez megmutatjuk a G^* -beli megfelelő lépést. Végül G^* -ban végrehajtva a kódolást G -beli gráffal izomorf gráfot kapunk. A részletes igazolást itt nem közöljük, azt majd egy későbbi elméleti jellegű dolgozatban fogjuk leírni.

$G \rightarrow G^$ konstrukciós eljárás*

Legyen $\theta' \subseteq \theta$, melyre $\forall \vartheta \in \theta'$ -re $T(\vartheta) > 1$. Minden $\vartheta \in \theta'$ -höz legyen $H_\vartheta = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{T(\vartheta)}\}$, $H_\vartheta \cap \theta = \emptyset$, $\forall \vartheta \in \theta'$ címkehalmoz. Ekkor legyen $\theta^* := \theta - \theta'$. Továbbá $P^* := P - \{p(\vartheta), \vartheta \in \theta'\}$. Minden $\vartheta \in \theta'$ -höz hajtsuk végre a $\theta^* := \theta^* \cup H_\vartheta$ utasítást. P^* -hoz vegyük hozzá a $p^*(\vartheta) := [\{u\}, \Phi(u) := \vartheta_{i+1}, \emptyset]$ utasítással definiált helyettesítési szabályokat. $i = 2, \dots, T(\vartheta) - 1$, valamint a

$p^*(\vartheta) := [\{v\}, \Phi(v) := \vartheta_1, \emptyset]$, ill. $p^*(\vartheta_{T(\vartheta)}) := p(\vartheta)$ helyettesítési szabályokat. Ezek után tekintsük az összes olyan $K_\vartheta \in \mathcal{C}$ kötést, amelyek alkalmazhatók az $A_\vartheta = [\{u\}, \Phi(u) := \vartheta, \emptyset]$ és valamely $p(\vartheta', \theta)$ absztrakt gráfok összekötésére. Minden ilyen K_ϑ -hoz hozzárendelünk egy $K_{\vartheta_1}, \dots, K_{\vartheta_{T(\vartheta)}}$ kötések sorozatát, amelyek K_ϑ -tól abban különböznek, hogy a K_{ϑ_i} élei nem $u \in A_\vartheta$ csúcsra illeszkednek, hanem a megfelelő $u_i \in A_{\vartheta_i}$ -re. Az élek címkéi azonosak. Végezzük el a $C^* := C \cup_{\vartheta \in \theta'} \{K_{\vartheta_i}\}_{K_\vartheta}$.

A $\mu: \theta^* \rightarrow \theta$ kódolás pedig legyen a következő:

$$\mu(\vartheta) := \vartheta \Leftrightarrow \vartheta \in \theta, \text{ és } \vartheta \notin \theta', \forall \vartheta \in \theta',$$

$$\mu(\vartheta) := \vartheta' \in \theta' \text{ ahol } \vartheta \in H_{\vartheta'}.$$

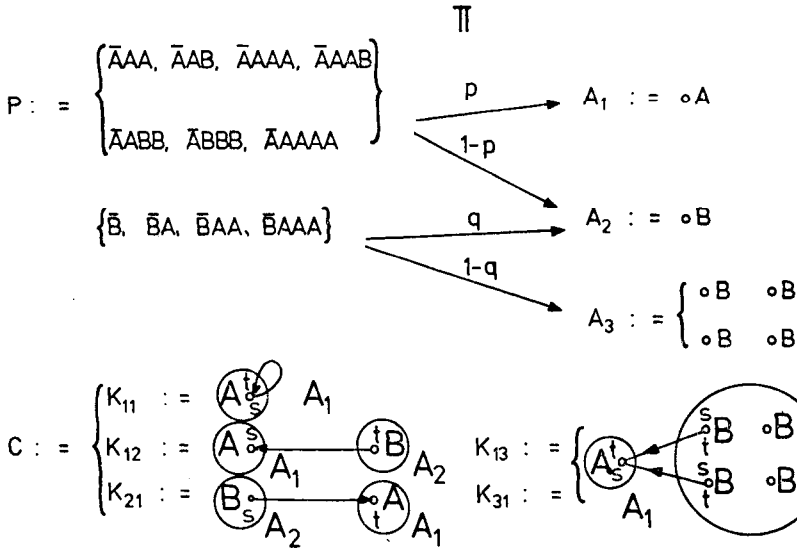
Ha ezt a konstrukciót használjuk, akkor G -ben minden helyettesítés és összekötés során kiválaszthatók G -nek azok a helyettesítései és összekötései, amelyekkel a μ kódolással izomorf gráfot kapunk.

8. Alkalmazások és alkalmazási lehetőségek

Biológia

Első helyen kell említenünk a biológiát, hisz, mint a bevezetőben mondtuk, a parallel gráfgenerátor-rendszerek elméletének kialakulása kétszeresen is összefügg vele. Egyrészt, mert ilyen problémákat szerettek volna modellezni elméleti eszközökkel, másrészt, mert a *GL-rendszerek az L-rendszerek* általánosításai. Ez utóbbiak szintén biológiai problémákból fejlődtek ki. A. LINDENMAYER sejtek szaporodásának, organizmusok differenciálódásának és evolúciós folyamatoknak olyan leírását kereste, amely kezelni tudja, a nagyszámú, azonos viselkedésű — típusú elemek átalakulásait. Az eddigiekben konkrétan modellezett feladatokat a planáris-gráfokkal leírható rendszerek körében találhatjuk. LINDENMAYER—ROSENBERG [22] kidolgoztak egy modellt, amely leírja a sejtek osztódását és strukturálódásait, típusuktól, a sejtmembránok egyes szakaszainak speciális tulajdonságaitól függően. Rendszerük környezetfüggetlen, azaz az osztódási mechanizmus teljes mértékben a sejtől függ, a környezettől nem. Megadtak olyan grammatikákat, amelyek a biológiában igen gyakori hatszög szerinti sejtrendeződést generálják.

Bemutatunk egy példát, amely egészséges és kóros sejtekből álló sejthalmaz fejlődését írja le valószínűségi tényezőket is tartalmazva. Tegyük fel, hogy a sejtek egy négyzethálós elrendezésben, síkban helyezkednek el. Az egészséges sejteket A címkével látjuk el, a kórosokat B -vel. Az egészséges sejtek vagy egészséges utódot hoznak létre, vagy egy spontán mutáció következtében egy kórosat. Ezek valószínűségei legyenek p , $1-p$. Amennyiben egy A sejtet a szövetben több B sejt veszi körül, mint A -típusú, úgy ez megsemmisül. A B sejt utódként vagy egy, vagy négy B -típusú sejtet hoz létre. Ezek valószínűségei legyenek q , $1-q$. A B sejteknek csak az A sejtek felé van anyagáramlásuk. Egyébként nem strukturált az elrendezésük. Egy ilyen modellnek megfelelő *GL-rendszer* grammatikája a következő lesz:



Rendszerelemzés és modellezés

Tekintsünk egy S rendszert, amelyről egy konkrét leírást szeretnénk adni. A leírás alatt értjük, hogy úgy az összetevőit mint működését minden időpillanatra megadjuk. Lehet ez természetesen függő az előző állapotoktól, összetevőktől. Ha a pillanatnyilag ismert leírás nem ad elegendő magyarázatot a működésre, úgy megpróbáljuk felbontani alrendszerekre. Közben figyelemmel vagyunk az egyes alrendszerek kapcsolatára is. Ha lehetséges ilyen felbontás és az összetevő alrendszerekre is szükség esetén továbbvihető; úgy azt mondjuk, hogy S szukcesszíve felbontható és a felbontás hierarchikus. Természetesen, ha időben figyeljük meg a működést, úgy minden egyes időpillanatban más-más hierarchia szerinti felbontás adódhat.

Ahhoz, hogy S -et leírassuk, tudnunk kell, hogy mi van benne, azaz semmilyen összetevője nem lehet *black box*, hanem „*white-box*” kell, hogy legyen. Ugyanakkor, ha különböző modellekben dolgozunk, úgy lehetséges, hogy bizonyos kérdésekre már a formális felbontás — a legalsó szinten csupa *black box* — is elegendő.

A dekompozíció kialakítása az egyes részek közötti interakciók megfigyelésével történik. Nem tudunk egy adott szinten semmit arról, hogy az interakciók milyen belső tartalmat, csatlakozást jelentenek a részekben belül. Csak az összekapcsolódás különböző formáit figyelhetjük meg. Formálisan felírva:

$$S = h_s(S_0, S_1, \dots, S_n) \quad (I)$$

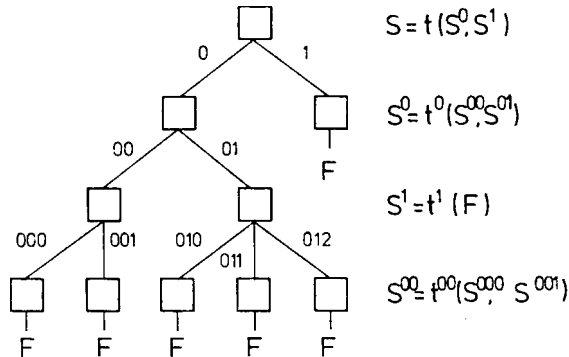
ahol S_0, S_1, \dots, S_n a részrendszereket, h_s pedig ezek összekapcsolását, vagy S -nek ezekre való szétbontását jelentő operátor. Tovább folytatva

$$\left. \begin{array}{l} S_0 = h_0(S_{01}, S_{02}, \dots, S_{0n_0}) \\ S_n = h_n(S_{n1}, S_{n2}, \dots, S_{nn_n}) \end{array} \right\} \quad (II)$$

felbontásokhoz jutunk. Működési szempontból az egyes S_{jk} részrendszerek a h operátorokon keresztül kapcsolódnak a külső és belső részekhez. Egy rekurzív felírást is adhatunk

$$S = h_s(h_0(S_{01}, \dots, S_{0n}), \dots, h_n(S_{n1}, \dots, S_{nn}))$$

Nézzük most azt az esetet, amikor S felbontása diszkrét időlépésenként újra meg újra megtörténik. Legyen valamilyen állapotváltozója a rendszernek, ami alapján eldönthető, hogy milyen állapothoz milyen hierarchikus felbontás tartozik. Az ábrán bemutatunk egy ilyen hierarchiát.



11. ábra

A fa csúcsából lefelé indulva minden út egy felbontási sorozatot ad. Formálisan felírva:

$$S = t(S^0, S^1, \dots, S^n)$$

$$S^0 = t^0(S^{00}, S^{01}, \dots, S^{0n_0})$$

$$S^n = t^n(S^{n0}, \dots, S^{nn_n})$$

t mindig kiválaszt egy rendszerleírást és azt aktualizálja az adott időben.

Megmutatható, hogy a térbeli hierarchia átfogalmazható időbelire és viszont.

Ha minden egyes S^0, \dots, S^n leíráshoz, mint hierarchiához hozzárendelünk egy gráf-grammatikát, úgy egy *TGL-rendszerrel* leírhatjuk egy működési sorozat rendszerleírását.

Joggal kérdezheti valaki, hogy mire jó az ilyenfajta leírás, van-e valamilyen várható haszna? Gondoljunk elektronikus eszközök tervezésére. Tegyük fel, hogy modulrendszerben kívánják majd összeszerelni azokat. Egy új berendezést kialakításakor számítógépes szimulációval szeretnék vizsgálni. Egyes elemi egységek szimulátorai software szinten adottak, továbbá a modulok leírása is. Ekkor egy olyan gráfgrammatikát kell készíteni, amely az összes modul hierarchikus felbontására alkalmas. A rendszer szimulációjához meg kell ezután adni a legfelsőbb szinten definiált modulok összekapcsolási gráfját és ezután addig kell generálni a gráfot, míg minden csúcsához nem lesz egy elemi egység szimulátora rendelve. Ezután alkalmas irányítással (amit a gráf élei is szolgálhatnak) szimulálhatjuk a rendszert. Végezhetünk olyan vizsgálatokat, hogy nem okoztak-e valamilyen belső rendellenességet a magas

szinten összekapcsolt modulok végrehajtásuk során. Ilyen kérdésekkel foglalkozik [18], ahol azonban a szerzők vizsgálatukhoz nem *GL-rendszereket* használnak. A modulokat egy gráf csúcsaira függesztik és az élek azokat a vizsgálatokat jelentik, amelyeket az egyes modulok között működés közben el kell végezni.

Talán ezekből is látható, hogy megfelelő alapsoftware esetén hasonló módon lehet magas szintű programozást végezni. Ha a programot mint egy rendszer leírását tekintjük, úgy a gráfgenerátor rendszer nyelvén írt program strukturált lesz, ami a biztonságos fogalmi megfeleltetéseket és működést szolgálja.

Adatbázisok megszervezésénél és adatfeldolgozási rendszereinél szintén komoly alkalmazási lehetőségeket látunk. Itt elsősorban a [26] irodalomra hivatkozunk. Az a fogalmi rendszer, ami az absztrakt adatstruktúrákat és manipulációkat definiálja, speciális *GL-rendszerekre* épül. Az adat-gráf megfeleltetés, valamint az adat-adat manipuláció mint gráfok közötti leképezéseknek a felfogása egzakt és algebrai mód-szerekkel jól kezelhető modellt szolgáltat. Lehetőséget ad a mellékhatások vizsgálá-tára többszörös hozzáférésű adatbázisok esetén. Az adatbázisokat, illetve adatbázist kezelő rendszereket tervezőknek feltétlenül figyelmébe ajánljuk a [12], [18] és a [20] munkákat. Amennyiben számítógép hálózaton történik az adattárolás és adat-kezelés, úgy még fokozottabb jelentősége van a *GL-rendszereknek*. Erre majd a későbbiekben visszatérünk.

Multiprocesszoros gépek, számítógéphálózatok és algoritmusok

A *GL-rendszerek* paralel működése kézenfekvően veti fel a kérdést, hogy lehet-e az elméletet multiprocesszoros gépek, számítógépes hálózatok, vagy a párhuzamos feldolgozás terén alkalmazni. Közismert számos olyan többváltozós numerikus módszer, mely végrehajtása során több helyen is párhuzamos számításokat megenged. Sok esetben nem lényeges, hogy a feladat elvégzése minden lépését tekintve szekvenciálisan történik-e, vagy sem, de adódhatnak olyan kötöttségek is, amikor korlátozott a számításokra fordítható idő. Gondoljunk például egy folyamatszabályozási feladatra. A probléma megfogalmazása és a döntés meghozatala közötti idő technológiai okok miatt behatárolt. Ha lenne olyan számítógépes lehetőség, mely az egyébként hosszabb ideig futó algoritmust megfelelő részekre bontva ezen idő alatt a feladatot elvégezhetővé tenné, akkor automatizálhatnák az irányítást. Gazdasági szempontokból is esetleg megérné a későbbiekben, ha mikroprocesszoros gépeket egy megfelelő vezérlő rendszerrel összekapcsolva kiküszöbölnék nagykapacitású számítógépek felhasználását. Mivel a 7.7. tétel értelmében *GL-rendszerekkel* szimulálhatunk diszkrét eseményű gráfgenerátor rendszereket, alapos vizsgálatok végezhetőek el egy esetleges számítógép-hálózat invesztálása előtt. A feladatok bonyolultságára, ill. az algoritmusok tagolására szimulációs eszközökkel kaphatunk információkat.

Példaként tekintsünk egy operációkutatási feladatot, melyet a *Dantzig—Wolf dekompozíciós módszerrel* tudunk megoldani. Az eljárás eleve azt célozza, hogy nagyméretű problémák is megoldhatók legyenek a feladat struktúráját kihasználva, olyan számítógépen, amin a hagyományos simplex módszerrel ezt nem lehetne megteremteni. Vizsgáljuk meg, hogy az algoritmusnak [4]-szerinti milyen elemei kapcsolhatók össze paralel működő feldolgozással. Továbbá milyen szerepet játszhatnának itt a *GL-rendszerek*.

Legyen a feladat

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{j=1}^n c'_j x_j \rightarrow \min \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{j=1}^n A_j x_j = \mathbf{b} \\ \text{(iii)} \quad & \left. \begin{array}{l} \mathbf{B}_j x_j \cong \mathbf{b}_j \\ \mathbf{x} \cong \mathbf{0} \end{array} \right\} j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

ahol A_j $m \times n_j$ és B_j pedig $m_j \times n_j$ dimenziós mátrixok. A módszer alap gondolata, hogy megfogalmaz egy ekvivalens feladatot, amelynek azonban csak $m+n$ bázisvektora lesz. Egy megengedett megoldáshoz tartozó bázisvektorok $(A_j x_j, e_j)$ alakúak, ahol x_j (iii)-nek egy extrémális pontja és e_j n -dimenziós egységvektor. Minden j -re felírjuk a következő minimalizálási feladatot

$$\begin{aligned} \text{(j)} \quad & (\mathbf{c}_j - \mathbf{p}A_j)x_j \rightarrow \min \\ & \mathbf{B}_j x_j = \mathbf{b}_j \\ & \mathbf{x}_j \cong \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ennek egy extrémális megoldása legyen \hat{x}_j . Kiválasztunk az összes \hat{x}_j -k közül egy olyan \hat{x}_{j_0} -t, melyre minimális a $\Delta_j = (\mathbf{c}_j - \mathbf{p}A_j)\hat{x}_j - \mathbf{p}e_j$ kifejezés. Amennyiben $\Delta_{j_0} < 0$, úgy bevonhatjuk a bázisba az $(A_{j_0}x_{j_0}, e_{j_0})$ vektort. Majd kiszámítjuk az új $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}})'$ vektort. Amennyiben ilyen $\Delta_{j_0} < 0$ nincs, úgy az eredeti feladat optimumánál vagyunk.

Látható, hogy az éppen aktuális (j) feladatok a $\Delta_j - k$ meghatározásával együtt egyszerre végezhetőek el. Ha most olyan gyakorlati problémánk van, ahol egy, vagy több B_j maga is dekomponálható, úgy ezekre is hasonló párhuzamos számítások írhatók elő. Ennek alapján kialakíthatunk egy gráfrendszert, melynek csúcsai a (j)-részfeladatokat reprezentálják. Továbbá van egy v csúcsa, amely összefogja az egész feladatot, a Δ_{j_0} megkeresését, báziscsere végrehajtását és az új bázishoz tartozó $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}})'$ vektor meghatározását. A csúcsokhoz két típusú címkét rendelhetünk ' A ' aktív ill. ' I ' (*idle*)-t. Ha A a címke, akkor a megfelelő processzor dolgozik, ha I , akkor vár egy lépést. Az alkalmazható helyettesítéseket az eljárás során kialakuló feltételek determinálják. Ha a dekompozíció többszörös, akkor a vezérlés egy diszkrét idejű aszinkron gráfgenerátor-rendszertől fog függni.

A. MARTIN [24] foglalkozott olyan kérdésekkel, amelyek egy algoritmus futása során igényelt számítási gráf (*computational graph*) és a multiprocesszoros számítógép-hálózat adta aktuális korlátozó feltételek következtében kialakítható implementációs gráf kölcsönös kapcsolatát érinti. Az ilyen gyakorlati célú kutatásoknak előzetes szimulációjára szintén alkalmasnak látszanak a *GL-rendszerek*.

Környezetfüggetlen vagy környezetfüggetlen *GL-rendszerek* esetén az egyes sejteket mint egy multiprocesszoros gép processzorait, az éleket mint az ezeket összekötő hálózat csatornáit tekinthetjük. Ezek együttese, a kapcsolatok által, létrehoz közös adatobjektumokat, illetve adatszerkezeteket. A sejt környezetével együtt létrehozott adatszerkezete meghatározhatja a további viselkedését, valamint az utódgráf lokális struktúráját. Figyelembe véve a szinkronizációt, amelyet a generátor rendszer auto-

matikusan biztosít és ami megfelelő védelmet nyújt a nem kívánt mellékhatások ellen, a rendszer absztrakt viselkedésének jellemzői jól megfelelnek azoknak az igényeknek, amelyeket a párhuzamos feldolgozásra orientált programozási nyelvek kutatása során megfogalmaztak [26].

Ha ezen az úton haladunk tovább és jól átgondoljuk a rendszer működésének sajátosságait, úgy arra is juthatunk, hogy minden csomópont helyébe egy-egy vermet képzelünk, és ezekbe ágyazódnak az utódgráfok egyes részgráfjai. Azaz a generálás során megtartva az összes előző gráfot és ezek csúcspontjait, valamint a hozzájuk rendelt utódgráfok csúcspontjait kölcsönös referenciákkal ellátva, egy időben lejátszódo rekurzív feldolgozást valósíthatnak meg. Az axióma derivációs lépései során az egyes gráfok csúcspontjaiba képzelt processzorok mindaddig felfüggesztett állapotban maradnak, amíg a helyettesített utódgráf minden egyes processzora nem kerül valamilyen értelemben végállapotba. Annak a követése, hogy ez a feltétel valamely processzorra teljesül, biztosítható magának a processzornak az osztály, vagy más szóval a típusdeklarációjában. Ennek az lesz a következménye, hogy a felhasználó modellezési nyelve igen magas szintű lehet, hisz rekurzív megadással a probléma leírása sokszor jóval egyszerűbb, vagy a valós megnyilvánulásokhoz közelebb van. Rekurzív gráfgenerátor rendszerre K. CULIK adott egy definíciót, de nem keresett alkalmazási lehetőségeket. Ennek következményeként tudható be, hogy definíciós rendszerének gyakorlati megvalósítása szinte elképzelhetetlen. Továbbá nem tartalmazza a rekurzióknak általunk említett tulajdonságát, ami megengedi, hogy a generálás során létrejövő gráfok mindaddig megmaradjanak, amíg az összes utódjuknak csúcspontjai egy bizonyos végállapotba nem kerültek. A gyakorlati megvalósítását ennek az általános esetnek igen egyszerű eszközökkel lehet elérni, melyek sem a programozást, sem pedig a számítógépes futást nem terhelik meg jelentősen.

A *GL-rendszereknek* ilyen jellegű konkrét alkalmazása még nem történt, mégis fontosnak tartottuk ezt felvetni, hisz mint például az ADA nyelv esetében is komoly törekvések vannak a multiprocesszoros lehetőségek nyelvi kiaknázására. Pontosabban szólva a természetes gondolkodás és problémamegoldás azon sajátosságainak a programozói nyelv részéről történő közelítése és támogatása, amelyek mint fiziológiai folyamatok is párhuzamos rendszerek szervezett együttműködéseként képzelhetők el. Az előbb említett felfogása az adatszerkezeteknek és működési struktúráknak jó megközelítést adja az élő rendszerek magas megbízhatósági szintet biztosító redundáns információ kódolásának és az ugyancsak redundánsan végrehajtott tevékenységeinek. A struktúrában tárolt, de környezetfüggő módon kiolvasható információ megfelel az adatfolyam modelleknek, valamint a többszörös hozzáférésű magas szintű adatrendszerekkel szemben támasztott követelményeknek. Mint a bevezetőben jellemeztük a *GL-rendszerek* kialakulásának aktualitását, a biológiai kutatás és a számítógépek új generációi hasonló kutatási problémákat vetnek fel. Ezek megoldására is hasonló természetű absztrakciók és módszerek látszanak alkalmasnak. Ez végül is nem egy véletlen folyamat következménye, hanem annak a jele, hogy a tudományos gondolkodás is egyre szervezettebben folyik. Ezáltal nem tűnik irreálisnak, hogy a tudomány, óriási specializálódásban való művelése mellett, egy gondolkozási és megértési szintézis felé halad. Talán nem is gondolunk néha arra, hogy ha közvetett módon is, de a számítógépeknek a formális nyelvek kutatására gyakorolt hatásával mennyire pozitív irányba alakítja a közös gondolkodás „ember-közeli” megvalósulását.

9. Számítógépes implementáció az MTA IBM 3031 gépén

Az implementáció problémája az absztrakt viselkedési specifikáció mint ekviválencia osztály egy elemének kiválasztása. A fő kérdés itt azonban nem az, hogy eleme, ill. objektuma-e a nevezett osztálynak, hanem az, hogy a felhasználó számára kényelmes modell-leíró eszközöket szolgáltat-e? Továbbá az esetleges programfejlesztés, a programtranszformáció nem okoz-e túlságosan bonyolult elméleti és gyakorlati feladatot.

A modellalkotás felülről lefelé, ill. alulról fölfelé történő lehetőségeit figyelembe véve egy középutat igyekeztünk megtalálni az implementáció számára. Az objektumok viselkedési típusainak leírásánál figyelemmel voltunk arra, hogy ne burkoljuk be túlságosan azokat, ami által a felhasználó számára bizonyos elemek elérhetetlenné válnának. Ugyanakkor megkíméltük a fölösleges manipulációktól a helyettesítések végrehajtása során, ami által biztosítottuk, hogy az esetleges mellékhatások károsan befolyásolják a futást.

Eddig csak planáris gráfokra implementáltak *GL-rendszereket*. Ezek a választott programozási nyelv, valamint magának az implementációnak következtében nem rendelkeznek olyan automatikus, a felhasználótól függetlenül működő mechanizmusokkal, amelyek a felhasználó számára elrejtik és megvédik az átírási és összekötési eljárásokat.

Úgy gondoljuk, hogy a modellalkotás szempontjából a jelen implementáció elhelyezkedése a problémareprezentációk terében nem annyira fontos szempont, mint az átírás és összekötés invarianciájának biztosítása. Hasonlóan fontosaknak tartjuk olyan lehetőségek létrehozását, amelyekkel ezeknek a rendszereknek a viselkedése és nem pedig a létrehozása tanulmányozható.

A rendszer működését egy időben lejátszódó folyamatként szimuláljuk. Ennek a szimulációs időtengelyén kerülnek bejegyzésre az átírások és az ezeket azonnal követő összekapcsolások. A fennmaradó idő alatt a felhasználónak lehetősége nyílik más akciók végrehajtására. Itt azokra a műveletekre gondolunk, amelyek egy konkrét modell esetén a sejteket specifikálják végrehajtási szempontból.

Készítettünk egy olyan változatot is, amelyben az élek is mint folyamatoknak egy alosztálya vannak definiálva. Ez magát az átírási részt és a nyelv típusát nem befolyásolja, ugyanakkor a felhasználói lehetőségeket nagymértékben fokozza. Gondoljunk csak arra, hogy ezáltal lehetőség nyílik egy bonyolult hálózat csatornáin áramló információs folyamat determinisztikus vagy sztochasztikus folyamatokkal történő szimulálására. Ezek a folyamatok a két átírás közötti időszakra értelmezettek. Tekintve, hogy az átírásokat nem mindig egységnyi időközökben kell végrehajtani, hanem ez maga is egy determinisztikus vagy sztochasztikus folyamat lehet, igen általános jellemzőkkel bíró transzportfolyamatok is szimulálhatók.

A jelenlegi kiépítettségét tekintve a programok, az általuk szimulált *GL-rendszerek* szempontjából a következő specialitásokkal rendelkeznek.

Sztochasztikus

A P produkciós és a C összekötési szabályok egyaránt sztochasztikusnak is megadhatók. Azaz minden $t \in \theta$ -ra és minden $(t_1, d, t_2) \in \theta \times \Omega \times \theta$ -ra megadható egy-egy diszkrét valószínűségi eloszlás, amely szerint választja ki a program egy adott csúcs, ill. él esetében a helyettesítendő gráftípust, ill. összekötési szabály típusát. Ebben benne foglaltatik a nemdeterminizmus esete is az egyenletes eloszlás választásával.

Megoldható, hogy minden azonos típusú helyettesítési szabály ugyanaz legyen függetlenül attól, hogy a kiválasztási valószínűségeik különbözhetnek.

Időben változó grammatikák

Az aktuálisan érvényes grammatika időben változhat. Ugyancsak determinisztikus vagy sztochasztikus módon. Ennek alkalmazásai például ökológiai modellezésben a környezeti hatások érvényesítésénél játszhatnak szerepet. Bonyolult rendszerek szimulációjánál lehetőséget nyújt bizonyos randomizálási technika alkalmazására.

Több axióma

Lehetőség van egyszerre több axiómának paralel alkalmazására ugyanazzal a grammatikával kapcsolatban. Ekkor a gráfok generálása azonos időpontokban hajtodik végre.

Ebbe az esetbe tartozik az is, amikor a kiindulási gráf nem meghatározott. Pontosabban konkurens, ill. sztochasztikus hatások befolyásolják az axióma kiválasztását. Gyakorlati szempontból reálisnak tűnik az ilyen rendszerek vizsgálata. Sokszor olyan sajátosságokat vizsgálunk, amelyeknél nem a kiindulási állapot a döntő, hanem bizonyos statisztikus átlagolással megfigyelhető viselkedés. Sokszor elegendők az így kapott információk.

Általános gráfok

A rendszer semmilyen megkötést nem tesz az axiómákra vagy a levezetett gráfokra vonatkozóan. Ezt a korábban már említett típust azért említjük újra, mert a többszörös, irányított élek használata a számítógépes gyakorlatban általában nem megengedett. Ezen a ponton is látszik, hogy a választott implementáció adott esetben előnyökkel és hátrányokkal is járhat. Végül is nem arról van szó, hogy gráfoknak mátrixokkal történő reprezentációja esetén lehetetlenség többszörös élek ábrázolása, csak ez olyan bonyolulttá és nehézkesé tenné a rendszer kezelését, hogy általában ezeket a lehetőségeket kizárják.

A programozási nyelv kiválasztásának szempontjai

Ahhoz, hogy ne csak a probléma kényelmes leírására, hanem a programfejlesztés számára is flexibilis eszközt hozzunk létre, szükséges, hogy gondosan kiválasszuk az alkalmazandó magasabb szintű nyelvet. Igen lényeges, hogy a változó számú, előre nem meghatározható kapcsolatokkal rendelkező gráf, ill. más objektumok adminisztrálása minél kevesebb gondot okozzon. A gráf különböző típusú csúcsai és élei tág határok között változhatnak. Ezek összefoglalására még a dinamikus indexhatárokkal rendelkező típustömbök sem alkalmasak.

Lehetőleg már kész eszközök álljanak rendelkezésre a folyamatok leírására. Ugyancsak a dinamikus változó objektumok száma miatt legyen mód a „hulladék” eltávolítására. Ezt ne a felhasználónak kelljen adminisztrálnia.

Ezek és más szempontok ösztönöztek arra, hogy a SIMULA nyelvet válasszuk a rendszer programozási nyelvének. (Megjegyezzük, hogy *L-rendszernek* szimulációjára készült [5] CELIA program FORTRAN nyelven több, mint 3000 utasításból áll. Sem sztochasztikus, sem gráfokkal kapcsolatos problémákra nem alkalmas. A mi programunk 600 utasításból áll.)

Főbb algoritmikus lépések

A fogalmak leírását strukturált módon egy hierarchikus rendszerben adtuk meg. A gráf, a csúcs, az él definíciói úgy absztrakt, mint konkrét esetben külön vannak

egymástól és így felxibilisebb a használatuk. A SIMULA nyújtotta szekvenciális halmazkezelés és a folyamatleírás lehetőségeit messzemenően kihasználtuk. Ezt a problémának a SIMULATION osztályba történő beágyazásával értük el. Egy *GL-rendszer* megadása redukált grammatikával történik a PRODUCTIONS halmazban felsorolt NODE-PROD elemek tartalmazzák a helyettesítési szabályokat. A NODE-PROD-nak van egy CTX paramétere, amely a helyettesítendő csúcs, vagy környezet-függő esetben a csúcs és környezetének címkéjét, ill. leírását adja. A CONNECTIONS halmazban felsoroljuk az összekötési szabályokat. Minden szükséges $(A, L, B) \in \theta \times \Omega \times \theta$ típushoz tartozik egy EDGE-PROD halmaz, amelyben felsoroljuk az összes, ehhez a típushoz tartozó kötéseket. A kötések élei a már korábban definiált NODE-PROD (A), ill. NODE-PROD (B) absztrakt gráfok csúcsai felett vannak definiálva, ugyanakkor a kötés SOURCE és TARGET halmazaiba is tartoznak.

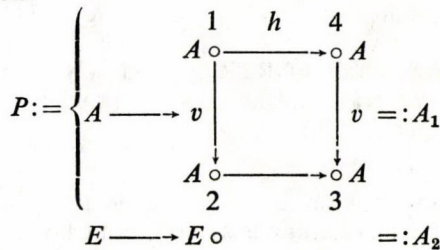
Az absztrakt gráfok A-GRAPH, generálása során az inputtól függően építik fel önmagukat. Egy-egy ilyen absztrakt gráfnak valamely konkrét objektumát, azaz egy C-GRAPH-ot úgy képezzük, hogy csúcsról csúcsra és élről élre menve lemásoljuk az A-GRAPH-ot. A konkrét gráf csúcsai C-NODE-ok, folyamatokként vannak definiálva. Ezzel lehetőség nyílik a generáláson túli tetszőleges események szimulálására is. Azaz egy konkrét gráf keretet ad egy reális, gráfon megfogalmazott esemény szimulálására. Minden C-NODE objektum saját maga gondoskodik arról, hogy időben megszerezze mindazokat az információkat, amelyek az utódjának generálásához és ennek más utódgráfokkal történő összekötéséhez szükségesek. Amennyiben az utódok generálása és összekötése után már nincs rá szükség, úgy kilép automatikusan az eseményszimulációból és a továbbiakban elérhetetlenné válik.

Több olyan eljárást is megadtunk, amelyek C-GRAPH-ok összekötésére, szétvágására, halmazok vagy részhalmazok megszüntetésére vagy részgráfkeresésre alkalmasak. Például biológiai alkalmazásoknál, mint radiotherapyai szimulációnál igen hasznosak az olyan eljárások, amelyek véletlen paramétereiktől függően törölnék bizonyos típusú sejteket. Külön eljárások szolgálnak gráfok, csúcsok és élek megfelelő output-jának képzésére. Ez utóbbiak is folyamatokként lesznek szimulálva.

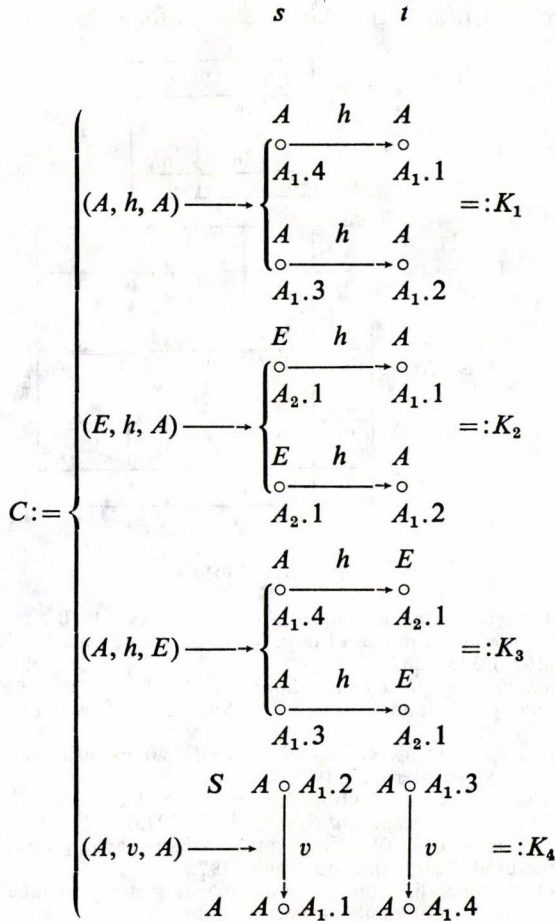
Futtatási tapasztalatok

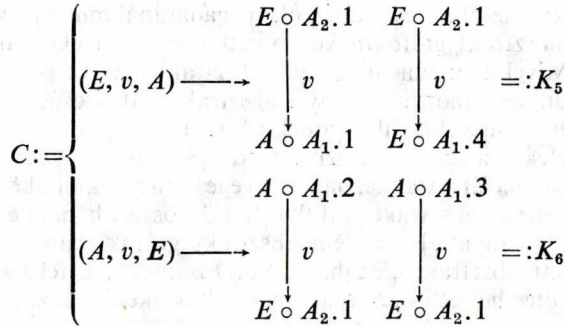
A következőkben ismertetendő példát futtatunk le úgy, hogy mértük a CPU-időt. 5 iteráció után, amikor is több mint 1300 db C-NODE objektumot és mintegy 3000 db C-EDGE objektumot generált, a többi művelettel együtt 2,5 sec-ig tartott. Legyen $G = (\theta, \omega, P, C, S^0)$ egy olyan gráfgenerátor rendszer, amelynek két típusú csúcsa van E , ill. A . Ahol E a környezetet reprezentálja, míg az A a sejtstruktúrához tartozó sejteket. Úgy adjuk meg a grammatikát és az axiómát, hogy G egyben egy e -gráfot is szimuláljon.

Produkción szabályok:



Az összekötési, azaz az él-kötés szabályok megadásánál mindegyik helyettesítés esetében azokra az absztrakt gráfokra kell hivatkozni, amelyeken akarjuk értelmezni az adott kötést. Mivel azonban mindegyik absztrakt gráfból pontosan egy példány lehet, ezért a rajzon beszámozzuk az egyes absztrakt gráfok csúcsait és az egyes kötések csúcsai ezekre a csúcsokra illeszkednek. A számítógépes realizáció során természetesen ezek az élek a megfelelő absztrakt gráf csúcsaira illeszkednek azáltal, hogy mindkét csúcsra referenciát tartalmaznak. Lényeges ez a megkülönböztetés az absztrakt gráf éleitől, hisz nem az absztrakt gráfokat kötjük össze, hanem ezektől függetlenül hozunk létre élhalmazokat. Ezek nem absztrakt gráfok, hanem absztrakt gráfok csúcsain értelmezett absztrakt élek halmazai. Ezeknek megfelelően az összekötési szabályok, az él-kötés helyettesítési szabályok a következők lesznek:

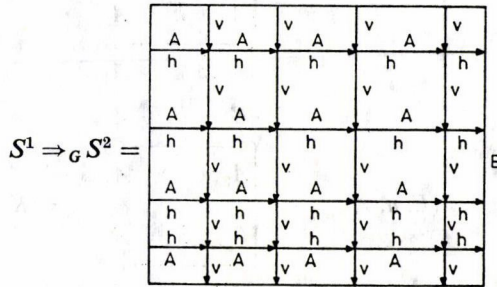
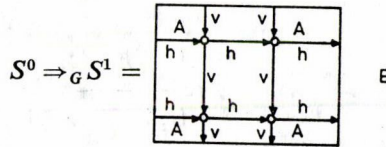




Mivel S^0 -ban csak egyetlen E -csúcs szerepel és $p(E) = A_2$, így szükségtelen megadni az E, d, E $d=h, v$; szabályokat.

Az S^0 axióma legyen: $S^0 := \circ A$;

Ekkor két levezetési lépés után a következő gráfokat kaptuk:



IRODALOM

- [1] PAREIGIS, B., *Categories and Functions* (Academic Press, 1970).
- [2] CODD, E. F., "A relational model of data for large shared data banks", *Communications of the ACM* **13** (1970) 377—387.
- [3] PAZ, A., *Introduction to Probabilistic Automata* (Academic Press, 1971).
- [4] KUNZI, H., TZSCHACH, H. and ZEHNDER, C., *Numerical Methods of Mathematical Optimization* (Academic Press, 1971).
- [5] HERMAN, G. and ROSENBERG, G., *Developmental Systems and Languages* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975).
- [6] EHRLING, H., TISCHER, K. W., "Graph grammars and applications to specialization and evolution in biology I.", *Comp. and Syst. Sci.* **11** (1975) 212—236.
- [7] EHRLING, H. and TISCHER, K. W., "Derivations of stochastic graphs", Proc. Int. Symp. of Uniformly Structured Automata and Logic, 1975.
- [8] NAGL, M., "On a generalization of Lindenmayer systems to labeled graphs", *Automata, Languages, Development* (1976) 487—508.

- [9] EHRING, H. and KROEWSKI, H. J. "Parallel graph grammars", *Automata, Languages, Development* (1976) 425—442.
- [10] EHRING, H. and ROSENBERG, G., "Some definitional suggestions for parallel graph grammars", *Automata, Languages, Development* (1976) 443—468.
- [11] CULIK, K. and LINDENMAYER, A., "Parallel graph generating and graph recurrence systems for multicellular development", *Int. J. Gen. Syst.* 3 (1976) 53—66.
- [12] EHRING, H., KROEWSKI, H. J., MAGGILO-SCHETTINI, A., ROSEN, B. K. and WINKOWSKI, J., "Deriving structures from structures", *Lecture Notes in Computer Science* 64 (1978) 177—190.
- [13] SALOMA, A. and SAITTOLO, M., *Automata Theoretic Aspects of Formal Power Series* (Springer-Verlag, 1978).
- [14] CLANS, V., EHRING, H. and ROSENBERG, G., "Graph-grammars and their applications to computer science and biology", *Lecture Notes in Computer Science* 73 (1979).
- [15] CULIK, K. and WOOD, D., "A mathematical investigation of propagating graph — OL systems", *Inf. and Control* 43 (1979) 50—82.
- [16] LINDENMAYER, A. and CULIK, K., "Growing cellular systems: Generation of graphs by parallel rewriting", *Int. J. Gen. Syst.* 5 (1979) 45—55.
- [17] EHRING, H. and LIEDTKE, A., "Locally star gluing formulas for a class of parallel graph grammars", *LNCS* 73 (1979).
- [18] EHRING, H. and ROSEN, B. K., "The mathematics of record handling", *SIAM Journal on Computations* 9 (1980) 441—469.
- [19] BENE, B., "On computer implementation of certain classes of L-systems, using SIMULA", *Proceeding Conf. Math. Syst. Theory, Salgótarján* (1980) 19—16.
- [20] EHRING, H., KROEWSKI, H. J., MAGGILO-SCHETTINI, A., ROSEN, B. K. and WINKOWSKI, J., "Transformations of structures: An algebraic approach", *Math. Syst. Theory* 14 (1981) 305—334.
- [21] EHRING, H., "An approach to context-free parallel graph grammars", technical report.
- [22] SIERO, P. L. J., ROSENBERG, G. and LINDENMAYER, A., "Cell division patterns: Syntactical description and implementation", *Computer Graphics and Image Processing*.
- [23] KAVIANPOUR, A. and FRIEDMAN, A. D., "Different diagnostic models for multiprocessor systems", in: *Information Processing '80*, ed. A. Lavington, (1980) 157—168.
- [24] MARTIN, A. J., "A distributed implementation method for parallel programming", *Information Processing '80*, ed. A. Lavington, (1980) 309—314.
- [25] KÁLMÁN, R. E. and LINDENMAYER, A., "DOL-realization of the growth of multicellular organisms", 4th Int. Symp. on the Math. Theory of Networks and Systems, Delft.
- [26] WEGNER, P., „Programozási nyelvek—fogalmak és kutatási irányok”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 6 (1980) 159—211.

(Béérkezett: 1982. február 10.)

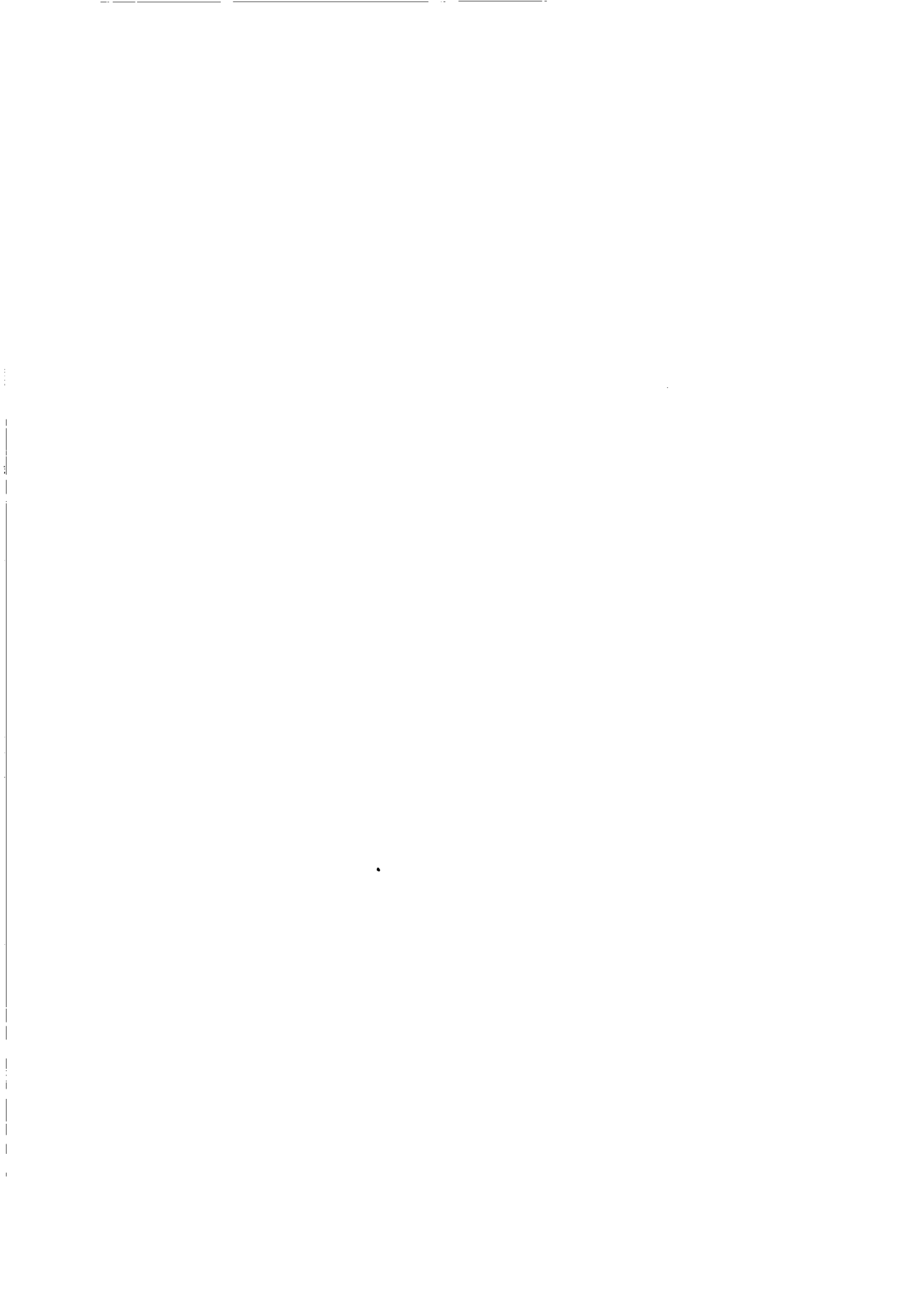
BENE BÉLA

MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓINTÉZET
1132 BUDAPEST, VICTOR HUGO U. 18.

GRAPH GENERATION SYSTEMS AND LANGUAGES

B. BENE

The aim of this paper is to motivate and introduce the basic terms, constructions and results which have been developed in the theory of parallel graph rewriting systems. There are given several examples for the applications to show the power and possibilities of this theory.



MULTIPROGRAMOZÁS INHOMOGÉN PROGRAMOKKAL

SZTRIK JÁNOS—TOMKÓ JÓZSEF

Debrecen Budapest

A [3], [10], I—II. dolgozatoknak a multiprogramozási rendszer különböző karakterisztikáira vonatkozó eredményeinek általánosításával foglalkozunk. Inhomogén esetre, megengedve a CPU-idők tetszőleges eloszlását, FIFO kiszolgálási elv mellett algoritmust adunk a CPU kihasználtság és a programok átlagos várakozási idejének meghatározására.

1. Bevezetés

Fusson egyidejűleg n számú program multiprogramozásban. Feltesszük, hogy a számológép rendelkezik legalább n számú I/O csatornával, így a programok (jobok) I/O műveletei várakozás nélkül, azok előfordulásakor nyomban elkezdődhetnek. A központi feldolgozó egységre (CPU-ra) azonban esetleg várakozniuk kell. A várakozási sor a FIFO-elv szerint alakul, tehát a CPU azon job számára hajt végre aritmetikai utasításokat, amely a legkorábban jelent meg számolási igényével a CPU előtt. A [10], I—II dolgozatokhoz hasonlóan az inhomogén esetet tárgyaljuk, de eltekintünk a CPU-időkre vonatkozó exponenciális eloszlás feltételezésétől. Az i -edik job számolási szakaszainak közös eloszlásfüggvényét jelölje $F_i(x)$, I/O szakaszai legyenek exponenciális eloszlásúak, közös λ_i paraméterrel. A CPU kihasználtságán felül foglalkozunk a programok átlagos várakozási idejével.

A 2. pontban megadjuk a rendszert leíró sztochasztikus folyamatot és meghatározzuk annak stacionárius eloszlását.

A 3. pontban a CPU-kihasználtságra és a programok várakozási idejének átlagértékeire adunk számolási algoritmust.

Az ismertetésre kerülő multiprogramozási modell valójában n -számú gépnek 1 javító általi kiszolgálási modellje. A gépek szerepét a programok játsszák, azok I/O idejei alkotják a gépek működési idejét, CPU-idejük — a gépek javítási ideje. A 4. pontban megmutatjuk, hogy homogén esetben eredményeink összhangban vannak TAKÁCS LAJOS-nak a gépkiszolgálási problémáira adott formuláival.

Az 5. pontban az algoritmusaink számológépi programja által kapott numerikus eredményekkel szemléltetjük a szóban forgó karakterisztikákat.

2. A rendszert leíró Markov-folyamat és annak ergodikus eloszlása

Jelölje tetszőleges $t \geq 0$ -ra $v(t)$ a t időpillanatban a CPU-t igénylő jobok számát, $\alpha_1(t), \dots, \alpha_v(t)$ ezek indexeit az I/O berendezésekről való visszaérkezés sorrendjében, s ξ_t a t pillanatban a CPU-t lefoglaló job számolási ciklusára a t pillanattig ráfordított időt. Rendszerünk állapotváltozásait az

$$(2.1) \quad \mathbf{X}(t) = (v(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_v(t), \xi_t)$$

vektor-folyamattal írhatjuk le, mely rendelkezik a *Markov-tulajdonsággal*. E folyamat állapotterét a 0-pont (mindegyik job az I/O berendezéseken van) és az

$$\{i_1, \dots, i_k; x, (x \geq 0)\}$$

félegyenesek alkotják, ahol i_1, \dots, i_k rögzített k mellett befutja az $1, 2, \dots, n$ számok ismétlés nélküli variációját, s $1 \leq k \leq n$. A (2, 1) folyamat ún. *szakaszosan lineáris Markov-folyamat*, s ezért ergodicitásának feltétele a [4], 211. oldalán szereplő tétel alapján csupán a

$$\beta_i = \int_0^{\infty} x dF_i(x), \quad (1 \leq i \leq n)$$

várható értékek végeisége.

A folyamat t pillanatbeli eloszlására vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$P_0(t) = P(v(t) = 0),$$

$$P_{i_1, \dots, i_k}(x, t) = P(v(t) = k, \alpha_1(t) = i_1, \dots, \alpha_k(t) = i_k, \xi_t \leq x).$$

[4] említett tétele alapján tehát, ha a β_i várható értékek mind végesek, akkor léteznek a

$$(i) \quad P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t)$$

$$(ii) \quad P_{i_1, \dots, i_k}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i_1, \dots, i_k}(x, t)$$

határértékek, melyekre

$$P_0 + \sum P_{i_1, \dots, i_k}(\infty) = 1.$$

Úgy véljük, az összegzési tartományt nem kell részletesebben körül írunk.

Az $\{X(t), t \geq 0\}$ folyamatban Δt idő alatt Δt -vel arányos vagy annál nagyobb valószínűséggel az alábbi állapotváltozások mehetnek végbe:

(i) nincs diszkrét állapotváltozás

$$(i_1, \dots, i_k, x) \rightarrow (i_1, \dots, i_k, x + \Delta t);$$

ennek valószínűsége

$$(1 - \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} \lambda_j \Delta t) \frac{1 - F_{i_1}(x + \Delta t)}{1 - F_{i_1}(x)} + o(\Delta t).$$

(ii) befejeződik egy I/O művelet, de a folyamatban levő számolás nem;

$$(i_1, \dots, i_k, x) \rightarrow (i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, x + \Delta t)$$

ennek valószínűsége

$$\lambda_{i_{k+1}} \Delta t \frac{1 - F_{i_1}(x + \Delta t)}{1 - F_{i_1}(x)} + o(\Delta t)$$

(iv) a folyamatban levő számolás befejeződik, de egyetlen job sem jelenik meg újabban a CPU előtt számolási igényével;

$$(i_1, i_2, \dots, i_k, x) \rightarrow (i_2, \dots, i_k; 0), (k > 1),$$

ennek valószínűsége

$$\frac{F_{i_1}(x + \Delta t) - F_{i_1}(x)}{1 - F_{i_1}(x)} + o(\Delta t)$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be az alábbi jelöléseket

$$A_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} \lambda_j,$$

$$S_{i_k, \dots, i_k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i, A = \sum_{j=1}^n \lambda_j,$$

$$\beta_i = \int_0^\infty x dF_i(x), \varphi(s, j) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_j(x),$$

$$\Pi_{i_1, \dots, i_k}^{(l)} = \prod_{j=l+1}^k \lambda_{i_j} / \prod_{j=l+1}^k S_{i_{l+1}, \dots, i_j},$$

$$(1 \leq l \leq k).$$

Mielőtt rátérnénk a (2.2) ergodikus eloszlásra vonatkozó egyenletek felírására bebizonyítjuk a $P_{i_1, \dots, i_k}(x)$, $(1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n; 1 \leq k \leq n)$ függvények simaságát.

2.1. TÉTEL. A (2.2) (ii) alatti határfüggvényeknek az $F_i(x)$, $(1 \leq i \leq n)$ eloszlásfüggvények ugráshelyeitől eltekintve minden $x \geq 0$ pontban létezik a differenciálhányadosa;

$$p_{i_1, \dots, i_k}(x), (1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n; 1 \leq k \leq n).$$

Továbbá a normált

$$(2.3) \quad p_{i_1, \dots, i_n}(x) = \frac{P_{i_1, \dots, i_n}(x)}{1 - F_{i_1}(x)}$$

függvények mindenütt $(x \geq 0)$ folytonosan deriválhatók.

Bizonyítás. Legyen $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n; 1 \leq l < k \leq n, \tau > 0$ -ra

$$\begin{aligned} V_{i_1, \dots, i_l}^{i_{l+1}, \dots, i_k}(\tau) &= P\{v(t + \tau) = k, \alpha_j(t + \tau) = i_j, 1 \leq j \leq k, \xi_{t+\tau} = \tau | \gamma(t) = \\ &= l, \alpha_j(t) = i_j, 1 \leq j \leq l, \xi_t = 0\}. \end{aligned}$$

Egyszerűen meggondolható, hogy

$$V_{i_1, \dots, i_l}^{i_{l+1}, \dots, i_k}(\tau) = [1 - F_{i_1}(\tau)] \bar{e}^{A_{i_1, \dots, i_k} \tau} \int_{0 < z_{l+1} < \dots < z_k < \tau} \prod_{j=l+1}^k \lambda_j \bar{e}^{\lambda_j z_j} dz_j.$$

Rögzítsük ezután az (i_1, \dots, i_k, x) állapotot, s vizsgáljuk meg, hogy egy $t > x$ pillanatban hogyan kerülhet a (2.1) folyamat az (i_1, \dots, i_k, v) , $(v \leq x)$ állapotba. Ehhez nyilván kell, hogy legyen olyan $t - x < u < t$ időpont, amikor a CPU befejezve vala-

mely job számolását az i_1 -es job számolási igényének kielégítésére tér rá, miközben az i_2, \dots, i_l indexű job-ok felsorolásuk sorrendjében már megjelentek a CPU előtt számolási igényükkel. Továbbá kell, hogy az i_1 -es job u pillanatban elkezdődött számolási ideje legalább $t-u$ ideig eltartson, és hogy az (u, t) időköz alatt az i_{1+1}, \dots, i_k indexű job-ok ezen felsorolás sorrendjében az I/O berendezéseket felszabadítsák.

Az említett u -pillanat az $(i_1, \dots, i_l, 0)$ állapot elérési pillanata. A (2.1) folyamat, ergodicitása következtében, végtelen sokszor meglátogatja ezt az állapotot, s így ezen állapotba való megérkezési $(u_r, r \cong 1)$ időpontosorozat (esetleg késleltetett) felújítási folyamat. Jelölje ezen felújítási folyamat felújítási függvényét $H_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_l, z}(t)$, ahol az alsó indexek a folyamat kezdeti ($t=0$ pillanatbeli) állapotát jelzik. Jelölje végül $R_0, R_{j_1, \dots, j_s}(z)$, ($1 \cong j_1, \dots, j_s \cong n; 1 \cong s \cong n$) a folyamat kezdeti eloszlását. A teljes valószínűség tétele alapján nyerjük, hogy

$$P_{i_1, \dots, i_k}(x, t) = \sum^* \int^* dR \dots (z) \left(\sum_{i=1}^k \int_{t-x}^t dH_{i_1, \dots, i_l}^{i_1, \dots, i_l, z}(u) V_{i_1, \dots, i_l}^{i_1+1, \dots, i_l, i_k}(t-u) \right).$$

Itt a \sum^*, \int^* a kezdeti eloszlás változói szerinti integrálást, ill. összegzést jelzi. A központi felújítási tétel alapján

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-x}^t dH_{i_1, \dots, i_l}^{i_1, \dots, i_l, z}(u) V_{i_1, \dots, i_l}^{i_1+1, \dots, i_l, i_k}(t-u) = \frac{1}{m_{i_1, \dots, i_l}} \int_0^x V_{i_1, \dots, i_l}^{i_1+1, \dots, i_l, i_k}(u) du$$

ahol m_{i_1, \dots, i_l} az $(i_1, \dots, i_l; 0)$ állapotba való megérkezési időköz várható értéke. E várható érték véges, minthogy a folyamat ergodikus. Kaptuk tehát, hogy $\forall i_1, \dots, i_k, x > 0$ -ra

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{i_1, \dots, i_k}(x, t) = P_{i_1, \dots, i_k}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{m_{i_1, \dots, i_l}} \int_0^x V_{i_1, \dots, i_l}^{i_1+1, \dots, i_l, i_k}(u) du.$$

Innen már látható, hogy $P_{i_1, \dots, i_k}(x)$ minden olyan pontban differenciálható, amely az $F_{i_1}(x)$ eloszlásfüggvénynek folytonossági helye, s nyilván ilyen pontokban

$$p_{i_1, \dots, i_k}(x) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{m_{i_1, \dots, i_l}} V_{i_1, \dots, i_l}^{i_1+1, \dots, i_l, i_k}(x).$$

Végül $V_{i_1, \dots, i_l}^{i_1+1, \dots, i_l, i_k}(x)$ alakjából következik, hogy a normált $p_{i_1, \dots, i_k}^*(x)$ függvények mindenütt folytonosan differenciálhatók.

2.2. TÉTEL. A (2.1) folyamat ergodikus eloszlásához tartozó (2.3) ún. normált sűrűségfüggvények eleget tesznek a

$$\frac{dp_{i_1, \dots, i_k}^*(x)}{dx} + A_{i_1, \dots, i_k} p_{i_1, \dots, i_k}^*(x) = \chi_{(k > 1)} \lambda_{i_k} \cdot p_{i_1, \dots, i_{k-1}}^*(x)$$

($1 \cong i_1, \dots, i_k \cong n; 1 \cong k \cong n$) differenciálegyenlet-rendszernek (χ_C , a C feltétel indikátora). Eközben

$$(2.5) \quad \Delta P_0 = \sum_{i=1}^m \int_0^\infty p_i^*(x) dF_i(x),$$

s teljesülnek az alábbi peremfeltételek:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} p_i^*(0) &= \lambda_i P_0 + \sum_{j \neq i} \int_0^\infty p_{j_i}^*(x) dF_j(x), \\ p_{i_1, \dots, i_k}^*(0) &= \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} \int_0^\infty p_{j, i_1, \dots, i_k}^*(x) dF_j(x), \quad (1 < k < n), \\ p_{i_1, \dots, i_n}^*(0) &= 0. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen x az F_i , ($1 \leq i \leq n$) eloszlásfüggvényeknek folytonosság pontja, s Δt oly kicsiny, hogy az $(x, x + \Delta t)$ szakaszon nincs e függvénynek szakadási pontja. A teljes valószínűség-tételére, az (i), (ii) átmeneti valószínűségekre való tekintettel

$$\begin{aligned} p_{i_1, \dots, i_k}(x + \Delta t) &= p_{i_1, \dots, i_k}(x) (1 - A_{i_1, \dots, i_k} \Delta t) \frac{1 - F_{i_1}(x + \Delta t)}{1 - F_{i_1}(x)} + \\ &+ p_{i_1, \dots, i_{k-1}}(x) \lambda_{i_k} \Delta t \frac{1 - F_{i_1}(x + \Delta t)}{1 - F_{i_1}(x)} + o(\Delta t). \end{aligned}$$

A normált sűrűségfüggvényekre innen az egyszerűbb

$$\begin{aligned} p_{i_1, \dots, i_k}^*(x + \Delta t) &= p_{i_1, \dots, i_k}^*(x) (1 - A_{i_1, \dots, i_k} \Delta t) + \\ &+ p_{i_1, \dots, i_{k-1}}^*(x) \lambda_{i_k} \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk. Átrendezés és $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenet után adódik a szóban forgó differenciálegyenlet-rendszer. A tételben szereplő további összefüggések az (iv) átmeneti valószínűségekre hivatkozva igazolhatók.

A (2.4) differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$(2.7) \quad p_{i_1, \dots, i_k}^*(x) = \sum_{l=1}^k (-1)^{k-l} C_{i_1, \dots, i_l} e^{A_{i_1, \dots, i_l} x} \Pi_l^{(i_1, \dots, i_k)},$$

ahol $C \dots$ konstansok. E konstansok a peremfeltételekből határozhatók meg.

Tetszőleges $1 \leq k \leq n$ -re C_k legyen a C_{i_1, \dots, i_k} konstansokat mint koordinátákat, lexikografikus felsorolásban tartalmazó oszlopvektor. C_k dimenziója n elem k -ad osztályú variációinak száma: V_k^n . A

$$p_{i_1, \dots, i_k}^*(0) = 0$$

peremfeltétel a C_k -vektorokra a

$$(2.8) \quad C_n = A_{n-1}^n C_{n-1} + \dots + A_1^n C_1$$

egyenletbe megy át, ahol $A_i^n - V_n^n \times V_i^n$ terjedelmű mátrix. E mátrixok elemei a $\Pi_i^{(i_1, \dots, i_k)}$ mennyiségekkel kifejezhetők.

A k -adik peremfeltétel a (2.7) alakú megoldásra

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} c_{i_1, \dots, i_k} \Pi_i^{(i_1, \dots, i_k)} = \\ & = \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} \sum_{l=0}^k (-1)^{k-l} C_{j, i_1, \dots, i_k} \Pi_l^{(j, i_1, \dots, i_k)} \Phi(A_{j, i_1, \dots, i_k}; j). \end{aligned}$$

Mátrixos alakra térve át, kapjuk, hogy

$$(2.9) \quad C_k = A_{k+1}^k C_{k+1} + A_k^k C_k + \dots + A_1^k C_1,$$

ahol most $A_j^k - V_k^n \times V_j^n$ terjedelmű mátrix, melynek elemei a $\Pi_l^{(i_1, \dots, i_k)}$ mennyiségekkel és a $\Phi(w, j)$ Laplace—Stieltjes-transzformáltak megfelelő helyen vett értékeivel kifejezhetők.

A $C \dots$ konstansok számolási algoritmusza ezek után a következő. Először előállítjuk a (2.8) relációban szereplő mátrixokat. Majd tekintjük a (2.9) egyenletet $k=n-1$ -re és ebben C_n helyére beírjuk (2.8) jobb oldalát. Összevonásokkal innen a

$$C_{n-1} = B_{n-2}^{n-1} C_{n-2} + \dots + B_1^{n-1} C_1$$

egyenlethez jutunk, ahol

$$B_j^{n-1} = (I - A_n^{n-1} A_{n-1}^n - A_{n-1}^{n-1})^{-1} (A_n^{n-1} A_j^n + A_j^{n-1}).$$

Ezt az eljárást folytatva a

$$C_k = B_{k-1}^k C_{k-1} + \dots + B_1^k C_1, \quad (2 \leq k \leq n)$$

rekurzív egyenletrendszerhez jutunk, ahol

$$B_j^k = (I - B_k^{k+1} A_{k+1}^k - A_k^k)^{-1} (B_j^{k+1} A_{k+1}^k + A_j^k).$$

A (2.6) peremfeltétel első egyenlete a C_1 és a C_2 vektorokra a

$$C_1 = A_2^1 C_2 + A_1^1 C_1 + P_0 \lambda$$

összefüggést eredményezi, ahol a λ vektor koordinátái $\lambda_i - k$. Ezen utóbbi egyenletben a $C_2 = B_1^2 C_1$ helyettesítés elvégzése után C_1 kifejezhető

$$C_1 = (I - A_2^1 B_1^2 - A_1^1)^{-1} \lambda P_0$$

módon, ahol egyelőre P_0 ismeretlen. Tetszőleges, mondjuk $P_0=1$ -ből kiindulva meghatározzuk C_1 -et, majd a rekurzív relációkon keresztül a többi C_k , ($2 \leq k \leq n$) vektort. A (2.7) formula felhasználásával ezek után kiszámíthatjuk a rendszer stacionárius állapotvalószínűségeit:

$$P_{i_1, \dots, i_k} = \int_0^\infty p_{i_1, \dots, i_k}^*(x) [1 - F_{i_1}(x)] dx.$$

Végül a valódi P_0 a $P_0 + \sum P_{i_1, \dots, i_k} = 1$ normalizálási feltételből adódik.

3. A jobok átlagos lefutási ideje

A CPU kihasználtsága az adott struktúrájú multiprogramozás esetén $1 - P_0$. Jelölje δ a CPU egy foglaltsági periódushosszát. Nyilván

$$(3.1) \quad P_0 = \frac{1/\Lambda}{1/\Lambda + M\delta},$$

így a stacionárius P_0 valószínűséggel $M\delta$ kifejezhető:

$$M\delta = (1 - P_0)/\Lambda P_0.$$

Egy programnak a lefutási ideje néhány I/O és CPU idő összegéből áll, feltéve ha egyedül fut a gépen. Multiprogramozás esetén a CPU időket várakozási idők előzik meg. Egy program két egymásutáni I/O műveletének kezdete közti időtartamot ciklusidőnek nevezzük, mely három időtartam, I/O idő, várakozási idő, CPU idő összegére bomlik. Az i -edik jobra az I/O idő átlagértéke $1/\lambda_i$. A másik két idő összegének várható értékét jelölje W_i . Ezen két utóbbi időtartamra az jellemző, hogy az i -indexet ezen időköz alatt az $\alpha_1(t), \dots, \alpha_{v(t)}(t)$ koordináták között találjuk. Ezen esemény valószínűsége

$$P^i = \sum P_{i_1, \dots, i_k}$$

ahol az összegzés kiterjesztendő mindazon variációkra, amelyekben i mint elemként előfordul.

Érvényes a (3.1)-hez hasonló

$$(3.2) \quad P^i = \frac{W_i}{1/\lambda_i + W_i}$$

reláció, melyből a W_i a $P^{(i)}$ valószínűséggel kifejezhető. (3.2) a fél-Markov-folyamatoknak valamely az állapottér egy részhalmazában való átlagos tartózkodási idejére vonatkozó formula speciális esete (v. ö. [11]).

4. A homogén eset

Legyenek a programok homogének, azaz a CPU és I/O idők eloszlásfüggvénye legyen mindegyik programra ugyanaz:

$$\lambda_i = \lambda, F_i(x) = F(x), (1 \leq i \leq n).$$

Ilyen esetben több karakterisztikára explicit formula adható meg. Amint a bevezetésben már említettük, az adott multiprogramozás problémánk megfogalmazható gépkiszolgálási problémaként, s homogén esetben TAKÁCS LAJOS által a [8] dolgozatban tárgyalt modellel találjuk magunkat szemben. Most megmutatjuk, hogy az előző pont eredményeiből hogyan következnek TAKÁCS LAJOS eredményei.

Világos, hogy homogén esetben a $C \dots$ együtthatók csak az indexek számától függenek. Adott k -ra e közös konstans jelöljük C^k -val.

Továbbá, homogén esetben

$$\begin{aligned} A &= n\lambda, A_{i_1, \dots, i_k} = (n-k)\lambda, \\ S_{i_1, \dots, i_k} &= k\lambda, \beta_i = \beta = \int_0^\infty x dF(x), \\ \Phi(s; j) &= \Phi(s) = \int_0^\infty e^{su} dF(u), \\ \Pi_{i_1, \dots, i_k} &= 1/(k-1)!. \end{aligned}$$

A $p_{i_1, \dots, i_k}^*(x)$ függvények szintén csak k -tól függenek, adott k -ra közös értékeket jelöljük $p^*(x, k)$ -val. (2.7) alapján most

$$p^*(x, k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} C_j \bar{e}^{(n-j)\lambda x} \frac{1}{(k-j)!}.$$

Legyen ezután

$$q_k^*(x) = \binom{n}{k} k! p^*(x, k),$$

$$C_k = \binom{n}{k} k! C^k, \quad (1 \leq k \leq n).$$

Ekkor

$$q_k^*(x) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n-j}{n-k} C_j \bar{e}^{(n-j)\lambda x}, \quad (1 \leq k \leq n).$$

A C_j , ($1 \leq j \leq n$) konstansokra a peremfeltételekből az alábbi összefüggések adódnak:

$$n\lambda P_0 = \int_0^\infty q_1^*(x) dF(x) = C_1 \Phi(\lambda(n-1)),$$

$$C_1 = n\lambda P_0 + C_2 \Phi((n-2)\lambda) - (n-1)C_1 \Phi((n-j)\lambda),$$

$$(4.1) \quad \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n-j}{k-j} C_j = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j+1} \binom{n-j}{k-j+1} C_j \Phi((n-j)\lambda),$$

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} C_j = 0.$$

Mielőtt megadnánk ezen egyenletrendszer megoldását, be kell vezetnünk néhány mennyiséget. Legyen $1 \leq i \leq n$ -re

$$\phi_i = \Phi(i\lambda), d_i = d_{i-1} \frac{\phi_i}{1-\phi_i}, d_0 = 1,$$

$$H_i = \frac{nd_{i-1}}{i} \sum_{l=i-1}^{n-1} \binom{n-1}{l} \frac{1}{d_l},$$

Ezek után megmutatjuk, hogy

$$(4.2) \quad C_j = \frac{\lambda(n-j)}{1-\Phi_{n-j}} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right] P_0, \quad (1 \leq j \leq n)$$

$$C_n = \lambda H_1 P_0.$$

C_1, C_2 -re az állítás egyszerűen belátható.

Vegyük észre, hogy a H_j mennyiségek között fennáll a

$$(4.3) \quad \lambda(n-j) \frac{\Phi_{n-j}}{1-\Phi_{n-j}} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right] = \lambda(n-j+1) H_{n-j+1}$$

rekurzív reláció ($1 \leq j \leq n$).

A (4.1) egyenletrendszer általános (k -adik) tagja átrendezés után

$$C_{k+1} \Phi_{n-k-1} = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} C_j \binom{n-j}{n-k} \left(1 + \frac{n-k}{k-j+1} \Phi_{n-j} \right)$$

alakba írható át. A jobb oldal $j=k$ -nak megfelelő tagját válasszuk le, majd a maradék összeget jelöljük Σ_{k-1} -gyel. Így a jobb oldal

$$P_0 \frac{\lambda(n-k)}{1-\Phi_{n-k}} \left[H_{n-k} - \binom{n}{k} \right] (1 + (n-k) \Phi_{n-k}) + \Sigma_{k-1}.$$

A P_0 tényezőt ideiglenesen elhagyhatjuk. Az $1 + (n-k) \Phi_{n-k} = 1 - \Phi_{n-k} + (n-k+1) \Phi_{n-k}$ átalakítás után ez a kifejezés

$$\lambda(n-k) H_{n-k} - \lambda(n-k) \binom{n}{k} + \lambda(n-k) \frac{\Phi_{n-k}}{1-\Phi_{n-k}} \left[H_{n-k} - \binom{n}{k} \right] (n-k+1) + \Sigma_{k-1}$$

alakra hozható, mely (4.3)-ra való tekintettel

$$\lambda(n-k) H_{n-k} - \lambda(n-k) \binom{n}{k} + (n-k+1) \lambda(n-k+1) H_{n-k+1} + \Sigma_{k-1}.$$

Leválasztva ezután Σ_{k-1} -ből a $j=k-1$ -nek megfelelő tagot, összevonások és (4.3) figyelembe vétele után a szóban forgó mennyiség

$$\lambda(n-k) H_{n-k} - \lambda(n-k) \binom{n}{k} + \lambda(n-k+1) \binom{n-k+1}{1} -$$

$$- \binom{n-k+2}{2} \lambda(n-k+2) H_{n-k+2} + \Sigma_{k-2}.$$

A fenti eljárás többszöri ismétlésével kapjuk, hogy

$$C_{k+1} \Phi_{n-k-1} = P_0 \lambda(n-k) H_{n-k} + P_0 \sum_{l=0}^k (-1)^{l+1} \lambda(n-k+l) \binom{n-k+l}{l} \binom{n}{k-l}.$$

A jobb oldal második tagja 0, s (4.3)-ra való tekintettel a (4.2) formula bizonyítása $1 \leq j < n$ -re teljes. A $C_n = \lambda H_1 P_0$ állítás igazolása akár a

$$C_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} C_j,$$

akár a (4.1) $n-1$ -nek megfelelő tagjából összevonások után adódó

$$C_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} C_j (n-j + \Phi_{n-j})$$

egyenlet alapján az előzőekben alkalmazott lebontogatásokkal történhet.

Most már könnyen ellenőrizhető a

$$P_k = \int_0^{\infty} q_k^*(x) [1 - F(x)] dx \quad (1 \leq k \leq n)$$

valószínűségekre az alábbi

4.1. TÉTEL.

$$P_k = P_0 \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{n-j}{n-k} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right], \quad (1 \leq k \leq n),$$

$$P_n = P_0 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right] + P_0 \lambda H_1 \beta.$$

P_0 a $\sum_{k=0}^n P_k = 1$ egyenletből határozandó meg, s kapjuk, hogy

$$P_0 = (1 + \lambda \beta H_1)^{-1}.$$

Megjegyzés. A Takács-formulák a $Q_k^* = P_{n-k}$ valószínűségekre vonatkoznak, s ezzel a tételünk összhangban van. Homogén esetben a W_i — várható értékek is azonosak. Most bármely i -re

$$\begin{aligned} nP^{(i)} &= \sum_{k=1}^n k P_k = P_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right] \sum_{k=j}^{n-1} k (-1)^{k-j} \binom{n-j}{k-j} + \\ &+ n P_0 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right] + n \lambda \beta H_1 P_0. \end{aligned}$$

Itt most

$$\sum_{k=j}^{n-1} k (-1)^{k-j} \binom{n-j}{k-j} = \begin{cases} -n(-1)^{n-j}, & \text{ha } 1 \leq j < n-1, \\ n-1, & \text{ha } j = n-1. \end{cases}$$

Így

$$P^i = \frac{P_0}{n} (n - H_1 + n \lambda \beta H_1) = P_0 \left(\lambda \beta H_1 + 1 - \frac{H_1}{n} \right) = \frac{\lambda \beta H_1 + 1 - \frac{H_1}{n}}{1 + \lambda \beta H_1}.$$

Innen egy program (gép) átlagos várakozási ideje

$$(4.4) \quad \hat{W}_i = W_i - \beta = (n-1)\beta - \frac{1}{\lambda}(1 - Q_{n-1}),$$

ahol

$$Q_{n-1}^{-1} = \frac{H_1}{n} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \frac{1}{d_l}.$$

Megjegyzés. A \hat{W}_i várható értékre [8]-ban hibás formula szerepel. Ez a hibás képlet szerepel az [1], [6] monográfiákban is. TAKÁCS [9] könyvében viszont már a helyes, először A. JA. HINCSIN, [5], által közölt (4.4)-es formula található.

5. Numerikus eredmények

Elkészítettük a 2. pont algoritmusának számológépi programját. A programozási munkában részt vett a KLTE V. éves matematikus hallgatója, PÁLES ZSOLT (1979/80. tanévben). A program a Simula 67 nyelven íródott a CDC 3300-as gépre. A számológépi program helyigénye n növekedésével nagymértékben növekszik, így az elkészült változatban legfeljebb $n=5$ -re futtatható le. Bizonyos korlátozást jelent, hogy a program arra az esetre készült, amikor λ_i -k mind azonosak. Ha valamely konkrét $F_i(x)$, ($1 \leq i \leq n$) eloszlások esetére akarjuk lefuttatni a programot, mindig gondoskodni kell a *Laplace—Stieltjes-transzformáltak* kiszámításáról.

A program bemeneti paramétereinek leírásában $E(n; \mu; x)$ az n , μ paraméterű *Erlang-eloszlásfüggvényt* fogja jelölni. Ennek az eloszlásfüggvénynek a sűrűségfüggvénye

$$\mu \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x}, \quad (x \geq 0).$$

Tekintsük ezután az alábbi bemeneti paramétereket:

$$n = 5, \quad \lambda = 0,08,$$

$$F_1(x) = 0,4 E(2; 0,3; x) + 0,6 E(3; 0,25; x),$$

$$F_2(x) = 0,2 E(1; 0,6; x) + 0,5 E(2; 0,35; x) + 0,3 E(4; 0,171; x),$$

$$F_3(x) = E(3; 0,25; x),$$

$$F_4(x) = 0,3 E(1; 0,4; x) + 0,5 E(2; 0,170; x) + 0,2 E(3; 0,182; x),$$

$$F_5(x) = 0,2 E(1; 0,8; x) + 0,3 E(2; 0,26; x) + 0,4 E(1; 0,168; x) + \\ + 0,1 E(3; 0,65; x).$$

Erre az esetre a legfontosabb karakterisztikák értékei:

A CPU átlagos foglaltsági periódushossza

$$M\delta = 450,316.$$

A programok átlagos várakozási idejei

$$\hat{W}_1 = 35,97, \quad \hat{W}_2 = 35,03,$$

$$\hat{W}_3 = 37,11, \quad \hat{W}_4 = 35,38,$$

$$\hat{W}_5 = 33,42.$$

Az $n=5$, $\lambda=0,25$, $F_i(x)=E(3; 0,5, x)$ homogén esetben

$$M\delta = 4443,64,$$

$$\hat{W}_i = 26,0, \quad (1 \leq i \leq 5).$$

IRODALOM

- [1] BHARUCHA-REID, A. T., *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications* (McGraw-Hill Book Comp. Inc., London, 1960).
- [2] CSIGE, L. és TOMKÓ, J., „A gépkiszolgálási probléma exponenciális eloszlások esetén”, *Alk. Mat Lapok* 8 (1982).
- [3] GAVER, D. P., „Probability models for multiprogramming computer systems”, *J. ACM* 3 (1967) 423—438.
- [4] GNYEDENKO, B. V., KOVALENKO, I. N., *Lekcii po teorii maszszovovo obszluzivaniija* (Kiev, 1963).
- [5] HINC SIN, A. JA., „Matematicszeszkaja teorija sztacionarnoj ocseredi”, *Matematicszeszkij szbornyik* 29 No. 4 (1932) 73—84.
- [6] SAATY, T. L., *Elements of Queueing Theory with Applications* (McGraw-Hill Book Camp. Inc., New York, 1961).
- [7] SZTRIK, J., A gépkiszolgálási problémáról, Egyetemi doktori értekezés, Debrecen, 1980.
- [8] TAKÁCS, L., „Bizonyos várakozási idő problémáról”, *MTA III. Osz. Közl.* 7 (1957) 183—197.
- [9] TAKÁCS, L., *Introduction to The Theory of Queues* (Oxford Univ. Press, New York, 1962).
- [10] TOMKÓ, J., „Számológépek központi egységének kihasználtságáról, I—II.”, *Alk. Mat. Lapok* 1 (1975) 319—331, 3 (1977) 83—96.
- [11] TOMKÓ, J., „On sojourn times for Semi-Markov processes”, 14th European Meeting of Statisticians Wroclaw August 31—Sept. 4, 1981, 297.

(Beérkezett: 1982. április 27.)

SZTRIK JÁNOS

KLTE MATEMATIKAI INTÉZET
4010 DEBRECEN, EGYETEM TÉR 1.

TOMKÓ JÓZSEF

KLTE MATEMATIKAI INTÉZET
4010 DEBRECEN, EGYETEM TÉR 1.
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1502 BUDAPEST XI., KENDE U. 13—17.

MULTIPROGRAMMING WITH INHOMOGENEOUS PROGRAMS

J. SZTRIK and J. TOMKÓ

Our aim in the recent work is to extent results for some characteristics of a multiprogrammed computer system treated in [3] and [10], I—II. For inhomogeneous programs and FIFO service discipline, allowing arbitrary distributed CPU times, the CPU utility and the expected response time for programs are considered. For illustration numerical examples are given.

BOOLE-FÜGGVÉNYEK EGY PROBLÉMAORIENTÁLT KITERJESZTÉSÉRŐL

PÁSZTORNÉ VARGA KATALIN

Budapest

PETROSZJAN ASOT VEZIROVICS

Jereván

A cikkben bevezetjük a *Boole-függvények* egy problémaorientált kiterjesztését halmaz-halmaz függvényre. Megmutatjuk, hogy a kapott függvényosztály hogyan kapcsolódik a háromértékű logika függvényeinek \mathcal{P}_3 halmazához. Megvizsgáljuk a kiterjesztés és a szuperpozíció felcserélhetőségének feltételét. Megvizsgáljuk, hogy a *Post-féle zárt függvényosztályokra* teljesülnek-e ezek a feltételek. Alkalmazási illusztrációként bemutatunk egy problémát az elektronikus áramkörök területéről.

1. Fogalmak és jelölések

Jelölje

$$B = \{0, 1\}$$

$$B^n = \{0, 1\}^n$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$B_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^{n, i_1, i_2, \dots, i_k}$$

— az egydimenziós,

— az n -dimenziós *Boole-teret* (más elnevezések szerint n -dimenziós $(0, 1)$ teret vagy n -dimenziós *Boole-kockát*),

— a B^n tér egy *vektorát (pontját)*,

— az α vektor negáltját

— a B^n teret befutó *változót (Boole-vektorváltozót)*

— az \mathbf{x} vektorváltozó negáltját

— az n -dimenziós *Boole-kocka* azon $(n-k)$ -dimenziós részkockáját, ahol az i_1, i_2, \dots, i_k -adik koordináták az $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ rögzített értékek és a többi koordináta tetszőleges. Vagyis $\alpha_{j_t} = \{0, 1\}$, $t=1, 2, \dots, n-k$.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$ — az n -változós *Boole-függvény* jele (az f egy $B^n \Rightarrow B$ leképezést valósít meg)

$$\bar{f}(\mathbf{x})$$

$$C_1^n$$

— az f függvény negáltját jelöli.

— az n -változós *Boole-függvények* halmazát jelöli.

Jelölje

$$F_m = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

$$f_{x_i = \alpha}$$

$$\|f\|$$

— egy m elemű *Boole-függvényrendszer*,

— az $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$ *Boole-függvényt*,

— az $f(\mathbf{x})$ normáját, amelynek definíciója:

$$\|f\| = \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha \in B^n} f(\alpha)$$

A normára az alábbi tulajdonságok nyilvánvalóan érvényesek.

1. $0 \leq \|f\| \leq 1$, $(\|f\| = 0) \leftrightarrow (f = 0)$, $(\|f\| = 1) \leftrightarrow (f = 1)$
2. $\|f\| - \|g\| \leq \|f \oplus g\| \leq \|f\| + \|g\|$
3. $\|\bar{f}\| = 1 - \|f\|$

Az $f(\mathbf{x})$ függvény egy x_i változója szerinti *differenciája* [4]:

$$\frac{\Delta f(\mathbf{x})}{\Delta x_i} = f(\mathbf{x}) \oplus f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n) = f_{x_i=1} \oplus f_{x_i=0}.$$

A *Boole-differencia* (irodalomból is ismert) néhány tulajdonsága:

1. $\frac{\Delta c}{\Delta x} = 0$
2. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$, ha az f nem függ az x változótól.
3. $\frac{\Delta f \oplus g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$
4. $\frac{\Delta \bar{f}}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$
5. $\frac{\Delta f \wedge g}{\Delta x} = f \wedge \frac{\Delta g}{\Delta x} \oplus g \wedge \frac{\Delta f}{\Delta x} \oplus \frac{\Delta f}{\Delta x} \wedge \frac{\Delta g}{\Delta x}$
6. $\frac{\Delta f \vee g}{\Delta x} = \bar{f} \wedge \frac{\Delta g}{\Delta x} \oplus \bar{g} \wedge \frac{\Delta f}{\Delta x} \oplus \frac{\Delta f}{\Delta x} \wedge \frac{\Delta g}{\Delta x}.$

Az $f(\mathbf{x})$ függvény valamely α értékkombinációja és egy x_i változója szerint *aktivitása* a következő érték [5].

$$\omega_{x_i}^f(\alpha) = \frac{\Delta f(\alpha)}{\Delta x_i}$$

Az $f(\mathbf{x})$ függvény *aktivitása egy x_i változójára nézve*:

$$\omega_{x_i}^f = \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha \in B^n} \omega_{x_i}^f(\alpha) = \left\| \frac{\Delta f}{\Delta x_i} \right\|$$

Az $f(\mathbf{x})$ függvény *aktivitása egy $A \subseteq B^n$ halmazra nézve*:

$$\Omega_A^f = \sum_{\alpha, \beta \in A} (f(\alpha) \oplus f(\beta))$$

További jelölések:

\mathcal{B} — B összes részhalmazainak halmaza.

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\} = 2^B$$

\mathcal{B}^n — B^n összes részhalmazai halmaza.

\mathcal{K}^n — az $(n-k)$ -dimenziós ($k=0, 1, \dots, n$) *Boole-kockák* halmaza.

A — a \mathcal{B}^n egy eleme.

\hat{A} — a \mathcal{K}^n egy eleme, $\hat{A} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_n)$, $\hat{\alpha}_i \in \mathcal{B}$

X — a \mathcal{B}^n elemein átfutó változó.

\hat{X} — a \mathcal{K}^n elemein átfutó vektor változó, $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$

$f^i(X)$ — az f függvényből kiterjesztéssel kapott $\mathcal{B}^n \Rightarrow \mathcal{B}$ leképezést adó függvény

$f_x(\dot{X})$ — az f függvényből kiterjesztéssel kapott $\mathcal{X}^n \Rightarrow \mathcal{B}$ leképezést adó függvény.

\mathcal{F} — az n -változós *Boole-függvények* kiterjesztettjeinek $\{f(X)\}$ halmaza.

\mathcal{F}_x — az n -változós *Boole-függvények* kiterjesztettjeinek $\{f_x(\dot{X})\}$ halmaza.

F^m — a $\mathcal{B}^n \Rightarrow \mathcal{B}^m$ leképezést adó $\{f_1, f_2, \dots, f\}$ függvényrendszer

F_x^m — a $\mathcal{X}^n \Rightarrow \mathcal{B}^m$ leképezést adó $\{f_{1x}, f_{2x}, \dots, f_{mx}\}$ függvényrendszer.

A $\Phi = f(g_1, g_2, \dots, g_n)$ formula jelöli az f, g_1, g_2, \dots, g_n függvények szuperpozícióját, az $[F]$ pedig az F függvényhalmaz lezárását. \mathcal{P}_3 jelöli a háromértékű logika függvényeinek halmazát.

2. Boole-függvények egy kiterjesztése

Az előző pontban F^m -mel, illetve $f(=F^1)$ -fel jelölt függvények pont-pont függvények. Mivel a B tér kételemű, egy f *Boole-függvény* tekinthető azon $H \subseteq B^n$ halmaz *karakterisztikus függvényeként*, amelyre

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \alpha \in H \\ \emptyset, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a függvény a H halmazon az 1, a $B^n \setminus H$ -n pedig 0 értéket vesz fel.

2.1. DEFINÍCIÓ. Terjesszük ki az f *Boole-függvényt* \dot{f} halmaz-halmaz függvényekké úgy, hogy minden $A \in \mathcal{B}^n$ -re

$$\dot{f}(A) = \begin{cases} \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} f(\alpha) \right\} \\ \emptyset, & \text{ha } A = \emptyset. \end{cases}$$

A 2.1. definícióból következik, hogy tetszőleges $\dot{f} \in \mathcal{F}$ -re

- a) $\dot{f}(A_1 \cup A_2) = \dot{f}(A_1) \cup \dot{f}(A_2)$, $A_1, A_2 \in \mathcal{B}^n$. Tehát a kiterjesztés uniótartó. Az 1. ábra az \wedge és \vee uniótartó kiterjesztését mutatja.
- b) A $\emptyset < \{0\} < \{0, 1\} < \{1\}$ rendezés mellett, ha $f \leq g$, akkor $\dot{f} \leq \dot{g}$ (lásd 1. ábra, $\wedge \leq \vee$).
- c) A halmazok esetén szokásos, a tartalmazás reláción alapuló rendezés mellett minden \dot{f} monoton növekvő.

Az a) miatt a kiterjesztéssel kapott \dot{f} függvény választ ad arra, hogy az eredeti f függvény értéke változik-e a változók érték kombinációinak valamely halmazán. Ez azt jelenti, hogy $\dot{f}(A) = \{0, 1\} \leftrightarrow \Omega_A^f \neq \emptyset$.

Egy *Boole-függvény* viselkedését általában a B^n tér valamely speciális részhalmazain vizsgáljuk (pl. *Boole-differencia*). Ezek a ponthalmazok a *Boole-kockák*. Egy $B_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^{n, i_1, i_2, \dots, i_k}$ $(n-k)$ -dimenziós *Boole-részkočka* reprezentálható azzal az $\dot{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sorozattal, ahol p_k, q_{n-k} az x egy partíciója és

$$q_k = \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$$

$$p_{n-k} = \{0, 1\}_{i_{k+1}}, \{0, 1\}_{i_{k+2}}, \dots, \{0, 1\}_{i_n}$$

| \mathcal{X}^2 | $\hat{\Lambda}$ | $\check{\vee}$ |
|--------------------------------------|-----------------|----------------|
| \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| $\{(0, 0)\}$ | $\{0\}$ | $\{0\}$ |
| $\{(0, 1)\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ |
| $\{(1, 0)\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ |
| $\{(1, 1)\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ |
| $\{(0, 0), (0, 1)\}$ | $\{0\}$ | $\{0, 1\}$ |
| $\{(0, 0), (1, 0)\}$ | $\{0\}$ | $\{0, 1\}$ |
| $\{(0, 0), (1, 1)\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{0, 1\}$ |
| $\{(0, 1), (1, 0)\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ |
| $\{(0, 1), (1, 1)\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{1\}$ |
| $\{(1, 0), (1, 1)\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{1\}$ |
| $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ | $\{0\}$ | $\{0, 1\}$ |
| $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{0, 1\}$ |
| $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{0, 1\}$ |
| $\{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{1\}$ |
| $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{0, 1\}$ |

1. ábra

A \mathcal{X}^n tér változói olyan $\check{X}=(\check{x}_1, \check{x}_2, \dots, \check{x}_n)$ vektorváltozók, ahol \check{x}_i ($i=1, 2, \dots, n$) a $\{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ halmaz elemein átfutó változó.

Redukáljuk az f értelmezési tartományát a \mathcal{X}^n -re és az így kapott függvényt jelöljük $\check{f}_{\mathcal{X}}$ -val. Az $\check{f}_{\mathcal{X}}$ -t tekinthetjük az f háromértékű függvénné való kiterjesztésének, mivel egy *Boole-kocka* reprezentálható egy $\check{A} \in \mathcal{X}^n$ vektorral. A 2. ábra az $\hat{\Lambda}_{\mathcal{X}}$, $\check{\vee}_{\mathcal{X}}$, $\neg_{\mathcal{X}}$ kiterjesztést mutató értéktáblázatot adja. Világos, hogy a fent említett

| \mathcal{X}^2 | $\hat{\Lambda}_{\mathcal{X}}$ | $\check{\vee}_{\mathcal{X}}$ | \mathcal{X} | $\neg_{\mathcal{X}}$ |
|----------------------|-------------------------------|------------------------------|---------------|----------------------|
| $\{0\}, \{0\}$ | $\{0\}$ | $\{0\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ |
| $\{0\}, \{1\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{0\}$ |
| $\{1\}, \{0\}$ | $\{0\}$ | $\{1\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{0, 1\}$ |
| $\{1\}, \{1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | | |
| $\{0\}, \{0, 1\}$ | $\{0\}$ | $\{0, 1\}$ | | |
| $\{1\}, \{0, 1\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{1\}$ | | |
| $\{0, 1\}, \{0\}$ | $\{0\}$ | $\{0, 1\}$ | | |
| $\{0, 1\}, \{1\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{1\}$ | | |
| $\{0, 1\}, \{0, 1\}$ | $\{0, 1\}$ | $\{0, 1\}$ | | |

2. ábra

- a) megállapítás érvényes, de csak akkor értelmezhető, ha $A_1 \cup A_2$ *Boole-kocka*, vagyis az A_1, A_2 vektorok *Hamming-távolsága* egy, illetve ha 1-nél nagyobb, akkor az eltérő koordinátapárok egyike $\{0, 1\}$. A b) megállapítás itt is érvényes. A c) viszont csak abban a formában mondható ki, hogy ha $f_x^\circ(A) = \{0, 1\}$ és $A \subseteq K \in \mathcal{X}^n$ az argumentum koordinátánkénti c)-beli rendezése szerint, akkor $f_x^\circ(K) = \{0, 1\}$. Ennek alapján az \mathcal{F}_x -ra igaz a következő:
- d) A c)-ben megadott rendezés mellett igaz, hogy ha f monoton növekvő függvény, akkor f_x° is az.

Mivel egy f *Boole-függvény* egyértelműen meghatározza a kiterjesztettjét $|C_1^n| = |\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_x|$. Ez a meghatározottság ugyanakkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést involvál a C_1^n és \mathcal{F} , C_1^n és \mathcal{F}_x , valamint \mathcal{F} és \mathcal{F}_x elemei között. A továbbiakban főleg az \mathcal{F} függvényhalmazzal foglalkozunk, de formailag megengedjük a halmaz argumentum mellett az $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ háromértékű vektor argumentumot is, amely az $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_n$ direkt szorzat eredményeként kapott halmazt (*Boole-kockát*) jelenti. Erre a szuperpozíció értelmezése miatt is szükség van. Legyen ugyanis az f, f_1, g_2, \dots, g_n függvények szuperpozíciója $\varphi = f(g_1, g_2, \dots, g_n)$. Az $A \in \mathcal{B}^n$ -re $\varphi(A) = f(\check{g}_1(A), \check{g}_2(A), \dots, \check{g}_n(A))$, ahol az \check{f} argumentuma a $\check{g}_1(A) \times \check{g}_2(A) \times \dots \times \check{g}_n(A)$ halmaz, ami egy *Boole-rész-kocka*. A gyakorlati problémák legtöbbjében a primér argumentum is *Boole-kocka*, azonban az uniótartás tulajdonság megőrzése érdekében célszerű az \mathcal{F} függvényhalmazzal dolgozni, ha ez alkalmas. Mint ismeretes C_1^n az \wedge, \vee, \neg műveletekre *Boole-algebrát* alkot [2]. Vizsgáljuk meg \mathcal{F} -t e műveletek megfelelő kiterjesztettjeire nézve,

Lássuk be, hogy \mathcal{F} az $\check{\wedge}, \check{\vee}$ -ra nem zárt¹, azaz $f \check{\vee} g = \check{v}$ és $f \check{\wedge} g = \check{k}$ csak az $f \leq g$ vagy $g \leq f$ esetben áll fenn. Ez azt jelenti, hogy a \vee és \wedge függvényeknek egyéb függvényekkel való szuperpozíciójánál a szuperpozíció és a kiterjesztés művelete nem mindig cserélhető fel.

Tegyük fel, hogy a C_1^n *Boole-algebrában* f és g össze nem hasonlítható elemek ($f \not\leq g, g \not\leq f$), vagyis van olyan $\alpha, \beta \in B^n$, hogy $f(\alpha) < g(\alpha)$ és $f(\beta) > g(\beta)$. Ebből következik, hogy

$$f(\alpha) \vee g(\alpha) = f(\beta) \vee g(\beta) = 1$$

$$f(\alpha) \wedge g(\alpha) = f(\beta) \wedge g(\beta) = 0$$

és így $\check{f}(\{\alpha, \beta\}) = \{0, 1\}$, $\check{g}(\{\alpha, \beta\}) = \{0, 1\}$. Ennek megfelelően

$$\check{f}(\{\alpha, \beta\}) \check{\vee} \check{g}(\{\alpha, \beta\}) = \{0, 1\}$$

$$\check{f}(\{\alpha, \beta\}) \check{\wedge} \check{g}(\{\alpha, \beta\}) = \{0, 1\}.$$

Másrészről viszont

$$(f \vee g)^\circ = \check{v}(\{\alpha, \beta\}) = \{1\}$$

$$(f \wedge g)^\circ = \check{k}(\{\alpha, \beta\}) = \{0\},$$

¹ Az \mathcal{F} és \mathcal{F}_x lezárásával itt nem foglalkozunk.

tehát $\overset{\circ}{v}$ és $\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{\vee}\overset{\circ}{g}$, illetve $\overset{\circ}{k}$ és $\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{\wedge}\overset{\circ}{g}$ különböző leképezések. Ez csak úgy lehetséges, hogy $\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{\wedge}\overset{\circ}{g}$, $\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{\wedge}\overset{\circ}{g} \notin \overset{\circ}{\mathcal{F}}$. Vagyis $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ nem zárt az $\overset{\circ}{\wedge}$, $\overset{\circ}{\vee}$ műveletekre nézve. Ez azt jelenti, hogy az $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ -ben nem (hálós) művelet az $\overset{\circ}{\wedge}$, $\overset{\circ}{\vee}$ kiterjesztetteje. Ugyanakkor a b) miatt a C_1^{η} hálódiaagramja egyben az $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ rendezését is mutatja.

A továbbiakban az $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ függvényhalmazzal foglalkozunk és mint látni fogjuk, az argumentumábrázolás két lehetősége jól felhasználható a bizonyítások során.

3. A szuperpozíció és a kiterjesztés felcserélhetőségről

Mint láttuk $|C_1^{\eta}| = |\overset{\circ}{\mathcal{F}}| < |\mathcal{P}_3|$. Világos az is, hogy $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ részhalmaza a háromértékű logika függvényei halmazának, $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \subset \mathcal{P}_3$.

Tekintsük az $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ..., $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényeket. Jelöljük Φ -vel a szuperpozíciójukat:

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Legyenek $\overset{\circ}{f}$, $\overset{\circ}{g}_1$, $\overset{\circ}{g}_2$, ..., $\overset{\circ}{g}_k$ a fenti függvények kiterjesztettjei. Jelöljük ψ -vel a szuperpozíciójukat:

$$\psi(A) = \overset{\circ}{f}(\overset{\circ}{g}_1(A), \dots, \overset{\circ}{g}_k(A)).$$

Választ keresünk arra, hogy mely esetekben áll fenn az, hogy $\psi \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$ és az, hogy $\psi = \overset{\circ}{\Phi}$, vagyis arra, hogy mikor cserélhető fel a szuperpozíció és a kiterjesztés.

A továbbiakban az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_i\}$ függvényhalmaz lezártját $[F] = \{f_1, f_2, \dots, f_i\}$ -val, az $F = \{f_1, f_2, \dots, f_i\}$ függvényhalmaz lezártjának kiterjesztettjét $[F]^{\circ} = \{f_1, f_2, \dots, f_i\}^{\circ}$ -val jelöljük.

Ezután megfogalmazzuk a következő nyilvánvaló megállapításokat.

1. *Megállapítás.* $[\overset{\circ}{\mathcal{F}}] \subset \mathcal{P}_3$. Ha f nem a konstans függvény, akkor $(f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}) \rightarrow f(\{0, 1\}, \dots, \{0, 1\}) = \{0, 1\}$, tehát tetszőleges, szuperpozícióval kapott $\psi \in [\overset{\circ}{\mathcal{F}}]$ is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, viszont \mathcal{P}_3 -nak van olyan eleme, amely nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

2. *Megállapítás.* $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \neq [\overset{\circ}{\mathcal{F}}]$.

Ez azt jelenti, hogy kiterjesztett függvények szuperpozíciójaként előállnak $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ -be nem tartozó függvények is (lásd 2. pont $\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{\vee}\overset{\circ}{g}$, $\overset{\circ}{f}\overset{\circ}{\wedge}\overset{\circ}{g}$).

3. *Megállapítás.* Ha $[F] = F$, vagyis, ha F zárt függvényosztály, akkor tetszőleges $f, g_1, g_2, \dots, g_k \in F$ függvényekre az

$$a) [F]^{\circ} \subset \overset{\circ}{\mathcal{F}},$$

illetve a

$$b) \overset{\circ}{\Phi}(A) = \psi(A)$$

állítások ekvivalensek.

A következőkben arra keressük a választ, hogy mely $F \subset C_1^n$ zárt függvényosztályban cserélhető fel a szuperpozíció és a kiterjesztés². Ehhez előbb vizsgáljuk meg a kiterjesztés és a szuperpozíció sorrendcseréjéből eredő hatásokat. Legyen

$$f(x), g_1(x), \dots, g_k(x) \in C_1^n$$

és $\Phi(x) = f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x))$, amelynek $\dot{\Phi}(X)$ a kiterjesztettje. Így tetszőleges $A \in \mathcal{B}^n$ -re

$$\dot{\Phi}(A) = \bigcup_{\alpha \in A} \Phi(\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} f(g_1(\alpha), g_2(\alpha), \dots, g_k(\alpha)).$$

A $\psi(X)$ értelmezési tartománya szintén a \mathcal{B}^n , de $\psi(A)$ értékét az f -nek a $(\dot{g}_1(A), \dot{g}_2(A), \dots, \dot{g}_k(A))$ részkockának megfelelő helyen felvett értéke adja, tehát

$$\psi(A) = f(\dot{g}_1(A), \dot{g}_2(A), \dots, \dot{g}_k(A)).$$

Bevezetve a $K_A = \bigcup_{\alpha \in A} (g_1(\alpha), g_2(\alpha), \dots, g_k(\alpha))$ és a $G_A = (\dot{g}_1(A), \dot{g}_2(A), \dots, \dot{g}_k(A))$ jelölést³, bebizonyítjuk a következő tételt.

3.1. TÉTEL. *Az f, g_1, g_2, \dots, g_k függvényekre a szuperpozíció és a kiterjesztés akkor és csak akkor cserélhető fel, ha $\dot{f}(K_A) = \dot{f}(G_A)$ minden $A \in \mathcal{B}^n$ -re.*

Vizsgáljuk meg a K_A és a G_A halmazokat. Világos, hogy ha $|A| = N$, akkor $|K_A| = N$. Az A elemeinek változó koordinátái legyenek j_1, j_2, \dots, j_s és jelölje α^q az α -t, ha az $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_s}$ bináris szám értéke $q-1$.

$$K_A = \left\{ \begin{array}{l} g_1(\alpha^{m_1}), g_2(\alpha^{m_1}), \dots, g_k(\alpha^{m_1}) \\ \vdots \\ g_1(\alpha^{m_N}), g_2(\alpha^{m_N}), \dots, g_k(\alpha^{m_N}) \end{array} \right\}$$

és $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_N \leq 2^s$.

Ha i_1, i_2, \dots, i_t azon oszlopok sorszámai K_A -ban, amelyekben a $g_{i_j} (j=1, 2, \dots, t)$ függvény értéke nem változik, akkor $G_A = B_{g_{i_1}(\alpha^{m_1}), g_{i_1}(\alpha^{m_2}), \dots, g_{i_1}(\alpha^{m_N}), \dots, g_{i_t}(\alpha^{m_1}), \dots, g_{i_t}(\alpha^{m_N})}^{k, i_1, i_2, \dots, i_t}$ $(k-t)$ -dimenziós részkocka. A K_A nem konstans oszlopaiból képzett K_A^{k-t} táblázatot vizsgálva két eset lehetséges.

a) K_A^{k-t} soraiban a $(k-t)$ -dimenziós *Boole-kocka* minden pontja szerepel.

Ekkor $G_A = K_A$, tehát $\dot{f}(K_A) = \dot{f}(G_A)$.

b) K_A^{k-t} soraiban nem szerepel a $(k-t)$ -dimenziós *Boole-kocka* minden pontja.

Ekkor $K_A \subset G_A$ és $\dot{f}(K_A) = \dot{f}(G_A)$ akkor és csak akkor, ha $\Omega_{K_A}^f = \Omega_{G_A}^f$.

A következőkben megvizsgáljuk a *Post-féle zárt függvényosztályokat*. Először a monoton növekvő függvények M zárt osztályára bebizonyítjuk a következő tételt.

² Mint ismeretes a *Post-féle zárt függvényosztályok*:

C_0 a 0 konstans megőrző függvények halmaza,

C_1 az 1 konstans megőrző függvények halmaza,

M a monoton növekvő függvények halmaza,

S az önduális függvények halmaza,

L a lineáris függvények halmaza.

³ $\dot{\cup}$ -val jelezzük, hogy az egyesítéssel kapott halmazban az egyforma elemeket nem vonjuk össze.

3.2. TÉTEL. $[\dot{M}_X] = [M]^\circ_X$. Azaz tetszőleges $f, g_1, g_2, \dots, g_k \in M$ függvényhalmazra az f_X kiterjesztés és a szuperpozíció felcserélhető.

Bizonyítás. Legyen az A halmaz egy s -dimenziós ($s < n$) Boole-kocka. A g_1, g_2, \dots, g_k monoton növekvő függvények és így K_A nem konstans oszlopaihoz tartozó g_i függvényekre $g_i(\alpha^1) = 0, g_i(\alpha^{2^s}) = 1$, tehát K_A első sora megegyezik G_A minimális ϱ^{\min} elemével és a K_A utolsó sora a C_A maximális ϱ^{\max} elemével. $f \in M$, ezért $f_X(G_A) = f_X(\{\varrho^{\min}, \varrho^{\max}\}) = f_X(K_A)$.

A 2. pont b) megállapításából és a 3. megállapításból következik a tétel állítása.

A zárt függvényosztályokra vonatkozik a következő tétel.

3.3. TÉTEL. Az f kiterjesztés esetén a C_0, C_1, M, S, L zárt függvényosztályok egyikében sem cserélhető fel a kiterjesztés és a szuperpozíció.

Bizonyítás. Minden esetben konstruálunk olyan $F = \{f, g_1, g_2, \dots, g_k\}$ függvényhalmazt és olyan $A \in \mathcal{B}^n$ -t, ahol $f(K_A) \neq f(G_A)$.

1. Legyen $F \subseteq C_1$. Ha $h \in C_1$, akkor csak a $h(1, 1, \dots, 1) = 1$ függvényérték előírt. Ennek figyelembevételével legyen

$$f(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \beta\text{-ban legalább } r \text{ darab } 1\text{-es van } (r < k), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Válasszunk egy $A \in \mathcal{B}^n$ -hez olyan g_1, g_2, \dots, g_k különböző függvényeket, hogy bármely $\alpha \in A$ -ra a $g_1(\alpha), g_2(\alpha), \dots, g_k(\alpha)$ közül legfeljebb $r-1$ vegye fel az 1 értéket úgy, hogy K_A legalább r oszlopában, legalább egyszer forduljon elő 1-es. Ekkor $f(K_A) = \{0\}$, de $f(G_A) = \{0, 1\}$. Ezzel az állítást a C_1 függvényosztályra beláttuk

2. Hasonló módon látható be az állítás a C_0 -ra is.

3. Legyen $F \subseteq M$. Legyen $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ olyan monoton növekvő függvény, hogy

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \alpha_i = 1 \ (i = 1, 2, \dots, k), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $A = \{\alpha, \beta\}$, ahol $\alpha \not\leq \beta$ és $\beta \not\leq \alpha$, ekkor $g_i(\alpha)$ és $g_i(\beta)$, függvényértékek tetszőlegesen megválaszthatók ($i = 1, 2, \dots, k$). Legyen $g_1(\alpha) = 0, g_1(\beta) = 1$ és $g_i(\alpha) = 1, g_i(\beta) = 0$, ha $i > 1$. Ennek megfelelően

$$K_A = \begin{Bmatrix} g_1(\alpha), g_2(\alpha), \dots, g_k(\alpha) \\ g_1(\beta), g_2(\beta), \dots, g_k(\beta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0, 1, \dots, 1 \\ 1, 0, \dots, 0 \end{Bmatrix}$$

és

$$G_A = \overset{\circ}{g}_1(A)X \dots X\overset{\circ}{g}_2(A)X \dots X\overset{\circ}{g}_k(A) = B^k.$$

Az f definíciója szerint $f(K_A) = \{0\}$, $f(G_A) = \{0, 1\}$, amivel állításunkat M -re igazoltuk.

4. Legyen $F \subseteq S$. Ha $h \in S$, akkor a $h(x) = \bar{h}(\bar{x})$ tulajdonság miatt, ha $h(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sigma$, akkor $h(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = \bar{\sigma}$. Ennek megfelelően legyen

$$f(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \beta_k = 1, \text{ de legalább egy } \beta_i = 0 \text{ (} i \neq k \text{),} \\ & \text{vagy ha } \beta \text{ minden komponense 0,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $A \in \mathcal{B}^n$ és $A \subseteq \mathcal{A}$ ahol \mathcal{A} egy s -dimenziós ($s < n$) *Boole-kocka*. Válasszunk ki olyan $g_1, g_2, \dots, g_k \in S$ függvényeket, amelyekre ha $\alpha \in A$, akkor vagy minden i -re $g_i(\alpha) = 0$, vagy, ha $g_k(\alpha) = 1$, akkor legalább egy $g_i(\alpha) = 0$ ($i < k$). Megköveteljük még azt is, hogy K_A -ban legyen legalább egy csupa 0-ból álló sor és az 1-re végződő sorok legalább egyike egynél több 1-est tartalmazzon. Ezt megtehetjük, mivel \mathcal{A} egy s -dimenziós részkocka és így $s < n$ lévén, ha $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A$, akkor $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) \notin A$, tehát a $g_i(\alpha) = \bar{g}_i(\bar{\alpha})$ követelmény is teljesíthető. Az f definíciója miatt $f(K_A) = \{1\}$ de $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, 0) \in G_A$, ahol legalább egy $\gamma_i = 1$ és így $f(G_A) = \{0, 1\}$. Ezzel a tételt az S -re bcbizonyítottuk.

5. Legyen $F \subseteq L$. Ha $h \in L$ és ha az x_1, x_2, \dots, x_s változók mindegyikétől függ, akkor h leírható a $h = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_s$ formulával. Ebből az is következik, hogy h kitüntetett diszjunktív normálformájában azok és csak azok a teljes elemi konjunkciók szerepelnek [3], amelyekben a nem negált változók száma páratlan. Ennek megfelelően legyen

$$f = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_k$$

Legyen $A \in \mathcal{B}^n$ és $\alpha \in A$. Legyen $g_{2l} = g_{2l-1}$, $l = 1, 2, \dots, k/2$, és ha k nem páros, akkor $g_k(\alpha) = 0$ minden $\alpha \in A$ -ra. Ebből következik, hogy $f(K_A) = \{0\}$. A konstrukció miatt G_A egy r -dimenziós *Boole-kocka*, $r < [k/2] \cdot 2$, tehát $f(G_A) = \{0, 1\}$. Így az állítást az L függvényosztályra is igazoltuk.

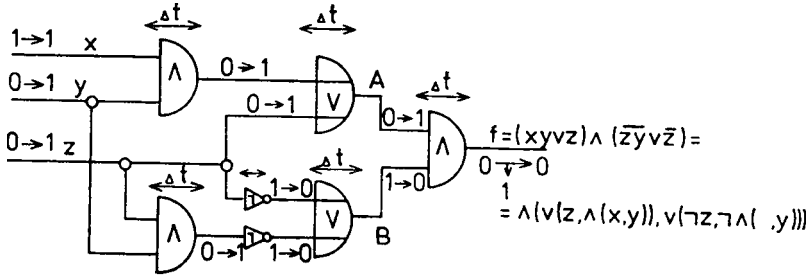
Megjegyzés. A C_0, C_1, S, L függvényosztályokra a 3.3. tétel az f_x kiterjesztés esetén is igaz.

4. Alkalmazási feladat

Az elektronikus berendezések működésének leírása a kétértékű logika függvényeit használják. Így az elektronikus áramkörök tervezése felfogható, mint a kívánt áramkör működését leíró f függvény olyan formulájának keresése, amely a bázisfüggvények véges szuperpozíciójaként áll elő. Egy ilyen formula realizációja a bázisfüggvényeket megvalósító funkcionális elemekből felépülő áramkör.

Valamely formulát realizáló áramkör a kimenetén megadja a függvény változóinak megfelelő bemenetekre jutó értékkombinációhoz tartozó függvényértéket. A kimeneten megjelenő érték „kiszámítása” időben lezajló folyamat, mivel idő kell a jelek megváltozásához is és a bázisfüggvényeket realizáló funkcionális elemek bemenetére érkező jelkombinációhoz tartozó függvényérték kialakulásához is (3. ábra).

Az áramkör bemenőjeleinek megváltozása után egy ΔT ideig az áramkör bizonyos belső pontjain és a kimeneten ismeretlen értékek vannak. A 3. ábrán az y és a z értékének 0-ból 1-be való változásának hatását látjuk. Ahol változás van, ott a változás időtartamára ismeretlen az érték, vagyis vagy 0, vagy 1. Erre az „ismeretlen” logikai értékek célszerű bevezetni a $\{0, 1\}$ jelölést, ami így információtartalmát tekintve is megfelel.



3. ábra

A 3. ábrán levő áramkör kimenete a fentemlített bemenetváltásra nem változik meg, mivel $f(1, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 0$. Ennek ellenére, ha az A -val jelzett vezetéken előbb jelenik meg az 1 érték, mint a B -vel jelzett vezetéken a 0, akkor az áramkör kimenetén a $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ változás zajlik le. E jelenség a statikus hazard, ami a működéshelyesség szempontjából problematikus. Ezt a jelenséget a kiterjesztés és a szuperpozíció felcserélésével kapott $\hat{\phi}$ és ψ formulák segítségével kimutathatjuk. Esetünkben $\hat{\phi}(\{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1\}) = \{0\}$, de $\psi(\{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1\}) = \{0, 1\}$, ami a hazard felépésének lehetőségét mutatja.

IRODALOM

- [1] BRZOWSKI, J. A. and YOELI, M., "On a ternary model of gate networks", *IEEE Transactions on Computers* C-28 (1979).
- [2] CARVALLO, M., *Treillis et algebra de Boole* (Gauthiers-Villars, Paris, 1966).
- [3] PÁSZTORNÉ VARGA, K., „Módszerek Boole-függvények minimális vagy nem redundáns formuláinak előállítására, kandidátusi értekezés, Budapest, 1973.
- [4] THAYSE, A., *Boolean Calculus of Differences* (Springler-Verlag, 1981).
- [5] Петросян, А. В., Некоторые дифференциальные свойства Булевых функций, МТА SZTAKI Tanulmányok, 135/1982.

(Beérkezett: 1982. március 29.)

PÁSZTORNÉ VARGA KATALIN
MTA SZÁMÍTÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZET
1111 BUDAPEST, KENDE U. 13-17.

SOME PROBLEMS OF A PROBLEM-ORIENTED
EXPANSION OF BOOLEAN FUNCTIONS

K. PÁSZTOR and A. V. PETROSZJAN

In this paper a problem-orientes expansion of Boolean functions is defined. Some relations between the class of functions obtained by this expansion and the set \mathcal{P}_3 of the functions of the three-valued logic are demonstrated. The conditions of changing the sequence of expansion and of superposition are given. It is examined whether these conditions are true for the closed classes of *Boolean functions*. A problem from the area of electronics is demonstrated as an application.

INDEFINIT KVADRATIKUS LJAPUNOV-FÜGGVÉNY ALKALMAZÁSA STABILITÁSI VIZSGÁLATOKHOZ

KERTÉSZ VIKTOR

Budapest

Ha valamely differenciálegyenlet rendszer zérus megoldása stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis, és emellett van a rendszernek zérushoz tartó megoldása is, akkor ez a tény *pozitív definit Ljapunov-függvény* megvalósított, és az összes megoldásra vonatkozó alsó becsléssel nem mutatható ki.

Bemutatjuk, hogy ilyen, vagy hasonló célokra megfelelő *indefinit Ljapunov-függvény* milyen előnyösen használható.

Az általánosabb tárgyalást követően az eljárást az időben változó, nemlineáris csillapítású rezgőmozgás esetére mutatjuk be. Kritériumot adunk a nem aszimptotikus stabilitásra olyan esetekben is, amikor van zérushoz tartó megoldás is, továbbá jellemezzük a zérushoz és a nem zérushoz tartó megoldások aszimptotikus viselkedését.

1. Bevezetés

Vizsgáljuk az

$$(1.1) \quad \dot{x} = f(t, x); \quad f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n; \quad f(t, 0) = 0$$

differenciálegyenlet $x=0$ egyensúlyi helyzetének stabilitását. [3]-ban a megoldások normájára *pozitív definit kvadratikus Ljapunov-függvények* segítségével alsó becslést adtunk.

Az origó bizonyos környezetében az összes megoldásra vonatkozó (ilyen értelemben univerzális), alsó becslés nyilvánvalóan nem mutatja ki az origó nem aszimptotikusan stabilis voltát, ha van (1.1)-nek olyan megoldása is, amelyre $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$.

A fenti értelemben univerzális alsó becsléssel az $x \equiv 0$ egyensúlyi helyzet instabilitása nem mindig mutatható ki, ha van (1.1)-nek olyan megoldása is, amelyre $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| < \infty$.

Példa

Tekintsük az

$$(1.2) \quad \ddot{y} + p(t)\dot{y} + y = 0; \quad p(t) \geq 0, \quad p \text{ folytonos}$$

differenciálegyenletet. Az $y \equiv \dot{y} \equiv 0$ egyensúlyi helyzet bármely nem negatív $p(t)$ -re stabilis, de nem feltétlenül aszimptotikusan stabilis.

Egyszerűen bizonyítható az alábbi alsó becslés:

$$|x(t)| \geq |x(t_0)| e^{-\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau},$$

ahol

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

$$|x(t)| = \sqrt{y^2(t) + \dot{y}^2(t)}.$$

Ebből következik, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau < \infty$ esetén az $x(t) \equiv 0$ megoldás nem aszimptotikusan stabilis. Érthető, hogy ennek a ténynek a kimutatására megfelelő univerzális alsó becslés sikerrel alkalmazható, hiszen *valamennyi* megoldásra igaz, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|}{|x(t_0)|} \cong q > 0.$$

Egészen más a helyzet „nagy” $p(t)$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \infty$) függvények esetében.

Ugyanis ekkor is lehetséges, hogy a rendszer nem aszimptotikusan stabilis. LA SALLE példája nyomán [2] legyen

$$p(t) = 2 + e^t.$$

Ekkor (1.2)-nek az

$$y_1(t) = e^{-t} + 1;$$

függvény megoldása, amelyre:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{y_1^2(t) + \dot{y}_1^2(t)} = 1.$$

Univerzális alsó becsléssel ezt a tényt nem tudjuk kimutatni. Ez érthető, hiszen olyan megoldás is van ($y_2(t)$), amelyre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_2(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{y_2^2(t) + \dot{y}_2^2(t)} = 0.$$

Nevezetesen:

$$y_2(t) = (e^{-t} + 1) \left(1 - \frac{\Omega(t)}{A} \right).$$

ahol

$$A = \Omega(\infty),$$

$$\Omega(t) = \int_0^t e^{-e^t} (1 + e^t)^{-2} dt.$$

Megjegyezzük melleleg, hogy ennek a megoldásnak a pályagörbéje a fázis-síkon az (y, \dot{y}) koordinátarendszerben az \dot{y} tengelyhez simulva tart az origóhoz:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_2(t)}{\dot{y}_2(t)} = -\infty.$$

E jelenségre még visszatérünk a következő pontban.

A vázolt problémák kiküszöbölése céljából olyan alsó becslésre van szükség, amely már nem univerzális, hanem csak bizonyos megoldásokra vonatkozik, éppen a „nagy” megoldásokra. Ilyen alsó becslésre *indefinit kvadrátikus Ljapunov-függvény* alkalmazása ad lehetőséget.

2. Időtől független indefinit kvadratikus Ljapunov-függvény alkalmazása diagonális mátrix együtthatójú lineáris egyenlet perturbációja esetén

Tekintsük az

$$(2.1) \quad \dot{x} = F(t, x)\dot{x} = D(t)x + B(t, x)x; \quad x \in \mathbf{R}^n; \quad t \geq t_0$$

differenciálegyenletet, ahol $D(t)$ és $B(t, x)$ folytonos $n \times n$ -es mátrix függvények és $D(t)$ diagonális:

$$(2.2) \quad D(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n(t) \end{pmatrix}.$$

(2.1) $x(t)$ megoldásai legyenek értelmezve minden $t \geq t_0$ -ra. Tegyük fel, hogy létezik k ($0 < k < n$), hogy

$$(2.3) \quad \min_{i \leq k} \lambda_i(t) = \lambda_{10}(t) > \lambda_{20}(t) = \max_{i > k} \lambda_i(t); \quad t \geq t_0,$$

ahol $\lambda_{10}(t)$ és $\lambda_{20}(t)$ folytonosak. Particionáljuk az $x \in \mathbf{R}^n$ vektorokat $x = (u, v)$ módon, ahol $u \in \mathbf{R}^k$, $v \in \mathbf{R}^{n-k}$. Beszélni fogunk ún. „kis” és „nagy” megoldásokról. (2.1)-nek a $\varphi: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ függvény (ahol $\mathbf{R}^+ = \{t: t \geq t_0\}$) legyen valamely megoldása. A kis megoldások halmaza legyen K , a nagy megoldásoké pedig N . Ezek közül az egyik üres halmaz is lehet. (2.1)-nek az alábbi esetekben az alábbi feltételeknek eleget tevő megoldásait sorolhatjuk a K , ill. N halmazba (az osztályozás nem feltétlenül egyértelmű):

$$(i) \quad \varphi \in K, \quad \text{ha} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = 0,$$

$$\varphi \in N, \quad \text{ha} \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| > 0,$$

és K vagy N közül legalább az egyik nem üres.

$$(ii) \quad \varphi \in K, \quad \text{ha} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| < k_0 < \infty,$$

$$\varphi \in N, \quad \text{ha} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = \infty,$$

és K vagy N közül legalább az egyik nem üres.

Ha $B(t, x) = 0$, akkor (2.1) $X(t)$ alaprendszer:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_{t_0}^t \lambda_1(\tau) d\tau} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\int_{t_0}^t \lambda_2(\tau) d\tau} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e^{\int_{t_0}^t \lambda_n(\tau) d\tau} \end{pmatrix}.$$

Legyen Q_1 az $(u, 0)$ vektorok által kifeszített altér. Az innen induló (és abban nyilván benne is maradó) megoldásokra az

$$|x(t)| \cong |x(t_0)|e^{\int_{t_0}^t \lambda_{10}(\tau) d\tau}$$

alsó becslés érvényes. Ez az alsó becslés nem érvényes azonban az összes megoldásra. A $(0, v)$ vektorok által kifeszített altérből (legyen ez Q_2) induló (és abban nyilván benne is maradó) megoldásokra az

$$|x(t)| \cong |x(t_0)|e^{\int_{t_0}^t \lambda_{20}(\tau) d\tau}$$

felső becslés érvényes.

A $B(t, x) = 0$ egyszerű esetben természetes módon adódhat a nagy és kis megoldások különválasztása. A nagy és kis megoldásoknak ez a szétválása megfelelő korlátozásokkal megmarad a nemlineáris esetben is bizonyos $B(t, x)$ perturbációkra. Például, ha ezek korlátozások:

$$(2.4) \quad |B(t, x)| \cong \delta(t), \quad \delta(t) \text{ folytonos; } t \cong t_0;$$

ahol a $B(t, x)$ normát a következőképpen kell érteni:

$$|B(t, x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|B(t, x)x|}{|x|}.$$

Erre az esetre vonatkozik a 2.1. tétel. Megjegyezzük, hogy ha $|B(t, x)|$ nem korlátos, illetve korlátosságát nem vesszük figyelembe, egy-egy konkrét esetben más módszerrel akkor is kaphatók alkalmas alsó becslések, amelyek még pontosabbak is. Ezt az esetet 2 dimenzióra a 4. pontban tárgyaljuk.

Ezek után lássuk a 2.1. tételt.

2.1. TÉTEL. Tekintsük a (2.1) egyenletet a közölt feltételekkel és jelölésekkel, valamint (2.3) és (2.4)-gyel. Tegyük fel továbbá, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(2.5) \quad \lambda_{10}(t) - \lambda_{20}(t) > 2\delta(t),$$

akkor a $Q_1 = \{x = (u, v) \in \mathbf{R}^n : v = 0\}$ altérből induló megoldásokra az alábbi alsó becslés érvényes:

$$(2.6) \quad |x(t)| \cong |x(t_0)|e^{\int_{t_0}^t (\lambda_{10}(\tau) - \delta(\tau)) d\tau}.$$

Megjegyzés: A Q_1 -ből induló megoldások általában nem maradnak Q_1 -ben, tehát Q_1 a megoldásoknak nem invariáns altere.

A tétel bizonyításához az alábbi lemmára van szükség.

2.1. LEMMA. Legyen C konstans $n \times n$ -es mátrix és $Q \subset \mathbf{R}^n$ olyan nyílt tartomány, hogy $x^T C x > 0$, ha $x \in Q$. Akkor (2.1) minden olyan $x(t)$ megoldására, amelyre $x(t) \in Q$, ha $t_0 \cong t \cong t_1$ valamely t_1 -re ($t_0 \cong t_1 \cong \infty$), igaz az alábbi azo-
nosság:

$$(2.7) \quad w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t \frac{x^T(\tau)(F^T(\tau, x(\tau))C + CF(\tau, x(\tau)))x(\tau)}{w(\tau)} d\tau}, \quad t_0 \cong t \cong t_1,$$

ahol

$$(2.8) \quad w(t) = x^T(t)Cx(t).$$

A lemma bizonyítása egyszerűen adódik, ha a

$$\frac{d}{dt} \ln w(t) = \frac{\frac{d}{dt} w(t)}{w(t)}$$

azonosság mindkét oldalát integráljuk t_0 -tól t -ig, és figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{d}{dt} w(t) = x^T(t) \left(F^T(t, x(t))C + CF(t, x(t)) \right) x(t).$$

Ezek után lássuk a *tétel bizonyítását*.

Legyen C a következő mátrix. A főátló első k eleme legyen β^2 ($\beta > 0$), a többi $n-k$ eleme pedig -1 . A Q nem összefüggő nyílt tartomány két összefüggő nyílt tartományból áll. A Q tartományt az $\{x \in \mathbf{R}^n: x^T C x = 0\}$ hiperkúpfelület határolja. Ha $x(t_0) \in Q$, akkor $x(t)$ nem hagyja el Q -t mindaddig, amíg $w(t) > 0$.

Adjunk alsó becslést a (2.7)-ben szereplő exponensben az integrandusra!

Tekintsük az alábbi $\varrho: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt:

$$(2.9) \quad \varrho(t, u, v) = \frac{x^T (F^T(t, x)C + CF(t, x))x}{x^T C x}, \quad t \geq t_0, x \in Q.$$

Nyilvánvalóan:

$$\begin{aligned} \varrho(t, u, v) = & \frac{2\beta^2(\lambda_1(t)x_1^2 + \dots + \lambda_k(t)x_k^2) - 2(\lambda_{k+1}(t)x_{k+1}^2 + \dots + \lambda_n(t)x_n^2)}{\beta^2|u|^2 - |v|^2} \\ & + \frac{x^T (B^T(t, x)C + CB(t, x))x}{\beta^2|u|^2 - |v|^2}. \end{aligned}$$

Ennek alapján ϱ -ra az alábbi alsó becslés adható:

$$(2.10) \quad \varrho(t, u, v) \geq 2 \frac{(\beta^2 \lambda_{10}(t) - \delta(t)|C|)|u|^2 - (\lambda_{20}(t) + \delta(t)|C|)|v|^2}{\beta^2|u|^2 - |v|^2}.$$

Legyen β^2 olyan, hogy

$$\beta^2 \lambda_{10}(t) - \delta(t)|C| - \beta^2 \lambda_{20}(t) - \beta^2 \delta(t)|C| > 0, \quad t \geq t_0,$$

vagyis

$$(2.11) \quad \lambda_{10}(t) - \lambda_{20}(t) > \delta(t)|C| \frac{1 + \beta^2}{\beta^2}.$$

Tekintettel (2.5)-re, továbbá arra, hogy

$$\max(\beta^2; 1) = |C| \geq 1,$$

így

$$|C| \frac{1 + \beta^2}{\beta^2} = \begin{cases} \frac{1 + \beta^2}{\beta^2}, & \text{ha } \beta < 1 \\ 1 + \beta^2, & \text{ha } \beta \geq 1 \end{cases}.$$

tehát $|C| \frac{1+\beta^2}{\beta^2}$ $\beta=1$ esetén minimumot vesz fel, amely 2, és így van olyan $\beta^2 > 0$, amely eleget tesz (2.11)-nek. Q -ban $|v|^2 < \beta^2 |u|^2$ és (2.11) teljesülése esetén

$$\lim_{\substack{|v|^2 \rightarrow \beta^2 |u|^2 \\ (u,v) \in Q}} \varrho(t, u, v) = \infty.$$

Ebből kifolyólag $\varrho(t, u, v)$ Q -ban alulról korlátos és felveszi minimumát: $\varrho_0(t)$ -t. Egyszerűen belátható, hogy (2.10) jobb oldalának minimuma ott van, ahol $|v|^2 = 0$. Így:

$$\varrho(t, u, v) \cong \varrho_0(t) \cong 2\lambda_{10}(t) - 2\delta(t) \frac{|C|}{\beta^2}.$$

$\beta=1$ esetén a $|C| \frac{1+\beta^2}{\beta^2}$ függvény (l. (2.11)), mint említettük, a minimumát veszi fel. Ezért feltételezhetjük, hogy $\beta \cong 1$. Ekkor azonban $|C| = \beta^2$. Így:

$$(2.12) \quad \varrho(t, u, v) \cong 2(\lambda_{10}(t) - \delta(t)).$$

(2.7), (2.9) és (2.12) figyelembevételével:

$$(2.13) \quad w(t) \cong w(t_0) e^{2 \int_{t_0}^t (\lambda_{10}(\tau) - \delta(\tau)) d\tau},$$

ahol $\lambda_{10}(t)$ és $\delta(t)$ folytonosságából ($t \geq t_0$) következik, hogy $w(t_0) > 0$ esetén $w(t) > 0$, ha $t \geq t_0$. Így a Q -ból induló megoldás Q -ban marad, Tehát (2.13) minden $t \geq t_0$ -ra igaz.

Vegyük észre, hogy

$$x^T C x \cong k_1^2$$

esetén

$$|x|^2 \cong \frac{k_1^2}{\beta^2},$$

így $|x(t)|$ -re (ahol $x(t) \in Q$) (2.13) alapján a következő alsó becslés adható:

$$(2.14) \quad |x(t)| \cong \frac{\sqrt{x^T(t_0) C x(t_0)}}{\beta} e^{\int_{t_0}^t (\lambda_{10}(\tau) - \delta(\tau)) d\tau}.$$

Legyen $v(t_0) = 0$ (vagyis $x(t_0) \in Q_1$). Ekkor $x^T(t_0) C x(t_0) = \beta^2 |x(t_0)|^2$. Ezekre a megoldásokra (2.14)-ből adódik (2.6)!

A 2.1. tétel bizonyításával egyben bebizonyítottuk a következő tételt is.

2.2. TÉTEL. Tekintsük a (2.1) egyenletet a közölt feltételekkel és jelölésekkel, valamint (2.3), (2.4) és (2.5)-tel. Legyen C olyan diagonális mátrix, amelyben a főátló első k eleme legyen β^2 ($\beta > 0$), többi $n-k$ eleme pedig -1 . Legyen

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T C x > 0\}.$$

Nyilván létezik $\beta^2 \cong 1$, hogy (2.11) is teljesül. Ez a β^2 szerepeljen C -ben.

Ekkor (2.1) Q -ból induló megoldásai Q -ban maradnak, vagyis ha

$$x(t_0) \in Q,$$

akkor

$$x(t) \in Q, t \geq t_0.$$

Ha a $\int_{t_0}^{\infty} (\lambda_{10}(\tau) - \delta(\tau)) d\tau$ improprius integrál létezik, illetve ∞ , akkor lehetséges nagy megoldásokról beszélni ((i), ill. (ii) értelemben). A tétel nem alkalmas arra, hogy megmutassa, a nagy megoldások mellett léteznek-e kis megoldások. Ha azonban tudjuk, hogy ilyenek léteznek, akkor a tétel alkalmas arra, hogy ezek aszimptotikus viselkedését bizonyos esetekben leírjuk. Ez a viselkedés ismét a perturbátlan rendszerből „átöröklött” tulajdonságnak fogható fel.

2.3. TÉTEL. Tekintsük a (2.1) egyenletet a közölt feltételekkel és jelölésekkel, valamint (2.3) és (2.4)-gyel. Tételezzük fel, hogy

$$(2.15) \quad \lambda_{10}(t) - \lambda_{20}(t) > \delta(t)a(t), \quad t \geq t_0$$

ahol $a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, amelyre

$$(2.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty.$$

Létezzon (2.1)-nek olyan $x(t)$ megoldása, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0, \quad \text{ha} \quad -\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (\lambda_{10}(\tau) - \delta(\tau)) d\tau,$$

illetve

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x(t)| < \infty, \quad \text{ha} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (\lambda_{10}(\tau) - \delta(\tau)) d\tau = \infty.$$

Ilyen feltételek mellett $x(t)$ Q_2 -be simul ($Q_2 = \{x = (u, v) \in \mathbf{R}^n: u = 0\}$) az alábbi értelemben. Legyen $x(t) = (u(t); v(t))$. Ekkor

$$|u(t)| = b(t)|v(t)|,$$

ahol $b: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, amelyre $b(t) > 0$ és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $t_1 \geq t_0$. A 2.1. tétel feltételei teljesülnek, ha t_0 szerepét t_1 veszi át és t_1 elég nagy. Így (2.1)-nek a t_1 időpillanatban a Q -ból induló megoldásai $t \geq t_1$ -re Q -ban maradnak. (2.14) miatt azonban $x(t_1) \in Q$ lehetetlen. Legyen $\beta(t_1)$ rögzített t_1 -re a (2.11)-nek eleget tevő β szám ($\beta \geq 1$). Ha a (2.15) és (2.16) összefüggéseket tekintjük, akkor lehetséges a $\beta(t_1)$ függvényt úgy választani, hogy $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \beta(t_1) = \infty$ legyen. $x(t_1) \notin Q$ más kifejezéssel azt jelenti, hogy

$$\beta^2(t_1)|u(t_1)|^2 - |v(t_1)|^2 \leq 0,$$

amelyet átrendezve és figyelembe véve, hogy t_1 tetszőlegesen nagy ($t_1 \geq t_0$) a tétel állítása adódik!

Megjegyzés. 1. A tétel arra mutat rá, hogy hogyan „öröklődik” a perturbátlan rendszerrel a perturbált rendszerre az a tény, hogy a megoldások a Q_2 altérből indulnak és ott is maradnak.

2. A tétel feltételeinek teljesülése esetén az a körülmény, hogy a Q_1 -ből induló (nagy) megoldások Q_1 -ben maradnak, ugyancsak bizonyos módosulással „örök-

tődik". Ha (2.15) és (2.16) teljesül, akkor (2.11) olyan $\beta(t_1) > 0$ függvénnyel is lejelcsíthető, amelyre

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \beta(t_1) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a $Q(t_1)$ tartomány (vagyis $Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^n: \beta^2(t_1)u^2 - v^2 > 0\}$), amelyben a t_1 időpillanatban az onnan induló megoldások benne maradnak, egyre inkább „ráhúzódik” a Q_1 altérre, olyan értelemben, hogy ha

$$(u, v) \in Q(t_1),$$

akkor

$$|v| < b(t_1)|u|,$$

ahol

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} b(t_1) = 0.$$

3. Végül könnyen belátható a következő „örökség” is. Az adott feltételek teljesülése esetén $Q(t_1)$ -ből nagy megoldások indulnak. Ha $\beta(t_1)$ -et ismét úgy választjuk, hogy $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \beta(t_1) = \infty$, akkor $Q(t_1)$ t_1 növekedésével $\mathbb{R}^n \setminus Q_2$ -re „húzódik rá”, vagyis $\mathbb{R}^n \setminus Q(t_1)$ Q_2 -re húzódik rá e megjegyzés 2. pontja értelmében. (A perturbálatlan rendszer nagy megoldásai éppen $\mathbb{R}^n \setminus Q_2$ -ből indulnak.)

3. Indefinit kvadratikus Ljapunov függvény alkalmazása perturbált lineáris egyenlet esetében

Az előző pont eredményeit most valamelyest általánosítjuk. Nem írjuk elő, hogy a lineáris rendszer együttható mátrixa diagonális legyen, majd a $w = x^T C x$ Ljapunov-függvény időfüggését is megengedjük.

Tekintsük az

$$(3.1) \quad \dot{x} = F_0(t, x)x = A(t)x + B_0(t, x)x; \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad t \geq t_0$$

egyenletet, ahol $A(t)$ és $B_0(t, x)$ folytonos $n \times n$ -es mátrix függvények. (3.1) $x(t)$ megoldásai legyenek értelmezve $t \geq t_0$ -ra.

Legyen $S(t) A(t) S^{-1}(t)$ Jordan-féle normál formából nyert speciális alak [1]:

$$(3.2) \quad S(t) A(t) S^{-1}(t) = D(t) + \varepsilon E + Z(t),$$

ahol $D(t)$ diagonális, $\varepsilon > 0$ tetszőleges (tetszőleges ε -hoz van megfelelő $S(t)$), E konstans mátrix, $Z(t)$ pedig antiszimmetrikus mátrix. Ha $A(t)$ szimmetrikus, akkor $\varepsilon = 0$, $Z = 0$.

Legyen $S(t)$ folytonosan deriválható.

Alkalmazzuk az

$$(3.3) \quad y = S(t)x$$

transzformációt. Akkor y -ra az

$$(3.4) \quad \dot{y} = (D(t) + B(t, y))y = F(t, y)y$$

differenciálegyenletet kapjuk, ahol

$$(3.5) \quad B(t, y) = \varepsilon E + Z(t) + S(t)B_0(t, S^{-1}(t)y)S^{-1}(t) + \dot{S}(t)S^{-1}(t).$$

Alkalmazzuk erre az esetre a 2.1. tételt. (2.9)-re kell becslést adnunk (x szerepét most y tölti be). (Vegyük figyelembe, hogy $y^T(Z^T C + CZ)y = 0$!)

Ha a 2.1. tétel feltételei teljesülnek, akkor (2.6)-nak megfelelően

$$|y(t)| \cong |y(t_0)| e^{\int_{t_0}^t (\lambda_{10}(\tau) - \delta(\tau)) d\tau},$$

ahol $y(t_0) \in Q_1$; vagyis

$$(3.6) \quad y(t_0) = \begin{pmatrix} u(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tekintettel arra, hogy

$$(3.7) \quad |x(t)| \cong |S(t)|^{-1} |y(t)|,$$

így $|x(t)|$ -re az alábbi becslés adható:

$$(3.8) \quad |x(t)| \cong |S(t)|^{-1} |S(t_0)x(t_0)| e^{\int_{t_0}^t (\lambda_{10}(\tau) - \delta(\tau)) d\tau}$$

ahol $x(t_0) \in Q_1^*$ és

$$(3.9) \quad Q_1^* = \{x \in R^n : S(t_0)x \in Q_1\}.$$

Hasonlóképpen a 2.2. tételt is alkalmazhatjuk erre az esetre. Ekkor:

$$(3.10) \quad Q = \{x \in R^n : x^T S^T(t) C S(t) x > 0\}$$

Az eredmények további általánosítása lehetséges akkor, ha $C = C(t)$ folytonosan deriválható, reguláris. Ekkor 2.1. lemma így módosul:

3.1. LEMMA. Teljesüljenek a 2.1. lemma feltételei, azzal a különbséggel, hogy C időtől függő, folytonosan deriválható, reguláris. Akkor a 2.1. lemmában adott $w(t)$ -re:

$$(3.11) \quad w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^t \frac{x(\tau)(F^T(\tau, x(\tau))C(\tau) + C(\tau)F(\tau, x(\tau)) + \dot{C}(\tau)C^{-1}(\tau))x(\tau) d\tau}{w(\tau)}}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a 2.1. lemma bizonyítását és vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{d}{dt} w(t) = x^T(t) (F^T(t, x(t))C(t) + C(t)F(t, x(t)) + \dot{C}(t)C^{-1}(t))x(t)!$$

A 3.1. lemmát értelemszerűen használhatjuk fel a (2.6)-tal, illetve (3.8)-cal analóg becslésekhez, továbbá a 2.2. tételnél. Tekintettel arra, hogy

$$(3.12) \quad \dot{C}C^{-1} = 2 \frac{\beta}{\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix},$$

ahol a főátló első k helyén áll 1, (2.10)-ben a számlálóban még $\frac{\beta}{\beta} |u|^2$ is fellép. Ennek

megfelelően az eddigi bizonyítások, számítások, valamint a (2.6) és (3.8) becslések érvényesek maradnak, ha λ_{10} helyére mindenhol $\frac{\beta}{\beta^3} + \lambda_{10}$ kerül.

Változó C mátrix-szal a 2. pont végén elmondottakhoz hasonló vizsgálatok is végezhetőek a megoldások aszimptotikus viselkedésére vonatkozóan.

4. Becslések a két dimenziós esetben

A (2.1) egyenletben $B(t, x)$ normájára tett feltevés kapcsán már utaltunk arra, hogy a norma felső korlátjának figyelembevétele helyett egyéb módon is eljáráhatunk. Nevezetesen: a pontosabb becslés érdekében (2.7), illetve (3.11) integrandusának részletesebb kiértékelésére van szükség. Ezt a kiértékelést 2-dimenzióra elvégezzük.

Vezessük be az alábbi jelöléseket (l. (3.11)):

$$(4.1) \quad F^T C + C F + \dot{C} C^{-1} = \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix},$$

ahol tekintsük a, b és c -t állandóknak.

Ha a, b és c nem állandók, akkor az alanti számítások végén e függvényekre alkalmas becsléseket kell adni (l. az 5. pontot). Feladatunk annak meghatározása, hogy a

$$(4.2) \quad \varrho(u, v) = \frac{au^2 + bv^2 + cuv}{\beta^2 u^2 - v^2}$$

függvénynek milyen esetben létezik abszolút minimuma a

$$(4.3) \quad \beta^2 u^2 - v^2 > 0$$

feltétel mellett, továbbá mekkora ez a minimum, ha létezik.

c -ről feltételezhetjük, hogy pozitív. Ha $c=0$ lenne, akkor az alábbiaknál egy lényegesen egyszerűbb és már lényegében ismertett vizsgálatról lenne szó.

Ha c negatív lenne, akkor (4.2)-ben a c helyére $-c$ -t, v helyére pedig $-v$ -t helyettesíthetnénk. Tehát

$$(4.4) \quad c > 0.$$

ϱ -nak létezik abszolút minimuma, ha a számláló a $v = -\beta u$ helyen pozitív. Ha a számláló itt valóban pozitív, akkor fennáll, hogy

$$(4.5) \quad \kappa = \frac{a + \beta^2 b}{\beta c} > 1; \quad (\beta > 0).$$

Rögzített u mellett $\varrho(u, v)$ -nek az $-\beta|u| < v < \beta|u|$; $|u| > 0$ tartományban a

$$v = \beta u [\sqrt{\kappa^2 - 1} - \kappa]$$

helyen van minimuma. Ez a ϱ_0 minimum u -tól függetlenül:

$$(4.6) \quad \varrho \cong \varrho_0 = -b + \frac{c}{2\beta} (\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}).$$

Kényelmesebb a számolás, ha $\sqrt{\kappa^2 - 1}$ -re az alábbi alsó becslést adjuk:

$$\sqrt{\kappa^2 - 1} > \kappa - \frac{1}{\kappa}.$$

Ezzel

$$(4.7) \quad \varrho(u, v) \cong \frac{a}{\beta^2} - \frac{c^2}{2(a + b\beta^2)}.$$

Ha a , b és c időfüggvények, akkor, amennyiben (4.5) minden $t \geq t_0$ -ra fennál, igaz (4.7).

Ha a , b és c függvénye még u -nak és v -nek is, akkor (4.5) és (4.7) csak akkor helyes, ha a , b és c -re u és v -től független megfelelő becsléseket adunk:

$$(4.8) \quad \begin{cases} a(t, u, v) \cong a_0(t) \\ b(t, u, v) \cong b_0(t) \\ 0 < c(t, u, v) \cong c_0(t). \end{cases}$$

Ha tehát (4.8) teljesül és

$$(4.9) \quad \kappa_0 = \frac{a_0 + \beta^2 b_0}{\beta c_0} > 1; (\beta > 0),$$

akkor ϱ -nak mint t , u és v függvényének létezik minimuma:

$$(4.10) \quad \varrho(t, u, v) \cong \frac{a_0}{\beta^2} - \frac{c_0^2}{2(a_0 + b_0\beta^2)}$$

A következő pontban a 2. és 3. pontban ismertetett eredmények alkalmazását mutatjuk meg 2 dimenzióban, ahol a (4.5), (4.7), (4.9) és (4.10) összefüggéseknek hasznát vesszük.

5. Alkalmazási példák. A csillapított rezgőmozgás vizsgálata

Eredményeinket az

$$(5.1) \quad \ddot{y} + p(t, y, \dot{y})\dot{y} + q(t, y, \dot{y})y = 0,$$

egyenlet vizsgálatára alkalmazzuk. Ez az egyenlet a csillapított rezgőmozgást írja le. $p(t, y, \dot{y})$ és $q(t, y, \dot{y})$ folytonos $t \geq t_0$ -ra (legalább is az $y = \dot{y} = 0$ origó egy $K_{(0,0)}$ környezetében) és $p(t, y, \dot{y}) \geq 0$. Tételezzük fel, hogy (5.1) $y(t)$ megoldásai értelmezettek $t \geq t_0$ -ra.

5.1. PÉLDA. Legen $q \equiv 1$ és $\beta > 0$ konstans. Az

$$(5.2) \quad \begin{cases} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ x_1 = y = u \\ x_2 = \dot{y} = v \end{cases}$$

átírással:

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -p_0(t) \end{pmatrix}; B(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & p_0(t) - p(t, x) \end{pmatrix},$$

ahol

$$(5.3) \quad \inf_{t \equiv t_0} p(t, x) \equiv p_0(t) > 0 \text{ és } p_0(t) \text{ folytonos, } x \in K_{(0,0)}.$$

(Tegyük fel, hogy létezik ilyen $p_0(t)$.) Legyen

$$(5.4) \quad C = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ezzel

$$(5.5) \quad \varrho(t, u, v) = 2 \frac{(1 + \beta^2)uv + p(t, x)v^2}{\beta^2 u^2 - v^2}.$$

ϱ -nak akkor létezik rögzített t -re és p -re u és v függvényében minimuma az $x^T Cx > 0$ tartományban, ha (l. (4.5)):

$$(5.6) \quad p(t, x) > \frac{1 + \beta^2}{\beta}.$$

$\varrho(t, u, v)$ -nek ez a minimuma legyen $\varrho_0(p)$ (l. (4.6) és (4.7)):

$$(5.7) \quad \varrho_0(p) = -p + \sqrt{p^2 - \left(\frac{1 + \beta^2}{\beta}\right)^2} \equiv -\frac{1}{p} \left(\frac{1 + \beta^2}{\beta}\right)^2,$$

amellyel:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} x^T(t)Cx(t) &= x^T(t_0)Cx(t_0)e^{\int_{t_0}^t \varrho(\tau, u(\tau), v(\tau))d\tau} \equiv x^T(t_0)Cx(t_0)e^{-\left(\frac{1 + \beta^2}{\beta}\right)^2 \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{p(\tau, x(\tau))}} \equiv \\ &\equiv x(t_0)Cx(t_0)e^{-\left(\frac{1 + \beta^2}{\beta}\right)^2 \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{p_0(\tau)}}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk a következő tételt.

5.1. TÉTEL. Tekintsük a (5.1) egyenletet (ahol legyen $q \equiv 1$) a megadott feltételekkel és (5.3)-mal, valamint $p_0(t) > 2$.

Ha

$$(5.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{p_0(\tau)} < \infty,$$

akkor létezik nem zérushoz tartozó $x(t)$ megoldás:

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| > 0.$$

Megjegyzés. A $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)|$ határérték létezése külön bizonyításra szorul. Azonban ez semmi nehézséget nem jelent, ha figyelembe vesszük, hogy $|x(t)|$ monoton csökkenő, ami viszont a $w(x) = |x|^2$ Ljapunov-függvény alkalmazásával egyszerűen belátható.

A $Q = \{x \in R^2: x^T Cx > 0\}$ tartományt az 1. ábra mutatja.

Egyszerűen beláthatók az alábbi állítások. Ha (5.9) fennáll, továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \infty,$$

akkor

(i) ha van $x(t)$ megoldás, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0,$$

akkor ezen megoldás pályája a v tengelyhez simulva tart az origóhoz:

$$x(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{v(t)} = 0.$$

(ii) a $t_1 \geq t_0$ időpillanatban az α szöggel jellemzett Q tartományból (l. 1. ábra) induló megoldások ($x(t_1) \in Q$) Q -ban maradnak ($x(t) \in Q$, ha $t \geq t_1$) és nem tartanak az origóhoz ($\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| > 0$). α t_1 függvénye lehet: $\alpha = \alpha(t_1)$. Az $\alpha(t_1)$ függvény választható úgy is, hogy

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \alpha(t_1) = \pi,$$

de úgy is, hogy

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \alpha(t_1) = 0,$$

(l. (5.6)).

5.2. PÉLDA. Legyen $\beta = \beta(t)$, (5.3) itt is érvényes továbbá

$$(5.10) \quad \sup_{x \in K_{(0,0)}} q(t, x) \cong q_0(t),$$

ahol $q_0(t)$ folytonos. Ekkor

$$(5.11) \quad F^T C + CF + \dot{C} C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \frac{\dot{\beta}}{\beta} & q + \beta^2 \\ q + \beta^2 & 2p \end{pmatrix},$$

ahol

$$(5.12) \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a (4.9) összefüggésért q -nak van minimuma, ha

$$(5.13) \quad p_0(t) \cong \frac{q_0(t) + \beta^2(t)}{\beta(t)} - \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^3(t)}.$$

Ha $p_0(t)$ elég gyorsan növekedik $q_0(t)$ -hez képest, akkor $\beta(t)$ monoton csökkenő lehet: pl. $q_0(t)$ pozitív és korlátos, $p_0(t)$ monoton és minden határon túl növekedő. Ha $\beta(t)$ csökken, akkor az 1. ábrán látható α szög is csökken. Figyelembe véve, hogy $|x(t)|$ minden esetben monoton csökkenő, ez azt jelenti, hogy a nem zérus

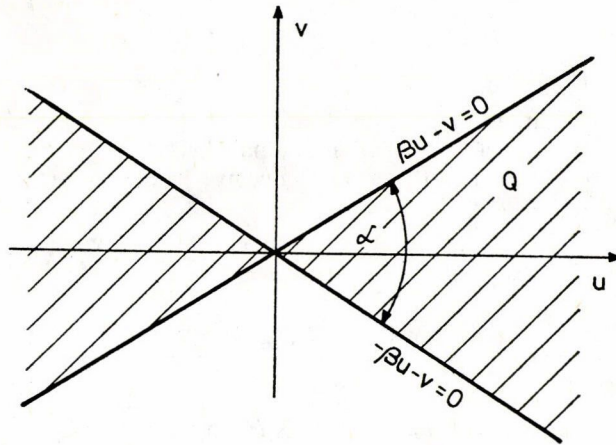
megoldások esetén becslést tudunk adni y zérushoz tartásához. Ugyanis (5.13) fennállása már garantálja, hogy a Q tartományból induló megoldás Q -ban marad. Tekintsük ismét a Bevezetőben ismertetett példát. Itt $q \equiv 1$. Legyen $\beta = e^{-t/2}$. Ekkor

$$p = 2 + e^t > \frac{1 + e^{-t}}{e^{-t/2}} + \frac{1}{2} \frac{e^{-t/2}}{e^{-3t/2}} = e^{t/2} + e^{-t/2} + \frac{1}{2} e^t.$$

Az egyenlőtlenség teljesül, így

$$|\dot{y}(t)| \leq k|\dot{y}(t_0)|e^{-t/2},$$

ahol $k > 1$, konstans.



$$\beta > 0 \quad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : \beta^2 u^2 - v^2 > 0\}$$

1. ábra

5.3. PÉLDA. Legyen $p(t, x) = \delta(t) \geq 2$, ahol $\delta(t)$ folytonosan deriválható, $\delta \geq 0$. Legyen továbbá $q \equiv 1$ és $\beta = \beta(t)$. Alkalmazzuk most a 3. pontban ismertetett eljárásokat. Legyen

$$(5.14) \quad S(t) = \begin{pmatrix} -1 & \lambda_1 \\ 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\omega},$$

ahol

$$(5.15) \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\delta}{2} + \frac{\omega}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{\delta}{2} - \frac{\omega}{2} \\ \omega = \sqrt{\delta^2 - 4} \end{cases}$$

Ezekkel (F -re l. (5.12)):

$$CSFS^{-1} = \begin{pmatrix} \beta^2 \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$C\dot{S}S^{-1} = \frac{\delta}{\omega^2} \begin{pmatrix} \beta^2 \lambda_2 & -\beta^2 \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{C}C^{-1} = \begin{pmatrix} 2\frac{\dot{\beta}}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Értelemszerűen alkalmazva (4.1)-et (vegyük figyelembe, hogy a (4.1)-ben levő F helyére most $SFS^{-1} + \dot{S}S^{-1}$ kerül!):

$$a = 2\frac{\dot{\beta}}{\beta} + 2\beta^2 \left(\lambda_1 + \frac{\delta}{\omega^2} \lambda_2 \right),$$

$$b = -2 \left(\lambda_2 + \frac{\delta}{\omega^2} \lambda_1 \right),$$

$$c = 2\frac{\delta}{\omega^2} (\lambda_2 - \beta^2 \lambda_1).$$

Ezekből:

$$a + \beta^2 b = 2\beta^2 \omega \left(1 - \frac{\delta}{\omega^2} \right) + 2\frac{\dot{\beta}}{\beta}.$$

Tételezzük fel az alábbiakat:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\delta}(t)}{\omega^2(t)} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = 0,$$

de $\beta(t)$ nem „túl gyorsan” csökken:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\beta}}{\beta^3 \omega} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{\delta}}{\omega^2 \beta^2} = 0.$$

Ekkor nyilván:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\lambda_2(t)}{\delta(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(t)}{\delta(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\delta(t) \lambda_1(t) = 1.$$

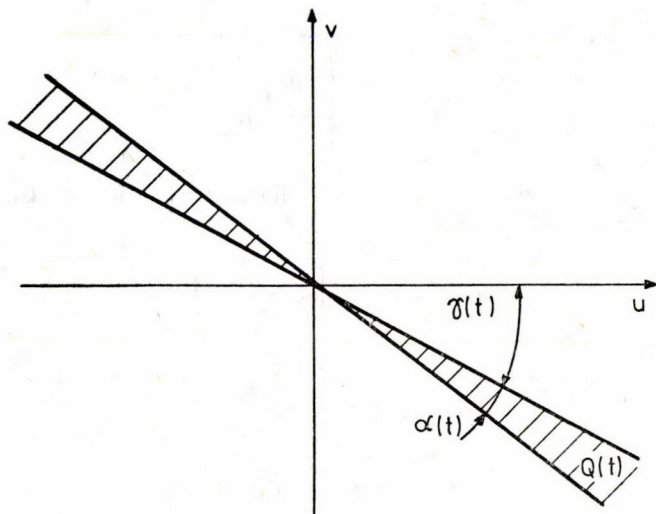
A részletes számítást mellőzve, elég nagy t -re:

$$a + \beta^2 b - \beta c \cong \beta^2 \delta > 0.$$

Ez utóbbi pedig azt jelenti, hogy ha $t_1 \cong t_0$ elég nagy, akkor a

$$Q(t) = \{x \in \mathbf{R}^2: x^T S^T(t) C S(t) x > 0\}$$

tartományból $t=t_1$ -ben induló megoldások $Q(t)$ -ben maradnak $t \geq t$ -re. A $Q(t_1)$ tartomány $\alpha(t)$ szöge (l. a 2. ábrát) tetszőlegesen kicsiny, ha $t \geq t_0$ elég nagy és $\alpha(t)$ monoton tart a zérushoz, ha $t \rightarrow \infty$, miközben Q az u tengelyhez közeledik: $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$.



2. ábra

IRODALOM

- [1] GARAY, B. and KERTÉSZ, V., "Lozinsky's functional and the transformation of variables", *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 2 (1984).
- [2] LA SALLE, J. P., "Stability of nonautonomous systems", *Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications* 1 (1976) 83—91.
- [3] KERTÉSZ, V., „Pozitív definit kvadratikus Ljapunov függvények alkalmazása stabilitási vizsgálatokhoz”, megjelenés alatt.

(Beérkezett: 1982. március 24.)

KERTÉSZ VIKTOR

BME GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR MATEMATIKA TANSZÉK
1521 BUDAPEST, STOCZEK U. H ÉP. IV. EM. 44.

STABILITY INVESTIGATIONS BY INDEFINITE LYAPUNOV FUNCTIONS

V. KERTÉSZ

For proving the asymptotical stability of a differential equation it is often an efficient method to use a *positive definite Lyapunov function*.

However, for example in those cases when the zero solution is stable but *not* asymptotically stable and there is a solution which tends to zero as the time tends to infinite then this fact cannot be proved by a *positive definite Lyapunov function*. In such and similar cases the application of an *indefinite Lyapunov function* seems to be useful.

Besides the general treatment it is showed how to use the method for a second order non-linear nonautonomous differential equation.

A CSILLAPÍTOTT REZGŐMOZGÁS DIFFERENCIÁLEGYENLETÉNEK STABILITÁSI VIZSGÁLATA

KERTÉSZ VIKTOR

Budapest

A dolgozat a csillapított rezgőmozgás differenciálegyenlete $y=y'=0$ egyensúlyi helyzetének stabilitását vizsgálja. *Pozitív definit és indefinit Ljapunov-függvények* segítségével, valamint lineáris esetben az adjungált egyenlet vizsgálatával kritériumokat ad az aszimptotikus stabilitásra: annak teljesülésére és nem teljesülésére, és az utóbbi esetben olyan megoldás létezésére, amely zérushoz tart.

1. Bevezetés

Célunk az

$$(1.1) \quad y'' + p(t, y, y')y' + y = 0; \quad p \geq 0; \quad p \in C_{\mathbb{R}^+ \times K_0}^0$$

$$\mathbb{R}^+ = [t_0; \infty); \quad K_0 = \{x \in \mathbb{R}^2: |x| < \varepsilon\},$$

differenciálegyenlet $y=y'=0$ egyensúlyi helyzetének stabilitási vizsgálata. Feltételezzük, hogy (1.1) $y(t)$ megoldásai \mathbb{R}^+ -ban értelmezettek.

Ezzel az egyenlettel általánosabb összefüggések alkalmazási példajaképpen már [2]-ben és [3]-ban foglalkoztunk. Az (1.1)-re kapott eredmények összefoglalása mellett jelen munkában szeretnénk néhány egyéb eredményt is ismertetni.

Alapvetőek a lineáris esetre ($p=p(t)$) levezetett tételek, mert a nem lineáris egyenletet is lényegében erre vezetjük vissza: $p(t, y, y')$ -t $\mathbb{R}^+ \times K_0$ -ban valamely $p_0(t)$ csak időtől függő folytonos függvénnyel becsüljük (alulról, ill. felülről attól függően, hogy az adott tételben $p(t, y, y')$ alsó, ill. felső becslésére van éppen szükség).

Írjuk át az (1.1) differenciálegyenletet mátrixos alakra:

$$(1.2) \quad x = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}; \quad A(t, x) = A(p(t, x)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -p(t, x) \end{bmatrix};$$

$$\dot{x} = Ax,$$

és használjuk az *euklideszi vektor normát*:

$$(1.3) \quad |x| = \sqrt{y^2 + y'^2}.$$

Tekintsük most a lineáris esetet: $p=p(t)$, $t \geq t_0$. Itt alkalmazható W. COPPEL alsó és felső becslése [1]:

$$(1.4) \quad e^{-\int_{t_0}^t \mu(-A(\tau))d\tau} \frac{|x(t)|}{|x(t_0)|} \leq e^{\int_{t_0}^t \mu(A(\tau))d\tau}.$$

ahol bármely B négyzetes mátrix esetén $\mu(B)$ a B mátrix szimmetrikus részének legnagyobb saját értékét jelöli.

E becslésből két fontos lemma következik az (1.2) (lineáris) egyenletre vonatkozóan:

1.1. LEMMA. Az $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ megoldás stabilis, sőt minden $\mathbf{x}(t)$ megoldásra igaz, hogy $|\mathbf{x}(t)|$ monoton csökkenő.

Bizonyítás. Csupán annyit kell belátnunk, hogy

$$(1.5) \quad \mu(\mathbf{A}(\tau)) = 0$$

1.2. LEMMA. Ha $\int_{t_0}^{\infty} p(\tau) d\tau < \infty$, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet nem aszimptotikusan stabilis.

Bizonyítás. E lemmához pedig csak annyit kell felismerni, hogy

$$(1.6) \quad -\mu(-\mathbf{A}(t)) = -p(t)!$$

Ha az aszimptotikus stabilitásra a megoldások normájának felső becslésével kritériumot szándékozunk adni, akkor (1.2) esetében az (1.4) becslés erre nem alkalmas. E becslés megfelelő javítását [2]-ben adjuk meg. E javított becsléssel már jó kritériumok adhatók az aszimptotikus stabilitásra.

E javítás lényege, hogy (1.2)-ben az \mathbf{x} változót alkalmas $\mathbf{W}(t)$ mátrixszal $\mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ alakban transzformáljuk. $\mathbf{W}(t)$ -t a következőképpen választjuk (nincs garancia, hogy ez a választás valóban mindig célravezető, vagyis megfelelő mértékben javítja az (1.4) becslést): $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$ -ről „leválasztunk” egy $\mathbf{A}_0(t)$ mátrixot, amelynél a sajátértékek valós részei negatívak, $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}_0(t) + \Delta \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$. Rögzített t -re $\mathbf{W}(t)\mathbf{A}_0(t)\mathbf{W}^{-1}(t)$ legyen negatív definit. Ezen utóbbi követelmény teljesítése nem csak egyféleképpen oldható meg. [2]-ben úgy jártunk el, hogy $\mathbf{W}(t)\mathbf{A}_0(t)\mathbf{W}^{-1}(t)$ *Jordan-féle valós normál forma* legyen. [4]-ben ugyanakkor olyan \mathbf{W} -t határoztunk meg, hogy $\mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} = -2\mathbf{I}$ legyen. Megjegyezzük, hogy az utóbbi esetben lehet talán a legkevesebb számítással \mathbf{W} -t megkapni:

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} \mathbf{A}_0 = -2\mathbf{I} + \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{Z} \mathbf{A}_0^{-1} - 2\mathbf{A}_0^{-1},$$

ahol \mathbf{Z} antiszimmetrikus. \mathbf{Z} egyértelműen meghatározható, annak alapján, hogy $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ szimmetrikus. $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ -ből meghatározható \mathbf{W} is (nem egyértelműen).

Tudjuk, hogy a 0-indexű *Bessel-féle differenciálegyenlet*:

$$y'' + \frac{1}{t} y' + y = 0$$

aszimptotikusan stabilis. Ennél az esetbenél $\int_{t_0}^{\infty} p(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} = \infty$. Látni fogjuk, hogy

folytonosan differenciálható és monoton csökkenő $p(t)$ esetén $\int_{t_0}^{\infty} p(\tau) d\tau = \infty$ -ből már általánosan is következik az aszimptotikus stabilitás. Úgy tűnhet, hogy mindig a $\int_{t_0}^{\infty} p(\tau) d\tau$ improprius integrál értéke a mértékadó a tekintetben, hogy fennáll-e

az aszimptotikus stabilitás, vagy sem. Meg fogjuk mutatni, hogy nem monoton csökkenő (bár zérushoz konvergáló) $p(t)$ esetén ez nem igaz: létezik (nem monoton csökkenő) $p(t)$, hogy $\int_{t_0}^{\infty} p(\tau) d\tau = \infty$, ugyanakkor az aszimptotikus stabilitás nem áll fenn.

[2]-ben bebizonyítottuk az alábbi tételt:

1.1. TÉTEL. Legyen

$$\delta \in C_{R^+}^1; \quad \delta(t) \leq 0, \quad \text{ha } t \geq t_0; \quad 0 \leq \delta(t) \leq 1 \quad \text{és}$$

$$(1.7) \quad \delta(t) \leq p(t, \mathbf{x}) \leq \frac{1}{\delta(t)},$$

akkor $\int_{t_0}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \infty$ -ből következik az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet aszimptotikus stabilitása.

Ez a tétel azt is jelenti, hogy növekedő $p(t)$ függvények esetén (pl. $p(t) = t$ vagy $p(t) = t \ln t$) is fennállhat az aszimptotikus stabilitás.

LA SALLE [5] példájá azonban óvatosságra int: ha $p(t) = e^t + 2$, akkor van nem zérushoz tartó megoldás: $y_1(t) = e^{-t} + 1$. Ha ilyen esetekre is kritériumot akarunk adni, akkor az alábbi nehézségekkel állunk szemben: ha — mint eddig — az összes megoldás normájára vonatkozó becslésekkel dolgozunk, akkor erősen növekedő $p(t)$ függvények esetén eleve *kimutathatatlan*, hogy létezik nem zérushoz tartó megoldás. Ugyanis a nem zérushoz tartó megoldás mellett van zérushoz tartó megoldás is (LA SALLE példájában ez (1.8)), ami miatt az összes megoldásra vonatkozó alsó becslés (1.9) szerinti lesz:

$$(1.8) \quad y_2(t) = (e^{-t} + 1) \left[1 - \frac{\int_0^t e^{-e^\tau} (1 + e^\tau)^{-2} d\tau}{\int_0^{\infty} e^{-e^\tau} (1 + e^\tau)^{-2} d\tau} \right],$$

ahol $\lim_{t \rightarrow \infty} (y_2'^2(t) + y_2^2(t))^{1/2} = 0$;

$$(1.9) \quad a(t, t_0) \cong \frac{|\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t_0)|},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t, t_0) = 0.$$

Ez a körülmény alapvetően más módszer bevezetését teszi szükségessé: *indefinit kvadratikus Ljapunov-függvényt* alkalmazunk [3], ami lehetővé teszi, hogy a becslés csak a nem zérushoz tartó, „nagy” megoldásokra vonatkozzon. Ezzel a módszerrel tehát el tudjuk dönteni, hogy adott esetben léteznek-e nem zérushoz tartó megoldások, azonban még mindig nyitva marad az a kérdés, hogy e nem zérushoz tartó megoldások mellett léteznek-e zérushoz tartó megoldások is.

Nyilvánvaló, hogy csak egyetlen lineárisan független zérushoz tartó megoldás létezhet (ha egyáltalán létezik nem zérushoz tartó megoldás is). Emiatt nem lehet olyan nyílt síkbeli tartományt megadni, hogy az onnan induló megoldások benne is maradjanak és zérushoz tartsanak. Így egy adott tartományra korlátozott becsléssel

(ami az *indefinit kvadratikus Ljapunov-függvény* alkalmazásának egyik lényegbe vágó része) nem lehet csak a zérushoz tartó megoldásokra vonatkozó felső becslést adni. Ezt a nehézséget az (1.2) egyenlet *adjungált* egyenletének

$$(1.10) \quad \dot{\mathbf{z}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{z}$$

vizsgálatával tudjuk áthidalni.

Ezt azáltal értük el, hogy kapcsolatot találtunk (1.2) zérushoz tartó és (1.10) ∞ -hez divergáló megoldásai között. (1.10) ∞ -hez tartó megoldásaira indefinit kvadratikus Ljapunov-függvénnyel már nehézség nélkül tudunk alsó becslést adni.

2. A megoldások normájának felső becslése

[2] ben az (1.1) nem lineáris egyenlet $\mathbf{x}(t)$ megoldásának euklideszi normájára az alábbi becslést vezettük le:

Legyen $\delta \in C_{\mathbb{R}^+}^1$, $0 \leq \delta(t) < 2$ és álljon monoton szakaszokból ($[t_{mi}; t_{Mi}]$ legyen olyan szakasz, ahol monoton növekedő), továbbá:

$$(2.1) \quad \alpha = \sqrt{2 + \delta};$$

$$(2.2) \quad \beta = \sqrt{2 - \delta};$$

$$(2.3) \quad \omega = \alpha\beta;$$

$$(2.4) \quad \mu_0(\delta, p) = -\frac{p}{2} + \frac{|\delta - p|}{\omega},$$

akkor

$$(2.5) \quad \frac{|\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t_0)|} \leq \Pi e^{\int_{t_0}^t \mu_0(\delta(\tau); p(\tau, \mathbf{x}(\tau))) d\tau},$$

ahol

$$(2.6) \quad \Pi = \frac{\alpha(t_0)}{\beta(t_0)} \prod_{i=1}^n \frac{\alpha(t_{Mi})}{\beta(t_{Mi})} \frac{\beta(t_{mi})}{\alpha(t_{mi})},$$

ha $[t_0; t]$ -ben $\delta(t)$ éppen n számú ($n \geq 0$) monoton növekedő szakaszból áll (ha $n=0$, akkor $\Pi = \frac{\alpha(t_0)}{\beta(t_0)}$). (2.5) akkor használható, ha $p(t, \mathbf{x}(t))$ -re becslés adható,

hiszen $\mathbf{x}(t)$ -ről nem feltételezhetjük, hogy ismert. Monoton csökkenő $\delta(t)$ esetében (2.5)-ből egyszerűen következik az 1.1. tétel. Ha lemondunk $\delta(t)$ monoton csökkenő voltáról, akkor (1.7) $\delta(t)$ alkalmas választásával még általánosabban biztosítható. Ha $\delta(t)$ nem monoton, akkor (2.5) meglehetősen bonyolult. Természetesen vetődik fel a kérdés (különösen, ha az 1.2. lemmát is tekintjük), hogy pusztán

$\int_{t_0}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \infty$ -ből nem következik-e már az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet aszimptotikus stabilitása. (2.5)-ben Π szereplése nem inkább az alkalmazott becslési eljárás hiányos-

ságának a következménye-e, mint valami mélyebb matematikai tartalomnak a tükröződése?

Csak e kérdés megválaszolása után érdemes a (2.5) becslést tovább elemezni, és újabb kritériumokat levezetni.

A választ a következő pontban egy ellenpéldával adjuk meg.

3. Példa arra, hogy $\int_{t_0}^{\infty} p(\tau) d\tau = \infty$, ugyanakkor az aszimptotikus stabilitás nem áll fenn

Ismertetjük azt a zérushoz konvergáló $p(t)$ folytonos függvényt, amely a cím-ben szereplő követelménynek megfelel.

3.1. TÉTEL. Legyen $p(t)$, $t \geq t_0$ az alábbi függvény:

$$(3.1) \quad p(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t);$$

$$p_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq t_i; \\ \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{(t-t_i)}{\varepsilon_i}, & \text{ha } t_i \leq t \leq t_i + \varepsilon_i \\ \frac{1}{\sqrt{i}}, & \text{ha } t_i + \varepsilon_i \leq t \leq t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \\ \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} - t}{\varepsilon_i}, & \text{ha } t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \leq t \leq t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \\ 0, & \text{ha } t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \leq t \end{cases}$$

$$t_0 = 0;$$

$$t_{i+1} = t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} + \Delta t_i;$$

ahol $\varepsilon > 0$; $\varepsilon_i > 0$ és $0 < \Delta t_i < k$ konstansok. Ha ε és ε_i megfelelően kicsinyek és Δt_i -k megfelelő értékűek (l. később a bizonyításban), akkor

$$(3.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau = \infty$$

és (1.2)-nek van $x(t)$ megoldása, hogy:

$$(3.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| > 0.$$

Bizonyítás. (3.2) teljesülése azonnal látszódik. Ellenőrizzük (3.3) teljesülését! Számítsuk ki mennyit csökken $|x(t)|$ t_0 és t_n között:

$$(3.4) \quad \frac{|x(t_n)|}{|x(t_0)|} = \frac{|x(t_1)|}{|x(t_0)|} \frac{|x(t_2)|}{|x(t_1)|} \cdots \frac{|x(t_{i+1})|}{|x(t_i)|} \cdots \frac{|x(t_n)|}{|x(t_{n-1})|}$$

$$(3.5) \quad \frac{|x(t_{i+1})|}{|x(t_i)|} = \frac{|x(t_i + \varepsilon_i)|}{|x(t_i)|} \frac{\left| x \left(t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|}{|x(t_i + \varepsilon_i)|} \frac{\left| x \left(t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|}{\left| x \left(t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|} \times \\ \times \frac{|x(t_{i+1})|}{\left| x \left(t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|},$$

ahol (l. (1.4), (1.5) és (1.6)):

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|x(t_i + \varepsilon_i)|}{|x(t_i)|} \cong e^{-\int_{t_i}^{t_i + \varepsilon_i} p(t) dt} = e^{-\frac{1}{2} \varepsilon_i \frac{1}{\sqrt{i}}} \\ \frac{\left| x \left(t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|}{\left| x \left(t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|} \cong e^{-\int_{t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}}}^{t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}}} p(t) dt} = e^{-\frac{1}{2} \varepsilon_i \frac{1}{\sqrt{i}}} \\ \frac{|x(t_{i+1})|}{\left| x \left(t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|} = 1. \end{array} \right.$$

Legyen ε adott (jelenleg még tetszőleges) és

$$\varepsilon_i = \frac{1}{i^{3/2}},$$

akkor

$$(3.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{|x(t_i + \varepsilon_i)|}{|x(t_i)|} \frac{\left| x \left(t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|}{\left| x \left(t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|} \cong e^{-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}} > 0.$$

Legyen $\tau = t - t_i - \varepsilon_i$ valamely i -re. Akkor (1.1) általános megoldása:

$$(3.8) \quad y(\tau) = A e^{-\frac{\delta}{2} \tau} \cos \left(\frac{\omega}{2} \tau + \varphi \right),$$

ahol

$$(3.9) \quad \begin{cases} \delta = \frac{1}{\sqrt{i}}; \\ \omega = \sqrt{4 - \delta^2}; \\ 0 \leq \tau \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}}; \end{cases}$$

$0 < A$ és φ konstansok. Ezzel $0 \leq \tau \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}}$ -ben

$$y'(\tau) = -Ae^{-\frac{\delta}{2}\tau} \sin\left(\frac{\omega}{2}\tau + \varphi + \Delta\varphi\right),$$

ahol

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\delta}{\omega}.$$

Legyen

$$(3.10) \quad \varphi = -\frac{\Delta\varphi}{2},$$

amellyel:

$$(3.11) \quad \frac{|\mathbf{x}(\tau)|^2}{|\mathbf{x}(0)|^2} = \frac{y^2(\tau) + y'^2(\tau)}{y^2(0) + y'^2(0)} = e^{-\delta\tau} \left(1 + \frac{\delta}{2} \sin \omega\tau\right).$$

(3.11) jobb oldalára kell most alsó becslést adnunk. Vegyük figyelembe, hogy $\tau > 0$ -ra

$$e^{-\delta\tau} > 1 - \delta\tau;$$

$$\sin \omega\tau > \omega\tau - \frac{\omega^3\tau^3}{6};$$

$$0 < \delta \leq 1;$$

$$\sqrt{3} \leq \omega < 2.$$

Mindezekkel:

$$e^{-\delta\tau} \left(1 + \frac{\delta}{2} \sin \omega\tau\right) > 1 - \frac{\delta^3\tau}{4} + \delta^3\tau \left[\frac{\sqrt{3}\tau^3}{4\delta} - \frac{\tau}{\delta} - \frac{2}{3} \frac{\tau^2}{\delta^2}\right].$$

(3.11)-re $\tau = \varepsilon\delta$ -nál kell csupán becslést adnunk, így:

$$\frac{|\mathbf{x}(\varepsilon\delta)|}{|\mathbf{x}(0)|} > 1 - \frac{\varepsilon\delta^4}{4} + \varepsilon\delta^4 \left[\frac{\sqrt{3}\varepsilon^3\delta^2}{4} - \varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon^2\right].$$

Legyen

$$\frac{\sqrt{3}\varepsilon^3\delta^2}{4} - \varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon^2 > \frac{1}{4} - \frac{1}{\varepsilon},$$

amely teljesül, ha

$$\varepsilon \left(1 + \frac{2}{3} \varepsilon \right) < \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

és ez nyilván fennáll, ha $0 < \varepsilon$ elég kicsiny, pl. $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ezekkel, ha $i \geq 2$:

$$\frac{|\mathbf{x}(\varepsilon\delta)|}{|\mathbf{x}(0)|} > 1 - \delta^4 > e^{-2\delta^4}.$$

Visszatérve τ -ról t -re és figyelembe véve (3.9)-et:

$$\frac{\left| \mathbf{x} \left(t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|}{|\mathbf{x}(t_i + \varepsilon_i)|} > e^{-\frac{2}{i^2}},$$

amelyből

$$(3.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=2}^n \frac{\left| \mathbf{x} \left(t_i + \varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \right) \right|}{|\mathbf{x}(t_i + \varepsilon_i)|} > e^{-\sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{i^2}} > 0.$$

(3.4); (3.5); (3.6); (3.7) és (3.12) alapján megállapítható, hogy (3.3) valóban fennáll.

Nyitva maradt még az a kérdés, hogy (3.10) biztosítható-e? Nyilván

$$p(t) = 0,$$

ha

$$t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} \leq t \leq t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}} + \Delta t_i = t_{i+1}.$$

A $\left[t_i + 2\varepsilon_i + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}}; t_{i+1} \right]$ intervallumban (1.1) általános megoldása:

$$y(\tau) = A \cos(\tau + \varphi_0),$$

$$y'(\tau) = A \sin(\tau + \varphi_0),$$

ahol

$$\tau = t - t_i - 2\varepsilon_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{i}},$$

$$0 \leq \tau \leq \Delta t_i.$$

Világos, hogy Δt_i megfelelő választásával bármilyen φ_0 esetén is elérhető, hogy $y(\Delta t_i)$ és $y'(\Delta t_i)$ olyan vektor szöghelyzetnek feleljen meg, amelyre a

$\left[t_{i+1} + \varepsilon_{i+1}; t_{i+1} + \varepsilon_{i+1} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{i+1}} \right]$ intervallum elején szükség van (l. (3.10)), hiszen

az $\begin{bmatrix} y(\tau) \\ y'(\tau) \end{bmatrix}$ vektor körben forog; a forgás periódusa: 2π .

A „beállított” szöghelyzet természetesen megváltozik a $[t_{i+1}; t_{i+1} + \varepsilon_{i+1}]$ időintervallum alatt. Ez az eltérés azonban tetszőlegesen kicsiny, ha ε_{i+1} elég kicsiny:

$$\mathbf{x}(t_{i+1} + \varepsilon_{i+1}) - \mathbf{x}(t_{i+1}) = \int_{t_{i+1}}^{t_{i+1} + \varepsilon_{i+1}} \mathbf{A}(\tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau,$$

amelyből

$$|\mathbf{x}(t_{i+1} + \varepsilon_{i+1}) - \mathbf{x}(t_{i+1})| \cong \int_{t_{i+1}}^{t_{i+1} + \varepsilon_{i+1}} |\mathbf{A}(\tau)| |\mathbf{x}(\tau)| d\tau \cong |\mathbf{x}(t_{i+1})| c\varepsilon_{i+1},$$

ahol $0 < c$ valamely konstans. $\mathbf{x}(t)$ megoldás a kezdeti érték folytonos függvénye. Így a kezdeti érték elég kis megváltozása esetén (3.12) igaz marad!

4. Kritériumok az aszimptotikus stabilitásra monoton csökkenő $\delta(t)$ esetében

Alapvető eredmény ebben a vonatkozásban az 1.1. tétel, amely [2]-ben is szerepel és amely (2.5) alapján egyszerűen bizonyítható.

A tétel általánosítható, mert bizonyos korlátozással $\delta(t) \cong p(t) \cong 0$ is megengedhető. Ezzel kapcsolatban ismét [2]-ben szerepel az alábbi tétel is, amely (2.5) alapján ugyancsak egyszerűen bizonyítható.

4.1. TÉTEL. (1.2) $\mathbf{x} \equiv 0$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis, ha létezik olyan $\delta(t)$ függvény, amelyre $t \cong t_1 \cong t_0$ -ban:

- (i) $0 \cong \delta(t) \cong 1$
- (ii) $\delta(t)$ folytonosan deriválható
- (iii) $\delta'(t) \cong 0$
- (iv) az origó egy K_0 környezetében

$$0 \cong p(t, \mathbf{x}) \cong \frac{1}{\delta(t)}$$

$$(v) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{\infty} C(\tau) \delta(\tau) d\tau = \infty,$$

ahol

$$C(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \delta(t) \cong p(t, \mathbf{x}) \\ \frac{-1}{\sqrt{3}-1}, & \text{ha } p(t, \mathbf{x}) < \delta(t). \end{cases}$$

Szemléletesen: ha az 1.1. tétel teljesül, kivéve, hogy nem túlságosan hosszú és nem túlságosan sűrűn elhelyezkedő intervallumokban $p(t, \mathbf{x}) < \delta(t)$, akkor az aszimptotikus stabilitás még fennáll.

Ha $p(t, \mathbf{x})$ bizonyos pontokban csupán érinti a „ t ” tengelyt, akkor $\delta(t)$ 1-nél kisebb pozitív skalárral való szorzásával (pl. $\delta(t) = \delta_1(t)$; $\delta_2(t) = c\delta_1(t)$; $0 < c < 1$) a fenti intervallumok rövidek lesznek. Ha pl. az érintési pontok elég távol vannak egymástól, más szóval nem túlságosan sűrűsödnek (l. az alábbi példákat) és létezik $p_0(t)$, hogy $p_0(t) \cong p(t, \mathbf{x})$ és $p_0''(t) \cong q > 0$ az érintési pontok adott környezetében, valamely q konstansra, akkor az aszimptotikus stabilitás fennáll.

Példák:

1. Ha $p(t) = t(1 + \sin t)$, akkor az $\mathbf{x} \equiv 0$ megoldás aszimptotikusan stabilis. Ugyanis legyen $\delta(t) = \frac{\varepsilon}{t}$, ahol $0 < \varepsilon$ elég kicsiny. Ekkor a 4.1. tétel nyilván teljesül.

2. Legyen

$$\min \left[\frac{1}{t}; t(1 + \sin t^2) \right] \cong p(t, x) \cong 2t.$$

Az $x \equiv 0$ egyensúlyi helyzet most is aszimptotikusan stabilis.

E példa érdekessége, hogy az egymás utáni érintési pontok (t_i és t_{i+1}) közötti távolság ($\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$) a zérushoz tart:

$$\frac{\pi}{2t_i} \cong \Delta t_i = \frac{\pi}{t_{i+1} + t_i} \cong \frac{\pi}{2t_{i+1}},$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty.$$

Adjunk becslést $p_0''(t)$ -re t_i elég kis környezetében.

$$p_0''(t) = 6t \cos t^2 - 4t^3 \sin t^2.$$

Legyen

$$K_i = \{t: |t^2 - t_i^2| \cong \pi/4\}.$$

$$4t^3 \sin t^2 < 0, \quad \text{ha } t \in K_i,$$

$$|\sin t^2| \cong \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{ha } t \in K_i,$$

amelyekkel $t \in K_i$ -ben:

$$p_0''(t) = 4t^3 |\sin t^2| + 6t \cos t^2 > 2\sqrt{2}t^3 - 6t > t_i^3,$$

ha t_i elég nagy.

Ennek alapján:

$$p_0(t) \cong t_i^3 \frac{(t - t_i)^2}{2}; \quad t \in K_i,$$

amelyből

$$p_0(t) \cong \frac{1}{t}, \quad \text{ha } |t - t_i| \cong \frac{\sqrt{2}}{t_i^{3/2} \sqrt{t}},$$

amennyiben valóban létezik $t \in K_i$, hogy a legutolsó egyenlőtlenség teljesüljön. Ha $K_i = [t_{ia}; t_{ib}]$, akkor

$$t_i - t_{ia} = \frac{\pi/4}{t_i + t_{ia}} \cong \frac{0,3}{t_i},$$

$$t_{ib} - t_i = \frac{\pi/4}{t_i + t_{ib}} \cong \frac{0,3}{t_i},$$

ha t_i elég nagy.

Elegendő tehát, ha

$$\frac{\sqrt{2}}{t_i^{3/2} \sqrt{t}} < \frac{0,3}{t_i}$$

teljesül. Ez pedig elég nagy t_i esetén nyilván teljesül.

Ha most $\delta(t) = \frac{1}{t}$, akkor azon intervallumok hossza, ahol $p_0(t) < \frac{1}{t}$, $\frac{2\sqrt{2}}{t_i^{3/2}\sqrt{t}} \cong \frac{4}{t_i^2}$ -tel becsülhető (ha t_i már elég nagy). Két egymás utáni zérus hely távolsága pedig

$$t_{i+1} - t_i = \frac{\pi}{t_{i+1} + t_i} \cong \frac{\pi}{2t_{i+1}} \text{-vel}$$

becsülhető. Így a 4.1. tétel (v) feltétele nyilvánvalóan teljesül.

5. Kritériumok az aszimptotikus stabilitásra nem monoton $\delta(t)$ esetében

A 3. pontban közölt példa világossá teszi, hogy nem monoton $\delta(t)$ esetében a (2.6), t -vel monoton növekedő tényező nem kiküszöbölhető, lényeges eleme a (2.5) becslésnek. Tehát ebben az esetben $\int_{t_0}^{\infty} \delta(t) dt = \infty$, illetve $\int_{t_0}^{\infty} C(t)\delta(t) dt = \infty$ (l. az 1.1. és 4.1. tételt) önmagában nem elegendő az aszimptotikus stabilitáshoz, hanem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \Pi(t) \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau = \infty,$$

illetve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \Pi(t) \int_{t_0}^t C(\tau)\delta(\tau) d\tau = \infty$$

teljesülésére van szükség, ahol Π -re l. (2.6). Ebben a vonatkozásban egy sor kritériumot lehetne adni. Példaképpen a következő tételt ismertetjük.

5.1. TÉTEL. Létezzenek az alábbi tulajdonságú $I_i = [t_{i1}; t_{i2}]$; $i = 1, 2, \dots$ diszjunkt intervallumok ($\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ nem feltétlen kell, hogy $[t_0, \infty)$ legyen):

I_i -ben definiált a $0 \cong \delta_i(t) \cong 1$; $\delta_i \in C^1_{I_i}$ függvény és van $t_i \in (t_{i1}, t_{i2})$, hogy

$$\delta_i(t) \cong 0, \text{ ha } t_{i1} \cong t \cong t_i,$$

$$\delta_i(t_i) = 0$$

$$\delta_i(t) \cong 0, \text{ ha } t_i \cong t \cong t_{i2},$$

és $x \in K_0$ esetén

$$0 \cong p(t, x) \cong \frac{1}{\delta_i(t)}.$$

Ha

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \delta_i(t_i)) e^{-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \int_{t_i}^{t_i} C(t)\delta_i(t) dt} = 0,$$

ahol

$$C(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \delta_i(t) \leq p(t, \mathbf{x}) \\ \frac{-1}{\sqrt{3}-1}, & \text{ha } p(t, \mathbf{x}) \leq \delta_i(t), \end{cases}$$

akkor (1.2) $\mathbf{x} \equiv 0$ megoldása aszimptotikusan stabilis.

Bizonyítás. Tekintsük (2.5)-t és (2.6)-ot. Vegyük figyelembe (l. [2]), hogy

$$\mu_0(\delta_i(t), p(t, \mathbf{x})) \leq -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} C(t) \delta_i(t).$$

Továbbá

$$\frac{|\mathbf{x}(t_{i2})|}{|\mathbf{x}(t_{i1})|} \leq \frac{\alpha(t_{i1})}{\beta(t_{i1})} \frac{\alpha(t_i)}{\beta(t_i)} \frac{\beta(t_{i1})}{\alpha(t_{i1})} e^{\int_{t_{i1}}^{t_i} \mu_0(\delta_i(t), p(t, \mathbf{x}(t))) dt},$$

ugyanakkor

$$\frac{\alpha(t_i)}{\beta(t_i)} = \frac{\sqrt{2+\delta_i(t_i)}}{\sqrt{2-\delta_i(t_i)}} \leq 1 + \delta_i(t_i).$$

Ha $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t_0)|}$ értékét keressük, akkor bontsuk $[t_0, \infty)$ -t olyan diszjunkt intervallumokra, hogy ezek között legyenek az I_i intervallumok is:

$$[t_0, \infty) = \bigcup_{j=1}^{\infty} I'_j$$

$$I'_j = [t'_{j1}, t'_{j2}],$$

minden i -hez ($i=1, 2, \dots$) van j , hogy

$$I_i = I'_j, \text{ vagyis } t_{i1} = t'_{j1} \text{ és } t_{i2} = t'_{j2}.$$

Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\mathbf{x}(t)|}{|\mathbf{x}(t_0)|} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{x}(t'_{j2})|}{|\mathbf{x}(t'_{j1})|} \leq \prod_{i=1}^{\infty} \frac{|\mathbf{x}(t_{i2})|}{|\mathbf{x}(t_{i1})|},$$

mivel bármely j -re (l. 1.1. lemmát):

$$\frac{|\mathbf{x}(t'_{j2})|}{|\mathbf{x}(t'_{j1})|} \leq 1!$$

6. Kritériumok nem aszimptotikus stabilitásra

Ezzel a problémával [3]-ban foglalkoztunk. Az idevonatkozó legfontosabb eredményeket röviden összefoglaljuk.

Legyen (1.2)-nek $\mathbf{x}(t)$ megoldása, amely minden $t \geq t_0$ -ra értelmezve van. Legyen továbbá:

$$(6.1) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ahol $\alpha > 0$ adott konstans. Érvényes az alábbi egyenlet:

$$(6.2) \quad \mathbf{x}^T(t) \mathbf{C} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{C} \mathbf{x}(t_0) e^{\int_{t_0}^t \varrho(\tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau},$$

ahol

$$(6.3) \quad \varrho(\tau, \mathbf{x}(\tau)) = \frac{\mathbf{x}^T(\tau) (\mathbf{A}^T(\tau, \mathbf{x}(\tau)) \mathbf{C} + \mathbf{C} \mathbf{A}(\tau, \mathbf{x}(\tau))) \mathbf{x}(\tau)}{\mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{C} \mathbf{x}(\tau)}.$$

Ha minden $t \geq t_0$ -ra

$$(6.4) \quad \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} < p(t, \mathbf{x}(t)),$$

akkor

$$(6.5) \quad \varrho(\tau, \mathbf{x}(\tau)) \leq -\frac{1}{p(\tau, \mathbf{x}(\tau))} \left(\frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \right)^2,$$

amennyiben

$$(6.6) \quad \mathbf{x}(\tau) \in Q = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} > 0 \}.$$

Legyen (legalábbis az origó egy környezete és Q lezártjának metszetében):

$$(6.7) \quad p(t, \mathbf{x}(t)) \geq p_0(t),$$

ahol $p_0(t)$ folytonos $t \geq t_0$ -ra.

A fenti összefüggésekből következik, hogy (6.4) és (6.7) teljesülése esetén Q a megoldások invariáns halmaza.

Ha ezenfelül az $\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{p_0(t)}$ improprius integrál létezik, akkor a Q -ból induló megoldások (e megoldások a Q -ban maradnak!) nem tartanak az origóba:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| > 0.$$

Az eddigiek alapján az alábbi két tételt mondjuk ki, amelyek egyszerűen adódó bizonyításától eltekintünk.

6.1. TÉTEL. Tekintsük az (1.2) egyenletet. Legyen valamely $\alpha > 0$ -ra

$$\bar{Q} = \{ \mathbf{x} = (u, v) : \alpha^2 u^2 - v^2 \geq 0 \},$$

és $K_0 \cap \bar{Q}$ -ban (K_0 az origó egy környezete) és elég nagy t -re ($t \geq t_1 \geq t_0$):

$$p(t, \mathbf{x}) \geq p_0(t) > \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \geq 2,$$

ahol $p_0(t)$ folytonos.

Ha a $\int_{t_1}^{\infty} \frac{dt}{p_0(t)}$ improprius integrál létezik, akkor (1.2) $\mathbf{x} \equiv 0$ megoldása nem aszimptotikusan stabilis.

6.1. KÖVETKEZMÉNY. Tekintsük az (1.2) egyenletet. Az origó egy K_0 környezetében és elég nagy t -re ($t \geq t_1 \geq t_0$) legyen

$$p(t, \mathbf{x}) \cong p_0(t) > 2,$$

ahol $p_0(t)$ folytonos.

Ha a $\int_{t_1}^{\infty} \frac{dt}{p_0(t)}$ improprius integrál létezik, akkor (1.2) $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ megoldása nem aszimptotikusan stabilis.

Ha a fenti tételek értelmében az aszimptotikus stabilitás nem áll fenn, továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \infty,$$

és (1.2)-nek létezik az origóhoz tartó megoldása is ($\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = 0$), akkor [3]-ban megmutattuk, hogy ezen utóbbi megoldás csak az y' tengelyhez simulva tarthat az origóba:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{y'(t)} = 0.$$

Felmerül azonban a kérdés, hogy milyen esetben van a nem zérushoz tartó megoldások mellett zérushoz tartó megoldás is. Ezt a kérdést a következő pontban válaszoljuk meg a lineáris egyenlet esetére.

7. Nem aszimptotikusan stabilis lineáris egyenlet zérushoz tartó megoldása

Vizsgáljuk az

$$(7.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -p(t) \end{pmatrix}$$

($p(t) > 0$, folytonos; $t \geq t_0$) differenciálegyenletet. Az alábbi tétel kritériumot ad arra, hogy (7.1)-nek legyen zérushoz tartó megoldása.

7.1. TÉTEL. (7.1)-ben legyen

$$(7.2) \quad p(t) > 2; \quad t \geq t_1 \geq t_0,$$

akkor (7.1)-nek létezik olyan $\mathbf{x}(t)$ megoldása, hogy

$$(7.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t)| = 0.$$

Bizonyítás. Tekintsük a (7.1)-hez rendelt adjungált egyenletet:

$$(7.4) \quad \dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{A}^T(t)\mathbf{y}.$$

(7.1)-nek $\mathbf{X}(t)$ (7.4)-nek pedig $\mathbf{Y}(t)$ legyen olyan alaprendszer, hogy

$$(7.5) \quad \mathbf{X}(t_1) = \mathbf{Y}(t_1) = \mathbf{I}.$$

Ismeretes, hogy

$$(7.6) \quad \mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}^T{}^{-1}(t).$$

Bontsuk fel $\mathbf{X}(t)$ -t

$$(7.7) \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{M}(t); \mathbf{S}^T(t) = \mathbf{S}(t); \mathbf{M}^T(t) = \mathbf{M}^{-1}(t)$$

alakban. Ekkor:

$$(7.8) \quad \mathbf{X}^{T^{-1}}(t) = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{M}(t).$$

Ezzel

$$(7.9) \quad \mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{M}(t)\mathbf{M}^T(t)\mathbf{x}(t),$$

$$(7.10) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{S}^{-1}(t)\mathbf{M}(t)\mathbf{y}(t_1).$$

Legyen most t rögzített és

$$(7.11) \quad \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{M}^T(t)\mathbf{x}(t),$$

akkor

$$(7.12) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t_1),$$

amelyből

$$|\mathbf{y}(t_1)| = |\mathbf{x}(t)|,$$

$$|\mathbf{y}(t)| = |\mathbf{x}(t_1)|.$$

Legyen most (7.4)-nek $\mathbf{y}(t)$ olyan megoldása, amelyre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{y}(t)| = \infty.$$

(Tegyük fel egyelőre, hogy ilyen megoldás létezik.) $\mathbf{y}_\tau(t)$ -val jelöljük (7.4)-nek azt a megoldását, amely az

$$(7.13) \quad \mathbf{y}_\tau(t_1) = \frac{\mathbf{y}(t_1)}{|\mathbf{y}(\tau)|}$$

kezdeti értéknek tesz eleget, ahol $\tau \geq t_1$ paraméter. Nyilvánvalóan

$$(7.14) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} |\mathbf{y}_\tau(t_1)| = 0$$

és

$$(7.15) \quad |\mathbf{y}_\tau(\tau)| = 1.$$

Vizsgáljuk most (7.1)-nek azokat az $\mathbf{x}_\tau(t)$ megoldásait ($\tau \geq t_1$), amelyek az

$$(7.16) \quad \mathbf{x}_\tau(t_1) = \mathbf{M}^T(\tau)\mathbf{y}_\tau(\tau)$$

kezdeti feltételeknek tesznek eleget. (7.11)-ből világos, hogy

$$(7.17) \quad \mathbf{x}_\tau(\tau) = \mathbf{M}(\tau)\mathbf{y}_\tau(t_1),$$

továbbá (7.14) és (7.15)-ből:

$$(7.18) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_\tau(\tau)| = 0$$

és

$$(7.19) \quad |\mathbf{x}_\tau(t_1)| = 1.$$

\mathbf{x}_0 legyen az $\mathbf{x}_\tau(t_1)$; $\tau \geq t_1$ pontok (t_1 rögzített, τ változik) egyik torlódási pontja. $\mathbf{x}(t)$ -nek válasszuk az

$$(7.20) \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_0$$

kezdeti feltételnek eleget tevő megoldást. Adjunk becslést az $\mathbf{x}(t)$; $t \geq t_1$ megoldásra. Legyen $\tau = t$.

$$(7.21) \quad |\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_t(t)| + |\mathbf{x}_t(t)| = |\mathbf{X}(t)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_t(t_1))| + |\mathbf{x}_t(t)| \leq \\ \leq |\mathbf{X}(t)| |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_t(t_1)| + |\mathbf{x}_t(t)| \leq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_t(t_1)| + |\mathbf{x}_t(t)|.$$

(7.21)-nél figyelembe vettük, hogy (1. az 1.1. lemmát)

$$|\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{X}(t)\mathbf{x}(t_1)| \leq |\mathbf{x}(t_1)|,$$

így

$$(7.22) \quad |\mathbf{X}(t)| \leq 1.$$

Nyilvánvalóan tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz létezik τ , hogy egyrészt

$$(7.23) \quad |\mathbf{x}_t(\tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

másrészt

$$(7.24) \quad |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_t(t_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Akkor (7.23), (7.24) és (7.21) figyelembevételével és t helyére τ -t téve:

$$|\mathbf{x}(\tau)| \leq \varepsilon.$$

Ha $t \geq \tau$, akkor az 1.1. lemma szerint

$$(7.25) \quad |\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}(\tau)| \leq \varepsilon.$$

Ezek után csupán azt kell megnéznünk, hogy mikor van (7.4)-nek normában végtelenbe tartó megoldása.

Legyen $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ és (7.4)-et írjuk át az alábbi alakba

$$(7.26) \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_2 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_0(t) \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Legyen

$$(7.27) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \beta > 0,$$

és

$$(7.28) \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}_0^T(t)\mathbf{C} + \mathbf{C}\mathbf{A}_0(t) = \begin{pmatrix} 2\beta^2 p(t) & -1 - \beta^2 \\ -1 - \beta^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(7.29) \quad \varrho(t, y_1, y_2) = (y_2 \ y_1) \mathbf{B} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

(7.4) $\mathbf{y}(t)$ megoldására [3] alapján az alábbi egyenlet érvényes a $\beta^2 y_2^2 - y_1^2 > 0$ tartományban:

$$(7.30) \quad \beta^2 y_2^2(t) - y_1^2(t) = [\beta^2 y_2^2(t_1) - y_1^2(t_1)] e^{\int_{t_1}^t \varrho(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau)) d\tau}$$

Ugyancsak [3] szerint $\varrho(t, y_1, y_2)$ -re az alábbi becslés adható. Amennyiben β -ra

$$(7.31) \quad p(t) > \frac{1 + \beta^2}{\beta}; \quad t \geq t_1$$

teljesül, akkor

$$(7.32) \quad \varrho \geq 2p(t) - \left[\frac{1 + \beta^2}{\beta} \right]^2 \frac{1}{p(t)}.$$

A fentiekből megállapíthatjuk, hogy ha

$$\beta^2 y_2^2(t_1) - y_1^2(t_1) > 0$$

és

$$(7.33) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left(p(\tau) - \frac{(1 + \beta^2)^2}{2\beta^2} \frac{1}{p(\tau)} \right) d\tau = \infty,$$

ahol β -ra (7.31) érvényes, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty$.

Tekintettel arra, hogy $\frac{1 + \beta^2}{\beta} \geq 2$, így (7.31) akkor és csak akkor teljesíthető, ha $p(t) > 2$. Ekkor $\beta = 1$ választható. Ezzel (7.33) így módosul

$$(7.34) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left(p(\tau) - 2 \frac{1}{p(\tau)} \right) d\tau \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t p(\tau) - 1 d\tau = \infty.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk!

IRODALOM

- [1] COPPEL, W. A., *Stability and Asymptotic Behaviour of Differential Equations* (D. C. Heath, Boston, 1965).
- [2] KERTÉSZ, V., „Pozitív definit kvadratikus Ljapunov függvények alkalmazása stabilitási vizsgálatokhoz”, megjelenés alatt.
- [3] KERTÉSZ, V., „Indefinit kvadratikus Ljapunov-függvény alkalmazása stabilitási vizsgálatokhoz”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 8 (1982).
- [4] KERTÉSZ, V., “Some applications of quadratic Liapunov functions”, *MTA SZTAKI Közlemények* 26/1982 103—109.
- [5] LA SALLE, J. P., “Stability of nonautonomous systems”, *Nonlinear Analysis, Theory, Method and Applications* 1 (1976) 83—91.

(Beérkezett: 1982. június 17.)

KERTÉSZ VIKTOR
BME GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR MATEMATIKA TANSZÉK
1521 BUDAPEST, STOCZEK U. H ÉP. IV. EM. 44.

STABILITY INVESTIGATION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF DAMPED OSCILLATION

V. KERTÉSZ

Conditions are given for the asymptotic stability and nonasymptotic stability of the trivial solution of differential equation $y'' + p(t, y, y')y' + y = 0$. In the latter case criteria are given for the existence of a solution tending to zero. *Definite* and *indefinite Liapunov functions* are applied.

Alkalmazott Matematikai Lapok 8 (1982)

EXTREMÁLIS ALGEBRA

HEGEDÜS GÁBOR

Budapest

A matematikai programozási modellek egy körében felismert hasonlóságok a hatvanas években megérték az általánosításra: 1963-ban N. N. VOROBEV a szélesebb körű felhasználás igényével egységes rendszerbe foglalta a hálók kritikus útjának meghatározására visszavezethető feladatok megoldásakor használt mátrixműveleteket — megszületett az extrémális algebra.

Az extrémális tér tulajdonságai szoros analógiát mutatnak a lineáris térrel. Az extrémális algebra irodalma elsősorban ezeknek az analógiáknak a feltárásával és a tárgykörébe eső feladatok minél hatékonyabb megoldásával foglalkozik. Ez a cikk egyrészt vázlatos képet igyekszik nyújtani az extrémális algebra egészéről, másrészt több új eredményt is közöl. Az utóbbiak közül elsősorban az extrémális előjelek értelmezése és a sajátvektorok meghatározásának algoritmusai ígérkeznek elméleti, illetve gyakorlati szempontból hasznosnak.

1. Bevezetés

A matematika alkalmazásának igénye korunkban rohamosan terjed: hagyományos alkalmazási területei mellett mind újabbak és újabbak jelennek meg. Az új feladatkörökben általában a máshol már bevált eszközök alkalmazásával is lehet eredményeket elérni, de az eltérő feladat eltérő megközelítést, eltérő eszközöket is igényelhet.

Az utóbbi évtizedek jelentős fejleménye, a matematika alkalmazása gazdasági feladatok megoldására, meghatározó szerepet játszott a — korábban sem ismeretlen — matematikai programozás és játékelmélet nagyarányú fejlődésében. A gazdasági feladatok megoldása során mutatkozó matematikai nehézségek indokolják az elvileg új módszerek kutatását, a matematika új ágainak kimunkálását (az újdonság, mint a két felhozott példánál is, nem kell előzménytelenséget jelentsen) [2].

A különféle feladatok megoldására kidolgozott módszerek között gyakran rokon vonások fedezhetők fel. Ha a rokonság elég szoros, célszerű megvizsgálni, nem alakítható-e ki egységes elmélet, melynek keretébe e megoldások befoglalhatók (az igenlő válasz bizonyítja, hogy valóban elég szoros a rokonság). Siker esetén pontosabb képet nyerünk arról, hogy a szóban forgó módszerek mely feladatok megoldására alkalmazhatók, hogyan alakíthatók át más célok érdekében.

[2] és [9] az extrémális algebra számos (néhány közös) előzményét sorolja fel, melyek kínálják az általánosítást.

A következőkben az extrémális algebra tárgyát alkotó jellemző feladatok közül mutatunk be néhányat.

1.1. PÉLDA. [2] m számú lehetséges termelési program közül egyet kell majd végrehajtani. Az i -edik termelési program az i -edik termékből állít elő b_i mennyiséget. A programok n számú közös nyersanyagot használnak. Az i -edik termék a_{ij} egységének gyártásához a j -edik nyersanyagból egy egységnyi szükséges (arányos felhasználá-

lást tételezünk fel). Kérdés: mennyi kell a j -edik nyersanyagból (jelölje x_j), hogy bármelyik termelési program potosan végrehajtható legyen.

A választ az alábbi egyenletrendszer megoldása adja:

$$\min_{i \leq j \leq n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

(A megoldás általában nem egyértelmű, nem mindig létezik; ha megengedhető b^i „túteljesítése”, akkor biztosan van megoldás.)

1.2. PÉLDA [2]. Egy rendszernek n eleme és m üzemmódja van. A j -edik elem x_j valószínűséggel hibásodik meg (a többiektől függetlenül) és az i -edik üzemmódban a j -edik elem hibája a_{ij} valószínűséggel okoz rendszerhibát. Mekkoraak lehetnek az x_j értékek, ha az i -edik üzemmódra előírt rendszerhiba valószínűség b_i ? A választ az előbbihez hasonló egyenletrendszer megoldása adja:

$$\max_{i \leq j \leq n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

1.3. PÉLDA [2]. Egy rendszernek n állapota lehet, egyikből a másikba diszkrét $t=1, 2, \dots$ időpontokban mehet át. A t időpontban az i -edik állapotból a j -edikbe való átmenet költsége a_{ij}^t . Kérdés: az i -edik állapotból indulva melyik állapotsorozaton át jut minimális költséggel a k -adik időpontban a j -edik állapotba. Meghatározandó:

$$\min_{i=i_0, i_1, \dots, i_k=j} \sum_{t=1}^k a_{i_{t-1} i_t}^t$$

1.4. PÉLDA [9]. Ha az előző példában a_{ij} (t -től független) úthosszat jelent, akkor az i -edik állapotból a j -edikbe vezető legrövidebb út:

$$\min_{0 \leq k \leq n} \min_{i=i_0, i_1, \dots, i_k=j} \sum_{t=1}^k a_{i_{t-1} i_t}$$

1.5. PÉLDA [9]. Egy n gépből álló rendszerben az i -edik gép akkor foghat hozzá a következő termelési ciklushoz, ha a többi gép túljutott az ehhez szükséges munkákon. Jelölje r a ciklus sorszámát, a_{ij}^r a j -edik gép r -edik ciklusában az i -edik gép $r+1$ -edik ciklusának előkészítéséhez szükséges időt (ha nincs ilyen idő: $-\infty$), t_i^r pedig az i -edik gép r -edik ciklusa kezdésének időpontját. Ekkor

$$t_i^{r+1} = \max_{i \leq j \leq n} \{a_{ij}^r + a_j^r\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

1.6. PÉLDA [9]. Az előző példa — egyetlen ciklust feltételezve — az a_{ij} élhosszú irányított gráfhoz tartozó CPM feladat legkorábbi kezdési időpontjainak is egyenletrendszere.

A példák sora folytatható lenne (a két idézett munka is tartalmaz továbbiakat), de célunk csak az volt, hogy megmutassuk: létezik egy feladat-család, melynek leírásánál a maximum- vagy minimum operátort és operandusainak szorzását, vagy additív módosítását használjuk (szorzásnál a szereplő számok nemnegatívak). Az extremális algebra ezeknek a modelleknek az általánosítása, melyek egyben legfontosabb speciális esetei is.

A továbbiakban követett axiomatikus tárgyalás a részletek és az alkalmazás határai iránt érdeklődő olvasók számára előnyös. A tárgykörrel ismerkedőknek

ajánlható, hogy a cikkben szereplő összefüggéseket először csak egy modellen vizsgálják. Induljanak ki a nemnegatív valós számoknak a maximum és a szorzás műveletével képzett struktúrájából, tekintsék az extrémális tér elemeit nemnegatív valós számokból képzett n -eseknek (vektoroknak).

2. Az extrémális tér axiómái

Az extrémális algebra eddig megfogalmazott axiómarendszerei ([4], [17], [9]) mind tartalmaznak olyan lehetőségeket, melyeket a többiek kizárnak. A következő rendszer a [4] dolgozatban található axiómarendszer általánosítása.

2.1. Legyen S kommutatív egységelemes részberendezett félcsoport, melyen a részbenrendezés V -félhálót hoz létre; a \circ félcsoport szorzás disztributív V -re nézve:

1. $\alpha, \beta \in S$ esetén $\alpha \circ \beta \in S$.
2. $\alpha, \beta \in S$ esetén $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.
3. $\alpha, \beta, \gamma \in S$ esetén $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$.
4. $\varepsilon \in S$; ha $\alpha \in S$, akkor $\varepsilon \circ \alpha = \alpha$.
5. $\alpha, \beta \in S$ esetén $\alpha \vee \beta \in S$.
6. $\alpha, \beta \in S$ esetén $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$.
7. $\alpha, \beta, \gamma \in S$ esetén $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$.
8. $\alpha \in S$ esetén $\alpha \vee \alpha = \alpha$.
9. $\alpha, \beta, \gamma \in S$ esetén $\alpha \circ (\beta \vee \gamma) = (\alpha \circ \beta) \vee (\alpha \circ \gamma)$.

Lesznek esetek, mikor lineárisan rendezett S -re lesz szükségünk; olyankor 8. helyett megköveteljük:

8. $\alpha, \beta \in S$ esetén $\alpha \vee \beta = \alpha$ vagy $\alpha \vee \beta = \beta$.

A geometriai vizsgálatoknál feltételesen teljes félhálóra lesz szükségünk, 5. és 9. helyett megköveteljük:

5. I tetszőleges indexhalmaz, $\alpha_i \in S$, ha $i \in I$ és van olyan $\alpha \in S$, hogy $\alpha_i \vee \alpha = \alpha$ minden $i \in I$ -re; ekkor létezik $\bigvee_{i \in I} \alpha_i \in S$, melyre $\alpha_j \vee (\bigvee_{i \in I} \alpha_i) = \bigvee_{i \in I} \alpha_i$ minden $j \in I$ -re és ha valamely $\beta \in S$ -re $\alpha_i \vee \beta = \beta$ ugyancsak minden $i \in I$ -re, akkor $\beta \vee (\bigvee_{i \in I} \alpha_i) = \beta$.

9. I tetszőleges indexhalmaz, $\alpha_i \in S$, ha $i \in I$, $\bigvee_{i \in I} \alpha_i \in S$ és $\alpha \in S$ esetén $\alpha \circ (\bigvee_{i \in I} \alpha_i) = \bigvee_{i \in I} (\alpha \circ \alpha_i)$.

Az S halmaz részbenrendezés szerinti nulla- és egységeleme — ha van — ki kell elégítse a következő feltételeket:

10. Ha van olyan $v \in S$, hogy bármely $\alpha \in S$ -re $\alpha \vee v = v$ és van olyan $\mu \in S$, hogy bármely $\alpha \in S$ -re $\alpha \vee \mu = \alpha$, akkor $\mu \circ v = \mu$.

11. Ha van olyan $v \in S$, hogy bármely $\alpha \in S$ -re $\alpha \vee v = v$, akkor $\alpha, \beta \in S$ és $\alpha \vee \beta = v$ esetén $\alpha = v$ vagy $\beta = v$.

A legfontosabb esetekben S — μ és v nélkül — a \circ művelettel csoportot alkot. Eredményeink jelentős része azonban szerényebb követelmény teljesülésekor is elérhető:

12. Ha $\alpha \in S$ -hez van olyan $\beta \in S$, hogy $\alpha \vee \beta \neq \alpha$, akkor van olyan $\bar{\alpha} \in S$, melyre $\bar{\alpha} \vee \varepsilon = \varepsilon$, $(\alpha \circ \bar{\alpha}) \vee \varepsilon = \varepsilon$ és valamely $\delta \in S$, $\delta \neq \bar{\alpha}$ -ra $\bar{\alpha} \vee \delta = \bar{\alpha}$.

Amikor $S - \{\mu, v\}$ -nek csoportnak kell lennie, akkor 12. helyett megköveteljük:

$\overline{12}$. Ha $\alpha \in S$ -hez van olyan $\beta, \gamma \in S$, melyre $\alpha \vee \beta \neq \alpha$ és $\alpha \vee \gamma \neq \gamma$, akkor létezik $\alpha^{-1} \in S$, melyre $\alpha^{-1} \circ \alpha = \varepsilon$.

Néhányszor hivatkozni fogunk 12. ellentétes rendezéshez tartozó párjára:

$\overline{12}$. Ha $\alpha \in S$ -hez van olyan $\beta \in S$, hogy $\alpha \vee \beta \neq \beta$, akkor van olyan $\tilde{\alpha} \in S$, melyre $\tilde{\alpha} \vee \varepsilon = \tilde{\alpha}$, $(\alpha \circ \tilde{\alpha}) \vee \varepsilon = \alpha \circ \tilde{\alpha}$ és valamely $\delta \in S$, $\delta \neq \tilde{\alpha}$ -ra $\alpha \vee \delta = \delta$.

Az S -re vonatkozó követelmények néhány egyszerű következménye:

- ε a \circ művelet egyetlen egységeleme.
- S -en értelmezzük a \cong relációt: $\alpha \cong \beta$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \vee \beta = \beta$. Az így értelmezett \cong reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, azaz részbenrendezés.
- $\overline{8}$. teljesülése 11-et maga után vonja.
- A \vee félhálóművelet izoton.
- Lemma.* A \circ félcsoporthművelet izoton.

Bizonyítás. Legyen $\alpha, \beta, \gamma \in S$, $\alpha \cong \beta$. Ekkor $(\gamma \circ \alpha) \vee (\gamma \circ \beta) = \gamma \circ (\alpha \vee \beta) = \gamma \circ \beta$, azaz $\gamma \circ \alpha \cong \gamma \circ \beta$.

- Lemma.* Ha μ S részbenrendezésének nulla eleme, akkor minden $\alpha \in S$ -re $\mu \circ \alpha = \mu$.

Bizonyítás. $\alpha = \nu$ esetén 10. axióma; más ν esetén van olyan $\tilde{\alpha} \in S$, melyre $\tilde{\alpha} \circ \alpha \cong \varepsilon$ és $\tilde{\alpha} \cong \varepsilon$, így $\mu \circ \alpha = (\mu \circ \tilde{\alpha}) \circ \alpha = \mu \circ (\tilde{\alpha} \circ \alpha) = \mu$.

- Lemma.* Ha teljesül a $\overline{12}$. axióma és ν S részbenrendezésének egységeleme, akkor minden $\alpha \in S$, $\alpha \neq \mu$ -re $\nu \circ \alpha = \nu$ (μ a részbenrendezés esetleges nulla eleme).

Bizonyítás. Mint f) bizonyítása.

- Ha S lineárisan rendezett csoport, akkor $\tilde{\alpha}$ és $\tilde{\alpha}$ lehetséges értéke ε vagy α^{-1} ($\overline{8}$. és $\overline{12}$. teljesülése maga után vonja 12. és $\overline{12}$. teljesülését is).
- Lemma.* Ha S feltételesen teljes \vee -félháló és háló is, akkor feltételesen teljes háló.

Bizonyítás. Legyen I tetszőleges indexhalmaz és $\alpha \cong \alpha_i$, ha $i \in I$. Megmutatjuk, hogy $H = \{\alpha_i; i \in I\}$ -nek van infimuma. H alsó kúpja $H^\nabla = \{\beta; \beta \cong \gamma \text{ minden } \gamma \in H\}$ -ra nem üres, mert α -t tartalmazza és felülről korlátos, mert H bármely eleme korlátja: létezik $\vee H^\nabla$. Ekkor viszont létezik $\vee H$ is és $\vee H = \vee H^\nabla$ [6].

- Lemma.* Ha S feltételesen teljes háló és az esetleges μ, ν elemtől eltekintve csoport a \circ művelettel, akkor a $\overline{9}$. axióma egyenértékű a következővel: I tetszőleges indexhalmaz, $\alpha_i \in S$, ha $i \in I$, $\bigvee_{i \in I} \alpha_i \in S$ és $\alpha \in S$ esetén

$$\alpha \circ \bigwedge_{i \in I} \alpha_i = \bigwedge_{i \in I} \alpha \circ \alpha_i.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\overline{9}$. teljesül. Ekkor $\bigwedge_{i \in I} \alpha_i \circ \alpha = \vee \{\beta; \beta \cong \alpha_i \circ \alpha \text{ minden } i \in I\} = \vee \{\beta; \alpha^{-1} \circ \beta \cong \bigwedge_{i \in I} \alpha_i\} = \alpha \circ \bigwedge_{i \in I} \alpha_i$. Az ellentétes irányú következtetés hasonlóan igazolható.

Az E \vee -félháló maximális tér S felett, ha zárt az S elemeivel való szorzásra nézve, e szorzás asszociatív, disztributív \vee -re és megőrzi S μ , ν és ε elemének jellegzetességét:

13. E elemeinek száma legalább 3.
14. $a, b \in E$ esetén $a \vee b \in E$.
15. $a, b \in E$ esetén $a \vee b = b \vee a$.
16. $a, b, c \in E$ esetén $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.
17. $a \in E$ esetén $a \vee a = a$.
18. $\alpha \in S$ és $a \in E$ esetén $\alpha \circ a \in E$.
19. $\alpha, \beta \in S$ és $a \in E$ esetén $\alpha \circ (\beta \circ a) = (\alpha \circ \beta) \circ a$.
20. $\alpha, \beta \in S$ és $a \in E$ esetén $(\alpha \vee \beta) \circ a = (\alpha \circ a) \vee (\beta \circ a)$.
21. $\alpha \in S$ és $a, b \in E$ esetén $\alpha \circ (a \vee b) = (\alpha \circ a) \vee (\alpha \circ b)$.
22. $a \in E$ esetén $\varepsilon \circ a = a$.
23. Ha $\mu \in S$, akkor van olyan $0 \in E$, hogy bármely $a \in E$ -re $0 \vee a = a$ és $\mu \circ a = 0$
24. Ha $\nu \in S$, akkor van olyan $\infty \in E$, hogy bármely $a \in E$ -re $\infty \vee a = \infty$ és $a \neq 0$ esetén $\nu \circ a = \infty$.

25. Ha $\alpha \in S$, $a \in E$ és $\alpha \circ a = 0$, akkor $\alpha = \mu$ vagy $a = 0$.

26. Ha $\alpha \in S$, $a \in E$ és $\alpha \circ a = \infty$, akkor $\alpha = \nu$ vagy $a = \infty$.

Az $S \times S$ -en és az $E \times E$ -n értelmezett \vee , illetve az $S \times S$ -en és $S \times E$ -n értelmezett \circ művelet közös jelölése az operandusok értelmezési tartományának eltérése miatt nem okozhat félreértést.

Az E -re és S -re vonatkozó követelmények néhány további egyszerű következménye:

k) E -n értelmezzük a \cong relációt: $a \cong b$ akkor és csak akkor, ha $a \vee b = b$. Az így értelmezett \cong részbenrendezés.

l) *Lemma.* Az S és E elemei között értelmezett \circ művelet izoton.

Bizonyítás. Legyen $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \cong \beta$ és $a \in E$. Ekkor $(\alpha \circ a) \vee (\beta \circ a) = (\alpha \vee \beta) \circ a = \beta \circ a$, azaz $\alpha \circ a \cong \beta \circ a$.

Legyen $\alpha \in S$, $a, b \in E$ és $a \cong b$. Ekkor az előzőhöz hasonlóan $(\alpha \circ a) \vee (\alpha \circ b) = \alpha \circ (a \vee b) = \alpha \circ b$, azaz $\alpha \circ a \cong \alpha \circ b$.

m) *Lemma.* Ha $\mu \in S$, akkor bármely $\alpha \in S$ -re $\alpha \circ 0 = 0$.

Bizonyítás. Legyen $a \in E$. f) alapján $\alpha \circ 0 = \alpha \circ (\mu \circ a) = (\alpha \circ \mu) \circ a = \mu \circ a = 0$.

n) *Lemma.* Ha teljesül a $\overline{12}$. axióma és $\nu \in S$, akkor bármely $\alpha \in S$, $\alpha \neq \mu$ -re $\alpha \circ \infty = \infty$.

Bizonyítás. Legyen $a \in E$, $a \neq 0$. g) alapján $\alpha \circ \infty = \alpha \circ (\nu \circ a) = (\alpha \circ \nu) \circ a = \nu \circ a = \infty$.

o) Ha S -nek és E -nek nincs maximális vagy minimális eleme, akkor ν és μ , illetve ∞ és 0 mindig felvehető. Ha S -nek egynél több maximális eleme van, akkor a 11. axióma kizárja ν pótlólagos felvételét.

p) S és S önmagával alkotott *Descartes-szorzatai* kielégítik az E -vel szemben támasztott követelményeket.

Összefoglalva:

2.1. DEFINÍCIÓ. E maximális tér S felett, ha teljesül rájuk az 1–26. axióma. A maximális tér duális párját az előbbire visszavezetve határozzuk meg:

2.2. DEFINÍCIÓ. E minimális tér S felett, ha mindkettőt ellentétesen rendezve maximális teret alkotnak.

Ha E és S háló, akkor előfordulhat, hogy maximális és minimális teret is képeznek. Kizárhatja ezt a lehetőséget az elemeiből képezhető (μ, ν) , (μ, ∞) vagy $(\nu, 0)$ pár, mert maximális térben szorzatuk μ , ill. 0, minimális térben pedig ν , ill. ∞ . [2] és [9]-hez hasonlóan engedjük meg a két szorzás egyidejű létezését: jelölje $\bar{\circ}$ a maximális, $\underline{\circ}$ pedig a minimális tér követelményeinek megfelelő szorzatot adó szorzást (nincs közöttük különbség, ha a három említett pár nem fordulhat elő).

2.3. DEFINÍCIÓ. E minimax tér S felett, ha maximális tér a $\bar{\circ}$ és minimális tér a $\underline{\circ}$ művelettel (mindkettőt \circ helyett véve 1—26.-ban) és kielégíti a 27-et.

27. $\alpha, \beta \in S, a \in E, (\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu) \neq (\beta, \alpha)$ és $(\mu, \infty) \neq (\alpha, a) \neq (\nu, 0)$ esetén $\alpha \bar{\circ} \beta = \alpha \underline{\circ} \beta$ és $\alpha \bar{\circ} a = \alpha \underline{\circ} a$.

Az extremális tér elnevezést a maximális, minimális és minimax tér bármelyikének megjelölésére használjuk. Továbbra is használjuk a \circ műveleti jelet, ha mindegy vagy egyértelmű, hogy $\bar{\circ}$ és $\underline{\circ}$ közül melyik helyett áll.

A \circ ($\bar{\circ}$ és $\underline{\circ}$) műveletet $\bar{\vee}$ és \wedge -nél magasabb rendűnek tekintjük, az elsőbbségét jelölő zárójeleket általában elhagyjuk. Használni fogjuk velük kapcsolatban a szorzáshoz, illetve az összeadáshoz kapcsolódó elnevezéseket (tényező, tag stb.).

Befejezésül egy megjegyzés:

q) Minimax térben 12. és $\bar{12}$. egyenértékű.

2.2. Az extremális tér lényegesen kevesebb axiómával leírható, ha csak az $E = S^n$ alakú terekkel foglalkozunk [9], tovább csökkenthető az axiómák száma, ha S lineáris rendezettségét is mindig előírjuk [17]. Vannak ugyanakkor érdekes kérdések, melyek tárgyalásához a 1—27. axióma teljesülése kevés. Az ilyen pótlólagos követelmények egy részét, mint más axiómák erősebb változatát írtuk le, a többiekkel itt kívánunk foglalkozni.

Azonos tényezők szorzatát célszerű a szokott módon, pozitív egész kitevőjű hatványként jelölni; a nulladik hatvány értelmezhető egységelemként. Ha S csoport, akkor értelmesek a negatív kitevőjű hatványok is. Minden értelmezett kitevővel kapcsolatban jogos a kérdés: adott S -beli elem előáll-e S -beli elem adott kitevőjű hatványaként (a sajátérték probléma megoldása során pl. e kérdés valóban felvetődik). Érdeemes vizsgálni olyan tereket, melyeknél S -re teljesül:

28. Bármely $\alpha \in S$ -hez és k természetes számhoz van olyan $\beta \in S$, melyre $\beta^k = \alpha$.

Ha $\beta^k = \alpha$, akkor β -t a szokott módon $\sqrt[k]{\alpha}$ -nak is írjuk. μ és ν hatványai és gyökei önmagukkal egyenlők.

Az alapvető axiómák alapján beláttuk, hogy a \circ művelet izoton. A geometriai vizsgálatoknál ennek szigorúbb formájára lesz szükségünk:

29. $\alpha, \beta \in S, a \in E, \alpha < \beta, a \neq 0$ és $a \neq \infty$ esetén $\alpha \circ a < \beta \circ a$.

Említést érdemel:

r) A 29. axióma maga után vonja, hogy összehasonlítható szorzandók és μ, ν -től különböző szorzók esetén S -en belül is érvényes az egyszerűsítési szabály: $\alpha \circ \gamma = \beta \circ \gamma, \gamma \neq \mu$ és $\gamma \neq \nu$ esetén $\alpha \cong \beta$ -ből $\alpha = \beta$ következik (az egyenlőséget a -val bővítve $\gamma \circ a$ -val egyszerűsítünk).

Ha S lineárisan rendezett, akkor $\alpha, \beta \in S$ -hez $\alpha \wedge \beta$ mindig hozzárendelhető (az ellentétes rendezéshez tartozó $\alpha \vee \beta$). Ilyenkor $a \cong \alpha \circ b$ és $a \cong \beta \circ b$ esetén ter-

mészetesen $a \equiv (\alpha \wedge \beta) \circ b$ is igaz, mert $\alpha \wedge \beta$ értéke α vagy β . Ha I tetszőleges indexhalmaz, akkor $\{\alpha_i; i \in I\}$ infinuma nem feltétlenül létezik, s ha igen, akkor sem feltétlenül igaz rá az előbbi összefüggés általánosítása. (Ha E lineárisan rendezett, akkor sem. Legyen pl. E a komplex számok elsősorban abszolút érték-, másodsorban az argumentum negatívja — $0 \leq \arg < 2\pi$ — szerint rendezett halmaza, S pedig a nemnegatív valós számok halmaza; \circ legyen a valós szorzás, illetve a komplex számok valós számmal szorzása. $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right) \circ i$, de $1 > i = \left\{ \bigwedge_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} \circ i$.)

A geometriai vizsgálatoknál meg fogjuk követelni, hogy teljesüljön:

30. I tetszőleges indexhalmaz, $\alpha_i \in S$ minden $i \in I$ -re, $\bigwedge_{i \in I} \alpha_i \in S$ és $\bigwedge_{i \in I} \alpha_i \neq \mu$ esetén, ha $a, b \in E$ és $a \equiv \alpha_i \circ b$ minden $i \in I$ -re, akkor $a \equiv \left(\bigwedge_{i \in I} \alpha_i\right) \circ b$.

Ez a követelmény másképp is megfogalmazható:

s) *Lemma*. Ha a 30. axióma feltételei teljesülnek, akkor $a \equiv \left(\bigwedge_{i \in I} \alpha_i\right) \circ b$ egyszerre igaz $\left(\bigwedge_{i \in I} \alpha_i\right) \circ b = \bigwedge_{i \in I} \alpha_i \circ b$ -vel.

Bizonyítás. Ha az egyenlőtlenség igaz, akkor $\{\alpha_i \circ b\}_{i \in I}$ alsó korlátjai legfeljebb $\left(\bigwedge_{i \in I} \alpha_i\right) \circ b$ -vel egyenlők, ezért az utóbbi alsó korlát a halmaz infinuma.

Ha az egyenlőség igaz, akkor az egyenlőtlenség jobb oldala az előbbi halmaz infinuma, bal oldala pedig egy alsó korlátja.

Hasonlóan r)-hez belátható:

t) Ha 29. és 30. teljesül, akkor bármely $\beta \in S$ -re $\left(\bigwedge_{i \in I} \alpha_i\right) \circ \beta = \bigwedge_{i \in I} \alpha_i \circ \beta$.

Megfelelő metrika létrehozása érdekében maximális térbe ágyazott maximális terekkel is foglalkozni kívánunk. A \vee művelet megegyezik a befogadó tér megfelelő műveletével, a szorzások különböznek. A vizsgált tér zárt a befogadó tér \oplus -szal jelölt felső csoport műveletére nézve is. Az eltérő műveleteket a következő követelménnyel kapcsoljuk össze:

31. $\alpha, \beta \in S$ $a \in E$ esetén $(\alpha \circ \beta) \oplus (\alpha \circ a) = \alpha \circ (\beta \oplus a)$.

A beágyazás emlékeztet a pozitív számok multiplikatív csoportja és a valós számok additív csoportja közötti kapcsolatra; evvel összhangban a \circ -t a \oplus -nál magasabb rendűnek tekintjük és általában elhagyjuk az elsőbbségét jelző zárójeleket.

A befogadó tér művelete segítségével fogalmazzuk meg azt a sűrűségi követelményt, hogy minden intervallumnak legyen belső pontja és minden ponthoz legyen a pontot belsejében tartalmazó tetszőlegesen rövid intervallum:

32. $\alpha, \beta \in S$, $\alpha < \beta$ esetén van olyan $\delta \in S$, melyre $\alpha < \alpha \oplus \delta < \beta$.

33. $\alpha, \delta \in S$, $\alpha \neq \mu$, $\alpha \neq \nu$, $\delta \neq \mu$ esetén van olyan $\beta \in S$, melyre $\beta < \alpha < \beta \oplus \delta$.

Az utóbbi axiómák néhány közvetlen következménye:

u) *Lemma*. Ha S feltételesen teljes lineárisan rendezett halmaz, akkor $\alpha \neq \mu$ esetén $\alpha = \vee \{\beta; \beta < \alpha\}$, $\alpha \neq \nu$ esetén pedig $\alpha = \wedge \{\beta; \beta > \alpha\}$.

Bizonyítás. α nyilván korlát. Ha az első esetben nem legkisebb felső korlát, akkor van olyan δ , amit a supremumhoz adva (\oplus) annál nagyobb, de α -nál kisebb — így a halmazhoz tartozó — értéket kapunk: ellentmondás. Ha a második esetben nem legnagyobb alsó korlát, akkor van olyan δ , amit hozzáadva (\oplus) nála nagyobb — és ezért a halmazhoz tartozó —, de az infinumnál kisebb értéket kapunk: ellentmondás.

- v) *Lemma.* Ha S feltételesen teljes lineárisan rendezett halmaz, melyen a \circ művelet szigorúan monoton, akkor $\alpha, \beta \in S$, $\alpha < \beta \neq v$ esetén van olyan $\gamma \in S$, melyre $\alpha < \beta \circ \gamma < \beta$.
Bizonyítás. Ha $\gamma < \varepsilon$, akkor $\beta \circ \gamma < \beta$. $\beta = \beta \circ \varepsilon = \beta \circ \bigvee_{\gamma < \varepsilon} \gamma = \bigvee_{\gamma < \varepsilon} \beta \circ \gamma$. Ha $\{\beta \circ \gamma; \gamma < \varepsilon\}$ minden elemére $\beta \circ \gamma \leq \alpha$ volna, akkor $\bigvee_{\gamma < \varepsilon} \beta \circ \gamma \leq \alpha$ lenne, ami $\alpha < \beta$ miatt lehetetlen. (Felhasználtuk a $\bar{9}$. axiómát is!)
- w) *Lemma.* Ha S feltételesen teljes lineárisan rendezett halmaz, melyen a \circ művelet szigorúan monoton, akkor $S - \{\mu, v\}$ csoport a \circ művelettel.
Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az $\alpha \circ \xi = \varepsilon$ egyenlet egyértelműen megoldható. Legyen $\gamma = \bigvee \{\xi; \alpha \circ \xi \leq \varepsilon\}$. $\alpha \circ \gamma \leq \varepsilon$ ($\bar{9}$.) $\gamma = \bigwedge \{\xi; \xi > \gamma\}$ (u); $\alpha \circ \gamma = \bigwedge_{\xi > \gamma} \alpha \circ \xi$ (j); $\xi > \gamma$ esetén $\alpha \circ \xi > \varepsilon$, így $\alpha \circ \gamma \geq \varepsilon$. ξ az egyszerűsítési szabály (r) miatt egyértelmű.

2.3. Példákat mutatunk extrémális terekre. Az S és E elemei között értelmezett szorzás általában az S -en értelmezett szorzás komponensenkénti végrehajtása — ilyenkor külön nem írjuk le.

S a valós számok additív csoportja, $E = S^n$ ($\alpha \circ \beta = \alpha + \beta$, $\alpha \vee \beta = \max \{\alpha, \beta\}$). S feltételesen teljes, lineárisan rendezett; minimax tér.

S a pozitív valós számok multiplikatív csoportja, $E = S^n$ ($\alpha \circ \beta = \alpha \beta$, $\alpha \vee \beta = \max \{\alpha, \beta\}$). Izomorf az előzővel (n közös).

S az egész számok additív csoportja, $E = S^n$ (az első példa műveleteivel). S lineárisan rendezett; minimax tér.

S mindhárom esetben bővíthető μ -vel, v -vel vagy mindkettővel ($-\infty$ vagy 0 , illetve $+\infty$ lép be). E -nek ilyenkor legalább a 0 , illetve ∞ elemmel kell bővülnie (reprezentálja az $S \mu$, illetve v elemeiből álló n -es), de megengedhető, hogy bizonyos komponensei felvehessék a μ vagy v értéket (bővített S esetén is lehet $E = S^n$). Az így bővített E extrémális tér az eredeti S felett is.

Az előbbi halmazokon újabb példákat kapunk, ha S -nek v -vel való bővítése után \circ értelmezését megváltoztatjuk: legyen $\alpha \circ \beta = \alpha \wedge \beta = \min \{\alpha, \beta\}$. $\varepsilon = v$, a 12. axióma triviálisan teljesíthető, de $\bar{12}$. megvalósíthatatlan. Változatlan részbenrendezésű maximális tereket kapunk.

S egységelemes disztributív háló, teljesül a 11. axióma (pl. egységelemét elhagyva nem lesz maximális eleme), $E = S^n$, $a \circ b = a \wedge b$. Maximális tér.

S a komplex számok multiplikatív félcsoportja, $E \doteq S^n$, $\alpha \circ \beta = \alpha \beta$, $\alpha \vee \beta = \alpha$, ha $|\alpha| > |\beta|$, $\alpha \vee \beta = |\alpha|$, ha $|\alpha| = |\beta|$. Feltételesen teljes minimax tér v és ∞ nélkül; $\mu = 0$, 0 a csak 0 -kat tartalmazó n -es.

Minden eddigi példában E S elemeiből képzett n -esekből állt. n -esek helyett vehetők sorozatok és egyéb S -beli értékészletű függvények is. Egy ilyen példa:

S a pozitív valós számok multiplikatív csoportja, E a pozitív együtthatós polinomok halmaza (\vee a polinomoknál együtthatóként veendő). Ellentétes rendezésnél a 0 polinom nem volna kizárható, ezért csak maximális tér.

Ha az előbbi példa E -jét a 0 polinommal bővítjük (nemnegatív együtthatós polinomok), akkor minimax teret kapunk.

Befejezésül egy olyan példa, melyben S lineárisan rendezett ugyan, de elemei nem számok, hanem számpárok:

$S = \{(a, b); a, b \text{ valós szám, } a > b \geq 0\}$ (ha elemeit különbségeknek tekintjük, akkor a pozitív számok nemnegatív tagok különbségeként felírva). $E = S^n$.

$(a, b) \circ (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$ (a különbségek szorzása): nem vezet ki S -ből, kommutatív, asszociatív, egységeleme $(1, 0)$. Az $(a, 0)$ alakú elemeknek inverzük is

van: $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$.

$(a, b) \vee (c, d) = (a, b)$, ha $a + d > c + b$ vagy $-a + d = c + b$ esetén $-a \geq c$, egyébként $(a, b) \vee (c, d) = (c, d)$. Teljesül $\bar{8}$: lineáris rendezés.

A 9. axióma igazolása:

$(p, q) \circ ((a, b) \vee (c, d)) = (pa + qb, pb + qa) \vee (pc + qd, pd + qc)$.

Ha $a + d > c + b$, akkor $-p > q$ miatt $-p(a + d) + q(b + c) > p(b + c) + q(a + d)$.

Ha $a + d = c + b$, akkor az előbbiek is egyenlők; ha ugyanekkor $a \geq c$, akkor $-a$ a feltételből következő $b \geq d$ miatt $-pa + qb \geq pc + qd$.

A 12. és $\bar{12}$. axiómában megkívánt \bar{a} , illetve \bar{a} elem lehet vagy maga (a, b) , vagy $\left(\frac{1}{a-b}, 0\right)$.

3. Az extremális tér szerkezete

A következőkben az extremális tér algebrai és geometriai tulajdonságait vizsgáljuk. A 12. axióma lehetővé teszi a részbenrendezett csoportok elmélete egyes fogalmainak és eredményeinek átvitelét. További eredményekhez jutunk a \vee műveletet teljes jogú műveletként kezelve.

Nem térünk ki az $E = S^n$ eset lineáris algebrai analógiáinak vizsgálatára; e kérdéskört déskört részletesen tárgyalja [9].

3.1. Először a maximális és minimax térrel mint részbenrendezett halmazzal foglalkozunk. Megkívánjuk az 1—26., illetve 1—27. axióma teljesülését.

3.1. DEFINÍCIÓ. $e \in E$ erős egység, ha minden $x \in E$ -hez van olyan $\lambda_x \in E$, $\lambda_x \neq v$, melyre $\lambda_x \circ e \geq x$.

Erős egység nem mindig van (pl. a nemnegatív együtthatós polinomoknak a nemnegatív valós számok multiplikatív félcsoportja feletti terében nincs), és ha van, általában akkor sem egyértelmű (pl. a valós n -eseknek a valós számok additív csoportja feletti terében minden elem erős egység). Ha e erős egység, akkor az $e \leq \gamma \circ y$ egyenlőtlenség minden $\gamma \neq v$ -höz tartozó y megoldása szintén erős egység. Ha $\infty \in E$, akkor ∞ az egyetlen erős egység.

3.2. DEFINÍCIÓ. $f \in E$ gyenge egység, ha minden $x \in E$, $x \neq 0$ -hoz van olyan $y_x \in E$, $y_x \neq 0$, melyre $y_x \leq f$ és $y_x \leq x$.

3.1. LEMMA. Minden erős egység egyben gyenge egység is.

Bizonyítás. Legyen e erős egység és $x \neq 0$. Definíció szerint van olyan λ_x , melyre $\lambda_x \circ e \geq x$, $\lambda_x \neq v$. Az utóbbi miatt (12. axióma) létezik $\bar{\lambda}_x$, mellyel $e = e \circ e \geq \bar{\lambda}_x \circ \bar{\lambda}_x \circ e \geq \bar{\lambda}_x \circ x$ és $x \geq \bar{\lambda}_x \circ x$. A 25. axióma miatt pedig $\bar{\lambda}_x \circ x \neq 0$.

A gyenge egységek nem feltétlenül erős egységek. A $\pm \infty$ -nel kibővített valós számok halmazának önmaga additív félcsoportja feletti terében csak $-\infty$ nem gyenge egység és csak $+\infty$ erős egység.

3.3. DEFINÍCIÓ. Legyen $p, q \in E$. Ekkor p merőleges (ortogonális) q -ra, ha nincs 0-tól különböző közös alsó korlátjuk. Jelölése: $p \perp q$. (Minimax térben $p \perp q$ a $p \wedge q = 0$ összefüggéssel is definiálható.)

3.2. LEMMA. Ha $\alpha \neq \nu$, akkor $p \perp q$ -ből következik, hogy $\alpha \circ p \perp q$.

Bizonyítás. $\alpha = \mu$ esete triviális. Ha $\alpha \neq \mu$, akkor indirekt feltevésünk: van olyan $d \neq 0$, melyre $d \cong \alpha \circ p$ és $d \cong q$. A 12. axióma alapján létező $\bar{\alpha}$ -sal $q \cong \bar{\alpha} \circ d$ és $p \cong \bar{\alpha} \circ \alpha \circ d \cong \bar{\alpha} \circ d$. A 25. axióma miatt $\bar{\alpha} \circ d \neq 0$: ellentmond $p \perp q$ -nak.

Az előző lemma szimmetrikusan is megfogalmazható: ha $\alpha \neq \nu$ és $\beta \neq \nu$, akkor $p \perp q$ -ből következik, hogy $\alpha \circ p \perp \beta \circ q$.

3.3. LEMMA. Ha $\alpha \neq \nu$ és $\beta \neq \nu$, akkor $q \cong x$, $q \cong y$ és $p \perp q$ -ből következik, hogy $p \perp (\alpha \circ x \vee \beta \circ y)$.

Bizonyítás. A feltételek alapján $x \vee y \cong q$, így p -nek és $x \vee y$ -nak nincs közös alsó korlátja. A 3.2. lemma alapján $p \perp (\alpha \vee \beta) \circ (x \vee y)$, ezért nincs közös alsó korlátja p -nek és $\alpha \circ x \vee \beta \circ y$ -nak sem ($\alpha \circ x \vee \beta \circ y \cong (\alpha \vee \beta) \circ (x \vee y)$).

3.4. DEFINÍCIÓ. $F \subset E$ ortogonális kiegészítője $F^\perp = \{y; y \perp x, \text{ ha } x \in F\}$. Ha F egyelemű, akkor $\{f\}^\perp$ helyett f^\perp -t írunk.

$0 \in E$ esetén $0^\perp = E$ és $E^\perp = \{0\}$. Könnyű belátni, hogy $F \subset F^{\perp\perp}$ bármely $F \subset E$ esetén.

A nemnegatív valós n -eseknek a nemnegatív valós számok multiplikatív félcsoportja feletti terében az ortogonális kiegészítő szoros rokonságot mutat a lineáris algebrában szereplő azonos nevű fogalommal: azokból az n -esekből áll, amelyekben minden olyan koordináta 0, amelyekhez az alaphalmazban található az ugyanolyan indexű helyen pozitív koordinátát tartalmazó vektor.

Az E -n értelmezett részbenrendezés segítségével osztályozzuk E elemeit és a kapott részalmazok között részbenrendezést definiálunk; vizsgáljuk kapcsolataikat.

3.5. DEFINÍCIÓ. $a \gtrsim b$, ha $a \perp x$ minden olyan esetben, mikor $b \perp x$.

3.6. DEFINÍCIÓ. $a \lesssim b$, ha van olyan λ , $\lambda \neq \nu$, melyre $\lambda \circ b \cong a$.

Az előbb definiált \lesssim és \gtrsim reláció reflexív és tranzitív, így mindkettő előrendezést létesít E -n; a kölcsönösen relációban levő elemek halmazai ekvivalencia osztályok, melyek között az őket meghatározó előrendezés részbenrendezést indukál.

3.7. DEFINÍCIÓ. $T_a = \{x; x \gtrsim a \text{ és } a \gtrsim x\}$ E egy tartója.

3.8. DEFINÍCIÓ. $A_a = \{x; x \lesssim a \text{ és } a \lesssim x\}$ E egy archimedeszi komponense.

3.4. LEMMA. Ha $a \lesssim b$, akkor $a \gtrsim b$.

Bizonyítás. Ha $a \lesssim b$, akkor — definíció szerint — létezik $\lambda \neq \nu$, mellyel $\lambda \circ b \cong a$. Ha $x \perp b$, akkor a 2.1. lemma alapján $x \perp \lambda \circ b$, amiből az állítás következik.

A 3.4. lemmából következik, hogy az egy archimedeszi komponensbe tartozó pontok tartója is közös, azaz az archimedeszi komponensekre bontás csak a tartókra bontás finomítása lehet.

A nemnegatív valós n -eseknek a nemnegatív valós számok multiplikatív félcsoportja feletti terében a két osztályozás egybeesik, az osztályok a 0 koordináták indexhalmazával jellemezhetők.

A ∞ -nel kiegészített nemnegatív valós számok halmazának saját multiplikatív félcsoportja feletti vett terében az archimédészi komponensek és tartók a következők:

$$A_0 = \{0\}, \quad A_1 = \{x; 0 < x < \infty\}, \quad A_\infty = \{\infty\}, \quad T_0 = \{0\}, \quad T_1 = \{x; 0 < x\}.$$

3.9. DEFINÍCIÓ. E szűk magja: erős egységeinek halmaza.

3.5. LEMMA. E szűk magja E archimédészi komponense és az archimédészi komponensek részbenrendezett halmazának egységeleme.

Bizonyítás. Az erős egységek \lesssim szerint minden elemmel, így a többi erős egységgel is relációban vannak, ami azt jelenti, hogy közös komponensben kell lenniük. E komponens minden eleme erős egység (a definíció szerint szükséges szorzó, ha egy komponens valamelyik eleméhez létezik, akkor létezik az összes többihez is). Az erős egységek komponense a \lesssim által indukált részbenrendezés egysége, mert minden eleme \lesssim szerint relációban van E összes elemével.

3.10. DEFINÍCIÓ. E tág magja: gyenge egységeinek halmaza.

3.6. LEMMA. E tág magja E tartója és a tartók részbenrendezett halmazának egységeleme.

Bizonyítás. Mint a szűk mag esetében (a zárójelben szereplő megjegyzés helyett esetünkben arra hívjuk fel a figyelmet, hogy az osztály minden elemére teljesülnie kell: nem merőleges E egyetlen elemére sem).

Ha $0 \in E$, akkor $\{0\}$ archimédészi komponens is, tartó is és mindkét részbenrendezett halmazrendszer nulla eleme. Bármely $x \in E$ esetén ugyanis $0 \gtrsim x$ és $0 \lesssim x$, de akár $x \gtrsim 0$, akár $x \lesssim 0$: $x = 0$.

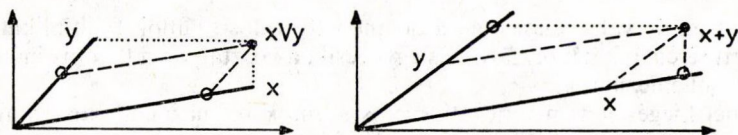
3.2. A továbbiakban kihasználjuk, hogy E és S \vee -félháló vagy háló. Változatlanul az 1—26., illetve 1—27. axióma teljesüléséből indulunk ki.

Bevezetjük a kúp és a konvex halmaz fogalmát; folytatjuk a tartók és az archimédészi komponensek tulajdonságainak vizsgálatát.

3.11. DEFINÍCIÓ. E egy C részhalmaza kúp, ha $x, y \in C$ esetén $x \vee y \in C$ és — ha $\lambda \neq \nu$, $\lambda \neq \mu$ — $x \in C$ esetén $\lambda \circ x \in C$. A C kúp tompa, ha $0 \notin C$ és hegyes, ha $0 \in C$ (az utóbbi esetben a $\lambda \neq \mu$ feltétel nem lényeges).

A definícióból közvetlenül következik, hogy tetszőleges számú kúp közös része is kúp (lehet üres; ha van közöttük tompa, akkor a metszet is tompa, ha mind hegyes, akkor a metszet is hegyes).

A nemnegatív valós számpárokknak a nemnegatív valós számok multiplikatív félcsoportja feletti terében a kúpok megegyeznek a 2-dimenziós lineáris tér pozitív negyedébe eső $(0, 0)$ csúcsú konvex kúpokkal (szögtartományokkal). A többszörös tartalmazása közös követelmény; $x \vee y$ -n át párhuzamost húzva x és y sugarával a másik sugáron megkapjuk azt a pontot, amelyik ugyanígy kapott párjával összeként adja $x \vee y$ -t; $x + y$ -ből párhuzamost húzva a koordináta tengelyekkel az x és y sugarán az origóhoz közelebb kimetszett pontokhoz a \vee $x + y$ -t rendeli (1. ábra).



1. ábra

3.7. LEMMA. Ha az E minimax tér egyben disztributív háló is, akkor részhalmazainak ortogonális kiegészítői kúpok; hegyes kúpok, ha $0 \in E$.

Bizonyítás. Legyen F E -nek egy nem üres részhalmaza ($F = \emptyset$ esetén $F^\perp = E$, E kúp), $x \in F$ és $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq \nu$. Ha $a \perp x$, akkor 3.2. lemma szerint $\lambda \circ a \perp x$: $a \in F^\perp$ esetén $\lambda \circ a \in F^\perp$. Ha $a \perp x$ és $b \perp x$ (háló, ezért $a \wedge x = b \wedge x = 0$), akkor $(a \vee b) \wedge x = (a \wedge x) \vee (b \wedge x) = 0$, azaz $a \vee b \perp x$. A második állítás nyilvánvalóan következik abból, hogy 0 mindenre merőleges.

3.8. LEMMA. Ha az E minimax tér egyben disztributív háló is, akkor tartói kúpok.

Bizonyítás. Legyen T egy tetszőleges tartó, $a \in T$. Ha $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq \nu$, akkor $a \perp x$ maga után vonja $\lambda \circ a \perp x$ -t (3.2. lemma), azaz $\lambda \circ a \approx a$. Ha $\lambda \circ a \perp x$, akkor — mint előbb — $\lambda \circ a \perp \lambda \circ x$, amiből $a \perp x$ következik (ha volna 0 -tól különböző közös alsó korlátjuk, akkor ennek λ -szorososa $\lambda \circ a$ és $\lambda \circ x$ közös alsó korlátja lenne és csak $\lambda = \mu$ esetén lehetne 0). Megmutattuk, hogy $a \not\approx \lambda \circ a$. $a, b \in T$, $a \perp x$ és $b \perp x$ esetén — mint a 3.7. lemma bizonyításában — $a \vee b \perp x$, és viszont, ha $a \vee b \perp x$, akkor $a \leq a \vee b$ és $b \leq a \vee b$ miatt $a \perp x$ és $b \perp x$. Evvel megmutattuk, hogy $a \vee b$ is T -ben van.

3.9. LEMMA. Ha E minimax tér, akkor archimedeszi komponensei kúpok.

Bizonyítás. Minimax térben teljesül a 12. axióma (2. q.). Legyen A egy tetszőleges archimedeszi komponens, $a \in A$, $\lambda \neq \mu$ és $\lambda \neq \nu$. Ha $c = \lambda \circ a$, akkor $a = \varepsilon \circ a \leq \leq \lambda \circ \lambda \circ a = \lambda \circ c$, azaz $c \in A$. Ha $a, b \in A$, akkor valamely $\lambda \neq \nu$ -re $b \leq \lambda \circ a$. $c = a \vee b$ -re $a \leq c$ nyilvánvaló, ugyanakkor $c \leq a \vee \lambda \circ a = (\varepsilon \vee \lambda) \circ a$, azaz $c \in A$.

3.12. DEFINÍCIÓ. E egy K részhalmaza konvex, ha $x, y \in K$ és $\alpha \vee \beta = \varepsilon$ esetén $\alpha \circ x \vee \beta \circ y \in K$.

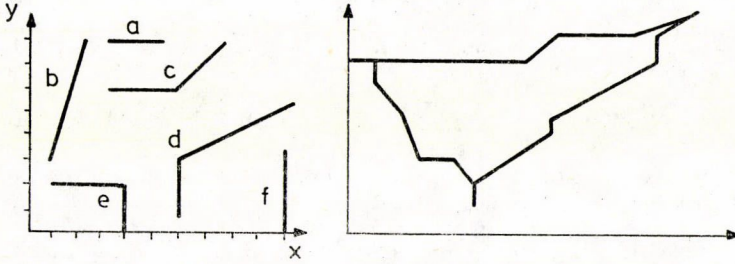
A definícióból — a kúpokhoz hasonlóan — közvetlenül következik, hogy tetszőleges számú konvex halmaz közös része konvex halmaz.

A nemnegatív valós számpárokknak a nemnegatív valós számok multiplikatív félcsoportja feletti terében két pont konvex burkának, a szakasznak, lehetséges formáit és egy konvex halmazt mutat be a 2. ábra.

A tartalmazás halmazelméleti fogalma alapján természetes módon vezethető be részbenrendezés a kúpok és a konvex halmazok körében is.

3.13. DEFINÍCIÓ. Ha H_1 és H_2 mindegyike kúp, vagy mindegyike konvex halmaz, akkor $H_1 \leq H_2$ legyen egyenértékű $H_1 \subset H_2$ -vel.

A hegyes kúpok, a kúpok vagy a konvex halmazok esetében a metszetképzés nem vezet ki az eredeti halmazosztályból. E valamennyi részhalmaza a metszetképzés műveletével teljes félhálót alkot, ezért a most definiált részbenrendezéssel a hegyes



2. ábra

kúpok, a kúpok és a konvex halmazok is teljes \wedge -félhálót képeznek. Hegyes kúpoknál a félháló nulla eleme a $\{0\}$, kúpoknál és konvex halmazoknál az üres halmaz.

3.14. DEFINÍCIÓ. I tetszőleges indexhalmaz. Ha H_i minden $i \in I$ -re kúp, vagy minden $i \in I$ -re konvex halmaz, akkor $\bigwedge_{i \in I} H_i = \bigcap_{i \in I} H_i$.

Mind a kúpok, mind a konvex halmazok esetében a halmazelméleti egyesítés művelete kivezet a kiinduló halmazosztályból, de mivel metszetképzésre mindegyikük (külön a hegyes kúpok is) teljes félhálót alkot és részbenrendezésüknek egységelem van (E az egységelem), ezért teljes hálók.

3.15. DEFINÍCIÓ. I tetszőleges indexhalmaz. Ha \mathcal{H} a hegyes kúpok, a kúpok vagy a konvex halmazok osztálya és $H_i \in \mathcal{H}$ minden $i \in I$ -re akkor $\bigwedge_{i \in I} H_i = \bigwedge \{H; H \in \mathcal{H}, \bigcup_{i \in I} H_i \subset H\}$.

A \cong reláció, a \wedge művelet és a \vee művelet definíciója közül bármelyik — mindhárom említett halmazosztály esetében — indukálja a másik kettőt [6].

Konvex halmazok esetén könnyen belátható a következő összefüggés: $K_1 \vee K_2 = \{k; k = \alpha \circ k_1 \vee \beta \circ k_2, k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, \alpha \vee \beta = \varepsilon\}$.

Hasonló igaz a kúpokra is: $C_1 \vee C_2 = \{c; c = c_1 \vee c_2, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$.

Attól függően, hogy E -n csak \vee , vagy \vee és \wedge van-e értelmezve, vizsgálhatók a tartók és az archimedeszi komponensek közötti megfelelő műveletek is.

3.10. LEMMA. E archimedeszi komponensei \vee -félhálót alkotnak; $a \in A_a$ és $b \in A_b$ esetén $A_a \vee A_b = A_{a \vee b}$, ahol $A_{a \vee b}$ az $a \vee b$ -t tartalmazó archimedeszi komponens.

Bizonyítás. $a \vee b \cong a$, ezért $A_{a \vee b} \supseteq A_a$, hasonlóan $A_{a \vee b} \supseteq A_b$. Ha egy A archimedeszi komponensre $A \supseteq A_a$ és $A \supseteq A_b$, akkor bármely $c \in A$ -hoz található olyan α és β , $\alpha \neq \nu$ és $\beta \neq \nu$, hogy $\alpha \circ c \cong a$ és $\beta \circ c \cong b$. Ekkor azonban $(\alpha \vee \beta) \circ c \cong a \vee b$, azaz $c \supseteq a \vee b$, így $A \supseteq A_{a \vee b}$.

3.11. LEMMA. Ha az E minimax tér disztributív háló, akkor tartói \vee -félhálót alkotnak; $a \in T_a$ és $b \in T_b$ esetén $T_a \vee T_b = T_{a \vee b}$, ahol $T_{a \vee b}$ az $a \vee b$ -t tartalmazó tartó.

Bizonyítás. Ha $(a \vee b) \perp x$, akkor $a \perp x$ és $b \perp x$, így $T_{a \vee b} \supseteq T_a$ és $T_{a \vee b} \supseteq T_b$. Ha egy T tartóra $T \supseteq T_a$ és $T \supseteq T_b$, akkor bármely $c \in T$ -re $c \perp x$ maga után vonja, hogy $a \perp x$ és $b \perp x$. Háló esetén ez egyenértékű avval, hogy $c \wedge x = 0$ esetén $a \wedge x = 0$ és $b \wedge x = 0$. Ekkor azonban a disztributivitás miatt $0 = (a \wedge x) \vee (b \wedge x) = (a \vee b) \wedge x$, következésképp $c \supseteq a \vee b$, azaz $T \supseteq T_{a \vee b}$.

3.12. LEMMA. Ha E minimax tér, akkor archimedeszi komponensei \wedge -félhálót alkotnak; $a \in A_a$ és $b \in A_b$ esetén $A_a \wedge A_b = A_{a \vee b}$, ahol $A_{a \wedge b}$ az $a \wedge b$ -t tartalmazó archimedeszi komponens.

Bizonyítás. $a \wedge b \equiv a$, ezért $A_{a \wedge b} \lesssim A_a$, hasonlóan $A_{a \wedge b} \lesssim A_b$. Ha egy A archimedeszi komponensre $A \lesssim A_a$ és $A \lesssim A_b$, akkor bármely $c \in A$ -hoz található olyan α és β , $\alpha \neq \nu$ és $\beta \neq \nu$, hogy $c \equiv \alpha \circ a$ és $c \equiv \beta \circ b$. Ekkor azonban $c \equiv \alpha \circ a \wedge \beta \circ b \equiv (\alpha \vee \beta) \circ (a \wedge b)$, így $A \lesssim A_{a \wedge b}$.

3.13. LEMMA. Ha E minimax tér, akkor tartói \wedge -félhálót alkotnak; $a \in T_a$ és $b \in T_b$ esetén $T_a \wedge T_b = T_{a \wedge b}$, ahol $T_{a \wedge b}$ az $a \wedge b$ -t tartalmazó tartó.

Bizonyítás. Ha $a \wedge x = 0$, akkor $(a \wedge b) \wedge x = 0$, így $T_{a \wedge b} \gtrsim T_a$; hasonlóan $T_{a \wedge b} \gtrsim T_b$. Ha egy T tartóra $T \gtrsim T_a$ és $T \gtrsim T_b$, akkor bármely $c \in T$ -re $c \perp x$, ha $a \perp x$ vagy $b \perp x$. $(a \wedge b) \wedge x$, azaz $a \wedge b \wedge x = 0$ esetén ezért $c \wedge b \wedge x = 0$, amiből — az előzőhöz hasonlóan — $c \wedge c \wedge x = 0$ következik. Megmutattuk, hogy $T \gtrsim T_{a \wedge b}$.

E négy lemma úgy értelmezhető, hogy a megfelelő feltételek teljesülése esetén a tartó- és az archimedeszi komponens képzés a \vee és a \wedge műveletre nézve kongruencia osztályozás.

Befejezésül megmutatjuk, hogy minimax térben mindkét osztályozás egység-eleme szűrő.

3.14. LEMMA. Ha E minimax tér, akkor szűk magja szűrő.

Bizonyítás. Ha e és f erős egység, akkor bármely $x \in E$ -hez van olyan λ'_x és λ''_x , $\lambda'_x \neq \nu$ és $\lambda''_x \neq \nu$, hogy $\lambda'_x \circ e f \equiv x$ és $\lambda''_x \circ f \equiv x$. Ha $g \equiv e$, akkor $\lambda'_x \circ g \equiv x$, azaz g is erős egység. Ha $g = e \wedge f$, akkor $x \equiv \lambda'_x \circ e \wedge \lambda''_x \circ f = (\lambda'_x \vee \lambda''_x) \circ (e \wedge f)$, azaz g ekkor is erős egység.

3.15. LEMMA. Ha E minimax tér, akkor tág magja szűrő.

Bizonyítás. Ha e és f gyenge egység, akkor bármely $x \in E$ -re $x \wedge e \neq 0$ és $x \wedge f \neq 0$. Ha $g \equiv e$, akkor $x \wedge g \neq 0$, azaz g is gyenge egység. Ha $g = e \wedge f$, akkor $x \wedge e \neq 0$ miatt $(x \wedge e) \wedge f \neq 0$, azaz g ismét gyenge egység.

4. Extremális előjelek

S a rajta értelmezett \vee és \circ művelettel számos a gyűrűkkel közös tulajdonsággal rendelkezik. Alapvető eltérés, hogy a \vee művelettel kapcsolatban nem érvényes — sőt, eleve értelmetlen — az egyszerűsítési szabály, nem lehet inverzről beszélni. Ennek ellenére a későbbiek szempontjából előnyös S -et — legalább lineárisan rendezett esetben — beágyazni egy olyan algebrai struktúrába, mely tartalmazza elemei mellett azok inverz jellegű párját is. A befogadó struktúra S -en kívüli (pontosabban az S -sel izomorf részén kívüli) elemeinek egyelőre csak kisegítő szerepet szánunk, eszközök lesznek különféle összefüggések kimutatásakor.

Azt az utat követjük, amelyen például a nemnegatív valós számoktól el lehet jutni a valós számokhoz: párokat képezünk, definiáljuk a párok közötti műveleteket, majd kongruencia osztályokat határozunk meg úgy, hogy a faktorstruktúra tartalmazza az eredeti struktúra egy monomorf képét.

Teljesüljön S -re a 1—10. axióma, a 8. az erősebb $\bar{8}$ formában. Legyen S -nek maximális és minimális (v és μ) eleme.

$$S^2 = \{a; a = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_i \in S \quad i = 1, 2\}$$

Értelmezzük S^2 -n a $+$ és a $*$ műveletet:

Legyen $a, b, c, d \in S^2$; $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, $b = (\beta_1, \beta_2)$, $c = (\gamma_1, \gamma_2)$, $d = (\delta_1, \delta_2)$. $a + b = c$, $\gamma_i = \alpha_i \vee \beta_i$, $i = 1, 2$. $a * b = d$, $\delta_1 = \alpha_1 \circ \beta_1 \vee \alpha_2 \circ \beta_2$, $\delta_2 = \alpha_1 \circ \beta_2 \vee \alpha_2 \circ \beta_1$.

Osztályozzuk S^2 elemeit a következők szerint:

$$S^2 = \bigcup_{\substack{\alpha \in S \\ \mu \neq \alpha \neq v}} (H_{\# \alpha} \cup H_{+\alpha} \cup H_{-\alpha}) \cup H_{\mu} \cup H_{\nu},$$

ahol $H_{\# \alpha} = \{(\alpha, \alpha)\}$, $H_{+\alpha} = \{(\alpha, \beta); \beta < \alpha\}$, $H_{-\alpha} = \{(\beta, \alpha); \beta < \alpha\}$, $H_{\mu} = \{(\mu, \mu)\}$, $H_{\nu} = \{(\alpha, \beta); \alpha \vee \beta = v\}$.

A lehetséges eseteket mindkét műveletre megvizsgálva kitűnik, hogy S^2 -nek ez a — nyilvánvalóan diszjunkt — felbontása mind $+$, mind $*$ szempontjából kongruencia osztályozás. Az egyes kongruencia osztályokat reprezentáljuk egy-egy elemükkel: $H_{+\alpha}$ -t (α, μ) -vel, $H_{-\alpha}$ -t (μ, α) -val és H_{ν} -t (v, v) -vel.

Jelölje az S^2 előbbi osztályozásának megfelelő faktorstruktúrát Φ , Φ elemeit pedig halmazként való korábbi meghatározásuk indexe:

$$\Phi = \{ \# \alpha, + \alpha, - \alpha \}_{\substack{\alpha \in S \\ \mu \neq \alpha \neq v}} \cup \{ \mu, \nu \}$$

A Φ -n indukált műveletekre vonatkozóan érvényesek a következő azonosságok: $a, b, c \in \Phi$ esetén

$$\begin{aligned} a + b &= b + a & a * b &= b * a & (a + b) * c &= (a * c) + (b * c) \\ a + (b + c) &= (a + b) + c & a * (b * c) &= (a * b) * c & a * (b + c) &= (a * b) + (a * c) \\ a + a &= a \end{aligned}$$

A $+$ félhálóművelet; az általa indukált részbenrendezés szerint ($a \leq b$, ha $a + b = b$) $+\alpha$ és $-\alpha$ nem összehasonlítható, $+\alpha < \# \alpha$, $-\alpha < \# \alpha$, egyébként a $+$, $-$ és $\#$ jel nem változtatja az S -beli részbenrendezést.

A Φ faktorstruktúra három részre bontható:

$$\Phi = P \cup N \cup O,$$

ahol $P = \{+\alpha; \alpha \in S, \mu \neq \alpha \neq v\}$, $N = \{-\alpha; \alpha \in S, \mu \neq \alpha \neq v\}$,

$$O = \{\# \alpha; \alpha \in S, \mu \neq \alpha \neq v\} \cup \{\mu, \nu\}.$$

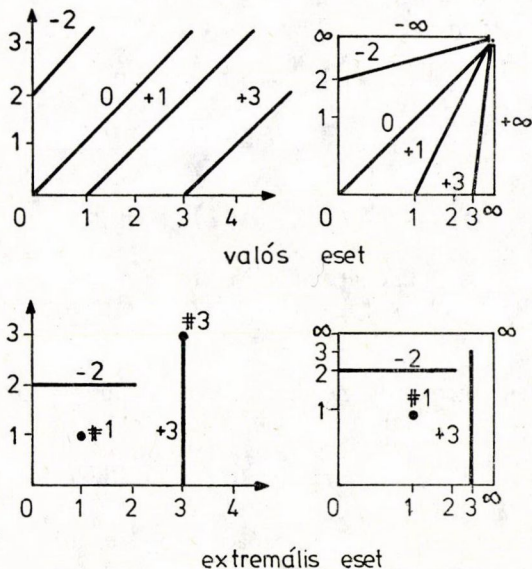
P és O mindkét műveletre nézve zárt és izomorf $S - \{\mu, \nu\}$, illetve S -sel (az izomorfizmus a $+$, ill. a $\#$ jel elhagyása).

4.1. DEFINÍCIÓ. P elemeit pozitív, N elemeit negatív, O elemeit neutrális (extremális) számoknak nevezzük; a $+$, a $-$ és a $\#$ jel Φ elemének az előjele (μ és ν előjele kiíratlanul is $\#$ -nak számít, a többi szám előjel nélkül $+$ előjelűnek értendő).

Az elnevezések jogosságát indokolja a $+$ és a $*$ művelet előjelszabálya, mely pontosan megegyezik a valós számok összeadásának és szorzásának előjelszabályá-

val. A valós nulla szerepét az extrémális számok körében a neutrális elemek O halmaza játssza.

A nemnegatív valós számpároknak a negatívak bevezetése érdekében történő faktorizálását hasonlítja össze S -nek Φ -be való beágyazásával a 3. ábra.



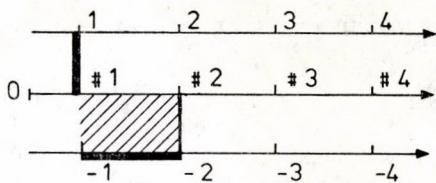
3. ábra

A negatív és a neutrális számok segítségével S két (v -től különböző) elemének egyenlősége egyenértékű avval, hogy $+$, illetve $-$ előjellel vett Φ -beli megfelelőik összege $\#$ előjelű. Lehetővé válik előjelhez kötött fogalmak átvitele a valós terekből az extrémális terekbe.

Φ \vee -félháló a $+$ művelettel és $*$ kielégíti a \circ -rel szemben támasztott követelményeket; a továbbiakban inkább a \vee és a \circ műveleti jelet fogjuk használni kiterjesztésük helyett is.

Φ ábrázolására a számegyenes valós S esetén is alkalmatlan a háromféle előjel miatt. Ha lemondanánk O elemeinek az ábrázolásáról (μ -t kivéve), akkor is kényelmetlen lenne a számegyenes használata,

mert a szakaszok képe nem volna összefüggő, ha végpontjaik különböző előjelűek (pl. $\bar{1}, -2 = \{1, \#1\} \cup (-1, -2]$). Kezelve lehetnek tűnik a következő megoldás: P -t és N -t ábrázolja egy-egy nyílt párhuzamos félsáv-pár, O -t pedig közös záróvonaluk (zárt félegyenes). A három számegyenes léptéke egyezzen meg. A 4. ábrába berajzoltuk az $\bar{1}, -2$ szakaszt:



4. ábra

Következő lépésünk az extrémális

komplex számok bevezetése (az *Euler-féle alak* megfelelőjének létrehozása). Teljesüljön S -re a 28. axióma is.

Legyen $\Omega = \{r; r \text{ valós szám, } 0 \leq r < 2\pi\}$.

Az extrémális komplex számok halmaza:

$$\Psi = \{(\varphi, r); \varphi \in P, r \in \Omega\} \cup \{(\varphi, r); \varphi \in S, r = \#\}$$

Műveletek Ψ -n: $a, b, c \in \Psi$, k természetes szám; $a = (\varphi_a, r_a)$, $b = (\varphi_b, r_b)$, $c = (\varphi_c, r_c)$;

$$a + b = c \quad \varphi_c = \varphi_a \vee \varphi_b, \quad r_c = \begin{cases} \#, & \text{ha } \varphi_a = \varphi_b, \text{ de } r_a \neq r_b \text{ vagy} \\ & r_a = r_b = \# \\ r_a, & \text{ha } \varphi_a > \varphi_b \end{cases}$$

$$a * b = c \quad \varphi_c = \varphi_a \circ \varphi_b, \quad r_c = \begin{cases} \#, & \text{ha } r_a = \# \text{ vagy } r_b \neq \# \\ r_a + r_b \pmod{2\pi}, & \text{ha } r_a \neq \# \text{ és } r_b = \# \end{cases}$$

$$a^k = c \quad \varphi_c = \varphi_a^k, \quad r_c = \begin{cases} \#, & \text{ha } r_a = \# \\ kr_a \pmod{2\pi}, & \text{ha } r_a \neq \# \end{cases}$$

$$\sqrt[k]{a} = c \quad \varphi_c = \sqrt[k]{\varphi_a}, \quad r_c = \begin{cases} \#, & \text{ha } r_a = \# \\ \frac{1}{k} r_a, & \text{ha } r_a \neq \# \end{cases}$$

A $(\varphi, 0)$ alakú elemek halmaza nyilvánvalóan izomorf P -vel, a $(\varphi, 0)$, (φ, π) és $(\varphi, \#)$ elemek együtt izomorfak Φ -vel.

Az extrémális komplex számok ábrázolásának kézenfekvő módja a *Riemann-számgómb* kiegészítése a neutrális számoknak megfelelő, a 0-t a ∞ -nel összekötő tengellyel.

Az extrémális komplex szám fogalmát egyelőre nem használjuk fel, ezért alaposabb vizsgálatába nem bocsátkozunk bele.

5. Az extrémális tér metrikája

Rátérünk az extrémális tér geometriai szerkezetének további vizsgálatára. Metrikát definiálunk bizonyos terekre (vö. [4]), majd ennek felhasználásával bebizonyítjuk, hogy a kompakt konvex halmazok síkkal szétválaszthatók.

5.1. Legyen E maximális tér S felett, teljesüljenek az 1–26. és 29., 30. axiómák; az 5., 8. és 9. az erősebb 5., 8. és 9. formában.

Bevezetünk E minden A archimedeszi komponensén egy kétváltozós S -beli értékészletű δ függvényt:

5.1. DEFINÍCIÓ. Ha A archimedeszi komponens E -ben és $A \neq \{0\}$, $A \neq \{\infty\}$, akkor $\delta(x, y) = \bigwedge \{\delta; \delta \in S, x \leq \delta \circ y \text{ és } y \leq \delta \circ x\}$; $A = \{0\}$ és $A = \{\infty\}$ esetén (triviális eset) $\delta(0, 0) = \delta(\infty, \infty) = \varepsilon$.

Az archimedeszi komponens definíciójából következik, hogy a $\delta(x, y)$ -t a nem triviális esetben meghatározó halmaz felírásában szereplő egyenlőtlenségek mindegyike ν -tól különböző δ -val is kielégíthető. A nagyobb (nem kisebb) érték mindkét

egyenlőtlenséget kielégíti, azaz a halmaz nem üres és van ν -tól különböző eleme. ε -nál kisebb eleme viszont nincs, mert ha $\delta < \varepsilon$ eleme volna, akkor $x \cong \delta \circ y < y \cong \delta \circ x < x$ lenne, ami lehetetlen. 2. i) alapján $\delta(x, y)$ a nem triviális esetben is mindig értelmes; a 30. axióma miatt pedig maga is eleme annak a halmaznak, melynek infimumaként definiáltuk $(x \cong \delta(x, y) \circ y)$.

5.1. TÉTEL. Legyen A E archimedeszi komponense és $x, y, z \in A$; ekkor

1. $\delta(x, y) = \delta(y, x)$,
2. $\delta(x, y) \cong \varepsilon$,
3. $\delta(x, y) = \varepsilon$ szükséges és elégséges feltétele $x = y$,
4. $\delta(x, y) \cong \delta(x, z) \circ \delta(z, y)$.

Bizonyítás. A triviális eset nem szorul bizonyításra.

1. a definíció szimmetriájából következnek.
- 2.-t a definíció jogosságának igazolásakor megmutattuk.
3. esetében az elégségség nyilvánvaló, mert ε eleme a $\delta(x, x)$ meghatározásában szereplő halmaznak, és ezért $\delta(x, x) \cong \varepsilon$; ha viszont $\delta(x, y) = \varepsilon$, akkor $x \cong \varepsilon \circ y = y \cong \varepsilon \circ x = x$, azaz $x = y$.
- 4-nél $z \cong \delta(x, z) \circ x$ és $y \cong \delta(z, y) \circ z$ miatt $y \cong \delta(x, z) \circ \delta(z, y) \circ x$, $z \cong \delta(z, y) \circ y$ és $x \cong \delta(z, x) \circ z$ miatt $x \cong \delta(z, y) \circ \delta(x, z) \circ y$, a két következmény pedig éppen azt mutatja, hogy $\delta(x, y)$ -ra valóban felső korlát $\delta(x, z) \circ \delta(z, y)$.

Az 5.1. tétel alapján megállapítható, hogy a δ függvény metrika jellegű tulajdonságokkal rendelkezik. (Ha S a valós számok additív csoportja, akkor δ metrika.) A következő lemmák a δ függvény további tulajdonságaival foglalkoznak.

5.1. LEMMA. $a, b, c, d \in A$; $a \cong b \cong c \cong d$ esetén $\delta(b, c) \cong \delta(a, d)$.

Bizonyítás. $c \cong d \cong \delta(a, d) \circ a \cong \delta(a, d) \circ b$.

5.2. LEMMA. $a, b \in A$ esetén $\delta(a, b) = \delta(a, a \vee b) \vee \delta(b, a \vee b)$.

Bizonyítás. A 3.10. lemma alapján $a \vee b \in A$, következésképp az egyenlőség jobb oldala értelmes ($A_a = A_b$ miatt $A_{a \vee b} = A_a \vee A_b = A_a$). Az archimedeszi komponens definíciója szerint van olyan λ , mellyel $b \cong \lambda \circ a$. Legyen $\delta = \varepsilon \vee \lambda$; ekkor $a \vee b \cong \delta \circ a$. Ez az összefüggés igaz minden olyan λ esetén, melyre $b \cong \lambda \circ a$. Ha egyidejűleg $a \cong \lambda \circ b$ is teljesül, akkor egyrészt $\delta = \lambda$, mert $\lambda \cong \varepsilon$, másrészt $a \vee b \cong \delta \circ b$ miatt $\lambda = \delta(a, b)$ -t véve látszik, hogy $\delta(a, a \vee b) \cong \delta(a, b)$ és $\delta(b, a \vee b) \cong \delta(a, b)$.

Ha $a \vee b \cong \delta \circ a$, akkor $b \cong \delta \circ a$; ha $a \vee b \cong \delta \circ b$, akkor $a \cong \delta \circ b$; a két állítás együttese alapján pedig $\delta(a, b) \cong \delta(a, a \vee b) \vee \delta(b, a \vee b)$. Az utóbbi egyenlőtlenség bal oldala a jobb oldal mindkét tagjának felső korlátja (előbb mutattuk meg), ezért a két oldal egyenlő.

5.3. LEMMA. $a, b, c, d \in A$ esetén $\delta(a \vee b, c \vee d) \cong \delta(a, c) \vee \delta(b, d)$.

Bizonyítás. Legyen $\delta = \delta(a, c) \vee \delta(b, d)$. Ekkor $a \cong \delta \circ c$ és $b \cong \delta \circ d$, $c \cong \delta \circ a$ és $d \cong \delta \circ b$. Az első két egyenlőtlenségből $a \vee b \cong \delta \circ (c \vee d)$, a második kettőből pedig $c \vee d \cong \delta \circ (a \vee b)$ következik.

5.4. LEMMA. $a, b \in A$ és $\alpha \in S$ esetén $\delta(\alpha \circ a, \alpha \circ b) \cong \delta(a, b)$.

Bizonyítás. Ha $a \cong \delta \circ b$, akkor $\alpha \circ a \cong \delta \circ \alpha \circ b$.

Ha S csoport, akkor a két oldal nyilván egyenlő.

5.2. DEFINÍCIÓ. I tetszőleges indexhalmaz, E_i minden $i \in I$ -re extrémális tér a közös S fölött. *Descartes-szorzatunk* $E = \prod_{i \in I} E_i$ szintén extrémális tér S felett, ha a műveleteket komponensenként értelmezzük: $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$, $\alpha \in S$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$, $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in I}$, $a_i, b_i \in E_i$.

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = (a_i \vee b_i)_{i \in I} \quad \alpha \circ \mathbf{a} = (\alpha \circ a_i)_{i \in I}$$

Ha I véges, akkor a tényező terek archimedeszi komponenseinek szorzata szintén archimedeszi komponens a szorzat térben a (definíció szerint szükséges szorzók a tényező komponensekben megfelelő szorzókkal megadhatók). Ha I nem véges, akkor könnyű ellenpéldát konstruálni (v -höz torlódó szorzókkal).

A szorzattér archimedeszi komponenseinek a tényező terekre eső vetületei mindig az utóbbiak egyetlen archimedeszi komponense tartalmazza (a kívánt szorzó lehet ugyanaz, mint a szorzattérben).

5.5. LEMMA. I tetszőleges indexhalmaz, $E = \prod_{i \in I} E_i$ S feletti maximális terek szorzattere. Ha A_i archimedeszi komponens E_i -ben minden $i \in I$ -re és $A = \prod_{i \in I} A_i$ archimedeszi komponens E -ben, akkor $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ esetén $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bigvee_{i \in I} \delta(a_i, b_i)$.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{a} \cong \delta \circ \mathbf{b}$, akkor $a_i \cong \delta \circ b_i$; ha $\mathbf{b} \cong \delta \circ \mathbf{a}$, akkor $b_i \cong \delta \circ a_i$ és ha egyszerre teljesülnek, akkor leolvasható, hogy minden $i \in I$ -re $\delta(a_i, b_i) \cong \delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Ellenkezőleg: $a_i \cong \delta(a_i, b_i) \circ b_i \cong \bigvee_{j \in I} \delta(a_j, b_j) \circ b_i$ és hasonlóan $b_i \cong \bigvee_{j \in I} \delta(a_j, b_j) \circ a_i$, azaz $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cong \bigvee_{i \in I} \delta(a_i, b_i)$.

Tegyük fel, hogy S -en (elegendő $\{\alpha; \alpha \in S, \alpha \cong \varepsilon\}$ -on) értelmezett egy g valós függvény a következő tulajdonságokkal: I. $g(\varepsilon) = 0$. II. $g(\alpha) < g(\beta)$, ha $\varepsilon \cong \alpha < \beta \cong v$. III. $g(\alpha \circ \beta) \cong g(\alpha) + g(\beta)$. Megengedjük a $g(v) = \infty$ értéket is.

5.2. TÉTEL. Az E maximális tét A archimedeszi komponensén $\varrho(x, y) = g(\delta(x, y))$ metrika.

Bizonyítás. g tulajdonságai alapján az 5.1. tételből következik.

Szorzattér esetén — az 5.5. lemma alapján — a távolság a tényezőkön mért vetületi távolságok suprémuma. Ha E a valós sorozatoknak a valós számok additív csoportja feletti tere, akkor $g(\alpha) = \alpha$ esetén az l_∞ normát kapjuk.

5.2. Folytatjuk metrikával kapcsolatos vizsgálatainkat. Tegyük fel, hogy E maximális tér S felett és mindkettő be van ágyazva egy F , illetve T halmazba, melyekre ugyancsak teljesül, hogy F maximális tér T felett. Tegyük fel továbbá, hogy E -t teljes egészében tartalmazza F egy archimedeszi komponense, S pedig egybesik T egységénél nem kisebb elemeivel. A \vee művelet a befogadó térben legyen a beágyazotté-
nak a kiterjesztése; a \circ -nek megfelelő műveletet a befogadó térben jelölje \oplus . T -nek a \oplus művelethez tartozó egységeleme μ .

Mindkét térben teljesüljön az 1—26. és 29—30. axióma, a két tér együttesében pedig a 31—33. axióma is; az 5., 8. és 9. az erősebb $\bar{5}$., $\bar{8}$., illetve $\bar{9}$. formában. Mint 2. w)-ben bizonyítottuk, ekkor $\bar{12}$. is teljesül.

A háromműveletes S struktúra vizsgálatába nem bonyolódunk bele, nem vizsgáljuk az S és E közötti két műveletből adódó általános következményeket sem. Felhívjuk azonban a figyelmet arra, hogy példáink többsége (2.3.-ban írtuk le leg-többjüket) rendelkezik olyan párral, hogy egyikük az $E-S$, másikuk az $F-T$

szerepét játszhatja; a párok általában izomorfak is: $E-S$ esetében nemnegatív számokból épül fel a tér szorzás művelettel, $F-T$ esetében nincs előjel korlátozás és összeadás a \circ művelet (a pár együttes vizsgálatakor \oplus jelöli).

Az elkövetkezőkben az F téren (az E -t tartalmazó archimedeszi komponensen) definiált ϱ metrikával (5.1.) vizsgáljuk az E teret. Feltesszük, hogy g eleget tesz a következőknek:

- I. $g(\mu) = 0$.
- II. $g(\alpha) < g(\beta)$, ha $\mu \leq \alpha < \beta \leq \nu$.
- III. $g(\alpha \oplus \beta) \leq g(\alpha) + g(\beta)$.
- IV. $g(\alpha \circ \beta) \leq g(\alpha)g(\beta)$.
- V. $g(\varepsilon) = 1$.
- VI. $g(\bigwedge_{i \in I} \alpha_i) = \bigwedge_{i \in I} g(\alpha_i)$, ahol I tetszőleges indexhalmaz.

(Az első három követelmény az 5.1.-ben szereplők átfogalmazása, a további három új; változatlanul megengedjük $g(\nu) = \infty - t$.)

5.6. LEMMA. $x, y \in E$, $\lambda \in S$ esetén $\varrho(\lambda \circ x, \lambda \circ y) \leq g(\lambda) \cdot \varrho(x, y)$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda \circ x, \lambda \circ y) &= g(\wedge \{\delta; \lambda \circ x \leq \delta \oplus \lambda \circ y, \lambda \circ y \leq \delta \oplus \lambda \circ x\}) \leq \\ &\leq g(\wedge \{\lambda \circ \gamma; \lambda \circ x \leq \lambda \circ \gamma \oplus \lambda \circ y, \lambda \circ y \leq \lambda \circ \gamma \oplus \lambda \circ x\}) = \\ &= g(\wedge \{\lambda \circ \gamma; \lambda \circ x \leq \lambda \circ (\gamma \oplus y), \lambda \circ y \leq \lambda \circ (\gamma \oplus x)\}) \leq \\ &\leq g(\wedge \{\lambda \circ \gamma; x \leq \gamma \oplus y, y \leq \gamma \oplus x\}) = \\ &= g(\lambda \circ \delta(x, y)) \leq g(\lambda) \cdot \varrho(x, y). \end{aligned}$$

Az első és a harmadik egyenlőség ϱ definíciójából, a második pedig a 31. axiómából következik; az első két egyenlőtlenség azért igaz, mert a halmaz szűkül (nem bővül), a harmadik pedig a g -re vonatkozó IV. feltétel miatt.

A következő lemmával azt igazoljuk, hogy ha két konvex halmaz felveszi távolságát, akkor konvex részhalmazán veszi fel.

5.7. LEMMA. Legyen $Q, R \subset E$ és $\varrho(q, r) \leq \varrho$, ha $q \in Q$ és $r \in R$. Ha valamely $q_1, q_2 \in Q$, $r_1, r_2 \in R$ -re $\varrho(q_1, r_1) = \varrho(q_2, r_2) = \varrho$ és $\alpha \vee \beta = \varepsilon$, akkor

$$\varrho(\alpha \circ q_1 \vee \beta \circ q_2, \alpha \circ r_1 \vee \beta \circ r_2) = \varrho.$$

Bizonyítás. Az 5.6. és az 5.3. lemma alapján

$$\begin{aligned} \varrho &\leq \varrho(\alpha \circ q_1 \vee \beta \circ q_2, \alpha \circ r_1 \vee \beta \circ r_2) \leq \varrho(\alpha \circ q_1, \alpha \circ r_1) \vee \varrho(\beta \circ q_2, \beta \circ r_2) \leq \\ &\leq \varrho(q_1, r_1) \vee \varrho(q_2, r_2) = \varrho. \end{aligned}$$

A g -re vonatkozó feltevések lehetővé teszik, hogy tetszőlegesen előírt pozitív korlátnál kisebb távolságokat határozhassunk meg: 2. u) szerint $\mu = \wedge \{\alpha; \alpha > \mu\}$, $0 = g(\mu) = \wedge \{g(\alpha); \alpha > \mu\}$ és $\alpha > \mu$ esetén $g(\alpha) > 0$.

Ha $E = S$, akkor a 33. axióma alapján minden ν -től különböző α -hoz van olyan $\gamma > \alpha$ és $\alpha \neq \mu$ esetén van olyan $\beta < \alpha$, hogy tetszőleges — előre megadott — pozitív r -re $\varrho(\alpha, \gamma) < r$ és $\varrho(\alpha, \beta) < r$. (Az előző bekezdés alapján van olyan μ -től

különböző δ , melyre $g(\delta) < r$; válasszuk β -t az axióma szerint, $\gamma = \beta \oplus \delta$, illetve δ , ha $\alpha = \mu$.)

5.8. LEMMA. A \vee és a \circ művelet folytonos $S - \{v\}$ -n.

Bizonyítás. $\varrho(\alpha \vee \xi, \alpha \vee \eta) \leq \varrho(\xi, \eta)$, azaz a függvényértékek kevésbé térnek el, mint az argumentumok (egyenletesen folytonos). $\varrho(\alpha \circ \xi, \alpha \circ \eta) \leq g(\alpha) \cdot \varrho(\xi, \eta)$, azaz ha $\varrho(\xi, \eta) < \frac{1}{n \cdot g(\alpha)}$, akkor a függvényértékek eltérése kisebb, mint $\frac{1}{n}$ (ha $g(\alpha) = 0$, akkor 0 a bal oldal).

5.9. LEMMA. Ha E lineárisan rendezett, akkor kompakt részalmazai tartalmazzák suprémumukat.

Bizonyítás. Legyen H kompakt és $h = \vee H$. Megmutatjuk, hogy H tartalmaz h -hoz tartó sorozatot: $H \cap \left\{ a; a \in E, \varrho(a, h) < \frac{1}{n} \right\} \neq \emptyset$, mert ha üres volna, akkor véve $\lambda_n \neq \mu$, $g(\lambda_n) < \frac{1}{n}$ -t (g tulajdonságai miatt ilyen λ_n van minden n -re) $H \cap \{ a; a \in E, \delta(a, h) \leq \lambda_n \} = \emptyset$ lenne, $\lambda_n \oplus a < h$ volna minden $a \in H$ -ra, de ebből $\lambda_n \oplus h = \lambda_n \oplus \vee H \leq h$ következne, ami ellentmond $\lambda_n \neq \mu$ -nek (a 29. axióma miatt). A halmaz nem üres: válasszunk minden n -re a megfelelő halmazból egy-egy elemet úgy, hogy $a_n \leq a_{n+1}$ legyen (utólag is kijelölhető monoton nem csökkenő részsorozat); $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, H kompakt, ezért $a \in H$, így $a \leq h$. Ha $a < h$ lenne, akkor legyen $\lambda = \delta(a, h)$, azaz $h \leq \lambda \oplus a$; $\lambda_n < \lambda$ esetén $h > \lambda_n \oplus a$ volna — ellentmondás, mert a_n -t úgy választottuk, hogy $h \leq \lambda_n \oplus a_n \leq \lambda_n \oplus a$.

5.3. Következő célunk a konvex halmazok szétválasztási tételének bizonyítása $E = S^n$ alakú terekre. Az előző pontok metrikával kapcsolatos eredményeit közvetlenül nem használjuk fel; abból indulunk ki, hogy a tér rendelkezik olyan metrikával, amelyet a korábbiakban létrehoztunk. Segédeszközként igénybe vesszük a 4-ben kialakított előjel fogalmat.

S tegyen eleget az 1—12. axiómának, a 8. és 12-nek az erősebb $\bar{8}$., illetve $\bar{12}$. formában. Ágyazzuk be S -et $\bar{\Phi}$ -be (2.2.3); $E = S^n$ elégítse ki a 29. és 30. axiómát is. Az eddig felsoroltakon kívül legyen S -en egy ϱ metrika a következő tulajdonságokkal:

- I. $\alpha, \beta, \gamma \in S$, $\alpha < \beta < \gamma$ esetén $\varrho(\alpha, \beta) < \varrho(\alpha, \gamma)$, $\varrho(\beta, \gamma) < \varrho(\alpha, \gamma)$.
- II. $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \neq \mu$, $\alpha \neq \nu$, $\beta \neq \nu$ és $r > 0$ valós számhoz van olyan $\gamma, \delta \in S$, hogy $\gamma < \alpha$ és $\varrho(\alpha, \gamma) < r$, $\delta > \beta$ és $\varrho(\delta, \beta) < r$.
- III. $\alpha, \beta, \gamma \in S$, $\gamma < \varepsilon$ esetén $\varrho(\gamma \circ \alpha, \gamma \circ \beta) < \varrho(\alpha, \beta)$.
- IV. A \circ művelet folytonos.

Az E szorzat téren — ugyancsak ϱ -val jelölve — a komponensenkénti ϱ értékek maximuma szolgáltat metrikát.

5.10. LEMMA. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S$ esetén $\varrho(\alpha \vee \beta, \gamma \vee \delta) = \max \{ \varrho(\alpha, \gamma), \varrho(\beta, \delta) \}$.

Bizonyítás. $\alpha \leq \beta$, $\gamma \leq \delta$ esetén a bal oldal, $\varrho(\beta, \delta)$, szerepel a jobb oldalon. $\alpha \leq \beta$, $\gamma > \delta$ esetén, ha $\gamma \leq \beta$, akkor $\varrho(\beta, \gamma) \leq \varrho(\beta, \delta)$; ha $\gamma > \beta$, akkor $\varrho(\beta, \gamma) < \varrho(\alpha, \gamma)$.

Következmény. A \vee művelet egyenletesen folytonos (az 5.8. lemma \vee -re változtatlan).

Következmény. $a, b, c, d \in E$ esetén $\varrho(a \vee b, c \vee d) = \max \{ \varrho(a, c), \varrho(b, d) \}$.

Következmény. Igaz az 5.7. lemma (az 5.6. lemma helyett a ϱ -ra vonatkozó III. követelmény, az 5.3. lemma helyett pedig az 5.10. alkalmazható).

5.3. DEFINÍCIÓ. Síknak nevezzük E következő részhalmazát: $\left\{ x; \bigvee_{i=1}^n \alpha_i \circ \zeta_i - \alpha \in O \right\}$ ahol $x = (\zeta_i)_{i=1}^n; \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in P \cup N \cup \{ \mu \}$ állandó. A síkot definiáló halmaz leírásában szereplő kifejezés a sík egyenlete.

5.4. DEFINÍCIÓ. Félternek nevezzük E következő részhalmazát: $\left\{ x; \bigvee_{i=1}^n \alpha_i \circ \zeta_i - \alpha \in O \cup H \right\}$, ahol $H = P$ vagy $H = N$; a többi jelölés a sík definíciójában szereplő meghatározás szerint.

5.11. LEMMA. E síkjai konvex halmazok.

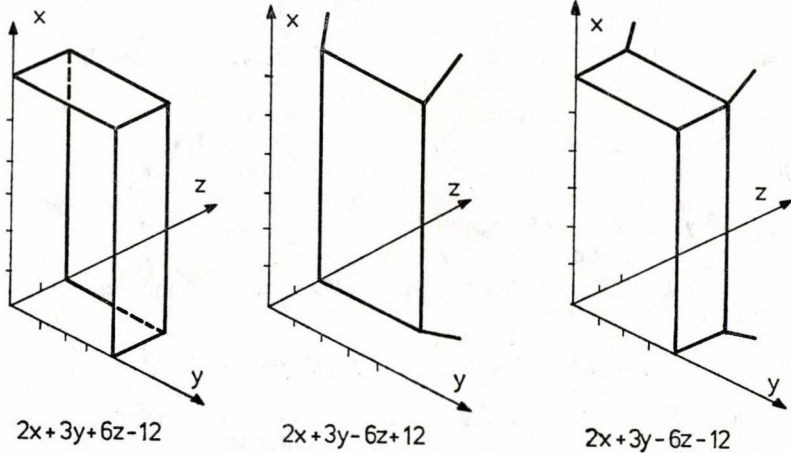
Bizonyítás. Legyen y, z az $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ paraméterekkel meghatározott síkban, $\beta, \gamma \in P \cup \{ \mu \}$, $\beta \vee \gamma = \varepsilon$. Legyen továbbá $\bar{\eta} = \bigvee_{i=1}^n \eta_i \circ \alpha_i$, $\bar{\zeta} = \bigvee_{i=1}^n \zeta_i \circ \alpha_i$; e jelölésekkel $\bar{\eta} - \alpha \in O$ és $\bar{\zeta} - \alpha \in O$. Megmutatjuk, hogy — pl. $\gamma = \varepsilon$ esetén — $x = \beta \circ y \vee \gamma \circ z \in O$: ha $\bar{\eta} \in O$, akkor $x = \beta \circ \bar{\eta} \vee (\bar{\zeta} - \alpha)$ mindkét tagja O -hoz tartozik, így x is; ha $\bar{\eta} \notin O$, akkor $\bar{\eta} = \alpha$, ezért $\beta \circ \bar{\eta} \cong \alpha \cong \bar{\zeta} - \alpha$ miatt $x = \bar{\zeta} - \alpha \in O$.

5.12. LEMMA. E félterei konvex halmazok.

Bizonyítás. Mint a síkokra. A 2. ábrán bemutatott szakaszok meghosszabbításai síkok (ebben az esetben szerencsésebb őket egyenesnek nevezni). A hozzájuk tartozó egyenesek egyenletei:

a: $y - 8$, b: $y - 4x$, c: $x - y + 6$, d: $x - 2y - 6$, e: $x + 2y - 4$, f: $x - 10$.

Az 5. ábra a nemnegatív valós számhármasoknak a nemnegatív valós számok multiplikatív félcsoportja feletti tere síkjait mutatja be:



5. ábra

5.3. TÉTEL. Ha Q és R diszjunkt kompakt konvex halmaz E -ben, akkor van olyan sík, melynek Q az egyik, R a másik féltérébe esik; a síknak nincs közös pontja se Q -val, se R -rel.

Bizonyítás. A $\varrho(x, y)$ metrika folytonos $Q \times R$ -en, ezért felveszi minimumát legalább egy pontpáron; értékét jelölje itt d . A halmazoknak azt a részhalmazát, melynek pontjai rendelkeznek a másik halmazban d távolságra levő párral, jelölje T_Q , illetve T_R . Az 5.7. lemma (l. az 5.10. lemma következményét) alapján T_Q és T_R konvex, $\varrho(x, y)$ folytonossága miatt pedig kompakt. Az $x = (\xi_i)_{i=1}^n$ -hez ξ_i -t rendelő függvény szintén folytonos; legyen egy-egy maximumhelye T_Q -n, illetve T_R -en q_i , illetve r_i , $i = 1, \dots, n$ -re. A konvexitás miatt $q = \bigvee q_i \in T_Q$ és $r = \bigvee r_i \in T_R$. Válasszunk egy olyan $w \in E$ pontot, melynek komponensei q és r megfelelő komponensei közé esnek: $q = (\alpha_i)_{i=1}^n$ és $r = (\beta_i)_{i=1}^n$ mellett $w = (\gamma_i)_{i=1}^n$ olyan, hogy $\gamma_i = \alpha_i$, ha $\alpha_i = \beta_i$, $\alpha_i < \gamma_i < \beta_i$, ha $\alpha_i < \beta_i$, $\beta_i < \gamma_i < \alpha_i$, ha $\beta_i < \alpha_i$. Legyen $W = \{x; x \leq w\}$.

Állítás. $\varrho(q, r) = d$.

Bizonyítás. Ha valamely $1 \leq i \leq n$ -re $\varrho(\alpha_i, \beta_i) > d$, és pl. $\beta_i < \alpha_i$, akkor vegyük azt az $\tilde{r} \in T_R$ pontot, melyre $\varrho(q, \tilde{r}) = d$: $\beta_i < \tilde{r}_i$ ellentmond r definíciójának.

Állítás. W nem tartalmazhat Q és R mindegyikével közös pontot.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: $y = (\eta_i)_{i=1}^n \in Q$ és $z = (\zeta_i)_{i=1}^n \in R$, $y \leq w$ és $z \leq w$. Megmutatjuk, hogy ekkor van a \bar{q} , \bar{y} és az \bar{r} , \bar{z} szakaszon egy-egy olyan pont, melyek távolsága kisebb, mint d .

Legyen

$$K = \{i; \varrho(\alpha_i, \beta_i) < d\},$$

$$J = \{i; \varrho(\alpha_i, \beta_i) = d, \alpha_i < \beta_i\},$$

$$I = \{i; \varrho(\alpha_i, \beta_i) = d, \alpha_i > \beta_i\}.$$

$\varrho(q, r) = d$ miatt $I \cup J \neq \emptyset$.

Vizsgáljuk meg a következő feltételeket:

1. $\alpha_i > \lambda \circ \alpha_i > \gamma_i$ minden $i \in I$ -re.
2. $\beta_i > \lambda \circ \beta_i > \gamma_i$ minden $i \in J$ -re.
3. $\varrho(\eta_i \vee \lambda \circ \alpha_i, \zeta_i \vee \lambda \circ \beta_i) < d$ minden $i \in K$ -ra.

Az első két csoport baloldali egyenlőtlenségei azt követelik, hogy $\lambda < \varepsilon$ legyen, a többi — összesen n darab — feltétel mindegyike egy-egy ε -nál kisebb alsó korlátot ír elő λ -ra (folytonos függvények; a feltétel $\lambda = \varepsilon$ -nál teljesül, így egy környezetében is). Legyen λ ε korlátok maximumánál nagyobb és ε -nál kisebb, azaz teljesüljön mindhárom csoport minden feltétele; ekkor $\varrho(y \vee \lambda \circ q, z \vee \lambda \circ r) < d$.

Az ellentmondást jelentő pontok létezésének megmutatásával igazoltuk állításunkat.

Állítás. Ha valamely k -ra ($1 \leq k \leq n$) $\gamma_k = \mu$, akkor minden $x \in Q \cup R$ $x = (\xi_i)_{i=1}^n$ -re $\xi_k = \mu$.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: legyen $x \in Q$, $\xi_k \neq \mu$. Az előző állítás bizonyításakor használt gondolatmenettel belátható, hogy létezik olyan λ , $\mu < \lambda \leq \varepsilon$, melyre $\varrho(\mu, \lambda \circ \xi_i) \leq d$, ha $\alpha_i = \mu$, $\lambda \circ \xi_i \leq \alpha_i$, ha $\alpha_i \neq \mu$.

Ekkor $q\forall\lambda\circ x\in Q$, $q\forall\lambda\circ x\cong q$ (mindig igaz) és $\alpha_k=\mu$ (mert $\gamma_k=\mu$) alapján egyrészt $\varrho(q\forall\lambda\circ x, r)=d$ ($\alpha_i=\mu$ és $\alpha_i\neq\mu$ esetén külön látszik), azaz $q\forall\lambda\circ x\in T_Q$, másrészt $q<q\forall\lambda\circ x$. Ez azonban ellentmond q definíciójának — az állítást igazoltuk.

Az első állítás alapján feltehető, hogy $R\cap W=\emptyset$.

Meghatározzuk a szétválasztó sík egyenletét: legyen

$I = \{i; \alpha_i < \gamma_i\}$, $J = \{i; \alpha_i \cong \gamma_i < \mu\}$, $K = \{i; \gamma_i = \mu\}$ ($R\cap W = \emptyset$ miatt $I \neq \emptyset$);

$$\pi_i = \begin{cases} \gamma_i^{-1}, & \text{ha } i \in I \\ -\gamma_i^{-1}, & \text{ha } i \in J \\ \mu, & \text{ha } i \in K; \end{cases} \quad x = (\xi_i)_{i=1}^n, \quad f(x) = \bigvee_{i=1}^n \pi_i \circ \xi_i - \varepsilon.$$

Állítás. $f(x) \in N$, ha $x \in Q$, $f(x) \in P$, ha $x \in R$.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét:

1. $x \in Q$ és van olyan $i \in I$, melyre $\xi_i \cong \gamma_i$ és $\xi_i \circ \pi_i \cong \xi_j \circ \pi_j$, ha $j \in J$. Legyen $\lambda = \bigwedge_{\substack{k \in I \cup J \\ \xi_k \neq \mu}} \gamma_k \circ \xi_k^{-1}$. Az indirekt feltétel miatt $\lambda \cong \varepsilon$, továbbá $\lambda \circ \xi_k \cong (\gamma_k \circ \xi_k^{-1}) \circ \xi_k = \gamma_k$, ha $k \in I \cup J$ és valamely $m \in I \cup J$ -re $\lambda \circ \xi_m = \gamma_m$. $q\forall\lambda\circ x \in Q$ és $q \leq q\forall\lambda\circ x \leq q\forall w$ miatt $d \cong \varrho(q\forall\lambda\circ x, r) \leq d$, azaz $q\forall\lambda\circ x \in T_Q$. $\alpha_m < \gamma_m$ ellentmond q definíciójának — az állítás egyik esetét igazoltuk.

2. $x \in R$, olyan, hogy minden $i \in I$ -re $\pi_i \circ \xi_i \cong \bigvee_{j \in J} \pi_j \circ \xi_j - \varepsilon$. $x \notin W$ miatt van olyan $m \in I \cup J$, melyre $\xi_m > \gamma_m$. Meghatározunk egy $\bar{w} = (\bar{\gamma})_{i=1}^n$ pontot. Legyen $\bar{w} = \sigma \circ w$, ahol $\sigma > \varepsilon$ és teljesülnek a következő feltételek: $\varrho(\bar{w}, q) \cong \varrho$ és $\xi_m > \bar{\gamma}_m$ (könnyű belátni, hogy ezek teljesíthetőek). Legyen $\lambda = \bigwedge_{\substack{k \in I \cup J \\ \xi_k \neq \mu}} \gamma_k \circ \xi_k^{-1} < \varepsilon$. Megismé-

telve az 1. eset gondolatmenetét azt kapjuk, hogy $r\forall\lambda\circ x \in T_R$ és $r\forall\lambda\circ x > r$, ami ellentmond r definíciójának; — az állítást igazoltuk.

Az utóbbi állítással a tételt is bebizonyítottuk.

6. Mátrixok

A kétműveletes algebrai struktúrák alapján felépített terekben definiálhatók a mátrixok és a mátrixműveletek. Célunk a [2] és [3], illetve [9]-ben felvetett és — eltérő módon — megoldott sajátérték feladat néhány kérdésének tárgyalása: bebizonyítjuk a *Hamilton—Cayley-tétel* extrémális algebrai megfelelőjét és a korábbiaknál hatékonyabb algoritmust adunk a sajátvektorok meghatározására.

6.1. Bevezetjük a mátrix, a polinom és a determináns fogalmát.

S legyen lineárisan rendezett és μ , illetve v -től eltekintve csoport, azaz elégítse ki az 1—12. ($\bar{8}$ és $\bar{12}$) axiómát; lehessen benne gyököt vonni, azaz elégítse ki a 28. axiómát is. Ágyazzuk be S -t — mint 4-ben — Φ -be: $P \cup N \bar{12}$. miatt csoport (az N -beli elemek inverze is N -beli).

6.1. DEFINÍCIÓ. $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ -t $m \times n$ -es mátrixnak nevezzük; $\alpha_{ij} \in \Phi$ az

i -edik sor j -edik eleme, α_i . az i -edik sor, α_j a j -edik oszlop; M_{mn} a Φ -n értelmezett $m \times n$ -es mátrixok halmaza. (Az előbbiek szerint $\alpha_i \in M_{1n}$, $\alpha_j \in M_{m1}$, $\Phi = M_{11}$). $\alpha \in \Phi$, $A = (\alpha_{ij}) \in M_{mn}$ esetén $\alpha \circ A = A \circ \alpha = (\beta_{ij}) \in M_{mn}$, ahol $\beta_{ij} = \alpha \circ \alpha_{ij}$; $A, B \in M_{mn}$, $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ esetén $A \vee B = (\gamma_{ij}) \in M_{mn}$, ahol $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} \vee \beta_{ij}$; $A = (\alpha_{ij}) \in M_{mn}$, $B = (\beta_{jk}) \in M_{nr}$ esetén $A \circ B = (\gamma_{ik}) \in M_{mr}$, ahol $\gamma_{ik} = \alpha_i \circ \beta_{.k} = \bigvee_{j=1}^n \alpha_{ij} \circ \beta_{jk}$.

A mátrixok közötti \vee művelet nyilvánvalóan kommutatív asszociatív, a \circ pedig általában nem kommutatív, de könnyű belátni, hogy asszociatív. Mindkét művelet örökli a skalár műveletek izotonitását.

6.2. DEFINÍCIÓ. A $\bigvee_{i=0}^n \alpha_i \circ \xi^i$ kifejezést, ahol $\alpha_i \in \Phi$, $i=0, \dots, n$ n -fokú polinomnak nevezzük; helyettesítési értéke a $\xi = \alpha \in \Phi$ helyen $\bigvee_{i=0}^n \alpha_i \circ \alpha^i$ ($\alpha^0 = \varepsilon$); α a polinom gyöke, ha az α pontban kapott helyettesítési érték neutrális; a polinom helyettesítési értéke az $A \in M_{mm}$ helyen $\bigvee_{i=0}^n \alpha_i \circ A^i$ (A^0 : főátlójában ε , máshol μ); A a polinom gyöke, ha behelyettesítve csak neutrális elemekből álló mátrixot kapunk.

Ha a polinom pozitív kitevőjű tagjai nem mind μ -k, akkor ν és az elég nagy neutrális számok mindig gyökök; igazán érdekesek a $P \cup N \cup \{\mu\}$ -be eső gyökök. Ilyen nincs mindig (pl. ha S a pozitív valós számok multiplikatív csoportja, akkor $\xi^2 + 1$ -nek csak neutrális gyökei vannak).

A polinomok szorzását a szokásos módon értelmezve a tényezők gyökei a szorzatnak is, és viszont: a szorzat gyöke gyöke legalább egy tényezőnek is. Ez — mint például a valós polinomok esetében is — azon múlik, hogy egy szorzat akkor és csak akkor neutrális, ha van neutrális tényezője. Nem minden polinomnak van azonban szorzat alakja; a $P \cup N \cup \{\mu\}$ -ben n gyökű n -fokú polinomnak sincs feltétlenül (a pozitív valós számok multiplikatív csoportjából képzett Φ -ben $\xi^2 - 4$ gyöke 2 és -2 , de $\xi^2 - 4 = (\xi - \alpha) \circ (\xi - \beta)$ semmilyen α, β párral sem teljesíthető: $(\xi - \alpha) \circ (\xi - \beta) = \xi^2 - (\alpha \vee \beta) \xi + \alpha \circ \beta$ és ha $\alpha \vee \beta = 0$, akkor $\alpha = \beta = 0$, $\alpha \circ \beta = 0$, nem pedig 4).

6.3. DEFINÍCIÓ. $A = (\alpha_{ij}) \in M_{nn}$ determinánsa

$$|A| = \bigvee_{\sigma \in \Sigma_n} (-\varepsilon)^{\text{inv}(\sigma)} \prod_{i=1}^n \alpha_{i, \sigma(i)}$$

ahol Σ_n az n -rendű permutációk halmaza, $\text{inv}(\sigma)$ a σ permutációban előforduló inverziók száma, $\sigma(i)$ pedig a σ permutáció i -edik eleme.

A mátrix m sorát és ugyanannyi oszlopát kijelölve, $0 \leq m \leq n$, a mindkét szempontból kiválasztott elemek determinánsa az eredetinek aldeterminánsa (minora); az egyik szempontból sem kiválasztott elemek determinánsa pedig $(-\varepsilon)^k$ -val szorozva (\circ), ahol k a kijelölt sorok és oszlopok indexeinek összege, az előbbi minor algebrai kiegészítője. (Az üres mátrix determinánsa $0!$ számú üres szorzatot tartalmaz, értéke ε .)

Az így definiált determinánsok valós megfelelőjükkal szoros analógiát mutatnak:

1. A determináns a mátrix bármelyik sorának vagy oszlopának homogén lineáris függvénye (szorzás: \circ , összeadás: \vee).

2. A transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredetivel.

3. A mátrix két sorának felcserélése determinánsát $-\varepsilon$ -szorosára változtatja.

4. A sorok és oszlopok egyidejű azonos permutálása a determináns értékét nem módosítja.

5. *Laplace-tétele*: a mátrix $1 \leq m \leq n-1$ sorának minden lehetséges m -rendű minorát algebrai kiegészítőjével szorozva és e szorzatokat összegezve a mátrix determinánsát kapjuk.

6. Ha a mátrix két sora megegyezik, akkor determinánsa neutrális.

7. *Binet—Cauchy-formula*: $A \in M_{mn}$, $B \in M_{nm}$, $m \leq n$ és $C = A \circ B$ esetén minden lehetséges módon választva $1, \dots, n$ -ből m indexet az A mátrix választott indexű oszlophoz tartozó determinánst szorozzuk (\circ) B ugyanolyan indexű sorainak determinánsával, a szorzatok összegeként (\vee) C determinánsát kapjuk — ha $|C| \notin O$ ($m=n$ esetén $|A| \circ |B| = |C|$, ha $|C| \notin O$).

A felsorolt tulajdonságok bizonyítására elegendő néhány megjegyzés lineáris algebrai analogonjokkal kapcsolatban. Az első öt tulajdonság bizonyítása csak a determináns definíciójára és a műveletek kommutatív, asszociatív és disztributív tulajdonságára támaszkodik (pl. 1—4. [11]-ben, 5. [5]-ben). A hatodik a harmadikból következik — érdemes figyelni arra, hogy a sorok egyezése miatt a determináns nem μ , hanem csak neutrális. A hetedik tulajdonság bizonyítására [11]-ben a szorzat mátrix determinánsának — a homogén lineáris tulajdonságon alapuló — összegként való felírásából induló, ellentétes előjelű, de egyező abszolút értékű tagok elhagyásával a kívánt szorzatösszegig jutó azonos átalakítás sorozat szolgál. Ha a szorzat mátrix determinánsa nem neutrális, akkor ugyanezek a tagok extrémális esetben is elhagyhatók, mert összegük neutrális.

A determináns fogalma lehetővé teszi az inverz mátrix egy definíciójának átvételét a lineáris algebraiból:

ha $|A| \notin O$, akkor legyen $A^{-1} = |A|^{-1} \circ \bar{A}^T$,

ahol \bar{A} az A mátrix elemeihez tartozó algebrai kiegészítők mátrixa. $(A^{-1} \circ A)_{ii} = (A \circ A^{-1})_{ii} = \varepsilon$; $(A^{-1} \circ A)_{ij}$, $(A \circ A^{-1})_{ij} \in O$, de az utóbbiak nem feltétlenül egyenlők.

Az inverz mátrixszal tovább nem foglalkozunk.

6.2. A következőkben a sajátérték problémát tárgyaljuk.

6.4. DEFINÍCIÓ. $A \in M_m$, $\lambda \in \Phi$, $x \in M_{n1}$ és $x \neq (\mu, \dots, \mu)^T$ esetén, ha $A \circ x = \lambda \circ x$, akkor λ az A mátrix sajátértéke, x pedig a λ sajátértékhez tartozó sajátvektora.

6.1. LEMMA. A közös sajátértékhez tartozó sajátvektorok tompa kúpot alkotnak.

Bizonyítás. $A \circ x = \lambda \circ x$ esetén $A \circ \alpha \circ x = \alpha \circ A \circ x = \alpha \circ \lambda \circ x = \lambda \circ \alpha \circ x$. $A \circ x = \lambda \circ x$ és $A \circ y = \lambda \circ y$ esetén $A \circ (x \vee y) = A \circ x \vee A \circ y = \lambda \circ x \vee \lambda \circ y = \lambda \circ (x \vee y)$.

A sajátérték probléma megoldását, arra az esetre, amikor A és x minden eleme továbbá $\lambda \in P \cup \{\mu\}$ -ben van, [2] és [3] alapján ismertetjük:

6.1. TÉTEL. Ha a \circ és a \vee művelet folytonos, akkor minden mátrixnak van sajátvektora.

Bizonyítás. [2] és [3]-ban (a *Brouwer-féle fixpont tétel* felhasználásával).

A sajátérték meghatározásának következő algoritmus — az előbbi tétel alapján — bizonyítottan sajátértékeket szolgáltat. Eredményeinek felhasználásával — mint később a megfelelő algoritmus megadásával a 6.1. tételtől függetlenül bizonyítjuk — mindig sajátvektorhoz jutunk, így a tételre valójában nincs szükségünk, csak a teljesség kedvéért említettük.

Jelölje G az n szögpontú teljes irányított gráf egyszerű körútjainak halmazát:

$$G =$$

$$= \{J; J = ((i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_1)) \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i_j \leq n, \quad i_j \neq i_m, \quad \text{ha } j \neq m\},$$

$J \in G$ éleinek számát pedig $h(J)$.

Legyen továbbá

$$\lambda(A) = \bigvee_{J \in G} \sqrt[h(J)]{\prod_{(i_m, i_{m+1}) \in J} a_{i_m i_{m+1}}}.$$

Az algoritmus:

I. $\lambda = \mu$ akkor és csak akkor lehetséges, ha A -nak van kizárólag μ -t tartalmazó oszlopa — az ilyen oszlopoknak megfelelő komponensek x -ben tetszőlegesen, a többiek μ -k.

II. Keressük a μ -tól különböző sajátértékeket:

1. Ha A -nak van kizárólag μ -t tartalmazó oszlopa, akkor az ilyen oszlopok indexeinek halmazát jelölje K , a többiekét L . A sajátérték egyenlet (a szokásos rész-mátrix jelöléssel):

$$A_{LL} \circ x_L = \lambda \circ x_L$$

$$A_{KL} \circ x_L = \lambda \circ x_K$$

azaz x_L az A_{LL} mátrix sajátvektora ugyanavval a sajátértékkel, mellyel x A -nak sajátvektora, x_K -t pedig a második sor egyértelműen meghatározza (minden lehetséges x_L -hez külön). Ebben az esetben a feladatot visszavezettük egy kisebb mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározására; ezt a lépést addig ismételjük, míg a csökkentett mátrixnak van csak μ -t tartalmazó oszlopa. Ha L végül üresnek adódik, akkor nincs a mátrixnak μ -tól különböző sajátértéke.

2. Ha A minden oszlopában van μ -tól különböző érték, akkor megvizsgáljuk, hogy x mely komponensei lehetnek μ -k: jelölje most K az ezekhez a komponensekhez tartozó indexek halmazát, L pedig ennek komplementerét. A sajátérték egyenlet:

$$A_{LL} \circ x_L = \lambda \circ x_L$$

$$A_{KL} \circ x_L = \mu$$

ahol μ minden komponense μ . Az így kapott egyenlet az $x_i \neq \mu, i \in L$ feltételekkel csak akkor oldható meg, ha A_{KL} minden komponense μ , ekkor viszont A_{LL} minden sajátértéke a hozzá tartozó sajátvektorokkal megoldást szolgáltat.

Ebben az esetben tehát particionáljuk A -t minden olyan módon, mely kizárólag μ elemekből álló A_{KL} rész-mátrixot eredményez; meghatározzuk az ilyen particionálások A_{LL} mátrixainak μ komponenset nem tartalmazó sajátvektoraihoz tartozó sajátértékét és az ilyen sajátvektorokat.

3. A_{LL} μ komponenset nem tartalmazó sajátvektoraihoz tartozó sajátértéke $\lambda(A_{LL})$ (6.2. tétel); a sajátvektorok meghatározásával 6.4.-ben foglalkozunk.

6.2. TÉTEL. Bármely A mátrix esetén $\lambda(A)$ sajátérték és ha van A -nak μ komponens nem tartalmazó sajátvektora, akkor minden ilyen sajátvektor ehhez a sajátértékhez tartozik.

Bizonyítás. Megtalálható [2] és [3]-ban.

Az ismertett algoritmussal kapcsolatban érdemes megemlíteni, hogy a II. 3. lépésben $\lambda(A_{LL}) \neq \mu$, mert az A mátrixnak nincs csak μ -t tartalmazó oszlopa (ha lenne, akkor nem térhetünk volna át a II. 1. lépésről II. 2.-re). Következtetésünket a 6.2. lemma felhasználásával igazoljuk.

6.2. LEMMA. Ha egy n szögpontú irányított gráfban nincs körút, akkor a gráfnak legalább egy csúcsába nem vezet él.

Bizonyítás. Induljunk el egy csúcsból egy oda befutó úton visszafelé. Ha minden csúcsba vezet él, akkor ezt az utat vég nélkül követhetjük; legkésőbb n lépés múlva valamelyik csúcsnak ismétlődnie kell. Az ismétlődő csúcs útunkon körutat jelöl ki — ellentmondás; kell lennie olyan csúcsnak, melybe nem vezet él.

Tekintsük azt az irányított gráfot, melyben a csúcsok indexhalmaza L és élei kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a μ -tól különböző a_{ij} , $i, j \in L$ mátrix-elemeknek. $\lambda(A_{LL}) = \mu$ akkor és csak akkor, ha a gráfban nincs körút; A_{LL} -nek akkor és csak akkor van kizárólag μ elemeket tartalmazó oszlopa, ha valamelyik csúcsba nem vezet él.

Ha az A és x elemei, valamint λ számára megengedett értékek körét v -vel bővítjük, az az eddigiek érvényességét nem befolyásolja, de nem feltétlenül fogadható el a csupa neutrális elemből álló sajátvektor. Ha A -nak vannak olyan oszlopai, melyek μ -tól különböző elemei minden sort lefednek, akkor x ezen oszlopokhoz tartozó komponenseit v -nek, a többit pedig tetszőlegesen választva a v sajátértékhez tartozó sajátvektort kapunk. Ha A előbb említett elemeinek egy része v , akkor elég x olyan indexű komponenseit v -nek választani, melyek v -t nem tartalmazó sorok fedéséhez kiválasztott oszlopnak felelnek meg; az így felszabaduló komponensek csak μ értéket nem kaphatnak.

Minőségileg más a helyzet, ha a megengedett értékek körét N -nel bővítjük. Negatív számból Φ -ben nem lehet páros kitevőjű gyököt vonni és $\lambda(A)$ neutrális lehet akkor is, ha A -nak nincs neutrális eleme. Az utóbbi tény az extrémális számok alapvető jellemvonásaiból törvényszerűen következik, az előbbi Φ helyett Ψ -t véve kiküszöbölhető lenne (ez azonban most nem célunk, mert — mint 4-ben írtuk — az általánosítás eredményeként adódó számfajtáknak egyelőre csak kisegítő szerepet szánunk).

6.3. Következő célunk a sajátérték, pontosabban a $\lambda(A)$ függvény értékének meghatározása. Mint 6.2.-ben láttuk, az előbbi a μ értékek A -beli elhelyezkedésének vizsgálatán alapuló kombinatorikus algoritmussal visszavezethető az utóbbira.

$\lambda(A)$ meghatározására [2]-ben a következő algoritmust találjuk:

Számoljuk ki A^i -t $i=1, \dots, n$ -re.

$$(A^i)_{jj} = \bigvee_{J \in G_{ij}(m_k, m_{k+1}) \in J} \prod a_{m_k, m_{k+1}}$$

ahol $G_{ij} = \{J; J \in G, h(J) = i, m_1 = j\}$, azaz $\bigvee_{i,j} \sqrt[i]{(A^i)_{jj}} = \lambda(A)$.

A számítás rendkívül egyszerű, de műveletigénye $O(n^4)$.

$\lambda(\mathbf{A})$ meghatározását [9] lineáris programozási feladat megoldására vezeti vissza (S a valós számok additív csoportja):

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \lambda + x_i - x_j \cong a_{ij} \end{aligned}$$

Ez a nyilvánvalóan hatékony megoldás biztosan javítható a lineáris programozási feladat jellegzetességeinek kihasználásával.

Befejezésül ismertetünk egy algoritmust, mely $\lambda(\mathbf{A})$ -t hozzárendelési feladatok véges sorozatának megoldásával határozza meg (S a valós számok additív csoportja).

6.3. LEMMA. Ha egy \mathbf{A} mátrix egyes elemeit növeljük, a többit pedig nem változtatjuk, akkor $\lambda(\mathbf{A})$ értéke nem csökken.

6.4. LEMMA. Ha G tartalmaz olyan körutat, melyhez $\lambda(\mathbf{A})$ képletében τ középérték tartozik, akkor a mátrix főátlójának minden elemét τ -ra módosítva $\lambda(\mathbf{A})$ nem nő.

6.5. LEMMA. Ha G tartalmaz olyan körutat, melyhez $\lambda(\mathbf{A})$ képletében a mátrix főátlója maximumánál nagyobb középérték tartozik, akkor a hozzárendelési feladatnak evvel a mátrixszal van olyan megoldása, melynek értéke nagyobb a főátlóban álló elemek összegénél.

A 6.3. és 6.4. igazsága teljesen nyilvánvaló; a 6.5. lemma szerint létező megoldás például az, mely a feltételben szereplő körútnak megfelelő mátrix-elemekből és a többi sor (és egyben oszlop) főátlóbeli elemeiből áll.

A három lemma alapján álló algoritmus:

1. Vesszük G -nek egy olyan elemét, melyhez a mátrix főátlójának maximumánál nem kisebb középérték tartozik.

2. Ellenőrizzük, nem $\lambda(\mathbf{A})$ -e a választott körúthoz tartozó középérték: erre az értékre növeljük a főátló minden elemét és megoldjuk a kapott mátrixhoz tartozó hozzárendelési feladatot; ha az optimum értéke a főátlóbeli elemek összege, akkor $\lambda(\mathbf{A})$ a középérték, végeztünk, egyébként 3. következik.

3. A 2-ben a hozzárendelési feladat megoldásaként kapott elemek indexeiből összeállítható G -beli körök közül kiválasztjuk a legnagyobb középértékűt, és evvel ismét 1. következik.

6.3. TÉTEL. Az ismertett algoritmus véges sok lépés után $\lambda(\mathbf{A})$ -t szolgáltatja.

Bizonyítás. A 6.3. és 6.4. lemma alapján az új mátrixhoz tartozó $\lambda(\mathbf{A})$ mindig azonos az előzőével. A főátló elemei mindig egy-egy G -beli körútnak megfelelő középértéket felvéve nőnek. G -nek véges sok eleme van, így az algoritmus is véges, ugyanakkor a 6.5. lemma alapján nem áll meg, míg a főátlóba nem a $\lambda(\mathbf{A})$ értéket írjuk.

Az ismertett algoritmus egy másik változata kétoldali közelítéssel tart $\lambda(\mathbf{A})$ -hoz:

1. Vesszük $\lambda(\mathbf{A})$ -nak egy alsó és egy felső korlátját.

2. Megvizsgáljuk, elég közel van-e a két korlát egymáshoz; ha igen, akkor készen vagyunk: számtani közepük jó becslés $\lambda(\mathbf{A})$ -ra; ha nem, akkor 3. következik.

3. Megvizsgáljuk, hogy a korlátok számtani közepe alsó vagy felső becslés-e $\lambda(\mathbf{A})$ -ra: a mátrix főátlóját e számtani közepre módosítjuk és megoldjuk a hozzárendelési feladatot; ha az optimum a főátló elemeinek összege, akkor felső becslés, ha nagyobb, akkor alsó becslés. Az utóbbi javítható, ha helyette a megoldásként

kapott elemek indexeiből összeállítható G -beli körök közül kiválasztjuk a legnagyobb középpértékűt. A megfelelő korlát módosítása után ismét 2. következik.

6.4. TÉTEL. Az utóbbi algoritmusban a felső korlátok sorozata tart $\lambda(A)$ -hoz, míg ugyanabban az alsó korlátok sorozata véges sok lépés után $\lambda(A)$ -n stabilizálódik.

Bizonyítás. Az algoritmussal kapott alsó becslések egy-egy G -beli kör középpértékei, nem léphetik át $\lambda(A)$ -t. A felső becslések a 6.5. lemma miatt nem csökkenhetnek $\lambda(A)$ alá. Távolságuk iterációként legalább feleződik, így mindkettő konvergál $\lambda(A)$ -hoz. Az alsó korlátok lehetséges értékeinek halmaza véges, ezért sorozatuk stabilizálódik.

Az utóbbi algoritmus iterációinak száma egy a kezdeti becslések távolságától és az előírt pontosságtól függő konstanssal becsülhető; ha feltételezzük, hogy ez nem függ a mátrix méretétől, akkor az elvégzendő műveletek számának rendje megegyezik a hozzárendelési feladatával: magyar módszer esetén $O(n)$ iteráció [7] és iterációnként $O(n^2)$, összesen $O(n^3)$ művelet.

6.4. Következik a mátrixok sajátvektorainak előállítása. Mint 6.2.-ben láttuk, ehhez elég algoritmust adni $\lambda(A) \neq \mu$ és μ komponens nélküli sajátvektorok esetére; csak ezzel foglalkozunk.

A továbbiakban feltesszük, hogy $\lambda(A) = \varepsilon$ (ha e feltétel A -ra nem teljesül, vehető helyette $\bar{A} = \lambda^{-1}(A) \circ A$, melynek sajátértékei A sajátértékeinek $\lambda^{-1}(A)$ -szorosai, de sajátvektorai ugyanazok).

Az összes sajátvektor meghatározására [2] a következő megoldást tartalmazza:

Ha $\lambda(A)$ csak egyetlen élből álló G -beli utak középpértéke, akkor elég nagy r esetén $A^{r+1} = A^r$; A^r oszlopai ekkor kifeszítik a sajátvektorok kúpját. Ha $\lambda(A)$ k -tényezős (G -beli elemnek megfelelő) szorzat középpértéke, akkor a sajátérték egyenletből $k-1$ sor és oszlop kiküszöbölhető; a kisebb feladat megoldása után a sajátvektor kiküszöböléskor elhagyott koordinátái az elhagyáskor rögzített arány alapján számolhatók. Alkalmazásához ismerni kell minden maximális középpértékű szorzatot.

[9] megoldása a következő:

Számoljuk ki $\Gamma(A) = A \vee A^2 \vee \dots \vee A^n = A \circ (EVA)^r$ -t, ahol $r \cong n-1$, egyébként tetszőleges, az $E \in M_m$ mátrix főátlójának minden eleme ε , többi eleme μ . $\Gamma(A)$ főátlójának bizonyos elemei ε -ok lesznek — az ezeket tartalmazó oszlopok kifeszítik az ε sajátértékhez tartozó sajátvektorok kúpját. Műveletigénye $O(n^3 \log_2 n)$.

A következőkben ismertetünk egy, csak kedvezőtlen esetben ugyanennyi műveletet igénylő algoritmust.

6.5. DEFINÍCIÓ. Az A mátrix kontúrindexeinek halmaza:

$$I = \left\{ i; \text{ van olyan } J \in G, (i, j) \in J, \sqrt[n(J)]{\prod_{(i_m, i_{m+1}) \in J} a_{i_m, i_{m+1}}} = \lambda(A) \right\}$$

6.6. DEFINÍCIÓ. Az A mátrixra teljesül a kontúrfeltétel, ha az n szögpontú irányított teljes gráf (i, j) éléhez α_{ij} -t rendelve minden i, j csúcspár kielégíti a következő két feltétel egyikét:

- i -ből j -be vezet olyan út, melynek egyik éléhez μ rendelve és kontúrindexnek megfelelő csúcson is áthalad;
- minden i -ből j -be vezető kört tartalmazó (nem egyszerű) út legalább egy éléhez μ van hozzárendelve.

6.5. TÉTEL. Ha az A mátrix főátlójában minden kontúrindexnek megfelelő helyen ε áll és teljesül rá a kontúrfeltétel, akkor van olyan r természetes szám, melyre $A^{r+1} = A^r$.

Bizonyítás. [2]-ben a tétel szigorúbb feltétellel van kimondva, de bizonyítása változtatás nélkül alkalmazható minden olyan mátrix-elemre, melyre a kontúrfeltétel az első követelményt kielégítve teljesül. Azok a mátrix-elemek, melyekre a kontúrfeltétel a második követelményt kielégítve teljesül, az elég magas hatványokban (n -től) mind μ -k; így rájuk is igaz a tétel állítása.

6.6. LEMMA [2]. Ha $A^{r+1} = A^r$, akkor A ε sajátértékhez tartozó sajátvektorainak kúpját A^r oszlopai kifeszítik.

Bizonyítás. A tétel feltétele oszloponként olvasva mutatja, hogy A^r oszlopai sajátvektorok; ha pedig $x = A \circ x$, akkor $x = A^r \circ x$.

6.7. LEMMA. Ha egy A mátrix főátlójának kontúrindexekhez tartozó elemeit ε -ra módosítjuk, akkor A ε sajátértékhez tartozó sajátvektorai a kapott \bar{A} mátrixnak is sajátvektorai.

Bizonyítás. Jelölje I a kontúrindexek halmazát, $P_I \in M_{nn}$ pedig a főátló I -beli indexű elemeiben ε , máshol μ mátrixot. Evvel a jelöléssel $\bar{A} = P_I \vee A$. Ha $A \circ x = x$, akkor $(P_I \vee A) \circ x = P_I \circ x \vee x = x$.

6.8. LEMMA. Ha $r \geq n$, akkor $P_I \cong \bigvee_{k=1}^r A^k$. (I és P_I mint előbb.)

Bizonyítás. A kontúrindex definíciójából következik. (Elég, ha r legalább I elemszáma.)

KÖVETKEZMÉNY.

$$P_I = P_I^2 \cong P_I \circ (A \vee A^2 \vee \dots \vee A^r) = P_I \circ A \vee P_I \circ A^2 \vee \dots \vee P_I \circ A^r$$

6.9. LEMMA. Ha A -ra teljesül a kontúrfeltétel, akkor $P_I \vee A$ ε sajátértékhez tartozó sajátvektorai A -nak is sajátvektorai.

Bizonyítás. $P_I \vee A$ kontúrindexeinél főátlójában ε áll, ezért van olyan r természetes szám, melyre $(P_I \vee A)^{r+1} = (P_I \vee A)^r$ (6.5. tétel).

$$(P_I \vee A)^r = (P_I \vee A)^{n+r+1} = P_I \vee P_I \circ A \vee \dots \vee P_I \circ A^{n+r} \vee A^{n+r+1} = P_I \circ A \vee \dots \vee$$

$$\vee P_I \circ A^{n+r} \vee A^{n+r+1} = A \circ (P_I \vee A)^{n+r} = A \circ (P_I \vee A)^r.$$

$P_I \vee A$ ε sajátértékhez tartozó sajátvektorainak kúpját $(P_I \vee A)^r$ oszlopai kifeszítik; az előző egyenlőségekkel látható, hogy e kúpvektorai A -nak is sajátvektorai.

6.6. TÉTEL. Ha $A \in M_{nn}$ -re teljesül a kontúrfeltétel, akkor van olyan r természetes szám, melyre $(P_I \vee A)^{r+1} = (P_I \vee A)^r$ és A ε sajátértékhez tartozó sajátvektorainak kúpját kifeszítik $(P_I \vee A)^r$ oszlopai.

Bizonyítás. A -val együtt $P_I \vee A$ -ra is teljesül a kontúrfeltétel, így a 6.5. tétel alapján a kívánt tulajdonságú r létezik. A tétel állításának másik fele a 6.6. és 6.9. lemma közvetlen következménye.

6.10. LEMMA. $A^{n+1} \leq \bigvee_{k=1}^n A^k$.

Bizonyítás.

$$(A^{n+1})_{ij} = \bigvee_{i=k_0, k_1, \dots, k_{n+1}=j} \prod_{m=0}^n \alpha_{k_m k_{m+1}}$$

minden tagjában van indexismétlődés; az ismétlődések közötti szorzat $\lambda(A) = \varepsilon$ miatt legfeljebb ε , az elhagyása után megmaradó tag pedig A alacsonyabb hatványában is szerepel.

Következmény. $A^{n+t} \leq \bigvee_{k=1}^n A^k$.

6.7. TÉTEL. Ha $A \in M_m$ -re teljesül a kontúrfeltétel és $(P_I \vee A)^{r+1} = (P_I \vee A)^r$, akkor A ε sajátértékhez tartozó sajátvektorainak kúpját kifeszítik $(P_I \vee A)^r$ kontúrindexekhez tartozó oszlopvektorai.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a többi oszlop benne van a kontúrindexekhez tartozók kúpjában. Legyen $B = (P_I \vee A)^r$, $B_{KL} = (\beta_{km})_{k \in K}$, $J = \{1, \dots, n\} - I$, $E_J \in M_{\varepsilon s}$ olyan mátrix, melynek főátlójában minden elem ε , többi eleme μ (s J elemszáma; ha $J = \emptyset$, akkor a 6.7. tétel nem mond újat a 6.6. tételhez képest).

$B = B \circ (P_I \vee A)$ miatt

$$B_{IJ} = B_{II} \circ A_{IJ} \vee B_{IJ} \circ A_{JJ},$$

$$B_{JJ} = B_{JI} \circ A_{IJ} \vee B_{JJ} \circ A_{JJ}.$$

Mindkét egyenletben rekurziót alkalmazva:

$$B_{IJ} = B_{II} \circ A_{IJ} \circ (E_J \vee A_{JJ} \vee \dots \vee A_{JJ}^s) \vee B_{IJ} \circ A_{JJ}^{s+1}$$

$$B_{JJ} = B_{JI} \circ A_{IJ} \circ (E_J \vee A_{JJ} \vee \dots \vee A_{JJ}^s) \vee B_{JJ} \circ A_{JJ}^{s+1}$$

A rekurziót J elemszáma után is folytatva a zárójelben álló kifejezés értéke a 6.10. lemma következménye miatt állandó, így a $\lambda(A_{JJ}) < \varepsilon$ miatt minden elemével μ -höz tartó utolsó tag nem befolyásolhatja J elemszámától a jobb oldalt:

$$\begin{pmatrix} B_{IJ} \\ B_{JJ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{II} \\ B_{JI} \end{pmatrix} \circ A_{IJ} \circ (E_J \vee A_{JJ})^n$$

6.11. LEMMA. Ha A -ra teljesül a kontúrfeltétel és $t \geq n$, akkor $B_{II} = ((P_I \vee A)^t)_{II}$.

Bizonyítás. $((P_I \vee A)^t)_{II} = (P_I \circ (P_I \vee A \vee \dots \vee A^{t-1}) \vee A^t)_{II} = (P_I \vee A \vee \dots \vee A^t)_{II}$ t növelésével a 6.10. lemma következménye miatt nem változik, ha $t \geq n$; $t \geq r$ esetén pedig értéke B_{II} .

6.12. LEMMA. Ha A -ra teljesül a kontúrfeltétel és s legalább J elemszáma, akkor $B_{JI} = (E_J \vee A_{JJ})^s \circ A_{JI} \circ B_{II}$.

Bizonyítás. $B_{JI} = A_{JI} \circ B_{II} \vee A_{JJ} \circ B_{JI}$; rekurziót alkalmazva

$$B_{JI} = (E_J \vee A_{JJ} \vee \dots \vee A_{JJ}^s) \circ A_{JI} \circ B_{II} \vee A_{JJ}^{s+1} \circ B_{JI};$$

megismételhető a 6.7. tétel befejező gondolatmenete.

Ha az \mathbf{A} mátrixra nem teljesül a kontúrfeltétel, akkor $(\mathbf{P}_I \vee \mathbf{A})$ különböző k -knál különböző, nem stabilizálódik egy megfelelő r -től kezdve. A 6.5. tétel bizonyítása [2] ebben az esetben is végrehajtható azonban az olyan indexpárokra (mátrixelemekre), melyeknél teljesül a kontúrfeltétel (a feltétel is és a bizonyítás is indexpáronként értelmezhető). A kontúrindexek a kontúrfeltételt magától értetődően teljesítik, így a $(\mathbf{P}_I \vee \mathbf{A})^k$ hatványmátrix sorozatnak az a része, melyben az elemek legalább egyik indexe kontúrindex, valamilyen k -tól kezdve nem változik. Ezt a küszöböt r -rel jelölve a kontúrfeltétel nélkül is értelmes a \mathbf{B}_{II} , \mathbf{B}_{IJ} és \mathbf{B}_{JI} mátrix.

6.8. TÉTEL. Minden $\mathbf{A} \in M_m$ mátrix ε sajátértékhez tartozó sajátvektorainak kúpját kifeszítik a $(\mathbf{P}_I \vee \mathbf{A})^r$ mátrix I -beli indexű oszlopai, ahol I a kontúrindexek halmaza, r pedig egy olyan természetes szám, melytől $(\mathbf{P}_I \vee \mathbf{A})^k$ -nak azok az elemei, melyeknek legalább egyik indexe kontúrindex, nem változnak.

Bizonyítás. Mint már láttuk, ilyen r létezik. $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{II} \\ \mathbf{B}_{JI} \end{pmatrix}$ oszlopai — a 6.9. lemma bizonyítása ezekre az oszlopokra megismételhető — sajátvektorok. A sajátvektorai $\mathbf{P}_I \vee \mathbf{A}$ -nak is sajátvektorai (6.7. lemma), így elég belátni, hogy $\mathbf{P}_I \vee \mathbf{A}$ sajátvektorai $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{II} \\ \mathbf{B}_{JI} \end{pmatrix}$ oszlopainak kúpjában vannak.

Legyen $(\mathbf{P}_I \vee \mathbf{A}) \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$ és $t \geq r$. Ekkor $(\mathbf{P}_I \vee \mathbf{A})^t \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$, elkülönítve a kontúrindexeket:

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{B}_{II} \circ \mathbf{x}_I \vee \mathbf{B}_{IJ} \circ \mathbf{x}_J$$

$$\mathbf{x}_J = \mathbf{B}_{JI} \circ \mathbf{x}_I \vee (\mathbf{A}')_{JJ} \circ \mathbf{x}_J$$

$(\mathbf{A}')_{JJ}$ minden nem stabilizálódó eleme μ -höz tart, azaz $\mathbf{B}_{JJ} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{A}')_{JJ}$ létezik. \mathbf{x}_J utolsó kifejezése határértékben

$$\mathbf{x}_J = \mathbf{B}_{JI} \circ \mathbf{x}_I \vee \mathbf{B}_{JJ} \circ \mathbf{x}_J.$$

A 6.7. tétel bizonyításának rekurzióját alkalmazva itt azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}_{IJ} = \mathbf{B}_{II} \circ \mathbf{A}_{IJ} \circ (\mathbf{E}_J \vee \mathbf{A}_{JJ} \vee \dots \vee \mathbf{A}_{JJ}^s) \vee \mathbf{B}_{IJ} \circ \mathbf{A}_{JJ}^{s+1}$$

$$(\mathbf{A}^{t+s+1})_{JJ} = \mathbf{B}_{JI} \circ \mathbf{A}_{IJ} \circ (\mathbf{E}_J \vee \mathbf{A}_{JJ} \vee \dots \vee \mathbf{A}_{JJ}^s) \vee (\mathbf{A}')_{JJ} \circ \mathbf{A}_{JJ}^{s+1}.$$

A második egyenlet határértékben, ha $s, t \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{B}_{JJ} = \mathbf{B}_{JI} \circ \mathbf{A}_{IJ} \circ (\mathbf{E}_J \vee \mathbf{A}_{JJ})^n.$$

Végeredményében:

$$\mathbf{x}_I = \mathbf{B}_{II} \circ (\mathbf{x}_I \vee \mathbf{A}_{IJ} \circ (\mathbf{E}_J \vee \mathbf{A}_{JJ})^n \circ \mathbf{x}_J)$$

$$\mathbf{x}_J = \mathbf{B}_{JI} \circ (\mathbf{x}_I \vee \mathbf{A}_{IJ} \circ (\mathbf{E}_J \vee \mathbf{A}_{JJ})^n \circ \mathbf{x}_J).$$

6.13. LEMMA. Ha $J \neq \emptyset$, akkor $\mathbf{B}_{II} = (\mathbf{E}_I \vee \mathbf{A}_{II} \vee \mathbf{A}_{IJ} \circ (\mathbf{E}_J \vee \mathbf{A}_{JJ})^{|J|-1} \circ \mathbf{A}_{JI})^{|I|}$, ahol $|I|$ és $|J|$ az I , illetve a J indexhalmaz elemeinek száma.

Bizonyítás. β_{IJ} $i, j \in I$ értéke a $\mathbf{P}^I \vee \mathbf{A}$ mátrixnak megfelelő n szögpontú teljes irányított gráfban az i -edik csúcsból a j -edikbe vezető, tetszőlegesen sok élből álló, maximális hosszúságú utak hossza (a $\lambda(\mathbf{A}) = \varepsilon$ feltevés nélkül a legfeljebb n élből álló maximális hosszúságú utak hossza lenne; a $\lambda(\mathbf{A}) = \varepsilon$ feltétel lehetővé teszi a

körutak kiküszöbölését, értékük ugyanis nem haladhatja meg ε -t). Az ilyen utak áthaladhatnak J -beli indexnek megfelelő csúcok sorozatain is, de az egymást I -beli indexnek megfelelő csúcs közbeiktatása nélkül követő ilyen csúcok sorozatai legfeljebb annyi elemből állhatnak, mint J , mert J -beli indexnek megfelelő csúcs nem fordulhat elő maximális hosszúságú út részét képező körútban.

A maximális hosszúságú utak részeként szóba jövő, I -beli indexeknek megfelelő végpontú és J -belieknek megfelelő csúcokon (csak ilyeneken) áthaladó utak hosszát tartalmazó mátrix:

$$\mathbf{D} = (\delta_{ij})_{i,j \in I} = \mathbf{A}_{IJ} \circ (\mathbf{E}_J \vee \mathbf{A}_{JJ} \vee \dots \vee \mathbf{A}_{JJ}^{|J|-1}) \circ \mathbf{A}_{JI} = \mathbf{A}_{IJ} \circ (\mathbf{E}_J \vee \mathbf{A}_{JJ})^{|J|-1} \circ \mathbf{A}_{JI}.$$

Ha valamely $i, j \in I$ -re $\delta_{ij} > \alpha_{ij}$, akkor a maximális hosszúságú utakban az i -edik és j -edik csúcs távolsága legalább $\delta_{ij} - \alpha$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_I \vee \mathbf{A}_{II} \vee \mathbf{D} & \mathbf{A}_{IJ} \\ & \mathbf{A}_{JI} & \mathbf{A}_{JJ} \end{pmatrix}$$

mátrixnak megfelelő teljes irányított gráf leghosszabb útjainak hossza bármely csúcspárra azonos a $\mathbf{P}_I \vee \mathbf{A}$ mátrixnak megfelelőjével; I -beli csúcokat összekötő útjaihoz található legalább olyan hosszú, J -beli csúcsot nem érintő út (\mathbf{C} felépítése miatt), mely legfeljebb $|I|$ élet tartalmaz (a körök kiküszöbölhetők):

$$\mathbf{B}_{II} = (\mathbf{E}_I \vee \mathbf{A}_{II} \vee \mathbf{D})^{|I|}.$$

6.14. LEMMA. $(\mathbf{E} \vee \mathbf{A})^n = (\mathbf{E} \vee \mathbf{A})^{1-n}$.

Bizonyítás. $(\mathbf{A}^n)_{ij} \leq (\mathbf{E} \vee \mathbf{A} \vee \dots \vee \mathbf{A}^{n-1})_{ij}$: ha $i=j$, akkor az $\mathbf{E} \vee \mathbf{A}$ -nak megfelelő gráfban kör tartozik hozzá, ha $i \neq j$, akkor pedig kört tartalmazó út (vö. 6.10. lemma).

A 6.8. tétel alapján a 6.11. és 6.12. lemma feltételéből elhagyható a kontúrfeltétel (szerepe az volt, hogy garantálta \mathbf{B} megfelelő részmatrixainak létét; a 6.8. tétel kapcsán megmutattuk, hogy ezek a kontúrfeltételtől függetlenül léteznek).

A sajátérték (pontosabban $\lambda(\mathbf{A})$) meghatározására 6.3.-ban olyan algoritmusokat ismertettünk, amelyek lehetővé teszik a kúntúindexek halmazának kijelölését is (a [2]-ből vett algoritmusnál meg lehet jegyezni az egyes hatványbeli mátrixelemek előállításában szereplő eredeti mátrixelemek indexeit, a többi algoritmusnál ugyanez az alternatív optimumok vizsgálatával oldható meg).

A 6.2. tételben bizonyítottuk, hogy a μ komponens nem tartalmazó sajátvektorok mind a $\lambda(\mathbf{A})$ sajátértékhez tartoznak, ha egyáltalán léteznek. Mint 6.4. elején megmutattuk, elegendő vizsgálni a $\lambda(\mathbf{A}) = \varepsilon$ esetet — ekkor a μ komponens nem tartalmazó sajátvektorok csak az ε sajátértékhez tartozhatnak. A 6.8. tételben meghatároztuk az összes ε sajátértékhez tartozó sajátvektor kúpját. E kúp nem üres, tehát minden mátrixnak van sajátvektora ($\lambda(\mathbf{A}) = \mu$ esetén — mint a 6.2. tétel után megmutattuk — \mathbf{A} -nak van kizárólag μ elemekből álló oszlopa és — 6.2. algoritmusának I. pontja szerint — μ sajátértékhez tartozó sajátvektora).

Az ε sajátértékhez tartozhatnak μ komponens is tartalmazó sajátvektorok, ezeket a 6.2.-ben ismertett algoritmus alkalmazásakor célszerű kiszűrni és csak egy helyen szerepeltetni.

Ha $\lambda(\mathbf{A}) = \varepsilon$, akkor az ε sajátértékhez tartozó sajátvektorok kúpját a 6.8. tétel szerint kifeszítő vektorok meghatározásának a 6.11—6.14. lemmán alapuló algoritmus a következő:

- I. $C_0 = E_J \vee A_{JJ}$, $C_i = C_{i-1}^2$, $i = 1, 2, \dots$ végül $2^i \cong |J| - 1$; $M = C_i$
 II. $C_0 = E_I \vee A_{II} \vee A_{IJ} \circ M \circ A_{JI}$, $C_i = C_{i-1}^2$, $i = 1, 2, \dots$ végül $2^i \cong |I| - 1$
 $B_{II} = C_i$
 $B_{JI} = M \circ A_{JI} \circ B_{II}$

Az algoritmus műveletigénye $O(n^3 \log_2 n)$; a kisebb mátrixok miatt [9] ismertett algoritmusának negyedéig csökkenhet.

6.5. Alkalmazzuk az ismertett algoritmusokat az 1.5. példára! Tegyük fel, hogy a gépek egyenletes időközönként kezdenek új ciklust és ciklusidejük közös: $t_i^{r+1} - t_i^r = \lambda$, $i = 1, \dots, n$, $r = 1, 2, \dots$. Ha az egymástól függő gépek a munka megkezdéséhez megfelelő készlettel rendelkeznek, akkor az egyenletes folytatáshoz elegendő a példa ismertetésekor felírt egyenletrendszer teljesülése. Kiegészítő feltételeinkkel (t_i^1 helyett $t_i - t$ írva) és a valós számok additív csoportjának $-\infty$ -nel kiegészített maximális terében az extrémális algebra jelöléseit alkalmazva a következő kifejezést kapjuk:

$$A \circ t = \lambda \circ t,$$

ahol $A = (a_{ij})$, $t = (t_i)$, \circ a valós összeadás, illetve — vektorok között — az azonos indexű komponensek összegének maximuma.

Oldjunk meg egy numerikus feladatot! Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ 5 & 2 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 9 & 5 & 6 & 6 & 8 \\ -\infty & 8 & -\infty & 3 & 1 & 6 \\ -\infty & 4 & -\infty & -\infty & 3 & 7 \\ 6 & 9 & -\infty & -\infty & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Keressük végeskomponensű sajátvektorait és a hozzájuk tartozó sajátértéket. Először meghatározzuk $\lambda(A)$ -t a 6.3.-ban ismertett algoritmus első változatával.

Először A főátlójának minden elemét 5-re módosítjuk (A'); az A' -höz tartozó hozzárendelési feladat egy optimális megoldása a_{12} , a_{21} , a_{33} , a_{44} , a_{55} , a_{66} . Az optimum értéke megegyezik a főátló elemeinek összegével, azaz $\lambda(A) = 5$.

1 és 2 az optimális megoldásban szereplő a_{12} , a_{21} kör miatt, 3 pedig $a_{33} = 5$ miatt kontúrindex. Könnyű belátni, hogy a_{44} , a_{55} és a_{66} bármelyikét eredeti értékére csökkentve a kapott mátrixhoz tartozó hozzárendelési feladat optimuma 30-nál kisebb, köyetkezésépp 4, 5 és 6 nem kontúrindex.

A sajátvektorok meghatározása érdekében A minden elemét csökkentjük 5-tel! A következő rész mátrixokat kapjuk:

$$A_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ 0 & -3 & -\infty \\ -\infty & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{IJ} = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{JI} = \begin{pmatrix} -\infty & 3 & -\infty \\ -\infty & -1 & -\infty \\ 1 & 4 & -\infty \end{pmatrix} \quad A_{JJ} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -\infty & -2 & 2 \\ -\infty & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

6.4. algoritmus szerint

$$\mathbf{M} = (\mathbf{E}_3 \vee \mathbf{A}_{JJ})^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -\infty & 0 & 2 \\ -\infty & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -\infty & 0 & 2 \\ -\infty & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} \circ \mathbf{A}_{JI} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -\infty \\ 3 & 6 & -\infty \\ 1 & 4 & -\infty \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{E}_3 \vee \mathbf{A}_{II} \vee \mathbf{A}_{IJ} \circ \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{II} = \mathbf{C}_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty \\ 7 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{JI} = \mathbf{L} \circ \mathbf{B}_{II} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -\infty \\ 6 & 6 & -\infty \\ 4 & 4 & -\infty \end{pmatrix}$$

A harmadik sajátvektor nem véges, az első kettő egyenlő: $\mathbf{t} = (007564)$ kifejezi az összes véges sajátvektor kúpját.

\mathbf{t} komponensei mutatják, hogy milyen relatív időpontokban kell az egyes gépeket az egyenletes, 5 egység hosszú ciklusok érdekében indítani.

6.6. Áttérünk a lineáris algebrában fontos szerepet játszó karakterisztikus polinom extrémális algebrai megfelelőjének vizsgálatára. A vizsgált tér a 6.1.-ben meghatározottól annyiban térhet el, hogy inverzre és gyökvonásra nem lesz szükségünk; a sajátértékre vonatkozó állítások ezek nélkül a létüket garantáló feltevések nélkül úgy értendők, hogy igazak, ha van sajátérték.

6.7. DEFINÍCIÓ. Az $\mathbf{A} \in M_{nn}$ mátrix karakterisztikus polinomja az $\mathbf{A} - \lambda \circ \mathbf{E}$ mátrix determinánsa ($\mathbf{E} \in M_{nn}$ főátlójában ε , máshol μ).

6.9. TÉTEL. $|\mathbf{A} - \lambda(\mathbf{A}) \circ \mathbf{E}| = \# \lambda^n(\mathbf{A})$.

Bizonyítás.

$$\prod_{i=1}^n (\alpha_{ii} - \lambda(\mathbf{A})) = \begin{cases} \# \lambda^n(\mathbf{A}), & \text{ha valamely } i\text{-re } \alpha_{ii} = \lambda(\mathbf{A}) \\ (-\lambda(\mathbf{A}))^n, & \text{ha } \alpha_{ii} \neq \lambda(\mathbf{A}), i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Ez a szorzat $\lambda(\mathbf{A})$ számítási szabálya miatt $|\mathbf{A} - \lambda(\mathbf{A}) \circ \mathbf{E}|$ egy maximális tagja, így az első esetben kész a tétel bizonyítása. A második esetben válasszunk olyan $i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1} = i_1$ indexsorozatot, melyre $\prod_{j=1}^k \alpha_{i_j i_{j+1}} = \lambda^k(\mathbf{A})$. Tekintsük a determinánsnak azt a tagját, melyben az előző szorzaton kívül főátlóbeli elemek szerepelnek csak (értékük ebben az esetben $-\lambda(\mathbf{A})$). Az inverziók száma a tagot meghatározó permutációban kongruens $k-1$ -gyel moduló 2, mert a k hosszú kör $k-1$ cserével megszüntethető. E tag értéke:

$$\begin{aligned} (-\varepsilon)^{k-1} \circ \prod_{j=1}^k \alpha_{i_j i_{j+1}} \circ \prod_{i \neq i_1, \dots, i_k} (\alpha_{ii} - \lambda(\mathbf{A})) &= (-\varepsilon)^{k-1} \circ \lambda^k(\mathbf{A}) \circ (-\lambda(\mathbf{A}))^{n-k} = \\ &= (-\varepsilon)^{n-1} \circ \lambda^n(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

A determinánsban egy maximális tag $-\varepsilon$ -szorosával együtt fordul elő: értéke ε tag $\# \varepsilon$ -szorosa. A tételt bebizonyítottuk.

6.10. TÉTEL. Az \mathbf{A} mátrix sajátértékei gyökei karakterisztikus polinomjának.

Bizonyítás. Ha μ sajátérték, akkor \mathbf{A} legalább egy oszlopa kizárólag μ -t tartalmaz (6.2. algoritmus, I.), $|\mathbf{A} - \mu \circ \mathbf{E}| = |\mathbf{A}| = \mu$. Ha $\lambda \neq \mu$ sajátérték, akkor lehet $\lambda = \lambda(\mathbf{A})$ — ezt az esetet a 6.9. tétel bizonyítja — és lehet $\lambda = \lambda(\mathbf{A}_{JI})$, ahol az I indexhalmaz \mathbf{A} -nak olyan particionálását adja, melyben \mathbf{A}_{JI} (J, I komplementere) minden eleme μ . Az utóbbi esetben *Laplace-tétele* (6.1.) alapján $|\mathbf{A} - \lambda \circ \mathbf{E}| = |\mathbf{A}_{JI} - \lambda \circ \mathbf{E}_I| \circ |\mathbf{A}_{JJ} - \lambda \circ \mathbf{E}_J|$; az első tényezőről a 6.9. tételben bebizonyítottuk, hogy neutrális, neutrális miatta a szorzat is.

A 6.10. tétel fordítottja nem igaz: a karakterisztikus polinom gyökei nem mind sajátértékek. Ha például S a pozitív valós számok multiplikatív csoportja, akkor $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ egyetlen sajátértéke 3, de $(2 - \lambda) \circ (3 - \lambda) - 1$ -nek gyöke 2 is.

6.11. TÉTEL. Minden $\mathbf{A} \in M_m$ mátrix gyöke saját karakterisztikus polinomjának.

Bizonyítás. Előljáróban néhány jelölés és konvenció: $T = \{j_1, \dots, j_t\} \subset \{1, \dots, n\}$ t -elemű indexhalmaz, $0 \leq t \leq n$; $\mathbf{A}_{TT} = (\alpha_{ij})_{i, j \in T}$ $H_{ij}^k = \{(i_1, \dots, i_{k+1}); i_1 = i, i_{k+1} = j\}$ $1 \leq i, j, k \leq n$; $H_{ii}^0 = \{(i)\}$; $H_{ij}^0 = \emptyset$, $\prod_{\emptyset} \alpha = \varepsilon$, $\bigvee_{\emptyset} \alpha = \mu$, Σ_t a t -rendű permutációk halmaza, Σ_0 elemszáma $0! = 1$; $|\mathbf{A}_{\emptyset\emptyset}| = 1$. Használni fogjuk az n szögpontú teljes irányított gráf és az \mathbf{A} mátrix közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést: az (i, j) él megfelelője az α_{ij} elem, az i_1, \dots, i_k csúcsokon áthaladó út megfelelője a $\prod_{j=1}^{k-1} \alpha_{i_j i_{j+1}}$ szorzat.

Az előbbi jelölésekkel a karakterisztikus polinom a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \circ \mathbf{E}| &= \bigvee_{\emptyset \subset T \subset \{1\}_1^n} (-\varepsilon)^{n-t} \circ |\mathbf{A}_{TT}| = \\ &= \bigvee_{\emptyset \subset T \subset \{1\}_1^n} (-\varepsilon)^{n-t} \circ \lambda^{n-t} \circ \bigvee_{\sigma \in \Sigma_t} (-\varepsilon)^{inv(\sigma)} \circ \prod_{k=1}^t \alpha_{j_k i_{k+1}}. \end{aligned}$$

$(-\lambda)^{n-t}$ együtthatója a t -rendű főminorok összege. Ha λ -t \mathbf{A} -val helyettesítjük, akkor az így keletkező mátrix i -edik sorának j -edik eleméhez úgy jutunk, hogy az előző képletben λ^{n-t} helyébe a $\bigvee_{(i_1, \dots, i_{n-t+1}) \in H_{ij}^{n-t}} \prod_{k=1}^{n-t} \alpha_{i_k i_{k+1}}$ kifejezést írjuk:

$$\bigvee_{\emptyset \subset T \subset \{1\}_1^n} \bigvee_{(i_1, \dots, i_{n-t+1}) \in H_{ij}^{n-t}} \bigvee_{\sigma \in \Sigma_t} (-\varepsilon)^{n-t+inv(\sigma)} \circ \prod_{k=1}^{n-t} \alpha_{i_k i_{k+1}} \circ \prod_{m=1}^t \alpha_{j_m j_{\sigma(m)}}.$$

Minden az i -edik csúcsból a j -edik csúcsba vezető $n-t$ hosszú úthoz tartozó érték ($i=j$ esetén a 0 hosszúhoz tartozó is) meg van szorozva minden t -rendű főminor ($t=0$ -nál is) minden tagával és össze vannak adva a λ kitevőjének és a minor-tag inverziószámának megfelelő előjellel. (Eddigi megfontolásaink nem használták ki az extrémális műveletek lineáris algebrai megfelelőiktől való eltérését, lineáris térben is érvényesek.)

Megmutatjuk, hogy az i -edik sor j -edik elemére kapott kifejezésben minden tagnak van olyan párja, mely eredetijétől annyiban különbözik, hogy egy egyszerű körútnak megfelelő szorzat a főminor helyett az út tényezői között szerepel, vagy megfordítva. Ha T -ben van H_{ij}^{n-t} -beli index, akkor σ erre az első indexisméltődésig ismételten alkalmazva kijelöl egy körutat (isméltődésnek lennie kell, mert σ t -rendű

permutáció). A körútnak megfelelő elemeket a főminor-tagból kivéve egy kisebb (esetleg üres) főminor egy tagját kapjuk. Ugyanezeket a közös indexnél az útnak megfelelő szorzathoz csatolva egy ugyanannyival nagyobb (hosszabb) útnak megfelelő szorzatot kapunk. A kapott szorzatok szorzata — megfelelő előjellel — szerepel a kifejezésben, mert kielégíti az ehhez szükséges feltételeket: a főminor rendjének és az i -edik csúcsból a j -edikbe vezető út hosszának összege n .

Ha T -ben nincs H_{ij}^{n-t} -beli index, akkor $t \neq n$ és H_{ij}^{n-t} legfeljebb $n-t$ különböző indexet tartalmazhat. Az utóbbi miatt van benne ismétlődés, kiválasztható az i -edik csúcsból a j -edik csúcsba vezető útból egy egyszerű körút. Az út e körút nélkül is az i -edik csúcsból a j -edikbe vezet; a körútnak megfelelő szorzattal bővítve a főminor-tagot egy nagyobb főminor egy tagját kapjuk (a sor- és oszlopindexek halmaza ugyanazokkal az indexekkel bővül, minden index mindkét helyen továbbra is csak egyszer szerepel). A kapott szorzatok szorzata — az előző esethez hasonlóan — szerepel tagként az i -edik sor j -edik elemét meghatározó kifejezésben.

Hasonlítsuk össze a párok előjelét! Ha az eltérést megtestesítő egyszerű körút hossza s , akkor „ $n-t$ ” változása s . Az s élből álló elemi körúthoz tartozó permutáció inverziói $s-1$ cserével megszüntethetők, következésképp „ $\text{inv}(\sigma)$ ” változása kongruens $s-1$ -gyel moduló 2. Végeredményben az egymáshoz rendelhető pároknál $-\lambda$ kitevője páratlan számmal tér el párjától, így a párok maguk egymás $-\varepsilon$ -szorosai.

Megmutattuk, hogy a karakterisztikus polinom változója helyébe a mátrixot írva olyan mátrixot kapunk, melynek minden eleme neutrális.

A bizonyítással kapcsolatban megjegyezzük, hogy az itt elmondottak nem elegendők a lineáris algebra hasonló (*Hamilton—Cayley*) tételének bizonyítására: csak azt mutattuk meg, hogy minden tagnak van párja, nem azt, hogy a tagok párokba rendezhetők.

7. Áttekintés

Befejezésül az extrémális algebra eredményeinek áttekintéséhez kívánunk támogatást nyújtani.

Az ebbe a tárgykörbe tartozó munkák zöme 1960 után látott napvilágot (az előzmények részletes felsorolása található [2] és [9]-ben). Összefoglaló könyv eddig kettő jelent meg: [17] és [9].

Az extrémális tér axiomatikus leírásával [4], [17] és [9] foglalkozik (lényegesen eltérő módon). Itt [4]-t követtük; sok tekintetben általánosítva és pontosítva. Az axiomatikus megközelítés legfontosabb újdonsága az előjel értelmezése.

Az extrémális és a lineáris tér analógiáinak vizsgálatában [9] jut legmesszebb. Fő eredményünk ezen a területen a *Hamilton—Cayley-tétel* analogonjának bebizonyítása.

Az extrémális tér geometriai szerkezetével foglalkozik [16]; szétválasztási tétel itt más módon és általánosabb esetre bizonyítottuk.

Az extrémális egyenletrendszerek megoldására a legtöbb módszert — lineáris algebrai megoldások analogonjait — [8] kínálja.

A lineáris programozás extrémális megfelelőjével foglalkozik [12], [13], [14] és [15]; hasznos kiegészítést fűz hozzá [18].

Az extrémális mátrixalgebra kifejtését [2] és [9]-ben találhatjuk meg; itt a determináns fogalmát tettük hozzá.

A sajátérték feladat megoldásával [2], [3] és [9] foglalkozik; a megoldás az első kettőben együtt teljes. Ezt a tárgykört megoldó algoritmusokkal gazdagítottuk.

Végezetül meg kell még említenünk, hogy számos e tárgyaba tartozó kérdéssel foglalkozik a részbenrendezett algebrai struktúrák elmélete is [10]; alapvető eltérés, hogy a félháló műveleteket (ha a részbenrendezés félhálót indukál is) nem kezelik egyenrangú műveletként (pl. a háló-rendezett csoportot nem tekintik kétműveletes struktúrának).

IRODALOM

- [1] Воробьев, Н. Н., «Экстремальная алгебра матриц», Докл. АН СССР 152 (1963) 24—27.
- [2] Воробьев, Н. Н., «Экстремальная алгебра положительных матриц», *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik* 3 (1967) 39—71.
- [3] Воробьев, Н. Н., «Экстремальная алгебра неотрицательных матриц», *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik* 6 (1970) 303—312.
- [4] Корбут, А. А., «Экстремальные векторные пространства и их свойства», *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik* 8 (1972) 525—536.
- [5] Курош, А. Г., Курс высшей алгебры (Наука, 1965).
- [6] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур (Наука, 1970).
- [7] Юдин, Д. Б. и Гольштейн, Е. Г., Задачи и методы линейного программирования (Советское Радио, 1961).
- [8] CARRÉ, B. A., "An algebra for network routing problems", *J. Inst. Maths. Applics* 7 (1971) 273—294.
- [9] CUNINGHAME-GREEN, R., *Minimax Algebra* (Springer-Verlag, 1979).
- [10] FUCHS, L., *Partially Ordered Algebraic Systems* (Pergamon Press, 1963).
- [11] LANKASTER, P., *Theory of Matrices* (Academic Press, 1969).
- [12] ZIMMERMANN, K., «Некоторые свойства систем экстремальных линейных неравенств», *Ekonomicko-matematicky Obzor* 9 (1973) 212—227.
- [13] ZIMMERMANN, K., «Решение некоторых оптимизационных задач на экстремальном векторном пространстве», *Ekonomicko-matematicky Obzor* 9 (1973) 336—351.
- [14] ZIMMERMANN, K., «Решение одной оптимизационной задачи на экстремальном векторном пространстве» *Ekonomicko-matematicky Obzor* 10 (1974) 298—321.
- [15] ZIMMERMANN, K., "Conjugate optimization problems and algorithms in the extremal vector space", *Ekonomicko-matematicky Obzor* 10 (1974) 428—440.
- [16] ZIMMERMANN, K., "A general separation theorem in extremal algebras", *Ekonomicko-matematicky Obzor* 13 (1977) 179—201.
- [17] ZIMMERMANN, K., *Extremální Algebra* (Vyzkumná publikace Ekonomicko-matematické laboratore pri Ekonomickém ústavu CSAV 46, june 1976).
- [18] ZIMMERMANN, U., "On some extremal optimization problems", *Ekonomicko-matematicky Obzor* 15 (1979) 438—441.

(Beérkezett: 1982. március 8.)

HEGEDŰS GÁBOR
ÉPÍTÉSGAZDASÁGI ÉS SZERVEZÉSI INTÉZET
1027 BUDAPEST, CSALOGÁNY U. 11.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Г. Хегедюш

Статья в 1-м своем пункте говорит о причине возникновения самостоятельной экстремальной алгебры, пользуясь примерами, разработанными на основании [2] и [9]. Со 2-го пункта излагается множество результатов сравнительно новой теории.

2. пункт занимается аксиоматической постройкой экстремального пространства, обобщая [4]. По ходу этого пункт 2.1. содержит основные аксиомы и их следствия, а 2.2. — добавочные аксиомы со следствиями. 2.3. пункт посвящен примерам.

Алгебраические и геометрические свойства экстремального пространства анализируются в пункте 3. На основе понятий, введенных в пункте 3.1. (единица, вертикальность, носитель, архимедова компонента), в 3.2. пункте исследуются свойства конусов, вынуклых множеств, носителей и архимедовых компонентов.

С точки зрения излагаемого позже оказывается важным введение в 4. пункте понятия знака экстремального числа.

Пункт 5. занимается метризацией экстремального пространства на основе свойств архимедовых компонент: сначала, в пункте 5.1., определяется метрика по компонентам, потом, в пункте 5.2., метризуется целое пространство путем вложения в архимедову компоненту другого пространства.

В конце, в 5.3. пункте, доказывается, что бикомпактные выпуклые множества отделимы экстремальной плоскостью.

Пункт 6. посвящен экстремальной алгебре матриц. В пункте 6.1. введены основные понятия (матрица, многочлен, определитель) и изучаются их свойства. На основе [2] и [3], пункт 6.2. объясняет схему решения задачи нахождения собственного числа и собственных векторов. Алгоритмы нахождения собственного числа находятся в пункте 6.3., а нахождения собственных векторов — в пункте 6.4. Пункт 6.5. содержит пример.

По окончании, в пункте 6.6. доказывается, что собственные числа и сама матрица являются корнями характеристического многочлена.

7. пункт содержит обзор литературы по экстремальной алгебре, соответственно размещая опубликованные здесь результаты.

REKONSTRUKCIÓ LINEÁRISAN TORZÍTOTT VETÜLETEKBŐL

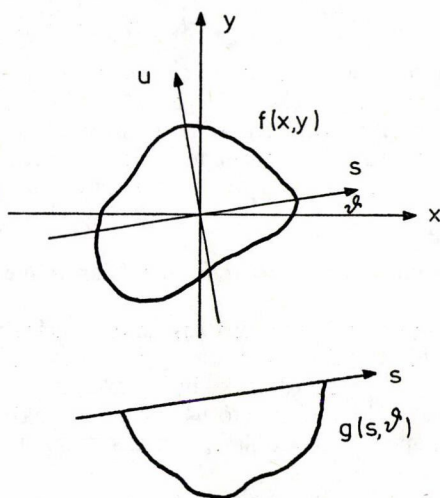
KUBA ATTILA

Szeged

A vetületekből végzett függvény-rekonstrukció gyakorlati alkalmazásaiban rendszerint nem a vetületi irányoknak megfelelő egyenesek mentén mért vonalintegrálokból kapott pontos vetületek állnak rendelkezésre, hanem csupán azoknak valamilyen értelemben torzított változatai. Olyan esetben, ha ez a torzítási hatás a vetületeken végzett alkalmas konvolúcióval leírható, vagyis ha a vetületek lineárisan torzítottak, akkor egyszerű összefüggés állapítható meg a torzított és a tozítatlan vetületekből rekonstruált függvények között. Ezen összefüggés alapján visszakapható az eredeti függvény a lineárisan torzított vetületekből rekonstruált függvényből.

1. Bevezetés

Számos alkalmazása van a vetületekből végzett rekonstrukciónak, vagyis amikor egy $f(x, y)$ függvényt kell előállítani különböző irányú vetületeiből. Ez a feladat, amely a „rekonstrukciós probléma” elnevezéssel vált ismertté, a következő módon fogalmazható meg (1. ábra):



1. ábra. Az $f(x, y)$ függvény és ϑ -szögű vetülete

Az $f(x, y)$ függvény ϑ -szögű vetületét ($0 \leq \vartheta < \pi$) úgy definiáljuk, mint olyan egyváltozós függvényt, amely az f függvénynek a ϑ irányszögű egyenesek menti vonalintegrálok értékét adja meg:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \vartheta - u \sin \vartheta, s \sin \vartheta + u \cos \vartheta) du,$$

ahol s és u az xy -koordináta-rendszer ϑ -szögű elforgatásával kapott új koordináta-rendszer koordinátáit jelölik, tehát

$$x = s \cos \vartheta - u \sin \vartheta$$

$$y = s \sin \vartheta + u \cos \vartheta.$$

A feladat ezek után az, hogy a különböző irányokból megadott vetületekből állítsuk vissza, más szóval rekonstruáljuk, az azoknak megfelelő függvényt (esetleg függvényeket).

A feladatra elsőként J. RADON adott megoldást még 1917-ben [11]. Azóta több tudományágban is jelentkezett az igény a vetületekből végzett rekonstrukcióra. Így például a *röntgen- és izotóp-diagnosztikában* [16], a rádió-csillagászatban [1], vagy a molekuláris-biológiában [3], ahol a rekonstruálandó függvény általában a vizsgálandó objektum valamilyen fizikai tulajdonságát (pl. abszorpciót, radioaktivitási koncentrációt) jelöli, a vetületek pedig az objektum különböző irányokból való leképezéseinek az eredményei. A különféle alkalmazási területeknek megfelelően újabb és újabb módszereket közölnek a rekonstrukció elvégzésére (a legelterjedtebben használt módszerek összefoglalása megtalálható [5, 6]-ban).

A rekonstrukciós módszerek alkalmazhatóságának egyik fontos kérdése, hogyan viselkednek a vetületek mérésére szolgáló eszközök torzító hatásaival szemben. Ebből a szempontból azt vizsgáljuk meg, hogy milyen eredményt kapunk torzított vetületekből, ha az analitikus megoldást szolgáltató rekonstrukciós formulát változtatás nélkül alkalmazzuk. A torzító hatásról feltételezzük, hogy lineáris rendszerként működő mérési eszközökből származik.

A 2. fejezetben ismertetjük a rekonstrukcióhoz szükséges műveleteket, transzformációkat és azok legfontosabb tulajdonságait. A 3. fejezetben adjuk meg, hogy milyen összefüggés van a pontos vetületekből rekonstruált függvények és a lineárisan torzított vetületekből rekonstruált függvények között. Végül a 4. fejezetben két jellemző példán keresztül illusztráljuk a torzított vetületekből végzett rekonstrukció hatását.

2. Definíciók és rekonstrukció torzítatlan vetületekből

Ebben a fejezetben ismertetjük a rekonstrukció tárgyalásában felhasznált transzformációk definícióit, legfontosabb tulajdonságait és a rekonstrukció alapjául szolgáló összefüggéseket. Az egyszerűség kedvéért csak a kétdimenziós esettel foglalkozunk, bár mindegyik képlet kifejezhető n -dimenziós alakban is (lásd pl. [9, 15]). Mi a [13]-beli tárgyalási módot követjük az ott alkalmazott jelölések nagy részét átvéve.

Legyen $f \in L_0^2(\mathbb{R}^2)$, azaz a kétdimenziós Euklideszi-tér valamely korlátos tartományán kívül azonosan 0 és négyzetesen integrálható függvény. Az $f(x, y)$ függvény

Radon-transzformáltját, $\mathcal{R}f$ -et úgy definiáljuk, mint amely az f -hez annak vetületeit rendeli hozzá:

$$(2.1) \quad [\mathcal{R}f](s, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) du.$$

Tehát a Radon-transzformációval kapott $\mathcal{R}f$ függvény értelmezési tartománya az $\mathbf{R} \times [0, \pi)$ halmaz és az egyes $\vartheta \in [0, \pi)$ értékekhez tartozó egydimenziós függvények adják az f ϑ -szögű vetületét.

Igaz a következő

2.1. TÉTEL (D. LUDWIG [9]): Ha $f \in L^{1,2}(\mathbf{R}^2)$, akkor $\mathcal{R}f \in L^2(\mathbf{R} \times [0, \pi))$.

Egy az $\mathbf{R} \times [0, \pi)$ halmazon értelmezett $g(s, \vartheta)$ függvény visszavetítését a következő transzformáció adja meg:

$$[\mathcal{B}g](x, y) = \int_0^\pi g(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta) d\vartheta.$$

Az elnevezést az indokolja, hogy a visszavetítéssel kapott függvény az egyes ϑ értékekhez tartozó egydimenziós függvények $x \cos \vartheta + y \sin \vartheta = s$ egyenesek mentén való visszavetítéseinek a szuperponáltjaként áll elő. A visszavetítési-transzformáció és a Radon-transzformáció is lineáris operátorok.

2.2. TÉTEL (K. T. SMITH [15]): Ha $g \in L^2(\mathbf{R} \times [0, \pi))$, akkor $[\mathcal{B}g](x, y)$ majdnem mindenütt létezik és lokálisan négyzetesen integrálható.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a visszavetítési-transzformáció a Radon-transzformáció adjungáltja:

$$(\mathcal{R}f, g) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{R}f](s, \vartheta) g(s, \vartheta) ds d\vartheta = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot [\mathcal{B}g](x, y) dx dy = (f, \mathcal{B}g).$$

A $g(s, \vartheta)$ és $f(x, y)$ függvényekre definiáljuk az egy- és kétdimenziós Fourier-transzformáltakat és inverzüket:

$$[\mathcal{F}_1 g](S, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s, \vartheta) e^{-2\pi i s S} ds,$$

$$[\mathcal{F}_1^{-1} g](s, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(S, \vartheta) e^{2\pi i s S} dS$$

(azaz a $g(s, \vartheta)$ függvény esetében csak az s változó vesz részt a Fourier-transzformáció képzésében), illetve

$$[\mathcal{F}_2 f](X, Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(xX + yY)} dx dy,$$

$$[\mathcal{F}_2^{-1} f](x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(X, Y) e^{2\pi i(xX + yY)} dX dY.$$

Az egy- és kétdimenziós *konvolúciót* a következő módon értelmezzük:

$$[g_1 * g_2](s, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\sigma, \vartheta) \cdot g_2(s - \sigma, \vartheta) d\sigma,$$

$$[f_1 * * f_2](x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi, \eta) \cdot f_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta.$$

A konvolúció és a *Fourier-transzformáció* között a következő jól ismert kapcsolat áll fent (konvolúciós tétel):

$$(2.2) \quad \mathcal{F}_1(g_1 * g_2) = \mathcal{F}_1 g_1 \cdot \mathcal{F}_1 g_2,$$

illetve

$$(2.3) \quad \mathcal{F}_2(f_1 * * f_2) = \mathcal{F}_2 f_1 \cdot \mathcal{F}_2 f_2.$$

A bevezetett transzformációkkal a rekonstrukció alapjául szolgáló egyenlet így írható [13]:

$$(2.4) \quad f = \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1}(\text{abs} \cdot \mathcal{F}_1 \mathcal{R} f),$$

ahol $\text{abs}(S) = S$ az abszolútérték-függvényt jelöli. A (2.4) egyenletet úgy tekinthetjük, mint ami alapján $\mathcal{R} f$ -ből f -et állíthatjuk elő, azaz explicit módon kifejezhetjük a *Radon-transzformáció* inverzét:

$$\mathcal{R}^{-1} g = \mathcal{B} \mathcal{F}_1^{-1}(\text{abs} \cdot \mathcal{F}_1 g).$$

A (2.4) egyenletből több ismert rekonstrukciós módszer is levezethető, így például a *Radon-féle rekonstrukciós formula* [11] és a ma leggyakrabban használt ún. konvolúciós rekonstrukciós algoritmus [12] is.

A továbbiakban szükségünk lesz két olyan összefüggésre, amely a *Radon-transzformációhoz* kapcsolódik.

2.3. VISSZAVETÍTÉSI TÉTEL (S. ROWLAND [13]):

$$(2.5) \quad [\mathcal{B} \mathcal{R} f](x, y) = f(x, y) * * \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

vagyis szavakkal kifejezve, az $f(x, y)$ függvény vetületeinek a visszavetítése \mathcal{B} szerint nem az $f(x, y)$ függvényt adja vissza, hanem annak az $1/\sqrt{x^2 + y^2}$ függvénnyel való konvolúcióját.

2.4. TÉTEL.

$$(2.6) \quad \mathcal{R}(f_1 * * f_2) = \mathcal{R} f_1 * \mathcal{R} f_2,$$

azaz konvolválts függvények *Radon-transzformáltja* megegyezik a *Radon-transzformáltak* konvolúciójával. A 2.4. tétel bizonyítása megtalálható [4]-ben.

3. Lineárisan torzított vetületek

A valóságban természetesen nem a pontos vonalintegrálok állnak rendelkezésre a rekonstrukcióhoz, hanem a vetületek fizikai érzékelésére használt mérési eszközök (pl. kamerák, detektorok) által szolgáltatott adatok. Ezek az eszközök különféle okok folytán nem képesek a (2.1)-ben megadott ideális vetületeket mérni, hanem csupán azoknak bizonyos értelemben torzított változatait. A torzító hatások egy része jól leírható azzal, ha feltesszük, hogy a vetületeket mérő eszközök lineáris rendszerként működnek, azaz

$$(\alpha \cdot g_1 + \beta \cdot g_2)' = \alpha \cdot g_1' + \beta \cdot g_2'$$

ahol g_1', g_2' és $(\alpha \cdot g_1 + \beta \cdot g_2)'$ rendre a g_1, g_2 és $\alpha \cdot g_1 + \beta \cdot g_2$ pontos vetületek helyett kapott torzított vetületeket jelölik. Igazolható, hogy lineáris rendszerek esetén g' a g és egy, a mérési eszöszre jellemző p függvény konvolúciójaként áll elő [10 Chap. 5], azaz

$$(3.1) \quad g'(s, \vartheta) = [g * p](s, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma, \vartheta) \cdot p(s - \sigma, \vartheta) d\sigma,$$

ahol tehát $p(s, \vartheta)$ jelöli a ϑ -szögű vetület mérését zavaró függvényt. Vagyis ebben a modellben az egyes vonalintegrálok helyett további (párhuzamos) egyenesek menti vonalintegrálok is részt vesznek a $p(s, \vartheta)$ függvénnyel megadott súlyozás szerint.

A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy milyen összefüggés állapítható meg a torzítatlan vetületekből rekonstruált függvény és a torzított vetületekből kapott f' függvény között. Az erre a kérdésre vonatkozó korábbi eredmények egy része konkrét p függvények esetében kapott f' függvények kiszámításával kapcsolatosak. Így például

$$p(s, \vartheta) = \left(\frac{\sin(\pi a s)}{\pi a s} \right)^2 \quad \text{R. N. BRACEWELL [1],}$$

$$p(s, \vartheta) = e^{-a s^2} \quad \text{R. C. HSIEH, W. G. WEE [7],}$$

„trapéz formájú” p R. N. BRACEWELL [2],

$$p(s, \vartheta) = \begin{cases} 1/2a, & \text{ha } |s| \leq a \\ 0, & \text{ha } |s| > a \end{cases} \quad \text{L. A. SHEPP J. B. KRUSKAL [14]}$$

torzító függvények esetében vizsgálták meg a rekonstrukcióval kapott eredményt. Másrészt R. N. BRACEWELL általánosabb természetű megállapítása az [2], hogy ha a $p(s, \vartheta) = p(s)$ torzító függvény minden vetületi szögre ugyanaz, akkor a $g'(s, \vartheta)$ vetületekből rekonstruált f' függvényre az

$$(3.2) \quad f' = f * * q$$

egyenlet teljesül, ahol $q(x, y)$ olyan forgás-szimmetrikus függvény, amelyre

$$p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) du.$$

Megmutatjuk, hogy általánosabb, vetületenként változó torzító függvény esetében is megadható (3.2)-höz hasonló összefüggés. Ehhez szükségünk lesz a következő eredményre:

3.1. TÉTEL. Ha $g_1 = \mathcal{R}f_1$, $g_2 = \mathcal{R}f_2$, akkor

$$(3.3) \quad \mathcal{B}(g_1 * g_2) = \mathcal{B}g_1 * * f_2.$$

Bizonyítás: (3.3) igazolásához induljunk ki a visszavetítési tételből. (2.5) alapján:

$$(3.4) \quad \mathcal{B}\mathcal{R}(f_1 * * f_2) = (f_1 * * f_2) * * \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left(f_1 * * \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) * * f_2 = \\ = (\mathcal{B}\mathcal{R}f_1) * * f_2 = \mathcal{B}g_1 * * f_2.$$

Másfelől (2.6) szerint

$$(3.5) \quad \mathcal{B}\mathcal{R}(f_1 * * f_2) = \mathcal{B}(\mathcal{R}f_1 * \mathcal{R}f_2) = \mathcal{B}(g_1 * g_2).$$

(3.4) és (3.5) összevetéséből kapjuk a keresett (3.3) összefüggést, feltéve, hogy a megfelelő konvolúciók léteznek.

Megjegyzés: (3.3)-t más formában is kifejezhetjük $g_2 = \mathcal{R}f_2$ alapján:

$$(3.6) \quad \mathcal{B}(g_1 * g_2) = \mathcal{B}g_1 * * \mathcal{R}^{-1}g_2.$$

Ezek után könnyen igazolható a torzított és a torzítatlan vetületekből rekonstruált függvények közötti kapcsolat.

3.2. TÉTEL. Jelölje f' a (3.1) szerint torzított g' vetületekből a (2.4) rekonstrukciós formula alapján kapott függvényt:

$$(3.7) \quad f' = \mathcal{B}\mathcal{F}_1^{-1}(\text{abs} \cdot \mathcal{F}_1 g').$$

Akkor a torzítatlan g vetületekből (2.4) alapján rekonstruált f függvény és f' között a következő összefüggés teljesül:

$$(3.8) \quad f' = f * * \mathcal{R}^{-1}p.$$

Bizonyítás: g' (3.1)-gyel megadott definícióját behelyettesítve (3.7)-be:

$$f' = \mathcal{B}\mathcal{F}_1^{-1}(\text{abs} \cdot \mathcal{F}_1(g * p)) = \mathcal{B}\mathcal{F}_1^{-1}(\text{abs} \cdot \mathcal{F}_1(\mathcal{R}f * p)),$$

ahonnan a konvolúciós tétel (2.2) ismételt felhasználásával

$$f' = \mathcal{B}\mathcal{F}_1^{-1}(\text{abs} \cdot \mathcal{F}_1 \mathcal{R}f \cdot \mathcal{F}_1 p) = \mathcal{B}(\mathcal{F}_1^{-1}(\text{abs} \cdot \mathcal{F}_1 \mathcal{R}f) * \mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_1 p) = \\ = \mathcal{B}(\mathcal{F}_1^{-1}(\text{abs} \cdot \mathcal{F}_1 \mathcal{R}f) * p)$$

adódik. (3.6) szerint

$$f' = \mathcal{B}\mathcal{F}_1^{-1}(\text{abs} \cdot \mathcal{F}_1 \mathcal{R}f) * * \mathcal{R}^{-1}p = f * * \mathcal{R}^{-1}p.$$

Azaz a torzított vetületekből rekonstruált függvény az f -nek és annak a függvénynek a konvolúciója, amelynek a *Radon-transzformáltja* éppen p .

Látható, hogy a vetületi szögektől független $p(s, \vartheta) = p(s)$ torzító függvény esetére *R. N. Bracewell* által adott (3.2) összefüggés [2] a speciális esete (3.8)-nak. Ekkor ugyanis forgás-szimmetrikus $q(x, y)$ függvényekre $(q(x, y) = \tilde{q}(\sqrt{x^2 + y^2}) =$

$=\tilde{q}(r))$ a Radon-transzformáció Abel-transzformációba megy át:

$$\begin{aligned} p(s, \vartheta) &= [\mathcal{R}q](s, \vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} q(s \cos \vartheta - u \sin \vartheta, s \sin \vartheta + u \cos \vartheta) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\sqrt{(s \cos \vartheta - u \sin \vartheta)^2 + (s \sin \vartheta + u \cos \vartheta)^2}) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\sqrt{s^2 + u^2}) du = 2 \cdot \int_s^{\infty} \frac{\tilde{q}(r) \cdot r}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr = [\mathcal{A}\tilde{q}](s). \end{aligned}$$

Ekkor tehát $\tilde{q}(r)=[\mathcal{A}^{-1}p](r)$ alakban írható, ahol \mathcal{A}^{-1} az Abel-transzformáció inverzét jelöli [1]:

$$[\mathcal{A}^{-1}p](r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{\partial p / \partial s}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds$$

és így (3.2) átírható az

$$f' = f * * \mathcal{A}^{-1}p$$

formára is.

A torzított vetületekből végzendő rekonstrukcióra most már két módszer kínálkozik, feltéve, hogy a $p(s, \vartheta)$ torzító függvény ismert:

1. *Módszer.* A torzított vetületeket helyreállítva (azaz azokból a torzítatlan vetületeket előállítva) végezzük el a rekonstrukciót. Ehhez a vetületek helyreállításának legegyszerűbb elvi módszere a (2.2) konvolúciós tételre alapszik. Mivel

$$g' = g * p,$$

ezért a Fourier-transzformáltakat véve

$$\mathcal{F}_1 g' = \mathcal{F}_1 g \cdot \mathcal{F}_1 p$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$\mathcal{F}_1 g = \frac{\mathcal{F}_1 g'}{\mathcal{F}_1 p}$$

alapján

$$g = \mathcal{F}_1^{-1}(\mathcal{F}_1 g' / \mathcal{F}_1 p).$$

2. *Módszer.* A torzított vetületekből rekonstruált f' függvényből állítjuk elő f -et. (3.8) mindkét oldalának két-dimenziós Fourier-transzformáltját véve és (2.3)-at alkalmazva

$$\mathcal{F}_2 f' = \mathcal{F}_2 f \cdot \mathcal{F}_2 \mathcal{R}^{-1} p,$$

amiből

$$\mathcal{F}_2 f = \frac{\mathcal{F}_2 f'}{\mathcal{F}_2 \mathcal{R}^{-1} p}$$

és így

$$f = \mathcal{F}_2^{-1}(\mathcal{F}_2 f' / \mathcal{F}_2 \mathcal{R}^{-1} p).$$

Ezen utóbbi módszer — a vetületeknek a rekonstrukció előtti, egyenként történő helyreállítása helyett — megadja a lehetőséget a rekonstrukció utáni utólagos helyreállításra.

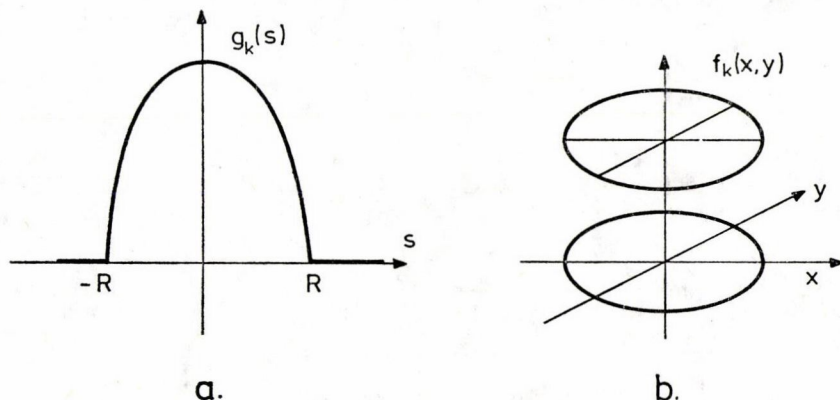
4. Példák lineárisan torzított vetületekből végzett rekonstrukcióra

Végül a torzított vetületekből végzett rekonstrukció hatásának illusztrálására két olyan példát mutatunk, amelyek a rekonstrukció alkalmazási feladataiban gyakoriak. Rekonstruálandó függvényként válasszuk az R sugarú körlemez indikátor függvényét (2. ábra):

$$f_k(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 > R^2, \end{cases}$$

aminek a vetületei:

$$g_k(s, \vartheta) = g_k(s) = [\mathcal{R}f_k](s) = \begin{cases} 2\sqrt{R^2 - s^2} & \text{ha } |s| \leq R \\ 0, & \text{ha } |s| > R. \end{cases}$$



2. ábra. Az R sugarú egységnyi értékű körlemez reprezentáló $f_k(x, y)$ függvény képe (b) és annak $g_k(s)$ vetülete (a)

1. Példa. Véges sáv szélességben konstans érzékenységgű mérési eszköz. Ez a modell a vetületek érzékelésére szolgáló eszközöknek azt az alapvető sajátosságát írja le, hogy nem képesek a pontos vonalintegrálok mérésére, hanem csak bizonyos szélességű sávok integráljának a meghatározására. Ebben az esetben a torzító hatást leíró függvény:

$$(4.1) \quad p^{(1)}(s, \vartheta) = p^{(1)}(s) = \begin{cases} 1/2a, & \text{ha } |s| \leq a \\ 0, & \text{ha } |s| > a. \end{cases}$$

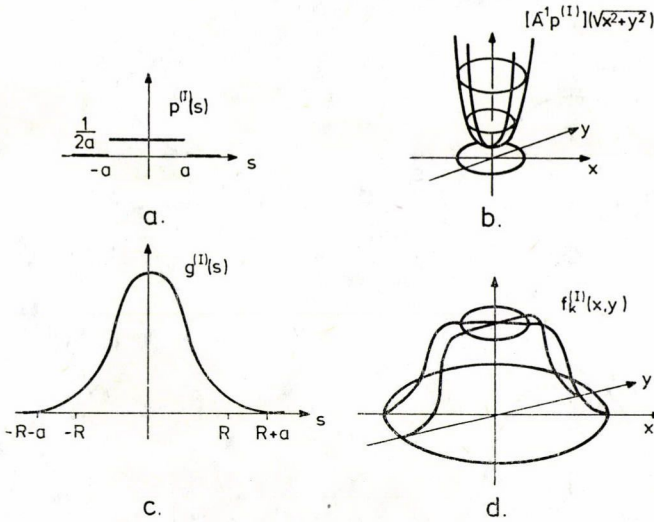
Ilyen torzítási hatás vizsgálatával foglalkozott pl. R. N. BRACEWELL [1] és L. A. SHEPP és J. B. KRUSKAL [14].

A (4.1) szerint torzított vetület:

$$g^{(1)}(s) = g_k(s) * p^{(1)}(s) = \frac{1}{2a} \int_{s-a}^{s+a} g(\sigma) d\sigma$$

és az ebből rekonstruált függvény (3.8) szerint (3. ábra):

$$f_k^{(1)}(x, y) = f_k(x, y) * * [\mathcal{R}^{-1}p^{(1)}](x, y),$$



3. ábra. (a) A véges sáv szélességben konstans érzékenységgű mérési eszközhöz tartozó $p^{(I)}(s)$ torzító függvény, (b) $p^{(I)}(s)$ inverz Abel-transzformáltja, (c) A $p^{(I)}(s)$ függvényvel torzított $g^{(II)}(s)$ vetület; (d) A $g^{(II)}(s)$ függvényből rekonstruált $f_k^{(II)}(x, y)$ függvény

ahol

$$[\mathcal{R}^{-1}p^{(I)}](x, y) = [\mathcal{A}^{-1}p^{(I)}](\sqrt{x^2+y^2}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a \sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}}, & \text{ha } x^2+y^2 \leq a^2 \\ 0 & , \text{ ha } x^2+y^2 > a^2. \end{cases}$$

Az a sáv szélesség változtatásával kapott hatások illusztrálására található példa [8]-ban.

2. Példa. Az $e^{-as^2}/\sqrt{\pi/a}$ függvény szerint változó érzékenységgű mérési eszköz. Ez a modell alkalmazható például a nukleáris medicinai vizsgálatokra használt ún. gammakamerák esetében, amelyek leképezési tulajdonságait bizonyos pontossággal jellemezhetjük a

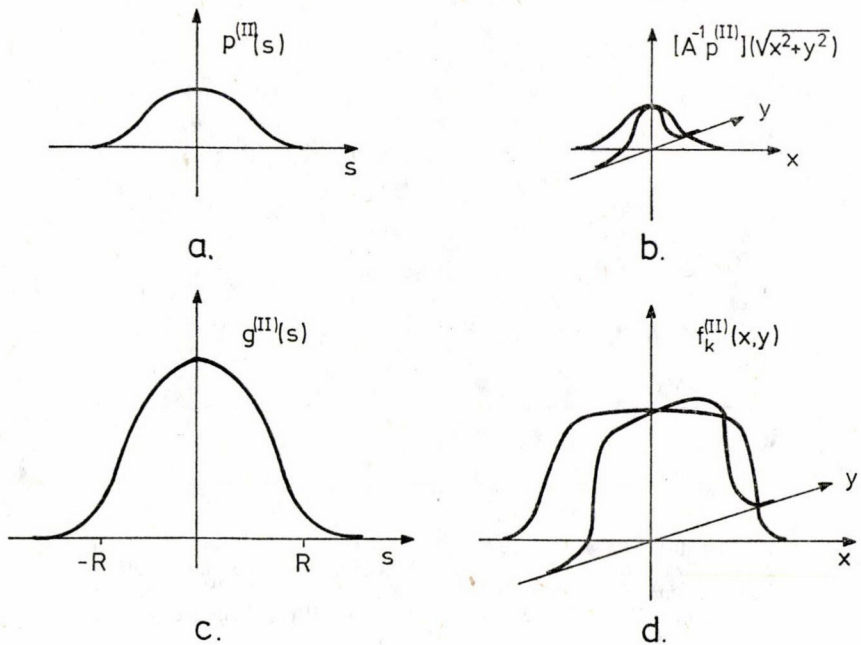
$$p^{(III)}(s, \vartheta) = p^{(III)}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-as^2} \quad (a > 0)$$

torzítási függvényvel. Ekkor

$$g^{(III)}(s) = g_k(s) * \left(\sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot e^{-as^2} \right)$$

lesz a torzított vetület, a rekonstruált függvény pedig (3.8) szerint (4. ábra):

$$f_k^{(III)}(x, y) = f_k(x, y) * * \left(\frac{a}{\pi} \cdot e^{-a(x^2+y^2)} \right).$$



4. ábra. (a) Az $e^{-as^2} \sqrt{\pi/a}$ függvény szerint változó érzékenységsű mérési eszközhöz tartozó torzító függvény; (b) $p^{(III)}(s)$ inverz Abel-transzformáltja; (c) a $p^{(III)}(s)$ függvényt torzított $g^{(III)}(s)$ vetület; (d) a $g^{(III)}(s)$ függvényből rekonstruált $f_k^{(III)}(x, y)$ függvény

IRODALOM

- [1] BRACEWELL, R. N., "Strip integration in radio astronomy", *Australian Journal of Physics* 9 (1957) 198—217.
- [2] BRACEWELL, R. N., "Correction for collimator width (restoration) in reconstructive X-ray tomography", *Journal of Computer Assisted Tomography* 1 (1977) 6—15.
- [3] CROWTHER, R. A., DEROSIER, D. J., KLUG, A., "The reconstruction of a three-dimensional structure from projections and its application to electron microscopy", *Proceedings of Royal Society (London)* A-317 (1970) 319—340.
- [4] GELFAND, I. M., GRAEV, M. I., VILENKIN, N. YA, *Generalized Functions*, vol. 5 (Academic Press, New York and London, 1966).
- [5] HERMAN, G. T., *Image Reconstruction from Projections. Implementation and Applications* (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1979).
- [6] HERMAN, G. T., NATTERER, F., *Mathematical Aspects of Computerized Tomography* (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1981).
- [7] HSIEH, R. C., WEE, W. G., "On methods of three-dimensional reconstruction from a set of radioisotope scintigrams", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-6 (1976) 854—862.
- [8] KUBA, A., CSERNAY L., „Számítógépes tomográfia szimulációja”, (Neumann János Számítógéptudományi Társaság I. Országos Kongresszusa, Szeged, 1979) 2. kötet, 5—15.
- [9] LUDWIG, L., "The Radon transform on Euclidean space", *Communications on Pure and Applied Mathematics* 19 (1966) 49—81.
- [10] PAPOULIS, A., *The Fourier Integral and its Applications* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1962).

- [11] RADON, J., „Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwäerte längs Gewisser Männigfaltigkeiten“, *Berichte Sächsische Academie der Wissenschaften* (Leipzig) **69** (1917) 262—277.
- [12] RAMACHANDRAN, G., LAKSHMINARAYANAN, A., “Three dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: Application of convolution instead of Fourier transforms”, *Proceedings of the National Academy of U.S.A.* **68** (1971) 2236—2240.
- [13] ROWLAND, S. W., “Computer implementation of image reconstruction formulas”, in [5] 9—79.
- [14] SHEPP, L. A., KRUSKAL, J. B., “Computerized tomography: The new medical X-ray technology”, *American Mathematical Monthly* **85** (1978) 420—439.
- [15] SMITH, K. T., SOLMON, D. C., WAGNER, S. L., “Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs”, *Bulletins of the American Mathematical Society* **83** (1977) 1227—1270.
- [16] TER-POGOSSIAN, M. M., PHELPS, M. E., *Reconstruction Tomography in Diagnostic Radiology and Nuclear Medicine* (University Park Press, Baltimore—London—Tokyo, 1977).

(Beérkezett: 1981. december 1.)

KUBA ATTILA

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM, KALMÁR LÁSZLÓ KIBERNETIKAI LABORATÓRIUM
6720 SZEGED, ÁRPÁD TÉR 2.

RECONSTRUCTION FROM LINEARLY DISTORTED PROJECTIONS

A. KUBA

In the applications of the reconstruction from projections we have only distorted data instead of the exact projections, each point of which is a line integral of the function to be reconstructed. If it is possible to describe the effect of this distortion by a suitable convolution performed on projections, i.e. the projections are linearly distorted, then there is a simple explicit expression of the connection between the functions reconstructed from exact and distorted projections. In principle by this expression we can restore the original function from the other one reconstructed from distorted projections.



IMPROPRIUS INTEGRÁLOK NUMERIKUS KISZÁMÍTÁSA

BARANYI LÁSZLÓ

Miskolc

Ebben a dolgozatban egy módszert ismertetünk, amellyel a véges intervallumra vonatkozó improprius integrál értéke tetszőleges pontossággal közelíthető.

1. Bevezetés

Az improprius integrálok kiszámítására többféle módszert dolgoztak ki. Az egyik legismertebb a *Gauss-féle kvadratura* [2]. E módszer hátránya, hogy nehezen gépesíthető; alkalmazásakor szembetalálkozhatunk azokkal a problémákkal, hogyan válasszuk meg a súlyfüggvényt, a vizsgált intervallumon erre ortogónális polinomokat, és hogy hogyan határozzuk meg ezek zérushelyeit. Egy másik kiszámítási mód az, hogy a pólus kis környezetében elhanyagoljuk az integrál értékét. Ennek hátránya, hogy adott pontosság eléréséhez általában „igen közel kell menni” a pólushoz, s az ottani nagy derivált értékek miatt a konvergencia lassú.

Ebben a dolgozatban (s ennek [1] előzményében) egy egyszerű, jól gépesíthető módszert mutatunk be, amellyel egy alsó és egy felső korlátot tudunk adni az improprius integrál értékére, amelyek tetszőleges mértékben közelíthetők egymáshoz.

2. Az improprius integrál számítása

Tekintsük az

$$(2.1) \quad I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b}, \quad 0 < b < 1$$

integrált, ahol az $(x_1, x_2]$ számközben $f(x) > 0$, $f(x_1) = 0$, az f függvény folytonos $[x_1, x_2]$ -ben, $f'(x_1)$ létezik és $\neq 0$. Az ilyen típusú integrálokra a következőt bizonyítjuk.

2.1. SEGÉDTÉTEL. Ha van egy olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy az $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ intervallumon $f''(x)$ létezik és $f''(x) \neq 0$, akkor a (2.1) integrál az alábbi módon becsülhető:

$$R_1(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b} > I > R_2(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b},$$

ha $f''(x) > 0$, $x \in (x_1, x_1 + \varepsilon)$;

$$R_1(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b} < I < R_2(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b},$$

ha $f''(x) < 0$, $x \in (x_1, x_1 + \varepsilon)$,

ahol

$$(2.2) \quad R_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{1-b}}{(1-b)[f'(x_1)]^b},$$

$$(2.3) \quad R_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(1-b)[f(x_1 + \varepsilon)]^b}.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő függvényeket:

$$(2.4) \quad f_1(x) = \begin{cases} f'(x_1)(x - x_1), & \text{ha } x_1 \leq x \leq x_1 + \varepsilon \\ f(x), & \text{ha } x_1 + \varepsilon < x \leq x_2 \end{cases}$$

$$(2.5) \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{f(x_1 + \varepsilon)}{\varepsilon}(x - x_1), & \text{ha } x_1 \leq x \leq x_1 + \varepsilon \\ f(x), & \text{ha } x_1 + \varepsilon < x \leq x_2. \end{cases}$$

Látható, hogy (2.4)-ben az érintőjével, (2.5)-ben a húrjával helyettesítettük az $f(x)$ függvényt az $[x_1, x_1 + \varepsilon]$ zárt intervallumon. A (2.1)–(2.5) kifejezések alapján írhatjuk:

$$(2.6) \quad I_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{[f_1(x)]^b} = R_1(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b},$$

$$(2.7) \quad I_2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{[f_2(x)]^b} = R_2(\varepsilon) + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b}.$$

A második deriváltakra tett feltevés következtében az $f_1(x)$, $f_2(x)$ függvények egyike majorálja, másika pedig minorálja az $f(x)$ függvényt az $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ intervallumon, így a (2.6), (2.7) integrálok egyike alsó, másika pedig felső korlátja a (2.1) integrálnak. Könnyen belátható, hogy

$$I_1 > I > I_2; \quad \text{ha } f''(x) > 0, \quad x \in (x_1, x_1 + \varepsilon)$$

és

$$I_1 < I < I_2; \quad \text{ha } f''(x) < 0, \quad x \in (x_1, x_1 + \varepsilon).$$

Ha a (2.7) integrálból kivonjuk a (2.6) összefüggés által meghatározott integrált, akkor a következőt kapjuk:

$$I_2 - I_1 = R_2(\varepsilon) - R_1(\varepsilon).$$

Ez a különbség alkalmasan megválasztott ε érték esetén tetszőlegesen kicsivé tehető, mert egyrészt a második tag $0 < b < 1$ miatt zérus határértékű, másrészt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I_2 - I_1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_2(\varepsilon) = \frac{1}{1-b} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{[f(x_1 + \varepsilon)]^b} = \\ &= \frac{1}{1-b} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon}{f(x_1 + \varepsilon) - f(x_1)} [f(x_1 + \varepsilon)]^{1-b} \right\} = \\ &= \frac{1}{1-b} \frac{1}{f'(x_1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(x_1 + \varepsilon)]^{1-b} = 0. \end{aligned}$$

Ez utóbbi határérték zérus volta a segédétel feltételeiből nyilvánvaló, mert az $f(x)$ függvény az $x = x_1$ helyen folytonos is.

Ezzel a segédételt bizonyítottuk.

2.1. Megjegyzés. A (2.1) integrált a (2.6) és (2.7) integrálok számtani közepével közelítve az $E(\varepsilon)$ hibakorlát

$$(2.8) \quad E(\varepsilon) = \frac{1}{2} |R_2(\varepsilon) - R_1(\varepsilon)|,$$

azaz

$$\left| I - \frac{I_1 + I_2}{2} \right| < E(\varepsilon).$$

2.2. Megjegyzés. A 2.1. segédétel egyszerűen kiterjeszhető arra az esetre is, amikor az $f(x)$ függvény zérushelye $x = x_2$. Itt eddig olyan integrálokat vizsgáltunk, amelyeknél az integrandus pólusa az intervallum valamely végpontjában volt. Amennyiben a pólus az intervallum belsejében van, akkor az integrál felosztható két — az előzőekben már tárgyalt — esetre.

2.3. Megjegyzés. Amennyiben az $(x_1, x_1 + \varepsilon)$ intervallumon $f''(x) \equiv 0$, egyébként pedig az $f(x)$ függvényre teljesülnek a 2.1. segédétel előtt megfogalmazott feltételek, akkor azt kapjuk, hogy

$$I = R_1(\varepsilon) + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2} \frac{dx}{[f(x)]^b},$$

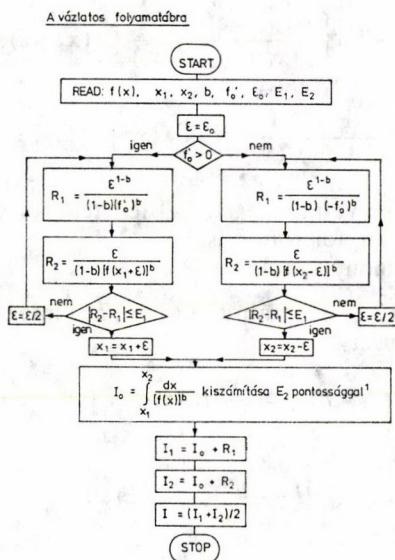
mivel a fent említett intervallumon az $f(x)$ függvény, a húrja és érintője egybeesik.

3. Numerikus példák

Az improprius integrálok numerikus számítására készítettünk egy számítógépes programot FORTRAN programozási nyelven. Az alábbiakban röviden bemutatjuk, hogyan kell a program INPUT adatait előkészíteni; ismertetjük továbbá a program vázlatos működését, majd közlünk néhány konkrét számpéldát.

Az INPUT adatok előkészítése

- Az $f'(x_0)=f'_0$ derivált kiszámítása az $f(x)$ zérushelyénél ($x_0=x_1$ vagy x_2).
- A megkívánt pontosságnak megfelelő E_1 , E_2 hibakorlátok felvétele (l. a folyamatábrát).
- Az ε kezdeti, ε_0 értékének megválasztása.



1. ábra

Néhány példa

Az alábbiakban bemutatjuk néhány improprius integrál közelítő értékét, E hibakorlátját s a hozzá tartozó ε , valamint $R_1(\varepsilon)$ értékeket. Érdeemes megjegyezni, hogy amennyiben a (2.1) integrál értékét az $(x_1 + \varepsilon, x_2)$ intervallumon számított integrállal közelítenénk, akkor az elkövetett hiba közelítőleg az itt leírt $R_1(\varepsilon)$ értékével lenne azonos.

$$a) \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \cong 2,622\,057\,55$$

$$E = 5 \cdot 10^{-9}$$

$$\varepsilon = 6,25 \cdot 10^{-4}$$

$$R_1(\varepsilon) = 4,999\,999\,999\,9 \cdot 10^{-2}$$

¹ L. a 3.1. megjegyzést.

b)

$$I = \int_0^{0,5} \frac{4x dx}{\sqrt{1-4x^2}} \cong 1,000\,000\,0$$

$$E = 5 \cdot 10^{-8}$$

$$\varepsilon = 5,5 \cdot 10^{-6}$$

$$R_1(\varepsilon) = 4,690\,415\,759\,9 \cdot 10^{-3}$$

A pontos megoldás: $I=1$.

c)

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(\operatorname{sh} x)^{0,7}} \cong 3,284\,952\,535$$

$$E = 3 \cdot 10^{-9}$$

$$\varepsilon = 1,25 \cdot 10^{-4}$$

$$R_1(\varepsilon) = 0,224\,880\,474\,60$$

d) Összenyomható közeg kiáramlása tartályból; kifolyási idő.

$$I = \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{5(x^{0,4}-1)}} \cong 1,102\,932\,4,$$

ahol

$$x_2 = 1,577\,440\,966$$

$$E = 5 \cdot 10^{-8}$$

$$\varepsilon = 3,125 \cdot 10^{-5}$$

$$R_1(\varepsilon) = 7,905\,694\,150\,5 \cdot 10^{-3}$$

A pontos megoldás:

$$I = \frac{\sqrt{5}}{8} [x_2^{0,2}(3 + 2x_2^{0,4})\sqrt{x_2^{0,4}-1} + 3\operatorname{arsh}(\sqrt{x_2^{0,4}-1})] \cong 1,102\,932\,428.$$

e) Összenyomhatatlan folyadék kifolyása tartályból; kifolyási idő.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{30}{7}x(1-x^{14})}} \cong 1,013\,105$$

$$E = 5 \cdot 10^{-7}$$

$$\varepsilon_b = 0,3$$

(ε a bal oldali pólusnál)

$$R_{1b}(\varepsilon_b) = 0,529\,150\,262\,2$$

(A bal oldali pólusra vonatkozó $R_1(\varepsilon)$)

$$\varepsilon_j = 8 \cdot 10^{-5}$$

(ε a jobb oldali pólusnál)

$$R_{1j}(\varepsilon_j) = 2,309\,401\,1 \cdot 10^{-3}$$

(A jobb oldali pólusra vonatkozó $R_1(\varepsilon)$)

3.1. Megjegyzés. Az I_0 integrált úgy számítjuk, hogy az integrálási intervallumot több, a pólustól távolodva növekvő hosszúságú részintervallumra osztjuk, s ezeken az integrálást a *Romberg-féle közelítő integrációs módszerrel* végezzük. Jelenleg mindössze három részintervallum van; ezek hosszát az integrandust tekintetbe véve célszerűen a következő módon választottuk: 10ε ; $0,01(x_2 - x_1 - 11\varepsilon)$; $0,99(x_2 - x_1 - 11\varepsilon)$. A részintervallumok számának növelésével az adott pontosság eléréséhez szükséges számítási munka csökkenthető.

Végül megköszönöm KIS OTTÓ és VINCZE ENDRE professzoroknak a dolgozat megírásához adott igen értékes tanácsaikat.

IRODALOM

- [1] BARANYI, L., "Approximate calculation of improper integrals", *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Miskolc, Series D. Natural Sciences* 35 (1982) 39—42.
 [2] RALSTON, A., *A First Course in Numerical Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1965).

(Beérkezett: 1982. június 10.)

BARANYI LÁSZLÓ
 NME ÁRAMLÁS- ÉS HŐTECHNIKAI GÉPEK TANSZÉKE
 3515 MISKOLC-EGYETEMVÁROS

NUMERICAL EVALUATION OF IMPROPER INTEGRALS

L. BARANYI

In this paper a method is shown for the computation of improper integrals over a finite interval.

VÉGES ELEMES MÓDSZERE ELLIPTIKUS TÍPUSÚ FELADATOK MEGOLDÁSÁRA

FARAGÓ ISTVÁN

Gödöllő

A dolgozatban áttekintést szeretnénk nyújtani a véges elemes módszeréről és annak elliptikus típusú feladatokra történő alkalmazásáról. Bevezetjük a feladat kitűzésére és megoldására vonatkozó fogalmakat és a *Ritz-módszerből* kiindulva matematikai, numerikus, algoritmikus és számítástechnikai oldalról egyaránt elemezzük a véges elemes módszert. Az elméleti becsléseken túl konkrét példák megoldásával is illusztráljuk a módszer kedvező tulajdonságait.

1. Bevezetés

Cikkünkben az

$$(1.1) \quad Lw = f$$

lineáris operátoregyenlet megoldásával foglalkozunk. A feladat *klasszikus megoldásának* azt az $u \in \text{dom } L$ elemet nevezzük, amelyet az L operátor $f \in \text{im } L$ -be képez le. A továbbiakban a klasszikus megoldás fogalmát általánosítjuk.

Legyen V a $H(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) *szeparábilis Hilbert-térben* sűrű altér és valamely rögzített $v_0 \in V$ elem mellett tekintsük az (Lu, v_0) lineáris funkcionált. Jelölje $H_E \subset H$ azon u elemek halmazát, amelyekre ez a funkcionál értelmes. Nyilvánvaló, hogy $H_E \supset \text{dom } L$, valamint (V és L megválasztásától függően) ezen tartalmazás valódi tartalmazást is jelenthet. Azaz

$$(1.2) \quad \text{dom } L \subset H_E \subset H \quad \text{sűrűn.}$$

Jelölje a továbbiakban

$$(1.3) \quad \Phi(u, v) = (Lu, v)$$

a $\text{dom } \Phi = H_E \times V$ halmazon értelmezett bilineáris funkcionált.

1.1. DEFINÍCIÓ. Azt az $u^* \in H_E$ elemet, amelyre

$$(1.4) \quad \Phi(u^*, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

fennáll, az (1.1) egyenlet *általánosított megoldásának* nevezzük.

Közvetlenül látható, hogy

- az (1.1) feladat klasszikus megoldása (ha az létezik) egyben általánosított megoldás is;
- ha az (1.1) feladatnak létezik klasszikus megoldása, akkor nem létezik attól különböző általánosított megoldása;
- ha a $H_E \supset \text{dom } L$ valódi tartalmazást jelent és az (1.1) feladatnak nincs klasszikus megoldása, akkor létezik általánosított megoldása.

Ezek alapján nem célszerű megkülönböztetni egymástól a klasszikus és az általánosított megoldást; a továbbiakban egységesen a *megoldás* kifejezést használjuk.

Általában *feltételezzük*, hogy az (1.1) feladatnak (vagy ami most már vele ekvivalens, az (1.4) feladatnak) létezik megoldása H_E -ben és célunk ezen — feltételezetten létező — megoldás megkeresése. Az egyenlet közvetlen megoldása helyett most más megközelítési módot választunk: megadunk egy olyan funkcionált, amelynek minimuma (ha ez létezik) az (1.1) egyenlet megoldása. Több ilyen funkcionál is megadható:

a) Tekintsük $H_E \subset H$ -n a

$$(1.5) \quad Q(W) = (LW - f, LW - f)$$

funkcionált.

1.1. ÁLLÍTÁS. Ha a Q funkcionálnak létezik $u^* \in H_E$ minimumeleme, akkor az megoldása az

$$(1.6) \quad L^*LW = L^*f$$

egyenletnek.

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló, ugyanis a feltételek alapján $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall v \in H_E$ esetén:

$$Q(u^*) \leq Q(u^* + \varepsilon v),$$

ami (ha az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy H valós Hilbert-tér) a

$$Q(u^*) \leq Q(u^*) + 2\varepsilon(Lu^* - f, Lv) + \varepsilon^2(Lv, Lv)$$

összefüggést jelenti. Hogy ez minden ε -ra igaz legyen, nyilvánvalóan

$$(Lu^* - f, Lv) = 0 \quad \forall v \in H_E$$

azaz

$$(1.7) \quad (L^*Lu^* - L^*f, v) = 0 \quad \forall v \in H_E,$$

ami állításunk igazolását jelenti.

Vegyük észre, hogy az 1.1. állításban feltesszük, hogy létezik a funkcionálnak minimumhelye. Ugyanakkor létezik a lineáris operátoroknak egy olyan osztálya, amelynek minden eleméhez hozzárendelhető (megfeleltethető) egy minimumhellyel garantáltan rendelkező funkcionál és ez a minimumhely egyben az egyenlet megoldása.

b) Tekintsük ezt az osztályt.

1.2. DEFINÍCIÓ. Tekintsük az $L: H \rightarrow H$ szimmetrikus operátort, amelyre $\text{dom } L$ sűrű H -ban. Az L operátort szigorúan pozitív definit operátornak nevezzük, ha létezik olyan $c > 0$ állandó, hogy

$$(1.8) \quad (Lu, u) \geq c(u, u) \quad \forall u \in \text{dom } L$$

Ha L szigorúan pozitív definit operátor, akkor megmutatható [7], hogy az (1.1) egyenletnek mindig létezik az L operátor H_L energetikai terében egyetlen megoldása és ez minimalizálja az

$$(1.9) \quad I(u) = [u, u]_L - 2(f, u)$$

ún. energetikai funkcionált, ahol $[\cdot, \cdot]_L$ a H_L -en értelmezett skaláris szorzatot jelöli.

1.1. *Megjegyzés.* Mint ismeretes, az L szigorúan pozitív definit operátornak létezik \tilde{L} önadjungált kiterjesztése. Megmutatható, hogy H_L az \tilde{L} operátor értelmezési tartománya (azaz $\text{dom } \tilde{L} = H_L$) és u^* az $\tilde{L}w = f$ H_L -re kiterjesztett feladat (klasszikus) megoldása. Így az is nyilvánvaló, hogy ha L önadjungált operátor, akkor mindig létezik (klasszikus) megoldás $\text{dom } L = H_L$ -ben [9].

1.2. *Megjegyzés.* Vegyük észre a Q és I közötti különbséget! Az (1.6) egyenlet L^*L operátora nem szigorúan pozitív definit, csak pozitív definit, azaz $(L^*Lu, u) \geq 0 \forall u \in \text{dom } L$; így a szigorúan pozitív definit operátorra vonatkozó egzisztencia és unicitás állítás nem érvényes.

Ugyanakkor közvetlenül belátható, hogy ha L^*L szigorúan pozitív definit operátor, akkor az (1.5) alakú Q funkcionál és az (1.6) egyenletnek megfelelő

$$(1.9') \quad I(u) = (L^*Lu, u) - 2(L^*f, u)$$

funkcionál minimumhelyei megegyeznek. A fentiekben említett egzisztencia és unicitási kérdésen túli probléma az L^*L operátor megjelenése. (Pl. differenciáloperátorok esetén ez az egyenlet rendjének megkétszereződését jelenti és ez numerikus szempontból nagyon előnytelen.)

Az (1.1) feladat pontos megoldásának előállítását — általános esetben — nem lehetséges. Ezért a pontos megoldás helyett közelítő megoldást keresünk, pontosabban diszkretizáció segítségével felépítjük a közelítő megoldások sorozatát.

1.3. DEFINÍCIÓ. Legyen $E_n \subset H$ ($n \in \mathbb{N}^+$, ahol \mathbb{N}^+ a természetes számok halmaza) és $\dim E_n = n$. Azt mondjuk, hogy az $(E_n) \subset H$ sorozat *sűrű* H -ban, ha $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall u \in H$ esetén létezik olyan $N = N(\varepsilon, u) \in \mathbb{N}^+$, hogy

$$(1.10) \quad \min_{v_n \in E_n} \|u - v_n\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

(Tehát az E_n sorozat — dimenziójának növelésével — mintegy „kitölti” a H teret.)

A diszkretizáció megvalósítása a következő. Válasszunk meg két sorozatot: (S_n) legyen sűrű H_E -ben, (V_n) pedig legyen sűrű V -ben. Az (S_n) sorozatot próba-függvények terének, a (V_n) sorozatot pedig a tesztelő függvények terének nevezik. Ekkor az (1.1) egyenlet megoldása helyett a vele kimutatottan ekvivalens (1.4) egyenlet

$$(1.11) \quad \Phi(w_n^*, v_n) = (f, v_n) \quad \forall v_n \in V_n$$

diszkretizált alakjának keressük a megoldását S_n -ben (mindegyik rögzített n érték mellett). Feltéve, hogy (1.11)-nek minden n -re létezik $u_n^* \in S_n$ megoldása, nyerünk egy (u_n^*) sorozatot.

Tegyük fel, hogy

a) az (1.1) feladatnak létezik $u^* \in H_E$ megoldása;

b) az (1.11) feladatnak $\forall n$ -re létezik u_n^* megoldása.

Ekkor megfogalmazhatók a diszkretizációs módszerek alapvető kérdései:

a) tart-e az $(u_n^*) \subset H_E$ sorozat u^* -hoz?

b) milyen ez a konvergencia?

Megjegyezzük, hogy végső soron valamennyi vizsgálat ezen kérdések megválaszolására irányul.

1.3. *Megjegyzés.* Gyakori az az eset, amikor a tesztelő függvények és próba-függvények terei megegyeznek. Ekkor minden lépésben az

$$(1.11') \quad \Phi(w_n, v_n) = (f, v_n) \quad \forall v_n \in S_n$$

egyenlet megoldását kell meghatározni S_n -ben. Ezt a módszert *Galjorkin-módszernek* nevezzük.

A továbbiakban a már említett szigorúan pozitív definit operátorú feladatok megoldásával foglalkozunk. Ez lényegesen leegyszerűsíti tárgyalásunkat, ugyanis ebben az esetben a diszkretizálásra tett a) és b) feltételektől eltekinthetünk, mivel azok a priori teljesülnek. Az a) feltétel teljesülését már tárgyaltuk. Térjünk ki a b) feltételre! Nyilvánvaló, hogy a diszkretizálás ebben az esetben minden egyes n -re a megfelelő I funkcionál S_n -en való minimalizálását jelenti, azaz (1.11) ebben az esetben a $\min_{w_n \in S_n} I(w_n)$ feladat megoldását jelenti. Megmutatható [9], hogy mindig létezik az u_n^* minimum S_n -en, amely nem más, mint az u^* megoldás S_n -beli ortogonális vetülete, azaz az u^* H_L -beli *Fourier-sorának* n -edik szelete. Az így felépített (u_n^*) sorozatot *minimalizáló sorozatnak* nevezzük és — éppen fenti tulajdonsága miatt — H_L normájában konvergál u -hoz. (A H és H_L normái közötti viszony alapján közvetlenül belátható, hogy ekkor H -ban is igaz a konvergencia.)

A továbbiakban elliptikus típusú differenciálegyenletekre kitzőtt peremérték-feladatok megoldására alkalmazzuk az eddigi eredményeinket. Alkalmos függvényter megválasztása mellett az ilyen feladatok operátorai szigorúan pozitív definitek [7]; azaz összefoglalva eddigi eredményeinket: a feladat operátora által meghatározott energetikai térben létezik megoldás és azt meghatározhatjuk a megfelelő (1.9) alakú energetikai funkcionál minimalizálásával. Ehhez felépítünk egy, az energetikai térben sűrű véges dimenziós altérsorozatot és lépésenként ezeken minimalizáljuk a funkcionálunkat. Az így nyert minimalizáló sorozat az eredeti tér és az energetikai tér normájában egyaránt konvergál a megoldáshoz.

Konkrét operátorok esetén az energetikai tér — annak matematikai tartalmának következtében — közvetlenül felépíthető. A minimalizáló eljárások — lényegüket illetően — az S_n sorozat megadásában különböznek.

A *Ritz-módszer* esetén ezen alterek sorozatát bázisfüggvények segítségével adjuk meg. A véges elem módszer más metodikát követ — a minimalizálásokat a feladattól közvetlenül független, állandó alterekben végezzük el.

2. Egy speciális Ritz-módszer

Az előző szakasz alapján a *Ritz-módszer* algoritmus aránylag egyszerűen megadható. Legyen az (1.1) feladat L operátora szigorúan pozitív definit. Defináljunk egy $(\varphi_i) \subset H_L$ teljes rendszert és legyen $S_n = L[\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ elemek lineáris burka. Ekkor közvetlenül belátható [7], hogy

$$(2.1) \quad u_n^* = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$$

ahol az $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ ismeretlen együtthatóvektort az

$$(2.2) \quad \mathbf{R}_n \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával nyerjük, ahol

$$\mathbf{R}_n = [[\varphi_i, \varphi_j]_L]_{i,j=1}^n; \mathbf{b} = [(f, \varphi_1), \dots, (f, \varphi_n)]^T.$$

2.1. *Megjegyzés.* Ebben az esetben u_n^* az u^* (φ_i) szerinti *Fourier-sorának* n -edik szelete:

$$u_n^* = \sum_{i=1}^n [u^*, \varphi_i]_L \varphi_i$$

Természetesen (S_n) megadható oly módon is, hogy a bázisfüggvényeket minden egyes lépésnél újra választjuk, azaz:

$$(2.4) \quad S_n = \mathcal{L}[\varphi_1^{(n)}, \dots, \varphi_n^{(n)}]$$

Ekkor a ($\varphi_i^{(n)}$) rendszerekre vonatkozó feltétel ekvivalens a teljesség feltételével: az (S_n) sorozatnak sűrűnek kell lenni H_L -ben. Az irodalomban a *Ritz-módszer* keretében általában az első módszert tárgyalják. Mi a második, általánosabb megoldási móddal foglalkozunk, mivel ez vezet el a véges elemek módszeréhez. Mielőtt egy ilyen jellegű *Ritz-módszert* ismertetnénk, röviden hasonlítsuk össze a *Ritz-módszert* az általánosan elterjedt véges differenciák módszerével (VDM). Az összevetés eredményeként a *Ritz-módszerre* vonatkozóan a következőket tapasztaljuk:

a) *Előnyei:*

1. megfelelő rendszer megadása esetén a *konvergencia* biztosított;
2. a közelítő megoldást folytonos alakban szolgáltatja, így a megoldási tartomány *mindegyik pontjában* a közelítő *függvényérték* és *deriváltak értékei* közvetlenül meghatározhatók;
3. *ortonormált rendszer* megadása esetén a közelítés közvetlenül, a lineáris algebrai *egyenletrendszer megoldása nélkül* meghatározható.

b) *Hátrányai:*

1. *Eleve szükséges egy teljes rendszer*, amit általában nehéz, vagy egyenesen lehetetlen megadni (bonyolult megoldási tartományok, peremfeltételek esetén);
2. minden lépésnél — általános bázisfüggvény-rendszer esetén — egy (2.2) alakú, *teljes R_n mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldása* szükséges (VDM esetén a mátrixok sparsemátrixok);
3. a *numerikus stabilitás* biztosításához a rendszer teljességén kívül további megszorítások szükségesek [8].

További vizsgálódásunk tárgyát a következő, lineáris, másodrendű közönséges differenciálegyenletre kitzűött kétpontos peremérték feladat numerikus megoldása képezi:

$$(2.5) \quad -(pu')' + qu = f \quad 0 < x < \pi$$

$$(2.6) \quad u(0) = u'(\pi) = 0$$

Tegyük fel, hogy $p(x) \cong p_0 > 0$; $q(x) \cong 0$; $0 \leq x \leq \pi$. Legyen:

$$(2.7) \quad Lv = -(pv')' + qv$$

$$(2.8) \quad \text{dom } L = \{v \in C^2[0, \pi]; v(0) = v'(\pi) = 0\}$$

$$H = H^0(0, \pi)$$

Ekkor a (2.5), (2.6) feladat felírható (1.1) alakban és megmutatható, hogy L szigorúan pozitív definit operátor,

$$(2.9) \quad H_L = \{v \in H^1(0, \pi); v(0) = 0\},$$

$$(2.10) \quad [u, v]_L = \int_0^\pi (pu'v' + quv) dx \quad \forall u, v \in H_L,$$

$$(2.11) \quad I(w) = \int_0^\pi (pw'^2 + qw^2 - 2wf) dx.$$

2.2. *Megjegyzés.* A (2.10) skaláris szorzat által indukált norma az $u_n^* \rightarrow u^*$ H_L -beli konvergenciának a

$$(2.12) \quad \int_0^\pi [p(u^{*'} - u_n^{*'})^2 + q(u^* - u_n^*)^2] dx \rightarrow 0$$

konkrét tartalmat adja, ami azt jelenti, hogy a H_L -beli konvergencia ekvivalens a $H^1(0, \pi)$ -beli konvergenciával.

A (2.11) alakú $I(w)$ funkcionál minimalizálására válasszuk meg az (S_n) H_L -beli sűrű atérsorozatot!

Először legyen $S_n = P_n(0, \pi)$. (Nyilvánvaló, hogy (S_n) sűrű H_L -ben.) Ekkor $\varphi_i(x) = x^i$ és a megoldandó (2.2) egyenletrendszer mátrixának r_{ij} eleme (feltételezve, hogy p és q állandó):

$$r_{ij} = \frac{pij\pi^{i+j-1}}{i+j-1} + \frac{q\pi^{i+j+1}}{i+j+1},$$

alakban áll elő, azaz az R_n mátrix elemei $(i+j-1)^{-1}$ alakúak. Ez a nevezetes *Hilbert-mátrix*, ami a gyakorlati realizálást (rendkívül rossz kondicionáltsága miatt) lehetlenné teszi [2]. Így példát találtunk arra, hogy egy teljes rendszer — a polinomok rendszere — numerikus szempontból használhatatlan.

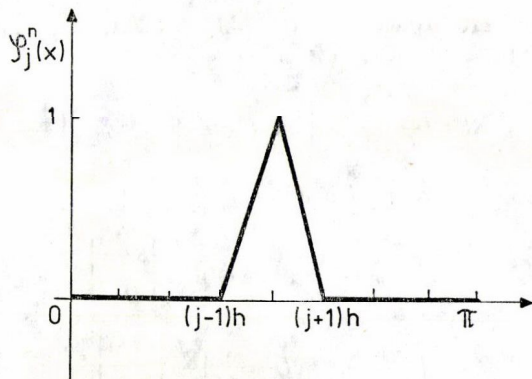
Válasszuk meg egy másik rendszert. (Ez már az általános bázisfüggvény megválasztáshoz kapcsolódik.)

Legyen $x_i = ih$ ($i=0, 1, \dots, n$), ahol $h = \frac{\pi}{n}$ (így $x_0=0$ és $x_n=\pi$). Ezek az ún. csomópontok. H_L (2.9) felépítéséből következik, hogy azok a függvények, amelyek

- a $((j-1)h, jh)$ intervallumokon szakaszosan lineárisak;
- az x_j csomópontokban folytonosak;
- az $x_0=0$ pontban nulla értékűek

H_L -beliek. Jelölje S_n az ilyen tulajdonságú H_L -beli elemek terét.

Legyen $\varphi_j^{(n)}(x)$ ($j=1, 2, \dots, n$) a következő függvény:



Ekkor minden $v_n \in S_n$ függvény előállítható:

$$(2.13) \quad v_n(x) = \sum_{j=1}^n q_j \varphi_j^{(n)}(x)$$

alakban, azaz $(\varphi_j^{(n)}(x))$ bázis S_n -ben. Az S_n -tér ilyen felépítéséből látszik, hogy az nem más, mint a lineáris spline-ok tere, ami viszont sűrű H_L -ben [5]; így a *Ritz-módszer* alkalmazható.

2.3. *Megjegyzés.* A $(\varphi_j^{(n)}(x))$ rendszert *lokális bázisnak* nevezzük, mivel elemeinek tartója egy eléggé kicsi, $2h$ hosszúságú intervallumra esik:

$$(2.14) \quad [\varphi_j, \varphi_k]_L = 0 \quad \forall k: |j-k| > 1$$

és így a *Ritz-mátrix* sávszélessége 1. A $(\varphi_j^{(n)}(x))$ függvény felépítéséből következik, hogy

$$(2.15) \quad v_n(x_j) = q_j,$$

ami az ismeretlen q_j együtthatók közvetlen fizikai értelmezését is lehetővé teszi (pl. q_j és x_j csomópontbeli elmozdulás).

A továbbiakban építsük fel a közelítő megoldást S_n -ben. (Az algoritmus könynyebb áttekinthetőségének kedvéért $p=q=1$ esetet tekintjük.)

A *Ritz-funkcionál*

$$(2.16) \quad I(w) = \int_0^\pi (w'^2 + w^2 - 2fw) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} (w'^2 + w^2 - 2fw) dx$$

alakú. Ha a közelítést az S_n -ben keressük, akkor

$$(2.17) \quad \int_{(j-1)h}^{jh} v_n^2 dx = \frac{h}{3} (q_j^2 + q_j q_{j-1} + q_{j-1}^2),$$

$$\int_{(j-1)h}^{jh} v_n'^2 dx = \frac{(q_j - q_{j-1})^2}{2}.$$

Vezessük be a következő \mathbf{K}_0 és \mathbf{K}_1 mátrixokat (ezeket az (x_{j-1}, x_j) elem tömeg- illetve merevségi mátrixának nevezzük):

$$(2.18) \quad \mathbf{K}_0 = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor (2.17) felírható a következő alakban:

$$(2.19) \quad \int_{(j-1)h}^{jh} v_n'^2 dx = [q_{j-1}, q_j] \mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} q_{j-1} \\ q_j \end{bmatrix}$$

$$\int_{(j-1)h}^{jh} v_n^2 dx = [q_{j-1}, q_j] \mathbf{K}_0 \begin{bmatrix} q_{j-1} \\ q_j \end{bmatrix}$$

2.4. *Megjegyzés.* Általános esetben — amikor az együtthatók nem állandók — \mathbf{K}_0 és \mathbf{K}_1 az $[x_{j-1}, x_j]$ elem sorszámától is függ, azaz \mathbf{K}_0^j és \mathbf{K}_1^j jelölést kell alkalmazni. Esetünkben ez a felső index elhagyható.

Jelölje $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ az ismeretlen együtthatók vektorát.

Ekkor

$$(2.20) \quad \int_0^\pi v_n'^2 dx = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{q}$$

$$\int_0^\pi v_n^2 dx = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{q}$$

ahol

$$(2.21) \quad \mathbf{K}_1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

és hasonlóan

$$(2.22) \quad \mathbf{K}_0 = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jelölje $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$. Mivel

$$(2.23) \quad \int_0^\pi f v_n dx = \sum_{j=1}^n q_j \int_0^\pi f \varphi_j^{(n)} dx = \mathbf{F}^T \mathbf{q},$$

ahol az \mathbf{F}^T (ún. terhelési vektor) koordinátái:

$$(2.24) \quad F_j = \int_0^\pi f \varphi_j^{(n)}(x) dx,$$

így (2.16), (2.20) és (2.23) alapján felírható

$$(2.25) \quad I(v_n) = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - 2\mathbf{F}^T \mathbf{q}$$

ami \mathbf{q} -ra nézve egy kvadratikus alak. A minimum feltétele:

$$(2.26) \quad \frac{\partial I}{\partial \mathbf{q}} = 0,$$

ami a

$$(2.27) \quad \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}$$

egyenletet eredményezi. A (2.27) ún. véges elemes egyenlet \mathbf{q} megoldásának q_j^* komponensei az ismeretlen együtthatók, azaz

$$(2.28) \quad u_n^* = \sum_{j=1}^n q_j^* \varphi_j^{(n)}(x)$$

A módszer realizálásának egyik alapvető kérdése a (2.24) alakú integrálok meghatározása. Mivel ezek általában explicit alakban nem számíthatók, ezért valamilyen numerikus integráló-formulát alkalmazunk.

Néhány ilyen eljárást ismertetünk.

Tekintsük az f függvény S_n -beli interpolációját:

$$f_I = \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k^{(n)}(x),$$

ahol f_k az f függvény x_k -beli közelítése.) Ha $f \in C(0, \pi)$, akkor $f_k = f(x_k)$. Általában azonban $f \in H^0(0, \pi)$.) Ekkor

$$(2.29) \quad \int_{(j-1)h}^{jh} f_I v_n dx = [f_{j-1}, f_j] \mathbf{K}_0 \begin{bmatrix} q_{j-1} \\ q_j \end{bmatrix},$$

$$\int_0^\pi f_I v_n dx = [f_0, f_1, \dots, f_n] \tilde{\mathbf{K}}_0 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_n \end{bmatrix},$$

ahol $\tilde{\mathbf{K}}_0$ abban különbözik \mathbf{K}_0 -tól, hogy van egy ún. nulladik sora is (mivel $f(0)$ általában nem nulla). Figyelembe véve $\tilde{\mathbf{K}}_0$ alakját a közelített integrál komponenseire:

$$(2.30) \quad F_j = \frac{h}{6} (f_{j-1} + 4f_j + f_{j+1})$$

adódik, amely a jól ismert *Simpson-képlet*. Az f függvény kvadratikus interpolációjával a következő közelítő alak nyerhető (COLLATZ):

$$(2.31) \quad \bar{F}_j = \frac{h}{12} (f_{j-1} + 10f_j + f_{j+1})$$

Megjegyezzük, hogy e (2.31) képlet esetünkben nem természetes, mivel a megoldás közelítésére lineáris elemeket használunk, míg az integráláshoz másodfokúakat. A másodfokú közelítéssel nyert kvadratura formula természetesen magasabb rendben pontos, mint a lineáris közelítéssel nyert numerikus integrálás. Ugyanakkor a továbbiakban belátjuk, hogy ezek alkalmazása nem célszerű: a módszer globális pontosságát a véges dimenziós altér megválasztása határozza meg, így a numerikus integrálás pontossági rendjének növelésével az nem javítható. Gyakran valamilyen direkt numerikus integrálóformulával számolunk:

$$(2.32) \quad \int_0^{\pi} f v_n dx = \sum_i w_i f(\xi_i) v_n(\xi_i)$$

Például igen hatékonyak bizonyulnak az egyenlő súlyokkal és két szimmetrikus alapponttal ($\xi_i = (j + 1/2 \pm 1)h$) számoló *Gauss-kvadraturák*. Az egyponthoz kvadratura szerint

$$(2.23) \quad F_j = \frac{h}{2} (f_{j-1/2} + f_{j+1/2})$$

adódik.

Ha a legegyszerűbb numerikus integrálást — a trapézformulát alkalmazzuk, akkor a véges differenciák módszerét reprodukáljuk.

2.5. *Megjegyzés.* Az ismertett integrálók formulák alkalmazása szükséges abban az esetben is, ha a minimalizálandó funkcionálban függvényegyütthetők is szerepelnek.

3. Véges elemek módszere

Az előző szakaszban ismertetett speciális, szakaszonként lineáris *Ritz-módszeres* közelítés algoritmusában vegyük észre, hogy a (2.27) véges elemes lineáris egyenletrendszer összeállításához *nem szükséges a bázisfüggvények explicit megadása*, mindvégig a bázisfüggvényekre vonatkozólag csak két információt használtunk fel: olyan alteret generál, amelynek elemei

a) részintervallumonként lineárisak (azaz a bázisfüggvények maguk is lineárisak és lokális tartójúak);

b) a (2.13) típusú közelítés ismeretlen együtthetőire teljesül (2.15) (azaz a bázisfüggvények a tartójuk középpontjában levő csomópontban 1 értéket vesznek fel).

(A b) tulajdonság következménye, hogy abban az esetben, ha a közelített értékeket csak a kijelölt csomópontokban szükséges meghatározni, akkor a (2.28) közelítő megoldás generálása nem szükséges.)

Az ismertetett módszer természetes módon általánosítható, mégpedig oly módon, hogy a közelítő polinomok fokszámát tetszőleges k -adrendűnek választjuk. Legyen tehát $v_n \in S_n$, ahol $S_n = P_k^h \cap H_L$. (Azaz csak azon szakaszonként k -adfokú polinomok körében keressük a közelítő megoldást, amelyek a feladat által meghatározott globális simasági feltételnek és *peremfeltételnek* eleget tesznek.) A $[0, \pi]$ intervallumot

bontsuk fel a (nem feltétlenül ekvidisztáns) $(x_i)_{i=0}^N$ pontokkal: $[0, \pi] = \bigcup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i]$.

Vegyük észre, hogy $P_k^h [0, \pi]$ a k -adfokú polinomiális spline-ok tere.

Megmutatható [5], hogy

a) ha H_L valamilyen rendű Szoboljev-tér, illetve annak valamilyen sűrű altere (tehát valamilyen szigorúan pozitív definit differenciáloperátor által generált energetikai tér és — ha léteznek — a fő peremfeltételek), akkor létezik olyan megfelelő globális simaságú polinomiális spline-tér, amely sűrű H_L -ben;

b)

$$(3.1) \quad \dim P_k^h(0, \pi) = z(N+1),$$

ahol $z-1$ a $v_n \in P_k^h$ elemek globális simasága (azaz a x_i pontokban az $[x_{i-1}, x_i]$ és az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumokon k -adfokú polinomok $(z-1)$ -edrendben érintkeznek, tehát $H_L \subset H^{(z)}$, ahol $H^{(z)}$ a z -indexű Szoboljev-teret jelöli.

c) létezik olyan $\dim P_k^h$ számú, bázist alkotó elem a térben, amelyik

— lokális tartójú és intervallumonként k -adfokú polinom,

— a tartója középpontjában levő csomópontban a függvény (ill. megfelelő deriváltjának) értéke 1.

Így a) következtében közelíthetünk S_n -ben. A (3.1) képletből látható, hogy $\dim S_n$ a felbontások számával (N) és a közelítő polinomok fokszámával (k , és így z) együtt növekszik. A c) tulajdonságok következtében ismételen elkerülhetjük a bázisfüggvények közvetlen megadását, azaz a $\dim S_n$ számú bázisfüggvényre felírt (2.15) típusú tulajdonságot mint *feltételt* megadva meghatározhatjuk a közelítésünket. A feltételek megadásáról a következőket jegyezzük meg.

a) Nemcsak a közelítő függvény csomópontbeli értékét adhatjuk meg, hanem deriváltjait is. Például egyidejűleg megadhatók a

$$(3.2) \quad v_n(x_i) = q_i$$

$$3.3 \quad v'_n(x_i) = q'_i$$

feltételek. A (3.2), illetve (3.3) feltételek olyan $\varphi_i^n(x)$ és $\psi_i^n(x)$ bázisfüggvényeknek a tulajdonságai, amelyekre

$$(3.4) \quad \varphi_i^n(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{és} \quad (\varphi_i^n)'(x_j) = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N,$$

illetve

$$(3.5) \quad \psi_i^n(x_j) = 0 \quad \text{és} \quad (\psi_i^n)'(x_j) = \delta_{ij}.$$

Ekkor tehát az x_i csomópontokhoz két bázisfüggvény is tartozik. (Az ilyen csomópontokat kettős csomópontnak nevezzük.)

b) A megadott feltételek rendszere nem lehet szinguláris, azaz az összes feltétel számának meg kell egyeznie $\dim S_n$ -nel, valamint mindegyik részintervallumon a közelítő polinomot egyértelműen elő kell tudni állítania.

c) A feltételrendszert a H_L tér (azaz L operátorunk) szabályozza (mivel $S_n \subset H_L$), tehát úgy kell kitűzni, hogy S_n a H_L -ben előírt simaságának eleget tegyen.

Tekintsünk néhány feltételrendszert.

1. TÁBLÁZAT

| Spline-tér | Elem-típus | Jelölés | Elnevezés |
|------------|------------|---------|--|
| 1. P_1^h | | „e 1—2” | egydimenziós lineáris elem |
| 2. P_2^h | | „e 2—3” | egydimenziós másodfokú elem |
| 3. P_3^h | | „e 3—4” | egydimenziós harmadfokú Lagrange-típusú elem |
| 4. P_3^h | | „e 3—2” | egydimenziós harmadfokú Hermite-típusú elem |

Ellenőrizzük, hogy ezek valóban nem szingulárisak.

Tegyük fel, hogy $[0, \pi] = \bigcup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i]$.

a) Az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon $P_k^h(0, \pi)$ valamennyi eleme egyértelműen előállítható, mivel az intervallumon k -adfokú polinomra $k+1$ feltételt tűzünk ki ($k=1, 2, 3$).

b) A spline-tér dimenzióját meghatározó (3.1) formula alapján megállapítható, hogy a feltételek száma megegyezik a terek dimenziójával (N az összes csomópont száma).

2. TÁBLÁZAT

| | N | Z | Feltételek száma | $\dim P_k^h$ |
|----|--------|-----|------------------|--------------|
| 1. | $N+1$ | 1 | $N+1$ | $N+1$ |
| 2. | $2N+1$ | 1 | $2N+1$ | $2N+1$ |
| 3. | $3N+1$ | 1 | $3N+1$ | $3N+1$ |
| 4. | $N+1$ | 2 | $2(N+1)$ | $2(N+1)$ |

Nyilvánvaló, hogy magasabb rendben sima függvényosztállyal is közelíthetünk, azaz, ha $H_L \subset H^{(1)}$, akkor mind a négy elemtípus egyaránt alkalmazható. (Ugyanakkor, ha pl. negyedrendű differenciáloperátorunk van, akkor $H_L \subset H^{(2)}$, és ekkor csak az „e 2—3” típusú elemekkel közelíthetünk.)

3.1. *Megjegyzés.* Az S_n tér elemeinek a fő peremfeltételeket ki kell elégíteniük, így ezekben a pontokban nem adhatók meg külön feltételek. Például, ha a (2.5), (2.6) feladatot tekintjük, akkor a (2.9) H_L terének struktúrájából következik, hogy S_n valamennyi elemének az $x_0=0$ pontban nulla értéket kell felvennie. Ekkor S_n dimenziója is eggyel csökken. Általában, ha H_L -ben m számú fő peremfeltétel van és P_k^h -ban közelítünk, akkor $\dim S_n = \dim P_k^h - m$. Ugyanakkor ezekben a pontokban a más típusú feltételeket meg kell adni. Tehát, ha az említett feladat megoldására „e 3—2” típusú elemmel közelítünk, akkor a

$$v'_n(0) = q'_0$$

feltétel megadása szükséges.

3.2. *Megjegyzés.* Mivel a megoldandó lineáris egyenletrendszer mérete $\dim S_n$, látható, hogy a harmadfokú közelítések közül az „e 3—2” típusú a gazdaságosabb. Megadhatók magasabb simasági rendben érintkező spline-terek is. Ezek dimenziója kisebb, mint az említetteké. Ugyanakkor az ilyen típusú feladatok megoldására nem alkalmasak: a bázisfüggvények ilyen implicit megadási módját nem teszik lehetővé. A direkt variációs módszereken belül a *Galjorkin-módszernél* alkalmazhatók.

3.3. *Megjegyzés.* A polinomiális spline-ok bázisfüggvényeit (a már leírtaknak megfelelően, (3.4) és (3.5)-tel analóg módon) a következő módon határozhatjuk meg (ahol szükséges, a csomópontokat átszámozzuk $x_{i(i=1, N^*)-1}$):

a) az „e 1—2”, „e 2—3” és „e 3—4” elemekre

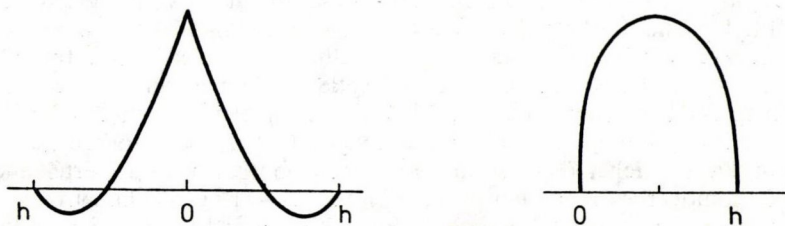
$$(3.6) \quad \varphi_i^n(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N^*,$$

b) az „e 3—2” elemre a (3.4) és (3.5) feltétel.

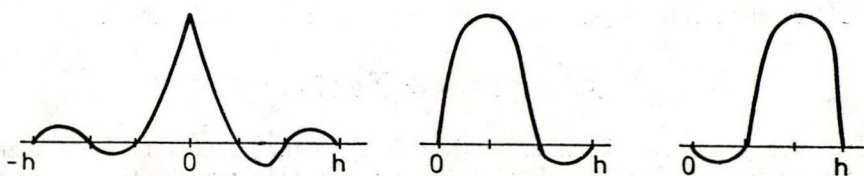
Közvetlenül látható, hogy (3.6), ill. (3.4) és (3.5) nem szinguláris feltételrendszer, valamint az, hogy a meghatározott elemek valóban bázist alkotnak. Ezekből a feltételekből közvetlenül minden egyes térre meghatározható az a rögzített tér, amelyben a közelítéseinket elvégezzük.

Alakjuk 1. esetben az 1. ábrán, a 2., 3., 4. esetekre a 2., 3., 4. ábrán látható.

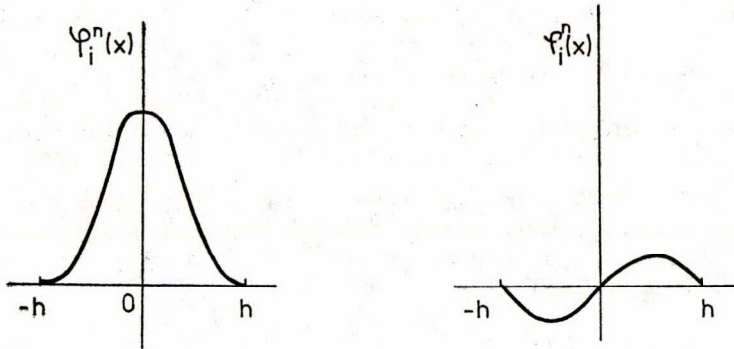
Az x_i csomópontozhoz tartozó bázisfüggvények tartója az $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ intervallumon van, míg az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon belül felvett csomópontok tartója az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumra esik. (Ez a polinomiális spline-okra jellemző tulajdonság. Más spline-ok, pl. a *B-spline*-ok nem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.) Ezért a diskretizációval nyert algebrai lineáris egyenletrendszer (amely (2.2) alakú) ritka mátrixú és a bázisfüggvények (azaz a csomópontok és a hozzárendelt paraméterek) helyes sorszámozása esetén a nullától különböző elemek a diagonális körüli szűk sávban helyezkednek el.



2. ábra. Az „e 2—3” tér bázisfüggvényei



3. ábra. Az „e 3—4” tér bázisfüggvényei



4. ábra. Az „e 3—2” tér bázisfüggvényei

Az eddigi tárgyalásunkat összegezve megállapíthatjuk a következőket. A véges elemek módszere (VEM) alkalmazása során a közelítő elemtípus megválasztásával meghatározzuk azt az interpolációs alteret, amelyben közelítünk, azaz az elemtípus megválasztásának függvényében rögzített térben közelítünk. Ez a tér a feladattól lényegében független, mivel a feladat paraméterei csak azt határozzák meg, hogy a több rögzített típusú tér közül melyikben közelítsünk. A Ritz-módszernél az interpolációs tereket minden feladatra külön meghatározzuk, mégpedig a H_L -beli (φ_i) teljes sorozat segítségével, a 2. szakaszban leírt módon. Mivel a Ritz-módszer bázisfüggvényei H_L -beliek $(\varphi_i \in H_L)$, ezért az általuk (2.4) módon generált S_n — nyilvánvaló módon — altere H_L -nek, azaz a közelítéseket interpolációs alterek sorozatán végezzük el. Természetes, ha (φ_i) teljes H_L -ben, akkor S_n — az (1.3) definíciónak megfelelően — sűrű is H_L -ben.

A VEM rögzített közelítő interpolációs terei — mint azt már említettük — szintén sűrűek H_L -ben és — nyilvánvaló módon — megadhatók bázisfüggvényeik lineáris burkaként. Ugyanakkor vegyük észre azt a lényeges különbséget, amely egyben a Ritz-módszer és a véges elem módszerének elhatárolását is jelenti. Inhomogén fő peremfeltételek esetén a Ritz-módszer közvetlenül nem alkalmazható, mivel nem adható meg H_L -ben teljes rendszer. Például, ha H_L elemeire az $x_0 = g$ ($g \neq 0$) fő peremfeltételt adjuk meg és felvesszünk bármilyen (φ_i) H_L -beli rendszert, akkor ezek lineáris burka nem lehet H_L -ben, mivel az az x_0 pontban nem a g értéket veszi fel. (Ez $g=0$ homogén esetben nem probléma.) Ezért — eléggé körülményes módon — a feladatok peremfeltételeit homogenizálni kell — ami kétdimenziós esetben csak speciális tartományok esetén lehetséges. A VEM ugyanakkor olyan S_n térben közelít, amelyben az adott fő peremfeltételt — inhomogén esetben is ugyanígy — rögzítjük. S_n sűrű marad H_L -ben és így a módszer minden további probléma nélkül alkalmazható. Ha az előző inhomogén peremfeltételt tekintjük, akkor S_n elemei

$$(3.7) \quad v_n(x) = g\varphi_0^n(x) + \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i^n(x)$$

alakúak. (Vegyük észre ebben az esetben, hogy $(\varphi_i^n(x))$ rendszer nem nevezhető teljes rendszernek H_L -ben: csak a $\varphi_0^n(x) \in H_L$; míg a többi nem elégíti ki a fő peremfeltételt, azaz nem H_L -beli.)

Tehát homogén peremfeltételek esetén a VEM csak az algoritmusok realizálásában különbözik az interpolációs alterének bázisfüggvényeit alkalmazó *Ritz-módszertől*, míg inhomogén peremfeltételek esetén a két módszer között elméleti különbség is van.

3.4. Megjegyzés. A *Ritz-módszer* és a VEM egyaránt diszkrétizáló (esetünkben funkcionál-minimalizáló) eljárások. Mivel cikkünk célja elsősorban ezen *módszerek* vizsgálata, nincs lehetőségünk részletesebben foglalkozni azzal a kérdéssel, amely inhomogén peremfeltételek esetén joggal felmerülhet, nevezetesen azzal, hogy ekkor az operátor értelmezési tartománya nem vektortér, azaz az operátor nem lineáris.

Legyen L_0 homogenizált peremfeltételű feladat operátora szigorúan pozitív definit. Ekkor megmutatható [7], hogy a H_{L_0} -ban indukált energetikai funkcionál segítségével felírható egy olyan funkcionál, amelynek létezik minimuma az inhomogén fő peremfeltételeket kielégítő H_{L_0} -lal megegyező simaságú H_L halmazon.

Ez a funkcionál és H_L közvetlenül, a homogenizálás végrehajtása nélkül meghatározható, ezért egyszerűsítettük tárgyalásunkat az energetika funkcionál H_L -beli minimalizálására.

A VEM elméletét összefoglaló szakasz befejezésében a közelítő megoldásra adunk meg hibabecslést [4].

3.1. ÁLLÍTÁS. Legyen u_I az $u \in H_L$ függvény $P_k^h(x)$ -beli interpolációja. Ekkor

$$(3.8) \quad \|u - u_I\|_0 \leq C \cdot h^{k+1} \|u^{(k+1)}\|_0$$

és

$$(3.9) \quad \|u - u_I\|_s \leq C \cdot h^{k+1-s} \|u^{(k+1)}\|_0$$

ahol $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} |x_{i+1} - x_i|$ és $\|\cdot\|_s$ a $H^{(s)}$ -beli skaláris szorzat által indukált norma.

1. KÖVETKEZMÉNY. A VEM közelítés matematikai tartalmából következik, hogy az általa meghatározott u_n^* közelítés u^* megoldás $S_n (= P_k^h(x))$ -beli legjobb közelítése a H_L energetikai tér normájában, így a (3.8) és (3.9) hibabecslések (amelyek a $P_k^h(x)$ terek approximációs tulajdonságait fejezik ki) a variációs elvből meghatározott u_n elemre is érvényesek.

2. KÖVETKEZMÉNY. A *Szoboljev-tér* normájának tulajdonságából következik, hogy a (3.9) becslés a közelítő megoldás s -edik deriváltjára vonatkozó becslés is. Ugyanakkor megjegyezzük, hogy a (3.9) becslésnek csak akkor van értelme, ha $u_I \in H^{(s)}$, azaz, ha létezik u_I -nek — legalább általánosított értelemben — s -edik deriváltja. Ezért (3.9) becslésben fel kell tennünk, hogy $s \leq q$, ahol

$q=1$ az „e 1—2”, „e 2—3” és „e 3—4” elemek terére,

$q=2$ az „e 3—2” elemek terére,

$q=3$ az ún. *B-spline*-ok terére.

4. A VEM algoritmikus realizálása

Az előző szakaszban a VEM-et elméletileg vizsgáltuk. A továbbiakban ismertetjük azt az algoritmust, amelynek segítségével a számításokat a gyakorlatban elvégezhethetjük. A módszert egy feladat speciális közelítéssel történő megoldásával ismertetjük. Ugyanakkor a bemutatásra kerülő számítási algoritmus — viszonylag egyszerűen — általánosítható más típusú feladatokra és közelítésekre is.

Tekintsük a (2.5), (2.6) feladatot. (A 2. szakaszhoz hasonlóan, az egyszerűség kedvéért a $p=q=1$ esetet tekintjük.) Közelítésünket (a 2. szakaszhoz hasonlóan) az elsőfokú véges elemek körében végezzük el. Legyen $[0, \pi] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$.

Jelölje $v_n^{(i)}(x)$ a $v_n(x)$ szakaszonként lineáris függvény $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumra eső részét. Ekkor

$$(4.1) \quad v_n^{(i)}(x) = \alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)}x, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

ahol $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}$ (egyelőre) ismeretlen együtthatók.

Az „e 1—2” elemtípusnak megfelelően v_n x_i és x_{i+1} pontokban felvett értékeit rögzítjük $[x_i, x_{i+1}]$ -en, azaz

$$(4.2) \quad \begin{aligned} v_n(x_i) &= \alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)}x_i = q_i, \\ v_n(x_{i+1}) &= \alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)}x_{i+1} = q_{i+1}. \end{aligned}$$

Jelölje:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \alpha^i &= [\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}]^T, \quad \mathbf{q}^i = [q_i, q_{i+1}]^T, \\ \mathbf{S}_i &= \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_1(x) = [1, x]^T. \end{aligned}$$

Ekkor (4.2) felírható

$$(4.4) \quad \mathbf{S}_i \alpha^i = \mathbf{q}^i$$

alakban, ahonnan:

$$(4.5) \quad \alpha^i = \mathbf{S}_i^{-1} \mathbf{q}^i.$$

Esetünkben

$$(4.6) \quad \mathbf{S}_i^{-1} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{bmatrix} x_{i+1} & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Így a

$$(4.7) \quad v_n^{(i)} = (\alpha^i)^T \Phi_1(x)$$

alakú közelítés a

$$(4.8) \quad v_n^{(i)} = (\mathbf{q}^i)^T (\mathbf{S}_i^{-1})^T \Phi_1(x)$$

alakot ölti.

Esetünkben

$$(4.9) \quad \begin{aligned} v_n^{(i)} &= (\mathbf{q}^i)^T \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \cdot \begin{bmatrix} x_{i+1} & 1 \\ -x_i & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \\ &= [q_i, q_{i+1}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \\ \frac{x_{i+1} - x_i}{x - x_i} \\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Feladatunk a (2.16) alakú funkcionál minimalizálása. Így az

$$(4.10) \quad I(v_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{[(v_n^{(i)})']^2 + (v_n^{(i)})^2 - 2fv_n^{(i)}\} dx$$

alakot kell vizsgálnunk.

Ekkor (4.8) alapján (mivel csak Φ_1 függ x -től)

$$(4.11) \quad [(v_n^{(i)})']^2 = (v_n^{(i)})' [(v_n^{(i)})']^T = (\mathbf{q}^i)^T (\mathbf{S}_i^{-1})^T \mathbf{N}_1 \mathbf{S}_i^{-1} \mathbf{q}^i,$$

$$(4.12) \quad \mathbf{N}_1 = \Phi_1'(x) (\Phi_1'(x))^T,$$

$$(4.13) \quad (v_n^{(i)})^2 = v_n^{(i)} (v_n^{(i)})^T = (\mathbf{q}^i)^T (\mathbf{S}_i^{-1})^T \mathbf{N}_0 \mathbf{S}_i^{-1} \mathbf{q}^i,$$

$$(4.14) \quad \mathbf{N}_0 = \Phi_1(x) (\Phi_1(x))^T.$$

Esetünkben:

$$(4.15) \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0, 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(4.16) \quad \mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} [1, x] = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}.$$

Jelölje \mathbf{H}_0^i és \mathbf{H}_1^i az \mathbf{N}_0 és \mathbf{N}_1 $[x_i, x_{i+1}]$ -en levő integrál-mátrixát, azaz elemeinek az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon számított integrálját.

Esetünkben:

$$(4.17) \quad \mathbf{H}_1^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{i+1} - x_i \end{bmatrix},$$

$$(4.18) \quad \mathbf{H}_0^i = \begin{bmatrix} x_{i+1} - x_i & \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} \\ \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2} & \frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3} \end{bmatrix}.$$

Bevezetve a

$$(4.19) \quad \mathbf{K}_0^i = (\mathbf{S}_i^{-1})^T \mathbf{H}_0^i \mathbf{S}_i^{-1},$$

$$(4.20) \quad \mathbf{K}_1^i = (\mathbf{S}_i^{-1})^T \mathbf{H}_1^i \mathbf{S}_i^{-1}$$

jelöléseket, megkapjuk az $[x_i, x_{i+1}]$ elem tömegmátrixát és merevségi mátrixát (lásd 2. fejezet).

Kiszámítva (4.17) és a (4.6) képletekből a \mathbf{K}_0^i és \mathbf{K}_1^i mátrixokat:

$$(4.21) \quad \mathbf{K}_0^i = \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(4.22) \quad \mathbf{K}_1^i = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

ami ekvidisztáns felosztás esetén — természetesen — megegyezik a (2.18) mátrixokkal.

Tekintsük a jobb oldalra vonatkozó integrál-kifejezést:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f v_n^{(i)} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\alpha^i)^T \Phi_1(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\mathbf{q}^i)^T (\mathbf{S}_i^{-1})^T \Phi_1(x) dx.$$

Jelölje

$$(4.23) \quad \delta^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \Phi_1(x) dx.$$

Ekkor

$$(4.24) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f v_n^{(i)} dx = (\mathbf{q}^i)^T (\mathbf{S}_i^{-1})^T \delta^i.$$

Bevezetve a

$$(4.25) \quad \mathbf{H}^i = \mathbf{H}_1^i + \mathbf{H}_0^i,$$

$$(4.26) \quad \mathbf{K}^i = (\mathbf{S}_i^{-1})^T \mathbf{H}^i \mathbf{S}_i^{-1} = \mathbf{K}_0^i + \mathbf{K}_1^i,$$

$$(4.27) \quad \mathbf{B}^i = (\mathbf{S}_i^{-1})^T \delta^i$$

jelöléseket (4.10) feírható:

$$(4.28) \quad I(q_0, q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=0}^{n-1} ((\mathbf{q}^i)^T \mathbf{K}^i \mathbf{q}^i - 2(\mathbf{q}^i)^T \mathbf{B}^i)$$

alakban. Jelölje

$$(4.29) \quad \mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_n)^T$$

az ismeretlenek vektorát. A (4.28)-beli \mathbf{K}^i és \mathbf{B}^i mátrixokat q_i szerint „összesítve” meghatározhatjuk a \mathbf{K} mátrixokat és az \mathbf{F} vektort.

$$(4.30) \quad I(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - 2\mathbf{q}^T \mathbf{F},$$

aminek minimumfeltétele a

$$(4.31) \quad \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}$$

véges elemes egyenletet szolgáltatja.

Foglaljuk össze a megoldási algoritmust! A feladat által meghatározott H_L térben válasszuk meg a megfelelő elemtípust. A megoldási tartományt résztartományokra bontva részenként meghatározzuk a (4.4) rendszerből (a (4.2) egyenlet mátrixából) az \mathbf{S}_i mátrixokat, majd azok inverzeit. Ezután a \mathbf{H}_0^i és \mathbf{H}_1^i mátrixokat („e 1—2” esetben (4.17), (4.18)), és azok összegét, \mathbf{H}^i -t határozzuk meg. (Felhasználva az \mathbf{N}_0 és \mathbf{N}_1 ((4.12) és (4.14)) mátrixokból integrálással való származtatást.) Ezt követően résztartományonkénti integrálással meghatározzuk a δ^i vektorokat (4.23) alapján, és kiszámítjuk (4.26) és (4.27) alapján a \mathbf{K}^i , valamint a \mathbf{B}^i értékeit. Ezekből q_i komponensenként összeállítjuk a \mathbf{K} mátrixot és az \mathbf{F} vektort, amelynek eredményeként a (4.31) véges elemes lineáris algebrai egyenletrendszert nyerjük.

4.1. Megjegyzés. Az algoritmus ekvidisztáns felosztás és állandó együtthatók esetén lényegesen leegyszerűsödik. Ekkor ugyanis \mathbf{K}_0^i és \mathbf{K}_1^i az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallum sorszámától független, azaz \mathbf{K}^i résztartományonként állandó, és így \mathbf{K} meghatározása lényegesen egyszerűbb.

4.2. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a (4.23) a

$$(4.32) \quad \delta^i = \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx, \int_{x_i}^{x_{i+1}} x f dx \right]^T$$

feladatot jelenti. Így δ^i meghatározására — általában — numerikus integrálást kell használnunk. (Lásd 2. szakasz.) Az \mathbf{N}_0 és \mathbf{N}_1 mátrixok integrálása polinomok integrálását jelenti, azaz \mathbf{H}_0 és \mathbf{H}_1 elemei más elemtípus alkalmazása esetén is pontosan meghatározhatók.

4.3. *Megjegyzés.* A \mathbf{K}^i és \mathbf{B}^i „összefésülése” a 2. szakaszban leírt módon történik. Például \mathbf{F} vektor F_i komponensét a \mathbf{B}^i -k q_i -hez rendelt értékeiből határozhatjuk meg, azaz

$$(4.33) \quad F_i = (B_2^i)^{-1} + B_1^i),$$

ahol B_k^i a \mathbf{B}^i vektor k -adik komponense ($k=1, 2$).

4.4. *Megjegyzés.* Ha a fő peremfeltétel következtében valamely q_i érték rögzített, akkor az — természetesen — nem szerepelhet a \mathbf{q} vektor komponensei között és ezt az értéket a rendszer összeállításánál a jobb oldalon kell figyelembe venni.

4.5. *Megjegyzés.* A (4.9) előállítás segítségével mindegyik elemtípusra közvetlenül meghatározhatjuk a bázisfüggvényeket. Esetünkben például a q_i paraméterhez tartozó $\varphi_i^n(x)$ bázisfüggvény:

$$(4.34) \quad \varphi_i^n(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & , x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & , x \in [x_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

aminek grafikonja a 1. ábrán látható.

4.6. *Megjegyzés.* Az ismertetett algoritmus magasabb fokú közelítések és más elemtípusok esetére viszonylag egyszerűen általánosítható [4].

4.7. *Megjegyzés.* Függvényegyütthatós esetben a \mathbf{K}^i mátrix összeállításához az elemenkénti numerikus integrálás szükséges.

5. A VEM numerikus realizálásával összefüggő kérdések

A továbbiakban néhány olyan kérdést tekintünk át, amely a módszer realizálása során merül fel.

5.1. A numerikus integrálás hibája

Mint azt az előző szakaszban részleteztük, a módszer algoritmikus realizálása során numerikus integrálás alkalmazása szükséges. Vizsgáljuk meg, hogy az ilyen közelítő számítás hogyan hat a módszer pontosságára. Az általánosságot nem csökkentve (mintegy illusztrációként) ezt a (2.5), (2.6) feladat megoldására vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy a (2.11) típusú funkcionálban a p , q és f függvényeket azok S_n -beli p_I , q_I és f_I interpolációjával helyettesítjük, azaz I helyett az

$$(5.1) \quad I^*(w) = \int_0^\pi (p_I w'^2 + q_I w^2 - 2f_I w) dx$$

funkcionált minimalizáljuk. Legyen a (2.11) „pontos” funkcionál S_n (valamely véges elemes tér)-beli minimuma u_n^* , az (5.1) által definiált I^* funkcionálé pedig \bar{u}_n^* . Ekkor megmutatható a következő állítás [4].

5.1. ÁLLÍTÁS. Ha p , q , f és interpolációjai közötti H^1 -beli eltérés kisebb Ch^α -nál (C , α : pozitív állandó, $h = \max |x_{i+1} - x_i|$), akkor:

$$(5.2) \quad r \|u_n^* - \bar{u}_n^*\|_1 \leq Ch^\alpha,$$

ahol

$$r = \min_{x \in (0, \pi/2)} p_I(x) \cong p_0 > 0.$$

Összevetve (5.2) becslésünket a (3.9) approximációs tulajdonságot kifejező képlettel, megállapítható, hogy az általunk felsorolt véges elemes típusokra (polinomiális spline-okra) az interpoláció során fellépő hiba nem rontja az eredményt.

KÖVETKEZMÉNY. Lineáris véges elemek alkalmazása esetén, ha a (2.30) típusú numerikus integrálást alkalmazzuk, a becslés $\|u_n^* - \bar{u}_n^*\|_1 \leq C_0 h^2$, és így $\|u^* - \bar{u}_n^*\|_1 \leq C_1 h^2$. Ugyanakkor (ugyancsak a (3.9) becslés alapján) látható, hogy nem érdemes magasabb rendű numerikus integráló-formulát alkalmazni. (A (2.31) formula alkalmazásánál $\|u_n^* - \bar{u}_n^*\|_1 \leq C_0 h^3$, de az $\|u^* - \bar{u}_n^*\|_1$ -re vonatkozó becslés változatlanul másodrendű marad.)

Lényeges megvizsgálni a numerikus integrálás hibájának hatását. Alapvető kérdés: milyen pontos kvadratura formulákat kell használnunk, hogy a 3.1 állítás „elméleti konvergenciájának” hatását ne rontsuk el. Erre vonatkozik a következő állítás [4].

5.2. ÁLLÍTÁS. Alkalmazzunk mindegyik $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon egy k alap-pontos Gauss-kvadratúrát és legyen \bar{u}_n^* az így nyert funkcionál minimalizáló eleme az $S_n \subset P_k^k(x)$ véges elemes altéren.

Ekkor:

$$(5.3) \quad \|u_n^* - \bar{u}_n^*\|_1 \leq c_1 \cdot h^{k+1}.$$

5.1. Megjegyzés. Az 5.2. állítás értelmében a (3.9) elméleti konvergencia nem romlik, ha részintervallumonként a közelítő véges elemek fokszámával megegyező pontszámú Gauss-kvadratúrákat alkalmazunk.

5.2. A számítógépes realizálás numerikus és algoritmikus kérdései

Mint láttuk, a gyakorlatban a $\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{F}$ „pontos” egyenlet helyett a numerikus integrálással perturbált

$$(5.4) \quad \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{F}}$$

egyenlet megoldása a feladatunk. A szakasz előző részében feltettük, hogy az (5.4) típusú egyenletet pontosan oldottuk meg. Ez a feltevés a gyakorlatban nem helytálló. Ha figyelembe vesszük a gépi számábrázolás hibáját, akkor a bemenő adatok gépi reprezentációja tovább perturbálja az (5.4) egyenletet

$$(5.5) \quad \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{F}}$$

alakra. Mint ismeretes [1], az (5.5) valamely direkt módszerrel történő megoldása során fellépő hibák hatása ekvivalens az egyenlet bemenő adataiban végbemenő valamilyen relatív kis perturbációval, azaz valamely direkt megoldási módszer számítógépes realizációja során fellépő hiba hatását (5.5) helyett egy

$$(5.6) \quad (\bar{\mathbf{K}} + d\mathbf{K})\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{F}} + d\mathbf{F}$$

perturbált egyenlettel vizsgálhatjuk. (Megjegyezzük, hogy a $\frac{\|d\mathbf{K}\|}{\|\bar{\mathbf{K}}\|}$ és $\frac{\|d\mathbf{F}\|}{\|\bar{\mathbf{F}}\|}$ ún. ekvivalens perturbációk relatív nagysága a megoldandó rendszer nagyságától, a megoldási algoritmustól és a konkrét számítógéptől függ.)

Valamennyi hibaforrást összegezve megállapítható, hogy (5.4) megoldása pontosan kielégít egy

$$(5.7) \quad (\tilde{\mathbf{K}} + d\tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}} + d\tilde{\mathbf{F}}$$

perturbált egyenletet.

Megmutatható, hogy $\|\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\| \|d\tilde{\mathbf{K}}\| < 1$ esetén

$$(5.8) \quad \frac{\|\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}\|}{\|\mathbf{q}\|} \cong \frac{\|\tilde{\mathbf{K}}\| \|\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\|}{1 - \|\tilde{\mathbf{K}}\| \|d\tilde{\mathbf{K}}\|} \left(\frac{\|d\tilde{\mathbf{K}}\|}{\|\tilde{\mathbf{K}}\|} + \frac{\|d\tilde{\mathbf{F}}\|}{\|\tilde{\mathbf{F}}\|} \right),$$

(ahol $\|\cdot\|$ valamilyen konzisztens norma).

Feltéve az (5.7) rendszer ekvivalens perturbációját, az (5.8) becslésből következik, hogy \mathbf{q} pontossága végső soron a véges elemes egyenletrendszer

$$(5.9) \quad \text{cond}(\tilde{\mathbf{K}}) = \|\mathbf{K}\| \|\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\|$$

kondicionáltsági számától függ. Alkalmazva $\tilde{\mathbf{K}}$ szimmetrikus mátrixra a $\|\tilde{\mathbf{K}}\| = \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{K}})$ normát (ahol $\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{K}})$ a $\tilde{\mathbf{K}}$ mátrix legnagyobb sajátértéke),

$$(5.10) \quad \text{cond}(\tilde{\mathbf{K}}) = \frac{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{K}})}{\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{K}})}$$

A kondicionáltsági szám meghatározásához (5.10) mellett felhasználhatjuk azt a tényt, hogy feladatunkat — a közelítő elemek megválasztásával — rögzített interpolációs

térben oldjuk meg, azaz $\text{cond}(\tilde{\mathbf{K}})$ nagyságrendje elemtípusonként meghatározható. Megmutatható [10], hogy

1. „e 1—2” típusú elemekre $\text{cond}(\tilde{\mathbf{K}}) = o(1/h^2)$
2. „e 2—3” típusú elemekre $\text{cond}(\tilde{\mathbf{K}}) = o(1/h^2)$
3. „e 3—2” típusú elemekre $\text{cond}(\tilde{\mathbf{K}}) = o(1/h^4)$.

5.2. *Megjegyzés.* A harmadfokú közelítés-rendszerek kondicionáltsága az ún. skálázással [2] javítható. Ez azt jelenti, hogy megadunk valamilyen \mathbf{D} diagonális mátrixot és a $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{D}$ jelölés bevezetésével (5.4) helyett a

$$(5.11) \quad \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{F}}$$

egyenletrendszer kondicionáltságát vizsgáljuk. A \mathbf{D} mátrix jó megválasztásával a rendszer kondicionáltsága javítható, pl. az „e 3—2” elemtípus esetén $o(1/h^2)$ nagyságrendre.

Vegyük észre, hogy az (5.8) hibabecslés (amelynek minősége $\text{cond}(\tilde{\mathbf{K}})$ -tól függ) nem azonos a 2. szakaszban említett numerikus stabilitással. (Egyébként is ez a fogalom definiálást igényel!) Ugyanis ez a becslés a $\|\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{d}\tilde{\mathbf{K}}\| < 1$ feltétel teljesülése esetén a *Ritz-módszer* együtthatóira ad becslést, míg minket valójában az (5.7) rendszer \tilde{q} megoldása által generált $v_n = \sum \tilde{q}_i \cdot \varphi_i^{(n)}(x)$ perturbált közelítő megoldás és az u^* megoldás közötti eltérés érdekel. (Megjegyezzük, hogy a $\|\tilde{\mathbf{K}}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{d}\tilde{\mathbf{K}}\| < 1$ feltétel a

$$(5.12) \quad \beta^{(n)} = \text{cond}(\tilde{\mathbf{K}}) \cdot \frac{\|\mathbf{d}\tilde{\mathbf{K}}\|}{\|\tilde{\mathbf{K}}\|} < 1$$

feltétellel ekvivalens.)

Jelölje

$$(5.13) \quad \varepsilon_1^{(n)} = \frac{\|\mathbf{d}\tilde{\mathbf{K}}\|}{\|\tilde{\mathbf{K}}\|}; \quad \varepsilon_2^{(n)} = \frac{\|\mathbf{d}\tilde{\mathbf{F}}\|}{\|\tilde{\mathbf{F}}\|}.$$

Ekkor megmutatható [3], hogy $\beta^{(n)} < 1$ esetén a relatív hibára a

$$(5.14) \quad \frac{\|v_n - u_n^*\|_1}{\|u_n^*\|_1} \cong \frac{\text{cond}(\tilde{\mathbf{K}})}{1 - \beta^{(n)}} (\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)})$$

az abszolút hibára pedig

$$(5.15) \quad \|v_n - u_n^*\|_1 \cong \frac{1}{C} \|f\|_0 \frac{\text{cond}(\tilde{\mathbf{K}})}{1 - \beta^{(n)}} (\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)})$$

becslések adhatók, ahol C az (1.8)-ban szereplő állandó. (Megjegyezzük, hogy ezek a becslések nem a keresett $v_n - u_n^*$ -ra vonatkoznak, hanem a pontos és perturbált approximációk különbségére!)

5.1. *DEFINÍCIÓ.* A *Ritz-módszer* $(\varphi_i) \subset H_L$ koordináta-rendszerét H_L -ben erősen minimális rendszernek nevezzük, ha valamennyi $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $(\varphi_i)_{i=1}^n$ rendszer *Gram-mátrixának* sajátértékei alulról korlátosak egy n -től független pozitív λ_0 számmal, azaz

$$(5.16) \quad 0 < \lambda_0 \leq \lambda_1^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ahol $\lambda_1^{(n)}$ a megfelelő n -edrendű *Gram-mátrix* legkisebb sajátértéke.

5.2. DEFINÍCIÓ. A *Ritz-módszert Michlin értelemben numerikusan stabilnak* nevezzük, ha léteznek olyan n -től független p, q, r állandók hogy $\|\tilde{\mathbf{dK}}\| < r$ és teszőleges $\|\tilde{\mathbf{dF}}\|$ esetén (5.7)-nek mindig létezik egyetlen megoldása és fennáll a

$$(5.17) \quad \|\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\| \cong p \|\tilde{\mathbf{dK}}\| + q \|\tilde{\mathbf{dF}}\|$$

egyenlőtlenség minden $n \in N^+$ esetén.

5.3. DEFINÍCIÓ. A *Ritz-módszer* (u_n^*) approximációs megoldássorozatát *Michlin értelemben numerikusan stabilnak* nevezzük, ha léteznek olyan n -től független p', q', r' állandók, hogy $\|\tilde{\mathbf{dK}}\| < r'$ esetén fennáll a

$$(5.18) \quad \|v_n - u_n^*\| < p' \|\tilde{\mathbf{dK}}\| + q' \|\tilde{\mathbf{dF}}\|$$

egyenlőtlenség minden $n \in N^+$ esetén.

5.3. ÁLLÍTÁS. ([8]). A *Ritz-módszer* pontosan akkor *Michlin értelemben numerikusan stabil* a megfelelő energetikai térben, ha a koordináta-rendszere erősen minimális.

5.4. ÁLLÍTÁS ([8]). A *Ritz-módszer* approximációs megoldássorozata pontosan akkor *Michlin értelemben numerikusan stabil*, ha a koordináta-rendszere erősen minimális.

Ez a *Michlin értelemben vett numerikus stabilitás* a számítógépes realizálás során hiányos. Erre OMODEI mutatott rá megfelelő példákkal illusztrálva [3] cikkében. Megmutatta, hogy létezik olyan erősen minimális koordináta-rendszer, amely olyan v_n megoldássorozatot generál, amely a gyakorlatban numerikusan nem stabil, pontosabban a $\frac{\|v_n - u^*\|_1}{\|u^*\|_1}$ relatív hibák sorozata nem korlátos. (Ugyanakkor arra is ad példát, hogy nem erősen minimális koordináta-rendszer esetén az eljárás a gyakorlatban numerikusan stabil.) A jelenség oka abban áll, hogy a *Michlin értelemben vett numerikus stabilitás* definíciójában a $\|\tilde{\mathbf{dK}}\|$ és $\|\tilde{\mathbf{dF}}\|$ perturbációk abszolút nagysága szerepel, míg a gyakorlati számítások során a numerikus stabilitás a $\|\tilde{\mathbf{K}}\|$ és $\|\tilde{\mathbf{F}}\|$ nagyságától is függ, azaz — figyelembe véve a lebegőpontos számábrázolást — helyesebb az $\varepsilon_1^{(n)}$ és $\varepsilon_2^{(n)}$ relatív hibákkal számolni. Megmutatható [3], hogy a *Ritz-módszer* során, ha

$$(5.19) \quad \|u_n^* - u^*\|_1 \cong E(n); \quad \|u_n^* - u^*\|_0 \cong E_2(n)$$

és

$$(5.20) \quad \text{cond}(\tilde{\mathbf{K}}) \cong K(n),$$

(ahol $E(n)$ és $K(n)$ n -től függő kifejezések), akkor $\beta^{(n)} < 1$ esetén a relatív hibára

$$(5.21) \quad \frac{\|v_n^* - u^*\|_1}{\|u^*\|_1} \cong \frac{E(n)}{\|u_s\|_1} + \frac{K(n)}{1 - K(n) \cdot \varepsilon_2^{(n)}} \cdot (\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_n^{(2)})$$

becslés; az abszolút hibára az

$$(5.22) \quad \|v_n - u^*\|_0 \cong E_2(n) + \frac{\|f\|_0 \cdot K(n)}{C^2(1 - K(n) \cdot \varepsilon_2^{(n)})} \cdot (\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)})$$

becslés érvényes, ahol u_s valamilyen pontosan számított partikuláris *Ritz-approximáció*. (Ez kis $s \in \mathbb{N}^+$ esetén aránylag könnyen meghatározható.) Az (5.21) és (5.22) becsléseket a *priori* stabilitási becsléseknek nevezzük. (Megjegyezzük, hogy ezek konkrét alakját a (2.5) egyenletű,

$$(5.23) \quad u(0) = u(1) = 0$$

peremfeltételű feladatra lineáris véges elemes közelítésre OMODEI megadja.)

A módszer számítógépes algoritmikus realizálhatóságát elsősorban a (4.31) egyenletrendszer nagysága határozza meg, azaz hogy milyen méretű lineáris egyenletrendszer megoldását teszi lehetővé a rendelkezésünkre álló gép. A hatékony véges elemes programok ugyanakkor kihasználják a VEM algoritmusából eredő előnyöket. Egyrészt azt, hogy a lineáris egyenletrendszer mátrixának sávszélessége a *priori* ismeretes és így csak a sávon belüli elemek tárolásáról kell gondoskodnunk. Másrészt a megoldáshoz a véges elemes egyenletrendszert egyidejűleg nem szükséges teljes egészében összeállítani. A jó, véges elemes lineáris egyenletrendszereket megoldó direkt módszerek az egyenletrendszer összeállítását és eliminálását egyidejűleg végzik, amivel jelentősen csökkenthető a központi kár nagyságára vonatkozó igény. Ez — mint általában a teljes véges elemes algoritmus — bonyolult központi tárperiféria kommunikációt igényel, amelynek optimális megszervezése a hatékony működés alapja.

6. Numerikus példák

Befejezésül két, modell jellegű feladat segítségével illusztráljuk a VEM-et. Az első feladat megoldása a véges differenciák módszerével való összevetést szolgálja, a második a közelítő elemek fokszámának növelésével járó pontosság-növekedést illusztrálja. Táblázatainkban az alábbi jelöléseket alkalmazzuk:

- N : a lineáris egyenletrendszer mérete,
 m : a lineáris egyenletrendszer mátrixának sávszélessége,
 θ : a megoldáshoz szükséges számítógépes memóriaigény

$$\theta = (m + 2)N,$$

- $\text{cond}(\tilde{\mathbf{K}})$: a lineáris egyenletrendszer mátrixának kondicionáltsági száma,
 u_p : a kitűzött feladat pontos megoldása,
 u'_p : a kitűzött feladat pontos megoldásának deriváltja,
 k : a VEM közelítő polinomjainak fokszáma,
 δ : a relatív hiba százalékban

$$\delta = \left| \frac{u_p - v_N}{v_N} \right| 100.$$

1. Feladat.

$$(6.1) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 2e^{x^2}(1 + 2x^2), \quad 0 < x < 1$$

$$(6.2) \quad u(0) = 0; \quad u'(1) = 2e.$$

A feladat pontos megoldása az

$$(6.3) \quad u_p(x) = e^{x^2} - 1$$

függvény.

Az előző eredményeinknek megfelelően a feladat megoldását az

$$(6.4) \quad I(v) = \int_0^1 [v'^2 - 4e^{x^2}(1 + 2x^2)v] dx - 4ev(1)$$

funkcionál

$$(6.5) \quad H_L = \text{dom } I = \{v \in H^1(0,1); v(0) = 0\}$$

energetikai téren való minimalizálásával nyerhetjük. A feladat véges elemes (VEM) és véges differenciás (VDM) megoldásának eredményeit $h=0,25$ lépésköz esetén a 3. táblázat tartalmazza.

3. TÁBLÁZAT ($h=0,25$)

| x_i | u_p | VEM $k=1$ | VDM $o(h^2)$ | VDM $o(h^4)$ |
|-------|---------------|---------------|--------------|--------------|
| 0,25 | 0,064 494 45 | 0,064 494 46 | -0,007 | 0,009 |
| 0,5 | 0,284 025 416 | 0,284 025 419 | 0,135 | 0,332 |
| 0,75 | 0,755 054 65 | 0,755 054 60 | 0,518 | 0,817 |
| 0,1 | 1,718 281 92 | 1,718 281 83 | 1,368 | 1,774 |

A módszerekre jellemző relatív hibák a 4. táblázatban találhatók.

4. TÁBLÁZAT

| | VEM ($k=1$) | VDM $o(h^2)$ | VDM $o(h^4)$ |
|-----|----------------------|--------------|--------------|
| min | $0,8 \cdot 10^{-6}$ | 25,6 | 2,6 |
| max | $0,23 \cdot 10^{-6}$ | 1013 | 28,8 |

Mint látható, a VDM pontossága nem kielégítő. A lépésköz csökkentésével a relatív hibákra, az 5. táblázatban látható, aránylag kielégítő eredmények nyerhetők.

5. TÁBLÁZAT

| h | 0,125 | | 0,0625 |
|-----|--------------|------------|--------------|
| | VDM $o(h^2)$ | VDM $o(h)$ | VDM $o(h^2)$ |
| min | 5,4 | 0,07 | 1,3 |
| max | 131 | 9,3 | 16,5 |

A lépésköz csökkentésével a módszer realizálásával járó nehézségek megnövekednek. Mint az a 6. táblázatból leolvasható, a tárigény és a kondicionáltsági szám erősen megnő (ez utóbbi például a lépésköz negyedelésével egy nagyságrenddel).

6. TÁBLÁZAT

| h | N | m | θ | cond (R) |
|--------|-----|-----|----------|--------------|
| 0,25 | 4 | 1 | 12 | 29,2 |
| 0,125 | 8 | 1 | 24 | 112,4 |
| 0,0625 | 16 | 1 | 48 | 428,5 |

A deriváltakra vonatkozó eredményeket a 7. táblázat tartalmazza ($h=0,25$ lépésköz esetén).

7. TÁBLÁZAT

| x_i | u'_p | VEM ($k=3$) | |
|-------|-----------|---------------|------|
| 0,25 | 0,532 247 | 0,533 574 | 0,25 |
| 0,5 | 1,284 025 | 1,287 591 | 0,28 |
| 0,75 | 2,632 581 | 1,639 381 | 0,26 |

A $k=3$ -hoz tartozó mátrix jellemzői:

$$N = 8, \quad m = 3, \quad \theta = 40, \quad \text{cond}(\tilde{K}) = 358.$$

Megjegyezzük, hogy a lépésköz felezésével ($h=0,125$) a relatív hibára $\delta=0,02$ eredmény nyerhető.

2. Feladat

$$(6.6) \quad -[(1+10x)u']' = 10,225 - 6x - 90x^2, \quad 0 < x < 1,$$

$$(6.7) \quad 2u'(0) - u(0) + 2,39 = 0; \quad u(1) = 0,3225.$$

A feladat pontos megoldása az

$$(6.8) \quad u_p(x) = x^3 - 1,0225x + 0,345$$

függvény.

Ekkor

$$(6.9) \quad I(v) = \int_0^1 [(10x+1)(v'^2 - 2fv)] dx + 0,5v^2(0) - 2,39v(0),$$

(ahol $f=10,225-6x-90x^2$),

$$(6.10) \quad H_L = \{ \text{dom } I = v \in H^1(0,1); v(1) = 0,3225 \}.$$

A közelítő megoldás a véges elemek fokszámának növelésével a 8. táblázatban leírt módon változik. A lineáris egyenletrendszerre vonatkozó paraméterek a 9. táblázatban találhatóak, míg a deriváltértékeket a 10. táblázatban hasonlítjuk össze.

8. TÁBLÁZAT

| x_i | u_p | VEM ($k=1$) | | VEM ($k=2$) | | VEM ($k=3$) | |
|-------|--------|---------------|-----|---------------------|------|----------------------|---------------------|
| | | $h=0,125$ | | $h=0,25$ | | $h=0,25$ | |
| 0,0 | 0,345 | 0,339 | 1,5 | 0,345 4 | 0,12 | 0,334 49 | $0,4 \cdot 10^{-4}$ |
| 0,25 | 0,105 | 0,1003 | 4,4 | 0,105 09 | 0,09 | 0,104 99 | $0,2 \cdot 10^{-3}$ |
| 0,5 | -0,041 | -0,044 | 7,9 | -0,041 2 | 0,08 | -0,041 2 | $0,7 \cdot 10^{-3}$ |
| 0,75 | 0 | -0,001 | — | $0,1 \cdot 10^{-4}$ | — | $-0,8 \cdot 10^{-6}$ | — |
| | | | | | | -0,8 | |

9. TÁBLÁZAT

| N | m | θ | cond (\bar{K}) |
|-----|-----|----------|--------------------|
| 8 | 1 | 24 | 119,5 |
| 8 | 2 | 32 | 855,3 |
| 9 | 3 | 45 | 2637,8 |

10. TÁBLÁZAT

| x_i | u'_p | VEM ($k=3$) | |
|-------|---------|---------------|---------------------|
| | | $h=0,125$ | |
| 0 | -1,0225 | -1,022 55 | $0,7 \cdot 10^{-3}$ |
| 0,25 | -0,835 | -0,835 008 | $0,1 \cdot 10^{-3}$ |
| 0,5 | -0,2725 | -0,272 6 | $0,5 \cdot 10^{-2}$ |
| 0,75 | 0,665 | 0,664 9 | $0,5 \cdot 10^{-2}$ |
| 1,0 | 1,9775 | 1,977 45 | $0,2 \cdot 10^{-2}$ |

IRODALOM

- [1] FARAGÓ, I. és GÁSPÁR, Cs., Parciális differenciálegyenletek megoldásának numerikus módszerei hidrodinamikai alkalmazásokkal (BME MTI, 1982).
- [2] FORSYTHE, G. E. and MOLER, C. B., *Computer Solution of Linear Algebraic Systems* (Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Jersey, 1967).
- [3] OMODEI, B. J., "On the numerical stability of the Rayleigh-Ritz method", *SIAM J. Num. Anal.* **14** (1977).
- [4] STRANG, G. and FIX, G., *An Analysis of the Finite Element Method* (Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Jersey, 1973).
- [5] VARGA, R. S., *Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis* (Philadelphia, 1971).
- [6] Марчук, Г. И. и Агошков, В. И., Введение в проекционно-сеточные методы (Москва, Наука, 1981).
- [7] Михлин, С. Г., Вариационные методы в математической физике (Москва, Наука, 1957).
- [8] Михлин, С. Г., Численная реализация вариационных методов (Москва, Наука, 1966).
- [9] Михлин, С. Г., Линейные уравнения в частных производных (Москва, Наука, 1971).
- [10] Молчанов, И. Н. и Николенко, Л. Д., Метод конечных элементов и его применение (Киев, АН УССР, 1976).

(Beérkezett: 1982. április 27.)

FARAGÓ ISTVÁN

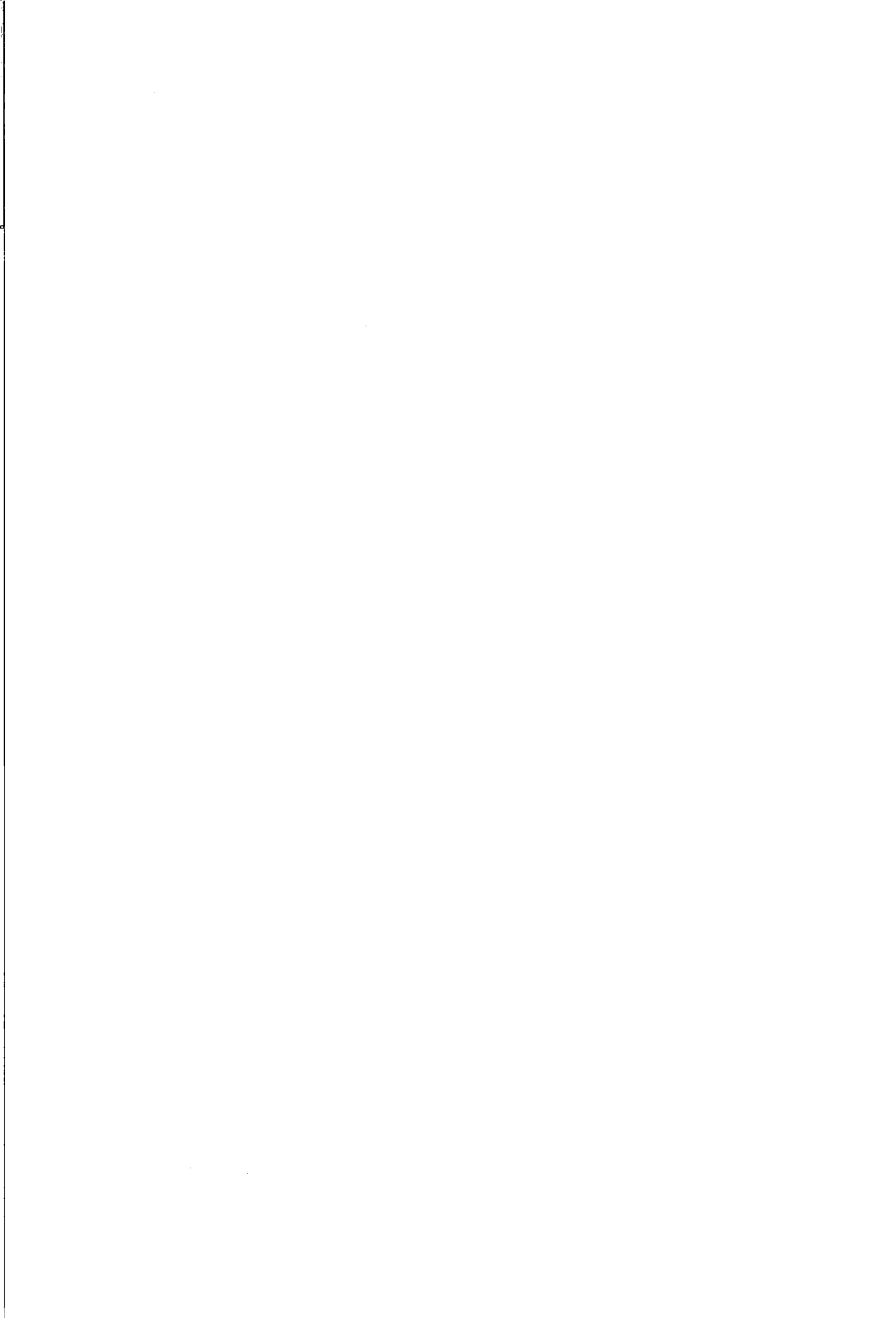
AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM MATEMATIKAI ÉS SZÁMÍTÁSTECHNIKAI INTÉZET
2103 GÖDÖLLŐ

FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING ELLIPTIC PROBLEMS

I. FARAGÓ

The paper presents the survey of the finite element method and its application for solving one dimensional elliptic problems. First we introduce the most important terms needed to describe both the basic problem and its solution. A comprehensive survey is given for the *Ritz method* and the finite element method pointing out the main differences between them. A deep analysis is detailed for the finite element method from its mathematical, numerical aspects. Its algorithmic description is also enclosed, which is very important for its computer implementation.

Finally, for illustrating the efficiency of this method two examples are examined in detail.



NAGYON BONYOLULT DINAMIKÁJÚ EGYSZERŰ MATEMATIKAI MODELLEK*

R. M. MAY

Princeton

Az elsőrendű differenciaegyenletek számos összefüggésben merülnek fel a biológiai, a közgazdasági és a társadalomtudományokban. Az ilyen egyenletek, még ha egyszerűek és determinisztikusak is, meglepően sokféle dinamikus viselkedést képesek mutatni a stabilis egyensúlyi ponttól a stabilis ciklusok bifurkáló hierarchiáján keresztül a látszólagosan véletlen fluktuációkig. Következésképpen sok lebilincselő probléma létezik, amelyek közül néhány a trajektóriák finomszerkezetének kényes matematikai vonatkozásaival, néhány pedig a gyakorlati következményekkel és az alkalmazásokkal kapcsolatos. Ez a cikk ezek értelmező áttekintését adja.

A különféle tudományágakban sok olyan helyzet van, amely — legalábbis durva első közelítésként — elsőrendű differenciaegyenlettel írható le. Az ilyen modellek dinamikus viselkedésének tanulmányozása általában abból áll, hogy megtaláljuk az állandó egyensúlyi pontokat és utána lineáris analízist végzünk, hogy meghatározzuk a kis zavarásokkal szemben tanúsított stabilitásukat; a kifejezetten nemlineáris dinamikai tulajdonságokat általában nem vesszük figyelembe.

Az újabb kutatások azonban megmutatták, hogy a legeslegegyszerűbb nemlineáris differenciaegyenlet is a dinamikus viselkedés különlegesen gazdag spektrumával rendelkezhet a stabilis egyensúlyi pontoktól a stabilis ciklusok sorozatán keresztül egy olyan tartományig, amelyben a viselkedés (még ha teljesen determinisztikus is) sok tekintetben „kaotikus”, vagyis megkülönböztethetetlen egy véletlen folyamat trajektóriájától.

Ennek az áttekintő cikknek több célja van.

Először: bár a nemlineáris jelenségek fő jellemzőit már sokan felfedezték, és egymástól függetlenül újra felfedezték, nem ismerek olyan forrásmunkát, ahol az összes fontosabb eredmény össze lenne gyűjtve. Ezért megkíséreltem, hogy egy ilyen áttekintő beszámolót nyújtsak. Ezt rövid és leíró módon teszem és bevettem némi új anyagot is; a részletes matematikai bizonyítások a technikai irodalomban találhatóak, amelyekre csak utalok.

Másodszor: bemutatok néhány érdekes matematikai kérdést, amelyek nem látszanak teljesen megoldottnak. Néhány a problémák közül gyakorlati vonatkozású: véletlenszerűnek tűnő trajektóriák valószínűségi leírása, még ha az alapszerkezetük determinisztikus is. Más problémák önmagukban matematikailag érdekesek és olyan dolgokat foglalnak magukba, mint a bifurkációs szerkezet patológiája, vagy a valóban véletlen viselkedés, amely akkor adódhat, ha az (1) egyenletben levő $F(X)$

* Ez a dolgozat fordítása a következőnek: May, R. M. "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature* 261 (1976) 459—467. © 1976. Macmillan Journals Limited. A fordítás közléséhez a szerző és a folyóirat hozzájárult.

függvény nem analitikus. Célul tűztem ki a kutatás elősegítését ezekben a kérdésekben, különösen az adatfeldolgozással kapcsolatos gyakorlati kérdésekben.

Harmadszor: áttekintünk néhány olyan területet, ahol ezek a gondolatok gyakorlati alkalmazást nyerhetnek. Az ilyen alkalmazások sora az elvont modellektől (ahol például egy stabilis egyensúlyi ponttól a káoszig való átmenet egy folyadékban a turbulencia kialakulásának modelljéül szolgálhat) a biológiai populációk dinamikus viselkedésének modelljeiig terjedhet (ahol kutathatjuk a szabadban vagy laboratóriumban mért adatok felhasználását a differenciaegyenlet paramétereitől kezdve a becsléséig).

Negyedszer: tömör ismertetést adunk annak az irodalmáról, hogy a viselkedésnek ez a spektruma (stabilis egyensúlyi pontok, stabilis ciklus, káosz) hogyan jöhet létre másod- vagy magasabb rendű differenciaegyenletekben (azaz kettő vagy több dimenzióban: kettő vagy több kölcsönható faj esetén), ahol a káosz kialakulása általában kevesebb szigorú nemlinearitást követel. E szempontból a differenciálegyenleteket is áttekintettük; úgy tűnik, hogy elsőrendű differenciálegyenletek esetén háromdimenziós rendszer szükséges a kaotikus viselkedés megnyilvánulásához.

Az áttekintés egy evangéliumi könyörgéssel zárul arról, hogy mutassuk be ezeket a differenciaegyenleteket az elemi matematikai tanulmányok során, hogy a tanulók intuíciója gazdagodhassék azáltal, hogy meglátják, hogy milyen vad dolgokat csinálhatnak ezek az egyszerű nemlineáris egyenletek.

Elsőrendű differenciaegyenletek

Az egyik legegyszerűbb rendszer, amit egy ökológus tanulmányozhat, egy olyan időszakosan szaporodó populáció, amelyben a generációk között nincs átfedés [1—4]. Sok természetes populáció, különösen a mérsékelt égövi rovarok (köztük sok gazdaságilag fontos szántóföldi és gyümölcsöskerti kártevő) tartozik ezek közé. Ebben a helyzetben az észlelt adatok általában a maximumra, az átlagra vagy az egyes generációk össznépségére vonatkoznak. A kutatók igyekeznek megérteni, hogy a $t+1$ -edik generáció populációjának X_{t+1} nagysága hogyan függ a megelőző, t -edik generáció populációjának X_t nagyságától; egy ilyen összefüggést az

$$(1) \quad X_{t+1} = F(X_t)$$

általános képlettel fejezhetjük ki. Az $F(X)$ függvény általában az, amit egy biológus „sűrűségfüggőnek”, egy matematikus pedig nemlineárisnak hív; az (1) egyenlet ekkor egy elsőrendű, nemlineáris differenciaegyenlet.

Bár ezentúl követni fogom azt a szokást, hogy az X változóról mint „populációról” beszélek, a biológián kívül is számtalan olyan helyzet van, ahol az (1) alap-egyenlet alkalmazható. A biológián belül is vannak más példák, például a genetikában [5, 6] (ahol az egyenlet a géngyakoriság időbeli változását írja le), vagy a járványtanban [7] (ahol a lakosság megfertőzött hányada a t időpontban). A közgazdasági példák között vannak modellek az árucikk mennyisége és ára közötti kapcsolatra [8], a gazdasági ciklusok elméletére [9] és olyan időbeli sorozatokra, amelyekkel különböző más gazdasági mennyiségek állítanak elő [10]. Az (1) általános egyenlet a társadalomtudományok számára is megfelelő [11], felmerül például a tanulás elméleteiben (ahol X azon információ bitjeinek száma lehet, amit az ember

meg képes jegyezni egy t intervallum után), vagy a hírek elterjedésének a leírására a különböző szerkezetű társadalmakban (ahol X azon emberek száma, akik már hallották a hírt t időpontig). A találékony olvasó találhat más szövegösszefüggéseket is az (1) egyenletre.

Sok ilyen esetben, különösen a biológiai populációknál, létezik egy olyan tendencia, hogy az X változó növekszik egyik generációról a másikra, ha X kicsi, és csökken, ha X nagy. Ez azt jelenti, hogy az $F(X)$ nemlineáris függvény gyakran a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $F(0)=0$; $F(X)$ monoton növekszik X növekedésével a $0 < X < A$ tartományban ($F(X)$ a maximális értékét az $X=A$ pontban veszi fel) és $F(X)$ monoton csökken, ha X növekszik $X=A$ fölött. Ezenfelül $F(X)$ általában tartalmaz egy vagy több paramétert, amelyek „hangolják” a viselkedés nemlinearitását: olyan paramétereket, amelyek meghatározzák az $F(X)$ görbe púpjának csúcosságát. Ezeknek a paramétereknek tipikusan van valamilyen biológiai, gazdasági vagy társadalmi jelentésük.

Egy speciális példa a következő egyenlet [1, 4, 12–23]:

$$(2) \quad N_{t+1} = N_t(a - bN_t)$$

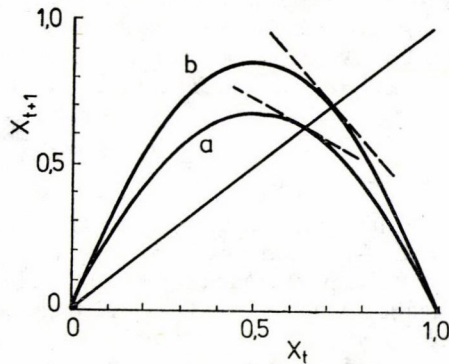
Ezt néha „logisztikus” differenciaegyenletnek hívják. A $b=0$ szélsőséges esetben ez egy populáció tisztán exponenciális növekedését írja le ($a > 1$ mellett); ha $b \neq 0$, akkor a négyzetes nemlinearitás egy olyan púppal rendelkező növekedési görbét eredményez, amelynek csúcosságát az „ a ” paraméter határozza meg. Az $X = bN/a$ jelölést bevezetve, az egyenlet kanonikus alakra hozható [1, 4, 12–23]:

$$(3) \quad X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$$

Ebben a formában — amit az 1. ábrán illusztrálunk — vitathatatlanul ez a legegyszerűbb nemlineáris differenciaegyenlet. A (3) egyenletet fogom használni a legtöbb numerikus példára és magyarázatra ebben a cikkben. Bár a (3) egyenlet különleges egyszerűsége miatt vonzó a matematikusok számára, a gyakorlati alkalmazásokban hátrány, hogy megköveteli X -től, hogy a $0 < X < 1$ intervallumban maradjon; ha X valaha is túlnő az egységen, a rákövetkező iterációk $-\infty$ -hez divergálnak (ami azt jelenti, hogy a populáció kihal). Ezenkívül a (3)-beli $F(X)$ függvény ($X=1/2$ -nél) az $a/4$ maximumot veszi fel, az egyenlet ezért nemtriviális dinamikus viselkedést csak akkor mutat, ha $a < 4$. Másfelől az összes trajektória $X=0$ -ba megy, ha $a < 1$. Így a nemtriviális dinamikus viselkedéshez követelmény: $1 < a < 4$, ha ez nem teljesül, a populáció kihal.

Egy másik példa, amely mélyebben gyökerezik a biológiai irodalomban [1, 23–27], az

$$(4) \quad X_{t+1} = X_t \exp[r(1 - X_t)]$$



1. ábra. Az X_{t+1} és X_t közötti kapcsolat tipikus példája ahogyan az (1) egyenlet leírja. Ezek a (3) egyenlet görbéi, ha $a=2,707$ (a); és $a=3,414$ (b). A szaggatott vonalak jelölik a meredekséget a fixpontokban, ahol $F(X)$ metszi a 45° -os egyenest. Az „a” esetben a meredekség kisebb, mint -45° és a fixpont stabilis; a „b” esetben a meredekség nagyobb, mint -45° és a pont instabilis.

egyenlet. Ez is leírja azt, hogy a populáció hajlamos az egyszerű exponenciális növekedésre kis sűrűség esetén és csökkenésre nagy sűrűség esetén. E nemlineáris viselkedésnek a csúcosságát az r paraméter hangolja. A modell elfogadható egy olyan egyetlen fajból álló populációra, melynek egyedszámát nagy sűrűség esetén járványos betegség szabályozza [28]. A (4) egyenlet $F(X)$ függvénye kissé bonyolultabb, mint a (3) egyenleté, de ezért az az előny kárpótolja az embert, hogy a lokális stabilitás maga után vonja a globális is, minden $X > 0$ -ra [1].

Az (1) egyenlet egymaximumú függvényeire a (3) és (4) képleteken felül további példákat is vehetnénk az ökológiai irodalomból. Egy meglehetősen teljes ilyen katalógust ad — irodalmi hivatkozásokkal kiegészítve — MAY és OSTER [1]. Más egyszerű matematikai függvényeket adnak meg METROPOLIS és mtsai [16]. A későbbiekben más $F(X)$ függvényeket is tárgyalunk a „matematikai furcsaságok” címszó alatt.

Az (1) egyenlet dinamikai tulajdonságai

Az (1) egyenlet lehetséges konstans, egyensúlyi X értékeit (fixpontjait) algebrailag megkaphatjuk az $X_{t+1} = X_t = X^*$ behelyettesítéssel, és az

$$(5) \quad X^* = F(X^*)$$

egyenlet megoldásával. Ezzel ekvivalens grafikus módszer, ha megtaláljuk azokat a pontokat, ahol az X_t -ből az X_{t+1} -be való átmenetet ábrázoló $F(X)$ görbe metszi a 45° -os egyenest, ekkor $X_{t+1} = X_t$, ami megfelel a zéró populációnövekedés ideális nirvánájának, l. az 1. ábrán. A fent tárgyalt és a (3) és a (4) egyenletekkel bemutatott egymaximumú görbéknek két ilyen pontjuk van: a triviális megoldás: $X = 0$, és az X^* nemtriviális megoldás (amely a (3) egyenletnél $X^* = 1 - [1/a]$).

A következő kérdés az X^* egyensúlyi pont stabilitására vonatkozik. Látható [24, 25, 19—21, 1, 4], hogy ez az $F(X)$ görbe X^* pontban vett iránytangensétől függ. Ezt az iránytangenset, amelyet az 1. ábrán szaggatott vonal jelöl, a

$$(6) \quad \lambda^{(1)}(X^*) = \left[\frac{dF}{dX} \right]_{X=X^*}$$

képlet határozza meg. Amíg ez az iránytangens 45° és -45° között van (azaz $\lambda^{(1)}$ $+1$ és -1 közötti) és hegyesszöget alkot a 45° -os zéró növekedési vonallal, az X^* egyensúlyi pont legalább lokálisan stabilis, a szomszédságból az összes trajektóriát magához vonzza. A (3) egyenletben például ez az iránytangens $\lambda^{(1)} = 2 - a$, az egyensúlyi pont ezért akkor és csak akkor stabilis és vonzza az összes $0 < X < 1$ intervallumból eredő trajektóriát, ha $1 < a < 3$.

Amint a lényeges paramétereket változtatjuk, úgy válik az $F(X)$ görbe egyre meredekebb és meredekebb csúcává, a stabilitást meghatározó iránytangens így végül is -45° -nál kisebb meredekségű lesz (azaz $\lambda^{(1)} < -1$), aminek következtében az X^* egyensúlyi pont nem lesz többé stabilis.

Mi történik ezután? Mi történik például, ha $a > 3$ a (3) egyenletben?

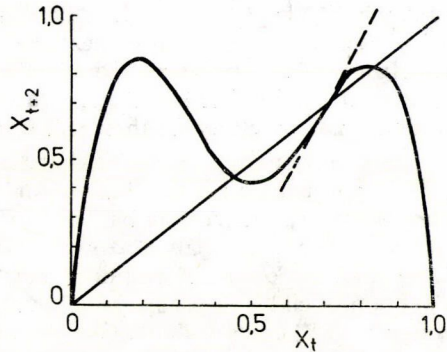
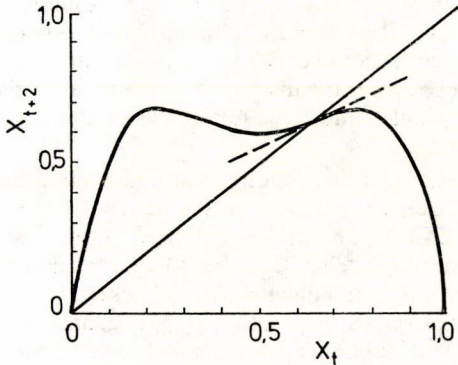
Hogy válaszoljunk erre a kérdésre, segítségünkre lesz, ha megnézzük azt az ábrát, amelyik a populációk két, egymást követő generáción át ható kapcsolatát mu-

tatja be, azaz ha megnézzük azt a függvényt, amelyik X_{t+2} -t X_t -vel hozza összefüggésbe. Az (1) egyenlet második iteráltját

$$(7) \quad X_{t+2} = F[F(X_t)]$$

-ként írhatjuk, illetve bevezetve egy nyilvánvaló jelölést:

$$(8) \quad X_{t+2} = F^{(2)}(X_t)$$



2. ábra. A (3) egyenlet kétszeres iterációjából kapott X_{t+2} és X_t közötti viszony képe. Az ábra az 1. ábra „a” esetére vonatkozik, amikor $a=2,707$: az alap fixpont stabilis, és ez az egyedüli pont, amelynél $F^{(2)}(X)$ metszi a 45° -os vonalt (ahol az iránytangense, melyet a szaggatott vonal mutat, kevésbé meredek, mint 45°).

3. ábra. Épp olyan, mint a 2. ábra, kivéve, hogy itt $a=3,414$, mint az 1. ábrán a „b” esetben. Az alap fixpont most instabilis: $F^{(2)}(X)$ iránytangensének a meredeksége ebben a pontban 45° alatt van, ami két, kettes periódusú új megoldás megjelenéséhez vezet. (Az eredeti közleményben a 2. és 3. ábra felcserélődött. A ford. megjegyzése.)

A (3) egyenletből így származtatott függvény a 2. és 3. ábrán látható. Azokat a populáció értékeket, melyek ismétlődnek minden második generációban (azaz fixpontok kettes periódussal) X_2^* -gal jelölhetjük és meghatározhatjuk, mind az

$$(9) \quad X_2^* = F^{(2)}(X_2^*)$$

algebrai formából, mind grafikusán az $F^{(2)}(X)$ görbe és a 45° -os egyenes metszéspontjából, amint az a 2. és 3. ábrán látható. Világos, hogy az (5) egyenlet X^* egyensúlyi pontja a (9) egyenlet egy megoldása; az egyes periódusú alapvető fixpont a kettes periódusú megoldás egy degenerált esete. Tegyük most egy egyszerű, de döntő megfigyelést [1]: az $F^{(2)}(X)$ görbe iránytangense az X^* pontban, amelyet $\lambda^{(2)}(X^*)$ -gal jelölünk és a 2. és 3. ábrán szaggatott vonallal ábrázolunk, az $F(X)$ megfelelő iránytangensének a négyzete.

$$(10) \quad \lambda^{(2)}(X^*) = [\lambda^{(1)}(X^*)]^2$$

Éz a tény lehetővé teszi, hogy megvilágítsuk, mi történik, ha az X^* fixpont instabillá válik. Ha $F(X)$ iránytangense kisebb, mint -45° (azaz $|\lambda^{(1)}| < 1$), amint azt az „a” görbe mutatja az 1. ábrán, akkor X^* stabilis. A (10) egyenletből következően ez azt is jelenti, hogy $0 < \lambda^{(2)} < 1$, azaz $F^{(2)}$ megfelelő iránytangense X^* -nál 0° és

45° között fekszik, amint az a 2. ábrán látható. Amíg az X^* fixpont stabilis, ez jelenti a (9) egyenlet egyetlen nem triviális megoldását. Másfelől, ha a $\lambda^{(1)}$ meredeksége -45° -on túlmegey (azaz $|\lambda^{(1)}| > 1$), amint azt a „b” görbe mutatja az 1. ábrán, X^* instabilissá válik. Ugyanakkor a (10) egyenletből ez azt jelenti, hogy $\lambda^{(2)} > 1$, azaz az $F^{(2)}$ függvény megfelelő iránytangense az X^* helyen meredekebb, mint 45° , amint azt a 3. ábra mutatja. Ekkor $F^{(2)}(X)$ egy kanyart ír le és két új fixpont jelenik meg kettes periódussal, mint az a 3. ábrán látható.

Röviden, ha az (1) egyenlet $F(X)$ nemlineáris függvénye túl meredek csúcsává válik, az X^* alapvető fixpont instabilissá válhat. Pontosan annál az értéknél, amelyenél ez megtörténik, két új és kezdetben kettes periódusú fixpont születik, amelyek között a rendszer kettes periódusú stabilis ciklusban ingadozik. A grafikus analízis 1., 2. és 3. ábrán látható módja, és a (10) egyenlet mindaz, ami ennek az általános eredménynek az elfogadásához szükséges [1, 4].

Épp úgy, mint a korábbiakban, a kettes periódusú ciklus stabilitása függ az $F^{(2)}(X)$ görbének a két pontban vett iránytangensétől. (Könnyen belátható, hogy az iránytangens mindkét pontban azonos [1, 20] és általánosabban a k periódusú ciklus mind a k pontjában azonos. Ráadásul elképzelve a közbenső állapotokat a 2. és 3. ábrák között, a stabilitást meghatározó iránytangensnek az értéke $\lambda = +1$ a két pontos ciklus megszületésénél, ezután csökken 0-n keresztül $\lambda = -1$ -ig, aszerint, ahogyan $F(X)$ csúcsa változtatja a meredekségét. Túl ezen a ponton a kettes periódusú pontok instabilissá válnak és bifurkálódnak egy kezdetben stabilis ciklust adva négyes periódussal. Ez módot ad egy nyolcas periódusú ciklus kialakulására, majd onnan a 16, 32, 64, ..., 2^n periódusú bifurkálódó stabilis ciklusok hierarchiájának kialakulására. Minden egyes esetben, amint a k periódusú stabilis ciklus instabilissá válik, ugyanakkor bifurkálódik egy új és kezdetben stabilis $2k$ periódusú ciklust alkotva, alapvetően hasonlóképpen, mint azt $k=1$ -re felvázoltuk. Az anyagról egy teljesebb és pontosabb beszámolót ez ideig csupán [1] tartalmaz.

Ezt a „nagyon szép bifurkációs jelenséget” [22] a (3) egyenlet példáján a 4. ábrán írtuk le. Nem lehet eléggé hangsúlyozni, hogy a folyamat általános a legtöbb $F(X)$, szabályozható csúcsosságú púppal rendelkező függvényre. METROPOLIS és mtsai [16] úgy utalnak a 2^n periódusú ciklusok hierarchiájára, mint az X^* fixpontok felharmonikusaira.

Bár ez a folyamat 2^n ($n \rightarrow \infty$) periódusú ciklusok végtelen sorát állítja elő, a paraméterértékek olyan „ablaka”, amelyben bármely ciklus stabilis, folyamatosan csökken, úgyhogy a teljes folyamat konvergens, mivel felső korlátja valamelyik kritikus paraméterérték. (Ez igaz a legtöbb, de nem az összes $F(X)$ függvényre. Lásd a (17) egyenletet lejjebb.) Ez a kritikus paraméterérték a 2^n periódusú ciklusok torlódási pontja. A (3) egyenletnél ezt a_c -vel jelöljük: $a_c = 3,5700\dots$

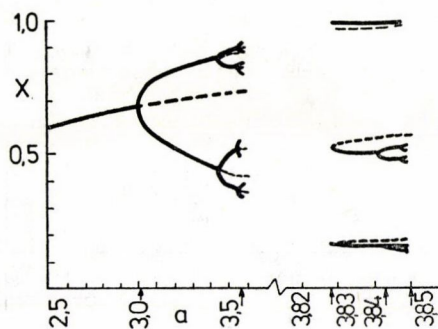
E torlódási ponton túl (pl. $a > a_c$ a (3) egyenletben) végtelen számú különböző periódusú fixpont és végtelen számú különböző periódusú ciklus van. Van nem megszámlálható számú olyan X_0 kezdőpont is, amelyből teljesen aperiodikus (bár korlátos) trajektória ered; nem számít, hogy milyen sokáig tart az $F(X)$ által generált idősor, a minta sohasem ismétlődik. Ezekre a tényekre sok módszer alapítható [1, 4, 20, 22, 29]. Az ilyen helyzetet, amikor végtelen számú különböző pályát kaphatunk, LI és YORKE [20] „kaotikusnak” nevezte el.

Amint a paraméter túlhaladja a kritikus értéket, először még az összes ciklus páros periódusú, X^* fixpont, X_i felső és alsó értékek között váltakozik. Bár ezek a

ciklusok valójában nagyon bonyolultak is lehetnek (lehet például 5726 pontot tartalmazó nem degenerált periódusuk az ismétlődésig), az avatatlan szemlélő számára olyannak tűnnek, mint egy „zajos” kettő periódusú ciklus. Amint a paraméterérték tovább nő, elérkezik egy szint (a (3) egyenletnél $a=3,6786$ -nál), amikor az első páratlan periódusú ciklus megjelenik. Először e páratlan ciklusok periódusa nagyon hosszú, de a paraméterérték növekedésével mind kisebb és kisebb lesz, míg végül a három pontból álló ciklus jelenik meg. (A (3) egyenletnél $a=3,8284\dots$ -nál). E ponton túl vannak ciklusok minden egész periódussal, valamint van több, mint megszámolható számú aszimptotikusan aperiodikus trajektória: LI és YORKE [20] ennek az eredménynek az eredeti bizonyítását „Hármas periódus káoszt okoz” címmel közölte. A „káosz” kifejezés dinamikus trajektóriák olyan képét idézi fel, melyek megkülönböztethetetlenek egy sztochasztikus folyamattól. A (3), (4) egyenletek és más hasonló egyenletek dinamikáinak numerikus szimulációi [12, 15, 21, 23, 25] megerősítik ezt a benyomást. Ugyanakkor az olyan sima és „érzékeny” függvényeknél, mint a (3) és (4) egyenlet, alapvető matematikai tény az, hogy bármely rögzített paraméterértékhez létezik egy egyedüli ciklus, amely stabil és amely lényegében az összes kezdőpontot vonzza [22, 29] (lásd [4] „A” függelékének egyszerű és világos magyarázatát). Azaz létezik egy ciklus, mely „birtokolja” csaknem az összes kezdőpontot; a maradék végtelen számú többi ciklus, az aszimptotikusan aperiodikus trajektóriákkal együtt egy olyan ponthalmazt birtokol, mely bár megszámlálhatatlan elemű, de nullmértékű.

Amint azt az alábbi 3. és 4. táblázat megvilágítja, minden egyes speciális stabilis ciklus valószínűleg egy rendkívül szűk paraméterérték ablakot foglal el. Ez a tény, azzal együtt, hogy általában hosszú idő kell ahhoz, hogy egy adott kezdeti feltételhez tartozó tranziens viselkedés lecsillapodjék, azt jelenti, hogy a gyakorlatban nem valószínű, hogy az egyetlen (stabilis) ciklus ne lenne elfeledve és hogy valószínűleg a dinamika sztochasztikus leírása megfelelőbb az alapul szolgáló determinisztikus struktúra ellenére. Ezt a pontot fogjuk továbbfolytatni alább a „gyakorlati alkalmazások” címszó alatt.

E szakasz fő mondanivalóját az 1. táblázatban foglaltuk össze, amely a (3) és (4) egyenletek dinamikus viselkedésének különböző módjait tárja elénk, mint a válasz nemlinearitásának mértékét meghatározó „ a ”, ill. „ r ” paraméterek függvényeit.



4. ábra. Ez az ábra bemutat néhányat azok közül a különböző periódusú stabilis (—) és instabilis (---) fixpontok közül, amelyeket bifurkációs folyamatok nyomán kaphatunk általánosságban az (1), itt speciálisan a (3) egyenlet alapján. Balra az alapjában stabilis fixpont instabilissá válik és 2^n periódusú stabilis felharmonikusokat állít elő villa-bifurkációk sorozatával; e ciklusok egyike sem stabilis $a=3,5700$ fölött. Jobbra, két hármas periódusú ciklus jelenik meg érintő bifurkációval; az egyik kezdetől fogva instabilis; a másik kezdetben stabilis, de instabilissá válik, és módot ad 3×2^n periódusú stabilis felharmonikusok keletkezésére, amelyeknek torlódási pontjuk van $a=3,8495$ -nél. Megjegyezzük, hogy az „ a ” tengely skálaváltására amiatt volt szükség, hogy mindkét példát ugyanazon az ábrán ábrázoljuk. Végtelen sok más ilyen, a magasabb periódusú cikluson alapuló ablak van.

1. TÁBLÁZAT

Az (1) egyenlet különböző egycsúcsú $F(x)$ függvényeinek összefoglalása, viselkedésük a kaotikus tartományban, megkülönböztetve az általános és nem általános dinamikai tulajdonságokat

| Az (1) egyenlet $F(X)$ függvénye | $aX(1-X)$ | $X \exp[r(1-X)]$ | aX ; ha $X < \frac{1}{2}$ $a(1-X)$; ha $X > \frac{1}{2}$ | λX ; ha $X < 1$ λX^{1-b} ; ha $X > 1$ |
|---|---------------------|------------------|---|--|
| a szabályozó paraméter | a | r | a | b |
| a fixpont instabilissá válik | 3,0000 | 2,0000 | 1,0000* | 2,0000 |
| a kaotikus tartomány kezdete a 2^n periódusú ciklusok torlódási pontja | 3,5700 | 2,6924 | 1,0000 | 2,0000 |
| az első páratlan periódusú ciklus megjelenik | 3,6786 | 2,8332 | 1,4142 | 2,6180 |
| a hármas periódusú ciklus megjelenik és emiatt minden egész periódus jelen van | 3,8284 | 3,1024 | 1,6180 | 3,0000 |
| a kaotikus tartomány vége | 4,0000 ⁺ | ∞^{++} | 2,000 ⁺ | ∞^{++} |
| stabilisak-e a ciklusok a kaotikus tartományban? | Igen | Igen | Nem | Nem |

* Ezen a érték alatt $X=0$ stabilis.

⁺ Minden megoldás $-\infty$ -hez tart, ha az a érték ennél nagyobb.

⁺⁺ A gyakorlatban, ha r vagy b elég nagyvá válik, X végül annyira lecsökken, hogy 0-nak vehető, ami a biológiai populációk kihalását jelenti a modellben.

Ezek a tulajdonságok grafikus úton kvalitatíve megérthetők és általánosan jellemzőek az (1) egyenlet minden jól viselkedő $F(X)$ függvényére.

Most hozzáfogunk az analitikus függvények kaotikus viselkedése matematikai szerkezetének részletesebb tárgyalásához, majd a fentebb előrejelzett gyakorlati problémákhoz és a nemanalitikus függvények által mutatott viselkedési sajátosságok áttekintéséhez (mint amilyenek az 1. táblázat két jobb oldali oszlopában vannak).

A kaotikus rendszer finomszerkezete

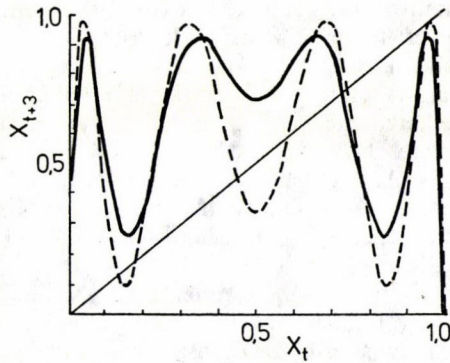
Azt már láttuk, hogy az X^* eredeti fixpont hogyan bifurkálódik 2^n periodicitású felharmonikusokat adva. De hogyan keletkeznek a k periódusú új ciklusok?

Az általános folyamatot az 5. ábra illusztrálja, amely bemutatja, hogyan keletkezik a három periódusú ciklus. A (8) egyenletnél tett megjegyzés nyilvánvaló kiterjesztése, hogy a populációt három generáció után a következő összefüggés határozza meg:

$$(11) \quad X_{t+3} = F^{(3)}(X_t)$$

Ha $F(X)$ púpja eléggé meredek, a háromszoros iteráció egy négy csúccsal rendelkező $F^{(3)}(X)$ függvényt eredményez, amint az az 5. ábrán látható a (3) egyenlet esetére.

Először ($a < 3,8284$ -re a (3) egyenletben) a 45° -os egyenes a görbét egyedül az X^* (és az $X=0$) pontban metszi, ahogy azt a folytonos vonal mutatja az 5. ábrán. Amint $F(X)$ púpja meredekebbé válik, a $F^{(3)}(X)$ hegyei és völgyei egyre kifejezettebbek, az első két völgy lesüllyed, egyidejűleg az utolsó hegy emelkedik, míg eléri a 45° -os egyenest, majd metszik azt hat új pontban, amint azt a szaggatott vonal mutatja az 5. ábrán. Ez a hat pont két különálló, három pontból álló ciklusra oszlik. A közbelső állapotok elképzelésével az 5. ábránál is belátható, hogy $F^{(3)}(X)$ stabilitást meghatározó iránytangenseinek e pontok közül háromnál közös értékük van, amely $\lambda^{(3)} = +1$ a keletkezésüknél, majd $+1$ fölé nő: ez a hármas periódusú ciklus sosem stabilis. A másik három pontban $F^{(3)}(X)$ iránytangense $\lambda^{(3)} = +1$ -nél indul, majd 0-ra csökken, egy hármas periódusú stabilis ciklust eredményezve. Ahogy $F(X)$ mereksége nő, a kezdetben stabilis három pontból álló ciklus $\lambda^{(3)}$ iránytangense -1 alá csökken, a ciklus instabilissá válik, és az előző részben tárgyalt bifurkációs folyamattal $6, 12, 24, \dots 3 \times 2^n$ periódusú stabilis ciklusok keletkeznek belőle. A hármas periódusú stabilis és instabilis cikluspár és a kezdetben stabilis ciklus instabilissá válásából keletkező újabb felharmonikusok keletkezését a 4. ábra jobb oldala szemlélteti.



5. ábra. Az X_{t+3} és X_t közötti, a (3) egyenlet háromszoros iterációjával kapható összefüggés. A folytonos vonal $a=3,7$ -re vonatkozik és a 45° -os egyenest csak egyszer metszi. Ha „ a ” növekszik, a hegyek és völgyek kifejezettebbeké válnak. A szaggatott vonal $a=3,9$ -hez tartozik és ekkor 6 hármas periódusú új pont jelent meg (két 3-3 periódusú ciklusként).

Az elsőrendű differenciaegyenletek bifurkációs folyamatainak két alapvető fajtája van [1, 4]. Új k periódusú ciklusok párosával keletkeznek (egy stabilis, egy instabilis), amint $F(X)$ magasabb iteráltjainak hegyei és völgyei mozognak fel, illetve le, hogy metsszék a 45° -os egyenest, ahogy azt az 5. ábra ábrázolja. Ezek a ciklusok akkor keletkeznek, amikor a 45° -os egyenes a hegyeknek és völgyeknek érintőivé válik, így az $F^{(k)}(X)$ görbe kezdeti iránytangense ezekben a pontokban $\lambda^{(k)} = +1$; a bifurkációnak ezt a típusát érintő bifurkációnak vagy $\lambda = +1$ bifurkációnak hívhatjuk [1, 4]. Viszont fordítva, egy eredetileg stabilis k periódusú ciklus instabilissá válhat, amint $F(X)$ meredekebbé válik. Ez akkor történik, amikor $F^{(k)}$ iránytangense ezekben a k periódusú pontokban $\lambda^{(k)} = -1$ -nél meredekebb lesz, minek következtében egy új és kezdetben stabilis $2k$ periódusú ciklus születik a 2. és 3. ábrán ábrázolt módon. A bifurkációnak ezt a típusát villabifurkációnak (a 4. ábra bal oldaláról kölcsönözve a képét) vagy $\lambda = -1$ bifurkációnak hívhatjuk [1, 4].

Ezt mind egybegyűjtve, leszűrhetjük, hogy ahogyan $F(X)$ paraméterei változnak, az alapvető, stabilis dinamikai egységek a k alapperiódusú ciklusok, amelyek érintő bifurkációval keletkeznek, a hozzájuk társuló $k2^n$ periódusú felharmonikusok kaszkádjával együtt, amelyek villabifurkációval képződnek. Ezen az alapon az X^* konstans egyensúlyi megoldás és a 2^n periódusú stabilis ciklusok rákövetkező hierarchiája egy általános jelenségnek csupán egy speciális esete, jóllehet nyilvánvalóan fontos (ugyanis $k=1$). Ráadásul emlékezzünk arra [1, 4, 22, 29], hogy az érzékeny,

analitikus függvényeknek (mint amilyenek a (3) és (4) egyenletben szereplők) létezik egyetlen stabilis ciklusok $F(X)$ minden paraméterértékére. A paraméterértékek teljes tartománya ($1 < a < 4$ a (3) egyenletben, $0 < r$ a (4) egyenletben) eképpen a paraméterértékek végtelen sok ablakából áll — néhány közülük nagy, néhány elképzelhetetlenül kicsi —, de mindegyik ezen alapvető dinamikai egységek közül csupán egynek felel meg. A lenti 3. és 4. táblázat illusztrálja ezt. Ezeket az ablakokat egymástól olyan pontok különítik el (a $k2^n$ periódusú felharmonikusok torlódási pontjai), amelyeknél a rendszer igazán kaotikus vonzó ciklus nélkül; habár végtelen sok ilyen speciális paraméterérték van, ezek az összes érték intervallumában nullmértékűek.

Hogyan rendeződnek el ezek a különböző ciklusok a lényeges paraméterértékek intervallumában? Tudomásom szerint ezt a kérdést egymástól függetlenül legalább hat munkacsoport válaszolta már meg a kombinatorika elméletével [16, 30], a numerikus analízissel [13, 14], a populációbiológiával [1] és a (tárgan értelmezett) dinamikus rendszerek elméletével [22, 31] kapcsolatban.

Egy kis egyszerű közelítés (aminek megvan az az előnye, hogy kis technikai apparátust igényel és az a hátránya, hogy eléggé ügyetlen) abból áll, hogy először arra a kérdésre válaszol, hogy hány k periódusú pont lehetséges? Ez azt jelenti, hogy hány különböző megoldása lehet az

$$(12) \quad X_k^* = F^{(k)}(X_k^*)$$

egyenletnek? Ha az $F(X)$ függvény eléggé meredek csúcsú, ami akkor következik be, ha a paraméterérték elég nagy, minden egymást követő iteráció megkettőzi a csúcsok számát, tehát az $F^{(k)}(X)$ függvénynek 2^{k-1} csúcsa van. Elég nagy paraméter-

2. TÁBLÁZAT

Az $F(X)$ egycsúcsú függvényből az (1) egyenlet alapján kapható $k=1$ -től 12-ig periodicitású periodikus pontok és különböző ciklusok számának listája

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|--|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|------|------|------|
| a k periódusú pontok összes lehetséges száma | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 |
| a nem degenerált k periódusú pontok összes lehetséges száma | 2 | 2 | 6 | 12 | 30 | 54 | 126 | 240 | 504 | 990 | 2046 | 4020 |
| a k periódusú ciklusok összes száma a degeneráltakat és/vagy a felharmonikusokat és/vagy a sohasem lokálisan stabilisakat is beleértve | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 14 | 20 | 36 | 60 | 108 | 188 | 352 |
| a nem degenerált ciklusok összes száma (a felharmonikusokkal és az instabilis ciklusokkal együtt) | 2 | 1 | 2 | 3 | 6 | 9 | 18 | 30 | 56 | 99 | 186 | 335 |
| a nem degenerált, stabilis ciklusok összes száma (a felharmonikusokkal együtt) | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 9 | 16 | 28 | 51 | 93 | 170 |
| a k alapperiódusú, nem degenerált, stabilis ciklusok teljes száma (tehát a felharmonikusok nincsenek benne) | 1 | — | 1 | 1 | 3 | 4 | 9 | 14 | 28 | 48 | 93 | 165 |

értékeknél az összes hegyet és völgyet metszeni fogja a 45° -os egyenes, 2^k számú k periódusú fixpontot előállítva. Ezek a 2. táblázat felső sorában vannak felsorolva $k \leq 12$ -ig. Egy ilyen felsorolás magába foglalja azokat a degenerált pontokat, amelyek periodicitása k osztója, speciálisan a két egyes periódusú pont ($X=0$ és X^*) a (12) egyenlet degenerált megoldásai minden k -ra. Balról jobbra haladva a 2. táblázatban, ezek a degenerált pontok levonhatók, hogy megkapjuk a k alapperiódusú nemdegenerált pontok számát, amint az a 2. táblázat második sorában található. Másutt ugyanennek az eredménynek az eléréséhez bonyolultabb módokat adnak [13, 14, 16, 22, 30, 31].

Például hatos periódussal végülis $2^6=64$ pont van. Ez magába foglalja a két egyes periódusú pontot, a kettes periódusú „felharmonikus” ciklust és a hármas periódusú pontok tripletteiből — egy stabilisból és egy instabilisból álló párt; így összesen 10 olyan pont van, amelyek alapperiódusa 6 osztója, tehát 54 olyan pont marad, amelynek alapperiódusa 6.

A 2^k számú k periódusú pont olyan ciklusokba rendeződik, amelyek periódusak, vagy annak osztója, amelyek vagy az érintő, vagy a villa-bifurkációk eredményeiként jelennek meg, ha $F(X)$ paramétereit változtatjuk. A 2. táblázat 3. sorában találhatjuk az így megjelenő különböző k periódusú ciklusok teljes számát. A negyedik sorban ebből kivontuk a degenerált ciklusokat, hogy megkapjuk a k periódusú nem degenerált ciklusok teljes számát, ezeknek a számoknak meg kell egyezniük a második oszlop számainak k -ad részével. A negyedik sor tartalmazza a villa-bifurkációval keletkező stabilis felharmonikusokat és az érintő bifurkációval keletkező stabilis-instabilis cikluspárokat. Kivonva ebből a kezdettől fogva instabilis ciklusokat, megkapjuk azoknak a ciklusoknak a számát, amelyek stabilisak lehetnek (l. 5. sor); ezeket a számokat is meg lehet kapni elegánsabb módszerekkel [13, 16, 30]. Végül kivonhatjuk a villa-bifurkációval keletkező stabilis ciklusokat, minthogy ezek néhány egyszerűbb ciklus felharmonikusai, hogy megkapjuk a 2. táblázat utolsó sorát, mely felsorolja, a k alapperiódusú stabilis ciklusok számát.

Visszatérve a 6 periódusú példához, már szóltunk arról az öt degenerált ciklusról, amelyek periódusa 6 osztója. A maradék 54 pont felosztható egy olyan hatos periódusú ciklusra, amelyik az egyetlen stabilis hárompontos ciklus felharmonikusaként keletkezik és 4 különböző hatos periódusú cikluspárra (azaz 4 kezdetben stabilisra és 4 kezdetben instabilisra), melyek egymást követő érintős bifurkációval keletkeznek. Így alulról felfelé olvasva a 2. táblázat 6-os periódusokra vonatkozó oszlopát, a következő számokat kapjuk: 4, 5, 9, 14.

Különböző címkézési trükköket, vagy a kombinatorika elméletének módszereit alkalmazva általánosan is felsorolhatjuk a különböző ciklusok megjelenési sorrendjét: [1, 13, 16, 22]. Például a 3, 5 és 6 periódusú alap stabilis ciklusoknak (melyekből sorrendben 1, 3 és 4 van) a 6, 5, 3, 5, 6, 6, 5, 6 sorrendben kell megjelenniük: hasonlítsuk össze ezt a 3. és 4. táblázattal. METROPOLIS és mtsai [16] általános felsorolást adtak minden $k \leq 11$ periódusú ciklusról.

Ebből az következik, hogy megadva a legutóbb megjelent ciklust, lehetséges (legalábbis elvileg) összeállítani az összes olyan ciklust, amelyek addig a pontig megjelentek. Erre egy különösen elegáns módszert adott SMALE és WILLIAMS [22], akik megmutatták például azt, hogy amikor először keletkezik a hármas periódusú stabilis ciklus, a többi olyan k periódusú pont N_k száma, amelyek ennél a lépcsőnél jelennek meg, egy *Fibonacci-szerű sorozattal* adható meg, $N_k=2, 4, 5, 8, 12, 19, 30, 48, 77, 124, 200, 323$ $k=1, 2, \dots, 12$ -re; ez különbözik az $F(X)$ meredekebbé válása

közben végül is megjelenő k periódusú pontok teljes számától (1. a 2. táblázat felső sorát).

A fixpontok teljes számáról és megjelenésük sorrendjéről viszonylag könnyű ilyen táblázatot készíteni. Bármely konkrét $F(X)$ függvényre az a numerikus feladat, hogy megtaláljuk a paraméterértékek azon ablakait, amelyekben valamely ciklus vagy a felharmonikusai stabilisak, ezzel ellentétben viszonylag unalmas és nem elegáns. Mielőtt ilyen eredményeket mutatnánk be, két különlegesen fontos paraméterértéket kell megemlítenünk.

HOPPENSTEADT és HYMEN [21] egy egyszerű grafikus módszert adtak a kaotikus tartomány azon paraméterértékének azon megkeresésére, amelynél az első páros periódusú ciklus megjelenik. Az analitikus receptjük a következő. Legyen α az a paraméter, amelyik az $F(X)$ függvény meredekségét szabályozza (például a 3. egyenletben $\alpha = a$, a (4) egyenletben $\alpha = r$), $X^*(\alpha)$ legyen az 1 periódusú fixpont (az (5) egyenlet nemtriviális megoldása) és $X_{\max}(\alpha)$ az (1) egyenlet iterációival elérhető legnagyobb érték (azaz $F(X)$ értéke a csúcspanban vagy a stacionárius pontban). Az első páros periódus ciklus az

$$(13) \quad X^*(\alpha) = F^{(2)}(X_{\max}(\alpha))$$

egyenletet kielégítő α értéknél jelenik meg [21, 31].

Mint fentebb már megemlítettük, egy másik kritikus érték az, ahol a hármas periódusú ciklus először jelenik meg. Ezt a paraméterértéket az (1) egyenlet harmadik iteráltjának megoldásából nyerhetjük numerikusan: a (3) egyenletre ez $a = 1 + \sqrt[3]{8}$ [14].

MYRBERG [13] (minden $k \leq 10$ -re) és METROPOLIS és mtsai [16] (minden $k \leq 7$ -re) numerikus információt adott a (3) egyenlet stabilis ciklusairól. Ők nem a paraméterértékek ablakait adták meg, hanem csupán azt az egyetlen értéket, amelynél az adott ciklus maximálisan stabilis, azaz azt az „ a ” értéket, amelynél $F^{(k)}(X)$ stabilitás meghatározó iránytangense 0; $\lambda^{(k)} = 0$. Minthogy a k periódusú ciklus bármely pontjában az $F^{(k)}$ függvény k -szoros iteráltjának iránytangense egyszerűen e ciklus X_k^* pontjai mindegyikénél az $F(X)$ -ek iránytangenseinek a szorzata [1, 8, 20],

3. TÁBLÁZAT

A stabilis ciklusok felsorolása (6-ig terjedő alperiódusokkal) az $X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$ egyenlet esetére

| Az az a érték, amelynél | | | | Az a értékek azon tartományának a szélessége, amelyen belül az alapciklus, vagy annak felharmonikusa vonzó |
|---------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|--|
| az alapciklus periódusa | az alapciklus először megjelenik | az alapciklus instabilissá válik | a k 2 ⁿ periódusú felharmonikusok sorozatának mindegyike instabilissá válik | |
| 1 | 1,000 0 | 3,000 0 | 3,570 0 | 2,570 0 |
| 3 | 3,828 4 | 3,841 5 | 3,849 5 | 0,021 1 |
| 4 | 3,960 1 | 3,960 8 | 3,961 2 | 0,001 1 |
| 5 (a) | 3,738 2 | 3,741 1 | 3,743 0 | 0,004 8 |
| 5 (b) | 3,905 6 | 3,906 1 | 3,906 5 | 0,000 9 |
| 5 (c) | 3,990 26 | 3,990 30 | 3,990 32 | 0,000 06 |
| 6 (a) | 3,626 5 | 3,630 4 | 3,632 7 | 0,006 2 |
| 6 (b) | 3,937 516 | 3,937 596 | 3,937 649 | 0,000 133 |
| 6 (c) | 3,977 760 | 3,977 784 | 3,977 800 | 0,000 040 |
| 6 (d) | 3,997 583 | 3,997 585 | 3,997 586 | 0,000 003 |

a $\lambda^{(k)}=0$ követelmény azt jelenti, hogy $X=A$ ($F(X)$ stacionárius pontja, ahol $\lambda^{(1)}=0$) a kérdéses periodikus pontok egyike, ami jelentősen egyszerűsíti a numerikus számításokat.

Minden k periódusú alapciklusra (amelyek a 2. táblázat utolsó sorában található), különösen érdekes ismerni azokat a paramétereket, amelyeknél:

- (1) a ciklus először megjelenik (érintő bifurkációval);
- (2) az alapciklus instabilissá válik (és ezáltal egymást követő villa-bifurkációval $k2^n$ periódusú ciklusok felharmonikusainak kaszkádjává válik);
- (3) minden felharmonikus instabilissá válik (a $k2^n$ periódusú ciklusok torlódási pontja).

A 3. és 4. táblázat MAY és OSTER munkájának kiterjesztése [1], a (3) illetve a (4) egyenletről adják meg ezt a numerikus információt. (A torlódási pontokat egy gyorsan konvergáló iteratív eljárással számoltuk ki l. [1], „A” függelék). Néhány ilyen eredmény már GUMOWSKI és MIRA is kapott [32].

4. TÁBLÁZAT

A stabilis ciklusok felsorolása (6-ig terjedő alpperiódusokkal) az $X_{t+1}=X_t \exp [r(1-X_t)]$ egyenlet esetére

| Az az r érték, amelynél | | | | Az r értékek azon tartományának a szélessége, amelyen belül az alapciklus, vagy egyik felharmonikusa vonzó |
|---------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|--|
| az alapciklus periódusa | az alapciklus először megjelenik | az alapciklus instabilissá válik | a $k2^n$ periódusú felharmonikusok sorozatának mindegyike instabilissá válik | |
| 1 | 0,0000 | 2,0000 | 2,6924 | 2,6924 |
| 3 | 3,1024 | 3,1596 | 3,1957 | 0,0933 |
| 4 | 3,5855 | 3,6043 | 3,6153 | 0,0298 |
| 5 (a) | 2,9161 | 2,9222 | 2,9256 | 0,0095 |
| 5 (b) | 3,3632 | 3,3664 | 3,3682 | 0,0050 |
| 5 (c) | 3,9206 | 3,9295 | 3,9347 | 0,0141 |
| 6 (a) | 2,7714 | 2,7761 | 2,7789 | 0,0075 |
| 6 (b) | 3,4558 | 3,4563 | 3,4567 | 0,0009 |
| 6 (c) | 3,7736 | 3,7745 | 3,7750 | 0,0014 |
| 6 (d) | 4,1797 | 4,1848 | 4,1880 | 0,0083 |

Gyakorlati problémák

A (3) egyenlet paradigmaticus példájára vonatkozólag most már láthatjuk, hogy az $1 < a < 4$ paraméterintervallum olyan értékek végtelen sok ablakának egydimenziós mozaikjából épül fel, amelyek mindegyikében egy k periódusú ciklus, vagy annak egyik felharmonikusa, lényegében az összes kezdőpontot vonzza. Ezek az ablakok $1 < a < 3,5700\dots$ -re — a $k=1$ -nek és felharmonikusainak megfelelően — a legszélesebbek és a legfeltűnőbbek. Az első torlódási ponton túl, mint ez a 3. táblázatból látható, az ablakok keskenyek, még az egészen alacsony periodicitású ciklusokra is, és az ablakok k növekedtével gyorsan szűkülnek.

Mint kiderült, egy kettősség alakul ki a meghatározó matematikai viselkedés (ami pontosan determinisztikus) és a „józan észből” eredő következtetés között, amit a numerikus szimuláció nyomán lehetne levonni. Ha az a paramétert a kaotikus tar-

tomány egy pontjában állandónak tartjuk, és a (3) egyenletet tetszőlegesen sok generáción át iteráltatják, az észlelt X_t értékek sűrűség eloszlása a 0-tól 1-ig tartó intervallumban k egyenlő tüskét (precízebben: δ -függvényt) fog adni, annak megfelelően, hogy a k pont ennek az a értéknek megfelelő stabilis cikluson van. De a legtöbb a értékre ez a ciklus elég nagy periódusú, sőt általában sok ezer generáció telik el, mielőtt újra beáll a kezdeti állapot, így a numerikus szimulációval kapott sűrűség-térkép általában úgy néz ki, mint egy folytonos eloszlásból vett minta.

HOPPENSTEADTnek tulajdonítható a numerikus számolások egy különlegesen érdekes sorozata (személyes közlés), aki sok iterációból összeállított X egy-egy sűrűségeloszlását, a értékek olyan sorozatára, amelyek fokozatosan nőttek 3,5700-tól 4-ig. Ezeket az eredményeket mozgóképszerűen ábrázolta. Mint ahogy a 3. táblázat alapján várható, néhány a legfeltűnőbb ciklusok közül megjelent, mint δ felharmonikus, az első ötös és hatos ciklus. De a legtöbb értékére a sűrűségeloszlás úgy néz ki, mint egy véletlen folyamat mintafüggvénye. Ez különösen igaz annak az a értéknek a környezetére, ahol az első páros ciklus megjelenik ($a=3,6786$) majd $a=4$ környezetében ismét: ez nem meglepő, mivel ezek a helyek a torlódási pontok torlódási pontjai. A stabilis ciklusok periodicitásának alapjául szolgáló nemfolytonos változások ellenére a megfigyelt sűrűségminta éles átmenetek nélkül változott. Például ahogyan a addig az értékig nőtt, amelynél a hármas ciklus megjelenik, a sűrűségeloszlás három pont körül kezdett el tömörülni, majd fokozatosan elvándorolt ettől a három ponttól, amikor a hármas ciklus és felharmonikusai instabilissá váltak.

Úgy gondolom, hogy a legérdekesebb matematikai probléma, hogy módszert találjunk néhány közelítően és „effektíve folytonos” sűrűségspektrum megalkotására, ama tény ellenére, hogy a pontos sűrűségfüggvény meghatározható és mindig δ függvények egy halmazából áll. Lehetséges, hogy ilyen technikát már kifejlesztettek az ergodelméletben [33] (amely a statisztikus mechanika alapja), mint például a „durva felbontású (*coarse-grained*) megfigyelések” felhasználásánál. Nem tudom.

A (4) egyenlet dinamikai tulajdonságainak egy ilyen effektíve sztochasztikus leírását nagy r -re már megcsinálták [28], noha inkább csak erre az egyenletre vonatkozó taktikai trükkökkel, semmint valamilyen általános módszerrel. Ha r kb. 3 fölé nő, az egyenletből következő trajektóriák csaknem periodikusak lesznek egyre jobb közelítéssel $(1/r) \exp(r-1)$ periódushosszal.

Az ebben a részben szellőztetett véleményem az, hogy bár a kaotikus tartomány igen finom szerkezete matematikailag érdekes, érdektelen a legtöbb gyakorlati szempontból. Amit meg kellene követelni, az a determinisztikus dinamika valamilyen effektíve sztochasztikus leírása. Amíg a különböző ciklusok különféle helyzetét és megjelenésük sorrendjét meg lehetett csinálni egy kaptafára, az aktuális dinamikák ilyen sztochasztikus leírása teljesen különböző lesz különböző $F(X)$ -ekre: tanúbizonyosság erre a (4) egyenlet viselkedése — amelynek r -re sok generációként csaknem periodikus „kitörései” vannak a (3) egyenlet viselkedésével szemben, amelyik $a \rightarrow 4$ -re nem különbözik nagyon a *Bernoulli-féle pénzdobálás* egy sorozatától.

Matematikai furcsaságok

Mint ahogy fentebb tárgyaltuk, a stabilis ciklusok egymásutáni létezésének alapvető oka az egész kaotikus tartományban az, hogy minden új cikluspár érintő bifurkációval születik (l. 5. ábra), és az egyikük kezdetben stabilis úgy, hogy a lankás hegyek és völgyek metszik a 45° -os egyenest. Analitikus $F(X)$ függvényekre a kizárólagos olyan paraméterértékek, amelyeknél a sűrűségeloszlás vagy az invariáns mérték folytonos és valóban ergodikus, a felharmonikusok torlódási pontjai, amelyek az egyik ciklust a másiktól elválasztják. Az ilyen kivételes paraméterértékek már megtalálták az alkalmazásukat, például a (3) egyenletben, amelyik $a=4$ -re olyan, mint egy véletlenszám generátor [34, 35], amelynek $[X(1-X)]^{-\frac{1}{2}}$ -nel arányos folytonos sűrűségfüggvénye van a $0 < X < 1$ intervallumban.

A nem analitikus $F(X)$ függvények, amelyekben a csúcs valójában tüske, érdekes speciális esetet jelentenek. Elképzelhetjük a mozgó tuskés hegyeket és völgyeket, amint metszik a 45° -os vonalat az 5. ábrán és lehetséges, hogy mindkét érintő bifurkációval keletkezett ciklus kezdetből fogva instabilis (míg az egyiknél $\lambda^{(k)} > 1$, a másikonál $\lambda^{(k)} < -1$ minden $k > 1$ -re. Ekkor nincsenek stabilis ciklusok a kaotikus tartományban, ami ezáltal szó szerint kaotikus egy folytonos és tényleg ergodikus sűrűségfüggvénnyel.

Egy egyszerű példát ad az

$$X_{t+1} = aX_t; \quad \text{ha } X_t < \frac{1}{2}$$

$$(14) \quad X_{t+1} = a(1-X_t); \quad \text{ha } X_t > \frac{1}{2}$$

amely a $0 < X < 1$ intervallumban van értelmezve. Ha $0 < a < 1$, minden trajektória $X=0$ -ba tér, ha $1 < a < 2$, végtelen sok periodikus pálya van nem megszámlálható számú aperiodikus trajektóriával együtt, amelyek egyike sem lokálisan stabilis. Az első páros periódusú ciklus $a=\sqrt{2}$ -nél jelenik meg, és az összes egész periódusú jelen van $a=(1+\sqrt{5})/2$ fölött. KAC [36] gondosan disztkutálta az $a=2$ esetet. Egy másik példa, ezúttal kiterjedt biológiai pedigrével [1–3], a következő

$$X_{t+1} = \lambda X_t; \quad \text{ha } X_t < 1$$

$$(15) \quad X_{t+1} = \lambda X_t^{1-b}; \quad \text{ha } X_t > 1$$

Ha $\lambda > 1$, az egyenlet egy globálisan stabilis egyensúlyi ponttal rendelkezik $b < 2$ -nél. $b > 2$ -re ismét igazi káosz van stabilis ciklusok nélkül: az első páratlan ciklus $b=(3+\sqrt{5})/2$ -nél jelenik meg és az összes egész periódus jelen van $b=3$ fölött. A (14) és (15) egyenletek dinamikai tulajdonságait a 2. táblázat jobb oldalán összegeztük.

Az analitikusság hiánya a valódi véletlenszerű viselkedés szükséges, de nem elégséges feltétele [31]. Tekintsük, például:

$$X_{t+1} = \left(\frac{a}{2}\right) X_t; \quad \text{ha } X_t < \frac{1}{2}$$

$$(16) \quad X_{t+1} = aX_t(1 - X_t); \quad \text{ha } X_t > \frac{1}{2}$$

Ez az 1. ábra és a (3) egyenlet parabolája, de úgy, hogy $F(X)$ bal oldali fele egy szűk vonalra van lelapítva. Ez az egyenlet rendelkezik a értékek ablakaival, ezek mindegyikéhez tartozik stabilis ciklus, mint ahogyan azt általánosan leírtuk feljebb. A $\lambda^{(k)}$ stabilitás-meghatározó iránytangens ugyanakkor nem folytonosan változik az a paraméterrel és az egyszerűbb stabilis tartományok szélessége kisebb, mint a (3) egyenletnél: a fixpont $a=3$ -nál válik instabilissá, és a következő felharmonikusok torlódási pontja $a=3,27\dots$ -nél van; az első páratlan ciklus $a=3,44\dots$ -nél jelenik meg; a 3 pontból álló ciklus $a=3,67\dots$ -nél (hasonlítsuk össze az 1. táblázat első oszlopával).

A nem analitikus függvények eme viselkedési szeszélyei az ergodelmélet formális kérdéseinek kutatásában lehetnek érdekesek. Ugyanakkor úgy gondolom, hogy ezek nem lényegesek a biológiai és társadalomtudományok modelljei szempontjából, ahol az olyan függvényeknek, mint az $F(X)$ analitikusoknak kell lenniük. Ezt a szempontot máshol gondosan kidolgoztuk [37].

Utolsó furcsaságként tekintsük az

$$(17) \quad X_{t+1} = \lambda X_t [1 + X_t]^{-\beta}$$

egyenletet. Ezt már felhasználták úgy, hogy rovarpopulációkra vonatkozó nagy mennyiségű adatra illesztették [38, 39]. Stabilitási viselkedését a két paraméter, λ és β függvényében a 6. ábra mutatja. Megjegyezzük, hogy $\lambda < 7,39$ esetén létezik globálisan stabilis egyensúlyi pont minden β -ra; ha $7,39\dots < \lambda < 12,50\dots$ a fixpont instabilissá válik elég nagy β -ra úgy, hogy bifurkálódik egy stabilis 2 pontból álló ciklusra, ami megoldás minden nagyobb β esetén; amint λ növekszik a $12,50\dots < \lambda < 14,77\dots$ tartományban, különböző más 2^n periódusú felharmonikusok jelennek meg. A 2^n periódusú bifurkálódó ciklusok hierarchiája itt véget ér és a torlódási pontot és az ezután kaotikus tartományt még tetszőleges nagy β -ra sem érjük el, amíg $\lambda > 14,77\dots$ nem lesz.

Alkalmazások

Az a tény, hogy az egyszerű és determinisztikus (1) egyenlet rendelkezhet olyan dinamikus trajektóriákkal, amelyek úgy nézhetnek ki, mint egyfajta véletlen zaj, zavaró gyakorlati következményeket okozhat. Ez azt jelenti például, hogy egy állatpopuláció egyedszámlálási adatainak látszólag szabálytalan fluktuációi nem szükségképpen tudhatók be egy nem ismert környezet szeszélyeinek vagy mintavételi hibáknak, lehet, hogy egyszerűen olyan szigorúan determinisztikus populációnövekedési összefüggés következményei, mint az (1) egyenlet. Ezt a kérdést teljesebben és gondosabban másutt tárgyalták [1].

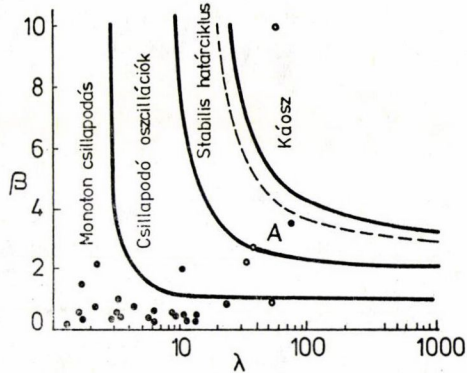
Azt is meg lehet figyelni, hogy a kaotikus rendszerben tetszőlegesen közeli kezdeti feltételek vezethetnek olyan trajektóriákhoz, amelyek elég hosszú idő múlva

nagyon divergálnak. Ez azt jelenti, hogy még ha rendelkezünk is egy olyan egyszerű modellel, amelyben a paraméterek pontosan meghatározottak, a hosszú távú előrejelzés sohasem lehetséges. Meteorológiai összefüggésben LORENTZ [15] ezt az általános jelenséget „lepke effektus”-nak nevezte: még ha a légkört le is tudnánk írni egy olyan determinisztikus modellel, amelyben az összes paraméter ismert, egy lepke szárnyainak remegése is úgy megváltoztathatja a kezdeti feltételeket, hogy emiatt (a kaotikus rendszerben) megváltozik a hosszú távú előrejelzés.

A folyadék örvénylése egy másik klaszszikus példa, ahol ha egy paraméter (a Reynolds-szám) változik, egy determinisztikus egyenletrendszerben (a Navier—Stokes-egyenletekben) a mozgás hirtelen átmehet valamilyen stabilis elrendezésből (például lamináris áramlásból) egy látszólag sztochasztikus, kaotikus rendszerbe. Különböző, a Navier—Stokes-differenciál-egyenleteken alapuló modelleket javasoltak

ennek a folyamatnak a matematikai leírására [15, 40, 41]. Az örvénylés elméletének egy újabb összefoglalójában MARTIN [42] úgy találta, hogy az (1) egydimenziós differencia-egyenlet hasznos lehet e tekintetben. Összehasonlítva a korábbi modellekkel [15, 40, 41] hátránya az, hogy még inkább elvont leírás, előnye pedig az, hogy rendelkezik a dinamikus viselkedés olyan spektrumával, amely nagyon gazdagon összetett, de méginkább vizsgálható analitikusan.

Egy földközeli alkalmazási lehetőség az (1) egyenlet illesztése diszkrét, egymást nem átfedő biológiai populációkra, mint amilyen sok mérsékelt égövi ízeltlábú [1, 2, 3, 38, 43]. A 6. ábra mutatja 24 természetes és 4 laboratóriumi populációra becsült λ és β paraméter értékeket [39], ha a (17) egyenletet illesztjük a rendelkezésre álló adatokra. Ez az ábra megmutatja az elméletileg stabilis területeket is: a stabilis pontot; ennek stabilis felharmonikusait (2^n periódusú stabil ciklusokat); a káoszt. A természetes populációk stabilis egyensúlyi ponttal rendelkező viselkedésre törekednek. A laboratóriumi populációk oszcilláló vagy kaotikus viselkedésre hajlamosak; a viselkedésük túlzottan nemlineáris lehet amiatt, hogy a laboratóriumi környezetben hiányzik sok természetes halálozási faktor. Ez emlékeztethet arra, hogy a leginkább oszcilláló természetes populáció a (6. ábrán A-val jelölt) kolorádóbogár, amelyeknek a gazdanövényvel való jelenlegi kapcsolata nem evolúciós eredetű. Ezek csupán előzetes megjegyzések, amiket több szempontból óvatosan kell kezelni. Az óvatosságra intők közül kettő, hogy léteznek technikai nehézségek az adatok válogatásánál és számok csökkentésénél és hogy nem léteznek egyetlen fajú populációk a természeti világban: Egy-egy dimenziós differenciaegyenletet nyerni úgy, hogy a populáció kölcsönhatását a biológiai és fizikai környezetével passzív paraméterekkel helyettesítjük, nagy erőszakot jelenthet a valóságon.



6. ábra. A folytonos vonal jelöli a stabilitási tartományokat a (17) egyenlet paraméterei, a sűrűségtől való függést kifejező β paraméter és a λ populáció növekedési sebesség függvényében, a szaggatott vonal mutatja, hogy a kétpontos ciklus hol ad lehetőséget 2^n periódusú magasabb ciklusok kialakulására. A fekete pontok a szántóföldi populációk, az üres körök a laboratóriumi populációk élet-tani táblázatainak elemzéséből nyert adatokat jelölik ([3]-ból a [39] nyomán).

Néhányra a sok más területből, ahol ezek az eszmék már alkalmazást nyertek, hivatkoztunk feljebb, a második részben [5—11]. A céloom ezzel az áttekintő cikkel az volt, hogy elősegítem az alkalmazásokat még más területeken is.

Rokon jelenségek magasabb dimenziókban

Elsőrendű differenciaegyenletek csatolt párjait (ezek megfelelnek egyetlen másodrendű egyenletnek) különféle összefüggésekben vizsgálták [4, 44—46] speciálisan a mérsékelt égövi ízeltlábú ragadozó-zsákmány rendszerek tanulmányozásában [2—4, 23, 47]. E kétdimenziós rendszerek bonyolultsága a dinamikus viselkedés terén még összetettebb a következők miatt: (1) még az analitikus függvények esetében is lehetséges valóban kaotikus viselkedés (mint a (14) és (15) egyenletnél), az ún. „furcsa attraktorok”-nak megfelelően; és (2) kettő vagy több különböző stabilis állapot (például egy stabilis pont és egy hármas periódusú stabilis ciklus) együtt előfordulhat ugyanazokra a paraméter értékekre [4]. Tegyük hozzá, e jelenségek megjelenése általában kevésbé szigorú nemlinearitást követel (kevesbé meredek csúcsú $F(X)$ függvényt), mint egydimenziós esetben.

Az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek hasonló rendszerei vagy a két csatolt elsőrendű differenciálegyenletekből álló rendszerek sokkal egyszerűbb, stabilis és instabilis pontokból és határciklusokból felépülő dinamikus viselkedéssel rendelkeznek [48]. Ez alapvetően azért van, mert a folytonos kétdimenziós rendszerekben meg lehet különböztetni egy zárt görbén kívüli és belüli tartományt; a dinamikus trajektóriák nem keresztezhetik egymást. A helyzet minőségileg sokkal bonyolultabbá válik és sok tekintetben analóggá az elsőrendű differenciaegyenletekhez, ha három vagy több csatolt, elsőrendű közönséges differenciálegyenletre térünk át (azaz közönséges differenciálegyenletekből álló háromdimenziós rendszerre). SCANLAN (személyes közlés) azt a véleményt hangoztatta, hogy a kaotikus viselkedés viselkedés és a „furcsa attraktorok”, azaz azok a megoldások, amelyek se nem pontok, se nem periodikus pályák [48], tipikusan jellemzők az ilyen rendszerekre. Néhány modellt alaposan tanulmányoztak, mint a kémiai és biológiai [49] reakció-diffúzió rendszerek modelljeit; a (háromdimenziós) *Lorenz-modellt* [15] és a négydimenziós *Rouelle—Takens-modellt* [40], melyekről feljebb szoltunk. E rendszerek analízise sokkal kevésbé áttekinthető, mint az (1) egyenleté magasabb dimenziójuk következtében.

Egy — újabban ebből a szempontból vizsgált — rendszerre explicit és eléggé meglepő példa: az ökológiában a versengő fajok leírására használt közönséges differenciálegyenletek. Egy vagy két fajra ezek a rendszerek elég unalmasak: a dinamikus trajektóriák néhány stabilis egyensúlyi pontba fognak tartani (mely mutathat együttélést, vagy egyik, vagy mindkét faj kihalását). Mint azt SMALE [50] nemrégiben megmutatta, ezek az általános egyenletek 3 vagy több fajra — bizonyos ésszerű és jól definiált értelemben — összeegyeztethetők bármilyen dinamikus viselkedéssel. SMALE [50] tárgyalása általános és elvont; MAY és LEONARD viszont tanulmányozták azt a különleges dinamikát, amelyet a jól ismert *Lotka—Volterra-egyenletek* is képesek mutatni, ha már 3 versengő faj van jelen.

Következtetés

Bár vannak még megoldatlan gyakorlati problémák, az e cikkben kifejtett elméletnek nyilvánvaló alkalmazása van sok területen.

A legfontosabb alkalmazások mindemlétt a pedagógiaiak lehetnek.

A lineáris rendszerekre vonatkozó matematikai elmélet elegáns összessége (*Fourier-analízis, ortogonális függvények* stb.) és ezek sikeres alkalmazása a fizikai tudományok sok alapvetően lineáris problémájára egyeduralomra tör még a viszonylag magas szintű matematikai és elméleti fizikai tanulmányokban is. Az eképp kifejelesztett matematikai intuíció rosszul készíti fel a tanulókat arra, hogy szembenézzenek az olyan diszkrét nemlineáris rendszerek legegyszerűbbjeinek különös viselkedésével, mint amilyen a (3) egyenlet. Noha az ilyen nemlineáris rendszerek a fizikai tudományokon kívül bizonyosan a szabályosak és nem a kivételesek.

Ezért szeretném sürgetni, hogy mondjuk a (3) egyenletet mutassák be az embereknek matematikai tanulmányaik elején. Ez az egyenlet fenomenologikusan is tanulmányozható zsebszámológéppel vagy akár anélkül iterálva. Ezek a tanulmányok nem tartalmazznak annyi fogalmi meggondolást, mint az elemi analízis. Az ilyen tanulmány nagyban gazdagítaná a tanulók nemlineáris rendszerekre vonatkozó elképzeléseit.

Nem csak a kutatásban, de a mindennapok politikai és gazdasági világában is sokkal jobban meg kellene érteni, ha több ember fogná fel, hogy az egyszerű nemlineáris rendszereknek nem szükségképpen egyszerűek a dinamikai tulajdonságaik.

Sok segítséget kaptam F. C. HOPPENSTEADT-tól, H. E. HUPPERTTÓL, A. I. MEES-től, C. J. PRESTONTÓL, S. SMALE-től, J. A. YORKE-től és különösen G. F. OSTER-től. A munkát részben az NSF támogatta.

IRODALOM*

- [1] MAY, R. M. and OSTER, G. F., *Am. Nat.*, **110**, 573—599 (1976).
- [2] VARLEY, G. C., GRADWELL, G. R. and HASSELL, M. P., *Insect Population Ecology* (Blackwell, Oxford, 1973).
- [3] MAY, R. M. (ed.), *Theoretical Ecology: Principles and Applications* (Blackwell, Oxford, 1976).
- [4] GÜCKENHEIMER, J., OSTER, G. F. and IPAKTCI, A., *J. Math. Biol.* **4**, 101—147 (1977).
- [5] OSTER, G. F., IPAKTCI, A. and ROCKLIN, I., *Theor. Pop. Biol.*, **10**, 365—382 (1976).
- [6] ASMUSSEN, M. A. and FELDMAN, M. W., *J. Theor. Biol.* **64**, 603—618 (1977).
- [7] HOPPENSTEADT, F. C., *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics* (SIAM, Philadelphia, 1975).
- [8] SAMUELSON, P. A., *Foundations of Economic Analysis* (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1947).
- [9] GOODWIN, R. E., *Econometrica*, **19**, 1—17 (1951).
- [10] BAUMOL, W. J., *Economic Dynamics*, 3rd ed. (Macmillan, New York, 1970).
- [11] Lásd például: KEMENY, J. and SNELL, J. L., *Mathematical Models in the Social Sciences* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972).
- [12] CHAUNDY, T. W. and PHILLIPS, E. Q., *Jl. Math. Oxford*, **7**, 74—80 (1936).
- [13] MYRBERG, P. J., *Ann. Akad. Sc. Fennicae, A*, **1**, No. 336/3 (1963).
- [14] MYRBERG, P. J., *Ann. Akad. Sc. Fennicae, A*, **1**, No. 259 (1958).
- [15] LORENZ, E. N., *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130—141 (1963); *Tellus*, **16**, 1—11 (1964).

* Az irodalomjegyzéket kiegészítettük a cikk megjelenésekor még csak nyomdában levő dolgozatok adataival. Felhívjuk a figyelmet [52]-re, amely az 1976 utáni irodalmat (és majdnem kizárólag csak azt) foglalja össze fizikusok számára. (A ford. megj.)

- [16] METROPOLIS, N., STEIN, M. L. and STEIN, P. R., *J. Combinatorial Theory*, **15**(A), 25—44 (1973).
- [17] MAYNARD SMITH, J., *Mathematical Ideas in Biology* (Cambridge University Press, Cambridge, 1968).
- [18] KREBS, C. J., *Ecology* (Harper and Row, New York, 1972).
- [19] MAY, R. M., *Am. Nat.*, **107**, 46—57 (1972).
- [20] LI, T-Y. and YORKE, J. A., *Am. Math. Monthly*, **82**, 985—992 (1975).
- [21] HOPPENSTEADT, F. C. and HYMAN, J. M., (Courant Institute, New York University: preprint, 1975).
- [22] SMALE, S. and WILLIAMS, R. (Department of Mathematics, Berkeley: preprint, 1976).
- [23] MAY, R. M., *Science*, **186**, 645—647 (1974).
- [24] MORAN, P. A. P., *Biometrics*, **6**, 250—258 (1950).
- [25] RICKER, W. E., *J. Fish. Res. Bd. Can.*, **11**, 559—623 (1954).
- [26] COOK, L. M., *Nature* **207**, 316 (1965).
- [27] MACFADYEN, A., *Animal Ecology: Aims and Methods* (Pitman, London, 1963).
- [28] MAY, R. M., *J. Theor. Biol.*, **51**, 511—524 (1975).
- [29] GUCKENHEIMER, J., *Proc. AMS Symposia in Pure Math.*, XIV, 95—124 (1970).
- [30] GILBERT, E. N. and RIORDAN, J., *Illinois J. Math.* **5**, 657—667 (1961).
- [31] PRESTON, C. J. (King's College, Cambridge: preprint, 1976.)
- [32] GUMOWSKI, I. and MIRA, C., *C. r. hebd. Seanc. Acad. Sci., Paris*, **281a**, 45—48 (1975); **282a**, 219—222 (1976).
- [33] LAYZER, D., *Sci. Am.*, **233**(6), 56—59 (1975).
- [34] ULAM, S. M., *Proc. Int. Congr. Math. 1950, Cambridge, Mass.: Vol. II*, pp. 264—273 (AMS, Providence R. I., 1950).
- [35] ULAM, S. M. and VON NEUMANN, J., *Bull. Am. Math. Soc.* (abstr.), **53**, 1120 (1947).
- [36] KAC, M., *Ann. Math.*, **47**, 33—49 (1946).
- [37] MAY, R. M., *Science*, **181**, 1074 (1973).
- [38] HASSELL, M. P., *J. Anim. Ecol.*, **44**, 283—296 (1974).
- [39] HASSELL, M. P., LAWTON, J. H. and MAY, R. M., *J. Anim. Ecol.*, **45**, 471—486 (1976).
- [40] RUELLE, D. and TAKENS, F., *Comm. Math. Phys.*, **20**, 167—192 (1971).
- [41] LANDAU, L. D. and LIFSHITZ, E. M., *Fluid Mechanics* (Pergamon, London, 1959). (Magyarul: Elméleti Fizika VI, *Hidrodinamika* Tankönyvkiadó 1980.)
- [42] MARTIN, P. C., *Proc. Int. Conf. on Statistical Physics*, Budapest (Hungarian Acad. Sci., Budapest, 1976). (Magyarul: Fizikai Szemle **28**, 121—134 (1978).)
- [43] SOUTHWOOD, T. R. E. in *Insects, Science and Society* (edit. by Pimentel, D.), 151—199 (Academic, New York, 1975).
- [44] METROPOLIS, N., STEIN, M. L. and STEIN P. R., *Numer. Math.*, **10**, 1—19 (1967).
- [45] GUMOWSKI, I. and MIRA, C., *Automatica*, **5**, 303—317 (1969).
- [46] STEIN, P. R. and ULAM, S. M., *Rosprawy Mat.*, **39**, 1—66 (1964).
- [47] BEDDINGTON, J. R., FREE, C. A. and LAWTON, J. H., *Nature*, **255**, 58—60 (1975).
- [48] HIRSCH, M. W. and SMALE, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra* (Academic, New York, 1974).
- [49] KOLATA, G. B., *Science*, **189**, 984—985 (1975).
- [50] SMALE, S., (Department of Mathematics, Berkeley: preprint, 1976).
- [51] MAY, R. M. and LEONARD, W. J., *SIAM J. Appl. Math.*, **29**, 243—253 (1975).
- [52] OTT, E., "Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems", *Rev. Mod. Phys.* **53**, 655—671 (1981).

FORDÍTOTTA: TURÁNYI TAMÁS
1195 BUDAPEST, RÓZSA FERENC U. 14.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1982. VII. 5. — Terjedelem: 20,30 (A/5) iv
82-3153 — Szegedi Nyomda — F. v.: Dobó József igazgató

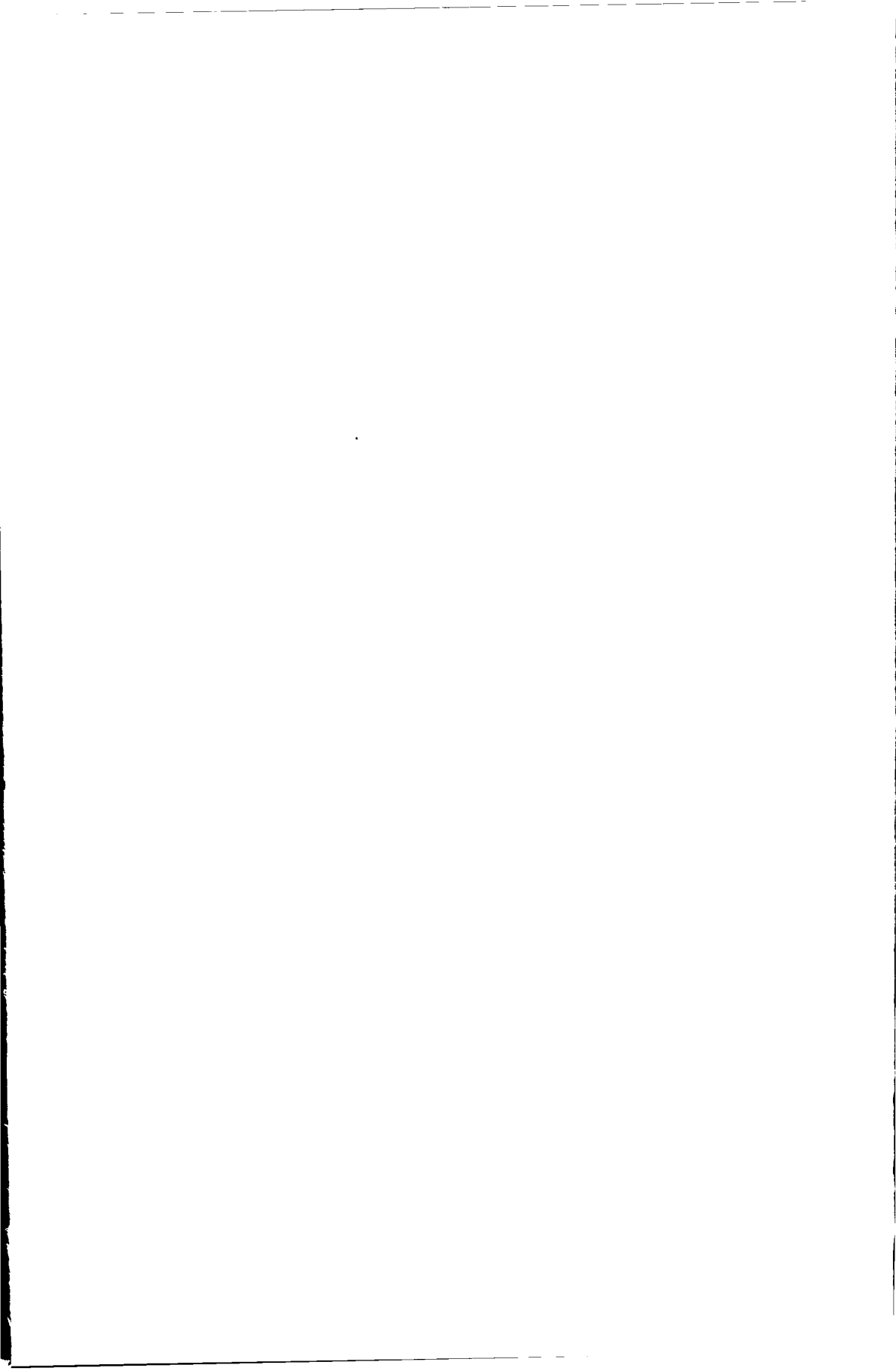


TARTALOMJEGYZÉK

| | |
|---|-----|
| <i>Baranyi László</i> : Improprius integrálok numerikus kiszámítása | 393 |
| <i>Beck György</i> : Gyors algoritmus Toeplitz-típusú szalagmátrix együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására | 157 |
| <i>Bene Béla</i> : Gráfgenerátor-rendszerek és nyelvek néhány elméleti kérdése és alkalmazási lehetőségei a számítógépes kutatásban | 251 |
| <i>Bernau Heinz</i> : A lineáris komplementaritási probléma több megoldásának a meghatározásáról | 195 |
| <i>Bolla Mariann</i> : A QRPS-transzformáció: a QR-algoritmus általánosítása valós téglalapmátrixok szinguláris felbontására | 125 |
| <i>Csige László és Tomkó József</i> : A gépkiszolgálási probléma exponenciális eloszlások esetén .. | 107 |
| <i>Csőrgő Sándor és Horváth Lajos</i> : Statisztikai következtetés cenzorált mintákból | 1 |
| <i>Demetrovics János és Katona Gyula</i> : A relációs adatbázis extrémális problémái | 183 |
| <i>Faragó István</i> : Véges elemek módszere elliptikus típusú feladatok megoldására | 399 |
| <i>Hegedűs Gábor</i> : Extremális algebra | 341 |
| <i>Horváth Lajos és Csörgő Sándor</i> : Statisztikai következtetés cenzorált mintákból | 1 |
| <i>Katona Gyula és Demetrovics János</i> : A relációs adatbázis extrémális problémái | 183 |
| <i>Kéri Gerzson</i> : Újrainvertálási stratégiák dinamikusan súlyozott érdemszámok alapján | 217 |
| <i>Kertész Viktor</i> : Indefinit kvadratikus Ljapunov-függvény alkalmazása stabilitási vizsgálatokhoz | 307 |
| <i>Kertész Viktor</i> : A csillapított rezgőmozgás differenciálegyenletének stabilitási vizsgálata ... | 323 |
| <i>Kontor Istvánné</i> : Az érintőhiperbolákkal generált mindig konvergens egyenletmegoldó iterációról | 141 |
| <i>Kuba Attila</i> : Rekonstrukció lineárisan torzított vetületekből | 381 |
| <i>Páztorné Varga Katalin és Petroszjan Asot Vezirovics</i> : Boole-függvények egy problémaorientált kiterjesztéséről | 297 |
| <i>Petroszjan Asot Vezirovics és Páztorné Varga Katalin</i> : Boole-függvények egy problémaorientált kiterjesztéséről | 297 |
| <i>Rapcsák Tamás</i> : Minimális súlyú rácsos tartók méretezése dekompozíciós módszerrel | 237 |
| <i>Schmidt E. Tamás</i> : Megjegyzések a relációs adatbázis modellekben értelmezett függőségi relációkhoz | 177 |
| <i>Soós Zsolt</i> : Egy új, szimplexfelbontáson alapuló algoritmus stacionárius pont meghatározására | 229 |
| <i>Steffler Miklós</i> : Független 0-rendszer egzisztenciája véletlen mátrixokban | 247 |
| <i>Sztrik János és Tomkó József</i> : Multiprogramozás inhomogén programokkal | 285 |
| <i>Tomkó József</i> : Tartózkodási időproblémák Markov-láncokra | 91 |
| <i>Tomkó József és Csige László</i> : A gépkiszolgálási probléma exponenciális eloszlások esetén .. | 107 |
| <i>Tomkó József és Sztrik János</i> : Multiprogramozás inhomogén programokkal | 285 |
| <i>A külföldi szakirodalomból</i> | |
| <i>May, R. M.</i> : Nagyon bonyolult dinamikájú egyszerű matematikai modellek | 427 |
| <i>Könyvismertetés</i> | 215 |

INDEX

| | |
|--|-----|
| <i>Baranyi, L.</i> , Numerical evaluation of improper integrals | 393 |
| <i>Beck, Gy.</i> , Fast algorithm for the solution of linear equations by banded Toeplitz-matrix . | 157 |
| <i>Bene, B.</i> , Graph generation systems and languages | 251 |
| <i>Bernau, H.</i> , On determination of more than one solution of the linear complementarity problem | 195 |
| <i>Bolla, M.</i> , The QPRS transformation: The generalization of the QR algorithm for singular values decomposition of rectangular real matrices | 125 |
| <i>Csige, L. and Tomkó, J.</i> , The mashine interference for exponentially distributed operating and repair times | 107 |
| <i>Csörgő, S. and Horváth, L.</i> , Statistical inference from censored samples | 1 |
| <i>Demetrovics, J. and Katona, Gy.</i> , Extremal problems of the relational databases | 183 |
| <i>Faragó, I.</i> , Finite element method for solving elliptic problems | 399 |
| <i>Hegedüs, G.</i> , Extremal algebra | 341 |
| <i>Horváth, L. and Csörgő, S.</i> , Statistical inference from censored samples | 1 |
| <i>Katona, Gy. and Demetrovics, J.</i> , Extremal problems of the relational databases | 183 |
| <i>Kéri, G.</i> , Reversion strategies with dynamically weighted merit numbers | 217 |
| <i>Kertész, V.</i> , Stability investigations by indefinite Lyapunov functions | 307 |
| <i>Kertész, V.</i> , Stability investigation of the differential equation of damped oscillation | 323 |
| <i>Kontor, I.</i> , Über das Berührungshyperbel-Verfahren zur Bestimmung reelle Wurzeln von nichtlinearen Gleichungen | 141 |
| <i>Kuba, A.</i> , Reconstruction from linearly distorted projections | 381 |
| <i>Pásztor, K. and Petroszjan, A. V.</i> , Some problems of a problemoriented expansion of Boolean functions | 297 |
| <i>Petroszjan, A. V. and Pásztor, K.</i> , Some problems of a problemoriented expansion of Boolean functions | 297 |
| <i>Rapcsák, T.</i> , A decomposition method for minimum weight structural design | 238 |
| <i>Schmidt, E. T.</i> , Remarks on dependence relations in relational database models | 177 |
| <i>Soós, Zs.</i> , A stationary point computing algorithm based on simplicial subdivision | 229 |
| <i>Steffler, M.</i> , Existence of independent 0-set in random matrices | 247 |
| <i>Sztrik, J. and Tomkó, J.</i> , Multiprogramming with inhomogeneous programs | 285 |
| <i>Tomkó, J.</i> , Sojourn time problems for Markov Chains | 91 |
| <i>Tomkó, J. and Csige, L.</i> , The mashine interference for exponentially distributed operating and repair times | 107 |
| <i>Tomkó, J. and Sztrik, J.</i> , Multiprogramming with inhomogeneous programs | 285 |
| <i>From the foreign literature</i> | |
| <i>May, R. M.</i> , Simple mathematical models with very complicated dynamics | 427 |
| <i>Book reviews</i> | 215 |



ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI
TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ

PRÉKOPA ANDRÁS

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTES

ARATÓ MÁTYÁS

A SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG TAGJAI

BENCZUR ANDRÁS, CSISZÁR IMRE, FARKAS MIKLÓS, GYIRES BÉLA,
HATVANI LÁSZLÓ, HEPPES ALADÁR, KÁTAI IMRE, KIS OTTÓ,
SARKADI KÁROLY, TANDORI KÁROLY, VARGA LÁSZLÓ,
SZÁNTAI TAMÁS (Technikai szerkesztő)

MUNKATÁRSÁK

BAJCSAY PÁL, BALLA KATALIN, BÉKÉSSY ANDRÁS, CSÁKI PÉTER,
CSIRIK JÁNOS, DEMETROVICS JÁNOS, DÉNES JÓZSEF, DÖMÖLKI BÁLINT,
ELBERT ÁRPÁD, FORGÓ FERENC, GÉCSEG FERENC, GERGELY JÓZSEF,
GESZTELYI ERNŐ, GYÖRFFY LÁSZLÓ, KLAFSZKY EMIL, KÓSA ANDRÁS,
KOVÁCS LÁSZLÓ BÉLA, LÁSZLÓ ZOLTÁN, MIKOLÁS MIKLÓS,
MOGYORÓDI JÓZSEF, NÉMETH GÉZA, NEMETZ TIBOR, RÉVÉSZ PÁL, RÓZSA PÁL,
STAHL JÁNOS, SZÉP JENŐ, TANKÓ JÓZSEF, TOMKÓ JÓZSEF, TŐKE PÁL,
TUSNÁDY GÁBOR, VINCZE ENDRE

VIII. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1982

ÜTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban kell beküldeni.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnél tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámmal kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell hogy legyen, és azt nem kell sorszámmal ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezésekképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé irt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segédteteleket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődő, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy czekek, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozat ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzékként feltüntetett, ábraazonosító sorszámmal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve társszerzők esetén az első szerző neve szerinti alfabetikus sorrendben úgy, hogy külön, de folytatólagos sorszámozású listát alkossanak a latin és a cirill betűs nevű szerzők műveire vonatkozó hivatkozások, és mindkét részben a megfelelő alfabetikus sorrend legyen kialakítva. A folyóiratban megjelent cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

- [1] Farkas, J., »Über die Theorie der einfachen Ungleichungen«, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 124 (1902) 1—27.
- [2] Kéri, G., „DUALSIMP”, rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19—20.
- [3] Prékopa, A., „Sztóhasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról”, doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.
- [4] Prabhu, N. U., “Recent research on the ruin problem of collective risk theory”, in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam—London, 1973) 221—228.
- [5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számaait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76—78]. A szerzők a dolgozatukról 100 darab különlenyomatot kapnak, ezek költsége — nyomott oldalanként 25 forint — a szerzői díjat terheli.

TARTALOMJEGYZÉK

Kéri Gerzson: Újrainvertálási stratégiák dinamikusan súlyozott érdemszámok alapján 217
Soós Zsolt: Egy új, szimplexfelbontáson alapuló algoritmus stacionárius pont meghatározására 229
Rapcsák Tamás: Minimális súlyú rácsos tartók méretezése dekompozíciós módszerrel 237
Steffler Miklós: Független 0-rendszer egzisztenciája véletlen mátrixokban 247
Bene Béla: Gráfgenerátor-rendszerek és nyelvek néhány elméleti kérdése és alkalmazási lehetőségei a számítógépes kutatásban 251
Sztrik János és Tomkó József: Multiprogramozás inhomogén programokkal 285
Pásztorné Varga Katalin és Petroszjan Asot Vezirovics: Boole-függvények egy problémaorientált kiterjesztéséről 297
Kertész Viktor: Indefinit kvadratikus Ljapunov-függvény alkalmazása stabilitási vizsgálatokhoz 307
Kertész Viktor: A csillapított rezgőmozgás differenciálegyenletének stabilitási vizsgálata . . . 323
Hegedüs Gábor: Extremális algebra 341
Kuba Attila: Rekonstrukció lineárisan torzított vetületekből 381
Baranyi László: Improprius integrálok numerikus kiszámítása 393
Faragó István: Véges elemek módszere elliptikus típusú feladatok megoldására 399

A külföldi szakirodalomból
May, R. M.: Nagyon bonyolult dinamikájú egyszerű matematikai modellek 427

INDEX

Kéri, G., Reversion strategies with dynamically weighted merit numbers 217
Soós, Zs., A stationary point computing algorithm based on simplicial subdivision 229
Rapcsák, T., A decomposition method for minimum weight structural design 237
Steffler, M., Existence of independent 0-set in random matrices 247
Bene, B., Graph generation systems and languages 251
Sztrik, J. and Tomkó, J., Multiprogramming with inhomogeneous programs 285
Pásztor, K. and Petroszjan, A. V., Some problems of a problem-oriented expansion of Boolean functions 297
Kertész, V., Stability investigations by indefinite Lyapunov functions 307
Kertész, V., Stability investigation of the differential equation of damped oscillation 323
Hegedüs, G., Extremal algebra 341
Kuba, A., Reconstruction from linearly distorted projections 381
Baranyi, L., Numerical evaluation of improper integrals 393
Faragó, I., Finite element method for solving elliptic problems 399

From the foreign literature
May, R. M., Simple mathematical models with very complicated dynamics 427